6

NOTES D'ALGÈBRE

SUR LA

THÉORIE DES FORMES

ET LA

THÉORIE DES ÉQUATIONS,

PAR M. CH. BIEHLER,

DOCTEUR ÈS SCIENCES,

DIRECTEUR DE L'ÉCOLE PRÉPARATOIRE DU COLLÈGE STANISLAS.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1887

Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. VI;
Janvier et Février 1887.

SUR LA

THÉORIE DES FORMES

ET LA

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

SUR LA FORME ADJOINTE.

1. Nous allons, dans ce qui suit, donner une démonstration simple de quelques propriétés de la fonction adjointe d'une forme quadratique donnée; pour plus de simplicité, nous considérerons le cas d'une forme du second degré à trois variables.

Soit

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

Si l'on pose

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} Ax + B''y + B'z &= u, \\ B''x + A'y + Bz &= v, \\ B'x + By + A''z &= w, \end{aligned} \right.$$

on aura, en vertu du théorème d'Euler,

$$ux + vy + wz = f(x, y, z).$$

Ces quatre équations nous donnent immédiatement

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & u \\ B'' & A' & B & v \\ B' & B & A'' & w \\ u & v & w & f \end{vmatrix} = 0$$

ou bien

$$\Delta f = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & u \\ B'' & A' & B & v \\ B' & B & A'' & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix},$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}.$$

Si l'on développe le second membre de l'égalité précédente, il viendra une expression de la forme

$$\begin{aligned} &\Delta f(x, y, z) \\ &\quad = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'uw + 2b''uv. \end{aligned}$$

Nous désignerons par $F(u, v, w)$ ce polynôme du second degré; c'est la forme adjointe de $f(x, y, z)$. Ses coefficients sont les dérivées et demi-dérivées de Δ prises par rapport à A, A', A'', B, B', B''.

Si l'on résout les équations (1) par rapport à x, y, z, on obtient le système

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta x = au + b''v + b'w, \\ \Delta y = b''u + a'v + bw, \\ \Delta z = b'u + bv + a''w. \end{cases}$$

Les coefficients a, a', a'', b, b', b'' sont précisément ceux de la fonction adjointe, comme on le vérifie encore en multipliant ces équations par u, v, w et en ajoutant membre à membre.

2. Si l'on opère maintenant sur $F(u, v, w)$, comme nous l'avons fait sur $f(x, y, z)$, c'est-à-dire si l'on forme la fonction adjointe de $F(u, v, w)$, on posera d'abord

$$(3)\qquad \begin{cases} au + b''v + b'w = \xi, \\ b''u + a'v + bw = \eta, \\ b'u + bv + a''w = \zeta; \end{cases}$$

on a aussi

$$u + \eta v + \zeta w = F;$$

il en résulte

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & \xi \\ b'' & a' & b & \eta \\ b' & b & a'' & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & F \end{vmatrix} = 0,$$

et, si l'on désigne par δ le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix},$$

on aura

$$\delta F = \begin{vmatrix} a & b'' & b' & \xi \\ b'' & a' & b & \eta \\ b' & b & a'' & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix}.$$

Soit $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ la fonction du second membre; nous aurons

$$\delta\, F(u, v, w) = \Phi(\xi, \eta, \zeta).$$

Mais les équations (3), comparées aux équations (2), nous montrent que

$$\xi = \Delta x,$$
$$\eta = \Delta y,$$
$$\zeta = \Delta z;$$

on aura donc

$$\Delta f(x, y, z) = F(u, v, w),$$
$$\delta\, F(u, v, w) = \Phi(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \Delta^2 \Phi(x, y, z).$$

Si l'on élimine $F(u, v, w)$, il viendra

$$\Delta\delta\, f(x, y, z) = \Delta^2 \Phi(x, y, z)$$

et, comme δ est le déterminant adjoint de Δ, on aura

$$\delta = \Delta^2,$$

par suite

$$\Phi(x, y, z) = \Delta f(x, y, z).$$

La forme adjointe de $F(u, v, w)$ est donc la forme primitive $f(x, y, z)$ dont tous les coefficients ont été multipliés par Δ.

Les coefficients de la fonction Φ sont formés avec les quantités $a, a', a'', b. b', b''$, comme ceux de F sont formés avec A, A', A'', B. B'. B''; par suite, on aura, en vertu de la relation $\Phi(x, y, z) = \Delta f(x, y, z)$,

$$\begin{aligned}
a'a'' - b^2 &= A\Delta,\\
a''a - b'^2 &= A'\Delta,\\
aa' - b''^2 &= A''\Delta,\\
ab - b'b'' &= B\Delta,\\
a'b' - b''b &= B'\Delta,\\
a''b'' - bb' &= B''\Delta.
\end{aligned}$$

Ce sont les relations de Gauss; elles nous montrent que, si l'invariant de la fonction $f(x, y, z)$ est nul, la forme adjointe $F(u, v, w)$ est un carré parfait.

SUR L'ÉLIMINATION PAR LA MÉTHODE D'EULER

1. On sait que, si $F(x,y)$ et $G(x, y)$ sont deux polynômes homogènes en x et y, de degrés respectifs m et p, si $\Delta(x,y)$ est le plus grand commun diviseur de ces deux polynômes, $\Delta(x,y)$ est de la forme

$$\Delta(x, y) = U\,G(x, y) + V\,F(x, y),$$

U et V étant des polynômes entiers et homogènes en x et y.

On le voit immédiatement en observant que les restes successifs obtenus dans les opérations qui conduisent au plus grand commun diviseur Δ sont tous de cette forme.

Cela posé, on démontre aisément que, si $F(x,y)$ divise un produit de deux polynômes $G(x,y) \times H(x,y)$ et s'il est premier avec $G(x,y)$, il divise $H(x,y)$; les polynômes F, G et H sont homogènes.

En effet, les deux polynômes $F(x,y)$ et $G(x,y)$ étant premiers entre eux, on pourra trouver deux polynômes U et V, tels que

$$U\,G(x, y) + V\,F(x, y) = 1\,;$$

par suite,

$$U\,G(x, y) \times H(x, y) + V\,F(x, y) \times H(x, y) = H(x, y).$$

$F(x,y)$ divise, par hypothèse, le produit

$$G(x, y) \times H(x, y);$$

il divise donc les deux parties du premier membre et par suite il divise $H(x, y)$.

Cette proposition va nous permettre de démontrer le théorème d'Euler, à savoir :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux polynômes $F(x, y)$, $G(x, y)$ homogènes aient un diviseur commun en x et y, c'est qu'il existe deux polynômes U et V de degrés respectivement moindres que F et G, tels que l'on ait identiquement

$$U\,G(x, y) + V\,F(x, y) = 0.$$

La condition est nécessaire; car, si $F(x, y)$ et $G(x, y)$ ont un diviseur commun Θ, on aura

$$F(x, y) = \Theta F_1(x, y),$$
$$G(x, y) = \Theta G_1(x, y)$$

et, par suite,

$$F_1(x, y)\,G(x, y) - G_1(x, y)\,F(x, y) = 0,$$

ce qui fait voir que la condition est nécessaire.

Elle est suffisante ; car, si elle est remplie, on aura

$$U\,G(x, y) = -V\,F(x, y).$$

Si $F(x, y)$ et $G(x, y)$ étaient premiers entre eux, $F(x, y)$ divisant le produit $U\,G(x, y)$ et étant premier avec $G(x, y)$ devrait diviser U qui est de degré inférieur à F; les polynômes $F(x, y)$ et $G(x, y)$ ne pouvant être premiers entre eux admettent un plus grand commun diviseur de degré supérieur à zéro.

