N° D'ORDRE
704.

THÈSES

PRESENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. I. LYON,
Ancien Élève de la Faculté des Sciences de Grenoble.

1re THÈSE. — SUR LES COURBES A TORSION CONSTANTE.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 10 juillet 1890, devant la Commission d'Examen.

MM. DARBOUX, *Président.*
TISSERAND, } *Examinateurs.*
RAFFY, }

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1890

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES	PASTEUR.	
	DUCHARTRE	Botanique.
PROFESSEURS	DE LACAZE-DUTHIERS.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	TROOST	Chimie.
	FRIEDEL	Chimie organique.
	O. BONNET	Astronomie.
	TISSERAND	Astronomie.
	LIPPMANN	Physique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Mécanique physique et expérimentale.
	PICARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	POINCARÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	YVES DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	N.	Géologie.
PROFESSEURS ADJOINTS	WOLF	Physique céleste.
	CHATIN	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	JOLY	Chimie.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

16329 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

DÉDIÉ

A SON EXCELLENCE

M. LE BARON HORACE DE GUNZBURG.

Hommage respectueux,

I. LYON.

A

MON MAITRE

M. G. DARBOUX,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

Hommage respectueux,

I. LYON.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LES

COURBES A TORSION CONSTANTE.

INTRODUCTION.

Le travail que nous présentons ici a pour objet l'étude des courbes à torsion constante, et principalement la recherche de celles qui sont algébriques et unicursales. A notre connaissance, aucune courbe algébrique à torsion constante n'a été signalée jusqu'ici. Nous avons donc cru intéressant de rechercher si de pareilles courbes existent.

Nous avons pris pour point de départ de notre étude les formules connues de Serret et de Frenet, et nous en donnons d'abord une application simple qui conduit à l'hélice circulaire. Les formules de Serret, comme on sait, contiennent trois fonctions arbitraires, assujetties à rester sur une sphère de rayon 1. Il était donc tout naturel de chercher à y introduire les coordonnées symétriques de M. Bonnet. Grâce à l'introduction de ces dernières, nous arrivons à des formules simples qui ne contiennent que deux fonctions arbitraires d'un même paramètre variable et qui ne sont assujetties à aucune condition. De plus, ces deux fonctions ont été choisies de manière qu'elles soient imaginaires conjuguées pour les courbes réelles, algébriques pour les courbes algébriques et rationnelles pour les courbes unicursales. En établissant ensuite entre les deux fonctions une certaine relation arbitraire, nous arrivons à des formules qui ne dépendent que d'une seule fonction arbitraire et qui donnent deux des coordonnées de la courbe sous forme finie. Une application très simple de ces formules nous conduit à une infinité de courbes à torsion constante qui ne dépendent que des fonctions algébriques et logarithmiques; entre autres, à l'hélice ordinaire et à une cubique gauche rectifiable qui, comme l'hélice ordinaire, a ses deux courbures constantes. Cette cubique ne dépend que d'un seul paramètre arbitraire. Plus tard, nous arrivons à une cubique plus générale qui jouit de la même propriété, et nous démontrons que l'hélice ordinaire et la cubique dont nous parlons sont les deux seules courbes ayant leurs deux courbures constantes. (La démonstration qu'on donne ordinairement pour prouver que l'hélice ordinaire est la seule courbe jouissant de cette propriété ne tient pas compte du cas où l'indicatrice sphérique est une parabole, et c'est précisément dans ce cas qu'on trouve notre cubique.)

En remplaçant dans les formules générales les deux fonctions arbitraires par deux expressions imaginaires conjuguées, nous obtenons des formules spéciales pour les courbes réelles et nous en donnons quelques applications. A la fin du Chapitre I, nous arrivons à l'objet principal de nos recherches, c'est-à-dire à la détermination des courbes unicursales à torsion constante. Nous avons vu que, pour ces courbes, les deux fonctions arbitraires doivent être rationnelles; et, en les remplaçant dans les formules générales par des fonctions rationnelles d'un même paramètre variable t, on arrive à trois intégrales de la forme $\int \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}dt$ qui ont le même dénominateur $\psi(t)$ de degré $2n$ et dont les numérateurs sont de degré $(2n-2)$ au plus. Les coefficients de ces polynômes dépendent de $(3n+2)$ indéterminées, qu'il s'agit de déterminer de façon que les trois intégrales soient algébriques.

Dans le Chapitre II, nous cherchons les conditions auxquelles devront satisfaire les coefficients a et b de polynômes $f(x)$ et $F(x)$ des degrés n et m pour que l'intégrale $\int \frac{F(x)}{f(x)}dx$ soit algébrique. En supposant $m < n$, ce qu'on peut toujours réaliser par la simple division algébrique, nous démontrons tout d'abord que m doit être au plus égal à $(n-2)$ et que le nombre h des racines distinctes de $f(x)$ doit être au plus égal à $(m+1)$. Si ces conditions sont satisfaites, les coefficients de $f(x)$ et $F(x)$ devront encore satisfaire à $(n-1)$ conditions, qu'on obtiendra en exprimant que les racines de $f(x)$ sont toutes multiples et que les résidus de la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ sont nuls. Mais, pour les obtenir de cette manière, il faudra connaître les racines de $f(x)$, ce qui est impossible en général. Une autre méthode, qui n'exige nullement la connaissance de racines de $f(x)$, nous conduit directement à ces $(n-1)$ conditions entre les coefficients a et b, et nous donne en même temps la valeur de l'intégrale si ces conditions sont satisfaites.

Dans le Chapitre III, nous appliquons les résultats obtenus aux trois intégrales $\int \frac{\varphi}{\psi}\, dt$ auxquelles nous a conduit la recherche des courbes unicursales à torsion constante, et nous arrivons à $(2n+2h-3)$ conditions entre les $(3n+2)$ arbitraires dont dépendent ces intégrales, h étant le nombre des racines distinctes de ψ.

L'examen de ces formules générales pour $n=2$ nous conduit à la cubique gauche dont nous parlions plus haut. Nous y donnons ensuite des formules spéciales pour quelques formes particulières de ψ.

Le cas le plus favorable, celui où ψ n'a qu'une seule racine, nous conduit à une infinité de courbes de différents degrés, à torsion constante, unicursales et à coordonnées entières. Nous en donnons un exemple d'une courbe du cinquième ordre avec cinq paramètres arbitraires. Ces courbes jouissent d'une propriété remarquable, à savoir : le polynôme T, qui détermine la dérivée de l'arc $\frac{ds}{dt}=\sqrt{T}$, au lieu d'être de degré $4(n-1)$, pour une courbe de degré $(2n-1)$, se réduit au degré $(2n-2)$.

A la fin de ce Chapitre, nous dégageons des formules générales le cas de courbes réelles, et nous donnons la forme analytique des coordonnées de ces courbes. Il résulte de cette forme que, si de telles courbes existent, elles seront nécessairement de degré pair et fermées. Nous examinons ensuite le cas le plus favorable, celui où ψ n'a que deux racines distinctes, et nous ramenons le problème à la recherche des solutions réelles d'un système de $(2n+3)$ équations quadratiques entre $(3n+3)$ arbitraires.

Dans une Note additionnelle, nous prouvons que l'hélice ordinaire et la cubique signalée plus haut sont les deux seules courbes ayant leurs deux courbures constantes.

CHAPITRE PREMIER.

FORMULES GÉNÉRALES. — APPLICATIONS.

1. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'une courbe C de l'espace, s l'arc de la courbe, τ son rayon de torsion, a, a', a''; b, b', b'', et c, c', c'' les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale. On aura, d'après les formules connues de Frenet et de Serret,

$$b = \tau \frac{dc}{ds},$$

$$b' = \tau \frac{dc'}{ds},$$

$$b'' = \tau \frac{dc''}{ds};$$

d'où

$$\frac{dx}{ds} = a = b'c'' - c'b'' = \frac{\tau}{ds}(c''\,dc' - c'\,dc''),$$

$$\frac{dy}{ds} = a' = b''c - c''b = \frac{\tau}{ds}(c\,dc'' - c''\,dc),$$

$$\frac{dz}{ds} = a'' = bc' - cb' = \frac{\tau}{ds}(c'\,dc - c\,dc').$$

On aura donc, pour toute courbe C de l'espace, les égalités suivantes :

$$dx = \tau(c''\,dc' - c'\,dc''),$$
$$dy = \tau(c\,dc'' - c''\,dc),$$
$$dz = \tau(c'\,dc - c\,dc').$$

Or, pour les courbes à torsion constante, τ est constant, et, en intégrant ces égalités, on aura les formules

$$(1)\quad \begin{cases} x = \tau\displaystyle\int c'' dc - c\, dc'', \\ y = \tau\displaystyle\int c\, dc'' - c'' dc, \\ z = \tau\displaystyle\int c' dc - c\, dc', \end{cases}$$

où c, c', c'' sont trois fonctions arbitraires d'un même paramètre variable, assujetties à satisfaire à la seule condition

$$(2)\qquad c^2 + c'^2 + c''^2 = 1.$$

Ainsi, pour avoir des courbes à torsion constante, il suffit de prendre pour c, c', c'' trois fonctions quelconques satisfaisant à (2), et d'effectuer les quadratures indiquées. Ou bien, ce qui revient au même, on établira entre les quantités c, c', c'' une certaine relation

$$(3)\qquad f(c, c', c'') = 0.$$

On pourra alors tirer deux quelconques de ces quantités en fonction de la troisième, et l'on n'aura plus qu'à effectuer les quadratures indiquées pour avoir les courbes cherchées.

Comme application, nous allons examiner le cas où la relation (3) est du premier degré. Il est facile de voir que dans ce cas la courbe sera en général une hélice circulaire. En effet, si l'on regarde les quantités c, c' et c'' comme les coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace, les deux équations (2) et (3) représentent une certaine courbe sphérique σ, intersection de la surface (3) avec la sphère (2). Cette courbe n'est autre chose que l'indicatrice sphérique des binormales de la courbe C donnée par les équations (1). Or, si (3) est du premier degré, on aura un plan et l'indicatrice σ sera en général un cercle, réel ou imaginaire d'ailleurs. Les binormales et, par suite, les tangentes à la courbe C feront donc un angle constant avec une certaine direction fixe, c'est-à-dire la courbe C sera une hélice tracée sur un cylindre, et, comme elle a sa torsion constante, le cylindre sera à base circulaire. Si f est du premier degré et homogène, l'indicatrice σ des binormales sera un grand cercle de la sphère (2). L'indicatrice σ' des tangentes se réduira alors à un point et l'hélice C à une droite. Réciproquement, si la courbe C est une hélice, l'indicatrice σ sera un cercle, puisque, dans ce cas, les binormales feront un angle constant avec une certaine direction fixe et leur cône directeur sera à base circulaire. Ainsi, pour que la courbe C soit une hélice, il faut et il suffit que l'équation (3) représente une surface qui rencontre la sphère (2) suivant un cercle. On pourra donc toujours remplacer cette surface par un certain plan

$$Ac + Bc' + Cc'' + D = 0,$$

pourvu que l'on n'ait pas

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0.$$

Pour ce cas, en effet, le plan sera parallèle à l'un des plans tangents au cône asymptote de la sphère et coupera, par conséquent, la sphère suivant une parabole. On verra plus tard que ce cas répond à une cubique gauche ayant ses deux courbures constantes.

2. On peut donner aux formules de Serret une autre forme plus commode dans les recherches particulières, en y remplaçant les trois fonctions c, c' et c'' qui sont assujetties à satisfaire à la condition

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1,$$

par deux fonctions complètement arbitraires. En effet, cette condition peut se mettre sous la forme

$$(c + ic')(c - ic') = (1 + c'')(1 - c''),$$

et en posant

$$\frac{c + ic'}{1 - c''} = \frac{1 + c''}{c - ic'} = \alpha,$$

$$\frac{c - ic'}{1 - c''} = \frac{1 + c''}{c + ic'} = -\frac{1}{\beta},$$

on aura les formules de M. Ossian Bonnet

$$c = \frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta},$$
$$c' = i\,\frac{1+\alpha\beta}{\alpha-\beta},$$
$$c'' = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}.$$

Ces valeurs de c, c', c'' satisferont toujours à la condition précédente; et elles seront réelles pour les valeurs imaginaires conjuguées de α et de $-\frac{1}{\beta}$. En les différentiant, on aura

$$dc = \frac{(\beta^2-1)\,d\alpha-(\alpha^2-1)\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2},$$
$$dc' = -i\,\frac{(\beta^2+1)\,d\alpha-(\alpha^2+1)\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2},$$
$$dc'' = -2\,\frac{\beta\,d\alpha-\alpha\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2};$$

d'où

$$c''\,dc'-c'c'' = i\,\frac{(\beta^2-1)\,d\alpha+(\alpha^2-1)\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2},$$
$$c\,dc''-c''\,dc = \frac{(\beta^2+1)\,d\alpha+(\alpha^2+1)\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2},$$
$$c'\,dc-c\,dc' = -2i\,\frac{d\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^2},$$

et les formules (1) nous donnent

$$x+iy = 2i\tau\int\frac{\beta^2\,d\alpha+\alpha^2\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2},$$
$$x-iy = -2i\tau\int\frac{d(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)^2},$$
$$z = -2i\tau\int\frac{d\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^2},$$

ou bien, en remarquant que

$$\frac{\beta^2\,d\alpha+\alpha^2\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2} = -\frac{d\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)^2},\qquad \frac{d\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^2} = -\frac{d\frac{1}{\alpha\beta}}{\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)^2},$$

on aura les formules

$$(4)\quad \begin{cases} x+iy=-2\tau\displaystyle\int\frac{di\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)^2}, \\ x-iy=-2\tau\displaystyle\int\frac{di(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)^2}, \\ \quad z=-2\tau\displaystyle\int\frac{di\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^2}=2\tau\int\frac{di\frac{1}{\alpha\beta}}{\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)^2}, \end{cases}$$

où α et β sont deux fonctions complètement arbitraires d'un même paramètre variable t, pourvu que cependant $(\alpha-\beta)$ soit différent de zéro. Pour avoir des courbes à torsion constante, il suffira donc d'établir entre α et β une certaine relation

$$(5)\qquad f(\alpha,\beta)=0$$

et d'effectuer les quadratures indiquées. Par exemple, si $f(\alpha,\beta)$ est de la forme $\varphi(\alpha-\beta)$, on aura

$$\alpha-\beta=\text{const.}=a.$$

Les seconds membres de (4) s'intègrent alors immédiatement, et l'on aura la cubique gauche rectifiable

$$(6)\quad \begin{cases} y+ix=\dfrac{4\tau}{a^2}\beta, \\ y-ix=\dfrac{4\tau}{a^2}\left(\dfrac{1}{3}\beta^3+\dfrac{1}{2}a\beta^2+\dfrac{1}{2}a^2\beta\right), \\ \quad iz=\dfrac{4\tau}{a^2}\left(\dfrac{1}{2}\beta^2+\dfrac{1}{2}a\beta\right), \\ \quad s=\dfrac{4\tau}{a^2}\dfrac{1}{2}\beta. \end{cases}$$

Abstraction faite des constantes qu'on peut toujours ajouter et du facteur d'homothétie $\frac{4\tau}{a^2}$, cette cubique ne dépend que d'un seul paramètre arbitraire a. Cette cubique, comme il est facile de le vérifier, a ses deux courbes constantes.

Géométriquement, α et β sont les paramètres des génératrices rectilignes de la sphère (2), et la relation (5) donnera l'indicatrice σ des binormales de la courbe C de l'espace. Pour la cubique (6), cette indicatrice sera une parabole. En effet, si l'on se reporte aux valeurs de c, c', c'' en fonctions de α et β, on aura

$$\alpha - \beta = \frac{2}{c - ic'} = \frac{2(c + ic')}{1 + c''^2},$$

et la relation $\alpha - \beta = \text{const.}$ donnera bien la parabole

$$\begin{aligned} ac''^2 - 2(c + ic') + a &= 0,\\ a(c - ic') - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que l'on aura encore la même cubique (6) si $f(\alpha, \beta)$ est de la forme $\varphi\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)$. En effet, les courbes (4) ne changent pas de forme lorsqu'on y permute les lettres α et β, ou bien quand on y remplace α et β par $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$. On voit alors que les relations

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0, \qquad \varphi(\beta, \alpha) = 0, \qquad \varphi\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) = 0, \qquad \text{et} \qquad \varphi\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}\right) = 0$$

correspondent toutes à la même courbe.

Si dans les formules (4) on pose

$$\begin{aligned} -i(\alpha + \beta) &= \frac{2}{u_1},\\ -i\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) &= \frac{2}{u}, \end{aligned}$$

on arrive facilement aux formules simples

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} x + iy &= \tau \int \frac{du}{1 + uu_1},\\ x - iy &= \tau \int \frac{du_1}{1 + uu_1},\\ iz &= \frac{\tau}{2} \int \frac{u\,du_1 - u_1\,du}{1 + uu_1}, \end{aligned} \right.$$

qu'on pourrait d'ailleurs obtenir directement des formules (1) en y faisant

$$\frac{c' - ic}{c''} = u,$$

$$\frac{c' + ic}{c''} = u_1.$$

Il est facile de voir que les fonctions arbitraires u et u_1 qui figurent dans les formules (7) doivent être imaginaires conjuguées pour les courbes réelles et peuvent toujours être supposées algébriques pour les courbes algébriques, et rationnelles pour les courbes unicursales.

