



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

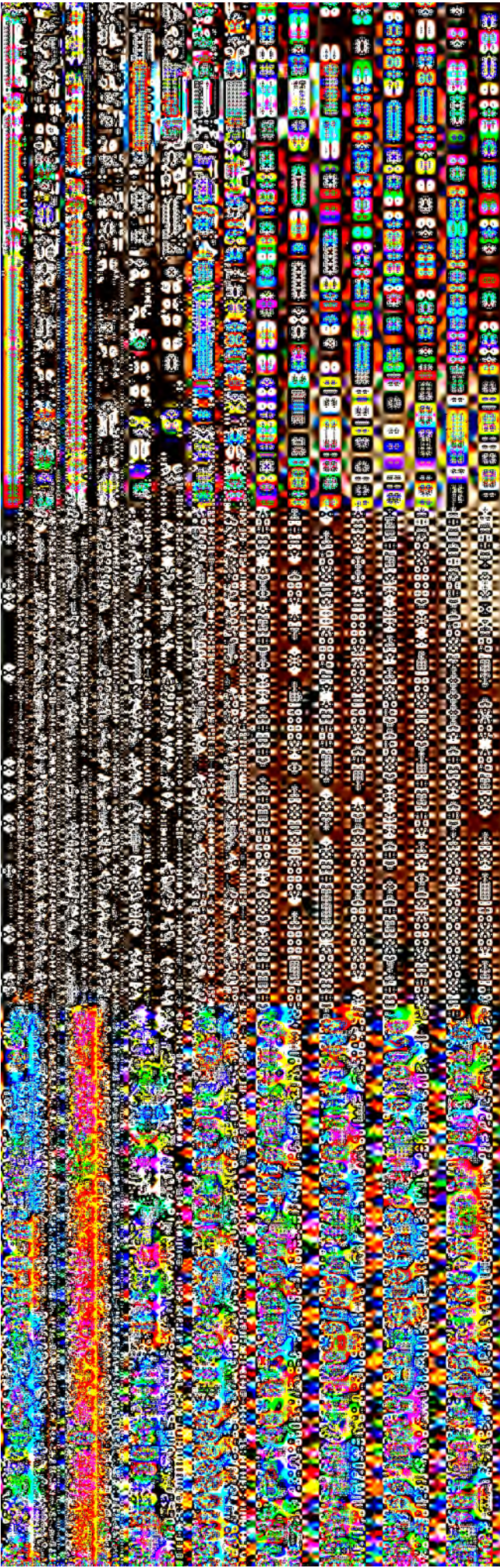
- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

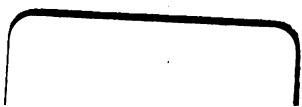
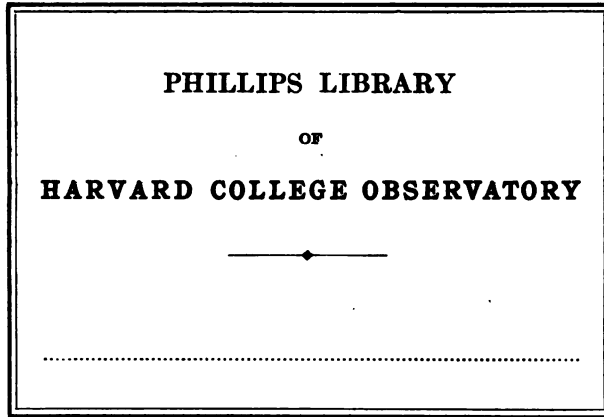
En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