On peut montrer de plus que, si U et V sont respectivement de degrés $m - \lambda$ et $p - \lambda$, les fonctions $F(x, y)$, $G(x, y)$ admettent un plus grand commun diviseur qui est de degré λ au moins.

Supposons, en effet, que le facteur commun à $F(x, y)$

et à $G(x, y)$ soit de degré λ' plus petit que λ,

$$F(x, y) = \theta F_1(x, y),$$
$$G(x, y) = \theta G_1(x, y).$$

$F_1(x, y)$ sera de degré $m - \lambda'$; $G_1(x, y)$, de degré $p - \lambda'$, et l'on aura

$$U G_1(x, y) + V F_1(x, y) = 0;$$

U et V étant de degrés respectivement inférieurs à F_1 et à G_1, les polynômes F_1 et G_1 ne sauraient être premiers entre eux; il existe donc un facteur commun à $F(x, y)$ et à $G(x, y)$ de degré au moins égal à λ.

2. Nous allons étudier maintenant quelques propriétés des polynômes U et V qui nous seront utiles dans la suite.

1. *Si les polynômes* $F(x, y)$, $G(x, y)$ *n'admettent pour plus grand commun diviseur qu'une fonction du premier degré* $\beta x - \alpha y$, *les polynômes* U *et* V, *qui fournissent l'identité d'Euler, sont premiers entre eux,* U *et* V *étant de degrés* $m - 1$, $p - 1$.

En effet, si U et V admettaient un facteur commun Θ, on aurait

$$U = \theta U_1,$$
$$V = \theta V_1,$$

et, par suite, l'identité

$$U G(x, y) + V F(x, y) = 0,$$

devenant

$$U_1 G(x, y) + V_1 F(x, y) = 0,$$

nous montre que $F(x, y)$ et $G(x, y)$ admettent un plus grand commun diviseur de degré supérieur au premier, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur F et G.

II. *Si les deux polynômes* $F(x, y)$, $G(x, y)$ *n'admettent pour plus grand commun diviseur qu'une fonction du premier degré de la forme* $\beta x - \alpha y$, *il n'existe qu'un seul système de polynômes* U *et* V *satisfaisant à l'identité d'Euler*, U *et* V *étant, comme précédemment, de degrés* $m - 1$ *et* $p - 1$.

Supposons, en effet, qu'il existe deux systèmes U et V, U_1 et V_1 donnant les identités

$$U\, G(x, y) + V\, F(x, y) = 0,$$
$$U_1 G(x, y) + V_1 F(x, y) = 0\,;$$

on en tirera

$$(UV_1 - VU_1)\, G(x, y) = 0$$

ou

$$UV_1 - VU_1 = 0.$$

Les polynômes U et V, d'après le théorème précédent, sont premiers entre eux; par suite, U doit diviser U_1 et l'on a

$$U = \lambda U_1\,;$$

d'où

$$V = \lambda V_1,$$

λ étant une constante : le système (U_1, V_1) est donc identique au système (U, V).

III. *S'il existe plus d'un système de polynômes* U *et* V *de degrés* $m - 1$ *et* $p - 1$ *satisfaisant à l'identité d'Euler, les polynômes* $F(x, y)$, $G(x, y)$ *admettent un plus grand commun diviseur de degré supérieur à un.*

Cela résulte immédiatement du théorème précédent, car U et V ne sauraient dans ce cas être premiers entre eux, à cause de l'égalité

$$UV_1 - VU_1 = 0,$$

qui nous ferait voir que les deux systèmes (U, V), (U_1, V_1) rentrent dans un seul. U et V admettant un plus grand commun diviseur Θ, qui est au moins du premier degré, on a

$$U = \Theta U_2,$$
$$V = \Theta V_2,$$

et l'identité

$$U_2 G(x, y) + V_2 F(x, y) = 0$$

nous montre que $F(x, y)$ et $G(x, y)$ admettent un plus grand commun diviseur de degré supérieur à un.

IV. *S'il n'existe qu'un seul système de polynômes* U *et* V *de degrés respectifs* $m-1$ *et* $p-1$, *qui donnent l'identité d'Euler, les polynômes* $F(x, y)$, $G(x, y)$ *n'admettent qu'un facteur linéaire commun.*

Cette proposition est une conséquence immédiate des précédentes ; car, si les polynômes $F(x, y)$, $G(x, y)$ admettaient un plus grand commun diviseur de degré λ, λ étant plus grand que un, on aurait

$$F(x, y) = \Theta F_1(x, y),$$
$$G(x, y) = \Theta G_1(x, y),$$

et, par suite,

$$F_1(x, y)\, G(x, y) - G_1(x, y)\, F(x, y) = 0.$$

En multipliant les deux membres par un polynôme arbitraire Φ de degré $\lambda - 1$, on obtiendrait une infinité de fonctions de degrés $m-1$ et $p-1$, à savoir

$$\Phi F_1(x, y) \quad \text{et} \quad \Phi G_1(x, y),$$

qui satisferaient à l'identité d'Euler, ce qui est contraire à l'hypothèse.

3. Cherchons maintenant en fonction des coefficients de $F(x, y)$ et de $G(x, y)$ la condition nécessaire et suffisante pour que les polynômes $F(x, y)$ et $G(x, y)$ aient un facteur commun.

Il faudra, d'après ce qui précède, qu'en posant

$$U = \alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} y + \ldots + \alpha_{m-1} y^{m-1},$$
$$V = \beta_0 x^{p-1} + \beta_1 x^{p-2} y + \ldots + \beta_{p-1} y^{p-1},$$

on ait identiquement, pour des valeurs convenables des coefficients α et β,

$$U\,G(x, y) + V\,F(x, y) = 0.$$

Si

$$F(x, y) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} y + \ldots + A_m y^m,$$
$$G(x, y) = B_0 x^p + B_1 x^{p-1} y + \ldots + B_p y^p;$$

en égalant à zéro les coefficients de $x^{m+p-1}, x^{m+p-2}y, \ldots, y^{m+p-1}$, on aura les équations

$$\begin{aligned}
&B_0\alpha_0 \qquad\quad + A_0\beta_0 &&= 0,\\
&B_1\alpha_0 + B_0\alpha_1 + A_1\beta_0 + A_0\beta_1 &&= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\qquad\quad B_p\alpha_{m-1} \qquad + A_m\beta_{p-1} &&= 0.
\end{aligned}$$

Ces équations, au nombre de $m+p$, sont linéaires et homogènes par rapport aux $m+p$ inconnues $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{p-1}$.

Elles doivent admettre pour ces quantités des valeurs qui ne sont pas toutes nulles; il faut par suite que le déterminant d'ordre $m+p$ de leurs coefficients soit égal à zéro. Soit Δ ce déterminant,

$$\Delta = \begin{vmatrix} B_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & A_0 & 0 & \ldots & 0 \\ B_1 & B_0 & 0 & \ldots & . & A_1 & A_0 & \ldots & 0 \\ .. & .. & . & \ldots & . & .. & .. & \ldots & . \\ 0 & .. & . & \ldots & B_p & 0 & .. & \ldots & A_m \end{vmatrix}.$$

$\Delta = 0$ est la condition nécessaire pour que les deux fonctions $F(x, y)$, $G(x, y)$ aient un facteur commun au moins du premier degré.

Je vais démontrer que cette condition est dans tous les cas suffisante.