Pour se servir des formules (7), il faudra prendre pour u et u_1 deux fonctions quelconques d'un même paramètre variable, ou bien, ce qui revient au même, il faudra établir entre ces quantités une certaine relation

$$f(u, u_1) = 0. \tag{8}$$

Pour les courbes réelles, u et u_1 doivent être imaginaires conjuguées; or, si dans (8) on remplace u et u_1 par deux expressions imaginaires conjuguées, on aura, en général, deux relations entre les quantités réelles; il faudra donc que f soit d'une forme toute particulière, de sorte qu'en y remplaçant u et u_1 par deux expressions imaginaires conjuguées $f = 0$ se réduise à une seule relation entre des quantités réelles. Par exemple, si $f(u, u_1)$ est de la forme $\varphi(uu_1)$, on aura alors

$$uu_1 = \text{const.} = a.$$

Les seconds membres de (7) s'intègrent immédiatement et nous donnent la courbe

$$x + iy = \frac{\tau}{1+a} u,$$

$$x - iy = \frac{a\tau}{1+a} \frac{1}{u},$$

$$z = i \frac{a\tau}{1+a} \log u,$$

qui est une hélice tracée sur un cylindre circulaire. On aura, en effet,

$$\frac{dz}{ds} = \sqrt{\frac{\tau}{1+a}},$$

$$x^2+y^2 = a\left(\frac{\tau}{1+a}\right)^2.$$

Si maintenant on remplace dans $f\,u$ et u_1 par $r(\cos\omega + i\sin\omega)$ et $r(\cos\omega - i\sin\omega)$, on n'aura qu'une seule relation $r^2 = \text{const.}$ entre des quantités réelles. On aura alors l'hélice réelle

$$x = \frac{r}{1+r^2}\tau\cos\omega,$$

$$y = \frac{r}{1+r^2}\tau\sin\omega,$$

$$z = -\frac{r}{1+r^2}\tau\omega r$$

On peut mettre la relation (8) sous la forme

$$\frac{u^2}{1+uu_1} + \varphi'''\left(\frac{1}{u}\right) = 0, \tag{9}$$

φ''' désignant une fonction arbitraire quelconque; et, en posant

$$\frac{1}{u} = v,$$

on pourra tirer u et u_1 en fonction de v et de $\varphi'''(v)$. On trouve alors

$$\frac{du}{1+uu_1} = \varphi'''(v)\,dv,$$

$$\frac{du_1}{1+uu_1} = [v^2\varphi'''(v) - 1]\,dv - v\,d\log\varphi'''(v),$$

$$\frac{u_1\,du - u\,du_1}{1+uu_1} = d\log\varphi'''(v) - 2v\,\varphi'''(v)\,dv;$$

et les formules (7) donneront

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} x+iy &= \tau\,\varphi''(v),\\ x-iy &= \tau\,[v^2\varphi''(v) - 2v\,\varphi'(v) + 2\,\varphi(v) - v] - \tau\int v\,d\log\varphi'''(v),\\ z &= \frac{1}{2}i\tau\Big[\log\varphi'''(v) + 2\varphi'(v) - 2v\varphi''(v)\Big].\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, on n'a qu'un seul terme à intégrer, tous les autres termes étant donnés sous forme finie. Pour chaque forme particulière attribuée à $\varphi(v)$, on aura des courbes à torsion constante en intégrant le terme unique $\int v\,d\log\varphi'''(v)$. Ainsi, si l'on prend pour $\varphi(v)$ une fonction rationnelle quelconque de v, l'intégration de ce terme se fera complètement par des fonctions algébriques et logarithmiques. On obtiendra ainsi une infinité de courbes à torsion constante, dont les coordonnées seront des fonctions algébriques et logarithmiques de v.

Par exemple, pour

$$\varphi'''(v) = A v^n,$$

les formules (10) nous donnent les courbes

$$(11)\qquad \begin{cases} x + iy = \tau\left[\dfrac{A}{n+1} v^{n+1} + K_1\right], \\ x - iy = \tau\left[\dfrac{A}{n+3} v^{n+3} - (n+1)\,v + K_2\right], \\ z = \dfrac{i\tau}{2}\left[n\log v - \dfrac{2A}{n+2} v^{n+2} + K_3\right]. \end{cases}$$

Pour $n = 0$, on aura la cubique gauche rectifiable

$$x + iy = \tau[Av + K_1],$$
$$x - iy = \tau\left[\frac{A}{3} v^3 - v + K_2\right],$$
$$z = \frac{i\tau}{2}\left[-Av^2 + K_3\right].$$

Il est facile de voir que cette cubique ne diffère de la cubique (6) que par le choix du paramètre variable v.

Pour $n = -1, -2, -3$ les formules (11) deviennent illusoires; et, en examinant ces trois cas à part, on trouve facilement les courbes suivantes :

Pour $n = -1$,

$$(12)\qquad \begin{cases} x + iy = \tau A \log v, \\ x - iy = \dfrac{1}{2}\tau A v^2, \\ iz = \tau\left(Av + \dfrac{1}{2}\log v\right). \end{cases}$$

Pour $n = -2$,

$$(13)\quad \begin{cases} x + iy = -\tau A \dfrac{1}{v}, \\ x - iy = \tau(A+1)v, \\ \quad z = -i\tau(A+1)\log v. \end{cases}$$

C'est une hélice ordinaire. On aura, en effet,

$$\frac{dz}{ds} = \sqrt{\frac{A+1}{2A+1}}, \qquad x^2 + y^2 = -A(A+1)\tau^2.$$

Pour $n = -3$,

$$(14)\quad \begin{cases} x + iy = -\dfrac{1}{2}\tau A \dfrac{1}{v^2}, \\ x - iy = \tau(2v + A\log v), \\ \quad z = i\tau\left(2A\dfrac{1}{v} - \dfrac{3}{2}\log v\right). \end{cases}$$

Pour les courbes réelles, il faudra remplacer v par une certaine expression imaginaire. Les formules (10) seront alors de la forme

$$\begin{aligned} x + iy &= \lambda + i\lambda_1, \\ x - iy &= \lambda' + i\lambda'_1, \\ z &= \lambda_2 + i\lambda'_2. \end{aligned}$$

les λ étant des fonctions réelles d'un même paramètre variable. On voit que, pour les courbes réelles, il faudra prendre pour la fonction $\varphi(v)$ une forme telle que l'on ait

$$(15)\quad \begin{cases} \lambda = \lambda', \\ \lambda_1 = -\lambda'_1, \\ \lambda'_2 = 0. \end{cases}$$

Si ces conditions sont satisfaites, la courbe sera réelle, et ses coordonnées seront données par

$$\begin{aligned} x &= \lambda, \\ y &= \lambda_1, \\ z &= \lambda_2. \end{aligned}$$

Par exemple, soït

$$\varphi(v) = Av \log v.$$

En différentiant trois fois et en portant dans (10), on aura

$$x + iy = \tau A \frac{1}{v},$$

$$x - iy = \tau(1 - A)v,$$

$$z = - i\tau(1 - A) \log v.$$

C'est la courbe (13). Si maintenant on y remplace v par l'expression imaginaire $r(\cos\omega + i\sin\omega)$, on aura

$$x + iy = \frac{\tau A}{r}(\cos\omega - i\sin\omega),$$

$$x - iy = \tau(1 - A)r(\cos\omega + 1 \sin\omega),$$

$$z = \tau(1 - A)\omega - i\tau(1 - A)\log r.$$

Les trois conditions (15) se réduisent ici aux deux suivantes :

$$r^2 = \frac{A}{1 - A},$$

$$(1 - A)\log r = 0,$$

qui sont satisfaites pour $r = 1$, $A = \frac{1}{2}$; on aura alors l'hélice réelle

$$x = \frac{1}{2}\tau\cos\omega,$$

$$y = -\frac{1}{2}\tau\sin\omega,$$

$$z = \frac{1}{2}\tau\omega.$$

3. On a vu que, pour les courbes réelles, les fonctions u et u_1, dans les formules (7), doivent être imaginaires conjuguées. Si donc on pose

$$u = \xi + i\eta = r(\cos\omega + i\sin\omega),$$

$$u_1 = \xi - i\eta = r(\cos\omega - i\sin\omega),$$

on aura pour les courbes réelles les formules suivantes :

$$(16)\qquad \begin{cases} x = \tau \displaystyle\int \frac{d\xi}{\xi^2+\eta^2+1} = \tau \int \frac{dr \cos\omega}{r^2+1}, \\ y = \tau \displaystyle\int \frac{d\eta}{\xi^2+\eta^2+1} = \tau \int \frac{dr \sin\omega}{r^2+1}, \\ z = \tau \displaystyle\int \frac{\eta\, d\xi - \xi\, d\eta}{\xi^2+\eta^2+1} = \tau \int \frac{d\omega}{r^2+1} - \tau\omega, \end{cases}$$

où ξ et η sont des fonctions réelles, d'ailleurs tout à fait arbitraires, d'un même paramètre variable t. A chaque courbe C, à torsion constante, correspondra une certaine relation

$$(17)\qquad f(\xi, \eta) = 0 \qquad [\text{ou } f(r, \omega) = 0]$$

entre les quantités ξ et η. Si l'on regarde ξ et η comme les coordonnées rectangulaires d'un point du plan, la relation (17) représente une certaine courbe σ; et il est facile de voir que cette courbe σ et la projection s_1 sur le plan des xy de la courbe (16) se correspondent de telle manière que les arcs infiniment petits sont proportionnels et les tangentes aux points correspondants sont parallèles et de même sens.

Les formules (16) nous donnent en effet

$$ds_1 = \frac{\sigma}{\xi^2+\eta^2+1}\, d\sigma,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}.$$

Ces considérations géométriques peuvent être utiles dans certains cas, et quelquefois elles nous permettent même de prévoir la solution sans effectuer les intégrations. Par exemple, si (17) présente une droite, la projection s_1 sera aussi une droite et la courbe de l'espace C sera plane. Si (17) est un cercle ayant l'origine pour centre, la projection s_1, comme il est facile de voir, sera aussi un cercle et la courbe C sera tracée sur un cylindre à base circulaire. On verra, en effet, que, dans ce cas, la courbe C est une hélice ordinaire. Nous allons d'ailleurs, comme application des formules (16), examiner le cas général où la courbe σ est un cercle quelconque. La relation (17) sera alors de la forme

$$(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 = c^2.$$

Si de cette équation on tire η en fonction de ξ et qu'on porte sa valeur dans (16), on n'aura que des radicaux du second degré, et les intégrations s'effectueront complètement par des fonctions algébriques et logarithmiques; en sorte qu'on aura les coordonnées x, y, z en termes finis. Seulement les calculs seraient très longs, et l'on arrive plus vite au résultat en introduisant l'angle au centre φ. On aura, en effet,

$$\xi = a + c\cos\varphi,$$
$$\eta = b + c\sin\varphi;$$

d'où

$$\begin{aligned}
\xi^2+\eta^2+1 &= a^2+b^2+c^2+1+2c(a\cos\varphi+b\sin\varphi),\\
d\xi &= -c\sin\varphi\, d\varphi,\\
d\eta &= c\cos\varphi\, d\varphi,\\
\eta\, d\xi - \xi\, d\eta &= -c[a\cos\varphi + b\sin\varphi + c]\, d\varphi.
\end{aligned}$$

Et en portant dans (16), on aura

$$\begin{aligned}
x &= -\tau c\int\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{a^2+b^2+c^2+1+2c(a\cos\varphi+b\sin\varphi)},\\
y &= \tau c\int\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{a^2+b^2+c^2+1+2c(a\cos\varphi+b\sin\varphi)},\\
z &= -\tau c\int\frac{(a\cos\varphi+b\sin\varphi+c)\, d\varphi}{a^2+b^2+c^2+1+2c(a\cos\varphi+b\sin\varphi)}.
\end{aligned}$$

Si le cercle σ a l'origine pour centre, on aura $a = b = 0$, et la courbe C sera une hélice

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\tau c}{1+c^2}\cos\varphi,\\
y &= \frac{\tau c}{1+c^2}\sin\varphi,\\
z &= -\frac{\tau c}{1+c^2}\, c\varphi.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant a et b différents de zéro et faisons tourner le plan xOy autour de l'axe Oz d'un angle α dont la tangente trigonométrique est égale à $\frac{b}{a}$. L'axe Ox' passera par le centre de σ, et l'on aura pour les nouvelles coordonnées x', y', z'

de C les valeurs suivantes

$$
\begin{aligned}
x' &= -\tau c \int \frac{\sin\varphi'\, d\varphi'}{\delta^2 + c^2 + 1 + 2c\delta\cos\varphi'},\\
y' &= \tau c \int \frac{\cos\varphi'\, d\varphi'}{\delta^2 + c^2 + 1 + 2c\delta\cos\varphi'},\\
z' &= -\tau c \int \frac{(c + \delta\cos\varphi')\, d\varphi'}{\delta^2 + c^2 + 1 + 2c\delta\cos\varphi'},
\end{aligned}
$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\varphi - \alpha = \varphi',$$

$$a^2 + b^2 = \delta^2, \qquad \delta \text{ — distance du centre à l'origine.}$$

On obtient directement ces valeurs pour les coordonnées de C en prenant pour σ un cercle ayant son centre sur Ox.

Il est d'ailleurs facile de voir qu'en général, si deux formes différentes de la relation (17) présentent deux courbes σ et σ' qui ne diffèrent que par une rotation autour de l'origine, les formules (16) donneront deux courbes C et C' qui ne différeront aussi que par une rotation autour de Oz. En effet, soient r, ω et r', ω' les coordonnées polaires de σ et σ'; et, comme elles ne diffèrent que par une rotation autour de l'origine, on aura

$$r' = r, \qquad \omega' = \omega + \alpha,$$

de sorte que les deux courbes correspondantes C et C' seront données par

$$
\begin{aligned}
x &= \tau \int \frac{dr\cos\omega}{1 + r^2},\\
y &= \tau \int \frac{dr\sin\omega}{1 + r^2},\\
z &= -\tau \int \frac{r^2\, d\omega}{1 + r^2}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
x &= \tau \int \frac{dr\cos(\omega + \alpha)}{1 + r^2},\\
y &= \tau \int \frac{dr\sin(\omega + \alpha)}{1 + r^2},\\
z &= -\tau \int \frac{r^2\, d\omega}{1 + r^2}.
\end{aligned}
$$

Si de cette équation on tire η en fonction de ξ et qu'on porte sa valeur dans (16), on n'aura que des radicaux du second degré, et les intégrations s'effectueront complètement par des fonctions algébriques et logarithmiques; en sorte qu'on aura les coordonnées x, y, z en termes finis. Seulement les calculs seraient très longs, et l'on arrive plus vite au résultat en introduisant l'angle au centre φ. On aura, en effet,

$$\xi = a + c\cos\varphi,$$
$$\eta = b + c\sin\varphi;$$

d'où

$$\xi^2 + \eta^2 + 1 = a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2c(a\cos\varphi + b\sin\varphi),$$
$$d\xi = -c\sin\varphi\, d\varphi,$$
$$d\eta = c\cos\varphi\, d\varphi,$$
$$\eta\, d\xi - \xi\, d\eta = -c[a\cos\varphi + b\sin\varphi + c]\, d\varphi.$$

Et en portant dans (16), on aura

$$x = -\tau c \int \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2c(a\cos\varphi + b\sin\varphi)},$$
$$y = \tau c \int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2c(a\cos\varphi + b\sin\varphi)},$$
$$z = -\tau c \int \frac{(a\cos\varphi + b\sin\varphi + c)\, d\varphi}{a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2c(a\cos\varphi + b\sin\varphi)}.$$

Si le cercle σ a l'origine pour centre, on aura $a = b = 0$, et l[illegible] courbe C sera une hélice

$$x = \frac{\tau c}{1 + c^2}\cos\varphi,$$
$$y = \frac{\tau c}{1 + c^2}\sin\varphi,$$
$$z = -\frac{\tau c}{1 + c^2}c\varphi.$$

Supposons maint[illegible] a et b différents de zéro [illegible] tourner le plan xO[illegible] de l'axe Oz d'un an[illegible] gente trigonométriq[illegible] égale à $\frac{b}{a}$. [illegible] centre de σ, et l'on [illegible]

. sans compter
mothétie. Pour
buées à c et δ,
onstruire par ses
si, pour $\delta = 2$ et
de translation et le

donnent

$\tan\frac{\varphi}{2}$,

On voit bien que c'est la même courbe tournée d'un angle α autour de l'axe Oz. Cette remarque permet presque toujours de simplifier la relation (17). Par exemple, dans le cas que nous examinons maintenant, la relation

$$(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 = c^2$$

peut être remplacée, en vertu de la remarque précédente, par

$$(\xi - \delta)^2 + \eta^2 = c^2.$$

On aura alors

$$\begin{aligned}
\xi &= \delta + c\cos\varphi,\\
\eta &= c\sin\varphi,\\
\xi^2+\eta^2+1 &= \delta^2 + c^2 + 1 + 2\delta c\cos\varphi,\\
d\xi &= -c\sin\varphi\,d\varphi,\\
d\eta &= c\cos\varphi\,d\varphi,\\
\eta\,d\xi - \xi\,d\eta &= -c(c+\delta\cos\varphi)\,d\varphi;
\end{aligned}$$

et en portant dans (16), on aura immédiatement les valeurs précédemment trouvées

$$\begin{aligned}
x &= -\tau c\int\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\delta^2+c^2+1+2\delta c\cos\varphi},\\
y &= \tau c\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\delta^2+c^2+1+2\delta c\cos\varphi},\\
z &= -\tau c\int\frac{(c+\delta\cos\varphi)\,d\varphi}{\delta^2+c^2+1+2\delta c\cos\varphi}.
\end{aligned}$$

Comme on a

$$\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\delta^2+c^2+1+2\delta c\cos\varphi} = -\frac{1}{2c\delta}\,d\log(\delta^2+c^2+1+2\delta c\cos\varphi),$$

$$\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\delta^2+c^2+1+2\delta c\cos\varphi} = \frac{1}{2\delta c}\left(1-\frac{\delta^2+c^2+1}{\delta^2+c^2+1+2\delta c\cos\varphi}\right)d\varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{\delta^2+c^2+1+2\delta c\cos\varphi} = \frac{2}{\sqrt{(\delta^2+c^2+1+2\delta c)(\delta^2+c^2+1-2\delta c)}}$$
$$\times\, d\,\mathrm{arctang}\sqrt{\frac{\delta^2+c^2+1-2\delta c}{\delta^2+c^2+1+2\delta c}}\,\mathrm{tang}\frac{\varphi}{2},$$

les valeurs des coordonnées x, y, z de la courbe C seront

$$(18)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\tau}{2\delta}\log(\delta^2+c^2+1+2\delta c\cos\varphi), \\ y = \dfrac{\tau}{2\delta}\left[\varphi - \dfrac{\delta^2+c^2+1}{\sqrt{(\delta^2+c^2+1+2\delta c)(\delta^2+c^2+1-2\delta c)}}\psi\right], \\ z = -\dfrac{\tau}{2}\left[\varphi - \dfrac{\delta^2-c^2+1}{\sqrt{(\delta^2+c^2+1+2\delta c)(\delta^2+c^2+1-2\delta c)}}\psi\right], \end{cases}$$

φ et ψ étant liés par la relation

$$\operatorname{tang}\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{\delta^2+c^2+1-2\delta c}{\delta^2+c^2+1+2\delta c}}\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}.$$

Cette courbe dépend de deux paramètres c et δ, sans compter les constantes de translation et le facteur d'homothétie. Pour chaque système des valeurs particulières attribuées à c et δ, on aura une courbe déterminée qu'on pourra construire par ses projections sur les plans des coordonnées. Ainsi, pour $\delta = 2$ et $c = \sqrt{2}$, on aura, en supprimant les constantes de translation et le facteur d'homothétie, la courbe déterminée

$$(19)\quad \begin{cases} x = \log\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} + \cos\varphi\right), \\ y = \varphi - 2\psi, \\ z = \psi - 2\varphi, \\ \operatorname{tang}\dfrac{\psi}{2} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}\operatorname{tang}\dfrac{\varphi}{2}, \end{cases}$$

qu'il serait aisé de construire.

