Synthetisch-geometrische
Theorie der Krümmung
von Kurven und Flächen 2. O.

Von

Dr. Carl Cranz,

Privatdozent an der polytechnischen Schule in Stuttgart.

Stuttgart.

Verlag der J. B. Metzlerschen Buchhandlung.

1886.

J. B. Metzler sche Buchdruckerei, Stuttgart.

Vorwort.

In der vorliegenden Schrift habe ich mir die Aufgabe gestellt, **die wichtigsten Beziehungen der Krümmung von Kurven und Flächen 2. Ordnung auf Grund der projektivischen Geometrie, ohne Zuhilfenahme von analytischen und kinematischen Betrachtungen, in einfacher Weise darzulegen.**

Diese Beziehungen werden, besonders für die Flächen 2. Ordnung, sonst meistens mit den Hilfsmitteln der höheren Analysis entwickelt. Durch eine zusammenhängende, rein geometrische Lehre von der Krümmung glaube ich eine wesentliche Lücke in der synthetischen Theorie der Kurven und Flächen 2. Ordnung auszufüllen. Und es ist interessant zu sehen, wie die dabei notwendigen Grenzübergänge auch hier, analog den Methoden der Analysis, aber im Sinne der projektivischen Geometrie ungezwungen sich durchführen lassen. Andererseits wird man finden, dass sich, — besonders zur Bestimmung der Krümmung in einem Punkt einer Kurve 2. Ordnung bei den verschiedenen Daten der letzteren, — infolge geometrischer Behandlungsweise allgemeine Prinzipien ergeben, welche die verschiedenen einzelnen Krümmungshalbmesser-Konstruktionen als blosse Übungsaufgaben erscheinen lassen.

Meines Wissens ist diese Schrift die erste selbständige, welche eine geometrische Theorie der Krümmung von Kurven und Flächen 2. Ordnung zu ihrem Thema hat. Jedoch hatte ich, um den Umfang derselben nicht ungebührlich zu vergrössern, von vornherein die Absicht, diese Lehre von der Krümmung gewissermassen **als Ergänzung zu den grösseren und bekanntesten Lehrbüchern der synthetischen Geometrie der Ebene und des Raums, wie z. B. denjenigen von Reye und Schröter,** herauszugeben, und ich bitte, diese Schrift als solche zu betrachten.

In Übereinstimmung damit ist **die Kenntnis der hauptsächlichsten Sätze über Kurven und Flächen 2. Ordnung vorausgesetzt.**

Dadurch war es möglich, die Krümmungsverhältnisse in nicht zu gedrängter Form so darzustellen, dass ein Leser, der nur einigermassen die synthetische Theorie der Kurven und Flächen 2. Ordnung kennt, imstande ist, die Schrift **leicht und rasch** zu lesen, ohne allzuoft mit der eigenen Durchführung von Beweisen aufgehalten zu werden.

Bei der Entwicklung der einzelnen Sätze war mir daran gelegen, Einfachheit zu erzielen. Die Sätze über die Krümmung von schiefen und normalen Schnitten einer Fläche 2. Ordnung lassen sich ohne Zweifel von einem allgemeineren Standpunkt aus, aber vielleicht weniger einfach behandeln.

Die Einteilung des Stoffs war von selbst gegeben. Das Ganze ist unter dem allgemeinen Gesichtspunkt der **Collineation** untergebracht. Für die Kurven 2. Ordnung ist es die Collineation eines Kegelschnitts und eines Kreises in der Ebene, für die Flächen 2. Ordnung die Collineation zweier Kegelschnitte im Raum.

Im **ersten Teil**, der die Krümmung der Kurven 2. Ordnung behandelt, wird nach einigen einleitenden Worten über den Begriff der Krümmung zunächst der Krümmungskreis zu einem Punkt eines Kegelschnitts in doppelter Weise definiert. Erstens aus der Betrachtung des Kegelschnitts als Kurve 2. Ordnung heraus, indem der Krümmungskreis in einem Punkt den Kreis darstellt, welcher durch drei zusammengefallene Punkte des Kegelschnitts gelegt ist; sodann in der dual entsprechenden Weise als der Kreis, welcher mit der Kurve 2. Klasse drei zusammengefallene Tangenten gemeinschaftlich hat. Die Konstruktion des Osculationskreises der ersten Definition gemäs wird durch die collineare Beziehung zwischen einem Kreis und einem Kegelschnitt geleistet; hierauf wird zur Bestimmung des Osculationskreises von der zweiten Definition aus übergegangen. Die Identität des Krümmungskreises bei beiden Definitionen wollte ich nicht versäumen noch direkt nachzuweisen, abgesehen von der Eingangs gegebenen Auseinandersetzung über die unmittelbar aufeinanderfolgenden Punkte resp. Tangenten eines Kegelschnitts. Durch Vermittlung der Ponceletschen Konstruktion und des Steinerschen Satzes war mir dieser Nachweis in einfacher Weise möglich. Die Konstruktionen des Krümmungskreises in den einzelnen Fällen, wenn von dem Kegelschnitt die Axen oder die Brennpunkte oder konjugierte Durchmesser u. s. w. vorliegen, ergeben sich als Anwendungen eines sehr allgemeinen Satzes, welcher eine Erweiterung des Steinerschen Satzes darstellt und der sehr inhaltsreichen Abhandlung von Herrn Pelz entnommen ist (Karl Pelz, a. Professor an der k. k. techn. Hochschule in Graz; die Krümmungshalbmesser-Konstruktionen der Kegelschnitte als Corollarien eines Steinerschen Satzes; Sitzungsber. d. k. böhm. Ges. d. Wiss. 4. April 1879). In einem Anhangskapitel werden einige mehr metrische Beziehungen der Krümmungskreise, besonders solche, welche die Krümmungen in den verschiedenen

Punkten desselben Kegelschnitts betreffen, endlich einige leichtere Übungsaufgaben angefügt.

Natürlich konnte es sich bei der grossen Menge von vorhandenen Krümmungshalbmesser-Konstruktionen nicht darum handeln, dieselben in möglichster Vollständigkeit, als Konglomerat von einzelnen unzusammenhängenden Konstruktionen, vorzuführen; sondern es sind dieselben durchweg als blosse Anwendungen der gewonnenen allgemeinen Prinzipien behandelt.

Die Osculation eines Kreises und eines Kegelschnitts ist sogleich als solche, nicht als spezieller Fall der Osculation zwischen einem Kegelschnitt und einem Kegelschnitt entwickelt; erstens und vor allem mit Rücksicht auf das Thema der vorliegenden Schrift, und zweitens, weil im Raum eine analoge Verallgemeinerung hätte eintreten müssen. Wer sich des Näheren über die Berührung zweier Kegelschnitte unterrichten will, findet z. B. in dem Werk von Paulus, „Grundlinien der neueren ebenen Geometrie" 1853, reichliche Gelegenheit hiezu.

Der **zweite Teil** bespricht die Krümmung der Flächen 2. Ordnung. Der Übersichtlichkeit wegen sind im Eingang einige Sätze über Flächen 2. Ordnung vorangestellt; teils bekannte Sätze über die Polareigenschaften der Flächen 2. Ordnung kurz wiederholt, teils einige Sätze über die Schnittkurven von Flächen 2. Ordnung abgeleitet, welche zum Teil, wie mir scheint, bis jetzt nicht ausgesprochen worden sind. (Darunter finden sich einige Beziehungen, welche später nicht verwendet werden und nur, da sie sich gelegentlich ergeben, des allgemeinen Interesses wegen nicht unterdrückt worden sind.) Die hauptsächlichste Beziehung, welche ich dabei im Auge habe, wird zu einem zweiten Beweis des Meusnierschen Satzes benützt. Ein Leser, der mit der Theorie der Flächen 2. Ordnung genügend vertraut ist, und der auf diese zweite Ableitung verzichtet, kann daher das achte Kapitel übergehen.

Mit dem neunten Kapitel beginnt die Untersuchung der Krümmung einer Fläche 2. Orduung. Zuerst werden die Gesetze zwischen den Krümmungen der Schnitte einer Fläche 2. Ordnung durch eine Tangente, sodann denjenigen der Schnitte durch eine Normale auseinandergesetzt; dann die einzelnen Arten dieser Flächen in Hinsicht auf ihre Krümmungsverhältnisse unterschieden, und zuletzt besondere Punkte einer und derselben Fläche, vor Allem die Punkte konstanter Krümmung der Normalschnitte, auch in ihrer Beziehung zu den Fokalkegelschnitten, hervorgehoben. Bei der Betrachtung der letzteren Punkte sind jedoch im wesentlichen nur die Resultate übersichtlich zusammengestellt und ist im übrigen auf Schröters Raumgeometrie verwiesen. Die weiteren Sätze über Krümmung, die mit den konfokalen Flächen 2. Ordnung in Zusammenhang stehen, sind beiseite gelassen. Alles dieses in Übereinstimmung mit der schon oben ausgesprochenen Absicht, diese Theorie der Krümmung grundsätzlich als eine Ergänzung zu den grösseren Lehrbüchern über synthetische Geometrie des Raumes zu betrachten.

Der synthetisch-geometrischen Ableitung der wichtigsten Sätze über die Krümmung der Flächen 2. Ordnung ist in der Hauptsache ein kleiner Aufsatz des Verfassers (Schlömilchs Zeitschrift, Jahrgang 31, Heft 1) zu Grunde gelegt. Jedoch ist die Entwicklung des Satzes von Meusnier wesentlich umgeändert.

Weitere Arbeiten, welche sich mit der Krümmung der Flächen 2. Ordnung auf projektivischer Grundlage beschäftigen, sind mir, ausser einem interessanten Aufsatz von Herrn Marx, Mathem. Annal. XVII, pag 110, zur Zeit nicht bekannt. Letzteren Aufsatz konnte ich aber nicht verwerten, weil meine Anordnung eine andere ist, und ich goniometrische Rechnungen möglichst vermeiden wollte.

Die Werke, die mir bei meiner Arbeit Belehrung und Unterstützung geboten haben, wie die von Staudt, Fiedler, Schröter, Steiner u. A., sind im Text zitiert.

Den Herren Professor Dr. A. Haas in Stuttgart und Geh. Regierungsrat Professor Dr. G. Hauck in Berlin bin ich für einige wertvolle Bemerkungen zu Dank verpflichtet.

Stuttgart, Mai 1886.

C. Cranz.

Inhalt.

I. Teil. Krümmung der Kurven 2. Ordnung.

I. Teil.

Krümmung der Kurven 2. Ordnung.

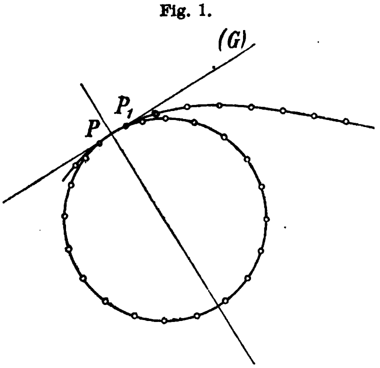
Kapitel 1.

Dualistische Definition der Krümmung und des Krümmungskreises.

1. Eine **ebene Kurve** kann in dualer Weise, entsprechend dem Reciprocitätsgesetz, definiert werden.

Erstens als die Gesamtheit aller ihrer Punkte, als **Ortskurve eines sich gesetzmässig bewegenden Punkts.** Die Tangente der Kurve in irgend einem bestimmten Punkt P ist bei dieser Definition der Kurve die Verbindungslinie G zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Punkte P, P_1. Oder, wenn man durch den Punkt P eine beliebige Sekante PQ zieht, welche die Kurve in einem weiteren Punkt Q schneidet, und denkt sich die Sekante um den Punkt P gedreht, bis der Punkt Q, auf der Kurve fortgehend, mit dem Punkt P zusammenfällt, so ist die Grenzlage dieser Sekante diejenige der Tangente in P.

Fig. 1.



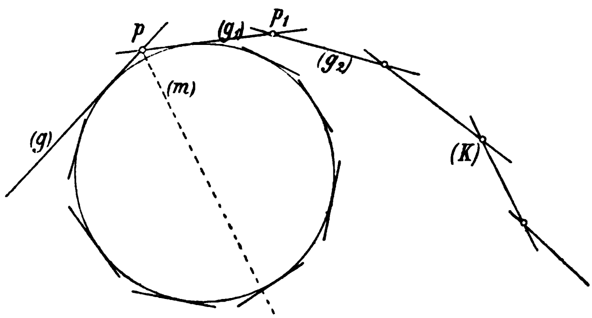
Die **Normale** eines Kurvenpunkts P ist die Senkrechte auf der so definierten Tangente. D. h., diese Normale muss man betrachten als die Grenzlage des Mittellots zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Kurvenpunkte P und P_1 (Fig. 1).

Ein Kreis, der die Kurve in einem bestimmten Punkt P „berührt“, geht durch zwei aufeinanderfolgende Punkte, hat folglich seinen Mittelpunkt auf der Kurvennormalen, d. h. der Grenzlage des Mittellots dieser zwei Punkte.

Dem steht die zweite Erzeugungsweise einer Kurve gegenüber, indem diese als die Einhüllende aller ihrer Tangenten angesehen wird, als die **Enveloppe einer sich gesetzmässig bewegenden Geraden.**

Jedem Kurvenpunkt P bei der ersten Erzeugungsweise entspricht eine Tangente g bei der zweiten (Fig. 2); der Verbindungslinie zweier Punkte P, P_1 der Schnittpunkt p zweier aufeinander folgender Lagen g, g_1 der Tangente. Der verschwindenden Strecke PP_1 zweier unmittelbar benachbarter Punkte P und P_1 entspricht der verschwindende Winkel zwischen den aufeinander folgenden Tangenten g und g_1.

Fig. 2.



Einem Kreis, der die Kurve in einem Punkt derselben berührt, d. h., bei der ersten Definition, durch zwei aufeinanderfolgende Punkte geht, steht dualistisch ein Kreis gegenüber, der zwei aufeinanderfolgende Tangenten berührt. Sein Mittelpunkt liegt auf der Winkelhalbierenden beider Tangenten. Die **Kurven-Normale** ist somit als die Grenzlage dieser Winkelhalbierenden aufzufassen. (Nämlich dem Mittellot auf der Verbindungslinie PP_1 zweier aufeinanderfolgenden Punkte bei der ersten Definition einer krummen Linie entspricht dual der unendlich ferne Punkt der Halbierungslinie des Winkels zweier benachbarter Tangenten g und g_1 bei der zweiten Definition, oder die **Richtung** dieser Winkelhalbierenden).

Natürlich ist auch ein solcher Kreis das eine Mal als geometrischer Ort eines ihn durchlaufenden Punkts, das zweite Mal als die Einhüllende seiner Tangenten anzusehen, so dass derselbe bei der ersten Entstehungsweise einer Kurve mit letzterer zwei Punkte P und P_1, bei der zweiten Entstehungsweise zwei Tangenten g und g_1 gemeinschaftlich hat.

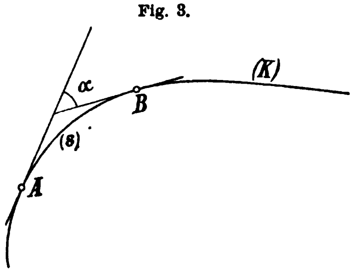
Nach dieser dualen Gegenüberstellung der Erzeugungsweisen einer krummen Linie und Definition ihrer Elemente wollen wir dazu übergehen dem entsprechend die **Krümmung eines Kurvenstücks** und den **Krümmungskreis einer Kurve zu einem gegebenen Punkt** in doppelter Weise zu definieren.

2. Es liege eine bestimmte ebene Kurve K vor, gegeben zunächst als Ort eines gesetzmässig fortbewegten Punktes. Von dieser werde ein Stück AB betrachtet, und um dessen **Krümmung** möge es sich handeln

Diese Krümmung ist die Abweichung des Kurvenstücks AB von der Geraden, von der geraden Tangente in A; oder die **Biegung** desselben. Folglich ist diese Krümmung eine Beschaffenheit, keine Grösse; es muss also eine Grösse gesucht werden, durch welche diese Beschaffenheit dargestellt wird.

Nun ist die Richtung der Kurve in irgend einem Punkt durch die Tangente gegeben. Also ist die Abweichung des Kurvenstücks AB von der Geraden nichts anderes, als der Winkel α, welchen die beiden Tangenten der Kurve in den Punkten A und B mit einander bilden (Fig. 3). Je grösser dieser Winkel der Tangenten in A und B ist, desto mehr hat sich die Richtung der Kurve in B gegenüber von A geändert. Und zwar muss man unter diesem Winkel die algebraische Summe aller der Winkel verstehen, um welche sich eine bewegliche Tangente dreht, wenn sie von dem Punkt A nach und nach zu dem Punkt B der Kurve fortrückt, so dass also, wenn das Kurvenstück AB speziell geschlossen ist, und B mit A zusammenfällt, also auch die Endtangenten zusammenfallen, jener Winkel 360^0 und nicht 0^0 ist.

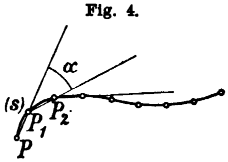
Fig. 3.



Dieser Winkel nun, welchen die Endtangenten in A und B miteinander bilden, heisst die **totale Krümmung** des ebenen Kurvenbogens AB. Die **mittlere Krümmung** desselben ist das Verhältnis der totalen Krümmung zu der Länge s des Bogens.

Da die Biegung eines Kurvenstücks um so mehr proportional dem Winkel sein wird, welchen die Tangenten in den Endpunkten gegen einander bilden, je kleiner das Kurvenstück ist, so betrachten wir künftig statt des endlichen Bogens AB ein unendlich kleines Bogenelement und sprechen von jetzt an von der **Krümmung einer Kurve in einem gegebenen Punkt P.** Das heisst, wir denken uns (Fig. 4) auf der Kurve drei unmittelbar aufeinanderfolgende Punkte P, P_1, P_2. PP_1 giebt die Richtung der Tangente in P; $P_1\,P_2$ die Richtung der darauffolgenden Tangente der Kurve an, welche gegen die vorhergehende Tangente den unendlich kleinen Winkel α bildet.

Fig. 4.

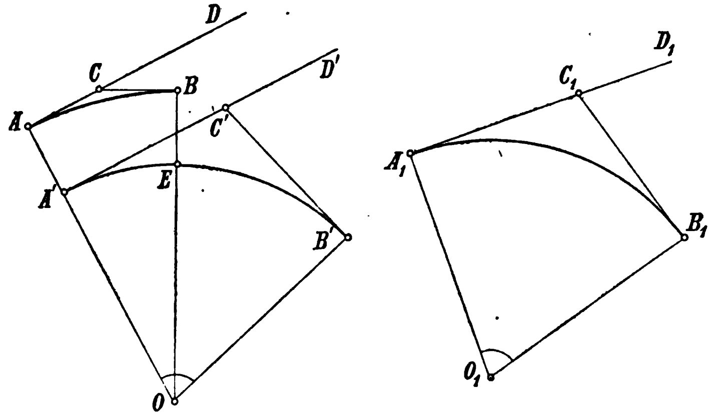


Die mittlere Krümmung des unendlich kleinen Kurvenstücks s oder kurz die Krümmung in dem Kurvenpunkt P ist dann das Verhältnis des unendlich kleinen Winkels α zu dem unendlich kleinen Bogenelement s. Dieses Verhältnis, das im allgemeinen ein endliches sein wird, suchen wir durch eine endliche Grösse darzustellen.

Zu diesem Zweck ersetzen wir die Kurve an der betreffenden Stelle durch eine andere einfachere; am einfachsten durch einen **Kreis**, der in dem Punkt dieselbe Krümmung wie die Kurve besitzt. Der Kreis hat die Eigenschaft, dass der ihn beschreibende Punkt seine Richtung überall in derselben Weise ändert, also seine **Krümmung überall dieselbe ist.** Ausserdem **verhalten sich die Krümmungen zweier gleicher Kreisbögen von verschiedenem Radius umgekehrt wie die Halbmesser.**

(Es seien nämlich AB und $A_1 B_1$ (Fig. 5) zwei gleiche Kreisbögen,

Fig. 5.



die zu ungleichen Halbmessern AO und $A_1 O_1$ gehören. Die Tangenten AD, BC und $A_1 D_1$, $B_1 C_1$ in den Endpunkten mögen sich in C und C_1 schneiden. Den zweiten Sektor $O_1 A_1 B_1$ tragen wir als $OA'B'$ so an den ersten an, dass die Mittelpunkte in O zusammenfallen und $O_1 A_1$ in die Richtung OA zu liegen kommt. $A'B'$ schneide OB in E. Nun ist Winkel DCB = Winkel AOB und $D_1 C_1 B_1 = A_1 O_1 B_1$; ferner Bogen AB : Bogen $A'E = AO : A'O$, und Bogen $A'E$: Bogen $A'B'$ oder $A_1 B_1$ = Winkel $A'OE$: Winkel $A'OB'$. Also, beide Proportionen multipliziert, Bogen AB : Bogen $A_1 B_1 = AO \sphericalangle A'OE : A'O \sphericalangle A_1 OB_1$; und da Bogen AB = Bogen $A'B'$ = Bogen $A_1 B_1$, so ist $\sphericalangle AOB : \sphericalangle A_1 OB_1$ oder, was dasselbe ist, $\sphericalangle DCB : \sphericalangle D_1 C_1 B_1 = \frac{1}{OA} : \frac{1}{O_1 A_1}$; d. h. bei Kreisbögen verhalten sich die Krümmungen umgekehrt wie die Halbmesser.)

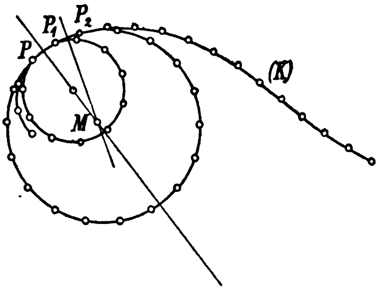
Ein solcher Kreis, der mit der gegebenen Kurve in dem bestimmten Punkt P dieselbe Krümmung hat*), ist derjenige, der sich der Kurve in

---

*) Den Gedanken, die Krümmung einer Kurve durch den Kreis zu messen, hat zuerst Leibniz gehabt. In dem Aufsatz „de natura anguli contactus et osculi, Act. Erud. 1686: Opp. T. III. Nr. 18“ sagt er, sowie die gerade Linie die geschickteste ist die Richtung einer Kurve in einem Punkt zu bestimmen, so sei der Kreis am ge-

dem Punkt am innigsten anschmiegt, also, da ein Kreis durch 3 Punkte bestimmt ist, im allgemeinen 3 zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein hat (Fig. 6).

Fig. 6.



Denn wenn für Kreis und Kurve 3 aufeinanderfolgende Punkte P, P_1, P_2 gemeinschaftlich sind, so ist der Mittelpunkt M des Kreises der Schnittpunkt der, in der Grenzlage zusammenfallenden, Mittellote, welche auf den Verbindungslinien je zweier benachbarter Punkte PP_1 und $P_1 P_2$ errichtet sind. Die Tangente einer Kurve als Ortskurve eines bewegten Punkts ist aber, wie oben bemerkt, die Verbindungslinie zweier Nachbarpunkte; folglich ist der Winkel zwischen zwei Nachbartangenten PP_1 und $P_1 P_2$ oder die totale Krümmung, und ebenso das Verhältnis dieses unendlich kleinen Winkels zu dem unendlich kleinen Kurvenstück $PP_1 P_2$ oder die mittlere Krümmung für beide Linien, Kurve und Kreis, gemeinschaftlich. Unter der Krümmung eines Kreises versteht man gewöhnlich das Reciproke seines Radius. Also ist auch die Krümmung der Kurve in dem Kurvenpunkt P der reciproke Wert von dem Halbmesser des so konstruierten Kreises.

Wenn die Krümmung variiert von Null bis unendlich, so variiert der Radius des Kreises von unendlich bis Null, d. h. der Kreis von der geraden Linie bis zum Punkt.

Der Mittelpunkt M dieses Kreises liegt auf der Normalen des betreffenden Kurvenpunkts P, da die erwähnten beiden Mittellote in der Grenzlage zu der Kurvennormalen von P zusammenfallen.

Dieser Kreis, der mit der Kurve in dem Punkt P dieselbe Krümmung hat und sich derselben am innigsten anschmiegt, d. h. im allgemeinen drei in P zusammengefallene Punkte mit ihr gemein hat, heisst der **Krümmungskreis** oder **Osculationskreis** (osculari

---

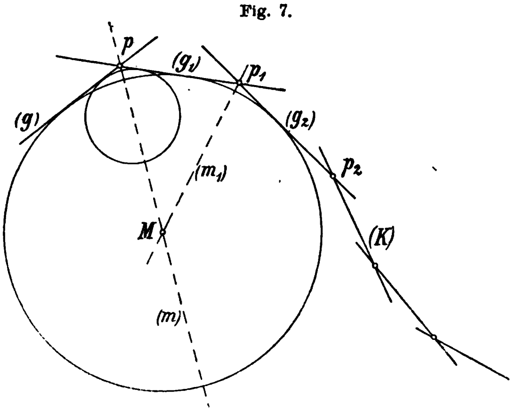
schicktesten, die Krümmung (flexuram) zu bestimmen, weil der Kreis allenthalben dieselbe Krümmung hat. Ein Kreis osculiere eine Kurve, wie er es nenne, wenn der Berührungswinkel am allerkleinsten sei. Denn unter den unendlich vielen Kreisen, welche eine krumme Linie, die mit ihr nach derselben Gegend hin hohl ist, berühren, gebe es immer einen, welcher jener Linie am gleichartigsten ist (assimilatur) und am längsten bei ihr bleibt, oder, um geometrisch zu reden, ihr so nahe kommt, dass zwischen diesem Kreis und der Kurve kein anderer Kreisbogen durch den gegebenen Punkt gezogen werden möge. Diesen allerkleinsten Berührungswinkel nenne er den angulus osculi, sowie der kleinste Winkel einer geraden Linie mit einer Kurve der angulus contactus genannt werde. Klügel, math. Wörterbuch.

lat. küssen) der Kurve zu dem Punkt P; sein Mittelpunkt der **Krümmungsmittelpunkt,** sein Radius der **Krümmungsradius,** das Reciproke des letzteren die **Krümmung** der Kurve in P. Die Berührung, welche derselbe im allgemeinen mit der Kurve eingeht, heisst eine **dreipunktige Berührung** oder **Berührung zweiter Ordnung** oder eine **Osculation.** Denkt man sich alle möglichen Kreise, vom Kreis mit Radius Null an, deren Mittelpunkte sämtlich auf der Kurvennormalen von P liegen und welche die Kurve in P berühren, so gehen alle diese nur eine gewöhnliche zweipunktige Berührung oder eine Berührung erster Ordnung mit der Kurve ein, d. h. nur durch **zwei** aufeinanderfolgende Punkte P und P_1 der Kurve (Fig. 6), mit Ausnahme eines einzigen, des Krümmungskreises, welcher eine Berührung zweiter Ordnung eingeht, nicht zwei, sondern **drei** benachbarte Punkte mit der Kurve gemein hat. Der Krümmungsmittelpunkt ist der Punkt, in welchem das Mittellot auf PP_1, auf dem die Mittelpunkte der sämtlichen Berührungskreise liegen, geschnitten wird von dem Mittellot auf $P_1 P_2$; oder: der Krümmungsmittelpunkt ist der Schnittpunkt zweier aufeinanderfolgender Kurvennormalen.

Damit sind wir zur dualistisch gegenüberstehenden Definition des Osculationskreises übergeleitet.

3. Die gegebene Kurve K sehen wir jetzt als Einhüllende ihrer Tangenten $g, g_1, g_2 \ldots$ an. Wir betrachten (Fig. 7) die sämtlichen Kreise, welche mit der Kurve zwei benachbarte Tangenten g und g_1 gemeinschaftlich haben. Deren giebt es unendlich viele. Ihre Mittelpunkte liegen alle auf der Winkelhalbierenden der beiden Tangenten. Unter diesen Kreisen giebt es einen einzigen, der mit der Kurve **drei** aufeinanderfolgende Tangenten g, g_1, g_2 gemein hat; denn durch drei Tangenten wie durch drei Punkte ist ein Kreis bestimmt. Sein Mittelpunkt ist nämlich derjenige Punkt M, in welchem die vorhin genannte Winkelhalbierende m von der darauffolgenden Winkelhalbierenden m_1 geschnitten wird. Die Grenzlage der Winkelhalbierenden zweier Nachbar-Tangenten ist aber die Kurvennormale. **Der Krümmungskreis für die zweite Entstehungsweise einer Kurve ist also derjenige Kreis, welcher**

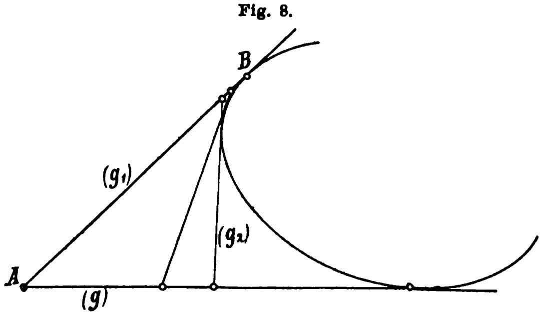
Fig. 7.



mit der Kurve drei zusammengefallene Tangenten gemein hat; sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt zweier zusammengefallener Normalen der Kurve.

Dass der Schnittpunkt zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Kurvennormalen im Grenzfall ein im Endlichen liegender, ganz bestimmter Punkt ist, darf nicht überraschen. Analoga sind genugsam bekannt; jedermann weiss, dass die aufeinanderfolgenden Normalen eines Kreises sich alle in demselben Punkt im Endlichen, dem Kreismittelpunkt schneiden; auch in der projektivischen Theorie der Kegelschnitte werden derartige Übergänge häufig ausgeführt: Lässt man bei der Entstehung eines Kegelschnitts als Einhüllender der Verbindungslinien von den entsprechenden Punkten zweier projektivischer Punktreihen g und g_1 (Fig. 8) eine beliebige Tangente g_2 sich der einen Punktreihe g_1 unbegrenzt nähern, so wird beim Zusammenfallen von g_1 und g_2 der Schnittpunkt von g_2 mit der einen Punktreihe g_1 der Berührungspunkt B von g_1 mit der Kurve 2. Klasse; der Schnittpunkt von g_2 mit der andern Punktreihe g wird zum Schnittpunkt A der beiden Träger g und g_1, welcher jenem Berührungspunkt B projektivisch entspricht.

Fig. 8.



Wir beschränken uns jetzt auf die Kurven der zweiten Ordnung. Und es ist unsere Aufgabe, den Krümmungskreis für einen gegebenen Punkt P der Kurve 2. Ordnung zu bestimmen, einfache Konstruktionen für den Krümmungsmittelpunkt in den verschiedenen Fällen, womöglich auf Grundlage allgemeiner Prinzipien, sowie etwaige sich weiter ergebende Beziehungen, für beide dual sich gegenüberstehende Erzeugungsweisen zu suchen. Wir wollen zu diesem Zweck von der Entstehung des Kegelschnitts zuerst als Kurve 2. Ordnung, später dann als Kurve 2. Klasse ausgehen. Die Identität des Krümmungskreises für beide Definitionen desselben wird sich, abgesehen von der obigen Auseinandersetzung, beim Übergang von der einen zur andern Betrachtung noch gelegentlich ergeben.

Kapitel 2.

Collineation eines Kreises und eines Kegelschnitts. — Der Krümmungskreis in einem Punkte eines Kegelschnitts als einer Kurve 2. Ordnung.

1. Ein Kegelschnitt K und ein Punkt P auf demselben ist gegeben. Es handelt sich darum, den zu P gehörigen Krümmungskreis K_1 zu konstruieren, indem wir den Kegelschnitt vorerst als Kurve 2. Ordnung betrachten, also um die Aufgabe, **den Kreis zu bestimmen, welcher durch drei, in P vereinigt gedachte, unmittelbar aufeinanderfolgende Punkte der Kurve gelegt ist.**

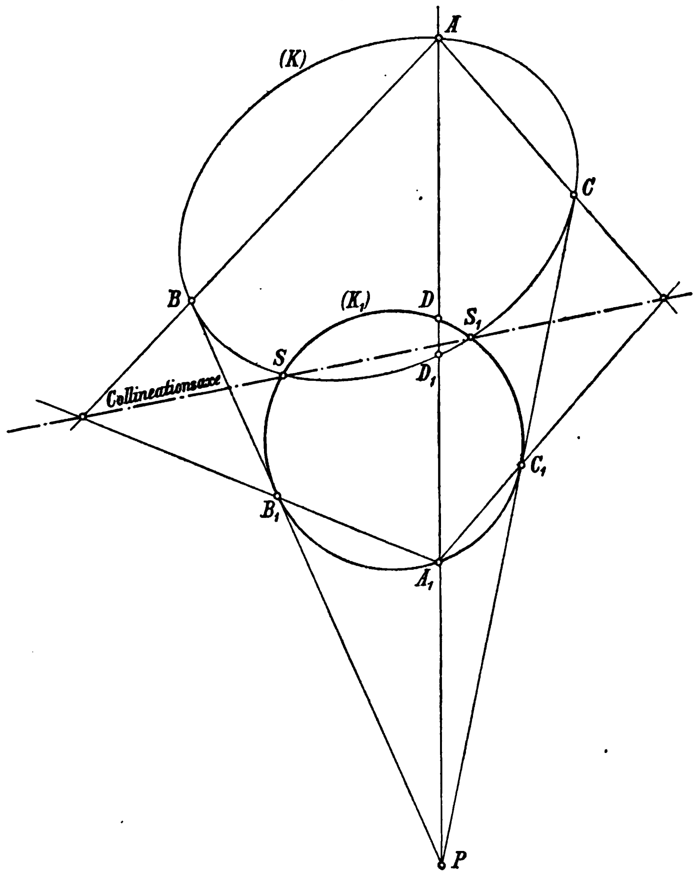
Dies möge im Folgenden geschehen, indem wir den **Kegelschnitt zu einem Kreis K_1 in collineare Beziehung setzen.**

Der Kreis K_1 sei zunächst in beliebiger Lage gegenüber dem Kegelschnitt K gegeben (Fig. 9), so darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass das **Collineationszentrum** P der Schnittpunkt zweier gemeinschaftlicher Tangenten PB und PC sein muss, falls solche (wie in der Fig. 9) reell vorhanden sind. Durch das Collineationszentrum P gezogene Strahlen $PA_1\,D_1\,D\,A$ etc. sind **zusammenfallende entsprechende Strahlen** beider Systeme; A und A_1, D und D_1, B und B_1, C und C_1 sind **entsprechende Punkte**; AB und A_1B_1, AC und A_1C_1, BC und B_1C_1 etc. sind **collinear entsprechende Geraden.** Die **Collineationsaxe** wird konstruiert, indem man zwei Paare entsprechender Geraden zum Durchschnitt bringt und die Durchschnittspunkte verbindet, — was in der Figur angedeutet ist. Auf der Collineationsaxe schneiden sich sämtliche Paare von entsprechenden Geraden. Falls der Kreis den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten S und S_1 schneidet, so geht die Collineationsaxe durch diese beiden Schnittpunkte, da diese zwei zusammengefallene entsprechende Punkte darstellen. Der unendlich fernen Geraden im System des Kreises K_1 entspricht collinear im System K die **Gegenaxe G des Kegelschnittsystems;** den unendlich fernen Punkten im System des Kegelschnitts K stehen collinear die Punkte einer zweiten Geraden gegenüber, **der Gegenaxe G_1 des Kreissystems;** die beiden Gegenaxen G und G_1 sind unter sich und mit der Collineationsaxe parallel (in der Figur nicht eingezeichnet).