AN, FEDOR

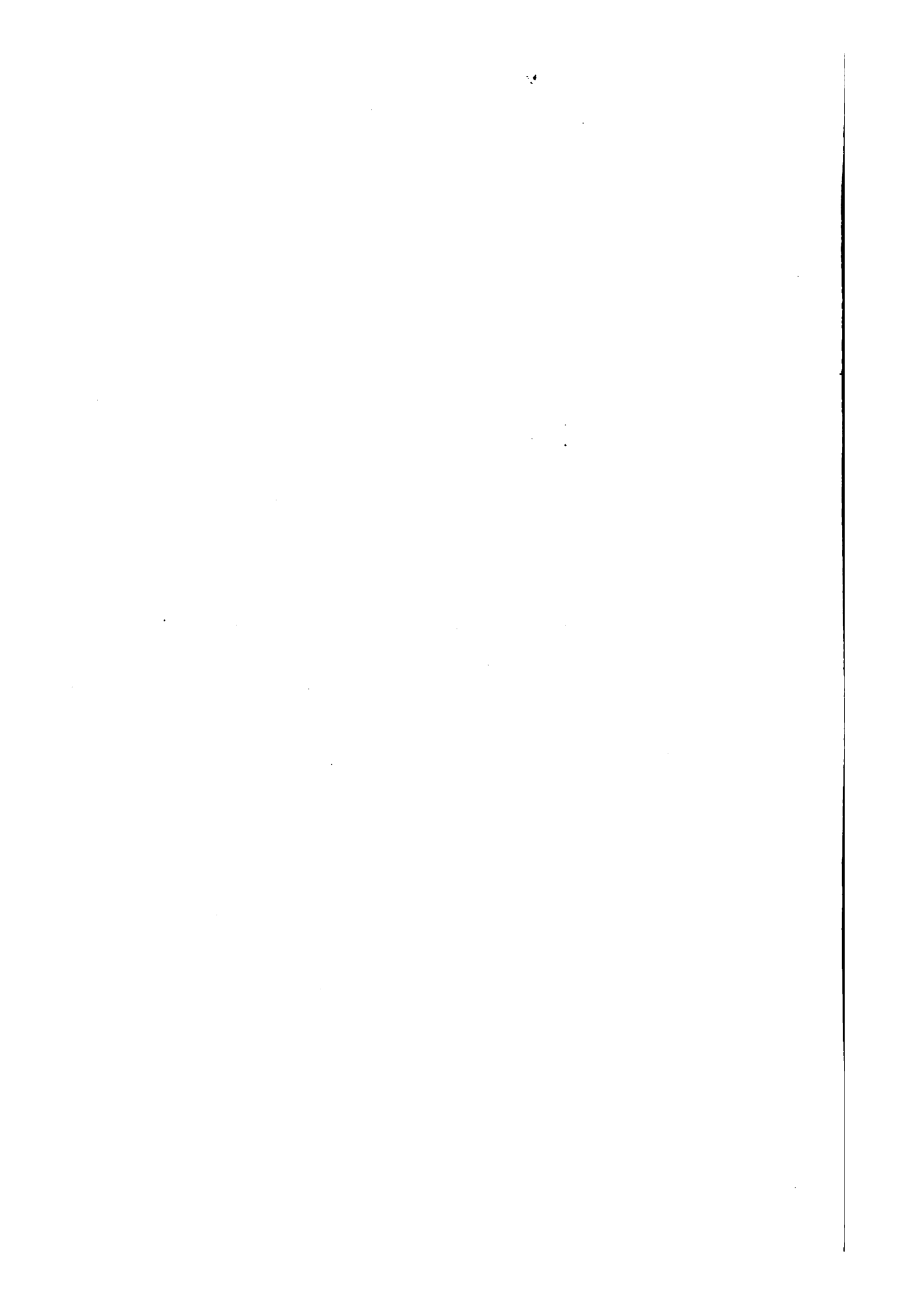
de Logarithmos
Cimales

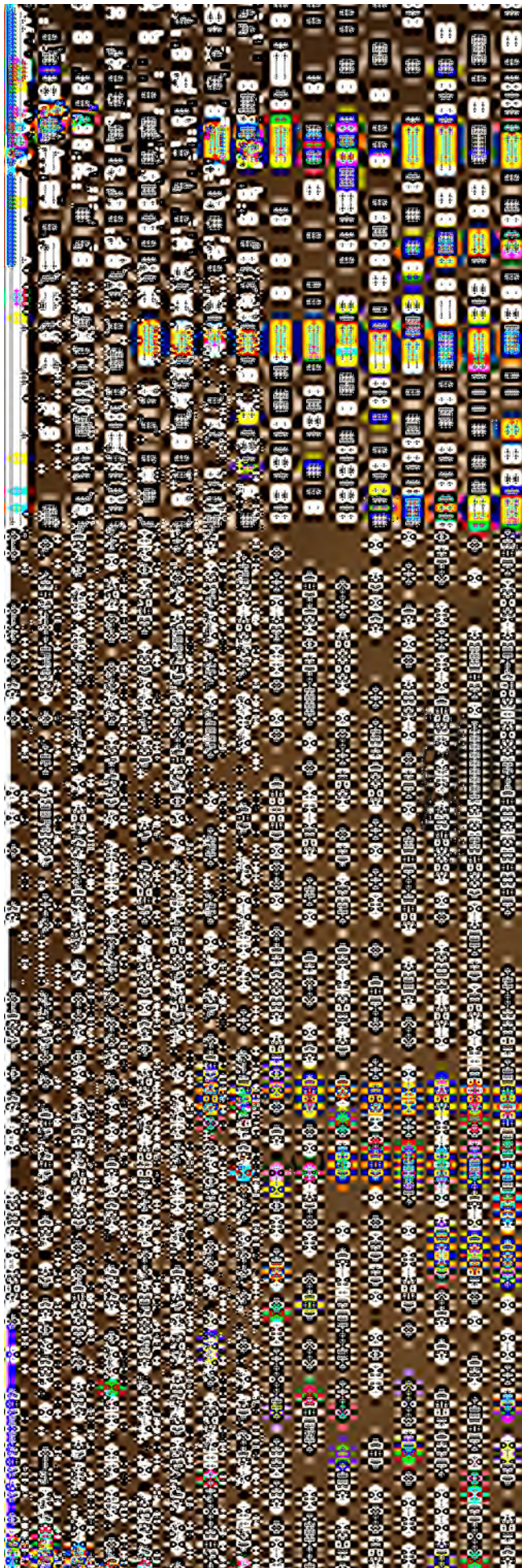


XG 638.1

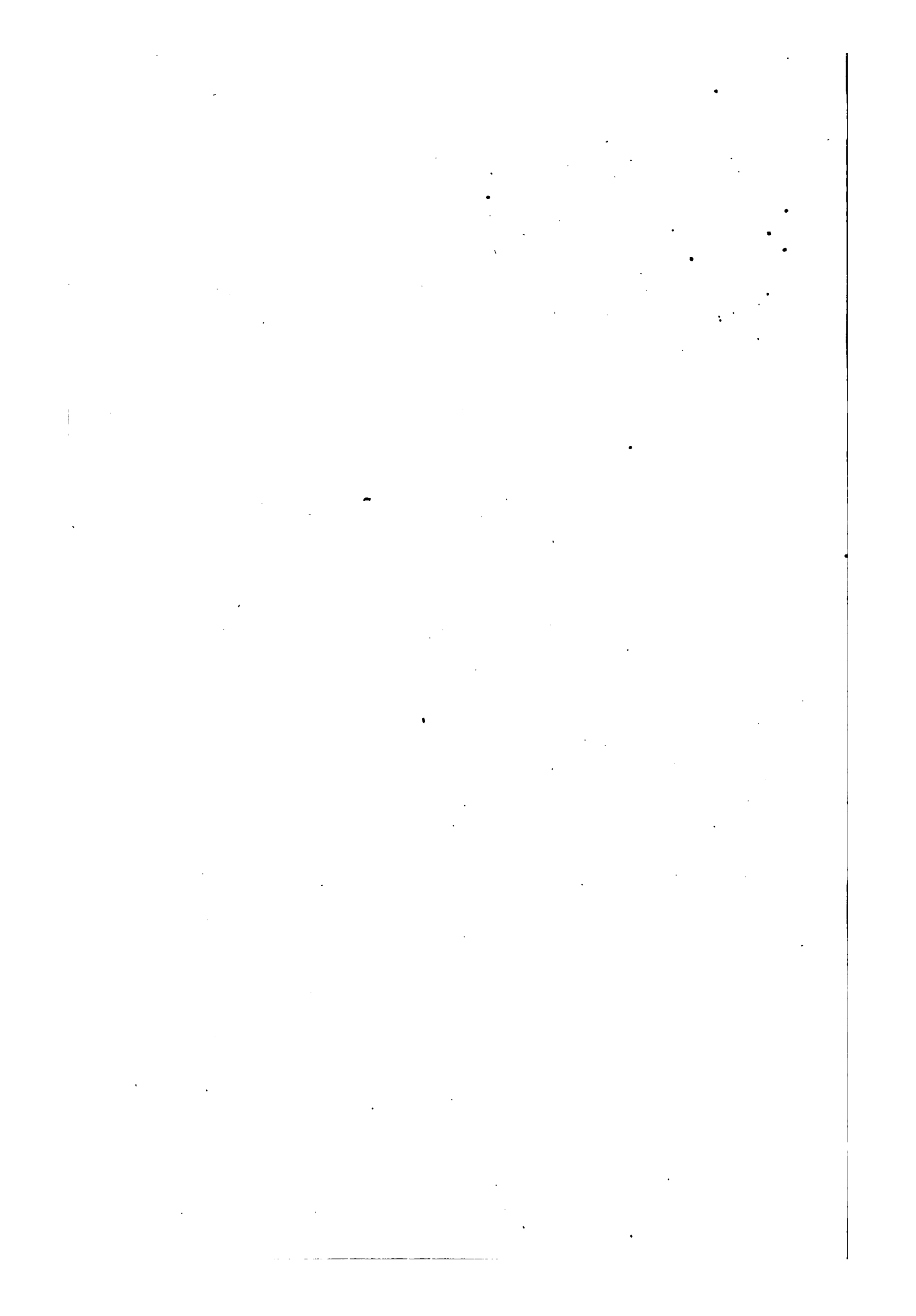


JOHN G. WOLRACH LIBRARY
HARVARD COLLEGE OBSERVATORY
60 GARDEN STREET
CAMBRIDGE, MASS. 02138





LOGARITHMES
MALES
S DE PRÉCISION
ROMAN
IS
EXC. LE GARDE DES SCAUX
E IMPÉRIALE
XVII



L. Nélin,

Major de place

hommage affectueux

de son tout dévoué

Jésus Thomaze

TABLES DE LOGARITHMES

A 27 DÉCIMALES

49 et 43; c'est-à-dire, pour cent nombres naturels consécutifs on n'a que 43 ou au plus 49 logarithmes différents; par conséquent entre 9 000 000 et 9 999 999 il y a toujours deux ou trois nombres consécutifs qui ont le même logarithme; aussi, parmi les nombres naturels compris entre ces deux limites, y en a-t-il plus de la moitié qu'on ne peut jamais obtenir à l'aide des logarithmes à 7 décimales.

Ainsi par exemple :

$$\left. \begin{array}{l} \log 9780583 \\ \log 9780584 \\ \log 9780585 \end{array} \right\} = 6,9903648$$

Réciproquement, si l'on cherche le nombre dont le logarithme est 6,9903648, on trouve 9780584; mais on ne pourra jamais obtenir à l'aide des tables à sept décimales ni le nombre 9780583, ni le nombre 9780585.

En général, tout logarithme contenu dans la table est susceptible d'une erreur par excès ou par défaut d'une demi-unité; l'interpolation y ajoute une seconde erreur qui peut s'élever également à une demi-unité: par conséquent tout logarithme extrait directement de la table peut être en erreur d'une unité.

Exemple : On demande d'évaluer par les logarithmes

$$x = \frac{321473 \times 819255}{452604 \times 595118}$$

$$\begin{array}{l} \log 321473 = 5,5071446 \\ \log 819255 = 5,9134192 \\ \text{comp. log } 452604 = 4,3442817 \\ \text{comp. log } 595118 = 4,2253970 \\ \hline \log x = 9,9902425 \\ \text{donc } x = 0,9777831 \end{array}$$

Tous ces logarithmes ont été déterminés avec toute l'exactitude que comportent les tables à sept décimales, et pourtant chacun d'eux est en défaut de près d'une unité.

Le résultat exact est

$$\log x = 9,9902421 \quad \text{et} \quad x = 0,9777822$$

ce qui constitue une erreur de neuf unités du dernier ordre dans le résultat obtenu à l'aide des logarithmes à 7 décimales.

En général, pour trouver avec n décimales le logarithme d'un nombre donné par approximation, il faut connaître les $(n+1)$ premiers chiffres de ce nombre; et réciproquement, si le nombre est demandé avec n chiffres, il faut connaître $(n+1)$ décimales du logarithme.

II

RECHERCHE DU LOGARITHME

PAR LA MÉTHODE DES RÉCIPROQUES APPROCHÉS.

Dans tout logarithme vulgaire on distingue deux parties : le nombre entier ou *caractéristique*, et la partie décimale ou *mantisse*.

La *caractéristique* renferme toujours autant d'unités moins une qu'il y a de chiffres à la partie entière; on l'obtient par la simple inspection du nombre.

La *mantisse*, seule partie du logarithme que l'on inscrit dans les tables, est aussi la seule qu'il faut calculer et dont par conséquent nous ayons à nous occuper.

On sait que la mantisse est complètement indépendante de la position de la virgule décimale dans le nombre; on pourra donc considérer les nombres indépendamment de la position de la virgule; il en sera de même des facteurs auxiliaires par lesquels nous aurons à les multiplier : par conséquent, dans les calculs qui vont suivre, on placera la virgule décimale du nombre dont on cherche le logarithme, ainsi que celles des facteurs, de la manière qui semblera la plus commode, soit pour le raisonnement, soit pour le calcul.

NOTATION.

Pour faire usage de nos tables, nous emploierons une notation qui facilite considérablement le calcul, et qui ne peut donner lieu à aucune équivoque; pour la faire comprendre immédiatement, il suffit d'en donner quelques exemples avec la traduction en regard.

Ainsi $0,0^38$ signifie $0,0008$
 $1,0^48$ " $1,00008$
 $1,0^4\bar{8}$ " $1-0,00008=0,99992$

Les nombres donnés sous cette forme servent de multiplicateurs; mais les multiplications sont très-faciles.

Pour effectuer la multiplication d'un nombre décimal quelconque par un nombre de la forme $(1 \pm \frac{a}{10^n})$, on sépare d'abord du multiplicande les n derniers chiffres, ce qui équivaut à la division par 10^n ; puis on multiplie les chiffres qui restent, par le facteur a ; le résultat de la multiplication ajouté ou soustrait, suivant le signe de a , donne le produit demandé.

Exemple 1. Soit à multiplier $1,00006.55177$ par $1,0002$

$$\begin{array}{r} 1,00006\ 55177 \times 1,0^32 \\ \quad \quad \quad 2 \quad \quad 131 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Produit} = 1,00026.55308$$

Ex. 2. Multiplier $0,99997.034567$ par $1,00003$

$$\begin{array}{r} 0,99997.034567 \times 1,0^43 \\ \quad \quad \quad 2.999911 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Produit} = 1,0^634478$$

Ex. 3. Multiplier $1,00000.04712.516831$ par $0,9999996$

$$\begin{array}{r} 1,0^64\ 712.516831 \times 1,0^6\bar{4} \\ \quad \quad \quad 4 \quad \quad 1885 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Produit} = 1,0^7712.514946$$

LOGARITHME DE $(1 \pm \theta)$.

Désignons par e la base des logarithmes naturels :

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots$$

$$e = 2,7182818284\dots,$$

et par k son logarithme vulgaire, $k = \log e = 0,43429\dots$ (tab. I.): le nombre k s'appelle le *module* des logarithmes vulgaires.

Lorsqu'un nombre diffère peu de l'unité, soit en plus, soit en moins, de manière que les n premiers chiffres après la virgule décimale soient tous des zéros, ou tous des 9, son logarithme à $2n$ chiffres est égal au *module* multiplié par la fraction décimale qui est la différence entre ce nombre et l'unité, ou

$$\log(1 + \theta) = k\theta$$

et

$$\log(1 - \theta) = -k\theta$$

Ainsi, on trouve avec dix décimales exactes :

$$\log 1,000004 = 0,00000.17372$$

$$\log 0,999996 = -0,00000.17372 = 9,99999.82628$$

La première partie de la table III contient les 110 premiers multiples de k , et donne, soit directement, soit à l'aide d'une simple addition, les logarithmes à $2n$ décimales de tous les nombres composés de l'unité suivie de n zéros au moins, et de tous les nombres commençant par n chiffres 9.

On prendra les chiffres de la fraction décimale deux à deux, et l'on écrira au-dessous le produit par le module, produit qui sera toujours un peu moindre que la moitié du nombre exprimé par les deux chiffres.

Ex. 4. On demande avec 12 décimales $\log 1,000000.349689$
Ce logarithme est égal à $k \times 0,0^6 349689$

$$\begin{array}{r} 1,0^6 349689 \\ \hline 147660.1 \text{ pour } 34 \text{ (table III)} \\ 4169.2 \quad \cdot \quad 96 \\ 38.7 \quad \cdot \quad 89 \\ \hline \end{array}$$

donc $\log 1,0^6 349689 = 0,0^6 151868$

Ex. 5. On demande avec 12 décimales $\log 999999650311$.

On a $0,999999.650311 = 1 - 0,0^6 349689$; donc son logarithme sera égal à $-k \times 0,0^6 349689$, ou, d'après l'exemple précédent, égal à $-0,0^6 151868$; d'où $\log 999999650311 = 11,999999.848132$.

Ex. 6. On demande avec 27 décimales le logarithme de :

$$\begin{array}{r} 1,0^{14} 112233.44551.09 \\ \hline 47772.39300.936 \\ 955.44786.019 \\ 14.33171.790 \\ 19108.957 \\ 238.862 \\ 473 \\ \hline \end{array}$$

donc $\log = 0,0^{15} 48742.36607.04$

Ex. 7. On demande avec 27 décimales le logarithme de :

$$0,99999.99999.999998.87766.55448.91$$

Ce nombre est égal à $1 - 0,0^{14} 112233.44551.09$; et comme la fraction décimale est égale à celle de l'exemple précédent, mais de signe contraire, le logarithme qu'on cherche sera négatif et égal au logarithme de l'exemple 6. Le logarithme demandé sera donc

$$\begin{aligned} &= -0,0^{15} 48742.36607.04 \\ \text{ou} &= 9,99999.99999.99999.51257.63392.96. \end{aligned}$$

Ainsi donc, cette seule table des 100 premiers multiples de k suffit pour donner par de simples additions les logarithmes avec 27 ou avec moins de 27 décimales de 143 trillions ($143 \cdot 10^{12}$) de nombres.

RÉCIPROQUES APPROCHÉS.

Puisqu'on connaît directement le logarithme de $(1 \pm \theta)$, lorsque θ est suffisamment petit, il est évident que l'on connaît également le logarithme de tout autre nombre, lorsqu'en le multipliant par un ou plusieurs facteurs compris dans les tables, on obtient un produit de la forme $(1 \pm \theta)$. On y arrive facilement au moyen des *réci-proques approchés*.

Deux nombres sont *réci-proques* l'un de l'autre, lorsque leur produit est égal à l'unité; ainsi 6,4 et 0,15625 sont réci-proques, car $6,4 \times 0,15625 = 1$.

Soit a une quantité moindre que l'unité, il résulte de la relation

$$(1 + a)(1 - a) = 1 - a^2$$

que

$$(1 + a)(1 - a) + a^2 = 1$$

donc

$$(1 + a) \left(1 - a + \frac{a^2}{1 + a}\right) = 1 \quad \text{et} \quad (1 - a) \left(1 + a + \frac{a^2}{1 - a}\right) = 1$$

On voit que la somme d'un nombre et de son réci-proque est toujours plus grande que 2; mais elle n'en diffère que d'une quantité à peu près égale au carré de a , lorsque celui-ci est petit.

Par conséquent, si a est suffisamment petit, et si d est une quantité moindre que a ,

$$(1 + a) \text{ sera le } \textit{réci-proque approché} \text{ de } (1 - a + d)$$

et

$$(1 - a) \text{ sera le } \textit{réci-proque approché} \text{ de } (1 + a + d)$$

Désignons le nombre par N et son réci-proque par R , de manière

que $NR = 1$; et soit, par exemple, $a = 0,0003$; le réciproque de $1,0003$ sera plus grand que $0,9997$; mais il n'en diffère que d'une quantité moindre que $0,0000009$; en effet on a

$$N = 1,0003$$

donc

$$R > 0,9997$$

$$R = 0,9997.0008.9973$$

et

$$N + R = 2,0789973$$

Le produit d'un nombre par son réciproque étant égal à l'unité, il s'ensuit que si l'on multiplie un nombre par son réciproque augmenté ou diminué d'une petite quantité, le produit sera plus grand ou plus petit que l'unité, qu'il sera de la forme $(1 \pm \theta)$, et que la quantité θ sera d'autant plus petite que la différence entre le *réciproque approché* et le réciproque exact sera moindre.

Ainsi, par exemple, le réciproque de $5,3$ est $0,188679$ et leur produit est égal à l'unité; si au lieu d'employer pour facteur le réciproque exact $0,188679$... on multiplie $5,3$ par $0,19$ *valeur approchée* du réciproque, on obtient pour produit $1,007$.