Pour $\delta^2+1-c^2=0$, les formules (18) donnent

$$(20)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\tau}{2\delta}\log\left(\dfrac{\sqrt{1+\delta^2}}{\delta} + \cos\varphi\right), \\ y = \dfrac{\tau}{2\delta}(\varphi - \sqrt{1+\delta^2}\,\psi), \\ z = -\dfrac{\tau}{2}\varphi, \\ \operatorname{tang}\dfrac{\psi}{2} = \dfrac{1}{\delta+\sqrt{1+\delta^2}}\operatorname{tang}\dfrac{\varphi}{2}, \end{cases}$$

Le z de la courbe est donc proportionnel à l'angle φ. Cette courbe ne dépend que d'un seul paramètre δ. Pour $\delta = \tau = 1$ on aura, en changeant la direction de Oz, la courbe suivante :

$$(21)\qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\log(\sqrt{2} + \cos 2z), \\ y = z - \sqrt{2}\,\text{arc tang}\,\frac{1}{1+\sqrt{2}}\,\text{tang}\, z, \end{cases}$$

qu'on pourra facilement construire.

4. *Formules pour les courbes unicursales à torsion constante.* — Revenons aux formules générales

$$(7)\qquad \begin{cases} x + iy = \tau \int \frac{du}{1 + uu_1}, \\ x - iy = \tau \int \frac{du_1}{1 + uu_1}, \\ \quad z = \frac{i\tau}{2} \int \frac{u_1\,du - u\,du_1}{1 + uu_1}, \end{cases}$$

où u et u_1 sont deux fonctions complètement arbitraires d'un même paramètre variable t. Pour les courbes unicursales, comme nous avons vu, les fonctions u et u_1 doivent être algébriques et rationnelles ; et l'on pourra toujours les mettre sous la forme

$$u = \frac{A}{B},$$
$$u_1 = -\frac{C}{B},$$

A, B, C étant des polynômes entiers en t et n'ayant pas des facteurs communs. En portant ces valeurs de u et u_1 dans (7), on aura les formules suivantes :

$$(22)\qquad \begin{cases} x + iy = \tau \int \frac{AB' - BA'}{AC - B^2}\,dt, \\ x - iy = \tau \int \frac{BC' - CB'}{AC - B^2}\,dt, \\ \quad z = \frac{i\tau}{2} \int \frac{CA' - AC'}{AC - B^2}\,dt. \end{cases}$$

Ainsi, si les courbes unicursales à torsion constante existent, elles seront données toutes par ces formules en y prenant pour A, B, C trois polynômes entiers n'ayant pas des facteurs communs. D'ailleurs, il est évident que, sans restreindre la généralité de ces formules, nous pouvons supposer les polynômes A, B, C tous trois complets et de même degré n. Ils seront alors de la forme

$$A = \sum_{p=0}^{p=n} a_p t^p = f(a, t),$$

$$B = \sum_{p=0}^{p=n} b_p t^p = f(b, t),$$

$$C = \sum_{p=0}^{p=n} c_p t^p = f(c, t),$$

d'où

$$u = \frac{f(a, t)}{f(b, t)},$$

$$u_1 = -\frac{f(c, t)}{f(b, t)}.$$

Si l'on remplace t par une expression linéaire quelconque de la forme $\frac{\alpha t' + \beta}{\gamma t' + \delta}$, on aura pour u et u_1 des expressions de la même forme

$$u = \frac{f(a', t')}{f(b', t')},$$

$$u = -\frac{f(c', t')}{f(b', t')},$$

et l'on voit que les seconds membres de (22) conserveront aussi leurs formes par rapport à la nouvelle variable t' et les nouveaux coefficients a', b', c'. Cette remarque nous permet d'introduire, dans ces formules, de nouvelles arbitraires dont on pourra disposer pour simplifier leur expression.

Dans le cas particulier où l'on remplace t par $\frac{1}{t'}$, les nouveaux coefficients a', b', c' s'obtiennent en permutant les indices p et $(n-p)$ des lettres a, b, c. On voit alors que le changement de t

en $\frac{1}{t}$ et la permutation des indices p et $(n-p)$ de coefficients revient au même, de sorte que, non seulement la forme, mais les valeurs des coefficients ne changent pas, si l'on remplace t par $\frac{1}{t}$ et que l'on permute en même temps les indices p et $(n-p)$ de a, b, c.

En se reportant aux expressions de A, B, C, on trouve facilement

$$\mathrm{AB}'-\mathrm{BA}'=\sum_{i=1}^{i=2n-1} t^{i-1}\sum_{p=0}^{p=i}(i-2p)a_p b_{i-p},$$

$$\mathrm{BC}'-\mathrm{CB}'=\sum_{i=1}^{i=2n-1} t^{i-1}\sum_{p=0}^{p=i}(i-2p)b_p c_{i-p},$$

$$\mathrm{CA}'-\mathrm{AC}'=\sum_{i=1}^{i=2n-1} t^{i-1}\sum_{p=0}^{p=i}(i-2p)c_p a_{i-p},$$

$$\mathrm{B}^2-\mathrm{AC}=\sum_{i=0}^{i=2n} t^{i}\sum_{p=0}^{p=i}(b_p b_{i-p}-a_p c_{i-p}),$$

où les indices des lettres a, b, c ne peuvent pas dépasser le nombre n. Si donc on pose

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(\alpha,\beta,t) &= \sum_{i=1}^{i=2n-1} t^{i-1}\sum_{p=0}^{p=i}(i-2p)\alpha_p\beta_{i-p},\\ \psi(\alpha,\beta,\gamma,t) &= \sum_{i=0}^{i=2n} t^{i}\sum_{p=0}^{p=i}(\beta_p\beta_{i-p}-\alpha_p\gamma_{i-p}),\end{aligned}\right.$$

les formules (22) deviennent

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} x+iy &= -\tau\int\frac{\varphi(a,b,t)}{\psi(a,b,c,t)}\,dt,\\ x-iy &= -\tau\int\frac{\varphi(b,c,t)}{\psi(a,b,c,t)}\,dt,\\ z &= -\frac{i\tau}{2}\int\frac{\varphi(c,a,t)}{\psi(a,b,c,t)}\,dt.\end{aligned}\right.$$

Il est facile de voir que ces formules sont absolument générales et que les différents cas des polynômes A, B, C s'en déduisent en particularisant les coefficients indéterminés a, b, c. Ces dernières sont au nombre de $(3n+2)$; mais le nombre des arbitraires utiles dans la question est en réalité plus petit, et, comme on verra, on peut toujours le réduire de quelques unités par la transformation linéaire de t qui, comme nous avons vu, ne change pas la forme de nos formules. A part quelques restrictions que nous allons indiquer, les coefficients a, b, c sont complètement arbitraires. Nous exclurons d'abord le cas où l'un des polynômes A, B, C se réduit à zéro, et celui où deux de ces polynômes se réduisent à des constantes; car alors l'un des trois polynômes φ sera nul et les courbes seront planes. De même on aura des courbes planes, si entre les polynômes φ existe une relation linéaire et homogène. Puis, on voit que l'on ne pourra pas attribuer à ces coefficients des valeurs qui rendent les polynômes A, B, C divisibles par une même quantité, puisque, par hypothèse, ces polynômes n'ont pas de facteurs communs. Ainsi, les trois quantités a_0, b_0, c_0 ne peuvent pas être nulles toutes à la fois, puisque ces valeurs rendent les polynômes A, B, C divisibles par t. Enfin on voit que les trois coefficients a_n, b_n, c_n ne peuvent pas non plus être nuls à la fois; car les polynômes A, B, C ne seraient plus de degré n. Ces restrictions faites, les coefficients a, b, c sont complètement arbitraires, et il s'agit de les déterminer de manière que les trois intégrales (24) soient algébriques. Ces intégrales sont de la forme

$$\int \frac{\varphi}{\psi}\,dt,$$

ψ et φ étant des polynômes entiers en t respectivement des degrés $2n$ et $(2n-2)$. Nous sommes donc ainsi ramenés à chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une différentielle rationnelle s'intègre algébriquement.

CHAPITRE II.

SUR LES INTÉGRALES ALGÉBRIQUES DES DIFFÉRENTIELLES RATIONNELLES.

5. Soient $F(x)$ et $f(x)$ deux polynômes entiers respectivement de degrés m et n, à coefficients indéterminés et par suite irréductibles. Nous allons chercher les conditions auxquelles devront satisfaire les coefficients de ces polynômes pour que la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx \tag{1}$$

soit algébrique. On voit tout d'abord que le polynôme $f(x)$ doit avoir toutes ses racines multiples, c'est-à-dire $f(x)$ doit être de la forme

$$f(x) = a\prod_{i=1}^{i=h}(x-\alpha_i)^{n_i}, \tag{2}$$

les n étant des nombres entiers plus grands que l'unité. Cette égalité équivaut à $(n-h)$ conditions distinctes entre les n coefficients de $f(x)$. Si maintenant on décompose $\frac{F(x)}{f(x)}$ en fractions simples, cette fraction sera de la forme

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} &= \frac{A'_1}{(x-\alpha_1)} + \frac{A'_2}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A'_{n_1}}{(x-\alpha_1)^{n_1}} \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + \frac{A^h_1}{(x-\alpha_h)} + \frac{A^h_2}{(x-\alpha_h)^2} + \ldots + \frac{A^h_{n_h}}{(x-\alpha_h)^{n_h}}, \end{aligned}\right.$$

en supposant que le degré de $F(x)$ est inférieur à celui de $f(x)$. D'ailleurs, si le degré de $F(x)$ est supérieur à celui de $f(x)$, la simple division algébrique nous donnera

$$\frac{F(x)}{f(x)} = E(x) + \frac{F_1(x)}{f(x)},$$

le degré de $F_1(x)$ étant inférieur à celui de $f(x)$, et nous n'aurons plus à nous occuper que de la fraction $\frac{F_1(x)}{f(x)}$ qui est de la forme (3).

On voit que, pour que l'intégrale (1) soit algébrique, il faut et il suffit que l'on ait

$$(4)\qquad A_1^i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots h).$$

Les coefficients de $F(x)$ et de $f(x)$ devront donc satisfaire aux conditions (4) dont le nombre h est égal au nombre des racines distinctes de $f(x)$. On aura donc en tout n conditions entre les $(m+n)$ coefficients de $F(x)$ et $f(x)$, à savoir : les $(n-h)$ conditions (2) entre les coefficients de $f(x)$ seulement et les h conditions (4) entre les coefficients de $F(x)$ et de $f(x)$. On voit par là que, quel que soit le polynôme $F(x)$, on pourra toujours déterminer les n coefficients de $f(x)$, de manière que les conditions (2) et (4) soient satisfaites, c'est-à-dire que l'intégrale (1) soit algébrique; et ceci d'autant de manières différentes qu'il y a de solutions en nombres entiers et positifs pour les quantités p du système d'équations

$$(5)\qquad p_1 + p_2 + \ldots + p_h = n - 2h \qquad \left(h = 1, 2, \ldots \frac{n'}{2}\right),$$

en désignant par $(p_i + 2)$ le degré de multiplicité de la racine α_i de $f(x)$ et par n' le nombre n ou $(n-1)$ selon que n est pair ou impair. Nous allons cependant voir que le polynôme $F(x)$ n'est pas tout à fait arbitraire et qu'il est assujetti à certaines restrictions. En effet, si dans le second membre de (3) on réduit au même dénominateur toutes les fractions simples, pour les ajouter et recomposer la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$, on voit facilement que le coefficient de x^{n-1} dans $F(x)$ doit être la somme $\sum_{i=1}^{i=h} A_1^i$ qui est nulle en vertu de (4). Ainsi, le degré m de $F(x)$ sera donc au plus égal à $(n-2)$. Ceci étant, la somme $\sum_{i=1}^{i=h} A_1^i$ sera identiquement nulle et les h conditions (4) se réduiront à $(h-1)$ conditions distinctes; et, comme ces conditions sont linéaires par rapport aux m coefficients de $F(x)$, on voit que m doit être au moins égal à $(h-1)$. Ainsi, pour que l'intégrale (1) soit algébrique, il faut que le degré m de $F(x)$ satisfasse aux inégalités

$$(6) \qquad \begin{cases} m \leqq n-2, \\ m \geqq h-1. \end{cases}$$

Par exemple, pour $m=0$, on devra avoir $h=1$; et l'on voit que, pour que l'intégrale

$$\int \frac{dx}{f(x)}$$

soit algébrique, il faut et il suffit que $f(x)$ soit de la forme

$$f(x) = A(x-\alpha)^n,$$

A étant une constante quelconque.

Ainsi, pour que l'intégrale (1) soit algébrique, il faut tout d'abord que le degré m de $F(x)$ satisfasse aux conditions (6), et puis les coefficients de $f(x)$ et $F(x)$ devront satisfaire à $(n-1)$ conditions données par (2) et (4). Ces résultats purement théoriques ne sont malheureusement pas applicables dans la pratique, puisqu'ils exigent la connaissance des racines de $f(x)$. Nous allons donc appliquer une autre méthode qui n'exige pas la connaissance des racines de $f(x)$ et qui nous mène directement à $(n-1)$ conditions entre les coefficients de $f(x)$ et $F(x)$.

6. Il est facile de voir que, si l'intégrale (1) est algébrique, sa valeur sera de la forme

$$(7) \qquad \int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx = \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier du degré $(m+1)$ admettant comme racines simples toutes les racines de $f(x)$. Cette forme de l'intégrale nous montre tout d'abord que $(m+1)$ doit être au moins égal au nombre des racines de $f(x)$. C'est la seconde condition (6) que nous avons déjà démontrée autrement. Soient maintenant $F_1(x)$ et $F_2(x)$ deux polynômes de degrés m_1 et m_2.

Si les intégrales

$$I_1 = \int \frac{F_1(x)}{f(x)}\,dx,$$

$$I_2 = \int \frac{F_2(x)}{f(x)}\,dx$$

sont algébriques, leurs valeurs seront de la forme

$$I_1 = \frac{\varphi_1(x)}{f(x)},$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2(x)}{f(x)},$$

$\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ étant respectivement des degrés (m_1+1) et (m_2+1), et admettant toutes les h racines de $f(x)$. Donc, si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont tous les deux du degré $(h-1)$, les polynômes φ_1 et φ_2 ne pourront différer que par un facteur constant ; et l'on aura alors

$$I_2 = AI_1, \qquad \text{d'où} \qquad F_2 = AF_1.$$

On voit que, dans ce cas, le polynôme $F(x)$ est complètement déterminé.

En différentiant les deux membres de l'égalité (7), on aura

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{-\varphi(x)f'(x)+f(x)\varphi'(x)}{f^2(x)},$$

d'où

$$(8) \qquad f(x)\,F(x) = f(x)\,\varphi'(x) - \varphi(x)\,f'(x).$$

Les polynômes $f(x)$, $F(x)$ et $\varphi(x)$ sont de la forme

$$f(x) = \sum_{p=0}^{p=n} a_p x^{n-p},$$

$$F(x) = \sum_{p=0}^{p=m} b_p x^{m-p},$$

$$\varphi(x) = \sum_{p=0}^{p=m+1} c_p x^{m+1-p},$$

et l'on aura

$$f(x)\,\mathrm{F}(x) = \sum_{i=0}^{i=m+n} x^{m+n-i} \sum_{p=0}^{p=i} a_p b_{i-p},$$

$$f(x)\,\varphi'(x) - \varphi(x)\,f'(x) = \sum_{i=0}^{i=m+n} x^{m+n-i} \sum_{p=0}^{p=i} (m-n+1-i+2p)\,a_p c_{i-p},$$

où les indices des lettres a, b, c ne doivent pas dépasser respectivement les nombres n, m et $m+1$. L'égalité (8) donnera alors

$$\sum_{i=0}^{i=m+n} x^{m+n-i} \sum_{p=0}^{p=i} [b_{i-p} + (n-m-1+i-2p)c_{i-p}]\,a_p = 0,$$

et en égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de x, on aura les $(m+n+1)$ relations suivantes :

$$(9) \qquad \sum_{p=0}^{p=i} [b_{i-p} + (n-m-1+i-2p)c_{i-p}]\,a_p = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, m+n),$$

entre les trois groupes des coefficients a, b et c. Elles sont homogènes et bilinéaires par rapport aux quantités a d'une part et aux quantités b et c d'autre part. On pourra donc facilement éliminer les $(m+2)$ coefficients c de $\varphi(x)$, et l'on aura les $(n-1)$ conditions cherchées entre les coefficients a et b de $f(x)$ et de $\mathrm{F}(x)$. Posons, pour abréger l'écriture,

$$\sum_{p=0}^{p=i} a_p b_{i-p} = -\mathrm{S}_i,$$

$$n - m - 1 = k \geqq 1;$$

les $(m+2)$ premières relations (9) donneront alors

$$\begin{array}{l}
k a_0 c_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \mathrm{S}_0, \\
(k-1)a_1 c_0 + (k+1)a_0 c_1 \ldots\ldots\ldots\ldots = \mathrm{S}_1, \\
(k-2)a_2 c_0 + k a_1 c_1 + (k+2)a_0 c_2 \ldots\ldots\ldots = \mathrm{S}_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(k-q)a_q c_0 + (k-q+2)a_{q-1} c_1 + \ldots + (k+q-2)a_1 c_{q-1} + (k+q)a_0 c_q = \mathrm{S}_q, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
(k-m-1)a_{m+1} c_0 + (k-m+1)a_m c_1 + \ldots + (k+m-1)a_1 c_m + (k+m+1)a_0 c_{m+1} = \mathrm{S}_{m+1},
\end{array}$$

C'est un système de $(m+2)$ équations linéaires et réduites à la forme classique. Elles sont donc distinctes et déterminent les $(m+2)$ coefficients c de $\varphi(x)$. Si l'on ne considère que les $(q+1)$ premières équations, le déterminant Δ des coefficients de $c_0, c_1, \ldots, c_q$ sera

$$\Delta = \begin{vmatrix} ka_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ (k-1)a_1 & (k+1)a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & & \ldots & \ldots\ldots \\ (k-q)a_q & (k-q+2)a_{q-1} & & \ldots & (k+q)a_0 \end{vmatrix} = k(k+1)\ldots(k+q)a_0^{q+1},$$

qui est bien différent de zéro; et, en désignant par $A_0, A_1, \ldots, A_q$ les coefficients des éléments de la dernière colonne dans le développement de Δ, on aura pour c_q la valeur suivante :

$$(10) \qquad c_q = \frac{A_0 S + A_1 S_1 + \ldots + A_q S_q}{k(k+1)\ldots(k+q)a_0^{q+1}} = \frac{\sum_{r=0}^{r=q} A r S r}{k(k+1)\ldots(k+q)a_0^{q+1}}$$

en fonction des a et b. Si l'on y fait $q = 0, 1, \ldots, (m+1)$, on aura tous les coefficients c de $\varphi(x)$; et, en portant leurs valeurs dans les $(n-1)$ dernières relations (9), on aura les $(n-1)$ conditions suivantes :

$$(11) \qquad \sum_{p=0}^{p=i} \left[b_p + \frac{k-i+2p}{k(k+1)\ldots(k+p)a_0^{p+1}} \sum_{q=0}^{q=p} A_q S_q \right] a_{i-p} = 0$$

$$i = m+2, m+3, \ldots, m+n$$

entre les coefficients a et b de polynômes $f(x)$ et $F(x)$. Pour chaque système de valeurs des coefficients a et b satisfaisant aux conditions (11), l'intégrale (1) sera algébrique, et en même temps la formule (10) donnera la valeur de cette intégrale.