2. Dies vorausgeschickt, nehmen wir spezieller den Kreis K_1 in solcher Lage gegenüber dem Kegelschnitt an, dass das **Collineationszentrum P auf dem Kegelschnitt K liegt.** Dann ist hiezu notwendig, dass der **Kreis den Kegelschnitt in P einfach berührt.** Denn das Collineationszentrum ist der Durchschnittspunkt zweier gemeinschaftlicher

Tangenten des Kegelschnitts und des Kreises; und da P auf dem Kegelschnitt liegen soll, sind die beiden gemeinschaftlichen Tangenten zur Kegelschnittstangente in P zusammengefallen, und ist das Collineationszentrum

Fig. 9.



der Berührungspunkt der beiden in P sich berührenden Kurven, des Kegelschnitts und des Kreises.

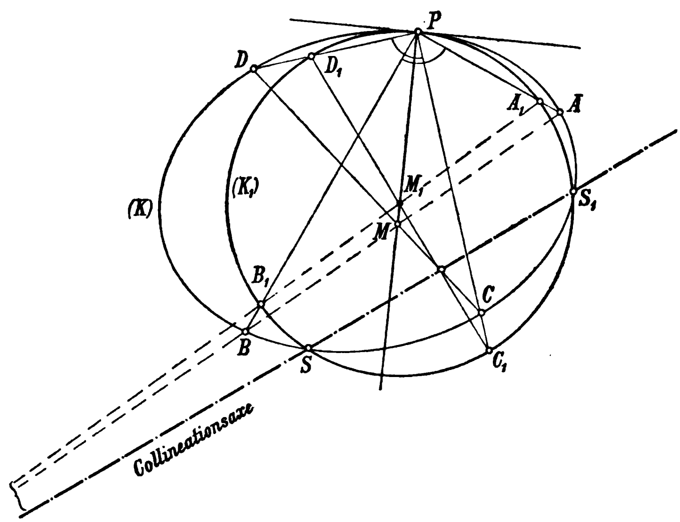
Zieht man (Fig. 10, Seite 10) durch P beliebige Strahlen, welche den Kegelschnitt und den Kreis bezw. in A und A_1, B und B_1 u. s. w. schneiden, so sind A, A_1; B, B_1 u. s. w. entsprechende Punkte in beiden Systemen; die Verbindungslinien AB, $A_1 B_1$ ... collinear entsprechende Geraden. Die Collineationsaxe kann damit leicht konstruiert werden; entweder als Verbindungslinie der Schnittpunkte zweier Paare AB und $A_1 B_1$, CD und $C_1 D_1$ von entsprechenden Geraden, oder, falls die beiden Schnittpunkte S und S_1 des Kreises und des Kegelschnitts reell sind, als Verbindungslinie $S S_1$.

Diese Collineationsaxe kann aber auch durch folgende andere Überlegung gefunden werden

Wir gehen darauf aus, das collineare Bild M des Kreismittelpunkts M_1 zu bestimmen; es werden sich dabei interessante Beziehungen herausstellen.

Durch das Collineationszentrum P ziehen wir den beliebigen Strahl PAA_1 und senkrecht darauf PBB_1; ebenso PCC_1 und senkrecht darauf PDD_1; so sind AB und A_1B_1, CD und C_1D_1 entsprechende Geraden. Alle derartige Geraden A_1B_1, C_1D_1 schneiden sich als Durchmesser des Kreises K_1 in demselben festen Punkt M_1, dem Kreismittelpunkt. Also schneiden sich die entsprechenden Geraden AB, CD ... ebenfalls in einem festen Punkt M, welcher dem Kreismittelpunkt M_1 collinear zugeordnet ist, folglich auf der Geraden PM_1 durch das Collineationszentrum

Fig. 10.



liegt. PM_1 steht als Kreisradius senkrecht auf der Kegelschnittstangente in P, da die beiden Kurven sich in P berühren; also haben wir zunächst folgenden Satz gewonnen:

Satz: Dreht sich ein rechter Winkel um seinen Scheitel P, welcher auf einem Kegelschnitt liegt, so geht die Verbindungslinie der Schnittpunkte seiner Schenkel mit dem Kegelschnitt durch einen festen Punkt M auf der Normalen in jenem Scheitel.

Nun ist M_1 als Kreismittelpunkt Pol der unendlich fernen Geraden in der Ebene des Kreises K_1; dieser unendlich fernen Geraden des Systems K_1 entspricht collinear die Gegenaxe G in der Ebene des Kegelschnitts K; und der Pol dieser Gegenaxe in Beziehung auf den Kegelschnitt ist somit das collinear entsprechende Bild M zu dem Punkt M_1.

Umgekehrt kann also **die Gegenaxe G in der Kegelschnittsebene konstruiert werden als Polare jenes Punktes M in Beziehung auf den Kegelschnitt.** Daraus ergiebt sich dann die **Collineationsaxe** als eine Parallele zu der so konstruierten Gegenaxe G.

Auf diese Weise sind also der Kegelschnitt K und ein Kreis K_1 zu einander derart in collineare Beziehung gesetzt, dass sie sich in P einfach berühren, also eine Berührung 1. Ordnung miteinander eingehen oder zwei in P zusammengefallene Punkte miteinander gemein haben; auch sind alle zu der collinearen Beziehung notwendigen Elemente konstruiert worden.

3. Jetzt wollen wir dem Kreis eine noch speziellere Lage gegenüber dem, als fest angenommenen, Kegelschnitt K geben, eine solche nämlich, dass **beide Kurven nicht nur zwei, sondern drei Punkte gemein haben.**

Zu diesem Zweck möge sich der **Kreis ändern, indem er aber stets den Kegelschnitt in P berührt.** Der Mittelpunkt M_1 des Kreises nimmt dann andere und andere Lagen auf der Normalen PMM_1 des Kegelschnitts in P an, und wir wollen zusehen, in welcher Weise sich die Elemente der jedesmaligen collinearen Beziehung zwischen Kegelschnitt und Kreis ändern.

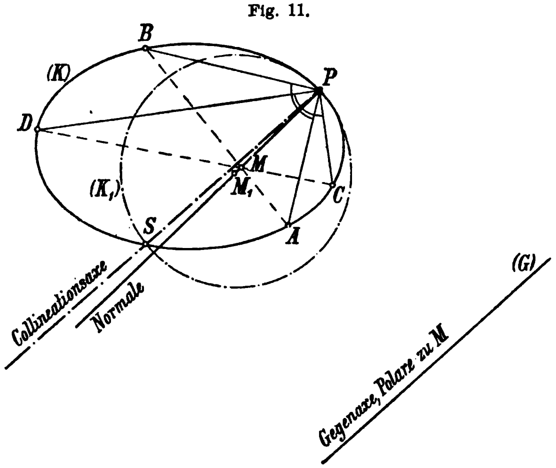
Der Punkt M auf der Normalen bleibt fest; er ist der obige feste Punkt, in welchem sich die Hypotenusen aller rechtwinkligen Dreiecke schneiden, welche dem Kegelschnitt einbeschrieben sind und ihre Spitze in dem Punkt P haben. Also bleibt auch die Polare von M dieselbe, oder **die Gegenaxe G in dem Kegelschnittsystem bleibt fest.**

Die Collineationsaxe wird andere Lagen annehmen; dabei liegen die beiden andern Schnittpunkte S und S_1 ausser P zwischen Kreis und Kegelschnitt stets auf der Collineationsaxe. Aber die Richtung der Collineationsaxe bleibt bei dieser Änderung dieselbe, da sie der Gegenaxe G, der Polaren des festen Punkts M, parallel sein muss.

Auf die Weise möge sich die Collineationsaxe so lange parallel verschieben, bis auch noch einer der beiden Schnittpunkte S und S_1, etwa S_1, mit P zusammenfällt, so dass **in P drei Punkte vereinigt** sind; der hiezu gehörige Kreis K_1 ist folglich **der Krümmungs- oder Osculationskreis,** welcher sich dem Kegelschnitt in dreipunktiger Berührung anschmiegt. Die zugehörige Collineationsaxe geht nach dem Gesagten durch P und den zweiten Schnittpunkt S des Kreises mit dem Kegelschnitt.

Und umgekehrt wird man, um den Krümmungskreis zu konstruieren, nur den zweiten Schnittpunkt S desselben mit dem Kegelschnitt zu bestimmen haben (Fig. 11). Nämlich S ist der zweite Schnittpunkt der Collineationsaxe mit dem Kegelschnitt; die Collineationsaxe ist die Parallele durch den gegebenen Kurvenpunkt P zu der Gegenaxe G; und letztere ist die Polare des öfters erwähnten festen Punkts M auf der Normalen. Ist dieser zweite Schnittpunkt S der Collineationsaxe gefunden, so hat man nur durch P und S einen Kreis zu konstruieren, dessen Mittelpunkt auf der Normalen von P liegt. Die drei andern Schnittpunkte des Kreises mit dem Kegelschnitt sind dann in P vereinigt. Also hat man folgende Bestimmungsweise des Kreises K_1:

Fig. 11.



Konstruktion des Krümmungskreises K_1 zu einem gegebenen Punkt P eines Kegelschnitts K:

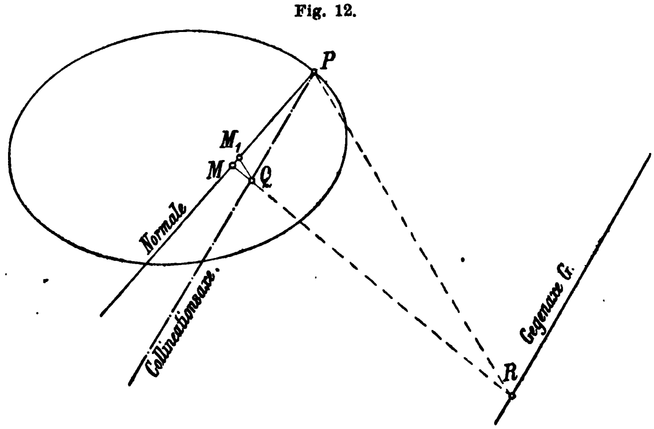
Man zieht durch P zwei beliebige Paare von aufeinander senkrechten Geraden PA und PB, PC und PD; die Verbindungslinien AB und CD der Schnittpunkte derselben mit dem Kegelschnitt schneiden sich in einem bestimmten Punkt M auf der Kegelschnittsnormalen von P, welcher für alle solche Paare derselbe ist. Man konstruiert die Polare G zu M in Beziehung auf den Kegelschnitt und parallel zu derselben durch P eine Gerade PS. Der Kreis, welcher durch P und den zweiten Schnittpunkt S dieser Geraden PS geht und die Kegelschnittstangente von P berührt, ist der Krümmungskreis von P.

Nebenbei bemerkt, kann man, nachdem der Punkt M, seine Polare G und die Parallele dazu durch P konstruiert ist, den Mittelpunkt M_1 des Krümmungskreises direkt konstruiren, ohne erst den Schnittpunkt S suchen zu müssen. Nämlich M_1 ist der collinear entsprechende Punkt zu M. Diesen findet man mittelst der festgelegten collinearen Beziehung leicht folgendermassen:

Man zieht (Fig. 12, Seite 13) **durch M eine beliebige Gerade, welche die Collineationsaxe in Q und die Gegenaxe G in R trifft,**

ferner durch Q eine Parallele zur Verbindungslinie PR; diese Parallele schneidet die Normale PM in dem gesuchten Mittelpunkt M_1 des Krümmungskreises.

Fig. 12.



Denn M ist der Schnittpunkt der Geraden PM und RM. Die entsprechende Gerade zu PM ist PM selbst, und das Bild der Geraden RM ist die Parallele QM_1 zu RP, da Q als auf der Collineationsaxe liegend sich selbst entspricht, und R, als auf der Gegenaxe G liegend, dem unendlich fernen Punkt von PR collinear zugeordnet ist.

4. Der Krümmungskreis, der mit einem Kegelschnitt eine dreipunktige Berührung eingeht, **berührt und schneidet zugleich den Kegelschnitt**, da der Kreis zwei reelle Punkte P und S mit dem Kegelschnitt gemein hat, also, kurz gesprochen, teils auf der inneren, teils auf der äusseren Seite des Kegelschnitts liegen muss.

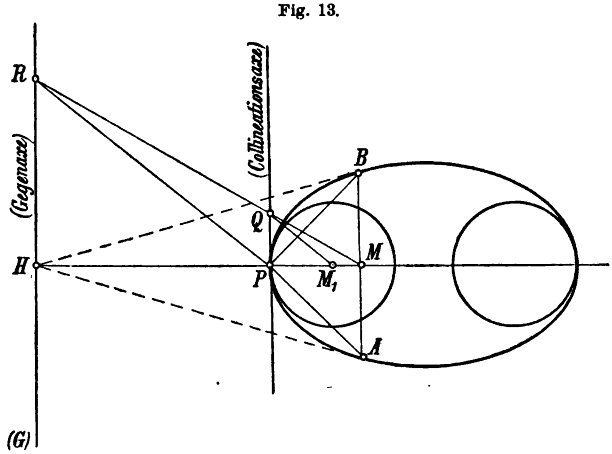
Ferner **existiert nur ein einziger Krümmungskreis** für jeden Punkt des Kegelschnitts, da in dem letzteren Punkt drei Punkte vereinigt liegen und ein Kreis durch drei Punkte vollständig bestimmt ist.

5. Wenn der **gegebene Punkt P des Kegelschnitts speziell** ein **Scheitelpunkt** ist, so treten besondere Verhältnisse ein.

Die Normale ist dann die Axe des Kegelschnitts. Ist diese gegeben, so findet man den Punkt M ohne Weiteres, indem man (Fig. 13, Seite 14) PA und PB je unter 45^0 gegen die Axe zieht und die Schnittpunkte A und B verbindet; AB ist senkrecht zur Axe und schneidet diese in Punkt M. Die Polare von M, also die Gegenaxe G, ist darnach senkrecht zur Kegelschnittsaxe und die **Collineationsaxe ist die Tangente des Kegelschnitts im Scheitel P.** Folglich ist bei dieser speziellen Lage des Punktes P auch der weitere Schnittpunkt S des Kreises und des Kegelschnitts auf P zusammengefallen, so dass **der Krümmungskreis im Scheitel vier aufeinanderfolgende Punkte mit dem Kegelschnitt gemeinschaftlich hat;** wie auch aus der Symmetrie der Kurve in Beziehung auf die Axe zu erwarten war. **In den Scheiteln geht also der Krümmungskreis mit der Kurve 2. Ordnung eine vierpunktige Berührung, eine Berührung 3. Ordnung ein;** und zwar nur eine solche, wie aus der ganzen Ableitung hervorgeht.

Da ein Kreis einen Kegelschnitt in nicht mehr als vier Punkten schneiden kann und in dem Scheitel P vier gemeinschaftliche Punkte vereinigt sind, so ist **in diesem Fall das Berühren nicht zugleich ein Schneiden; der Krümmungskreis zu einem Scheitelpunkt schneidet die Kurve in keinem weiteren Punkt, sondern liegt nur auf der einen Seite der Kurve.**

Fig. 13.



Die Konstruktion ergiebt sich genau analog der früheren Auseinandersetzung. Der Punkt M, dessen Polare G, die Collineationsaxe parallel dazu als Tangente im Scheitel P, werden wie oben erwähnt konstruiert; dazu der Mittelpunkt M_1 des Osculationskreises als das collineare Bild zu M.

Konstruktion des Osculationskreises in einem Scheitel P eines Kegelschnitts (Fig. 13):

Man zieht durch P die Geraden PA und PB je unter 45^0 gegen die Axe von P; verbindet deren Schnittpunkte A und B mit der Kurve, sucht zu dem Schnittpunkt M von AB und der Axe die Polare G und zieht zu letzterer die Parallele PQ durch den Scheitel P (welche zugleich Scheiteltangente ist). Dann erhält man den Mittelpunkt M_1 des Osculationskreises, wenn man durch M eine beliebige Gerade MQR zieht, welche die Scheiteltangente in Q, jene Polare G in R schneidet, und durch Q eine Parallele zur Verbindungslinie PR zieht, welche die Axe in M_1 trifft.

Der Ausdruck des Krümmungshalbmessers in den Halbaxen des Kegelschnitts, allgemein und speziell für Scheitelpunkte, wird sich später ergeben.

Kapitel 3.

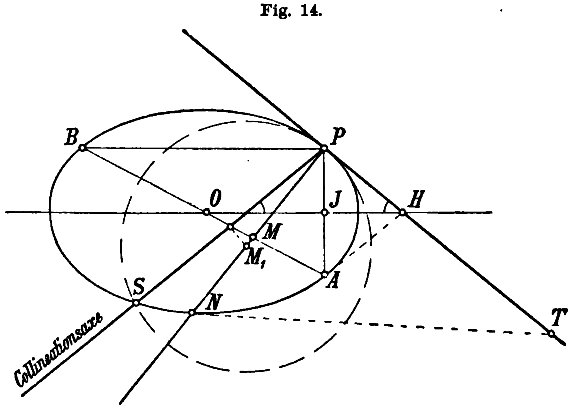
Fortsetzung. — Einige einfache Krümmungshalbmesser-Konstruktionen.

1. Die im Vorhergehenden abgeleitete Konstruktion des Krümmungskreises für einen beliebigen Punkt eines Kegelschnitts ist sehr allgemein und wichtig, weil mannigfacher Modifikationen und Spezialisierungen fähig, aber bei der wirklichen Ausführung noch ziemlich kompliziert.

Angenommen, ausser dem Punkt P und dessen Normale sei **eine Axe des Kegelschnitts** und der Mittelpunkt gegeben, so finden sich leicht als Spezialisierungen des obigen Verfahrens sehr einfache Konstruktionen.

Um den Punkt M auf der Normalen zu bestimmen, ist, wie wir wissen, ein Paar aufeinander senkrechter Strahlen PA und PB durch P zu ziehen und deren Schnittpunkte A und B zu verbinden. Wir nehmen diese Strahlen bezw. senkrecht und parallel zu der gegebenen Axe (Fig. 14); so geht AB durch den Mittelpunkt O der Kurve. Denn die Diagonalen eines der Kurve einbeschriebenen Rechtecks, dessen Seiten parallel den Axen sind, schneiden sich im Mittelpunkt O. Es bleibt übrig, die Gegenaxe G, d. h. die Polare von M zu finden; als Verbindungslinie der Pole von irgend zwei Geraden durch M. Solche zwei Geraden durch M sind die Normale PN von P und der Durchmesser AB. Der Pol von PN ist der Schnittpunkt T der Tangenten in P und N; der des Durchmessers AB ist der unendlich ferne Punkt der Tangente in A (oder B). Also ist die erwähnte Gegenaxe G die Parallele durch T mit der Tangente AH in A, und die Collineationsaxe PS die Parallele durch P zu derselben Tangente in A; und da A der zu P symmetrische Punkt in Beziehung auf die Axe ist, **so bildet die Collineationsaxe gegen die Kegelschnittsaxe denselben Winkel, wie die Tangente in P.**

Fig. 14.



Dieser Gedankengang passt auch für die Parabel, als Grenzfall einer Ellipse, deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt. Somit haben wir folgende speziellere Konstruktion (Fig. 14), die nur für die Scheitelpunkte ihre Gültigkeit verliert.

Ponceletsche Konstruktion des Krümmungskreises eines Kegelschnitts:

Durch den gegebenen Punkt P des Kegelschnitts legt man eine Gerade PS, welche mit der einen (und der andern) Axe denselben Winkel bildet, wie die Tangente; so ist ein Kreis, welcher den Kegelschnitt in P berührt und durch den Schnittpunkt S der Geraden PS mit der Kurve geht, der Osculationskreis in P.

2. Diese Konstruktion folgt übrigens auch ohne Weiteres aus unserer Definition des Krümmungskreises, wenn folgender Satz aus der Lehre von den Kegelschnitten hier als bekannt vorausgesetzt wird.

Satz. Die Halbierungslinien der Winkel, welche durch die gemeinschaftlichen Sehnenpaare eines Kreises und eines Kegelschnitts gebildet werden, sind den Kegelschnittsaxen parallel.

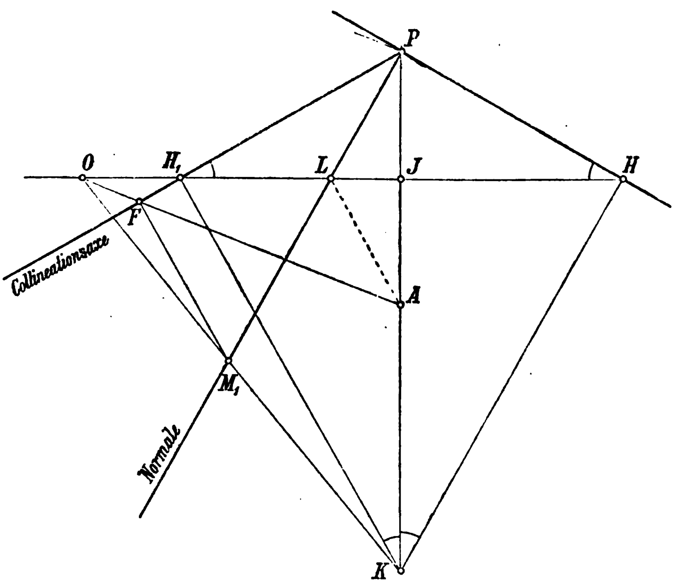
Ein Kreis also schneide den gegebenen Kegelschnitt in vier Punkten A, B, C, D. Die Halbierungslinien der Winkel zwischen AB und CD einerseits und BC und AD andererseits sind den Axen parallel. Wenn der Kreis nun so verändert wird, dass B mit A zusammenfällt, so wird AB zur Tangente, und der Kreis berührt in A zweipunktig den Kegelschnitt. Fällt auch noch C mit A zusammen, so wird AC zu derselben Tangente in A und der Kreis zum Osculationskreis in A, da er mit dem Kegelschnitt drei zusammengefallene Punkte gemein hat. AD ist die Verbindungslinie des Kurvenpunkts A mit dem zweiten Schnittpunkt D des Kreises und des Kegelschnitts; und die Halbierungslinie des Winkels zwischen der Tangente in A und zwischen AD ist parallel einer Axe, und umgekehrt. Also haben wir wieder dasselbe Resultat.

3. Zur vollständigen Ausführung der Ponceletschen Konstruktion ist es nötig, noch durch P und S einen Kreis (den Krümmungskreis) zu legen, dessen Mittelpunkt M_1 die Normale von P enthält, also Punkt S und das Mittellot auf PS zu suchen und letzteres mit der Normalen von P zum Durchschnitt in M_1 zu bringen.

Zunächst ist nun leicht einzusehen, dass man die Mitte von PS einfach wie folgt erhält: den Punkt A, der symmetrisch zu P in Beziehung auf die Axe liegt, verbindet man mit dem Mittelpunkt O der Kurve; **diese Verbindungslinie OA schneidet die Gerade PS in der Mitte F der letzteren.**

Man erkennt dies ohne Mühe entweder aus der collinearen Beziehung von M und M_1, oder auch folgendermassen: Der konjugierte Durchmesser zu der Richtung der Sehne PS ist die Verbindungslinie von deren Mitte F mit dem Mittelpunkt O der Kurve, und der zu OP konjugierte Durchmesser ist parallel der Tangente PH in P; da also PS und PH gegen die Axe gleiche Winkel bilden, muss dasselbe auch mit den ihnen konjugierten Richtungen von OF und OP der Fall sein; d. h. OF geht durch den zu P in Beziehung auf die Axe symmetrischen Punkt A. Demnach bleibt folgende Konstruktion übrig (Fig. 15): Man zieht die Gerade PFS unter demselben Winkel gegen die Axe, wie die Tangente von P, und verbindet den Kurvenmittelpunkt O mit dem zu P für die Axe symmetrischen Punkt A. Diese Verbindungslinie schneidet PS in F; in F errichte man die Senkrechte FM_1 auf PS, welche die Normale PM_1 von P im Krümmungsmittelpunkt M_1 trifft.

Fig. 15.



4. Auch diese Konstruktion lässt sich noch vereinfachen. Denn wenn man OM_1 zum Schnitt K mit PA bringt, so steht KH_1 senkrecht auf der Geraden PH_1, oder, was wegen der Kongruenz der Dreiecke PHK und PH_1K dasselbe ist, **es steht KH senkrecht auf der Tangente PH von P.** Man braucht also nur den Schnittpunkt K von PA und der in H auf PH Senkrechten HK mit dem Kurvenmittelpunkt O zu verbinden, um sofort den Krümmungsmittelpunkt M_1 zu erhalten.

(Beide Konstruktionen sind identisch, d. h. man kommt auf denselben Punkt M_1 der Normalen, erstens, wenn man den zu P symmetrischen Punkt A mit O verbindet, durch P die Gerade PS unter demselben Winkel gegen die Axe wie die Tangente zieht, und im Schnittpunkt F von OA und PS das Lot FM_1 auf PS errichtet; oder zweitens, wenn man in H_1 die Senkrechte H_1K auf PS konstruiert und KO mit der Normalen in M_1 zum Durchschnitt bringt:

Nämlich, die Identität ist bewiesen, wenn man zeigt, dass A der zu P symmetrische Punkt, also $JP = JA$ wird, wenn man H_1K senkrecht auf PS, dann OK zieht, in M_1 die Parallele M_1F zu H_1K konstruiert (so dass auch $M_1F \perp PS$) und endlich OF bis A verlängert.

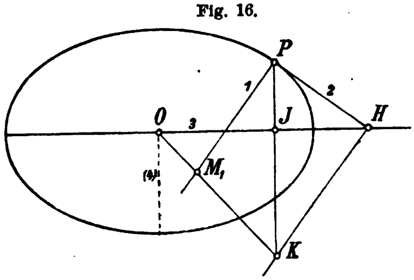
Wir wollen zu diesem Zweck allgemeiner beweisen, dass, wo auch der Mittelpunkt O der Kurve auf der Axe liegen möge, bei diesem letzteren Gang der Konstruktion, der Punkt A derselbe feste Punkt auf der zur Axe Senkrechten PK bleibt, nämlich der zu P für die Axe symmetrische Punkt:

Lässt man, alles Übrige unverändert gelassen, O auf der Axe andere und andere Lagen annehmen, während man sich jedesmal die letzterwähnte Konstruktion ausgeführt denkt, so ändert sich auch M_1 auf der Normalen PM_1, und Punkt F auf PS. Also wird die Punktreihe O perspektivisch zur Punktreihe M_1 (Zentrum K); die Punktreihe M_1 ist aber ähnlich der Punktreihe F, weil FM_1 stets senkrecht PS; somit ist die Punktreihe O auf der Axe projektivisch zur Punktreihe F auf PS, und zwar perspektivisch; denn wenn speziell O mit H_1 zusammenfällt, so thut es auch F. Folglich gehen die Verbindungslinien OF entsprechender Punkte O und F durch einen festen Punkt A. Dieser Punkt A liegt näher so, dass $JA = JP$ ist, wie man sofort sieht, wenn man O speziell mit dem Schnittpunkt L der Normalen und der Axe zusammenfallen lässt.)

Also resultiert folgende einfache Konstruktion des Krümmungsmittelpunkts M_1:

Konstruktion (Fig. 16):

Fig. 16.



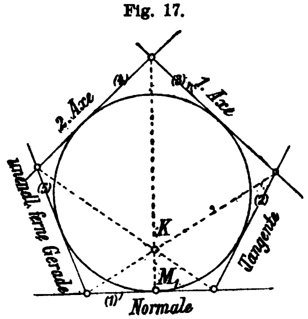
Errichtet man im Schnittpunkt H der Tangente des gegebenen Punkts P mit einer Axe des Kegelschnitts die Senkrechte auf der Tangente, und schneidet diese Senkrechte das von P auf die Axe gefällte Lot in K, so begegnet die Verbindungslinie des Kurvenmittelpunkts O und des Punktes K der Normalen von P im Krümmungsmittelpunkt M_1 von P.

5. Dieses Verfahren gilt für die eine, wie die andere Axe; auch für die Parabel, wo die Verbindungslinie des Punktes K mit dem Mittelpunkt zu der Parallelen durch K mit der Parabelaxe wird. Weiter ist aber in dieser Konstruktion ein **Satz von Steiner** verborgen, der sich in der Folge als ausserordentlich fruchtbar erweisen wird, besonders mit der Erweiterung, wie sie von **Pelz** geleistet worden ist, — ein Prinzip, mit dessen Hilfe es möglich ist, geradezu unzählig viele Konstruktionen des Krümmungskreises mit leichter Mühe zu bilden.

Nämlich, durch 4 Geraden zusammen mit der unendlich fernen Geraden als 5 Tangenten ist eine Parabel vollständig bestimmt. Solche 4 Geraden sind die zwei Axen, die Tangente und Normale von P. Wir bestimmen den Berührungspunkt dieser Parabel mit der Kegelschnittsnormalen: Der Brianchonsche Satz für 5 Tangenten 1, 2, 3, 4, 5 eines Kegelschnitts sagt u. A. aus, dass man den Berührungspunkt z. B. der Tangente 1 erhält, wenn man den Schnittpunkt von 3 und 4 mit dem Durchschnittspunkt der Verbindungslinien (2, 3) (1, 5) und (4, 5) (1, 2) verbindet.

(In Fig. 17 ist der Satz von Brianchon schematisch angedeutet; statt der eingehüllten Parabel ist des Schematismus wegen hier und auch später einfach ein Kreis gezeichnet.)

Fig. 17.



Diese Tangenten 1, 2, 3, 4, 5 seien (vgl. auch Fig. 16) der Reihe nach: die Normale (1) von P, die Tangente (2) von P, die eine Axe (3), die andere Axe (4), die unendlich ferne Gerade (5). Die Verbindungslinie der Schnittpunkte von 2, 3 und 1, 5 ist die Verbindungslinie des Punktes H mit dem unendlich fernen Punkt der Normalen, d. h. die Senkrechte in H auf der Tangente von P. Ferner die Verbindungslinie der Schnittpunkte (4, 5) und (1, 2) ist die Senkrechte von P auf die Axe 3. Diese beiden so konstruierten Verbindungslinien schneiden sich in K.

Die Verbindungslinie von K mit (3, 4), d. h. mit dem Kurvenmittelpunkt O trifft die Normale im Berührungspunkt M_1 jener Hilfsparabel. Dies ist aber, wie man sieht, genau unsere letzte Konstruktion (Fig. 16); der Berührungspunkt der Normalen mit der Hilfsparabel ist also nichts anderes, als der Krümmungsmittelpunkt von P. Somit haben wir gelegentlich folgenden Satz erhalten:

Satz von Steiner:

Die Normale und die Tangente in einem gegebenen Punkte P eines Kegelschnitts bestimmen mit den Kegelschnittsaxen vier Tangenten einer Parabel, welche die Normale im Krümmungsmittelpunkt von P berührt.

Im Folgenden soll nun zunächst in aller Kürze gezeigt werden, wie Steiner den Satz gefunden hat. Dies wird zugleich die Bestimmung des Krümmungskreises von dessen dual gegenüberstehender Definition aus liefern; so dass die Identität des Krümmungskreises auf Grundlage der einen wie der andern Definition durch die hier zu gebende Überleitung von selbst direkt sich ergiebt, während diese Identität in der Einleitung unter Voraussetzung des Dualitätsprinzips und mit Hilfe der Betrachtung von unmittelbar aufeinanderfolgenden Punkten und Tangenten eines Kegelschnitts oben gezeigt wurde.

Kapitel 4.

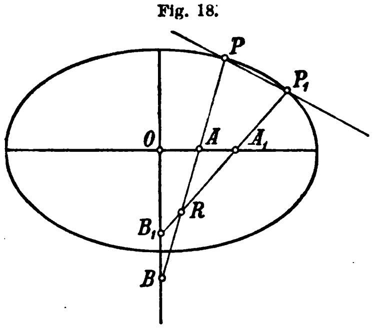
Der Krümmungskreis in einem Punkt eines Kegelschnitts als einer Kurve zweiter Klasse. — Satz von Steiner und Pelz.

1. Im vorhergehenden Kapitel hat sich der Steinersche Satz gelegentlich ergeben. Derselbe ist unabhängig von dem bisher Ausgeführten leicht folgendermassen abzuleiten:

Der **Krümmungskreis** wurde bis jetzt als derjenige Kreis behandelt, welcher mit einem Kegelschnitt in einem gegebenen Punkt P drei zusammengefallene Punkte gemein hat. Jetzt möge derselbe in der dual entsprechenden und in der Einleitung näher charakterisierten Weise konstruiert werden, als **der Kreis, welcher mit einem Kegelschnitt, als einer Kurve 2. Klasse, drei zusammengefallene gemeinschaftliche Tangenten besitzt.** Gemäss den Ausführungen in Kapitel 1 haben wir also **den Schnittpunkt zweier unmittelbar aufeinanderfolgenden Normalen des Kegelschnitts** zu bestimmen; dieser Schnittpunkt wird in der Grenzlage der Krümmungsmittelpunkt.