De même, le réciproque de $1,0008006543$ est plus grand que $0,9991993457$, et si l'on multiplie ce nombre par $0,9992$ ou $1,038$, on obtient pour produit $1,07138$.

Enfin, comme nous allons le démontrer plus loin, tout nombre peut, à l'aide d'une ou de plusieurs multiplications par des réciproques approchés, être amené à un produit de la forme $(1 \pm \theta)$, dont on trouve directement le logarithme dans la table III.

La question de la recherche des logarithmes se réduit donc à choisir des réciproques approchés qui soient tous compris dans la table.

Il est facile de remplir cette condition à l'aide des considérations suivantes :

I. *Tout nombre multiplié par son réciproque forcé au second chiffre donne pour produit l'unité suivie immédiatement d'un zéro au moins.*

En effet, si l'on s'arrête au second chiffre du réciproque en l'augmentant d'une unité, il est évident qu'on l'aura augmenté de moins d'un dixième de sa valeur; par conséquent en multipliant le nombre par son réciproque forcé, on aura un produit plus grand que 1, mais plus petit que 1,1; donc le premier chiffre décimal du produit sera nécessairement un zéro.

Exemple : Le réciproque de 77 est 1298701; si l'on multiplie 77 par 13, on obtient pour produit 1001.

La table I donne les réciproques de tous les nombres naturels de 1 à 100; pour connaître le réciproque forcé d'un nombre, on prendra dans la colonne intitulée $\left(\frac{1}{a}\right)$ deux nombres consécutifs, l'un plus grand, l'autre plus petit que le nombre donné, abstraction faite de la virgule décimale; puis on multipliera par le plus grand des deux réciproques.

Ainsi, par exemple, étant donné le nombre 27802345, on trouve dans la table que ce nombre est compris

entre 2857... réciproque de 35
et 2778... réciproque de 36

donc le réciproque de 2780 est compris entre 35 et 36, et en le multipliant par 36, on doit obtenir un produit plus grand que l'unité, mais moindre que 1,1; en effet :

$$3,6 \times 0,27802345 = 1,00088442.$$

II. *Lorsqu'un nombre est composé de l'unité suivie d'une fraction décimale dont les premiers chiffres sont des zéros et qu'on le multiplie par l'unité diminuée de la valeur du premier chiffre significatif, on obtient toujours un produit plus approché de l'unité que le nombre donné.*

Ainsi, par exemple, si les premiers chiffres du nombre donné sont

1,0004... , on le multipliera par son réciproque approché au cinquième chiffre $1,0^3\bar{4}$.

Comme le réciproque de $1,0^3\bar{4}$ ou de 0,9996 est 1,000400160064, il s'ensuit que si le nombre donné est plus grand que ce réciproque, c'est-à-dire, s'il est compris entre 1,00049999 et 1,00040016, le produit sera plus grand que l'unité, mais il sera toujours plus petit que $1,0^35 \times 1,0^3\bar{4} = 1,00009980$; par conséquent, le produit aura toujours au moins un zéro de plus après la virgule décimale.

On aura par exemple :

$$1,0^349896 \times 1,0^3\bar{4} = 1,0^49876$$

$$1,0^340694 \times 1,0^3\bar{4} = 1,0^3678$$

$$1,0^340094 \times 1,0^3\bar{4} = 1,0^678$$

$$1,0^340024 \times 1,0^3\bar{4} = 1,0^78$$

$$1,0^340017 \times 1,0^3\bar{4} = 1,0^71$$

Enfin, si le nombre donné est moindre que le réciproque de $1,0^3\bar{4}$, c'est-à-dire, s'il est compris entre 1,0004.0016 et 1,0004.0000, le produit sera moindre que l'unité, mais plus grand que $1,0^3\bar{4} \times 1,0^3\bar{4} = 0,9999.9984$; par conséquent, les zéros seront remplacés par un nombre au moins double de chiffres 9; ainsi on aura :

$$1,0^340015 \times 1,0^3\bar{4} = 0,99999999$$

$$1,0^340003 \times 1,0^3\bar{4} = 0,99999987$$

Désignons en général par a la valeur absolue du premier chiffre significatif;

Et par d la valeur de la fraction décimale qui le suit;

Le nombre sera $(1 + a + d)$, et si l'on effectue la multiplication par le réciproque approché $(1 - a)$, le produit sera $[1 + d - a(a + d)]$; par conséquent, le premier chiffre de la fraction décimale sera supprimé, et la fraction décimale qui le suit sera diminuée.

Mais le réciproque de $(1 - a)$ est $(1 + a + \frac{a^2}{1 - a})$; donc, si d est plus grand que $\frac{a^2}{1 - a}$, le nombre $(1 + a + d)$ est plus grand que le ré-

ciproque de $(1 - a)$, et le produit sera plus grand que l'unité; mais il aura au moins un zéro de plus que $(1 + a + d)$, attendu qu'il sera moindre que $(1 + d)$.

Exemple :

$$\begin{array}{r} 1,00007.26334 \times 1,0^4\bar{7} \\ \quad \quad \quad 7. \quad 51 \quad \cdot \\ \hline 1, \quad 0^5.26283 \end{array}$$

Si d est moindre que $\frac{a^2}{1-a}$, le nombre $(1 + a + d)$ sera plus petit que le réciproque de $(1 - a)$; donc le produit sera compris entre l'unité et $(1 + a)(1 - a) = 1 - a^2$.

Or a est un nombre entier du n^e ordre décimal, compris entre 1 et 9; donc son carré a^2 sera du $2n^e$ ordre décimal et compris entre 1 et 81, et si $(1 + a)$ contient $(n - 1)$ zéros après la virgule décimale, $(1 - a^2)$ contiendra un nombre de 9 au moins double.

Exemple :

$$\begin{array}{r} 1,00007.00045 \times 1,0^3\bar{7} \\ \quad \quad \quad - 7. \quad 49 \\ \hline 0,99999.99996 \end{array}$$

III. *Lorsqu'un nombre commence par plusieurs chiffres 9 et qu'on le multiplie par l'unité augmentée du complément arithmétique du premier chiffre décimal à la suite des 9, on obtient toujours un produit plus rapproché de l'unité que le nombre donné.*

Ainsi, par exemple, soit le nombre donné 0,9996, on le multipliera par $1,0^3\bar{4}$.

Comme le réciproque de $1,0^3\bar{4}$ est 0,9996001599 . . ., il s'ensuit que si le nombre donné est plus grand que ce réciproque, c'est-à-dire s'il est compris entre 0,9996.9999 et 0,9996.0016, le produit sera plus grand que l'unité, mais il sera plus petit que $0,9997 \times 1,0^3\bar{4}$

$= 1,0^{\overline{3}} \times 1,0^{\overline{4}} = 1,00009988$; par conséquent, on obtiendra pour produit l'unité suivie d'un nombre de zéros plus considérable que le nombre des 9 par lesquels commençait le nombre proposé.

Ainsi, par exemple, on aura avec 8 décimales :

$$0,99965696 \times 1,0^{\overline{4}} = 1,0^{\overline{4}}5682$$

$$0,99960694 \times 1,0^{\overline{4}} = 1,0^{\overline{4}}678$$

$$0,99960094 \times 1,0^{\overline{4}} = 1,0^{\overline{4}}78$$

$$0,99960024 \times 1,0^{\overline{4}} = 1,0^{\overline{4}}8$$

$$0,99960016 \times 1,0^{\overline{4}} = 1$$

Enfin, si le nombre donné est moindre que le réciproque de $1,0^{\overline{4}}$, c'est-à-dire, s'il est compris entre $0,99960016$ et $0,99960000$, le produit sera moindre que l'unité, mais plus grand que

$$1,0^{\overline{4}} \times 1,0^{\overline{4}} = 0,99999984;$$

par conséquent on aura, après la virgule décimale, un nombre de 9 au moins double ; par exemple :

$$0,99960015 \times 1,0^{\overline{4}} = 0,99999999$$

En général, désignons par a le complément du premier chiffre après les 9, et par d la valeur de la fraction décimale qui suit; le nombre sera $(1 - a + d)$, et si l'on effectue la multiplication par le réciproque approché $(1 + a)$, le produit sera

$$1 + d - a (a - d)$$

Mais le réciproque de $(1 + a)$ est $(1 - a + \frac{a^2}{1 + a})$; donc, si $d > \frac{a^2}{1 + a}$, le nombre $(1 - a + d)$ sera plus grand que le réciproque de $(1 + a)$ et le produit sera plus grand que l'unité; en outre, puisque ce produit est moindre que $(1 + d)$, il aura au moins un zéro de plus que le nombre n'avait de 9.

Par conséquent, tous les 9 et le premier chiffre de la fraction

décimale a seront supprimés, et la fraction décimale qui les suit sera diminuée de $a(a-d)$.

Exemple :

$$\begin{array}{r} 0,99995.84672 \times 1,0^45 \\ 4.99979 \\ \hline 1,00000.84651 \end{array}$$

Si $d < \frac{a^2}{1+a}$, le nombre $(1-a+d)$ sera moindre que le réciproque de $(1+a)$, et le produit sera moindre que l'unité, mais plus grand que

$$(1-a)(1+a) = 1-a^2$$

Donc, si a est un nombre entier du n^{e} ordre décimal compris entre 1 et 9, son carré a^2 sera du $2n^{\text{e}}$ ordre décimal et compris entre 1 et 81; et lorsque $(1-a)$ contient $(n-1)$ chiffres 9 après la virgule décimale, $(1-a^2)$ contiendra un nombre de 9 au moins double.

Exemple :

$$\begin{array}{r} 0,99995.00021 \times 1,0^45 \\ 4.99975 \\ \hline 0,99999.99996 \end{array}$$

Les tables II et IV contiennent les logarithmes des nombres de la forme $(1 + \frac{a}{10^n})$, depuis $n=1$ jusqu'à $n=14$; à partir de là on a

$$\log \left(1 + \frac{p}{10} \right) = \frac{1}{10} \log (1+p)$$

et

$$\log \left(1 - \frac{p}{10} \right) = \frac{1}{10} \log (1-p)$$

par exemple :

$$\begin{array}{l} \log 1,0^{13}4 = 0,0^{13}17.37177.92761.50 \\ \log 1,0^{14}4 = 0,0^{14}17.73717.79276.15 \\ \log 1,0^{15}4 = 0,0^{15}17371.77927.62 \\ \log 1,0^{16}4 = 0,0^{16}1737.17792.76 \end{array}$$

En résumé, d'après ce que je viens de démontrer, toute la recherche du logarithme d'un nombre donné se réduit à multiplier successivement le nombre par des *réciroques approchés* au second chiffre significatif, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un produit de la forme $(1 \pm \theta)$, dont on trouve le logarithme par simple addition.

On multiplie d'abord le nombre donné par son *réciroque forcé au second chiffre*; le produit sera un nombre composé de l'unité et d'une fraction décimale commençant par un ou plusieurs zéros; ensuite ce produit multiplié par l'unité diminuée de la valeur du premier chiffre significatif (c'est-à-dire, par son *réciroque approché* au deuxième chiffre significatif) donnera un nouveau produit ayant après la virgule décimale au moins un zéro de plus.

En continuant de procéder ainsi, on finira par obtenir un produit de la forme $(1 + \theta)$ et dont le logarithme est égal à $k\theta$.

Soit N le nombre donné, p son *réciroque forcé*,

$(1 - a), (1 - b), (1 - c), \dots$ les autres facteurs,
 $(-\alpha), (-\beta), (-\gamma), \dots$ leurs logarithmes respectifs,
 et soit $(1 + \theta)$ le produit final,

on aura : $Np(1 - a)(1 - b)(1 - c) \dots = 1 + \theta$

d'où $\log N + \log p - (\alpha + \beta + \gamma + \dots) = k\theta$,

et $\log N = \text{comp. } \log p + (\alpha + \beta + \gamma + \dots) + k\theta$

Or, la table I contient les compléments des logarithmes des cent dix premiers nombres naturels;

La table II contient les compléments des logarithmes des nombres de la forme $(1 - \frac{a}{10^s})$;

Et la première partie de la table III contient les multiples de k .

Par conséquent, au moyen de ces trois tables, il sera toujours facile de trouver le logarithme de tout nombre donné.

Ex. 8. Calculer avec 10 décimales exactes $\log 5882365432$.

En multipliant le nombre donné par son *réciroque forcé* 17, on

obtient pour produit $1,0^5 212344$, dont on trouve, table III, le logarithme au moyen d'une simple multiplication par le module.

