This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

H
8
2

OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.

Nr. 83.

Systematische Entwicklung

der

ABHÄNGIGKEIT GEOMETRISCHER GESTALTEN

von einander,

mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität, und Reciprocität, etc.

von

JACOB STEINER.

2. Theil.

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG.

Ankündigung.

Der grossartige Aufschwung, welchen die Naturwissenschaften in unserer Zeit erfahren haben, ist, wie allgemein anerkannt wird,

Math 5158.32.2

SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE

SCIENCE CENTER LIBRARY

BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"

17 Feb. 1897.

Systematische Entwicklung

der

ABHÄNGIGKEIT GEOMETRISCHER GESTALTEN

von einander,

mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität, etc.

von

JACOB STEINER.

»En observant ce que les résultats particuliers
»avaient de commun entre eux, on est succes-
»sivement parvenu à des résultats fort étendus,
»et les sciences mathématiques sont à la fois
»devenues plus générales et plus simples.«

LAPLACE, Leçons à l'Ecole normale.

Zweiter Theil.

Herausgegeben

von

A. J. von Oettingen.

Mit 2 Tafeln und 2 Figuren im Text.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1896.

~~I. 4002. 38~~
Math 5158.32.2
HARVARD COLLEGE
FEB 17 1897
LIBRARY.
Farrar fund.

Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander.

Von

Jacob Steiner.

---

[127] **Drittes Kapitel.**

Erzeugung der Linien und der geradlinigen Flächen zweiter Ordnung durch projectivische Gebilde.

---

35. Bei der obigen Untersuchung projectivischer Gebilde wurde bei der schiefen Lage derselben die nähere Erforschung der Gesetze, welchen bei zwei Geraden A, A_1 die Projectionsstrahlen (§ 9, I), bei zwei ebenen Strahlbüscheln B, B_1 die Durchschnitte der entsprechenden Strahlenpaare, oder die durch entsprechende Strahlenpaare bestimmten Ebenen (wenn z. B. B, B_1 im Strahlbüschel D liegen (§ 33)), und bei zwei Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenenpaare (§ 31) unterworfen sind, absichtlich vermieden. Diese Untersuchung soll jetzt nachgeholt [128] werden. Sie führt, wie man sehen wird, zu den interessantesten und fruchtbarsten Eigenschaften der Linien zweiter Ordnung, oder der sogenannten Kegelschnitte, aus denen sich fast alle anderen Eigenschaften der letzteren, in einem umfassenden Zusammenhange, auf eine überraschend einfache und anschauliche Weise entwickeln lassen, nämlich sie zeigt die nothwendige Entstehung der Kegelschnitte aus den geometrischen Grundgebilden, und zwar zeigt sie dadurch zugleich eine sehr merkwürdige doppelte Erzeugung derselben durch projectivische Gebilde. Ebenso zeigt sie eine doppelte

Erzeugung der geradlinigen Flächen zweiten Grades, d. h. aller derjenigen Flächen zweiten Grades, in welchen gerade Linien liegen (d. i. Kegel, Cylinder, einfaches Hyperboloid, hyperbolisches Paraboloid, zwei Ebenen).

Wenn man bedenkt, mit welchem Scharfsinne die Mathematiker in älterer und neuerer Zeit die Kegelschnitte erforscht, und welche fast zahllose Menge von Eigenschaften sie an denselben entdeckt haben, so ist es in der That auffallend, dass die vorgenannten Eigenschaften so lange verborgen bleiben konnten, da doch aus ihnen, wie sich zeigen wird, fast alle bekannten Eigenschaften (nebst vielen neuen) wie aus einem Gusse hervorgehen, ja da sie gleichsam die innere Natur der Kegelschnitte vor unseren Augen aufschliessen. Denn wenn auch Eigenschaften bekannt sind, die den genannten nahe liegen, so finden sich doch, meines Wissens, letztere nirgends bestimmt ausgesprochen, in keinem Falle aber wurde ihre Wichtigkeit erkannt, die sie durch die gegenwärtige Entwickelung, wo sie zu Fundamentalsätzen erhoben werden, erhalten, übrigens bin ich auch nicht einmal durch jene auf diese geführt worden.

Da der hier vorgestreckte Zweck die Betrachtung [**129**] projectivischer Gebilde ist, so dürfen die Kegelschnitte hier noch nicht so ausführlich untersucht werden, als es mittelst der erwähnten Eigenschaften leicht geschehen könnte; sondern ich werde mich bloss auf einige wenige Entwickelungen beschränken, die entweder aus dem Gange der Betrachtung jener Gebilde nothwendig hervorgehen, oder die zur Erforschung derselben in der Folge dienlich sind. Später, nach vollendeter Durchführung der Untersuchung projectivischer Gebilde, sollen alsdann die Kegelschnitte einer umfassenden Untersuchung unterworfen werden, die sich auf ihre vorerwähnte Erzeugung durch projectivische Gebilde gründen wird, wobei letztere sodann nur als untergeordnete Hülfsmittel dienen, und wodurch die vorstehenden Behauptungen sollen gerechtfertigt werden.

Gegenseitiger Durchschnitt der Ebene und der Kegelfläche.

36. Zunächt soll hier eine kurze Betrachtung der eigentlichen Kegelschnitte, wie sich dieselben beim Kegel der unmittelbaren Anschauung darbieten, vorangeschickt und dabei vornehmlich auf einige Umstände, die für die synthetische

Untersuchung derselben sehr wesentlich sind, aufmerksam gemacht werden. Nur muss ich bemerken, dass diese Betrachtung, genau genommen, dem zweiten Abschnitte (folgendes Heft) angehört, woselbst sie in einem umfassenderen Zusammenhange ausgeführt werden wird [1]).

Denkt man alle diejenigen Strahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ... eines Strahlbüschels D, welche durch irgend eine Kreislinie K gehen, wie etwa Fig. 36, wo das Papier die Ebene E des Kreises vorstellen und der Punkt D über derselben liegen soll (§ 34), so heisst die Fläche, welche von diesen Strahlen erfüllt wird, Kegelfläche, [**130**] und zwar, weil sie, so wie der Kreis, von irgend einer Geraden höchstens nur in zwei Punkten geschnitten werden kann, so heisst sie, aus Folgen dieses Umstandes, Kegelfläche vom zweiten Grade. Wenn man sich die Strahlen (oder Kanten) nicht durch den Kreis K und durch den Punkt D begrenzt, sondern vielmehr unbegrenzt vorstellt, so sieht man, dass die Kegelfläche aus zwei gleichen Theilen M, M_1 besteht, die mit ihren Spitzen in dem Punkte D zusammenstossen, so dass dieser »Mittelpunkt« des Kegels oder der Kegelfläche genannt wird (*Biot*). Ferner nennt man jede Ebene, welche durch den Mittelpunkt D und durch irgend eine Tangente A des Kreises geht, Berührungsebene (berührende Ebene), weil nämlich nur ein einziger Strahl der Kegelfläche in ihr liegt, nämlich nur derjenige, welcher durch den Berührungspunkt B der genannten Tangente geht. Nun nennt man ferner die Durchschnittsfigur, welche irgend eine Ebene mit der Kegelfläche bildet, d. h. die Gesammtheit aller Punkte, die sie mit ihr gemein hat, Kegelschnitt. Das Gemeinschaftliche und das Besondere oder Eigenthümliche der gesammten Schnitte eines Kegels lässt sich bequem auffassen und übersehen, wenn vorerst die Schnitte derjenigen Ebenen, welche durch den Mittelpunkt D gehen, untersucht werden. Eine solche Ebene kann sich auf drei wesentlich verschiedene Arten zum Kegel verhalten, nämlich wie folgt:

a) kein Strahl der Kegelfläche liegt in der Ebene, sondern alle werden von ihr im Punkte D geschnitten; dahin gehört also jede Ebene, die den Kreis K weder schneidet noch berührt. In Bezug auf jede solche Ebene liegen die beiden Theile M, M_1 des Kegels auf entgegengesetzten Seiten.

b) ein Strahl der Kegelfläche liegt in der Ebene [**131**] und alle übrigen schneidet sie im Punkte D: dahin gehören alle sogenannten Berührungsebenen des Kegels. In Bezug auf jede solche Ebene liegen die Theile M, M_1 des Kegels auf abwechselnden Seiten.

c) zwei Strahlen der Kegelfläche liegen in der Ebene und alle übrigen werden von ihr im Punkte D geschnitten: dahin gehört jede Ebene, die den Kreis K schneidet. Jede solche Ebene spaltet jeden Theil M, M_1 des Kegels in zwei Abschnitte, so dass auf jeder Seite der Ebene zwei Abschnitte liegen, in denen zusammen alle Strahlen vorkommen, die von der Ebene geschnitten werden[2].

Da nun jede andere Ebene im Raume, die nicht durch den Mittelpunkt D geht, nothwendiger Weise mit irgend einer unter den vorstehenden drei Abtheilungen begriffenen Ebenen parallel ist, so wird sie, ebenso wie die letztere, die Strahlen der Kegelfläche entweder alle schneiden, oder nur einen, oder nur zwei derselben nicht in der That schneiden, sondern nach ihren unendlich entfernten Punkten gerichtet sein, d. h. mit ihnen parallel sein, diese besonderen Strahlen sind nämlich diejenigen, welche in jener durch den Mittelpunkt D gehenden Parallelebene liegen. Daher giebt es folgende drei Klassen von Kegelschnitten:

I. Jede Ebene, welche mit irgend einer unter der obigen Abtheilung (a) begriffenen Ebene parallel ist, schneidet alle Strahlen der Kegelfläche in endlicher Entfernung, und zwar schneidet sie nur einen der beiden Theile M, M_1 der Kegelfläche, so dass also der Durchschnitt, wie er sich der unmittelbaren Anschauung darstellt, eine geschlossene krumme Linie ist (durch die ein Theil der Ebene ganz begrenzt wird). Ein solcher Schnitt, oder [132] eine solche Linie, heisst Ellipse. Die Geraden, in welchen die schneidende Ebene die Berührungsebenen des Kegels schneidet, sind sämmtlich Tangenten der Ellipse, so dass also letztere in jedem ihrer Punkte von einer bestimmten Geraden berührt wird. Unter dieser Klasse von Kegelschnitten befinden sich insbesondere auch Kreise, wie z. B. der Kreis K, von welchem die Betrachtung ausging; ferner gehören dahin, als Grenzfälle, die Schnitte der Ebenen (a), wobei nämlich die Ellipsen sich auf den einzigen Punkt D reduciren.

II. Jede Ebene, die mit irgend einer unter (b) begriffenen Ebene parallel ist, schneidet nur einen der beiden Theile M, M_1 der Kegelfläche, und zwar trifft sie alle Strahlen in endlicher Entfernung bis auf denjenigen, in welchem ihre Parallelebene den Kegel berührt, und nach dessen unendlich entferntem Punkt sie gerichtet ist, so dass also der Schnitt, wie man in der Vorstellung sieht, eine gebogene krumme Linie ist, deren beide Arme sich nach derselben Seite hin ins Unendliche erstrecken, nämlich nach demselben unendlich entfernten Punkte hinstreben, nach welchem jener besondere Strahl gerichtet ist. Ein solcher Schnitt heisst Parabel. Die Durchschnittslinien der schneidenden Ebene und der Berührungsebenen des Kegels sind Tangenten der Parabel, so dass also letztere in jedem ihrer Punkte von einer bestimmten Geraden berührt wird; jene Berührungsebene aber, welche der schneidenden parallel ist, ist nach einer unendlich entfernten Tangente gerichtet, die nämlich dem unendlich entfernten Punkte der Parabel zugehört.

Die Schnitte der unter (b) begriffenen Ebenen [133] gehören als Grenzfälle hierher, nämlich bei ihnen reduciren sich die Parabeln auf die einzelnen Strahlen der Kegelfläche.

III. Jede Ebene, welche mit irgend einer unter der Abtheilung (c) begriffenen Ebene parallel ist, schneidet die mit ihr auf einerlei Seite liegenden zwei Abschnitte der Kegelfläche, und zwar schneidet sie alle Strahlen der letzteren in endlicher Entfernung, ausgenommen diejenigen zwei, welche in der Parallelebene liegen, und nach deren unendlich entfernten Punkten sie gerichtet ist, so dass also der Schnitt, wie man sieht, aus zwei gebogenen Linien besteht, wovon beide Arme einer jeden sich ins Unendliche erstrecken, und zwar so, dass die jedesmaligen zwei einander schief gegenüber liegenden Arme beider Linien nach entgegengesetzten Richtungen, aber nach demselben unendlich entfernten Punkte hinstreben, nach welchem nämlich einer von jenen zwei besonderen Strahlen gerichtet ist; beide Linien hängen demnach durch diese unendlich entfernten Punkte zusammen, so dass sie nur eine einzige Linie ausmachen. Eine solche Linie heisst

Hyperbel. Jede Berührungsebene des Kegels erzeugt eine Tangente der Hyperbel, so dass also die letztere in jedem ihrer Punkte von einer bestimmten Geraden berührt wird; diejenigen zwei Ebenen, welche den Kegel in den genannten zwei besonderen Strahlen berühren, erzeugen diejenigen Tangenten, die den unendlich entfernten Punkten der Hyperbel zugehören, diese Tangenten selbst befinden sich in endlicher Entfernung, vermöge ihrer besonderen Eigenschaft heissen sie Asymptoten der Hyperbel.

Die Schnitte der unter (c) enthaltenen Ebenen [134]
gehören, als Grenzfälle, hierher, nämlich die Hyperbel reducirt sich dabei auf zwei Gerade, auf zwei Strahlen der Kegelfläche.

Dieses (I, II, III.) sind die drei Arten von Kegelschnitten; für die synthetische Betrachtung derselben sind die Umstände: »dass die Ellipse keinen, die Parabel einen und die Hyperbel zwei unendlich entfernte Punkte, und dass nur die Parabel eine unendlich entfernte Tangente hat«, als einfache unterscheidende Merkmale wohl zu berücksichtigen[3].

Nach der obigen Anmerkung (§ 33) folgt nun, dass, wenn Eigenschaften irgend eines Kegelschnitts aus projectivischen Gebilden entspringen, dieselben alsdann auch auf entsprechende Weise bei der Kegelfläche und also auch bei jedem anderen Kegelschnitt statt haben müssen, so dass, wenn z. B. ein Kegelschnitt durch projectivische Gebilde erzeugt werden kann, dann auch die Kegelfläche und jeder andere Kegelschnitt aus projectivischen Gebilden entspringen muss, und auch umgekehrt. Daher kann man, zur Erforschung solcher Eigenschaften, in vielen Fällen sich nur an den Kreis, den bekanntesten und einfachsten Kegelschnitt (ausser den erwähnten Grenzfällen), halten, welcher leicht zu behandeln ist, wie z. B. in der folgenden Betrachtung geschehen soll[4].

Erzeugung der Kegelschnitte und der Kegelfläche durch projectivische Gebilde.

37. Aus der Elementargeometrie bekannte Eigenschaften des Kreises zeigen fast unmittelbar die Erzeugung desselben durch projectivische Gebilde, nämlich wie folgt.

Werden aus irgend zwei Punkten B, B_1 einer [135]

Kreislinie M (Fig. 37) nach allen übrigen Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ derselben Strahlen $a, b, c, \ldots$; $a_1, b_1, c_1, \ldots$ gezogen, so bilden diese unter sich gleiche Winkel, die paarweise über denselben Bogen stehen, nämlich es ist Winkel $(ab) = (a_1 b_1)$, $(ac) = (a_1 c_1)$, $(bc) = (b_1 c_1), \ldots$, folglich sind die dadurch entstehenden Strahlbüschel B, B_1, in Ansehung der Strahlenpaare a und a_1, b und b_1, c und $c_1, \ldots$, projectivisch gleich (§ 13, II.). Denkt man sich etwa den Punkt $\mathfrak{a}$ beweglich und lässt ihn dem Punkte B näher rücken, bis er endlich mit ihm zusammentrifft, wie $\mathfrak{e}$, so wird nothwendiger Weise der eine zugehörige Strahl e den Kreis berühren; eben so wird für den Punkt $\mathfrak{d}$, der mit B_1 zusammenfällt, der eine zugehörige Strahl d_1 den Kreis berühren, so dass also die den vereinigten Strahlen e_1, d entsprechenden Strahlen e, d_1 den Kreis in B, B_1 berühren*). Die Strahlbüschel B, B_1 befinden sich demnach in schiefer Lage (§ 14) und zwar sind sie, wie man sieht, gleichliegend**) (§ 13, II.).

Sind andererseits A, A_1 (Fig. 38) irgend zwei Tangenten eines Kreises M, und sind q, r die ihnen parallelen Tangenten desselben, von denen sie wechselseitig in den Punkten $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ getroffen werden, so wird, wie leicht zu sehen, die Gerade $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ durch den Mittelpunkt M des Kreises gehälftet, so dass $M\mathfrak{r} = M\mathfrak{q}_1$, und es ist der Abschnitt $\mathfrak{r}\mathfrak{e} = \mathfrak{d}\mathfrak{q}_1$ und der Winkel [136] $\alpha = \alpha_1$. Ist ferner a eine beliebige andere Tangente, die jene ersteren A, A_1 in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ schneidet, so bleibt, wenn man diese mit dem Mittelpunkt M des Kreises durch die Geraden $M\mathfrak{a}$, $M\mathfrak{a}_1$ verbindet, der Winkel $\mathfrak{a}M\mathfrak{a}_1$ von unveränderlicher Grösse, wie auch die Tangente a ihre Lage ändern mag, nämlich er (oder sein Nebenwinkel bei solchen Tangenten wie b) ist beständig $= \alpha = \alpha_1$***), und ausserdem sind die Winkel $\beta = \beta$ und $\gamma = \gamma$, daher

*) Dieses stimmt auch damit überein, dass die Winkel, welche die entsprechenden Strahlenpaare a und a_1, b und $b_1, \ldots$ an den Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ unter sich bilden, alle gleich sind, und zwar gleich den Winkeln, welche die Sehne $\mathfrak{e}\mathfrak{b}$ mit den Tangenten in ihren Endpunkten bildet.

**) Dieser Umstand ist wesentlich, denn wenn die nämlichen Strahlbüschel sich in schiefer Lage befinden und ungleichliegend sind, so erzeugen sie, statt des Kreises, wie oben, die gleichseitige Hyperbel, wie man zu seiner Zeit sehen wird.

***) Denn vermöge des Dreiecks $\mathfrak{a}M\mathfrak{a}_1$ ist $\beta + \gamma + \alpha_2 = 2R$, und vermöge des Vierecks $\mathfrak{a}\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1\mathfrak{a}_1$ ist $2\beta + 2\gamma + \alpha + \alpha_1 = 4R$, folglich ist $2\alpha_2 = \alpha + \alpha_1$, und da $\alpha = \alpha_1$, so ist $\alpha_2 = \alpha = \alpha_1$.

sind die Dreiecke $\mathfrak{a}M\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{r}M$, $M\mathfrak{q}_1\mathfrak{a}_1$, durch Gleichheit ihrer Winkel, ähnlich, so dass, vermöge der zwei letzteren, man hat:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{r} : \mathfrak{r}M = M\mathfrak{q}_1 : \mathfrak{q}_1\mathfrak{a}_1, \text{ oder}$$
$$\mathfrak{a}\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1 = M\mathfrak{r}\cdot M\mathfrak{q}_1 = M\mathfrak{r}^2 = M\mathfrak{q}_1^2,$$

das heisst, das Rechteck, $\mathfrak{a}\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1$, unter den Abständen der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, in welchen irgend eine Tangente a die beiden festen Tangenten A, A_1 schneidet, von den Durchschnitten $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ der parallelen Tangenten r, q, hat eine beständige Grösse*), nämlich gleich dem Quadrate über $M\mathfrak{r}$ oder $M\mathfrak{q}_1$. Daraus erkennt man die projectivische Beziehung der Tangenten A, A_1, in Ansehung der Punktenpaare $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, ..., in welchen sie von den übrigen Tangenten a, b .... geschnitten werden (§ 12, I.), so dass also die letzteren die Projectionsstrahlen sind, und dass insbesondere r, q, was schon durch ihre Bezeichnung angedeutet ist (§ 9, I), die Parallelstrahlen sind. Lässt man in der Vorstellung die Tangente a sich so bewegen, dass der Punkt $\mathfrak{a}$ sich dem Durchschnittspunkte $\mathfrak{d}$ der festen Tangenten [137] A, A_1 nähert, so wird gleichzeitig sein entsprechender Punkt $\mathfrak{a}_1$ dem Berührungspunkte $\mathfrak{d}_1$ der Tangente A_1 näher rücken, und zwar dergestalt, dass, wenn sich $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{d}$ vereiniget, dann auch $\mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{d}_1$ zusammenfällt. Ebenso folgt, dass der dem Berührungspunkte $\mathfrak{e}$ der Tangente A entsprechende Punkt $\mathfrak{e}_1$ im gegenseitigen Durchschnitte der Tangenten A, A_1 liegt**).

Aus den beiden vorstehenden Untersuchungen folgen also nachstehende Sätze.

»*Irgend zwei Tangenten* (A, A_1) *eines Kreises sind in Ansehung der entsprechenden Punktenpaare, in welchen sie von den übrigen Tangenten geschnitten werden, projectivisch, und zwar entspre-*

»*Irgend zwei Punkte* (B, B_1) *eines Kreises sind die Mittelpunkte zweier projectivischen Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen sich in den übrigen Punkten der Kreislinie schnei-*

*) *Brianchon* hat diesen Satz für alle Kegelschnitte bewiesen (Mémoire sur les lignes du second ordre, XXVIII. p. 27); späterhin (§ 40, I.) folgt derselbe unmittelbar.

**) Dieser Umstand kann auch daraus bewiesen werden, dass, wenn man sich die Gerade $M\mathfrak{d}$ denkt, dann vermöge der rechtwinkligen, einander ähnlichen Dreiecke $\mathfrak{r}M\mathfrak{d}$, $\mathfrak{r}\mathfrak{e}M$ man hat $\mathfrak{r}\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{r}\mathfrak{d} = \mathfrak{r}M\cdot\mathfrak{r}M$, und da $\mathfrak{r}\mathfrak{d} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{e}_1$, also auch $\mathfrak{r}\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{q}_1\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{r}M\cdot\mathfrak{r}M$, woraus man sieht, dass $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$ die obige Bedingung zweier entsprechenden Punkte erfüllen.

chen den in ihrem Durchschnitte vereinigten Punkten $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}_1$ *ihre wechselseitigen Berührungspunkte* $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}$.«

den, und zwar entsprechen den vereinigten Strahlen d, e_1 *die wechselseitigen Tangenten* d_1, e *in jenen Punkten* (B, B_1).«

38. Wie bereits oben bemerkt worden (§ 36, Ende), folgen nun aus den eben aufgestellten Sätzen vom Kreise (§ 37) unmittelbar entsprechende Sätze vom Kegel zweiten Grades und dessen übrigen Schnitten. Denn wenn die Tangenten des Kreises K (Fig. 36) projectivisch sind, so sind auch die ihnen zugehörigen ebenen Strahlbüschel im Strahlbüschel D, deren Ebenen den dem Kreise zugehörigen Kegel D berühren, unter sich projectivisch (§ 33), und wenn die Strahlbüschel im [**138**] Kreise projectivisch sind, so sind auch die ihnen zugehörigen Ebenenbüschel im Kegel unter sich projectivisch, so dass also unmittelbar nachstehende Sätze folgen:

I. »*In irgend zwei Berührungsebenen eines Kegels zweiten Grades befinden sich zwei projectivische ebene Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlenpaare nämlich in den übrigen Berührungsebenen liegen, und insbesondere entsprechen den im Durchschnitte jener Ebenen vereinigten Strahlen* (d, e_1) *diejenigen Strahlen* (d_1, e), *in welchen dieselben den Kegel berühren.*«

I. »*Irgend zwei Strahlen einer Kegelfläche zweiten Grades sind die Axen zweier projectivischen Ebenenbüschel, deren entsprechende Ebenenpaare sich in den übrigen Strahlen schneiden, und insbesondere entsprechen den in der Ebene jener Strahlen vereinigten Ebenen* (δ, ε_1) *diejenigen Ebenen* (δ_1, ε), *welche den Kegel in denselben berühren.*«

Und umgekehrt:

II. »*Jede zwei schiefliegende projectivische ebene Strahlbüschel* B, B_1, *die sich in demselben Strahlbüschel* D *befinden, erzeugen einen Kegel zweiten Grades, der ihre Ebenen berührt, d. h., die durch die entsprechenden Strahlenpaare bestimmten Ebenen, nebst den Ebenen der Strahlbüschel, sind die gesammten Berührungsebenen eines bestimmten Kegels zweiten Grades, und zwar berührt er die Ebenen* (B, B_1) *der Strahlbüschel in denjenigen Strahlen* (d_1, e), *deren entsprechende* (d, e_1) *im Durchschnitte derselben vereiniget sind.*«

II. »*Jede zwei schiefliegende projectivische Ebenenbüschel* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, *die sich in demselben Strahlbüschel* D *befinden, erzeugen einen Kegel zweiten Grades, der durch ihre Axen geht, d. h., die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenenpaare nebst den Axen der Ebenenbüschel, sind die gesammten Strahlen eines bestimmten Kegels zweiten Grades, und zwar wird er in jenen Axen* ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$) *von denjenigen Ebenen* (δ_1, ε) *berührt, deren entsprechende in der durch dieselben bestimmten Ebene vereiniget sind.*«

Da nun zwei projectivische ebene Strahlbüschel [**139**] B, B_1, die in irgend zwei Berührungsebenen des Kegels liegen, von einer beliebigen Ebene E in zwei projectivischen Geraden A, A_1 geschnitten werden, und da zwei im Kegel liegende projectivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ von jener Ebene E in zwei projectivischen ebenen Strahlbüscheln B, B_1 geschnitten werden (§ 33), so folgen also weiter, wie oben erwähnt worden, für alle Kegelschnitte nachstehende merkwürdige Sätze:

III. »*Jede zwei Tangenten A, A_1 eines Kegelschnitts sind in Ansehung der Punktenpaare, in welchen sie von den übrigen Tangenten geschnitten werden, projectivisch, und zwar entsprechen den in ihrem Durchschnitte vereinigten Punkten* ($\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}_1$) *ihre wechselseitigen Berührungspunkte* ($\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}$).«

III. »*Jede zwei Punkte B, B_1 eines Kegelschnitts sind die Mittelpunkte zweier projectivischen ebenen Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen sich in den übrigen Punkten desselben schneiden, und zwar entsprechen den vereinigten Strahlen* (d, e_1) *die Tangenten* (d_1, e) *in den gegenseitigen Mittelpunkten* (B_1, B).«

Und umgekehrt:

IV. »*Jede zwei in einer Ebene schiefliegende Gerade A, A_1 erzeugen einen Kegelschnitt, der sie berührt, d. h., sie und alle ihre Projectionsstrahlen sind die gesammten Tangenten eines bestimmten Kegelschnitts, und zwar berührt dieser die Geraden in denjenigen Punkten* ($\mathfrak{e}$, $\mathfrak{d}_1$), *deren entsprechende* ($\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{d}$) *in ihrem Durchschnitte vereiniget sind.*«

IV. »*Jede zwei in einer Ebene schiefliegende projectivische* (*ebene*) *Strahlbüschel B, B_1 erzeugen einen Kegelschnitt, der durch ihre Mittelpunkte geht, d. h., diese und die Durchschnitte der entsprechenden Strahlenpaare sind die gesammten Punkte eines bestimmten Kegelschnitts, und zwar wird dieser in jenen Mittelpunkten von denjenigen Strahlen* (e, d_1) *berührt, deren entsprechende* (e_1, d) *vereiniget sind.*«

Es darf kaum erwähnt werden, dass zufolge der obigen zweiten Anmerkung (§ 34) bei projectivischen [**140**] Gebilden auf der Kugelfläche entsprechende Sätze statt finden.

39. Die so eben aufgestellten neuen Sätze über den Kegel zweiten Grades und dessen Schnitte (§ 38) sind für die Untersuchung dieser Figuren wichtiger, als alle bisher bekannten Sätze über dieselben, denn sie sind die eigentlichen wahren Fundamentalsätze, weil sie nämlich so umfassend sind, dass fast alle übrigen Eigenschaften jener Figuren auf die leichteste und klarste Weise aus ihnen folgen, und weil

auch die Methode, nach der sie daraus hergeleitet werden, jede bisherige Betrachtungsweise an Einfachheit und Bequemlichkeit übertrifft. Wiewohl ich mir vorbehalte, die genannten Figuren erst späterhin ausführlich zu untersuchen, so kann ich doch nicht umhin, hier schon einige der nächsten Folgerungen aus jener Hauptquelle zu ziehen, die zur Bestätigung der eben ausgesprochenen Behauptung als eine kleine Probe dienen mögen.

Was nämlich den weiteren Fortgang der gegenwärtigen Betrachtung betrifft, so soll nun zunächst noch auf einige besondere Umstände und Grenzfälle der erwähnten Sätze aufmerksam gemacht werden; und sodann sollen einige wesentliche Eigenschaften der Kegelschnitte (so wie des Kegels), die zum Behufe späterer Untersuchungen über projectivische Gebilde dienen, so wie auch einige Porismen aus denselben in kurzen Andeutungen entwickelt werden. Nachgehends soll zum eigentlichen Hauptgegenstande zurückgekehrt, und zwar die Erzeugnisse projectivischer Gebilde, die im Raume beliebig liegen, untersucht werden.

Besondere Fälle.

40. Bei den obigen Sätzen (§ 38, II. u. IV.) ist zuvörderst noch anzugeben, welche verschiedene Gestalten [**141**] die erzeugten Figuren haben können; woran zu erkennen, zu welcher Klasse (§ 36) der durch zwei projectivische Gebilde erzeugte Kegelschnitt gehöre, und ob durch dieselben zwei Gebilde, je nachdem sie anders liegen, ein Kegelschnitt anderer Art erzeugt werde? Für einige Fälle folgt die Antwort auf diese Fragen unmittelbar aus vorangegangenen Sätzen, für die übrigen wird sie später folgen. Folgendes lässt sich nämlich in Beziehung auf diese Fragen unmittelbar angeben.

I. Da zwei projectivisch ähnliche Gerade A, A_1 einen unendlich entfernten Projectionsstrahl haben, und umgekehrt dieselben ähnlich sind, wenn ihre unendlich entfernten Punkte sich entsprechen, oder wenn sie einen unendlich entfernten Projectionsstrahl haben (§ 13, I.), und da von den Kegelschnitten nur die Parabel eine unendlich entfernte Tangente hat (§ 36, II.), so folgt also (§ 38, IV.):

»Dass zwei in einer Ebene schief liegende projectivisch ähnliche Gerade A, A_1 eine Parabel erzeugen.« Und umgekehrt:

»Dass je zwei Tangenten einer Parabel von allen übrigen Tangenten derselben projectivisch ähnlich geschnitten werden.«

Der letztere Satz ist, mit andern Worten ausgesprochen, allgemein bekannt. Da bei zwei projectivisch ähnlichen Geraden keine Parallelstrahlen statt finden (§ 13, I), so folgt ferner: »Dass von den nicht unendlich entfernten Tangenten einer Parabel keine zwei parallel sein können.« (Die unendlich entfernte Tangente kann als mit jeder anderen parallel angesehen werden)[5].

[**142**] Zwei beliebige projectivische Geraden A, A_1, die nicht ähnlich sind, können also nie eine Parabel erzeugen, wohl aber können die nämlichen zwei Geraden sowohl Ellipsen als Hyperbeln erzeugen, je nachdem die in ihrem Durchschnitte vereinigten Punkte ($\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}_1$) beschaffen sind, welcher Umstand später in Erwägung gezogen werden soll. Der Winkel, den die Geraden unter sich bilden, hat demnach auf die Art des Kegelschnitts keinen Einfluss, sondern nur auf dessen besondere Gestalt, so z. B. giebt es ein System von Punktenpaaren, die so beschaffen sind, dass, wenn eins derselben im Durchschnitte der Geraden vereiniget ist, alsdann die letzteren unter einem bestimmten Winkel einen Kreis erzeugen. Werden insbesondere die Durchschnitte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ der Parallelstrahlen, d. h., die Punkte, deren entsprechende $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{q}$ unendlich entfernt sind, im Durchschnitte der Geraden vereiniget, so ist der Kegelschnitt offenbar eine Hyperbel und die Geraden sind die Asymptoten derselben (§ 36, III. u. § 38, IV.); daher folgen unmittelbar die bekannten Eigenschaften der Hyperbel: »Dass das Rechteck unter den Abschnitten $\mathfrak{r}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{q}_1\mathfrak{a}_1$, oder $\mathfrak{r}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{q}_1\mathfrak{b}_1$, ..., welche eine beliebige Tangente a, b, ... von den Asymptoten (A, A_1) abschneidet, eine beständige Grösse hat (§ 12)«; »dass daher auch der Inhalt des Dreiecks $\mathfrak{r}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, welches die Tangente mit den Asymptoten einschliesst, constant ist«, und andere Eigenschaften mehr, die später vollständig aufgezählt werden sollen.

Da die Geraden A, A_1 im gegenwärtigen Falle (wo sie nicht ähnlich sind) Parallelstrahlen r, q haben, so folgt also:

»Dass sowohl bei der Ellipse als bei der [**143**] Hyperbel die Tangenten paarweise parallel sind«*)[6].

*) Diese Eigenschaft folgt auch leicht aus der obigen Betrachtung des Kegels (§ 36), wie man im zweiten Abschnitte sehen wird.

Hierbei folgt auch unmittelbar der oben (§ 37) in der Note erwähnte Satz von *Brianchon*, in Bezug auf die Durchschnitte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ der Parallelstrahlen, wie leicht zu sehen.

Beobachtet man die Geraden A, A_1, während sie allmählich aus der schiefen in die perspectivische Lage übergehen, so sieht man, dass der Kegelschnitt zuletzt in diejenige Gerade $(e e_1)$ übergeht, welche den entstehenden Projectionspunkt B mit dem Durchschnitte $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$ der Geraden verbindet, und zwar geht die Ellipse in das durch die Punkte $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$, B begrenzte Stück, die Hyperbel in die beiden übrigen (unendlichen) Stücke, und die Parabel, bei welcher der Projectionspunkt B sich ins Unendliche entfernt (§ 13, I.), in die eine Hälfte der durch den Punkt $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$ getheilten Geraden $(e e_1)$ über.

II. So wie bei zwei projectivischen ebenen Strahlbüscheln B, B_1, die in einer Ebene concentrisch liegen, entweder zwei, oder nur ein, oder gar kein Paar entsprechender Strahlen sich vereinigen (§ 16, II.), gleichermaassen werden, wenn die Strahlbüschel beliebig liegen, entweder zwei, oder nur ein, oder gar kein Paar entsprechender Strahlen parallel sein; denn lässt man, von jener Lage ausgehend, den einen Strahlbüschel sich so bewegen, dass sich jeder Strahl sich selbst parallel bewegt, so hat man die letztere Lage, und die zuvor vereinigten entsprechenden Strahlenpaare werden sodann parallel sein. Sind aber zwei entsprechende Strahlen [**144**] parallel, so zeigt dies an, dass der erzeugte Kegelschnitt einen unendlich entfernten Punkt habe, nach welchem sie gerichtet sind, daher können dieselben zwei Strahlbüschel, im Allgemeinen, Kegelschnitte von allen drei Arten erzeugen, je nachdem sie gegen einander gerichtet sind (§ 36 u. § 16, II.), und zwar wie folgt:

a) »Zwei gleichliegende projectivische ebene Strahlbüschel B, B_1 können Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln erzeugen, je nachdem sie gegen einander gerichtet sind, nämlich innerhalb eines bestimmten Spielraums erzeugen sie nur Ellipsen, an den beiden Grenzen desselben, also in zwei bestimmten Richtungen, wo die Strahlen g, g_1, oder h, h_1 parallel sind (§ 16, II.), erzeugen sie Parabeln, und jenseits dieser Grenzen erzeugen sie nur Hyperbeln.« Und

b) »Sind die Strahlbüschel ungleichliegend, so erzeugen sie nur Hyperbeln.«

Da, im Falle die Strahlbüschel eine Hyperbel erzeugen, die zwei Paar paralleler entsprechender Strahlen nothwendiger Weise den Asymptoten parallel sein müssen, weil sie mit diesen nach denselben unendlich entfernten Punkten gerichtet sind; und da die Hyperbel gleichseitig heisst, wenn die Asymptoten zu einander rechtwinklig sind, so folgt also: »Dass die Strahlbüschel in beiden vorstehenden Fällen (a, b) eine gleichseitige Hyperbel erzeugen, wenn man sie so gegen einander richtet, dass die Schenkel (s und s_1, t und t_1) der entsprechenden rechten Winkel (§ 9, II.) parallel sind.«

Sind insbesondere die Strahlbüschel B, B_1 gleich, [**145**] so erzeugen sie im Falle (a) einen Kreis (§ 37), und im Falle (b) eine gleichseitige Hyperbel.

Lässt man die beliebigen Strahlbüschel B, B_1 allmählich in perspectivische Lage übergehen, nämlich dadurch, dass zwei parallele entsprechende Strahlen aufeinander fallen, welches also nur von der hyperbolischen und parabolischen Lage aus geschehen kann, so sieht man, dass der Kegelschnitt zuletzt in zwei bestimmte Gerade übergeht, wovon die eine der entstehende perspectivische Durchschnitt A und die andere der gemeinschaftliche (durch beide Mittelpunkte B, B_1 gehende) Strahl BB_1 ist. Bei der parabolischen Lage werden diese zwei Geraden parallel.

Lässt man die Strahlbüschel B, B_1 in concentrische Lage übergehen, so geht die Hyperbel in zwei und die Parabel in eine Gerade über, nämlich in diejenigen Geraden, in welchen entsprechende Strahlen zusammenfallen, dagegen zieht sich die Ellipse in den gemeinschaftlichen Mittelpunkt (BB_1) der Strahlbüschel zusammen.

III. Beim Kegel im Allgemeinen finden keine so wesentlich verschiedene Klassen statt, wie bei seinen Schnitten (§ 36), wohl aber bei einem besondern Falle desselben, er kann nämlich, wie folgt, in Grenzfälle übergehen und besondere Gestalt erhalten.

Der von zwei projectivischen Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ oder ebenen Strahlbüscheln B, B_1 erzeugte Kegel (§ 38, II.) ändert nothwendiger Weise seine Gestalt, je nachdem die Gebilde so oder anders gegen einander gerichtet sind, er kann runder oder platter werden, und wenn insbesondere die Gebilde in perspectivische Lage kommen, so geht der Kegel in folgende Grenzfälle über: bei den Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in zwei Ebenen, wovon die eine der perspectivische Durchschnitt [**146**] B (§ 31) derselben und die andere die durch beide Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ gehende Ebene (ε, ε_1) ist (in welcher letzteren zwei entsprechende Ebenen ε, ε_1 vereiniget sind), und bei den Strahlbüscheln B, B_1 in diejenige Ebene, welche durch die Projectionsaxe A derselben und durch die Durchschnittslinie (ee_1) der Ebenen B, B_1 geht.

Lässt man die nämlichen zwei Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ ihre Lage allmählich so ändern, bis ihre Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ parallel sind, so müssen nothwendiger Weise alle Strahlen des Kegels mit denselben parallel werden, so, dass sich sein Mittelpunkt D ins Unendliche entfernt. In diesem besonderen Falle heisst die erzeugte Figur nicht mehr Kegel, sondern »Cylinder«, und zwar Cylinder zweiten Grades. Bei dieser besonderen Lage der Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ können, ebenso wie bei zwei projectivischen ebenen Strahlbüscheln B, B_1 in einer Ebene (II.) entweder zwei, oder nur ein, oder gar kein Paar entsprechende Ebenen parallel sein (§ 31, III), und daher kann die Cylinderfläche entweder zwei, oder nur einen, oder gar keinen unendlich entfernten Strahl haben, wodurch sich drei Klassen von Cylindern von einander unterscheiden, die nach der Reihe hyperbolische, parabolische und elliptische Cylinder heissen. Die Bedingungen, unter welchen die Ebenenbüschel den einen oder den anderen dieser drei Cylinder erzeugen, sind den obigen, unter welchen die ebenen Strahlbüschel B, B_1 den einen oder den anderen der drei Kegelschnitte erzeugen (II.), ganz ähnlich. Dies gilt auch von dem besonderen Falle, wenn die Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ gleich sind, in welchem Falle sie nämlich entweder den sogenannten geraden, oder den gleichseitig hyperbolischen Cylinder erzeugen[7]).

[**147**] Wird der Cylinder von irgend einer Ebene E geschnitten, so werden die ihn erzeugenden Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in zwei ebenen Strahlbüscheln B, B_1 geschnitten, die sich nothwendiger Weise in Hinsicht paralleler entsprechender Strahlen in gleichem Falle befinden, als die Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in Hinsicht paralleler entsprechender Ebenen (weil parallele Ebenen von jeder anderen Ebene in parallelen Geraden geschnitten werden), daher kann die Ebene E den ersten Cylinder nur in einer Hyperbel, den zweiten nur in einer Parabel, und den dritten nur in einer Ellipse schneiden (II.). Wird die schneidende Ebene E den Strahlen der Cylinderfläche, oder den Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ parallel, so geht der

Schnitt in zwei solche Strahlen über, daher folgt: »dass zwei parallele Gerade als Grenzfall sowohl von der Hyperbel, als der Parabel, oder als der Ellipse anzusehen sind.«

Andererseits kann der Cylinder nur durch solche besondere ebene Strahlbüschel B, B_1 erzeugt werden, die aus parallelen Strahlen bestehen. Es findet bei ihnen Aehnliches statt, wie oben bei den Geraden A, A_1 (I.).

Der von zwei projectivischen Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, oder von zwei projectivischen ebenen Strahlbüscheln B, B_1 (deren Strahlen parallel sind) erzeugte Cylinder geht, wenn die Gebilde in perspectivische Lage gelangen, im ersten Falle in zwei und im anderen Falle in eine Ebene über, auf dieselbe Weise wie oben der Kegel.

Einige Eigenschaften der Kegelschnitte.

41. Wie bereits oben erwähnt (§ 39), sollen nun einige bemerkenswerthe Sätze über die Kegelschnitte [148] aus den obigen Fundamentalsätzen (§ 38, III, IV.) in gedrängter Kürze entwickelt werden.

I. Da die projectivische Beziehung zweier Geraden A, A_1 bestimmt ist, sobald irgend drei Paar entsprechende Punkte oder irgend drei Projectionsstrahlen a, b, c gegeben sind, und da eben so die projectivische Beziehung zweier Strahlbüschel B, B_1 durch drei entsprechende Strahlenpaare a und a_1, b und b_1, c und c_1, oder durch deren Durchschnitte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, bestimmt ist (§ 10, β), so folgen unmittelbar nachstehende Sätze (§ 38, IV.):

»Durch irgend fünf Tangenten (A, A_1, a, b, c) ist ein Kegelschnitt bestimmt, d. h., fünf beliebige Gerade in einer Ebene können allemal von einem, aber nur von einem einzigen Kegelschnitt berührt werden.«

»Durch irgend fünf Punkte (B, B_1, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$) in einer Ebene ist ein Kegelschnitt bestimmt, d. h., fünf beliebige Punkte in einer Ebene liegen allemal in einem, aber nur in einem einzigen Kegelschnitt.«

Diese Sätze finden immer statt, die gegebenen fünf Elemente mögen welche gegenseitige Lage haben als man will, wenn nämlich auch die Grenzfälle, in welche der Kegelschnitt übergehen kann (§ 40, I, II.), gestattet werden; nur in dem einzigen Falle, wo von den fünf gegebenen Geraden sich vier in einem Punkte schneiden, oder von den fünf gegebenen

Punkten vier in einer Geraden liegen, ist der Kegelschnitt nicht vollkommen bestimmt. Wie bei jedem vorgelegten Falle die Gestalt oder Art des Kegelschnitts leicht zu erforschen ist, wird später gezeigt.

II. Aus (§ 24, III.) sieht man, wie, wenn irgend fünf Tangenten oder irgend fünf Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, alsdann beliebige andere Tangenten oder beliebige andere Punkte desselben, mittelst des Lineals allein, zu finden sind.

[149] III. Nach (§ 18) folgt:

1. »*Dass durch irgend einen Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts im Allgemeinen und höchstens nur zwei Tangenten des letzteren gehen. Nämlich es gehen zwei, oder nur eine oder gar keine Tangente durch den genannten Punkt, je nachdem derselbe ausserhalb, oder in, oder innerhalb dem Kegelschnitte liegt.*«

1. »*Dass irgend eine Gerade in der Ebene eines Kegelschnitts den letzteren im Allgemeinen und höchstens nur in zwei Punkten schneidet. Nämlich die genannte Gerade kann den Kegelschnitt entweder in zwei Punkten schneiden, oder nur in einem Punkt treffen, d. h., ihn berühren, oder ihm gar nicht begegnen.*«

Diese Eigenschaft der Kegelschnitte bewirkt, dass dieselben »Linien der zweiten Klasse«*) und »Linien der zweiten Ordnung« genannt werden. Dieselben Eigenschaften lassen sich auch, mittelst des Kegels (§ 36), vom Kreise herleiten.

Es folgt ferner (§ 18):

2. »*Dass und wie man, wenn fünf Tangenten eines Kegelschnitts gegeben sind, ohne dass er selbst gezeichnet vorliegt, die durch irgend einen Punkt gehenden Tangenten desselben bloss durch Hülfe des Lineals ziehen könne, sobald in derselben Ebene irgend ein Kreis (oder sonstiger Kegelschnitt) gegeben ist.*«

2. »*Dass und wie man, wenn fünf Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, ohne dass er selbst gezeichnet vorliegt, die in irgend einer Geraden liegenden Punkte desselben bloss durch Hülfe des Lineals finden könne, sobald in derselben Ebene irgend ein Kreis (oder sonstiger Kegelschnitt) gegeben ist.*«

42. I. Da durch fünf Elemente ein Kegelschnitt bestimmt ist (§ 41, I.), so müssen zwischen sechs Elementen [150] desselben nothwendiger Weise bestimmte Beziehungen statt

*) *Gergonne* nennt eine Curve, an welche, von irgend einem Punkte aus, höchstens n-Tangenten gehen, eine Curve der $n$ten Classe.

finden; diese Beziehungen sind zum Theil in (§ 24, I.) enthalten und lassen sich hier wie folgt übertragen (§ 38, IV.):

1. *»Bei jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Sechseck (d. h., dessen Seiten Tangenten des Kegelschnitts sind) treffen die drei Hauptdiagonalen, welche nämlich die gegenüber stehenden Ecken verbinden, in irgend einem Punkte zusammen.«*

1. *»Bei jedem einem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechseck (d. h., dessen Ecken im Kegelschnitte liegen) liegen die drei Durchschnittspunkte der einander gegenüber stehenden Seitenpaare allemal in irgend einer Geraden.«*

Und umgekehrt:

2. *»Treffen die drei Hauptdiagonalen eines Sechsecks in irgend einem Punkte zusammen, so werden seine Seiten von irgend einem bestimmten Kegelschnitte berührt.«*

2. *»Liegen die drei Durchschnitte der gegenüber stehenden Seitenpaare eines Sechsecks in irgend einer Geraden, so liegen seine Ecken in irgend einem Kegelschnitte.«*

Den Satz rechts (1.) hat *Pascal**) und den links *Brianchon***) zuerst bekannt gemacht. *Pascal* nannte das betreffende Sechseck »*Hexagrammum mysticum*«. In einer Abhandlung, die verloren gegangen ist, soll er eine vollständige Behandlung der Kegelschnitte auf seinen Satz gegründet haben. Später wurde der *Pascal*'sche Satz vornehmlich von *Mac-Laurin*, *Robert Simson* und *Carnot* bewiesen, und auch *Schwab* theilt denselben, im Anhange zu Euklides Data, insbesondere vom Kreise mit. Seit *Brianchon* seinen Satz entdeckt hat, erkannte man [151] besonders die Wichtigkeit der beiden Sätze für die Betrachtung der Kegelschnitte, und deshalb wurden sie in neuerer Zeit so häufig und verschiedenartig bewiesen, wie nur selten geometrischen Sätzen gleiche Aufmerksamkeit zu Theil ward. Namentlich haben sich damit die französischen Mathematiker *Gergonne*, *Poncelet*, *Chales*, *Sturm*, *Bobillier* u. a. m., der belgische *Dandelin*, und die deutschen *Moebius* und *Plücker* beschäftigt. Die gegenwärtige Ableitung der Sätze beleuchtet sie von einer neuen Seite, sie zeigt, dass dieselben nicht die eigentliche Grundlage für die Untersuchung der Kegelschnitte sind, sondern dass sie vielmehr, mit vielen anderen Eigenschaften zugleich, aus einer umfassenderen Quelle, nämlich aus der

---

*) In seinem *Essai sur les Coniques.*
**) Im XIII. Heft des *Journal de l'Ecole Polytechnique.*

Beziehung projectivischer Gebilde, sehr leicht und klar hervorgehen. Eine wesentliche Vervollständigung der beiden Sätze habe ich zuerst bekannt gemacht im XVIII. Bd. der *Annales de Mathématiques*; dieselbe soll auch hier weiter unten (im Anhange) wiederum zum Beweise vorgelegt werden.

Die früheren Sätze (§ 23, III.) sind als Grenzfälle der vorstehenden anzusehen, wie man leicht bemerken wird (§ 40).

Die oben stehenden Sätze (1, 2.) können auch auf eine andere Art aufgefasst und ausgesprochen werden, und zwar so, dass statt des jedesmaligen Sechsecks zwei Dreiecke betrachtet werden, welche durch dieselben sechs Elemente bestimmt sind, nämlich statt des umschriebenen Sechsecks diejenigen zwei Dreiecke, wovon das eine die erste, dritte und fünfte, und das andere die zweite, vierte und sechste Ecke des Sechsecks zu Ecken hat, und statt des eingeschriebenen Sechsecks diejenigen zwei Dreiecke, von denen das eine die erste, dritte und fünfte, und das andere die [**152**] zweite, vierte und sechste Seite desselben zu Seiten hat. In dieser Hinsicht lauten die Sätze wie folgt:

3. »*Treffen die drei Geraden, welche die Ecken zweier in einer Ebene liegenden Dreiecke, in irgend einer Ordnung paarweise genommen, verbinden, in irgend einem Punkte zusammen, so werden die übrigen sechs Geraden, welche die Ecken des einen Dreiecks mit denen des anderen verbinden, allemal von irgend einem Kegelschnitte berührt.*« *Und auch umgekehrt.*

3. »*Liegen die drei Punkte, in welchen die Seiten zweier in einer Ebene liegenden Dreiecke, in irgend einer Ordnung paarweise genommen, sich schneiden, in irgend einer Geraden, so liegen die übrigen sechs Punkte, in welchen die Seiten des einen Dreiecks die des anderen schneiden, allemal in irgend einem Kegelschnitte.*« *Und auch umgekehrt.*

II. Vermöge der Schlussbemerkungen in den Sätzen (§ 38, IV.) folgt, dass, wie bei der obigen Aufgabe (§ 24, III, b, β.) bei zwei schiefliegenden projectivischen Gebilden (A, A_1 oder B, B_1) die den vereinigten Elementen ($\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}_1$, oder d, e_1) entsprechenden Elemente ($\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}$, oder d_1, e) gefunden worden, durch dasselbe Verfahren auch:

»*Wenn fünf beliebige Tangenten eines Kegelschnitts gegeben sind, die Berührungspunkte derselben nur mit Hülfe des Lineals gefunden werden können.*«

»*Wenn fünf beliebige Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, die Tangenten in denselben nur mit Hülfe des Lineals gefunden werden können.*«

Es sind darin zugleich die nachstehenden bekannten Sätze enthalten:

»*Bei jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Fünfecke treffen die Diagonalen, welche irgend zwei Eckenpaare verbinden,* [**153**] *und die Gerade, welche die jedesmalige fünfte Ecke mit dem Berührungspunkte der gegenüber stehenden Seite verbindet, einander in irgend einem Punkte.*«

»*Bei jedem einem Kegelschnitte eingeschriebenen Fünfecke liegen die Durchschnittspunkte irgend zweier Seitenpaare und der* [**153**] *Durchschnittspunkt, welchen die jedesmalige fünfte Seite mit der Tangente in der gegenüber stehenden Ecke bildet, allemal in irgend einer Geraden.*«

III. Die Sätze in (§ 24, II.) lassen sich hier, mit anderen Worten, wie folgt, wiederholen (§ 38, IV.):

1. »*Bei allen einem Kegelschnitte umschriebenen Vierecken, bei welchen ein Paar gegenüber stehende Seiten in irgend zwei festen Tangenten desselben sich befinden, liegt der Durchschnittspunkt der Geraden, welche durch die gegenüber stehenden Ecken gehen (Diagonalen), in einer und derselben bestimmten Geraden, die nämlich durch die Berührungspunkte jener zwei festen Tangenten geht.*«

1. »*Bei allen einem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecken, bei welchen das eine Paar gegenüber stehende Ecken in irgend zwei festen Punkten desselben sich befinden, geht die Gerade, welche die Durchschnittspunkte der gegenüber stehenden Seiten verbindet, durch einen und denselben bestimmten Punkt, der nämlich in den zu jenen festen Punkten gehörigen Tangenten liegt (ihr Durchschnittspunkt ist).*«

Diese allgemein bekannten Sätze werden kürzer, wie folgt, ausgesprochen:

2. »*Bei jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Vierecke gehen die beiden Diagonalen und die Gerade, welche die Berührungspunkte zweier gegenüber stehender Seiten verbindet, durch einen und denselben Punkt.*«

2. »*Bei jedem einem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecke liegen die Durchschnittspunkte der gegenüber stehenden Seiten und der Durchschnitt der Tangenten in zwei gegenüber stehenden Ecken, in einer Geraden.*«

Oder für das vollständige Vierseit, welches durch irgend vier Tangenten eines Kegelschnitts gebildet wird, und für das vollständige Viereck, welches durch irgend [**154**] vier Punkte eines Kegelschnitts bestimmt wird, da jedes drei einfache Vierecke (oder Vierseite) enthält (§ 19), folgen daraus unmittelbar nachstehende Eigenschaften:

3. »Werden irgend vier Tangenten eines Kegelschnitts als ein vollständiges Vierseit und ihre vier Berührungspunkte als ein vollständiges Viereck an-

gesehen, sind etwa A, A_1, A_2, A_3 (Fig. 39) die vier Tangenten und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ die vier Berührungspunkte, so findet zwischen denselben folgende Beziehung statt:

Die drei Diagonalen $\mathfrak{bg}$, $\mathfrak{cf}$, $\mathfrak{de}$ *des vollständigen Vierseits fallen mit den drei Geraden* $\mathfrak{xy}$, $\mathfrak{xz}$, $\mathfrak{yz}$, *welche die Durchschnitte* $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ *der gegenüber stehenden Seiten des vollständigen Vierecks verbinden, zusammen.«*

Die drei Durchschnitte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ *der gegenüber stehenden Seiten des vollständigen Vierecks fallen mit den drei Durchschnitten* $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ *der Diagonalen des vollständigen Vierseits zusammen.«*

Zufolge dieses Satzes kann man also, wie man sieht, sehr leicht mittelst des Lineals:

4. »*Wenn irgend vier Tangenten* A, A_1, A_2, A_3 *eines Kegelschnitts und der Berührungspunkt einer derselben, etwa* $\mathfrak{a}$, *gegeben sind, die Berührungspunkte* $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ *der drei übrigen Tangenten finden.«* Denn durch die vier Tangenten sind die Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ gegeben, durch diese und durch $\mathfrak{a}$ werden die Strahlen d, c, b bestimmt, welche durch die gesuchten Punkte $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_1$ gehen.

4. »*Wenn irgend vier Punkte* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ *eines Kegelschnitts und die Tangente in einem derselben, etwa* A, *gegeben sind, die Tangenten* A_1, A_2, A_3 *in den drei übrigen Punkten finden.«* Denn durch die vier Punkte sind die Geraden $\mathfrak{xy}$, $\mathfrak{xz}$, $\mathfrak{yx}$ bestimmt, durch diese und durch A sind die Punkte $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ gegeben, welche in den gesuchten Tangenten A_3, A_2, A_1 liegen.

IV. Die Sätze in (II. und III.), nebst vielen anderen Sätzen, kann man, wie es einige französische Mathematiker [155] gethan haben, dadurch aus den Sätzen in (I.) ableiten, dass man von den jedesmaligen sechs Elementen des Kegelschnitts allmählich ein oder zwei Paar, u. s. w., sich vereinigen lässt. Auf diese Weise folgen z. B., wenn man in (I, § 3) die beiden Dreiecke (sowohl links als rechts) sich allmählich so verändern lässt, dass die Seiten des einen zuletzt den Kegelschnitt berühren, wobei dann nothwendiger Weise die Ecken des anderen in die Berührungspunkte der Seiten des ersteren zu liegen kommen, unmittelbar nachstehende bekannte Sätze:

1. »*Bei jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Dreieck treffen die drei Geraden, welche die Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüber stehenden Seiten verbinden, in irgend einem Punkte zusammen.«*

1. »*Bei jedem einem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecke liegen die drei Punkte, in welchen die Seiten von den Tangenten in den gegenüber stehenden Ecken geschnitten werden, in irgend einer Geraden.«*

Und umgekehrt:

2. »*Zieht man aus den Ecken eines Dreiecks durch irgend einen Punkt drei Gerade, so begegnen diese den gegenüber stehenden Seiten in drei solchen Punkten, in welchen sie von irgend einem bestimmten Kegelschnitte berührt werden.*«

2. »*Schneidet man die Seiten eines Dreiecks durch irgend eine Gerade, so sind die drei Geraden, welche die Durchschnitte mit den gegenüber stehenden Ecken verbinden, Tangenten irgend eines bestimmten, dem Dreiecke umschriebenen Kegelschnitts.*«

Man sieht, wie man vermöge dieser Sätze sehr leicht:

3. »*Wenn irgend drei Tangenten eines Kegelschnitts und die Berührungspunkte zweier derselben* [156] *gegeben sind, den Berührungspunkt der dritten finden kann.*«

3. »*Wenn irgend drei Punkte eines Kegelschnitts und die Tangenten in zweien derselben gegeben sind,* [156] *die Tangente im dritten finden kann.*«

Die vorstehenden Sätze sind vieler Folgerungen fähig, die aber gegenwärtig nicht ausgeführt werden dürfen; später soll ein Theil davon entwickelt werden. Eine grosse Reihe von Sätzen, mit denen sie in Beziehung stehen, habe ich im ersten und zweiten Hefte des XIX. Bandes der *Annales de Mathématiques* bekannt gemacht.