Comme application de ces formules, nous allons considérer le cas de $m = 0$. On aura alors

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

$$F(x) = b_0,$$

$$\varphi(x) = c_0 x + c_1;$$

et les formules (9) donneront les $(n+1)$ relations suivantes :

$$[b_0+(n-i-1)c_0]\,a_i+(n-i+1)\,a_{i-1}c_1=0 \qquad (i=0,1,\ldots,n).$$

Les deux premières seront

$$\begin{aligned} b_0+(n-1)c_0 \qquad\qquad\qquad &= 0,\\ [b_0+(n-2)c_0]\,a_1+na_0c_1 &= 0. \end{aligned}$$

Elles déterminent c_0 et c_1

$$c_0=-\frac{1}{n-1}\,b_0,$$

$$c_1=-\frac{1}{n(n-1)}\,b_0\,\frac{a_1}{a_0},$$

d'où

$$\varphi(x)=-\frac{b_0}{n-1}\left(x+\frac{a_1}{na_0}\right);$$

et, en portant leurs valeurs dans les $(n-1)$ dernières, on aura la formule récurrente très simple

$$a_i=\frac{n-i+1}{in}\,\frac{a_1}{a_0}\,a_{i-1} \qquad (i=2,3,\ldots,n)$$

qui lie deux coefficients consécutifs quelconques de $f(x)$. On en tire facilement

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_0} &= \frac{n}{1}\left(\frac{a_1}{na_0}\right),\\ \frac{a_2}{a_0} &= \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{a_1}{na_0}\right)^2,\\ \frac{a_3}{a_0} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{a_1}{na_0}\right)^3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \frac{a_i}{a_0} &= \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i}\left(\frac{a_1}{na_0}\right)^i,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \frac{a_n}{a_0} &= \left(\frac{a_1}{na_0}\right)^n; \end{aligned}$$

d'où

$$f(x)=a_0\left(x+\frac{a_1}{na_0}\right)^n,$$

c'est-à-dire que les conditions précédentes expriment simplement que $f(x)$ doit avoir toutes ses racines égales à $-\frac{a_1}{na_0}$. On arrive plus vite au résultat en remarquant que, d'après (6), $f(x)$ ne peut avoir qu'une seule racine ; et, comme cette racine doit être celle de $\varphi(x) = -\frac{b_0}{n-1}\left(x+\frac{a_1}{na_0}\right)$, on aura $f(x) = a_0\left(x+\frac{a_1}{na_0}\right)^n$. En développant le second membre et égalant les coefficients des mêmes puissances, on aura les valeurs de a_2, a_3, ..., a_n précédemment trouvées.

Nous avons supposé les polynômes $F(x)$ et $f(x)$ irréductibles ; mais il est facile de voir que l'égalité (8), et par suite toutes les formules que nous en avons déduites, subsistent encore lorsque $F(x)$ et $f(x)$ admettent un facteur commun quelconque P de degré p ; et ce cas sera compris dans nos formules comme un cas particulier. Seulement, si le facteur commun P est donné, les deux membres de (8) contiennent explicitement le facteur P^2, et, en le supprimant, on aura $2p$ relations de moins à étudier. En général, nos formules s'appliquent à tous les cas et quelle que soit la forme sous laquelle les polynômes $F(x)$ et $f(x)$ sont donnés. Mais il n'est pas toujours nécessaire de les appliquer sous leur forme générale, et dans certains cas elles peuvent être simplifiées. Ainsi, si $f(x)$ est donné sous la forme

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\ldots(x-\alpha_h)^{n_h},$$

le polynôme $\varphi(x)$ sera de la forme

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_h)\psi(x),$$

$\psi(x)$ étant un polynôme de degré $(m+1-h)$. Les deux membres de l'égalité (8) seront alors divisibles par $f(x)$; de sorte que cette égalité prendra la forme

$$F(x) = P\,\psi'(x) - \psi(x)Q, \tag{12}$$

où l'on désigne par P et Q les polynômes entiers

$$P = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_h),$$

$$Q = P\left(\frac{n_1-1}{x-\alpha_1}+\ldots+\frac{n_h-1}{x-\alpha_h}\right).$$

Cette égalité ne nous conduit qu'à $(m+1)$ relations entre les coefficients de $F(x)$ et de $\psi(x)$, et les racines de $f(x)$; et l'on n'aura à éliminer que les $(m+1-h)$ coefficients de $\psi(x)$, après quoi il en restera $(h-1)$ conditions entre les racines de $f(x)$ et les coefficients de $F(x)$.

Si l'on a, de plus, $n_1 = n_2 = \ldots = n_h$, c'est-à-dire si $f(x)$ est de la forme

$$f(x) = P^k,$$

on aura $Q = (k-1)P'$ et l'égalité (12) deviendra

$$F(x) = P\psi'(x) - (k-1)\psi(x)P'. \tag{13}$$

Si l'on met les polynômes P, F et ψ sous la forme

$$P = \sum_{p=0}^{p=h} a_p x^p,$$

$$F(x) = \sum_{p=0}^{p=m} b_p x^p,$$

$$\psi(x) = \sum_{p=0}^{p=m+1-h} c_p x^p,$$

l'égalité précédente donnera

$$\sum_{i=0}^{i=m} x^i \left[b_i - \sum_{p=0}^{p=i+1} (i+1-kp) a_p b_{i+1-p} \right] = 0;$$

et, en égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de x, on aura les $(m+1)$ relations suivantes

$$\sum_{p=0}^{p=i} (i+1-kp) a_p c_{i+1-p} = b_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, m), \tag{14}$$

entre les coefficients a, b et c. Elles sont beaucoup plus simples que les relations (9).

Comme application nous allons examiner le cas de $h=2$. Le polynôme P sera alors de la forme

$$P = (x-\alpha)(x-\beta),$$

et, comme α et β, par hypothèse, sont distincts, on pourra toujours par une transformation linéaire le ramener à la forme

$$P = x^2 + 1.$$

On aura alors $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$; et, en portant ces valeurs dans (14), on aura les $(m+1)$ relations suivantes

$$(i+1)\, c_{i+1} + (i+1-2k)\, c_{i-1} = b_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, m),$$

pour déterminer les m coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$; et, en les éliminant, on aura une relation de condition entre les coefficients b.

Dans ce système d'équations, les inconnues c d'indices pairs et d'indices impairs sont complètement séparées et, tandis que pour les premières le nombre des équations est égal au nombre des inconnues, il y a une équation de trop pour les dernières.

Ces équations, qu'on obtient en donnant à i les valeurs paires, seront

$$\begin{aligned}
c_1 &= b_0, \\
c_3 &= \frac{1}{3} b_2 + \frac{2k-3}{3} c_1, \\
c_5 &= \frac{1}{5} b_4 + \frac{2k-5}{5} c_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
c_{m'-1} &= \frac{1}{m'-1} b_{m'-2} + \frac{2k-m'+1}{m'-1} c_{m'-3}, \\
(2k - m' - 1)\, c_{m'-1} &+ b_{m'} = 0,
\end{aligned}$$

en désignant par m' le nombre m ou $(m-1)$ suivant que m est pair ou impair. Multiplions les $\frac{m'}{2}$ premières égalités respectivement par

$$1, \quad \frac{1}{2k-3}, \quad \frac{1.3}{(2k-3)(2k-5)}, \quad \frac{1.3.5}{(2k-3)(2k-5)(2k-7)}, \quad \ldots;$$

ajoutons-les membre à membre et portons-les dans la dernière; on aura alors la relation suivante entre les coefficients b

$$(15) \qquad \sum_{i=0}^{i=\frac{m'}{2}} \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{(2k-3)(2k-5)\ldots(2k-2i-1)}\, b_{2i} = 0.$$

en convenant d'y remplacer par l'unité le coefficient numérique lorsqu'il devient négatif (pour $i=0$).

Ainsi, pour que l'intégrale

$$\int \frac{F(x)}{(x^2+1)^k}\,dx,$$

où l'on a

$$F(x)=\sum_{i=0}^{i=m} b_i x^i \quad (m \leqq 2k-2),$$

soit algébrique, il faut et il suffit que les coefficients b de $F(x)$ satisfassent à la relation (15). Cette relation ne contient que les coefficients des puissances paires, ce qui était d'ailleurs évident *a priori,* puisque les termes des puissances impaires s'intègrent séparément par des fonctions algébriques.

7. Si l'on compare les $(n-1)$ conditions (11) aux conditions (2) et (4), on voit qu'entre ces $(n-1)$ conditions on doit avoir $n-h \geqq \frac{n}{2}$ relations qui ne contiennent que les coefficients a de $f(x)$, et dont chacune exprime l'égalité de deux racines quelconques de ce polynôme; et $h-1 \leqq \frac{n}{2}-1$ relations entre les coefficients a et b. Or les $(n-1)$ relations (11) sont linéaires et homogènes par rapport aux $(m+1)$ coefficients b, et leur élimination ne conduira, en général, qu'à $(n-1-m)$ conditions entre les coefficients a de $f(x)$. Donc, si ce nombre est inférieur à $\frac{n}{2}$, le polynôme $f(x)$ admettra nécessairement un certain nombre de racines simples. Et comme l'intégrale $\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx$ sera tout de même algébrique, puisque l'égalité (8) est satisfaite, on voit que, dans ce cas, les valeurs des coefficients b, déterminées par les relations (11) en fonction des coefficients a, seront nécessairement telles que le polynôme $F(x)$ contiendra en facteur les binômes répondant aux racines simples de $f(x)$, à moins qu'on se donne certaines relations entre les coefficients a pour rendre multiples toutes les racines de $f(x)$. Le nombre de relations qui contiennent les b se réduira alors nécessairement à $(h-1)$, et les coefficients b ne seront plus déterminés si $m > h-1$. Pour $m = h-1$, les coef-

ficients b de $F(x)$ seront complètement déterminés en fonction des coefficients a de $f(x)$; et, pour $m < h - 1$, on aura impossibilité.

Tout ceci est bien conforme aux résultats précédemment obtenus. Pour expliquer les raisonnements que nous venons d'exposer, nous allons examiner le cas simple de $n = 3$ et $m = 1$. On aura alors

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3, \\ F(x) &= b_0 x + b_1, \\ \varphi(x) &= c_0 x^2 + c_1 x + c_2, \end{aligned}$$

et les formules (9) donneront les cinq relations suivantes :

$$\sum_{p=0}^{p=i} a_p [b_{i-p} + (1 + i - 2p) c_{i-p}] = 0 \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

En les développant, on aura

$$\begin{aligned} a_0(b_0 + c_0) &= 0, \\ a_0(b_1 + 2c_1) + a_1 b_0 &= 0, \\ 3a_0 c_2 + a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_0 - c_0) &= 0, \\ 2a_1 c_2 + a_2 b_1 + a_3(b_0 - 2c_0) &= 0, \\ a_2 c_2 + a_3(b_1 - c_1) &= 0. \end{aligned}$$

Les trois premières donneront les coefficients c de $\varphi(x)$

$$\begin{aligned} c_0 &= -\, b_0, \\ c_1 &= -\frac{a_0 b_1 + b_0 a_1}{2a_0}, \\ c_2 &= +\frac{a_1(a_0 b_1 + b_0 a_1) - 2a_0(a_1 b_1 + 2a_2 b_0)}{6a_0^2}, \end{aligned}$$

et, en portant dans les deux dernières, on aura les deux relations suivantes

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} (a_1^3 - 4a_0 a_1 a_2 + 9a_0^2 a_3) b_0 + a_0(3a_0 a_2 - a_1^2) b_1 &= 0, \\ (a_1^2 a_2 - 4a_0 a_2^2 + 3a_0 a_1 a_3) b_0 + a_0(9a_0 a_3 - a_1 a_2) b_1 &= 0, \end{aligned} \right.$$

qui sont linéaires et homogènes par rapport aux coefficients b_0 et b_1 de $F(x)$. En les éliminant, on aura la relation suivante entre les coefficients a de $f(x)$

$$(17) \qquad 4a_0 a_2^3 + 4a_1^3 a_3 + 27a_0^2 a_3^2 - a_1^2 a_2^2 - 18a_0 a_1 a_2 a_3 = 0.$$

Cette égalité, comme nous l'avons fait remarquer, doit exprimer l'égalité de deux racines de $f(x)$. Il est d'ailleurs facile de le voir directement. En effet, soient α, β et γ les trois racines de $f(x)$. On aura alors

$$\alpha+\beta+\gamma = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{a_2}{a_0},$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{a_3}{a_0}.$$

Si donc deux de ces racines, γ et β par exemple, sont égales, on devra avoir

$$\alpha+2\beta = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$\beta(\beta+2\alpha) = \frac{a_2}{a_0},$$

$$\alpha\beta^2 = -\frac{a_3}{a_0},$$

et, en éliminant α et β, on aura la relation cherchée entre les coefficients a de $f(x)$. Cette élimination peut se faire de la manière suivante : Si l'on élimine d'abord α entre les deux premières, on aura

$$3\beta^2+2\frac{a_1}{a_0}\beta+\frac{a_2}{a_0}=0.$$

Si maintenant on tire α de la dernière, qu'on porte sa valeur dans les deux premières et qu'on élimine ensuite β^3, on aura

$$\beta^2+2\frac{a_2}{a_1}\beta+3\frac{a_3}{a_1}=0;$$

et, en résolvant ces deux équations linéaires par rapport à β et β^2, on aura

$$\beta = \frac{a_1a_2-9a_0a_3}{2(3a_0a_2-a_1^2)}, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \frac{a_1^3-4a_0a_1a_2+9a_0^2a_3}{a_0(3a_0a_2-a_1^2)},$$

$$\beta^2 = \frac{3a_1a_3-a_2^2}{3a_0a_2-a_1^2}.$$

On a ainsi les valeurs de racines α et β en fonctions rationnelles des coefficients a de $f(x)$. En égalant le carré de la valeur de β à la valeur de β^2, on trouve la condition (17) entre les coefficients a. Si cette condition est satisfaite, les deux relations (16) se réduisent à une seule et déterminent le rapport $\frac{b_1}{b_0}$:

$$\frac{b_1}{b_0} = \frac{a_1^3 - 4a_0a_1a_2 + 9a_0^2a_3}{a_0(a_1^2 - 3a_0a_2)} = -\alpha.$$

On aura alors

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0(x-\alpha)(x-\beta)^2, \\ \mathrm{F}(x) &= b_0(x-\alpha), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que le polynôme $\mathrm{F}(x)$ contiendra en facteur le facteur binôme simple $(x-\alpha)$ de $f(x)$, à moins qu'on ne se donne entre les coefficients a de $f(x)$ une relation de plus qui rende les trois racines égales. Il est, en effet, facile de voir que, dans ce cas, les deux équations (16) sont identiquement satisfaites, et les valeurs des coefficients b de $\mathrm{F}(x)$ restent complètement indéterminées.

CHAPITRE III.

DÉVELOPPEMENT DES FORMULES RELATIVES AUX COURBES UNICURSALES A TORSION CONSTANTE.