Supposons que $\Delta = 0$ et que l'un des déterminants d'ordre $m+p-1$, mineur de Δ, ne soit pas nul. On pourra donner à l'une des inconnues $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{p-1}$ une valeur arbitraire et choisir $m+p-1$ des équations, de telle sorte que le déterminant des inconnues qui y figurent ne soit pas nul ; ce sera le mineur que nous avons supposé différent de zéro ; les équations déterminent pour les $m+p-1$ inconnues qui y figurent des valeurs de la forme

$$\begin{array}{ll}
\alpha_0 = \lambda_0 \alpha, & \beta_0 = \mu_0 \alpha, \\
\alpha_1 = \lambda_1 \alpha, & \beta_1 = \mu_1 \alpha, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\
\alpha_{m-1} = \lambda_{m-1} \alpha, & \beta_{p-1} = \mu_{p-1} \alpha,
\end{array}$$

où α désigne la valeur de l'inconnue choisie arbitrairement et $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{p-1}$ des quantités parfaitement déterminées qui ne sont pas toutes nulles, l'une d'elles étant égale à l'unité.

Les fonctions U et V sont donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{U} &= \alpha(\lambda_0 x^{m-1} + \lambda_1 x^{m-1} y + \ldots + \lambda_{m-1} y^{m-1}), \\
\mathrm{V} &= \alpha(\mu_0 x^{p-1} + \mu_1 x^{p-1} y + \ldots + \mu_{p-1} y^{p-1});
\end{aligned}$$

abstraction faite du facteur α, elles donnent le système unique de fonctions de degrés $m-1$ et $p-1$ satisfaisant à l'identité

$$\mathrm{U}\,\mathrm{G}(x, y) + \mathrm{V}\,\mathrm{F}(x, y) = 0.$$

La solution précédente étant la plus générale pour les quantités $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$, il s'ensuit que, si un mineur d'ordre $m+p-1$ de Δ est différent de zéro, il n'existe qu'un seul système de polynômes d'ordre $m-1$ et $p-1$ donnant l'identité d'Euler, et, par suite, d'après les théorèmes précédents, les deux fonctions $\mathrm{F}(x, y)$ et $\mathrm{G}(x, y)$ admettent pour plus grand commun diviseur une fonction du premier degré seulement.

Ce qui précède montre évidemment que les fonctions U et V sont effectivement de degrés $m - 1$ et $p - 1$; car λ_0 et μ_0 ne sauraient être nuls, les polynômes U et V s'abaisseraient aux degrés $m - 2$ et $p - 2$ au moins, et, en les multipliant par un polynôme arbitraire du premier degré, on obtiendrait une infinité de fonctions U et V de degrés $m - 1$ et $p - 1$ qui satisferaient à l'identité d'Euler, ce qui n'est pas possible d'après ce qui précède.

On voit donc que, si $\Delta = 0$ et si un mineur d'ordre $m + p - 1$ de Δ est différent de zéro, les deux fonctions $F(x, y)$ et $G(x, y)$ admettent pour plus grand commun diviseur une fonction qui n'est que du premier degré.

Si tous les déterminants d'ordre $m + p - 1$, mineurs de Δ, sont nuls, et si un déterminant d'ordre $m + p - 2$, mineur de Δ, n'est pas nul, la solution la plus générale du système des équations en $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_0, \beta_1 \ldots$ est de la forme

$$\begin{array}{ll}
\alpha_0 = \lambda_0 \alpha + \lambda'_0 \alpha', & \beta_0 = \mu_0 \alpha + \mu'_0 \alpha', \\
\alpha_1 = \lambda_1 \alpha + \lambda'_1 \alpha', & \beta_1 = \mu_1 \alpha + \mu'_1 \alpha', \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\alpha_{m-1} = \lambda_{m-1} \alpha + \lambda'_{m-1} \alpha'; & \beta_{p-1} = \mu_{p-1} \alpha + \mu'_{p-1} \alpha',
\end{array}$$

où α et α' sont des arbitraires, $\lambda_0, \ldots, \lambda'_0, \ldots, \mu_0, \ldots, \mu'_0, \ldots$ des quantités parfaitement déterminées, qui ne sont pas toutes nulles.

Dans ce cas, les fonctions U et V prennent la forme

$$U = \alpha U_1 + \alpha' U'_1,$$
$$V = \alpha V_1 + \alpha' V'_1,$$

U_1, U'_1, V_1, V'_1 étant des polynômes bien déterminés.

Il existe, dans ce cas, une infinité de fonctions U et V qui donnent l'identité d'Euler; par suite, d'après ce qui précède, $F(x, y)$ et $G(x, y)$ ont un plus grand commun diviseur, qui est au moins du deuxième degré.

On voit que U et V sont en nombre infini; car U_1 et V_1 ne peuvent pas être identiquement nuls à la fois, pas plus que U'_1 et V'_1, puisque, dans l'expression de $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_0, \beta_1, \ldots$, un coefficient de α est égal à l'unité, ainsi qu'un coefficient de α'.

On voit donc que, si $\Delta = 0$ *et si tous les mineurs d'ordre* $m + p - 1$ *de* Δ *sont nuls, les fonctions* $F(x, y)$, $G(x, y)$ *admettent un facteur commun qui est au moins du second degré.*

Il en serait de même si l'ordre du premier des mineurs qui ne s'annule pas s'abaissait au-dessous de l'ordre $m + p - 2$.

SUR LA LIMITE DE $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ QUAND m AUGMENTE INDÉFINIMENT;

1. Nous supposerons dans ce qui suit que m est entier et positif et nous considérerons d'abord le cas où x est réel et positif. Tant que m est fini, on peut écrire

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1+\frac{x}{1}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x}{1.2} \\ +\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots \\ +\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{x^m}{m!}.\end{aligned}$$

On sait que, si $a, b, c, \ldots, l$ sont des nombres positifs moindres que l'unité, on a les inégalités

$$1>(1-a)(1-b)\ldots(1-l)>1-(a+b+\ldots+l),$$

et, en appliquant ce théorème aux quantités $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots,$ on aura, pour toute valeur de p inférieure à m,

$$1>\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)>1-\frac{p(p-1)}{2m}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\frac{x^p}{p!}>\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)\frac{x^p}{p!} \\ >\frac{x^p}{p!}-\frac{x^2}{2m}\frac{x^{p-2}}{(p-2)!}.\end{aligned}$$

On peut donc former le tableau suivant :

$$\frac{x^2}{2!} > \left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{2!} = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^2}{2m},$$

$$\frac{x^3}{3!} > \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\frac{x^3}{3!} > \frac{x^3}{3!} - \frac{x^2}{2m}\frac{x}{1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{x^m}{m!} > \left(1 - \frac{1}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{m}\right)\frac{x^m}{m!} > \frac{x^m}{m!} - \frac{x^2}{2m}\frac{x^{m-2}}{(m-2)!}.$$

En ajoutant membre à membre ces inégalités, après avoir ajouté à tous les membres la quantité $1 + \frac{x}{1}$, et en posant, pour abréger,

$$e_m(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{x^m}{m!},$$

il viendra

$$e_m(x) > \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m > e_m(x) - \frac{x^2}{2m}\, e_{m-2}(x);$$

la fonction $e_m(x)$ a pour limite, quand m croît indéfiniment, la série convergente

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{x^m}{m!} + \dots,$$

que nous désignerons par $e(x)$.

Les inégalités précédentes nous montrent que

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

est compris entre deux quantités

$$e_m(x) \quad \text{et} \quad e_m(x) - \frac{x^2}{2m}\, e_{m-2}(x),$$

qui ont toutes deux pour limite $e(x)$ quand m augmente indéfiniment ; par suite,

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

a aussi pour limite $e(x)$.