43. I. Andere Beziehungen zwischen sechs gleichnamigen Elementen eines Kegelschnitts (§ 42, I.) gründen sich auf die Gleichheit der Doppelverhältnisse bei projectivischen Gebilden, und lauten wie folgt (§ 10, α. und § 38, III.):

1. »*Bei irgend sechs Tangenten eines Kegelschnitts werden je zwei von den jedesmaligen vier übrigen so geschnitten, dass die Doppelverhältnisse aus den Abschnitten gleich sind.*« Oder

»*Irgend vier feste Tangenten eines Kegelschnitts schneiden alle übrigen Tangenten desselben nach einem und demselben Doppelverhältnisse.*«

1. »*Bei irgend sechs Punkten eines Kegelschnitts bestimmen je zwei mit den vier übrigen solche Strahlen, dass die Doppelverhältnisse der Sinusse der dazwischen liegenden Winkel gleich sind.*« Oder

»*Irgend vier feste Punkte eines Kegelschnitts bestimmen mit jedem andern Punkte desselben vier Strahlen, denen ein und dasselbe Doppelverhältniss zukommt.*«

Und umgekehrt:

2. »*Alle möglichen Geraden, welche von irgend vier festen Geraden nach einem und demselben Doppelverhältnisse geschnitten*

2. »*Alle möglichen Punkte, welche mit irgend vier festen Punkten vier solche Strahlen bestimmen, denen ein gegebenes Dop-*

werden, sind, sammt den vier festen Geraden, Tangenten [157] *irgend eines bestimmten Kegelschnitts.«*

pelverhältniss zukommt, liegen in irgend einem, durch [157] *die vier festen Punkte gehenden Kegelschnitt.«*

Die Sätze links sind, unter anderer Form abgefasst, bekannt.

Die vielen Folgerungen, die sich aus den vorstehenden Sätzen ziehen lassen, müssen hier übergangen werden; nur der nachstehende besondere Fall soll gegenwärtig in Betracht gezogen werden.

II. Wenn bei den vorigen Sätzen die erwähnten Doppelverhältnisse den besonderen Werth $= 1$ haben, so dass also die jedesmaligen betreffenden vier Elemente harmonisch sind (§ 12, II.), so lauten die Sätze insbesondere wie folgt:

1. »*Schneiden vier Tangenten eines Kegelschnitts irgend eine fünfte harmonisch, so schneiden sie auch jede andere Tangente desselben ebenso.«*

1. »*Bestimmen vier Punkte eines Kegelschnitts mit irgend einem fünften harmonische Strahlen, so thun sie mit jedem anderen Punkte desselben ein Gleiches.«*

Und umgekehrt:

2. »*Alle Geraden, welche von irgend vier festen Geraden harmonisch geschnitten werden, berühren einen bestimmten Kegelschnitt, welcher auch von jenen esten Geraden berührt wird.«*

2. »*Alle Punkte, welche mit irgend vier festen Punkten vier harmonische Strahlen bestimmen, liegen in einem bestimmten Kegelschnitt, der durch jene festen Punkte geht.«*

Die vier festen Tangenten sollen in Bezug auf den betreffenden Kegelschnitt »vier harmonische Tangenten«, und umgekehrt soll der Kegelschnitt in Bezug auf das durch jene gebildete Vierseit »der eingeschriebene harmonische Kegelschnitt« genannt werden. Eben so sollen andererseits die vier festen Punkte in Bezug auf den zugehörigen Kegelschnitt »vier harmonische Punkte«, und umgekehrt [158] der Kegelschnitt in Bezug auf das durch die Punkte bestimmte Viereck »der umschriebene harmonische Kegelschnitt« heissen. Um diese Eigenschaften vollständig aufzuklären, müssen hier noch folgende Betrachtungen hinzugefügt werden.

Sind A, A_1, A_2, A_3 (Fig. 40) irgend vier harmonische Tangenten eines Kegelschnitts und ist A_4 eine beliebige fünfte Tangente desselben, so sind also die vier Punkte $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, in welchen sie von jenen geschnitten wird, harmonisch. Nun sind z. B. A und A_4 in Ansehung der Punkte, in welchen sie von den übrigen Tangenten geschnitten werden, projectivisch, und zwar entspricht dem Punkte $\mathfrak{h}$ in A_4 der Berührungspunkt $\mathfrak{a}$ in A (§ 38, III.), so dass also den vier Punkten $\mathfrak{h}, \mathfrak{i}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}$ in A_4 die vier Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ in A entsprechen; folglich sind auch die vier letzteren Punkte harmonisch. Gleiches folgt für die übrigen Tangenten A_1, A_2, A_3. Wenn aber sowohl $\mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}$ als $\mathfrak{c}, \mathfrak{e}, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{g}$ harmonisch sind, so müssen die drei Geraden $\mathfrak{be}$, $\mathfrak{aa}_2$, $\mathfrak{dg}$ einander in einem und demselben Punkte $\mathfrak{f}$ treffen (§ 12 und § 14). Aus gleichen Gründen liegen die Berührungspunkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_3$ der sich zugeordneten harmonischen Tangenten A_1, A_3 mit dem Durchschnitte $\mathfrak{c}$ der beiden übrigen A, A_2 in einer Geraden $\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3$.

Sind andererseits B, B_1, B_2, B_3 (Fig. 41) irgend vier harmonische Punkte in einem Kegelschnitte, und ist B_4 ein beliebiger fünfter Punkt desselben, so sind also die vier Strahlen h, i, k, l harmonisch, und da die Strahlbüschel B_4 und B in Ansehung der Strahlen h, i, k, l und a, b, c, d, wo nämlich a die Tangente im Mittelpunkte B ist, projectivisch sind (§ 38, III.), so sind folglich auch die vier Strahlen a, b, c, d harmonisch. Gleiches findet für die drei übrigen Punkte [159] B_1, B_2, B_3 statt. Wenn aber sowohl c, b, a, d als c, e, a_2, g harmonisch sind, so müssen die drei Punkte B_1, $\mathfrak{c}$, B_3 in einer Geraden liegen (§ 12 und 14). Aus ähnlichen Gründen müssen die Tangenten a_1, a_3 in den zwei sich zugeordneten harmonischen Punkten B_1 B_3 mit der durch die zwei übrigen (zugeordneten) Punkte B, B_2 bestimmten Geraden c in einem Punkte $\mathfrak{f}$ zusammentreffen.

Aus dieser Betrachtung fliesst Folgendes:

3. »*Irgend vier harmonische Tangenten eines Kegelschnitts haben solche Beziehung zu einander, dass* α) *der Berührungspunkt einer jeden zu den drei Punkten, in welchen sie von den drei übrigen geschnitten wird, der vierte harmonische Punkt ist, und zwar demjenigen zugeordnet, in welchem die jedesmalige Tangente von der ihr zugeordneten geschnitten wird; und dass* β) *die Berührungspunkte je zweier zugeordneten Tangenten und der Durchschnitt der zwei übrigen Tangenten in einer Ge-*

3. »*Irgend vier harmonische Punkte eines Kegelschnitts haben solche Beziehung zu einander, dass* α) *die Tangente in jedem zu den drei Strahlen, welche er mit den drei übrigen bestimmt, der vierte harmonische Strahl ist, und zwar demjenigen zugeordnet, welcher durch den, dem jedesmaligen Punkte zugeordneten Punkt geht; und dass* β) *die Tangenten in je zweien zugeordneten Punkten und die Gerade, welche die zwei übrigen Punkte verbindet, durch einen Punkt gehen.*« Und umgekehrt:

raden liegen.« Und umgekehrt: γ) *»Erfüllen vier Tangenten eines Kegelschnitts eine der zwei Bedingungen* (α), (β), *so sind sie harmonisch.«* Daher folgt weiter (γ rechts): δ) *»dass vier harmonische Tangenten eines Kegelschnitts diesen in vier harmonischen Punkten berühren.«*

γ) *»Erfüllen vier Punkte eines Kegelschnitts eine der zwei Bedingungen* (α), (β), *so sind sie harmonisch.«* Daher folgt weiter (γ links): δ) *»dass vier Tangenten eines Kegelschnitts, die ihn in vier harmonischen Punkten berühren, ebenfalls harmonisch sind.«*

[**160**] Mittelst dieser Eigenschaften lassen sich nachstehende Aufgaben sehr leicht lösen.

4. *»Die einem gegebenen Vierseit eingeschriebenen drei harmonischen Kegelschnitte zu finden, d. h., die Punkte anzugeben, in welchen sie die gegebenen Geraden berühren.«*

4. *»Die einem gegebenen Viereck umschriebenen drei harmonischen Kegelschnitte zu finden, d. h., die Tangenten anzugeben, von welchen sie in den gegebenen Punkten berührt werden.«*

Da nämlich die Seiten des gegebenen Vierseits, etwa A, A_1, A_2, A_3 (Fig. 42), auf drei verschiedene Arten einander zugeordnet werden können (§ 4), nämlich entweder a) A und A_1, A_2 und A_3, oder b) A und A_2, A_1 und A_3, oder c) A und A_3, A_1 und A_2, so giebt es auch drei eingeschriebene harmonische Kegelschnitte, deren Berührungspunkte unmittelbar wie folgt gefunden werden. Sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Durchschnitte der drei Diagonalen des Vierseits, so müssen, im Falle (a), die Berührungspunkte $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}_1$ einerseits mit $\mathfrak{g}$ (3, β), und andererseits mit $\mathfrak{z}$ (§ 42, III.) in einer Geraden liegen, folglich müssen sie in der Geraden $\mathfrak{g}\mathfrak{z}$ liegen. Ebenso sind die zwei übrigen Berührungspunkte $\mathfrak{i}_2$, $\mathfrak{i}_3$ durch die Gerade $\mathfrak{b}\mathfrak{z}$ gegeben. Aus gleichen Gründen sind im Falle (b) die beiden Paar Berührungspunkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_3$ mittelst der Geraden $\mathfrak{f}\mathfrak{y}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{y}$ gegeben; und ebenso werden im Falle (c) die gesuchten zwei Paar Berührungspunkte $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_3$, $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ bloss durch Ziehen der Geraden $\mathfrak{e}\mathfrak{x}$, $\mathfrak{d}\mathfrak{x}$ gefunden, — Andererseits, d. h., bei der Aufgabe rechts, werden die gesuchten Tangenten durch ein entsprechendes Verfahren gefunden, was Jeder leicht wird ausführen können[8]).

5. *»Zu irgend drei gegebenen Tangenten eines Kegelschnitts die vierte harmonische zu finden.«*

5. *»Zu irgend drei gegebenen Punkten eines Kegelschnitts den vierten harmonischen zu finden.«*

[**161**] Es darf kaum erinnert werden, dass die Auflösung dieser Aufgaben unmittelbar aus (3, β) folgt. Jeder Aufgabe

kommen, vermöge der verschiedenen Zuordnungen, drei Auflösungen zu.

So wie zu zwei festen Punkten $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ in einer Geraden A_4 (Fig. 40) unzählige Paare von zugeordneten harmonischen Punkten $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{l}$ möglich sind (§ 8, III.), ebenso sind also auch zu irgend zwei festen Tangenten A, A_2 eines Kegelschnitts unzählige Paare von zugeordneten harmonischen Tangenten A_1, A_3 möglich, und es muss, zufolge (3, β) der Durchschnitt $\mathfrak{f}$ eines jeden der letzteren Paare in der Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$ liegen, welche durch die Berührungspunkte jenes festen Tangentenpaares geht, und die verschiedenen Paare Berührungspunkte derselben müssen in Geraden $\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{a}_3$, ... liegen, welche sämmtlich durch den Durchschnitt $\mathfrak{c}$ der festen Tangenten gehen. Andererseits folgt Entsprechendes. Daher folgen weiter nachstehende Sätze:

6. »*In Bezug auf irgend zwei Tangenten A, A_2 eines Kegelschnitts giebt es unzählige zugeordnete harmonische Tangentenpaare, nämlich jede zwei Tangenten (A_1, A_3), deren Durchschnitt ($\mathfrak{f}$) in derjenigen Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$ liegt, welche durch die Berührungspunkte jener zwei geht, sind ein solches Paar.*«

6. »*In Bezug auf irgend zwei Punkte B, B_2 eines Kegelschnitts giebt es unzählige zugeordnete harmonische Punktenpaare, nämlich jede zwei Punkte (B_1, B_3), die in einer Geraden (f) liegen, welche durch den Durchschnitt der Tangenten in jenen Punkten geht, sind ein solches Paar.*«

Diese Sätze gestatten verschiedene Umkehrungen, wovon einige, als Theile umfassenderer Sätze, im nächsten Paragraph folgen*).

[162] **Harmonische Pole und Gerade in Bezug auf einen Kegelschnitt.**

44. Aus vorhergehenden Sätzen folgt leicht eine merkwürdige Eigenschaft der Kegelschnitte, die für mancherlei Untersuchungen sehr fruchtbar und in neuerer Zeit, seit *Monge* sie in Anregung gebracht, mit gutem Erfolge benutzt worden ist. Das Wesentlichste davon soll hier kurz angedeutet werden.

---

*) Auch enthalten sie besondere Fälle, die später, bei Untersuchung der conjugirten Durchmesser der Kegelschnitte, in Betracht kommen, nämlich man wird finden: dass die Scheitel irgend zweier conjugirten Durchmesser eines Kegelschnitts vier harmonische Punkte, und die ihnen zugehörigen Tangenten vier harmonische Tangenten desselben sind.

Es seien A, A_1, A_2, A_3 (Fig. 43) irgend vier Tangenten eines Kegelschnitts und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ ihre Berührungspunkte, so kommen dem Vierseit $A A_1 A_2 A_3$ und dem Viereck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$, ausser den in (§ 42, III, 3) angegebenen Beziehungen, auch noch die in (§ 20, I.) ausgesprochenen Eigenschaften zu, wonach unter anderen z. B. die vier Strahlen $\mathfrak{z}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{z}\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{z}\mathfrak{x}$ harmonisch sind. Diese Strahlen werden also jede Gerade harmonisch schneiden (§ 8, II.), so dass sowohl die vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{x}$, als $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{u}$, als $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{v}$, als $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{x}$ harmonisch sind. Vermöge dieser Punkte sind ferner sowohl die vier Strahlen $\mathfrak{f}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{f}\mathfrak{y}$, $\mathfrak{f}\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{f}\mathfrak{v}$, als $\mathfrak{e}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{e}\mathfrak{s}$, $\mathfrak{e}\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{e}\mathfrak{x}$ harmonisch. Da zu den drei Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{u}$ nur ein einziger, dem $\mathfrak{u}$ zugeordneter, vierter harmonischer Punkt $\mathfrak{y}$ möglich ist, so muss also, wenn der Kegelschnitt nebst den Tangenten A, A_2 und der Geraden $\mathfrak{c}\mathfrak{u}$ fest bleiben, die Berührungssehne $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3$ der Tangenten A_1, A_3 stets durch denselben festen Punkt $\mathfrak{y}$ gehen, wo man auch den Durchschnitt $\mathfrak{f}$ der Tangenten auf der festen Geraden $\mathfrak{c}\mathfrak{u}$ annehmen mag; aus ähnlichen Gründen muss, wenn der Kegelschnitt nebst den Tangenten A, A_3 und der Geraden $\mathfrak{d}\mathfrak{r}$ fest [**163**] bleiben, die Gerade $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, welche die Berührungspunkte der Tangenten A_1, A_2 verbindet, immerhin durch den festen Punkt $\mathfrak{x}$ gehen, wo man auch den Durchschnitt $\mathfrak{e}$ dieser Tangenten längs der festen Geraden $\mathfrak{d}\mathfrak{r}$ hinrücken mag. Wird noch bemerkt, dass zufolge (§ 43, II, 3, β) die Gerade $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ durch die Berührungspunkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ der sich in $\mathfrak{x}$ schneidenden Tangenten $\mathfrak{x}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{x}\mathfrak{q}$ geht (dies würde auch folgen, wenn man die drei Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ allmählich mit $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{q}$ zusammenfallen liesse), so folgen zusammengenommen nachstehende Sätze:

I. »*Dreht sich eine Gerade* ($\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3$, oder $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$), *die einen Kegelschnitt schneidet, um irgend einen* (*in ihr liegenden*) *festen Punkt* ($\mathfrak{y}$ oder $\mathfrak{x}$): α) *so ist der Ort desjenigen Punkts* ($\mathfrak{v}$ oder $\mathfrak{s}$), *welcher zu den zwei Durchschnittspunkten* ($\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_3$, oder $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$) *und dem festen Punkte der vierte, und zwar dem letzteren zugeordnete, harmonische Punkt ist, eine bestimmte Gerade* (y oder x); *und* β) *in dieser Geraden bewegt sich zugleich der Durchschnitt* ($\mathfrak{f}$ oder $\mathfrak{e}$) *derjenigen zwei Tangenten* (A_1, A_3, oder

I. »*Bewegt sich ein Punkt* ($\mathfrak{f}$ oder $\mathfrak{e}$) *in einer festen Geraden* (y oder x) *in der Ebene eines Kegelschnitts*: α) *so geht diejenige Gerade* (v oder s), *welche zu den zwei durch den Punkt gehenden Tangenten* (A_1, A_3, oder A_1, A_2) *und der festen Geraden die vierte, der letzteren zugeordnete, harmonische Gerade* (Strahl) *ist, durch einen bestimmten Punkt* ($\mathfrak{y}$, oder $\mathfrak{x}$); und β) *um diesen Punkt dreht sich zugleich diejenige Gerade* ($\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3$, oder $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$), *welche durch die Berührungspunkte* ($\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3$, oder

A_1, A_2), durch deren Berührungspunkte jene bewegliche schneidende Gerade geht.«

$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$) der jedesmaligen zwei Tangenten geht.«

Vermöge dieser merkwürdigen gegenseitigen Beziehung des Punkts $\mathfrak{y}$ oder $\mathfrak{x}$ und der Geraden y oder x im Verhältniss zum Kegelschnitt (α) soll in der Folge die Gerade »die harmonische des Punkts«, und der Punkt »der harmonische Pol der Geraden« [164] in Bezug auf den Kegelschnitt heissen*). Man sieht, dass, je nachdem der Punkt innerhalb, wie $\mathfrak{y}$, oder ausserhalb, wie $\mathfrak{x}$, des Kegelschnitts liegt, seine Harmonische dem Kegelschnitt gar nicht begegnet, wie y, oder ihn schneidet, wie x, und zwar ihn in den Berührungspunkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ der durch den Punkt $\mathfrak{x}$ gehenden Tangenten schneidet, wie bereits oben bemerkt worden; so dass also »der Durchschnitt irgend zweier Tangenten eines Kegelschnitts der harmonische Pol der durch die Berührungspunkte gehenden Geraden ist«; dass also z. B. e die Harmonische des Punkts $\mathfrak{e}$, f die Harmonische des Punkts $\mathfrak{f}$, c die Harmonische des Punkts $\mathfrak{c}$, u. s. w., ist. Demnach geht die Harmonische jedes Punkts ($\mathfrak{f}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{x}$, ...) der Geraden Y durch den harmonischen Pol der letzteren. Gleiches findet auch bei der Geraden X statt, nämlich nicht nur die Harmonischen der ausserhalb des Kegelschnitts liegenden Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{b}$, ..., sondern auch die der innerhalb liegenden, wie etwa $\mathfrak{s}$, gehen durch den Pol $\mathfrak{x}$, denn da die vier Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{x}$ harmonisch sind, so liegt $\mathfrak{x}$ in der Harmonischen s des Punkts $\mathfrak{s}$. Daher folgt (was zum Theil, mit anderen Worten ausgesprochen, im vorstehenden Satze (I, β) enthalten ist):

II. »*Die harmonischen Pole aller Geraden, die durch irgend einen Punkt* ($\mathfrak{y}$ oder $\mathfrak{x}$) *gehen, in Bezug auf einen Kegelschnitt, liegen in einer bestimmten Geraden* (y oder x), *nämlich in der Harmonischen jenes Punkts.«*

II. »*Die Harmonischen aller Punkte, die in irgend einer Geraden* (y oder x) *liegen, in Bezug auf einen Kegelschnitt, gehen durch einen bestimmten Punkt* ($\mathfrak{y}$ oder $\mathfrak{x}$), *nämlich durch den harmonischen Pol jener Geraden.«*

[165] Oder kürzer:

»*Geht eine Gerade durch irgend einen Punkt, so geht die*

»*Liegt ein Punkt in irgend einer Geraden, so liegt der Pol*

*) Die französischen Mathematiker nennen sie gewöhnlich schlechthin *Polaire* und *Pol*.

Harmonische des letzteren durch ihren harmonischen Pol.«

der letzteren in seiner Harmonischen.«

Man wird bemerken, dass Beides im Grunde nur ein und derselbe Satz ist. In der Folge sollen irgend zwei solche Gerade, von denen jede durch den harmonischen Pol der andern geht, »zwei zugeordnete harmonische Gerade«, oder schlechthin »zwei zugeordnete Harmonische«, und ähnlicher Weise sollen ihre Pole »zwei zugeordnete harmonische Pole« heissen. Es sind also sowohl y und x, als x und z, als z und y, u. s. w., zwei zugeordnete Harmonische, und sowohl $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$, u. s. w., zwei zugeordnete harmonische Pole. Ferner sollen je drei Gerade, von denen jede durch die harmonischen Pole der zwei übrigen geht, wie z. B. x, y, z, oder x, e, s, »drei zugeordnete Harmonische«, und ebenso je drei Punkte, von denen jeder der Durchschnitt der Harmonischen der zwei übrigen ist, wie z. B. $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, oder $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{s}$, »drei zugeordnete harmonische Pole« genannt werden. Die Durchschnitte dreier zugeordneten Harmonischen sind, wie man sieht, zugleich drei zugeordnete harmonische Pole, und auch umgekehrt.

Da die drei Geraden x, y, z, so wie die drei Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, sowohl durch das vollständige Vierseit $AA_1A_2A_3$, als durch das vollständige Viereck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ bestimmt werden, so folgen unmittelbar nachstehende Sätze:

III. »*Alle einem vollständigen Vierseit $AA_1A_2A_3$ eingeschriebenen* [166] *Kegelschnitte haben gemeinschaftlich drei zugeordnete Harmonische und drei zugeordnete harmonische Pole, nämlich die drei Diagonalen x, y, z des Vierseits und ihre Durchschnitte* $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$.«

III. »*Alle einem* (*vollständigen*) *Viereck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ umschriebenen* [166] *Kegelschnitte haben gemeinschaftlich drei zugeordnete harmonische Pole und drei zugeordnete Harmonische, nämlich die drei Durchschnitte der gegenüber stehenden Seiten und die durch sie bestimmten Geraden.«*

Nach dem festgestellten Plane darf diese fruchtbare Betrachtung gegenwärtig nicht weiter entwickelt werden; nur folgende Aufgaben, die mittelst des Lineals sehr leicht zu lösen sind, mögen hier noch Platz finden:

IV. »*Die Harmonische irgend eines gegebenen Punkts, in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt zu finden.«*

IV. »*Den harmonischen Pol einer gegebenen Geraden, in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt zu finden.«*

Es sei etwa $\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{y}$ der gegebene Punkt (links). Man ziehe durch denselben irgend zwei den Kegelschnitt schneidende

Geraden d, e, oder c, f, verbinde die jedesmaligen vier Durchschnitte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ paarweise durch zwei Paar Geraden b und g, c und f, oder b und g, d und e, so liegen die Durchschnitte $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$, oder $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}$ dieser Geradenpaare, zufolge der oben angegebenen Beziehungen, in der gesuchten Harmonischen x oder y, welche also gefunden ist. Auf diese Weise suche man, um die Aufgabe rechts zu lösen, zu irgend zwei Punkten der gegebenen Geraden die Harmonischen, so ist der Durchschnitt der letzteren der verlangte Pol (II).

V. »An einen (gezeichnet vorliegenden) Kegelschnitt, mittelst des Lineals, Tangenten zu ziehen, die durch einen, ausserhalb desselben liegenden, gegebenen Punkt $\mathfrak{x}$ gehen.«

[**167**] Man suche nach (IV) links, die Harmonische x des gegebenen Punkts $\mathfrak{x}$, und verbinde die Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, in welchen sie dem Kegelschnitte begegnet, mit dem gegebenen Punkte durch Gerade, so sind diese die verlangten Tangenten (zufolge der oben stehenden Betrachtung).

45. Die vorhin (§ 44) entwickelten Sätze über harmonische Geraden und Pole sind die Fundamentalsätze von einer sehr fruchtbaren geometrischen Untersuchung, die in der neuesten Zeit von französischen Mathematikern mit grossem Erfolge angewandt und ausgebildet worden. Ich muss mir vorbehalten, später auf diesen Gegenstand zurückzukommen (im vierten Abschnitte), wo alsdann nicht allein grosse Reihen von Sätzen und merkwürdigen Eigenschaften entwickelt werden, sondern auch das eigentliche Wesen des Gegenstandes gründlicher und umfassender enthüllt werden wird. Denn in der That wird sich zeigen, dass weder das Vorstehende (was hier nur beiläufig entwickelt wurde), noch die Art und Weise, wie der Gegenstand bisher von Anderen behandelt worden, über die innere Natur und die eigentliche Bedeutung dieser Eigenschaften gehörige Auskunft giebt, sondern dass vielmehr dieser Gegenstand, wie er bisher aufgefasst und erkannt worden, nur ein Theil eines umfassenderen Ganzen ist, wovon der andere Theil, der mit jenem in sehr naher Beziehung steht, unter anderer Gestalt längst allgemein bekannt war, und dass endlich die gemeinschaftliche Urquelle beider Theile aus einer eigenthümlichen Verbindung projectivischer Gebilde entspringt*).

*) Dadurch wird unter anderen auch die merkwürdige Eigenschaft von sechs Punkten in einer Geraden, die von *Désargues*

[**168**] Um hier nur an einem Beispiele die fruchtbare Anwendung der im Vorhergehenden aufgestellten Eigenschaften der harmonischen Geraden und Pole zu zeigen, soll ein von *Brianchon* gefundener merkwürdiger Satz über Kegelschnitte *) durch dieselben bewiesen werden. Der Satz wird durch folgende Aufgabe herbeigeführt.

»*Wenn in einer Ebene sich irgend zwei Kegelschnitte K, K_1 befinden, welchem Gesetz sind dann die den Tangenten des einen K_1, in Beziehung auf den anderen K, entsprechenden harmonischen Pole unterworfen?*« **)

»*Wenn in einer Ebene sich irgend zwei Kegelschnitte K, K_1 befinden, welchem Gesetz sind dann die den Punkten des einen K_1, in Beziehung auf den anderen K, entsprechenden Harmonischen unterworfen?*« **)

Es seien a, b, c, d, e, f irgend sechs Tangenten des Kegelschnitts K, und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ die ihnen entsprechenden harmonischen Pole. Das Sechsseit $abcdef$ hat die Eigenschaft, dass die drei Diagonalen, welche die gegenüberstehenden Ecken verbinden, einander [**169**] in irgend einem Punkte treffen (§ 42, I, 1), daher müssen die drei Durchschnitte der gegenüberstehenden Seiten des Sechsecks $\mathfrak{abcdef}$ in einer Geraden liegen, weil sie die harmonischen Pole jener Diagonalen sind (§ 44, II); folglich muss das Sechseck $abcdef$ irgend einem Kegelschnitte K_2 eingeschrieben sein (§ 42, I, 2); und da dieser Kegelschnitt durch irgend fünf Punkte, etwa durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ bestimmt ist (§ 41, I), so ist er folglich der Ort der harmonischen Pole der Tangenten des Kegelschnitts K_1, weil jede beliebige andere Tangente statt jener sechsten f genommen werden kann. Lässt man die bewegliche Tangente f allmählich mit einer der festen, etwa mit a, zusammenfal-

»*Involution*« genannt wurde, und mit der sich nach ihm verschiedene Mathematiker beschäftigt haben, auf eine sehr einfache und befriedigende Weise aufgeklärt werden.

*) *X. Cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique.*

**) Wenn in der Ebene eines Kegelschnitts mehrere Gerade oder Punkte angenommen werden, die in Ansehung ihrer gegenseitigen Lage irgend einem bestimmten Gesetze unterworfen sind, so kann gefragt werden, welchem Gesetze die ihnen, in Bezug auf den Kegelschnitt, entsprechenden harmonischen Pole oder Geraden unterworfen seien. Und eine ähnliche Frage kann aufgeworfen werden, in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades im Raume. Die aus diesen Fragen entspringende Untersuchung haben die französischen Mathematiker »*Théorie des polaires réciproques*« genannt. Das allgemeine Gesetz, welches dieser Untersuchung zu Grunde liegt, hat auch *Moebius* (Barycentrische Calcül, § 287) auf sehr geschickte Weise bewiesen.

len, so wird sich der Durchschnitt beider Tangenten mit dem Berührungspunkte $\mathfrak{a}_1$ der festen Tangente a vereinigen, und dann müssen auch ihre Pole $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a}$ sich vereinigen, und also die Sekante $\mathfrak{af}$ des Kegelschnitts K_2 in die Tangente a_1 im Punkte $\mathfrak{a}$ übergehen, und zwar muss diese Tangente a_1 die Harmonische jenes Berührungspunkts $\mathfrak{a}_1$ sein. Also folgen nachstehende Sätze:

»Wenn in einer Ebene sich irgend zwei Kegelschnitte K, K_1 befinden, so liegen die den Tangenten a, b, c, ... des zweiten K_1, in Beziehung auf den ersten K, entsprechenden harmonischen Pole $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... in irgend einem bestimmten dritten Kegelschnitt K_2, und es berühren die den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, ... des zweiten K_1 entsprechenden Harmonischen a_1, b_1, c_1, ... einen und denselben dritten Kegelschnitt K_2, und zwar solcher Gestalt, dass jeder Tangente a und ihrem Berührungspunkte $\mathfrak{a}_1$ des zweiten Kegelschnitts K_1, ein bestimmter [170] Punkt $\mathfrak{a}$ und dessen zugehörige Tangente a_1 im dritten Kegelschnitt K_2 entspricht.«

Wofern der zweite Kegelschnitt K_1 nicht (oder wenigstens nicht ganz) von dem ersten K eingeschlossen wird, folgt aus diesem Satze, vermöge (§ 44) unmittelbar der anfangs erwähnte Satz des *Brianchon*, nämlich:

»Bewegen sich zwei veränderliche Tangenten eines Kegelschnitts K, so:

dass die Gerade durch ihre Berührungspunkte stets irgend einen zweiten Kegelschnitt K_1 berührt, so durchläuft ihr Durchschnitt irgend einen dritten Kegelschnitt K_2« *).

dass ihr Durchschnitt irgend einen zweiten Kegelschnitt K_1 durchläuft, so berührt die Gerade durch ihre Berührungspunkte stets irgend einen dritten Kegelschnitt K_2« *).

Zusammengesetztere Sätze und Porismen.

46. Durch Zusammenstellung oder Verbindung projectivischer Gebilde (Gerade und ebene Strahlbüschel) gelangt man, mit Berücksichtigung ihrer Erzeugung der Kegelschnitte

---

*) Mittelst dieser Sätze kann von folgenden zwei Aufgaben:

»*Die gemeinschaftlichen Tangenten zweier gegebenen Kegelschnitte zu finden*«

»*Die gemeinschaftlichen Punkte zweier gegebenen Kegelschnitte zu finden*«

jede auf die andern zurückgeführt werden.

(§ 38, III, IV), zu zahlreichen merkwürdigen Sätzen und Porismen, woven, gemäss der obigen Feststellung (§ 39), beispielsweise hier einige entwickelt werden sollen.

I. Sind in einer Ebene irgend zwei Gerade A, A_1 (Fig. 45) perspectivisch, und ist B_2 ihr Projectionspunkt, und sind sie ferner mit irgend zwei Strahlbüscheln B, B_1 perspectivisch, nämlich A mit B, und A_1 [171] mit B_1, so sind diese Strahlbüschel B, B_1 unter sich projectivisch (§ 11, III), und erzeugen folglich (§ 38, IV) einen Kegelschnitt, d. h., die Durchschnitte $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, ... ihrer entsprechenden Strahlen, also insbesondere auch der Durchschnitt $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$ der Geraden A, A_1, weil in ihm zwei entsprechende Strahlen e, e_1 sich treffen, liegen in irgend einem Kegelschnitt, der fortan durch $[B B_1]$ bezeichnet werden soll. — Sind andererseits B, B_1 (Fig. 44) irgend zwei perspectivische Strahlbüschel; ist A_2 ihr perspectivischer Durchschnitt, und sind sie ferner mit irgend zwei Geraden A, A_1 perspectivisch, so sind diese unter sich projectivisch und erzeugen also irgend einen Kegelschnitt $[A A_1]$. Hieraus gehen unmittelbar folgende bekannte Sätze hervor:

»*Bewegen sich die Ecken* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ *eines veränderlichen Dreiecks* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ (Fig. 44) *in drei beliebigen festen Geraden* A, A_1, A_2, *und gehen zwei Seiten* a, a_1 *desselben stets durch irgend zwei feste Punkte* B, B_1, *so berührt die dritte Seite* a_2 *beständig irgend einen bestimmten Kegelschnitt* $[A A_1]$, *der nämlich auch die beiden ersteren Geraden* A, A_1 *nebst der Geraden* e_1 *durch die festen Punkte* B, B_1 *zu Tangenten hat.*«

»*Drehen sich die Seiten* a, a_1, a_2 *eines veränderlichen Dreiecks* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ (Fig. 45) *um drei beliebige feste Punkte* B, B_1, B_2, *und bewegen sich zwei Ecken* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_2$ *desselben in irgend zwei festen Geraden* A, A_1, *so durchläuft die dritte Ecke* $\mathfrak{a}_2$ *irgend einen bestimmten Kegelschnitt* $[B B_1]$, *in welchem nämlich auch die beiden ersten Punkte* B, B_1, *nebst dem Durchschnitte* $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$ *der festen Geraden* A, A_1 *liegen.*«

Und umgekehrt:

»*Bewegt sich eine Seite* a_2 *eines veränderlichen Dreiecks* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ *als Tangente eines festen Kegelschnitts* $[A A_1]$, *und drehen sich die zwei übrigen Seiten* a, a_1 *um irgend zwei feste Punkte* [172] B, B_1 *in einer Tangente desselben, und bewegen sich die diesen Seiten gegenüberliegenden Ecken* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ *des Dreiecks in irgend zwei anderen festen Tangenten* A, A_1

»*Bewegt sich eine Ecke* $\mathfrak{a}_2$ *eines veränderlichen Dreiecks* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ *in irgend einem festen Kegelschnitte* $[B B_1]$, *während die zwei übrigen Ecken* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ *irgend zwei feste Geraden* A, A_1, [172] *deren Durchschnitt* $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$ *im Kegelschnitt liegt, durchlaufen, und drehen sich die diesen Ecken gegenüberliegenden Seiten* a, a_1 *um irgend zwei feste Punkte* B, B_1 *des Kegelschnitts,* *des Kegelschnitts, so durchläuft die dritte Ecke* $\mathfrak{a}_2$ *irgend eine bestimmte Gerade* A_2.« Ebenso kann jede der zwei Geraden A, A_1, so wie jeder der zwei Punkte B, B_1 als Folge der jedesmaligen fünf übrigen Gebilde gesetzt werden.

so geht die dritte Seite a_2 *stets durch einen bestimmten Punkt* B_2.« Eben so kann jeder der zwei Punkte B, B_1, so wie jede der zwei Geraden A, A_1 als Folge der jedesmaligen fünf übrigen Gebilde gesetzt werden.

II. Sind irgend vier Gebilde A, A_1, B, B_1 (Fig. 46) unter einander projectivisch, und zwar liegen sowohl A und B, als A_1 und B_1 perspectivisch, dagegen sowohl A und A_1, als B und B_1 schief, so dass also die zwei letzteren Paare irgend zwei Kegelschnitte $[AA_1]$, $[BB_1]$ erzeugen, so folgen in Ansehung der entsprechenden Elemente, wie etwa $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; a, a_1 und die durch diese erzeugten a_2, $\mathfrak{a}_2$, unmittelbar nachstehende Sätze:

1. »*Drehen sich zwei Seiten* a, a_1 *eines veränderlichen Dreiecks* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ *um irgend zwei feste Punkte* B, B_1 *eines festen Kegelschnitts* $[BB_1]$, *während die ihnen gegenüberliegenden Ecken* $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}$ *in irgend zwei festen Geraden* A_1, A *sich bewegen und die dritte Ecke* $\mathfrak{a}_2$ *den Kegelschnitt durchläuft, so bewegt sich die dritte Seite* a_2 *als Tangente irgend eines bestimmten Kegelschnitts* $[AA_1]$, *der nämlich auch jene zwei festen Geraden berührt.*«

1. »*Bewegen sich zwei Ecken* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ *eines veränderlichen Dreiecks* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ *in irgend zwei festen Tangenten* A, A_1 *eines festen Kegelschnitts* $[AA_1]$, *während die ihnen gegenüberliegenden Seiten* a_1, a *sich um irgend zwei feste Punkte* B_1, B *drehen und die dritte Seite* a_2 *stets den Kegelschnitt berührt, so durchläuft die dritte Ecke* $\mathfrak{a}_2$ *irgend einen anderen bestimmten Kegelschnitt* $[BB_1]$, *der nämlich allemal durch jene zwei festen Punkte geht.*«

[**173**] Die Abfassung der übrigen Sätze, wo nämlich, statt wie hier auf die Kegelschnitte $[BB_1]$, $[AA_1]$, umgekehrt auf eins der Gebilde A, A_1, B, B_1 geschlossen wird, überlasse ich dem Leser.

Die beiden Kegelschnitte $[AA_1]$, $[BB_1]$ haben eine eigenthümliche Beziehung zu einander, die sich, so lange $[AA_1]$ ganz oder zum Theil innerhalb $[BB_1]$ liegt, durch folgende merkwürdige Eigenschaft kund giebt. Gelangt nämlich der bewegte Punkt $\mathfrak{a}_2$ in die Durchschnitte $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{e}_2$ der Geraden AA_1 und des Kegelschnitts $[BB_1]$, so vereinigen sich offenbar sowohl die Strahlen b_1 und b_2, als c_1 und c_2, als d und d_1, als e und e_1, so dass also jedes der zwei Dreiecke $\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2B_1$, $\mathfrak{d}_2\mathfrak{e}_2B$ dem Kegelschnitte $[BB_1]$ eingeschrieben und dem Kegelschnitte $[AA_1]$ umschrieben ist. Da durch diese zwei Dreiecke und durch den einen oder den andern der beiden Kegelschnitte die oben angegebenen projectivischen Beziehungen der Gebilde A, A_1, B, B_1 bestimmt sind, wie man leicht bemerken wird, so folgen also nachstehende bekannte Sätze:

2. »*Sind zwei Dreiecke* $\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2B_1$, $\mathfrak{b}_2\mathfrak{e}_2B$ *einem Kegelschnitte* $[BB_1]$ *eingeschrieben, so sind sie zugleich einem anderen Kegelschnitte* $[AA_1]$ *umschrieben.*«

2. »*Sind zwei Dreiecke* $\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2B_1$, $\mathfrak{b}_2\mathfrak{e}_2B$ *einem Kegelschnitte* $[A, A_1]$ *umschrieben, so sind sie zugleich irgend einem anderen Kegelschnitte* $[BB_1]$ *eingeschrieben.*«

Und ferner folgt:

3. »Haben zwei Kegelschnitte $[AA_1]$, $[BB_1]$ solche Lage, dass irgend ein Dreieck dem einen umschrieben und zugleich dem anderen eingeschrieben werden kann, so lassen sich unzählige andere Dreiecke unter denselben Bedingungen beschreiben (nämlich jeder Punkt des Kegelschnitts $[BB_1]$, der nicht innerhalb des Kegelschnitts [174] $[AA_1]$ liegt, kann Ecke eines solchen Dreiecks sein).«

III. Beweis der Auflösung in (§ 17, II). Das bei dieser Auflösung, die sich auf eine der fruchtbarsten Aufgaben bezieht, angewandte sehr bequeme Verfahren gründet sich auf folgende Verbindung. Haben nämlich die vier Gebilde A, A_1, B, B_1, ausser den vorhin angegebenen projectivischen Beziehungen, noch solche besondere Lage zu einander, dass A und A_1 aufeinander und B und B_1 concentrisch liegen, wie in (Fig. 23), und geht irgend ein Kegelschnitt durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt (BB_1) der Strahlbüschel, welcher die Strahlen der letzteren in α, β, γ, ...; α_1, β_1, γ_1, ... schneidet, so werden, wenn man etwa α und α_1 als Mittelpunkte zweier Strahlbüschel α, α_1 annimmt, sowohl die Strahlbüschel α und B_1 in Ansehung der Strahlen a_2, b_2 c_2, ... und a_1, b_1, c_1, ..., als die Strahlbüschel α_1 und B in Ansehung der Strahlen a_3, b_3, c_3, ..., und a, b, c, ... projectivisch sein (§ 38, III), daher sind auch die Strahlbüschel α und α_1 in Ansehung der Strahlen a_2, b_2, c_2, ... und a_3, b_3, c_3, ... projectivisch (§ 11, III), und zwar, da zwei entsprechende Strahlen a_2, a_3 vereiniget sind, liegen sie perspectivisch, so dass also die Gerade $\beta_2\gamma_2$ oder A_2 ihr perspectivischer Durchschnitt ist. Durch jeden Punkt der Geraden A_2 sind demnach irgend zwei entsprechende Strahlen der Strahlbüschel α, α_1 bestimmt, wie z. B.

durch β_2 die Strahlen b_2, b_3, und durch die Punkte β_4, β, in welchen diese Strahlen dem Kegelschnitte begegnen, sind wiederum zwei entsprechende Strahlen b_1, b der Strahlbüschel B_1, B bestimmt; daher ist klar, dass die auf diese Art von den Punkten ε, $\varkappa$, in welchen die Gerade A_2 vom Kegelschnitte getroffen wird, abhängigen entsprechenden Strahlenpaare [175] e und e_1, k und k_1 der Strahlbüschel B und B_1 nothwendiger Weise aufeinander fallen müssen, und dass daher auch in den Punkten, in welchen diese Strahlen den aufeinander liegenden Geraden A, A_1 begegnen, entsprechende Punktenpaare $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}_1$ der letzteren vereinigt sind, was bei der obigen Auflösung angenommen wurde.

Wenn man anstatt des Kegelschnitts, der durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt (BB_1) der Strahlbüschel B, B_1 geht, einen anderen Kegelschnitt zu Hülfe nähme, der die aufeinander liegenden Geraden A, A_1 berührte, so würde man den Beweis für die entgegengesetzte Auflösung erhalten, welcher oben (§ 17, II, b) Erwähnung geschah. Die Ausführung wird dem Leser überlassen.

IV. Wird ausser den oben (II) vorausgesetzten Beziehungen der vier Gebilde A, A_1, B, B_1, dass sie nämlich unter einander projectivisch seien, und sowohl A und B, als A_1 und B_1 perspectivisch liegen, nun noch angenommen, es sollen entweder die Geraden A, A_1 gleich sein und aufeinander liegen und gleichliegend sein, wie etwa in (Fig. 48), oder es sollen die Strahlbüschel B, B_1 gleich sein und concentrisch liegen und gleichliegend sein, wie etwa in (Fig. 47), so folgen unmittelbar nachstehende bekannte Sätze:

»*Bleibt der Winkel* (aa_1) *an der Spitze eines veränderlichen Dreiseits* aa_1a_2 (Fig. 47) *der Grösse nach beständig, aber dreht er sich um seinen festen Scheitelpunkt* (BB_1), *während die zwei übrigen Ecken* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ *des Dreiecks irgend zwei feste Geraden* A, A_1 *durchlaufen, so bewegt sich die* [176] *Grundlinie* a_2 *als Tangente irgend eines bestimmten Kegelschnitts* $[AA_1]$, *der auch die zwei festen Geraden berührt.*« Ist sowohl der Winkel (dd_1) als (ee_1) dem beständigen Winkel (aa_1) gleich, so sind $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}_1$ diejenigen Punkte, in welchen die Geraden

»*Bleibt die Grundlinie* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ *eines veränderlichen Dreiecks* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ (Fig. 48) *der Grösse nach beständig, aber bewegt sie sich in irgend einer festen Geraden* (AA_1), *während die zwei übrigen Seiten* a, a_1 *sich um zwei feste Punkte* B, B_1 *drehen, so durchläuft die Spitze* $\mathfrak{a}_2$ *des Dreiecks einen bestimmten* [176] *Kegelschnitt* $[BB_1]$, *der namentlich durch die zwei festen Punkte geht.*« Ist sowohl $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ als $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$ gleich der beständigen Grundlinie $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, so sind d, e_1 die den Punkten B, B_1 zugehörigen Tangenten des Kegelschnitts (Fig. 38, IV). Da die unendlich

A, A_1 vom Kegelschnitte berührt werden (§ 38, IV). Später wird sich zeigen, dass der Punkt (BB_1) allemal Brennpunkt des Kegelschnitts sei*).

entfernten Punkte der Geraden A, A_1 einander entsprechen (§ 16, III), so muss nothwendig (AA_1) Asymptote des Kegelschnitts, und folglich muss dieser eine Hyperbel sein; u. s. w.

V. Sind vier Gerade A, A_1, A_2, A_3 unter einander projectivisch, und sind sowohl A und A_2, als A_1 und A_3 gleich und liegen sowohl die ersteren als die letzteren aufeinander und sind gleichliegend, wie etwa in (Fig. 49), und befinden sich A und A_1 in perspectivischer, dagegen sowohl A und A_3, als A_1 und A_2, als A_2 und A_3 in schiefer Lage, wonach also jene einen Projectionspunkt B haben und die letzteren drei Kegelschnitte [177] $[AA_3]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ erzeugen; — und sind andererseits von vier projectivischen Strahlbüscheln B, B_1, B_2, B_3 (Fig. 50) sowohl B und B_2, als B_1 und B_3 gleich, concentrisch und gleichliegend, und befinden sich B und B_1 in perspectivischer, dagegen sowohl B und B_3, als B_1 und B_2, als B_2 und B_3, in schiefer Lage, wonach also jene einen perspectivischen Durchschnitt A haben und die letzteren drei Kegelschnitte erzeugen müssen: so ergeben sich aus dieser Zusammenstellung unmittelbar folgende zum Theil bekannte Sätze[9]):

»*Bleiben zwei gegenüber stehende Seiten* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3$ *eines veränderlichen vollständigen Vierecks* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ (Fig. 49) *der Grösse nach beständig, aber bewegen sie sich*

»*Bleiben zwei gegenüber stehende Winkel* (aa_2), (a_1a_3) *eines veränderlichen vollständigen Vierseits* $aa_1a_2a_3$ (Fig. 50) *der Grösse nach beständig, aber drehen sie sich*

*) Lässt man die eine Gerade, etwa A_1, sich entfernen, bis sie zuletzt in unendlicher Ferne gedacht wird, so sieht man, dass alsdann die Strahlen a_1, a_2 parallel werden, und mithin der Winkel (aa_2) auch beständig wird, wenn (aa_1) es ist; da aber in diesem Falle der Kegelschnitt $[AA_1]$, vermöge der unendlich entfernten Tangente A_1, eine Parabel sein muss (§ 36), so fliesst daraus der folgende bekannte Satz: »Bewegt sich der Scheitel $\mathfrak{a}$ eines beständigen Winkels (aa_2) in einer festen Geraden A, während der eine seiner Schenkel a sich um einen festen Punkt (BB_1) dreht, so bewegt sich der andere Schenkel a_2 als Tangente einer bestimmten Parabel, welche auch jene feste Gerade berührt (und den festen Punkt zum Brennpunkt hat).« — Andererseits (rechts) entsteht ebenfalls ein eigenthümlicher besonderer Fall, wenn man den einen Punkt B_1 sich ins Unendliche entfernen lässt. Auch können hier die Geraden A, A_1 ähnlich angenommen werden, wodurch der obige Satz wesentlich verändert wird.

in irgend zwei festen Geraden (AA_2), (A_1A_3), *während eine dritte Seite* ($\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$) *sich um irgend einen festen Punkt B dreht, so bewegen sich die drei übrigen Seiten* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ *als Tangenten dreier Kegelschnitte* $[AA_3]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, *wovon jeder jene zwei festen Geraden berührt.*«*)

um ihre festen Scheitelpunkte (BB_2), (B_1B_3), *während eine dritte Ecke* (aa_1) *sich in irgend einer festen Geraden A bewegt, so durchlaufen die drei übrigen Ecken* (aa_3), (a_1a_2), (a_2a_3) *irgend drei Kegelschnitte* $[BB_3]$, $[B_1B_2]$, $[B_2B_3]$, *wovon jeder durch jene zwei festen Punkte geht.*«*)

[178] 47. Von der grossen Menge von Verbindungen projectivischer Geraden und ebener Strahlbüschel soll hier nur noch folgende Verbindung Platz finden, welche zu solchen zusammengesetzten Sätzen (oder Porismen) und Aufgaben führt, die nach der Art, wie man dergleichen Sätze und Aufgaben bei bisher gewöhnlicher Darstellungsweise zu würdigen pflegt, leicht für bedeutender und schwieriger gehalten werden dürften, als sie es nach Maassgabe der gegenwärtigen Entwickelung in der That sind.

Hat man in einer Ebene irgend eine Anzahl n beliebige projectivische Gerade $A, A_1, A_2 \ldots\ldots A_{n-1}$, wovon je zwei sich in schiefer Lage befinden (mithin je zwei einen Kegelschnitt erzeugen), so erzeugen sie im Ganzen $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kegelschnitte, und zwar wird durch je eine Reihe entsprechender Punkte, wie etwa durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots\ldots \mathfrak{a}_{n-1}$, ein vollständiges n Eck bestimmt, von dessen $\frac{1}{2}n(n-1)$ Seiten (§ 19) jede einen von jenen Kegelschnitten berührt. Durch $n-1$ der genannten Kegelschnitte, die zusammen von allen Geraden abhängen, etwa durch die Kegelschnitte $[AA_1]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ... $[A_{n-2}A_{n-1}]$, d. h., durch die $n-1$ Kegelschnitte, welche, wenn man die Geraden in eine Reihe geordnet hat, von den unmittelbar auf einander folgenden Geraden abhängen, ist offenbar umgekehrt die projectivische Beziehung der Geraden, und sind somit auch alle übrigen

*) Den Satz rechts (wenn nämlich nur der Kegelschnitt $[B_2B_3]$ berücksichtiget wird) hat *Newton* zur Erzeugung oder Beschreibung der Kegelschnitte angewandt (*Princip. phil. nat. math.*), und *MacLaurin* benutzte ihn in seiner organischen Geometrie.

Die obigen Sätze sind übrigens, wie man bemerken wird, nur besondere Fälle von denjenigen Sätzen, die stattfinden, wenn einerseits A und A_1, und andererseits B und B_1 nicht perspectivisch, sondern schief liegen, wo alsdann die Seite $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ sich als Tangente eines die Geraden A, A_1 berührenden Kegelschnitts bewegen, und andererseits die Ecke (aa_1) einen durch die Punkte B, B_1 gehenden Kegelschnitt durchlaufen muss.

Kegelschnitte bestimmt. — Da andererseits Entsprechendes statt findet, so folgen also nachstehende umfassende Sätze:

I. »*Wenn in einer Ebene sich irgend eine Anzahl n beliebige feste Gerade* A, A_1, A_2, ... A_{n-1} *befinden, von denen, der Reihe nach genommen, je zwei unmittelbar* [179] *aufeinander folgende von irgend einem beliebigen festen Kegelschnitte berührt werden, welches also im Ganzen* $n-1$ *Kegelschnitte* $[AA_1]$, $[A_1A_2]$, ..., $[A_{n-2}A_{n-1}]$ *sind, und wenn ein veränderliches vollständiges n Eck* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ ..... $\mathfrak{a}_{n-1}$, *sich so bewegt, dass seine Ecken* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, ..., $\mathfrak{a}_{n-1}$, *der Reihe nach, jene festen Geraden durchlaufen, während diejenigen* $n-1$ *Seiten desselben, welche die nach der Ordnung unmittelbar aufeinander folgenden Ecken verbinden, also die Seiten* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$, ..., $\mathfrak{a}_{n-2}\mathfrak{a}_{n-1}$, *sich beziehlich als Tangenten um jene festen Kegelschnitte herumbewegen; so bewegen sich die* $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ *übrigen Seiten als Tangenten um eben so viele Kegelschnitte, von denen jeder insbesondere diejenigen zwei festen Geraden berührt, welche von den Endpunkten der zugehörigen Seite durchlaufen werden.*«

I. »*Wenn in einer Ebene sich irgend eine Anzahl n beliebige feste Punkte* B, B_1, B_2, ... B_{n-1} *befinden, von denen, der Reihe nach genommen, je zwei unmittelbar* [179] *aufeinander folgende in irgend einem beliebigen festen Kegelschnitte liegen, welches also im Ganzen* $n-1$ *Kegelschnitte* $[BB_1]$, $[B_1B_2]$, ... $[B_{n-2}B_{n-1}]$ *sind, und wenn ein veränderliches vollständiges n Seit* aa_1a_2 ..... a_{n-1} *sich so bewegt, dass seine Seiten* a, a_1, a_2, ... a_{n-1}, *der Reihe nach sich um jene festen Punkte drehen, während diejenigen* $n-1$ *Ecken desselben, in welchen sich die nach der Ordnung unmittelbar aufeinander folgenden Seiten schneiden, also die Ecken* aa_1, a_1a_2, a_2a_3, ..., $a_{n-2}a_{n-1}$, *nach der Ordnung beziehlich jene festen Kegelschnitte durchlaufen; so durchlaufen die* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *übrigen Ecken des n Seits eben so viele verschiedene Kegelschnitte, von welchen jeder insbesondere durch diejenigen zwei festen Punkte geht, um welche sich die zwei Seiten, die sich in der zugehörigen Ecke schneiden, drehen.*«

Zu der grossen Menge besonderer Fälle, welche in den vorstehenden Sätzen enthalten sind, und die namentlich dadurch entstehen, dass man den Gebilden A, A_1, A_2, ..., oder B, B_1, B_2, ... eigenthümliche Lage zukommen lässt, oder sie als gleich, oder die ersteren als ähnlich annimmt, u. s. w., gehören z. B. auch folgende, wo nämlich angenommen wird, von den Gebilden A, A_1, ... A_{n-1}, oder B, B_1, ... B_{n-1} befinden sich, nach der Reihe, je zwei unmittelbar aufeinander [180] folgende in perspectivischer Lage. In diesem Falle vereinfachen sich die obigen Sätze auf folgende bekannte Sätze:

II. »*Durchlaufen die Ecken* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, ..., $\mathfrak{a}_{n-1}$ *eines verän-*

II. »*Drehen sich die Seiten* a, a_1, a_2, ..., a_{n-1} *eines veränder-*

derlichen vollständigen n Ecks, nach der Reihe, n beliebige feste Gerade $A_1, A_2, \ldots\ldots A_{n-1}$, *die in einer Ebene liegen, während n—1 Seiten desselben, die irgend einem einfachen n Eck angehören, aus welchen das vollständige besteht, etwa die Seiten* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, ..., $\mathfrak{a}_{n-2}\mathfrak{a}_{n-1}$, *sich um eben so viele beliebige feste Punkte B,* $B_1, \ldots\ldots, B_{n-1}$ *drehen, so bewegen sich die* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *übrigen Seiten, einzeln genommen, als Tangenten um eben so viele Kegelschnitte, von denen jeder diejenigen zwei festen Geraden berührt, welche die zwei Ecken, die in der zugehörigen Seite liegen, durchlaufen.«* Auf die genannten n—1 Seiten $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$, ..., $\mathfrak{a}_{n-2}\mathfrak{a}_{n-1}$ könnte man ferner den nebenstehenden Satz anwenden, wodurch der diesseitige Satz noch ausgedehnter würde.

lichen vollständigen n Seits nach der Reihe um n beliebige feste Punkte $B, B_1, B_2, \ldots\ldots B_{n-1}$, *die in einer Ebene liegen, während n—1 Ecken desselben, die irgend einem einfachen n Eck angehören, aus welchen das vollständige besteht, etwa die Ecken* aa_1, a_1a_2, ..., $a_{n-2}a_{n-1}$, *eben so viele beliebige feste Gerade* A, A_1, ..., A_{n-2} *durchlaufen, so durchlaufen die* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *übrigen Ecken, einzeln genommen, eine gleiche Anzahl bestimmter Kegelschnitte, von denen nämlich jeder durch diejenigen zwei festen Punkte geht, um welche sich die zwei Seiten, die sich in der zugehörigen Ecke schneiden, drehen.«* Auf die genannten n—1 Ecken aa_1, a_1a_2, ..., $a_{n-2}a_{n-1}$ könnte man ferner den nebenstehenden Satz anwenden, wodurch der diesseitige Satz noch vollständiger würde.

Der Satz links wurde zuerst von *Brackenridge* bewiesen*); um die Erfindung eines Theiles dieses Satzes stritt er sich mit *Mac-Laurin* (Phil. Trans.).

[181] Dass und in wie fern die obigen Sätze (§ 22, II) wiederum besondere Fälle der vorstehenden Sätze sind, wird man leicht wahrnehmen.

Die folgenden zwei Aufgaben sind auf ähnliche Weise umfassend, wie die oben stehenden Sätze (I).