Voici tout le calcul :

$$\begin{array}{r}
 58823.65432 \quad \times 17 \\
 \underline{41176.558024} \\
 1,00000.212344 = 1 + \theta \\
 \quad \quad \quad 91201.8 \\
 \quad \quad \quad \quad 998.9 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 19.1 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad .76955.107862 = \text{comp. log } 17 \text{ (tab. I)} \\
 \log N = 9,76955.200082
 \end{array}$$

Ex. 9. Calculer avec 10 décimales exactes le logarithme de :

$$1,96471598$$

On voit, table I, que le réciproque du nombre donné est moindre que 51; en multipliant le nombre par 51, on obtient pour produit $1,002005\dots$, qui, multiplié lui-même par son réciproque approché $0,998$ ou $1,0^2 2$, donnera pour produit final $1,0^5 11395$ dont on trouve directement le logarithme table III.

Voici tout le calcul :

$$\begin{array}{r}
 19647.1598 \quad \cdot \times 51 \\
 \underline{982357.990} \\
 1,00200.51498 \quad \times 1,0^2 2 \\
 \quad \quad \quad 200.40103 \\
 \underline{1,0^5 .11395} = 1 + \theta \\
 \quad \quad \quad \quad 47772 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 1694 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad .22 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{4949} = \log(1 + \theta) \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 86.94587 = -\log 1,0^2 2 \text{ (tab. II)} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{29242.98239} = \text{comp. log } 51 \text{ (tab. I)} \\
 \log N = 0,29329.97775
 \end{array}$$

Ex. 10. Calculer le logarithme de 1,00040.01213 avec 12 chiffres exacts.

$$\begin{array}{r}
 1,00040.01512.130 \times 1,0^{\overline{3}4} \\
 \underline{4 \quad 1600.605} \\
 0,99999.99911.525 = 1 - \theta \\
 \underline{88.475 = \theta} \\
 38.218 \\
 \underline{206} \\
 -38.424 = \log(1 - \theta) \\
 0,0^{\overline{3}17}.37525.456 = \text{comp. log } 1,0^{\overline{3}4} \text{ (tab. II)}
 \end{array}$$

$$\log N = 0,00017.37487.032$$

Dans cet exemple, le produit du nombre donné par son réciproque approché $1,0^{\overline{3}4}$ est moindre que l'unité, par conséquent son logarithme est négatif.

Ex. 11. Déterminer avec 15 décimales $\log 99999.98234.56789$

$$\begin{array}{r}
 0,99999.98234.567890 \times 1,0^{\overline{6}2} \\
 \underline{1999.999647} \\
 1,0^{\overline{7}2} 234.567537 \times 1,0^{\overline{7}2} \\
 \underline{2 \quad 5} \\
 34.567532 = \theta \\
 \underline{14.766012} \\
 243205 \\
 3257 \\
 \underline{14} \\
 0,0^{\overline{8}3} 15.012488 = \log(1 + \theta) \\
 86.858897 = \text{comp. log } 1,0^{\overline{7}2} \\
 -868.588877 = -\log 1,0^{\overline{6}2} \text{ (tab. IV)}
 \end{array}$$

$$\log N = 14,99999.99233.282508$$

Exemple 12. Calculer avec 15 décimales exactes le logarithme de $\pi = 3,14159.26535.89793$

$$\begin{array}{r}
 3141.59265.35897.93 \times 32 \\
 \hline
 6283.18530.71795.86 \\
 94247.77960.76937.9 \\
 \hline
 1,00530.96491.48733.76 \times 1,0^{\overline{25}} \\
 502.65482.45743.67 \\
 28.31009.02990.09 \times 1,0^{\overline{32}} \\
 2 \quad 566.20180.60 \\
 8.30442.82809.49 \times 1,0^{\overline{48}} \\
 8. \quad 66.43542.62 \\
 30376.39266.87 \times 1,0^{\overline{53}} \times 1,0^{\overline{73}} \\
 3 \quad 3 \quad 9112.92 \\
 \quad \quad \quad 1.13
 \end{array}$$

$$76.30152.82 = \theta$$

$$\begin{array}{r}
 33.00638.06 \\
 13028.83 \\
 65.14 \\
 1.22 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

$$33.13733.26 = \log(1 + \theta)$$

$$\begin{array}{r}
 130.28834.65 \\
 13028.85400.04 \\
 3.47449.48368.73 \\
 8.68675.83428.58 \\
 217.69192.54274.55 \\
 49485.00216.80094.02 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\log \pi = 0,49714.98726.94134$$

Exemple 13. Calculer avec 27 décimales le logarithme de $0,99999.60003.16699.85562.52434.36$:

$$\begin{array}{r}
 0,99999.60003.16699.85562.52434.36 \times 1,0^5 4 \\
 \quad \quad \quad 39999.84001.26679.94225.01 \\
 \hline
 1, 0^9 \quad 3.00701.12242.46659.37 \times 1,0^9 3 \times 1,0^{12} 7 \\
 \quad \quad \quad 3 \quad 7 \quad \quad 9.02103.37 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 4.91 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1.12233.44551.09 = \theta \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 47772.39300.936 \text{ (voir ex. 6)} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 955.44786.019 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 14.33171.790 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 19108.957 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 238.862 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 473 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 48742.36607.04 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 304.00613.73323.83 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1.30288.34459.05188.00 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad ,99999.82628.25546 73358.29942.58 = \text{comp. } 1,0^5 4 \\
 \hline
 \log N = 9,99999.82629.56139.57173.45061.45
 \end{array}$$

III

RECHERCHE DU NOMBRE.

Lorsque le logarithme donné est une fraction décimale, *positive* ou *négative*, dont la première moitié au moins est composée exclusivement de zéros, le nombre correspondant est égal à l'unité, plus le logarithme divisé par le module;

$$\text{ainsi, si } \log x = \theta, \text{ on aura } x = 1 + \frac{\theta}{k}$$

$$\text{et si } \log x = -\theta, \text{ on aura } x = 1 - \frac{\theta}{k}$$

Or, puisque $k = 0,43429\dots$, on a $\frac{1}{k} = 2,30258\dots$ (voir tab. I), par conséquent le nombre cherché est un peu plus grand que l'unité augmentée du double du logarithme.

Par exemple si $\log x = 0,00001\dots$, on a $x = 1,00002.3026$

$$\text{et si } \log x = -0,00001 = 9,99999$$

$$x = 1 - 0,00002.3026 = 0,99997.6974$$

La seconde partie de la table III contient les cent dix premiers multiples de $\frac{1}{k}$ et donne soit directement, soit à l'aide d'une simple addition, les nombres à $(2n - 1)$ chiffres de tous les logarithmes positifs ou négatifs commençant par n zéros.

On prendra les chiffres deux à deux, en écrivant au-dessous le produit qui est toujours un peu plus grand que le double du nombre exprimé par les deux chiffres. La somme de tous ces produits partiels augmentée de l'unité sera le nombre cherché.

Par exemple, soit $\log x = 0,000000.151868$

on trouvera (tab. III)

345387.8	pour 15
4144.7	» 18
156.6	» 68

donc $x = 1,000000.349689$

Pour tout autre logarithme, le calcul du nombre correspondant est très-simple :

Du logarithme donné on retranche celui de la table V, qui s'en approche le plus par défaut; on agit de même pour tous les restes obtenus successivement, en retranchant les plus grands logarithmes de la table IV contenus dans les restes, puis on cherche le produit des nombres correspondant aux logarithmes soustraits.

Il n'est pas nécessaire de continuer le calcul jusqu'à ce que tous les chiffres significatifs soient supprimés. Pour obtenir le chiffre exact à $(2n - 1)$ chiffres, on peut cesser la soustraction des logarithmes dès qu'on sera arrivé à un reste commençant par n zéros et dont on trouve directement le nombre correspondant par simple addition.

En résumé, si l'on désigne par x le nombre cherché, par $\log N$, $\log(1+a)$, $\log(1+b)$... les logarithmes soustraits du logarithme donné et par θ le reste, de manière que

$$\log x = \log N + \log(1+a) + \log(1+b) + \dots + \theta$$

le nombre cherché sera $x = N(1+a)(1+b)\dots\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)$

Dans tous ces calculs on ne tient compte que de la mantisse; c'est seulement à la fin du calcul qu'on met la virgule décimale à la place que lui assigne la caractéristique.

Il ne faut pas oublier que pour calculer un nombre avec n chiffres exacts, il faut connaître son logarithme avec $(n+1)$ décimales.

Ex. 14. Calculer avec 11 décimales le nombre dont le logarithme est $= 0,49714.9872694$.

Le plus grand logarithme de la table V, contenu dans le logarithme donné, est celui de 31; on retranche du reste les plus grands loga-

rithmes de la table IV jusqu'à ce que le dernier reste contienne au moins six zéros consécutifs.

Ce reste 0,0⁶861083 est le logarithme de 1,0⁵1982717, et ce dernier nombre multiplié par les nombres dont on a soustrait les logarithmes donne pour produit :

$$x = 3,1 \times 1,01 \times 1,0^23 \times 1,0^33 \times 1,0^48 \times 1,0^51982717$$

$$\text{ou } x = 3,14159.265359, \text{ exact au dernier chiffre.}$$

Voici tout le calcul :

$$\begin{array}{r} \log x = 0,49714.98726.94 \\ \quad 49136.16938.34 = \log 31 \\ \hline \quad 578.81788.60 \\ \quad 432.13737.83 = \log 1,01 \\ \hline \quad 146.68050.77 \\ \quad 130.09330.20 = \log 1,0^23 \\ \hline \quad 16.58720.57 \\ \quad 13.02688.05 = \log 1,0^33 \\ \hline \quad 3.56032.52 \\ \quad 3.47421.69 = \log 1,0^48 \\ \hline \quad 8610.83 \\ \hline \quad 19802.23 \\ \quad 23.03 \\ \quad 1.91 \\ \hline 1,00000.19827.17 \times 1,0^48 \\ \quad 38. \quad 1.59 \times 1,0^33 \\ \quad 245.95 \\ \hline 1,00038.20074.71 \times 1,0^23 \\ \quad 3 \quad 11460.22 \\ \hline 1,00338.31534.93 \times 1,01 \\ \quad 1 \quad 3.38315.35 \\ \hline 1,01341.69850.28 \times 31 \\ 30 40250.95508.4 \\ \hline x = 3,14159.265359 \quad (\text{valeur de } \pi) \end{array}$$

Ex. 15. Combien produit un franc placé pendant 500 ans, l'intérêt étant à 6 o/o payable par semestre?

$$t=0,03 \quad r=1,03 \quad n=1000$$

log $r^n = 12,83722.47051.72205.17$	
83250.89127.06236.32... log 68	
471.57924.65968.85	
432.13737.82642.57	1,01
39.44186.83326.28	
39.06892.49910.13	1,0 ³ 9
37294.33416.15	
34743.41957.88	1,0 ⁵ 8
2550.91458.27	
2171.47186.66	1,0 ⁶ 5
379.44271.61	
347.43557.16	1,0 ⁷ 8
32.00714.45	
<hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/>	
73.67272.30	
1634.84	
10.13	
12	
<hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/>	
1,00000.00073.69917.39	× 1,0 ⁷ 8
858	59 × 1,0 ⁶ 5
43.68	× 1,0 ⁵ 8
4698.96	
<hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/>	
1,00000.85873.74660.62	× 1,0 ³ 9
9 77.28637.19	
<hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/>	
1,00090.85951.03297.81	× 1,01
1 90859.51032.98	
<hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/>	
1,01091.76810.54330.79	× 68
6,06550.60863.25984.74	
80873.41448.43464.63	
<hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/>	
6,87424.02311.69449.37,	donc le montant

de 1 franc est de 6.874240.231169 francs 44^c,94.

NOTE.

C'est surtout dans les calculs d'intérêt composé et d'annuités qu'on a besoin de logarithmes à plus de dix décimales.

Lorsqu'on construit des tables d'intérêt composé, pour être sûr de l'exactitude de tous les termes de la table, il faut calculer chacun au moyen du terme précédent et s'assurer ensuite de l'exactitude de l'ensemble en vérifiant le dernier terme au moyen des logarithmes.

I. Ainsi, pour calculer la table qui donne le montant de 1 franc au bout d'un certain nombre d'années, chaque terme multiplié par la raison $r = 1 + t$, donne le terme suivant; le dernier terme doit s'accorder avec la valeur obtenue par les logarithmes.

Si, par exemple, le taux est 4 o/o et qu'on arrête la table à 100 ans, on doit obtenir au dernier terme $r^{100} = 50,504948.184269.4126$.

II. La table qui donne le montant de 1 franc par an, se calcule directement en multipliant chaque terme par la raison et en ajoutant l'unité au produit; si x est un terme quelconque de la série et y le terme suivant, on a toujours $y = rx + 1$.