2. Supposons maintenant que x soit une quantité quelconque négative ou imaginaire; nous allons démontrer que $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ a encore pour limite $e(x)$.

A cet effet, formons la différence

$$e_m(x)-\left(1+\frac{x}{m}\right)^m.$$

Nous allons montrer que le module de cette différence peut devenir plus petit que toute quantité donnée quand m croît indéfiniment. On a évidemment

$$\begin{aligned}
&e_m(x)-\left(1+\frac{x}{m}\right)^m \\
&\quad=\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)\right]\frac{x^2}{1.2}+\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\right]\frac{x^3}{3!}+\ldots \\
&\qquad+\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\right]\frac{x^m}{m!};
\end{aligned}$$

si l'on désigne par r le module de x, le module du second membre étant inférieur à la somme des modules de ses termes, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{mod}\left[e_m(x)-\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\right]&<\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)\right]\frac{r^2}{1.2} \\
&+\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\right]\frac{r^3}{1.2.3}+\ldots \\
&+\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\right]\frac{r^m}{m!}
\end{aligned}$$

ou bien

$$\operatorname{mod}\left[e_m(x)-\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\right]<e_m(r)-\left(1+\frac{r}{m}\right)^m.$$

Or nous avons démontré que, pour toute valeur de r positive,

$$e_m(r)>\left(1+\frac{r}{m}\right)^m>e_m(r)-\frac{r^2}{2m}e_{m-2}(r);$$

si l'on retranche les trois membres de cette double inégalité de la même quantité $e_m(r)$, il viendra

$$0 < e_m(r) - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m < \frac{r^2}{2m}\, e_{m-2}(r).$$

La différence $e_m(r) - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$ est donc comprise entre zéro et une quantité qui a pour limite zéro; par suite, le module de $e_m(x) - \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ peut devenir plus petit que toute quantité donnée quand m augmente indéfiniment. On en conclut que

$$\lim \left[e_m(x) - \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m\right] = 0,$$

par suite

$$\lim \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e(x);$$

la proposition est donc démontrée pour toute valeur réelle ou imaginaire de la variable x.

3. Nous allons établir maintenant que, si α et α' sont des quantités réelles ou imaginaires, on a

$$\lim \left(1 + \frac{\alpha}{m} + \frac{\alpha'}{m'}\right)^m = \lim \left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^m \qquad \text{pour } m = \infty,$$

pourvu que le rapport $\frac{m}{m'}$ ait pour limite zéro, quand m augmente indéfiniment.

En effet, on a identiquement

$$\begin{aligned}&\left(1 + \frac{\alpha}{m} + \frac{\alpha'}{m'}\right)^m - \left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^m \\ &\quad = \frac{\alpha'}{m'}\left[\left(1 + \frac{\alpha}{m} + \frac{\alpha'}{m'}\right)^{m-1}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \left(1 + \frac{\alpha}{m} + \frac{\alpha'}{m'}\right)^{m-2}\left(1 + \frac{\alpha}{m}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^{m-1}\right],\end{aligned}$$

d'où

$$\operatorname{mod}\left[\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m-\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m\right]$$
$$<\operatorname{mod}\frac{\alpha'}{m'}\left[\operatorname{mod}\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^{m-1}\right.$$
$$+\operatorname{mod}\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^{m-2}\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)+\ldots$$
$$\left.+\operatorname{mod}\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^{m-1}\right].$$

Nous allons démontrer que le module de la différence

$$\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m-\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m$$

tend vers zéro quand m augmente indéfiniment.

Soient r le module de α; r' celui de α', on aura

$$\operatorname{mod}\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)<1+\frac{r}{m},$$
$$\operatorname{mod}\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)<1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'};$$

par suite,

$$\operatorname{mod}\left[\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m-\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m\right]$$
$$<\frac{r'}{m'}\left[\left(1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'}\right)^{m-1}+\ldots+\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m-1}\right]$$

et, *a fortiori*,

$$\operatorname{mod}\left[\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m-\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m\right]$$
$$<\frac{r'}{m'}\times m\left(1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'}\right)^{m-1}.$$

Mais, par hypothèse, $\frac{m}{m'}$ a pour limite zéro; on a donc

$$1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'}<1+\frac{r+r'}{m},$$

d'où

$$\left(1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'}\right)^{m-1}<\left(1+\frac{r+r'}{m}\right)^{m-1}$$

et, par suite aussi,

$$\left(1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'}\right)^{m-1}<\left(1+\frac{r+r'}{m}\right)^{m}$$

et

$$\left(1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'}\right)^{m-1}<e(r+r').$$

On a donc

$$\operatorname{mod}\left[\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^{m}-\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^{m}\right]<\frac{m}{m'}r'\times e(r+r');$$

or $\frac{m}{m'}$, par hypothèse, a pour limite zéro; $e(r+r')$ est une quantité finie : par suite, le module de la différence

$$\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^{m}-\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^{m}$$

peut devenir plus petit que toute quantité donnée; il s'ensuit que $\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^{m}$ et $\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^{m}$ ont même limite.

Il en serait de même si α' était une fonction de m dont le module tendît vers une limite finie quand m croît indéfiniment.

4. Le théorème précédent nous permet de démontrer une propriété importante de la fonction $e(x)$ pour toute valeur réelle ou imaginaire de la variable.

On a, quels que soient x et y,

$$e(x)\times e(y)=e(x+y).$$

En effet, $e(x)$ pour toute valeur réelle ou imaginaire de x est la limite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}$ quand m croît indéfiniment :

$$e(x)=\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m},$$

$$e(y)=\lim\left(1+\frac{y}{m}\right)^{m};$$

par suite

$$e(x) \times e(y) = \lim \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \left(1 + \frac{y}{m}\right)^m$$

ou

$$e(x) \times e(y) = \lim \left(1 + \frac{x+y}{m} + \frac{xy}{m^2}\right)^m;$$

mais, d'après ce que l'on a démontré, on a

$$\lim \left(1 + \frac{x+y}{m} + \frac{xy}{m^2}\right)^m = \lim \left(1 + \frac{x+y}{m}\right)^m$$

ou

$$\lim \left(1 + \frac{x+y}{m} + \frac{xy}{m^2}\right)^m = e(x+y),$$

par suite

$$e(x) \times e(y) = e(x+y),$$

ce qui est la propriété fondamentale de la fonction $e(x)$ étendue à des valeurs quelconques de la variable.

SUR LE THÉORÈME DE ROLLE;

1. On sait que, si toutes les racines de l'équation dérivée d'une équation algébrique et entière donnée sont *réelles et inégales;* de plus, si, rangées par ordre de grandeur et substituées dans la proposée, elles donnent des résultats de substitution alternativement de signes contraires, toutes les racines de la proposée sont réelles.

Ce théorème est une conséquence immédiate du suivant :

Si les deux plus petites racines réelles de l'équation dérivée, ou les deux plus grandes, substituées dans le premier membre de l'équation proposée, donnent des résultats de substitution de signes contraires, il y a, dans le premier cas, une racine de la proposée entre $-\infty$ *et la plus petite racine de l'équation dérivée, et, dans le deuxième cas, il y a une racine de la proposée entre la plus grande racine de l'équation dérivée et* $+\infty$.

Rappelons en deux mots la démonstration de ce théorème.