III. *»Werden von den Seiten* A, A_1, ..., A_{n-1} *eines beliebigen n Ecks je zwei unmittelbar aufeinander folgende von irgend einem Kegelschnitte berührt, welches im Ganzen n Kegelschnitte* $[AA_1]$, $[A_1A_2]$, ..., $[A_{n-1}A]$ *sind, so soll ein anderes n Eck beschrieben werden, dessen Ecken* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, ..., $\mathfrak{a}_{n-1}$, *nach der Reihe, in den Seiten jenes n Ecks liegen, und dessen Seiten* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, ..., $\mathfrak{a}_{n-1}\mathfrak{a}$, *nach der Reihe, jene Kegelschnitte berühren.«*

III. *»Liegen von den Ecken* B, B_1, ..., B_{n-1} *eines beliebigen n Ecks je zwei unmittelbar aufeinander folgende in irgend einem Kegelschnitte, welches im Ganzen n Kegelschnitte* $[BB_1]$, $[B_1B_2]$, ..., $[B_{n-1}B]$ *sind, so soll ein anderes n Eck beschrieben werden, dessen Seiten* a, a_1, ..., a_{n-1}, *nach der Reihe, durch die Ecken jenes n Ecks gehen, und dessen Ecken* aa_1, a_1a_2, ..., $a_{n-1}a$, *nach der Reihe, in jenen Kegelschnitten liegen.«*

*) Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum.

Die Mittel, durch welche die vorliegenden Aufgaben leicht gelöst werden, sind in dem Bisherigen enthalten und bereits mehrfach angewandt, so dass ich die Auflösung dem Leser zur Selbstübung überlassen darf. Die frühere Aufgabe in (§ 25) ist übrigens ein besonderer Fall von jeder der zwei vorstehenden Aufgaben.

Anmerkung.

48. Es ist fast überflüssig, nochmals zu erinnern, dass die von (§ 41) an bis hierher durchgeführten Betrachtungen, denen projectivische Gebilde (Gerade und ebene Strahlbüschel) in der Ebene zur Grundlage dienten, auf entsprechende Weise bei projectivischen Gebilden (ebene Strahlbüschel und Ebenenbüschel) im Strahlbüschel [**182**] im Raume statt haben, ja dass die Resultate jener Betrachtungen sogleich auf die letzteren Gebilde übertragen werden können, wenn man nämlich, wie bereits oben angegeben worden (§ 33 und Ende § 36), überall: Strahl, ebener Strahlbüschel, Ebenenbüschel, *n* kantiger Körperwinkel, *n* seitiger Körperwinkel, Kegel (zweiten Grades), beziehlich statt: Punkt, Gerade, ebener Strahlbüschel, *n* Eck, *n* Seit, Kegelschnitt setzt. — Ebenso finden die Betrachtungen auf entsprechende Weise auf der Kugelfläche statt, und es lassen sich die genannten Resultate ähnlicherweise auf dieselbe übertragen (§ 34 und § 38).

Erzeugnisse projectivischer Gebilde im Raume.

49. Es ist nun noch zu untersuchen (§ 39), was für Figuren durch die entsprechenden Elementenpaare irgend zweier projectivischen Gebilde, die sich weder in derselben Ebene, noch in demselben Strahlbüschel, sondern beliebig im Raume befinden, erzeugt werden. Die drei Arten von Gebilden, Gerade, ebene Strahlbüschel und Ebenenbüschel, geben in dieser Hinsicht, wenn sie paarweise genommen werden, folgende sechs Fälle:

1) eine Gerade A und ein Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$,
2) zwei ebene Strahlbüschel B, B_1,
3) ein Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ und ein ebener Strahlbüschel B,
4) ein ebener Strahlbüschel B und eine Gerade A,
5) zwei Gerade A, A_1, und
6) zwei Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$.

Von diesen sechs Fällen sind der fünfte und sechste ungleich wichtiger und folgenreicher, als die vier übrigen; letztere sollen daher zuerst beseitigt werden.

[183] I. Liegen zwei projectivische Gebilde, eine Gerade A und ein Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, beliebig im Raume, d. h., befinden sie sich in schiefer Lage, so findet kein unmittelbares Erzeugniss durch ihre entsprechenden Elementenpaare statt. Ein mittelbares Erzeugniss wird unten im Anhange gegeben (§ 60, 26).

II. Liegen zwei projectivische ebene Strahlbüschel B, B_1 beliebig im Raume, so geben sie ebenfalls kein unmittelbares Erzeugniss, wohl aber findet bei ihnen der folgende Umstand statt.

»Legt man, von irgend einem beliebig angenommenen Punkte D aus, Gerade, welche die entsprechenden Strahlenpaare a und a_1, b und b_1, c und c_1, ..., der Strahlbüschel B, B_1 schneiden, so liegen alle diese Geraden in einer Kegelfläche D zweiten Grades.«

Dieser Satz gründet sich auf den früheren (§ 38, II, rechts). Denn denkt man sich zwei Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, deren Axen durch den Punkt D gehen, und welche mit den gegebenen ebenen Strahlbüscheln B, B_1 perspectivisch sind, so werden dieselben unter sich projectivisch sein, und mithin werden die Durchschnitte der entsprechenden Ebenenpaare α und α_1, β und β_1, γ und γ_1, ..., zufolge des angeführten Satzes, in einer Kegelfläche D liegen, und da diese Durchschnitte offenbar die genannten, durch den Punkt D gelegten Geraden sind, so folgt daraus die Richtigkeit des vorstehenden Satzes.

III. Liegen zwei projectivische Gebilde $\mathfrak{A}$, B — ein Ebenenbüschel und ein ebener Strahlbüschel — beliebig im Raume, »so liegen offenbar die Punkte, in welchen die entsprechenden Elementenpaare α und a, β und b, γ und c, ... sich schneiden, in irgend einem Kegelschnitt.« Denn die [184] Ebene des Strahlbüschels B schneidet den Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ in einem ebenen Strahlbüschel B_1, welcher mit dem Strahlbüschel B projectivisch ist, und mit ihm den genannten Kegelschnitt erzeugt.

IV. Liegen zwei projectivische Gebilde A, B — eine Gerade und ein ebener Strahlbüschel — beliebig im Raume, so wird durch je zwei entsprechende Elemente derselben eine

Ebene bestimmt, d. h., durch jeden Punkt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... der Geraden A und durch den ihm entsprechenden Strahl a, b, c, ... des Strahlbüschels B geht eine bestimmte Ebene, und es frägt sich, welchem Gesetz diese Ebenen insgesammt unterworfen seien? Diese Frage kann leicht durch frühere Sätze beantwortet werden, z. B. wie folgt.

Denkt man sich einen Strahlbüschel B_1, welcher mit dem gegebenen B concentrisch und mit der Geraden A perspectivisch ist, so wird also derselbe mit B projectivisch sein, und die Ebenen, welche durch die entsprechenden Strahlenpaare der beiden Strahlbüschel B, B_1 gehen, werden offenbar die vorgenannten, zu untersuchenden, Ebenen sein. Nun werden alle diese Ebenen, zufolge (§ 38, II), von einem Kegel zweiten Grades berührt, und zwar findet dabei der besondere Umstand statt, dass die Ebenen der Strahlbüschel B, B_1 vom Kegel in denjenigen zwei Strahlen berührt werden, deren entsprechende in ihrem Durchschnitte vereinigt sind. Daher werden auch die Gebilde A, B vom Kegel in denjenigen Elementen berührt, deren entsprechende in ihrem gegenseitigen Durchschnitte zusammentreffen, d. h., trifft die Gerade A den Strahl d des Strahlbüschels B, und wird sie von demselben im Punkte $\mathfrak{e}$ getroffen, so wird sie vom Kegel im Punkte $\mathfrak{d}$ und die Ebene des Strahlbüschels wird von demselben im [**185**] Strahle e berührt. Demgemäss folgt der nachstehende Satz:

»*Befinden sich eine Gerade A und ein ebener Strahlbüschel B, die projectivisch sind, im Raume in beliebiger Lage, so berühren die Ebenen, welche durch ihre entsprechenden Elementenpaare bestimmt werden, irgend eine Kegelfläche zweiten Grades, deren Mittelpunkt (Scheitel) mit dem Mittelpunkt B des Strahlbüschels zusammenfällt, und welche die Gerade A und die Ebene des Strahlbüschels B in denjenigen Elementen $\mathfrak{d}$, e berührt, deren entsprechende d, $\mathfrak{e}$ (im gegenseitigen Durchschnitte der Gebilde) sich treffen.*«

Bei diesem Satze können folgende zwei besondere Fälle eintreten. 1) Die Gerade A kann den Mittelpunkt des Strahlbüschels B treffen; dann reducirt sich der genannte Kegel auf die Gerade A, d. h., in diesem Falle bilden die genannten berührenden Ebenen ein Ebenenbüschel, dessen Axe A ist. 2) Der Strahlbüschel B kann aus einem System paralleler

Strahlen bestehen; dann tritt an die Stelle des Kegels ein Cylinder.

50. Von den obigen sechs Fällen sind nun noch die zwei wichtigsten zu untersuchen (§ 49, 5, 6), nämlich es ist noch zu untersuchen, welchen Gesetzen bei zwei projectivischen Geraden A, A_1, die im Raume beliebig liegen, die sämmtlichen Projectionsstrahlen, und bei zwei projectivischen, im Raume beliebig liegenden, Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenenpaare unterworfen sind, d. h., welche Figuren durch sie erzeugt werden, und welche bemerkenswerthe Umstände dabei stattfinden. Nach der Art, wie vorhin die vier übrigen Fälle betrachtet [**186**] wurden, lassen sich über die gegenwärtigen Fälle vorläufig folgende Eigenschaften angeben.

Befinden sich zwei projectivische Gerade A, A_1 in beliebiger Lage im Raume, so wird jeder beliebige Punkt D mit allen ihren Projectionsstrahlen ein System von Ebenen bestimmen, welche die gesammten Berührungsebenen eines Kegels D zweiten Grades sind. Denn denkt man sich zwei ebene Strahlbüschel B, B_1, deren Mittelpunkte in D liegen, und welche mit den gegebenen Geraden A, A_1 perspectivisch sind, so sind dieselben unter sich projectivisch (§ 11, III) und erzeugen, zufolge (§ 38, II), den genannten Kegel; weil offenbar die Ebenen, welche durch die entsprechenden Strahlenpaare der Strahlbüschel B, B_1 gehen, dieselben sind, welche durch den Punkt D und durch die entsprechenden Punktenpaare (oder die Projectionsstrahlen) der Geraden A, A_1 bestimmt werden, woher denn die Richtigkeit der eben ausgesprochenen Behauptung erhellt.

Befinden sich andererseits zwei projectivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in beliebiger schiefer Lage im Raume, so wird irgend eine Ebene E die gesammten Durchschnittslinien ihrer entsprechenden Ebenenpaare in einem Kegelschnitte schneiden, d. h., die Punkte, in welchen die Ebene allen jenen Durchschnittslinien begegnet, bilden irgend einen Kegelschnitt. Denn die Ebene E schneidet die gegebenen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in zwei ebenen Strahlbüscheln B, B_1, welche projectivisch sind (weil $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ es sind), und welche also, zufolge (§ 38, IV), einen Kegelschnitt erzeugen, der offenbar der vorgenannte Kegelschnitt ist.

Demnach folgt also zuvörderst:

[187] »*Wenn zwei projectivische Gerade A, A_1 im Raume beliebig liegen, so sind die Ebenen, welche irgend ein beliebig angenommener Punkt D mit allen ihren Projectionsstrahlen bestimmt, die gesammten Berührungsebenen eines Kegels zweiten Grades, welcher jenen Punkt zum Mittelpunkt hat.*«

[187] »*Wenn zwei projectivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ im Raume beliebig liegen, so wird die Figur (Fläche), welche durch die gesammten Durchschnittslinien ihrer entsprechenden Ebenenpaare bestimmt wird, von jeder beliebigen Ebene E in irgend einem Kegelschnitte geschnitten.*«

51. Um die begonnene Untersuchung (§ 50) nach ihrem ganzen Umfange durchzuführen, diene folgende Betrachtung, durch welche der Gegenstand vollständig und klar dargestellt wird.

I. Sind zwei Gerade A, A_1 mit einem und demselben Ebenenbüschel A_2 (welcher zur Zweckmässigkeit für die gegenwärtige Betrachtung durch A_2, statt durch $\mathfrak{A}_2$, wie bisher, bezeichnet werden soll) perspectivisch (§ 28, III), so sind sie unter sich projectivisch, und wenn sie einander nicht schneiden, so wird man ihre Lage als eine beliebige schiefe Lage im Raume ansehen können. Da die entsprechenden Punktenpaare $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$, u. s. w. der Geraden A, A_1 in den Ebenen α_2, β_2, γ_2, u. s. w. des Ebenenbüschels A_2 liegen, so müssen auch ihre Projectionsstrahlen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, u. s. w., oder a, b, c, ..., in diesen Ebenen liegen und daher schneiden alle Projectionsstrahlen, a, b, c, ..., die Axe A_2, so dass also dieselben ein System von Geraden bilden, wovon jede die drei Geraden A, A_1, A_2 schneidet. — Sind andererseits zwei Ebenenbüschel A, A_1 mit einer und derselben Geraden A_2 perspectivisch, also unter sich projectivisch, und liegen ihre Axen A, A_1 nicht in einer Ebene, so dass also ihre Lage als beliebig schief angesehen werden kann, so [188] begegnet die Durchschnittslinie je zweier entsprechender Ebenen derselben, d. h., die Durchschnittslinien der Ebenenpaare α und α_1, β und β_1, γ und γ_1, u. s. w. offenbar jeder der drei Geraden A, A_1, A_2.

II. Geht man umgekehrt von der Forderung aus, es sollen, wenn im Raume irgend drei Gerade A, A_1, A_2, wovon keine zwei in einer Ebene liegen, gegeben sind, andere Gerade a, b, c, d, ... gefunden werden, welche jene drei schneiden, so wird man, nach dem was man so eben (I) gesehen hat, auf folgende zwei Arten der Aufgabe ihrem ganzen Umfange nach genügen.

a) durch eine der drei gegebenen Geraden, etwa durch A_2, denke man sich eine beliebige Ebene α_2, so wird diese die zwei übrigen Geraden A, A_1 in zwei Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ schneiden, durch welche eine Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ oder a bestimmt wird, die offenbar der Forderung genügt. Lässt man nun in der Vorstellung die Ebene α_2 sich um A_2 herumbewegen, so sieht man die Gerade a längs der drei Geraden A, A_1, A_2 fortgleiten, und zwar so, dass sie nothwendiger Weise nach und nach in die Lage jeder anderen Geraden b, c, d, ... gelangt, die der Aufgabe genügt. Zugleich folgt daraus, dass durch jeden Punkt jeder der zwei Geraden A, A_1 eine, aber nur eine einzige schneidende Gerade geht. Denn da die Ebene α_2 durch ihre Bewegung ein Ebenenbüschel A_2 beschreibt, so sind die Geraden A, A_1, in Ansehung der entsprechenden Punktenpaare $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$ u. s. w., in welchen sie nacheinander von jener bewegten Ebene geschnitten werden, projectivisch (§ 28, III), d. h., sie werden von den gesammten Geraden a, b, c, d, ..., welche die drei Geraden A, A_1, A_2 schneiden, projectivisch geschnitten, so dass diese Schaar Gerader ihre Projectionsstrahlen [189] sind. Diejenigen zwei schneidenden Geraden oder Projectionsstrahlen q, r, welche nach den unendlich entfernten Punkten $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}_1$ der Geraden A, A_1 gerichtet sind, also die Parallelstrahlen (§ 9), erhält man, wenn die bewegte Ebene α_2 in die Lage kommt, wo sie mit A oder A_1 parallel ist, nämlich ist sie mit A parallel, so wird sie die andere Gerade A_1 im Punkte $\mathfrak{q}_1$ schneiden, und ist sie mit A_1 parallel, so wird sie der A im Punkte $\mathfrak{r}$ begegnen, und alsdann sind die Strahlen, welche man durch diese Punkte $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}$ den Geraden A, A_1 parallel zieht, die genannten Parallelstrahlen q, r. Hierdurch ist auch zugleich die Aufgabe gelöst: »Diejenige Gerade (q oder r) zu finden, welche irgend zwei (im Raume) gegebene Gerade (A_2 und A_1, oder A_2 und A) schneidet und mit irgend einer gegebenen dritten Geraden (A oder A_1) parallel ist.«[10])

Gleich wie die zwei Geraden A, A_1 von der Schaar Gerader a, b, c, d, ... projectivisch geschnitten werden, eben so werden auch die zwei Geraden A, A_2, oder A_1, A_2, und also alle drei Geraden A, A_1, A_2 von denselben projectivisch geschnitten.

b) In einer der drei gegebenen Geraden, etwa in A_2, nehme man einen beliebigen Punkt $\mathfrak{a}_2$ an, und denke sich durch diesen und durch die zwei übrigen Geraden A, A_1

zwei Ebenen α, α_1, so wird die Durchschnittslinie a der letzteren offenbar der obigen Forderung genügen, d. h., sie wird die drei Geraden A, A_1, A_2 schneiden. Lässt man nun in der Vorstellung den Punkt $\mathfrak{a}_2$ sich in der Geraden A_2 fortbewegen, so wird die genannte Durchschnittslinie a längs der drei festen Geraden A, A_1, A_2 fortgleiten, und zwar so, dass sie nach und nach in die Lage jeder anderen Geraden b, c, d, ... gelangt, die der Aufgabe genügt. Durch [190] jeden Punkt der Geraden A_2 geht demnach eine, und nur eine Gerade, welche die drei festen Geraden A, A_1, A_2 schneidet. Während der Punkt $\mathfrak{a}_2$ die Gerade A_2 durchläuft, drehen sich die genannten Ebenen α, α_1 um die Axen A, A_1 und beschreiben also zwei Ebenenbüschel A, A_1, die unter sich projectivisch sind, weil beide mit der Geraden A_2 perspectivisch sind, und deren entsprechenden Ebenen α und α_1, β und β_1, γ und γ_1 u. s. w. jene Schaar Gerader a, b, c, ... zu Durchschnittslinien haben. Im Falle, wo der unendlich entfernte Punkt der Geraden A_2 an die Stelle des bewegten Punktes $\mathfrak{a}_2$ tritt, werden offenbar die zugehörigen Ebenen (α, α_1) der Geraden A_2 parallel, und folglich wird auch ihre Durchschnittslinie dieser Geraden parallel, so dass man also daraus ein zweites Verfahren entnehmen kann, um die vorhin (a) angeführte besondere Aufgabe: »eine Gerade zu finden, welche irgend zwei gegebene Gerade A, A_1 schneidet und mit irgend einer gegebenen dritten Geraden A_2 parallel ist,« zu lösen, nämlich man legt durch A, A_1 diejenigen zwei Ebenen, welche der A_2 parallel sind, so ist ihre Durchschnittslinie die verlangte Gerade.

Eben so wie die genannte Schaar schneidender Geraden a, b, c, d, ... die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenenpaare α und α_1, und β und β_1, u. s. w. zweier projectivischen Ebenenbüschel A, A_1 sind, so sind sie es auch sowohl von zwei projectivischen Ebenenbüscheln A, A_2, als A_1, A_2, und mithin von drei projectivischen Ebenenbüscheln A, A_1, A_2.

III. Irgend drei beliebige Gerade A, A_1, A_2 im Raume, wovon keine zwei in einer Ebene liegen, können also (II) von einer unzähligen Schaar anderer Geraden a, b, c, d, ... geschnitten werden, und zwar [191] finden dabei die Umstände statt, dass je zwei von jenen drei Geraden durch die Schaar Gerader projectivisch geschnitten werden, und dass sie andererseits die Axen zweier projectivischer Ebenenbüschel sind, deren entsprechende Ebenen die Schaar von Geraden zu Durchschnittslinien haben. Da die Lage von zwei solchen projectivischen Geraden oder Ebenenbüscheln, wie etwa A und A_1, als eine beliebige schiefe Lage angesehen werden kann, so ist zu vermuthen, dass auch umgekehrt die Projectionsstrahlen $a, b, c, d, \ldots\ldots$ irgend zweier schiefliegender Geraden A, A_1, oder die Durchschnittslinien $a, b, c, d, \ldots\ldots$ der entsprechenden Ebenenpaare irgend zweier schiefliegender projectivischer Ebenenbüschel A, A_1 allemal von vielen anderen Geraden, wie etwa A_2, geschnitten werden können. Diese Vermuthung wird wie folgt als wahr erwiesen.

a) Befinden sich zwei projectivische Gerade A, A_1 in beliebiger schiefer Lage im Raume, und man legt irgend eine Gerade A_2 so, dass sie irgend drei Projectionsstrahlen derselben schneidet, etwa die Projectionsstrahlen a, b, c (II), so werden, wenn man sich für einen Augenblick die Schaar Gerader denkt, welche die drei Geraden A, A_1, A_2 schneiden, die beiden gegebenen Geraden A, A_1 von denselben projectivisch geschnitten (II), da nun die drei Geraden a, b, c sowohl zu dem einen als zu dem anderen System von Projectionsstrahlen der Geraden A, A_1 gehören, und da die projectivische Beziehung der letzteren durch drei Projectionsstrahlen bestimmt ist, so sind folglich die ursprünglichen Projectionsstrahlen $a, b, c, d, e, \ldots\ldots$ der Geraden A, A_1 und die genannte Schaar Gerader, welche die drei Geraden A, A_1, A_2 schneiden, eine und dieselbe Schaar von Geraden, und folglich schneidet [**192**] jede Gerade A_2, welche irgend drei Projectionsstrahlen a, b, c der gegebenen Geraden A, A_1 begegnet, auch alle übrigen Projectionsstrahlen $d, e, \ldots\ldots$ derselben.

b) Befinden sich zwei projectivische Ebenenbüschel A, A_1 in beliebiger schiefer Lage und man legt irgend eine Gerade A_2, welche irgend drei Durchschnittslinien von entsprechenden Ebenenpaaren schneidet, etwa die Durchschnittslinien a, b, c der Ebenenpaare α und α_1, β und β_1, γ und γ_1, so wird dieselbe nothwendiger Weise auch allen übrigen Durchschnittslinien entsprechender Ebenen begegnen; denn wollte man sich um die nämlichen Axen A, A_1 zwei andere Ebenenbüschel denken, die unter sich projectivisch und zwar beide zugleich mit jener Geraden A_2 perspectivisch wären, so dass je zwei entsprechende Ebenen derselben durch den nämlichen Punkt der Geraden A_2 gingen, so würden dieselben nicht von den gegebenen Ebenenbüscheln A, A_1 verschieden sein können, weil sie mit diesen die genannten drei entsprechenden Ebenenpaare gemein hätten, durch welche eben die projectivische Beziehung bestimmt ist.

Aus beiden vorstehenden Betrachtungen (a, b) folgt also:

1) »*Dass die Projectionsstrahlen a, b, c, d, ... zweier projectivischer Geraden A, A_1, die sich in beliebiger schiefer Lage im Raume befinden, von unzähligen Geraden A_2, A_3, A_4, ... geschnitten werden können, und zwar schneidet jede der letzteren alle jene Projectionsstrahlen, sobald sie irgend drei derselben begegnet.*«

1) »*Dass die Durchschnittslinien a, b, c, d, ... der entsprechenden Ebenen zweier schiefliegender projectivischer Ebenenbüschel A, A_1 von unzähligen Geraden A_2, A_3, A_4, ... geschnitten werden können, und zwar schneidet jede der letzteren alle jene Durchschnittslinien, sobald sie irgend drei derselben begegnet.*«

[193] 2) »Demnach haben die Projectionsstrahlen zweier schiefliegender projectivischer Geraden A, A_1 im Raume und die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenen zweier schiefliegender projectivischer Ebenenbüschel A, A_1 gleiche Eigenschaft, nämlich sie sind eine Schaar von Geraden a, b, c, d, e, ..., welche von einer anderen Schaar von unzähligen Geraden A, A_1, A_2, A_3, A_4, ... geschnitten werden, und zwar sind, zufolge (II):

»*je zwei Gerade, die zu der einen oder zu der andern Schaar gehören, unter sich projectivisch und die jedesmalige andere Schaar Gerader sind ihre Projectionsstrahlen.*«

»*je zwei Gerade, die zu der einen oder zu der andern Schaar gehören, die Axen projectivischer Ebenenbüschel, deren entsprechende Ebenen die andere Schaar zu Durchschnittslinien haben.*«

Oder (II):

3) »*Wenn im Raume irgend drei Gerade A, A_1, A_2, wovon keine zwei in einer Ebene liegen, gegeben sind, so giebt es in denselben unzählige mal drei solche Punkte, die in einer Geraden liegen, so dass also dieselben von einer unzähligen Schaar Gerader a, b, c, d, ... geschnitten werden können, und diese letztern können hinwieder von einer andern Schaar Gerader geschnitten werden, zu welchen auch jene drei Geraden gehören*; oder:

3) »*Wenn im Raume irgend drei Ebenenbüschel A, A_1, A_2, von deren Axen keine zwei in einer Ebene liegen, gegeben sind, so giebt es in denselben unzählige mal drei solche Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden, welche den drei Axen begegnet, so dass also diese von einer Schaar Gerader geschnitten werden, welche ebenfalls von einer andern Schaar Gerader geschnitten werden, zu welcher jene drei Axen gehören*; oder:

»Wenn im Raume irgend drei Gerade A, A_1, A_2 irgend drei andere Gerade a, b, c schneiden, so schneiden alle Geraden d, e, ..., welche [**194**] den drei ersten begegnen, alle Geraden A_3, A_4, ..., welche den drei letzten begegnen*); und es haben die zwei Schaaren Gerader A, A_1, A_2, A_3, A_4, ..., a, b, c, d, e, ... solche Beziehung zu einander:

»dass je zwei Gerade, die der nämlichen Schaar angehören, unter sich projectivisch sind und zwar die andere Schaar Gerader zu Projectionsstrahlen haben.«

»dass je zwei Gerade aus einer Schaar die Axen projectivischer Ebenenbüschel sind, deren entsprechende Ebenen die andere Schaar zu Durchschnittslinien haben.«

IV. Zwei solche zusammengehörige Schaaren von Geraden, die einander gegenseitig schneiden, erfüllen eine krumme, windschiefe Fläche zweiter Ordnung, nämlich das »einfache Hyperboloïd« (hyperboloïde à une nappe). Man kann daher, gemäss der vorstehenden Sätze, auch sagen:

1) *»Irgend zwei im Raume beliebig schiefliegende projectivische Gerade A, A_1 erzeugen ein einfaches Hyperboloïd, d. h. sie und alle ihre Projectionsstrahlen, nebst der Schaar Gerader, welche die letzteren schneiden, liegen in einem einfachen Hyperboloïd.«*

1) *»Irgend zwei im Raume beliebig schiefliegende projectivische Ebenenbüschel A, A_1 erzeugen ein einfaches Hyperboloïd, d. h. die Durchschnittslinien ihrer entsprechenden Ebenen, nebst der Schaar Gerader, welche dieselben schneiden, liegen in einem einfachen Hyperboloïd.»*

Wenn in der Folge das einfache Hyperboloïd als durch zwei projectivische Gerade oder Ebenenbüschel A, A_1 erzeugt angesehen werden soll, so mag es durch $[AA_1]$ bezeichnet werden.

[**195**] Aus dem Obigen folgen ferner unmittelbar nachstehende Eigenschaften des einfachen Hyperboloïds:

2) »Das einfache Hyperboloïd kann auf zwei Arten durch Bewegung einer Geraden a oder A, welche sich längs drei festen Geraden A, A_1, A_2 oder a, b, c fortbewegt, erzeugt werden (III, 3); oder es enthält zwei Schaaren von Geraden (oder zwei Systeme von

*) Diese Eigenschaft wird hier mittelst der projectivischen Beziehungen, unstreitig viel einfacher bewiesen, als es z. B. bei dem Beweise der Fall ist, welchen *Hachette* im Journal für Mathematik, Bd. I, S. 342, mittheilt.

Strahlen), welche einander schneiden, und welche die vorhin (III, 3) angegebene Beziehung zu einander haben, nämlich:

»Dass die Geraden jeder Schaar unter sich projectivisch sind, und zwar die andere Schaar Gerader zu Projectionsstrahlen haben.«

»Dass die Geraden jeder Schaar Axen projectivischer Ebenenbüschel sind, deren entsprechende Ebenen die andere Schaar Gerader zu Durchschnittslinien haben.«

Da hiernach jede Gerade, aus der einen oder aus der anderen Schaar, Axe eines Ebenenbüschels ist, dessen Ebenen durch die jedesmalige andere Schaar Gerader gehen, so folgt also von selbst die bekannte Eigenschaft:

3) »Dass jede Ebene, welche das einfache Hyperboloïd in irgend einer Geraden schneidet, dasselbe allemal noch in irgend einer andern Geraden schneidet, und dass diese zwei Geraden nicht zu einerlei Schaar gehören.«

Jede solche Ebene, in der zwei Strahlen des Hyperboloïds liegen, heisst »Berührungsebene« des Hyperboloïds, und der Punkt, in welchem sich die zwei in ihr liegenden Strahlen schneiden, heisst ihr »Berührungspunkt«. Mit Rücksicht auf diese Bemerkung lassen sich jetzt die obigen Sätze (§ 50) wie folgt aussprechen:

[196] 4) *»Alle Berührungsebenen eines Hyperboloïds, die durch irgend einen bestimmten Punkt D gehen, umhüllen einen Kegel zweiten Grades.«*

[196] 4) *»Der gegenseitige Durchschnitt eines einfachen Hyperboloïds und irgend einer beliebigen Ebene E ist irgend ein Kegelschnitt.«*

Da je zwei Gerade aus einer Schaar projectivisch sind und die andere Schaar zu Projectionsstrahlen haben (2), und da sie im Allgemeinen, wenn sie nämlich nicht ähnlich sind, Parallelstrahlen haben (§ 9, I), so müssen also irgend zwei Gerade aus der andern Schaar mit ihnen parallel sein, und daher folgt weiter:

5) »Dass die zwei Schaaren Gerader eines einfachen Hyperboloïds paarweise parallel sind, d. h., dass mit jeder beliebigen Geraden aus der einen Schaar eine bestimmte Gerade aus der andern Schaar parallel ist.«

Später, im dritten Band, wird durch weitere Entwickelung zu dem letzten Satze noch folgende Eigenschaft hinzugefügt werden.

6) Alle Ebenen, welche sich durch die verschiedenen Paare paralleler Geraden (5) eines einfachen Hyperboloïds legen lassen, schneiden einander in einem und demselben Punkte, nämlich im Mittelpunkte des Hyperboloïds, und alle berühren einen bestimmten Kegel zweiten Grades, welcher Asymptoten-Kegel des Hyperboloïds genannt wird.«[11])

Angenommen, es seien etwa a und A zwei parallele Gerade, so werden, wenn man sich den Ebenenbüschel A denkt, dessen Ebenen β, γ, δ, ... sämmtlich der Geraden a parallel sein, und da dieselben durch die Schaar Gerader b, c, d, ... gehen, zu welcher auch a gehört (3), so folgt also durch Umkehrung der nachstehende Satz:

[**197**] 7) »Legt man durch eine Schaar Gerader eines einfachen Hyperboloïds Ebenen, welche sämmtlich mit irgend einer zu dieser Schaar gehörigen Geraden (a) parallel sind, so schneiden sich alle diese Ebenen in einer und derselben Geraden (A), welche der andern Schaar angehört, und welche jener besondern Geraden (a) parallel ist.«

Von den Geraden, die in einem einfachen Hyperboloïd liegen, ist noch folgende merkwürdige Eigenschaft, die sich auf ihre Richtung bezieht, anzugeben. Betrachtet man das Hyperboloïd als durch zwei Ebenenbüschel, etwa durch die Ebenenbüschel A, A_1 erzeugt, und denkt sich einen dritten Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, der dem A gleich, und der so liegt, dass die entsprechenden Ebenen (und also auch die Axen) der Ebenenbüschel A, $\mathfrak{A}$ parallel sind, und dass sich die Axen der Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, A_1 schneiden, so werden also auch die zwei letzten Ebenenbüschel projectivisch sein und einen Kegel $[\mathfrak{A}A_1]$ zweiten Grades erzeugen (§ 38, II). Da die entsprechenden Ebenen der Ebenenbüschel A, $\mathfrak{A}$ parallel sind, und mithin von den entsprechenden Ebenen des Ebenenbüschels A_1 in parallelen Geraden geschnitten werden, so folgt also, dass die Strahlen des Hyperboloïds $[AA_1)$ mit den Strahlen des Kegels $[\mathfrak{A}A_1]$ parallel sind, d. h., es folgt daraus der nachstehende interessante Satz:

8) »Alle Strahlen (Geraden) eines einfachen Hyperboloïds sind mit den Strahlen irgend eines bestimmten Kegels zweiten Grades parallel, so dass, wenn man durch irgend einen beliebigen Punkt Strahlen sich denkt, welche den Strahlen des Hyper-

boloïds parallel sind, [198] dieselben eine bestimmte Kegelfläche zweiten Grades erfüllen.«*)

Aus dem letzten Satze und aus den obigen Sätzen (2, 4 rechts) folgt weiter:

9) »Dass das einfache Hyperboloïd, ausser den obigen Fällen (1, 2), unter andern auch durch folgende Angaben bestimmt, und auf die dabei bemerkte Art erzeugt wird; nämlich:

a) »Wenn irgend zwei Gerade, die zu einer Schaar gehören, und irgend ein ebener Schnitt (4 rechts) desselben gegeben sind; d. h., wenn im Raume irgend ein Kegelschnitt K und irgend zwei ihn schneidende Gerade, etwa A, A_1, wovon aber keine in seiner Ebene liegt, und die auch nicht zusammen in einer Ebene liegen, gegeben sind; denn wird alsdann eine dritte Gerade a so bewegt, dass sie stets die drei gegebenen festen Elemente K, A, A_1 schneidet, so beschreibt sie die genannte Fläche; oder wird alsdann durch jeden Punkt des Kegelschnitts K eine Gerade gelegt, welche die zwei gegebenen Geraden A, A_1 schneidet (II), so sind alle jene Geraden die eine Schaar, und die zwei gegebenen Geraden gehören zu der anderen Schaar Gerader der genannten Fläche.«

b) »Wenn irgend zwei Gerade, die zu einer Schaar gehören, und irgend ein Kegel, mit dessen Strahlen beide Schaaren Gerader parallel sind, gegeben sind; [199] d. h., wenn irgend ein Kegel K zweiten Grades und irgend zwei Gerade A, A_1, welche mit zwei Strahlen des Kegels parallel sind, aber nicht in einer Ebene liegen, gegeben sind; denn alsdann beschreibt eine dritte Gerade, die sich so bewegt, dass sie stets die zwei gegebenen festen Geraden schneidet und beständig irgend einem Strahl des Kegels parallel läuft, die genannte Fläche; oder wird alsdann mit jedem Strahl des Kegels eine Gerade parallel gelegt, welche die zwei gegebenen

*) Die Strahlen des Hyperboloïds sind namentlich mit denen seines Asymptoten-Kegels (6) parallel, und zwar liegt jeder Strahl des letzteren in der Mitte zwischen denjenigen beiden Strahlen des Hyperboloïds, mit welchen er parallel ist und mit denen er in einer Ebene liegt. Diese Eigenschaft nebst den obigen (3, 5, 6, 7, 8 und 9, b) habe ich schon bei einer früheren Gelegenheit, im Journal f. Mathem., Bd. 2, S. 268, mitgetheilt.

Geraden schneidet (II), so sind alle solchen Geraden die eine Schaar und die zwei gegebenen Geraden gehören zu der anderen Schaar Gerader der genannten Fläche.«

c) »Wenn irgend zwei zu derselben Schaar gehörige Gerade A, A_1 und die Richtungen irgend dreier andern Geraden gegeben sind; denn da diese Richtungen dreien Geraden sowohl von der einen als der andern Schaar angehören (5), so sind, zufolge (II), diejenigen drei Geraden zu finden, welche die gegebenen zwei Geraden A, A_1 schneiden, d. h., welche nicht mit diesen aus gleicher Schaar sind, wo sodann der obige Fall (2) eintritt; (auch kann der gegenwärtige Fall auf den vorhergehenden (b) zurückgeführt werden).«[12])

Endlich folgt noch, wie leicht zu sehen:

10) »Dass das einfache Hyperboloïd der Form oder Gattung nach bestimmt ist, sobald irgend fünf Strahlen desselben der Richtung nach gegeben sind, d. h., es sind alsdann die Richtungen aller übrigen Strahlen, also der Asymptotenkegel, genau bestimmt.«

52. In besonderen Fällen, wo die betrachteten projectivischen Gebilde entweder ähnlich sind, oder eigenthümliche [**200**] Lage zu einander haben, erhält auch die durch sie erzeugte Fläche, welche vorhin im Allgemeinen das einfache Hyperboloïd war (§ 51, IV), besondere Gestalt, oder geht in Grenzfälle über, die zu verschiedenen, theils bekannten, interessanten Sätzen führen.

I. Angenommen, es seien irgend zwei Gerade aus einer der zwei Schaaren von Geraden A, A_1, A_2, A_3, ... und a, b, c, d, ..., die einander schneiden (§ 51, IV), etwa die zwei Geraden A, A_1, projectivisch ähnlich, so müssen ihre unendlich entfernten Punkte einander entsprechen (§ 13, I), und also muss einer ihrer Projectionsstrahlen, d. h., eine Gerade der andern Schaar (a, b, c, ...), unendlich entfernt sein, und daher folgt weiter, dass nicht nur jene zwei Geraden, sondern dass je zwei Gerade der ersten Schaar A, A_1, A_2, ... projectivisch ähnlich sind, weil sie denselben unendlich entfernten Projectionsstrahl haben. Denkt man sich den Ebenenbüschel, welcher irgend eine Gerade der ersten Schaar, etwa die Gerade A_2, zur Axe hat, so werden dessen Ebenen α_2, β_2, γ_2, ... durch die zweite Schaar Gerader a, b, c, ... gehen (§ 51, IV), und es wird diejenige Ebene, welche nach der vorerwähnten unendlich entfernten Geraden gerichtet ist, nothwendiger Weise den Geraden A, A_1 parallel sein, weil sie nach ihren unendlich entfernten Punkten gerichtet ist, und folglich vereinigt diese Ebene die Richtungen der drei Geraden A, A_1, A_2 in sich; da ein Gleiches stattfindet, wenn anstatt der Geraden A_2 irgend eine der übrigen Geraden A_3, A_4, ... angenommen wird, und da durch die Richtungen der zwei ersten Geraden A, A_1 alle Richtungen einer Ebene bestimmt sind, so müssen folglich die Richtungen aller Geraden A, A_1, A_2, A_3, A_4, ... einer einzigen Ebene [**201**] angehören, d. h., diese Schaar Gerader müssen sämmtlich einer Ebene parallel sein, und zwar kann durch jede Gerade eine solche Ebene gelegt werden, mit welcher alle parallel sind, und welche also alle Richtungen der Geraden enthält; alle solche Ebenen sind folglich unter sich parallel, sie bilden einen Ebenenbüschel, der aus einem System Parallelebenen besteht und dessen Axe die genannte unendlich entfernte Gerade der zweiten Schaar ist. Zur leichteren Festhaltung mag diese unendlich entfernte Gerade durch e bezeichnet werden, dann heissen die Parallelebenen, nach der Reihe, in der sie durch die Geraden A, A_1, A_2, A_3, ... gehen, ε, ε_1, ε_2, ε_3, ... Diese Parallelebenen werden, da sie durch die erste Schaar Gerader A, A_1, A_2, A_3, ... gehen, die andere Schaar längs derselben schneiden, und zwar werden sie dieselben projectivisch ähnlich schneiden, weil Parallelebenen alle Geraden, denen sie begegnen, in gleichem Verhältniss theilen, und folglich werden auch die zweite Schaar Gerader a, b, c, d, ..., von der ersten projectivisch ähnlich geschnitten, daher müssen ihr auch dieselben Eigenschaften zukommen, wie der ersten, nämlich es muss einer ihrer Projectionsstrahlen, d. h., eine Gerade der ersten Schaar, die A_n heissen mag, unendlich entfernt sein, ferner müssen sie sämmtlich einer Ebene parallel sein, so dass durch jede von ihnen eine Ebene geht, mit welcher sie alle parallel sind, und dass alle diese Ebenen, die nach der Reihe α_n, β_n, γ_n, δ_n, ... heissen, unter sich parallel sind, und einen Ebenenbüschel bilden, dessen Axe die genannte unendlich entfernte Gerade A_n der ersten Schaar ist. Man stelle sich nun wiederum den vorhin erwähnten Ebenenbüschel A_2, dessen Ebenen α_2, β_2, γ_2, ... durch die zweite Schaar Gerader a, b, c, ... gehen, vor, und achte auf den [**202**] ebenen Strahlbüschel, in welchem er von einer der Parallelebenen α_n, β_n, γ_n, ..., etwa von der Ebene α_n, geschnitten wird, und welcher Strahlbüschel ebenfalls α_n heissen soll, so werden offenbar die Strahlen a_n, b_n, c_n, ... dieses Strahlbüschels der zweiten Schaar Gerader a, b, c, ... parallel sein (weil, wenn z. B. eine Gerade A einer Ebene α_n parallel ist, dann jede durch a gehende Ebene α_2 die Ebene α_n in einem Strahl a_n schneidet, der mit a parallel ist), woraus also folgt, dass diese Schaar Gerader genau alle Richtungen eines ebenen Strahlbüschels α_n, oder genau alle Richtungen einer Ebene α_n, enthalten. Aus gleichen Gründen müssen auch die erste Schaar Gerader A, A_1, A_2, A_3, ... alle Richtungen eines ebenen Strahlbüschels, oder einer Ebene, nämlich der durch sie gehenden Parallelebenen ε, ε_1, ε_2, ..., umfassen. Da der Ebenenbüschel A_2 einerseits mit dem ebenen Strahlbüschel α_n in Ansehung der Elemente α_2, β_2, γ_2 ..... und a_n, b_n, c_n, ..., und andererseits mit der Geraden A in Ansehung der Elemente α_2, β_2, γ_2, ... und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..., (wo nämlich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... die Punkte sind, in welchen die Gerade A zugleich von der zweiten Schaar Gerader a, b, c, ... geschnitten wird) perspectivisch ist, so sind folglich der ebene Strahlbüschel α_n und die Gerade A in Ansehung der Elemente a_n, b_n, c_n, ... und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... projectivisch, und da ferner die Gerade A mit allen übrigen Geraden der ersten Schaar A_1, A_2, A_3, ... projectivisch ist, so folgt also: dass die zweite Schaar Gerader a, b, c, ... den Strahlen a_n, b_n, c_n, ... eines ebenen Strahlbüschels α_n parallel sind, welcher mit den Geraden der ersten Schaar A, A_1, A_2, A_3, ... projectivisch ist. Desgleichen sind die erste Schaar Gerader A, A_1, A_2, A_3, ... den Strahlen eines ebenen Strahlbüschels parallel, welcher mit der zweiten [203] Schaar Gerader a, b, c, ... projectivisch ist, und welcher, z. B. in der Ebene ε dargestellt, ε heissen soll. Da, wie vorhin bemerkt worden, die zwei Schaaren Gerader A, A_1, A_2, A_3, ... a, b, c, d ..... mit zwei Ebenen ε, α_n (oder vielmehr mit zwei Systemen Parallelebenen ε, ε_1, ε_2, ..., α_n, β_n, γ_n, ...) parallel sind, und zwar genau alle Richtungen derselben erschöpfen, wogegen sie früher beim allgemeinen Falle mit den Strahlen eines Kegels zweiten Grades (des Asymptotenkegels) parallel waren (§ 51, IV, 8), so folgt also, dass dieser Kegel im gegenwärtigen Falle sich in jene zwei Ebenen aufgelöst hat, und somit in einen Grenzfall übergegangen ist. Jene Ebenen haben ferner die Eigenschaft, dass, da jede durch eine endlich entfernte und durch eine unendlich entfernte

Gerade geht, und da der Durchschnitt zweier solchen Geraden nothwendiger Weise unendlich entfernt sein muss, ihre Berührungspunkte (§ 51, IV) mit der krummen Fläche (welche durch die zwei Schaaren Gerader erfüllt wird) unendlich entfernt ist, woher denn jede solche Ebene »Asymptotenebene« genannt werden kann, so dass also im gegenwärtigen Falle der Fläche zwei Systeme Asymptotenebenen ε, ε_1, ε_2, ..., α_n, β_n, γ_n, ... zukommen. Die Schaar Gerader A, A_1, A_2, A_3, ... sind projectivisch ähnlich, und zwar in Ansehung der Punkte, in welchen sie von den Asymptotenebenen α_n, β_n, γ_n, ... geschnitten werden (weil diese Ebenen durch die zweite Schaar Gerader a, b, c, ... gehen), daher werden je zwei derselben, welche unter gleichen Winkeln zu diesen Ebenen geneigt sind, offenbar projectivisch gleich sein, und dass sie in der That paarweise projectivisch gleich sind, und dass ein Gleiches bei der zweiten Schaar Gerader a, b, c, d, ... stattfindet, kann leicht gezeigt werden. Denn man denke [**204**] sich zwei Asymptotenebenen, etwa ε und α_n, nenne ihre Durchschnittslinie X, und denke sich in der letzten Ebene α_n den ebenen Strahlbüschel α_n, dessen Strahlen a_n, b_n, c_n, ... den Geraden a, b, c, ... parallel sind, so wird irgend ein bestimmter Strahl zu der Durchschnittslinie X senkrecht sein, und sodann werden von den übrigen Strahlen immer zwei und zwei sowohl mit jenem Strahl, als mit der Durchschnittslinie X gleiche Winkel bilden, und daher nothwendiger Weise zu der ersten Ebene ε unter gleichen Winkeln geneigt sein, woraus dann weiter folgt, dass auch die ihnen parallen Geraden a, b, c, ... paarweise mit der Ebene ε gleiche Neigungswinkel bilden, und folglich paarweise projectivisch gleich sind. Diejenige Gerade aber, welche dem besondern Strahle, der zu der Durchschnittslinie X senkrecht ist, parallel ist, kann mit keiner andern projectivisch gleich sein; angenommen, es sei dies die Gerade a, durch welche die Asymptotenebene α_n geht, so wird also a auf X senkrecht stehen; aus gleichen Gründen muss unter der ersten Schaar Gerader A, A_1, A_2, A_3, ... sich eine bestimmte befinden, die mit keiner andern projectivisch gleich ist, angenommen es sei die Gerade A, durch welche die Asymptotenebene ε geht, so wird also auch A zu X senkrecht sein; demnach muss denn auch die durch die zwei Geraden a, A gehende Berührungsebene (aA) auf der Durchschnittslinie X, und folglich auf beiden Systemen

Asymptotenebenen ε, ε_1, ε_2, ..., α_n, β_n, γ_n, ... zugleich senkrecht stehen; unter diesen Umständen wird X »Axe« und der Durchschnittspunkt der Geraden a, A, oder der Berührungspunkt der Ebene (aA), welcher $\mathfrak{A}$ heissen mag, wird »Scheitel« der krummen Fläche genannt. Wird die krumme Fläche von irgend einer beliebigen Ebene E geschnitten, so muss der [**205**] Schnitt offenbar im Allgemeinen eine Hyperbel sein, denn da die Fläche zwei unendlich entfernte Gerade hat, muss er zwei unendlich entfernte Punkte haben, nach denen nämlich die zwei Durchschnittslinien, in welchen die Asymptotenebenen ε, α_n von der Ebene E geschnitten werden, gerichtet sind, er muss folglich eine Hyperbel sein, deren Asymptoten diesen Durchschnittslinien parallel sind; in dem besondern Falle aber, wo diese Durchschnittslinien der Axe X parallel sind (wo nämlich die schneidende Ebene E der Axe X, oder der Durchschnittslinie irgend zweier Asymptotenebenen parallel ist), und wo sie also nach einem einzigen unendlich entfernten Punkte gerichtet sind, geht die genannte Hyperbel in eine Parabel über; den Asymptoten der genannten Hyperbel sind ferner auch irgend zwei Gerade aus den zwei Schaaren Gerader A, A_1, A_2, A_3, ..., a, b, c, d, ... parallel, nämlich jedesmal diejenigen zwei, welche jenen Durchschnittslinien parallel sind, in welchen die Asymptotenebenen ε, α_n von der Ebene E geschnitten werden. — Je zwei Gerade aus einer der zwei Schaaren A, A_1, A_2, ..., a, b, c, ..., wie z. B. die Geraden A, A_1, sind Axen zweier projectivischer Ebenenbüschel, deren entsprechende Ebenen die jedesmalige andere Schaar zu Durchschnittslinien haben (§ 51, III), diejenigen zwei entsprechenden Ebenen aber, welche die unendlich entfernte Gerade e der andern Schaar zur Durchschnittslinie haben, also die Ebenen ε, ε_1, müssen nothwendiger Weise parallel sein, und da dies die einzige Eigenthümlichkeit ist, wodurch sich in diesem Falle die zwei Ebenenbüschel auszeichnen, so ist klar, dass umgekehrt, wenn irgend zwei projectivische Ebenenbüschel A, A_1 sich in solcher schiefer Lage befinden, wo irgend zwei entsprechende Ebenen parallel sind, alsdann alle oben [**206**] angegebenen Umstände und Eigenschaften stattfinden müssen.

Unter diesen besonderen Umständen heisst die krumme Fläche nicht mehr einfaches Hyperboloïd, sondern »hyperbolisches Paraboloïd«. Aus der obigen Betrachtung folgen nachstehende Eigenschaften und Erzeugungsarten des hyperbolischen Paraboloïds.

1) »Das hyperbolische Paraboloïd hat unter andern folgende wesentliche Eigenschaften: a) es enthält zwei Schaaren Gerader A, A_1, A_2, A_3, ..., a, b, c, d, ..., die einander projectivisch ähnlich schneiden; auch sind die Geraden jeder Schaar paarweise projectivisch gleich, so dass jede Gerade einer bestimmten andern Geraden projectivisch gleich ist; zwei Gerade A, a, aus jeder Schaar eine, machen hierin eine Ausnahme, d. h., sie haben nicht ihres Gleichen; b) zwei andere Gerade A_n, e, aus jeder Schaar eine, sind unendlich entfernt; c) durch jede Schaar Gerader geht ein System Parallelebenen, welche nach der unendlich entfernten Geraden der andern Schaar gerichtet, und welche daher Asymptotenebenen sind, so dass es also zwei Systeme paralleler Asymptotenebenen ε, ε_1, ε_2, ..., α_n, β_n, γ_n, ... hat; d) jede Schaar Gerader ist den Asymptotenebenen, welche durch die andere Schaar gehen, parallel und sie umfasst genau alle Richtungen dieser Ebenen, so dass die Strahlen eines Strahlbüschels in einer dieser Ebenen, genau die Richtungen aller jener Geraden darstellen, d. h., jeder Strahl ist einer bestimmten Geraden parallel, und auch umgekehrt; e) jeder [207] solche Strahlbüschel, dessen Strahlen mit der einen Schaar Gerader parallel sind, ist mit den Geraden der andern Schaar projectivisch (wobei nämlich jeder Punkt, in welchem eine dieser Geraden von einer von jenen Geraden geschnitten wird, demjenigen Strahl des Strahlbüschels entspricht, welcher der letztern Geraden parallel ist); f) jedes Paar projectivisch gleicher Gerader (a) aus der einen Schaar ist zu den Asymptotenebenen, welche durch die andere Schaar gehen, unter gleichen Winkeln geneigt, und auch umgekehrt; g) jene zwei besondern Geraden A, a, die mit keiner andern projectivisch gleich sind, sind der Richtung nach zu den Durchschnittslinien der zwei Systeme Asymptotenebenen rechtwinklig, so dass also ihre Ebene (aA) zu allen Asymptotenebenen und zu deren Durchschnittslinien rechtwinklig ist; ihr Durchschnittspunkt $\mathfrak{A}$ heisst

Scheitel und die Durchschnittslinie X der durch sie gehenden Asymptotenebenen ε, α_n heisst Axe, ihre Ebene (aA), die Berührungsebene im Scheitel, ist die einzige Berührungsebene, die auf der Axe X rechtwinklig steht; h) endlich wird es (das Paraboloïd) von einer beliebigen Ebene E im Allgemeinen in einer Hyperbel geschnitten, deren Asymptoten den Durchschnittslinien, in welchen dieselbe die zwei Systeme Asymptotenebenen schneidet, und daher auch irgend zwei Geraden, die zu den zwei Schaaren Gerader (a) gehören, parallel sind, und nur in dem besondern Falle, wo die schneidende Ebene E der [**208**] Axe X parallel ist, wird es in einer Parabel geschnitten.«*)

2) »Das hyperbolische Paraboloïd ist unter andern in folgenden Fällen bestimmt und wird auf die dabei bemerkten Arten erzeugt:

a) durch irgend zwei projectivisch ähnliche oder gleiche Gerade A, A_1, die im Raume beliebig schief liegen; nämlich die Geraden gehören zu der einen Schaar und ihre Projectionsstrahlen sind die sämmtliche andere Schaar Gerader;

b) durch zwei beliebige projectivische Ebenenbüschel A, A_1, die im Raume schief liegen, aber so, dass irgend zwei entsprechende Ebenen parallel sind; nämlich die Axen der Ebenenbüschel gehören zu der einen Schaar, und die Durchschnittslinien ihrer entsprechenden Ebenen sind die andere Schaar Gerader;

c) durch zwei projectivische Ebenenbüschel, wovon der eine aus einem System Parallelebenen besteht, also eine unendlich entfernte Axe (A_n oder e) hat, während die Axe des andern jene Ebenen schneidet; nämlich ihre Axen gehören zu der einen Schaar und die Durchschnittslinien ihrer entsprechenden Ebenen sind die andere

*) Das sogenannte schiefe Viereck, welches *M. Hirsch* im zweiten Bande S. 238 seiner Sammlung geom. Aufgaben betrachtet, ist, wie man bemerken wird, ein begrenzter Theil eines hyperbolischen Paraboloïds, und die daselbst bewiesenen Eigenschaften folgen unmittelbar aus den hier oben stehenden.

Schaar Gerader, und die Parallelebenen [209] sind das eine System Asymptotenebenen;

d) durch irgend drei Gerade A, A_1, A_2, die mit irgend einer Ebene ε_3 parallel sind, aber wovon keine zwei in einer Ebene liegen; nämlich die Ebene ε_3 ist eine Asymptotenebene, und die Geraden gehören zu der einen Schaar und alle sie schneidenden Geraden sind die andere Schaar Gerader, oder eine Gerade a, die sich so bewegt, dass sie stets jene drei schneidet, beschreibt die andere Schaar Gerader, und somit die vorgenannte Fläche;

e) durch irgend zwei beliebige Gerade A, A_1 im Raume und durch eine beliebige, sie schneidende, Ebene α_n, welche als Asymptotenebene angenommen wird; nämlich die Geraden gehören zu der einen Schaar, und alle Geraden, welche dieselben schneiden und mit der Ebene α_n parallel sind, sind die andere Schaar Gerader, oder eine Gerade a, die sich so bewegt, dass sie stets jene zwei schneidet und beständig mit der Ebene parallel ist, beschreibt die genannte Fläche;

f) durch irgend eine Gerade A und irgend einen ebenen Strahlbüschel α_n, die projectivisch sind und so liegen, dass jene nicht mit der Ebene des letzteren parallel ist; nämlich die Ebene des Strahlbüschels ist eine Asymptotenebene, und die Gerade gehört zu der einen Schaar und diejenigen Geraden, die sie schneiden, und wovon jede demjenigen Strahl des Strahlbüschels [210] parallel ist, welcher ihrem Durchschnittspunkte entspricht, sind die andere Schaar Gerader, oder eine Gerade a, die sich so bewegt, dass sie stets jene Gerade A schneidet und in jedem Augenblick dem ihrem Durchschnittspunkt entsprechenden Strahl des Strahlbüschels parallel ist, beschreibt die genannte Fläche«*).

---

*) Bei dem Grenzfalle, wo die gegebene Gerade A der Ebene des Strahlbüschels α_n parallel wird (sie in einem unendlich ent-

Die Zahl dieser Fälle lässt sich leicht vermehren, z. B. dadurch, dass auch die Hyperbel und Parabel (1, h) als bestimmende Elemente angenommen werden.*)

II. Vom hyperbolischen Paraboloïd findet ein besonderer Fall statt, der sich zum allgemeinen Falle ähnlich verhält, wie die gleichseitige Hyperbel zur beliebigen, nämlich derjenige Fall, wo die zwei Systeme Asymptotenebenen zu einander rechtwinklig sind. Haben A, a die ihnen bei der obigen Betrachtung (I) beigelegte Eigenschaft, dass sie zu der Durchschnittslinie X der Asymptotenebenen ε, α_n rechtwinklig sind, so wird also im erwähnten besondern Falle sowohl A [211] zu der Ebene α_n, als a zu der Ebene ε senkrecht sein, und daher wird A zu allen Geraden a, b, c, d, ..., und a zu allen Geraden A, A_1, A_2, A_3, ... senkrecht sein, weil diese Schaaren Gerader jenen Ebenen α_n, ε parallel sind. Wird die krumme Fläche unter diesen Umständen »gleichseitiges hyperbolisches Paraboloïd« genannt, so folgen also für sie nachstehende besondere Eigenschaften und Erzeugungsarten (I, 1):

1) »Beim gleichseitigen hyperbolischen Paraboloïd sind a) die zwei Systeme Asymptotenebenen zu einander rechtwinklig; b) eine bestimmte Gerade aus jeder Schaar Gerader ist zu allen Geraden der andern Schaar (und zu den durch diese gehenden Asymptotenebenen) rechtwinklig.« Und umgekehrt:

2) »Wenn bei einem hyperbolischen Paraboloïd eine Gerade aus der einen Schaar zu irgend zwei Geraden der andern Schaar, oder zu einer Asymptotenebene, rechtwinklig ist, so ist es ein gleichseitiges.«

---

fernten Punkte schneidet), tritt an die Stelle der genannten krummen Fläche die Parabel, d. h., die auf die angegebene Art bestimmten Geraden (zweite Schaar Gerader), nebst der gegebenen Geraden A, sind die gesammten Tangenten einer Parabel, deren Ebene mit der Ebene des Strahlbüschels parallel ist.