Zu diesem Zweck nehmen wir (Fig. 18) vorerst zwei beliebige Normalen in zwei getrennten Punkten P und P_1 eines (Zentral-) Kegelschnitts an. Die Normale von P schneide die beiden Axen in A und B, die zweite Normale begegne denselben in A_1 und B_1. Nach einem bekannten Satz ist für alle Normalen das Verhältnis der Abschnitte je zwischen Kurvenpunkt und den Axen $PA : PB$, $PA_1 : PB_1$ u. s. w. konstant, nämlich gleich dem Verhältnis der Quadrate der Halbaxen, also ist $PA : PB = PA_1 : PB_1$. Somit werden die beiden Normalen durch die Sekante PP_1 und die beiden Kegelschnittsaxen in projektivisch ähnlichen Punktreihen geschnitten. Und folglich sind die beiden Normalen, die Sekante PP_1 und die beiden Axen Tangenten einer und derselben **Parabel**.

Fig. 18.



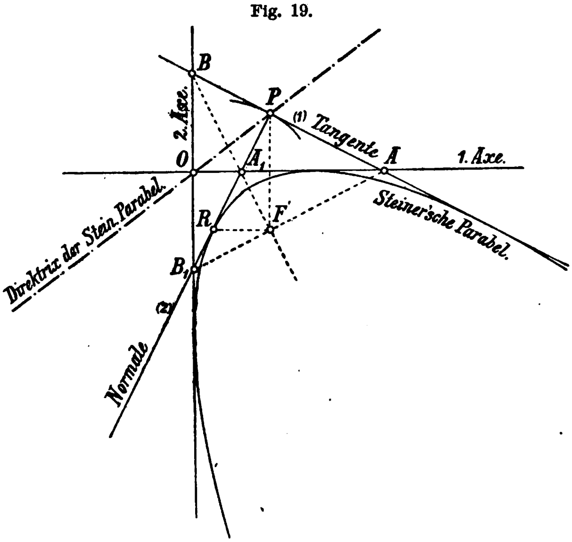
Diese Umstände finden statt, wie auch die beiden Normalen gegen einander liegen mögen. Halten wir die Normale in P fest und lassen die zweite Normale sich derselben bis zum Zusammenfallen nähern, so wird die Sekante PP_1 zur Tangente des Kegelschnitts in P; der Schnittpunkt der beiden Normalen wird zum Krümmungsmittelpunkt des Punktes P, und wir haben wieder den obigen **Steinerschen Satz:**

Die Tangente und die Normale in einem Punkt P eines Zentralkegelschnitts und die beiden Axen sind Tangenten einer bestimmten Parabel (der „**Steinerschen Parabel**“), welche die Normale des Punktes P in dessen Krümmungsmittelpunkt R berührt.

Durch diese 4 Tangenten, Tangente (1) von P, Normale (2) von P, und die beiden Axen (3) und (4), ist die Steinersche Parabel vollständig gegeben, da die unendlich entfernte Gerade als fünfte Tangente hinzukommt.

Bekanntlich ist die Direktrix einer Parabel der geometrische Ort aller Punkte, von welchen aus zwei aufeinander senkrecht stehende Tangenten an eine Parabel gelegt werden können. Wir haben hier zwei Paare von zu einander rechtwinkligen Tangenten der Hilfsparabel, die Tangente und Normale von P einerseits und die beiden Axen andererseits, also ist (Fig. 19) OP **Direktrix der Steinerschen Parabel**; und der Brennpunkt F der letzteren der Pol von OP.

Fig. 19.



Dieser **Brennpunkt F der Steinerschen Hilfsparabel** ist somit leicht zu konstruieren, als Pol der Direktrix OP; man hat nur die Schnittpunkte (1, 4) und (2, 3) zu verbinden und mit der Verbindungslinie von (1, 3) und (2, 4) zum Schnitt F zu bringen.

Daraus erhält man sofort den Berührungspunkt R der Steinerschen Parabel mit der Normalen, d. h. den Krümmungsmittelpunkt zu P. Denn die Polare von P in Beziehung auf die Hilfsparabel geht durch F (da P auf der Polaren von F, der Direktrix, liegt); und nach einer bekannten Eigenschaft der Brennpunkte steht PF auf der Polaren RF von P senkrecht; also ist nur nötig, das in F auf PF errichtete Lot bis zum Schnitt

R mit der Normalen zu verlängern. Die **Konstruktion** wäre darnach im ganzen die folgende, gültig für Ellipse und Hyperbel:

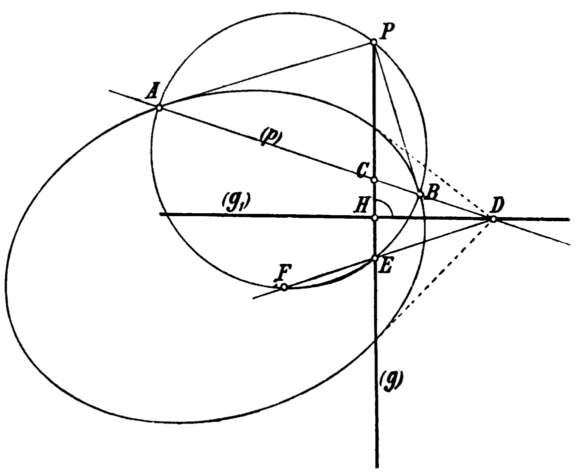
Treffen die Tangente und Normale des gegebenen Punktes P die eine Axe der Kurve in A und A_1, die andere Axe in B und B_1, verbindet man den Schnittpunkt $(AB_1)(A_1B)$ oder F mit P und errichtet auf der Verbindungslinie in F die Senkrechte, so trifft dieselbe die Normale des Kegelschnitts in dem Krümmungsmittelpunkt R von P.

2. Aber, wie man sieht, ist bei diesem Allem vorausgesetzt, dass beide Axen des Kegelschnitts im Endlichen liegen; also passt das bisher Gesagte nicht unmittelbar auf die Parabel, sondern für diese sind besondere Auseinandersetzungen notwendig.

Wir ziehen daher vor, den Steinerschen Satz von Neuem vorzunehmen, um ihn in einer bedeutend allgemeineren Form auszusprechen; einer Form, welche besonders auch die Konstruktion des Krümmungsmittelpunkts dann gestattet, wenn der Kegelschnitt u. A. allgemein durch zwei konjugierte Durchmesser, statt speziell durch die beiden Axen, oder die Brennpunkte u. s. w. gegeben ist, und welche noch auf den Fall der Parabel anwendbar bleibt.

Zu diesem Zweck ist es nötig, etwas weiter auszuholen.

Fig. 20.



Es sei (Fig. 20) ein beliebiger Kegelschnitt gegeben und in der Ebene desselben ein Punkt P. Durch P ziehen wir alle möglichen Strahlen g, fällen je vom Pol D eines Strahls g die Senkrechte DH oder g_1 auf g und untersuchen die einhüllende Kurve aller dieser Geraden g_1, welche senkrecht sind zu den bezüglichen konjugierten Strahlen g des Büschels P.

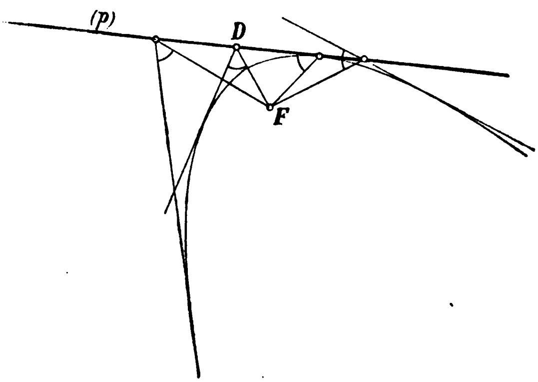
Die Polare von P sei p; der Schnittpunkt des beliebigen Strahls g mit derselben C; so sind C und D konjugierte Punkte und bilden für alle Lagen von g eine Involution auf der Polaren p von P. Die Doppelpunkte der Involution — (die Schnittpunkte von p mit dem Kegelschnitt die Berührungspunkte der Tangenten aus P, falls diese, wie in der Fig. 20

angenommen, reell sind) — seien A und B; so sind $ABCD$ vier harmonische Punkte.

Durch die drei Punkte A, B, P legen wir einen Kreis, dessen zweiter Schnittpunkt mit dem Strahl g durch E bezeichnet ist. Der vierte harmonische und zu P konjugierte Punkt zu A, B, P auf dem Kreis sei F; so geht ED durch F. Denn projiziert man die vier harmonischen Punkte A, B, P, F aus E auf p, so erhält man die harmonische Reihe A, B, C, D.

F ist, als vierter harmonischer Punkt zu A, B, P, ein fester Punkt des Kreises. Dreht sich der Strahl g um P, so bleibt der Winkel FEP als Peripheriewinkel über FP im Kreis, folglich in dem Dreieck EDH der Winkel DEH konstant für alle Lagen von g; somit, da g und g_1 immer senkrecht auf einander stehen, auch der Winkel EDH derselbe. Also **bewegt sich bei der angedeuteten Drehung des Strahls g um P ein konstanter Winkel (nämlich $\measuredangle FDH$) derart, dass die Spitze D auf der festen Geraden p fortgleitet, während der eine Schenkel FD um den festen Punkt F sich dreht** (vgl. auch Fig. 21).

Fig. 21.



Nach einem bekannten Satze umhüllt der andere Schenkel dann eine **Parabel**, welche den festen Drehpunkt F zum Brennpunkt und die feste Gerade zur Tangente hat; und zwar berührt die Parabel diese Gerade p in demjenigen Punkt, mit dem die Spitze des Winkels zusammenfällt, falls der beschreibende Schenkel mit der Geraden p selbst sich deckt*). Also ist das zunächst erhaltene Resultat folgendes:

Wenn ein Strahl g sich um einen in der Ebene eines Kegelschnitts gegebenen, festen Punkt P dreht, so umhüllt der dem Strahl in jeder Lage konjugierte und auf ihm senkrechte Strahl g_1 eine Parabel.

---

*) Dieser Satz lässt sich entweder mittelst projektivisch ähnlicher Punktreihen unter Hinzuziehung der unendlich fernen Geraden, oder auf verschiedene Weise elementar beweisen; vgl. Geiser-Steiner, Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung I, pag. 114 und Pelz, l. c. pag. 5.

3. Einige Tangenten dieser Parabel werden sich aus speziellen Lagen des Strahls g_1 leicht ergeben:

Zunächst gehören darunter **die beiden Axen des Kegelschnitts**; denn wenn der Strahl g speziell senkrecht zu einer Axe ist, so liegt der Pol von g auf dieser Axe, also wird die zu g senkrechte konjugierte Gerade g_1 die Axe selbst. Ferner, lässt man g mit PA, dann mit PB, und endlich mit der Senkrechten auf der Polaren p zusammenfallen, so liegt der Pol von g resp. in A, in B, auf der Polaren p; also erkennt man, dass auch **die Kegelschnittsnormalen in den Berührungspunkten** A **und** B der beiden Tangenten aus P, **sowie die Polare** p **von** P **Tangenten jener Hilfsparabel** sind.

Die Strahlen PC und PD sind konjugiert; bei einer gewissen Lage von g wird es sich treffen, dass diese aufeinander senkrecht stehen; es sind **die Normalstrahlen der Strahleninvolution von** P, welche darnach ebenfalls jene Parabel tangieren Daraus folgt dann, dass **die Verbindungslinie** OP **des Punktes** P **mit dem Mittelpunkt** O **des Kegelschnitts die Direktrix der Parabel ist**; denn, da die Axen zwei aufeinander senkrechte Tangenten der Hilfsparabel sind, liegt O, und da dasselbe mit den Normalstrahlen aus P der Fall ist, liegt P auf der Direktrix.

Der **Parabelbrennpunkt** F lässt sich leicht konstruieren mittelst des vollständigen Vierseits der beiden Axen und der beiden Normalstrahlen aus P, nämlich als derjenige Diagonalpunkt dieses Vierseits, welcher auf der Diagonale OP nicht liegt; (oder auch mittelst des Kreises um A, B, P. Nämlich, wenn man den Schnittpunkt von PO mit diesem Kreis durch J bezeichnet, — in der Fig. 20 nicht angedeutet, — so ist FJ **parallel der Polaren** AB **von** P. Denn die Strahlen von J nach A, B, P, F sind ein harmonisches Büschel; da aber nach einer bekannten Beziehung OP die Polare p in dem Mittelpunkt von AB trifft, so ist der zu dem letzteren Punkt harmonische konjugierte der unendlich ferne Punkt von AB).

Endlich schneiden sich die Kegelschnittsnormalen in A und B selbstverständlich in einem Punkt R des besprochenen Kreises, da A, B, P, R ein Kreisviereck ist.

4. Bis dahin wurde der Punkt P beliebig in der Ebene des Kegelschnitts angenommen. **Jetzt nähere sich** P **der Peripherie desselben und falle schliesslich mit einem Punkt derselben zusammen**, so gelten alle bisherigen Beziehungen. Die beiden Tangenten PA und PB von P reduzieren sich samt der Polaren p auf die Tangente in P; die Normalen in A und B haben sich jedenfalls bis zum Zusammenfallen einander genähert, und ihr Schnittpunkt ist der Krümmungsmittelpunkt R

auf der Normale von P geworden. Darnach hat sich unser früheres Ergebnis zu dem folgenden modifiziert:

Wenn sich um einen Punkt P eines Kegelschnitts ein Strahl g dreht, so werden die demselben in jeder Lage konjugierten und auf ihm senkrechten Geraden g_1 von einer Parabel umhüllt, welche auch die beiden Axen und die Tangente und Normale von P, und zwar die letztere im Krümmungsmittelpunkt berührt.

Statt auf einige weitere interessante, aber später nicht zu benützende Beziehungen einzugehen, die hier auftreten, wollen wir noch zwei Paare von speziellen Tangenten der Hilfsparabel nachweisen, die sich bei besonderen Lagen des beweglichen Strahls g ergeben.

Die Tangente von P möge die Asymptoten des Kegelschnitts (der Hyperbel) in den Punkten A' und A'' treffen. Die Polare des Punktes A' ist die Verbindungslinie des Punktes P mit dem (unendlich fernen) Berührungspunkt der Asymptote OA', also die Parallele durch P zu dieser Asymptote. Die Senkrechte von A' auf diese Polare ist eine weitere Tangente der Hilfsparabel; das Gleiche gilt für die zweite Asymptote. Also **sind die in den Schnittpunkten der Tangente von P mit den Asymptoten je auf der bezüglichen Asymptote errichteten Senkrechten weitere Berührende der Steinerschen Hilfsparabel.**

Fällt zweitens der Strahl g speziell in die Richtung der Verbindungslinie von P mit einem der beiden Brennpunkte F_1 oder F_2, so liegt bekanntlich der Pol von g auf der bezüglichen Direktrix, und die zum Leitstrahl g konjugierte senkrechte Gerade ist das Lot in dem Brennpunkt auf dem Leitstrahl. Folglich **wird die Steinersche Parabel auch von den Senkrechten berührt, welche in den Brennpunkten F_1 und F_2 des Kegelschnitts auf den Leitstrahlen PF_1 und PF_2 von P errichtet werden.**

Endlich wird es später von Wert sein, den **Berührungspunkt der Steinerschen Parabel mit der Tangente von P** zu kennen. Dieser ist **der Pol der Normalen von P.** Denn denkt man sich ausser der Normalen von P noch einen benachbarten Strahl durch P gezogen und zu jedem dieser beiden Strahlen den konjugierten senkrechten, so sind die beiden letzteren Senkrechten zwei aufeinanderfolgende Tangenten der Hilfsparabel. Der Schnittpunkt dieser zwei Tangenten hat zur Grenzlage den Berührungspunkt der Kegelschnittstangente von P und der Hilfsparabel, wenn der zweite Strahl durch P allmählich mit der Normalen in P zusammenfällt; dieser Punkt aber ist offenbar der, auf der Tangente von P liegende, Pol der Normalen in P.

Nach diesem Allem können wir den Steinerschen Satz jetzt in folgender erweiterter Form aussprechen.

Satz von Pelz:

Wird in der Ebene eines Kegelschnitts um einen beliebigen Punkt P desselben ein Strahl g gedreht, so ist die einhüllende Kurve des dem Strahl g in jeder Lage in Beziehung auf den Kegelschnitt konjugierten und auf g senkrechten Strahls g_1 eine Parabel (die „Steinersche Parabel"), welche von den Kegelschnittsaxen, der Tangente und Normale von P und zwar von letzterer im Krümmungsmittelpunkt R des Punktes P tangiert wird. Ihre Direktrix ist die Verbindungslinie des Punktes P mit dem Mittelpunkt O des Kegelschnitts. Ihr Berührungspunkt mit der Tangente von P ist der Pol der Normale von P. Weitere Tangenten dieser Hilfsparabel sind u. A. die in den Brennpunkten F_1 und F_2 des Kegelschnitts je auf dem betreffenden Leitstrahl PF_1 und PF_2 von P, und (bei der Hyperbel) die in den Schnittpunkten der Tangente von P mit den Asymptoten je auf der bezüglichen Asymptote errichteten Senkrechten.

5. Unsere Anwendungen dieses Satzes gehen nur auf die Bestimmung des Krümmungsmittelpunkts R zu einem Kurvenpunkt P oder auf die Konstruktion des Berührungspunkts der Steinerschen Parabel mit der Kegelschnittsnormalen.

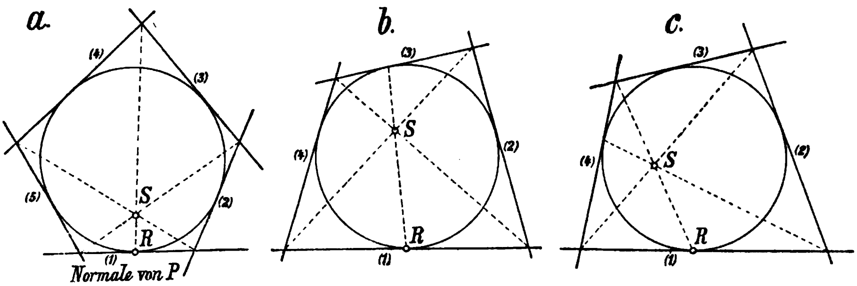
Im Anfang dieses Kapitels (Seite 21, Fig. 19) ist kurz angedeutet worden, wie dieser Punkt R mit Hilfe des Brennpunkts F dieser Parabel gefunden werden kann, nämlich dass der Krümmungsmittelpunkt sich als Schnittpunkt eines auf PF in F errichteten Lots mit der Normalen ergiebt.

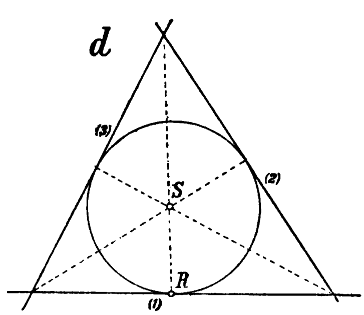
Aber dieses Verfahren ist nicht immer sehr einfach; wir werden deshalb in den folgenden Anwendungen meist vorziehen, den Berührungspunkt R der Kegelschnittsnormalen und der Steinerschen Parabel mit Hilfe des **Satzes von Brianchon** für 5, 4 oder 3 Tangenten zu gewinnen. Dieser sagt, wie schon oben kurz erwähnt, aus, dass wenn **fünf Tangenten** 1, 2, 3, 4, 5 eines Kegelschnitts (hier der Steinerschen Parabel) gegeben sind, der Berührungspunkt z. B. von 1 gefunden wird, indem man (Fig. 22 a, Seite 27) den Schnittpunkt S der Verbindungslinien $(2, 3)(1, 5)$ und $(1, 2)(4, 5)$ mit $(3, 4)$ verbindet.

Oft wird auch mit Erfolg benützt werden können, dass der Berührungspunkt der Steinerschen Parabel mit der Tangente von P, und dass ebenso der **Berührungspunkt dieser Hilfsparabel mit der unendlich fernen Geraden gegeben** ist. Nämlich die Direktrix der Hilfsparabel ist, wie wir wissen, die Verbindungslinie OP des Kurvenpunktes P mit dem Mittelpunkt O des Kegelschnitts, also liegt **der letzterwähnte Berührungspunkt in der Richtung der Senkrechten auf OP.**

Folglich kann auch der Brianchonsche Satz für **vier Tangenten** verwendet werden: dass (Fig. 22 *b*) die Verbindungslinie der Berührungspunkte von 1 und 3 durch den Schnittpunkt S der Diagonalen (1,2)(3,4) und (2,3)(1,4) geht; oder auch (Fig. 22 *c*), dass man den Berührungs-

Fig. 22.





punkt R von 1 erhält, wenn man den Schnittpunkt S, — der Verbindungslinie (2,3)(1,4) mit der Verbindungslinie von (1, 2) nach dem Berührungspunkt auf 4, — mit (3, 4) verbindet.

Endlich, falls man beide gegebene Berührungspunkte der Hilfsparabel verwendet, derselbe Satz für **drei Tangenten** (Fig. 22 *d*): Man verbindet (1, 2) mit dem Berührungspunkt auf 3, und (1, 3) mit demjenigen auf 2; beide Linien treffen sich in S; S mit (2, 3) verbunden schneidet 1 in dem Berührungspunkt R von 1.

(Wenn man es vorzieht, allein von dem Brianchonschen Satz für das **Sechs**eck zu sprechen, so bezeichnet man jede Tangente, z. B. 1, deren Berührungspunkt in Verwendung kommt, mit zwei Buchstaben 1, 2; der Berührungspunkt ist dann der Schnittpunkt (1, 2) der beiden als vereinigt gedachten Tangenten.)

So liege also ein Kegelschnitt, ganz oder durch irgend fünf Daten, gegeben vor. Durch einen bestimmten Punkt P, dessen Krümmungskreis in Frage steht, kann man beliebig viele Strahlen g, zu diesen die Pole D, und von letzteren die Senkrechten g_1 auf die bezüglichen Strahlen g konstruieren. Damit hat man beliebig viele Tangenten der Steinerschen Hilfsparabel, zu denen stets die unendlich ferne Gerade als weitere Tangente hinzukommt. Diese Tangenten lassen sich in beliebig viele Gruppen zu je fünf zusammennehmen; jede Gruppe liefert dann nicht nur eine, sondern mehrere verschiedene Konstruktionen des Krümmungsmittelpunkts R, da die fünf Tangenten noch unter sich vertauscht werden können. Hiemit leuchtet in der That die frühere Bemerkung ein, dass **beliebig viele Krümmungshalbmesser-Konstruktionen mit Hilfe des obigen Prinzips sich erdenken lassen.** Es kann auch gezeigt werden, dass die sämtlichen zahlreichen Verfahren zur Bestimmung des Osculationskreises in einem Punkt dieses Kegelschnitts, die bisher aufgestellt worden sind, Folgerung dieses Satzes darstellen.

Kaum braucht gesagt zu werden, dass wir im Folgenden weniger auf die Anzahl, als die Einfachheit solcher Konstruktionen ausgehen werden; unser Zweck ist vorzugsweise, die Anwendung des gewonnenen allgemeinen Prinzips an den wichtigsten Beispielen zu zeigen.

Kapitel 5.

Fortsetzung. — Anwendung auf einfache Krümmungsmittelpunkt-Konstruktionen.

Zu einem gegebenen Punkt P eines Kegelschnitts wollen wir im Folgenden, sowohl für die einzelnen Arten der Kegelschnitte, als für die verschiedenen Daten desselben Kegelschnitts, also wenn entweder die Axen oder die Brennpunkte oder konjugierte Durchmesser u. s. w. gegeben sind, in einfacher Weise den Osculationskreis konstruieren. Die **Parabel** wird dabei öfters getrennt zu behandeln sein; denn deren eine Axe fällt mit der unendlich fernen Geraden zusammen, so dass eine der im Endlichen liegenden Tangenten der Steinerschen Hilfsparabel fortfällt. Die letztere hat hier eine ausgezeichnete Lage gegen die Axe der gegebenen Parabel. Ihre Direktrix ist die Verbindungslinie des gegebenen Kurvenpunkts P mit dem unendlich fernen Mittelpunkt der gegebenen Parabel, also die Parallele durch P zur Axe; folglich **steht die Axe der Steinerschen Hilfsparabel zu einem Punkt P einer gegebenen Parabel senkrecht auf der Axe der letzteren.**

I. Die Axen sind gegeben.

A. Konstruktionen für Ellipse und Hyperbel.

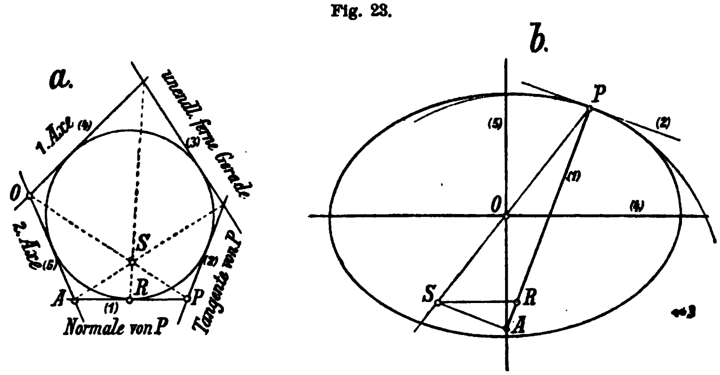
Künftighin möge der gegebene Punkt auf der Peripherie des Kegelschnitts mit P, der Kurvenmittelpunkt mit O, der Krümmungsmittelpunkt von P mit R, der Schnittpunkt der Diagonalen in der Figur des Brianchonschen Satzes mit S bezeichnet werden.

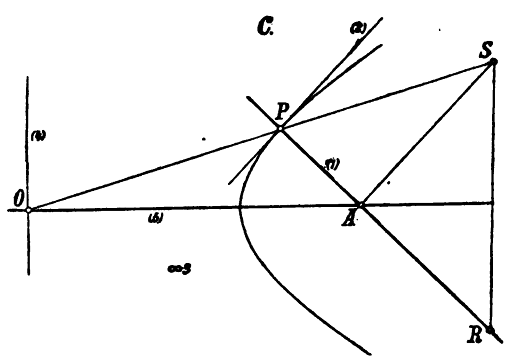
Wie oben eingehend auseinandergesetzt wurde, wird die Kegelschnitts-normale des Punktes P in dessen Krümmungsmittelpunkt R von einer Parabel, der Steinerschen Hilfsparabel, berührt, von welcher u. A. die beiden Kegelschnittsaxen, die Tangente und Normale von P und natürlich die unendlich ferne Gerade Tangenten sind; ihre Direktrix ist OP; eine beliebige weitere Tangente für sie erhält man durch eine Senkrechte aus dem Pol einer beliebigen Geraden durch P auf diese letztere.

Als die fünf Tangenten der Steinerschen Parabel, die wir zunächst verwenden wollen, wählen wir: die Normale und die Tangente von P, die unendlich ferne Gerade, die eine und die andere Axe des Kegelschnitts; und in dieser Reihenfolge seien sie mit 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnet und für den Brianchonschen Satz benützt.

Die Verbindungslinie (1, 2) (4, 5) ist die Gerade PO (vgl. die schematische Fig. 23a, sowie b und c); die Linie (2, 3) (1, 5) d. h. die Ver-

Fig. 23.





bindungslinie des unendlich fernen Punkts der Tangente von P mit dem Schnittpunkt der Normale und der einen Axe 5 ist die Senkrechte AS in A auf der Normalen. Beide Verbindungslinien schneiden sich in S. Durch S ist eine Gerade zu ziehen, welche durch den Schnittpunkt von 3 und 4 geht, d. h. eine Parallele mit der Axe 4; diese Parallele begegnet der Normalen 1 von P im Krümmungsmittelpunkt R von P.

Konstruktion (für Ellipse und Hyperbel) Fig. 23b und c:

Errichtet man im Schnittpunkt A der Normalen des gegebenen Kurvenpunkts P und der einen Axe ein Lot auf der Normalen,

und zieht durch den Schnittpunkt S des Lots mit der Verbindungslinie PO des Kurvenpunkts P und des Kurvenmittelpunkts O eine Parallele zur andern Axe, so trifft diese Parallele die Normale im Krümmungsmittelpunkt von P.

In dieser einen Konstruktion liegen zwei, da die Axen vertauscht werden können. In der Fig. 23 *b* und *c* ist nur je eine derselben eingezeichnet. Im Folgenden möge übrigens jedesmal nur die Konstruktion für die **Ellipse** in einer Figur gegeben werden, wenn sie für die Hyperbel ganz analog ist.

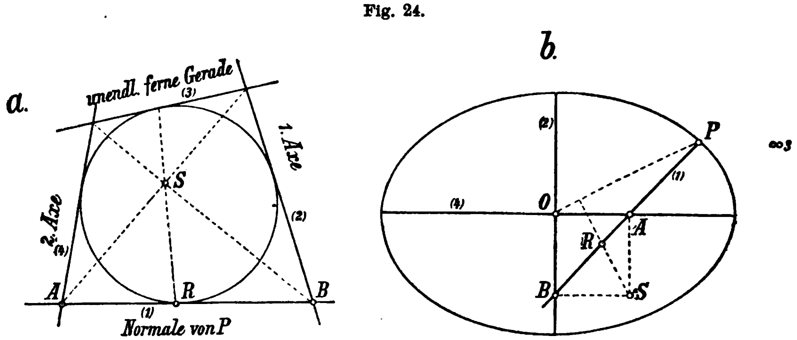
Weitere einfache Verfahren, die wir aber hier nicht durchführen, erhält man, wenn man bezeichnet: die Normale von P, die Tangente von P, die eine Axe, die unendlich ferne Gerade, die andere Axe, der Reihe nach mit $1, 2, 3, 4, 5$; oder auch mit: $1, 4, 2, 5, 3$; und so fort kann man alle Umstellungen erschöpfen.

Wir wollen den Brianchonschen Satz für 4 Tangenten eines Kegelschnitts anwenden; die Bezeichnungen seien:

Normale 1, eine Axe 2, unendlich ferne Gerade 3, andere Axe 4; wobei wir uns erinnern, dass der Berührungspunkt der Steinerschen Hilfsparabel mit der unendlich fernen Geraden in der Richtung der Senkrechten auf OP liegt, da OP die Direktrix derselben darstellt.

Zunächst ist (vgl. die schematische Fig. 24*a*) die Verbindungslinie $(1, 2)(3, 4)$ zu ziehen; der Schnittpunkt $(1, 2)$ ist der Durchschnittspunkt

Fig. 24.



der Normalen von P mit der einen Axe (in der Figur der kleinen Axe): $(3, 4)$ der unendlich ferne Punkt der Axe 4. Also ist jene Verbindungslinie die Parallele durch B mit der Axe 4. Ebenso ist die Verbindungslinie $(1, 4)(2, 3)$ die Senkrechte AS auf der Axe 4 in A. Beide Linien treffen sich in S; S ist mit dem Berührungspunkt der unendlich fernen Geraden und der Steinerschen Parabel zu verbinden, d. h. durch S ist eine Senkrechte auf OP zu fällen; dieses Lot trifft die Normale 1 von P im Krümmungsmittelpunkt R.

Konstruktion (für Ellipse und Hyperbel) Fig. 24*b*:

Errichtet man in den Schnittpunkten A und B der Normalen des Kurvenpunkts P mit der einen und der andern Axe Lote je auf der betreffenden Axe und fällt vom Schnittpunkt S beider Lote auf die Verbindungslinie OP von P mit dem Kurvenmittelpunkt O eine Senkrechte, so begegnet letztere der Normalen im Krümmungsmittelpunkt von P.

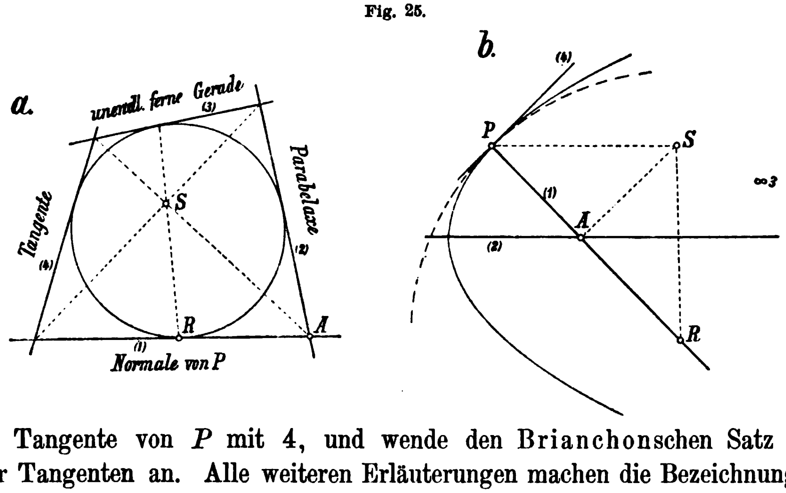
Eine weitere einfache Konstruktion des Osculationskreises resultiert z. B. aus der Bezeichnung: Normale von P (1), eine Axe (2), andere Axe (3), unendlich ferne Gerade (4).

B. Für die Parabel.

Wir sahen, dass die Axe der gegebenen Parabel und die Tangente und Normale in dem gegebenen Punkt P derselben Berührende der Steinerschen Parabel sind und dass die Parallele durch P mit der Parabelaxe die Direktrix, folglich die Axe der gegebenen Parabel die Scheiteltangente der Hilfsparabel ist. Somit ist **der Berührungspunkt der unendlich fernen Geraden mit der Hilfsparabel** gegeben; **er liegt in der Richtung der Senkrechten auf der Axe der gegebenen Parabel.**

Man bezeichne (schematische Fig. 25 *a* und *b*) die Normale von P mit 1, die gegebene Parabelaxe mit 2, die unendlich ferne Gerade mit 3,

Fig. 25.



die Tangente von P mit 4, und wende den Brianchonschen Satz für vier Tangenten an. Alle weiteren Erläuterungen machen die Bezeichnungen der Fig. 24 überflüssig.

Konstruktion für die Parabel:

Legt man durch einen beliebigen Parabelpunkt P eine Parallele zur Parabelaxe und fällt vom Schnittpunkt S dieser Parallelen mit

einer im Schnittpunkt A der Normalen und der Parabelaxe auf der Normalen errichteten Senkrechten AS ein Loth auf die Parabelaxe, so geht dieses Lot durch den Krümmungsmittelpunkt R auf der Normalen von P.

Weitere Konstruktionen führen wir auch hier nicht durch.