Si $f(x)=0$ est l'équation proposée, $f'(x)=0$ l'équation dérivée, α et β les deux plus petites racines de l'équation dérivée, on a, par hypothèse, $f(\alpha)f(\beta)<0$; il y a donc une racine a de la proposée entre α et β, et l'on a pour une valeur de ε suffisamment petite

$$\frac{f(a-\varepsilon)}{f'(a-\varepsilon)}<0$$

et

$$\frac{f(-\infty)}{f'(-\infty)} < 0.$$

Or $f'(a-\varepsilon)$ et $f'(-\infty)$ sont de signes contraires; par suite, $f(a-\varepsilon)$ et $f(-\infty)$ sont aussi de signes contraires; il y a donc une racine de $f(x)=0$ entre a et $-\infty$; elle ne peut être entre a et α : elle est donc entre $-\infty$ et α.

La démonstration serait la même pour les deux plus grandes racines de l'équation dérivée.

2. Proposons-nous d'étendre le théorème au cas où l'équation dérivée n'aurait pas toutes ses racines inégales.

Nous devons tout d'abord écarter le cas où l'équation dérivée aurait des racines multiples que n'admet pas la proposée; car, s'il en était ainsi, la proposée aurait nécessairement des racines imaginaires.

Supposons donc que l'équation dérivée ait toutes ses racines réelles et que ses racines multiples satisfassent toutes à la proposée.

Soient $a, b, \ldots, g$ les racines de la dérivée qui appartiennent à la proposée; $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ leur degré de multiplicité dans la dérivée; soient $a', b', \ldots, l'$ les racines de l'équation dérivée non communes avec la proposée, supposées toutes simples et rangées par ordre de grandeur croissante. Nous allons démontrer la proposition suivante :

Si tous les groupes (a', b'), (b', c'), ..., (k', l'), tels que les deux racines d'un même groupe ne comprennent entre elles aucune des racines $a, b, \ldots, g$, donnent, quand on les substitue dans le premier membre de la proposée, des résultats de substitution alternati-

vement de signes contraires, toutes les racines de la proposée sont réelles.

En effet, soit n le nombre des racines $a, b, \ldots, g$; m le nombre des racines $a', b', \ldots, l'$.

I. Supposons d'abord $a, b, \ldots, g$ toutes comprises entre a' et l' : le nombre de groupes de racines que l'on a à substituer d'après l'énoncé est $(m - 1) - n$; il y a par hypothèse $m - 1 - n$ changements de signes et par suite $m - n - 1$ racines réelles de $f(x) = 0$ qui sont différentes des racines multiples de cette dernière

Il y en a une entre $-\infty$ et a' et une autre entre l' et $+\infty$; car, si a' n'est pas compris entre a' et b', le théorème précédent s'applique sans modification, et, si a est compris entre a' et b', on a toujours, quel que soit le degré de multiplicité de a,

$$\frac{f(a-\varepsilon)}{f'(a-\varepsilon)} < 0, \qquad \frac{f(-\infty)}{f'(-\infty)} < 0;$$

par suite, $f(a-\varepsilon)$ et $f(-\infty)$ sont de signes contraires; la nouvelle racine de $f'(x) = 0$ est comprise entre $-\infty$ et a'; il en est de même pour l'.

L'équation $f(x) = 0$ a donc $m - n + 1$ racines réelles distinctes; elle a aussi

$$(\alpha + 1) + (\beta + 1) + \ldots + (\gamma + 1) = \alpha + \beta + \ldots + \gamma + n$$

racines réelles multiples d'ordre de multiplicité $\alpha + 1$, $\beta + 1, \ldots, \gamma + 1$; elle a donc en tout

$$\alpha + \beta + \ldots + \gamma + m + 1$$

racines réelles; ce nombre représente précisément le degré de l'équation $f(x) = 0$, par suite, toutes les racines de la proposée sont réelles.

II. Supposons que la plus petite racine a du groupe

$a, b, \ldots, g$ soit moindre que a' et que g soit plus petit que l'. Les substitutions donnent alors $(m-1)-(n-1)$ changements de signes et, par conséquent, nous révèlent l'existence de $(m-1)-(n-1)$ racines réelles distinctes de $f(x)=0$; il y a en outre une racine de la même équation entre l' et $+\infty$; en y ajoutant les

$$\alpha+\beta+\ldots+\gamma+n$$

racines multiples, on obtient un total de

$$\alpha+\beta+\ldots+\gamma+m+1,$$

qui est encore le degré de l'équation.

III. Supposons maintenant $a<a'$ et $g>l'$; nous n'aurons plus que $m-1-(n-2)$ groupes à substituer, et par hypothèse tous ces groupes nous donnent autant de changements de signes et par suite $m-n+1$ racines simples de $f(x)=0$; ce nombre, joint au nombre des racines multiples, forme encore une somme égale au degré de l'équation proposée. Il est évident d'ailleurs que les trois hypothèses précédentes sont les seules à examiner; on peut donc dire que, dans tous les cas qui peuvent se présenter et qui sont compatibles avec l'énoncé, l'équation proposée a toutes ses racines réelles.

SUR L'ÉQUATION DE DEGRÉ m QUI DONNE $\operatorname{tang}\frac{a}{m}$ LORSQU'ON CONNAIT $\operatorname{tang} a$;

L'équation de degré m, qui donne $\operatorname{tang}\frac{a}{m}$ lorsqu'on connaît $\operatorname{tang} a$, est, comme on sait,

$$i\alpha = \frac{(1+ix)^m - (1-ix)^m}{(1+ix)^m + (1-ix)^m},$$

en posant $\operatorname{tang}\frac{a}{m} = x$ et $\operatorname{tang} a = \alpha$.

Cette équation, mise sous forme entière, devient

$$(1+ix)^m(1-i\alpha) - (1-ix)^m(1+i\alpha) = 0.$$

Les deux expressions

$$(1+ix)^m(1-i\alpha) \quad \text{et} \quad (1-ix)^m(1+i\alpha)$$

étant imaginaires conjuguées, leur différence renferme i en facteur, et, par suite, en posant

$$(1) \qquad i\mathrm{V}_m = (1+ix)^m(1-i\alpha) - (1-ix)^m(1+i\alpha),$$

le polynôme V_m sera à coefficients réels et de degré m.

Cela posé, nous allons former l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait le polynôme V_m, et nous allons appliquer les théorèmes de Sturm et de Rolle aux polynômes qui figurent dans cette équation, en vue de démontrer que $\mathrm{V}_m = 0$ a toutes ses racines réelles.

1. A cet effet, prenons les dérivées des deux membres de l'égalité (1), il viendra

$$i\mathrm{V}'_m = mi[(1+ix)^{m-1}(1-i\alpha) + (1-ix)^{m-1}(1+i\alpha)]$$

ou

$$(2)\quad V'_m = m[(1+ix)^{m-1}(1-i\alpha)+(1-ix)^{m-1}(1+i\alpha);$$

en dérivant une seconde fois,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} V''_m = m(m-1)\,i[(1+ix)^{m-2}(1-i\alpha) \\ -(1-ix)^{m-2}(1+i\alpha)]. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, en multipliant les deux membres de l'égalité (2), le premier par $2ix$, le second par

$$(1+ix)-(1-ix),$$

qui lui est égal, il viendra

$$\begin{aligned} 2ixV'_m = m[(1+ix)^m(1-i\alpha)-(1-ix)^m(1+i\alpha)] \\ + m[-(1+ix)^{m-1}(1-ix)(1-i\alpha) \\ + (1-ix)^{m-1}(1+ix)(1+i\alpha)], \end{aligned}$$

et, en remplaçant le produit $(1+ix)(1-ix)$ par $i+x^2$, on aura

$$\begin{aligned} 2ixV'_m = miV_m - m(1+x^2) \\ \times [(1+ix)^{m-2}(1-i\alpha)-(1-ix)^{m-2}(1+i\alpha)] \end{aligned}$$

ou

$$2ixV'_m = miV_m - (1+x^2)\frac{V''}{(m-1)i}$$

ou enfin

$$2xV'_m(m-1) = m(m-1)V_m + (1+x^2)V''_m,$$

que l'on peut écrire

$$(4)\quad m(m-1)V_m - 2(m-1)xV'_m + (1+x^2)V''_m = 0.$$

Cette équation va nous permettre de démontrer la réalité de toutes les racines de $V_m = 0$.