*) Das synthetische Hauptmerkmal, wodurch sich die gegenwärtige Fläche vom einfachen Hyperboloïd unterscheidet, besteht nämlich darin, dass sie zwei unendlich entfernte Gerade enthält; sobald daher aus irgend welchen Gründen folgt, dass die erzeugte krumme Fläche eine (oder zwei) unendlich entfernte Gerade hat, so ist daraus zu schliessen, dass sie nicht mehr das allgemeine einfache Hyperboloïd, sondern die oben genannte Fläche ist.

3) »Das gleichseitige hyperbolische Paraboloïd wird bestimmt und erzeugt:

a) durch irgend zwei projectivisch ähnliche Gerade, sobald sie im Raume in solche schiefe Lage gebracht werden, dass beide zu irgend einem und demselben Projectionsstrahl rechtwinklig sind;

b) durch irgend zwei projectivische Ebenenbüschel, sobald sie in solche schiefe Lage gebracht werden, dass von den zwei entsprechenden Ebenenpaaren, welche die entsprechenden rechten Winkel einschliessen (§ 30, VI), das eine oder andere Paar parallel ist; nämlich die Durchschnittslinie [212] des anderen Paars ist alsdann eine der genannten Geraden A, a;

c) durch zwei projectivische Ebenenbüschel, wovon der eine aus Parallelebenen besteht, auf welchen die Axe des anderen senkrecht steht; nämlich diese Axe ist alsdann eine der genannten Geraden A, a;

d) 1) durch irgend drei Gerade A_1, A_2, A_3, wovon keine zwei in einer Ebene liegen, aber die irgend eine vierte Gerade a rechtwinklig schneiden; oder: 2) durch irgend zwei Gerade, die nicht in einer Ebene liegen, wenn sie als zu einer Schaar Gerader, und zwar die eine als eine der genannten besonderen Geraden A, a, angesehen werden; nämlich eine dritte Gerade, die sich so bewegt, dass sie stets jene zwei gegebenen festen Geraden schneidet, und zwar zu der einen stets rechtwinklig ist, beschreibt die genannte Fläche;

e) durch irgend zwei Gerade, die nicht in einer Ebene liegen, und irgend eine Ebene, welche durch eine solche dritte Gerade geht, die der Richtung nach zu jenen zwei Geraden rechtwinklig ist (sie kann diese auch schneiden), wenn jene zwei Geraden als einer Schaar angehörend und die Ebene als Asymptotenebene angesehen wird; nämlich alsdann wird eine Gerade, die sich so bewegt, dass sie stets jene zwei festen Geraden schneidet und beständig jener festen

Ebene parallel bleibt, die genannte Fläche beschreiben; (die Asymptotenebene kann übrigens auch unter folgenden [213] Bedingungen gegeben werden, als: welche auf irgend einer anderen Ebene, die den beiden Geraden parallel ist, rechtwinklig steht; oder welche solche Lage hat, dass die Ebenen der Neigungswinkel, welche die zwei Geraden mit ihr bilden, parallel sind);

f) durch eine Gerade (A) und einen ebenen Strahlbüschel (α_n), die projectivisch sind, und erstere auf der Ebene des letzteren senkrecht steht, und wenn die Gerade als der einen Schaar Gerader angehörend und die Strahlen des Strahlbüschels als der anderen Schaar Gerader parallel angenommen werden; nämlich alsdann wird eine Gerade, die sich so bewegt, dass sie stets die gegebene feste Gerade schneidet und in jedem Augenblick demjenigen Strahl des Strahlbüschels parallel ist, welcher ihrem Durchschnittspunkt (in Ansehung der projectivischen Beziehung) entspricht, die oben genannte Fläche beschreiben.«[13])

53. Andere besondere Fälle (§ 52), wobei in Hinsicht der Erzeugungsart, der Gestalt und der Eigenschaften der durch projectivische Gebilde erzeugten krummen Flächen eigenthümliche Umstände stattfinden, sind folgende:

I. Zunächst mögen einige Eigenschaften, deren Richtigkeit sich aus den ersten Elementen der Geometrie ergiebt, vorangeschickt werden. Wenn man nämlich in einer Ebene zwei beliebige Strahlbüschel B, B_1 betrachtet, so findet man, dass auf jedem Strahl des einen ein bestimmter Strahl des andern rechtwinklig steht; angenommen es seien die Strahlen a, b, c, d, ... [214] des Strahlbüschels B nach der Reihe zu den Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1, ... des Strahlbüschels B_1 rechtwinklig. Die Durchschnittspunkte der zu einander rechtwinkligen Strahlenpaare liegen in einer Kreislinie, welche die Gerade BB_1, die die Mittelpunkte der Strahlbüschel verbindet, zum Durchmesser hat. Daher sind die Strahlbüschel in Ansehung der zu einander rechtwinkligen Strahlenpaare projectivisch (§ 38, III). Also:

»Irgend zwei ebene Strahlbüschel B, B_1, die in einer Ebene liegen, sind in Ansehung der zu einander rechtwinkligen Strahlen a, b, c, d, ... und a_1,

b_1, c_1, d_1, ... projectivisch, und erzeugen einen Kreis, in welchem ihre Mittelpunkte die Endpunkte eines Durchmessers sind«*).

Mittelst dieses einfachen Satzes lässt sich nun leicht zeigen, dass bei zwei ebenen Strahlbüscheln B, B_1, die in einem Strahlbüschel D liegen, und bei zwei Ebenenbüscheln A, A_1, die im Raume oder in einem Strahlbüschel D beliebig liegen, ähnliche Sätze stattfinden, aus denen sich mehrere merkwürdige Folgerungen ziehen lassen.

II. Man denke sich zwei Ebenenbüschel A, A_1, deren Axen beliebige gegenseitige Lage haben (nur [215] nicht der Richtung nach zu einander rechtwinklig sind), so wird auf jeder Ebene des einen Ebenenbüschels irgend eine bestimmte Ebene des andern rechtwinklig sein, so dass also ihre Ebenen paarweise zu einander rechtwinklig sind. Angenommen es seien die Ebenen α, β, γ, δ, ... des Ebenenbüschels A nach der Reihe zu den Ebenen α_1, β_1, γ_1, δ_1, ... des Ebenenbüschels A_1 rechtwinklig, und die Durchschnittslinien der zu einander rechtwinkligen Ebenenpaare heissen nach der Reihe a_2, b_2, c_2, d_2, ... Man denke sich ferner irgend eine Ebene E, welche zu der Axe des einen Ebenenbüschels, etwa zu A, rechtwinklig ist, so wird dieselbe die Ebenenbüschel A, A_1 in zwei ebenen Strahlbüscheln B, B_1 schneiden, deren Mittelpunkte B, B_1 nämlich in den Axen A, A_1, und deren Strahlen a, b, c, ..., a_1, b_1, c_1, ... in den Ebenen α, β, γ, ..., α_1, β_1, γ_1, ... liegen (§ 27, II), und es wird die Ebene E zu allen Ebenen α, β, γ, ... rechtwinklig sein, weil sie es zu der Axe A ist. Sodann ist klar, dass, da z. B. die Ebenen E, α_1 beide zu der Ebene α rechtwinklig sind, auch ihre Durchschnittslinie A_1 zu derselben rechtwinklig ist, und dass diese somit auch zu der Geraden a senkrecht ist, weil letztere in der Ebene α liegt; und da aus gleichen Gründen folgt, dass je zwei gleichnamige Strahlen der Strahlbüschel B, B_1, also

---

*) Die bekannte Umkehrung dieses Satzes heisst:
»Bewegt sich ein rechter Winkel (aa_1) in einer Ebene so, dass seine Schenkel a, a_1 stets durch irgend zwei feste Punkte B, B_1 gehen, so durchläuft sein Scheitel (aa_1) eine Kreislinie, welche den Abstand der festen Punkte von einander zum Durchmesser hat.«

Dieser und der obige Satz sind übrigens nur besondere Fälle von denjenigen Sätzen, die man unter den gleichen Bedingungen erhält, wenn anstatt des rechten Winkels irgend ein anderer bestimmter Winkel angenommen wird.

b und b_1, c und c_1, d und d_1, u. s. w. zu einander rechtwinklig sind, so geht also daraus hervor: a) dass die Durchschnittspunkte aller dieser Strahlenpaare in einer Kreislinie liegen, welche die Gerade B, B_1, die die Mittelpunkte der Strahlbüschel B, B_1 verbindet, zum Durchmesser hat (I); woraus denn weiter folgt, b) dass die Strahlbüschel B, B_1, in Ansehung jener Strahlenpaare, projectivisch sind, und c) dass also auch die Ebenenbüschel A, A_1 in Ansehung ihrer [**216**] zu einander rechtwinkligen Ebenenpaare α und α_1, β und β_1, γ und γ_1, u. s. w. projectivisch sind (weil sie mit jenen Strahlbüscheln B, B_1 perspectivisch sind), und dass sie daher d) im Allgemeinen ein besonderes einfaches Hyperboloïd (§ 51, **IV**, 1), oder e) wenn ihre Axen einander schneiden, einen besonderen Kegel zweiten Grades (§ 38, II) erzeugen, welches oder welcher von der Ebene E in dem genannten Kreise (a) geschnitten wird, dessen Durchmesser BB_1 zu der Axe A senkrecht ist (weil diese zu E es ist), so dass also f) dieser Durchmesser BB_1 ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloïd beschreibt (§ 52, II, 3, d, 2), wenn die Ebene E sich selbst parallel fortbewegt wird. Endlich folgt noch, g) dass der Ebenenbüschel A und der ebene Strahlbüschel B_1, in Ansehung ihrer zu einander senkrechten Elementenpaare α und a_1, β und b_1, γ und c_1, u. s. w. projectivisch sind, weil beide es mit dem ebenen Strahlbüschel B sind; oder man kann offenbar umgekehrt behaupten, dass, wenn man aus irgend einem Punkt B_1 Lothe a_1, b_1, c_1, ... auf die Ebenen α, β, γ, ... eines beliebigen Ebenenbüschels A fällt, alsdann alle Lothe einen ebenen Strahlbüschel B_1 bilden, dessen Ebene E (oder B_1) zu der Axe A des Ebenenbüschels senkrecht ist, und der mit diesem Ebenenbüschel, in Ansehung ihrer zu einander rechtwinkligen Elementenpaare, projectivisch ist, und zwar dergestalt, dass je zwei entsprechende Winkel, wie etwa (ab) und $(\alpha\beta)$, d. h., der Winkel irgend zweier Strahlen a, b und der Winkel ihrer entsprechenden Ebenen α, β, gleich sind oder zusammen zwei Rechte betragen. Es ist ferner Folgendes zu bemerken. h) Fällt man aus einem beliebigen Punkte D Lothe a, b, c, ...; a_1, b_1, c_1, ... auf die Ebenen α, β, γ, ...; α_1, β_1, γ_1, ... der Ebenenbüschel A, A_1, so bilden [**217**] dieselben zwei ebene Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, die beziehlich mit den Ebenenbüscheln A, A_1 projectivisch sind (g), sie sind folglich auch unter sich projectivisch, und zwar dergestalt, dass je zwei entsprechende Strahlen, wie etwa a

und a_1, zu einander rechtwinklig sind, weil diese nämlich Lothe auf Ebenen α und α_1 sind, welche auf einander senkrecht stehen (g); also werden die Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ im Allgemeinen einen Kegel zweiten Grades erzeugen. (Dasselbe folgt auch dadurch, dass im Falle die Axen A, A_1 sich schneiden (e), man annimmt, die oben genannte Ebene E gehe durch ihren Durchschnittspunkt, welcher D heissen mag, stehe auf der Axe A senkrecht und schneide den anderen Ebenenbüschel A_1 in einem Strahlbüschel B_1, so dass also die Strahlen a_1, b_1, c_1, ...n des letzteren immerhin, wie bei der obigen Betrachtung, zu den Ebenen α, β, γ, ... des Ebenenbüschels A senkrecht sind, und dass man sich ferner durch den Punkt D eine beliebige andere Ebene denkt, die den Ebenenbüschel A in einem ebenen Strahlbüschel B schneidet, es werden alsdann die Strahlen a, b, c, ... des letzteren zu den Strahlen a_1, b_1, c_1, ... des Strahlbüschels B_1 rechtwinklig sein, und es werden beide Strahlbüschel B, B_1, in Ansehung ihrer zu einander rechtwinkligen Strahlenpaare, projectivisch sein, weil sie es mit den Ebenenbüscheln A, A_1 sind (§ 30, V), und folglich werden sie einen Kegel zweiten Grades erzeugen.) i) Werden die Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ (h) durch zwei beliebige Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ geschnitten, so werden diese, in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ...; $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, ..., in welchen sie von den Strahlen a, b, c, ...; a_1, b_1, c_1, ... der Strahlbüschel getroffen werden, projectivisch sein (weil letztere unter sich es sind), so dass also je zwei entsprechende Punkte derselben, wie etwa $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, von dem Punkte [218] D aus unter einem rechten Winkel $(a a_1)$ gesehen werden, und so dass, im Falle die Geraden nicht in einer Ebenen liegen, sie ein einfaches Hyperboloïd (§ 51, IV, 1), und im Falle, wo sie in einer Ebene liegen, einen Kegelschnitt erzeugen.

Aus dieser Betrachtung fliesst nachstehende Reihe von Sätzen:

1) »Zwei Ebenenbüschel A, A_1, deren Axen nicht in einer Ebene liegen, sind in Ansehung ihrer zu einander rechtwinkligen Ebenenpaare α und α_1, β und β_1, γ und γ_1 u. s. w., projectivisch (c) und erzeugen also ein besonderes einfaches Hyperboloïd, welches von jeder Ebene, die zu der Axe des einen oder andern Ebenenbüschels senkrecht ist, in einem Kreise geschnitten wird, von welchem die Endpunkte eines

Durchmessers in jenen Axen liegen, und wo alle solche Durchmesser, bei dem einen oder anderen System von Kreisen, in einem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloïd liegen.« Oder:

2) »Drehen sich die Seitenflächen α, α_1 eines rechten Flächenwinkels $(\alpha\alpha_1)$ um irgend zwei feste Gerade (Axen) A, A_1, die nicht in einer Ebene liegen, so beschreibt die Kante a_2 desselben ein besonderes einfaches Hyperboloïd, welches durch die zwei festen Geraden geht, und ausserdem die Eigenschaft hat, dass es von jeder Ebene E, die zu der einen oder andern Geraden senkrecht ist, in einem Kreise geschnitten wird, und dass die Endpunkte eines Durchmessers dieses Kreises in jenen Geraden liegen, und dass alle solche Durchmesser des einen oder andern Systems [219] von Kreisen, für sich genommen, in einem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloïd liegen»*).

3) »*Zwei ebene Strahlbüschel B, B_1, die in einem Strahlbüschel D liegen* (h), *sind in Ansehung ihrer zu einander rechtwinkligen Strahlenpaare projectivisch und erzeugen also einen besondern Kegel zweiten Grades, dessen Mittelpunkt in D liegt, und der die Ebenen der Strahlbüschel B, B_1 in denjenigen Strahlen berührt, welche zu ihrer Durchschnittslinie senkrecht sind, in der offenbar die ihnen entsprechenden Strahlen vereinigt sein müssen* (§ 38, II).«

3) »*Zwei Ebenenbüschel A, A_1, die in einem Strahlbüschel D liegen, sind in Ansehung ihrer zu einander rechtwinkligen Ebenenpaare projectivisch, und erzeugen also einen besonderen Kegel zweiten Grades, dessen Mittelpunkt in D liegt, und welcher von jeder Ebene E, die zu der Axe des einen oder anderen Ebenenbüschels senkrecht ist, in einem Kreise geschnitten wird, von welchem die Endpunkte eines Durchmessers jedesmal in jenen zwei Axen liegen.*«

Oder:

4) »*Dreht sich ein rechter Winkel (aa_1) so um seinen festen Scheitelpunkt D, der in der Durchschnittslinie irgend zweier festen Ebenen B, B_1 liegt, dass sich seine Schenkel a, a_1 stets in diesen Ebenen befinden, so be-*

4) »*Bewegt sich ein rechter Flächenwinkel $(\alpha\alpha_1)$ so, dass seine Ebenen α, α_1 stets durch irgend zwei feste, sich in einem Punkte D schneidende, Gerade A, A_1 gehen, so beschreibt seine Kante einen bestimmten besonderen Ke-*

*) Den ersten Theil dieses Satzes hat *Binet* zuerst bewiesen, im zweiten Bande S. 71 der *Correspondance sur l'Ecole impériale Polytechnique.* Als ich im *Journal für Mathematik* II. Bd. den Satz zum beweisen vorlegte, sind durch ein Versehen einige Eigenschaften weggelassen worden.

rührt seine Ebene beständig einen bestimmten besonderen Kegel zweiten Grades, dessen Mittelpunkt jener feste [**220**] *Scheitel D ist, und welcher die zwei festen Ebenen in denjenigen Geraden berührt, die zu ihrer gegenseitigen Durchschnittslinie senkrecht sind.«*

gel zweiten Grades, dessen Mittelpunkt jener Durchschnittspunkt D ist, und welcher von jeder Ebene E, die zu der [**220**] *einen oder anderen jener festen Geraden senkrecht ist, in einem Kreise geschnitten wird, von welchem die Endpunkte eines Durchmessers in diesen Geraden liegen.«**)

Oder die letzteren Sätze (3) und (4) lassen sich, zufolge (§ 34 u. § 48), wie folgt in sphärische Sätze übertragen:

5) »*Irgend zwei Hauptkreise H, H_1 einer Kugelfläche sind in Ansehung ihrer Punktenpaare, die um einen Quadranten von einander entfernt sind, projectivisch, und erzeugen also einen besondern sphärischen Kegelschnitt, der jene Hauptkreise in denjenigen Punkten berührt, welche um einen Quadranten von ihren gegenseitigen Durchschnittspunkten abstehen.«*

5) »*Irgend zwei Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ auf einer Kugelfläche sind in Ansehung ihrer zu einander rechtwinkligen Strahlenpaare projectivisch, und erzeugen also einen besondern sphärischen Kegelschnitt, der durch die Mittelpunkte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ der Strahlbüschel geht, und dessen Tangenten in diesen Punkten zu dem durch diese gehenden Hauptkreise $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ rechtwinklig sind.«*

Oder:

6) »*Bewegt sich ein Quadrant $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ auf einer Kugelfläche so, dass seine Endpunkte $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ stets in irgend zwei festen Hauptkreisen H, H_1 liegen, so berührt er beständig einen bestimmten sphärischen Kegelschnitt, der auch die festen Hauptkreise berührt, und zwar in denjenigen Punkten, welche in der Mitte* [**221**] *zwischen ihren gegenseitigen Durchschnittspunkten liegen.«* Oder: »*Ist der Winkel an der Spitze eines sphärischen Dreiecks der Grösse und Lage nach gegeben, und ist die Grundlinie desselben ein Quadrant, so berührt diese in allen ihren verschiedenen Lagen stets einen bestimmten Kegelschnitt, der die Schenkel des festen Winkels in denjenigen Punkten berührt, welche vom Scheitel des Winkels um den Quadranten entfernt sind.«*

6) »*Bewegt sich ein sphärischer rechter Winkel (aa_1) so, dass seine Schenkel a, a_1 stets durch irgend zwei feste Punkte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ gehen, so durchläuft sein Scheitelpunkt (aa_1) einen bestimmten sphärischen Kegelschnitt, der durch die festen Punkte geht und dessen Tangenten in diesen Punkten auf dem durch dieselben* [**221**] *gehenden Hauptkreise senkrecht sind.«* Oder: »*Ist die Grundlinie eines sphärischen Dreiecks der Grösse und Lage nach gegeben, und ist der Winkel an der Spitze desselben ein rechter, so ist der Ort dieser Spitze ein bestimmter sphärischer Kegelschnitt, welcher durch die Endpunkte der festen Grundlinie geht, und dessen Tangenten in diesen Punkten zu der Grundlinie senkrecht sind.«*

---

*) Diesen Satz scheint *Hachette* zuerst bewiesen zu haben, *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique* tom. I, p. 179.

Es folgt weiter (i).

7) »Irgend zwei Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ im Raume sind in Ansehung ihrer Punktenpaare, welche von irgend einem beliebigen Punkte D aus unter rechten Winkeln gesehen werden, d. h., nach welchen von diesem Punkte aus Strahlenpaare gehen, die zu einander rechtwinklig sind, projectivisch, so dass die Schaar Gerader, welche jene Punktenpaare verbinden, in einem einfachen Hyperboloïd liegen, und dass die Ebenen aller jener rechten Winkel einen Kegel zweiten Grades berühren, dessen Mittelpunkt in dem genannten Punkte D liegt (§ 50).« Oder:

8) »Bewegt sich ein rechter Winkel (aa_1) so um seinen Scheitel, der in irgend einem festen Punkte D liegt, dass seine Schenkel a, a_1 stets irgend zwei feste Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, die nicht in einer Ebene liegen, schneiden; so beschreibt die Gerade, welche durch die jedesmaligen [**222**] beiden Durchschnittspunkte geht, ein einfaches Hyperboloïd, in welchem auch die zwei festen Geraden liegen, und so berührt die Ebene des bewegten Winkels stets einen bestimmten Kegel zweiten Grades, dessen Mittelpunkt jener feste Punkt D ist, und welcher auch von den zwei festen Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ berührt wird.«*)

---

*) *Poncelet* hat diesen Satz zuerst bekannt gemacht, in einem Memoire, welches er der Akademie der Wissenschaften zu Paris vorlegte. Er folgerte ihn aus dem obigen Satze von *Binet* (2). Die Sätze (7 und 8) sind nämlich, auch zufolge der gegenwärtigen Entwickelung, als Gegensätze der Sätze (1 und 2) anzusehen, und hätten als solche neben diese gestellt werden können. So liessen sich z. B. die Sätze (2 und 8), einander entgegengesetzt, wie folgt aussprechen:

»*Bewegt sich ein rechtwinkliger dreiflächiger Körperwinkel* $\alpha\alpha_1 E$ *so, dass die Hypotenusen-Fläche* E *stets in einer festen Ebene* E *bleibt, während die zwei übrigen Seitenflächen* $\alpha\alpha_1$ *sich um irgend zwei feste Gerade* A, A_1 *drehen, so beschreibt die Kante* a_2 *des rechten Winkels* $(\alpha\alpha_1)$ *ein einfaches Hyperboloïd, in welchem auch die zwei festen Geraden* A, A_1 *liegen, und so durchläuft der*

»*Bewegt sich ein veränderliches rechtwinkliges Dreieck* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 D$ *so, dass der Scheitel* D *des rechten Winkels stets in einem festen Punkte* D *bleibt, während die zwei übrigen Ecken* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ *sich längs irgend zwei festen Geraden* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ *fortbewegen, so beschreibt die Hypotenuse* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ *ein einfaches Hyperboloïd, in welchem auch die zwei festen Geraden* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ *liegen, und so bewegt sich die Ebene des*

9) »**Wenn bei den beiden letzten Sätzen** (7 und 8) **alle Bedingungen dieselben bleiben,** [**223**] **nur dass die gegebenen festen Geraden** $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ **in einer Ebene** E **liegen sollen, so bleiben auch die Folgerungen die nämlichen, ausser dass alsdann an die Stelle des einfachen Hyperboloïds irgend ein Kegelschnitt tritt, der durch die Geraden erzeugt wird, also in ihrer Ebene liegt, und durch welchen der genannte Kegel** D **geht.**« »**Und wenn ferner insbesondere der feste Punkt** D **so liegt, dass der Strahl, welcher ihn mit dem Durchschnittspunkte der festen Geraden** $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ **verbindet, zu den beiden letzteren senkrecht ist, so ist alsdann der genannte Kegelschnitt eine Hyperbel, welche die Geraden** $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ **zu Asymptoten hat.**« Die Richtigkeit des letzten Falles folgt, wie man leicht bemerken wird, daraus, dass die unendlich entfernten Punkte der Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ offenbar den in ihrem gegenseitigen Durchschnitte vereinigten Punkten entsprechen (§ 40, I). Auch kann dieser Fall dadurch aus dem obigen Satze (4, links) gefolgert werden, dass man die dort genannten Ebenen B, B_1 durch eine solche dritte Ebene E schneidet, welche zu ihrer Durchschnittslinie senkrecht ist, und welche mithin mit denjenigen beiden Strahlen, in welchen jene Ebenen von dem daselbst genannten Kegel D berührt werden, parallel ist (§ 36, III).

10) »**Steht die Axe eines Ebenenbüschels** A **auf der Ebene eines ebenen Strahlbüschels** B_1 **senkrecht, so sind beide Gebilde in Ansehung ihrer zu einander rechtwinkligen Elementenpaare projectivisch** (g) **und erzeugen einen Kreis, welcher in der Ebene des Strahlbüschels liegt, und den Abstand des Punktes** B, **in welchem jene Axe** A **diese Ebene trifft,** [**224**] **vom Mittelpunkte** B_1 **des Strahlbüschels, zum Durchmesser hat.**«

Da durch drei Paar entsprechender Elemente die projectivische Beziehung zweier Gebilde bestimmt ist, so folgen aus den obigen Sätzen (I, 3, 5, 7 und 10), durch Umkehrung, die nachstehenden:

Scheitel des Körperwinkels einen bestimmten Kegelschnitt, nämlich den gegenseitigen Durchschnitt der festen E'ene E und des Hyperboloïds.«

Dreiecks als Berührungsebene eines bestimmten Kegels zweiten Grades, nämlich des Berührungskegels aus dem Punkte D an das Hyperboloïd.«

11) a) »Sobald bei zwei projectivischen Gebilden — seien es 1) zwei Ebenenbüschel A, A_1, deren Axen in einer Ebene liegen mögen (3) oder nicht (1); oder 2) zwei ebene Strahlbüschel B, B_1, die in einer Ebene E (I) oder in einem Strahlbüschel D (3) liegen; oder 3) zwei sphärische Hauptkreise H, H_1 (5); oder 4) zwei sphärische Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ (5); oder endlich 5) ein Ebenenbüschel A und ein ebener Strahlbüschel B_1 (10) — irgend drei entsprechende Elementenpaare zu einander rechtwinklig sind, so sind je zwei der übrigen entsprechenden Elemente ebenfalls zu einander rechtwinklig;« und b) »Sobald bei zwei projectivischen Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ (7) irgend drei Paar entsprechender Punkte von irgend einem Punkte D aus unter rechten Winkeln gesehen werden, so findet für jedes der übrigen Paare entsprechender Punkte ein Gleiches statt.«

Und daraus folgt weiter:

12) a) »Dass bei zwei beliebig liegenden projectivischen Gebilden — von der Art, wie sie so eben genannt worden (11, a), ausgenommen der fünfte Fall — im Allgemeinen und höchstens nur zwei Paar entsprechender Elemente zu einander rechtwinklig sind, nämlich es sind entweder zwei, oder nur ein, oder gar kein Paar zu einander rechtwinklig, eben so, [225] wie bei zwei projectivischen Gebilden, wenn sie in- oder aufeinander liegen, entsprechende Elementenpaare zusammenfallen;« und b) »dass bei zwei beliebig liegenden projectivischen Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ von irgend einem beliebigen Punkte aus, gleicherweise entweder zwei oder nur ein, oder gar kein Paar entsprechende Punkte unter rechten Winkeln gesehen werden.« Und zwar sind die erwähnten Elementenpaare wie folgt leicht zu finden. Sind z. B. zwei beliebig liegende projectivische Ebenenbüschel A, A_1 gegeben, so denke man sich einen solchen dritten Ebenenbüschel A_2, der mit A_1 einerlei Axe hat, und der mit A in Ansehung ihrer zu einander rechtwinkligen Ebenenpaare projectivisch ist (1), so sind alsdann auch A_1 und A_2 projectivisch, und so viele entsprechende Elementenpaare der letzteren zusammenfallen, eben so viele entsprechende Elementenpaare von A_1, A_2 müssen offenbar zu einander rechtwinklig sein; die vereinigten

entsprechenden Elementenpaare von A_1, A_2 werden aber nach (§ 31, III) gefunden. Bei den übrigen Paaren von Gebilden ist die Lösung ähnlich.

Die obigen Sätze (2, 4 und 6) können unter andern in folgende Grenzfälle übergehen:

13) »Wenn nämlich in (2) und in (4) die gegebenen festen Geraden A, A_1 zu einander rechtwinklig sind (bei (2) der Richtung nach), so treten offenbar an die Stelle sowohl des einfachen Hyperboloïds (2) als des Kegels (4), zwei Ebenen, wovon jede durch eine der beiden festen Geraden geht und zu der jedesmaligen andern senkrecht ist, und die daher auch zu einander senkrecht sind; d. h., sollen die Seitenflächen α, α_1 eines rechten Flächenwinkels [**226**] ($\alpha\alpha_1$) durch jene zwei zu einander rechtwinkligen festen Geraden A, A_1 gehen, so ist der Ort seiner Kante a_2 auf die zwei genannten Ebenen beschränkt. Und wenn in (4 links) die gegebenen festen Ebenen B, B_1 zu einander rechtwinklig sind, so reducirt sich der daselbst genannte Kegel auf diejenigen Geraden, in welchen er zuvor jene Ebenen berührte, oder vielmehr es geht die Kegelfläche in die Fläche des durch diese Geraden eingeschlossenen Winkels über; denn alsdann ist jede von diesen zwei genannten Geraden zu allen Geraden in der andern Ebene senkrecht. Aehnliches folgt für die sphärischen Sätze (6).«

14) »Zwei gegebene projectivische Gebilde, nämlich entweder α) zwei Ebenenbüschel A, A_1, oder β) zwei ebene Strahlbüschel B, B_1, so zu legen, dass ihre entsprechenden Elementenpaare zu einander rechtwinklig sind; und ferner: γ) wenn zwei projectivische Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in beliebiger schiefer Lage im Raume gegeben sind, denjenigen Punkt D zu finden, von welchem aus ihre entsprechenden Punktenpaare unter rechten Winkeln gesehen werden.«

Auflösung. α) Man halte den einen Ebenenbüschel, etwa A, in seiner gegebenen Lage fest, und fälle aus einem beliebigen Punkte B_1 Lothe auf seine Ebenen, so dass ein ebener Strahlbüschel B_1 entsteht, welcher mit dem Ebenenbüschel A (10), und mithin auch mit dem Ebenenbüschel A_1 projectivisch ist. Sodann kommt es nur darauf an, den

Ebenenbüschel A_1 so zu legen, dass er mit dem festen Strahlbüschel B_1 perspectivisch ist. Man suche zu diesem Endzweck die Schenkel s_1, t_1 und Seitenflächen σ_1, τ_1 der entsprechenden [**227**] rechten Winkel der beiden Gebilde B_1, A_1 (§ 30, VI). Da die Strahlen s_1, t_1, der Voraussetzung gemäss, fest sind, so ist der Ort der Kante A_1 des rechten Flächenwinkels $(\sigma_1 \tau_1)$, wenn seine Flächen durch jene Strahlen gehen sollen, auf diejenigen zwei Ebenen S, T beschränkt, welche durch s_1, t_1 gehen und beziehlich zu t_1, s_1 senkrecht sind (13). Sind ferner α_1, β_1 irgend zwei andere zu einander rechtwinklige Ebenen des Ebenenbüschels A_1, und sind a_1, b_1 die ihnen entsprechenden Strahlen im Strahlbüschel B_1, so ist der Ort der Kante A_1 des rechten Flächenwinkels $(\alpha_1 \beta_1)$, wenn seine Flächen durch jene Strahlen gehen sollen, auf eine besondere Kegelfläche K zweiten Grades beschränkt (4), welche durch die Strahlen a_1, b_1 geht, und die daher nothwendiger Weise von der einen oder der andern der vorigen Ortsebenen S, T in irgend zwei Strahlen ${}_1A$, ${}^1A$ geschnitten wird, in denen allein die Kanten der zwei genannten Flächenwinkel $(\sigma_1 \tau_1)$, $(\alpha_1 \beta_1)$ zusammentreffen können, und in denen folglich allein die Axe A_1 liegen kann, um der Aufgabe zu genügen, d. h., damit der Ebenenbüschel A_1 mit dem festen Strahlbüschel B_1 perspectivisch sei. Um die genannten Strahlen ${}_1A$, ${}^1A$ in der That zu finden, kann man danach z. B. wie folgt verfahren. Es stelle (Fig. 51) das Papier die Ebene des Strahlbüschels B_1 vor, wo man sich also die Ebenen S, T durch die Strahlen s_1, t_1 und senkrecht auf jener Ebene zu denken hat. Da die genannten zwei rechtwinkligen Ebenenpaare σ_1 und τ_1, α_1 und β_1 des Ebenenbüschels A_1 nothwendiger Weise abwechselnd aufeinander folgen, etwa in der Ordnung σ_1, α_1, τ_1, β_1, so müssen auch die ihnen entsprechenden Strahlenpaare s_1 und t_1, a_1 und b_1 im Strahlbüschel B_1 abwechselnd aufeinander folgen, und zwar nach der Ordnung s_1, a_1, t_1, b_1 [**228**] (§ 29, II). Da ferner der genannte Kegel K von jeder Ebene E, welche zu einem der zwei Strahlen a_1, b_1 senkrecht ist, in einem Kreise geschnitten wird, wovon die Endpunkte eines Durchmessers in diesen Strahlen liegen (4 rechts), so ist also jede Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, die man zwischen diesen Strahlen und z. B. auf a_1 senkrecht zieht, ein solcher Durchmesser, der nothwendiger Weise jedesmal einen der zwei anderen Strahlen s_1, t_1, hier t_1, schneiden muss; über diesem Durchmesser beschreibe man sofort in der zugehörigen Ebene E, welche die Ebene T in einer Geraden ${}_1\mathfrak{a}\,{}^1\mathfrak{a}$ schneidet, den genannten Kreis, so wird dieser jener Geraden ${}_1\mathfrak{a}\,{}^1\mathfrak{a}$ in zwei Punkten ${}_1\mathfrak{a}$, ${}^1\mathfrak{a}$ begegnen, durch welche die verlangten Strahlen ${}_1A$, ${}^1A$ gehen. (Man könnte übrigens auch über demselben Durchmesser in der Ebene der Figur einen Kreis beschreiben, und hier die Länge der Abschnitte ${}_1\mathfrak{a}\mathfrak{t}$, ${}^1\mathfrak{a}\mathfrak{t}$, so wie die Winkel, welche die Strahlen ${}_1A$, ${}^1A$ mit dem Strahle t_1 einschliessen, oder mit einem Wort, die Dreiecke, ${}_1\mathfrak{a}\mathfrak{t}B_1$, ${}^1\mathfrak{a}\mathfrak{t}B_1$ finden, wie leicht zu sehen ist.) Hat man auf vorstehende Weise zwei bestimmte Lagen ${}_1A$, ${}^1A$ für die Axe A_1 gefunden, so kennt man zugleich alle möglichen Lagen derselben, indem sie aus jenen dadurch, und nur dadurch, in andere, ihr zukommende, Lagen übergehen kann, wenn sie mit sich selbst parallel fortbewegt wird. Es ist daher, wenn die Lage der Axe A irgendwo fest angenommen wird, die Lage, oder der Ort der Axe A_1 nicht beschränkt, sondern nur ihre Richtung, und zwar ist diese auf n u r z w e i bestimmte Richtungen ${}_1A$, ${}^1A$ beschränkt. Die Axe A_1 kann daher auch in solche Lage gebracht werden, wo sie jene andere Axe schneidet, und wo alsdann die Strahlbüschel A, A_1 den mehrerwähnten besondern Kegel erzeugen. — Wenn insbesondere die gegebenen Ebenenbüschel A, A_1 gleich [**229**] sind, so fallen, wie leicht zu sehen, die zwei Strahlen ${}_1A$, ${}^1A$ in einen einzigen zusammen, welcher zu der Ebene des Strahlbüschels B_1 senkrecht ist, so dass alsdann die Axen A, A_1 der Ebenenbüschel parallel werden, und wo alsdann letztere den sogenannten geraden Cylinder erzeugen.

β) Aus den obigen Sätzen (3 und 4, links) folgt zuvörderst, dass, um die gegebenen Strahlbüschel B, B_1 in die verlangte Lage zu bringen, von den Schenkeln ihrer entsprechenden rechten Winkel (st), $s_1t_1)$ (§ 9, II) zwei ungleichnamige, also entweder s und t_1, oder t und s_1, vereinigt werden müssen. Ist dieses geschehen, und zwar so, dass zugleich die Mittelpunkte der Strahlbüschel zusammenfallen (in D), so ist sofort nur noch nöthig, den letzteren solche Lage zu geben, d. h., ihre Ebenen so gegen einander zu neigen, dass irgend ein Paar andere entsprechende Strahlen derselben, etwa a und a_1, zu einander rechtwinklig sind, denn alsdann sind drei Paar entsprechende Strahlen s und s_1, t und t_1, a und a_1 zu einander rechtwinklig, und folglich die Aufgabe gelöst (11). Allein bei genauer Untersuchung dieses Verfahrens gewahrt man bald, dass von jenen ungleichnamigen Strahlenpaaren nicht jedes, sondern nur eins von beiden vereinigt werden darf, und zwar verhält es sich damit wie folgt. Von den zwei Winkelsummen $(as) + (a_1 t_1)$ und $(at) + (a_1 s_1)$ ist nämlich, im Allgemeinen, die eine grösser und die andere kleiner als ein rechter Winkel, weil beide Summen zusammen zwei rechte betragen, diejenige Summe nun, welche grösser ist, enthält jedesmal die zwei Strahlen, welche allein vereinigt werden dürfen. Durch die wirkliche Auflösung wird dies, wie folgt, klar dargethan. Es sei z. B. die Summe $(at) + (a_1 s_1) > R$, so lege man die Strahlbüschel so, dass sowohl ihre Mittelpunkte [**230**] B, B_1, als die Strahlen t und s_1 vereinigt sind. Wird sodann die Lage des einen Strahlbüschels, etwa die des B, als fest angenommen (Fig. 52), so kann der andere B_1 seine Lage nur noch dadurch ändern, dass er sich um den gemeinschaftlichen festen Strahl ts_1 herumbewegt, wobei der Strahl a_1 offenbar einen (geraden) Kegel zweiten Grades beschreibt; es soll aber diejenige Lage dieses Strahls gefunden werden, wo er zu seinem entsprechenden Strahle a rechtwinklig ist, für diesen Fall muss er also auch in der Ebene E liegen, welche im Punkte B auf dem Strahle a senkrecht steht, und die also durch den zu a rechtwinkligen Strahl e geht, folglich können nur diejenigen zwei Strahlen $_1a$, ^1a, in welchen diese Ebene E jenen Kegel schneidet, die gesuchte Lage des Strahles a_1 darstellen, wodurch sofort auch die Lage des Strahlbüschels B_1, in der dieser allein der Aufgabe genügt, bestimmt ist. Wie die Strahlen $_1a$, ^1a in der That zu construiren sind, ist nach diesen Angaben leicht zu sehen. Auch sieht man jetzt, warum die Auflösung unmöglich wird, wenn $(at) + (a_1 s_1) < R$ ist, weil nämlich alsdann Winkel $(a_1 s_1) < (et)$, so dass folglich die Ebene E den durch a_1 beschriebenen Kegel nicht in zwei Strahlen schneiden kann. — Wenn insbesondere die Strahlbüschel B, B_1 gleich sind, so berührt die Ebene E den genannten Kegel, weil dann Winkel $(et) = (a_1 s_1)$, so dass beide Strahlen $_1a$, ^1a mit e zusammenfallen, und so dass alsdann auch die Ebenen der Strahlbüschel aufeinander fallen. In diesem Falle können aber die Strahlbüschel auch in solcher Lage der Aufgabe genügen, in der sie anfangs oben (I) betrachtet worden, wo sie alsdann einen Kreis erzeugen. — Käme es darauf an, die Strahlbüschel so zu legen, dass ihre entsprechenden Strahlen bloss der Richtung nach zu einander

[231] rechtwinklig wären, wenn z. B. ihre Mittelpunkte in fester Lage gegeben wären u. s. w., so dürfte man nur eben so verfahren, wie vorhin, und sodann den Strahlbüschel B_1 so legen, dass er mit sich selbst parallel wäre und ausserdem jenen übrigen gegebenen Bedingungen genügte.

γ) Man beschreibe über irgend drei Projectionsstrahlen der gegebenen Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, etwa über $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, als Durchmesser genommen, Kugelflächen, welche sich, im Allgemeinen, in irgend zwei Punkten D, D_1 schneiden werden, von denen offenbar jeder der Aufgabe genügt (11, b). Schneiden sich die drei Kugelflächen nicht zusammen in zwei Punkten (oder berühren einander wenigstens in einem Punkt), so ist die Aufgabe für die gegebene Lage der Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ unmöglich, sie kann aber, wofern eine Aenderung dieser Lage gestattet wird, leicht möglich gemacht werden.[14])

Es ist hierbei noch zu bemerken, dass jede der zwei obigen Auflösungen (α), (β) auch auf die andere zurückgeführt werden kann (h), und dass ferner auch die ihnen entsprechenden sphärischen Aufgaben sich auf ähnliche Weise lösen lassen.

Durch die erste Auflösung (α) ist auch zugleich die folgende, zu (§ 30) nachträgliche, Aufgabe gelöst:

15) »Zwei projectivische Gebilde A_1, B_1, nämlich einen Ebenenbüschel und einen ebenen Strahlbüschel, die in beliebig schiefer Lage gegeben sind, in perspectivische Lage zu bringen.«

Wie die genannte Auflösung zeigt, kommen dieser Aufgabe, im Allgemeinen, zwei Auflösungen zu, d. h., wird die Lage des einen Gebildes als fest angenommen, [232] so kann das andere in zwei verschiedenen Lagen der Aufgabe genügen.

In Bezug auf die oben betrachteten besondern Erzeugnisse projectivischer Gebilde, deren entsprechende Elemente zu einander rechtwinklig sind, ist endlich noch zu bemerken, dass sie bei gewissen Untersuchungen (im Raume und auf der Kugelfläche) ähnliche Hülfe leisten, wie man sie vom Kreise, vermöge seiner in (I) angegebenen Eigenschaft, allgemein zu benutzen gewohnt ist, und was z. B. auch schon bei der vorstehenden Auflösung (β) zu sehen ist. Deshalb mag in Hinsicht des besondern einfachen Hyperboloïds (1, 2) und des besondern Kegels zweiten Grades (3, 4 rechts) hier noch insbesondere erinnert werden: »Dass diese Figuren, vor den übrigen ihrer Art, daran zu erkennen sind, dass jeder Kreisschnitt in ihnen zu einem ihrer Strahlen senkrecht ist, und dass sie daher unter andern, wie folgt, bestimmt und erzeugt werden (§ 51, IV, 9):

16) »Das genannte besondere einfache Hyperboloïd wird bestimmt und erzeugt:

a) wenn irgend ein Kreis K und zwei ihn schneidende Gerade A, A_1, wovon die eine A senkrecht und die andere A_1 beliebig schief auf seiner Ebene steht, und welche Geraden sich nicht schneiden, gegeben sind; nämlich bewegt sich alsdann eine dritte Gerade a so, dass sie stets die drei gegebenen festen Elemente K, A, A_1 schneidet, so beschreibt sie die genannte Fläche; oder:

b) wenn irgend zwei feste Gerade A, A_1, die nicht in einer Ebene liegen, gegeben sind, und ein veränderlicher Kreis K sich so [233] bewegt, dass seine Ebene stets zu der einen Geraden A senkrecht ist, und dass stets die Endpunkte eines Durchmessers desselben in den zwei festen Geraden liegen, so beschreibt er die genannte Fläche.« Und:

17) »Wenn irgend ein Kreis K und irgend eine ihn schneidende und auf seiner Ebene senkrecht stehende Gerade A gegeben sind, so wird durch jeden Punkt D in der Geraden und durch den Kreis der genannte besondere Kegel erzeugt, d. h., so ist der Kegel, welcher durch den Kreis geht und jenen Punkt D zum Mittelpunkt hat, ein solcher besonderer Kegel.«

III. An die vorstehende Reihe von Sätzen hätten fast unmittelbar noch mehrere andere Sätze angeschlossen werden können, wovon ich einige im Anhange aufstellen werde. Hier soll nur noch ein eigenthümlicher Fall (I), der mit einer Einschränkung schon in der vorigen Betrachtung (II, h) vorkam, Platz finden.

Fällt man nämlich aus einem beliebigen Punkte D Lothe auf die Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots\ldots$ irgend zweier beliebig schief liegender projectivischer Ebenenbüschel A, A_1, so bilden dieselben zwei ebene Strahlbüschel B, B_1, welche beziehlich mit den Ebenenbüscheln A, A_1 (II, g), und folglich auch unter sich, projectivisch sind, und welche somit, im Allgemeinen, einen Kegel zweiten Grades erzeugen, dessen Mitelpunkt D ist. Ferner folgt, dass die Ebene irgend zweier entsprechender Strahlen (Lothe) der Strahlbüschel B, B_1, wie z. B. die Ebene (aa_1) der Strahlen a, a_1, zu der Durchschnittslinie a_2 der diesen Strahlen entsprechenden Ebenen α, α_1 der Ebenenbüschel A, A_1 senkrecht ist. [234] Wird endlich noch erinnert, dass die Ebenenbüschel A, A_1, da sie sich in schiefer Lage befinden, im Allgemeinen, entweder ein einfaches Hyperboloïd oder einen Kegel zweiten Grades erzeugen, so folgen also nachstehende Sätze:

1) »Alle Ebenen $[(aa_1)]$, welche durch einen beliebigen festen Punkt D gehen, und wovon jede zu irgend einem Strahle (a_2) eines einfachen Hyperboloïds senkrecht ist, umhüllen irgend einen Kegel D zweiten Grades.«

2) »*Fällt man aus irgend einem Punkte D_1 (Durchschnitt der Axen A, A_1) Lothe auf die Berührungsebenen eines gegebenen Kegels D zweiten Grades, so liegen sie in einer andern Kegelfläche $[AA_1]$ von demselben Grade*« *).

2) »*Legt man durch irgend einen Punkt D Ebenen, welche auf den Strahlen eines gegebenen Kegels $[AA_1]$ zweiten Grades rechtwinklig stehen, so umhüllen und berühren sie irgend einen andern Kegel D von demselben Grade*«*).

Zusammengesetztere Sätze und Aufgaben.

54. Die in den vorhergehenden Paragraphen (§ 50—53) entwickelten Eigenschaften beliebig schief liegender projectivischer Gebilde und deren Erzeugnisse führen, durch Wiederholung und Verbindung, zu zusammengesetzteren Sätzen, und zwar sind sie sehr dazu geeignet, eine Menge von Aufgaben leicht zu lösen, viele Sätze einfach zu beweisen, den inneren Zusammenhang von Porismen klar darzustellen, so wie endlich auch die Abhängigkeit gewisser Systeme ungleichartiger Figuren von einander zu begründen, und die [235] Gesetze für die Uebertragung der Eigenschaften des einen Systems auf das andere nachzuweisen. Einige passende Beispiele werden hinreichend sein, um dieses alles ins Klare zu

*) Diesen Satz, nebst einigen mit ihm zusammenhängenden Eigenschaften, habe ich zuerst bei einer Gelegenheit im Journal f. Mathem. Bd. II, Heft III, ausgesprochen.

setzen. Ich muss jedoch bemerken, dass man hier auf ähnliche Weise, wie früher (§ 19—25), (§ 41—43) und (§ 46), zu Werke gehen könnte, nämlich durch stufenweise Verbindung der Gebilde und mit genauer Oekonomie, alle verschiedenen Reihenfolgen von Sätzen und Aufgaben zu entwickeln. Mehrere hierhin gehörige Sätze und Aufgaben werde ich im Anhange, zur Selbstübung, aufstellen.

55. Zum Behufe einiger nachfolgender Sätze und Aufgaben, so wie zur Erleichterung für alle späteren ähnlichen Betrachtungen, sollen hier vorerst einige Erklärungen festgestellt werden, welche als Ergänzung oder als Erweiterung sich an die obigen Erklärungen (§ 19) anschliessen, und welche eigentlich schon früher (§ 32, oder § 33) ihre Stelle hätten finden können. Aehnlicherweise nämlich, wie in (§ 19) die Figuren in der Ebene erklärt und in ihrer Vollständigkeit aufgefasst worden sind, sollen hier Figuren, im Allgemeinen, mögen sie in einer Ebene E, oder in einem Strahlbüschel D, oder im Raume überhaupt liegen, erklärt und aufgefasst werden, und zwar wie folgt.[15])

Irgend n Ebenen, die als zusammengehörend ins Aug gefasst werden, sollen fortan »vollständiges n Flach« heissen, nämlich die Ebenen sollen seine Flächen und die Geraden, in denen sie sich paarweise schneiden, sollen seine Kanten genannt werden; es hat also im Ganzen $\frac{1}{2} n (n-1)$ Kanten. Ferner sollen die n Ebenen, wenn sie in irgend einer bestimmten Aufeinanderfolge [236] aufgefasst werden, wobei nämlich die erste als auf die letzte ($n$te) folgend angesehen wird, »einfaches n Flach« heissen, und zwar sollen nur allein die Geraden, in denen sich die unmittelbar aufeinander folgenden Ebenen schneiden, Kanten desselben genannt werden; das vollständige n Flach umfasst also 3, 4, 5 ... (n—1) einfache n Flach (§ 25, Note). Endlich soll das vollständige n Flach, so wie jedes einfache n Flach, »im Strahlbüschel« oder »im

Irgend n Punkte, die als zusammengehörend ins Aug gefasst werden, sollen fortan »vollständiges n Eck« heissen, nämlich die Punkte sollen seine Ecken und die Geraden, in denen sie paarweise liegen, sollen seine Seiten genannt werden; es hat also im Ganzen $\frac{1}{2} n (n-1)$ Seiten. Ferner sollen die n Punkte, wenn sie in irgend einer bestimmten Aufeinanderfolge aufgefasst werden, [236] wobei nämlich der erste als auf den letzten ($n$ten) folgend angesehen wird, »einfaches n Eck« heissen, und zwar sollen nur allein die Geraden, in denen die unmittelbar aufeinander folgenden Punkte paarweise liegen, Seiten desselben genannt werden; das vollständige n Eck umfasst also 3, 4, 5 ... (n—1) einfache n Ecke (§ 25, Note). Endlich soll das vollständige n Eck, so wie jedes einfache n Eck »in der Ebene« oder »im Raume« heissen, je nachdem seine n Ecken

Raume« heissen, je nachdem seine n Flächen sämmtlich durch einen und denselben Punkt D gehen oder nicht. Wenn übrigens in der Folge die unvollständigen Benennungen »n Flach«, »n Flach im Raume« gebraucht werden, so soll darunter beziehlich: »einfaches n Flach im Strahlbüschel«, »einfaches n Flach im Raume« verstanden werden.

sämmtlich in einer und derselben Ebene E liegen oder nicht. Wenn übrigens in der Folge die unvollständigen Benennungen: »n Eck«, »n Eck im Raume« gebraucht werden, so soll darunter beziehlich: »einfaches n Eck in der Ebene«, »einfachen n Eck im Raume« verstanden werden.

Auch ist zu bemerken, dass ein »einfaches n Flach im Raume« zugleich als »einfaches n Eck im Raume« oder als »einfaches n Kant oder n Seit im Raume« aufgefasst werden kann, so dass also derselben Figur jeder von diesen vier Namen beigelegt werden kann, je nachdem es den Umständen angemessen ist; und zwar sind diese Namen einander dergestalt paarweise zugeordnet, dass man z. B., wie oben geschehen, sagt: das einfache n Flach im Raume habe n Kanten, und das einfache n Eck im Raume habe n Seiten, und auch umgekehrt; d. h., es sind die Namen Fläche und Kante, so wie Ecke und Seite einander zugeordnet.

[237] Ferner ist über n Seit und n Kant noch folgendes zu bemerken:

Irgend n Gerade in einer Ebene E zusammengefasst, heissen »vollständiges n Seit in der Ebene« (§ 19).

Irgend n Strahlen in einem Strahlbüschel D zusammengefasst, sollen »vollständiges n Kant im Strahlbüschel« heissen.

Das vollständige n Kant steht also dem vollständigen n Flach im Strahlbüschel D ähnlicherweise entgegen, wie das vollständige n Eck dem vollständigen n Seit in der Ebene E (§ 19); denn wird der Strahlbüschel D der Ebene E entgegengestellt, so entspricht das genannte n Kant dem n Eck und das n Flach dem n Seit (§ 33).

Es giebt nur einfache n Seit und n Kant im Raume, aber keine vollständige, es sei denn, dass man irgend n Gerade im Raume (wovon keine zwei in einer Ebene liegen) so nennen wolle; allein da zwischen solchen Geraden keine unmittelbare Verbindung stattfindet, so möchte diese Benennung unpassend sein.

56. **Zu den obenerwähnten Beispielen (§ 54) gehören nun zunächst die folgenden ausgedehnten Sätze (Porismen) und Aufgaben.**

1) »*Wenn im Raume irgend eine Anzahl n beliebige Gerade* $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}$, *und desgleichen eine andere, um eins geringere, Anzahl n—1 beliebige Gerade* $A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$, *gegeben sind, wovon weder bei jenen, noch bei diesen, keine zwei in einer Ebene liegen, und wenn n Ebenen* $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, *die der Reihe nach durch* [238] *jene ersten n Geraden gehen, sich so bewegen, dass die Durchschnittslinien der nach der Reihe unmittelbar aufeinander folgenden Ebenenpaare, also die n—1 Durchschnittslinien* $\alpha\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \ldots, \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}$, *nach der Ordnung beziehlich jene andern n—1 festen Geraden schneiden, so beschreibt nicht allein jede dieser Durchschnittslinien, sondern so beschreibt jede der* $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ *Durchschnittslinien, in welchen die n Ebenen im Ganzen einander paarweise schneiden, ein einfaches Hyperboloïd, in welche m auch die zwei festen Geraden liegen, um die sich die jedesmaligen zwei Ebenen drehen.«*

1) »*Wenn im Raume irgend eine Anzahl n beliebige Gerade* $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}$, *und desgleichen eine andere, um eins geringere, Anzahl n—1 beliebige Gerade* $A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$ *gegeben sind, wovon weder bei jenen, noch bei diesen, keine zwei in einer Ebene liegen, und wenn n Punkte* $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_{n-1}$, *die der Reihe nach in jenen ersten n* [238] *Geraden liegen, sich so bewegen, dass die Geraden, welche durch die unmittelbar aufeinander folgenden Punktenpaare gehen, also die n—1 Geraden* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \ldots, \mathfrak{a}_{n-2}\mathfrak{a}_{n-1}$, *nach der Ordnung beziehlich jene n—1 andern festen Geraden schneiden, so beschreibt nicht allein jede dieser schneidenden Geraden, sondern so beschreibt jede der* $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ *Geraden, in welchen die n Punkte paarweise genommen liegen, ein einfaches Hyperboloïd, welches auch durch diejenigen zwei festen Geraden geht, in welchen sich die jedesmaligen zwei Punkte bewegen.«*

Die Richtigkeit dieser Sätze folgt ohne Schwierigkeit aus den obigen Fundamentalsätzen (§ 51, IV). Auch ist leicht zu sehen, dass und wie diese Sätze, in gewissem Sinne, die früheren Sätze (§ 47, I und II) als besondere Fälle umfassen, und dass ihr Beweis dem der letztern ähnlich ist. Ausserdem umfassen sie sehr viele andere besondere Fälle, als z. B. die nachstehenden.