8. Reprenons les formules (24) du premier Chapitre

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x + iy &= -\tau \int \frac{\varphi(a, b, t)}{\psi(a, b, c, t)}\, dt, \\ x - iy &= -\tau \int \frac{\varphi(b, c, t)}{\psi(a, b, c, t)}\, dt, \\ z &= -\frac{i\tau}{2} \int \frac{\varphi(a, c, t)}{\psi(a, b, c, t)}\, dt, \end{aligned} \right.$$

en désignant par φ et ψ les polynômes des degrés $2n-2$ et $2n$ définies par

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(\alpha, \beta, t) &= \sum_{i=1}^{i=2n-1} t^{i-1} \sum_{p=0}^{p=i} (i-2p)\alpha_p\beta_{i-p}, \\ \psi(\alpha, \beta, \gamma, t) &= \sum_{i=0}^{i=2n} t^i \sum_{p=0}^{p=i} (\beta_p\beta_{i-p} - \alpha_p\gamma_{i-p}. \end{aligned} \right.$$

Nous avons vu que, si les courbes unicursales à torsion constante existent, elles seront données toutes par les formules (1). Les polynômes φ et ψ dépendent de $(3n+2)$ indéterminées a, b, c qui, à part les restrictions indiquées à la fin du premier Chapitre, sont complètement arbitraires; et il s'agit de les déterminer de manière que les trois intégrales (1) soient algébriques. Or, si ces intégrales sont algébriques, leurs valeurs seront de la forme

$$\int \frac{\varphi(a, b, t)}{\psi(a, b, c, t)}\, dt = \frac{\lambda(\gamma', t)}{\psi(a, b, c, t)},$$

$$\int \frac{\varphi(b, c, t)}{\psi(a, b, c, t)}\, dt = \frac{\lambda(\gamma^2, t)}{\psi(a, b, c, t)},$$

$$\int \frac{\varphi(c, a, t)}{\psi(a, b, c, t)}\, dt = \frac{\lambda(\gamma^3, t)}{\psi(a, b, c, t)},$$

en désignant par λ un polynôme de degré $2n-1$ de la forme

$$\lambda(\gamma, t) = \sum_{p=0}^{p=2n-1} \gamma_p t^{2n-1-p},$$

et en appliquant à ces intégrales les formules (9), (10) et (11) du Chapitre II, on aura d'abord les $3(4n-1)$ équations suivantes

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{p=0}^{p=i} [\beta^r_{i-p} + (1+i-2p)\gamma^r_{i-p}]\alpha_p = 0, \\ \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, 4n-2; \\ \qquad\qquad r = 1, 2, 3, \end{array} \right.$$

en désignant par α et β les coefficients des polynômes ψ et φ

$$\alpha_{2n-i} = \sum_{p=0}^{p=i} (b_p b_{i-p} - a_p c_{i-p}),$$

$$\beta'_{2n-i} = \sum_{p=0}^{p=i-1} (i-1-2p) a_p b_{i-1-p},$$

$$\beta^2_{2n-i} = \sum_{p=0}^{p=i-1} (i-1-2p) b_p c_{i-1-p},$$

$$\beta^3_{2n-i} = \sum_{p=0}^{p=i-1} (i-1-2p) c_p a_{i-1-p}.$$

Si maintenant on pose

$$S_i^r = \sum_{p=0}^{p=i} \alpha_p \beta_{i-p}^r, \qquad (r = 1, 2, 3),$$

et qu'on désigne par A_0, A_1, ..., A_i les coefficients des éléments de la dernière colonne dans le développement de déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 3\alpha_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1-i)\alpha_i & (3-i)\alpha_{i-1} & & \dots & & (1+i)\alpha_0 \end{vmatrix},$$

on aura la formule suivante

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_i^r = -\dfrac{1}{1.2\ldots(i+1)\alpha_0^{i+1}} \displaystyle\sum_{p=0}^{p=i} A_p S_p^r, \\ i = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1, \\ r = 1, 2, 3, \end{array} \right.$$

qui donnera les $6n$ coefficients γ en fonction des coefficients a et β; et en portant leurs valeurs dans les dernières $2(2n-1)$ relations (3), on aura entre les coefficients des polynômes φ et ψ trois groupes de $(2n-1)$ relations de la forme

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{p=0}^{p=i} \alpha_{i-p} \left[\beta_p^r - \frac{1-i+2p}{1.2\ldots(p+1)\alpha_0^{p+1}} \sum_{q=0}^{q=p} A_q S_q^r \right] = 0, \\ i = 2n, 2n+1, \ldots, 4n-2, \\ r = 1, 2, 3. \end{array} \right.$$

Ces trois groupes ne diffèrent que par les indices supérieurs des β, et comme, parmi les $(2n-1)$ relations de chaque groupe, il y aura nécessairement $(2n-h)$ qui ne contiendront pas les β, h étant le nombre des racines distinctes de ψ, on voit qu'elles seront les mêmes pour les trois groupes. On n'aura donc en tout que $(2n+2h-3)$ conditions entre les coefficients des polynômes φ et ψ, c'est-à-dire entre les $(3n+2)$ coefficients a, b, c.

Pour que le nombre des conditions ne dépasse pas le nombre des arbitraires, il faudra que l'on ait $h \leqq \frac{n+5}{2}$. Ainsi le nombre relatif des arbitraires sera d'autant plus grand que le nombre des racines distinctes de ψ sera plus petit.

Comme application de ces formules, nous allons examiner le cas de $n = 2$ (pour $n = 1$, les courbes seront planes). On aura alors

$$\begin{aligned}
\psi &= \alpha_0 t^4 + \alpha_1 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t + \alpha_4,\\
\varphi &= \beta_0 t^2 + \beta_1 t + \beta_2,\\
\lambda &= \gamma_0 t^3 + \gamma_1 t^2 + \gamma_2 t + \gamma_3,
\end{aligned}$$

et les formules (3) donneront trois groupes de sept équations de la forme

$$\sum_{p=0}^{p=i} [\beta_{i-p} + (1 + i - 2p)\gamma_{i-p}]\alpha_p = 0, \qquad (i = 0, 1, \ldots, 6),$$

qu'on obtiendra en affectant les lettres β et γ des indices supérieurs 1, 2 et 3. En les développant, on aura

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\alpha_0(\beta_0 + \gamma_0) &= 0,\\
\alpha_0(\beta_1 + 2\gamma_1) + \alpha_1\beta_0 &= 0,\\
\alpha_0(\beta_2 + 3\gamma_2) + \alpha_1(\beta_1 + \gamma_1) + \alpha_2(\beta_0 - \gamma_0) &= 0,\\
4\alpha_0\gamma_3 + \alpha_1(\beta_2 + 2\gamma_2) + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3(\beta_0 - 2\gamma_0) &= 0,\\
3\alpha_1\gamma_3 + \alpha_2(\beta_2 + \gamma_2) + \alpha_3(\beta_1 - \gamma_1) + \alpha_4(\beta_0 - 3\gamma_0) &= 0,\\
2\alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_4(\beta_1 - 2\gamma_1) &= 0,\\
\alpha_3\gamma_3 + \alpha_4(\beta_2 - \gamma_2) &= 0.
\end{aligned}\right.$$

On aura trois systèmes analogues en affectant les β et γ des indices supérieurs 1, 2 et 3. On a d'abord deux solutions évidentes

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \qquad (\alpha_4 \gtrless 0),$$

et

$$\alpha_0 \lessgtr 0, \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

En effet, pour ces valeurs des coefficients α les trois systèmes (6) sont satisfaits et déterminent simplement les γ en fonction des coefficients β

$$\gamma_0 = \frac{1}{3}\beta_0, \qquad \gamma_1 = \frac{1}{2}\beta_1, \qquad \gamma_2 = \beta_2, \qquad \gamma_3 = \frac{0}{0},$$

et

$$\gamma_0 = -\beta, \qquad \gamma_1 = -\frac{1}{2}\beta_1, \qquad \gamma_2 = -\frac{1}{3}\beta_2, \qquad \gamma_3 = 0.$$

Ces deux solutions répondent aux mêmes courbes, puisqu'on passe de l'une à l'autre par la transformation linéaire de t en $\frac{1}{t}$ qui, comme nous avons vu, ne change pas la forme des courbes (1). Nous pouvons donc nous borner à examiner l'une de ces solutions, la seconde par exemple; on aura alors

$$\lambda(\gamma, t) = -\left(\beta_0 t^3 + \frac{1}{2}\beta_1 t^2 + \frac{1}{3}\beta_2 t\right),$$
$$\psi(a, b, c, t) = \alpha_0 t^4,$$

et les formules (1) donneront la cubique gauche

$$(7)\qquad \begin{cases} x + iy = \dfrac{\tau}{\alpha_0}\left(\beta_0^1 \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{2}\beta_1^1 \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{3}\beta_2^1 \dfrac{1}{t^3}\right), \\ x - iy = \dfrac{\tau}{\alpha_0}\left(\beta_0^2 \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{2}\beta_1^2 \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{3}\beta_2^2 \dfrac{1}{t^3}\right), \\ iz = -\dfrac{\tau}{2\alpha_0}\left(\beta_0^3 \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{2}\beta_1^3 \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{3}\beta_2^3 \dfrac{1}{t^3}\right), \end{cases}$$

qui dépend de huit arbitraires a, b, c assujetties à satisfaire aux quatre conditions

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

En se reportant aux valeurs de α en fonction des coefficients a, b, c, on aura entre ces dernières les quatre relations suivantes :

$$(8)\qquad \begin{cases} b_0^2 - a_0 c_0 = 0, \\ 2 b_0 b_1 - (a_0 c_1 + c_0 a_1) = 0, \\ 2 b_0 b_2 + b_1^2 - (a_0 c_2 + a_1 c_1 + c_0 a_2) = 0, \\ 2 b_1 b_2 - (a_1 c_2 + c_1 a_2) = 0. \end{cases}$$

Nous supposerons d'abord les trois quantités a_0, b_0, c_0 différentes de zéro. Les équations (8) donneront alors

$$b_0 = \sqrt{a_0 c_0},$$
$$b_1 = \frac{a_0 c_1 + c_0 a_1}{2\sqrt{a_0 c_0}},$$
$$b_2 = \frac{4 a_0 c_0 a_2 + a_1 (a_0 c_1 - c_0 a_1)}{4 a_0 \sqrt{a_0 c_0}},$$
$$c_2 = \frac{4 a_0 c_0^2 a_2 + (a_0^2 c_1^2 - c_0^2 a_1^2)}{4 a_0^2 c_0}.$$

En portant ces valeurs dans (7), on aura la courbe

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} x + iy &= ak\left[\frac{1}{3}u^3 + \alpha u^2 + (2\alpha^2 - \gamma)u\right] \\ x - iy &= \frac{1}{a}k\left[\frac{1}{3}u^3 + \beta u^2 + (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma)u\right] \\ iz &= k\left[\frac{1}{3}u^3 + \frac{\alpha+\beta}{2}u^2 + (\alpha^2 + \alpha\beta - \gamma)u\right] \end{aligned}\right\} ds^2 = \frac{\tau^2}{\alpha^2 - \gamma}du^2.$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{1}{t} = u, \qquad \sqrt{\frac{a_0}{c_0}} = a, \qquad \frac{a_1}{2a_0} = \alpha,$$
$$\frac{c_1}{2c_0} = \beta, \qquad \frac{a_2}{a_0} = \gamma, \qquad \frac{\tau}{(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha^2)} = k.$$

C'est une cubique gauche rectifiable dont les coordonnées sont des fonctions entières de troisième degré de l'arc, et qui, comme il est facile de le vérifier, a ses deux courbures constantes. Elle dépend de quatre paramètres a, α, β et γ, sans compter le facteur d'homothétie k et les constantes qu'on peut toujours ajouter. Elle est donc plus générale que la cubique (6) du Chapitre I, qui ne dépend que d'un seul paramètre. On peut la réduire à une forme plus simple. Pour cela nous allons résoudre les trois équations (9) par rapport à u, u^2 et u^3. On aura alors

$$(1 + a^2)x + i(1 - a^2)y - 2iaz = ak(\alpha - \beta)^2 u,$$
$$(\beta + \alpha a^2)x + i(\beta - \alpha a^2)y - ia(\alpha + \beta)z = -ak(\alpha - \beta)^2 \frac{1}{2}u^2,$$
$$(\beta - \alpha a^2)x + i(\beta + \alpha a^2)y = -ak(\alpha - \beta)\left[\frac{1}{3}u^3 + (\alpha^2 - \alpha\beta - \gamma)u\right].$$

Si maintenant on fait d'abord tourner le plan xOy autour de Oz d'un angle dont la tangente trigonométrique est égale à $\frac{i(\beta-\alpha a^2)}{\beta+\alpha a^2}$, et ensuite le nouveau plan $x'Oz$ autour de Oy' d'un angle dont la tangente trigonométrique est égale à $\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{i(\alpha+\beta)}$, on aura

$$x'+iy'=k\sqrt{\alpha\beta}(\alpha-\beta)u,$$
$$iy'=-\frac{k(\alpha-\beta)}{2\sqrt{\alpha\beta}}\left[\frac{1}{3}u^3+(\alpha^2-\alpha\beta-\gamma)u\right],$$
$$iz'=k(\alpha-\beta)\frac{1}{2}u^2,$$

ou bien, en supprimant les indices et en posant $\sqrt{\alpha\beta}=m$, $\alpha^2-\gamma=n$, $\frac{\tau}{\gamma-\alpha^2}=p$, on aura

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} x+iy&=mpu\\ x-iy&=\frac{1}{m}p\left[\frac{1}{3}u^3+nu\right]\\ iz&=p\frac{1}{2}u^2\end{aligned}\right\}\quad ds=p\sqrt{n}\,du.$$

Sous cette forme on voit qu'elle ne dépend en réalité que de deux paramètres m et n.

Exemple numérique. — Pour $p=m=n=1$, on aura la courbe

$$x+iy=s,$$
$$x-iy=s\left(\frac{1}{3}s^2+1\right),$$
$$iz=\frac{1}{2}s^2.$$

Dans les calculs précédents nous avons supposé les trois quantités a_0, b_0 et c_0 différentes de zéro. Si l'une de ces quantités, a_0 par exemple, est nulle, les équations (8) donneront

$$a_0=b_0=a_1=0,\qquad b_1=\sqrt{c_0a_2},\qquad b_2=\frac{1}{2}c_1\sqrt{\frac{a_2}{c_0}},$$

et, en portant ces valeurs dans (7), on aura la courbe

$$\begin{aligned}
x + iy &= aku,\\
x - iy &= \frac{1}{a} k \left[\frac{1}{3} u^3 + \alpha u^2 + (2\alpha^2 - \beta) u\right],\\
iz &= k\left(\frac{1}{2} u^2 + \alpha u\right),
\end{aligned}$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{1}{t} = u, \qquad \sqrt{\frac{a_2}{c_0}} = a, \qquad \frac{1}{2}\frac{c_1}{c_0} = \alpha, \qquad \frac{c_2}{c_0} = \beta, \qquad \frac{\tau}{\beta - \alpha^2} = k.$$

Il est facile de voir que cette courbe ne diffère de (10) que par le choix de la variable u. Il suffit, en effet, d'y remplacer u par $(u - \alpha)$ pour la ramener à la forme (10).

Revenons maintenant aux équations (6). Les quatre premières de ces équations détermineront les valeurs suivantes des quantités γ en fonction des quantités α et β :

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= -\beta_0,\\
\gamma_1 &= -\frac{1}{2\alpha_0}(\alpha_0\beta_1 + \beta_0\alpha_1),\\
\gamma_2 &= -\frac{1}{6\alpha_0^2}[2\alpha_0(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_0) - \alpha_1(\alpha_0\beta_1 + \beta_0\alpha_1)],\\
\gamma_3 &= -\frac{1}{12\alpha_0^3}[3\alpha_0(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + 3\alpha_3\beta_0)\\
&\qquad - 2\alpha_0\alpha_1(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_0) + \alpha_1^2(\alpha_0\beta_1 + \beta_0\alpha_1)].
\end{aligned}$$

et, en les portant dans les trois dernières, on aura les trois équations suivantes :

$$(11) \qquad \left\{\begin{aligned}
A_1^1\beta_0 + A_1^2\beta_1 + A_1^3\beta_2 &= 0,\\
A_2^1\beta_0 + A_2^2\beta_1 + A_2^3\beta_2 &= 0,\\
A_3^1\beta_0 + A_3^2\beta_1 + A_3^3\beta_2 &= 0.
\end{aligned}\right.$$

Les A étant des fonctions des coefficients α seulement et définies par

$$\begin{aligned}
A_1^1 &= 6\alpha_0^2\alpha_1\alpha_4 - 9\alpha_0^2\alpha_2\alpha_3 + 4\alpha_0\alpha_1\alpha_2^2 - \alpha_1^3\alpha_2,\\
A_1^2 &= \alpha_0(12\alpha_0^2\alpha_4 - 3\alpha_0\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_2),\\
A_1^3 &= \alpha_0^2(6\alpha_0\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2),
\end{aligned}$$

et

$$A_2^1 = 8\alpha_1^2\alpha_2\alpha_4 - 9\alpha_0^2\alpha_3^2 - 2\alpha_0\alpha_1^2\alpha_4 + 4\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1^3\alpha_3,$$
$$A_2^2 = \alpha_0(2\alpha_0\alpha_1\alpha_4 - 3\alpha_0\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1^2\alpha_3),$$
$$A_2^3 = \alpha_0^2(16\alpha_0\alpha_4 - \alpha_1\alpha_3);$$

$$A_3^1 = 48\alpha_0^3\alpha_4 - 8\alpha_0^2\alpha_2^2 - 21\alpha_0^2\alpha_1\alpha_3 + 14\alpha_0\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4,$$
$$A_3^2 = \alpha_0(18\alpha_0^2\alpha_3 - 11\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_1^3),$$
$$A_3^3 = \alpha_0^2(8\alpha_0\alpha_2 - 3\alpha_1^2).$$

Les équations (11) sont linéaires et homogènes par rapport aux quantités β, et, en désignant le déterminant de leurs coefficients par Δ, on devra avoir

$$(12) \qquad \Delta = 0.$$

Cette égalité, qui ne contient que les coefficients α de ψ exprime, comme nous avons vu, que ce polynôme admet une racine double. Les trois équations (11) seront alors compatibles, et deux quelconques d'entre elles détermineront les rapports

$$\frac{\beta_0}{A_1^2A_2^3 - A_1^3A_2^2} = \frac{\beta_1}{A_1^3A_2^1 - A_1^1A_2^3} = \frac{\beta_2}{A_1^1A_2^2 - A_1^2A_2^1}.$$