2. A cet effet, prenons les dérivées d'ordre μ des deux membres de l'équation (4), il viendra

$$\begin{aligned} m(m-1)V_m^{(\mu)} - 2(m-1)xV_m^{(\mu+1)} - 2\mu(m-1)V_m^{(\mu)} \\ + (1+x^2)V_m^{(\mu+2)} + 2\mu xV_m^{(\mu+1)} + \mu(\mu-1)V^{(\mu)} = 0 \end{aligned}$$

ou bien

$$(m-\mu)(m-\mu-1)V_m^{(\mu)}$$
$$-2(m-\mu-1)xV_m^{(\mu+1)}+(1+x^2)V_m^{(\mu+2)}=0.$$

En donnant à μ les valeurs $0, 1, 2, \ldots, m-2$, il viendra

$$m(m-1)V_m-2(m-1)x\,V'_m+(1+x^2)V''_m=0,$$
$$(m-1)(m-2)V'_m-2(m-2)xV''_m+(1+x^2)V'''_m=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2V_m^{(m-2)}-2xV_m^{(m-1)}+(1+x^2)V_m^{(m)}=0.$$

Ces relations nous montrent que les fonctions V_m, V'_m, $V''_m, \ldots, V_m^{(m)}$ jouissent des propriétés requises pour que le théorème de Sturm puisse leur être appliqué. En effet, la dernière $V_m^{(m)}$ ne change pas de signe, c'est une constante; deux fonctions consécutives ne peuvent pas s'annuler pour une même valeur de x; si une fonction $V_m^{(\mu)}$ s'annule pour une valeur de x, les fonctions $V_m^{(\mu-1)}$ et $V_m^{(\mu+1)}$ prennent pour cette valeur de x des signes contraires; enfin V'_m est la dérivée de V_m. Il s'ensuit que, la suite $V_m, V'_m, \ldots, V_m^{(m)}$ ne présentant que des variations pour $x=-\infty$ et des permanences pour $x=+\infty$, la suite perd m variations quand x passe de $-\infty$ à $+\infty$; par suite, toutes les racines de l'équation $V_m=0$ sont réelles et inégales.

3. Appliquons maintenant le théorème de Rolle pour établir la réalité de toutes les racines de $V_m=0$.

Remarquons, à cet effet, que l'égalité (3) nous donne la relation

$$V''_m=-m(m-1)V_{m-2},$$

V_{m-2} étant ce que devient V_m quand on y remplace m par $m-2$, α restant le même, et supposons que les racines de $V_{m-2}=0$ soient réelles et inégales. Nous allons démontrer qu'il en est de même des racines de $V_m = 0$.

Pour cela, considérons la seconde des équations différentielles du tableau précédent, à savoir :

$$(5)\quad (m-1)(m-2)V'_m - 2(m-2)xV''_m + (1+x^2)V'''_m = 0,$$

déduite de l'équation (4).

Les racines de V_{m-2} étant réelles et inégales et désignées par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-2}$ dans l'ordre croissant, substituons-les dans la relation (5) ; on aura le tableau suivant :

$$(m-1)(m-2)V'_m(\alpha_1) + (1+\alpha_1^2)V'''_m(\alpha_1) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(m-1)(m-2)V'_m(\alpha_{m-2}) + (1+\alpha_{m-2}^2)V'''_m(\alpha_{m-2}) = 0,$$

car $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-2}$ sont racines de l'équation $V'''_m = 0$.

Or, d'après le théorème de Rolle, les quantités

$$V'''_m(\alpha_1),\quad V'''_m(\alpha_2),\quad \ldots,\quad V'''_m(\alpha_{m-2})$$

ne présentent que des variations; il en est donc de même des quantités

$$V'_m(\alpha_1),\quad V'_m(\alpha_2),\quad \ldots,\quad V'_m(\alpha_{m-2}).$$

Mais on sait que, si toutes les racines de l'équation dérivée d'une équation proposée sont réelles et inégales, et si, substituées dans le premier membre de la proposée par ordre de grandeur, elles donnent des résultats de substitutions de signes contraires, toutes les racines de la proposée sont réelles.

Il s'ensuit que toutes les racines de l'équation $V'_m = 0$ sont réelles et inégales.

Soient $b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}$ les $(m-1)$ racines réelles de $V'_{m-1} = 0$; en les substituant dans l'équation (4), on aura

$$m(m-1)V_m(b_1)+(1+b_1^2)V''_m(b_1)=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$m(m-1)V_m(b_{m-1})+(1+b_{m-1}^2)V''_m(b_{m-1})=0;$$

mais, d'après le théorème de Rolle,

$$V''_m(b_1),\quad V''_m(b_2),\quad \ldots,\quad V''_m(b_{m-1})$$

sont alternativement de signes contraires; donc les quantités

$$V_m(b_1),\quad V_m(b_2),\quad \ldots,\quad V_m(b_{m-1})$$

ne présentent elles-mêmes que des variations. Il s'ensuit que toutes les racines de l'équation $V_m=0$ sont réelles et inégales.

Nous avons supposé que l'équation $V_{m-2}=0$ a toutes ses racines réelles et inégales. Cette propriété se reconnaît immédiatement sur les équations

$$V_1=0 \qquad \text{et} \qquad V_2=0,$$

qui sont

$$V_1=2(x-\alpha), \qquad V_2=2[a(x^2-1)+2x].$$

On en conclut que, d'une part, $V_{2n+1}=0$ a toutes ses racines réelles, et, d'autre part, que $V_{2n}=0$ a aussi toutes ses racines réelles; par suite, on peut dire d'une manière générale que l'équation $V_m=0$ a toutes ses racines réelles et inégales.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DONT TOUTES LES RACINES SONT RÉELLES;

1. Si l'on pose

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}},$$

la dérivée d'ordre n de y par rapport à α est une expression de la forme

$$\frac{Q_n(x, \alpha)}{(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

où $Q_n(x, \alpha)$ est un polynôme de degré n en x et de degré n en α.

Je vais mettre en évidence quelques propriétés du polynôme $Q_n(x, \alpha)$, et je supposerai, dans ce qui va suivre, que x ait reçu des valeurs telles que le trinôme $1 - 2\alpha x + \alpha^2$ ait ses zéros imaginaires, c'est-à-dire que x soit compris entre -1 et $+1$.