2) »*Wenn im Raume ein beliebiges n Kant* $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_{n-1}$ *und irgend* n—1 *Kegelflächen zweiten Grades* $[\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1], [\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2], \ldots [\mathfrak{A}_{n-2}\mathfrak{A}_{n-1}]$, *welche nach der Reihe den n—1 ersten Kantenwinkel* $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1), (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2), \ldots$

2) »*Wenn im Raume ein beliebiges n Seit* $AA_1A_2 \ldots A_{n-1}$ *und irgend n—1 Kegelschnitte* $[AA_1], [A_1A_2], \ldots [A_{n-2}A_{n-1}]$, *welche nach der Reihe den n—1 ersten Winkeln* $(AA_1), (A_1A_2), \ldots (A_{n-2}A_{n-1})$ *des n Seits*

($\mathfrak{A}_{n-2}\mathfrak{A}_{n-1}$) *des n* [239] *Kants umschrieben sind**), *gegeben sind, und wenn ein veränderliches einfaches n Flach* $\alpha\alpha_1\alpha_2 \ldots\ldots \alpha_{n-1}$ *sich so bewegt, dass seine Flächen* $\alpha\alpha_1, \ldots\ldots \alpha_{n-1}$, *nach der Reihe, sich um die Kanten* $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots\ldots \mathfrak{A}_{n-1}$ *jenes n Kants drehen, während seine n*—1 *ersten Kanten* $\alpha\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}$, *nach der Ordnung, sich als Strahlen in jenen Kegelflächen bewegen: so bewegt sich auch seine nte Kante* $\alpha_{n-1}\alpha$ *in einer bestimmten nten Kegelfläche 2ten Grades* [$\mathfrak{A}_{n-1}\mathfrak{A}$], *welche dem nten Kanten-Winkel* ($\mathfrak{A}_{n-1}\mathfrak{A}$) *des gegebenen n Kants umschrieben ist, und so beschreibt jede der übrigen* $\frac{1}{2}n\,(n-3)$ *Kanten des durch das genannte n Flach* $\alpha\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_{n-1}$ *bestimmten vollständigen n Flachs ein einfaches Hyperboloïd, welches durch diejenigen zwei Kanten des gegebenen n Kants geht, um welche sich die zwei Flächen, denen die jedesmalige beschreibende Kante angehört, drehen.*«

3) »*Wenn im Raume ein beliebiges n Kant* $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 \ldots\ldots \mathfrak{A}_{n-1}$ *und irgend n*—1 *Ebenen* $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \ldots\ldots \mathfrak{B}_{n-2}$, *welche durch die n*—1 *ersten Ecken* $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{A}_{n-2}\mathfrak{A}_{n-1}$ *des* [240] *n Kants gehen, gegeben sind, und wenn ein veränderliches einfaches n Flach* $\alpha\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_{n-1}$ *sich so bewegt, dass seine Flächen, nach der Reihe, sich um die Kanten jenes n Kants drehen, während seine n*—1 *ersten Kanten, nach der Ordnung, sich in jenen festen Ebenen bewegen: so beschreibt seine letzte Kante eine bestimmte Kegelfläche zweiten Grades, welche dem letzten Winkel des ge-*

[239] *eingeschrieben sind**), *gegeben sind, und wenn ein veränderliches einfaches n Eck* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \ldots\ldots \mathfrak{a}_{n-1}$ *sich so bewegt, dass seine Ecken* $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1 \ldots\ldots \mathfrak{a}_{n-1}$, *nach der Reihe, die Seiten* $A, A_1, \ldots\ldots A_{n-1}$ *jenes n Seits durchlaufen, während seine n*—1 *ersten Seiten* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{a}_{n-2}\mathfrak{a}_{n-1}$, *nach der Ordnung, sich als Tangenten um jene Kegelschnitte herumbewegen: so bewegt sich auch seine nte Seite* $\mathfrak{a}_{n-1}\mathfrak{a}$ *als Tangente um einen bestimmten nten Kegelschnitt* [$A_{n-1}A$], *welcher dem nten Winkel* ($A_{n-1}A$) *des gegebenen n Seits eingeschrieben ist, und so beschreibt jede der* $\frac{1}{2}n\,(n-3)$ *übrigen Seiten des vollständigen n Ecks, welches durch das genannte einfache n Eck* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 \ldots\ldots \mathfrak{a}_{n-1}$ *bestimmt wird, ein einfaches Hyperboloïd, in welchem auch diejenigen zwei Seiten des gegebenen n Seits liegen, längs denen sich die zwei Ecken, welche die jedesmalige beschreibende Seite bestimmen, bewegen.*«

3) »*Wenn im Raume ein beliebiges n Seit* $AA_1 \ldots\ldots A_{n-1}$ *und irgend n*—1 *Punkte* $B, B_1, \ldots\ldots B_{n-2}$, *welche in den n*—1 *ersten Flächen* (*Winkel-Ebenen*) $AA_1, A_1A_2, \ldots\ldots A_{n-2}A_{n-1}$ [240] *des n Seits liegen, gegeben sind, und wenn ein veränderliches einfaches n Eck* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 \ldots\ldots \mathfrak{a}_{n-1}$ *sich so bewegt, dass seine Ecken, nach der Reihe, die Seiten jenes n Seits durchlaufen, während seine n*—1 *ersten Seiten, nach der Ordnung, sich um jene festen Punkte drehen: so bewegt sich seine letzte Seite als Tangente um einen bestimmten Kegelschnitt, welcher dem letzten Winkel des gegebenen*

---

*) d. h. die Kegelfläche geht durch die jedesmaligen zwei Kanten und ihr Mittelpunkt liegt also in ihrem Durchschnittspunkt.

*) d. h. der Kegelschnitt berührt die zwei Schenkel des Winkels und liegt also mit ihnen in einer und derselben Ebene.

gebenen n Kants umschrieben ist, und so beschreibt jede der übrigen $\frac{1}{2}n$ $(n—3)$ *Kanten des durch das genannte einfache n Flach bestimmten vollständigen n Flachs* $\alpha\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_{n-1}$ *ein einfaches Hyperboloïd, welches durch diejenigen zwei Kanten des gegebenen n Kants geht, längs denen sich die jedesmalige beschreibende Kante bewegt.«*

4) »*Wenn im Raume irgend eine Anzahl n beliebige Gerade* $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{A}_{n-1}$, *und eine gleiche Anzahl andere beliebige Gerade* $A, A_1, \ldots\ldots, A_{n-1}$, *wovon weder von diesen noch von jenen keine zwei in einer Ebene liegen, gegeben sind, so soll ein n Flach (im Raume) so beschrieben werden, dass seine Ebenen der Reihe nach durch die ersten n Geraden gehen, und seine Kanten der Ordnung nach die letzten n Geraden schneiden.«*

n Seits eingeschrieben ist, und so beschreibt jede der übrigen $\frac{1}{2}n$ $(n—3)$ *Seiten des durch das genannte einfache n Eck bestimmten vollständigen n Ecks* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 \ldots\ldots \mathfrak{a}_{n-1}$ *ein einfaches Hyperboloïd, welches durch diejenigen zwei Seiten des gegebenen n Seits geht, längs denen sich die jedesmalige beschreibende Seite bewegt.«*

4) »*Wenn im Raume irgend eine Anzahl n beliebige Gerade* $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{A}_{n-1}$, *und eine gleiche Anzahl andere beliebige Gerade* $A, A_1, \ldots\ldots, A_{n-1}$, *wovon weder von diesen noch von jenen keine zwei in einer Ebene liegen, gegeben sind, so soll ein n Eck (im Raume) so beschrieben werden, dass seine Ecken der Reihe nach in den ersten n Geraden liegen, und seine Seiten der Ordnung nach die andern n Geraden schneiden.«*

[**241**] Aehnlicherweise, wie die obigen Sätze (1) andere Sätze, umfassen auch die vorliegenden Aufgaben (4), in gewisser Hinsicht, die früheren Aufgaben (§ 25 und § 47, III) als besondere Fälle in sich, und ihre Lösung ergiebt sich aus denselben projectivischen Eigenschaften, auf welchen die Lösung der letzteren beruht. Nämlich man nimmt, um z. B. die Aufgabe (4, rechts) zu lösen, in der ersten Geraden $\mathfrak{A}$ irgend einen Punkt $\mathfrak{a}$ an, legt durch diesen einen Strahl a, welcher die zwei Geraden A, $\mathfrak{A}_1$ schneidet (§ 51, II); so erhält man in der letzteren einen bestimmten Punkt $\mathfrak{a}_1$ (den Durchschnittspunkt); durch diesen wird weiter ein Strahl a_1 gelegt, welcher die zwei folgenden Geraden A_1, $\mathfrak{A}_2$ schneidet, wodurch man in der letzteren $\mathfrak{A}_2$ einen Punkt $\mathfrak{a}_2$ findet, und so fährt man fort, bis man endlich durch einen bestimmten Punkt $\mathfrak{a}_{n-1}$, in der Geraden $\mathfrak{A}_{n-1}$, einen Strahl a_{n-1} legt, welcher die zwei Geraden A_{n-1}, $\mathfrak{A}$ schneidet, wodurch man in der letzteren $\mathfrak{A}$ einen zweiten Punkt erhält, welcher $\mathfrak{a}_n$ heissen und als schiefe (oder gebrochene) Projection des ersten $\mathfrak{a}$ angesehen werden mag. Eben so sucht man zu irgend zwei andern beliebigen Punkten $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der Geraden $\mathfrak{A}$ zwei ihnen entsprechende Punkte $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$ in derselben, sieht sodann

die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$ als entsprechende Punkte zweier aufeinander liegender projectivischer Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_n$ an, und sucht (§ 17) die vereinigten entsprechenden Punktenpaare der letzteren, wodurch sofort die vorgelegte Aufgabe als gelöst zu betrachten ist. Die andere Aufgabe (links) ist dadurch offenbar zugleich gelöst. Wenn die Rangordnung der gegebenen Geraden, jede Abtheilung für sich genommen, nach Belieben gewählt werden darf, so ist die Zahl der Auflösungen, welche jede der vorgelegten Aufgaben im Allgemeinen **[242]** zulässt, offenbar dieselbe, wie bei der obigen Aufgabe (§ 25, Note).[16])

Den obigen Sätzen (2) und (3) entsprechen nachstehende Aufgaben.

5) »*Wenn im Raume ein beliebiges n Kant und irgend n Kegelflächen zweiten Grades, welche den n Winkeln desselben umschrieben sind, gegeben sind, so soll ein n Flach so beschrieben werden, dass seine Flächen nach der Reihe durch die Kanten jenes n Kants gehen, und seine Kanten, nach der Ordnung, in jenen Kegelflächen liegen.*«

6) »*Wenn im Raume ein beliebiges n Kant und irgend n Ebenen, welche nach der Reihe durch seine n Ecken gehen, gegeben sind, so soll ein n Flach so beschrieben werden, dass seine Flächen, nach der Reihe, durch die Kanten jenes n Kants gehen, und seine Kanten, nach der Ordnung, in jenen Ebenen liegen.*«

5) »*Wenn im Raume ein beliebiges n Seit und irgend n Kegelschnitte, welche den Winkeln desselben eingeschrieben sind, gegeben sind, so soll ein n Eck so beschrieben werden, dass seine Ecken nach der Reihe in den Seiten jenes n Seits liegen, und seine Seiten, nach der Ordnung, jene Kegelschnitte berühren.*«

6) »*Wenn im Raume ein beliebiges n Seit und irgend n Punkte, welche nach der Reihe in seinen Winkel-Ebenen liegen, gegeben sind, so soll ein n Eck so beschrieben werden, dass seine Ecken, nach der Reihe, in den Seiten jenes n Seits liegen, und seine Seiten, nach der Ordnung, durch jene Punkte gehen.*«

Die Lösung dieser Aufgaben (5 und 6) beruht auf denselben Eigenschaften, wie die der obigen Aufgabe (4), von welcher sie, in gewissem Sinne, besondere Fälle sind. Die zwei letzten Aufgaben (6) sind, im Grunde genommen, eine und dieselbe, auch wurde die eine davon schon früher (§ 32, Ende) mit anderen Worten ausgesprochen.

57. Ein sehr specieller Fall der vorhergehenden Hauptaufgabe (§ 56, 4) ist in neuerer Zeit in einigen mathematischen Zeitschriften unter verschiedenen Gesichtspunkten aufgefasst und gelöst worden; dieser Fall **[243]** kann hier, unter allen seinen verschiedenen Aussagen, nebst einigen Folgerungen,

mittelst projectivischer Eigenschaften, auffallend leicht gelöst und klar dargestellt werden. Die erste Aussage dieses Falles, wenn man ihn nämlich aus der obigen Aufgabe ableitet, und zwar dadurch, dass daselbst die Zahl der gegebenen festen Geraden bei jeder Abtheilung auf nur zwei beschränkt wird, lautet wie folgt:

1) »*In irgend vier gegebenen Geraden* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, A, A_1, *wovon keine zwei in einer Ebene liegen, vier Punkte zu finden, in jeder einen, welche in einer Geraden liegen.*«

1) »*Durch irgend vier gegebene Gerade* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, A, A_1, *wovon keine zwei in einer Ebene liegen, vier Ebenen zu legen, durch jede eine, welche sich in einer Geraden schneiden.*«

Oder diese beiden Aufgaben lassen sich in folgende bekannte Aufgabe zusammenfassen:

2) »Diejenigen Geraden zu finden, welche irgend vier gegebene Gerade A, A_1, A_2, A_3, wovon keine zwei in einer Ebene liegen, schneiden.«

Auflösung. Die obige Auflösung, (§ 56, 4) vereinfacht sich für den gegenwärtigen Fall wie folgt. Durch eine der gegebenen vier Geraden, etwa durch A, lege man irgend drei Ebenen α, β, γ, welche die drei übrigen Geraden A_1, A_2, A_3 beziehlich in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$; $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$; $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_3$ schneiden, wobei das Bild (Fig. 53) der Vorstellung behülflich sein mag, ziehe sodann die Strahlenpaare $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$ und $\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3$, welche der Geraden A in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_4$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_4$ begegnen, sehe diese als entsprechende Punktenpaare zweier aufeinander liegender projectivischer Geraden A und A_4 an, und suche sofort deren vereinigte entsprechende Punkte (§ 17), so kann endlich durch jeden dieser Punkte (und [**244**] nur durch diese) eine Gerade gelegt werden, die der Aufgabe genügt, nämlich die Gerade, welche alsdann durch den einen oder andern dieser Punkte so gelegt wird, dass sie irgend zwei der drei Geraden A_1, A_2, A_3 schneidet, trifft auch die jedesmalige dritte, und schneidet somit alle vier gegebenen Geraden. Es giebt demnach im Allgemeinen zwei Gerade, die der Aufgabe genügen; es kann aber auch nur eine, oder gar keine geben (§ 16, II).

Die Richtigkeit dieser Auflösung fällt in die Augen. Nämlich vermöge der Strahlen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_2$, ..., welche durch die Ebenen α, β, γ, ... des Ebenenbüschels A bestimmt werden, und welche die drei Geraden A, A_1, A_2 schneiden, sind die Geraden A und A_2 in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, ... projectivisch, und aus gleichen Gründen sind die Geraden A_2 und A_4 in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, ... und $\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{b}_4$, $\mathfrak{c}_4$, ... projectivisch, folglich sind auch die Geraden A und A_4 in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ..... und $\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{b}_4$, $\mathfrak{c}_4$ ..... projectivisch und es müssen bei ihren vereinigten entsprechenden Punkten nothwendigerweise auch die zugehörigen Strahlen aufeinander fallen, die sodann jene Geraden sind, welche der Aufgabe genügen.

Die vorstehende Aufgabe (2) wurde von *Gergonne* im XVII. Bd. S. 83 seiner *Annales de mathématiques* zur Lösung aufgestellt, und zwar mit der Forderung, dass die gesuchten Geraden in aller Strenge construirt werden sollen (construire rigoureusement la droite qui etc.), weil er vermuthlich die Constructionen bei den damals bekannten Auflösungen, welche mittelst Coordinaten oder durch Projection (Géométrie descriptive) ausgeführt waren, ungenügend fand. Ich habe darauf im Bd. II. S. 268 des Journal für [**245**] Mathematik eine Auflösung dieser Aufgabe bekannt gemacht, und fast gleichzeitig erschien auch in den genannten Annales Bd. XVIII. S. 182 eine Auflösung derselben von *Bobillier* und *Garbinsky*. Diese zwei Auflösungen stimmen jedoch in Einigem mit denen überein, welche *Petit* und *Brianchon* schon früher (im Bd. I. S. 434 der *Corresp. sur l'Ecole Polyt.*) gegeben hatten, die mir aber erst später zu Gesichte kamen. Im erwähnten Journal Bd. V. S. 174 erschien ferner eine dritte Auflösung, die indessen vor den früheren wenig Vorzüge zu haben scheint, nur dass sie durch Hülfe der Coordinaten geführt ist. Die vorstehende Auflösung ist unstreitig unter allen hier genannten bei weitem die einfachste und bequemste, und dürfte als solche wohl der *Gergonne*schen Forderung Genüge leisten. [17])

Eine andere Aussage der obigen Aufgabe, unter welcher sie von *Brianchon* und *Petit* a. a. O. gelöst worden, ist folgende:

3) »Die gegenseitigen Durchschnittspunkte eines gegebenen einfachen Hyperboloïds und einer einfachen Geraden zu finden.«

Werden irgend drei Gerade des Hyperboloïds, die zu einer Schaar gehören, als die vorgenannten (2) drei Geraden A_1, A_2, A_3, und wird die gegebene Gerade als die vorige Gerade A angesehen, so sind alsdann die vereinigten entsprechenden Punkte der Geraden A, A_1 die hier zu findenden Durchschnittspunkte.

Dieselbe Aufgabe kann ferner auch in nachstehende Aussage eingekleidet werden:

4) »Wenn irgend zwei einfache Hyperboloïde H, H_1 und irgend zwei Gerade A_2, A_3, die in beiden Hyperboloïden, aber nicht in einer Ebene liegen, gegeben sind, so sollen die übrigen [246] Geraden gefunden werden, welche die Hyperboloïde gemein haben.«

Da die zwei gegebenen Geraden A_2, A_3 nicht in einer Ebene liegen, so gehören sie in jedem Hyperboloïd zu einer Schaar Gerader (§ 51, IV); wird aus jeder dieser zwei Schaaren irgend eine dritte Gerade angenommen, und werden diese zwei neuen Geraden als die obigen (2) Geraden A, A_1 angesehen, so werden offenbar diejenigen Geraden, welche die vier Geraden A, A_1, A_2, A_3 schneiden, der gegenwärtigen Aufgabe genügen, so dass also die Hyperboloïde, ausser den gegebenen Geraden A_2, A_3, im Allgemeinen noch zwei andere Gerade, etwa e, k (§ 17), gemein haben, welche die ersten zwei schneiden, und also nicht mit ihnen aus einer Schaar sind. Dass die Hyperboloïde H, H_1 nicht mehr als zwei Gerade von jeder Schaar gemein haben können, ist einleuchtend, weil jedes von ihnen durch drei zu einer Schaar gehörige Gerade bestimmt wird (§ 51, IV). Hierdurch ist also zugleich der nachstehende Satz erwiesen.

5) »Wenn zwei einfache Hyperboloïde irgend zwei Gerade A_2, A_3, die nicht in einer Ebene liegen, gemein haben, so schneiden sie einander ausserdem im Allgemeinen in noch zwei anderen Geraden e, k, welche mit jenen zweien, in Bezug auf jedes Hyperboloïd, nicht aus einer Schaar sind; oder sie können aber auch einander ausserdem entweder α) in (längs) einer andern Geraden (ek), die mit jenen zweien nicht aus einer Schaar ist, berühren, oder β) gar nicht treffen (2, Aufl.).«

Im letzten Falle (β) kann man sagen, die Hyperboloïde schneiden einander ausserdem in zwei imaginären [247] Geraden. Der zweite Fall (α) giebt durch Umkehrung den folgenden besondern Satz.

6) »Wenn zwei einfache Hyperboloïde einander in einer Geraden (ek) berühren, so schneiden sie

einander nebstdem im Allgemeinen in zwei Geraden A_2, A_3, welche in jedem Hyperboloïd zu einer Schaar gehören; oder sie können sich auch in einer zweiten Geraden $(A_2 A_3)$, die mit jener (ek) in jedem Hyperboloïd nicht zu einer Schaar gehört, berühren, oder sich gar nicht weiter begegnen.«

58. Der erfinderische *Moebius* hat zuerst den Satz bekannt gemacht und bewiesen*):

> »Dass es nämlich solche Paare (irreguläre) Tetraëder geben könne, wovon jedes dem andern (um- oder) eingeschrieben ist, d. h., wovon die Ecken eines jeden in den Flächen des andern, oder in deren Ebenen, liegen.«

Die vorhergehenden Untersuchungen gewähren nicht nur eine anschauliche leichte Darstellung der Richtigkeit dieses Satzes, sondern sie gestatten auch eine deutliche Einsicht in den Spielraum seiner Möglichkeit unter gewissen gegebenen Bedingungen. Zu diesem Endzweck möge folgende Aufgabe aufgestellt und über ihre Lösung einige Andeutungen hinzugefügt werden.

»Wenn ein beliebiges Tetraëder T gegeben ist, ein anderes τ zu beschreiben, dessen Ecken in den Flächen des ersten, oder in deren Ebenen, liegen, und dessen Flächen, oder deren Ebenen, durch die Ecken des ersten gehen, [248] und zwar wenn zwei Ecken des zweiten Tetraëders τ gegeben sind.«

Ueber diese Aufgabe kann zuvörderst folgendes bemerkt werden.

Es seien A, B, C, D die Ecken des ersten Tetraëders T, und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die des zweiten τ. Man nehme an, die Ecken des zweiten sollen nach folgender Ordnung in den Flächen des ersten, oder in deren Ebenen, liegen:

$$\text{I.} \quad \alpha BCD, \ \beta ACD, \ \gamma ABD, \ \delta ABC,$$

wo z. B. αBCD heisst: die Ecke α liege in der Ebene der Fläche BCD. Nach dieser Annahme bleibt nun noch die Rangordnung frei, nach welcher die Flächenebenen des zweiten Tetraëders τ durch die Ecken des ersten T gehen sollen; diese gestattet, nach der blossen Combination der Buchstaben, 24 verschiedene Fälle (§ 25, Note). Diese 24

*) Im Journal für Mathematik Bd. III, S. 273.

Fälle sind in Hinsicht der Zahl der Auflösungen, die sie zulassen, wesentlich von einander unterschieden, und zerfallen in dieser Beziehung in drei Abtheilungen, wovon z. B. zur ersten Abtheilung folgende vier Fälle gehören:

$$\text{II.}\begin{cases} 1.\ A\beta\gamma\delta,\ B\alpha\gamma\delta,\ C\alpha\beta\delta,\ D\alpha\beta\gamma \ \ldots\ldots \text{(a)} \\ \left.\begin{array}{l} 2.\ A\alpha\beta\gamma,\ B\alpha\beta\delta,\ C\alpha\gamma\delta,\ D\beta\gamma\delta \\ 3.\ A\alpha\beta\delta,\ B\alpha\beta\gamma,\ C\beta\gamma\delta,\ D\alpha\gamma\delta \\ 4.\ A\alpha\gamma\delta,\ B\beta\gamma\delta,\ C\alpha\beta\gamma,\ D\alpha\beta\delta \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(b)} \end{cases}$$

welche, wie durch die Unterabtheilungen (a), (b) angedeutet wird, im Wesentlichen nur zweierlei Art sind. In jedem dieser vier Fälle kommen der vorgelegten Aufgabe unendlich viele Auflösungen zu, (dagegen scheint bei den übrigen Fällen theils nur eine einzige, theils gar keine Auflösung möglich zu sein).

Als Beispiel soll nun der vorstehende Fall (1) hier näher betrachtet werden.

Es sei $ABCD$ (Fig. 54) das gegebene Tetraëder T, [**249**] und etwa α, γ die zwei gegebenen Ecken des zweiten, zu beschreibenden, Tetraëders τ. Da durch die drei gegebenen Punkte B, α, γ die Ebene $B\alpha\gamma\delta$ bestimmt ist, in welcher die Ecke δ liegt (II, 1), und da letztere auch in der Flächenebene ABC liegen muss (I), so ist folglich ihr Ort auf die Durchschnittslinie $B\mathfrak{b}$ dieser zwei Ebenen beschränkt. Ebenso muss die andere, zu suchende Ecke β einerseits in der Ebene $D\alpha\gamma$ und andererseits in der Ebene ACD liegen, so dass folglich ihr Ort auf die Durchschnittslinie $D\mathfrak{d}$ dieser zwei Ebenen beschränkt ist[18]). Da nun ferner von den zu findenden zwei Flächenebenen $A\beta\gamma\delta$, $C\alpha\beta\delta$ (II, 1) jede durch die zwei Ecken β, δ geht, so dass die Kante $\beta\delta$ in ihrer Durchschnittslinie liegt, so kommt es folglich nur darauf an, durch die zwei gegebenen Geraden $A\gamma$, $C\alpha$ zwei Ebenen so zu legen, dass ihre Durchschnittslinie die zwei gegebenen Geraden $B\mathfrak{b}$, $D\mathfrak{d}$ schneidet, oder, was eben so viel ist, eine Gerade zu finden, welche die vier Geraden $A\gamma\mathfrak{a}$, $B\mathfrak{b}$, $C\alpha\mathfrak{c}$, $D\mathfrak{d}$ schneidet. Wird aber bemerkt, dass diese vier Geraden bereits von den drei Geraden AC, BD, $\alpha\gamma$ geschnitten werden, so folgt, dass es von einer unzähligen Schaar Gerader geschehen kann, zu welchen diese drei gehören (§ 51), und zwar folgt, dass jede Gerade, welche irgend drei derselben schneidet, auch jedesmal der vierten begegnet. Daher sind auch unzählige Tetraëder τ möglich, welche der vorgelegten Aufgabe genügen, und zwar dergestalt, dass z. B. jeder Punkt in der Geraden $B\mathfrak{b}$ als die zu suchende Ecke δ angenommen werden kann, wodurch sodann die andere Ecke β bestimmt und nach (§ 51, II) leicht zu finden ist (und zwar bei der hier zu Grunde gelegten Figur »bloss durch Ziehen dreier Gerader zwischen gegebenen Punkten« gefunden wird). Oder es folgt daher, dass der [250] Kante $\beta\delta$ des zu beschreibenden Tetraëders, für alle ihre verschiedenen Lagen, in welchen sie der Aufgabe genügen kann, ein Spielraum frei steht, in welchem sie ein einfaches Hyperboloïd beschreibt (§ 51, IV), und dass dabei die zwei Ecken β, δ die ihnen zukommenden Ortslinien $D\mathfrak{d}$, $B\mathfrak{b}$ projectivisch theilen.

Aus dieser Auflösung ergiebt sich somit zugleich der folgende Satz:

»Wenn ein beliebiges Tetraëder T und irgend zwei Punkte α, γ, welche in zwei Flächenebenen desselben liegen, gegeben sind, so giebt es unzählige andere Tetraëder τ, welche jenem nach der obigen Art (II, 1) zugleich um- und eingeschrieben sind, und wovon jedes jene zwei Punkte zu Eckpunkten hat; der Ort ihrer übrigen Eckpunkte β, δ ist auf zwei bestimmte Gerade $D\mathfrak{d}$, $B\mathfrak{b}$ beschränkt, und zwar dergestalt, dass diese Geraden in Ansehung der zusammengehörigen Eckpunktenpaare projectivisch sind, und dass folglich der Ort der diese Eckpunkte verbindenden Kante $\beta\delta$ ein einfaches Hyperboloïd ist.«

Es mag noch bemerkt werden, dass bei den drei übrigen Fällen (II, b) ähnliche Auflösungen stattfinden, wie die vorstehende, und dass aus ihnen gleiche Resultate folgen.*)

---

*) Es wäre wohl zu wünschen, dass sich Jemand die Mühe gäbe, die obige Aufgabe vollständig zu erörtern, d. h. das Eigenthümliche aller möglichen Fälle derselben ins Klare brächte, und die dabei stattfindenden Umstände erforschte. Die vorstehende Auflösung zeigt, wie diesem Gegenstande durch projectivische Eigenschaften beizukommen sei. Bei meiner flüchtigen Untersuchung fand ich unter andern noch: »Dass, wenn zwei Tetraëder T, τ nach einer der obigen drei Arten (II, b) einander umschrieben sind, sie alsdann ausserdem solche gegenseitige [251] Beziehung haben, dass jedes Paar gegen-

über liegender Kanten des einen Tetraëders mit einem bestimmten Paar gegenüber liegender Kanten des andern in einem einfachen Hyperboloïd liegen;« u. s. w. Bei der Lösung der übrigen 20 Fälle der obigen Aufgabe (die ausser den 4 erwähnten (II) anscheinend stattfinden können) dürfte die frühere Aufgabe (§ 57, 2) behülflich sein. Werden solche Auflösungen, wo das zu beschreibende Tetraëder τ in einen Grenzfall, d. i. in eine Gerade übergeht, mit gezählt, so möchten wohl bei jedem der 20 Fälle zwei Auflösungen stattfinden; so vertrat z. B. beim oben betrachteten Falle (II, 1) jede der drei Geraden AC, BD, $\alpha\gamma$ einen solchen Grenzfall.

Bei der obigen Aufgabe könnten ferner auch, anstatt der zwei Eckpunkte α, γ, entweder zwei Flächenebenen, oder eine Flächenebene und eine Ecke des zu beschreibenden Tetraëders als gegeben angenommen werden. Uebrigens sind alle diese Aufgaben nur die einfachsten Fälle von andern, ausgedehnteren Aufgaben, die sich ähnlicherweise durch projectivische Eigenschaften lösen lassen, wie jene in (§ 56).

---

[251] Allgemeine Anmerkung.

Ueber Abhängigkeit einiger Systeme verschiedenartiger Figuren von einander.

59. Das einfache Hyperboloïd giebt, vermöge der ihm zukommenden Eigenschaften und namentlich vermöge seiner doppelten Erzeugung durch projectivische Gebilde, ein Mittel an die Hand, die gegenseitige Abhängigkeit gewisser Systeme verschiedenartiger Figuren von einander klar darzuthun, die Uebertragung der Eigenschaften jedes Systems auf alle übrigen leicht zu bewerkstelligen, und zugleich auch jedes System in jedes andere zu verwandeln. Dieser Gegenstand gehört eigentlich dem zweiten Abschnitte an (weil dieser das Aufeinanderbeziehen der Ebenen und der Strahlbüschel enthalten wird), wo er (sowie im vierten und fünften Abschnitte) seine vollständige Erörterung finden wird; wegen seiner nahen Verwandtschaft mit dem eben [252] Abgehandelten glaubte ich jedoch ihn schon hier kurz berühren zu müssen.

I. Bei den vorhergehenden Untersuchungen wurde eine Gerade 𝔄 im Raume auf doppelte Weise, d. h., in Hinsicht zweier Gebilde, betrachtet, nämlich entweder als eigentliche Gerade 𝔄 (d. i. als eine unendliche Menge Punkte enthaltend), oder als Ebenenbüschel 𝔄 (d. i. als Axe des Ebenenbüschels). In dieser doppelten Hinsicht steht daher eine Gerade 𝔄 mit allen Punkten und allen Ebenen im Raume in folgender Beziehung:

Als Ebenenbüschel 𝔄.	Als Gerade 𝔄.
»*Jeder Punkt liegt in irgend einer seiner Ebenen.*«	»*Jede Ebene geht durch irgend einen ihrer Punkte.*«

Oder:

»*Sie (die Axe 𝔄) bestimmt mit jedem Punkt (der nicht in ihr liegt) eine Ebene.*«	»*Sie bestimmt mit jeder Ebene (in der sie nicht liegt) einen Punkt.*«

Werden nach dieser zweifachen Hinsicht zwei Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ im Raume zugleich betrachtet, und zwar mit Beziehung aufeinander, so sind dabei folgende wesentliche Umstände zu bemerken:

»*Jede Ebene des einen Ebenenbüschels schneidet den andern Ebenenbüschel in einem ebenen Strahlbüschel; die gesammten Strahlen aller dieser Strahlbüschel, oder die gesammten Strahlen, in welchen die Ebenen beider Ebenenbüschel einander paarweise schneiden, erfüllen einfach den ganzen Raum, d. h. durch jeden Punkt des Raums* (*der nicht in einer der zwei Axen liegt*) *geht* [**253**] *irgend einer von diesen Strahlen, aber nur ein einziger; so dass also jede beliebige Ebene sich mit irgend zwei Ebenen der zwei Ebenenbüschel in einem solchen Strahle schneidet.*«

»*Jeder Punkt der einen Geraden bestimmt mit den Punkten der andern Geraden einen ebenen Strahlbüschel; die gesammten Strahlen aller dieser Strahlbüschel, oder die gesammten Strahlen, welche die Punkte beider Geraden, paarweise genommen, mit einander bestimmen, erfüllen einfach den ganzen Raum, und zwar liegt in jeder Ebene* (*die durch keine der zwei Geraden geht*) *irgend* [**253**] *einer von diesen Strahlen, aber nur ein einziger; so dass also jeder beliebige Punkt mit irgend zwei Punkten der zwei Geraden in einem solchen Strahle liegt.*«

Von diesen Strahlen, welche auf die eben angegebene Weise durch zwei Ebenenbüschel oder durch zwei Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ im Raume bestimmt werden, weiss man nun aus früheren Untersuchungen (§ 51), dass jedesmal diejenige Schaar unter ihnen, die irgend einer beliebigen dritten Geraden A (oder $\mathfrak{A}_2$) begegnen, in einem einfachen Hyperboloïd liegen, und dass einerseits die Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in Ansehung der Ebenenpaare, welche diese Schaar Strahlen zu Durchschnittslinien haben, und andererseits die Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in Ansehung der Punktenpaare, in welchen sie von dieser Schaar Strahlen getroffen werden, projectivisch sind, u. s. w. Mit Rücksicht auf alle diese Umstände lassen sich nachstehende interessante Betrachtungen leicht bewerkstelligen.

II. Bringt man mit den zwei Doppelgebilden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ irgend zwei Ebenen E, E_1 in Verbindung, so können die letzteren, mittelst der durch die erstern bestimmten Strahlen (I), auf eigenthümliche Weise aufeinander bezogen werden. Um bei dieser Untersuchung der Vorstellung zu Hülfe zu kommen, stelle etwa in (Fig. 55) das Papier die Ebene E dar, wo nämlich alle nicht punktirten Linien in dieser Ebene liegen. Es sei die Gerade ee_1 die Durchschnittslinie der Ebenen E, E_1, und r und s, z_1 und y_1 seien die Punkte, in welchen die Geraden oder Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ von den Ebenen E, E_1 getroffen werden, so dass also rs, $z_1 y_1$ oder x, t_1 diejenigen zwei Strahlen des genannten, [254] durch die Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ bestimmten Strahlsystems (I) sind, welche in den Ebenen E, E_1 liegen. Ferner seien t, x_1 die Punkte, in welchen die Strahlen t_1, x den Ebenen E, E_1 begegnen, und welche mit den vorgenannten Punkten die Geraden tr, ts oder y, z; $x_1 z_1$, $x_1 y_1$, oder s_1, r_1 bestimmen. Hat man alle diese Elemente genau fixirt, so lassen sich weiter folgende Eigenschaften angeben.

1) Die zwei Ebenen E, E_1 werden mittelst des genannten Strahlsystems dergestalt aufeinander bezogen, dass, im Allgemeinen, jedem Punkt der einen Ebene ein bestimmter Punkt in der andern Ebene entspricht, d. h., durch jeden beliebigen Punkt $\mathfrak{a}$ in E geht ein einziger bestimmter Strahl a (der die Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ schneidet, in $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ und), der die E_1 in irgend einem bestimmten Punkte $\mathfrak{a}_1$ trifft, welcher der »entsprechende« jenes Punktes, oder dessen »schiefe Projection«, heissen soll. Von dieser bestimmten Beziehung machen nur folgende Punkte eine wesentliche Ausnahme.

Da nämlich allen Punkten r, s, $\mathfrak{x}$, ... der Ebene E, welche in dem vorhin erwähnten Strahle x liegen, offenbar dieser Strahl gemeinschaftlich zugehört, so wird folglich der einzige Punkt x_1, in welchem derselbe die Ebene E_1 trifft, allen jenen Punkten zugleich entsprechen. Und da ferner alle Strahlen, welche von dem Punkte y_1, in E_1, ausgehen, in der Ebene $y_1\mathfrak{A}$ liegen und in dieser einen ebenen Strahlbüschel y_1 bilden (I), so werden sie nothwendiger Weise die Ebene E längs der Geraden y, d. h. längs der Durchschnittslinie der Ebenen $y_1\mathfrak{A}$ und E, treffen, so dass folglich allen Punkten r, t, $\mathfrak{y}$, ... dieser Geraden y in E der einzige Punkt y_1 in E_1 entspricht. Eben so haben alle Punkte s, t, $\mathfrak{z}$ ..... der Geraden z in E den Punkt [255] z_1 zu ihrem gemeinschaftlich entsprechenden Punkte in E_1. Aus gleichen Gründen entsprechen ähnlicherweise den sämmtlichen Punkten der drei Geraden r_1, s_1, t_1 in der Ebene E_1, die drei einzelnen Punkte r, s, t in der Ebene E. Diese besondere Eigenschaft der Punkte r, s, t und z_1, y_1, x_1 hat auf die nachfolgenden Resultate grossen Einfluss, so dass die meisten sich mehr oder weniger auf dieselben beziehen, daher mögen die Dreiecke rst, $z_1 y_1 x_1$ unter dem Namen »Hauptdreiecke« der Ebenen E, E_1 festgehalten werden. Die Hauptdreiecke haben nach den eben bemerkten Eigenschaften solche gegenseitige Beziehung, dass die sämmtlichen Punkte der Seiten (x, y, z, oder r_1, s_1, t_1) eines jeden, den einzelnen Eckpunkten (x_1, y_1, z_1, oder r, s, t) des andern entsprechen.

Endlich mag auch noch bemerkt werden, dass jeder Punkt in der Durchschnittslinie ee_1 der Ebenen E, E_1 sich selbst entspricht, oder mit seinem entsprechenden vereinigt ist, weil offenbar der einem solchen Punkte zugehörige Projectionsstrahl beide Ebenen in demselben zugleich trifft.

Wie zu irgend einem gegebenen Punkt in der einen Ebene der entsprechende in der andern Ebene gefunden wird, ist leicht zu sehen, nämlich: wenn etwa $\mathfrak{a}$, in E, der gegebene Punkt ist, so wird der zugehörige Projectionsstrahl a offenbar dadurch gefunden, dass man die Ebenen $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{A}_1$ legt, deren Durchschnittslinie er sein muss (I), und sodann wird dieser Strahl a der Ebene E_1 in dem gesuchten entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1$ begegnen. Der Punkt $\mathfrak{a}_1$ kann daher auch bloss durch Ziehen zweier Paar Gerader in den Ebenen E, E_1 gefunden werden, denn zieht man aus dem gegebenen Punkt $\mathfrak{a}$ durch den Punkt r die Gerade $\mathfrak{a}r\mathfrak{r}$, welche die Durchschnittslinie ee_1 in dem Punkte $\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1$ trifft, und [256] zieht sodann, in E_1, die Gerade $z_1\mathfrak{r}_1$, so muss in dieser der gesuchte Punkt $\mathfrak{a}_1$ liegen; und da ähnlicherweise durch die Gerade $\mathfrak{a}s\mathfrak{s}$, in E, eine Gerade $y_1\mathfrak{s}_1$, in E_1, bestimmt wird, so ist folglich der letztere der Durchschnittspunkt der zwei Geraden $z_1\mathfrak{r}_1$, $y_1\mathfrak{s}_1$.

2) Es ist nun weiter anzugeben, welche Beziehung irgend zwei entsprechende Figuren in den Ebenen E, E_1 zu einander haben, und nach welchen Gesetzen ihre Eigenschaften von einander abhängen; und zwar entsteht zunächst die Frage, welche Figur einer Geraden, und sodann, welche Figur irgend einer bestimmten krummen Linie entspreche? Die Antworten hierauf ergeben sich aus dem Vorhergehenden fast unmittelbar, nämlich wie folgt:

a) Einer beliebigen Geraden in einer der zwei Ebenen E, E_1, z. B. der Geraden A in E, entspricht offenbar in der andern Ebene E_1 irgend ein Kegelschnitt $[A_1]$; denn alle Projectionsstrahlen, welche jene Gerade treffen, oder welche ihre sämmtlichen Punkte auf die Ebene E_1 projiciren, liegen in einem einfachen Hyperboloïd (I), welches die Ebene E_1 in dem genannten Kegelschnitte schneidet (§ 51, IV, 4). Da die Gerade A die Seiten x, y, z des Hauptdreiecks in den Punkten 𝔵, 𝔶, 𝔷 schneidet, so geht folglich, vermöge dieser Punkte, der Kegelschnitt $[A_1]$ durch die drei Punkte x_1, y_1, z_1 (I), so dass er also dem Hauptdreieck $x_1 y_1 z_1$ umschrieben ist. Ferner geht der Kegelschnitt auch durch den nämlichen Punkt $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$, in welchem die Gerade A der Durchschnittslinie ee_1 begegnet (I). Natürlicherweise muss auch umgekehrt jedem beliebigen, dem Hauptdreieck $x_1 y_1 z_1$ umschriebenen Kegelschnitt $[A_1]$, irgend eine Gerade A, in E, entsprechen; dieses folgt auch in der That daraus, dass alle Projectionsstrahlen [**257**] eines solchen Kegelschnitts (d. h. alle Strahlen, die durch seine sämmtlichen Punkte gehen), zufolge (§ 51, IV, 9, a), ebenfalls in einem einfachen Hyperboloïd liegen, und da dasselbe von der Ebene E offenbar in dem Strahle x (der dem Punkte x_1 zugehört) geschnitten wird, so muss es von ihr noch in irgend einer andern Geraden A geschnitten werden (§ 51, IV, 3), welche dem gegebenen Kegelschnitte $[A_1]$ entspricht.

Es ist klar, dass alles, was hier von der Ebene E_1 gesagt worden, auch umgekehrt in entsprechendem Sinne von der Ebene E gilt.

In dem, was über die Gerade A gesagt worden, findet nur dann eine wesentliche Ausnahme oder ein besonderer Fall statt, wenn diese Gerade durch einen der drei Hauptpunkte r, s, t geht, nämlich alsdann entspricht ihr in der Ebene E_1 ebenfalls eine Gerade A_1, welche beziehlich durch einen der drei Punkte z_1, y_1, x_1 geht. Denn geht z. B. die Gerade A durch den Punkt r, wie etwa $\mathfrak{a}r\mathfrak{r}$, so liegen offenbar alle ihr (oder ihren sämmtlichen Punkten) zugehörigen Projectionsstrahlen in der Ebene $A\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{r}\mathfrak{A}$, und daher muss ihr nothwendigerweise diejenige Gerade A_1 entsprechen, in welcher jene Ebene die Ebene E_1 schneidet, und welche also durch den Punkt z_1 geht (also die Gerade $\mathfrak{r}_1\mathfrak{a}_1 z_1$); und zwar müssen die Geraden A, A_1 perspectivisch sein, und namentlich den Punkt, in welchem die Axe $\mathfrak{A}_1$ von jener Ebene $A\mathfrak{A}$ getroffen wird, zum Projectionspunkt haben (I) und einander in der Durchschnittslinie ee_1 schneiden (im Punkte $\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1$). Aehnliches findet statt, wenn die Gerade A durch den Punkt s geht. Geht sie aber durch den Punkt t, so liegt sie zwar nicht mehr mit der Geraden A_1, die dann durch den Punkt x geht, in einer Ebene, sondern [**258**] in diesem Falle liegen sie in einem einfachen Hyperboloïd, welches die Ebene E in den Geraden A und x, und die Ebene E_1 in den Geraden

A_1 und z_1 schneidet; denn da die Gerade A durch den Punkt t geht, so ist allemal t_1 ein Projectionsstrahl derselben, und dann muss die Ebene E_1 das genannte Hyperboloïd noch in einer andern Geraden A_1 schneiden, welche nothwendigerweise durch den Punkt x_1 geht, weil x jedesmal Projectionsstrahl der Geraden A ist.*)

Es giebt demnach in den zwei Ebenen E, E_1 drei Paar Strahlbüschel, nämlich r und z_1, s und y_1, t und x_1, deren Strahlen, als Gerade A und A_1 betrachtet, einander paarweise entsprechen, und welche, wie leicht zu sehen, in Ansehung dieser Strahlenpaare projectivisch sind, und zwar liegen sowohl r und z_1, als s und y_1 perspectivisch, weil sie die Durchschnitte der Ebenen E, E_1 und der Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ sind, oder weil ihre entsprechenden Strahlen (wie $r\mathfrak{r}$, $z_1\mathfrak{r}_1$) sich in der Geraden ee_1 schneiden.

Demnach hat man fürs erste das folgende Gesetz:

»Den gesammten Geraden in einer der zwei Ebenen E, E_1, ausgenommen die Strahlen der drei Strahlbüschel (r, s, t oder z_1, y_1, x_1), deren Mittelpunkte die Spitzen des Hauptdreiecks sind, entsprechen in der andern Ebene die gesammten Kegelschnitte, welche dem Hauptdreieck umschrieben werden können, und auch umgekehrt.« Und ferner: »Die Geraden, welche Strahlen der genannten Strahlbüschel sind, [259] entsprechen einander paarweise, nämlich es entsprechen sich die Strahlen der Strahlbüschel r und z_1, s und y_1, t und x_1, und es sind diese Strahlbüschel, in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare, projectivisch, und zwar sind die zwei ersten Paar Strahlbüschel perspectivisch, so dass jedes Paar die Durchschnittslinie ee_1 zum perspectivischen Durchschnitt hat, wogegen vom dritten Paar (t und x_1) zwei entsprechende Strahlen in dieser Linie vereinigt sind; auch sind ferner je zwei entsprechende Strahlen von r und z_1 oder s und y_1 perspectivisch, und ihr Projectionspunkt liegt in der Axe $\mathfrak{A}_1$ oder $\mathfrak{A}$; dagegen erzeugen je zwei entsprechende Strahlen von t und x_1 ein einfaches Hyperboloïd, und diese Schaar Hyperboloïde haben die vier Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, x, t_1 gemein.«[19])

*) Gehen die Geraden A, A_1 durch die Punkte r und z_1, oder s und y_1, so sind sie in zwei bestimmten Lagen projectivisch ähnlich, gehen sie aber durch die Punkte t und x_1, so findet dieses nur in einer Lage statt.

b) Ein eigenthümlicher Fall, der zwar, wie man sehen wird, schon in dem vorstehenden Gesetz mit inbegriffen ist, verdient, wegen seines Einflusses auf spätere Resultate, hier noch näher erörtert zu werden. Es kann nämlich gefragt werden, welches in jeder der zwei Ebenen E, E_1 der Ort derjenigen Punkte sei, deren entsprechende in der andern Ebene unendlich entfernt liegen? Diese Frage lässt sich folgendermaassen leicht beantworten.

Alle Projectionsstrahlen, welche nach den unendlich entfernten Punkten einer der zwei Ebenen, z. B. der Ebene E, gerichtet sind, sind nothwendigerweise mit ihr parallel, und liegen folglich in einem hyperbolischen Paraboloïd (§ 52, I, 2, e), welches von der Ebene E_1 in einem Kegelschnitt, und zwar im Allgemeinen in einer Hyperbel, geschnitten wird. Dieser Kegelschnitt, der durch $[Q_1]$ bezeichnet werden mag, geht offenbar durch die drei Punkte z_1, y_1, x_1, weil [**260**] durch jeden dieser Punkte ein der Ebene E paralleler Projectionsstrahl geht (denn auch der Strahl x, welcher durch den Punkt x_1 geht, ist als dieser Ebene parallel anzusehen). Auch folgt, dass eine Asymptote des Kegelschnitts $[Q_1]$, oder im Fall er eine Parabel ist, dass seine Axe der Durchschnittslinie ee_1 parallel sei, weil nämlich E eine Asymptotenebene des Paraboloïds ist (§ 52). (Aus gleichen Gründen folgt, dass die andere Asymptote derjenigen Geraden parallel ist, in welcher die Ebene E_1 von derjenigen Ebene geschnitten wird, die durch $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A}_1$ geht und mit $\mathfrak{A}_1$ oder $\mathfrak{A}$ parallel ist).

Da nun aber jedem dem Hauptdreieck $z_1 y_1 x_1$, in E_1, umschriebenen Kegelschnitt irgend eine Gerade in E entspricht (a), so sind demnach alle unendlich entfernten Punkte der Ebene E als in einer Geraden Q liegend anzusehen*), welcher nämlich jener Kegelschnitt $[Q_1]$ entspricht. Aehnlicherweise muss den unendlich entfernten Punkten der Ebene E_1, oder ihrer unendlich entfernten Geraden, welche R_1 heissen mag, ein bestimmter Kegelschnitt $[R]$ in E entsprechen, welcher dem Hauptdreieck rst umschrieben ist, u. s. w. Wenn insbesondere einer der zwei Kegelschnitte $[R]$, $[Q_1]$ eine Parabel ist, so ist es der andere ebenfalls, was leicht nachzuweisen ist; u. s. w.[20])

---

*) Dieses ist in der Perspectivlehre ein bekannter alter Satz; im zweiten Abschnitt wird er einfacher und klarer dargestellt werden.

Also folgt:

»**Dass den unendlich entfernten Punkten jeder der zwei Ebenen E, E_1 ein bestimmter Kegelschnitt [Q_1] oder [R] in der andern Ebene entspricht, welcher dem Hauptdreieck umschrieben [261] ist, so dass also jene Punkte als in einer Geraden Q oder R_1 liegend angesehen werden müssen; von jedem der zwei Kegelschnitte, die im Allgemeinen Hyperbeln sind*), ist eine Asymptote der Durchschnittslinie ee_1 parallel; ist einer derselben eine Parabel, so ist es auch der andere, und dann sind ihre Axen der Linie ee_1 parallel.**«

c) Ueber die vorstehenden Resultate (a, b) sind noch folgende nähere Umstände anzugeben. Wenn nämlich der Geraden A, wie sie in (Fig. 55) gezeichnet vorliegt, der Kegelschnitt [A_1] entspricht, so wird jedem Kegelschnitt, der sie berührt, und zugleich dem Hauptdreieck rst umschrieben ist, z. B. dem Kegelschnitt, der sie in $\mathfrak{a}$ berührt und der durch [T] bezeichnet werden mag, eine solche Gerade T_1, in E_1, entsprechen, welche den Kegelschnitt [A_1] in demjenigen Punkte $\mathfrak{a}_1$ berührt, der jenem erstgenannten Punkte $\mathfrak{a}$ entspricht; denn da A und [T] nur den einzigen Punkt $\mathfrak{a}$ gemein haben, und da jedem Punkt in E, im Allgemeinen, nur ein einziger Punkt in E_1 entspricht, so können folglich auch [A_1] und T_1 nicht mehr als einen Punkt gemein haben.[21])

Da ferner die Strahlen $r\mathfrak{a}$ und $z_1\mathfrak{a}_1$ einander entsprechen, und zwar da den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{z}_1$ die Punkte $\mathfrak{a}_1$, z_1 entsprechen, so sieht man, dass, wenn der Strahl $r\mathfrak{a}$ sich um r dreht, bis die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{z}_1$ mit $\mathfrak{z}$ zusammenfallen, dann der Punkt $\mathfrak{a}_1$ sich nach z_1 bewegen wird, bis er sich zuletzt mit ihm vereinigt, so dass alsdann der Strahl $z_1\mathfrak{r}_1$ den Kegelschnitt [A_1] in z_1 berührt. Eben so wird die Tangente $y_1\mathfrak{b}_1$, welche [262] den Kegelschnitt [A_1] in y_1 berührt, durch den Strahl $s\mathfrak{y}\mathfrak{b}$ bestimmt und gefunden. Und ebenso ist die Tangente im Punkte x_1 derjenige Strahl, welcher dem Strahl $t\mathfrak{x}$ entspricht. Also:

»Wenn in den zwei Ebenen E, E_1 irgend eine Gerade und der ihr entsprechende Kegelschnitt, z. B. die Gerade A in E und der Kegelschnitt [A_1] in E_1,

*) Die unendlich entfernten Punkte dieser Hyperbeln entsprechen einander.

gegeben sind, so entspricht jeder beliebigen Tangente T_1 des Kegelschnitts ein bestimmter Kegelschnitt $[T]$ in der andern Ebene, welcher jene Gerade A berührt, und zwar in demjenigen Punkte $\mathfrak{a}$, der dem Berührungspunkt $\mathfrak{a}_1$ jener Tangente entspricht; denjenigen Tangenten aber, welche den gegebenen Kegelschnitt in den Hauptpunkten x_1, y_1, z_1 berühren, entsprechen die Geraden $t\mathfrak{x}$, $s\mathfrak{y}$, $r\mathfrak{z}$, die in der andern Ebene die Ecken des Hauptdreiecks mit denjenigen Punkten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ verbinden, in welchen die gegenüber liegenden Seiten x, y, z von der gegebenen Geraden A geschnitten werden.«

Für den vorerwähnten (b) Kegelschnitt $[Q_1)$ findet man hiernach seine Tangente $y_1\mathfrak{b}_1$ im Punkte y_1, wenn man den Strahl $s\mathfrak{b}$ der Seite y parallel zieht, weil nämlich in diesem Falle die ihm entsprechende Gerade A (oder Q), und mithin auch der Punkt $\mathfrak{y}$ in y, unendlich entfernt ist. Ebenso wird dessen Tangente am Punkte z_1 und ähnlicherweise wird dessen Tangente am Punkte x_1 gefunden; oder die letztere kann auch mittelst der zwei erstern gefunden werden (§ 42, IV, 1). Gleiches folgt für den Kegelschnitt $[R]$.[22])

Zufolge des vorstehenden Satzes und mit Rücksicht auf (§ 36, Ende) und (b) kann man nun auch leicht erkennen, von welcher Art der Kegelschnitt sei, [**263**] welcher irgend einer Geraden in einer der zwei Ebenen E, E_1 entspricht, nämlich:

»Der Kegelschnitt, welcher z. B. der Geraden A entspricht, ist entweder 1) Hyperbel, oder 2) Parabel, oder 3) Ellipse, je nachdem die Gerade A den Kegelschnitt $[R]$ 1) schneidet, oder 2) berührt, oder 3) gar nicht trifft.«[23])

d) Mittelst der bisherigen Resultate lassen sich nun weiter leicht die Haupteigenschaften derjenigen Figur angeben, welche irgend einer gegebenen krummen Linie entspricht. Denn angenommen, es sei C eine beliebige Curve $n$ten Grades in der Ebene E und C_1 sei die ihr entsprechende in der Ebene E_1, so wird, da C von jedem dem Hauptdreieck rst umschriebenen Kegelschnitt $[rst]$, im Allgemeinen und höchstens, in $2n$ Punkten geschnitten werden kann, und da allen diesen Kegelschnitten die gesammten Geraden in der Ebene E_1 entsprechen (a), die Curve C_1 von jeder dieser Geraden, im Allgemeinen und höchstens, ebenfalls in $2n$ Punkten geschnitten, und folglich wird diese Curve, im Allgemeinen, vom $2n$ten Grade sein.

Da ferner die Curve C jede der drei Seiten x, y, z des Hauptdreiecks, im Allgemeinen, in n Punkten schneidet, so muss die Curve C_1 die drei Hauptpunkte x_1, y_1, z_1 zu sogenannten singulären Punkten haben, nämlich jeder derselben ist in Bezug auf sie ein $n$facher Punkt (1). Die n Tangenten der Curve C_1 in jedem der drei Punkte x_1, y_1, z_1 sind vermöge der Durchschnittspunkte, in welchen die Seiten x, y, z von der Curve C geschnitten werden, sehr leicht zu finden, denn ist etwa $\mathfrak{y}$ ein solcher Durchschnittspunkt, so ist der dem Strahle $s\mathfrak{v}\mathfrak{b}$ entsprechende Strahl $y_1 \mathfrak{b}_1$ eine Tangente der Curve C_1 im Punkte y_1 (c). Berührt die Curve C eine der drei Geraden x, y, z, so entspricht [264] dem Berührungspunkt ein Rückkehrpunkt in der Curve C_1, und zwar, so oft eine jener Geraden von C berührt wird, so viele Rückkehrpunkte der C_1 sind in dem, der jedesmaligen Geraden, entsprechenden Punkte x_1, y_1, z_1 vereinigt. Die einem Rückkehrpunkt zugehörige Tangente ist, ebenso wie vorhin, leicht zu finden, sobald nämlich der ihm entsprechende Berührungspunkt gegeben ist. (Sind unter den genannten Rückkehrpunkten auch die Wendungs- oder Beugungspunkte mit inbegriffen?)

Die Curve C_1 wird nothwendigerweise um 1, oder 2, oder 3 Grad erniedrigt, wenn die ihr entsprechende gegebene Curve C durch 1, oder 2, oder alle 3 Hauptpunkte r, s, t geht (d. h. durch jeden nur einmal geht), weil nämlich unter diesen Umständen jeder der genannten Kegelschnitte $[rst]$ die Curve C, ausser jenen Punkten, nur in $2n-1$, oder $2n-2$, oder $2n-3$ Punkten schneiden kann.

Wenn insbesondere die gegebene Curve C nur vom 2ten Grad, also ein Kegelschnitt, ist, so ist demnach die ihr entsprechende Curve C_1 im Allgemeinen vom 4ten Grad und hat die drei Hauptpunkte x_1, y_1, z_1 zu Doppelpunkten*).

---

*) Berührt der gegebene Kegelschnitt C alle drei Seiten x, y, z des Hauptdreiecks rst, so ist C_1, zufolge des Obigen, eine solche Curve 4ten Grades, welche die drei Hauptpunkte x_1, y_1, z_1 zu Rückkehrpunkten hat; und weiter folgt, mit Rücksicht auf (42, IV, 1, links), dass die drei Tangenten in den drei Rückkehrpunkten der Curve C_1 einander allemal in irgend einem Punkte treffen. — Findet dieses letztere bei jeder beliebigen Curve 4ten Grades, welche drei Rückkehrpunkte hat,

Oder wenn man die besondern [**265**] Fälle mit zusammenfasst, so kann man sagen: »es sei C_1 entweder vom 4ten, oder 3ten, oder 2ten, oder 1ten Grad, je nachdem der gegebene Kegelschnitt C entweder durch keinen, oder 1, oder 2, oder alle 3 Hauptpunkte r, s, t geht.« Der dritte Fall, wo nämlich C_1 vom 2ten Grade, und also auch ein Kegelschnitt ist, folgt auch aus (§ 51, IV, 9), wonach, wenn z. B. der gegebene Kegelschnitt C durch die Punkte r, s geht, dann seine sämmtlichen Projectionsstrahlen in einem einfachen Hyperboloïd liegen, welches von der andern Ebene E_1 in einem Kegelschnitt C_1 geschnitten wird, der nothwendigerweise durch die Punkte z_1, y_1 geht. Dasselbe folgt übrigens auch aus der Eigenschaft, dass die Strahlbüschel r und z_1, s und y_1, t und x_1 projectivisch sind (a). Denn geht der Kegelschnitt C etwa durch die Punkte s, t, so erhalten die Strahlbüschel s, t durch ihn eine projectivische Beziehung (§ 38, III), da sie aber, wie schon bemerkt worden, beziehlich mit den Strahlbüscheln y_1, x_1 projectivisch sind, so sind folglich auch die letztern unter sich projectivisch und erzeugen einen Kegelschnitt C_1, welcher durch ihre Mittelpunkte y_1, x_1 geht, und welcher offenbar dem Kegelschnitt C entspricht. Also:

»Jedem Kegelschnitt C in der Ebene E, welcher durch irgend zwei der drei Hauptpunkte r, s, t geht (aber nur durch zwei), entspricht in der andern Ebene E_1 ebenfalls ein Kegelschnitt C_1, welcher durch die jedesmaligen zwei entsprechenden Hauptpunkte z_1, y_1, x_1 geht; und auch umgekehrt.«

3) Die vorstehenden Resultate (2) sind die Fundamentalsätze über die Abhängigkeit der Figuren in den zwei Ebenen E, E_1 von einander. Es lassen sich aus [**266**] ihnen unmittelbar eine grosse Reihe weiterer Folgerungen entwickeln, die zu einigen interessanten Sätzen führen. Nach der Art, wie die Figuren in den zwei Ebenen von einander abhängen, ist nämlich klar, dass gewisse Eigenschaften und Sätze, welche Figuren oder Gebilden in der einen Ebene zukommen, also die meisten Eigenschaften, Sätze, Aufgaben etc., die im

---

statt? Oder: entsprechen den gesammten Kegelschnitten, welche dem Hauptdreiseit xyz eingeschrieben werden können, auch die gesammten Curven 4ten Grades, welche die drei Punkte x_1, y_1, z_1 zu Rückkehrpunkten haben?

ersten und gegenwärtigen dritten Kapitel über projectivische Gebilde und sonstige Figuren in der Ebene aufgestellt oder betrachtet worden sind, auch auf irgend eine analoge Weise in der andern Ebene (wenn auch bei ganz verschiedenartigen Figuren) stattfinden müssen. Einige Beispiele werden hinreichen, dies zu erläutern.