Lorsqu'on est arrivé à la fin de la table, on vérifie le dernier terme au moyen des logarithmes.

La table I peut également servir pour contrôler les termes intermédiaires de la table II; par exemple, si le taux est 4 o/o, on a

$$\begin{array}{r}
 1 = 1, \\
 \quad \quad \quad \underline{04} \\
 2 = 2,04 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \underline{816} \\
 3 = 3,1216 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{124864} \\
 4 = 4,246464 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{169858.56} \\
 5 = 5,416322.56
 \end{array}$$

Or on a trouvé ci-dessus que $r^{100} = 50,504948.18426.94126$; donc puisque $S = \frac{r^n - 1}{t}$, le 100^e terme doit être $1237,623704.606735$. (*Theory of compound interest and annuities with logarithmic tables*, by Fedor Thoman. London, Lockwood and C^o, page 110.)

III. Pour construire la table qui donne la valeur de 1 franc payable au bout d'un certain nombre d'années, on commencera par le dernier terme calculé directement à l'aide des logarithmes, puis on le multipliera successivement par la raison en remontant jusqu'au premier terme qui, multiplié par la raison, doit donner pour produit l'unité.

Par exemple, si $t=4$ o/o, on a au 100^e terme (page 28),

100	— 0,0198000.401139.20
	7920.016045.57
99	— 0,0205920.417184.77
	8236.816687.39
98	— 0,0214157.233872.16
	8566.289354.89
97	— 0,0222723.523227.05
	8908.940929.08
96	— 0,0231632.464156.13

IV. Pour construire la table qui donne la *valeur actuelle de l'annuité de 1 franc par an*, on commencera par le dernier terme calculé directement au moyen des logarithmes, puis on multipliera chaque terme par la raison en retranchant chaque fois l'unité du produit.

Soit x un terme quelconque de la série et y le terme suivant; on a toujours $y = rx - 1$.

Le dernier terme multiplié par la raison doit donner pour produit l'unité. On peut encore se servir de la table II pour vérifier les termes intermédiaires.

Par exemple, si $t=4$ o/o

100	— 24,504998.997151.99
	980199.959886.08
99	— 24,485198.957038.07
	979407.958281.52
98	— 24,464606.915319.59
	978584.276612.78
97	— 24,443191.191932.37
	977727.647677.29
96	— 24,420918.839609.66

V. Pour construire la table de l'*annuité qui amortit un capital en un certain nombre d'années*, on commencera par la première année et l'on déduira chaque terme du terme précédent d'après la formule qui suit.

Chaque terme doit être le réciproque du terme correspondant de la table IV; ou encore il doit être égal au taux plus le réciproque du terme correspondant de la table II.

Si l'on désigne par x l'amortissement d'une année quelconque, et par y celui de l'année suivante,

$$\text{on a } x = \frac{t}{r^n - 1} \text{ et } y = \frac{t}{r^{n+1} - 1}$$

$$\text{donc } y = \frac{x}{r + x}$$

Cette dernière formule est très-facile à appliquer; par exemple, si $t=4$ o/o et $n=50$, on a

$$x = 0,00655020, \text{ donc } y = \frac{65502}{10465502} = 0,00625885$$

Ex. 16. Étant donné $\log x = 5,99999.92254.881813$, chercher le nombre x . Lorsque la mantisse d'un logarithme donné commence par plusieurs chiffres 9, on abrège considérablement le calcul, en ajoutant à ce logarithme le plus petit logarithme de la table II qui excède le complément de la mantisse.

En effet, ajouter le complément d'un logarithme revient à retrancher le logarithme lui-même; par conséquent l'addition en question n'est autre chose que la soustraction du plus grand logarithme tabulaire.

Ainsi, dans cet exemple, le complément de la mantisse est $0,0^677\dots$, on prendra table II, le plus petit logarithme qui contienne ce complément : ce sera $0,0^686\dots = \text{comp. log } 0,9999998$.

En ajoutant ce dernier complément au logarithme donné, on obtient pour somme $0,0^794\dots$, de manière qu'au moyen d'une seule addition on a supprimé les sept premiers chiffres de la mantisse.

$$\begin{array}{r}
 \log x = , 99999.92254.881813 \\
 \hline
 8685.898324 = \text{comp. log } 1,0^52 \\
 0, 0^7 940.780137 \\
 868.588877 = \text{log } 1,0^62 \\
 72.191260 \\
 165.786127 \\
 437491 \\
 2763 \\
 138 \\
 \hline
 1,0^7 166.226519 \times 1,0^62 \\
 2 33 \\
 \hline
 1,00000.02166.226552 \times 1,0^52 \\
 2 4332 \\
 \hline
 x = 99999,82166.22222
 \end{array}$$

Ex. 17. On place chaque année dix millions de francs; combien produiront-ils au bout de 99 ans à 5 o/o?

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{a}{i} (r^n - 1) \\
 t &= 0,05 \quad r = 1,05 \quad n = 99 \\
 a &= 10000000 \quad \frac{a}{i} = 200\ 000000
 \end{aligned}$$

$$\log r = 0,02118.92990.699381 \quad (\text{tab. VII})$$

$$21.18929.906994$$

$$\text{donc } \log r^{99} = 2,09774.06079.2387$$

$$7918.12460.4762 = \log 12$$

$$1855.93618.7625$$

$$1703.33392.9878 \quad 1,04$$

$$152.60225.7747$$

$$130.09330.2042 \quad 1,0^3$$

$$22.50895.5705$$

$$21.70929.7223 \quad 1,0^5$$

$$79965.8482$$

$$43429.2310 \quad 1,0^4$$

$$36536.6172$$

$$34743.4196 \quad 1,0^8$$

$$1793.1976$$

$$1737.1776 \quad 1,0^6$$

$$\underline{56.0200}$$

$$128.94477$$

$$\underline{4605}$$

$$1,00000.00128.9908 \times 1,0^4 \times 1,0^8 \times 1,0^4$$

$$1.84 \quad 1$$

$$330$$

$$8413$$

$$\underline{1.84129.8652} \times 1,0^5$$

$$5 \quad 92.0649$$

$$51.84221.9301 \times 1,0^3$$

$$3 \quad 15552.6658$$

$$\underline{351.99774.5959}$$

$$4 \quad 14.07990.9838$$

$$1,04366.07765.5797 \times 12$$

$$20873.21553.1159$$

$$r^n = 125,239293.186956$$

montant de 1 franc au bout de 99 ans; de là on déduit

$\frac{a}{t} (r^n - 1) = 24847.858637$ francs 39^c, produit du placement annuel de dix millions de francs pendant 99 ans.

Ex. 18. Calculer la valeur actuelle à 4 o/o de 1 franc payable au bout de 100 ans et la valeur d'une rente de 1 franc payable pendant 100 ans.

$$t = 0,04 \quad r = 1,04 \quad p = \frac{1}{1,04^{100}} \quad \theta = 25(1-p)$$

$$\log r^{100} = 1,70333.39298.78035 \quad (\text{tab. VII})$$

$$\log p = 8,29666.60701.21965$$

$$27875.36009.52829 = \log 19$$

$$1791.24691.69136$$

$$1703.33392.98780 \quad 1,04$$

$$87.91298.70356$$

$$86.77215.31227 \quad 1,0^2$$

$$1.14083.39129$$

$$86858.02780 \quad 1,0^4$$

$$27225.36349$$

$$26057.59074 \quad 1,0^6$$

$$1167.77275$$

$$868.58888 \quad 1,0^8$$

$$299.18387$$

$$260.57668 \quad 1,0^6$$

$$38.60719$$

$$87.498234$$

$$1.381551$$

$$16348$$

$$207$$

$$1,00000.00088.89634 \times 1,0^7 \times 1,0^2 \times 1,0^6 \times 1,0^4$$

$$2.626 \quad 1$$

$$14$$

$$1613$$

$$1.25378$$

$$1,00002.62690.16640 \times 1,0^2$$

$$2 \quad 525.38033$$

$$1,00202.63215.54673 \times 1,04$$

$$4 \quad 8.10528.62187$$

$$1,04210.73744.16860 \times 19$$

$$93789.66369.75174$$

$$p = 0,01980.00401.13920.34 \quad \text{Valeur actuelle de 1 franc.}$$

$$1-p = 0,98019.99598.86079.66 \quad \text{Escompte à déduire}$$

$$\theta = 24,50499.89971.51991 \quad \text{Valeur de 1 franc par an.}$$

Ex. 19. Déterminer 9^9 , plus grand nombre que l'on puisse exprimer avec trois chiffres. Soit

$$x = 9^9$$

donc $\log x = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \log 9$
 et puisque $\log 9 = 0,95424 \cdot 25094 \cdot 39324 \cdot 87459 \cdot 00558 \cdot 07$
 $\log x = 369 \ 693099, \ 63157 \cdot 03587 \cdot 43543 \cdot 095$

En cherchant les 15 premiers chiffres du nombre, on a :

$$\begin{array}{r}
 63157 \cdot 03587 \cdot 43543 \ 1 \\
 62324 \cdot 92903 \cdot 979005 = \log 42 \\
 832 \cdot 10683 \cdot 456426 \\
 432 \cdot 13737 \cdot 826426 \quad 1,01 \\
 399 \cdot 96945 \cdot 630000 \\
 389 \cdot 11662 \cdot 369105 \quad 1,0^29 \\
 10 \cdot 85283 \cdot 260895 \\
 8 \cdot 68502 \cdot 116490 \quad 1,0^32 \\
 2 \cdot 16781 \cdot 144405 \\
 1 \cdot 73714 \cdot 318498 \quad 1,0^44 \\
 43066 \cdot 825907 \\
 39086 \cdot 327483 \quad 1,0^59 \\
 3980 \cdot 498424 \\
 3908 \cdot 648578 \quad 1,0^69 \\
 \hline
 71 \cdot 849846 \\
 163 \cdot 4835416 \\
 1 \cdot 9341715 \\
 225653 \\
 1059 \\
 \hline
 1,00000 \cdot 00165 \cdot 440384 \quad \times 1,0^69 \times 1,0^59 \\
 99 \quad 149 \\
 82489 \\
 \hline
 1,00000 \cdot 99165 \cdot 523022 \quad \times 1,0^44 \\
 4 \quad 3 \cdot 966621 \\
 \hline
 1,00004 \cdot 99169 \cdot 489643 \quad \times 1,0^32 \\
 2 \quad 99 \cdot 833898 \\
 \hline
 1,00024 \cdot 99269 \cdot 323541 \quad \times 1,0^29 \\
 9 \quad 22493 \cdot 423912 \\
 \hline
 1,00925 \cdot 21762 \cdot 747453 \quad \times 1,01 \\
 1009 \cdot 25217 \cdot 627475 \\
 \hline
 1,01934 \cdot 46980 \cdot 374928 \quad \times 42 \\
 20 \ 38689 \cdot 39607 \cdot 49856 \\
 \hline
 21,40623 \cdot 86587 \cdot 87349 \\
 x = 42 \ 81247 \cdot 73175 \ 747 \dots
 \end{array}$$

Par conséquent, le nombre x qui est un nombre entier, s'écrit avec 369 693 100 chiffres dont les 15 premiers sont 428124773175747, et si ce nombre était écrit sur une seule ligne à 4 chiffres par centimètre, sa longueur serait de plus de 924 kilomètres.

Ex. 20. Déterminer le nombre dont le logarithme est

$$9,99999 \cdot 82629 \cdot 56139 \cdot 57173 \cdot 4506145$$

Le complément du logarithme donné étant $0,0^5 173704\dots$, on ajoutera à ce logarithme le plus petit logarithme de la table II qui contienne ce complément;

C'est $0,0^5 173718 = \text{comp. log } 1,0^5 4$.

$$\begin{array}{r}
 9,99999 \cdot 82629 \cdot 56139 \cdot 57173 \cdot 4506145 \\
 17371 \cdot 81401 \cdot 97812 \cdot 7513361 \\
 \hline
 1.37541.54986.2019506 \\
 1.30288.34455.1432297 \quad 1,0^9 3 \\
 7253.20531.0587209 \\
 4342.94481.9010804 \quad 1,0^{10} 1 \\
 2910.26049.1576405 \\
 2605.76689.1411694 \quad 1,0^{11} 6 \\
 304.49360.0164711 \\
 304.00613.7332170 \quad 1,0^{12} 7 \\
 \hline
 48746.2832541 \\
 1.10524 08446.371 \\
 1703.91296.882 \\
 14.27602.758 \\
 19111.456 \\
 \cdot \quad 57.565 \\
 \quad 944 \\
 \hline
 1,00000.00000.00001.12242.46515.98 \\
 \quad 3.167 \quad 1 \\
 \quad \quad 42.07 \\
 \quad \quad 670.11 \\
 \quad \quad 50103.37 \\
 \hline
 1,00000.00003.16701.12242.97331.54 \quad \times 1,0^5 4 \\
 \quad 4 \quad 1.26680.44897.19 \\
 \hline
 x = 0,99999 \cdot 60003 \cdot 16699 \cdot 85562 \cdot 52434 \cdot 35
 \end{array}$$

Ce nombre est exact à moins d'une unité du dernier ordre.