De l'égalité

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}},$$

on tire

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} \times \frac{x - \alpha}{1 - 2\alpha x + \alpha^2}$$

ou bien

$$y'(1 - 2\alpha x + \alpha^2) + y(\alpha - x) = 0.$$

En dérivant n fois les deux membres par rapport à α, il viendra

$$y^{(n+1)}(1 - 2\alpha x + \alpha^2) + (2n + 1)y^{(n)}(\alpha - x) + n^2 y^{(n-1)} = 0.$$

En remplaçant $y^{(n+1)}, y^{(n)}, y^{(n-1)}$ par leurs valeurs exprimées en fonction des polynômes de la forme $Q_n(x, \alpha)$, on aura

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} & Q_{n+1}(x,\alpha)+(2n+1)(\alpha-x)Q_n(x,\alpha) \\ & \qquad + n^2(1-2\alpha x+\alpha^2)Q_{n-1}(x,\alpha)=0. \end{aligned}\right.$$

En différentiant l'équation

$$y^{(n)}=\frac{Q_n(x,\alpha)}{(1-2\alpha x+\alpha^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

par rapport à α, on obtiendra la relation suivante

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} & Q_{n+1}(x,\alpha)+(2n+1)(\alpha-x)Q_n(x,\alpha) \\ & \qquad -(1-2\alpha x+\alpha^2)Q'_n(x,\alpha)=0; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire, en comparant les égalités (a) et (b),

$$(c)\qquad Q'_n(x,\alpha)=-n^2Q_{n-1}(x,\alpha).$$

Enfin, au moyen des égalités (b) et (c), on peut obtenir l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait le polynôme $Q_n(x,\alpha)$. Il suffit pour cela de différentier par rapport à α l'équation (b) et de remplacer dans le résultat

$$Q'_{n+1}(x,\alpha)\quad\text{par}\quad -(n+1)^2Q_n(x,\alpha),$$

qui sont identiques d'après la relation (c).

On obtient ainsi l'équation

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} & Q''_n(x,\alpha)(1-2\alpha x+\alpha^2) \\ & \quad -(2n-1)(\alpha-x)Q'_n(x,\alpha)+n^2Q_n(x,\alpha)=0. \end{aligned}\right.$$

2. Les relations (a), (c), (d) vont nous permettre de démontrer que l'équation

$$Q_n(x,\alpha)=0$$

de degré n en α a toutes ses racines réelles, pourvu que x soit compris entre -1 et $+1$.

La relation (a) est en effet le type de la série des égalités

$$Q_n(x,\alpha)+(2n-1)(\alpha-x)Q_{n-1}(x,\alpha)+(n-1)^2(1-2\alpha x+\alpha^2)Q_{n-2}(x,\alpha)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$Q_2(x,\alpha)+3(\alpha-x)Q_1(x,\alpha)+Q_0=0,$$

qui montrent que le théorème de Sturm est applicable à l'équation

$$Q_n(x, \alpha) = 0.$$

La relation (a) montre en outre que les coefficients des plus hautes puissances de α dans les fonctions

$$Q_n(x, \alpha), \quad Q_{n-1}(x, \alpha), \quad \ldots, \quad Q_0$$

ont des signes alternés. Il s'ensuit que, pour $\alpha = -\infty$, la suite

$$Q_n(x, \alpha), \quad Q_{n-1}(x, \alpha), \quad \ldots, \quad Q_0$$

ne présente que des permanences et que, pour $\alpha = +\infty$, elle ne présente que des variations; la suite gagne n variations quand α croît de $-\infty$ à $+\infty$; par suite, toutes les racines de l'équation

$$Q_n(x, \alpha) = 0,$$

considérée comme une équation en α, sont réelles.

Le théorème de Sturm peut être appliqué aussi à la série des fonctions

$$Q_n(x, \alpha), \quad Q'_n(x, \alpha), \quad \ldots, \quad Q_n^{(n)}(x, \alpha);$$

il suffit, pour le faire voir, de considérer l'équation différentielle (d) et de former le tableau

$$\begin{array}{l}
Q''_n(x, \alpha)(1 - 2\alpha x + \alpha^2) - (2n - 1)(\alpha - x)Q_n(x, \alpha) + n^2 Q_n(x, \alpha) = 0, \\
Q'''_n(x, \alpha)(1 - 2\alpha x + \alpha^2) - (2n - 3)(\alpha - x)Q''_n(x, \alpha) + (n - 1)^2 Q'_n(x, \alpha) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
Q_n^{(n)}(x, \alpha)(1 - 2\alpha x + \alpha^2) - 3(\alpha - x)Q_n^{(n-1)}(x, \alpha) + 2^2 Q_n^{(n-2)}(x, \alpha) = 0,
\end{array}$$

qui nous montre que les dérivées de $Q_n(x, \alpha)$ jouissent des propriétés des fonctions de Sturm.

On pourrait aussi appliquer le théorème de Rolle pour arriver au même résultat; il suffirait de considérer la relation (a), en faisant aussi usage de (c); la relation (c) nous montre en effet que

$$Q'_{n+1}(x, \alpha) = -(n + 1)^2 Q_n(x, \alpha),$$

et, si l'on admet que $Q_n(x, \alpha) = 0$ a toutes ses racines réelles et séparées par celles de $Q_{n-1} = 0$, on montre aisément que $Q_{n+1}(x, \alpha) = 0$ a aussi toutes ses racines réelles et séparées par celles de $Q_n(x, \alpha) = 0$.

On arrive encore au même résultat en appliquant le théorème de Rolle, au moyen de l'équation différentielle (d). On voit clairement, dans tout ce qui précède, la nécessité de supposer que le polynôme

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)$$

ne change pas de signe quand α varie de $-\infty$ à $+\infty$ et par suite la nécessité d'astreindre x à être compris entre -1 et $+1$.

3. Si l'on développe la fonction $\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}$ suivant les puissances ascendantes de α, sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = X_0 + \alpha X_1 + \alpha^2 X_2 + \ldots + \alpha^n X_n + \ldots,$$

les coefficients $X_0, X_1, \ldots, X_n$ sont, comme l'on sait, les polynômes de Legendre. Leur degré en x est égal à l'indice de X. Ces polynômes sont liés aux polynômes $Q_n(x, \alpha)$ par la relation

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n} \left(\frac{\partial^n y}{\partial \alpha^n}\right)_0 = X_n;$$

or

$$\frac{\partial^n y}{\partial \alpha^n} = \frac{Q_n(x, \alpha)}{(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{n + \frac{1}{2}}}.$$

En faisant $\alpha = 0$ dans cette égalité, on obtient

$$1.2.3\ldots n\, X_n = Q_n(x, 0).$$

Cette relation nous fournit immédiatement celle qui lie entre eux trois polynômes X d'indices consécutifs. En faisant $\alpha = 0$ dans la relation (a), on obtient

$$Q_{n+1}(x, 0) + (2n + 1)(-x) Q_n(x, 0) + n^2 Q_{n-1}(x, 0) = 0$$

ou

$$(n+1)!\,X_{n+1}-(2n+1)x.n!\,X_n+n^2(n-1)!\,X_{n-1}=0,$$

en désignant le produit $1.2.3\ldots n$ par $n!$.

En supprimant le facteur numérique $n!$, il viendra

$$(e)\qquad (n+1)X_{n+1}-(2n+1)xX_n+nX_{n-1}=0.$$

Cette relation permet d'appliquer le théorème de Sturm à l'équation

$$X_n=0,$$

et de montrer qu'elle a toutes ses racines réelles.

Pour savoir si la suite $X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1, X_0$ gagne ou perd ses variations, il suffit de considérer l'équation (e), qui nous fait voir que les coefficients de la plus haute puissance de x ont le même signe dans toutes les fonctions $X_n, X_{n-1}, \ldots, X$. La suite perd donc ses variations quand x passe de $-\infty$ à $+\infty$.

Le polynôme $Q_n(x, \alpha)$ peut s'exprimer d'une manière simple en fonction des quantités X_n.