II. Brennpunkt gegeben.

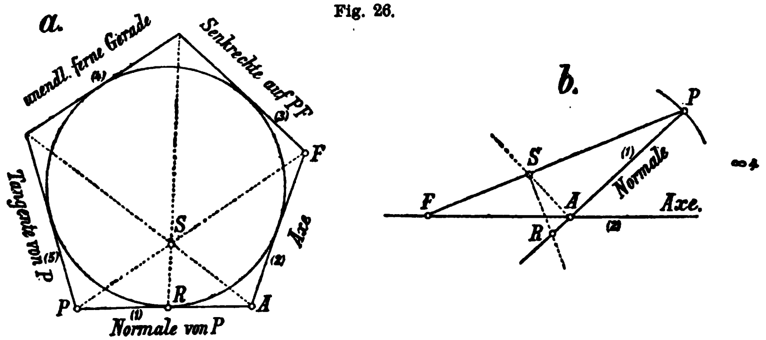
Ausser einer Brennpunktsaxe, ferner der Normale und folglich Tangente in dem beliebigen Punkte P des Kegelschnitts liege ein Brennpunkt F vor; wir suchen den Osculationskreis des Kegelschnitts zu dem Punkt P.

Eine Tangente der zugehörigen Steinerschen Hilfsparabel ist, wie wir wissen, u. A. die im Brennpunkt auf dem Leitstrahl PF von P errichtete Senkrechte. Dies benützen wir hier.

Die Bezeichnungen im Brianchonschen Satz für fünf Tangenten seien die folgenden:

Die Normale von P werde (schematische Fig. 26 a) bezeichnet mit 1, die gegebene Axe mit 2, die Senkrechte in F auf dem Leitstrahl PF von P mit 3, die unendlich ferne Gerade mit 4, endlich die Tangente von P mit 5. In der Fig. 26 b sind die Linien 3 und 5 selbst nicht einge-

Fig. 26.



zeichnet, weil zur Konstruktion unnötig. (1, 2) (4, 5) ist die Verbindungslinie des Schnittpunkts A von Normale und Axe mit dem unendlich fernen Punkt der Tangente, d. h. die Senkrechte in A auf der Normalen. Diese Verbindungslinie schneidet die Linie (1, 5) (2, 3), d. h. den Leitstrahl PF in S. Endlich ist dieser letztere Schnittpunkt S mit (3, 4), dem unendlich fernen Punkt von 3 zu verbinden oder in S auf PF ein Lot zu errichten; also

Konstruktion (für Ellipse, Hyperbel, Parabel):

Um den Krümmungsmittelpunkt für einen gegebenen Punkt P eines Kegelschnitts zu konstruieren, errichte man im Schnittpunkt A der Normale von P mit der Brennpunktsaxe auf der Normalen

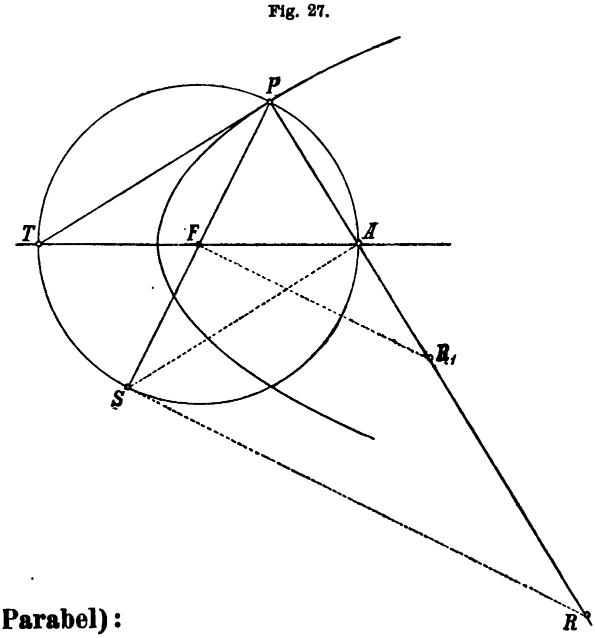
ein Lot, welches den Leitstrahl PF von P nach einem Brennpunkt F in dem Punkte S trifft und ein zweites Lot in S auf diesem Leitstrahl; das zweite Lot begegnet der Normalen im gesuchten Krümmungsmittelpunkt R.

Man könnte noch (bei der Ellipse und Hyperbel) die zweite Axe, ferner die Senkrechte im zweiten Brennpunkt auf dem betreffenden Leitstrahl als weitere Tangenten der Steinerschen Parabel, endlich den gegebenen Berührungspunkt dieser letzteren mit der unendlich entfernten Geraden hinzunehmen und die Daten kombinieren und würde so etwa 10—12 weitere, ziemlich einfache Konstruktionen des Osculationskreises erhalten.

Statt uns damit abzugeben, wollen wir noch einen Augenblick **speziell bei der Parabel** verweilen:

Für diese gilt die obige Konstruktion ebenfalls. Dieselbe ist in Fig. 27 noch einmal wiederholt. Bekanntlich wird bei der Parabel das Stück AT der Axe, welches durch die Normale und die Tangente eines beliebigen Parabelpunkts P ausgeschnitten wird, durch den Brennpunkt F halbiert. Also ist F der Mittelpunkt des um das Dreieck APT beschriebenen Kreises, somit $FP = FA$; und folglich ebenso $FA = FS$, also $FS = FP$:

Fig. 27.



Satz (für die Parabel):

Bei der Parabel ist die Projektion des Krümmungshalbmessers auf den Vektor gleich dem doppelten Vektor.

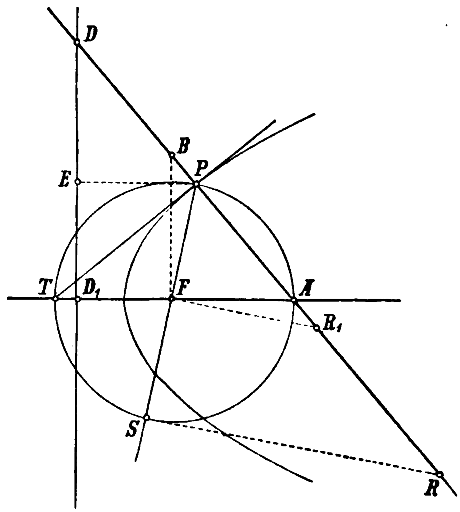
Eine Parallele durch F mit SR (Fig. 27 und 28) halbiert darnach PR in R_1; man könnte daher die obige Konstruktion hier auch so aussprechen:

Konstruktion (für die Parabel):

Wenn man auf dem Vektor eines Parabelpunkts P im Brennpunkt ein Lot errichtet, so schneidet dieses auf der Nor-

malen ein Stück PR_1 gleich dem halben Krümmungshalbmesser von P ab.

Fig. 28.



Errichtet man ferner (Fig. 28) auf der Axe im Brennpunkt F ein Lot FB, so ist Dreieck AFB kongruent Dreieck PFR_1, da $AF = PF$, also ist AB gleich dem halben Krümmungshalbmesser, worin eine neue Konstruktion des letzteren liegt.

Endlich sei die Direktrix DD_1 der gegebenen Parabel gezeichnet; die Parallele durch P mit der Axe begegne der Direktrix in dem Punkt E, so ist bekanntlich $PF = PE$, somit Dreieck PED kongruent Dreieck PFR_1:

Satz von Steiner (für die Parabel):

Der Krümmungshalbmesser für einen beliebigen Punkt P einer Parabel ist das Doppelte des Stücks PD, welches auf der Normalen von P aus durch die Direktrix abgeschnitten wird.

Bis jetzt war vom **Scheitel der Parabel** nicht die Rede. Für diesen speziellen Punkt werden die letzteren Konstruktionen ungiltig; aber durch eine leichte Überlegung wird der Krümmungsmittelpunkt dennoch zu erhalten sein. Er ist der Schnittpunkt zweier zusammengefallener Normalen. Eine Normale in dem beweglichen Punkt P nähere sich der Normale im Scheitel, d. h. der Axe; dabei wird stets das Stück AT, welches auf der Axe durch Tangente und Normale abgegrenzt wird, durch den festen Brennpunkt F halbiert, also das Doppelte von FT sein. Wenn P mit dem Scheitel zusammengefallen ist, so ist FT gleich der Entfernung von Brennpunkt und Scheitel; also liegt der Schnittpunkt R der beiden zusammengefallenen Normalen in einer Entfernung vom Scheitel gleich dem Doppelten jener Entfernung, d. h. gleich dem Parameter der Parabel, — ein Resultat, dem wir später noch einmal bei einer anderen Gelegenheit begegnen werden.

Satz. Der Krümmungshalbmesser im Scheitel der Parabel ist gleich dem Parameter derselben.

Dies waren einige Konstruktionen und Sätze für den Fall, dass die Axen oder die Brennpunkte des Kegelschnitts gegeben sind. Wenn dagegen etwa zwei konjugierte Durchmesser oder die Asymptoten (der Hyperbel) oder andere Daten vorliegen, so werden andere Konstruktionen des Krümmungsmittelpunkts eintreten müssen. Diese wollen wir, immer als Anwendungen des erweiterten Steinerschen Satzes, im Folgenden aufsuchen.

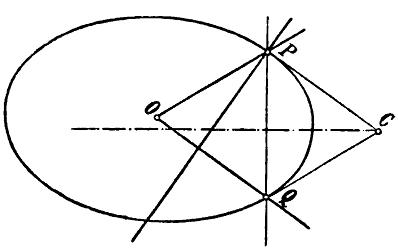
Kapitel 6.

Fortsetzung. — Weitere Konstruktionen des Osculationskreises.

III. Konjugierte Durchmesser gegeben.

1. Es liege zunächst eine **Ellipse** vor (Fig. 29); von dieser seien zwei konjugierte Durchmesser OP und OQ gegeben, sowie die zu dem Ellipsenpunkt P gehörige Normale und folglich Tangente; gesucht ist der Krümmungsmittelpunkt zu P.

Fig. 29.



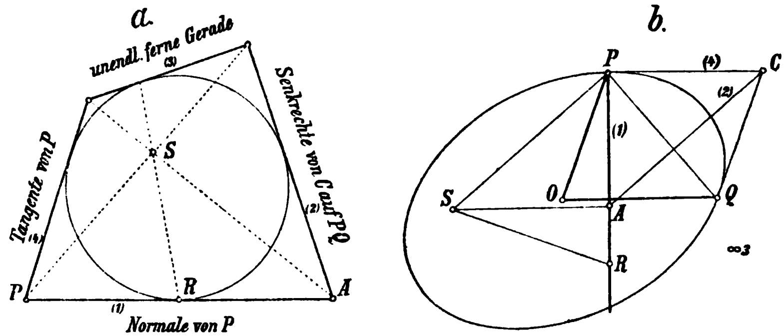
Von der Steinerschen Hilfsparabel, welche die Normale von P in dessen Krümmungsmittelpunkt R berührt, haben wir jetzt als Tangenten nur die Normale und Tangente der Ellipse in P; ausserdem kennen wir den Berührungspunkt der Steinerschen Parabel mit der unendlich fernen Geraden; er liegt in der zum Durchmesser OP senkrechten Richtung. Zur vollständigen Bestimmung dieser Hilfsparabel und damit des Osculationskreises fehlt folglich eine Tangente, die aber der Satz von Pelz mit Leichtigkeit liefern wird.

Eine solche weitere Tangente der Hilfsparabel ist, wie wir wissen, eine Senkrechte vom Pol einer beliebigen Geraden g durch P auf diese Gerade. Natürlich wählen wir diese Gerade möglichst einfach. Drehen wir in Gedanken eine Gerade g um P, so werden wir, da das Zusammenfallen von g mit dem Durchmesser und der Normale von P für Tangenten der Hilfsparabel schon benützt ist, am passendsten die spezielle Lage PQ von g ins Auge fassen. Der Pol von PQ ist C, — der Schnittpunkt der Ellipsentangenten in P und Q; also **ist die Senkrechte von C auf PQ eine weitere Tangente der Steinerschen Parabel.**

Wir bezeichnen (Fig. 30 a und b, Seite 36) der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4 folgende vier Tangenten der Steinerschen Hilfsparabel: Die

Normale von P, die Senkrechte von C auf PQ, die unendlich ferne Gerade, die Tangente von P. Eine weitere Erklärung dürfte beim Hinweis auf die schematische Figur 30 a und die Konstruktionsfigur 30 b nicht vonnöten sein.

Fig. 30.



Konstruktion (für die Ellipse):

Sind zwei konjugierte Durchmesser OP und OQ, sowie ein Punkt P und dessen Normale gegeben, so konstruiert man den Krümmungskreis folgendermassen: Man fälle vom Pol C der Sekante PQ auf letztere ein Lot, welches die Normale von P in A schneidet; zieht durch A und durch P Parallelen zur Tangente von P bezw. zu jener Senkrechten auf PQ; beide Parallelen treffen sich in S. Das Lot von S auf OP trifft die Normale des Punktes P in dessen Krümmungsmittelpunkt R.

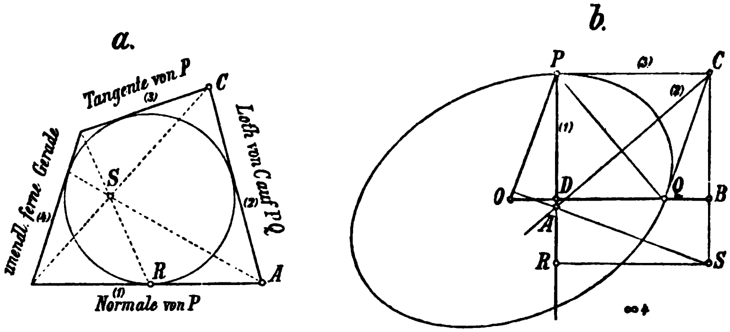
2. Eine andere Konstruktion ergiebt sich aus folgender Bezeichnung: Die Normale von P sei 1; die Senkrechte von C auf PQ 2; die Tangente von P 3; die unendlich ferne Gerade 4. Diesmal wollen wir den Berührungspunkt der Hilfsparabel mit der unendlich entfernten Geraden benützen; er liegt in der Richtung der Senkrechten auf OP.

Dieser Berührungspunkt mit (1, 2) verbunden (vgl. schematische Fig. 31 a, Seite 37) giebt die Senkrechte vom Schnittpunkt A der Normalen 1 und der Geraden 2 auf den Durchmesser OP. Ferner die Linie (2, 3) (1, 4) ist die Parallele durch C mit der Normalen 1 von P. Der Schnittpunkt S beider so konstruierter Linien ist noch mit (3, 4) zu verbinden; d. h. wenn man durch S eine Parallele zur Tangente 3 von P zieht, so trifft diese Parallele die Normale 1 von P im Krümmungsmittelpunkt R.

Diese Konstruktion lässt sich bedeutend vereinfachen Die Seiten der Dreiecke OPQ und ACS stehen wechselseitig aufeinander senkrecht; also sind die Dreiecke ähnlich; die Grundlinien verhalten sich wie die

Höhen, oder: $CS : SR = OQ : CB = BD : CB$ (da $OQ = PC = BD$ ist); also sind auch die beiden rechtwinkligen Dreiecke CSR und CDB oder, was dasselbe ist, die Dreiecke CRS und PDB ähnlich; d. h. es steht CR senkrecht auf PB. **Also hätten wir den Krümmungs-**

Fig. 31.



mittelpunkt R auch direkt durch eine Senkrechte von C auf BP erhalten können. Trägt man von P aus PD_1 gleich PD nach der andern Seite ab (in der Figur nicht angegeben), so ist CD_1 parallel PB, also CR senkrecht CD_1 und daher $CP^2 = PR \,.\, PD_1 = PR \,.\, PD$, wobei $PC = OQ$; also ist

$$\text{(I)} \quad PR = OQ^2 : PD$$

d. h. der Krümmungshalbmesser PR ist gleich dem Quadrat des zu OP konjugierten Halbdurchmessers OQ, dividiert durch den Abstand PD des Punktes P von diesem Halbdurchmesser *). Bekanntlich sind alle der Ellipse umschriebenen Parallelogramme inhaltsgleich, somit $OQ \,.\, PD$ gleich dem Produkt $a \,.\, b$ der Halbaxen der Ellipse; also kann man die obige Beziehung auch schreiben:

$$\text{(II)} \quad PR = OQ^3 : ab.$$

Daraus folgt dann sogleich folgender

Satz: Die Krümmungshalbmesser für zwei Punkte P und Q einer Ellipse, welche Endpunkte zweier konjugierter Durchmesser sind, verhalten sich umgekehrt wie die Kuben der diesen Punkten zugehörigen Durchmesser.

3. Wir wollen sogleich die analoge Untersuchung für die **Hyperbel** durchführen.

---

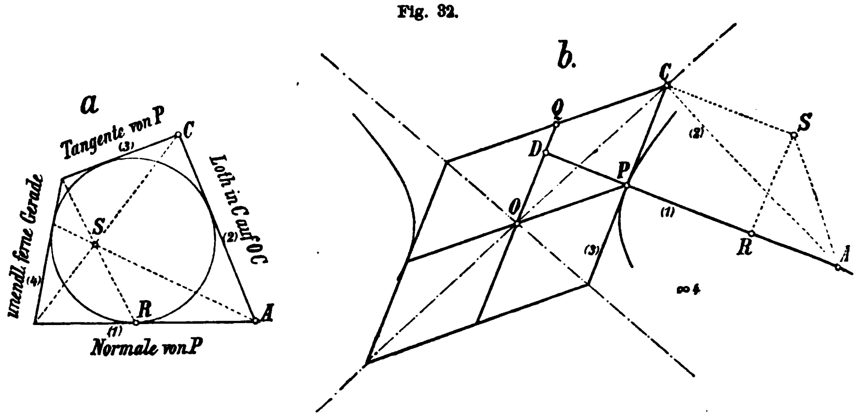
*) Aus der Konstruktion Kap. 4. Fig. 19 ergiebt sich dieser Satz ebenfalls sehr leicht; vgl. Schröter-Steiner, die Theorie der Kegelschnitte, § 37, pag. 217; auch auf anderem Wege, vgl. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage; 2. Heft, 1857, § 31, pag. 280 und Milinowski, elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte, 1882, § 346.

In Kapitel 4 haben wir gesehen, dass die im Schnittpunkt C der Tangente PC eines Hyperbelpunkts P mit einer Asymptote auf letzterer errichtete Senkrechte eine Tangente der Steinerschen Parabel ist (es ist dies das Analogon zum Vorhergehenden. Denn die Polare von C in Beziehung auf die Hyperbel ist die Parallele durch P zur Asymptote; die Senkrechte auf diese Polare ist eine Tangente der Hilfsparabel).

Gegeben seien also, ausser dem Hyperbelpunkt P und dessen Normale, die beiden Halbdurchmesser OP und OQ; OP der reelle, OQ die absolute Länge des imaginären, welche gleich der Strecke PC der Tangente zwischen Hyperbelpunkt P und einer Asymptote ist.

Wir bezeichnen (Fig. 32) der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4 die Normale von P, die Senkrechte in C auf der Asymptote OC, die Tangente PC

Fig. 32.



von P, die unendlich ferne Gerade. Die Verbindungslinie (1, 4) (2, 3) ist die Senkrechte in C auf der Tangente PC; die Verbindungslinie von (1, 2) mit dem Berührungspunkt auf 4 ist das Lot von A auf OP. Die beiden genannten Linien schneiden sich in S; verbindet man S mit (3, 4), d. h. zieht man durch S eine Parallele zur Tangente von P, so schneidet dieselbe die Normale im Krümmungsmittelpunkt R von P. (Die Konstruktion ist wörtlich dieselbe wie die letztvorhergehende in Nr. 2 bei der Ellipse, wenn man nur die beiden Diagonalen des Parallelogramms $OPCQ$ vertauscht.)

Auch hier sind die Dreiecke OPC und ACS ähnlich, aus demselben Grund wie oben. Die entsprechenden Seiten verhalten sich wie die Höhen, $PC : PD = CS : RS = PR : PC$; da $PC = OQ$, ist auch hier

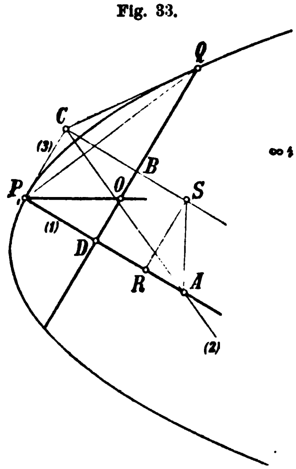
$$PR = OQ^2 : PD = OQ^3 : ab,$$

wenn a und b die beiden Halbaxen darstellen.

Den Krümmungsmittelpunkt R hätte man einfacher durch eine Senkrechte in C auf CD erhalten können.

4. Ebenso endlich für die **Parabel** ist die Entwicklung nahezu wörtlich dieselbe. Ausser der Tangente und Normale des Parabelpunktes P sei (Fig. 33) der Durchmesser von P, also die Richtung PO nach dem unendlich fernen Punkt der Parabel und eine konjugierte Halbsehne OQ (parallel der Tangente PC von P) gegeben. Ziehen wir PQ; die Tangenten in P und Q treffen sich in dem Pol C von PQ; die Senkrechte von C auf PQ ist alsdann eine Tangente der Steinerschen Hilfsparabel.

Fig. 33.



Als vier Tangenten der letzteren wollen wir wählen: die Normale (1) von P, die Senkrechte (2) von C auf PQ, die Tangente (3) von P, die unendlich ferne Gerade (4). Die schematische Figur bleibt genau dieselbe wie in der Figur 31a, und die Konstruktion wird die analoge zu der von Figur 31b bei der Ellipse; nämlich die folgende Konstruktion für die Parabel: Wenn der Durchmesser eines Parabelpunktes P, eine konjugierte Halbsehne OQ und die Normale von P gegeben ist, so erhält man den Krümmungsmittelpunkt zu P wie folgt: Man zieht vom Pol C der Sekante PQ eine Senkrechte auf PQ, welche die Normale von P in A trifft. Durch A und C zieht man eine Senkrechte zur Parallelaxe, resp. zur Tangente von P; beide Lote mögen sich in S schneiden. Eine Parallele durch S zur Tangente von P trifft die Normale im Krümmungsmittelpunkt R von P.

Die Dreiecke OPQ und ACS sind ähnlich, da die entsprechenden Seiten auf einander senkrecht stehen, also $CS : SR = OQ : CB$, oder $PR : \frac{1}{2} OQ = OQ : PD$ (denn es ist $PC = \frac{1}{2} OQ$, da die Verbindungslinie von O mit dem Pol von OQ bekanntlich durch P halbiert wird); also wird

$$PR = \frac{OQ^2}{2 . PD},$$

als Analogon zu den obigen Beziehungen bei der Ellipse und Hyperbel.

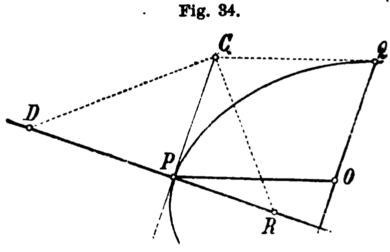
Dieses Resultat war vorauszusehen. Die Parabel können wir als Grenzfall einer Ellipse betrachten, deren Mittelpunkt ins Unendliche gerückt ist. Die Strecke PD bei der Ellipse (Fig. 31, Seite 37) ist die Projektion des Halbdurchmessers OP auf die Normale, oder dieser Halbdurchmesser OP multipliziert mit dem Sinus des Winkels α der beiden konjugierten Halbdurchmesser, $PR = OQ^2 : OP . \sin \alpha$. Rückt nun der Mittelpunkt ins Unendliche, so wird Nenner und Zähler unendlich; aber der Krümmungshalbmesser $PR = \infty : \infty$ bleibt eine endliche Strecke. Wenn man durch einen Punkt P einer Parabel eine Gerade PO parallel der Axe zieht (P mit dem unendlich fernen Mittelpunkt der Kurve verbindet), und durch einen beliebigen Punkt O dieser Parallelen eine Parallele OQ zur Tangente in P (eine Parallele zu dem unendlich fernen zu PO konjugierten Halbdurchmesser), so ist bekanntlich $OQ^2 : OP$ konstant, wo auch O auf dem Durchmesser von P liegen möge; also auch, wenn O im Unendlichen liegt. Der Bruch $OQ^2 : QP = \infty : \infty$ erhält also einen bestimmten endlichen Wert. Nur ist zu bedenken, dass bei der Parabel der unendlich ferne Mittelpunkt zugleich als der unendlich ferne Berührungspunkt derselben, also der Endpunkt des ganzen Durchmessers PO zu betrachten ist; folglich wird das Doppelte von PO, somit auch von PD zu nehmen sein; – kurz, die Formel (I) für den Krümmungshalbmesser Nr. 2 gilt für die Ellipse, die Hyperbel und auch noch für die Parabel als Grenzfall einer Ellipse. Aus derselben folgt eine einfache und besonders wichtige Konstruktion des Osculationskreises.

Satz und Konstruktion (für Ellipse, Hyperbel, Parabel):

1. Der Krümmungshalbmesser für einen beliebigen Punkt P eines Kegelschnitts ist gleich dem Quadrat des zum Durchmesser von P konjugierten (reellen, imaginären, unendlich fernen) Halbdurchmessers, dividiert durch die Projektion des Halbdurchmessers von P auf die Normale dieses Punkts. Näher ist derselbe bei der Parabel gleich dem Quadrat einer beliebigen, zu P konjugierten Halbsehne, dividiert durch den doppelten Abstand des Punktes P von dieser Halbsehne.

2. Sind ein Kurvenpunkt P und dessen Normale, sowie zwei konjugierte Durchmesser OP und OQ gegeben (bei der Hyperbel der reelle Durchmesser OP und die absolute Länge OQ des imaginären; bei der Parabel die Durchmesserrichtung PO und eine beliebige konjugierte Halbsehne OQ), so konstruiert man den Krümmungsmittelpunkt wie folgt (Fig. 34): Man trägt auf der Tangente von P ein Stück PC gleich dem zum Durchmesser von P konjugierten Halbdurchmesser (bezw. bei der Parabel, der konjugierten Halbsehne) auf; ebenso auf der Normalen von P nach der konvexen Seite der Kurve hin ein Stück PD gleich der Entfernung des

Fig. 34.



Punktes P von diesem konjugierten Halbdurchmesser (resp. bei der Parabel eine Strecke PD gleich der doppelten Entfernung des Punktes P von der konjugierten Halbsehne) und zieht CD, so schneidet die Senkrechte in C auf CD die Normale von P im Krümmungsmittelpunkt R von P.

5. Die eben angegebene Konstruktion hat besonders den Vorteil vor vielen anderen voraus, auch für die **Scheitel der Kegelschnitte** ihre Gültigkeit zu behalten.

Den Wert der Krümmungshalbmesser für die Scheitel werden wir aus dem Satz leicht erhalten. Im Endpunkt der kleinen (grossen) Axe der Ellipse ist der Halbdurchmesser des Kurvenpunkts die kleine (grosse) Halbaxe, der zugehörige konjugierte Halbdurchmesser die grosse (kleine) Halbaxe; beide Durchmesser stehen auf einander senkrecht, also:

Satz: Für einen Scheitel der grossen (kleinen) Axe der Ellipse ist der Krümmungshalbmesser gleich $\frac{b^2}{a}$ resp. $\frac{a^2}{b}$, falls a und b die grosse und kleine Halbaxe darstellt.

In einem Scheitel der Hyperbel ist derselbe $\frac{b^2}{a}$, a die reelle, b die imaginäre Halbaxe.

Bei der **Parabel** ergiebt sich von Neuem, dass der Krümmungs-Radius im Scheitel gleich dem Parameter ist.

IV. Einige weitere Konstruktionen des Osculationskreises.

1. **Mayersche Konstruktion***) (Fig. 35, Seite 42):

Durch den zweiten Schnittpunkt N der Normalen eines gegebenen Punkts P des Kegelschnitts ziehe man die Parallele NA mit der Tangente von P, welche Parallele den Kegelschnitt zum zweiten Mal in A schneidet; projiziere den Punkt A aus dem zweiten Endpunkt P_1 des Durchmessers von P in B auf die Tangente des Punktes P, und fälle von B auf diesen Durchmesser das Lot, so schneidet dasselbe auf der Normale von P aus ein Stück PG gleich dem doppelten, zu P gehörigen Krümmungshalbmesser ab.

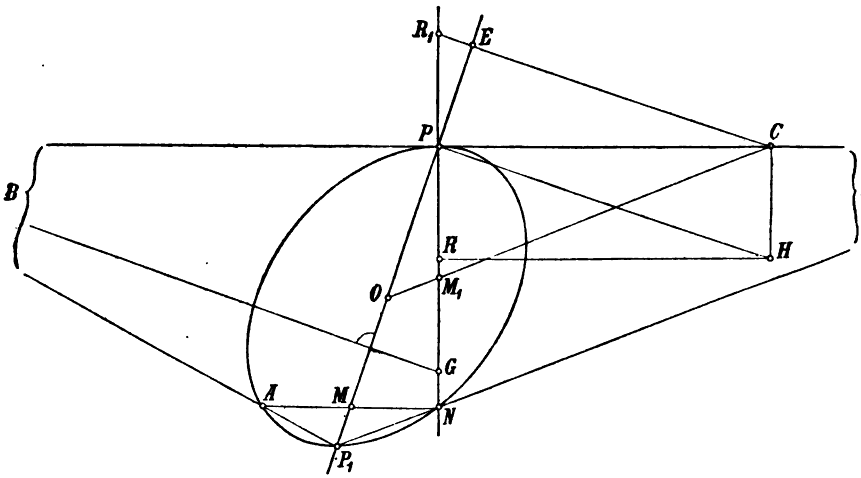
Diese Konstruktion, welche in der gegebenen Fassung sich nicht eben durch Einfachheit auszeichnet, lässt sich aber noch bedeutend abkürzen.

---

*) M. H. und C. Th. Mayer, Lehrbuch der axonometrischen Projektionslehre, Anhang.

M sei die Mitte der Sehne AN. M_1 die Mitte von PN; ziehe P_1N und OM_1, welche beide die Tangente von P in D resp. in C schneiden. Von C fälle auf die Verlängerung des Durchmessers PP_1 eine Senkrechte CE, die der Normalen in R_1 begegnet. Endlich ziehe

Fig. 35.



durch P eine Senkrechte PH auf den Durchmesser OP, welche das Lot CH in C auf der Tangente in H trifft, und durch H eine Parallele HR mit der Tangente, so dass $PR_1 \# CH \# PR$ ist.

Da AN parallel der Tangente BD von P ist und M Mitte von AN, so ist $PD = PB$; und da $P_1N \parallel OM_1$, ist C Mitte von PD. Dann ist offenbar R die Mitte von PG, weil C die Strecke $PD = PB$ halbiert und PH wie BG auf dem Durchmesser PP_1 senkrecht steht. Also ist PR der einfache Krümmungshalbmesser. Und wir haben die folgende einfache und wichtige Konstruktion*), die auf alle Kegelschnitte passt und die wir im zweiten Teil verwenden werden.

2. **Konstruktion (für Ellipse, Hyperbel, Parabel)** Fig. 36*a* (Seite 43):

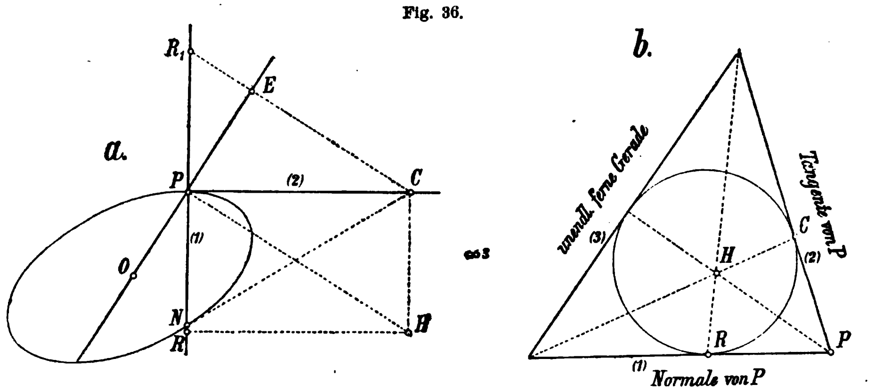
Fällt man vom Pol C der Normalen PN eines beliebigen Punkts P des Kegelschnitts das Lot CE auf den zu P gehörigen Durchmesser PO, so schneidet dieses Lot auf der Normalen von P eine Strecke PR_1 gleich dem Krümmungshalbmesser zu P ab.

Nur auf die Scheitelpunkte ist dieses Verfahren nicht anwendbar. Der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion ergiebt sich ohne Mühe aus unserem allgemeinen Prinzip. Wir erinnern uns, dass die Steiner-

*) Vgl. Pelz l. c. und Marx, mathem. Ann. XVII. pag. 110.

sche Hilfsparabel die Tangente von P im Pol C der Normalen berührt. Mit 1, 2, 3 bezeichnen wir (schemat. Fig. 36 *b*) die Normale von P, die Tangente von P, die unendlich ferne Gerade, und wenden den Brianchonschen Satz für drei Tangenten an. Die Linie, welche den Berührungspunkt

Fig. 36.



C auf 2 mit (1, 3) verbindet, ist die Parallele durch C mit der Normalen, die Verbindungslinie von (1, 2) mit dem Berührungspunkt auf 3 ist die Senkrechte in P auf OP. Beide Linien treffen sich in H. Durch H eine Parallele zu der Tangente gezogen, giebt den Berührungspunkt R der Steinerschen Parabel mit der Normalen, den Krümmungsmittelpunkt. Fällt man noch von C ein Lot CER_1 auf OP, so sieht man, dass $PR = CH = PR_1$ ist.

3. Die obige Mayersche Konstruktion ist übrigens noch in einer bemerkenswert allgemeinen Form folgendermassen auszusprechen.

Satz von Mayer:

Man ziehe wie oben (Fig. 35) durch den zweiten Schnittpunkt N der Normalen von P mit dem Kegelschnitt die Parallele NA zur Tangente; die Parallele schneide den Kegelschnitt zum zweiten Mal in A. Projiziert man A aus irgend einem Punkt X des Kegelschnitts in Y auf die Tangente und fällt von Y auf PX das Lot, so schneidet dieses von der Normalen in P ein Stück PG gleich dem Doppelten des zu P gehörigen Krümmungshalbmessers ab.