On peut remarquer que c'est précisément le nombre dont on a calculé le logarithme, exemple 13, et que les deux opérations, en donnant des résultats entièrement concordants, se vérifient mutuellement.

IV.

SOMMATION DES LOGARITHMES.

Les formules qui suivent, servent à calculer très-rapidement la somme d'un grand nombre de logarithmes.

Les *Nombres de Bernoulli*, qui entrent comme facteurs dans ces formules, jouent conjointement avec les deux nombres analytiques e base des logarithmes naturels, et π rapport de la circonférence au diamètre, un rôle très-important dans toute l'analyse.

En effet, ils se présentent dans un grand nombre de développements en séries, dans les formules logarithmiques et trigonométriques, dans la sommation des séries algébriques ou transcendentes, dans le développement des intégrales définies et des intégrales aux différences finies.

Ils sont les coefficients de x dans les sommes des puissances paires des nombres naturels, depuis 1 jusqu'à x ; par exemple :

$$\begin{aligned}
 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + x^2 &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} \\
 1 + 2^4 + 3^4 + \dots + x^4 &= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{6} - \frac{x}{30} \\
 1 + 2^6 + 3^6 + \dots + x^6 &= \frac{x^7}{7} + \frac{x^6}{2} + \frac{3x^5}{6} - \frac{x^3}{6} + \frac{x}{42} \\
 1 + 2^8 + 3^8 + \dots + x^8 &= \frac{x^9}{9} + \frac{x^8}{2} + \frac{4x^7}{6} - \frac{7x^5}{15} + \frac{2x^3}{9} - \frac{x}{30}
 \end{aligned}$$

En désignant par $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \dots$ les nombres de Bernoulli, par n, n_1, n_2, \dots les coefficients du binôme de Newton, de manière que

$$(1 + a)^n = 1 + na + \frac{na^2}{2} + \frac{na^3}{3} + \dots$$

et en posant successivement $n = 2, 4, 6, 8 \dots$, on trouve facilement la valeur numérique des nombres de Bernoulli, au moyen de l'équation

$$\frac{n-1}{n+1} = \mathcal{A}n - \frac{1}{2}\mathcal{B}n + \frac{1}{3}\mathcal{C}n - \frac{1}{4}\mathcal{D}n + \dots$$

Ces nombres sont tous rationnels, positifs et fractionnaires; voici les douze premiers :

$$\begin{array}{llll} \mathcal{A} = \frac{1}{6} & \mathcal{D} = \frac{1}{30} & \mathcal{G} = \frac{7}{6} & \mathcal{K} = \frac{174611}{330} \\ \mathcal{B} = \frac{1}{30} & \mathcal{E} = \frac{5}{66} & \mathcal{H} = \frac{3617}{510} & \mathcal{L} = \frac{854513}{138} \\ \mathcal{C} = \frac{1}{42} & \mathcal{F} = \frac{691}{2730} & \mathcal{I} = \frac{43867}{798} & \mathcal{M} = \frac{236364091}{2730} \end{array}$$

(Comptes rendus de l'Académie des sciences, 14 mai 1860.)

SOMME DES LOGARITHMES DES NOMBRES EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE.

(Comptes rendus de l'Académie des sciences, 9 novembre 1863¹.)

$$S = \log a + \log(a + \omega) + \log(a + 2\omega) + \dots + \log(a + n\omega)$$

Soit $b = (a + n\omega)$; et soit k le module des logarithmes, on aura :

$$S = \frac{1}{\omega} (b \log b - a \log a) - nk + \frac{1}{2} \log ab - \frac{2k\omega}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{4k\omega^2}{3 \cdot 4} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) - \frac{8k\omega^3}{5 \cdot 6} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right) + \dots$$

$$\text{ou } S = \frac{b}{\omega} \log b - \frac{a}{\omega} \log a - nk + \frac{1}{2} \log ab - \frac{k n \omega^2}{12ab} + \frac{k \omega^3}{360} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right) - \dots$$

Ex. 21. Déterminer la somme des 1001 logarithmes

$\log 17000 + \log 17003 + \log 17006 + \dots + \log 20000$	
$a = 17000$	$\frac{b}{3} \log b = 28673, 53330.442655$
$b = 20000$	$-\frac{a}{3} \log a = 23972, 54388.781022$
$n\omega = 3000$	$- nk = - 434, 29448.190325$
$\omega = 3$	$+\frac{1}{2} \log ab = 4, 26573.945852$
$n = 1000$	$-\frac{3k}{1360000} = - 95800$
	$S = 4270, 96067.321360$

Ex. 22. Déterminer la somme des 1101 logarithmes

$\log 17000 + \log 17002 \frac{8}{11} + \log 17005 \frac{5}{11} + \dots + \log 20000$	
$n\omega = 3000$	$31540,88663.486920$
$\omega = \frac{30}{11}$	$- 26369,79827.659124$
$n = 1100$	$- 477,72393.009358$
	$+ 4,26573.945852$
	$- 87091$
	$S = 4697,63016.677199$

¹ Le cadre restreint de cet ouvrage ne m'a pas permis de donner ici le développement des formules générales de la sommation des séries, mais j'ai toujours indiqué les comptes rendus de l'Académie des sciences où l'on peut trouver ces développements.

LOGARITHMES DES FACTORIELLES, OU SOMMES DES LOGARITHMES DES NOMBRES NATURELS DE 1 À x .

$$S = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots x)$$

$$S = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x + \frac{1}{2} \log 2\pi - kx + \frac{A_k}{2x} - \frac{B_k}{3 \cdot 4x^3} + \frac{C_k}{5 \cdot 6x^5} - \dots$$

$$\text{ou } S = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x + \frac{1}{2} \log 2\pi - kx + \frac{k}{12x} - \frac{k}{360x^3} + \frac{k}{1260x^5} - \dots$$

Ex. 23. Calculer la somme des logarithmes de tous les nombres naturels depuis 1 à 579.

$$\begin{array}{r} x = 579 \qquad 579,5 \log 579 = 1600,9722277 \\ \log x = 2,76267.85637 \qquad \frac{1}{2} \log 2\pi = 0,3990899 \text{ (tab. VII)} \\ \qquad \qquad \qquad - kx = -251,4569050 \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{k}{12x} = \qquad \qquad + 625 \\ \hline \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 579) = 1349,9148741 \end{array}$$

Ex. 24. Calculer la somme de tous les logarithmes de 1 à 100000.

$$\begin{array}{r} x = 100000 \\ \log x = 5 \\ 500002,5 \\ 0,39908.99341.79057.52478.25035.92 \\ - 43429,44819.03251.82765.11289.18916.61 \\ \qquad \qquad \qquad + 3619.12068.25270.98563.76 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad - 120.63735.61 \\ \hline S = 456573,45089.99709.08360.66339.40947.46 \end{array}$$

Ex. 25. Calculer avec 25 chiffres exacts $\log(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 100)$

$$\begin{array}{r} x = 100 \\ \log x = 2 \\ 201,39908.99341.79057.52478.25035.92 \\ - 43,42944.81903.25182.76511.28918.92 \\ \qquad \qquad \qquad + 36.19120.68252.70985.63759.41 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad - 12.06373.56084.23661.88 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + 34.46781.60240.68 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad - 258.50862.02 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + 3655.68 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad - 83 \\ \hline S = 157,97000.36547.15788.37391.49248.04 \text{ (tab. VI)} \end{array}$$

III

4^o

SOMME DES LOGARITHMES ALTERNATIVEMENT POSITIFS ET NÉGATIFS.
LE DERNIER TERME ÉTANT POSITIF.

(Comptes rendus de l'Académie des sciences, 25 mars 1867.)

$$S = \log a - \log(a + \omega) + \log(a + 2\omega) - \dots + \log(a + n\omega),$$

$$S = \frac{1}{2} \log ab - \frac{2^2-1}{(2)} Ak\omega \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{2^4-1}{3 \cdot 4} Bk\omega^3 \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right) - \frac{2^6-1}{5 \cdot 6} Ck\omega^5 \left(\frac{1}{a^5} - \frac{1}{b^5}\right) + \dots,$$

ou $S = \frac{1}{2} \log ab - \frac{k\omega}{4} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{k\omega^3}{24} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right) - \frac{k\omega^5}{20} \left(\frac{1}{a^5} - \frac{1}{b^5}\right) + \dots$

Ex. 26. Calculer $y = \frac{246 \cdot 264 \cdot 282 \cdot \dots \cdot 426 \cdot 444}{255 \cdot 273 \cdot 291 \cdot \dots \cdot 435}$

$a = 246 \quad \log a = 2,390351$

$b = 444 \quad \frac{1}{2} \log ab = 2,5191590$

$\omega = 9 \quad \log b = 2,6473830 \quad - \frac{99k}{24272} = - 17714$

+7

$\log y = 2,5173883$

$y = 329,1458$

Ex. 27. $S = \log 17000 - \log 17003 + \log 17006 - \dots + \log 20000$
(Voir exemple 21.)

$a = 17000$

$b = 20000 \quad 4,26573.94585.21127.56$

$\omega = 3 \quad - 28740.07600.83$

+38.37

$S = 4,26573.65845.13565.10$

Ex. 28. $\log 17000 - \log 17002 \frac{8}{11} + \log 17005 \frac{5}{11} - \dots + \log 20000$

$\omega = \frac{30}{11} \quad 4,26573.94585.21127.56$

$- 26127.34182.57$

+28.83

$S = 4,26573.68457.86973.82$

IV

10°

SOMME DES LOGARITHMES DES NOMBRES NATURELS ALTERNATIVEMENT POSITIFS ET NÉGATIFS.

LE DERNIER TERME ÉTANT POSITIF.

$$S = \log 1 - \log 2 + \log 3 - \dots + \log x$$

$$S = \frac{1}{2} \log x - \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2} + \frac{2^2-1}{2} \cdot \frac{2k}{x} - \frac{2^4-1}{3 \cdot 4} \cdot \frac{4k}{x^3} + \frac{2^6-1}{5 \cdot 6} \cdot \frac{6k}{x^5} + \dots$$

$$S = \frac{1}{2} \log x - \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2} + \frac{k}{4x} - \frac{k}{24x^3} + \frac{k}{20x^5} - \frac{17k}{112x^7} + \dots$$

Ex. 29. Calculer $y = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 997 \cdot 999}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots 998}$

$$x = 999$$

$$\log x = 2,99956 \ 5488 \text{ (tab. II)} \quad \frac{1}{2} \log x = 1, \ 4997827$$

$$- \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2} = -0,0980599 \text{ (tab. VII)}$$

$$+ \frac{k}{4x} = \quad \quad \quad 1087$$

$$\log y = 1, \ 4018315$$

$$y = 25, \ 22502$$

Ex. 30. $S = \log 1 - \log 2 + \log 3 - \dots + \log 3001$

$$x = 3001$$

$$\log x = 3,47726 \cdot 59954 \cdot 24852 \cdot 62460 \cdot 29421 \cdot 60$$

$$\frac{1}{2} \log x = 1,73863 \cdot 29977 \cdot 12426 \cdot 31$$

$$- 9805 \cdot 99385 \cdot 15076 \cdot 33$$

$$+ 3 \cdot 61791 \cdot 47109 \cdot 57$$

$$- 669 \cdot 54$$

$$S = 1,64060 \cdot 92383 \cdot 43790 \cdot 01$$

SOMME DES LOGARITHMES ALTERNATIVEMENT POSITIFS ET NÉGATIFS.

LE DERNIER TERME ÉTANT NÉGATIF.