Les trois polynômes φ ne différeront donc que par des facteurs constants et les courbes correspondantes seront planes, à moins que les trois équations (11) se réduisent à une seule, c'est-à-dire que tous les mineurs de Δ soient nuls. On aura alors entre les coefficients α de ψ deux relations qu'on pourra facilement ramener à la forme

$$32\alpha_0^2\alpha_4^2 - 8\alpha_0\alpha_2^2\alpha_4 + 3\alpha_1^2\alpha_2\alpha_4 - 4\alpha_0\alpha_1\alpha_3\alpha_4 + 3\alpha_0\alpha_2\alpha_3^2 - \alpha_1^2\alpha_3^2 = 0,$$
$$48\alpha_0\alpha_1\alpha_4^2 + 4\alpha_1\alpha_2^2\alpha_4 - 3\alpha_1^2\alpha_3\alpha_4 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3^2 - 32\alpha_0\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + 9\alpha_0\alpha_3^3 = 0.$$

Ces deux relations, d'après le Chapitre II, doivent exprimer que le polynôme ψ admet une racine triple ou bien deux racines doubles. Il est d'ailleurs facile de vérifier que, dans ces deux cas, les relations précédentes sont identiquement satisfaites. Ainsi, le polynôme ψ aura donc l'une des deux formes suivantes :

$$\psi = \alpha_0(t^2 + pt + q)^2$$

ou bien

$$\psi = \alpha_0(t + p)(t + q)^3,$$

et, comme la transformation linéaire ne change pas la forme des formules (1), on pourra toujours les ramener aux formes

$$\psi = \alpha_0(t^2+1)^2 = \alpha_0(t^4+2t^2+1),$$
$$\psi = \alpha_0(t+p)t^3 = \alpha_0 t^4 + \alpha_1 t^3.$$

Dans le premier cas, on aura

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 2\alpha_0, \qquad \alpha_3 = 0, \qquad \alpha_4 = \alpha_0 \lesseqgtr 0,$$

et les équations (11) donneront

$$\beta_0^r + \beta_2^r = 0 \quad (r = 1, 2, 3).$$

En remplaçant les α et β par leurs valeurs en fonction des coefficients a, b, c, on aura entre ces dernières les sept relations suivantes :

$$(a_0 b_1 - b_0 a_1) + (a_1 b_2 - b_1 a_2) = 0,$$
$$(b_0 c_1 - c_0 b_1) + (b_1 c_2 - c_1 b_2) = 0,$$
$$(c_0 a_1 - a_0 c_1) + (c_1 a_2 - a_2 c_1) = 0,$$
$$a_0 c_1 + c_0 a_1 - 2 b_0 b_1 = 0,$$
$$a_1 c_2 + c_1 a_2 - 2 b_1 b_2 = 0,$$
$$b_0^2 - a_0 c_0 = b_2^2 - a_2 c_2 = \frac{1}{2}(a_0 c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0 - b_1^2 - 2 b_0 b_2).$$

Les trois premières se réduisent à deux et déterminent les rapports

$$\frac{a_1}{a_0 - a_2} = \frac{b_1}{b_0 - b_2} = \frac{c_1}{c_0 - c_2}.$$

Or, avec ces valeurs de a_1, b_1 et c_1, les polynômes φ ne diffèrent que par des facteurs constants, et les courbes seront planes.

Dans le second cas, on aura

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,$$

et les équations (11) donneront

$$\alpha_1^2 \beta_0^r - \alpha_0 \alpha_1 \beta_1^r + \alpha_0^2 \beta_2^r = 0 \qquad (r = 1, 2, 3).$$

En tirant β_1 et en portant dans φ, on aura

$$\varphi = \beta_0 \left(t + \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)\left(t + \frac{\alpha_0}{\alpha_1}\frac{\beta_2}{\beta_0}\right).$$

On voit que les polynômes φ contiennent en facteur le binôme qui correspond à la racine simple de ψ, ce qui est bien conforme aux résultats auxquels nous sommes arrivés à la fin du Chapitre précédent. Les trois relations $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ déterminent les coefficients b_0, b_1 et b_2 en fonction des coefficients a et c; et, en portant leurs valeurs dans les polynômes φ, on trouve facilement entre ces polynômes la relation linéaire et homogène

$$c_1\varphi(a, b, t) + a_1\varphi(b, c, t) + b_1\varphi(c, a, t) = 0,$$

et les courbes correspondantes seront encore planes.

Pour compléter la discussion des équations (6), il nous reste à examiner le cas où les équations (11) deviennent identiques par rapport aux β, c'est-à-dire lorsque tous les coefficients des β (tous les mineurs du second ordre de Δ) sont nuls. Il est facile de voir que dans ce cas le polynôme ψ se réduit à $\alpha_0\left(t + \frac{\alpha_1}{4\alpha_0}\right)^4$, et qu'on pourra ramener à la forme $\psi = \alpha_0 t^4$. On est donc encore dans le cas examiné au commencement et qui nous a conduit aux courbes (10). Ces courbes sont donc les seules courbes gauches correspondant au cas de $n = 2$.

9. Les formules (3), (4) et (5) sont générales et s'appliquent à tous les cas, que les polynômes φ et ψ soient réductibles ou non, et quelle que soit la forme du polynôme ψ. Mais ces formules se simplifient beaucoup pour certaines formes particulières de ψ. Nous allons examiner à part le cas où ψ est de la forme P^k, en désignant par P un polynôme de la forme

$$P = \sum_{p=0}^{p=h} \alpha_p t^p,$$

ayant toutes ses racines distinctes, c'est-à-dire en désignant par P le produit des facteurs binômes distincts de ψ. On aura alors tout d'abord $(2n+1)$ relations entre les coefficients a, b, c et α, qu'on obtiendra en égalant de part et d'autre les coefficients des mêmes puissances dans l'égalité

$$\psi(a, b, c, t) = P^k; \tag{13}$$

puis, si les trois intégrales (1) sont algébriques, elles seront de la forme

$$\int \frac{\varphi(a,b,t)}{\psi(a,b,c,t)}\,dt = \frac{\lambda(\gamma^1, t)}{\mathrm{P}^{k-1}},$$
$$\int \frac{\varphi(b,c,t)}{\psi(a,b,c,t)}\,dt = \frac{\lambda(\gamma^2, t)}{\mathrm{P}^{k-1}},$$
$$\int \frac{\varphi(c,a,t)}{\psi(a,b,c,t)}\,dt = \frac{\lambda(\gamma^3, t)}{\mathrm{P}^{k-1}},$$

λ étant un polynôme de degré $(2n - h - 1)$ de la forme

$$\lambda(\gamma, t) = \sum_{p=0}^{p=2n-h-1} \gamma_p t^p;$$

et, en différentiant, on aura trois égalités de la forme

$$\varphi = \mathrm{P}\lambda' - (k-1)\lambda \mathrm{P}'.$$

En égalant de part et d'autre les coefficients de mêmes puissances de t, on aura les $3(2n-1)$ relations suivantes :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{p=0}^{p=i} [(i-2p)a_p b_{i-p} - (i-kp)\alpha_p \gamma^1_{i-p}] = 0,\\ &\sum_{p=0}^{p=i} [(i-2p)b_p c_{i-p} - (i-kp)\alpha_p \gamma^2_{i-p}] = 0,\\ &\sum_{p=0}^{p=i} [(i-2p)c_p a_{i-p} - (i-kp)\alpha_p \gamma^3_{i-p}] = 0,\\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n-1), \end{aligned}\right.$$

entre les quantités a, b, c, α et γ. On aura donc en tout $(8n - 2)$ conditions entre $(9n + 3 - 2h)$ arbitraires a, b, c, α et γ, tandis que les formules générales (3), plus compliquées par leurs expressions, nous conduisent à $(8n - 3 + 2h)$ conditions entre $(9n + 2)$ arbitraires. Si de (14) on élimine les $3(2n - h)$ quantités γ, il en restera $3(h-1)$ conditions entre les quantités a, b, c et α. Le nombre total des conditions $(8n - 2)$ est complètement indépendant de h, tandis que le nombre $(9n + 3 - 2h)$ des arbitraires diminue lorsque h augmente et inversement; et comme h ne peut varier qu'entre 1 et n, on voit que le cas le plus favorable sera pour $h=1$, et le moins favorable pour $h=n$. Nous allons étudier spécialement ces deux cas extrêmes.

Pour $h=n$, on aura

$$P=\sum_{p=0}^{p=n}\alpha_p t^p,$$

$$\lambda(\gamma,t)=\sum_{p=0}^{p=n-1}\gamma_p t^p.$$

Les égalités (13) et (14) donneront alors les conditions

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{ll}\displaystyle\sum_{p=0}^{p=i}(b_p b_{i-p}-a_p c_{i-p}-\alpha_p\alpha_{i-p})=0, & (i=0,1,\ldots,2n). \\ \displaystyle\sum_{p=0}^{p=i}(i-2p)(a_p b_{i-p}-\alpha_p\gamma'_{i-p})=0 & \\ \displaystyle\sum_{p=0}^{p=i}(i-2p)(b_p c_{i-p}-\alpha_p\gamma^2_{i-p})=0 & (i=1,2,\ldots,2n-1). \\ \displaystyle\sum_{p=0}^{p=i}(i-2p)(c_p a_{i-p}-\alpha_p\gamma^3_{i-p})=0 & \end{array}\right.$$

Comme nous avons déjà examiné le cas de $n=2$ pour les formules générales (3), nous allons maintenant, comme application des formules (15), examiner le cas de $n=3$. P sera alors un polynôme du troisième degré à racines simples. Et, comme la transformation linéaire ne change pas la forme des formules (1), on pourra toujours ramener P à la forme

$$P=\alpha_0(t^3+1).$$

On aura alors

$$\alpha_1=\alpha_2=0,\qquad \alpha_3=\alpha_0\lesseqgtr 0,$$

et les cinq équations

$$\sum_{p=0}^{p=i}(i-2p)(a_p b_{i-p}-\alpha_p\gamma'_{i-p})=0\qquad (i=1,2,\ldots,5)$$

donneront

$$\begin{aligned}
(a_0 b_1 - b_0 a_1) - \alpha_0 \gamma'_0 &= 0,\\
(a_0 b_2 - b_0 a_2) - \alpha_0 \gamma'_2 &= 0,\\
3(a_0 b_3 - b_0 a_3) + (a_1 b_2 - b_1 a_2) + 3\alpha_0 \gamma'_0 &= 0,\\
(a_1 b_3 - b_1 a_3) + \alpha_0 \gamma'_1 &= 0,\\
(a_2 b_3 - b_2 a_3) + \alpha_0 \gamma'_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Les trois premières déterminent les γ et, en portant leurs valeurs dans les deux dernières, on aura entre les coefficients a, b, c les deux relations suivantes

$$\begin{aligned}
(a_0 b_1 - b_0 a_1) + (a_1 b_3 - b_1 a_3) &= 0,\\
(a_0 b_2 - b_0 a_2) + (a_2 b_3 - b_2 a_3) &= 0.
\end{aligned}$$

Les deux derniers groupes de (15) donneront chacun deux équations analogues qui s'obtiennent par la permutation circulaire des lettres a, b, c. On aura donc les six équations suivantes

$$\begin{aligned}
(a_0 b_1 - b_0 a_1) + (a_1 b_3 - b_1 a_3) &= 0,\\
(b_0 c_1 - c_0 b_1) + (b_1 c_3 - c_1 b_3) &= 0,\\
(c_0 a_1 - a_0 c_1) + (c_1 a_3 - a_1 c_3) &= 0,\\
(a_0 b_2 - b_0 a_2) + (a_2 b_3 - b_2 a_3) &= 0,\\
(b_0 c_2 - c_0 b_2) + (b_2 c_3 - c_2 b_3) &= 0,\\
(c_0 a_2 - a_0 c_2) + (c_2 a_3 - a_2 c_3) &= 0,
\end{aligned}$$

qui déterminent les rapports

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{a_0 - a_3} &= \frac{b_1}{b_0 - b_3} = \frac{c_1}{c_0 - c_3},\\
\frac{a_2}{a_0 - a_3} &= \frac{b_2}{b_0 - b_3} = \frac{c_2}{c_0 - c_3}.
\end{aligned}$$

Or il est facile de voir qu'avec ces valeurs de a_1, b_1, c_1 et de a_2, b_2, c_2 les polynômes φ auront des rapports constants, et les courbes correspondantes seront planes.

Pour $h = 1$, le nombre des équations (14) sera juste égal au nombre des inconnues γ, et elles ne nous donneront aucune relation entre les coefficients a, b, c. Quant à l'égalité (13), elle sera ici de la forme

$$\psi = \alpha(t - p)^{2n},$$

et, en remplaçant t par $\frac{pt+1}{t}$, ce qui ne change pas la forme des formules (1), on sera ramené au cas où le polynôme ψ se réduit à une constante. On aura donc à égaler à zéro, dans le polynôme ψ, les coefficients des différentes puissances de t, excepté le terme indépendant qui doit être différent de zéro. Ceci nous conduira aux $2n$ relations suivantes entre les coefficients a, b, c,

$$\sum_{p=0}^{p=i}(b_p b_{i-p} - a_p c_{i-p}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots. 2n), \tag{16}$$

et ψ se réduira à

$$\psi = b_0^2 - a_0 c_0 \lesseqgtr 0.$$

Les quantités sous les signes sommes, dans les formules (1), seront alors des polynômes entiers, et, en les intégrant, on aura les courbes suivantes à torsion constante

$$(17)\quad \begin{cases} x + iy = \dfrac{\tau}{a_0 c_0 - b_0^2} \displaystyle\sum_{r=1}^{r=2n-1} \frac{1}{r} t^r \sum_{p=0}^{p=r} (r-2p) a_p b_{r-p}, \\ x - iy = \dfrac{\tau}{a_0 c_0 - b_0^2} \displaystyle\sum_{r=1}^{r=2n-1} \frac{1}{r} t^r \sum_{p=0}^{p=r} (r-2p) b_p c_{r-p}, \\ z = \dfrac{i\tau}{2(a_0 c_0 - b_0^2)} \displaystyle\sum_{r=1}^{r=2n-1} \frac{1}{r} t^r \sum_{p=0}^{p=r} (r-2p) c_p a_{r-p}. \end{cases}$$

Les coordonnées de ces courbes sont des fonctions entières d'un même paramètre variable t, et de degré $(2n-1)$ en général. Abstraction faite des constantes de translation et du facteur d'homothétie, ces courbes dépendront de $(3n+2)$ arbitraires a, b, c assujetties à satisfaire aux $2n$ conditions (16), c'est-à-dire qu'elles dépendront, en général, de $(n+2)$ arbitraires.

Les coefficients de t^{2n-1} seront respectivement, à un facteur différent de zéro près,

$$a_n b_{n-1} - b_n a_{n-1}, \quad b_n c_{n-1} - c_n b_{n-1}, \quad c_n a_{n-1} - a_n c_{n-1},$$

de sorte que, pour

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{c_{n-1}}{c_n},$$

les trois coefficients seront nuls et le degré de la courbe s'abaissera d'une unité. Les deux dernières des équations (16) se réduisent alors à une seule. Plus généralement, si l'on a

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{c_{n-1}}{c_n},$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = \frac{b_{n-2}}{b_n} = \frac{c_{n-2}}{c_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{a_{n-h}}{a_n} = \frac{b_{n-h}}{b_n} = \frac{c_{n-h}}{c_n},$$

les coefficients de t^{2n-1}, t^{2n-2}, ..., t^{2n-h} seront nuls, et le degré de la courbe s'abaissera de h unités. Les $2n$ conditions (16) se réduisent alors aux $(2n-h)$ premières. On aura donc, dans ce cas, une courbe de degré $(2n-h-1)$ qui ne dépendra plus que de $(n+2-h)$ paramètres; elle sera, par conséquent, beaucoup moins générale que la courbe de même degré qu'on obtiendrait directement par les formules (17) pour $n = n - \frac{h}{2}$.

Les dérivées, par rapport à t, des coordonnées x, y, z des courbes (17) étant des fonctions de degré $2(n-1)$ de t, il semble que son arc devait dépendre de l'intégration d'un radical carré portant sur un polynôme du degré $4(n-1)$; mais il est facile de voir que ce polynôme s'abaisse au degré $2(n-2)$. En effet, on aura, d'après les formules (22) du Chapitre I,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \tau^2 \frac{(AB' - BA')(BC' - CB') - \frac{1}{4}(CA' - AC')^2}{(B^2 - AC)^2},$$

et comme pour les courbes (17) on aura, de plus,

$$B^2 - AC = \text{const.} = b_0^2 - a_0 c_0,$$

d'où

$$2BB' - (AC' + CA') = 0,$$

l'expression précédente se réduit facilement à

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{\tau^2}{b_0^2 - a_0 c_0}(B'^2 - A'C').$$

Les polynômes A′, B′, C′ étant de la forme

$$A' = \frac{1}{t}\sum_{p=0}^{p=n} p a_p t^p,$$

$$B' = \frac{1}{t}\sum_{p=0}^{p=n} p b_p t^p,$$

$$C' = \frac{1}{t}\sum_{p=0}^{p=n} p c_p t^p.$$

On trouvera facilement

$$B'^2 - A'C' = \sum_{i=2}^{i=2n} t^{i-2} \sum_{p=0}^{p=i} p(i-p)(b_p b_{i-p} - a_p c_{i-p}).$$

Les coefficients de t^{2n-2} et t^{2n-3} seront respectivement

$$n^2(b_n^2 - a_n c_n) \quad \text{et} \quad n(n-1)(2b_n b_{n-1} - a_n c_{n-1} - c_n a_{n-1}).$$

Ils sont donc nuls en vertu des deux derniers de (16), de sorte que l'on aura

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{\tau^2}{b_0^2 - a_0 c_0} \sum_{i=2}^{i=2n-2} t^{i-2} \sum_{p=0}^{p=i} p(i-p)(b_p b_{i-p} - a_p c_{i-p}). \tag{18}$$

Le second membre n'est que du degré $2(n-2)$ au lieu de $4(n-1)$. Ainsi, pour $n=2$, $\frac{ds}{dt}$ sera constant. C'est à raison de cette propriété générale que la cubique gauche (10) est rectifiable.

Pour

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{c_{n-1}}{c_n},$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = \frac{b_{n-2}}{b_n} = \frac{c_{n-2}}{c_n},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{a_{n-h}}{a_n} = \frac{b_{n-h}}{b_n} = \frac{c_{n-h}}{c_n},$$

les $2h$ derniers coefficients du second membre de (18) seront nuls en vertu des conditions (16), et le degré de $\frac{ds^2}{dt^2}$ s'abaissera de $2h$ unités. Ce résultat est d'ailleurs conforme aux précédents, puisque, dans ce cas, les degrés des coordonnées x, y, z s'abaisseront de h unités.