Der Pol von PA sei J, so geht zunächst das Lot von J auf den Durchmesser PP_1 durch den Krümmungsmittelpunkt R, die Mitte von PG; wie man sieht, wenn man sich J, den Pol von AP, als Schnittpunkt der Verbindungslinie des Kurvenmittelpunkts O und der Mitte der Sehne PA mit der Tangente von P konstruiert denkt.

Ferner geht die Senkrechte von J auf PA durch G, da die beiden Dreiecke JRG und PMA ähnlich sind (es ist AM auf GR und JR auf PM senkrecht, und die Winkel JRP und PMN sind gleich, also auch ihre Nebenwinkel).

Nun durchlaufe Punkt X die Peripherie des Kegelschnitts, so ist der Strahlenbüschel AX projektivisch zum Strahlenbüschel PX; der erstere perspektivisch zu der Punktreihe Y auf der Tangente, also ist der Strahlenbüschel PX projektivisch zur Punktreihe Y. Von den Punkten der Punktreihe Y werden der Konstruktion zufolge Lote auf die entsprechenden Strahlen des Büschels PX gefällt. Also gehen die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen festen Punkt; dieser letztere ist G, wie die spezielle Lage A von X zeigt. Damit ist der Satz bewiesen.

Kapitel 7.

Beziehungen zwischen den Krümmungskreisen an verschiedenen Punkten desselben Kegelschnitts. — Methode von Staudt.

Das folgende Kapitel ist als ein Anhang zu betrachten, in welchem zunächst einige, mehr **metrische** Eigenschaften der Osculationskreise entwickelt werden, welche zu den verschiedenen Punkten eines und desselben Kegelschnitts gehören; sodann ein Verfahren von Staudt, das ebenfalls mehr rechnender Natur ist, nämlich die in Kapitel 2 auseinandergesetzte collineare Beziehung zwischen dem Krümmungskreis und dem Kegelschnitt in eine metrische umsetzt.

1. Beziehung der Osculationskreise eines Kegelschnitts zum Steinerschen Ortskreis.

Der geometrische Ort der Scheitel aller rechten Winkel, welche einem gegebenen Kegelschnitt umschrieben werden können, ist, wie hier als bekannt vorausgesetzt werden muss, **ein Kreis,** welcher mit dem Kegelschnitt denselben Mittelpunkt hat*). Sind näher a und b die beiden Halbaxen, r der Radius dieses Ortskreises, so ist bei der **Ellipse** $r^2 = a^2 + b^2$; die Länge des Kreisradius also die Entfernung der Scheitel der grossen und kleinen Axe; und wenn speziell die Ellipse

---

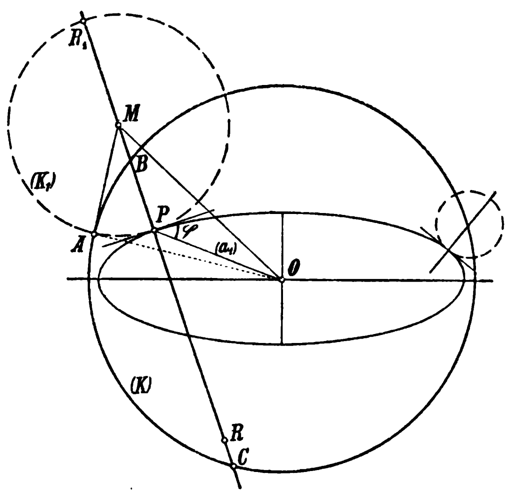
*) Vgl. Schröter-Steiner, l. c. § 34; Milinowski, l. c. Nr. 282 und 347; Steiners Werke, Band 2; oder Crelle's Journal, Band XXX, pag. 271—272.

in einen Kreis übergeht, jener Ortskreis ein concentrischer von dem doppelten Radius. Bei der **Hyperbel** ist $r^2 = a^2 - b^2$; insbesondere bei der gleichseitigen Hyperbel sind die Asymptoten das einzige Paar zu einander rechtwinkliger reeller Tangenten; der Ortskreis reduziert sich auf den Mittelpunkt. Endlich bei der **Parabel**, deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt, wird der Ortskreis zu einem solchen mit unendlich grossem Radius, der Direktrix.

Zwischen diesem Ortskreis nun und den Osculationskreisen des Kegelschnitts, welche zu den Punkten des letzteren gehören, besteht eine merkwürdige Beziehung.

Es sei P ein bestimmter Punkt des Kegelschnitts, und in diesem die Normale konstruiert. Ausserdem werde der erwähnte Ortskreis K mit dem Radius $\sqrt{a^2 \pm b^2}$ gezeichnet (das obere Zeichen bezieht sich im Folgenden auf die Ellipse (Fig. 37 *a*), das untere auf die Hyperbel (Fig. 37 *b*)). Auf der Normalen von P trage man nach der konvexen Seite der Kurve hin den zugehörigen Krümmungshalbmesser $PR_1 = PR = \varrho$ ab und konstruiere über PR_1 als Durchmesser den Kreis K_1, mit dem Mittelpunkt M. Verbinde endlich M und P mit dem Mittelpunkt O der Kurve.

Fig. 37 *a*.



Der Halbdurchmesser von P sei mit a_1, der dazu conjugierte (und in der Figur 37 *a* nicht eingezeichnete) Halbdurchmesser mit b_1 bezeichnet. Wir erinnern uns, dass der Krümmungshalbmesser von P gleich dem Quadrat des konjugierten Halbdurchmessers b_1 ist, dividiert durch die Projektion des Halbdurchmessers OP oder a_1 auf die Normale von P; also

$$\varrho = \frac{b_1^2}{a_1 \cdot \sin \varphi},$$

wenn φ den Winkel zwischen dem Durchmesser und der Tangente in P vorstellt. Bekanntlich ist die Summe (Differenz) der Quadrate irgend zweier konjugierter Halbdurchmesser einer Ellipse (Hyperbel) konstant und zwar gleich der Summe (Differenz) der Quadrate der beiden Halbaxen, oder:

$$a_1^2 \pm b_1^2 = a^2 \pm b^2.$$

Diese Gleichung kann man nach dem Vorhergehenden schreiben:

$$a_1^2 \pm a_1 \varrho \sin \varphi = a_1^2 . \mp 2 . a_1 \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot \cos (90^0 + \varphi) = a^2 \pm b^2;$$

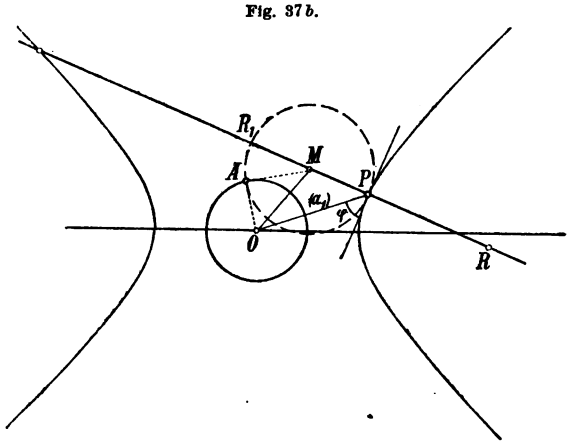
oder, wenn man beiderseits $\frac{\varrho^2}{4}$ addiert,

$$a^2 \pm b^2 + \frac{\varrho^2}{4} = a_1^2 + \frac{\varrho^2}{4} \mp 2\, a_1 \frac{\varrho}{2} \cos (90^0 + \varphi).$$

In dem Dreieck OPM, wo $OP = a_1$ und $PM = \frac{\varrho}{2}$ ist, wird:

$$OM^2 = OP^2 + MP^2 - 2 . OP . MP . \cos (90^0 \pm \varphi)$$
$$= a_1^2 + \frac{\varrho^2}{4} \mp 2\, a_1 \frac{\varrho}{2} \cos (90^0 + \varphi); \text{ also ist}$$
$$OM^2 = a^2 \pm b^2 + \left(\frac{\varrho}{2}\right)^2.$$

Fig. 37 b.



Legen wir von M die Tangente MA an den Ortskreis K und ziehen AO, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck OMA, $OA^2 = a^2 \pm b^2$; also ist nach dem Vorhergehenden $MA^2 = \left(\frac{\varrho}{2}\right)^2$; d. h. es geht der Kreis K_1 durch A, oder er schneidet den Ortskreis K rechtwinklig.

Bei der Parabel liegen die Mittelpunkte aller dieser Kreise K_1 auf der Direktrix (cfr. Seite 34); bei der gleichseitigen Hyperbel gehen die Kreise sämtlich durch den Mittelpunkt O.

Wir können also folgenden Satz aussprechen:

Satz von Steiner:

Wenn man die Krümmungshalbmesser eines gegebenen Kegelschnitts, jeden nach entgegengesetzter Seite hin, um sich selbst verlängert und über den Verlängerungen als Durchmesser Kreise K_1 beschreibt, so schneiden alle diese Kreise denjenigen Kreis K rechtwinklig, welcher den geometrischen Ort der Scheitel aller dem Kegelschnitt umschriebenen rechten Winkel darstellt. Und umgekehrt:

Konstruiert man einen solchen Kreis K_1, welcher den gegebenen Kegelschnitt in einem gegebenen Punkt P berührt und ausserdem dessen Ortskreis K rechtwinklig schneidet, so ist sein Durchmesser allemal dem Krümmungshalbmesser des Kegelschnitts im genannten Punkte P gleich. Wird der durch P gehende Durchmesser des Kreises K_1 über P hinaus um sich selbst verlängert, so hat man den Krümmungshalbmesser seiner Grösse und Lage nach.

In diesem Satz liegt also ein Mittel, den Krümmungshalbmesser in einem gegebenen Punkt P eines Kegelschnitts zu bestimmen. Man braucht nur den durch P gehenden Durchmesser des zu P gehörigen Kreises K_1 zu konstruieren, welcher die Tangente des Kegelschnitts in P berührt und den Ortskreis K rechtwinklig schneidet. Die vier Punkte R_1, B, P, C (Fig. 37a, Seite 45) liegen harmonisch, eben weil die beiden Kreise K und K_1 sich rechtwinklig schneiden; also hat man nur den zu den Punkten B, P, C gehörenden und dem Kurvenpunkt P konjugierten vierten harmonischen Punkt zu suchen.

Konstruktion:

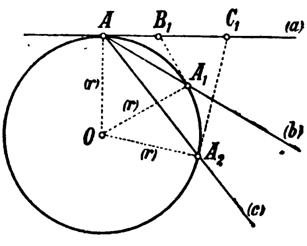
Schneidet die Normale des gegebenen Kurvenpunkts P den Ortskreis in den Punkten B und C, so bestimme man den zu B, C, P gehörigen und zu P konjugierten vierten harmonischen Punkt R_1 auf der Normale. Dann ist PR_1 die Länge des Krümmungshalbmessers von P.

Für den Fall der Parabel reduziert sich das Gesagte auf den uns schon bekannten Satz, dass das Stück der Normale zwischen Parabelpunkt P und der Direktrix gleich der Hälfte des Krümmungshalbmessers ist.

2. Methode von Staudt.*)

Es liege zunächst (Fig. 38) ein Kreis vor mit dem Halbmesser r; in dem Punkt A sei die Tangente gezeichnet und auf derselben ausser A noch die beiden Punkte B_1 und C_1 angenommen. Die Polaren dieser drei Punkte in Beziehung auf den Kreis seien a, b, c; also a die Tangente in A; b und c die betreffenden Berührungssehnen.

Fig. 38.



Es ist dann:

---

*) Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage 1857, 2. Heft, § 31.

$$cotg\,(a\,b) = \frac{r}{A\,B_1},\quad cotg\,(a\,c) = \frac{r}{A\,C_1};\ \text{also}$$

$$\frac{r}{A\,B_1} \pm \frac{r}{A\,C_1} = cotg\,(ab) \pm cotg\,(a\,c),$$

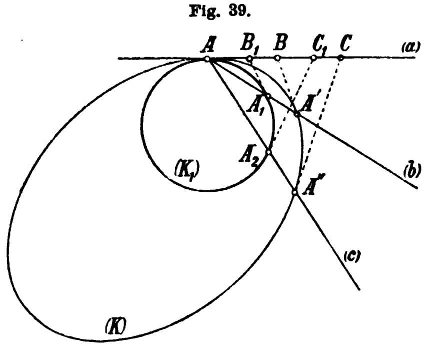
(das obere Vorzeichen bezieht sich auf den Fall, wo A auf der Tangente zwischen B und C liegt, das untere auf den Fall unserer Figur); daraus erhält man, mit Anwendung der goniometrischen Formel:

$$cotg\,\gamma \pm cotg\,\delta = \frac{sin\,(\delta \pm \gamma)}{sin\,\gamma\,.\,sin\,\delta},$$

$$r = \frac{A\,B_1\,.\,A\,C_1}{B_1\,C_1}\,.\,\frac{sin\,(b\,c)}{sin\,(a\,b)\,.\,sin\,(a\,c)} \tag{1}$$

Dies sei vorausgeschickt. Nun sei (Fig. 39) ein Kegelschnitt K gegeben. In Beziehung auf einen bestimmten Punkt A desselben soll der Krümmungshalbmesser r desselben bestimmt werden.

Fig. 39.



Wir konstruieren einen beliebigen Kreis, welcher den Kegelschnitt in A berührt, und ziehen durch A zwei beliebige Strahlen b und c, welche den Kreis zum zweiten Mal in A_1 und A_2, den Kegelschnitt in A' und A'' treffen. Auf der Tangente a von A seien B_1 und C_1 die Pole von b und c in Beziehung auf den Kreis, B und C dieselben in Beziehung auf den Kegelschnitt.

Unter all den Kreisen K_1, welche die Tangente von A berühren, giebt es einen einzigen, welcher mit dem Kegelschnitt drei Punkte, — speziell, wenn A ein Scheitel ist, vier Punkte — gemeinschaftlich hat. A ist Collineationszentrum in der collinearen Beziehung beider Kurven (cfr. Kap. 2). Die Collineationsaxe ist in dem letztgenannten Spezialfall, dass A einen Scheitelpunkt darstellt, die Tangente a von A; also schneiden sich die sich entsprechenden Tangenten von A_1 und A', von A_2 und A'' je auf der Collineationsaxe, d. h. die Punkte B, B_1; C, C_1 fallen zusammen. Im allgemeinen Fall, wo A nicht ein Scheitel ist, stellt die Verbindungslinie des Punktes A mit dem zweiten Schnittpunkt beider Kurven die Collineationsaxe vor; und die Punkte A, A_1; B, B_1; C, C_1 bilden eine Involution; die Punktreihen $A\,B\,C\,B_1$ und $A\,C_1\,B_1\,C$ sind projektivisch, oder es ist

$$\frac{A\,B_1\,.\,C\,B}{A\,B\,.\,C\,B_1} = \frac{A\,C\,.\,B_1\,C_1}{A\,C_1\,.\,B_1\,C}\ \text{oder}$$

$$\frac{A\,B_1\,.\,A\,C_1}{B_1\,C_1} = \frac{A\,B\,.\,A\,C}{B\,C}.$$

Unter Benützung der Gleichung (1) erhalten wir folglich für den Halbmesser r des erwähnten Kreises K_1 oder für den **Krümmungshalbmesser** den Ausdruck:

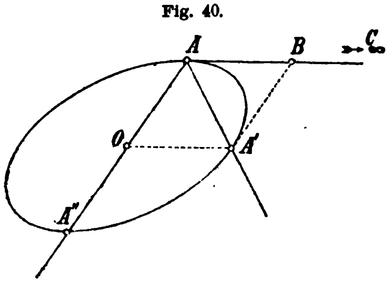
$$r = \frac{AB \cdot AC}{BC} \cdot \frac{\sin(bc)}{\sin(ab)\sin(ac)}. \tag{2}$$

Wie man sieht, ist diese Methode nichts anderes, als die Fixierung der von uns in Kap. 2 geometrisch verfolgten collinearen Beziehung zwischen dem Krümmungskreis und dem Kegelschnitt durch einen metrischen Ausdruck.

Anwendung:

Wir wollen den schon oben erwähnten Ausdruck für den Krümmungshalbmesser in den konjugierten Halbdurchmessern mittelst dieses Verfahrens von Staudt hier noch einmal kurz für die Ellipse ableiten. A sei ein gegebener Ellipsenpunkt (Fig. 40); O der Mittelpunkt; OA' der zu OA konjugierte Halbdurchmesser; die Tangenten von A und A' schneiden sich in B.

Fig. 40.



Durch A haben wir dem Vorhergehenden zufolge zwei Sekanten zu ziehen; solche sind z. B. AA' und der Durchmesser AO. Der Pol von AA' ist B; derjenige C von AO ist der unendlich ferne Punkt der Tangente in A. Ferner ist $AB = OA'$; das Verhältnis der Abstände des Punktes A und des Punktes B von dem unendlich fernen Punkt C ist 1; $\sin BAO = \sin AOA'$; $\frac{\sin BAA'}{\sin A'AO} = \frac{OA}{OA'}$.

Somit reduziert sich die obige Gleichung für den Krümmungshalbmesser r zu A:

$$r = \frac{AB \cdot AC}{BC} \cdot \frac{\sin OAA'}{\sin BAA' \cdot \sin BAO} \quad \text{auf die folgende:}$$

$$r = OA' \cdot \frac{1}{\sin AOA'} \cdot \frac{OA'}{OA}, \quad \text{oder es ist:}$$

$$r = \frac{OA'^2}{OA \cdot \sin AOA'}$$

der Krümmungshalbmesser von A, wie auf andere Weise früher gezeigt wurde.

Eine weitere Anwendung dieser Methode ist die folgende:

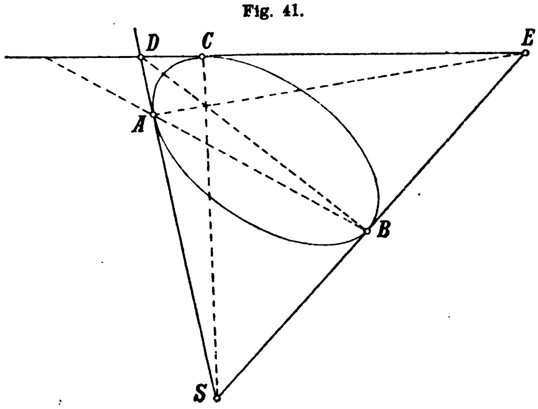
3. Satz über das Verhältnis der Krümmungshalbmesser, welche zu zwei verschiedenen Punkten desselben Kegelschnitts gehören:

Schon im Kap. 6, Seite 37 hatten wir gelegentlich einen diesbezüglichen Satz erhalten; derselbe ist aber nur ein Spezialfall eines allgemeineren, welcher sich folgendermassen aussprechen lässt:

Die Krümmungshalbmesser ϱ und ϱ_1 einer Kurve 2. Ordnung an zwei verschiedenen Punkten A und B verhalten sich wie die dritten Potenzen der Abstände, welche diese Punkte vom Schnittpunkt S der durch sie gehenden Tangenten haben, $\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{AS^3}{BS^3}$.

Beweis. Es seien (Fig. 41) D und E die Punkte, in welchen die Tangenten AS und BS von einer dritten Tangente, die die Kurve im Punkt C berühre, geschnitten werden; so ist

Fig. 41.



$$\frac{\sin ABS}{\sin BAS} = \frac{AS}{BS} \quad \text{und}$$

$$\frac{\sin BAC}{\sin ABC} = \frac{BC}{AC};$$

ebenso

$$\frac{CD}{CA} = \frac{\sin CAD}{\sin CDA} \quad \text{und}$$

$$\frac{CE}{CB} = \frac{\sin CBE}{\sin CEB}.$$

Somit hat man aus den letzteren Gleichungen:

$$\frac{CB}{CA} \cdot \frac{\sin CBE}{\sin CAD} = \frac{CE}{CD} \cdot \frac{\sin CEB}{\sin CDA} = \frac{CE}{CD} \cdot \frac{SD}{SE},$$

$$\text{da } \frac{SD}{SE} = \frac{\sin SED}{\sin SDE} = \frac{\sin CEB}{\sin CDA} \text{ ist.}$$

Die Krümmungshalbmesser ϱ und ϱ_1 für die Punkte A resp. B sind nun cfr. Nr. 2:

$$\varrho = \frac{AD.AS}{DS} \cdot \frac{\sin CAB}{\sin CAD . \sin BAS}; \quad \varrho_1 = \frac{BE.BS}{SE} \cdot \frac{\sin ABC}{\sin CBE . \sin ABS};$$

Durch Division erhält man, mit Benützung der beiden zuerst aufgestellten Gleichungen:

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{AD.AS.SE.BC.AS.\sin CBE}{DS.BE.BS.AC.BS.\sin CAD}.$$

Hier ist wiederum $\frac{BC.\sin CBE}{AC.\sin CAD} = \frac{CE.SD}{CD.SE}$; also

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{AS.AS.AD.CE}{BS.BS.BE.CD},$$

da sich DS und SE hebt.

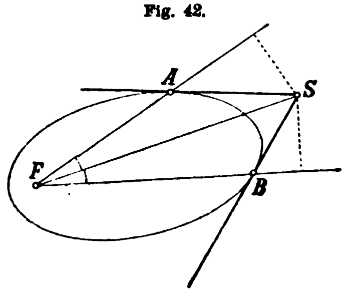
Weil aber die drei Geraden AE, BD, CS in demselben Punkt sich schneiden, ist nach dem Satz von Ceva:

$$AD.CE.BS = AS.CD.BE \quad \text{oder} \quad \frac{AD.CE}{BE.CD} = \frac{AS}{BS};$$

also wird $\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{AS^3}{BS^3}$, womit der Satz bewiesen ist.

Man kann denselben noch anders ausdrücken. Wir verbinden einen Brennpunkt F des Kegelschnitts (Fig. 42) mit A, B, S. Bekanntlich bildet dann FS mit den Vektoren AF und BF gleiche Winkel; denkt man sich also noch die Lote von S auf FA und FB gefällt, so sind diese gleich, d. h. es ist

Fig. 42.



$$AS.\sin FAS = BS.\sin FBS, \text{ also}$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{\sin^3(FBS)}{\sin^3(FAS)}.$$

Satz. Die Krümmungshalbmesser in zwei verschiedenen Punkten eines Kegelschnitts verhalten sich umgekehrt wie die Kuben der Sinus derjenigen Winkel, welche die Verbindungslinien je des betreffenden Punkts mit einem Brennpunkt und dem Durchschnitt S der Tangenten in den beiden Punkten miteinander bilden.

Übungsaufgaben:

1. Ein Kegelschnitt ist durch fünf Punkte gegeben, den Krümmungsmittelpunkt für einen derselben zu finden.

Die gegebenen Punkte seien P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. Es handle sich um den Osculationskreis z. B. von P_1. Zunächst ist die Normale von P_1, also die Senkrechte zur Tangente, zu konstruieren; letztere wird erhalten, indem man z. B. P_1 und P_2 als Zentren zweier projektivischen Büschel P_1 $(P_3\, P_4\, P_5)$ und P_2 $(P_3\, P_4\, P_5)$ betrachtet und den dem Strahl $P_2\, P_1$ entsprechenden bestimmt; derselbe ist die Tangente von P_1. Die Tangente und Normale zu P_1 sind zwei Berührende der Steinerschen Hilfsparabel. Zwei weitere sind leicht zu erhalten mittelst des Satzes von Pelz; man sucht den Pol A z. B. von $P_1\, P_2$ und fällt von A auf $P_1\, P_2$ das Lot g_1;

ebenso von dem Pol B von $P_1 P_3$ aus die Senkrechte g_2 auf $P_1 P_3$. Die Parabel, welche durch die unendlich ferne Gerade, g_1, g_2, die Tangente und Normale von P bestimmt ist, berührt letztere im Krümmungsmittelpunkt von P_1.

2. Von einem Kegelschnitt sind drei Punkte P_1, P_2, P_3 und der Mittelpunkt O gegeben. Den Krümmungskreis z. B. für den Punkt P_1 zu konstruieren.

Zuerst sucht man wieder die Tangente in P_1, was in mehrfacher Weise einfach geschehen kann; sodann den Pol, z. B. von $P_1 P_2$. Dieser ist der Schnittpunkt der Tangente in P_1 mit der Verbindungslinie des Kurvenmittelpunkts und der Mitte der Sekante $P_1 P_2$. Die Senkrechte von diesem Pol auf $P_1 P_2$ sei g_1. Die Normale und Tangente von P_1, die Gerade g_1 und die unendlich ferne Gerade sind vier Tangenten der Hilfsparabel, deren Direktrix $O P_1$ ist, deren Berührungspunkt mit der unendlich fernen Geraden also in der Richtung der Senkrechten auf $O P_1$ liegt.

3. Zwei Tangenten und deren Berührungspunkte P_1 und P_2, sowie ein weiterer Punkt P_3 sind von einem Kegelschnitt gegeben. Den Krümmungskreis zu P_1 zu finden.

4. Fünf Tangenten eines Kegelschnitts sind gegeben; es wird der Krümmungskreis zu dem Berührungspunkt einer derselben gesucht.

5. Ebenso, wenn drei Tangenten und der Mittelpunkt gegeben sind.

6. Von einer Parabel ist die Lage der Axe, der Brennpunkt und ein Peripheriepunkt gegeben. Den Krümmungskreis zu letzterem zu konstruieren.

7. Die Leitlinie, die Lage der Axe und eine Tangente liegen von einer Parabel vor. Man sucht den Krümmungshalbmesser zu dem Berührungspunkt der genannten Tangente.

8. Von einer Ellipse ist eine Sekante $P_1 P_2$ der Lage und Grösse nach, sowie der Pol und ein weiterer Peripheriepunkt gegeben; den Krümmungsmittelpunkt zu P_1 zu konstruieren.

9. Gegeben sind von einer Ellipse der Brennpunkt F, ein Punkt P und der Krümmungsmittelpunkt R zu dem Punkt P; gesucht sind die Axen.

Der Krümmungsmittelpunkt zu einem bestimmten Punkt P als Datum eines Kegelschnitts ist gleichwertig mit zwei Tangenten, weil durch den Krümmungskreis zwei Tangenten, diejenige in P und die unmittelbar darauffolgende, gegeben sind.

10. Ebenso, wenn das Zentrum O, ein Punkt P und der Krümmungsmittelpunkt zu P gegeben sind.

11. Von einer Hyperbel sind der Mittelpunkt, der Scheitel und der Krümmungskreis zu letzterem gegeben; weitere Punkte der Hyperbel allein mit Hilfe des Lineals zu konstruieren.

12. Die beiden Asymptoten und eine Tangente einer Hyperbel sind gegeben; gesucht wird der Osculationskreis zu dem Berührungspunkt dieser Tangente.

13. Von einer Hyperbel liegen ein Brennpunkt, eine Tangente und der Krümmungskreis zum Berührungspunkt dieser letzteren vor; nur mit Anwendung des Lineals den Mittelpunkt und die Asymytoten der Hyperbel zu finden.

II. Teil.

Krümmung der Flächen 2. Ordnung.

Kapitel 8.

Einleitendes über Flächen 2. Ordnung.

Ehe wir uns mit der Krümmung der Flächen selbst beschäftigen, wird es der Durchsichtigkeit der Entwicklung wegen angezeigt sein, einige Sätze über Flächen 2. Ordnung, die wir später verwenden, teils in Erinnerung zu bringen, teils neu abzuleiten.

1. Es liege eine Fläche 2. Ordnung vor. Um einen beliebigen Punkt P im Raum drehe sich eine Gerade, welche die Fläche in zwei Punkten schneidet. Die sämtlichen vierten harmonischen zu P konjugierten und zu P und den beiden Schnittpunkten der Geraden mit den Flächen gehörigen Punkte liegen in einer Ebene, der **Polarebene** des Punktes P in Beziehung auf die Fläche 2. Ordnung.

Falls von dem Punkt P reelle Tangentialebenen an die Fläche möglich sind, ist die Polarebene des Punktes P die Ebene E des Kegelschnitts, längs dessen ein von P aus umschriebener Kegel die Fläche berührt.

2. Bewegt sich der Punkt P auf einer Geraden G, so dreht sich seine Polarebene um eine feste Gerade G_1, die **konjugierte Polare**. Diese letztere erhält man, falls von G aus zwei reelle Tangentialebenen an die Fläche 2. Ordnung möglich sind, als Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte dieser Tangentialebenen. Den Tangenten G eines auf einer Fläche 2. Ordnung liegenden ebenen Kegelschnitts entsprechen als Polaren die durch deren Berührungspunkte gehenden Mantellinien G_1 des Kegels, welcher der Fläche längs des Kegelschnitts umschrieben ist.

3. Der Punkt P liege nun speziell im Unendlichen. In diesem Falle modifizieren sich die erwähnten Sätze zu den folgenden: Zieht man eine Reihe von parallelen Sehnen einer Fläche 2. Ordnung, so liegen ihre Mittelpunkte in einer Ebene, der zu der gemeinsamen Sehnenrichtung **konjugierten Durchmesserebene**, der Polarebene des den parallelen Sehnen gemeinschaftlichen unendlich fernen Punkts. Alle Diametralebenen gehen durch den Pol der unendlich fernen Ebene, den Mittelpunkt der Fläche.

Jede Gerade durch den Mittelpunkt, also jeder **Durchmesser**, ist einer bestimmten Durchmesserebene konjugiert, nämlich derjenigen, durch deren unendlich fernen Pol er geht. Jeder Durchmesser ist jedem in seiner konjugierten Durchmesserebene liegenden Durchmesser konjugiert. Zieht man in einer Durchmesserebene einen beliebigen Durchmesser, so geht die ihm konjugierte Durchmesserebene durch den der ersten Ebene konjugierten Durchmesser und umgekehrt.

Eine **Cylinderfläche, welche einer Fläche 2. Ordnung umschrieben ist,** berührt diese längs eines Diametralschnitts, dessen Ebene konjugiert ist zu der gemeinsamen Richtung der Mantellinien des Cylinders.

4. **Parallele Schnitte einer Fläche 2. Ordnung** haben ihre Mittelpunkte auf dem konjugierten Durchmesser, der Polaren der den Schnitten gemeinsamen unendlich fernen Geraden. Je zwei konjugierte Durchmesserebenen durch diesen Durchmesser schneiden jeden der parallelen Schnitte in konjugierten Durchmessern des Schnitts; parallele Schnitte einer Fläche 2. Ordnung sind ähnlich und ähnlich gelegen. Schneidet eine Durchmesserebene eine Fläche 2. Ordnung in einem Kreis, so wird die Fläche von jeder dieser Durchmesserebene parallelen Ebene ebenfalls in einem Kreise geschnitten.

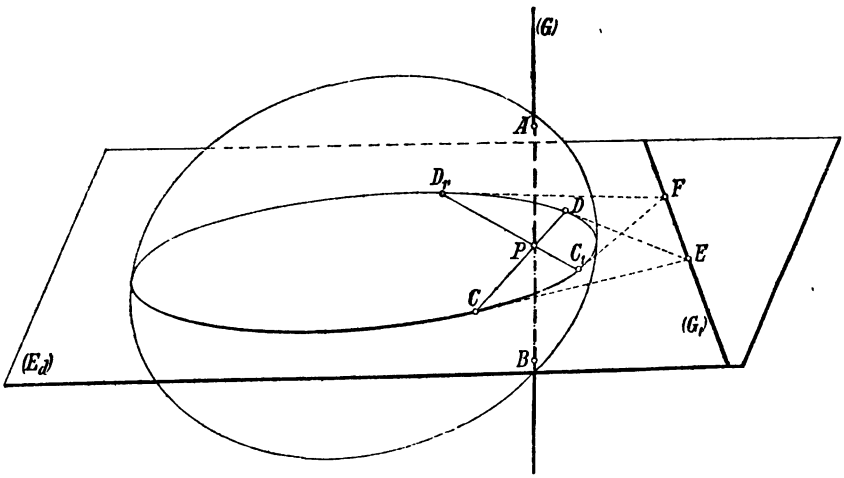
Diese Sätze gehören zu den bekanntesten über Flächen 2. Ordnung. Wir wollen jetzt daran gehen, **die Beziehungen zwischen den Schnitten einer Fläche 2. Ordnung zu untersuchen, deren Ebenen nicht parallel sind, sondern sich nach einer festen Geraden G im Endlichen schneiden.**

5. Durch eine gegebene Gerade G im Raum also seien alle möglichen Ebenen gelegt, welche die gegebene Fläche 2. Ordnung nach Kurven 2. Ordnung schneiden (in der Fig. 43, Seite 56, hat die Gerade G eine solche Lage, dass sie die Fläche in zwei Punkten A und B schneidet).

Zunächst leuchtet ein, dass **die Mittelpunkte sämtlicher Schnittkurven 2. Ordnung in derselben Ebene liegen, nämlich in der zu der Geraden G konjugierten Diamentralebene E_d der Fläche 2. Ordnung.** Denn denken wir uns an irgend einer der Schnittkurven die beiden zu G parallelen Tangenten, so liegt auf der Verbindungslinie der Berührungspunkte dieser parallelen Tangenten der Mittelpunkt des betreffenden Schnitts. Die Gesamtheit aller dieser unter sich und zu G parallelen Tangenten der Schnittkurven erfüllt die Mantelfläche eines der Fläche umschriebenen Cylinders, dessen Mantellinien parallel G sind. Dieser Cylinder berührt die Fläche längs eines Kegelschnitts, welcher die Gesamtheit der Berührungspunkte aller jener parallelen Tangenten darstellt und dessen Ebene die zu der Richtung der Mantellinien des Cylinders, also zu G, konjugierte Diametralebene E_d ist.

Wenn die Gerade, wie in der Fig. 43, die Fläche in zwei reellen

Fig. 43.



Punkten A und B schneidet (die Doppelpunkte der Involution auf G ree sind), wird AB durch die genannte Diametralebene E_d, welche die Mittelpunkte aller jener Schnittkurven enthält, in P halbiert, was aus dem Begriff der Diametralebene als des geometrischen Orts der Mitten aller zu AB parallelen Sehnen der Fläche hervorgeht.

Ferner **liegt die konjugierte Polare G_1 zu G ebenfalls in der Durchmesserebene E_d.** Denn G_1 ist definiert als diejenige Gerade, welche die Polarebenen aller Punkte von G gemeinschaftlich haben. Speziell der unendlich ferne Punkt von G hat zur Polarebene die Ebene E_d, also enthält letztere auch die Gerade G_1.