(Comptes rendus de l'Académie des sciences, 25 mars 1867.)

$$S = \log a - \log(a + \omega) + \log(a + 2\omega) - \dots - \log(a + n\omega),$$

$$S = \frac{1}{2} \log \frac{a}{b} - \frac{2^2-1}{2} \mathcal{A}k\omega \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{2^4-1}{3 \cdot 4} \mathcal{B}k\omega^3 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right) - \frac{2^6-1}{5 \cdot 6} \mathcal{C}k\omega^5 \left(\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5}\right) + \dots$$

ou $S = \frac{1}{2} \log \frac{a}{b} - \frac{k\omega}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{k\omega^3}{24} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right) - \frac{k\omega^5}{20} \left(\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5}\right) + \dots$

Ex. 31. Calculer $y = \frac{3861 \cdot 3871 \cdot 3881 \dots 6001}{3866 \cdot 3876 \cdot 3886 \dots 6006}$

$a = 3861 \quad \log a = 3,5866998 \quad \frac{1}{2} \log \frac{a}{b} = 9,9040572$

$b = 6006 \quad \log b = 3,7785853 \quad - 2310$

$\omega = 5$

$\log y = 9,9038262$

$y = 0,8013573$

Ex. 32. Calculer $y = \frac{1815 \cdot 1829 \dots 4993}{1822 \cdot 1836 \dots 5000}$

$a = 1815$

$b = 5000$

$\omega = 7 \quad \frac{1}{2} \log \frac{a}{b} = 9,77995.33125.18056.25939.77$

$- 57.07443.04661.00904.79$

$\frac{a}{b} = 0,363 \quad + 10.87749.81921.12$

$- 18.64618.75$

$= \frac{3 \cdot 11^2}{10^3} \quad + 83.74$

$\log y = 9,77938.25693.01126.42421.09$

$y = 0,60170.35437.67086.00395.39$

SOMME DES LOGARITHMES DES NOMBRES NATURELS ALTERNATIVEMENT POSITIFS ET NÉGATIFS.
LE DERNIER TERME ÉTANT NÉGATIF.

$$S = \log 1 - \log 2 + \log 3 - \dots - \log x$$

$$-S = \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2} + \frac{2^2-1}{2} \frac{k}{x} - \frac{2^4-1}{3 \cdot 4} \frac{k}{x^3} + \frac{2^6-1}{5 \cdot 6} \frac{k}{x^5} - \dots$$

$$-S = \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2} + \frac{k}{4x} - \frac{k}{24x^3} + \frac{k}{20x^5} - \dots$$

Ex. 33. On demande $y = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 997 \cdot 999}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 998 \cdot 1000}$

$$x = 1000 \quad \frac{1}{2} \log x = 1,5$$

$$\log x = 3 \quad \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2} = 0,0980599 \quad (\text{tab. VII})$$

$$1086$$

$$S = -1,5981685$$

$$\log y = 8,4018315$$

$$y = 0,02522502$$

Ainsi, pour évaluer y avec 8 chiffres exacts, il n'a fallu calculer qu'un seul terme.

On voit que la mantisse du logarithme est égale à celle de l'exemple 29.

Ex. 34. $S = \log 1 - \log 2 + \log 3 - \dots - \log 3000$

$$\frac{1}{2} \log 3000 = 1,73856.06273.59831.22$$

$$\frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2} = 0,09805.99385.15076.33$$

$$\frac{k}{4x} = 3.61912.06825.27$$

$$-\frac{k}{24x^3} = -670.21$$

$$-S = 1.83665.67570.81062.61$$

Dans l'exemple 30, on a trouvé pour somme des 3001 logarithmes positifs et négatifs $S = +1,64061$; en retranchant de cette somme la valeur qu'on vient d'obtenir $S = -1,83665\dots$, on trouve pour différence

$$3,47726.59954.24852.62$$

mais c'est le logarithme de 3001 exact au dernier chiffre; par conséquent les deux résultats sont vérifiés l'un par l'autre.

AD. II.

SOMME DES LOGARITHMES DES NOMBRES PAIRS OU DES NOMBRES IMPAIRS
COMPRIS ENTRE 1 ET $2x$.

De la valeur de $S = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x)$, formule II, on déduit directement la somme des logarithmes des *nombre pairs* : $\log(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2x) = S + x \log 2$; puis en retranchant cette dernière valeur de celle de $\log(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2x)$, il reste la valeur de $\log[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2x-1)]$, somme des log. des *nombre impairs*.

1. — SOMME DES LOGARITHMES DES NOMBRES PAIRS DE 1 A $2x$

$$P = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log 2x + \frac{1}{2} \log \pi - kx + \frac{k}{12x} - \frac{k}{360x^3} + \frac{k}{1260x^5} - \dots$$

Ex. 35. Calculer à 20 décimales la somme des logarithmes des *nombre pairs* de 1 à 10000.

$$2x = 10000$$

$$20002,$$

$$\begin{aligned} \log 2x &= 4 \quad 0,24857.49363.47066.92717.56 = \frac{1}{2} \log 2, \text{ t. VII} \\ &\quad - 2171,47240.95162.59138.25564.46 \\ &\quad \quad \quad + 72382.41365.05419.71 \\ &\quad \quad \quad - 9.65098.85 \\ &\quad \quad \quad + 1 \end{aligned}$$

$$P = 17230,77617.26583.29284.07473.97$$

2. — SOMME DES LOGARITHMES DES NOMBRES IMPAIRS DE 1 A $2x$.

$$I = x \log 2x + \frac{1}{2} \log 2 - kx - \frac{k}{12 \cdot (2x)} + \frac{7k}{360 \cdot (2x)^3} - \frac{31k}{1260 \cdot (2x)^5} + \dots$$

Ex. 36. Calculer à 20 décimales la somme des logarithmes des *nombre impairs* de 1 à 10000.

$$20000,$$

$$\begin{aligned} &0,15051.49978.31990.59760.69 = \frac{1}{2} \log 2, \text{ tab. VII.} \\ &- 2171,47240.95162.59138.25564.46 \\ &\quad - 39191.20682.52709.86 \\ &\quad \quad + 8.44461.49 \\ &\quad \quad - 1 \end{aligned}$$

$$I = 17828,67810.18624.52178.25947.85$$

En additionnant les deux sommes que nous venons d'obtenir, on aura

$$P + I = 35659,45427.45207.81462.334218$$

ce qui est la somme des logarithmes de tous les nombres naturels depuis 1 jusqu'à 10000.

TABLES.

I

RECHERCHE DU LOGARITHME.

RÉCIPROQUES ET LOGARITHMES DES RÉCIPROQUES DES NOMBRES NATURELS DE 1 À 110.

a	$\frac{1}{a}$	$\text{Log} \left(\frac{1}{a} \right)$	a	$\frac{1}{a}$	$\text{Log} \left(\frac{1}{a} \right)$
11	9091	95860.73148.41774.95924.98000.29	31	3226	50863.83061.65727.32033.32959.00
12	8333	92081.87539.52375.17227.74943.07	32	3125	49485.00216.80094.02393.13055.26
13	7692	88605.66476.93163.23079.34948.42	33	3030	48148.60601.22112.52195.47721.26
14	7143	85387.19643.21761.97407.40448.47	34	2941	46852.10829.57744.87624.60912.11
15	6667	82390.87409.44318.75791.87109.91	35	2857	45593.19556.49724.36450.15226.36
16	625	79588.00173.44075.21914.50444.21	36	2778	44369.74992.32712.73498.24664.04
17	5882	76955.10786.21726.07145.98301.06	37	2703	43179.82759.33005.00319.15493.10
18	5556	74472.74948.96693.93019.62052.99	38	2632	42021.64033.83189.84324.99276.30
19	5263	72124.63990.47171.03846.36665.24	39	2564	40893.53929.73500.79349.84669.39
20	5	69897.00043.36018.80478.62611.05	40	25	39794.00086.72037.60957.25222.11
21	4762	67778.07052.66080.73199.27558.38	41	2439	38721.61432.80264.50549.05881.50
22	4545	65757.73191.77793.76403.60611.34	42	2381	37675.07096.02099.53677.90169.43
23	4348	63827.21639.82407.12113.22228.88	43	2326	36653.15444.20413.47359.49118.47
24	4167	61978.87582.88393.97706.37554.13	44	2273	35654.73235.13812.56882.23222.39
25	4	60205.99913.27962.39042.74777.89	45	2222	34678.74862.24656.32062.38630.83
26	3846	58502.66520.29182.03557.97559.47	46	2174	33724.21683.18425.92591.84839.93
27	3704	56863.62358.41012.68811.49162.90	47	2128	32790.21420.64282.53558.57806.01
28	3571	55284.19686.57780.77886.03059.52	48	2083	31875.87626.24412.78185.00165.18
29	3448	53760.20021.01043.91266.71532.37	49	2041	30980.39199.71486.33857.55674.83
30	3333	52287.87452.80337.56270.49720.97	50	2	30102.99956.63981.19521.37388.95

$$c = 2,71828.18284.59045.23536.02874.71$$

$$\frac{1}{e} = 0,36787.94411.71442.32159.55237.71$$

$$\text{Module } k = \log e = 0,43429.44819.03251.82765.11289.19$$

$$\frac{1}{k} = \log_{10} = 2,30258.50929.94045.68401.79914.55$$

$$\log k = 9,63778.43113.00536.78912.29674.99$$

$$\log 2k = 9,93881.43069.64517.98433.67063.93$$

I (Suite).

RECHERCHE DU LOGARITHME.

RÉCIPROQUES ET LOGARITHMES DES RÉCIPROQUES DES NOMBRES NATURELS DE 1 À 110.

a	$\frac{1}{a}$	$\text{Log} \left(\frac{1}{a} \right)$	a	$\frac{1}{a}$	$\text{Log} \left(\frac{1}{a} \right)$
51	1961	29242.98239.02063.63416.48022.02	81	1235	09151.49811.21350.25081.98883.87
52	1923	28399.66563.65200.84036.60170.53	82	1220	08618.61476.16283.31027.68492.55
53	1887	27572.41303.99210.95436.70077.08	83	1205	08092.19076.23926.09616.72396.48
54	1852	26760.62401.77031.49290.11773.96	84	1190	07572.07139.38118.34156.52780.49
55	1818	25963.73105.05756.15446.35389.23	85	1176	07058.10742.85707.26667.35690.00
56	1786	25181.19729.93799.58364.65670.57	86	1163	06550.15487.56432.27838.11729.52
57	1754	24412.51443.27508.60116.86386.21	87	1149	06048.07473.81381.47537.21253.34
58	1724	23657.20064.37062.71745.34143.42	88	1136	05551.73278.49831.37360.85833.45
59	1695	22914.79883.57855.80973.93436.15	89	1124	05060.99933.55087.21527.64566.30
60	1667	22184.87496.16356.36749.12332.02	90	1111	04575.74905.60675.12540.99441.93
61	1639	21467.01649.89232.96611.42514.86	91	1099	04095.86076.78906.40008.12785.83
62	1613	20760.83105.01746.12511.95570.05	92	1087	03621.21726.54444.73070.47450.98
63	1587	20065.94505.46418.29469.77279.35	93	1075	03151.70514.46064.88303.82679.97
64	1562	19382.00260.16112.82871.75666.32	94	1064	02687.21464.00301.34037.20417.06
65	1538	18708.66433.57144.42600.72337.37	95	1053	02227.63947.11152.23367.74054.19
66	1515	18045.60644.58131.32674.10332.31	96	1042	01772.87669.60431.58663.62776.23
67	1493	17392.51972.99173.56585.08683.71	97	1031	01322.82657.33755.14821.56381.88
68	1471	16749.10872.93763.68103.23523.16	98	1020	00877.39243.07505.14336.18285.88
69	1449	16115.09092.62744.68383.71949.84	99	1010	00436.48054.02450.08465.97442.22
70	1429	15490.19599.85743.16928.77837.41	100	1	0
71	1408	14874.16512.80924.71390.71705.65	101	9901	99567.86262.17357.42572.48118.22
72	1389	14266.75035.68731.53976.87275.09	102	9804	99139.98282.38082.43895.10633.08
73	1370	13667.71398.79544.09892.56131.00	103	9709	98716.27752.94827.79482.89288.05
74	1351	13076.82802.69023.80797.78104.16	104	9615	98296.66607.01219.64515.22781.58
75	1333	12403.87366.08299.95313.24498.86	105	9524	97881.07009.30061.92720.64947.33
76	1316	11918.64077.19208.64803.61887.35	106	9434	97469.41347.35229.75915.32688.14
77	1299	11350.92748.27518.12853.75837.70	107	9346	97061.62223.14790.35916.54587.61
78	1282	10790.53973.09519.59828.47280.44	108	9259	96657.62445.13050.29768.74385.01
79	1266	10237.29087.09558.57200.51786.14	109	9174	96257.35020.59376.36479.94866.92
80	125	09691.00130.08056.41435.87833.16	110	9091	95860.73148.41774.95924.98000.29

II

RECHERCHE DU LOGARITHME.