Den Figuren und Gebilden, ihren Eigenschaften und den ihnen zukommenden Sätzen und Aufgaben in der Ebene E, entsprechen folgender Gestalt die Figuren und Gebilde, deren Eigenschaften, Sätze und Aufgaben in der Ebene E_1:

In der Ebene E	entspricht ..... in der Ebene E_1
A.	
1) *Einem bestimmten Punkte* $\mathfrak{a}$:	1) *Ein bestimmter Punkt* $\mathfrak{a}_1$.
2) *Den einzelnen Eckpunkten* r, s, t *des Hauptdreiecks*:	2) *Sämmtliche Punkte der Seiten* r_1, s_1, t_1 *des Hauptdreiecks.*
3) *Den drei Strahlbüscheln* r, s, t:	3) *Die drei Strahlbüschel* z_1, y_1, x_1.
4) *Einer Geraden* A, *welche durch keinen der drei Hauptpunkte* r, s, t *geht*:	4) *Ein Kegelschnitt* $[A_1]$, *der durch die drei Hauptpunkte* z_1, y_1, x_1 *geht.*
5) *Vier harmonischen Punkten der Geraden* A (vermöge 3):	5) *Vier harmonische Punkte des Kegelschnitts* $[A_1]$ (§ 43, II).
6) *Irgend zwei Punkten* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$; *der durch dieselben bestimmten Geraden* A; *und* [267] *dem durch dieselben und durch die Hauptpunkte* r, s, t *bestimmten Kegelschnitt* $[T]$:	6) *Zwei bestimmte Punkte* $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{c}_1$; *der durch sie und durch die Hauptpunkte* z_1, y_1, x_1 [267] *gehende Kegelschnitt* $[A_1]$; *und die durch dieselben bestimmte Gerade* T_1.
7) *Irgend einem Strahlbüschel* B, *d. h. der Schaar Gerader, die durch irgend einen Punkt* B *gehen*:	7) *Eine Schaar Kegelschnitte* $[B_1]$, *die durch die Hauptpunkte* z_1, y_1, x_1 *und durch einen bestimmten vierten Punkt* B_1 *gehen.* [24]
8) *Da sich unter den Strahlen dieses Strahlbüschels* B, *im Allgemeinen und höchstens, zwei befinden, welche den oben* (2, c) *genannten Kegelschnitt* $[R]$ *berühren*:	8) *So befinden sich unter der Schaar Kegelschnitte* $[B_1]$, *welche durch vier gegebene Punkte* z_1, y_1, x_1, B_1 *gehen, im Allgemeinen und höchstens, zwei Parabeln.*
9) *Irgend vier harmonischen Strahlen des Strahlbüschels* B, *also vier harmonischen Geraden* a, b, c, d:	9) *Vier harmonische Kegelschnitte* $[a_1]$, $[b_1]$, $[c_1]$, $[d_1]$ *der Schaar Kegelschnitte* $[B_1]$.
Diese vier Geraden schneiden jede andere Gerade A *in vier harmonischen Punkten* (§ 8, II):	*Diese vier Kegelschnitte schneiden jeden Kegelschnitt* $[A_1]$ *in vier harmonischen Punkten*;
Und jeden Kegelschnitt $[T]$, *der durch ihren Mittelpunkt* B	*Und jede Gerade* T, *die durch ihren vierten Durchschnittspunkt*

geht, ebenfalls in vier harmonischen Punkten:

10) *Liegt der Mittelpunkt B des Strahlbüschels insbesondere in einer der drei Seiten x, y, z des Hauptdreiecks, etwa in $\mathfrak{y}$ in der Seite y*:

11) *Den projectivischen Beziehungen der Geraden und Strahlbüschel, den Eigenschaften des vollständigen Vierecks und Vierseits, und überhaupt den meisten Sätzen, Aufgaben und Porismen, welche im ersten Kapitel untersucht worden:*

U. s. w.

B_1 geht, auch in vier harmonischen Punkten.

10) *So vereinigt sich der vierte Punkt B_1 mit dem Hauptpunkt y_1 und die Schaar Kegelschnitte $[B_1]$ haben im Punkte y_1 eine gemeinsame Tangente $y_1 b_1$.*

11) *Analoge Beziehungen, Eigenschaften, Sätze, Aufgaben und Porismen bei Kegelschnitten $[z_1 y_1 x_1]$, d. h. bei Kegelschnitten, welche durch die drei Hauptpunkte z_1, y_1, x_1 gehen.*

U. s. w.

[268] B.

1) *Einem Kegelschnitt $[T]$; der Schaar Gerader $\mathfrak{G}$, die ihn berühren; und ihren Berührungspunkten*:

2) *Da sich unter dieser Schaar Gerader $\mathfrak{G}$, im Allgemeinen und höchstens, vier befinden, welche den Kegelschnitt $[R]$ berühren, d. h. gemeinsame Tangenten der Kegelschnitte $[T]$, $[R]$ sind*:

3) *Irgend vier von diesen berührenden Geraden $\mathfrak{G}$, die harmonisch sind* (§ 43, II):

Sie schneiden jede der übrigen, zur Schaar $\mathfrak{G}$ gehörige Gerade, in vier harmonischen Punkten:

Und ihre Berührungspunkte sind vier harmonische Punkte des Kegelschnitts $[T]$:

4) *Da irgend zwei Kegelschnitte $[M]$, $[N]$ von vier bestimmten Geraden a, b, c, d berührt werden*:

5) *Den zahlreichen Sätzen und Aufgaben, die oben, von* (§ 42) *bis* (§ 48) *aufgestellt sind, und welche sich auf einen Kegelschnitt $[T]$ und auf dessen Sekanten und Tangenten, so wie auf beliebige andere Gerade beziehen, als z. B. den Sätzen über die dem Kegelschnitt $[T]$ um- und eingeschriebenen Sechsecke, Fünfecke, Vierecke und Dreiecke; über harmonische Pole und Gerade,* u. s. w.:

1) *Eine Gerade T_1; die Schaar Kegelschnitte $[\mathfrak{G}_1]$, die sie berühren; und ihre Berührungspunkte.*

2) *So befinden sich unter der Schaar Kegelschnitte $[\mathfrak{G}_1]$ die durch* 3 *Punkte z_1, y_1, x_1 gehen und eine Gerade T berühren, im Allgemeinen und höchstens, vier Parabeln.*

3) *Vier von diesen berührenden Kegelschnitten $[\mathfrak{G}_1]$, die harmonisch sind;*

Sie schneiden jeden der übrigen, zur Schaar $[\mathfrak{G}_1]$ gehörigen Kegelschnitte, in vier harmonischen Punkten;

Und ihre Berührungspunkte sind vier harmonische Punkte der Geraden T (1).

4) *So giebt es vier Kegelschnitte $[a_1]$, $[b_1]$, $[c_1]$, $[d_1]$, wovon jeder irgend zwei gegebene Gerade M, N berührt.*

5) *Analoge Sätze und Aufgaben, die sich sämmtlich auf die Gerade T und auf die sie schneidenden und berührenden Kegelschnitte $[z_1 y_1 x_1]$, so wie auf andere bestimmte Kegelschnitte $[z_1 y_1 x_1]$ beziehen.*

[269] **C.**

1) *Einem Kegelschnitt, der durch irgend zwei der drei Hauptpunkte r, s, t geht, etwa einem Kegelschnitt* $[rs]$, *der durch r, s geht; den sämmtlichen Geraden* $\mathfrak{S}$, *die ihn berühren, und ihren Berührungspunkten*:

Da von der Schaar Gerader $\mathfrak{S}$, *im Allgemeinen und höchstens, vier den Kegelschnitt* $[R]$ *berühren*:

2) *Den vorerwähnten Sätzen und Aufgaben* (B, 3 u. 5):

3) *Der Schaar Kegelschnitte, welche durch die vier Punkte r, s,* $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$ (*Fig.* 55) *gehen*:

4) *Der Schaar Kegelschnitte, die durch zwei Hauptpunkte r, s und durch einen beliebigen Punkt* $\mathfrak{p}$ *gehen, und irgend eine Gerade A berühren*:

Oder, der Schaar Kegelschnitte, welche durch r, s gehen und die Gerade A in einem gegebenen Punkte $\mathfrak{a}$ *berühren*:

Oder, der Schaar Kegelschnitte, welche durch r, s gehen und irgend zwei gegebene Gerade M, N berühren:

Oder, der Schaar Kegelschnitte, welche durch r, s gehen und den Kegelschnitt $[R]$ *in irgend einem Punkt* $\mathfrak{q}$ *berühren*:

[270] 5) *Da irgend zwei Kegelschnitte* $[rs]$ *im Allgemeinen von vier bestimmten Geraden a, b, c, d berührt werden*:

1) *Ein Kegelschnitt, der durch die entsprechenden zwei Hauptpunkte geht, also ein Kegelschnitt* $[z_1 y_1]$; *die sämmtlichen Kegelschnitte* $[\mathfrak{S}_1]$, *die ihn berühren, und ihre Berührungspunkte.*

So befinden sich unter der Schaar Kegelschnitte $[\mathfrak{S}_1]$, *im Allgemeinen und höchstens, vier Parabeln.*

2) *Analoge Sätze und Aufgaben.*

3) *Die Schaar Kegelschnitte, welche in den Punkten z_1, y_1 zwei gemeinschaftliche Tangenten haben.*

4) *Die Schaar Kegelschnitte, welche durch die drei entsprechenden Punkte z_1, y_1,* $\mathfrak{p}_1$ *gehen, und einen bestimmten Kegelschnitt* $[A_1]$ *berühren.*

Die Schaar Kegelschnitte, welche durch z_1, y_1 gehen und einen Kegelschnitt $[A_1]$ *in einem Punkte* $\mathfrak{a}_1$ *berühren.*

Die Schaar Kegelschnitte, welche durch z_1, y_1 gehen und zwei bestimmte Kegelschnitte $[M_1]$, $[N_1]$ *berühren.*

Eine Schaar Parabeln, welche durch z_1, y_1 gehen und deren Axen parallel, nach einem unendlich entfernten Punkte $\mathfrak{q}_1$ *gerichtet sind.*

[270] 5) *So werden irgend zwei Kegelschnitte* $[z_1, y_1]$ *von vier bestimmten Kegelschnitten* $[a_1]$, $[b_1]$, $[c_1]$, $[d_1]$ *berührt.*

U. s. w.

D.

1) *Einem beliebigen Kegelschnitt C; den ihn berührenden Geraden* $\mathfrak{S}$; *ihren Berührungspunkten*:

2) *Den Sätzen und Aufgaben von* (§ 42) *bis* (§ 48), *namentlich den Porismen in* (§ 47):

1) *Eine bestimmte Curve 4ten Grades; die sie berührenden Kegelschnitte* $[\mathfrak{S}_1]$; *ihre Berührungspunkte.*

2) *Analoge Sätze, Aufgaben und Porismen.*

Hiernach sieht man, dass, wie schon erwähnt, die meisten Resultate, welche bei frühern Betrachtungen entwickelt worden, und welche sich auf Figuren in der Ebene beziehen, und zwar vorzugsweise das Netzgewebeartige derselben betreffen, sich nach den vorstehenden Schemata auf mehrfache Weise travestiren lassen; nämlich diejenigen Sätze, Aufgaben etc., wobei bloss Punkte und Gerade (Vielecke, Vielseite, projectivische Gerade und ebene Strahlbüschel etc.) vorkommen, nach (A), kommt ausser diesen Elementen noch ein einzelner Kegelschnitt, oder eine gewisse Schaar Kegelschnitte vor, nach (B, C und D), und kommen in den Sätzen etc., ausser jenen Elementen, beliebige Kegelschnitte vor, nach (D). Auch lassen sich die neuen Resultate wiederum auf dieselbe Weise umwandeln, u. s. w. Wollte man jedoch diese Umwandlungen weiter wiederholen, so würden sie ins Langweilige führen, sie würden nichts wesentliches Neues enthalten, mithin weniger wichtig sein, als die einfachen Elementarsätze, von welchen sie hergeleitet, und von welchen sie im Grunde nur als Carricaturen erschienen.

[271] Die obigen Sätze (rechts), welche meist nur angedeutet sind, wird man leicht vollständig aussprechen können*). Uebrigens führt der Gang der Betrachtung projectivischer Ebenen und Strahlbüschel noch von einer andern Seite nothwendigerweise auf dieselben zurück, wo sie alsdann theils umfassender, theils mehr ins Einzelne und Besondere eingehend, dargestellt werden sollen.

III. Der vorhergehenden Betrachtung (II) steht, wie es der in diesem Werk überall beobachtete Gegensatz erheischt, die folgende Betrachtung zur Seite, von welcher ich aber nur sehr kurz einige wesentliche Hauptmomente andeuten werde.

1) Bringt man nämlich mit den Doppelgebilden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ (I) irgend zwei Strahlbüschel D, D_1 in Verbindung, so lassen sich diese, mittelst des den erstern zugehörigen Strahlsystems,

---

*) Es bedeutet nämlich bei den obigen Sätzen (was übrigens auch schon aus dem ganzen Zusammenhang zu schliessen ist), z. B. das Zeichen $[z_1 y_1 x_1]$: ein oder mehrere Kegelschnitte, welche durch die drei Hauptpunkte z_1, y_1, x_1 gehen; $[z_1 y_1]$: ein oder mehrere Kegelschnitte, welche durch die zwei Hauptpunkte z_1, y_1 gehen; $[N_1]$, oder $[a_1]$, oder $[\mathfrak{G}_1]$: ein Kegelschnitt, welcher durch die drei Hauptpunkte z_1, y_1, x_1 geht, und einer bestimmten Geraden N, oder a, oder $\mathfrak{G}$, in E, entspricht; u. s. w. Aehnliches gilt von E_1.

entsprechenderweise aufeinander beziehen, wie vorhin die Ebenen E, E_1. Denn durch jeden Strahl des Strahlsystems $[\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1]$ geht, im Allgemeinen, eine Ebene sowohl des einen als des andern Strahlbüschels D, D_1, z. B. durch einen bestimmten Strahl a wird eine bestimmte Ebene α, in D, und eine bestimmte Ebene α_1, in D_1, gehen; je zwei solche Ebenen sollen »entsprechende Ebenen« (oder jede soll die »schiefe Projection« der andern) heissen. Jeder Ebene in einem der zwei Strahlbüschel D, D_1 **[272]** entspricht demnach irgend eine bestimmte Ebene im andern Strahlbüschel, und von diesem allgemeinen Gesetz finden, wie man sogleich sehen wird, nur wenige Ausnahmen statt.

Zuvörderst mögen für gewisse Elemente besondere Bezeichnungen und Benennungen festgesetzt werden. Nämlich es sollen die zwei Ebenen in D, welche durch die Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ gehen, durch r, s und ihre Durchschnittslinie durch x, und andererseits sollen die zwei Ebenen in D_1, welche durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ gehen, durch z_1, y_1 und ihre Durchschnittslinie durch t_1 bezeichnet werden; x und t_1 sind also diejenigen Strahlen der Strahlbüschel D, D_1, welche beide Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ schneiden, und folglich zugleich dem Strahlsystem $[\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1]$ angehören. Ferner soll diejenige Ebene in D, welche durch den Strahl t_1 in D_1 geht, durch t und die Durchschnittslinien, welche sie mit den Ebenen r, s bildet, durch y, z, und andererseits soll diejenige Ebene in D_1, welche durch den Strahl x in D geht, durch x_1 und ihre Durchschnittslinien mit den Ebenen z_1, y_1, durch s_1, r_1 bezeichnet werden. Die Ebenen r, s, t und z_1, y_1, x_1 sollen fortan die »Hauptebenen«, die Strahlen z, y, x und r_1, s_1, t_1 die »Hauptstrahlen«, oder die Dreiflache rst und $z_1y_1x_1$ sollen die »Hauptdreiflache« der Strahlbüschel D und D_1 heissen. Auch mögen die Ebenenpaare r und z_1, s und y_1, t und x_1 entsprechende Hauptebenen, und die Strahlenpaare z und r_1, y und s_1, x und t_1 entsprechende Hauptstrahlen genannt werden. Endlich soll derjenige Strahl, welchen beide Strahlbüschel D, D_1 gemein haben (die Gerade durch ihre Mittelpunkte D, D_1), durch ee_1 bezeichnet werden. Sodann lassen sich die vorgenannten Ausnahmen folgender Gestalt angeben (vergl. II, 1).

[273] »Die sämmtlichen Ebenen der Ebenenbüschel z, y, x und r_1, s_1, t_1 haben beziehlich die einzelnen Hauptebenen z_1, y_1, x_1 und r, s, t zu entsprechenden Ebenen; und ferner: jede Ebene des Ebenenbüschels

ee_1 entspricht sich selbst, oder es sind in ihr zwei entsprechende Ebenen vereinigt.«

Mittelst der Hauptebenen r, s, t und z_1, y_1, x_1 lässt sich zu jeder gegebenen Ebene des einen oder andern Strahlbüschels D, D_1 die ihr entsprechende Ebene finden (ähnlicherweise wie oben entsprechende Punkte (II, 1)).

2) Es entsteht nun weiter die Frage, wenn in einem der zwei Strahlbüschel D, D_1 irgend ein bestimmtes System von Ebenen gegeben sind, welchem Gesetz dann die ihnen entsprechenden Ebenen im andern Strahlbüschel unterworfen seien? Die Antwort hierauf ergiebt sich sehr leicht.

a) Man denke sich zunächst irgend einen Ebenenbüschel A im Strahlbüschel D, so werden dessen Ebenen α, β, γ, ... durch solche Strahlen a, b, c, ... des Strahlsystems $[\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1]$ gehen, welche in einem einfachen Hyperboloïd liegen (1) oder (§ 51), und daher werden die ihnen entsprechenden Ebenen α_1, β_1, γ_1, ... in D_1 irgend eine bestimmte Kegelfläche zweiten Grades $[A_1]$ umhüllen (§ 51, IV, 4), welche nothwendigerweise dem Hauptdreiflach $z_1 y_1 x_1$ eingeschrieben ist, weil durch jeden der drei Hauptstrahlen z, y, x (in D) eine Ebene des Ebenenbüschels A geht, und weil diesen Ebenen jene Ebenen z_1, y_1, x_1 entsprechen (1); (auch berührt die Kegelfläche $[A_1]$ diejenige Ebene $A(ee_1)$, welche durch die Axe A und durch den Strahl ee_1 geht, weil dieselbe sich selbst entspricht (1)). Also:

»Den gesammten Ebenen irgend eines Ebenenbüschels [**274**] in einem der zwei Strahlbüschel D, D_1, wie etwa den Ebenen des Ebenenbüschels A in D, entsprechen im andern Strahlbüschel D_1 die gesammten Berührungsebenen irgend einer bestimmten Kegelfläche zweiten Grades $[A_1]$, und zwar befinden sich unter den letztern allemal die drei Hauptebenen z_1, y_1, x_1.« Oder: »Jedem Strahl in einem der zwei Strahlbüschel D, D_1, wie etwa dem Strahl A in D, entspricht im andern Strahlbüschel D_1 irgend eine bestimmte Kegelfläche zweiten Grades $[A_1]$, welche dem Hauptdreiflach $z_1 y_1 x_1$ eingeschrieben ist, und auch umgekehrt; so dass also den gesammten Strahlen des einen Strahlbüschels die gesammten Kegelflächen zweiten Grades entsprechen, welche im andern Strahlbüschel dem Hauptdreiflach eingeschrieben sind.«

Bei diesem allgemeinen Gesetz finden folgende Ausnahmen statt. Liegt die Axe des genannten Ebenenbüschels A in einer der drei Hauptebenen r, s, t, so entspricht ihm in D_1 ebenfalls ein Ebenenbüschel A_1, dessen Axe beziehlich in einer der drei Hauptebenen z_1, y_1, x_1 liegt; (die Ebenenbüschel A, A_1 sind projectivisch, liegen ihre Axen in r und z, oder in s und y_1, so sind sie perspectivisch, liegen dieselben aber in t und x_1, so erzeugen jene ein einfaches Hyperboloïd, welches allemal durch die vier Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, x, t_1 geht; alle möglichen zusammengehörigen Axen A und A_1 erzeugen drei Paar projectivische ebene Strahlbüschel r und z_1, s und y_1, t und x_1 (in D und D_1), wovon die zwei ersten Paare perspectivisch sind, nämlich sie haben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ zu perspectivischen Durchschnitten und jedes hat den Strahl ee_1 zur Projectionsaxe, u. s. w.).

[**275**] b) Denkt man sich nun weiter ein System von Ebenen in D, welche irgend eine Kegelfläche K vom $n$ten Grad umhüllen, und frägt, was für eine Kegelfläche K_1 die ihnen entsprechenden Ebenen in D_1 berühren, so ergiebt sich die Antwort ebenfalls sehr leicht. Denn da irgend eine Kegelfläche zweiten Grades $[T]$, welche dem Hauptdreiflach rst eingeschrieben ist, mit der gegebenen Kegelfläche K, im Allgemeinen und höchstens, $2n(n-1)$ gemeinschaftliche Berührungsebenen hat, so gehen durch irgend einen bestimmten Strahl T_1 (der jener Kegelfläche $[T]$ entspricht (a)) in D_1, eben so viele Ebenen, welche die Kegelfläche K_1 berühren, und folglich ist die letztere, im Allgemeinen, von der $2n(n-1)$ten Classe § 41, III, Note). Da ferner durch jeden der drei Hauptstrahlen z, y, x, in D, im Allgemeinen $n(n-1)$ Ebenen gehen, welche die gegebene Kegelfläche K berühren, so muss die Kegelfläche K_1 jede der drei Hauptebenen z_1, y_1, x_1, im Allgemeinen, $n(n-1)$ mal berühren, u. s. w.*).

Ist die gegebene Kegelfläche K insbesondere nur vom zweiten Grad, so ist die ihr entsprechende Kegelfläche K_1, im Allgemeinen, von der 4ten Classe, und berührt jede der drei Hauptebenen z_1, x_1, y_1 doppelt; oder es ist in diesem

---

*) Ist z. B. die gegebene Kegelfläche K vom zweiten Grade, und geht sie durch die drei Hauptstrahlen z, y, x, so ist die ihr entsprechende Kegelfläche K_1 von der vierten Classe, und hat drei W e n d u n g s s t r a h l e n, in welchen sie von den drei Hauptebenen z_1, y_1, x_1 berührt wird, und welche in einer Ebene liegen; u. s. w. (vergl. oben II, 2, d, Note).

Falle die Fläche K_1 entweder von der 4ten, 3ten, 2ten, oder 1ten Classe, je nachdem jene Fläche K entweder keine, eine, zwei, oder alle drei Hauptebenen r, s, t berührt. Also:

»Jeder Kegelfläche zweiten Grades K in [276] D, welche irgend zwei der drei Hauptebenen r, s, t berührt, entspricht in D_1 ebenfalls eine Kegelfläche zweiten Grades K_1, welche die zwei entsprechenden (1) Hauptebenen z_1, y_1, x_1 berührt; und auch umgekehrt.«

3) Mittelst der vorstehenden Fundamentalsätze (1 und 2), über die gegenseitige Beziehung der zwei Strahlbüschel D, D_1, lassen sich nun ähnlicherweise, wie oben (II, 3) bei den Ebenen E, E_1, die daselbst angezeigten Reihen von Eigenschaften, Sätzen, Aufgaben, u. s. w. [wenn diese zuerst, vermöge (§ 33 und § 48), auf einen der zwei Strahlbüschel übertragen werden], auf eine neue Art travestiren; ich begnüge mich aber damit, hier darauf aufmerksam gemacht zu haben; im Nächstfolgenden (IV) sollen einige dahin gehörige Beispiele, wenn auch unter abgeänderter Gestalt, herausgehoben werden.

IV. Die Resultate, welche durch die zwei vorhergehenden Betrachtungen über die zwei Paar Gebilde E und E_1, D und D_1 entwickelt worden, lassen sich, zufolge (§ 33), unmittelbar von jedem Paar dieser Gebilde auf das andere übertragen, d. h., die von den Ebenen E, E_1 aufgefundenen Eigenschaften (II) lassen sich auf die Strahlbüschel D, D_1, und die von diesen angedeuteten Eigenschaften (III) lassen sich unmittelbar auf jene übersetzen.

1) Nämlich werden z. B. die Strahlbüschel D, D_1, nachdem sie nach obiger Art (III) mittelst des Strahlsystems $[\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1]$ auf einander bezogen, durch zwei beliebige Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ geschnitten, so müssen in diesen entsprechende Hauptelemente entstehen, wie sie jenen zukommen, d. h., es entstehen in den Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$ zwei Hauptdreiseite $\mathfrak{r}\mathfrak{s}\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1$, deren Seiten $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ Hauptgerade und deren Eckpunkte (nach der Ordnung, in der sie den Seiten [277] gegenüber stehen) $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{t}_1$ Hauptpunkte sind, und diese Hauptelemente werden beziehlich durch die Hauptdreiflache rst und z_1, y_1, x_1, Hauptebenen r, s, t und z_1, y_1, x_1, und Hauptstrahlen z, y, x und r_1, s_1, t_1 der Strahlbüschel D und D_1 (III, 1) bewirkt; ferner wird z. B. eine Kegelfläche zweiten Grades, welche einem der zwei Hauptdreiflache

eingeschrieben ist, in der zugehörigen Ebene einen Kegelschnitt erzeugen, welcher dem **Hauptdreiseit** eingeschrieben ist; u. s. w., so dass also zwischen den zwei schneidenden Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ folgende Beziehung stattfindet:

Den Elementen und Gebilden

in der Ebene $\mathfrak{E}$ ... entsprechen ...	in der Ebene $\mathfrak{E}_1$:
A.	
1) *Irgend einem Strahl* a (Gerade):	1) *Ein bestimmter Strahl* a_1.
2) *Dem unendlich entfernten Strahl* $\mathfrak{O}$ (II, 2, b):	2) *Ein bestimmter, endlich entfernter, Strahl* $\mathfrak{O}_1$.
3) *Einem gewissen besondern Strahl* $\mathfrak{R}$:	3) *Der unendlich entfernte Strahl* $\mathfrak{R}_1$.
4) *Den einzelnen Seiten* $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ *des Hauptdreiseits* (als Strahlen angesehen):	4) *Die gesammten Strahlen der Strahlbüschel* $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{s}_1$ $\mathfrak{t}_1$.
5) *Den gesammten Strahlen der Strahlbüschel* $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$.	5) *Die einzelnen (Haupt-) Strahlen* $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$.
6) *Den drei Hauptgeraden* $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ (als Gebilde angesehen):	6) *Die drei Hauptgeraden* $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$.
7) *Irgend einem Strahlbüschel* $\mathfrak{B}$, *d. h., irgend einem Punkte* $\mathfrak{B}$ *und den gesammten durch ihn gehenden Strahlen.*	7) *Ein bestimmter Kegelschnitt* [$\mathfrak{B}_1$], *der dem Hauptdreiseit* $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ *eingeschrieben, und dessen sämmtliche Tangenten* (III, 2, a).
oder schlechthin:	
Irgend einem Punkte $\mathfrak{B}$, *welcher nicht in einer der drei Hauptgeraden* $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ *liegt*:	*Ein bestimmter Kegelschnitt* [$\mathfrak{B}_1$], *welcher dem Hauptdreiseit* $\mathfrak{z}_1 \mathfrak{y}_1 \mathfrak{x}_1$ *eingeschrieben ist*;
und also:	
[278] *Den gesammten Punkten, welche nicht in den drei Hauptgeraden* $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ *liegen*:	**[278]** *Die gesammten Kegelschnitte* [$\mathfrak{z}_1 \mathfrak{y}_1 \mathfrak{x}_1$], *welche dem Hauptdreiseit* $\mathfrak{z}_1 \mathfrak{y}_1 \mathfrak{x}_1$ *eingeschrieben sind;*
Den Punkten in den drei Hauptgeraden $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$*):	*Die Punkte in den drei Hauptgeraden* $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$*).
8) *Irgend einer Geraden* $\mathfrak{G}$, *d. h., der Schaar Punkte, die in irgend einer Geraden* $\mathfrak{G}$ *liegen*:	8) *Eine Schaar Kegelschnitte* [$\mathfrak{G}_1$], *d. h., alle Kegelschnitte, welche die drei Hauptgeraden* $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ *und eine bestimmte vierte Gerade* $\mathfrak{G}_1$ *berühren.*
9) *Jener besondern* (3) *Geraden* $\mathfrak{R}$:	9) *Die Schaar Parabeln* [$\mathfrak{R}_1$], *d. h., alle Parabeln, welche dem Hauptdreiseit* $\mathfrak{z}_1 \mathfrak{y}_1 \mathfrak{x}_1$ *eingeschrieben werden können.*

*) Und zwar sind die Geraden $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{x}_1$, in Ansehung der entsprechenden Punktenpaare, projectivisch.

10) *Da die Gerade* $\mathfrak{G}$ (8) *der besondern Geraden* $\mathfrak{R}$ *nur in einem einzigen Punkt begegnet:*

10) *So befindet sich unter der Schaar Kegelschnitte* [$\mathfrak{G}_1$] (*welche* 4 *Gerade* $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{G}_1$ *berühren*), *nur eine einzige Parabel.*

11) *Geht die Gerade* $\mathfrak{G}$ *durch einen der drei Hauptpunkte* $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$ (5):

U. s. w.

11) *So vereinigt sich die Gerade* $\mathfrak{G}_1$ *mit einer der drei Hauptgeraden* $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$, *die dann von der Schaar Kegelschnitte* [$\mathfrak{G}_1$] *in einem bestimmten Punkt berührt wird.* U. s. w.

B.

1) *Irgend zwei Strahlen a, b;*

dem durch sie bestimmten Punkt $\mathfrak{B}$, *d. h., ihrem Durchschnittspunkt;*

und dem durch sie und durch die Hauptgeraden $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ *bestimmten Kegelschnitts* [$\mathfrak{T}$]:

1) *Zwei bestimmte Strahlen* a_1, b_1;

der durch sie und durch die Hauptgeraden $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ *bestimmte Kegelschnitt* [$\mathfrak{B}_1$];

und der durch sie bestimmte Punkt, d. h., ihr Durchschnittspunkt $\mathfrak{T}_1$.

2) *Irgend einem Kegelschnitt* [$\mathfrak{T}$], (*der dem Hauptdreiseit* $\mathfrak{x}\mathfrak{s}\mathfrak{t}$ *eingeschrieben ist*);

[**279**] *irgend einen Punkt* $\mathfrak{P}$ *in dessen Umfang;*

und dem ihn in diesem Punkte berührenden Strahl a:

2) *Ein bestimmter Punkt* $\mathfrak{T}_1$;

[**279**] *ein bestimmter Kegelschnitt* [$\mathfrak{P}_1$], *der durch ihn geht* (*und dem Hauptdreiseit* $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1$ *eingeschrieben ist*;

und der in ihm von diesem Kegelschnitte berührte Strahl a_1.

3) *Irgend einem Kegelschnitt* [$\mathfrak{T}$]:

der Schaar Punkte $\mathfrak{P}$, *die in seinem Umfange liegen;*

und den gesammten Strahlen, die ihn berühren:

3) *Ein bestimmter Punkt* $\mathfrak{T}_1$;

die Schaar Kegelschnitte [$\mathfrak{P}_1$], *die durch ihn gehen;*

und die gesammten Strahlen des Strahlbüschels $\mathfrak{T}_1$.

4) *Da von der Schaar Punkte* $\mathfrak{P}$, *die in dem Kegelschnitte* [$\mathfrak{T}$] *liegen* (3), *im Allgemeinen und höchstens, zwei in die besondere Gerade* $\mathfrak{R}$ *fallen:*

4) *So sind unter der Schaar Kegelschnitte* [$\mathfrak{P}_1$], (*welche drei Gerade* $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ *berühren und durch einen Punkt* $\mathfrak{T}_1$ *gehen*), *im Allgemeinen und höchstens zwei Parabeln.*

5) *Da irgend zwei Kegelschnitte* [$\mathfrak{M}$], [$\mathfrak{N}$] (*die dem Dreiseit* $\mathfrak{x}\mathfrak{s}\mathfrak{t}$ *eingeschrieben sind*) *einander im Allgemeinen und höchstens in vier Punkten* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ *schneiden:*

U. s. w.

5) *So giebt es im Allgemeinen und höchstens vier Kegelschnitte* [$\mathfrak{a}_1$], [$\mathfrak{b}_1$], [$\mathfrak{c}_1$], [$\mathfrak{d}_1$], *welche durch zwei bestimmte Punkte* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$ *gehen* (*und drei Gerade* $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ *berühren*). U. s. w.

C.

1) *Irgend einem Kegelschnitt, der irgend zwei der drei Hauptgeraden* $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ *berührt, z. B. irgend*

1) *Ein bestimmter Kegelschnitt, der durch die entsprechenden zwei Hauptgeraden* ($\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$) *geht, also*

einem Kegelschnitt $[\mathfrak{x}\mathfrak{s}]$, *der* $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{s}$ *berührt; der Schaar Punkte* $\mathfrak{P}$, *die in seinem Umfange liegen; (und der Schaar Strahlen* a, *die ihn berühren)*:

2) *Da von der Schaar Punkte* $\mathfrak{P}$ (1) *des Kegelschnitts* $[\mathfrak{x}\mathfrak{s}]$, *im Allgemeinen und höchstens, zwei in der besondern Geraden* $\mathfrak{R}$ *liegen*:

[**280**] 3) *Da irgend zwei Kegelschnitte* $[\mathfrak{x}\mathfrak{s}]$ *einander im Allgemeinen in vier Punkten* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ *schneiden*:

U. s. w.

z. B. ein bestimmter Kegelschnitt $[\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1]$; *die Schaar Kegelschnitte* $[\mathfrak{P}_1]$, *die ihn berühren; (und die Schaar Strahlen* a_1, *die ihn (und diese Kegelschnitte) berühren)*.

2) *So sind unter der Schaar Kegelschnitte* $[\mathfrak{P}_1]$, *(die einen Kegelschnitt* $[\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1]$, *zwei Tangenten* $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$ *desselben, und eine dritte Gerade* $\mathfrak{x}_1$ *berühren), im Allgemeinen zwei Parabeln.*

[**280**] 3) *So können irgend zwei Kegelschnitte* $[\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1]$ *im Allgemeinen von vier bestimmten Kegelschnitten* $[\mathfrak{a}_1]$, $[\mathfrak{b}_1]$, $[\mathfrak{c}_1]$, $[\mathfrak{d}_1]$ *berührt werden.* U. s. w.

D.

1) *Irgend einer beliebigen Curve* C *des nten Grades.*

Da durch jeden der drei Hauptpunkte $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$ *im Allgemeinen* $n(n-1)$ *Strahlen gehen, welche die gegebene Curve* C *berühren*:

1) *Eine bestimmte Curve* C_1 *der* $2n(n-1)$*ten Classe* (*III*, 2, *b*).

So muss jede der drei Hauptgeraden $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ *im Allgemeinen* $n(n-1)$*mal von der genannten Curve* C_1 *berührt werden.*

U. s. w.

2) *Irgend einem beliebigen Kegelschnitt* C, *der keine der drei Hauptgeraden* $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ *berührt,*

der Schaar Punkte $\mathfrak{P}$, *die in seinem Umfange liegen, und der Schaar Strahlen* a, *die ihn in diesen Punkten berühren*:

3) *Irgend einem beliebigen Kegelschnitt* C, *welcher durch jeden der drei Hauptpunkte* $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$ *geht*:

U. s. w.

U. s. w.

2) *Eine bestimmte Curve* C_1 *4ter Classe, die jede der drei Hauptgeraden* $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ *doppelt berührt;*

die Schaar Kegelschnitte $\mathfrak{P}_1$, *die sie berühren, und die Schaar Tangenten* a_1, *die sie mit diesen (in den Berührungspunkten) gemein hat.*

3) *Eine solche Curve* C_1 *4ter Classe, die drei singuläre Punkte hat, in denen sie von den drei Hauptgeraden* $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ *berührt wird, und die in einer Geraden liegen.*

Hiernach sieht man, wie die gegenseitige Beziehung der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, (oder der Strahlbüschel D, D_1), mit der gegenseitigen Beziehung der Ebenen E, E_1 (II) einerseits übereinstimmt, und andererseits sich von dieser unterscheidet; nämlich sie stimmt dem Umfange nach ganz mit der letzteren überein, so dass alle jene Eigenschaften, Sätze, Aufgaben etc., von welchen oben (II, 3) Erwähnung geschah, sich eben so vielfältig durch sie umwandeln lassen, und dass überhaupt alle daselbst gemachten Bemerkungen auch auf sie Anwendung

[**281**] finden; dagegen aber unterscheidet sie sich von der andern durch die Art der entsprechenden Elemente, und zwar dergestalt, dass, wenn z. B. irgend ein Satz über Figuren in den Ebenen E, E_1 gegeben ist, dann der entsprechende Satz in den Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ (oder in den Strahlbüscheln D, D_1) unmittelbar daraus abgeleitet werden kann, wenn man hier überall: Gerade, Punkt, Hauptdreiseit, eingeschriebener Kegelschnitt, u. s. w. (oder bei D, D_1: Ebene, Strahl, Hauptdreiflach, eingeschriebene Kegelfläche etc.) setzt, wo dort, bei E, E_1, respective: Punkt, Gerade, Hauptdreieck, umschriebener Kegelschnitt u. s. w. steht; und auch umgekehrt. Das Zugleichstattfinden der einander entsprechenden Eigenschaften und Sätze in den verschiedenartigen und verschiedenartig auf einander bezogenen Gebilde-Paaren E und E_1, D und D_1, oder $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$, ist eine nothwendige und natürliche Folge davon, dass die beiderseitigen Beziehungen durch das Strahlsystem [$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$] bewirkt worden. Aus denselben Gründen findet übrigens auch sogar eine Abhängigkeit zwischen den Eigenschaften irgend zweier ungleichartiger Gebilde statt, was, wie folgt, gezeigt werden kann.

2) Man kann nämlich auch zwei ungleichartige Gebilde, z. B. die Ebene E und den Strahlbüschel D_1, mittelst des Strahlsystems [$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$] auf einander beziehen. Werden zu diesem Endzweck die Punkte, in welchen E von den Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ getroffen wird, wie oben (II), durch r, s, der durch sie gehende Strahl durch x; und werden andererseits die Ebenen in D_1, welche durch die Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ gehen, wie oben (III), durch z_1, y_1, ihre Durchschnittslinie durch t_1; wird ferner der Punkt, in welchem E vom Strahle t_1 getroffen wird, durch t, und werden die Geraden, in welchen sie von den Ebenen [**282**] z_1, y_1 geschnitten wird, durch z, y; und wird endlich diejenige Ebene in D_1, welche durch den Strahl x geht, durch x_1, und werden die Strahlen, in welchen sie die Ebenen z_1, y_1 schneiden (oder welche durch jene Punkte r, s gehen), durch r_1, s_1 bezeichnet: so kann, in ähnlichem Sinne, wie oben (II und III), das Dreieck rst Hauptdreieck der Ebene E, und das Dreiflach $z_1y_1x_1$ Hauptdreiflach des Strahlbüschels D_1, und ferner können z. B. derjenige Punkt $\mathfrak{a}$ in E und diejenige Ebene α_1 in D_1, welche beide durch irgend einen und denselben Strahl a des Strahlsystems [$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$] bestimmt werden, entsprechende Elemente der Gebilde

E, D_1 genannt werden, u. s. w., so dass sich alsdann zwischen diesen zwei Gebilden eine analoge Beziehungstabelle aufstellen lässt, wie oben zwischen gleichartigen Gebilde-Paaren, und was etwa durch folgende einzelne Beispiele erläutert werden mag.

α) Den Elementen und Gebilden

in der Ebene E ... entsprechen ...	im Strahlbüschel D_1:
1) *Irgend einem Punkte* $\mathfrak{a}$ (im Allgemeinen):	1) *Eine bestimmte Ebene* α_1.
2) *Irgend einer Geraden* A, *d. h., den gesammten Punkten, die in irgend einer Geraden* A *liegen, welche durch keinen der drei Hauptpunkte* r, s, t *geht*:	2) *Eine bestimmte Kegelfläche* $[A_1]$, *d. h., die gesammten Berührungsebenen einer Kegelfläche zweiten Grades, welche dem Hauptdreiflach* $z_1 y_1 x_1$ *eingeschrieben ist.*
3) *Irgend einem Strahlbüschel* B, *d. h., den gesammten Geraden, die durch irgend einen Punkt* B *gehen, welcher in keiner der drei Hauptgeraden* z, y, x *liegt:*	3) *Eine bestimmte Schaar Kegelflächen* $[B_1]$ *zweiten Grades, welche ausser den drei Hauptebenen* z_1, y_1, x_1 *eine bestimmte vierte Ebene* B_1 *berühren.*
4) *Irgend einem dem Hauptdreieck* rst *umschriebenen Kegelschnitt* $[A]$:	4) *Ein bestimmter Strahl* A_1 (oder Ebenenbüschel A_1), *der in keiner der drei Hauptebenen* z_1, y_1, x_1 *liegt.*
[283] 5) *Irgend einem Kegelschnitt, welcher durch irgend zwei Hauptpunkte geht, etwa einem Kegelschnitt* $[rs]$:	**[283]** 5) *Eine Kegelfläche 2ten Grades, welche die entsprechenden zwei Hauptebenen berührt, also eine Kegelfläche* $[z_1 y_1]$.

Oder denkt man sich nun wieder die Ebene $\mathfrak{E}_1$, welche den Strahlbüschel D_1 schneidet, und behält die oben (1) für die Hauptelemente derselben festgesetzten Bezeichnungen und Benennungen bei, so hat man zwischen den Ebenen E, $\mathfrak{E}_1$ folgende gegenseitige Beziehung.

β) Den Elementen und Gebilden

in der Ebene E ... entsprechen ...	in der Ebene $\mathfrak{E}_1$:
1) *Irgend einem Punkte* $\mathfrak{a}$, *im Allgemeinen*:	1) *Irgend eine bestimmte Gerade* $\mathfrak{a}_1$.
2) *Den gesammten Punkten, welche in einer der drei Hauptgeraden* x, y, z *liegen*:	2) *Eine und dieselbe Gerade, nämlich eine der drei Hauptgeraden* $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$.
3) *Den einzelnen Hauptpunkten* r, s, t:	3) *Die sämmtlichen Strahlen der Hauptstrahlbüschel* $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{t}_1$.
4) *Einem gewissen besondern Punkt* R:	4) *Die unendlich entfernte Gerade* $\mathfrak{N}_1$.
5) *Irgend einer Geraden* G, *welche durch keinen der drei*	5) *Ein bestimmter Kegelschnitt* $[\mathfrak{G}_1]$, *welcher dem Hauptdreiseit*

Hauptpunkte r, s, t geht; der Schaar Punkte, die in ihr liegen:

$\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1$ *eingeschrieben ist; die Schaar Gerader, die ihn berühren.*

Daher:

Den gesammten Geraden (in der Ebene):

6) Der unendlich entfernten Geraden $\mathfrak{O}$:

7) *Irgend einer Geraden, welche durch einen der drei Hauptpunkte r, s, t geht; der Schaar Punkte, die in ihr liegen:*

Die gesammten Kegelschnitte $[\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1]$.

6) Ein bestimmter besonderer Kegelschnitt $[\mathfrak{O}_1]$.

7) *Ein bestimmter Punkt, der in einer der drei Hauptgeraden* $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ *liegt; die Schaar Gerader, die durch ihn gehen.*

Oder:

[284] *Irgend einer Geraden, welche durch einen der drei Hauptpunkte r, s, t geht:*

[284] *Ein bestimmter Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt in einer der drei Hauptgeraden* $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ *liegt.*

Und also:

Den gesammten Strahlen eines der drei Strahlbüschel r, s, t:

8) *Irgend einem Strahlbüschel B, d. h., den gesammten Geraden, welche durch irgend einen Punkt B gehen, (der in keiner der drei Hauptgeraden z, y, x liegt):*

9) *Dem besondern Strahlbüschel R* (4):

10) *Da von den Strahlen des Strahlbüschels B* (8) *nur ein einziger durch den besondern Punkt R geht:*

11) *Irgend einem Kegelschnitt [T], welcher dem Hauptdreieck rst umschrieben ist; der Schaar Punkte, welche in ihm liegen; und der Schaar Gerader, welche ihn berühren:*

Die gesammten Punkte der entsprechenden Hauptgeraden $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$.

8) *Eine Schaar Kegelschnitte* $[\mathfrak{B}_1]$, *d. h., alle Kegelschnitte, welche ausser den drei Hauptgeraden* $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ *noch eine bestimmte vierte Gerade* $\mathfrak{B}_1$ *berühren.*

9) *Die Schaar Parabeln* $[\mathfrak{R}_1]$, *(welche dem Hauptdreiseit* $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1$ *eingeschrieben werden können).*

10) *So befindet sich unter der Schaar Kegelschnitte* $[\mathfrak{B}_1]$, *welche irgend vier Gerade* $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{B}_1$ *berühren, nur eine einzige Parabel* (9).

11) *Ein bestimmter Punkt* $\mathfrak{T}_1$; *die Schaar Gerader, die durch ihn gehen* (d. i. der Strahlbüschel $\mathfrak{T}_1$); *und die Schaar Kegelschnitte* $[\mathfrak{T}_1]$, *die durch ihn gehen (und dem Hauptdreiseit* $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1$ *eingeschrieben sind).*

Daher:

Den gesammten Kegelschnitten [rst]:

12) *Da der Kegelschnitt [T]* (11), *im Allgemeinen und höchstens, von zwei Strahlen des Strahlbüschels R* (9) *berührt wird:*

Die gesammten Punkte.

12) *So sind unter der Schaar Kegelschnitte* $[\mathfrak{T}_1]$, *welche durch einen Punkt* $\mathfrak{T}_1$ *gehen und drei Gerade* $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ *berühren, im Allgemeinen, zwei Parabeln* $[\mathfrak{R}_1]$.

13) *Der Schaar Kegelschnitte* [P], *welche durch irgend einen Punkt P gehen, und* **[285]** *dem Hauptdreieck rst umschrieben sind*:

14) *Der Schaar Kegelschnitte* [G], *welche irgend eine Gerade G berühren (und dem Hauptdreieck rst umschrieben sind)*:

15) *Der Schaar Parabeln* [Q], *die dem Hauptdreieck rst umschrieben werden können*:

16) *Unter der Schaar Kegelschnitte* [P], *welche durch vier gegebene Punkte r, s, t, P gehen* (13), *befinden sich im Allgemeinen zwei Parabeln*:

17) *Da irgend zwei Kegelschnitte* [M], [N], (*welche dem Hauptdreieck rst umschrieben sind*), *im Allgemeinen und höchstens, von vier Geraden a, b, c, d berührt werden*:

18) *Durch drei gegebene Punkte r, s, t gehen, im Allgemeinen und höchstens, vier Kegelschnitte* [a], [b], [c], [d], *wovon jeder irgend zwei gegebene Gerade M, N berührt.*

U. s. w.

13) *Die Schaar Punkte* $\mathfrak{P}_1$, *welche in irgend einer Geraden* $\mathfrak{P}_1$ *liegen*, (*die durch* **[285]** *keinen der drei Hauptpunkte* $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{t}_1$ *geht*).

14) *Die Schaar Punkte* $\mathfrak{G}_1$, *welche in einem bestimmten Kegelschnitt* [G_1] *liegen*, (*der dem Hauptdreiseit* $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1$ *eingeschrieben ist*).

15) *Die Schaar Punkte* $\mathfrak{Q}_1$ *des besondern* (*dem Hauptdreiseit* $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1$ *eingeschriebenen*) *Kegelschnitts* [$\mathfrak{Q}_1$].

16) *Weil die Gerade* $\mathfrak{P}_1$ *mit dem Kegelschnitt* [$\mathfrak{Q}_1$], *im Allgemeinen und höchstens, zwei Punkte gemein hat.*

17) *So giebt es, im Allgemeinen und höchstens, vier Kegelschnitte* [$\mathfrak{a}_1$], [$\mathfrak{b}_1$], [$\mathfrak{c}_1$], [$\mathfrak{d}_1$], *welche drei gegebene Gerade* $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ *berühren, und durch zwei gegebene Punkte* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$ *gehen.*

18) *Weil irgend zwei Kegelschnitte* [$\mathfrak{M}_1$], [$\mathfrak{N}_1$], *welche dem Hauptdreiseit* $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1$ *eingeschrieben sind, einander, im Allgemeinen und höchstens, in irgend vier Punkten* $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ *schneiden.*

U. s. w.

Wenn insbesondere die Ebene $\mathfrak{E}_1$ mit der Ebene E zusammenfällt, dann decken sich das Hauptdreiseit $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1$ und das Hauptdreieck rst, und es finden sodann einige merkwürdige Umstände statt, welche später berücksichtigt werden mögen. Eben so giebt es eine besondere gegenseitige Lage für die Ebene E und für den Strahlbüschel D_1, durch welche eigenthümliche interessante Umstände verursacht werden, und welche gehörigen Orts (im zweiten Abschnitte) ausführlich entwickelt werden sollen.

[286] Es kann nun ferner noch erinnert werden, dass, da alles, was so eben über die zwei Ebenen E, $\mathfrak{E}_1$ bemerkt worden, ähnlicherweise von zwei Strahlbüscheln D, $\mathfrak{D}_1$, oder da überhaupt alles, was in den vorstehenden Betrachtungen über die Ebenenpaare E und E_1 (II), $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$ (1), E und $\mathfrak{E}_1$ (2) gesagt und angedeutet worden, ähnlicherweise von Strahlbüschelpaaren D und D_1 (III), $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$, D und $\mathfrak{D}_1$

gilt, dass also, sage ich, die gesammten Resultate, welche in den vorstehenden Betrachtungen (von II bis hierher) theils entwickelt, theils bloss angedeutet worden, sich mittelst der Strahlbüschelpaare D und D_1, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$, D und $\mathfrak{D}_1$ auf die Kugelfläche übertragen lassen (siehe Anmerkung § 34 und § 48).

V. Bei den vorstehenden Betrachtungen sind, ähnlicherweise wie bei vielen früheren Betrachtungen, verschiedene besondere Fälle möglich, die nämlich dadurch entstehen, dass man den Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ und den Gebilden E und E_1, D und D_1, u. s. w., eigenthümliche Lage zukommen lässt, dass man z. B. die eine oder andere Axe, oder das eine oder andere Gebilde in unendliche Ferne versetzt, u. s. w.; dadurch erhalten dann auch die Resultate eigenthümliche Aussagen, wodurch sie oft mehr Interesse erregen, als die allgemeinen Resultate. In der Folge wird sich Gelegenheit darbieten, alle diese Fälle zu erörtern, wo alsdann, nach vorangegangener Entwickelung der Eigenschaften projectivischer Ebenen und Strahlbüschel, die Masse der Resultate etwas ausgedehnter und umfassender sein wird. Hier mag zum Schlusse mit den betrachteten Figuren noch folgendes Manöver vorgenommen werden, wodurch einige Eigenschaften, die vorhin mit Stillschweigen übergangen worden, klarer und bestimmter hervortreten, und wodurch man eines [287] Theils eine freiere Uebersicht über die vorhergehenden Betrachtungen, über deren Zusammenhang und über die daraus entsprungenen Resultate gewinnt.

Das den obigen Betrachtungen zu Grunde liegende Strahlsystem $[\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1]$, welches einerseits durch zwei Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, und andererseits durch zwei Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ erzeugt wird, indem nämlich jeder Strahl desselben sowohl durch irgend zwei Punkte dieser Geraden, als durch irgend zwei Ebenen dieser Ebenenbüschel bestimmt wird, kann durch Veränderung der Lage dieser Gebilde in folgende besondere Fälle übergehen. Man kann nämlich einerseits die Geraden, für sich betrachtet, so legen, dass sie einander schneiden, mithin in irgend einer Ebene liegen, die durch E_2 bezeichnet werden mag, wodurch dann offenbar alle Strahlen in diese Ebene hineingezogen werden, und zwar dergestalt, dass sie genau die gesammten Strahlen (Geraden) dieser Ebene sind; und andererseits kann man die Ebenenbüschel, für sich betrachtet, so legen, dass ihre Axen sich schneiden, dass sie mithin in irgend einem Strahlbüschel liegen, der durch D_2 bezeichnet werden mag, wodurch dann offenbar alle jene Strahlen in diesen Strahlbüschel zusammengedrängt werden, und zwar dergestalt, dass sie genau, oder einfach, die gesammten Strahlen dieses Strahlbüschels sind. Denkt man sich nun nebst diesen zwei besondern Strahlsystemen E und D_2 auch noch zugleich jenes ursprüngliche Strahlsystem $[\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1]$, und bezeichnet das letztere, um anzudeuten, dass es im Raume beliebig liege, durch R, so findet alsdann zwischen den drei Strahlsystemen R, E_2, D_2 die Beziehung statt, dass jedem beliebigen Strahl in einem derselben irgend ein bestimmter Strahl, sowohl in dem einen, als in dem andern, der zwei übrigen (Strahlsysteme) entspricht; z. B. irgend einem Strahl a, in R, welcher die [288] Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ trifft, und in welchem hich die zwei Ebenen α, α_1 der Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ schneiden, entspricht in E_2 ein bestimmter Strahl $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, und in D_2 ein bestimmter Strahl $\alpha\alpha_1$ (d. i. die Durchschnittslinie der Ebenen α, α_1). Daher ist leicht zu erachten, dass gewisse Eigenschaften, welche einem der drei Strahlsysteme zukommen, auch, in irgend einer entsprechenden Form, auf die jedesmaligen beiden übrigen Systeme übergehen müssen, und zwar beruht diese Abhängigkeit vornehmlich auf den projectivischen Eigenschaften der Grundgebilde, d. h., auf den vielfältigen projectivischen Beziehungen der Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ und der Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$. Man denke sich z. B. im ersten Strahlsystem R irgend eine Schaar Strahlen, welche in einem einfachen Hyperboloïd liegen, so werden durch sie einerseits die Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ und andererseits die Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ projectivisch auf einander bezogen, und daher werden, im Allgemeinen, die ihnen entsprechenden Strahlen in E_2 einen Kegelschnitt umhüllen, welcher die Hauptgeraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ berührt (§ 38, IV), und die ihnen entsprechenden Strahlen in D_2 werden in einer Kegelfläche zweiten Grades liegen, welche durch die Axen (der Hauptebenenbüschel) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ geht (§ 38, II). Werden diejenigen zwei Punkte der Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in E_2, welche in ihrem gegenseitigen Durchschnitte vereinigt sind, durch $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$ bezeichnet, und werden diejenigen zwei Ebenen der Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in D_2, welche auf einander fallen, durch ε, ε_1 bezeichnet, und wird ferner angenommen, es sei e derjenige Strahl in R, welcher zugleich einerseits die Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$ der Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ verbindet, und andererseits die Durchschnittslinie der Ebenen ε, ε_1 der Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ ist, so werden also, im Falle dieser Strahl e zu der Schaar Strahlen des genannten Hyperboloïds gehört, [**289**] einerseits die Hauptgeraden in E_2, und andererseits die Hauptebenenbüschel in D_2, allemal perspectivisch sein, so dass folglich in jedem solchen Falle dem Hyperboloïd in R irgend ein Punkt B (der Projectionspunkt der Hauptgeraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$) in E_2, und irgend eine Ebene $\mathfrak{B}$ (der perspectivische Durchschnitt der Hauptebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$) in D_2 entspricht. Einem Hyperboloïd aber, welches nicht durch den Strahl e geht, wird in E_2 irgend ein Kegelschnitt, welcher dem Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ eingeschrieben, und in D_2 irgend eine Kegelfläche zweiten Grades, welche dem Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ umschrieben ist, entsprechen. Es ist klar, dass, wenn man umgekehrt die Hauptgeraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in E_2 von irgend einem Punkte B aus perspectivisch, oder mittelst eines sie berührenden Kegelschnitts [$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$] projectivisch auf einander bezieht, dass dann diesem Punkt, oder diesem Kegelschnitt, irgend ein einfaches Hyperboloïd in R entspricht, welches im ersten Falle durch den Strahl e geht; und dass Entsprechendes in Hinsicht der Hauptebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in D_2 stattfindet. Demnach entsprechen den gesammten einfachen Hyperboloïden in R, welche den Strahl e gemein haben, einerseits die gesammten Punkte der Ebene E_2, und andererseits die gesammten Ebenen des Strahlbüschels D_2; den gesammten Hyperboloïden in R aber, welche nicht durch den Strahl e gehen, entsprechen in E_2 die gesammten Kegelschnitte, welche dem Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ eingeschrieben, und in D_2 die gesammten Kegelflächen zweiten Grades, welche dem Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ umschrieben sind. U. s. w.