Diese konjugierte Polare G_1 zu G können wir im Fall der Figur konstruieren als Schnittlinie der Tangentialebenen in A und B. Und legt man durch G alle möglichen Schnittebenen und konstruiert zu jeder Schnittkurve 2. Ordnung den Berührungskegel, welcher längs der betreffenden Schnittkurve die Fläche berührt, so liegen die Spitzen aller dieser Umhüllungskegel dem Gesagten zufolge auf der zu G konjugierten Polaren G_1.

Von diesen verschiedenen Schnittebenen durch G betrachten wir zwei beliebige. Sie schneiden die Fläche nach zwei Kegelschnitten K_1 und K_2, die Durchmesserebene E_d nach CD resp. $C_1 D_1$ (Fig. 43, Seite 56). Die Tangenten des Diametralschnitts E_d in den Punkten C und D einerseits und C_1 und D_1 andererseits schneiden sich, innerhalb der Ebene E_d, auf der Geraden G_1, als der Polaren von P. Die Schnittpunkte E und F auf G_1 sind die Spitzen der Berührungskegel, welche der Fläche nach den Kegelschnitten K_1 und K_2 umschrieben sind.

Endlich legen wir noch durch die beiden Schnittkurven K_1 und K_2 zwei Kegelflächen. Deren Spitzen S und S_1 liegen dann ebenfalls in der Diametralebene E_d und zwar auf der Geraden G_1. Nämlich, **durch zwei Kegelschnitte K_1 und K_2 im Raum lassen sich bekanntlich im allgemeinen zwei Kegel 2. Ordnung S und S_1 legen.** Betrachten wir für den Augenblick nur einen der beiden Kegel. Seine **Spitze S liegt zunächst in der Diametralebene E_d.**

Zum Nachweis denken wir uns an beiden Kegelschnitten K_1 und K_2 die Tangenten t_1, t'_1 und t_2, t'_2 konstruiert, welche G parallel sind; die beiden ersteren Tangenten an K_1, die zwei andern an K_2 (in der Fig. 43 nicht eingezeichnet). Da t_1 und t_2, ebenso t'_1 und t'_2 parallel sind, liegen sie je in einer Ebene, die folglich je eine Tangentialebene des durch die beiden Kegelschnitte gelegten Kegels vorstellt; und die Verbindungslinien der Berührungspunkte von t_1 und t_2, ebenso von t'_1 und t'_2 sind Mantellinien des Kegels. Aber die Verbindungslinien der Berührungspunkte der parallelen Tangenten t_1 und t'_1 von K_1, ebenso t_2 und t'_2 von K_2 sind Durchmesser von K_1 resp. K_2, welche in der Ebene E_d liegen; folglich liegen auch jene beiden Mantellinien des Kegels und deren Schnittpunkt, die Spitze S des Kegels, in der Ebene E_d.

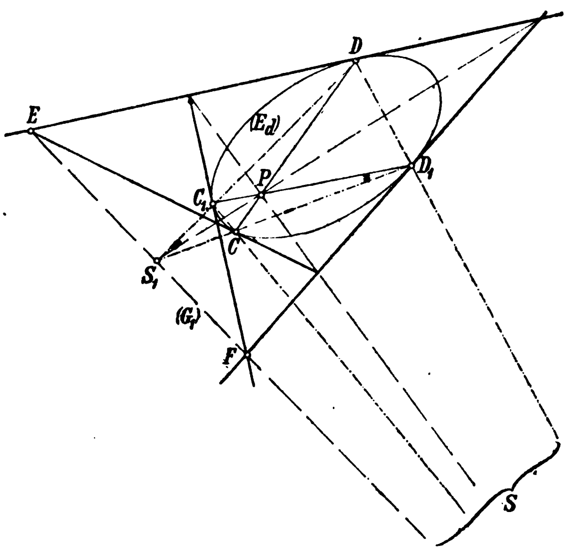
Und innerhalb der Diametralebene E_d liegt die Spitze S des Kegels auf der zu G konjugierten Polaren G_1; ebenso die andere Spitze S_1.

Zum Beweis dieser letzteren Behauptung ist der Einfachheit halber die Diametralebene E_d samt ihren Punkten und Geraden in Fig. 44 (Seite 58) besonders herausgezeichnet. P ist der Schnittpunkt von G, CD und $C_1 D_1$ sind die Schnitte der beiden Kegelschnittsebenen K_1 und K_2 mit der Ebene E_d; S und S_1 sind die beiden Spitzen der durch K_1 und K_2 gelegten zwei Kegel.

Der Satz von Pascal und Brianchon für das Viereck ergiebt dann, wie die Figur (Seite 58) ohne Weiteres zeigt, dass S und S_1 auf der Polaren G_1 von P liegen. Und nebenbei bemerkt man, — ein Resultat, das wir übrigens später nicht benützen werden, — dass auch die Pole E und F von CD und $C_1 D_1$ auf G_1 sich vorfinden, d. h. die Spitzen E und F der Kegel, welche der Fläche nach K_1 und K_2 umschrieben sind, dabei sind E, F, S, S_1 vier harmonische Punkte.

Satz. Legt man durch eine feste Gerade G alle möglichen Schnittebenen K_1, K_2 u. s. w. einer Fläche 2. Ordnung, so liegen die sämtlichen Mittelpunkte der verschiedenen Schnittkurven 2. Ordnung in einer Ebene E_d, der zu G konjugierten Diametralebene. Und nimmt man zwei beliebige K_1 und K_2 der Schnittkurven heraus, so enthält die zu G konjugierte und in E_d liegende Polare G_1 die Spitzen E, F; S, S_1 der vier Kegel, welche resp. längs K_1 und K_2 der Fläche umschrieben sind und welche durch diese zwei Kegelschnitte gelegt sind. Solche vier Kegelspitzen bilden jedesmal auf G_1 eine harmonische Punktreihe, dabei sind S und S_1 konjugiert.

Fig. 44.



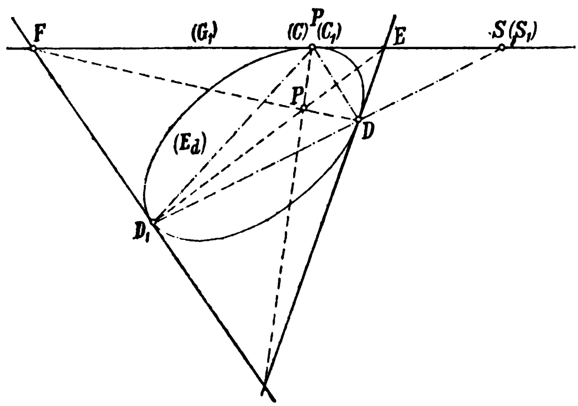
6. Jetzt möge **die Gerade G speziell eine Tangente der Fläche 2. Ordnung** vorstellen; so fallen in der Diametralebene E_d (Fig. 45, Seite 59) die Punkte C, C_1 und P auf der Peripherie des Diametralschnitts E_d in P zusammen; ebenso fallen auf G_1 die Kegelspitzen S und S_1 zusammen. Die zu G konjugierte Polare G_1 wird die konjugierte Tangente; und wieder bilden S, E, F, P vier harmonische Punkte, dabei P und S konjugiert. Also modifiziert sich der obige Satz zu dem folgenden:

Legt man durch eine feste Tangente G einer Fläche 2. Ordnung zwei beliebige Schnitte K_1 und K_2, so liegen deren Mittelpunkte M_1 und M_2 in der zu G konjugierten Diametralebene E_d der Fläche. Die Spitze S des Kegels, welcher durch die beiden Kegelschnitte K_1 und K_2 gelegt ist, sowie die Spitzen E und F der beiden Kegel, welche längs K_1 und K_2 die Fläche berühren, liegen, innerhalb der Ebene E_d, auf der zu G

konjugierten Tangente G_1, der Schnittlinie der Ebene E_d mit der Tangentialebene der Fläche durch G. Auf der Tangente G_1 bilden die drei Kegelspitzen E, F, S zusammen mit dem Berührungspunkt P der Tangente G jedesmal eine harmonische Punktreihe.

7. Noch eine weitere einfache Beziehung findet hier statt.

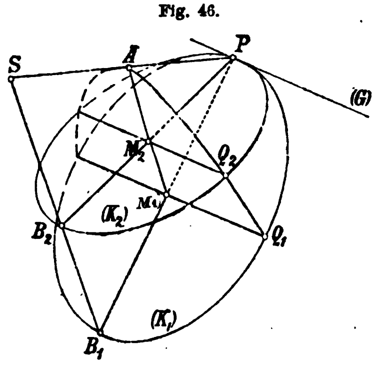
Fig. 45.



Die Mittelpunkte aller Schnitte der Fläche 2. Ordnung, welche durch die feste Tangente G in P gelegt sind, haben von der Tangentialebene in P Abstände, welche sich verhalten wie die Quadrate der zu G parallelen konjugierten Durchmesser der einzelnen Schnitte.

Nämlich, wie wir oben gesehen haben, ist die längs SP berührende Tangentialebene des durch K_1 und K_2 gelegten Kegels zugleich die Tangentialebene der Fläche in P. Also können wir (Fig. 46) die beiden Flächenschnitte K_1 und K_2 als Schnitte dieses Kegels S betrachten und brauchen nur die Abstände ihrer Mittelpunkte M_1 M_2 von der nach SP berührenden Tangentialebene des **Kegels** zu prüfen. $M_1 Q_1$, $M_2 Q_2$ seien die zu G parallelen Halbdurchmesser von K_1 und K_2; B_1, B_2 die zweiten Endpunkte der Durchmesser PM_1, PM_2 von P. Diese Durchmesser PB_1 und PB_2 liegen, wie öfters erwähnt, in der Diametralebene E_d durch P und S. Die Mittelpunkte M_1, M_2 u. s. w. aller der durch die Kegeltangente G gehenden Schnitte des Kegels S sind offenbar in einer Geraden $M_1 M_2 \ldots A$ enthalten, wobei A die Mitte von SP ist; und die Halbdurchmesser $M_1 Q_1$, $M_2 Q_2$ u. s. w. der Schnitte in einer Ebene, welche der Mantellinie SB_1 parallel ist, also den Kegel nach einer Parabel $A Q_1 M_1$ schneidet. $A M_2 M_1$ ist ein Durchmesser dieser Parabel; somit verhalten sich, nach einem bekannten Satz über die Parabel, die Quadrate der Halbdurchmesser $M_1 Q_1$ und $M_2 Q_2$ wie $M_1 A : M_2 A$. Diese

Fig. 46.



letzteren Strecken verhalten sich aber wie die Abstände der Punkte M_1 und M_2 von der Mantellinie SP des Kegels, oder auch wie die Abstände derselben Punkte M_1 und M_2 von der Tangentialebene des Kegels längs SP, d. h. von der Tangentialebene der gegebenen Fläche 2. Ordnung in P, da ja die Berührungsebene des Kegels in P zugleich diejenige der Fläche 2. Ordnung ist. Hiemit ist die Behauptung erwiesen.

8. Parabelschnitte durch eine Tangente G einer Fläche 2. Ordnung können nur in einer einzigen bestimmten Stellung einer Schnittebene durch G vorkommen. Für einen solchen Schnitt liegt der Mittelpunkt im Unendlichen; der betreffende Halbdurchmesser sowohl, als der Abstand des Mittelpunkts von der Tangentialebene in P wird unendlich; und man kann die betreffende Parabel als den Grenzfall der elliptischen Schnitte auffassen. Bei einem Hyperbelschnitt endlich kommt der Mittelpunkt des Schnitts auf die andere Seite der Tangentialebene von P zu liegen, als bei den elliptischen Schnitten; der zugehörige Halbdurchmesser wird imaginär (seine absolute Grösse gleich dem Stück der ihm parallelen Tangente zwischen Kurvenpunkt und Asymptote); das Quadrat desselben wird negativ, was eben andeutet, dass die Strecke, welche den betreffenden Abstand des Schnittmittelpunkts von der Tangentialebene der Fläche in P angiebt, auf der entgegengesetzten Seite zu suchen ist.

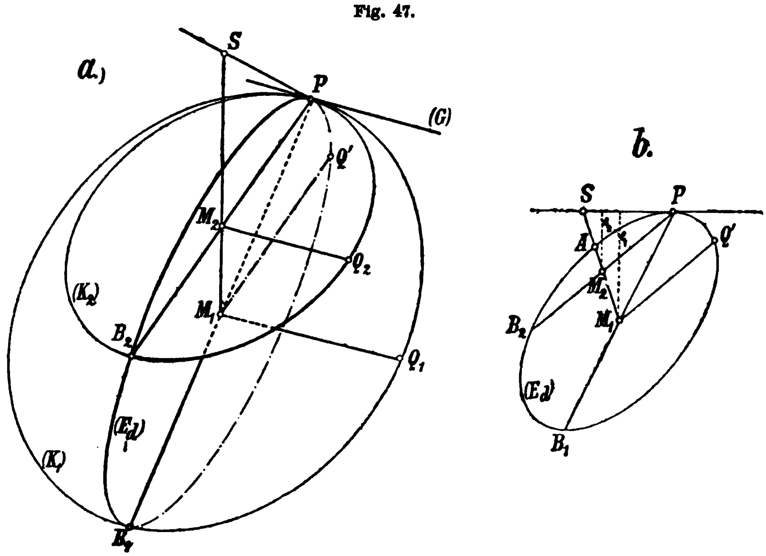
9. Man kann den letzteren Satz (Nr. 7) sehr leicht ohne die obige Betrachtung des Kegels durch K_1 und K_2 auch folgendermassen erhalten:

Durch die Tangente G in dem Punkt P der Fläche 2. Ordnung legen wir wieder (Fig. 47a, Seite 61) zwei Kegelschnitte K_1 und K_2, mit den Mittelpunkten M_1 und M_2. Der eine derselben, K_1, möge aber für den Augenblick den Diametralschnitt durch G vorstellen, so dass der Mittelpunkt M_1 von K_1 zugleich derjenige der Fläche 2. Ordnung ist. $M_1 Q_1$ sowie $M_2 Q_2$ seien die zu G parallelen Halbdurchmesser. Dann verhalten sich, ist die Behauptung, $M_1 Q_1^2 : M_2 Q_2^2$ wie die Abstände der Punkte M_1 und M_2 von der Tangentialebene der Fläche in P, oder, was dasselbe ist, wie die Abstände e_1 und e_2 derselben Punkte M_1, M_2 von der Tangente PS des zu G konjugierten Diametralschnitts E_a.

Denn, legt man durch den Flächenmittelpunkt M_1 eine Ebene parallel dem Schnitt K_2, so schneidet dieser die Fläche nach einem zu K_2 ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitt (in Fig. 47 nicht angedeutet). Und da M_1 der Flächenmittelpunkt ist, so sind, wenn man den Durchmesser $M_1 Q'$ parallel $M_2 P$ zieht, $M_1 Q_1$ und $M_1 Q'$ die zu $M_2 Q_2$ und $M_2 P$ parallelen, konjugierten Durchmesser in den beiden parallelen Schnitten. Somit verhält sich $M_1 Q_1^2 : M_2 Q_2^2$ wie $M_1 Q'^2 : M_2 P^2$.

Der zu G konjugierte Diametralschnitt E_a, in welchem $M_1 Q'$, $M_2 P$, PS liegen, ist in Fig. 47 b besonders herausgezeichnet. In diesem Kegelschnitt ist M_2 der Mittelpunkt der Sehne PB_2, also $M_1 M_2$ und $M_1 Q'$ zwei konjugierte Halbdurchmesser, und nach einem öfters abgeleiteten Satze*)

Fig. 47.



über Ellipse und Hyperbel verhält sich $M_1 Q'^2 : M_2 P^2$ wie $M_1 S : M_2 S$, wenn S der Schnittpunkt von $M_1 M_2$ mit der Tangente in P (da nämlich S Pol von $M_2 P$; also $A M_1^2 = SM_1 \,.\, SM_2$ ist); oder auch, wie die Entfernungen $e_1 : e_2$ der Punkte M_1 und M_2 von der Tangente SP in P. Also verhalten sich $M_1 Q_1^2 : M_2 Q_2^2$ wie diese letzteren Abstände e_1 und e_2 oder wie diejenigen der Punkte M_1 und M_2 von der Tangentialebene der Fläche in P. Dies gilt ebenso für einen zweiten beliebigen Schnitt K_3 statt K_2 durch G, bei festgehaltenem Diametralschnitt K_1; somit ist der Satz bewiesen.

Wenn der Mittelpunkt der Fläche im Unendlichen liegt, so ist der zu G konjugierte Diametralschnitt E_a eine Parabel. In diesem Fall legt man durch G zwei beliebige Schnitte K_1 und K_2 und führt die analoge Untersuchung durch, indem man die betreffenden Beziehungen der Parabel E_a benützt.

10. Um zum Schluss unsere Ergebnisse kurz zusammenzustellen, so hatten wir Folgendes erhalten.

---

*) Vgl. z. B. Chasles, sections coniques, Nr. 191 ff., pag. 125, oder Milinowski l. c.

Resultat:

Legt man durch eine feste Tangente G, welche in einem Punkt P einer Fläche 2. Ordnung gezogen ist, alle möglichen Schnittebenen, so liegen die Mittelpunkte aller der Schnittkurven 2. Ordnung in derselben Ebene, nämlich in der zu der Tangente G konjugierten Diametralebene E_d.

Konstruiert man durch zwei beliebige dieser Schnittkurven K_1 und K_2 eine Kegelfläche 2. Ordnung, so liegt deren Spitze S auf der zu G konjugierten Flächentangente G_1, auf welcher sich auch die Spitzen E und F der beiden Kegel finden, welche der Fläche längs K_1 und K_2 umschrieben sind; und zwar bilden auf G_1 die drei Kegelspitzen E, F, S zusammen mit dem Flächenpunkt P jedesmal eine harmonische Punktreihe; E und F einerseits, und S, P andererseits einander konjugiert.

Endlich verhalten sich die Abstände der Mittelpunkte aller jener Schnittkurven 2. Ordnung durch G von der Tangentialebene der Fläche in P, wie die Quadrate der zur Tangente G parallelen Durchmesser der einzelnen Schnitte *).

Kapitel 9.

Über die Krümmungen der schiefen Schnitte einer Fläche 2. Ordnung.

1. Die Krümmung in einem gegebenen Punkt einer ebenen Kurve 2. Ordnung haben wir im ersten Teil behandelt, indem wir dieselbe durch die Krümmung eines Kreises massen, da dieser die Eigenschaft hat, dass in allen seinen Punkten die Krümmung dieselbe ist.

Nun handelt es sich um die Krümmung von Flächen 2. Ordnung. Der analoge Gedanke liegt nicht zu fern, die Krümmung der Fläche in einem Punkt P mit derjenigen einer Kugelfläche zu vergleichen. Diesen Gedanken hat Gauss analytisch durchgeführt. Auf der Fläche denke man sich ein zu dem Flächenpunkt P gehöriges, unendlich kleines Flächenstück f abgegrenzt und in allen Punkten der Begrenzungskurve die

*) Soweit wenigstens meine Kenntnis von der Litteratur der synthetischen Geometrie reicht, scheinen mir die letzteren Beziehungen vorher noch nicht ausgesprochen worden zu sein.

Von den meisten der obigen Resultate wird nicht sogleich, erst später für eine zweite Ableitung des Satzes von Meusnier, im folgenden Kapitel, Gebrauch gemacht werden. Und der obige Satz über die Lage der drei Kegelspitzen ist überhaupt nur des allgemeinen Interesses wegen hier beigefügt, da er sich bei der obigen Auseinandersetzung gelegentlich ergab.

Flächennormale konstruiert. Andererseits denke man sich eine Kugelfläche mit Radius Eins, und durch den Mittelpunkt derselben zu allen jenen Flächennormalen die parallelen Radien gezogen. Diese treffen die Kugelfläche in den aufeinanderfolgenden Punkten einer Kurve, die auf der Kugel ein unendlich kleines Flächenstück f_1 bestimmt. Das Krümmungsmass der Fläche in dem Punkte P ist dann das Verhältnis der beiden unendlich kleinen Flächenstücke f_1 und f.

Den Methoden der synthetischen Geometrie ist jedoch die Komplanation der Oberflächen weniger leicht zugänglich; wir müssen deshalb hier, wo es sich nur um geometrische Hilfsmittel handelt, auf die Verfolgung dieses Gedankens verzichten und die Krümmung der Fläche 2. Ordnung in einem gegebenen Punkt derselben auf andere Weise zu studieren suchen.

Zu diesem Zweck denken wir uns durch den Flächenpunkt P alle möglichen Ebenen in allen möglichen Richtungen gelegt und untersuchen die gegenseitigen Verhältnisse der Krümmungen der auf diese Weise aus der Fläche ausgeschnittenen ebenen Kurven 2. Ordnung.

Um aber dies in guter Ordnung thun zu können, teilen wir alle die Schnittebenen, die durch P möglich sind, in zwei Gruppen ein.

Zunächst denken wir uns durch P eine feste Tangente gelegt und durch diese einen Ebenenbüschel. Die Ebenen dieses Büschels schneiden die Fläche 2. Ordnung nach Kurven 2. Ordnung, deren Krümmungsmittelpunkte für P in Beziehung auf ihre gegenseitigen Lagenverhältnisse wir untersuchen. Es wird sich ein sehr einfaches Gesetz zwischen den Krümmungen aller dieser durch eine feste Flächentangente gelegten Schnitte ergeben, indem sich für sämtliche die Untersuchung auf die eines einzigen dieser Schnitte reduzieren lässt, nämlich des Normalschnitts, dessen Ebene also zugleich durch die Flächennormale in P geht.

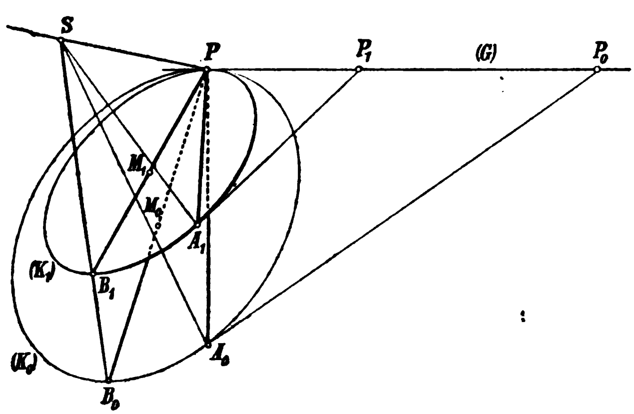
Dann drehen wir in Gedanken jene Flächentangente in P innerhalb der Tangentialebene von P um diesen letzteren Punkt und denken uns in der jedesmaligen Lage der Tangente die Normalschnittebene der Fläche durch dieselbe gelegt. Die Krümmungen aller dieser Normalschnitte sind, wie sich herausstellen wird, ebenfalls durch ein merkwürdiges Gesetz unter einander verbunden.

Auf diese Weise haben wir alle durch P möglichen, die Fläche schneidenden Ebenen erschöpft; und es wird noch übrig bleiben, unter den verschiedenen Flächen 2. Ordnung die einzelnen Arten derselben, sowie unter den verschiedenen Punkten einer und derselben Fläche einzelne besondere Punkte in Beziehung auf ihre Krümmungsverhältnisse zu prüfen.

2. Es liege also eine Fläche 2. Ordnung vor. Auf derselben fixieren wir einen Punkt P und eine Tangente G der Fläche in diesem Punkt. **Durch die Tangente G legen wir alle möglichen Schnittebenen, und stellen uns die Aufgabe, die gegenseitige Lage der zu P gehörigen Krümmungsmittelpunkte der so entstehenden Schnittkurven 2. Ordnung aufzusuchen.**

Zu diesem Zweck greifen wir unter den Schnittkurven durch G zwei, K_0 und K_1, heraus (Fig. 48); erstens die **Normalschnittebene** K_0, welche zugleich auf der Tangentialebene in P senkrecht steht, und zweitens, eine **beliebige schiefe Schnittebene** K_1, welche gegen die erstere unter irgend einem Winkel geneigt ist. Beide Ebenen schneiden die Fläche nach Kurven 2. Ordnung. Die Bezeichnungen, welche sich auf den Normalschnitt beziehen, mögen durch den Index Null, diejenigen des schiefen Schnitts durch den Index Eins unterschieden werden.

Fig. 48.



Die Mittelpunkte der zwei Schnitte seien M_0, M_1; die zu P gehörigen Durchmesser PB_0, PB_1; die Kurvennormalen in P seien PA_0, PA_1. Die genannten Durchmesser PM_0B_0, PM_1B_1 liegen, wie diejenigen aller durch G gelegten Schnitte, in der zu G konjugierten Durchmesserebene E_d der Fläche; die Krümmungsmittelpunkte der beiden Kegelschnitte K_0 und K_1 zu Punkt P auf den zugehörigen Normalen PA_0, PA_1 von P. Diese letzteren aber sind, wie die Normalen von P für alle Schnitte durch G, in der zu G in P senkrechten Ebene E_n enthalten.

Durch diese beiden Kegelschnitte K_0 und K_1 legen wir nun eine Kegelfläche. Im allgemeinen sind durch zwei ebene Kegelschnitte im Raum zwei Kegelflächen 2. Ordnung möglich; diese reduzieren sich jedoch hier auf eine einzige, da dieselben eine Tangente, die Tangente G in P, gemeinschaftlich haben.

Die Spitze des Kegels sei S. Diese liegt erstens in der Diametralebene E_d der Fläche durch PM_0B_0 und PM_1B_1, da die Tangenten von K_0 und K_1 in den Endpunkten B_0, B_1 der Durchmesser einander und der

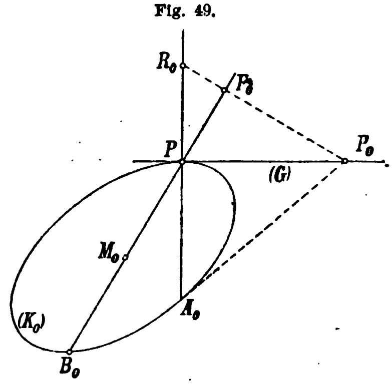
Tangente G parallel sind, folglich $B_0 B_1$ eine Mantellinie des Kegels darstellt; zweitens in der Tangentialebene der Fläche in P, wie in Kap. 8 Nr. 6 (Seite 58) gezeigt wurde und wie leicht auch direkt auf andere Weise eingesehen werden kann; — kurz, es liegt die Spitze S in der zu G konjugierten Tangente PS der Fläche.

Auf diese Weise sind die beiden Kegelschnitte K_0 und K_1 im Raum in **collineare Beziehung** gebracht; S ist das **Collineationszentrum,** die Tangente G die **Collineationsaxe.**

Und die Aufgabe, welche wir zunächst lösen wollen und welche der Anschauung etwas leichter zugänglich ist, möge die sein, die gegenseitige Lage der Krümmungsmittelpunkte zu P für alle Schnitte der **Kegelfläche** S zu suchen, welche durch deren Tangente G gelegt sind und unter welchen sich auch unsere beiden bisher genannten Kurven 2. Ordnung K_0 und K_1 befinden.

Innerhalb jeder einzelnen Schnittebene des Kegels durch G denken wir uns die Konstruktion des Krümmungshalbmessers nach Kap. 6, IV, 2 (Seite 42) ausgeführt; — eine Gesamtkonstruktion, die in der Fig. 48 natürlich kaum angedeutet werden kann, ohne dieselbe sehr zu komplizieren. In Fig. 49 ist die Konstruktion für eine der Schnittkurven, z. B. K_0, nochmals angegeben: Man sucht den Pol P_0 zu der Normale PA_0 von P; fällt von diesem Pol die Senkrechte $P_0 F_0$ auf die Verlängerung des zu P gehörenden Durchmessers $PM_0 B_0$. Diese Senkrechte trifft die Normale von P in einem Punkt R_0 der Art, dass PR_0 die Länge des Krümmungshalbmessers von P (allerdings noch nicht in der richtigen Lage nach der konkaven Seite der Kurve zu) darstellt.

Fig. 49.



Vollenden wir also in Gedanken diese Konstruktion für die sämtlichen Schnitte des Kegels durch G, so liegen offenbar alle Pole P_0, P_1, P_2 u. s. w. der Normalen PA_0, PA_1, PA_2 ... auf der gemeinsamen Tangente G. Diese Normalen bilden einen Strahlenbüschel innerhalb einer Ebene E_n, welche senkrecht zu G durch P geht und die Kegelfläche im allgemeinen nach einem Kegelschnitt schneidet. Ebenso ist die Gesamtheit der Durchmesser PB_0, PB_1 u. s. w. ein Strahlenbüschel innerhalb der Durchmesserebene E_d, welche durch die Mantellinie PS des Kegels geht.

Zunächst, behaupten wir, ist die **Punktreihe** $P_0 P_1 P_2$ ... der **Pole der Normalen auf der Tangente** G **projektivisch zu dem**

Strahlenbüschel P $(A_0 A_1 \ldots)$ der Normalen in der Ebene E_n, und damit auch projektivisch zu dem Strahlenbüschel P $(B_0 B_1 \ldots)$ der Durchmesser in der Ebene E_d (da die beiden letzteren Strahlenbüschel Schnitte desselben Ebenenbüschels durch G sind).

Nämlich, es ist bekannt, dass die Punktreihe, welche auf irgend einer Tangente eines Kegelschnitts durch die Schnittpunkte sämtlicher Tangenten desselben entstehen, projektivisch ist zu dem Strahlenbüschel, dessen Strahlen irgend einen Punkt P des Kegelschnitts mit den Berührungspunkten der genannten Tangenten verbinden; und ein analoger Satz gilt, wenn der Kegelschnitt aus irgend einem Punkt S des Raumes projiziert wird: die Punktreihe P_0, $P_1 \ldots$, in welcher eine beliebige Tangente G einer Kegelfläche 2. Ordnung von den Tangentialebenen des Kegels getroffen wird, ist projektivisch zu dem Ebenenbüschel, welches eine beliebige Mantellinie SP zur Axe hat und dessen Ebenen durch die Berührungsstrahlen jener Tangentialebenen gelegt sind.

Dies wenden wir auf unsere Kegelfläche an. Dieselbe wird von der in P zu G senkrechten Ebene E_n nach einem Kegelschnitt A_0, A_1, $A_2 \ldots$ geschnitten. Durch die Mantellinie SP des Kegels als Axe und die Punkte A_0, $A_1 \ldots$ ist ein Ebenenbüschel bestimmt, dessen Schnitt der Strahlenbüschel P $(A_0, A_1 \ldots)$ der Normalen ist, und der nach dem vorhin angeführten Satz projektivisch zu der Punktreihe P_0, P_1, $P_2 \ldots$ auf G ist, da die Tangentialebenen des Kegels S, welche längs SA_0, $SA_1 \ldots$ denselben berühren, die Kegeltangente G in P_0, P_1, P_2 u. s. w. treffen. Somit ist die Punktreihe P_0, $P_1 \ldots$ der Pole der Normalen auf G projektivisch zum Strahlenbüschel P $(A_0, A_1 \ldots)$ der Normalen in der Ebene E_n und damit auch zum Strahlenbüschel P $(B_0 B_1 \ldots)$ der Durchmesser in der Ebene E_d, womit die obige Behauptung erwiesen ist.

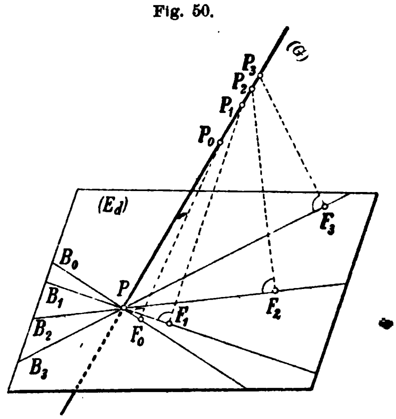
Dabei entspricht speziell dem Punkt P der Punktreihe G die Gerade PS, die Tangente des Diametralschnitts E_d, projektivisch in dem Strahlenbüschel der Durchmesser; und dem Punkt Unendlich der Punktreihe entspricht der zu G senkrechte Strahl in der Ebene E_d des Durchmesserbüschels oder die Schnittlinie der beiden Ebenen E_d und E_n.

Von den Punkten P_0, P_1, $P_2 \ldots$ der Punktreihe auf G werden nun (Fig. 50, Seite 67) der Konstruktion gemäss auf die Strahlen PB_0, $PB_1 \ldots$ des projektivischen Strahlenbüschels der Durchmesser Lote $P_0 F_0$, $P_1 F_1$, $P_2 F_2 \ldots$ gefällt, je von einem Punkt der Punktreihe das Lot auf den ihm projektivisch entsprechenden Durchmesser; und diese Lote verlängert bis zum Schnitt R_0, R_1, $R_2 \ldots$ je mit dem entsprechenden Strahl des Strahlenbüschels P $(A_0, A_1 \ldots)$ der Normalen in der zu G senkrechten Ebene E_n.

Diese sämtlichen Lote $P_0 F_0$, $P_1 F_1 \ldots$ erfüllen offenbar eine **Regelfläche.**

Wir fragen also, welcher Art ist die Regelfläche, welche entsteht, wenn von den Punkten P_0, P_1, P_2 .... (Fig. 50) einer Punktreihe G je auf die entsprechenden Strahlen eines ihr projektivischen Strahlenbüschels P, dessen Ebene E_d den Träger G der Punktreihe nicht enthält, dessen Mittelpunkt P aber auf G liegt, Lote gefällt werden; und was ist der Schnitt dieser Regelfläche erstens mit der Ebene E_d des Strahlenbüschels und zweitens mit einer zu G normalen Ebene E_n (letztere in der Fig. 50 nicht eingezeichnet)?

Fig. 50.

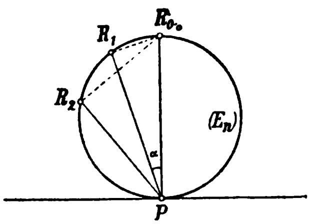


Diese Frage lässt sich sehr leicht entscheiden, indem wir durch einen beliebigen Punkt des Raums, etwa einen Punkt Q auf G, Parallelen zu sämtlichen Erzeugenden P_0F_0, P_1F_1 u. s. w. der Regelfläche, d. h. Senkrechten zu den Strahlen des Büschels P legen. Fällt man von einem Punkt Q von G auf alle Strahlen des ebenen Büschels P Senkrechte, so liegen die Fusspunkte derselben auf einem **Kreis**; denn sie liegen auf einer Kugel, die über QP als Durchmesser beschrieben ist, und der Kreis als geometrischer Ort jener Fusspunkte ist einfach der Schnitt dieser Kugelfläche mit der Ebene E_d des Strahlenbüschels P. Weiter, wird dieser letztgenannte Kreis aus Q auf eine Ebene E_n projiziert, welche in P auf QP oder auf G senkrecht steht, welche folglich jene Kugelfläche über QP als Durchmesser in P berührt, so ist der Schnitt der projizierenden Kegelfläche mit dieser Ebene E_n ebenfalls ein **Kreis**, wie u. A. von der stereographischen Projektion her jedermann bekannt ist.