Comme application nous allons examiner le cas de $n = 3$. Les formules (17) nous donneront alors la courbe du cinquième degré

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
x + iy &= \frac{\tau}{a_0 c_0 - b_0^2}\Big[(a_0 b_1 - b_0 a_1)\, t + (a_0 b_2 - b_0 a_2)\, t^2 \\
&\quad + \left(a_0 b_3 - b_0 a_3 + \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{3}\right) t^3 \\
&\quad + \frac{a_1 b_3 - b_1 a_3}{2}\, t^4 + \frac{a_2 b_3 - b_2 a_3}{5}\, t^5\Big], \\
x - iy &= \frac{\tau}{a_0 c_0 - b_0^2}\Big[(b_0 c_1 - c_0 b_1)\, t + (b_0 c_2 - c_0 b_2)\, t^2 \\
&\quad + \left(b_0 c_3 - c_0 b_3 + \frac{b_1 c_2 - c_1 b_2}{3}\right) t^3 \\
&\quad + \frac{1}{2}(b_1 c_3 - c_1 b_3)\, t^4 + \frac{b_2 c_3 - c_2 b_3}{5}\, t^5\Big], \\
z &= \frac{i\tau}{2(a_0 c_0 - b_0^2)}\Big[(c_0 a_1 - a_0 c_1)\, t + (c_0 a_2 - a_0 c_2)\, t^2 \\
&\quad + \left(c_0 a_3 - a_0 c_3 + \frac{c_1 a_2 - a_1 c_2}{3}\right) t^3 \\
&\quad + \frac{1}{2}(c_1 a_3 - a_1 c_3)\, t^4 + \frac{c_2 a_3 - a_2 c_3}{5}\, t^5\Big],
\end{aligned}
\right.
$$

qui dépend de onze paramètres a, b, c assujettis à satisfaire aux six équations suivantes

$$
(20)\quad \left\{
\begin{aligned}
b_3^2 - a_3 c_3 &= 0, \\
2 b_2 b_3 - (a_2 c_3 + c_2 a_3) &= 0, \\
2 b_1 b_3 + b_2^2 - (a_1 c_3 + a_2 c_2 + a_3 c_1) &= 0, \\
2 b_0 b_3 + 2 b_1 b_2 - (a_0 c_3 + a_1 c_2 + a_2 c_1 + a_3 c_0) &= 0, \\
2 b_0 b_2 + b_1^2 - (a_0 c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0) &= 0, \\
2 b_0 b_1 - (a_0 c_1 + c_0 a_1) &= 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les trois premières résolues par rapport à b_3, b_2 et b_1 donneront

$$
\begin{aligned}
b_3 &= \sqrt{a_3 c_3}, \\
\frac{b_2}{b_3} &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_3} + \frac{c_2}{c_3}\right), \\
\frac{b_1}{b_3} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1}{a_3} + \frac{c_1}{c_3}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{a_2}{a_3} - \frac{c_2}{c_3}\right)^2\right].
\end{aligned}
$$

Et en portant dans les trois dernières, qui sont linéaires par rapport à a_0, b_0 et c_0, on aura

$$\frac{b_0}{b_3} = \frac{4}{\left(\frac{a_2}{a_3} - \frac{c_2}{c_3}\right)^2}\left[\alpha\left(\frac{a_1}{a_3}\frac{c_2}{c_3} - \frac{c_1}{c_3}\frac{a_2}{a_3}\right) - \beta\left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{c_1}{c_3}\right)\right],$$

$$\frac{a_0}{a_3} = \frac{b_0}{b_3} + \alpha\frac{a_2}{a_3} - \beta,$$

$$\frac{c_0}{c_3} = \frac{b_0}{b_3} - \alpha\frac{c_2}{c_3} + \beta,$$

où l'on fait, pour abréger,

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{c_1}{c_3}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{c_2}{c_3}\right)^2\right],$$

$$\beta = \frac{1}{4\left(\frac{a_2}{a_3} - \frac{c_2}{c_3}\right)}\left\{\left[\left(\frac{a_1}{a_3} + \frac{c_1}{c_3}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{a_2}{a_3} - \frac{c_2}{c_3}\right)^2\right]^2 - \frac{a_1}{a_3}\frac{c_1}{c_3}\right\}.$$

En portant ces valeurs dans (19), on n'aura plus que cinq arbitraires, sans compter les constantes d'intégration que l'on peut toujours ajouter et le facteur d'homothétie.

Pour que la courbe se réduise au quatrième degré, il faudra que l'on ait

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{b_2}{b_3} = \frac{c_2}{c_3} \quad (^1),$$

et les équations (20) donneront alors

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{c_1}{c_3}.$$

Or il est facile de voir que pour ces valeurs la courbe (19) devient plane. Il n'y a donc pas de courbes de quatrième degré de cette espèce.

Dans les calculs précédents nous avons supposé les quantités a_3, b_3 et c_3 différentes de zéro. Si l'une de ces quantités, a_3 par

---

(1) Ceci correspond au cas où le déterminant des trois dernières équations (20) est nul.

exemple, est nulle, les deux premières de (20) donneront

$$a_3 = b_3 = a_2 = 0,$$

et les quatre dernières se réduisent à

$$\begin{aligned} a_1 c_3 &= b_2^2, \\ a_0 c_3 + a_1 c_2 &= 2 b_1 b_2, \\ a_0 c_2 + a_1 c_1 &= 2 b_0 b_2 + b_1^2, \\ a_0 c_1 + a_1 c_0 &= 2 b_0 b_1. \end{aligned}$$

Elles sont linéaires par rapport aux quantités c et déterminent les valeurs suivantes de ces dernières

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{1}{a_1} b_2^2, \\ c_2 &= \frac{1}{a_1^2} (2 a_1 b_1 - a_0 b_2) b_2, \\ c_1 &= \frac{1}{a_1^3} [2 a_1^2 b_0 b_2 + (a_1 b_1 - a_0 b_2)^2], \\ c_0 &= \frac{1}{a_1^4} (a_1 b_1 - a_0 b_2)(2 b_0 a_1^2 + a_0^2 b_2 - a_0 a_1 b_1). \end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans (19) et en y faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned} \alpha &= b_0 a_1^2 (a_1 b_1 - 2 a_0 b_2) - a_0 (a_1 b_1 - a_0 b_2)^2, \\ \beta &= (a_0 b_1 + b_0 a_1)(a_1 b_1 - a_0 b_2)^2 + 2 a_1^2 b_0 [a_1 b_0 b_2 - b_1 (a_1 b_1 - a_0 b_2)], \\ \gamma &= a_0 b_2 [a_1^2 a_0 b_2 + (a_1 b_1 - a_0 b_2)^2], \\ \delta &= b_2 (a_1^2 b_1^2 + a_0 a_1 b_1 b_2 + a_1^2 b_0 b_2 - a_0^2 b_2^2), \qquad k = \frac{\tau}{a_0 c_0 - b_0^2}, \end{aligned}$$

on aura la courbe du cinquième degré

$$\begin{aligned} x + iy &= k \left[(a_0 b_1 - b_0 a_1) t + a_0 b_2 t^2 + \frac{1}{3} a_1 b_2 t^3 \right], \\ z &= \frac{ik}{a_1^3} \left[\alpha t - (2 a_1 b_1 - a_0 b_2) \frac{a_0 a_1 b_2}{2} t^2 - (a_1 b_1 + a_0 b_2) \frac{a_1^2 b_2}{3} t^3 - \frac{1}{4} a_1^3 b_2^2 t^4 \right], \\ x - iy &= \frac{k}{a_1^4} \left(\beta t + \gamma t^2 + \frac{1}{3} a_1 \delta t^3 + \frac{1}{2} a_1^3 b_1 b_2^2 t^4 + \frac{a_1^3 b_2^3}{5} t^5 \right), \end{aligned}$$

qui dépend de cinq paramètres a_0, a_1, b_0, b_1 et b_2. L'arc ds, d'après la formule (18), sera donné par

$$ds^2 = - \frac{k b_2 \tau}{a_1^2} [a_0 (2 a_1 b_1 - a_0 b_2) - 2 a_1^2 b_0 + a_0 a_1 b_2 t + a_1^2 b_2 t^2] dt^2.$$

Exemple numérique. — Pour les valeurs numériques

$$a_0 = b_1 = 0,$$
$$a_1 = b_0 = b_2 = \tau = 1,$$

on aura la courbe

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} x + iy &= -t\left(\frac{1}{3}t^2 - 1\right),\\ z &= \frac{i}{4}t^4,\\ x - iy &= -t\left(\frac{1}{5}t^4 + \frac{1}{3}t^2 + 2\right), \end{aligned}\right.$$

dont l'arc sera donné par

$$ds = \sqrt{t^2 - 2}\, dt.$$

10. *Formules spéciales pour les courbes réelles.* — Reprenons les formules (22) du premier Chapitre

$$x + iy = \tau \int \frac{AB' - BA'}{AC - B^2} dt,$$
$$x - iy = \tau \int \frac{BC' - CB'}{AC - B^2} dt,$$
$$z = \frac{i\tau}{2} \int \frac{CA' - AC'}{AC - B^2} dt.$$

Nous avons vu que toutes les courbes unicursales à torsion constante seront données par ces formules, en y prenant pour A, B, C des fonctions entières d'un même paramètre variable t et n'ayant pas de facteurs communs. Si dans ces formules on remplace A et C par deux polynômes de la forme $(A - iC)$ et $(A + iC)$, on aura les formules suivantes

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= -\tau \int \frac{AB' - BC'}{A^2 + B^2 + C^2} dt,\\ y &= -\tau \int \frac{BC' - CB'}{A^2 + B^2 + C^2} dt,\\ z &= -\tau \int \frac{CA' - AC'}{A^2 + B^2 + C^2} dt, \end{aligned}\right.$$

qu'on pourrait d'ailleurs obtenir directement des formules générales (7) en y posant

$$u = \frac{A - iC}{B},$$

$$u_1 = \frac{A + iC}{B}.$$

Si les courbes réelles à torsion constante et unicursales existent, elles seront données toutes par les formules (21), en y prenant pour A, B, C des polynômes entiers à coefficients réels, et que nous pouvons d'ailleurs, sans restreindre la généralité de ces formules, supposer tous trois complets, de même degré n et n'ayant pas des facteurs communs. Si donc on met les polynômes A, B, C sous la forme

$$A = \sum_{p=0}^{p=n} a_p t^p,$$

$$B = \sum_{p=0}^{p=n} b_p t^p,$$

$$C = \sum_{p=0}^{p=n} c_p t^p,$$

et qu'on porte leurs valeurs dans (21), on aura pour les courbes réelles des formules analogues aux formules (1)

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= -\tau \int \frac{\varphi(a, b, t)}{\psi(a, b, c, t)}\, dt, \\ y &= -\tau \int \frac{\varphi(b, c, t)}{\psi(a, b, c, t)}\, dt, \\ z &= -\tau \int \frac{\varphi(c, a, t)}{\psi(a, b, c, t)}\, dt, \end{aligned}\right.$$

où l'on a désigné par φ et ψ les polynômes des degrés $(2n-2)$ et $2n$ définis par

$$\varphi(\alpha, \beta, t) = \sum_{i=1}^{i=2n-1} t^{i-1} \sum_{p=0}^{p=i} (i - 2p)\alpha_p \beta_{i-p},$$

$$\psi(\alpha, \beta, t) = \sum_{i=0}^{i=2n} t^i \sum_{p=0}^{p=i} (\alpha_p \alpha_{i-p} + \beta_p \beta_{i-p} + \gamma_p \gamma_{i-p}).$$

Ces formules ne sont qu'un cas particulier des formules (1), et tout ce que nous avons dit à propos de ces dernières s'applique aussi aux formules (22). Il nous reste seulement à ajouter que, dans les formules (22), comme il est facile de le voir, le polynôme $\psi(a, b, c, t)$ aura toutes ses racines imaginaires conjuguées, et que dans ψ le coefficient de t^{2n} et le terme indépendant seront nécessairement différents de zéro. Ainsi, le polynôme ψ sera de degré $2n$ et aura toutes ses racines imaginaires, tandis que les polynômes φ seront au plus de degré $(2n - 2)$. Donc, si les courbes réelles à torsion constante et unicursales existent, elles seront nécessairement de la forme

$$x - x_0 = \tau \frac{\lambda(\gamma^1, t)}{\psi(a, b, c, t)},$$

$$y - y_0 = \tau \frac{\lambda(\gamma^2, t)}{\psi(a, b, c, t)},$$

$$z - z_0 = \tau \frac{\lambda(\gamma^3, t)}{\psi(a, b, c, t)},$$

en désignant par λ un polynôme de degré $(2n - 1)$, de la forme

$$\lambda(\gamma, t) = \sum_{p=0}^{p=2n-1} \gamma_p t^p.$$

On voit tout d'abord que ces courbes, si elles existent, seront nécessairement de degrés pairs; puis, qu'elles seront des courbes fermées, puisque les coordonnées x, y, z de ces courbes restent finies et bien déterminées pour toutes les valeurs réelles de t, et que pour $t = \pm\infty$ elles reprennent les mêmes valeurs x_0, y_0, z_0. (*Voir* la démonstration géométrique très élégante de M. Kœnigs, dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse;* 1887.)

Les formules (3), (4) et (5) sont générales et s'appliquent évidemment aussi au cas des courbes réelles. Nous nous bornerons donc ici à examiner un cas particulier, le cas où ψ n'a que deux racines distinctes et qui est le cas le plus favorable pour les courbes réelles. En effet, nous avons vu que le nombre relatif des arbitraires sera d'autant plus grand que le nombre des racines distinctes de ψ sera plus petit; et, comme pour les courbes réelles, ce nombre est nécessairement pair, le cas le plus favorable sera celui où il est égal à 2.

Le polynôme ψ sera alors de la forme

$$\psi = a(t-\alpha-i\beta)^n(t-\alpha+i\beta)^n = a[(t-\alpha)^2+\beta^2]^n,$$

et, comme β est nécessairement différent de zéro, on pourra toujours, par une transformation linéaire, le ramener à la forme

$$\psi = a(t^2+1)^n.$$

Cette égalité nous conduira donc, tout d'abord, aux $2n$ conditions suivantes, entre les coefficients a, b, c,

$$\sum_{p=0}^{p=2i+1}(a_p a_{2i+1-p}+b_p b_{2i+1-p}+c_p c_{2i+1-p}) = 0,$$

$$\sum_{p=0}^{p=2i}(a_p a_{2i-p}+b_p b_{2i-p}+c_p c_{2i-p}) = \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots i}(a_n^2+b_n^2+c_n^2),$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Les formules (22) prendront la forme

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= -\frac{\tau}{a_n^2+b_n^2+c_n^2}\int\frac{\varphi(a, b, t)}{(t^2+1)^n}\,dt,\\ y &= -\frac{\tau}{a_n^2+b_n^2+c_n^2}\int\frac{\varphi(b, c, t)}{(t^2+1)^n}\,dt,\\ z &= -\frac{\tau}{a_n^2+b_n^2+c_n^2}\int\frac{\varphi(c, a, t)}{(t^2+1)^n}\,dt. \end{aligned}\right.$$

et pour que ces trois intégrales soient algébriques il faudra, d'après la formule (15) du Chapitre II, que les coefficients a, b, c satisfassent encore aux trois relations suivantes :

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{(2n-3)(2n-5)\ldots(2n-2i-1)}\sum_{p=0}^{p=2i+1}(2i+1-2p)a_p b_{2i+1-p} = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{1.3\ldots(2i-1)}{(2n-3)(2n-5)\ldots(2n-2i-1)}\sum_{p=0}^{p=2i+1}(2i+1-2p)b_p c_{2i+1-p} = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{(2n-3)(2n-5)\ldots(2n-2i-1)}\sum_{p=0}^{p=2i+1}(2i+1-2p)c_p a_{2i+1-p} = 0.$$

Il s'agit donc de déterminer les $3(n+1)$ coefficients a, b, c qui, comme nous l'avons vu, à part quelques restrictions, sont complètement arbitraires, de façon à satisfaire aux $(2n+3)$ équations suivantes homogènes et de second degré

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{(2n-3)(2n-5)\ldots(2n-2i-1)} \sum_{p=0}^{p=2i+1} (2i+1-2p)a_p b_{2i+1-p} = 0,\\
&\sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{(2n-3)(2n-5)\ldots(2n-2i-1)} \sum_{p=0}^{p=2i+1} (2i+1-2p)b_p c_{2i+1-p} = 0,\\
&\sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{(2n-3)(2n-5)\ldots(2n-2i-1)} \sum_{p=0}^{p=2i+1} (2i+1-2p)c_p a_{2i+1-p} = 0;\\
&\sum_{p=0}^{p=2i+1} (a_p a_{2i+1-p} + b_p b_{2i+1-p} + c_p c_{2i+1-p}) = 0,\\
&\sum_{p=0}^{p=2i} (a_p a_{2i-p} + b_p b_{2i-p} + c_p c_{2i-p}) = \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i}(a_n^2+b_n^2+c_n^2)\\
&\qquad\qquad (i=0,1,2,\ldots,n-1).
\end{aligned}
\right.
$$

Pour tout système de valeurs réelles des coefficients a, b, c satisfaisant aux équations (24), les formules (23) donneront une courbe réelle à torsion constante de la forme

$$
(25)\quad \left\{
\begin{aligned}
x - x_0 &= -\frac{\tau}{a_n^2+b_n^2+c_n^2}\,\frac{\lambda(\gamma_1, t)}{(t^2+1)^{n-1}},\\
y - y_0 &= -\frac{\tau}{a_n^2+b_n^2+c_n^2}\,\frac{\lambda(\gamma^2, t)}{(t^2+1)^{n-1}},\\
z - z_0 &= -\frac{\tau}{a_n^2+b_n^2+c_n^2}\,\frac{\lambda(\gamma^3, t)}{(t^2+1)^{n-1}},
\end{aligned}
\right.
$$

en désignant par λ un polynôme de degré $(2n-3)$ de la forme

$$\lambda(\gamma, t) = \sum_{p=0}^{p=2n-3} \gamma_p t^p.$$

Remarque. — Les équations (24) ne changent pas lorsqu'on y permute d'une manière quelconque les lettres a, b, c. Elles ne changent pas non plus lorsqu'on y permute les indices p et

$(n-p)$ de ces lettres. Enfin on voit que les $(n+3)$ premières équations sont bilinéaires par rapport aux inconnues des indices pairs et impairs.