Zufolge dieser Betrachtung lassen sich also zwischen den drei Strahlsystemen R, E_2, D_2 ähnliche Beziehungstabellen aufstellen, wie oben in (II, III u. IV). Die Form dieses Papiers gestattet aber nicht, die entsprechenden Eigenschaften aller drei Systeme neben [**290**] einander zu stellen, wie es, vermöge ihres Zusammenhanges, eigentlich sein sollte. Sie sollen daher nur paarweise neben einander gesetzt werden, und zwar nur die zwei Paare R und E_2, E_2 und D_2. Die Fundamentaleigenschaften, auf denen die Beziehung dieser zwei Paare beruht, sind folgende.

α) Den Elementen und Figuren

in E_2' ... entsprechen ... in R:

1) *Irgend einem Strahle a*:	1) *Irgend ein Strahl* $\mathfrak{a}$.
(*Dem unendlich entfernten Strahle Q*:)	(*Der unendlich entfernte Strahl* $\mathfrak{Q}$.)
2) *Irgend einem Punkte B, als Mittelpunkt eines Strahlbüschels angesehen*:	2) *Irgend ein einfaches Hyperboloïd [B], welches durch* ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ und) *den Strahl e geht.*
3) *Also den gesammten Punkten*:	3) *Die gesammten einfachen Hyperboloïde, welche die drei Strahlen* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, *e gemein haben.*
4) *Irgend einer Geraden G, das heisst, der Schaar Punkte, welche in ihr liegen*:	4) *Eine Schaar einfache Hyperboloïde [G], welche, ausser* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, *e, irgend einen vierten Strahl G gemein haben.*
(*Der unendlich entfernten Geraden Q*:)	(*Die gesammten hyperbolischen Paraboloïde, welche durch die drei Strahlen* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, *e gehen.*)
5) *Irgend einem Kegelschnitt* [$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$], *welcher die Hauptgeraden* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ *berührt*:	5) *Irgend ein einfaches Hyperboloïd* [$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$].
6) *Irgend einer Curve C; irgend einem Punkte P in derselben; und der sie in demselben berührenden Tangente T*:	6) *Irgend eine geradlinige Fläche C; irgend ein sie berührendes einfaches Hyperboloïd P; und der Strahl, längs welchem es dieselbe berührt.*
U. s. w.	U. s. w.

β) Den Elementen und Figuren

in E_2 ... entsprechen ... in D_2:

1) *Jedem Strahl* (*Geraden*) *a*:	1) *Irgend ein Strahl* $\mathfrak{a}$.
[**291**] 2) *Jedem Punkt, oder Strahlbüschel B*:	[**291**] 2) *Eine Ebene, oder ein ebener Strahlbüschel* $\mathfrak{B}$.
3) *Jeder Geraden G, als Gebilde, eine Schaar Punkte enthaltend, angesehen:*	3) *Irgend ein Ebenenbüschel* $\mathfrak{G}$.
(*Der unendlich entfernten Geraden Q*:)	(*Ein bestimmter Ebenenbüschel* $\mathfrak{Q}$.)
4) *Einem Kegelschnitt* [$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$], *der die Hauptgeraden* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ *berührt*:	4) *Eine Kegelfläche* [$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$] *zweiten Grades, die durch die Hauptstrahlen* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ *geht.*
5) *Irgend einem beliebigen Kegelschnitte C*:	5) *Irgend eine Kegelfläche zweiten Grades* $\mathfrak{C}$.
6) *Irgend einer beliebigen Curve C; irgend einem Punkte B derselben; und der zugehörigen Tangente T*:	6) *Irgend eine bestimmte Kegelfläche* $\mathfrak{C}$; *irgend eine sie berührende Ebene* $\mathfrak{B}$; *und ihr Berührungsstrahl* $\mathfrak{T}$.
U. s. w.	U. s. w.

Wird der Strahlbüschel D_2 durch irgend eine Ebene $\mathfrak{E}_2$ geschnitten, so beruht die Beziehung der Ebenen E_2 und $\mathfrak{E}_2$ auf folgenden Fundamentaleigenschaften.

γ) Den Elementen und Figuren

in E_2 ... entsprechen ...	in $\mathfrak{E}_2$:
1) *Jedem Punkt, oder Strahlbüschel B:*	1) *Ein Strahl, oder eine Gerade $\mathfrak{B}$.*
2) *Jedem Strahl, oder jeder Geraden G:*	2) *Ein Punkt, oder ein Strahlbüschel $\mathfrak{G}$.*
(*Der unendlich entfernten Geraden Q*):	(*Ein bestimmter Punkt $\mathfrak{Q}$.*)
3) *Jedem Punkt B, und irgend einem durch ihn gehenden Strahle a:*	3) *Eine Gerade $\mathfrak{B}$, und irgend ein in ihr liegender Punkt $\mathfrak{a}$.*
4) *Irgend einer Curve C; irgend einem Punkt P derselben; und der Tangente T in diesem:*	4) *Irgend eine Curve $\mathfrak{C}$; irgend eine Tangente $\mathfrak{P}$ derselben; und ihr Berührungspunkt $\mathfrak{T}$.*

Daher:

5) *Irgend einer Curve C vom $n$ten Grade:* U. s. w.	5) *Eine Curve $\mathfrak{C}$ vom $n(n-1)$-ten Grade, oder von der $n$ten Classe.* U. s. w.

[**292**] Wenn bei den Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, in D_2, wie vorhin angenommen worden, die Ebenen ε, ε_1 aufeinander liegen, dagegen die Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, in E_2, so gelegt werden, dass statt der Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$ irgend zwei andere Punkte, etwa $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, in ihrem Durchschnitte vereinigt sind, und wenn sodann die gegenseitige Beziehung der Strahlsysteme D_2, E_2, in Rücksicht auf ihre entsprechenden Elemente, wie diese bei ihrem ursprünglichen Zusammenhange in R bestimmt werden, betrachtet wird, so ist diese Beziehung gleich derjenigen, welche zwischen den obigen Gebilden E, D_1 (IV, 2, α) stattfand. Das vorstehende Beziehungssystem (γ) ist daher nur ein besonderer Fall des obigen (IV, 2, β). (Ebenso erhält man, wenn man das Strahlsystem R durch irgend eine Ebene E_1 schneidet, ein Beziehungssystem zwischen den Ebenen E_2 und E_1, welches ein besonderer Fall des obigen (IV, 2, β) ist.)

Das vorstehende Beziehungssystem (γ) enthält übrigens die Fundamentalsätze, auf denen die sogenannte »*Théorie des polaires reciproques*« beruht, welche Theorie gewöhnlich mittelst eines Hülfskegelschnitts dargestellt wird (§ 44), wobei nothwendigerweise beide Systeme von Figuren in einer und derselben Ebene liegen (d. h. die Ebenen E_2, $\mathfrak{E}_2$ liegen aufeinander). Hier stellen sich diese Eigenschaften auf allgemeinere Weise, unabhängig vom Kegelschnitt, dar, und zwar, wie schon bemerkt worden, nur als besonderer Fall des obigen Beziehungssystems (IV, 2, β). Indessen gebührt das Verdienst, die genannte Theorie zuerst freier, unabhängig vom Kegelschnitt, aufgefasst zu haben, dem gründlichen Forscher *Möbius* (Barycentr. Calcül).

Aus der vorstehenden Betrachtung sieht man, dass dem Strahlsystem R, welches bei den obigen Betrachtungen [293] (II, III u. IV) nur als Mittel diente, selbst alle Eigenschaften auf bestimmte entsprechende Weise zukommen, welche dort von anderen Gebilden entwickelt und angedeutet worden. In der That sind die Figuren in den obigen Ebenen E, E_1 (II) als beliebige Schnitte (dieser Ebenen und) des Strahlsystems R anzusehen, so dass also ihre Eigenschaften nur als Folgen der Eigenschaften des letzteren erscheinen; ebenso sind die Strahlbüschel D, D_1 (III) nur mittelst der Eigenschaften des Strahlsystems R aufeinander bezogen worden, u. s. w. Da hiernach gewisse netzgewebeartigen Eigenschaften (fast sämmtliche Resultate des ersten und dritten Kapitels) in jedem der 9 Gebilde E, E_1, D, D_1, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_1$ und R auf bestimmte entsprechende Weise stattfinden: so sind also die Eigenschaften des Strahlsystems R keine eigentlich räumlichen, wiewohl dasselbe den ganzen Raum erfüllt, sondern sie sind bloss solche, welche ihrem wahren Wesen nach der Ebene (E), oder dem Strahlbüschel (D) angehören. (Von eigentlich räumlichen Eigenschaften der Art wird im dritten und vierten Abschnitte die Rede sein.) Auch ist, zufolge der vorstehenden Betrachtung, das Strahlsystem R in der That einerseits als eine durch den ganzen Raum ausgebreitete Ebene E_2, und andererseits als ein aufgelöster, durch den ganzen Raum ausgestreuter Strahlbüschel D_2 anzusehen. In diesem Sinne lassen sich übrigens auch jene früheren Gebilde E, E_1, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, D, D_1, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_1$ als Umwandlungen der Strahlsysteme E_2 und D_2 (oder des Strahlsystems R) ansehen, wodurch der Zusammenhang aller dieser Gebilde von einer neuen Seite sich offenbart, und zwar wie folgt.

Werden nämlich die zwei Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, so wie sie hier oben in eine Ebene E_2 gelegt worden, zum [294] zweiten Mal in dieselbe, oder in irgend eine andere Ebene E_3 gelegt, jedoch so, dass nicht die nämlichen zwei Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$ in ihrem Durchschnitte vereinigt sind, wie das erste Mal, so findet zwischen den Strahlsystemen E_2, E_3, bis auf einige Nebenumstände, offenbar dieselbe Beziehung statt, wie oben zwischen den Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ (IV, 1). Bezeichnet man die zwei ebenen Strahlbüschel, in welchen die oben genannte Ebene $\mathfrak{E}_2$ (γ) die Hauptebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, in D_2, schneidet, durch $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, und denkt man sich dieselben zum zweiten Mal (in derselben, oder) in irgend einer andern Ebene $\mathfrak{E}_3$ so gelegt, dass nicht mehr die nämlichen zwei Strahlen derselben vereinigt sind, wie dort in $\mathfrak{E}_2$, so findet zwischen den Ebenen $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$, in Ansehung ihrer entsprechenden Elemente, ähnliche Beziehung statt, wie oben zwischen den Ebenen E, E_1 (II). Entsprechendes findet statt, wenn man die obigen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in zwei verschiedenen Lagen, in einem und demselben, oder in zwei verschiedenen Strahlbüscheln D_2, D_3, festhält und aufeinander bezieht. In dieser Hinsicht hätten also alle vorhergehenden Beziehungssysteme unmittelbar an die obigen Fundamentalsätze (§ 38) angeschlossen werden können. Im fünften Abschnitt wird diese letzte Betrachtungsweise ausführlicher erörtert und mit Erfolg angewandt werden.

Zum Schlusse bemerke ich nochmals, dass alle vorhergehenden Beziehungssysteme auf verschiedene andere, zum Theil einfachere und leichter zu fassende Weisen erzeugt und betrachtet werden können, wobei eines Theils ebenfalls projectivische Eigenschaften (wie hier oben), andern Theils aber andere Bestimmungen zur Grundlage dienen, was durch die späteren Entwickelungen ausführlich gezeigt werden wird. Es werden alsdann die Beziehungssysteme in solcher Allgemeinheit [**295**] dargestellt, dass sie auch diejenigen Fälle umfassen, wo einige von den Hauptelementen (Hauptpunkte, Hauptgerade u. s. w., siehe oben II, III und IV), welche bei der gegenwärtigen Betrachtung immer reell waren, imaginär sind. Auch werden dann ähnliche Beziehungssysteme im Raume vorkommen, wo namentlich in gewissen besondern Fällen zwei Räume so aufeinander bezogen werden, dass jeder Ebene im einen Raume irgend eine Fläche zweiten Grades im andern Raume entspricht, wodurch man sodann in Stand gesetzt wird, mit Leichtigkeit alle Flächen zweiten Grades unter gewissen Bedingungen zu erzeugen, und ihre Eigenschaften aus den Eigenschaften der ihnen entsprechenden Ebenen abzuleiten*).

[296]

Anhang.

Aufgaben und Lehrsätze.

60. Die nachfolgenden Aufgaben und Lehrsätze sind zu dem Zwecke hierher gesetzt, um denjenigen Lesern, welche sich selbstthätig mit der in diesem Werke aufgestellten Methode beschäftigen wollen, Gelegenheit zu geben, sich an zweckmässigen Beispielen zu üben. Sollten sich in der That Liebhaber finden, welche dem einen oder andern dieser Sätze ihre Aufmerksamkeit mit Erfolg schenkten, oder welche selbst andere, dahin gehörige, Sätze aufsuchten und bewiesen, und sollte ihnen daran gelegen sein, sie mir mitzutheilen, um sie bekannt zu machen, so würde ich gern bei der nächsten schicklichen Gelegenheit darauf Rücksicht nehmen, oder, im Falle sie nach einer andern Methode behandelt, aber von allgemeinem Interesse wären, würde ich sie Herrn *Crelle* übergeben und ihn ersuchen, dieselben in sein Journal für

*) In Bezug auf die gegenwärtige Betrachtung mögen hier noch folgende Beispiele von besondern Beziehungssystemen erwähnt werden. Zufolge jedes der zwei ersten (neben einander stehenden) Sätze in (§ 46, I) hat man nämlich ein Beziehungssystem zwischen zwei aufeinander liegend gedachten Ebenen, wo z. B. nach dem Satze rechts die Beziehung darin besteht, dass jedem beliebigen Punkte B_2, in der einen Ebene, irgend ein bestimmter Kegelschnitt $[BB_1]$, in der andern Ebene, entspricht, welcher durch drei bestimmte feste Punkte B, B_1, (AA_1) geht; u. s. w. Eine andere Art, wodurch solche besondere Beziehungssysteme zu Stande gebracht werden, habe ich bereits im Jahre 1828 in einzelnen Lehrsätzen angedeutet (Journal für Mathematik, Bd. III, S. 211, Lehrs. 22—25). — Wie auf diese Weise andere, zusammengesetztere Systeme der Art aufgestellt werden können, ist leicht zu sehen. Nämlich durch jedes Porisma, worin z. B. die Abhängigkeit zweier Punkte von einander so beschaffen ist, dass, während der eine sich längs irgend einer Geraden (oder Curve) bewegt, der andere irgend eine bestimmte Curve durchläuft, entsteht ein solches Beziehungssystem; u. s. w.

Mathematik aufzunehmen. Die Zusendungen müssten jedoch, wie es sich von selbst versteht, portofrei geschehen, und könnten nach Belieben an den Herrn Redakteur des genannten Journals oder an mich adressirt werden.

---

1) Wenn in einer Geraden A vier harmonische Punkte und in einem ebenen Strahlbüschel B vier harmonische Strahlen gegeben sind, so sind die zwei Gebilde A, B in Ansehung dieser gegebenen Elemente auf acht verschiedene Arten projectivisch (§ 8, 1, β), und können, in Rücksicht auf jede Art, in perspectivische Lage gebracht werden (§ 6). Wenn nun in einer Ebene die Lage

der Geraden A als fest angenommen und der Strahlbüschel B auf [297] alle Arten mit ihr perspectivisch gelegt wird, welche gegenseitige Beziehung haben dann die 8 (oder 16) Punkte, in welche sein Mittelpunkt fällt?

des Strahlbüschels B als fest angenommen und die Gerade A [297] auf alle Arten mit ihm perspectivisch gelegt wird, welche gegenseitige Beziehung haben dann die 8 (oder 16) Geraden, in welche sie zu liegen kommt?

2) Die der vorstehenden Aufgabe (1) entsprechende Aufgabe im Strahlbüschel D, wenn nämlich hier in einem ebenen Strahlbüschel $\mathfrak{B}$ und in einem Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ vier harmonische Elemente gegeben sind (§ 53, 15).

3) Wenn in einer Ebene zwei beliebige Gerade A, A_1 und in jeder irgend vier harmonische Punkte gegeben sind, so bestimmen die letztern, paarweise genommen, 16 Strahlen S, diese schneiden sich in 72 Punkten P, u. s. w.; welche Eigenschaft haben die Strahlen S in Hinsicht ihrer gegenseitigen Lage, und welche die Punkte P? wie oft liegen von den letztern 3, und wie oft 6 in einer Geraden? u. s. w. (Giebt es z. B. 8 Kegelschnitte, wovon jeder die gegebenen Geraden A, A_1 und 4 Strahlen S berührt? Liegen unter andern von den Punkten P 8 mal 6 in einer Geraden, und schneiden sich von diesen 4 und 4 in einem Punkt? u. s. w.)

3) Wenn in einer Ebene zwei beliebige Strahlbüschel B, B_1 und in jedem irgend vier harmonische Strahlen gegeben sind, so schneiden sich die letztern, paarweise genommen, in 16 Punkten P, diese bestimmen 72 Strahlen S u. s. w.; welche Eigenschaft haben die Punkte P in Hinsicht ihrer gegenseitigen Lage, und welche die Strahlen S? wie oft gehen von den letztern 3, und wie oft 6 durch einen Punkt? u. s. w. (Giebt es z. B. 8 Kegelschnitte, wovon jeder durch die Mittelpunkte B, B_1 und durch 4 Punkte P geht? Gehen unter andern von den Strahlen S 8 mal 6 durch einen Punkt, und liegen von diesen 4 und 4 in einer Geraden? u. s. w.)

4) Die den vorstehenden (3) ähnlichen Aufgaben im Raume, wenn nämlich in zwei festen Geraden A, A_1, oder in zwei festen Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ vier harmonische Elemente gegeben sind.

5) Die den vorstehenden (3) ähnlichen Aufgaben, wenn in einem Kegelschnitt zwei mal vier harmonische Punkte, oder zwei mal vier harmonische Tangenten gegeben sind (§ 43, II).

[298] 6) Hierher die obigen Aufgaben (§ 21, IV).

7) Die den vorstehenden (6) entsprechenden Aufgaben im Strahlbüschel D, wenn nämlich drei projectivische ebene Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ und drei projectivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ gegeben sind.

8) Wenn drei unter sich projectivische Gerade A, A_1, A_2 im Raume beliebig liegen, so bestimmen je drei entsprechende Punkte derselben eine Ebene: welche krumme Fläche wird von allen diesen Ebenen berührt?

8) Wenn drei unter sich projectivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ im Raume beliebig liegen, so schneiden sich je drei entsprechende Ebenen derselben in einem Punkt: in welcher krummen Linie liegen alle diese Punkte?

9) Wenn vier unter sich projectivische Gerade im Raume beliebig liegen, wie oft befinden sich dann vier entsprechende Punkte derselben in einer Ebene?

9) Wenn vier unter sich projectivische Ebenenbüschel im Raume beliebig liegen, wie oft treffen sich dann vier entsprechende Ebenen derselben in einem Punkt?

10) Zwei beliebige projectivische Gerade A, A_1 in einer Ebene so zu legen, dass sie einen Kreis erzeugen (§ 40, I).

11) Zwei beliebige projectivische ebene Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, oder zwei beliebige projectivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ im Strahlbüschel D so zu legen, dass sie einen geraden Kegel erzeugen.

12) Zwei beliebige projectivische Gerade A, A_1, oder zwei beliebige projectivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ im Raume so zu legen, dass sie entweder a) ein rundes einfaches Hyperboloïd (dessen Strahlen den Strahlen eines geraden Kegels parallel sind (§ 51, IV)), oder b) dass sie das in (§ 53, II, 1) beschriebene besondere einfache Hyperboloïd erzeugen.

13) Zwei beliebige projectivische ebene Strahlbüschel B, B_1 in einer Ebene so zu legen, dass sie entweder a) die dem Kreise am nächsten kommende Ellipse, [299] oder b) die am meisten von der gleichseitigen abweichende Hyperbel erzeugen (§ 40, II).

14) Einen gegebenen Kegel zweiten Grades, oder ein gegebenes einfaches Hyperboloïd (mittelst einer Ebene) in einem Kreise zu schneiden; oder: Wenn zwei projectivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in beliebiger fester Lage gegeben sind, sie mittelst einer Ebene E so zu schneiden, dass die dadurch entstehenden ebenen Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ gleich und gleichliegend sind, und mithin einen Kreis erzeugen (§ 40, II); (desgleichen wenn in einem Strahlbüschel D irgend zwei projectivische ebene Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ gegeben sind).

15) Wenn im Raume vier beliebige feste Ebenen gegeben sind, von welcher krummen Fläche werden dann alle Geraden, die von denselben in einem und demselben gegebenen Doppelverhältniss geschnitten werden, berührt? [25])

Dieser Aufgabe steht eine andere zur Seite; welche? Was findet insbesondere statt, wenn das gegebene Doppelverhältniss harmonisch ist?

16) Drehen sich zwei beliebige, der Grösse nach unveränderliche Winkel (ab), $(a_1 b_1)$ (Fig. 56) in einer Ebene dergestalt um ihre festen Scheitelpunkte B, B_1, die in einem gegebenen Kegelschnitte liegen, dass der Durchschnittspunkt $\mathfrak{a}$ zweier ihrer Schenkel a, a_1 diesen Kegelschnitt durchläuft, so beschreibt jeder der drei übrigen Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, in denen sich ihre Schenkel paarweise schneiden, einen Kegelschnitt, welcher durch die zwei festen Scheitel B, B_1 geht. Hierzu gehört ein Gegensatz; welcher?

17) Drehen sich zwei der Grösse nach gegebene Flächenwinkel $(\alpha\beta)$, $(\alpha_1\beta_1)$ um ihre festen Kanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ dergestalt, dass die Durchschnittslinie $(\alpha\alpha_1)$ zweier Seitenebenen α, α_1 stets eine gegebene feste Gerade [**300**] $\mathfrak{A}_2$ trifft, so beschreibt jede der drei übrigen Durchschnittslinien $(\beta\beta_1)$, $(\alpha\beta_1)$, $(\beta\alpha_1)$, welche die Seitenebenen paarweise bilden, ein einfaches Hyperboloïd, welches durch die festen Kanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ geht. — Hierzu der Gegensatz, wie heisst er?

18) Wenn die Grundlinie eines Dreiecks der Grösse und Lage nach gegeben ist, und wenn entweder a) die Summe, oder b) der Unterschied der an derselben liegenden Winkel gegeben ist, so ist der Ort der Spitze des Dreiecks: a) auf zwei gleiche Kreise beschränkt, welche die Grundlinie zur gemeinschaft-

18) Wenn der Winkel an der Spitze eines Dreiecks der Grösse und Lage nach gegeben ist, und wenn entweder a) die Summe, oder b) der Unterschied der ihn einschliessenden Seiten gegeben ist, so berührt die Grundlinie, in allen ihr zukommenden Lagen, stets eine von vier Parabeln, welche dem gegebenen

lichen Sehne haben, oder b) auf zwei gleiche gleichseitige Hyperbeln, welche ebenfalls die Grundlinie zur gemeinschaftlichen Sehne haben.

19) Wenn ein Kantenwinkel (ab) eines dreikantigen Körperwinkels (abc) der Grösse und Lage nach gegeben, und wenn entweder a) die Summe, oder b) der Unterschied der beiden daran liegenden Flächenwinkel gegeben ist, so ist der Ort der dritten Kante c auf vier bestimmte (und besondere) Kegelflächen zweiten Grades beschränkt, welche dem gegebenen Kantenwinkel (ab) umschrieben, und wovon zwei und zwei einander gleich sind.

Winkel (und dessen Neben- und Scheitelwinkel) eingeschrieben sind, und wovon 2 und 2 (die in den Scheitelwinkeln liegen) gleich sind.

19) Wenn ein Flächenwinkel ($\alpha\beta$) eines dreiflächigen Körperwinkels ($\alpha\beta\gamma$) der Grösse und Lage nach gegeben, und wenn entweder a) die Summe, oder b) der Unterschied der beiden daran liegenden Kantenwinkel gegeben ist, so berührt die dritte Seitenfläche γ, in allen ihr zukommenden Lagen, stets eine von vier bestimmten Kegelflächen zweiten Grades, welche dem gegebenen Flächenwinkel eingeschrieben, und wovon zwei und zwei gleich sind.

Oder:

Wenn die Grundlinie eines sphärischen Dreiecks der Grösse und Lage nach gegeben, und wenn entweder a) die Summe, oder b) der Unterschied der daran liegenden zwei Winkel gegeben ist, so ist der Ort der [301] Spitze des Dreiecks auf vier bestimmte sphärische Kegelschnitte beschränkt, welche jene Grundlinie zur gemeinschaftlichen Sehne haben, und wovon zwei und zwei einander gleich sind.

Wenn zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks in zwei gegebenen Hauptkreisen liegen sollen und wenn entweder a) ihre Summe, oder b) ihr Unterschied gegeben ist, so berührt die dritte Seite, in allen ihr möglicherweise [301] zukommenden Lagen, stets einen von vier bestimmten sphärischen Kegelschnitten, welche jene Hauptkreise berühren, und wovon zwei und zwei einander gleich sind.

20) Bewegen sich zwei Ebenen α, α_1, die sich um zwei feste Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ drehen, dergestalt, dass entweder a) die Summe, oder b) der Unterschied der Winkel, welche sie mit einer festen dritten Ebene E, die jenen beiden Geraden parallel ist, bilden, constant bleibt, so beschreibt ihre Durchschnittslinie ($\alpha\alpha_1$) ein einfaches Hyperboloïd, welches durch die festen Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ geht. — Wie lautet der hierzu gehörige Satz?

21) Bewegen sich zwei Ebenen α, α_1, die sich um zwei feste Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ drehen, dergestalt, dass sie stets irgend zwei zugeordneten Durchmessern eines gegebenen festen Kegelschnitts parallel sind, so beschreibt ihre Durchschnittslinie ($\alpha\alpha_1$) ein einfaches Hyperboloïd. (Vergl. § 53, II, 2.) Liegen

die Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in einer Ebene, so tritt an die Stelle des Hyperboloïds eine Kegelfläche zweiten Grades.

22) Wenn ein Kantenwinkel eines dreikantigen Körperwinkels der Grösse und Lage nach, und wenn der ihm gegenüber liegende Flächenwinkel der Grösse nach gegeben ist, in welcher Kegelfläche befindet sich dann die Kante des letztern bei allen ihren verschiedenen Lagen?

22) Wenn ein Flächenwinkel eines dreiflächigen Körperwinkels der Grösse und Lage nach, und wenn der ihm gegenüber liegende Kantenwinkel der Grösse nach gegeben ist, welche Kegelfläche berührt dann die Ebene des letztern in allen ihren verschiedenen Lagen?

Diese Aufgaben sind Bedürfniss in der Stereometrie. Wenn auch die genannten Kegelflächen vom vierten Grade sind, so sind sie vielleicht von solcher besonderen Art, dass sie deshalb doch bequem bei verschiedenen Constructionen angewandt werden können. [**302**] Wie lauten die den vorstehenden entsprechenden sphärischen Aufgaben? (§ 34 u. § 48.)

23) Wenn ein der Grösse nach unveränderlicher Winkel (aa_1) sich so um seinen festen Scheitel dreht, dass seine Schenkel a, a_1 stets irgend zwei feste Gerade A, A_1 im Raume schneiden, welche krumme Fläche wird dann von der durch die Durchschnittspunkte gehenden Geraden beschrieben?

23) Wenn ein der Grösse nach unveränderlicher Flächenwinkel $(\alpha\alpha_1)$ sich dergestalt bewegt, dass seine Seitenflächen α, α_1 stets durch irgend zwei feste Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ im Raume gehen, welche krumme Fläche wird dann von seiner Kante $(\alpha\alpha_1)$ beschrieben?

24) Befinden sich zwei projectivische Gebilde, eine Gerade A und ein ebener Strahlbüschel B, in beliebiger schiefer Lage in einer Ebene, und man zieht durch jeden Punkt der Geraden einen Strahl, welcher entweder a) dem (dem jedesmaligen Punkt) entsprechenden Strahl des Strahlbüschels parallel ist, oder b) welcher zu ihm rechtwinklig ist, so berühren alle solche Strahlen eine bestimmte Parabel, welche auch von der gegebenen Geraden A berührt wird.[26])

25) Befinden sich dieselben Gebilde A, B (24) in beliebiger schiefer Lage im Raume und man zieht durch die Punkte in A Strahlen, welche den entsprechenden Strahlen in B parallel sind, so liegen dieselben in einem hyperbolischen Paraboloïd (§ 52); und fällt man aus den Punkten in A senkrechte Ebenen auf die ihnen entsprechenden Strahlen in B, so berühren alle diese Ebenen einen bestimmten parabolischen Cylinder (§ 40, III).

26) Befinden sich zwei projectivische Gebilde, eine Gerade A und ein Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, in schiefer Lage, und man fällt aus den Punkten in A Lothe auf die ihnen entsprechenden Ebenen in $\mathfrak{A}$, so liegen alle diese Lothe in einem hyperbolischen Paraboloïd. — Was [**303**] findet statt, wenn man durch die Punkte in A Ebenen legt, die den entsprechenden Ebenen in $\mathfrak{A}$ parallel sind? [27])

27) Liegen zwei projectivische ebene Strahlbüschel B, B_1 beliebig im Raume und man legt durch irgend einen gegebenen Punkt D Ebenen, wovon jede irgend zwei entsprechenden Strahlen der Strahlbüschel parallel ist, so umhüllen sie eine Kegelfläche D zweiten Grades; oder legt man durch D solche Gerade, wovon jede zu irgend zwei entsprechenden Strahlen der Strahlbüschel der Richtung nach rechtwinklig ist, so liegen sie in einer Kegelfläche zweiten Grades.

28) Sind im Raume irgend zwei Gerade A, A_1 und irgend ein Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ in fester Lage gegeben und eine andere Gerade a bewegt sich längs jenen beiden so, dass sie stets zu irgend einer Ebene des Ebenenbüschels senkrecht ist, so beschreibt sie ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloïd (§ 52, II).

29) Ist irgend ein Kegel zweiten Grades und sind irgend zwei Gerade A, A_1, die auf zwei beliebigen Berührungsebenen desselben senkrecht stehen, gegeben und eine dritte Gerade a bewegt sich so, dass sie stets jene zwei Geraden schneidet und beständig zu irgend einer Berührungsebene des Kegels rechtwinklig ist, so beschreibt sie ein einfaches Hyperboloïd.

30) Alle Ebenen, welche durch irgend einen festen Punkt D gehen und ein gegebenes einfaches Hyperboloïd in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, berühren einen Kegel D zweiten Grades*). — Beim hyperbolischen [**304**] Paraboloïd ist dieser Satz immer möglich (§ 52, und § 53, 4, links).

31) Alle Ebenen, die durch irgend einen gegebenen Punkt gehen und irgend eine gegebene Fläche zweiten Grades in ähnlichen Curven schneiden, umhüllen was für eine Kegelfläche?

---

*) Alle Ebenen, welche durch irgend einen gegebenen Punkt D gehen und irgend eine gegebene Fläche zweiten Grades in Parabeln schneiden, umhüllen einen Kegel 2ten Grades, welcher dem Asymptoten-Kegel jener Fläche gleich und mit ihm parallel ist.

32) »Beim einfachen Hyperboloïd liegen alle Normalen längs irgend eines Strahls desselben in einem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloïd.« — Dieser bekannte Satz lässt sich leicht durch projectivische Eigenschaften beweisen (§ 52 und 53).

33) Bei jeder Fläche zweiten Grades sind die Normalen längs irgend eines ebenen Schnittes derselben jedesmal den Strahlen irgend eines Kegels zweiten Grades parallel.

34) Wie viele Normalen sind, im Allgemeinen, von einem beliebigen Punkte aus, auf irgend eine gegebene Fläche zweiten Grades möglich, und welche Beziehung haben sie unter sich?

35) Im Allgemeinen steht auf jedem Durchmesser einer Fläche zweiten Grades ein bestimmter, ihm zugeordneter, anderer Durchmesser senkrecht. Alle Durchmesser, welche zu solchen andern, die in irgend einer Durchmesser-Ebene E (d. i. eine Ebene, die durch den Mittelpunkt der Fläche geht) liegen, zugeordnet und rechtwinklig sind, befinden sich in einer Kegelfläche zweiten Grades, welche durch den jener Ebene E zugeordneten und durch den auf ihr senkrecht stehenden Durchmesser der Fläche geht.

36) Alle Durchmesser-Ebenen einer Fläche zweiten Grades, die zu solchen Durchmessern zugeordnet sind, welche in irgend einer Kegelfläche zweiten Grades liegen, berühren eine andere Kegelfläche desselben Grades; und auch umgekehrt.

[**305**] 37) In jeder Durchmesser-Ebene einer Fläche zweiten Grades liegen, im Allgemeinen, zwei zugeordnete zu einander rechtwinklige Durchmesser; welches ist der Ort der letztern bei einem Durchmesser-Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ (d. h. bei einer Schaar Ebenen, die durch einen Durchmesser $\mathfrak{A}$ der Fläche gehen?)

* * *

38) Wenn im Raume irgend zwei Gerade A, A_1 und irgend eine ebene Curve $n$ten Grades C gegeben sind, und es bewegt sich eine dritte Gerade a so, dass sie stets jene drei festen Elemente A, A_1, C schneidet, so beschreibt sie eine Fläche vom $2n$ten Grade, welche jedoch von unzähligen Ebenen α, β, γ ..... in Curven vom $n$ten Grade geschnitten werden kann, und zwar bilden alle solche Ebenen einen bestimmten Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$. — Es giebt einen andern Satz, welcher diesem zur Seite steht; wie lautet er?

39) Denkt man sich um ein gegebenes Dreieck $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ eine Schaar (d. i. alle mögliche) ähnliche Kegelschnitte, von irgend einer bestimmten Gattung, beschrieben, so werden dieselben allemal von einer bestimmten Curve vierten Grades C umhüllt (berührt), welche die drei Eckpunkte des Dreiecks $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ zu singulären Punkten hat. Derjenige Punkt, in welchem jeder Kegelschnitt von der Curve C berührt wird, und derjenige Punkt, in welchem er den dem Dreieck $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ umschriebenen Kreis K zum viertenmal schneidet (ausser den Punkten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$), sind allemal Endpunkte eines und desselben Durchmessers des Kegelschnitts. Der Kreis K wird in jedem Punkt von zwei der genannten Kegelschnitte geschnitten, und die zwei Punkte, in welchen diese von der Curve C berührt werden, liegen allemal in einer gleichseitigen Hyperbel, die dem Dreieck $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ umschrieben ist; u. s. w. [**306**] In Hinsicht der Curve C finden folgende wesentliche Grenzfälle statt: a) Gehen die Schaar Kegelschnitte in Kreise über, so fallen sie alle in einen einzigen zusammen, in welchen ebenfalls die Curve C übergeht, und welcher der dem Dreieck umschriebene Kreis K ist; b) verwandeln sich die Kegelschnitte in Parabeln, so geht die Curve C in eine unendlich entfernte Gerade über; und c) sind die Kegelschnitte gleichseitige Hyperbeln, so reducirt sich die Curve C auf einen Punkt, nämlich auf denjenigen, in welchem sich die drei Höhen des Dreiecks schneiden, d. h., »durch diesen Punkt geht jede der genannten Hyperbeln.«

Welches ist der Ort der Mittelpunkte, und welches ist der Ort der Brennpunkte der vorgenannten Schaar Kegelschnitte?

40) Legt man an je zwei von drei Kreisen α, β, γ (Fig. 57), welche irgend einem Dreiseit xyz eingeschrieben sind, eine (vierte) gemeinschaftliche Tangente A, A_1, A_2, so bilden diese ein Dreiseit AA_1A_2, in welches sich unzählige Dreiecke $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ so beschreiben lassen, dass ihre Seiten jene Kreise berühren; nämlich legt man aus einem beliebigen Punkt $\mathfrak{a}$, in A, eine Tangente $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ an den Kreis γ, aus dem dadurch bestimmten Punkte $\mathfrak{a}_1$, in A_1, ferner eine Tangente $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ an den Kreis α, so berührt allemal die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$ den Kreis β. — Man erhält einen ähnlichen Satz, wenn man noch den vierten Kreis δ, welcher dem gegebenen Dreiseit xyz eingeschrieben werden kann, zu Hülfe nimmt. Beide Sätze sind jedoch nur besondere Fälle des folgenden allgemeinen Satzes (rechts).

41) Werden einem gegebenen Dreieck $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ beliebige n Kegelschnitte umschrieben, und man berücksichtigt die n Punkte B, [307] B_1, B_2, ..., in welchen je zwei, nach der Reihe unmittelbar aufeinander folgende, Kegelschnitte sich schneiden, so lassen sich unzählige n Ecke so beschreiben, dass ihre Seiten, nach der Reihe, durch jene Punkte gehen, und dass ihre Ecken, nach der Ordnung, in jenen Kegelschnitten liegen.

41) Werden einem gegebenen Dreiseit xyz beliebige n Kegelschnitte eingeschrieben und man legt an je zwei, nach der Reihe [307] unmittelbar aufeinander folgende Kegelschnitte, eine (vierte) gemeinschaftliche Tangente A, A_1, A_2, ..., so lassen sich unzählige n Ecke so beschreiben, dass ihre Ecken, nach der Reihe, in jenen Tangenten liegen, und dass ihre Seiten, nach der Ordnung, jene Kegelschnitte berühren.

Wofern man eine oder zwei Gerade als Kegelschnitt betrachtet, so sind in diesen Sätzen, unter andern, auch die obigen Sätze (§ 23, II u. III) und (§ 42, I) als besondere Fälle enthalten. Ausserdem entstehen auch merkwürdige besondere Fälle, wenn angenommen wird, von den gegebenen Elementen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und x, y, z sollen einige imaginär oder unendlich entfernt sein.

42) Wenn in einer Ebene ein beliebiges n Seit und alle Ecken eines n Ecks, bis auf zwei, gegeben sind, so sollen diese zwei unter der Bedingung gefunden werden, dass sodann unendlich viele n Ecke möglich sind, welche zugleich jenem n Seit eingeschrieben und jenem n Eck umschrieben sind. (Der Ort der zwei gesuchten Eckpunkte ist auf zwei bestimmte Gerade beschränkt, welche durch dieselben projectivisch getheilt werden, so dass also die sie verbindende Seite, in allen ihren möglich verschiedenen Lagen, stets einen bestimmten Kegelschnitt berührt.) — Wie heisst die dieser Aufgabe entgegenstehende Aufgabe? Beide Aufgaben finden auch statt, wenn das gegebene n Seit und n Eck nicht in einer Ebene, sondern im Raume (§ 55) sich befinden, wozu insbesondere die nacherwähnte Aufgabe gehört.

43) Hierher die Aufgabe und der Satz in (§ 58, Note).

44) Wenn in der Ebene ein beliebiges n Eck gegeben [308] ist, ein anderes zu beschreiben, welches jenem zugleich um- und eingeschrieben ist. — *Moebius* hat gezeigt, dass diese Aufgabe beim Dreieck und Viereck noch nicht möglich ist (Journ. f. Mathem.). Die in (§ 25) gegebene Auflösung muss dies bestätigen, wenn man die beiden Vierecke gleich werden und aufeinander fallen lässt, man wird dann finden, dass bei den aufeinander liegenden projectivischen Geraden

A, A_4 keine entsprechende Punkte vereinigt sind. Eben so muss man finden können, ob die vorgelegte Aufgabe für das Fünfeck u. s. w. möglich ist.

45) Wenn im Raume irgend ein n Flach (§ 55) und irgend ein n Eck gegeben:

Ein n Eck (im Raume) zu beschreiben, welches dem n Flach eingeschrieben und jenem n Eck umschrieben ist.

Ein n Flach (im Raume) zu beschreiben, welches jenem n-Flach eingeschrieben und dem n Eck umschrieben ist.

Oder:

Wenn im Raume n beliebige Ebenen und n beliebige Punkte gegeben sind, ein n Eck (im Raume, § 55) so zu beschreiben, dass seine Ecken, nach der Reihe, in jenen Ebenen liegen, und seine Seiten, nach der Reihe, durch jene Punkte gehen. — Diese Aufgabe lässt im Allgemeinen $1^2 . 2^2 . 3^2 \ldots\ldots (n-1)^2 n$ Auflösungen zu (vergl. § 25, Note). Giebt es in der That Fälle, wo alle diese Auflösungen zugleich möglich sind, oder verhält es sich damit so, dass, während ein Theil derselben möglich ist, die andern nicht stattfinden können? Dasselbe kann bei (§ 25) und (§ 56, 4) gefragt werden.[28])

46) Zweimal drei zugeordnete harmonische Pole in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt (§ 44), liegen allemal in irgend einem andern Kegelschnitt.

[309] 47) Haben irgend drei Kegelschnitte K, K_1, K_2 in einer Ebene zwei gemeinschaftliche (reelle oder imaginäre) Punkte r, s, so ist der Ort desjenigen Punkts P, dessen drei Harmonische in Bezug auf dieselben (§ 44) sich in irgend einem Punkt P_1 schneiden, so wie der Ort dieses letztern Punkts, ein und derselbe bestimmte vierte Kegelschnitt K_3, welcher mit jenen dreien die nämlichen zwei Punkte gemein hat; und ferner: die Gerade PP_1 geht stets durch einen bestimmten festen Punkt Q, welcher der harmonische Pol der Geraden rs in Bezug auf den vierten Kegelschnitt K_3 ist,

46) Zweimal drei zugeordnete Harmonische in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt (§ 44), berühren allemal irgend einen andern Kegelschnitt.

[309] 47) Haben irgend drei Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ in einer Ebene zwei gemeinschaftliche (reelle oder imaginäre) Tangenten r, s, so berührt jede Gerade $\mathfrak{G}$, deren drei harmonische Pole in Bezug auf dieselben (§ 44) in irgend einer andern Geraden $\mathfrak{G}_1$ liegen, so wie auch diese letztere Gerade, stets einen und denselben bestimmten vierten Kegelschnitt $\mathfrak{K}_3$, welcher mit jenen dreien die nämlichen zwei Tangenten gemein hat; und ferner: der Punkt $(\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1)$ liegt stets auf einer bestimmten festen Geraden $\mathfrak{Q}$, welche die Harmonische des Durchschnittspunkts (rs) in Bezug auf den vierten

und in welchem sich die drei Sekanten, welche die drei gegebenen Kegelschnitte, paarweise genommen, gemein haben (ausser der Sekante rs), schneiden; u. s. w.

48) Wenn in einer Ebene drei beliebige Kegelschnitte gegeben sind, welches ist dann der Ort desjenigen Punkts P, dessen drei Harmonische in Bezug auf die Kegelschnitte, sich in irgend einem andern Punkte P_1 schneiden? und welche Curve wird von der Geraden PP_1 berührt?

Kegelschnitt $\mathfrak{K}_3$ ist, und in welcher die drei Durchschnittspunkte der drei Paar Tangenten, welche die drei gegebenen Kegelschnitte, paarweise genommen, gemein haben, liegen; u. s. w.

48) Wenn in einer Ebene drei beliebige Kegelschnitte gegeben sind, welche Curve wird dann von derjenigen Geraden $\mathfrak{G}$, deren drei harmonische Pole in Bezug auf die Kegelschnitte, in irgend einer andern Geraden $\mathfrak{G}_1$ liegen, berührt? und welches ist der Ort des Durchschnittspunkts $(\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1)$?

49) Wie steht es mit den vorstehenden Sätzen (47) und Aufgaben (48) in den besondern Fällen, wo statt jedes gegebenen Kegelschnitts zwei Gerade (links) oder zwei Punkte (rechts) angenommen werden?

50) Haben irgend vier gegebene Flächen zweiten Grades einen (reellen oder imaginären) Kegelschnitt [310] K gemein, so ist der Ort desjenigen Punkts P, dessen vier harmonische Ebenen in Bezug auf dieselben sich in irgend einem andern Punkt P_1 schneiden, so wie der Ort des letztern Punkts, eine und dieselbe bestimmte fünfte Fläche desselben Grades, welche mit jenen vieren den nämlichen Kegelschnitt K gemein hat; und ferner: die Gerade PP_1 geht stets durch einen bestimmten festen Punkt Q, welcher der harmonische Pol der Ebene K in Bezug auf die fünfte Fläche ist, und durch welchen die Ebenen der sechs Kegelschnitte, welche die vier gegebenen Flächen, paarweise genommen, gemein haben, gehen; u. s. w.

51) Wenn vier beliebige Flächen zweiten Grades gegeben sind, welches ist dann der Ort desjenigen Punkts P, dessen vier harmonische Ebenen in Be-

50) Haben irgend vier gegebene Flächen zweiten Grades einen gemeinschaftlichen Berührungskegel [310] $\mathfrak{K}$, so berührt jede solche Ebene $\mathfrak{E}$, deren vier harmonische Pole, in Bezug auf jene Flächen, in irgend einer andern Ebene $\mathfrak{E}_1$ liegen, so wie auch diese letztere Ebene, stets eine und dieselbe bestimmte fünfte Fläche desselben Grades, welche mit jenen vieren den nämlichen Berührungskegel $\mathfrak{K}$ gemein hat; und ferner: die Gerade $(\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1)$ liegt stets in einer bestimmten festen Ebene $\mathfrak{Q}$, welche die harmonische Ebene des Punkts $\mathfrak{K}$ in Bezug auf die fünfte Fläche ist, und in welcher die Mittelpunkte der sechs Berührungskegel, welche die vier gegebenen Flächen, paarweise genommen, gemein haben, liegen; u. s. w.

51) Wenn vier beliebige Flächen zweiten Grades gegeben sind, welche krumme Fläche wird dann von derjenigen Ebene $\mathfrak{E}$ berührt, deren vier harmoni-

zug auf dieselben, sich in irgend einem andern Punkt P_1 schneiden? und welches ist der Ort der Geraden PP_1?*)

sche Pole in Bezug auf dieselben in irgend einer andern Ebene $\mathfrak{E}_1$ liegen? und welches ist der Ort der Durchschnittslinie $(\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1)$?*)

52) Haben irgend zwei Kegelschnitte vier gemeinschaftliche Punkte, und gehen von den acht Tangenten, von welchen sie in denselben berührt werden, drei durch irgend einen Punkt, so geht allemal noch eine vierte Tangente durch denselben Punkt, und es [311] gehen alsdann auch die vier übrigen Tangenten durch irgend einen und denselben Punkt.

52) Haben irgend zwei Kegelschnitte vier gemeinschaftliche Tangenten, und liegen von den acht Punkten, in welchen sie von denselben berührt werden, drei in irgend einer Geraden, so liegt allemal noch ein vierter Punkt in derselben Geraden, und es liegen [311] alsdann auch die vier übrigen Punkte in irgend einer und derselben Geraden.

Solche Beziehung, wie hier die zwei Kegelschnitte, hat bei den obigen Sätzen (47) der vierte Kegelschnitt zu jedem der drei gegebenen.

53) Haben irgend zwei Flächen zweiten Grades zwei gemeinschaftliche Kegelschnitte, und haben von den vier Kegelflächen, von welchen sie in denselben berührt werden, zwei einen und denselben Mittelpunkt, so haben alsdann auch die zwei übrigen Kegelflächen irgend einen Punkt zum gemeinsamen Mittelpunkt.

53) Haben irgend zwei Flächen zweiten Grades zwei gemeinschaftliche Berührungskegel, und liegen von den vier Kegelschnitten, in welchen sie von denselben berührt werden, zwei in einer und derselben Ebene, so liegen alsdann auch die zwei übrigen Kegelschnitte in irgend einer und derselben Ebene.

Solche Beziehung, wie hier die zwei Flächen zweiten Grades, hat bei den obigen Sätzen (50) die fünfte Fläche zu jeder der vier gegebenen.

54) »Irgend 6 Punkte eines beliebigen Kegelschnitts bestimmen 60 eingeschriebene einfache Sechsecke (§ 19); in jedem der letzteren liegen die drei Punkte, in welchen die gegenüber liegenden Seiten sich schneiden, in einer Geraden G (§ 42, I), so dass also 60 solcher Geraden G

54) »Irgend 6 Tangenten eines beliebigen Kegelschnitts bestimmen 60 umschriebene einfache Sechsseite (§ 19); in jedem der letzteren gehen die drei Diagonalen, welche die gegenüber stehenden Ecken verbinden, durch einen Punkt $\mathfrak{P}$ (§ 42, I), so dass also 60 solcher Punkte

*) Welche Eigenthümlichkeiten finden bei diesen Aufgaben, so wie bei den Sätzen (50) statt, wenn für jede angegebene Fläche insbesondere eine Kegelfläche zweiten Grades oder zwei Ebenen angenommen werden?

stattfinden; von diesen 60 Geraden gehen drei und drei durch irgend einen Punkt P, so dass 20 solcher Punkte P entstehen; und von diesen 20 Punkten liegen 15 mal 4 in einer Geraden g, so dass jeder in drei solchen Geraden liegt.« (Welche Beziehung haben diese 15 Geraden g weiter zu einander?)

$\mathfrak{P}$ stattfinden; von diesen 60 Punkten liegen drei und drei in irgend einer Geraden $\mathfrak{G}$, so dass 20 solcher Geraden $\mathfrak{G}$ entstehen; und von diesen 20 Geraden gehen 15 mal 4 durch einen Punkt $\mathfrak{p}$, so dass jede durch drei solche Punkte geht.« (Welche Beziehung haben diese 15 Punkte $\mathfrak{p}$ weiter zu einander?)

»Sind, bei einem und demselben Kegelschnitt, die gegebenen sechs Punkte (links) zugleich die Berührungspunkte [**312**] der gegebenen sechs Tangenten (rechts), so sind:

die 60 Geraden G die Harmonischen der 60 Punkte $\mathfrak{P}$ (§ 44),

die 20 Punkte P die harmonischen Pole der 20 Geraden $\mathfrak{G}$,

die 15 Geraden g die Harmonischen der 15 Punkte $\mathfrak{p}$ in Bezug auf den Kegelschnitt« *).

55) Wenn bei dem vorhergehenden Satze (54) die 6 Punkte insbesondere so angenommen werden, dass sie, paarweise, in drei Geraden liegen, welche durch irgend einen und denselben Punkt gehen: welche besondere Lage haben alsdann die 60 Geraden G, die 20 Punkte P, und die 15 Geraden g?

55) Wenn bei dem vorhergehenden Satze (54) die 6 Tangenten insbesondere so angenommen werden, dass sie sich, paarweise, in drei Punkten schneiden, welche in irgend einer und derselben Geraden liegen: welche besondere Lage haben alsdann die 60 Punkte $\mathfrak{P}$, die 20 Geraden $\mathfrak{G}$, und die 15 Punkte $\mathfrak{p}$?

56) Besteht, in Betracht der Sätze (54), der gegebene Kegelschnitt links aus zwei Geraden und rechts aus zwei Punkten, so hat man ferner insbesondere folgende Sätze (§ 23, III):

»Wenn in jeder von zwei Geraden A, A_1, die in einer Ebene liegen, drei beliebige Punkte angenommen werden, so lassen sich durch diese, paarweise, 9 Gerade G legen, welche sich, paarweise, in 18 Punkten P

»Wenn in jedem von zwei Strahlbüscheln B, B_1, die in einer Ebene liegen, drei beliebige Strahlen angenommen werden, so schneiden sich diese, paarweise, in 9 Punkten $\mathfrak{P}$, durch welche sich, paarweise,

*) Bei der ersten Bekanntmachung dieser Sätze (*Annales de Mathématiques*, tom. XVIII) hatte sich, in Betreff der Geraden g und der Punkte $\mathfrak{p}$, eine Unrichtigkeit eingeschlichen. — Hülfsmittel, durch welche die Sätze sich beweisen lassen, sind im gegenwärtigen Theile enthalten (§ 42 u. § 46). — Die Sätze (56) habe ich ebendaselbst zuerst bekannt gemacht.

schneiden, wovon 6 mal 3 in einer Geraden g liegen, und von diesen 6 Geraden g gehen 3 und 3 durch einen Punkt.«

18 Gerade 𝔊 legen lassen, wovon 6 mal 3 durch einen Punkt 𝔭 gehen, und von diesen 6 Punkten 𝔭 liegen 3 und 3 in einer Geraden.«

[**313**] 57) Wenn in Ansehung der obigen Sätze (54):

Von den angenommenen sechs Punkten fünf fest bleiben, während der sechste den Kegelschnitt durchläuft: wie bewegen sich dann die 60 Geraden G, wie die 20 Punkte P, und wie die 15 Geraden g?

Von den angenommenen sechs Tangenten fünf fest bleiben, während die sechste sich um den Kegelschnitt herumbewegt: wie bewegen sich dann die 60 Punkte 𝔓, wie die 20 Geraden 𝔊, und wie die 15 Punkte 𝔭?

58) Die Sätze (54) beziehen sich auf sechs gleichartige Elemente eines Kegelschnitts: welche eigenthümlichen Sätze finden bei sechs ungleichnamigen Elementen statt, d. h., wenn 5, 4, 3, 2, 1 Punkte und respective 1, 2, 3, 4, 5 Tangenten eines Kegelschnitts gegeben sind?

59) Denkt man sich im Raume irgend zwei rechtwinklige Coordinatensysteme um einen und denselben Anfangspunkt, so findet folgendes statt:

Die 6 Coordinatenaxen liegen allemal in irgend einer Kegelfläche zweiten Grades.

Die 6 Coordinatenebenen berühren allemal irgend eine Kegelfläche zweiten Grades.

Dieser Satz ist ein besonderer Fall eines umfassendern Satzes. Auch kann er, auf entsprechende Weise, wie der obige (54), weiter ausgedehnt werden (§ 33 u. § 48).

60) Wenn irgend 9 Punkte einer Fläche zweiten Grades gegeben sind, beliebige andere Punkte derselben (durch Construction) zu finden; oder: »Welche Relation findet zwischen irgend 10 Punkten einer Fläche zweiten Grades statt?«

Die zweite Frage ist bereits zweimal von der Brüsseler Akademie als Preisaufgabe gegeben worden, aber beidemal, so viel ich weiss, ohne Erfolg.

61) Wenn von der Durchschnittscurve zweier Flächen zweiten Grades irgend acht Punkte gegeben sind, [**314**] beliebige andere Punkte derselben (durch Construction) zu finden.

62) Durch acht beliebig gegebene Punkte im Raume eine Kegelfläche zweiten Grades zu legen. — Lässt im Allgemeinen vier Auflösungen zu.

63) Welches ist der Ort der Mittelpunkte (Scheitel) aller

Kegelflächen zweiten Grades, welche durch irgend 6, oder 7, gegebene Punkte im Raume gehen?

64) Wenn acht beliebige Gerade im Raume gegeben sind, eine Kegelfläche zweiten Grades zu finden, welche dieselben berührt.

65) Welches ist der Ort der Mittelpunkte (Scheitel) aller Kegelflächen zweiten Grades, welche irgend 6, oder 7, gegebene Gerade im Raume berühren?

66) Welches ist der Ort aller Ebenen, welche irgend 6, oder 7, gegebene Gerade im Raume so schneiden, dass das durch die Durchschnittspunkte bestimmte Sechseck oder Siebeneck irgend einem Kegelschnitt umschrieben ist?

67) Der Ort der Mittelpunkte aller Kegelflächen zweiten Grades, welche irgend einem gegebenen Sechseck im Raume (§ 55) eingeschrieben sind (d. h. dessen Seiten berühren), ist ein einfaches Hyperboloïd.

Dieser Satz und die vorhergehenden Aufgaben (60 bis 66) haben ihre zugeordneten; wie lauten sie?

68) Welches ist der Ort des Mittelpunkts der geraden Kegelfläche, a) welche durch irgend 4, oder 5, gegebene Punkte im Raume geht, oder b) welche irgend 4, oder 5, gegebene Gerade im Raume berührt?

69) Welches ist der Ort der Ebene des Kreises, a) welcher irgend 4, oder 5, gegebene Ebenen berührt, oder b) welcher irgend 4, oder 5, gegebene Gerade im Raume schneidet?

[**315**] 70) Welche Eigenschaften hat eine Schaar ähnlicher Sphäroïde, welche durch irgend 4, oder 5, gegebene Punkte im Raume gehen; z. B. von welcher krummen Fläche werden sie umhüllt (vergl. 39), welches ist der Ort ihrer Mittelpunkte, oder ihrer Brennpunkte? u. s. w.

71) Welches ist der Ort der Mittelpunkte aller einfachen Hyperboloïde, welche durch die Seiten eines gegebenen Vierseits im Raume (§ 55) gehen?

72) Eine Kugel zu finden, welche irgend vier gegebene Gerade im Raume berührt.

73) Eine Fläche zweiten Grades zu finden, welche irgend 9 gegebene Gerade im Raume berührt. (Wie viele Auflösungen sind möglich?)

74) Die Axen (d. i. die drei zu einander rechtwinkligen conjugirten Durchmesser) eines gegebenen schiefen Kegels zweiten Grades zu finden.

* * *

75) Werden zwei beliebige Ebenen E, E_1 mittelst irgend eines Strahlbüschels D aufeinander projicirt, so dass jedem Punkt der einen ein bestimmter Punkt in der andern entspricht, und werden sofort die Ebenen in beliebige andere (schiefe) Lage gebracht, so entsteht die Frage, welchem Gesetz sodann die Projectionsstrahlen, d. h., die Geraden, welche die entsprechenden Punkte verbinden, unterworfen seien, oder welche krumme Fläche von ihnen berührt werde? — Diese Aufgabe, nebst der ihr zugeordneten, werden durch die Betrachtungen des zweiten Abschnitts gelöst werden.

76) Wenn man Polyëder nur in Hinsicht der Art oder Gattung ihrer Grenzflächen von einander unterscheidet, d. h., je nachdem diese Dreiecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w. sind, so giebt es bekanntlich nur einen vierflächigen, zwei fünfflächige, und sieben [316] sechsflächige Körper*). »Wie viel verschiedene 7, 8, 9, ... n flächige Körper sind in dieser Hinsicht möglich?«**)

77) Wenn irgend ein convexes Polyëder gegeben ist, lässt sich dann immer (oder in welchen Fällen nur) irgend ein anderes, welches mit ihm in Hinsicht der Art und der Zusammensetzung der Grenzflächen übereinstimmt (oder von gleicher Gattung ist), in oder um eine Kugelfläche, oder in oder um irgend eine andere Fläche zweiten Grades beschreiben (d. h. dass seine Ecken alle in dieser Fläche liegen, oder seine Grenzflächen alle diese Fläche berühren)?