On a, en effet,

$$\begin{aligned}Q_n(x,\alpha)&=Q_n(x,0)+\alpha Q'_n(x,0)\\&\quad+\frac{\alpha^2}{1.2}Q''_n(x,0)+\ldots+\frac{\alpha^n}{n!}Q_n^{(n)}(x,0),\end{aligned}$$

les dérivées étant prises par rapport à α.

D'après la relation (c),

$$Q'_n(x,\alpha)=-n^2Q_{n-1}(x,\alpha);$$

par suite,

$$\begin{aligned}&Q''_n(x,\alpha)=-n^2Q'_{n-1}(x,\alpha)=n^2(n-1)^2Q_{n-2}(x,\alpha),\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\&Q^{(\mu)}(x,\alpha)=(-1)^\mu n^2(n-1)^2\ldots(n-\mu+1)^2Q_{n-\mu}(x,\alpha).\end{aligned}$$

En faisant $\alpha=0$ dans toutes ces égalités, on aura

$$\begin{aligned}&Q'_n(x,0)=-n^2Q_{n-1}(x,0),\\&Q''_n(x,0)=n^2(n-1)^2Q_{n-2}(x,0),\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&Q^{(\mu)}(x,0)=(-1)^\mu n^2(n-1)^2\ldots(n-\mu+1)^2Q_{n-\mu}(x,0),\end{aligned}$$

et, en remplaçant $Q_{n-1}(x, o), \ldots, Q_{n-\mu}(x, o)$ par leur expression en $X_{n-1}, \ldots, X_{n-\mu}$, il viendra

$$Q'_n(x, o) = -n . n! \, X_{n-1},$$
$$Q''_n(x, o) = n(n-1)\, n! \, X_{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$Q_n^{(\mu)}(x, o) = (-1)^\mu n(n-1)\ldots(n-\mu+1)\, n! \, X_{n-\mu};$$

on peut donc écrire

$$\frac{Q_n(x, \alpha)}{n!} = X_n - n\alpha X_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2 X_{n-2} + \ldots$$
$$+ (-1)^\mu \frac{n(n-1)\ldots(n-\mu+1)}{\mu!}\alpha^\mu X_{n-\mu} + \ldots.$$

L'équation différentielle (d) nous fournit la valeur de $Q_n(x, \alpha)$ pour $x = o$; cette expression peut aussi se tirer de la précédente en remarquant qu'on a, d'une manière générale,

$$(n+1)[X_{n+1}]_{x=0} + n[X_{n-1}]_{x=0} = o.$$

Les polynômes X_n ne renferment, d'après la relation (e), que des puissances de même parité; l'expression de $Q_n(o, \alpha)$ ne renfermera donc que des puissances de α de même parité. L'équation différentielle (d) nous donne

$$(-1)^n \frac{Q_n(o, \alpha)}{n!} = \alpha^n - \frac{n(n-1)}{1.2^2}\alpha^{n-2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(1.2)^2 \times 2^4}\alpha^{n-4} + \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{(1.2.3.p)^2\, 2^{2p}}\alpha^{n-2p} + \ldots.$$

La valeur $x = o$ transforme $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)$ en $1 + \alpha^2$; par suite, l'équation

$$Q_n(o, \alpha) = o$$

a aussi toutes ses racines réelles.

4. Nous allons maintenant chercher d'autres expressions du polynôme X_n.

A cet effet, remarquons que

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}$$

peut s'écrire

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x-\alpha}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}}.$$

Si l'on pose

$$\frac{x-\alpha}{\sqrt{1-x^2}} = z,$$

on aura

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+z^2}},$$

par suite

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{\partial y}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\partial y}{\partial z}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial^n y}{\partial \alpha^n} = \frac{\partial^n y}{\partial z^n} \frac{(-1)}{(\sqrt{1-x^2})^n}.$$

Or

$$\frac{\partial^n y}{\partial z^n} = \frac{Q_n(0, z)}{(1+z^2)^{+n\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

par suite

$$\frac{\partial^n y}{\partial \alpha^n} = \frac{Q_n(0, z)}{(1+z^2)^{n+\frac{1}{2}}} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{1-x^2})^n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

et, faisant $\alpha = 0$,

$$\left(\frac{\partial^n y}{\partial \alpha^n}\right)_{\alpha=0} = \frac{Q_n(0, z_0)}{(1+z_0^2)^{n+\frac{1}{2}}} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{1-x^2})^{n+1}},$$

en désignant par z_0 ce que devient z pour $\alpha = 0$. Mais

$$z = \frac{x - \alpha}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \text{donc} \qquad z_0 = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$1 + z_0^2 = 1 + \frac{x^2}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x^2};$$

par suite

$$\left(\frac{\partial^n y}{\partial \alpha^n}\right)_0 = Q_n\left(0, \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) \frac{(1 - x^2)^{n + \frac{1}{2}} (-1)^n}{(\sqrt{1 - x^2})^{n+1}},$$

$$\left(\frac{\partial^n y}{\partial \alpha^n}\right)_0 = (-1)^n Q_n\left(0, \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) (\sqrt{1 - x^2})^n,$$

ou enfin

$$n!\, X_n = (-1)^n Q_n\left(0, \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) (\sqrt{1 - x^2})^n.$$

Cette égalité nous fait voir que les racines de l'équation $X_n = 0$ sont toutes comprises entre -1 et $+1$.

En effet, l'équation

$$Q_n(0, \alpha) = 0$$

a toutes ses racines réelles; soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ces racines.

Les racines de l'équation $X_n = 0$ étant désignées par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a

$$\alpha_1 = \frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1^2}}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_n = \frac{x_n}{\sqrt{1 - x_n^2}},$$

d'où

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{1 + \alpha_1^2}}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{\alpha_n}{\sqrt{1 + \alpha_n^2}},$$

au signe près; on voit par suite que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont toutes réelles et plus petites que l'unité en valeur absolue.

Nous avons trouvé l'expression de $Q_n(0, \alpha)$, à savoir

$$(-1)^n \frac{Q_n(0, \alpha)}{n!} = \alpha^n - \frac{n(n-1)}{1.2^2} \alpha^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(1.2)^2 2^4} \alpha^{n-4} - \ldots;$$

on en déduit

$$X_n = \frac{(-1)^n}{n!} Q_n\left(0, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) (\sqrt{1-x^2})^n$$
$$= x^n - \frac{n(n-1)}{1.2^2} x^{n-2}(1-x^2)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(1.2)^2 2^4} x^{n-4}(1-x^2)^2 + \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{(p!)^2 \times 2^{2p}} x^{n-2p}(1-x^2)^p + \ldots.$$

On sait que, si l'on prend la dérivée d'ordre n de $(x^2-1)^n$ en employant la formule connue pour la dérivée d'ordre n d'une fonction de fonction de la forme $\varphi(x^2)$, à savoir

$$\frac{d^n[\varphi(x^2)]}{dx^n} = (2x)^n \varphi^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1} (2x)^{n-2} \varphi^{n-1}(x^2)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} (2x)^{n-4} \varphi^{n-2}(x^2) + \ldots,$$

il viendra

$$\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n} = 2^n n! \left[x^n + \frac{n(n-1)}{2^2} x^{n-2}(x^2-1) \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(1.2)^2 2^4} x^{n-4}(x^2-1)^2 + \ldots\right].$$

En comparant cette expression avec celle de X_n précédemment trouvée, il viendra

$$X_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n},$$

qui est l'expression bien connue du polynôme X_n.

12899 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.