Diese Kegelfläche aus Q, deren Mantellinien den Erzeugenden P_0F_0, P_1F_1 ... unserer Regelfläche parallel sind, ist also eine Kegelfläche 2. Ordnung; die Regelfläche selbst also eine Regelfläche 2. Ordnung (einfaches Hyperboloid). Die Kreisschnitte des Kegels sind, wie wir gesehen haben, parallel den Ebenen E_d und E_n. Andererseits ist dieser Kegel dem Asymptotenkegel der Regelfläche kongruent. Und da eine Regelfläche 2. Ordnung und ihr Asymptotenkegel durch eine Ebene in ähnlichen Kegelschnitten, und eine und dieselbe Fläche 2. Ordnung durch parallele Ebenen ebenfalls in ähnlichen und ähnlich gelegenen Kurven 2. Ordnung geschnitten wird, so sehen wir, **dass aus der Regelfläche durch die Ebene E_d sowohl als durch die Ebene E_n Kreise geschnitten werden.**

Der Schnittkreis in der Ebene E_n ist der geometrische Ort der Endpunkte R_0, R_1, R_2 ... der Krümmungshalbmesser; folglich **liegen die sämtlichen Endpunkte R_0, R_1 ... der Krümmungshalbmesser der einzelnen Schnitte durch G auf einem Kreis** (Fig. 51).

Fig. 51.



Die Ebene E_n dieses Kreises steht senkrecht auf der Tangente G in P, und der Kreis berührt die Tangentialebene PSG des Kegels S (und damit der Fläche 2. Ordnung) in P. Denn wenn die um G sich drehende Schnittebene des Kegels S durch PS geht, wird der Krümmungshalbmesser Null. Der Durchmesser PR_0 des Kreises ist daher der Krümmungshalbmesser des Normalschnitts, des auf der Tangentialebene in P senkrechten Schnitts.

Jetzt kehren wir von der Betrachtung der Kegelfläche S zu unserer Fläche 2. Ordnung zurück. Beide Flächen, der Kegel S und unsere Fläche 2. Ordnung hatten, wie wir wissen, die Tangente G, die Tangentialebene in P und zwei Schnittkurven gemeinschaftlich, nämlich den Normalschnitt K_0 und einen beliebigen schiefen Schnitt K_1. Nach dem, was vorhin auseinandergesetzt wurde, liegt folglich der Endpunkt R_1 des Krümmungshalbmessers für einen beliebigen schiefen Schnitt K_1 der **Fläche** durch G auf einem Kreis, dessen Durchmesser die Länge des Krümmungshalbmessers für den zugehörigen Normalschnitt ist. D. h., die Länge des Krümmungsradius eines schiefen Schnitts ist die Projektion von derjenigen des Normalschnitts auf die Ebene des schiefen Schnitts.

Tragen wir endlich noch die Längen PR_0, PR_1 ... der Krümmungshalbmesser auf jeder Normale nach der entgegengesetzten Seite von P aus ab, also nach derjenigen, auf welcher die Krümmungsmittelpunkte wirklich liegen, so erfüllen die Krümmungsmittelpunkte die Peripherie eines Kreises, welcher dem erstgenannten Kreis kongruent ist (man hat einfach den letzteren um eine Senkrechte zu G und zu der Flächennormale in die richtige Lage zu drehen). Wir haben somit folgenden Satz:

Satz von Meusnier:

Der Krümmungsmittelpunkt eines beliebigen schiefen Schnitts einer Fläche 2. Ordnung, welcher durch eine bestimmte Tangente G in einem Punkt P der Fläche gelegt ist, in Beziehung auf P, wird erhalten, indem man den Krümmungsmittelpunkt des zu derselben Tangente G gehörigen Normalschnitts auf die Ebene des schiefen Schnitts projiziert.

Oder, die Krümmungsmittelpunkte sämtlicher Schnitte durch dieselbe Tangente G in einem Punkt P der Fläche liegen auf einem

Kreise, dessen Ebene auf G in P senkrecht steht, der die Tangentialebene der Fläche in P berührt und dessen Durchmesser durch den Krümmungshalbmesser des zugehörigen Normalschnitts dargestellt wird.

3. Wir können den Satz noch anders ausdrücken.

Innerhalb jeder der Schnittebenen durch G denken wir uns den Osculationskreis zu Punkt P konstruiert, was nach dem Angeführten möglich ist, sobald wir den Krümmungsmittelpunkt und damit den Osculationskreis des Normalschnitts kennen. Der Osculationskreis irgend eines schiefen Schnitts durch G ist dann offenbar der Schnitt einer um den Krümmungsmittelpunkt des Normalschnitts mit dem zugehörigen Krümmungshalbmesser als Radius beschriebenen Kugelfläche und der betreffenden schiefen Schnittebene, — eben weil der Krümmungsmittelpunkt des schiefen Schnitts der Fusspunkt des Lots von dem Krümmungsmittelpunkt des Normalschnitts auf den schiefen Schnitt ist, und weil die Krümmungshalbmesser sämtlicher Schnitte durch G in der zu G in P senkrechten Ebene E_n enthalten sind. Also haben wir folgenden andern Ausdruck des Satzes.

Satz: Wenn man durch eine bestimmte Tangente G in einem Punkt P einer Fläche 2. Ordnung beliebige Schnittebenen legt, welche die Fläche nach Kurven 2. Ordnung schneiden, so ist der Osculationskreis zu P für eine beliebige dieser Schnittkurven der Schnittkreis ihrer Ebene mit derjenigen Kugelfläche („Osculationskugel"), welche um den Krümmungsmittelpunkt des zu G gehörigen Normalschnitts der Fläche konstruiert wird und die letztere in P berührt.

4. Noch auf eine dritte Art hat Hachette*) dieses Gesetz ausgedrückt.

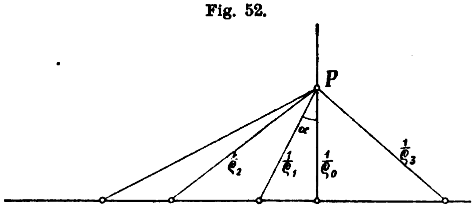
Der Krümmungshalbmesser ϱ_1 eines beliebigen schiefen Schnitts, welcher gegen den Normalschnitt um den Winkel α geneigt ist (Fig. 51, Seite 68), hat die Grösse

$$\varrho_1 = \varrho_0 \cdot \cos\alpha,$$

wenn ϱ_0 den Krümmungshalbmesser des Normalschnitts darstellt. Oder auch

$$\frac{1}{\varrho_1} \cdot \cos\alpha = \frac{1}{\varrho_0}.$$

Fig. 52.



Also die Projektion des reciproken Krümmungshalbmessers des schiefen Schnitts auf die Normalschnittebene (Fig. 52) ist der reciproke Wert des

*) Hachette, Éléments de géométrie de trois dimensions.

Krümmungshalbmessers (oder die „Krümmung") des Normalschnitts. So für jeden beliebigen schiefen Schnitt; die Endpunkte dieser sämtlichen reciproken Krümmungshalbmesser liegen also auf einer Geraden, die zur Normalschnittebene senkrecht steht.

Satz: Legt man durch eine Tangente G in einem Punkt P einer Fläche 2. Ordnung beliebige Schnitte und trägt auf der Normale jedes Schnitts eine Strecke gleich dem reciproken Wert des betreffenden Krümmungshalbmessers für P (oder gleich der Krümmung) auf, so sind die Endpunkte dieser Strecken in einer Geraden enthalten, welche auf der Normalschnittebene senkrecht steht, in einem Abstand von P gleich der Krümmung des Normalschnitts.

Damit ist also, wie in der Einleitung im voraus angegeben wurde, die Untersuchung der Krümmung aller Schnitte, deren Ebenen dieselbe Tangente gemeinschaftlich haben, auf diejenige eines einzigen Schnitts, des Normalschnitts, zurückgeführt.

Die Konstruktion Fig. 49 (Seite 65), die bei der obigen Entwicklung benützt wurde, war für diese deshalb besonders geeignet, weil sie für Ellipse, Hyperbel und Parabel gleichmässig gilt. Dies ist deshalb wünschenswert, weil die Schnitte, die durch eine Tangente einer Fläche 2. Ordnung gelegt werden können, Ellipsen und Hyperbeln und, wenigstens in einer bestimmten Richtung, auch Parabeln sein können.

Falls der Punkt P auf einem Hauptschnitt der Fläche liegt und G dessen Tangente darstellt, steht SP senkrecht auf G und die obige Ableitung vereinfacht sich bedeutend, indem die erwähnte Regelfläche auf eine Kegelfläche sich reduziert.

Auf die Unterscheidung der einzelnen Flächen 2. Ordnung und der besonderen Punkte auf einer Fläche 2. Ordnung wird übrigens erst im übernächsten Kapitel etwas näher eingegangen werden.

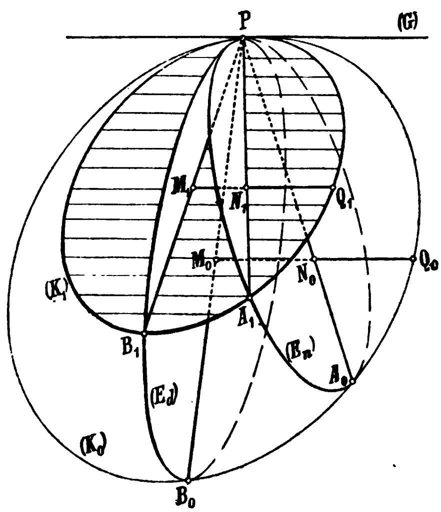
In unserem obigen allgemeinen Fall schneidet offenbar die Ebene E_s die Ebene E_d nach einer Geraden. Dies ist die Normale zu P für denjenigen der Schnitte durch G, welcher P zum Scheitel hat. Für diesen Schnitt wird die Lage des Krümmungsmittelpunkts zunächst scheinbar unbestimmt, aber wie man sogleich weiter sieht, durch den Kreis in der Ebene E_d in Wirklichkeit eine bestimmte.

Für eine Tangente G in einem Scheitel der Fläche 2. Ordnung, falls diese Tangente in einem Hauptschnitt der Fläche liegt, wird jedoch der gegebene Beweis des Meusnierschen Satzes ungültig. Es ist sehr leicht, mit Zuhilfenahme der Krümmungshalbmesser-Konstruktion Kap. 2 Nr. 5 (Seite 14) oder Kap. 6, III. (Seite 40) auch für diesen ganz speziellen Fall die Gültigkeit zu zeigen. Statt dies zu thun, wollen wir im Folgenden den Satz von Meusnier auf eine zweite Methode noch einmal vollständig entwickeln, die sich besonders durch ihre Kürze auszeichnet, auch für Scheiteltangenten G an Hauptschnitten bestehen bleibt, aber metrische Beziehungen zu Hilfe nimmt. Dazu ist die Verwendung des in Kap. 8 (Seite 62) am Schluss erwähnten Hilfssatzes notwendig.

5. Anderer Beweis des Satzes von Meusnier:

Die Bezeichnungen seien dieselben wie oben. Die beiden durch die Flächentangente G in P gelegten Schnitte K_0 und K_1 in Fig. 48 (Seite 64) mögen wieder, der eine K_0 den Normalschnitt, der andere K_1 einen beliebigen schiefen Schnitt vorstellen. Wir ziehen noch (Fig. 53) die zur Tangente G parallelen und zu den Durchmessern PM_0, PM_1 von P konjugierten Halbdurchmesser M_0Q_0, M_1Q_1. Endlich seien N_0, N_1 die Durchschnittspunkte dieser Halbdurchmesser M_0Q_0, M_1Q_1 mit den Normalen PA_0, PA_1, welche in den einzelnen Schnitten zu P gehören und in der zu G in P senkrechten Ebene E_n liegen. PN_0, PN_1 sind dann die Abstände jener Halbdurchmesser von P, oder auch die Abstände der Mittelpunkte M_0, M_1 von der Tangente G.

Fig. 53.



Der Neigungswinkel α des schiefen Schnitts K_1 gegen den Normalschnitt K_0 ist dann nichts anderes, als der Winkel zwischen der Normale PA_1 und der (Flächen-) Normale PA_0.

Wie wir im I. Teil gesehen haben, ist der Krümmungshalbmesser ϱ einer Kurve 2. Ordnung in Beziehung auf Punkt P gleich dem Quadrat des zur Tangente G in P parallelen Halbdurchmessers MQ, dividiert durch das Lot PN von P auf diesen Halbdurchmesser. Die Krümmungshalbmesser unserer beiden Schnitte K_0 und K_1 seien ϱ_0 und ϱ_1; so ist

$$\varrho_1 : \varrho_0 = \frac{M_1Q_1^2}{PN_1} : \frac{M_0Q_0^2}{PN_0}.$$

Nach Kap. 8 (Seite 62), Schluss, verhält sich aber $M_1Q_1^2 : M_0Q_0^2$ wie die Abstände der Schnittmittelpunkte M_1 und M_0 von der Tangentialebene in P, oder wie $PN_1 . \cos\alpha : PN_0$. Also vereinfacht sich die obige Proportion zu der folgenden:

$$\varrho_1 : \varrho_0 = \cos\alpha;$$

womit der Satz von **Meusnier** von neuem bewiesen ist. Falls der Mittelpunkt der Fläche im Unendlichen liegt, lässt man K_0 einen beliebigen Schnitt vorstellen.

Kapitel 10.

Über die Beziehungen zwischen den Krümmungen der Normalschnitte in einem Punkt einer Fläche 2. Ordnung. — Die Indicatricenkurve. — Der Satz von Euler.

1. Zur Untersuchung der Krümmung einer Fläche 2. Ordnung in einem gegebenen Punkt P haben wir im vorhergehenden Kapitel zunächst eine bestimmte Tangente G in P angenommen, durch dieselbe alle möglichen Schnittebenen gelegt und ein einfaches Gesetz zwischen den Osculationskreisen aller zugehörigen Schnitte gefunden.

Jeder Tangente G der Fläche in dem Punkt P gehörte eine bestimmte **Osculationskugel** zu, der Art, dass eine beliebige Schnittebene durch G die Kugelfläche nach dem Osculationskreis der zugehörigen Schnittkurve 2. Ordnung schneidet; und der Halbmesser der Kugel war der Krümmungshalbmesser des Normalschnitts durch G. Wir haben deshalb nur noch nötig, uns mit den verschiedenen Normalschnitten, bezw. deren Krümmungen in Beziehung auf P zu beschäftigen.

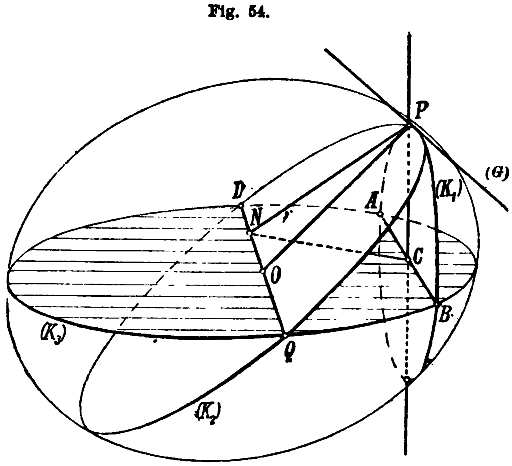
Um daher vollends alle durch den Flächenpunkt P möglichen Schnittebenen zu erschöpfen, drehen wir jetzt die Tangente G innerhalb der Tangentialebene um den Punkt P und denken uns in jeder Lage die zu der betreffenden Richtung von G gehörige Osculationskugel konstruiert.

Bei der Drehung der Tangente G um P oder des Normalschnitts um die Flächennormale in P ändert die Osculationskugel von einer Richtung von G zur andern ihren Halbmesser, indem sie stets die Tangentialebene der Fläche in P berührt. Der Mittelpunkt der Osculationskugel wandert dabei auf der Flächennormalen in P, und die verschiedenen Lagen desselben erzeugen auf der Normalen eine Punktreihe. Jedem Punkt dieser Punktreihe gehört ein bestimmter Strahl des Strahlenbüschels zu, welcher durch die Drehung der Tangente G um P in der Tangentialebene von P gebildet wird.

Wir wollen untersuchen, ob sich zwischen den verschiedenen Lagen des Mittelpunkts der Osculationskugel auf der Flächennormalen, oder zwischen den Krümmungshalbmessern aller Normalschnitte, welche die Flächennormale in P gemeinschaftlich haben, ein einfaches Gesetz ergiebt.

2. In dem Punkt P der gegebenen Fläche 2. Ordnung sei die Tangentialebene, sowie die Normale PC auf derselben konstruiert und durch einen beliebigen Strahl G (Fig. 54) des Strahlenbüschels P in der Tangentialebene der Normalschnitt K_1 zur Fläche gelegt, welcher somit die Flächennormale PC enthält. Durch dieselbe Tangente G der Fläche in P führen wir denjenigen (schiefen) Schnitt K_2, welcher durch den Mittelpunkt O geht; endlich durch diesen Flächenmittelpunkt O, der zunächst als im Endlichen liegend vorausgesetzt ist, legen wir die Diametralebene K_3, welche der Tangentialebene der Fläche in P parallel ist.

Fig. 54.



Die beiden Schnittkurven 2. Ordnung K_2 und K_3 mögen sich in D und Q schneiden; die Gerade DQ enthält den Mittelpunkt O der Fläche; und OQ ist der zu OP konjugierte und zu G parallele Halbdurchmesser von K_2. Das Lot von P auf diesen Durchmesser DQ treffe diesen in N; verbindet man noch N mit dem Schnittpunkt C der Ebene von K_3 und der Flächennormalen in P, so ist offenbar der Winkel NPC der Neigungswinkel der beiden Ebenen K_1 und K_2, da OQ parallel G ist und die Normalen PN und PC senkrecht auf der gemeinschaftlichen Tangente G von K_1 und K_2 stehen.

Die Bestimmung der Krümmung des beliebigen Normalschnitts K_1 in Beziehung auf P kann vermöge des schon bewiesenen Satzes von Meusnier auf diejenige des schiefen Schnitts K_2 zurückgeführt werden, welcher mit K_1 die Tangente G in P gemeinschaftlich hat und durch den Mittelpunkt O der Fläche geht. Denn, wie wir jetzt wissen, ist der Krümmungshalbmesser ϱ_2 des schiefen Schnitts K_2 gleich der Projektion des Krümmungshalbmessers ϱ_1 für den Normalschnitt K_1 auf die Ebene von K_2. Also ist, da $PC : PN$ den Cosinus des Neigungswinkels beider Ebenen K_1 und K_2 vorstellt, $\varrho_2 = \varrho_1 \cdot \frac{PC}{PN}$, oder $\varrho_1 = \varrho_2 \cdot \frac{PN}{PC}$. Der Halbmesser ϱ_2

des Osculationskreises für den Schnitt K_2 ist aber nach Kap. 6 (Seite 37) gleich dem Quadrat des zur Tangente G parallelen Halbdurchmessers OQ dividiert durch das Lot PN von P auf diesen Halbdurchmesser, — eine Beziehung, die auch für die Hyperbel galt —; also ist:

$$\varrho_1 = \frac{OQ^2}{PN} \cdot \frac{PN}{PC} = \frac{OQ^2}{PC}.$$

Nun denken wir uns die Normalschnittebene um die Flächennormale PC gedreht, so bleibt die Schnittebene K_3 dieselbe, als die Ebene durch den Flächenmittelpunkt O parallel der Tangentialebene in P; ebenso der Punkt C, als Schnittpunkt der festen Flächennormalen mit der Ebene K_3. Dagegen nimmt Q auf dem Kegelschnitt K_3 andere Lagen an; und zu jedem Strahl G des Strahlenbüschels P in der Tangentialebene gehört ein ihm paralleler Durchmesser OQ von K_3. Also haben wir das Resultat, dass sich **die Krümmungshalbmesser der verschiedenen Normalschnitte durch PC verhalten wie die Quadrate der zugehörigen Halbdurchmesser OQ des Kegelschnitts K_3.**

Dieser Kegelschnitt führt bei diesen Betrachtungen einen besonderen Namen.

Wenn man bei einer Fläche beliebigen Grads parallel zu der Tangentialebene eines Flächenpunkts P in einem verschwindend kleinen Abstand von derselben eine Schnittebene legt, so schneidet diese die Fläche nach einer Kurve 2. Ordnung, die man nach Dupin*) die **Indicatrice** nennt. Je nachdem diese eine Ellipse oder Hyperbel oder Parabel ist, nennt man den Punkt P einen **elliptischen** oder **hyperbolischen** oder **parabolischen Punkt.**

Bei einer Fläche 2. Ordnung sind alle Schnitte derselben, parallel der Tangentialebene in dem Flächenpunkt P, ähnlich und ähnlich gelegen; — ihre Mittelpunkte liegen auf dem zu P gehörigen Durchmesser PO der Fläche —. Also **kann bei einer Fläche 2. Ordnung irgend ein Schnitt parallel der Tangentialebene in P als Indicatricenkurve gelten;** das obige Resultat bleibt dasselbe.

Ferner kommen bei nicht ausartenden Flächen 2. Ordnung nur elliptische und hyperbolische Punkte vor, so dass, wie oben stillschweigend vorausgesetzt wurde, die Indicatrice ihren Mittelpunkt stets im Endlichen hat.

Nur eine kleine Bemerkung ist noch hinzuzufügen. Falls der Mittelpunkt der **Fläche** selbst im Unendlichen liegt, wie bei dem elliptischen und hyperbolischen Paraboloid, so bleibt die obige Auseinandersetzung fast wörtlich dieselbe. Wir legen in diesem Fall parallel zur Tangentialebene in P in einer **beliebigen** endlichen Entfernung PC eine Schnittebene K_3

*) Dupin, développements de Géométrie, p. 48.

und durch die Tangente G eine Ebene K_2 nach dem unendlich fernen Mittelpunkt der Fläche, also in der Richtung der Durchmesser. K_2 ist dann eine Parabel; und der Krümmungshalbmesser ϱ_2 dieses schiefen Schnitts wird nach Kap. 6, III. (Seite 39):

$$\varrho_2 = \frac{OQ^2}{2 . PN}, \text{ also } \varrho_1 = \frac{OQ^2}{2 . PC}.$$

Bei der Drehung von G um P bleibt $2 . PC$ konstant u. s. f. Also gilt das Ergebnis in jedem Fall, und wir haben folgendes Resultat:

Satz von Dupin über die Beziehung der Krümmungshalbmesser zur Indicatricenkurve.

Dreht sich um eine feste Normale einer Fläche 2. Ordnung in einem Punkt P eine Schnittebene, so ist der Krümmungshalbmesser des entstehenden Normalschnitts 2. Ordnung in Beziehung auf P für jede Lage proportional dem Quadrat desjenigen Durchmessers der Indicatricenkurve, welche der Tangente des Normalschnitts in P parallel ist.

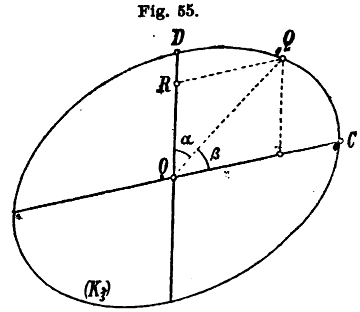
Die Krümmungshalbmesser der einzelnen Normalschnitte in P folgen also in Beziehung auf ihre Grösse nach einem bestimmten Gesetz aufeinander. In einer bestimmten Stellung des Normalschnitts wird dessen Krümmungshalbmesser ein **Maximum** R' und in einer andern ein **Minimum** R'', nämlich wenn die Tangente der Normalschnittkurve in P parallel der grossen resp. kleinen Axe der Indicatrice geworden ist. Man nennt diese speziellen Krümmungshalbmesser R' und R'' die **Hauptkrümmungshalbmesser** und die zugehörigen Normalschnitte die **Hauptnormalschnitte**; das reciproke Produkt der beiden Hauptkrümmungshalbmesser heisst das **Krümmungsmass** der Fläche in dem Punkt P. Zwei Normalschnitte in P, deren Tangenten von P zu zwei konjugierten Durchmessern der Indicatrice parallel gehen, also selbst zwei **konjugierte Flächentangenten** repräsentieren, nennt man **konjugierte Normalschnitte.** Jedem Durchmesser der Indicatrice entspricht eine bestimmte Lage des Krümmungsmittelpunkts auf der Flächennormalen von P; und speziell die Krümmungsmittelpunkte M_m und M_n auf derselben, welche den **Hauptaxen** der Indicatrice zugeordnet sind, stellen zwei äusserste Lagen vor. In welcher Weise auf der Flächennormalen der Krümmungsmittelpunkt seine Lage ändert, wenn die Ebene des Normalschnitts um die Flächennormale sich dreht, wird im nächsten Kapitel näher betrachtet werden.

Die obige Beziehung zwischen den Krümmungshalbmessern R der Normalschnitte und den Durchmessern der Indicatrice gestatten nun offenbar, die Länge des Krümmungshalbmessers R eines beliebigen Normalschnitts zu konstruieren, wenn die Krümmungshalbmesser R_1 und R_2 von irgend zwei konjugierten Normalschnitten, speziell etwa die beiden Hauptkrümmungshalbmesser R' und R'' und natürlich die Lage des betreffenden beliebigen Normalschnitts, also der Winkel seiner Ebene gegen eine Hauptnormalschnittebene gegeben ist. Auch ein algebraisches Gesetz, das die Werte der Krümmungshalbmesser der Normalschnitte mit gemeinschaftlicher Flächennormalen in P untereinander verbindet, wird sich leicht ableiten lassen. Wir wollen dieses Letztere zunächst erledigen.

3. OC und OD seien (Fig. 55) irgend zwei konjugierte Durchmesser der Indicatrice (als welche wir etwa gerade den Schnitt 2. Ordnung K_3, Fig. 54, Seite 73, betrachten können). OQ sei ein beliebiger dritter Durchmesser, welcher gegen OC und OD resp. um die Winkel β und α geneigt ist, so ist bei gegebenem OC und OD der Halbdurchmesser OQ durch die Gleichung bestimmt:

$$\frac{\sin^2\alpha}{OC^2} \pm \frac{\sin^2\beta}{OD^2} = \frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{OQ^2}, \text{*)}$$

Fig. 55.



wobei sich das obere Zeichen auf eine elliptische, das untere auf eine hyperbosche Indicatrice bezieht. Die Quadrate dieser Halbdurchmesser OC, OD, OQ der Indicatrice sind, wie wir wissen, proportional den Krümmungshalbmessern R_1, R_2, R der zugehörigen Normalschnitte; somit wird, mit Weglassung des Proportionalitätsfaktors,

$$\frac{\sin^2\alpha}{R_1} \pm \frac{\sin^2\beta}{R_2} = \frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{R} \tag{I}$$

Damit kann der Krümmungshalbmesser R eines beliebigen Normalschnitts berechnet werden, wenn diejenigen R_1 und R_2 zweier konjugierter Normalschnitte gegeben sind; α und β sind die Neigungswinkel des beliebigen Normalschnitts mit dem Krümm-

---

*) Wenn nämlich (Fig. 55) QR die Halbsehne durch Q parallel dem Halbdurchmesser OC darstellt, so ist bekanntlich

$$\pm\frac{OR^2}{OD^2} + \frac{QR^2}{OC^2} = 1.$$

Nun ist $\measuredangle COQ = \measuredangle OQR$ und es verhält sich

$$OR : QR = \sin\beta : \sin\alpha; \quad QR : OQ = \sin\alpha : \sin(\alpha+\beta),$$

also wird:

$$\pm\frac{QR^2 . \sin^2\beta}{OD^2} + \frac{QR^2 . \sin^2\alpha}{OC^2} = \sin^2\alpha = \frac{QR^2 . \sin^2(\alpha+\beta)}{OQ^2},$$

oder:

$$\frac{\sin^2\alpha}{OC^2} \pm \frac{\sin^2\beta}{OD^2} = \frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{OQ^2}.$$

ungshalbmesser R gegen die Normalschnitte mit den Krümmungshalbmessern R_2 resp. R_1.

Sind die beiden konjugierten Durchmesser OC und OD der Indicatrice die beiden Hauptaxen derselben, so ist $\alpha + \beta = 90^0$, und man hat:

$$\frac{\sin^2\alpha}{R'} \pm \frac{\cos^2\alpha}{R''} = \frac{1}{R}. \tag{II}$$

R' und R'' sind die Krümmungshalbmesser der beiden — auf einander senkrechten — Hauptnormalschnitte, deren Tangenten in P parallel den Hauptaxen der Indicatrice gehen, also die Hauptkrümmungshalbmesser. Diese speziellere **Beziehung (II) zur Berechnung des Krümmungshalbmessers R eines beliebigen Normalschnitts aus den Hauptkrümmungshalbmessern R' und R''** ist unter dem Namen des **Eulerschen Satzes** bekannt; α **ist der Neigungswinkel des beliebigen Normalschnitts gegen die Ebene desjenigen Hauptnormalschnitts, welcher den Hauptkrümmungshalbmesser R'' besitzt.**

Wir haben ferner schon im I. Teil eine weitere Gleichung zwischen den Quadraten der Durchmesser eines Mittelpunktskegelschnitts benützt. Die Summe (Differenz) der Quadrate irgend zweier konjugierter Durchmesser ist konstant und folglich gleich der Summe (Differenz) der Quadrate der beiden Hauptaxen. Ferner ist das Produkt ihrer Quadrate multipliziert mit dem Quadrat des Sinus des von den beiden konjugierten Durchmessern eingeschlossenen Winkels $(\alpha + \beta)$ ebenfalls konstant, also gleich dem Produkt der Quadrate der Hauptaxen:

$$OC^2 \pm OD^2 = const. \quad ; \quad OC^2 . OD^2 . \sin^2(\alpha + \beta) = const.$$

Dasselbe gilt für die Indicatrice. Also folgt: es ist die Summe (Differenz) der Krümmungshalbmesser je zweier Normalschnitte, deren Tangenten in P zu zwei konjugierten Durchmessern der Indicatrice parallel sind, konstant und gleich der Summe (Differenz) der Hauptkrümmungshalbmesser. Ferner ist das Produkt der Krümmungshalbmesser von zwei solchen konjugierten Normalschnitten, multipliziert mit dem Quadrat des Sinus des Neigungswinkels zwischen beiden Ebenen konstant und gleich dem Reciproken des Flächenkrümmungsmasses in P:

$$R_1 \pm R_2 = const. = R' \pm R'' \tag{III}$$

$$R_1 . R_2 . \sin^2(\alpha + \beta) = const. = R' . R'' \tag{IV}$$

Um künftig nicht mehr die elliptischen und hyperbolischen Indicatricen unterscheiden, also von Summe (Differenz) der Krümmungshalbmesser zu P reden zu müssen, wollen wir auf der Flächennormale von P aus die Krümmungshalbmesser nach der einen Seite hin als positiv, nach der andern als negativ gerechnet voraussetzen; wenn dann von zwei Krümmungshalbmessern der eine nach der positiven, der andere nach der negativen Seite zu liegen kommt, so verstehen wir unter ihrer (algebraischen) Summe die Differenz ihrer absoluten Längen.

Nehmen wir weiter in der Gleichung (II) der Reihe nach $\alpha = 45^0$, $45^0 + \alpha$, $45^0 - \alpha$ und bezeichnen die Krümmungshalbmesser der zugehörigen Normalschnitte mit ϱ_0, ϱ', ϱ'', so wird jene Gleichung der Reihe nach

$$\frac{2}{\varrho_0} = \frac{1}{R'} \pm \frac{1}{R''}\,;\quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{\sin^2(45^0+\alpha)}{R'} \pm \frac{\cos^2(45^0+\alpha)}{R''}\,;$$

$$\frac{1}{\varrho''} = \frac{\cos^2(45^0+\alpha)}{R'} \pm \frac{\sin^2(45^0+\alpha)}{R''}\,;\ \text{woraus}$$

$$\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} = \frac{1}{R'} \pm \frac{1}{R''} = \frac{2}{\varrho_0} = \mathit{const.} \qquad \text{(V)}$$

D. h., die Summe der reciproken Krümmungshalbmesser je zweier Normalschnitte, deren Ebenen gleich geneigt sind gegen denjenigen Normalschnitt, welcher den Winkel der Hauptnormalschnitte halbiert, ist konstant und gleich der Summe der reciproken Hauptkrümmungshalbmesser. Dabei sagt die Gleichung $\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} = \frac{2}{\varrho_0}$ noch weiterhin aus: Auf der Normalen von P bilden die Krümmungsmittelpunkte von je zwei solchen Normalschnitten jedesmal vier harmonische Punkte mit dem Flächenpunkt und dem Krümmungsmittelpunkt des Normalschnitts, der den Winkel der Hauptnormalschnitte halbiert.

Endlich setzen wir in Gleichung (II) noch $\alpha = \vartheta$ und $\alpha = 90 + \vartheta$, so wird, wenn die zugehörigen Krümmungshalbmesser mit r_1 und r_2 bezeichnet sind,

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\sin^2\vartheta}{R'} \pm \frac{\cos^2\vartheta}{R''}\,;\quad \frac{1}{r_2} = \frac{\cos^2\vartheta}{R'} \pm \frac{\sin^2\vartheta}{R''},\ \text{also wieder}$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \mathit{const.} = \frac{1}{R'} \pm \frac{1}{R''} = \frac{2}{\varrho_0}.$$

Oder die Summe der reciproken Krümmungshalbmesser irgend zweier Normalschnitte, deren Ebenen auf einander senkrecht stehen, ist ebenfalls konstant und gleich der Summe der Hauptkrümmungen. Dies war vorauszusehen; denn denkt man sich in der Indicatrice zu irgend einem Durchmesser A erstens den darauf senkrechten Durchmesser B, zweitens denjenigen C konstruiert, welcher gleich geneigt ist gegen den Durchmesser, der den Winkel der Hauptaxen der Indicatrice halbiert, wie der Durchmesser A, so sind B und C gleich gross.