78) Fällt man aus den Ecken eines beliebigen viereckigen Körpers (dreiseitiger Pyramide) Lothe auf die gegenüber liegenden Grenzflächen, so liegen alle vier Lothe, im Allgemeinen, in einem einfachen Hyperboloïd, und zwar gehören sie zu einer und derselben Schaar Strahlen desselben, so dass es also unzählige Gerade giebt, wovon jede alle vier Lothe schneidet (§ 51). Wenn insbesondere zwei der vier Lothe sich schneiden, so schneiden sich auch die zwei übrigen; und wenn insbesondere drei Lothe sich schneiden, so schneiden sich nothwendigerweise alle vier in einem und demselben Punkt.«

In den besondern Fällen geht offenbar das Hyperboloïd

---

*) Siehe System der Geometrie von *Schweins*.

**) Diese Aufgabe habe ich schon an einem andern Orte (*Annales de Mathém.* tom. XIX, p. 36) gegeben, aber es ist noch keine Lösung erfolgt.

in einen Grenzfall (in zwei Ebenen, und in einen Kegel) über. Bei der ersten Bekanntmachung dieses Satzes (Journal für Mathem. Bd. II. S. 97) habe ich die besondern Fälle unrichtig angegeben.

[**317**] Es findet ein dem vorstehenden zugeordneter Satz statt; wie heisst er?

79) »Haben irgend zwei vierflächige Körper (dreiseitige Pyramiden) solche Lage, dass die vier Lothe, welche aus den Ecken des einen in bestimmter Ordnung auf die Grenzflächen des andern gefällt werden, in irgend einem Punkt zusammentreffen, so gehen allemal auch diejenigen vier Lothe, welche man in entsprechender Ordnung, aus den Ecken des zweiten auf die Grenzflächen des ersten fällt, durch irgend einen und denselben Punkt.« Oder:

a) »Fällt man aus einem beliebigen Punkt E auf die Grenzflächen ABC, ABD, ACD, BCD irgend eines gegebenen Tetraëders $ABCD$ Lothe Ed, Ec, Eb, Ea, nimmt in diesen Lothen vier beliebige Punkte d, c, b, a, als Ecken eines zweiten Tetraëders $dcba$ an, und fällt auf dessen Grenzflächen dcb, dca, dba, cba aus den Ecken A, B, C, D des erstern Lothe Ae, Be, Ce, De, so treffen diese einander allemal in irgend einem Punkte e.« Und ferner:

b) »Nimmt man in den vier ersteren Lothen ähnlicherweise vier andere Punkte d_1, c_1, b_1, a_1 als Ecken eines dritten Tetraëders an, so wird diesem in gleicher Beziehung ein Punkt e_1 entsprechen; und alsdann liegen die vier Durchschnittslinien α, β, γ, δ der vier einander entsprechenden Grenzflächenpaare des zweiten und dritten Tetraëders (d. i. die Durchschnittslinien der Ebenenpaare dcb und $d_1c_1b_1$, dca und $d_1c_1a_1$, dba und $d_1b_1a_1$, cba und $c_1b_1a_1$), allemal in irgend einer Ebene $(\alpha\beta\gamma\delta)$; und

c) diese Ebene $(\alpha\beta\gamma\delta)$ steht allemal auf derjenigen Geraden ee_1, welche durch jene zwei genannten Punkte e, e_1 geht, senkrecht.«

Diesen Satz, nebst den zwei analogen Sätzen in [**318**] der Ebene und auf der Kugelfläche, bei welchen nämlich, statt wie hier Tetraëder, ähnlicherweise Dreiecke in Betracht kommen*), habe ich schon an einem andern Orte zu beweisen vorgelegt (Journal f. Mathem. Bd. II, S. 287). Alle drei Sätze sind übrigens besondere Fälle von etwas allgemeineren

*) Auch findet ein analoger Satz im Strahlbüschel statt.

Sätzen, wie man zu seiner Zeit sehen wird. Auch haben alle drei Sätze ihre zugeordneten Sätze; wie lauten diese?

80) α) »Sind in einer Ebene irgend zwei, einander nicht schneidende, Kreise M_1, M_2 gegeben, wovon man sich den einen zunächst innerhalb des andern liegend denken mag, und man beschreibt, in dem zwischen beiden Kreisen liegenden Raume, eine Reihe Kreise m_1, m_2, m_3, m_4, ..., so, dass jeder jene zwei und den ihm unmittelbar vorangehenden berührt, so findet einer von folgenden zwei Fällen statt: entweder a) die Reihe verlängert sich ins Unendliche und ist incommensurabel, oder b) sie kehrt in sich selbst zurück und ist commensurabel, d. h. nachdem sie in jenem Zwischenraum irgend eine Anzahl u Umläufe zurückgelegt hat, gelangt man zu einem $n$ten Kreise m_n, welcher den ersten m_1 berührt, diesen also zu seinem Nachfolgenden hat, so dass hier die Reihe sich schliesst.«

β) »Von diesen zwei Fällen findet immer der nämliche, und zwar auf einerlei Weise, statt, man mag den ersten Kreis m_1 annehmen, wo man will, so dass also das Vorhandensein des einen oder andern Falles lediglich von der Grösse und Lage der zwei festen Kreise M_1, M_2 abhängt.«

γ) »Bezeichnet man die Radien der Kreise M_1, M_2 durch R_1, R_2 und den Abstand ihrer Mittelpunkte von einander durch A, so hat man für den Fall, wo die [319] genannte Kreisreihe auf die angegebene Art commensurabel ist, folgende einfache Bedingungsgleichung:

$$(R_1 \mp R_2)^2 \mp 4 R_1 R_2 \cdot \operatorname{tang}^2 \frac{u}{n}\pi = A^2,$$

woraus jede der fünf Grössen R_1, R_2 A, u, n gefunden wird, wenn die vier übrigen gegeben sind. Liegen die Kreise M_1, M_2 ineinander, so hat man die obern, und liegen sie auseinander, die untern Vorzeichen zu nehmen.«

81) »Bei Kreisen auf der Kugelfläche (so wie auch bei geraden Kegeln im Strahlbüschel) finden analoge Umstände statt, wie im vorstehenden Satze bei Kreisen in der Ebene, und zwar hat man die Bedingungsgleichung:

$$\cos(R_1 \mp R_2) \pm 2 \sin R_1 \sin R_2 \operatorname{tang}^2 \frac{u}{n}\pi = \cos A.«$$

82) »Es seien M_1, M_3 irgend zwei Kugeln, wovon, zum leichtern Verständniss, die eine M_3 innerhalb der andern gedacht werden soll, und ferner sei M_2 eine beliebige solche

Kugel, welche im Zwischenraum zwischen jenen zwei Kugelflächen liegt und sie berührt.«

»Wird eine Reihe Kugeln m_1, m_2, m_3, ... so beschrieben, dass jede die drei Kugeln M_1, M_2, M_3 berührt, und dass sie einander der Ordnung nach berühren, so ist sie entweder commensurabel, oder nicht, d. h. entweder a) gelangt man, nachdem die Reihe u Umläufe um die Kugel M_2 gemacht hat, zu einer $n$ten Kugel m_n, welche wiederum die erste m_1 berührt, oder b) dies tritt nie ein, wenn auch die Reihe unendlich fortgesetzt wird.«

»Auf diese zwei Umstände hat weder der Ort, wo die Kugel M_2 angenommen, noch die Lage, die der ersten Kugel m_1 der Reihe angewiesen wird, Einfluss, d. h. es findet immer derselbe Fall und auf dieselbe Weise statt, es mögen die Kugeln M_2, m_1 unter den vorgenannten Bedingungen angenommen werden, wo man will, so dass also bloss die Grösse und Lage der [320] festen zwei Kugeln M_1, M_3 über das Vorhandensein des einen oder andern Falles entscheidet.«

»Sind R_1, R_3 die Radien der Kugeln M_1, M_3, und ist A der Abstand ihrer Mittelpunkte von einander, so hat man für den commensurabeln Fall (a):

$$(R_1 \pm R_3)^2 \mp 16 R_1 R_3 \sin^2 \frac{u}{n} \pi = A^2.$$

Die untern Zeichen gelten für den Fall, wo die festen Kugeln M_1, M_3 ausser einander liegen.«

83) Nach Angabe des letzten Satzes (82) berühren die drei Kugeln M_1, M_2, M_3 einander der Reihe nach, und jede von ihnen berührt die Reihe Kugeln m_1, m_2, m_3, ... Es schliessen sich daran folgende weitere Eigenschaften:

a) »Die drei Kugeln M_1, M_2, M_3 sind Glieder einer zweiten Kugelreihe M_1, M_2, M_3, M_4, ..., wovon jede alle Kugeln jener ersten Reihe und zugleich die ihr unmittelbar vorhergehende berührt.«

b) »Die Mittelpunkte jeder Kugelreihe, für sich genommen, liegen in einem Kegelschnitte; die Ebenen der zwei Kegelschnitte sind zu einander senkrecht, und die Hauptscheitel eines jeden sind zugleich die Brennpunkte des andern, so dass also entweder α) beide Kegelschnitte (gleiche) Parabeln, oder β) der eine Ellipse und der andere Hyperbel ist.«

c) »Beide Kugelreihen hängen so von einander ab, dass sie zugleich commensurabel, und zugleich incommensurabel sind;

d) und zwar findet für den commensurabeln Fall das folgende merkwürdige Gesetz statt, dass allemal

$$\frac{u}{n} + \frac{U}{N} = \frac{1}{2}$$

[321] ist, wobei nämlich U die Zahl der Umläufe und N die Zahl der Glieder der zweiten Kugelreihe bezeichnet (82).«

Die Sätze 80, 81 und 82 habe ich schon in den *Annales de Mathém.* tom. XVIII, und den Satz 83 im Journal für Mathematik Bd. II, S. 192, zum Beweisen vorgelegt. Im nämlichen Bande des Journals habe ich (S. 290, Lehrs. 59, 60 und 61) einige besondere Fälle des Satzes 82, so wie (S. 96) eine Aufgabe, welche den Satz 80 zum Ziele hatte, aufgestellt. In Folge dieser besondern Fälle und dieser Aufgabe hat *Clausen* im 6ten und 7ten Bande des Journals die Sätze 80 und 81 analytisch bewiesen, ohne dass er von jenen Sätzen in den Annalen Kenntniss gehabt zu haben scheint; auch sind seine Ausdrücke der Form nach von den meinigen verschieden. Ein Theil des Satzes 80, nämlich (β), ist schon im ersten Bande (S. 256) des genannten Journals von mir bewiesen. Bei spätern Entwickelungen wird sich Gelegenheit darbieten, alle vier Sätze so elementar als möglich zu beweisen. — Es entstehen verschiedene interessante Fälle, wenn man statt der einen festen Kugel (in 82 und 83) eine Ebene, oder statt des einen festen Kreises (in 80 oder 81) eine Gerade oder einen Hauptkreis annimmt.

84) Wenn beim letzten Satze (83) die Kugelreihen commensurabel sind, so findet in jeder für je zwei Kugeln, die als fest angenommen werden, und zwischen denen, nach der Reihe, nur eine andere Kugel liegt, wie z. B. für M_1, M_3 in der zweiten Reihe, die obige Bedingungsgleichung (82) statt. Es kann gefragt werden: ob auch für Kugeln, zwischen denen zwei, oder irgend eine Anzahl x, Kugeln liegen, in gleichem Sinne eine Bedingungsgleichung stattfinde? und welche es sei?

[322] Anmerkung.

85) Viele von den vorstehenden Aufgaben und Sätzen lassen sich mittelst der obigen Correlations-Systeme (§ 59), so wie auch zufolge der Anmerkungen (§ 33, § 34 u. § 48), auf verschiedene Weise umwandeln. Welche sind es? und wie lauten die neuen Aufgaben und Sätze?

Anmerkungen

des Herausgebers.

Im Nachfolgenden setzen wir die Kenntniss der Lehren voraus, die in dem 82. Hefte der Klassiker in den Anmerkungen erläutert worden sind. Den Lebenslauf unseres grossen Meisters findet der Leser im 60. Hefte der Klassiker.

1) *Zu S. 5.* Das hier erwähnte zweite »Heft« ist als solches niemals erschienen.

2) *Zu S. 6.* Die drei Fälle sind leicht in perspectivischer Zeichnung abzubilden. Der Punkt D aller Schnittebenen ist gegeben, ferner nehme man im Terrain den Kreis an. Alle Ebenen, die im Terrain diesen Kreis schneiden, gehören zur dritten Classe. Sämmtliche Tangenten an den Kreis erschöpfen die zweite Classe. Alle übrigen Geraden im Terrain bestimmen mit dem Punkte D die erste Classe. — Ferner zeichne man die dem Kegel zugehörigen unendlich fernen Punkte, d. h. den Schnitt am Himmel, der gleichfalls Kreis, Ellipse, Parabel oder Hyperbel auf der Bildfläche sein kann. Man suche, falls als Directrix mit dem Zirkel ein Kreis im Terrain gezeichnet ist, zu entscheiden, wann die Himmelscurve einem jeden der vier möglichen Fälle angehört. Man beweise ferner, dass, wenn d der Fusspunkt von D ist, es darauf ankomme, ob eine dem Horizont parallele Linie durch d den Terrainkreis treffe, berühre oder verfehle. Wann wird die Himmelscurve als Kreis erscheinen? Zugleich liegt hier eine Methode vor, mit dem Lineal allein beliebig viele Punkte eines Kegelschnittes zu construiren. Solche Studien gehören indess nicht nothwendig zum Verständniss unseres weiteren Textes.

3) *Zu S. 8.* Das logische Verständniss wird durch den Gedankengang des Textes vollständig gewonnen. Dennoch empfiehlt sich die perspectivische Zeichnung der drei Fälle, indem man Ebenen bestimmt und nun die Zeichnung der in dieser Ebene erzeugten Kegelschnitte verlangt.

4) *Zu S. 8.* Dieser Annahme eines Kreises entspricht in perspectivischer Zeichnung die Annahme eines im Bilde als Kreis erscheinenden Kegelschnittes. Je nachdem dieser den Horizont meidet, berührt oder schneidet, ist er offenbar Abbild einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel.

5) *Zu S. 14.* Die beiden Sätze über die Parabel werden aufs beste durch perspectivische Zeichnung veranschaulicht. Man verzeichne im Terrain mit dem Zirkel einen Kreis, der vom Horizont berührt wird, so ist dieser Kreis das Bild einer Parabel, da ein Punkt im Unendlichen liegt. Zwei einander parallele Tangenten müssten sich aber im Horizonte schneiden; solche giebt es nicht, da eben der Kreis den Horizont berührt. Die unendlich ferne Tangente aber ist der Horizont selbst, und diesem ist jede andere Tangente parallel, weil letztere doch einen Punkt im Unendlichen hat. Wir werden später sehen, dass der Mittelpunkt der Parabel auch im Unendlichen liegt und mit dem unendlich fernen Berührungspunkt durchaus zusammenfällt.

6) *Zu S. 14.* Liegt der Terrainkreis so, dass der Horizont nicht von ihm geschnitten wird, so ist er das Bild einer auf der Fussebene liegenden Ellipse. Parallele Tangenten sind allemal diejenigen, die sich in irgend einem Punkte des Horizontes schneiden. Schneidet der Terrainkreis den Horizont, so giebt es ebensowohl Horizontpunkte, von denen aus Tangenten gezogen werden können. Nur sind jetzt die innerhalb des Kreises liegenden Horizontpunkte ausgeschlossen.

7) *Zu S. 17.* In perspectivischer Zeichnung sind alle diese Arten von Cylindern leicht zu zeichnen. Man braucht nur den Fusspunkt d im Horizonte anzunehmen und den Terrainkreis zu variiren, wie in Anm. 5 beschrieben ist.

8) *Zu S. 27.* In diesem Satze haben wir $\mathfrak{e}\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{e}\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{x}$ verbessert.

9) *Zu S. 39.* Im folgenden Lehrsatz links ist »Vierecks« für »Vierseits« verbessert worden.

10) *Zu S. 48.* Sehr zu empfehlen ist die perspectivische Zeichnung. Man nehme zwei beliebige Gerade an, die durch ihre Fluchtpunkte I und II und ihre Terrainpunkte α und β

gegeben seien. Für die dritte Gerade braucht offenbar nur der Fluchtpunkt III gegeben zu sein, da die Construction unmöglich von ihrem Terrainschnitt γ abhängig sein kann. Man construire eine Ebene durch I, α und III und bestimme deren Schnittpunkt B mit der Geraden $II\beta$. — Verbindet man B mit III, so findet man den Schnitt A in der Geraden $I\alpha$ und AB ist die gesuchte Gerade.

11) *Zu S. 54.* Es giebt kaum Sätze der synthetischen Geometrie, die geeigneter sind zur perspectivischen Zeichnung, als die hier erläuterten, dabei sind die Zeichnungen ohne Ausnahme wenn auch mühsam, so doch ganz leicht auszuführen, weshalb wir hier keine mitzutheilen uns veranlasst sehen. Es mag nur noch darauf hingewiesen werden, dass in überraschend einfacher Weise der Mittelpunkt des Hyperboloids verzeichnet werden kann, wie auch der Asymptoten-Kegel, der durch den Kegelschnitt am Himmel charakterisirt ist. Es empfiehlt sich ferner, die beiden Schaaren von Geraden des Hyperboloids zu zeichnen und endlich den Schatten, den eine Zenithsonne auf das Terrain werfen würde. Dadurch tritt erstens das gezeichnete Hyperboloid plastischer hervor, zweitens erkennt man, dass erst nach Vollendung desselben der Horizont in beliebiger Lage angenommen zu werden braucht, m. a. W. die projectivischen Geraden können durch drei Elementenpaare gegeben, das Hyperboloid gezeichnet und dann erst die Lage jener beiden Geraden im Raume beliebig gewählt werden.

12) *Zu S. 56.* Die genannten Fälle sind sämmtlich überraschend einfach zu zeichnen möglich.

13) *Zu S. 66.* Die Zeichnung der hyperbolischen Paraboloide ist nicht schwieriger, da die Annahme unendlich ferner Punkte und Geraden bequem auszuführen ist. So hat z. B. ein Ebenenbüschel mit unendlich ferner Axe ein einfacheres Ansehen, als ein solches mit endlicher Axe. Denn letzteres wird abgebildet durch zwei Strahlbüschel (nämlich am Himmel und im Terrain), die im Horizonte ihren perspectivischen Durchschnitt haben, während im ersten Falle nur ein Strahlbüschel mit dem Centrum im Horizont auftritt. Das Strahlbüschel am Himmel ist aufgelöst in das Bild der unendlich fernen Axe und in den Horizont. Die zuletzt in § 52 aufgeführten Fälle verlangen nur noch die Kenntniss der Orthogonal-Constructionen, wie eine solche schon zu § 27 ausgeführt wurde. S. Heft 82, Anm. 4.

14) *Zu S. 79.* Wie wenig die Figuren 51 und 52 den gerechter Weise zu stellenden Anforderungen genügen können, ist leicht erkenntlich. Leider aber können wir hier nicht tiefer auf die Probleme eingehen, weil sie eine genaue Bekanntschaft mit der Maassperspective erfordern, die wir hier nicht voraussetzen wollen. Die Sätze 14 α, β, γ bieten eine Fülle anregenden Stoffes für die Maassperspective dar.

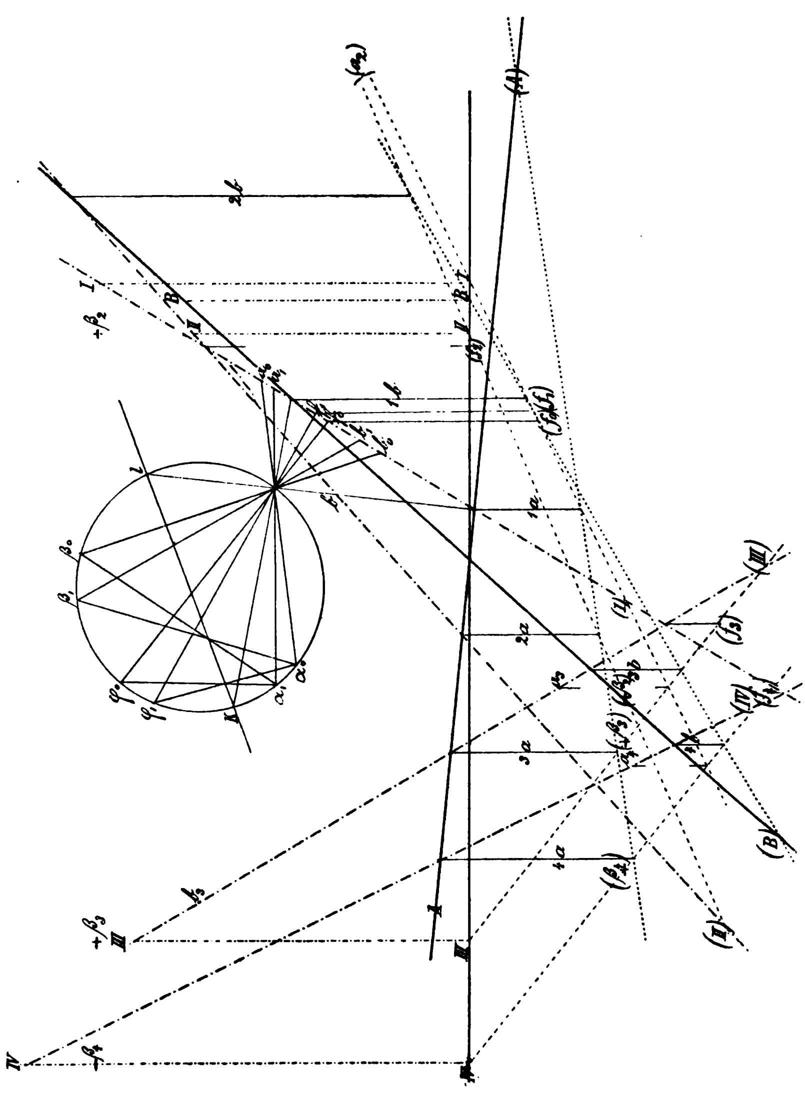
15) *Zu S. 82.* Eine ähnliche Aenderung des jetzt folgenden doppelseitigen Textes musste vorgenommen werden, wie in der Anmerkung zu § 25, da die Anzahl der n-Flache und n-Ecke genau $n$mal zu gross angegeben war, denn im Original ist diese Anzahl $= 3, 4, 5 \ldots n$. — In dieser Anzahl kommt aber jedes Stück $n$mal vor, daher es heissen muss $3, 4, 5 \ldots (n-1)$. Dem entsprechend ist der Text verbessert worden.

16) *Zu S. 87.* Man beachte die Berichtigung, die in der vorstehenden Anmerkung 15 gekennzeichnet ist. Es braucht kaum noch erwähnt zu werden, dass die perspectivische Ausführung nicht die geringste Schwierigkeit darbietet; indess ist die logische Kraft der projectivischen Beweisführung so schlicht und bewundernswerth, dass man kaum an Klärung im vorliegenden Falle gewinnen dürfte. Man nehme immerhin $n = 4$ und führe die Zeichnung aus. Sie wird alsdann schon ziemlich mühsam, aber interessant ist es, sich von der Richtigkeit der Ausführung zu überzeugen und die Richtung einer jeden Seite des gefundenen Vierecks genau verfolgen zu können. Da man die gefundenen Vierecke innerhalb des Rahmens zu haben wünscht, so wird man gut thun, das zu suchende Viereck erst anzunehmen und dann die 2×4 Geraden den Bedingungen gemäss, aber sonst beliebig, zu verzeichnen. Jetzt nimmt man die Lösung fort und sucht die Construction dem Texte gemäss auszuführen. Schon bei n gleich 4 wird die Zeichnung ziemlich complicirt, weil doch 8 Gerade mit ihren Verticalebenen angegeben werden müssen.

17) *Zu S. 89.* Die Lösung dieser eleganten Aufgabe ist ebenso wie die vorige bewundernswerth einfach und durchsichtig in ihrer logischen Kraft. Fraglich jedoch erscheint, ob der Forderung *Gergonne*'s: »*construire rigoureusement la droite qui etc.*« mit dem logischen Beweise allein genügt wird. Bei vier beliebig liegenden Geraden im Raume kann man in der That eine perspectivische Auflösung verlangen, und dass die

Figur 53, wie der Autor meint, »der Vorstellung behülflich sein mag«, dürfte wohl bezweifelt werden. Anbei folge deshalb eine Durchführung der ganzen Aufgabe, und zwar genau auf Grund der *Steiner*'schen Lösung. Zunächst überzeuge sich der Leser davon, dass die beiden Geraden A und B in der That der geforderten Bedingung entsprechen (siehe Figur Seite 154). Dazu suche man zunächst die 4 Geraden I (I), II (II), III (III) und IV (IV) mit Hülfe ihrer Verticalebenen, Fluchtpunkte und Terrainschnitte aufzufassen, man beziehe auch je zwei derselben auf einander und überzeuge sich davon, dass sie sämmtlich windschief im Raume an einander vorbeigehen. Zu diesem Zwecke suche man die Schnittpunkte der Terrainschnitte je zweier Geraden auf und sehe zu, dass die Längen der Fusslothe an dieser Stelle für beide Gerade verschieden seien. Dann überzeuge man sich von der Richtigkeit der Lösung. Dazu sind für die Geraden A diejenigen 4 Fusslothe verzeichnet worden, die zu den Durchschnittspunkten mit den 4 gegebenen Geraden gehören; sie sind mit $1a$, $2a$, $3a$ und $4a$ bezeichnet. — Ebenso überzeuge man sich davon, dass $1b$ zu der Geraden B und zur Geraden I (I) gehört, $2b$ zu B und der zweiten Geraden, u. s. f. — Um die Lösung zu finden, wurde die Gerade I gewählt, und 3 beliebige Ebenen α, β, γ hindurchgelegt; als solche ergaben die folgenden Ebenen die einfachsten Constructionen: 1) die Ebene α wurde **vertical** durch die Gerade I (I) gelegt und ergab die Schnittpunkte $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{a}_4$ ($\mathfrak{a}_2$ fällt rechts aus dem Rahmen hinaus). Die Ebene β wurde 2) **brachial** angenommen. Da die brachiale Ebene die Gerade I enthalten soll, so ist sie völlig bestimmt; ihre Flucht geht parallel dem Horizont durch I und ihr Terrainschnitt parallel dem Horizont durch (I). Der Schnitt dieser Ebene mit den 3 anderen Geraden, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$ und $\mathfrak{b}_4$, ist leicht gefunden (durch Verbindung von (β_2) mit β_2, u. s. w.). Endlich kann man 3) diejenige Ebene φ wählen, die durch das Auge geht; dieselbe projicirt sich in der Geraden I (I) selbst. Es ergeben sich sofort die drei Punkte $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}_3$, $\mathfrak{f}_4$. Nun bestimmt man die Durchschnittspunkte der Projectionsstrahlen mit der Geraden I; es ergiebt $\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_2$ den Punkt $\mathfrak{b}_0$ und $\mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_2$ den Punkt $\mathfrak{b}_1$, ebenso $\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2$ den Punkt $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_2$ den Punkt $\mathfrak{a}_0$. Um die Schnittpunkte $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_0$ zu finden, muss man einen Kunstgriff anwenden. Man sucht nämlich die Fusspunkte $(\mathfrak{f}_1)$ und $(\mathfrak{f}_0)$ im Terrain auf, indem man $(\mathfrak{f}_3)$ mit $(\mathfrak{f}_2)$ und $(\mathfrak{f}_4)$ mit $(\mathfrak{f}_2)$ ver-

Construction der Geraden A und B, welche 4 windschiefe Gerade I, II, III, IV schneiden.



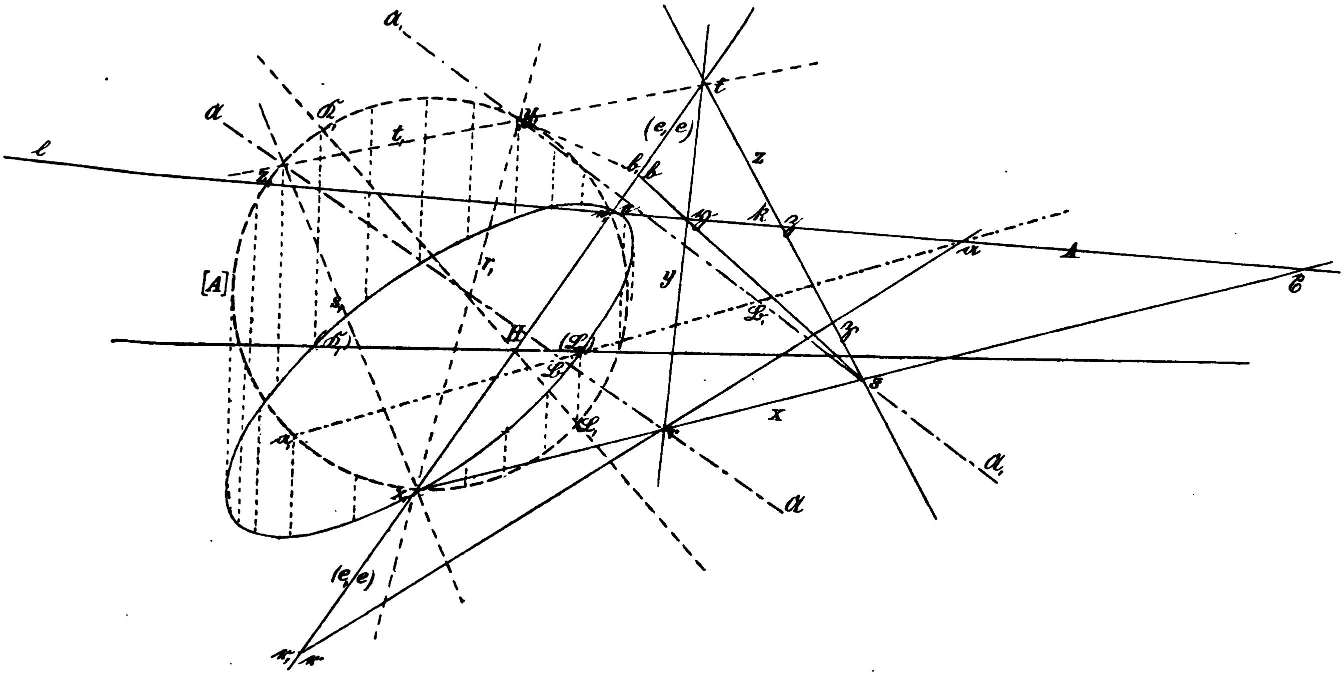
bindet. Die Lothe in $(\mathfrak{f}_1)$ und $(\mathfrak{f}_0)$ ergeben die gesuchten Punkte $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_0$. Freilich könnte man statt der Ebene φ eine andere wählen und Flucht und Terrainschnitt beliebig annehmen. Der Kreis gestattet dann die bekannte und elegante *Steiner*'sche Lösung. Die gefundenen Punkte k und l bestimmen die beiden geforderten Punkte, in denen die entsprechenden Elementenpaare sich decken. Es sind das diejenigen Punkte, deren Lothe durch $1a$ und $1b$ bezeichnet sind. Die weitere Construction ist, weil einfach, aus der Zeichnung fortgelassen. Man lege eine Ebene durch $1a$ und IV (IV), so muss die gesuchte Gerade in dieser Ebene liegen. Man bestimmt den Schnitt derselben mit den Geraden II und III und findet $2a$ und $3a$, somit auch $4a$, welches richtig mit $1a$, $2a$ und $3a$ in einer Geraden liegt. Ganz ebenso verfährt man mit dem Punkte über $1b$, findet $2b$, $3b$ und durch Verbindung $4b$. — Von allen diesen Lothen liegt $2b$ allein im Rücken des Beschauers, denn der Fusspunkt befindet sich über dem Horizonte. — Für eine praktische Ausführung ist es auch hier nothwendig, umgekehrt zu verfahren, die Linien A und B zu zeichnen, und die vier Geraden hindurchzulegen, anders wird man es schwerlich erreichen, dass die wesentlichen Theile der Zeichnung innerhalb des Rahmens liegen. Jeder Punkt, der aus dem Rahmen herausfällt, vermehrt die Anzahl von Nebenconstructionen. In beiliegender Zeichnung gestattete das Reissbrett sowohl den Punkt $(\mathfrak{a}_2)$ als auch $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}_4$ zu erhalten. Nachdem sie zur Construction benutzt waren, konnte man sie in der Zeichnung entbehren. Die im Text folgende Aufgabe, »die Durchschnittspunkte eines gegebenen einfachen Hyperboloids und einer einfachen Geraden zu finden«, ist gleichfalls gelöst, da es leicht ist, beliebig viele Strahlen des Hyperboloides zu zeichnen.

18) *Zu S. 92.* Man bemerke, dass die Fig. 54 streng perspectivisch aufgefasst werden **kann** und alle vorkommenden Punkte definirt werden können. Unbeschadet der Allgemeinheit kann die Fläche ABC im Terrain liegend gedacht werden. D ist freilich irgendwo im Projectionsstrahl zu denken, d. h. das Fussloth ist nicht bestimmt, es kann jeder Punkt der ganzen durch D gehenden Verticale als Fusspunkt angenommen werden, D kann selbst im Rücken des Beschauers liegen, ohne dass irgend etwas an der Construction geändert zu werden brauchte; γ und α sind auch dann erst bestimmt, wenn D seinen Fusspunkt erhält. Die Punkte

𝔟 und 𝔟 liegen im Terrain, 𝔞 und 𝔠 in der Geraden *BD*. Man sieht also, dass zu der interessanten Allgemeinheit, die im Text die Tetraëder-Construction beweist, eine fernere unendliche Mannigfaltigkeit hinzukommt, d. h. die gezeichneten Raumfiguren sind selbst noch unendlich mannigfach deutbar. — Die Zeichnung bleibt unverändert, auch wenn D unendlich fern liegt, das Tetraëder unendlich gross wird.

19) *Zu S. 100.* Die bis zu dieser Stelle im § 59 vorgetragenen Beziehungen und Sätze illustrirt *Steiner* mit der Figur 55, in der alle »nicht punktirten Linien in der Ebene des Papiers liegen sollen«, während alle übrigen in einer beliebigen Ebene E_1 sich befinden. In der That fehlt in der Figur jede Andeutung über die räumliche Lage von E_1. Die Mannigfaltigkeit möglicher Auffassungen bietet aber ein hohes Interesse dar und die Schönheit der hier vorgeführten Beziehungen gewinnt in mehrfacher Hinsicht durch klare perspectivische Zeichnung. Schon die »nicht punktirten Linien« brauchen keineswegs auf die Ebene des Papiers beschränkt zu werden, wie ja auch der Verfasser jede andere Deutung dem Leser überlässt. Wir wollen die »nicht punktirten Linien« auf das Terrain beziehen, wodurch der Allgemeinheit der Betrachtung nicht geschadet wird. Ferner orientiren wir uns über *Steiner*'s Zeichnung, indem wir in beistehender Figur alle vorkommenden Punkte genau copiren. Alsdann wählen wir eine ganz beliebige Linie als Horizont, drehen auch *Steiner*'s Figur 55 so, dass unser Horizont horizontal vor uns liegt. Jetzt haben alle »nicht punktirten Linien« eine bestimmte Deutung erhalten. Die Punkte r und s liegen nicht mehr nahe bei einander, sondern sind weit von einander entfernt, da sie nahe beim Horizont sich befinden. Die Gerade $(e e_1)$ ist der Terrainschnitt der Ebene E_1 und der dritte Punkt t des Terrain-Hauptdreiecks liegt im Rücken des Beschauers. Das geschlossene Hauptdreieck ist nicht einmal rst, wie es im Bilde erscheint, sondern es wird aus den beiderseits unendlich langen Strecken gebildet, von r nach unten in die Unendlichkeit (Beschauerebene) und oben aus der Unendlichkeit der Bildfläche herab bis t. Ebenso ist es mit st bestellt, während die Strecke x vorn im Terrain liegt. Die Linien rt und st divergiren in der Fussebene, während sie bloss im Bilde convergiren, denn wenn rt den Horizont schneidet in einem Punkte h, so wäre die Linie sh parallel rh, mithin divergirt st beträchtlich. — Ueber die Lage von

Schiefe Projection im Raume oder Beziehung aller Punkte einer Ebene auf alle Punkte einer anderen Ebene.



E^1 ist bis jetzt nur soviel festgestellt, dass diese Ebene das Terrain in (ee_1) schneidet, also ist die Flucht noch ganz willkürlich zu wählen. Die beliebig angenommenen Punkte y_1 und z_1 sollen in der Ebene E_1 liegen. Sobald man die Fusspunkte (y_1) und (z_1) verzeichnet hat, ist die Ebene fixirt, oder man wählt eine beliebige Flucht $\mathfrak{K}\mathfrak{L}$, dann sind die Fusslothe von y_1 und z_1 fixirt. Sofort tritt die Lage des Hauptdreiecks $x_1 y_1 z_1$ im Raume deutlich hervor. Nur x_1 liegt zugleich im Terrain, weil in (ee_1). — Der Kegelschnitt $[A]$ ist mit dem Zirkel durch die Punkte x_1, y_1, z_1 gezogen worden. Ihm wird die im Terrain liegende Gerade A entsprechend gefunden. — Der als Kreis erscheinende Kegelschnitt $[A]$ ist in unserer Zeichnung offenbar eine Hyperbel, deren Lage im Raume, deren Asymptoten und deren Mittelpunkt leicht angebbar sind. Zunächst suche man die dem Kegelschnitt entsprechende Gerade A auf. Der willkürlich gewählte Punkt $\mathfrak{a}_1$ bestimmt mit z_1 den Punkt $\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1$ (welche Verbindungsgerade in der Figur fortgelassen wurde), und mit y_1 einen Punkt $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ (der aus der Zeichnung herausfällt). Nun ziehe man $\mathfrak{r}_1 r$ und $\mathfrak{s}_1 s$; deren Durchschnittspunkt ist der dem $\mathfrak{a}_1$ entsprechende Punkt $\mathfrak{a}$. — Der Kegelschnitt $[A]$ schneidet den Terrainschnitt ausser in x_1 nur noch in $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$, daher ist die gesuchte Gerade A die Verbindung von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$, denn der Punkt $\mathfrak{e}_1$ des Kegelschnitts muss sich selbst, als Punkt $\mathfrak{e}$ der Geraden entsprechen. Zufällig befindet sich die Gerade A im Rückenterrain. Wenden wir uns nun zur Auffassung des Kegelschnittes $[A]$, so ist es klar, dass, da derselbe in der Ebene E_1 liegt, deren Flucht die Gerade $\mathfrak{K}_1\mathfrak{L}_1$ ist, die Punkte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{L}_1$ in der Unendlichkeit liegen; es sind die beiden unendlich fernen Punkte der Hyperbel $[A]$. Die Fusslothe reichen deshalb bis zum Horizont und zwar so, dass $\mathfrak{K}_1$ über und $\mathfrak{L}_1$ unter demselben sich befindet. Der vor dem Beschauer liegende Hyperbelzweig ist $\mathfrak{K}_1 z_1 \mathfrak{a}_1 x_1 \mathfrak{L}$, und zwar liegt das Stück $\mathfrak{K}_1 z_1 x_1$ über der Fussebene, $x_1 \mathfrak{L}_1$ unter derselben, beide Stücke sind unendlich lang. Im Rücken des Beschauers liegt der Hyperbelzweig $\mathfrak{K}_1 y_1 \mathfrak{e}_1 \mathfrak{L}_1$ und zwar $\mathfrak{K}_1 y_1 \mathfrak{e}_1$ unter der Fussebene und $\mathfrak{e}_1 \mathfrak{L}_1$ über derselben. Die beiden an $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{L}_1$ an das Kreisbild gezogenen Tangenten sind die Asymptoten der Hyperbel $[A]$, und construirt man den Punkt, dessen Polare die Sehne $\mathfrak{K}_1\mathfrak{L}_1$ ist, so erhält man den Mittelpunkt der Hyperbel, der im vorliegenden Falle im Rücken des Beschauers liegt, und zwar ziemlich nahe hinter ihm, da der Punkt hoch oben in der

Zeichnung vorzustellen ist; denn sein Fussloth ist nach oben gerichtet, folglich liegt der Mittelpunkt im Rücken über der Erde. — Für einige Punkte der Hyperbel sind in der Figur noch Fusslothe construirt. Die Gesammtheit der letzteren giebt ein elliptisches Bild, das wir als Zenithschatten im Terrain auffassen können. Selbstverständlich stellt dasselbe eine Hyperbel dar, deren Zweige sich bei ($\mathfrak{K}_1$) und ($\mathfrak{L}_1$) trennen. Asymptoten und Mittelpunkt derselben sind zugleich die richtigen Zenithschatten der entsprechenden wirklichen Gebilde von $[A]$. Unter allen möglichen anderen Deutungen von y_1 und z_1 ist die Annahme von Interesse: beide Punkte liegen unendlich weit. Alsdann reichen ihre Fusslothe bis zum Horizont. Die Ebene E_1 hat alsdann eine bestimmte Flucht $y_1 z_1$, folglich ist t in der Unendlichkeit, d. h. der Horizont muss durch t hindurch streichen, in beliebiger Richtung. Speciell darf auch $x_1 t$ jetzt als Horizont angenommen werden. Geschieht solches, so ist das Hauptdreieck $x_1 y_1 z_1$ am Himmel, rst auf der Fussebene, aber in derselben ist rt parallel st. Die ganze Ebene E_1 ist jetzt unendlich weit. Die Constructionen entsprechender Punkte sind bei alledem in keiner einzigen Hinsicht verändert. Der Leser, der sich mehrfach im Zeichnen geübt hat, wird gut thun, nicht blos die Lage von E_1 in *Steiner*'s Zeichnung, sondern auch die beiden Hauptdreiecke mannigfach zu ändern, es ist besonders zu empfehlen, die perspectivisch streng durchgeführte Zeichnung sich in der Phantasie vorzuführen. Man bringt auf solche Weise die so interessante und anwendungsreiche »schiefe Projection« sich zur lebhaftesten Vorstellung. — Die logische Kraft der vorgeführten sowie der im Text folgenden Beweise wird nicht im mindesten beeinträchtigt. Man fühlt sich nicht einmal an den Ort des Auges gebannt. So z. B. kann man sich leicht denken, das Auge befinde sich in $\mathfrak{a}$ und durchwandere die ganze Gerade A. Von jeder Stelle $\mathfrak{a}$ aus werden die Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ sich zu schneiden scheinen, denn $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ überdecken sich von $\mathfrak{a}$ aus; und dieser Schnittpunkt projicirt sich nach $\mathfrak{a}_1$ auf die Ebene E_1, und so vermag man den ganzen Kegelschnitt $[A_1]$ von A aus zu verfolgen; den Strecken $\mathfrak{x}\mathfrak{a}\mathfrak{z}\mathfrak{y}\mathfrak{e}$ entspricht der Zug $x_1 \mathfrak{a}_1 z_1 y_1 \mathfrak{e}_1$, u. s. f. — Zwischen z_1 und y_1 kann man leicht den dem unendlich fernen $\mathfrak{K}_1$ entsprechenden Punkt k construiren. Folgende Aufgaben, die sich an *Steiner*'s oder an jede andere Figur anschliessen, sollen dem Leser empfohlen sein: 1) Welche Gerade in E_1 entspricht demjenigen Kegelschnitt, der im Terrain liegt und dem Auge als Kreis erscheint? 2) Man beziehe die unendliche Ferne als Ebene E_1 auf die Fussebene, also im Bilde den Himmel auf das Terrain; alsdann giebt es selbstverständlich keine andere Zenithschattencurve als den geradlinigen Horizont; dem als Kreis um r, s, t erscheinenden Kegelschnitt entspricht dieselbe Gerade am Himmel, wie bei jeder anderen Annahme der Ebene E_1. 3) Zwei unendlich ferne Punkte in E entsprechen auch in E_1 zwei unendlich fernen Punkten. Wo liegen dieselben? Das eine Paar ist im Punkte H, der sich selbst entspricht. Zur Bestimmung des anderen Paares genügt die Kenntniss des unendlich fernen Projectionsstrahles, den man findet, wenn man die Fluchtpunkte der Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ aufsucht und dieselben durch eine Gerade verbindet. Diese schneidet die Flucht $\mathfrak{K}_1 \mathfrak{L}_1$ in dem gesuchten Punkte der E_1. Der dem letzteren in E entsprechende ist leicht nach der Regel zu construiren. Er muss in den Horizont fallen. (Er liegt in der Zeichnung ganz nahe bei s).

20) *Zu S. 101.* Die schlichte logische Kraft der Beweise wird nicht getrübt, wenn man die Kegelschnitte $[Q_1]$ und $[R]$ zeichnet, denn die Flucht der Ebene ist die Gerade R_1 und der Horizont ist die Gerade Q. In unserer Zeichnung sind die Punkte k und l auf A, die den unendlich fernen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{L}_1$ entsprechen, eingezeichnet, und der fragliche Kegelschnitt $[R]$ ist der durch die fünf Punkte r, s, t, k und l bestimmte. Ausserdem streicht derselbe nothwendig durch den Punkt H des Horizontes, da dieser zur Flucht gehört und sich selbst entspricht. Durch ebendenselben Punkt H streicht aber auch der Kegelschnitt $[Q_1]$. Die Tangenten an beiden $[Q_1]$ und $[R]$ sind aber Asymptoten.

21) *Zu S. 102.* Der berührende Kegelschnitt kann leicht gezeichnet werden, da man die Tangente T an $[A]$ hat.

22) *Zu S. 103.* In unserer Zeichnung ist der Punkt $\mathfrak{y}$ hinabzurücken in den Horizont, weil dieser die Grade Q darstellt.

23) *Zu S. 103.* Der Satz ist evident, weil die Gerade R_1 die unendliche ferne Flucht ist und ihr $[R]$ entspricht. Wird letzteres von A berührt, so hat $[A]$ einen Punkt in R_1, ist also Parabel u. s. f. —

24) *Zu S. 106.* Geht in unserer letzten Figur (S. 157) ein Strahlbüschel durch $\mathfrak{a}$, so entspricht ihm diejenige Schaar von Kegelschnitten, die durch die vier Punkte $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{a}_1$ bestimmt sind.

25) *Zu S. 131.* In den »Gesammelten Werken« befindet sich an dieser Stelle folgende Bemerkung: »Die Frage (15) muss modificirt werden, da der gesuchte Ort der in Rede stehenden Geraden nicht eine Fläche, sondern das gesammte Secanten-System einer Raumcurve dritter Ordnung bildet.

26) *Zu S. 133.* Die perspectivische Zeichnung im Terrain zeigt, dass die erzeugte Curve stets den Horizont berühren muss und niemals denselben schneiden kann, im Bilde kann dieselbe in jeder der 4 Formen von Kegelschnitten erscheinen.

27) *Zu S. 134.* Die Ebenen des Ebenenbüschels bilden am Himmel ein Strahlbüschel. Die verlangten Ebenen erhalten eben dieses Strahlbüschel als Fluchten, daher fehlen nur noch die Terrainschnitte. Unbeschadet der Allgemeinheit kann man die Geraden *A* im Terrain annehmen; dann hat man nur die Beziehung dieser Geraden mit dem Horizont als Punktenreihe zu betrachten, d. h. in der Punktenreihe, wie sie durch das Strahlbüschel am Himmel bestimmt wird, die daher mit *A* projectivisch ist.

28) *Zu S. 138.* Die Formel im Text ist entsprechend der Anmerkung zu § 25 verbessert worden.

Schlussbemerkung: Es ist ein dringendes Bedürfniss für perspectivische Zeichnungen, alle Specialfälle der Richtungen von Linien und Ebenen mit bestimmlen Namen zu bezeichnen. Als zweckmässig empfiehlt sich folgendes System:

Linien und Ebenen einfacher Richtung:

Linien		Ebenen	
Bezeichnung	zugleich	Bezeichnung	zugleich
1. Orthogonal	II u. III (5 u. 6)	I. Frontal	2 u. 3 (V u. VI)
2. Vertical	III u. I (6 u. 4)	II. Horizontal	3 u. 1 (VI u. IV)
3. Brachial	I u. II (4 u. 5)	III. Stathmal	1 u. 2 (IV u. V)

Linien und Ebenen von einfach unendlicher Mannigfaltigkeit:

Linien			Ebenen		
Bezeichnung	von	bis	Bezeichnung	von	bis
4. Frontal	V (2)	VI (3)	IV. Orthogonal	5 (II)	6 (III)
5. Horizontal	VI (3)	IV (1)	V. Vertical	6 (III)	4 (I)
6. Stathmal	IV (1)	V (2)	VI. Brachial	4 (I)	5 (II)

Definitionen.

Linien und Ebenen einfacher Richtung:

1. Orthogonal heisst jede Gerade, die senkrecht steht zur Bildfläche.
2. Vertical heisst jede Gerade, die senkrecht steht zur Fussebene (Richtung des »vertex«).
3. Brachial heisst jede Gerade, die parallel der Richtung der ausgestreckten Arme ist.

I. Frontal heisst jede Ebene parallel der Bildfläche (oder Stirn des Beschauers).
II. Horizontal heisst jede Ebene parallel der Fussebene.
III. Stathmal heisst jede Ebene parallel der durch das Auge streichenden, zur Fussebene senkrechten Ebene. (Stathme heist die Gerade SS im Hauptpunkte H senkrecht zum Horizont.)

Linien und Ebenen von einfach unendlicher Mannigfaltigkeit:

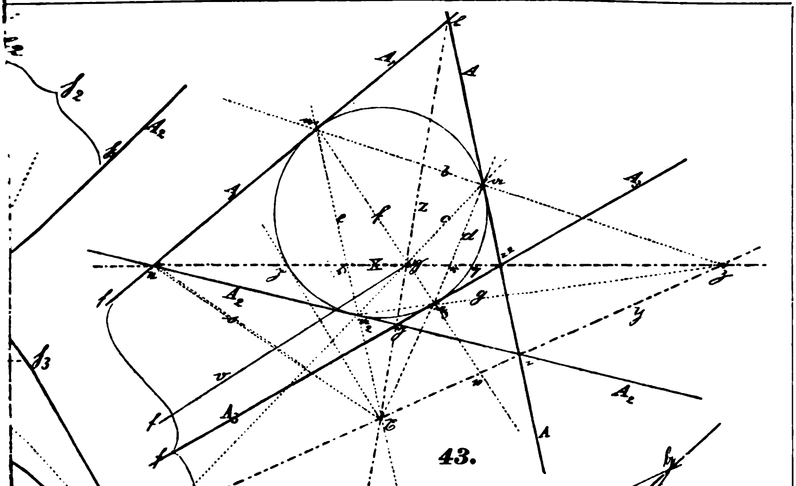
4. Frontal heisst jede Linie parallel der Bildfläche. Specialfälle 2 u. 3.
5. Horizontal heisst jede Linie parallel der Fussebene. Specialfälle 3 u. 1.
6. Stathmal heisst jede Linie parallel der Stathmalebene. Specialfälle 1 u. 2.

IV. Orthogonal heisst jede Ebene senkrecht zur Bildfläche. Specialfälle II u. III.
V. Vertical heisst jede Ebene senkrecht zur Fussebene. Specialfälle III u. I.
VI. Brachial heisst jede Ebene senkrecht zur Stathmalebene. Specialfälle I u. II.

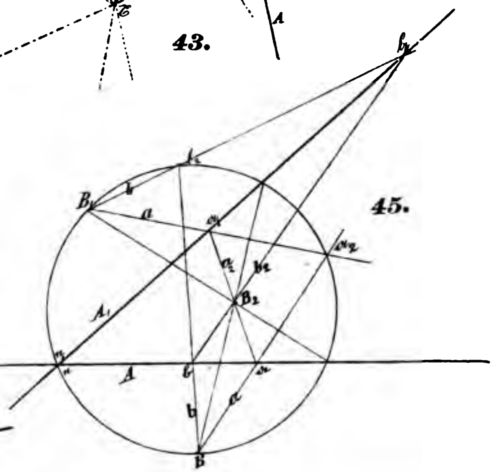
Dem Leser sei überlassen, für die sechs Arten von Linien und Ebenen die bezüglichen Fluchtpunkte und Fluchtlinien, die ein orthogonales System bilden, aufzusuchen, sowie deren Spielraum bei einfach unendlicher Mannigfaltigkeit.

A. J. v. Oettingen.

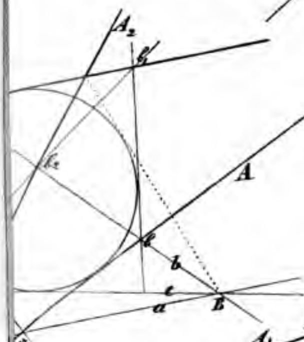
Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.



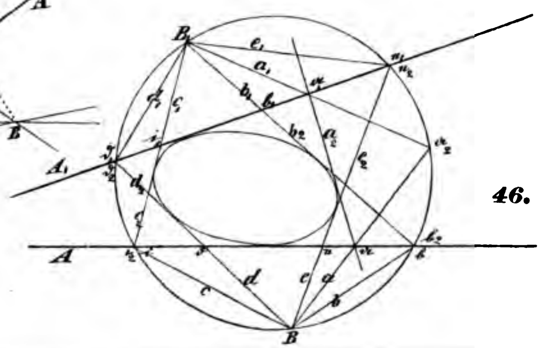
43.



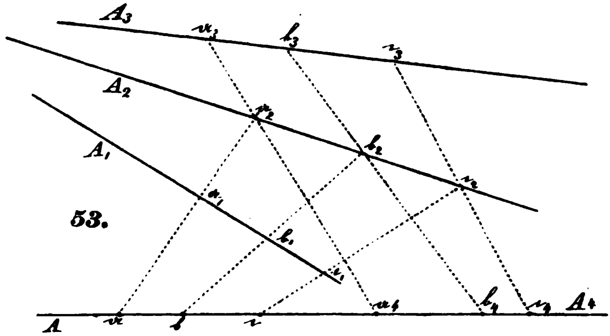
45.



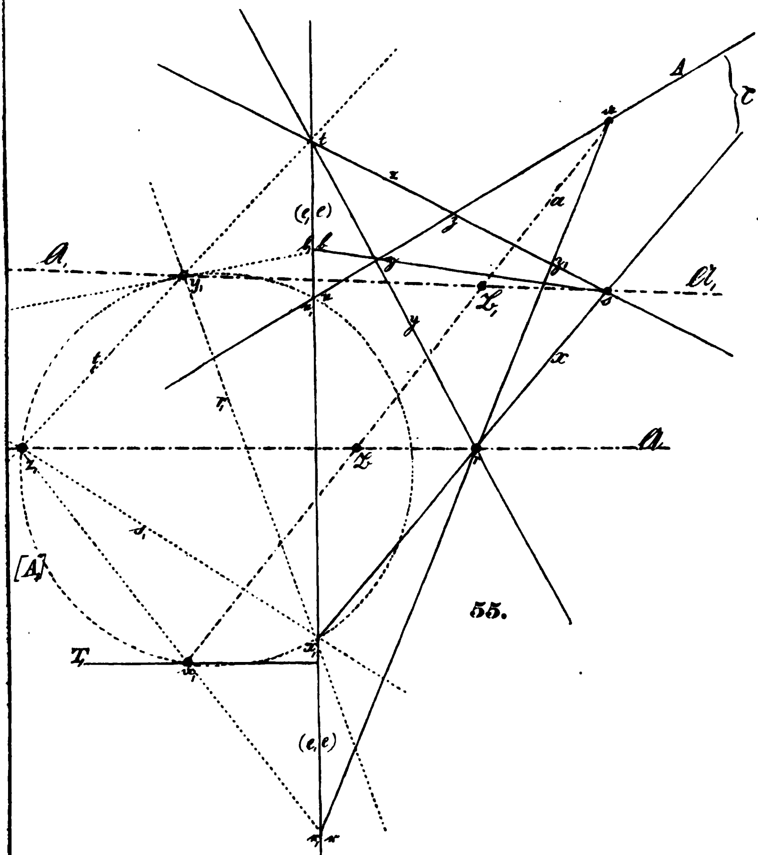
44.



46.



53.



55.

CABOT SCIENCE LIBRARY

CANCELLED
MAY 2 8 1999
BOOK DUE

3 2044 051 175 446

Nr. 17. **A. Bravais,** Abhandlunge [illegible] und in Gemeinschaft mit P. Groth herausg. von C. u. E. Blasius. Mit 1 Taf. (50 S.) ℳ 1.—.

» 19. Üb. d. Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen von **Laplace** (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chasles** (1838) und **Dirichlet** (1839). Herausg. von A. Wangerin. (118 S.) ℳ 2.—.

» 46. Abhandlungen über Variations-Rechnung. I. Theil: Abhandlungen von **Joh. Bernoulli** (1696), **Jac. Bernoulli** (1697) und **Leonhard Euler** (1744). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 19 Textfiguren. (144 S.) ℳ 2.—.

» 47. —— —— II. Theil: Abhan[dlungen] von **Lagrange** (1762, 1770), **Legendre** (1786) und **Ja**[illegible] 3[illegible]). [H]erausgegeben von P. Stäckel. Mit 12 Textfiguren. [illegible] S.) ℳ 1.60.

» 60. **Jacob Steiner,** Die geometr. Constructio[ne]n, [a]usgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen [K]reises, [al]s [L]ehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und z[illegible] [prakti]schen [B]enutzung. (1833.) Herausgegeben von A. [J]. v. Oettingen. [M]it 25 Textfiguren. (85 S.) ℳ 1.20.

» 64. **C. G. J. Jacobi,** Über die vier[fach] [periodi]schen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abel'schen Transcendenten stützt. (1834.) Herausgegeben von H Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (40 S.) ℳ —.70.

» 65. **Georg Rosenhain,** Abhandlung über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting. (94 S.) ℳ 1.50.

» 67. **A. Göpel,** Entwurf einer Theorie der Abel'schen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) ℳ 1.—.

» 71 [illegible] Untersuchungen über die Reihe: [illegible]

[illegible]

3 2044 051 175 446