Comme application, nous allons examiner le cas de $n=3$. Le système des équations (24) sera alors

$$(26)\quad \begin{cases} a_0 b_1 - b_0 a_1 + a_0 b_3 - b_0 a_3 + a_2 b_3 - b_2 a_3 + \frac{1}{3}(a_1 b_2 - b_1 a_2) = 0, \\ b_0 c_1 - c_0 b_1 + b_0 c_3 - c_0 b_3 + b_2 c_3 - c_2 b_3 + \frac{1}{3}(b_1 c_2 - c_1 b_2) = 0, \\ c_0 a_1 - a_0 c_1 + c_0 a_3 - a_0 c_3 + c_2 a_3 - a_2 c_3 + \frac{1}{3}(c_1 a_2 - a_1 c_2) = 0; \\ \qquad a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1 = 0, \\ a_0 a_3 + b_0 b_3 + c_0 c_3 + a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0, \\ \qquad a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0; \\ \qquad a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2, \\ a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + 2(a_0 a_2 + b_0 b_2 + c_0 c_2) = 3(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2), \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + 2(a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3) = 3(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2). \end{cases}$$

Pour tout système de valeurs des coefficients a, b, c satisfaisant aux équations (26), les formules (25) donneront une courbe du quatrième ordre à torsion constante de la forme

$$(27)\quad \begin{cases} x - x_0 = \dfrac{\tau}{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2} \dfrac{\left[\begin{matrix} (a_0 b_2 - b_0 a_2 + a_1 b_3 - b_1 a_3) - (a_0 b_1 - b_0 a_1) t \\ + (a_1 b_3 - b_1 a_3) t^2 + (a_2 b_3 - b_2 a_3) t^3 \end{matrix}\right]}{(t^2+1)^2}, \\ y - y_0 = \dfrac{\tau}{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2} \dfrac{\left[\begin{matrix} (b_0 c_2 - c_0 b_2 + b_1 c_3 - c_1 b_3) - (b_0 c_1 - c_0 b_1) t \\ + (b_1 c_3 - c_1 b_3) t^2 + (b_2 c_3 - c_2 b_3) t^3 \end{matrix}\right]}{(t^2+1)^2}, \\ z - z_0 = \dfrac{\tau}{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2} \dfrac{\left[\begin{matrix} (c_0 a_2 - a_0 c_2 + c_1 a_3 - a_1 c_3) - (c_0 a_1 - a_0 c_1) t \\ + (c_1 a_3 - a_1 c_3) t^2 + (c_2 a_3 - a_2 c_3) t^3 \end{matrix}\right]}{(t^2+1)^2}. \end{cases}$$

Il est facile de voir que toutes ces courbes sont imaginaires et que les équations (26) n'admettent pas des solutions réelles qui conviennent à notre problème. En effet, les six premières de ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux quantités a_1, b_1, c_1, a_3, b_3, c_3 qui, d'après les restrictions indiquées plus haut, ne sont pas toutes nulles; il faut donc que le déterminant de leurs coefficients soit nul. Ce déterminant se met facilement sous la forme

$$\Delta = \frac{4}{9}[(a_0 b_2 - b_0 a_2)^2 + (b_0 c_2 - c_0 b_2)^2 + (c_0 a_2 - a_0 c_2)^2]$$
$$\times [(a_0 + a_2)^2 + (b_0 + b_2)^2 + (c_0 + c_2)^2 + 2(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 + a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)].$$

Les quantités a_0, b_0, c_0, a_2, b_2, c_2 n'étant pas non plus toutes nulles, le second facteur sera différent de zéro. Il faut donc que le premier facteur soit nul, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{a_0}{a_2} = \frac{b_0}{b_2} = \frac{c_0}{c_2}.$$

De même, ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux six quantités a_0, b_0, c_0, a_2, b_2, c_2, et, en égalant à zéro le déterminant de leurs coefficients, on trouve les conditions

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{c_1}{c_3}.$$

Or avec ces valeurs les polynômes φ qui figurent dans (23) seront dans un rapport constant, et les courbes correspondantes seront planes. D'ailleurs, en portant ces valeurs dans (26), on trouve

$$a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 0,$$

et les formules (27) deviennent illusoires.

Nous venons de voir que les neuf équations (26) n'admettent pas des solutions réelles répondant à notre problème; mais il est facile de voir que les six dernières et deux quelconques des trois premières équations admettent une infinité de solutions réelles, même dans le cas particulier où l'un des polynômes A, B, C se réduit à une constante. Ainsi, les valeurs réelles

$$a_1 = -\sqrt{5}\,\alpha a_0, \qquad a_2 = 5a_0, \qquad a_3 = \sqrt{5}\,\alpha a_0;$$
$$b_0 = \alpha a_0, \qquad b_1 = \sqrt{5}\,a_0, \qquad b_2 = 5\alpha a_0, \qquad b_3 = -\sqrt{5}\,a_0;$$
$$c_0 = 2\sqrt{1+\alpha^2}\,a_0, \qquad c_1 = c_2 = c_3 = 0,$$

qui répondent au cas où C est constant, satisfont aux huit dernières équations (26); et, en les portant dans (23), on aura la courbe réelle à torsion constante

$$(28)\quad \begin{cases} x - x_0 = -\dfrac{1}{2}\tau\sqrt{5}\left[\dfrac{t\left(t^2+\dfrac{7}{5}\right)}{(t^2+1)^2} - \text{arc tang}\, t\right], \\ y - y_0 = \dfrac{\tau}{\sqrt{5(1+\alpha^2)}}\,\dfrac{2t-\sqrt{5}\,\alpha}{(t^2+1)^2}, \\ z - z_0 = \dfrac{\tau}{\sqrt{5(1+\alpha^2)}}\,\dfrac{2\alpha t+\sqrt{5}}{(t^2+1)^2}, \end{cases}$$

dont deux des coordonnées sont des fonctions algébriques et rationnelles d'un même paramètre t.

NOTE

SUR LES COURBES DONT LES DEUX COURBURES SONT CONSTANTES.

Dans le dernier Chapitre nous avons donné une cubique gauche rectifiable

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x + iy &= akt \\ x - iy &= \frac{1}{a}\,kt\left(\frac{1}{3}\,t^2 + b\right) \\ iz &= k\,\frac{1}{2}\,t^2 \end{aligned}\right\}\; t = \frac{1}{k\sqrt{b}}\,s,$$

qui dépend de deux paramètres arbitraires a et b, et dont les deux courbures sont constantes. Nous allons maintenant démontrer que cette cubique et l'hélice circulaire sont les deux seules courbes qui jouissent de cette propriété. Pour le prouver, nous allons chercher directement les courbes pour lesquelles on a $\rho = \text{const.}$ et $\tau = \text{const.}$; ou bien, ce qui revient au même, les courbes qui satisfont aux deux conditions

$$(2)\quad \begin{cases} \tau = \text{const.}, \\ \dfrac{\tau}{\rho} = \text{const.} \end{cases}$$

La première de ces conditions montre que les coordonnées de ces courbes devront satisfaire aux formules (1) du premier Chapitre

$$(3)\quad \begin{cases} x = \tau\int c''\,dc' - c'\,dc'', \\ y = \tau\int c\,dc'' - c''\,dc, \\ z = \tau\int c'\,dc - c\,dc', \end{cases}$$

les trois fonctions c, c', c'' étant assujetties à satisfaire à la condition

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1.$$

La seconde des conditions (2) nous donnera

$$\frac{da}{dc} = \frac{da'}{dc'} = \frac{da''}{dc''} = \text{const.} = k,$$

d'où les égalités

$$\begin{aligned} da - k\,dc &= 0, \\ da' - k\,dc' &= 0, \\ da'' - k\,dc'' &= 0; \end{aligned}$$

et, en les intégrant, on aura

$$\begin{aligned} a - kc &= \mathrm{A}, \\ a' - kc' &= \mathrm{B}, \\ a'' - kc'' &= \mathrm{C}. \end{aligned}$$

On en tire facilement les égalités suivantes

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = 1 + k^2 \\ \mathrm{A}a + \mathrm{B}a' + \mathrm{C}a'' = 1 \\ \mathrm{A}b + \mathrm{B}b' + \mathrm{C}b'' = 0 \\ \mathrm{A}c + \mathrm{B}c' + \mathrm{C}c'' + k = 0 \end{array}\right\} db^2 + db'^2 + db''^2 = (1 + k^2)\frac{ds^2}{\tau^2};$$

et comme k est différent de zéro, la dernière pourra se mettre sous la forme

$$\alpha c + \beta c' + \gamma c'' = 1.$$

Ainsi, les courbes dont les deux courbures seraient constantes devront nécessairement satisfaire aux formules (3) dans lesquelles

les trois fonctions c, c' et c'' seront assujetties à satisfaire aux deux conditions

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &c^2+c'^2+c''^2=1,\\ &\alpha c+\beta c'+\gamma c''=1.\end{aligned}\right.$$

Les quantités α, β et γ ne peuvent pas être nulles à la fois et, en supposant γ différente de zéro, la seconde nous donnera

$$c''=\frac{1}{\gamma}(1-\alpha c-\beta c'),$$

quels que soient α et β. Cette valeur de c'' et la première de (5) nous donneront les valeurs

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} c' &= \frac{\beta(1-\alpha c)+\gamma\sqrt{(\beta^2+\gamma^2-1)+2\alpha c-\delta^2c^2}}{\beta^2+\gamma^2}\\ c'' &= \frac{\gamma(1-\alpha c)-\beta\sqrt{(\beta^2+\gamma^2-1)+2\alpha c-\delta^2c^2}}{\beta^2+\gamma^2}\end{aligned}\right\},\quad \delta^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2,$$

pourvu que l'on ait $\beta^2+\gamma^2\lessgtr 0$. Pour $\beta^2+\gamma^2=0$, les équations (5) donneront

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} c' &= \frac{1}{2\beta}\left[(\alpha^2-\beta^2)c^2-2\alpha c+1+\beta^2\right],\\ c'' &= \frac{1}{2i\beta}\left[(\alpha^2+\beta^2)c^2-2\alpha c+1-\beta^2\right].\end{aligned}\right.$$

En portant dans (3) les valeurs de c' et c'' données par (6) et (7), on trouve facilement les formules

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \tau\int\frac{\alpha-c}{\sqrt{(\beta^2+\gamma^2-1)+2\alpha c-\delta^2c^2}}\,dc,\\ y &= \frac{\tau}{\beta^2+\gamma^2}\int\left[\frac{\beta(\beta^2+\gamma^2-1+\alpha c)}{\sqrt{(\beta^2+\gamma^2-1)+2\alpha c-\delta^2c^2}}-\gamma\right]dc,\\ z &= \frac{\tau}{\beta^2+\gamma^2}\int\left[\frac{\gamma(\beta^2+\gamma^2-1+\alpha c)}{\sqrt{(\beta^2+\gamma^2-1)+2\alpha c-\delta^2c^2}}+\beta\right]dc,\end{aligned}\right.$$

et

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= i\tau\int\frac{c-\alpha}{1-\alpha c}\,dc,\\ z+iy &= \beta\tau\int\frac{c^2-2\alpha c+1}{(1-\alpha c)^2}\,dc,\\ z-iy &= \frac{1}{\beta}\tau\int dc,\end{aligned}\right.$$

Ainsi, les courbes, dont les deux courbures sont constantes, seront nécessairement parmi celles qui sont données par (8) et (9). Or, nous allons voir que l'hélice circulaire et la cubique (1) sont seules données par ces formules. Pour intégrer ces formules, il faut distinguer deux cas essentiellement différents, suivant que δ est nul ou différent de zéro. Dans le premier cas, les intégrales seront algébriques, tandis que dans le second cas elles seront transcendantes. Considérons d'abord les formules (9). Pour $\delta = 0$, on aura aussi $\alpha = 0$. Les seconds membres s'intègrent immédiatement, et l'on aura la cubique gauche

$$x = i\tau \frac{1}{2} c^2,$$

$$z + iy = \beta\tau\left(\frac{1}{3} c^3 + c\right),$$

$$z - iy = \frac{1}{\beta}\tau c,$$

qui est bien de la forme (1). Pour δ différent de zéro, α sera aussi différent de zéro. On pourra alors poser $\alpha c - 1 = u$; l'intégration de (9) nous donnera alors la courbe

$$x = \frac{i\tau}{\alpha^2}\left[u + (1 - \alpha^2)\log u\right],$$

$$z + iy = \frac{\beta\tau}{\alpha^3}\left[u - (1 - \alpha^2)\frac{1}{u} + 2(1 - \alpha^2)\log u\right],$$

$$z - iy = \frac{\tau}{\alpha\beta} u.$$

En résolvant ces équations par rapport aux trois inconnues u, $\frac{1}{u}$ et $\log u$, on aura

$$\beta z + i(\alpha x - \beta y) = \frac{(\alpha^2 - 1)\tau}{\alpha}\log u,$$

$$z - iy = \frac{\tau}{\alpha\beta} u,$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)z + i[2\alpha\beta x + (\alpha^2 - \beta^2)y] = \frac{(1 - \alpha^2)\beta\tau}{\alpha}\,\frac{1}{u}.$$

Par deux rotations successives, l'une autour de Oz d'un angle dont la tangente trigonométrique est égale à $\frac{-\beta}{\alpha}$, et l'autre autour de la nouvelle position de Oy d'un angle dont la tangente est égale à $\frac{\beta}{i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, on ramène cette courbe à la forme simple

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{(\alpha^2-1)\tau}{i\alpha^2}\log u,\\
z - iy &= \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\tau}{\alpha^2\beta}\,u,\\
z + iy &= \frac{\beta(1-\alpha^2)\tau}{\alpha^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,\frac{1}{u}.
\end{aligned}
$$

On reconnaît facilement l'hélice ordinaire.

Examinons maintenant les formules (8). Pour $\delta = 0$, le radical sous les signes sommes se réduit à $\sqrt{\beta^2+\gamma^2-1+2\alpha c}$, et en l'égalant à u, les seconds membres de (8) s'intègrent immédiatement, et l'on aura la cubique

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\tau}{2(\beta^2+\gamma^2)}\left[\frac{1}{3}u^3 + \qquad (\beta^2+\gamma^2+1)u\right],\\
y &= \frac{\beta\tau}{2\alpha(\beta^2+\gamma^2)}\left[\frac{1}{3}u^3 - \frac{\gamma}{\beta}u^2 + (\beta^2+\gamma^2-1)u\right],\\
z &= \frac{\gamma\tau}{2\alpha(\beta^2+\gamma^2)}\left[\frac{1}{3}u^3 + \frac{\beta}{\gamma}u^2 + (\beta^2+\gamma^2-1)u\right],
\end{aligned}
$$

qu'on ramènera facilement, par un changement des coordonnées et en tenant compte de la condition $\delta = 0$, à la forme simple de la cubique (1).

Pour δ différent de zéro, on pourra poser

$$\delta^2 c - \alpha = u,$$

et l'intégration des formules (8) nous donnera la courbe

$$
\begin{aligned}
\alpha x + \beta y + \gamma z &= \frac{\tau(\delta^2-1)}{\delta}\,\varphi,\\
(\beta^2+\gamma^2)x - \alpha(\beta y + \gamma z) &= \frac{\tau\sqrt{(\beta^2+\gamma^2)(\delta^2-1)}}{\delta}\cos\varphi,\\
\beta z - \gamma y &= \frac{\tau\sqrt{(\beta^2+\gamma^2)(\delta^2-1)}}{\delta^2}\sin\varphi.
\end{aligned}
$$

On a fait, pour abréger,

$$\arc \sin \frac{u}{\sqrt{(\beta^2+\gamma^2)(\delta^2-1)}} = \varphi.$$

Par deux rotations successives, l'une autour de Ox d'un angle dont la tangente trigonométrique est égale à $\frac{\gamma}{\beta}$, et l'autre autour de la nouvelle position de Oz d'un angle dont la tangente trigonométrique est égale à $\frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\alpha}$, on la ramène à la forme simple

$$x = \frac{\tau(\delta^2-1)}{\delta^2}\varphi,$$

$$y = \frac{\tau\sqrt{\delta^2-1}}{\delta^2}\cos\varphi,$$

$$z = \frac{\tau\sqrt{\delta^2-1}}{\delta^2}\sin\varphi.$$

On voit bien que ces équations sont celles de l'hélice ordinaire. Ainsi, les seules courbes données par (8) et (9) sont l'hélice ordinaire et la cubique (1), et par conséquent ce sont les seules courbes ayant leurs deux courbures constantes.

Géométriquement, les équations (5) représentent l'indicatrice sphérique des binormales de la courbe de l'espace. Cette indicatrice sera un cercle, d'ailleurs réel ou imaginaire, tant que l'on aura $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$ différent de zéro. Pour $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$, elle sera une parabole. En effet, dans ce cas, on aura $1+k^2=0$, et les équations (4) nous donneront

$$db^2+db'^2+db''^2=0;$$

c'est-à-dire l'indicatrice des normales principales sera une ligne de longueur nulle de la sphère, de sorte que le plan

$$Ab+Bb'+Cb''=0$$

passera par le centre et par une génératrice rectiligne de la sphère; il sera donc tangent au cône asymptote de la sphère, et le plan parallèle

$$Ac + Bc' + Cc'' + k = 0$$

coupera la sphère suivant une parabole.

On voit par là que l'hélice circulaire répond au cas où l'indicatrice est un cerc'e et la cubique (1) au cas où cette indicatrice est une parabole.

Vu et approuvé :

Paris, le 2 juin 1890.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 3 juin 1890.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Théorie algébrique des formes quadratiques. — Formes invariantes.

Réduction de deux formes quadratiques à des sommes composées des mêmes carrés.

Vu et approuvé :

Paris, le 2 juin 1890.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 3 juin 1890.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.

16409 Paris — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.