Diese Ergebnisse sind darnach kurz zusammengestellt die folgenden.

Resultat:

Dreht sich ein Normalschnitt um eine feste Normale eines Punktes P einer Fläche 2. Ordnung, so gehört zu jeder Lage des

Normalschnitts ein bestimmter Krümmungshalbmesser desselben in Beziehung auf P. Die Länge des Krümmungshalbmessers ist proportional dem Quadrat des entsprechenden Durchmessers der Indicatricenkurve, welcher parallel der Tangente des Normalschnitts in P ist. Dabei ist die Indicatrice der Fläche 2. Ordnung durch die Schnittkurve 2. Ordnung der gegebenen Fläche mit einer beliebigen, zu der Tangentialebene in P parallelen Schnittebene dargestellt.

Für irgend zwei konjugierte Normalschnitte, d. h. für solche, deren Tangenten in P zu zwei konjugierten Durchmessern der Indicatrice parallel gehen oder zwei konjugierte Flächentangenten vorstellen, ist die Summe ihrer Krümmungshalbmesser R_1 und R_2 konstant und gleich der Summe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser R' und R''.

Die Normalschnitte der letzteren, die Hauptnormalschnitte, welche parallel den Hauptaxen der Indicatrice sind und aufeinander senkrecht stehen, geben das absolute Maximum resp. Minimum aller Krümmungshalbmesser.

Der Krümmungsradius R eines beliebigen Normalschnitts hängt mit denjenigen R_1 und R_2 zweier konjugierter Normalschnitte und speziell mit den beiden Hauptkrümmungshalbmessern R' und R'' durch das in den Gleichungen (I) und (II) ausgedrückte Gesetz zusammen.

Die Summe der Krümmungen $\frac{1}{r_1}$ und $\frac{1}{r_2}$ irgend zweier aufeinander senkrechter Normalschnitte ist konstant und gleich der Summe der Krümmungen der Hauptnormalschnitte. Ebenso ist die Summe der Krümmungen von je zwei solchen Normalschnitten konstant, deren Ebenen gleich geneigt sind gegen die Ebene des Normalschnitts, welcher den Winkel zwischen den Hauptnormalschnitten halbiert.

Die Krümmungsmittelpunkte irgend eines Paars von Normalschnitten der letztgenannten Art bilden auf der Flächennormalen von P jedesmal eine harmonische Punktreihe mit dem Flächenpunkt P und dem Krümmungsmittelpunkt desjenigen Normalschnitts, dessen Ebene den Winkel der beiden Hauptnormalschnitte halbiert.

Die Gesamtheit der Krümmungsmittelpunkte aller derartiger Paare von Normalschnitten erzeugt daher auf der Flächennormalen eine Involution, deren Doppelpunkte der Flächenpunkt P und der ebengenannte Krümmungsmittelpunkt des Normalschnitts sind, dessen Ebene gegen einen Hauptnormalschnitt um 45^0 geneigt ist.

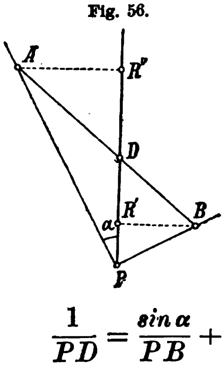
Man kann noch zeigen, dass, wenn die Krümmungshalbmesser von drei bestimmten Normalschnitten des Punktes P gegeben sind, diejenigen aller übrigen, also auch die Hauptkrümmungshalbmesser bestimmt werden können*). Auf diese und andere Beziehungen gehen wir hier nicht näher ein, sondern wollen zum Schluss die Konstruktion**) des Krümmungshalbmessers eines beliebigen Normalschnitts aus den Hauptkrümmungshalbmessern kurz durchführen, auf welche schon oben hingewiesen worden war.

4. Konstruktion des Krümmungshalbmessers eines beliebigen Normalschnitts aus den Hauptkrümmungshalbmessern.

Auf der Flächennormalen von P seien R' und R'' die Hauptkrümmungsmittelpunkte. Lege (Fig. 56) — innerhalb einer beliebigen Zeichnungsebene durch die Normale —, an die letztere in P den Winkel α an, welchen die Ebene des beliebigen Normalschnitts gegen die Ebene des Hauptnormalschnitts mit dem Krümmungshalbmesser PR'' bildet, und ziehe in R' und R'' die Senkrechten zur Normalen. Ein Lot auf dem freien Schenkel des Winkels α in Punkt P treffe die Senkrechte $R'B$ in dem Punkte B. Verbinde B mit dem Schnittpunkt A des freien Schenkels von α und der Senkrechten in Punkt R''. Die Verbindungslinie begegnet der Flächennormalen von P in dem Krümmungsmittelpunkt D des beliebigen Normalschnitts.

Beweis. Das rechtwinklige Dreieck ABP ist gleich der Summe der Dreiecke PAD und PBD; nun ist:

Fig. 56.



$$\triangle ABP = \frac{1}{2} . PA . PB,$$

$$\triangle PAD = \frac{1}{2} . PA . PD . \sin\alpha,$$

$$\triangle PBD = \frac{1}{2} . PB . PD . \cos\alpha; \text{ somit ist}$$

$$PA . PB = PA . PD . \sin\alpha + PB . PD . \cos\alpha.$$

Dividiert man mit $PA . PB . PD$, so wird:

$$\frac{1}{PD} = \frac{\sin\alpha}{PB} + \frac{\cos\alpha}{PA}; \text{ oder, da } PB = \frac{PR'}{\sin\alpha} \text{ und } PA = \frac{PR''}{\cos\alpha},$$

$$\frac{1}{PD} = \frac{\sin^2\alpha}{PR'} + \frac{\cos^2\alpha}{PR''}.$$ Die Vergleichung mit der Eulerschen Gleichung (II) oben zeigt die Richtigkeit der Konstruktion.

---

*) Vgl. darüber Weyr, mathem. Annal. Bd. 3.

**) Vgl. Mannheim, Géométrie descriptive, 1880. pag. 281.

Kapitel 11.

Betrachtung der einzelnen Flächen 2. Ordnung in Beziehung auf die Krümmungsverhältnisse.

Zur Unterscheidung der einzelnen Flächen 2. Ordnung sind verschiedene Hauptprinzipien denkbar.

Für unsere Zwecke möchte es sich empfehlen, die Beschaffenheit der Tangentialebenen oder der Punkte der Fläche als Hauptprinzip voranzustellen. Denken wir uns einen Punkt P einer Fläche 2. Ordnung und die Tangentialebene in demselben. Bekanntlich schneiden alle Ebenen parallel zu dieser Tangentialebene die Fläche in ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten; die Mittelpunkte liegen alle auf dem Durchmesser von P. Der Punkt P selbst ist dann als einer dieser Kegelschnitte, aber als einer von verschwindenden Dimensionen anzusehen. Man nennt, wie schon früher kurz erwähnt, einen Flächenpunkt P einen **elliptischen oder hyperbolischen oder parabolischen Punkt** und analog die Tangentialebene in P, je nachdem die Schnittkurven parallel der Tangentialebene in P Ellipsen oder Hyperbeln oder Parabeln sind. Parabolische Punkte kommen nur bei den Kegelflächen vor, von denen wir zunächst absehen. Weiter ist bekannt, dass die Punkte einer und derselben Fläche 2. Ordnung sämtlich denselben Charakter haben; wenn irgend **ein** Punkt einer solchen Fläche z. B. hyperbolisch ist, so sind alle Punkte derselben hyperbolisch.

I. Die Flächen mit elliptischen Punkten.

Diese enthalten keine geradlinigen Erzeugenden. Die Tangentialebene in einem Punkt P einer solchen Fläche liegt ganz auf der einen Seite der Fläche; letztere ist folglich nur nach der einen Seite der Tangentialebene gekrümmt.

Die unendlich ferne Ebene kann eine Fläche mit elliptischen Punkten entweder in einem reellen Kegelschnitt oder in einem zusammenfallenden Kegelschnitt (einem imaginären Linienpaar mit reellem Doppelpunkt) oder in einem imaginären Kegelschnitt schneiden. Darnach unterscheidet man drei Flächen dieser Art.

1. Wenn die unendlich ferne Ebene in einem reellen Kegelschnitt schneidet, so hat man ein **zweimanteliges Hyperboloid.**

Der Mittelpunkt, der Pol der unendlich fernen Ebene, liegt im Endlichen. Er ist der Mittelpunkt des Asymptotenkegels, welcher den unendlich fernen Kegelschnitt der Fläche projiziert. Von den Hauptschnitten sind zwei Hyperbeln, der dritte ist ein imaginärer Kegelschnitt. Sämtliche Punkte des zweischaligen Hyperboloids liegen in dem inneren Raum des Asymptotenkegels.

Die Schnitte der Fläche mit einer beliebigen Ebene sind teils Hyperbeln, teils Ellipsen, teils Parabeln. Und wenn sich eine Schnittebene um eine feste Tangente G der Fläche dreht, so werden im allgemeinen Hyperbeln und Ellipsen, und bei einer einzigen Stellung der Ebene eine Parabel aus der Fläche herausgeschnitten.

2. In dem Fall, wo die unendlich ferne Ebene die Fläche berührt, haben wir ein **elliptisches Paraboloid.**

Eine Ebene schneidet dasselbe im allgemeinen nach Ellipsen; hyperbolische Schnitte sind hier nicht möglich. Geht aber speziell eine Ebene durch den Berührungspunkt der Fläche mit der unendlich fernen Ebene, so schneidet sie nach einer Parabel. Alle Geraden, welche durch diesen unendlich fernen Berührungspunkt gehen, heissen **Durchmesser**; alle Durchmesser sind parallel. Eine einzige Ebene steht senkrecht auf der Richtung der Durchmesser und ist zugleich Tangentialebene der Fläche; es ist die Berührungsebene im **Scheitel** des elliptischen Paraboloids. Die Verbindungslinie des Scheitels mit dem Berührungspunkt der unendlich fernen Ebene ist die **Axe** der Fläche. Als der Mittelpunkt der Fläche ist der Berührungspunkt der Fläche mit der unendlich fernen Ebene aufzufassen. Die beiden Hauptschnitte sind zwei Parabeln, deren Öffnungen beide nach derselben Seite hin liegen.

Ein Ebenenbüschel, das zur Axe irgend eine Tangente der Fläche hat, schneidet letztere im allgemeinen nach Ellipsen; nur eine Ebene des Büschels, die Durchmesserebene, nach einer Parabel.

3. Das **Ellipsoid** endlich ist diejenige Fläche mit elliptischen Punkten, welche von der unendlich fernen Ebene in einem imaginären Kegelschnitt geschnitten wird, also mit allen ihren Punkten im Endlichen liegt.

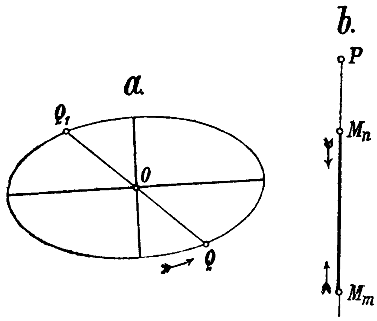
Diese Nichtregelflächen oder diese Flächen mit elliptischen Punkten sind, wie bemerkt, überall **nur** konkav, also nur nach der einen Seite der Berührungsebene in einem Punkt P gekrümmt.

Zu jeder Tangente G in P gehört eine bestimmte **Osculationskugel** der Art, dass der Osculationskreis irgend eines Schnitts, welcher durch diese Tangente geführt ist, nichts anderes ist, als der Schnittkreis der betreffenden Schnittebene und der Kugel.

Für jede Tangente G in einem Punkt einer Nichtregelfläche liegt die Krümmungskugel stets nach derselben Seite der Tangentialebene hin. Dreht sich ferner eine solche Tangente in P um den Punkt P innerhalb der Tangentialebene, und denkt man sich in jeder Lage durch die Tangente G die Normalschnittebene gelegt, so variiert der Krümmungshalbmesser des Normalschnitts in Beziehung auf P wie das Quadrat des zu G parallelen Durchmessers der Indicatrice.

Es ist interessant, zu beobachten, in welcher Weise dies näher geschieht; zunächst für die vorliegende Gruppe der Flächen mit elliptischen Punkten. Wir wollen also zusehen, **wie der Mittelpunkt R der Osculationskugel oder der Krümmungsmittelpunkt des Normalschnitts auf der Normale des Flächenpunkts P wandert, wenn die Tangente G in der Tangentialebene um P oder der parallele Durchmesser OQ der Indicatrice um deren Mittelpunkt O sich dreht.**

Fig. 57.



Die Indicatrice ist hier eine Ellipse. Der bewegliche Durchmesser OQ der Indicatrice gehe von deren kleiner Halbaxe aus (Fig. 57 *a*); so beginnt der bewegliche Krümmungsmittelpunkt R auf der Flächennormalen (Fig. 57 *b*) in M_n. Dabei ist PM_n der kleinere Hauptkrümmungshalbmesser, das absolute Minimum aller Krümmungsradien. Nähert sich der Durchmesser OQ der grossen Axe, so nähert sich der Punkt R, indem er sich auf der Normale von dem Flächenpunkt P entfernt, dem Grenzpunkt M_m; M_m ist der Hauptkrümmungsmittelpunkt des Hauptnormalschnitts, welchem das absolute Maximum der Krümmungshalbmesser zugehört. Geht OQ in der gleichen Richtung weiter, so kehrt R von M_m in der Richtung nach P hin zurück. Und wenn endlich OQ wieder in die Richtung der kleinen Axe der Indicatricen-Ellipse gelangt, so fällt R wieder mit M_n zusammen.

Die Bewegung des Krümmungsmittelpunkts R ist also während der Drehung des Normalschnitts um die Flächennormale auf die endliche Strecke zwischen M_n und M_m beschränkt.

Und da der Krümmungshalbmesser keines Normalschnitts einer eigentlichen Fläche 2. Ordnung Null ist, also R nicht durch P hindurchgeht, **liegen diese Grenzpunkte M_n und M_m auf derselben Seite der Tangentialebene von P.**

II. Wir kommen zweitens zu

den Flächen 2. Ordnung mit hyperbolischen Punkten oder den Regelflächen.

Eine solche enthält zwei Scharen von unendlich vielen Geraden, welche in der Fläche liegen. Jede Gerade der einen Schar schneidet alle

Geraden der andern; aber keine zwei Geraden derselben Schar begegnen einander. Und zwar:

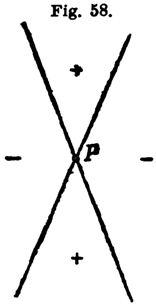
1. wenn die unendlich ferne Ebene die Regelfläche in einem (reellen) Kegelschnitt schneidet, so liegt ein **einfaches Hyperboloid** vor. Der Kegel, durch welchen die unendlich ferne Schnittkurve aus dem Mittelpunkt der Fläche, dem Pol der unendlich fernen Ebene projiziert wird, ist der **Asymptotenkegel** des Hyperboloids. Jede geradlinige Erzeugende ist einer Mantellinie dieses Kegels parallel. Eine beliebige Ebene schneidet die Regelfläche und den Asymptotenkegel nach ähnlichen Kegelschnitten. Die drei Hauptschnitte des Hyperboloids sind zwei Hyperbeln und eine Ellipse.

Ein Ebenenbüschel, welches durch eine beliebige Tangente der Fläche gelegt ist, schneidet aus der Fläche im allgemeinen Ellipsen und Hyperbeln; nur eine der Ebenen des Büschels eine Parabel heraus. Fällt speziell die Tangente in der Tangentialebene von P mit einer der geradlinigen Erzeugenden zusammen, so artet die Schnittkurve in zwei Geraden aus.

2. Die Regelfläche ist ein **hyperbolisches Paraboloid,** falls der Mittelpunkt speziell im Unendlichen liegt, die unendlich ferne Ebene selbst ihren Pol enthält. Diese letztere Ebene ist dann als Berührungsebene zu betrachten. Der unendlich ferne Kegelschnitt reduziert sich auf den unendlich fernen Berührungspunkt oder vielmehr auf ein reelles Paar von unendlich fernen geraden Erzeugenden mit diesem Berührungspunkt als ihrem Schnittpunkt. Die drei Hauptebenen sind die zweier Parabeln und die unendlich ferne Ebene. Die Öffnungen dieser zwei Parabeln liegen aber, nicht wie bei dem elliptischen Paraboloid nach derselben, sondern nach entgegengesetzter Seite.

Bei diesen Regelflächen 2. Ordnung ist die Tangentialebene in irgend einem Punkt P diejenige Ebene, welche durch die zwei in P sich schneidenden, geradlinigen Erzeugenden gelegt ist. Die Fläche wird also von jeder Tangentialebene geschnitten, — eben nach dem erwähnten Geradenpaar; sie liegt folglich auf der einen und der andern Seite der Berührungsebene. Die Regelfläche ist, nach Art einer Sattelfläche, konkav—konvex gekrümmt.

Fig. 58.



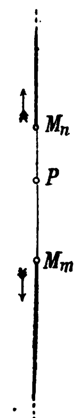
Und zwar liegen (Fig. 58) die Tangenten, durch welche Normalschnitte mit konkaver Krümmung geführt werden können, in dem einen Winkelraum der beiden geradlinigen Erzeugenden durch P, diejenigen mit konvexer Krümmung der Normalschnitte im andern Winkelraum

Auch hier wollen wir zusehen, wie die zu jeder Tangente in P gehörige Osculationskugel variiert, falls diese Tangente in der Tangentialebene um P, und mit derselben der ihr parallele Durchmesser OQ der Indicatrice um deren Mittelpunkt sich dreht.

Die Indicatrice ist jetzt eine Hyperbel. Die Bewegung des Durchmessers OQ beginne von der reellen Axe der Hyperbel aus. Dieser Lage des Durchmessers oder dieser Richtung des Normalschnitts entspricht auf der Flächennormalen von P eine Grenzlage M_m des Krümmungsmittelpunkts R; PM_m ist der betreffende Hauptkrümmungshalbmesser und M_m liegt dabei auf derjenigen Seite des Flächenpunkts P, nach der hin der zugehörige (Haupt-) Normalschnitt gekrümmt ist.

Dreht sich der Durchmesser OQ nun um den Mittelpunkt O der Indicatrice, so wird OQ grösser; der Krümmungsmittelpunkt R rückt auf der Flächennormalen (Fig. 59) weiter, indem er sich von P entfernt. Nach einiger Zeit wird der Durchmesser OQ in die Richtung der einen Asymptote gelangt sein. Der zugehörige Krümmungshalbmesser PR ist dann unendlich gross geworden; der Normalschnitt geht nämlich in dieser Lage durch die eine der beiden geradlinigen Erzeugenden der (Regel-) Fläche, welche sich in P kreuzen und ganz in der Fläche liegen.

Fig. 59.



Wenn sich OQ in demselben Sinne weiter dreht, so wird der Durchmesser OQ imaginär; seine absolute Länge ist gleich dem reellen Durchmesser der konjugierten Hyperbel, welche dieselben Asymptoten besitzt. Das Quadrat des (imaginären) Durchmessers ist negativ; nach unserer früheren Festsetzung bedeutet dies, dass die Öffnung des betreffenden Normalschnitts nach der andern Seite der Tangentialebene gerichtet ist; der zugehörige Krümmungsmittelpunkt liegt auf der andern Seite von P auf der Flächennormalen.

Der bewegliche Punkt R ist also durch Unendlich auf die andere Seite der Normale, in Beziehung auf P, übergegangen und nähert sich, in der Richtung nach P zu, hier wieder einer bestimmten Grenzlage M_n, welche derjenigen Richtung des beweglichen Durchmessers OQ entspricht, die mit der imaginären Axe unserer Indicatrice (oder der reellen Axe der konjugierten Hyperbel) zusammenfällt. PM_n ist der andere Hauptkrümmungshalbmesser.

Bei der weiteren Bewegung des Durchmessers OQ um O kehrt der Punkt R auf der Normalen auf demselben Weg zurück, indem er sich wieder von P entfernt, durch Unendlich hindurch auf die erstgenannte Seite geht und in M_m seinen Ausgangspunkt erreicht. Während dessen ist der Durchmesser OQ mit der andern Asymptote der Indicatrice zusammengefallen, d. h. der sich drehende Normalschnitt durch die zweite der beiden geradlinigen Erzeugenden der Regelfläche gegangen; und von da an näherte sich der Durchmesser OQ wieder der Richtung der reellen Axe der Indicatrice.

Man sieht also, dass **bei den Flächen 2. Ordnung mit hyper-**

bolischen Punkten die Bewegung des Krümmungsmittelpunkts R auf der Flächennormalen nur auf der uneigentlichen Strecke $M_m M_n$, welche den Punkt Unendlich in sich schliesst, möglich ist. Die beiden Hauptkrümmungshalbmesser PM_m und PM_n geben auch hier das absolute Maximum und Minimum der Krümmungshalbmesser; aber **die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte M_m und M_n liegen auf verschiedenen Seiten von P auf der Normalen.**

Die Kegelflächen 2: Ordnung, die als die Flächen 2. Ordnung mit parabolischen Punkten zu betrachten sind, wollen wir hier nicht näher besprechen. Der Meusniersche Satz ist für die Kegelflächen zuerst bewiesen worden; der Eulersche Satz erleidet insofern eine Modifikation, als ein Hauptkrümmungshalbmesser unendlich wird; nämlich derjenige, dessen Normalschnitt in die Richtung der Kegelmantellinie fällt.

Nur einen einfachen Satz über **Rotationsflächen 2. Ordnung** wollen wir noch anfügen:

Führt man in einer Rotationsfläche 2. Ordnung senkrecht zur Rotationsaxe einen beliebigen Schnitt, so ist die Schnittkurve ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Rotationsfläche liegt.

In einem Punkt P der Fläche denken wir uns eine Tangente G, welche senkrecht zur Rotationsaxe liegt, und durch diese Tangente zwei Schnittebenen geführt, die eine senkrecht zur Tangentialebene in P, die andere senkrecht zur Rotationsaxe. Die erstere Ebene schneidet die Fläche nach dem Normalschnitt von G, die zweite nach einem schiefen Schnitt, nämlich nach einem Kreis mit dem Mittelpunkt auf der Rotationsaxe.

Wir können jetzt umgekehrt den Meusnierschen Satz benützen, um von dem uns bekannten Krümmungsmittelpunkt des schiefen Schnitts — dem Kreismittelpunkt — aus auf denjenigen des Normalschnitts einen Schluss zu ziehen. Der Krümmungshalbmesser des schiefen Schnitts ist die Projektion des Krümmungshalbmessers des Normalschnitts auf die Ebene des schiefen Schnitts; die Rotationsaxe steht aber senkrecht auf dem schiefen Kreisschnitt durch G; somit liegt auch der Krümmungsmittelpunkt des Normalschnitts auf der Rotationsaxe.

Satz: Wenn man an einer Rotationsoberfläche durch eine Tangente irgend eines Parallelkreises den Normalschnitt führt, so ist der Krümmungsmittelpunkt desselben der Durchstossungspunkt seiner Ebene mit der Rotationsaxe.

Kapitel 12.

Über die Punkte auf Flächen 2. Ordnung, in welchen die Krümmung aller Normalschnitte konstant ist. — Fokalkegelschnitte.

Wir sahen, dass die Krümmungssradien aller Normalschnitte, welche die Flächennormale in einem Punkt P gemeinschaftlich haben, proportional den Quadraten der parallelen Durchmesser der Indicatricenkurve sind.

Beschränken wir uns auf die nichtausartenden Flächen 2. Ordnung, so ist die Indicatrice entweder eine Ellipse oder Hyperbel. Wenn es also vorkommt, dass die Ellipse speziell zu einem Kreise wird, so haben auch die Hauptkrümmungshalbmesser R' und R'' gleiche Grösse. Der Eulersche Satz, welcher zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers R eines beliebigen Normalschnitts aus den Hauptkrümmungshalbmessern dient, vereinfacht sich dann zu:

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin^2 \alpha}{R'} + \frac{\cos^2 \alpha}{R'} = \frac{1}{R'}.$$

Alle Normalschnitte des Punktes P haben, unabhängig von ihrer Richtung, dieselbe Krümmung.

Stellen wir uns darnach die Aufgabe, **die Punkte einer Fläche 2. Ordnung zu suchen, für welche die Krümmungen aller Normalschnitte gleich und gleichsinnig sind,** so ist dieselbe identisch mit der folgenden: die Richtungen einer Ebene zu finden, welche eine Fläche 2. Ordnung nach Kreisen schneidet.

Wenn irgend eine Ebene nach einem Kreise schneidet, so findet dasselbe für alle parallelen Ebenen statt. Der Punkt P, dessen Tangentialebene parallel diesen Ebenen ist, kann folglich als ein unendlich kleiner Kreis angesehen werden. Man nennt solche Punkte, deren **Indicatrix kreisförmig** ist, deren Normalschnitte deshalb gleiche und gleichsinnige Krümmung besitzen, **Kreispunkte,** auch **Umbilicalpunkte** oder **Nabelpunkte** (umbilicus, latein. Nabel). Diese Nullkreise bilden den Übergang von den reellen zu den imaginären Kreisschnitten.

Die erwähnte Aufgabe, die Lagen der Kreispunkte oder weiterhin die Richtungen der Kreisschnitte einer Fläche 2. Ordnung zu bestimmen, wird in den Lehrbüchern der synthetischen Geometrie eingehend behandelt, so dass wir uns hier darauf beschränken können, im wesentlichen die Resultate anzugeben *).

---

*) Vgl. darüber besonders H. Schröter, Theorie der Oberflächen 2. Ordnung und der Raumkurven 3. Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde. 1880.

1. Die Regelflächen, das **einfache Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid,** sind Flächen mit hyperbolischen Punkten, also mit hyperbolischer Indicatrice. Da eine Hyperbel niemals zu einem Kreise degenerieren kann, so **kommen bei den Regelflächen 2. Ordnung Kreispunkte nicht vor.** Übrigens weist das einmantelige Hyperboloid zwei verschiedene Stellungen einer Ebene auf, welche nach einem Kreise schneidet. Diese beiden Stellungen enthalten die grössere der beiden reellen Hauptaxen und sind symmetrisch zu der dieser Hauptaxe konjugierten Hauptebene gelegen.

2. Die Flächen mit elliptischen Punkten, das **Ellipsoid, zweimantelige Hyperboloid** und **elliptische Paraboloid,** besitzen sämtlich zwei reelle Stellungen für eine Ebene, welche nach einem Kreise schneidet.

Beim Ellipsoid gehen sie durch diejenige Hauptaxe, welche in Beziehung auf die Grösse die mittlere ist; beim zweischaligen Hyperboloid durch diejenige der beiden imaginären Hauptaxen, deren absolute Länge die grössere ist. Ein Kreispunkt ist ein Punkt, dessen Tangentialebene parallel diesen Kreisschnitten ist, also der Schnittpunkt der betreffenden Fläche mit dem zu einem Kreisschnitt konjugierten Durchmesser. Darnach **besitzt das Ellipsoid vier Kreispunkte,** welche in der Hauptebene durch die der Grösse nach kleinste und grösste Axe liegen und die Ecken eines Rechtecks bilden, dessen Seiten diesen Axen parallel laufen.

Ebenso finden sich **auf dem zweimanteligen Hyperboloid vier Kreispunkte.**

Das elliptische Paraboloid besitzt deren zwei. Sie liegen auf derjenigen Hauptparabel, deren Brennpunkt dem Scheitel zunächst liegt. (Das einschalige Hyperboloid besitzt deshalb keine Kreispunkte, weil die der Stellung der Kreisschnitte konjugierten Durchmesser die Fläche nicht treffen)

Auf den Kegelflächen, als den Flächen mit parabolischen Punkten, sind Kreispunkte nicht möglich, aus demselben Grund, wie bei den eigentlichen Regelflächen.

3. **Die Konstruktion der Kreispunkte** ergiebt sich aus dem Vorhergehenden sehr leicht. Z. B. beim Ellipsoid beschreibt man innerhalb der Hauptebene der grössten und kleinsten Axe um den Flächenmittelpunkt einen Kreis mit einem Radius gleich der mittleren Halbaxe. Dieser begegnet dem Hauptschnitt der vorhin genannten Hauptebene in den vier Kreispunkten. Und die zwei Ebenen, welche man durch die Kreispunkte und die der Grösse nach mittlere Hauptaxe legen kann. geben die beiden Stellungen der Kreisschnittebenen an.

4. Wenn man die Flächen mit elliptischen Punkten aus der speziellsten unter ihnen, der Kugel, durch **zentrische Collineation** ableitet, wird man ebenfalls in einfacher Weise auf die Konstruktion der Kreisschnitte und damit auf die Kreispunkte geführt. Über das Nähere vgl. u. A. Fiedler, Darstellende Geometrie § 98, und Peschka, Darstellende und projektive Geometrie, Band 3.

5. Bei den **Rotationsflächen** 2. Ordnung reduzieren sich die beiden Stellungen der Kreisschnitte auf eine einzige, nämlich diejenige, welche senkrecht zur Rotationsaxe steht; und die Kreispunkte fallen in die Scheitel der Fläche, welche die Endpunkte dieser Axe darstellen.

6. Die Kreispunkte stehen endlich in nächster Beziehung zu den sogenannten **Fokalkegelschnitten der Flächen 2. Ordnung.**

Wenn man sich die Aufgabe vorlegt, den **geometrischen Ort derjenigen Punkte zu bestimmen, von welchen aus an die Fläche 2. Ordnung gerade Berührungskegel, Rotationskegel, sich legen lassen,** so findet sich derselbe als bestehend aus drei Kegelschnitten, von denen aber nur zwei reell sind. Diese Kegelschnitte heissen die **Fokalkegelschnitte.** Die Tangente des Fokalkegelschnitts in irgend einem Punkt P desselben ist die Axe des geraden Kegels, welcher von diesem Punkt aus der Fläche umschrieben werden kann.

Es möge kurz gezeigt werden, wie die Fokalkegelschnitte für die verschiedenen Arten der Flächen 2. Ordnung näher liegen. Zunächst für die Flächen 2. Ordnung mit **endlichem Mittelpunkt**; also für **das Ellipsoid und das zwei- und einmantelige Hyperboloid:**

Die beiden reellen Fokalkurven 2. Ordnung sind immer die eine eine Ellipse, die andere eine Hyperbel und liegen in zwei zu einander rechtwinkligen Hauptebenen der Fläche; Fokalkegelschnitt und Hauptkegelschnitt in derselben Hauptebene sind immer konfokale Kegelschnitte.

Nennen wir a, b, c die der absoluten Grösse nach grösste, mittlere, kleinste Halbaxe der Fläche, so liegt in der ab-Ebene die **Fokalellipse,** konfokal zur Hauptschnittellipse mit den Hauptaxen a, b beim Ellipsoid und einschaligen Hyperboloid; resp. konfokal zur Hauptschnitthyperbel bei dem zweischaligen Hyperboloid.

In der ac-Hauptebene liegt die **Fokalhyperbel**, konfokal zur Hauptschnittellipse beim Ellipsoid und zur Hauptschnitt-Hyperbel beim ein- und zweimanteligen Hyperboloid. In der bc-Hauptebene, deren Hauptschnitt beim Ellipsoid eine Ellipse (b, c), beim einmanteligen Hyperboloid eine Hyperbel (b, c) und beim zweimanteligen ein imaginärer Kegelschnitt ist, ist die Fokalkurve 2. Ordnung imaginär.

Dabei sind die Scheitel der Fokalellipse (in der ab-Ebene) die Brennpunkte der Fokalhyperbel (in der ac-Ebene), und die Scheitel der Fokalhyperbel die Brennpunkte der Fokalellipse. Die Asymptoten der Fokalhyperbel sind die Brennstrahlen des Asymptotenkegels der Fläche 2. Ordnung.

Ferner bei den Paraboloiden, dem **elliptischen und hyperbolischen Paraboloid,** sind die Fokalkegelschnitte zwei Parabeln, die „Fokalparabeln“, welche in den zu einander rechtwinkligen Hauptebenen des Paraboloids liegen und mit den Hauptparabeln konfokal sind. Innerhalb der zu einander senkrechten Hauptebenen, welche sich nach der Hauptaxe des Paraboloids schneiden, ist der Brennpunkt der einen Fokalparabel der Scheitel der andern. Ihre Öffnungen sind nach entgegengesetzten Seiten gerichtet.

Näher liegen **beim hyperbolischen Paraboloid** beide Fokalparabeln der Art, dass die Rotationskegel, die von ihren Punkten an die Fläche gelegt werden können, sämtlich reell sind. Sie haben mit dem hyperbolischen Paraboloid keinen reellen Schnittpunkt gemein (ähnlich wie die Fokalkegelschnitte beim einfachen Hyperboloid).

Beim **elliptischen Paraboloid,** bei welchem ja ebenfalls die Fokalparabeln entgegengesetzt gerichtete Öffnungen besitzen, muss eine derselben die Fläche in zwei reellen Punkten schneiden; nämlich die Fokalparabel in derjenigen der beiden Hauptebenen durch die Hauptaxe, welche die Parabel enthält, deren Brennpunkt dem Scheitel näher liegt, als bei der andern.

Die reellen Schnittpunkte einer Fläche 2. Ordnung mit ihren Fokalkegelschnitten sind nun nichts anderes als die **Kreispunkte** derselben.

Daraus folgt wiederum wie früher, dass das Ellipsoid und zweimantelige Hyperboloid vier, das elliptische Paraboloid zwei, das hyperbolische Paraboloid und einmantelige Hyperboloid keine reellen Kreispunkte besitzt.

Der gerade Berührungskegel, welcher von jedem Punkt einer Fokalkurve an die Fläche 2. Ordnung zu legen ist, reduziert sich für die Kreispunkte auf die Tangentialebene. Die Tangente des Fokalkegelschnitts in einem solchen Punkt ist zugleich Flächennormale; also giebt die zur Tangente eines Fokalkegelschnitts senkrechte Ebene in einem Kreispunkt die Stellung der Kreisschnitte der Fläche an.

Man sieht so, dass drei verschiedene Wege auf diese Kreispunkte der Flächen 2. Ordnung zusammenführen, welche die Eigenschaft haben, dass alle Normalschnitte in denselben gleiche und gleichsinnige Krümmung besitzen.