NOMBRE.	$-\log\left(1 - \frac{a}{10^a}\right)$	NOMBRE.	$-\log\left(1 - \frac{a}{10^a}\right)$
1,0 ⁹	0,0 4095.86076.78906.40008.12785.83	1,0 ⁹	0,0 ⁹ 39086.67926.16131.78020.18
8	3621.21726.54444.73070.47450.98	8	34743.69752.72355.55615.66
7	3151.70514.46064.88303.82679.97	7	30400.72013.58722.40196.79
6	2687.21464.00301.34037.20417.06	6	26057.74708.75145.45678.49
5	2227.63947.11152.23367.74054.19	5	21714.77838.21537.86001.75
4	1772.87669.60431.58663.62776.23	4	17371.81401.97812.75133.61
3	1322.82657.33755.14821.56381.88	3	13028.85400.03883.27067.18
2	0,0 ⁸ 877.39243.07505.14336.18285.88	2	0,0 ⁸ 8685.89832.39662.55821.62
1	436.48054.02450.08465.97442.22	1	4342.94699.05063.75442.13
1,0 ⁹	0,0 ⁸ 392.63455.14724.67163.55656.21	1,0 ⁹	0,0 ⁸ 3908.65209.60229.73493.33
8	348.83278.45821.34426.46014.26	8	3474.35724.49690.97907.98
7	305.07515.04618.82409.68314.89	7	3040.06243.73447.40000.14
6	261.36156.02686.68798.12154.12	6	2605.76767.31498.91083.93
5	217.69192.54274.54511.37171.10	5	2171.47295.23845.42473.42
4	174.06615.76301.26844.47339.55	4	1737.17827.50486.85482.72
3	130.48416.88344.28011.86282.97	3	1302.88364.11423.11425.93
2	0,0 ⁷ 86.94587.12628.89062.03560.69	2	0,0 ⁷ 868.58905.06654.11617.14
1	43.45117.74017.69130.64656.01	1	434.29450.36179.77370.46
1,0 ⁹	0,0 ⁷ 39.10410.28582.94304.45669.94	1,0 ⁹	0,0 ⁷ 390.86505.13018.54217.30
8	34.75746.33920.90231.67184.25	8	347.43559.94200.25624.22
7	30.41125.89160.76147.34971.46	7	304.00614.79724.91582.53
6	26.06548.93431.97427.76940.46	6	260.57669.69592.52083.54
5	21.72015.45864.25579.96912.24	5	217.14724.63803.07118.57
4	17.37525.45587.58231.28918.96	4	173.71779.62356.56678.94
3	13.03078.91732.19118.92026.02	3	130.28834.65253.00755.95
2	0,0 ⁶ 8.68675.83428.58079.45676.92	2	0,0 ⁶ 86.85889.72492.39340.92
1	4.34316.19807.51038.45560.44	1	43.42944.84074.72425.16
1,0 ⁹	0,0 ⁶ 3.90882.62369.48505.57891.65	1,0 ⁹	0,0 ⁶ 39.08650.35471.81930.71
8	3.47449.48368.72627.56562.27	8	34.74355.86912.34381.16
7	3.04016.77804.36523.36654.48	7	30.40061.38396.29776.50
6	2.60584.50675.53314.53910.58	6	26.05766.89923.68116.71
5	2.17152.66981.36125.24722.49	5	21.71472.41494.49401.80
4	1.73721.26720.98082.26121.40	4	17.37177.93108.73631.75
3	1.30290.29893.52314.95767.29	3	13.02883.44766.40806.55
2	0,0 ⁵ 86859.76498.11955.31938.54	2	0,0 ⁵ 8.68588.96467.50926.20
1	43429.66533.90137.93521.49	1	4.34294.48212.03990.69

II (Suite).

RECHERCHE DU LOGARITHME.			
NOMBRE.	$-\log \left(1 - \frac{a}{10^a} \right)$	NOMBRE.	$-\log \left(1 - \frac{a}{10^a} \right)$
1,0 ⁹ $\bar{9}$	0,0 ³ 3.90865.03388.88159.10	1,0 ¹² $\bar{9}$	0,0 ¹² 390.86503.37131.03
8	3.47435.58566.15756.96	8	347.43558.55227.41
7	3.04006.13743.86784.27	7	304.00613.73323.83
6	2.60576.68922.01241.03	6	260.57668.91420.29
5	2.17147.24100.59127.24	5	217.14724.09516.80
4	1.73717.79279.60442.90	4	173.71779.27613.35
3	1.30288.34459.05188.00	3	130.28834.45709.95
2	0,0 ¹⁰ 86858.89638.93362.55	2	0,0 ¹³ 86.85889.63806.59
1	43429.44819.24966.55	1	43.42944.81903.27
1,0 ¹⁰ $\bar{9}$	0,0 ¹⁰ 39086.50337.30515.57	1,0 ¹³ $\bar{9}$	0,0 ¹³ 39.08650.33712.94
8	34743.55855.36498.89	8	34.74355.85522.62
7	30400.61373.42916.49	7	30.40061.37332.29
6	26057.66891.49768.40	6	26.05766.89141.96
5	21714.72409.57054.59	5	21.71472.40951.63
4	17371.77927.64775.09	4	17.37177.92761.30
3	13028.83445.72929.87	3	13.02883.44570.98
2	0,0 ¹¹ 8685.88963.81518.95	2	0,0 ¹⁴ 8.68588.96380.65
1	4342.94481.90542.33	1	4.34294.48190.33
1,0 ¹¹ $\bar{9}$	0,0 ¹¹ 3908.65033.71468.55		
8	3474.35585.52399.12		
7	3040.06137.33334.03		
6	2605.76689.14273.28		
5	2171.47240.95216.88		
4	1737.17792.76164.82		
3	1302.88344.57117.10		
2	0,0 ¹² 868.58896.38073.72		
1	434.29448.19034.69		

III

RECHERCHE DES LOGARITHMES ET DES NOMBRES.

RECHERCHE DU LOGARITHME.				RECHERCHE DU LOGARITHME.			
$\text{Log}(1 + \theta) = k\theta$				$\text{Log}(1 + \theta) = k\theta$			
θ	$k\theta$	θ	$k\theta$	θ	$k\theta$	θ	$k\theta$
11	4,77723.93009.36	36	15,63460.13485.17	61	26,49196.33960.98	86	37,34932.54436.80
12	5,21153.37828.39	37	16,06889.58304.20	62	26,92625.78780.02	87	37,78361.99255.83
13	5,64582.82647.42	38	16,50319.03123.24	63	27,36055.23599.05	88	38,21791.44074.86
14	6,08012.27466.46	39	16,93748.47942.27	64	27,79484.68418.08	89	38,65220.88893.89
15	6,51441.72285.49	40	17,37177.92761.30	65	28,22914.13237.11	90	39,08650.33712.93
16	6,94871.17104.52	41	17,80607.37580.33	66	28,66343.58056.15	91	39,52079.78531.96
17	7,38300.61923.55	42	18,24036.82399.37	67	29,09773.02875.18	92	39,95509.23350.99
18	7,81730.06742.59	43	18,67466.27218.40	68	29,53202.47694.21	93	40,38938.68170.02
19	8,25159.51561.62	44	19,10895.72037.43	69	29,96631.92513.24	94	40,82368.12989.06
20	8,68588.96380.65	45	19,54325.16856.46	70	30,40061.37332.28	95	41,25797.57808.09
21	9,12018.41199.68	46	19,97754.61675.50	71	30,83490.82151.31	96	41,69227.02627.12
22	9,55447.86018.72	47	20,41184.06494.53	72	31,26920.26970.34	97	42,12656.47446.15
23	9,98877.30837.75	48	20,84613.51313.56	73	31,70349.71789.37	98	42,56085.92265.19
24	10,42306.75656.78	49	21,28042.96132.59	74	32,13779.16608.41	99	42,99515.37084.22
25	10,85736.20475.81	50	21,71472.40951.63	75	32,57208.61427.44	100	43,42944.81903.25
26	11,29165.65294.85	51	22,14901.85770.66	76	33,00638.06246.47	101	43,86374.26722.28
27	11,72595.10113.88	52	22,58331.30589.69	77	33,44067.51065.50	102	44,29803.71541.32
28	12,16024.54932.91	53	23,01760.75408.72	78	33,87496.95884.54	103	44,73233.16360.35
29	12,59453.99751.94	54	23,45190.20227.76	79	34,30926.40703.57	104	45,16662.61179.38
30	13,02883.44570.98	55	23,88619.65046.79	80	34,74355.85522.60	105	45,60092.05998.41
31	13,46312.89390.01	56	24,32049.09865.82	81	35,17785.30341.63	106	46,03521.50817.45
32	13,89742.34209.04	57	24,75478.54684.85	82	35,61214.75160.67	107	46,46950.95636.48
33	14,33171.79028.07	58	25,18907.99503.89	83	36,04644.19979.70	108	46,90380.40455.51
34	14,76601.23847.11	59	25,62337.44322.92	84	36,48073.64798.73	109	47,33809.85274.54
35	15,20030.68666.14	60	26,05766.89141.95	85	36,91503.09617.76	110	47,77239.30093.58

III (Suite).

RECHERCHE DES LOGARITHMES ET DES NOMBRES.

RECHERCHE DU NOMBRE.				RECHERCHE DU NOMBRE.			
Log $x = \theta$		$x = 1 + \frac{\theta}{k}$		Log $x = \theta$		$x = 1 + \frac{\theta}{k}$	
θ	$\frac{\theta}{k}$	θ	$\frac{\theta}{k}$	θ	$\frac{\theta}{k}$	θ	$\frac{\theta}{k}$
11	25,32843.60229.35	36	82,89306.33477.86	61	140,45769.06726.37	86	198,02231.79974.88
12	27,63102.11159.29	37	85,19564.84407.80	62	142,76027.57656.31	87	200,32490.30904.82
13	29,93360.62089.23	38	87,49823.35337.74	63	145,06286.08586.25	88	202,62748.81834.76
14	32,23619.13019.17	39	89,80081.86267.68	64	147,36544.59516.19	89	204,93007.32764.70
15	34,53877.63949.11	40	92,10340.37197.62	65	149,66803.10446.13	90	207,23265.83694.64
16	36,84136.14879.05	41	94,40598.88127.56	66	151,97061.61376.07	91	209,53524.34624.58
17	39,14394.65808.99	42	96,70857.39057.50	67	154,27320.12306.01	92	211,83782.85554.52
18	41,44653.16738.93	43	99,01115.89987.44	68	156,57578.68235.95	93	214,14041.36484.46
19	43,74911.67668.87	44	101,31374.40917.38	69	158,87837.14165.89	94	216,44299.87414.40
20	46,05170.18598.81	45	103,61632.91847.32	70	161,18095.65095.83	95	218,74558.38344.34
21	48,35428.69528.75	46	105,91891.42777.26	71	163,48354.16025.77	96	221,04816.89274.28
22	50,65687.20458.69	47	108,22149.93707.20	72	165,78612.66955.71	97	223,35075.40204.22
23	52,95945.71388.63	48	110,52408.44637.14	73	168,08871.17885.65	98	225,65333.91134.16
24	55,26204.22318.57	49	112,82666.95567.08	74	170,39129.68815.59	99	227,95592.42064.11
25	57,56462.73248.51	50	115,12925.46497.02	75	172,69388.19745.53	100	230,25850.92994.05
26	59,86721.24178.45	51	117,43183.97426.96	76	174,99646.70675.47	101	232,56109.43923.99
27	62,16979.75108.39	52	119,73442.48356.90	77	177,29905.21605.42	102	234,86367.94853.93
28	64,47238.26038.33	53	122,03700.99286.84	78	179,60163.72535.36	103	237,16626.45783.87
29	66,77496.76968.27	54	124,33959.50216.78	79	181,90422.23465.30	104	239,46884.96713.81
30	69,07755.27898.21	55	126,64218.01146.73	80	184,20680.74395.24	105	241,77143.47643.75
31	71,38013.78828.15	56	128,94476.52076.67	81	186,50939.25325.18	106	244,07401.98573.69
32	73,68272.29758.09	57	131,24735.03006.61	82	188,81197.76255.12	107	246,37660.49503.63
33	75,98530.80688.04	58	133,54993.53936.55	83	191,11456.27185.06	108	248,67919.00433.57
34	78,28789.31617.98	59	135,85252.04866.49	84	193,41714.78115.00	109	250,98177.51363.51
35	80,59047.82547.92	60	138,15510.55796.43	85	195,71973.29044.94	110	253,28436.02293.45

IV

RECHERCHE DU NOMBRE.

NOMBRE.	$\text{Log} \left(1 + \frac{a}{10^a} \right)$	NOMBRE.	$\text{Log} \left(1 + \frac{a}{10^a} \right)$
1,0 9	0,0 3742.64979.40623.63520.05133.08	1,0 ⁹	0,0 ⁵ 39086.32748.30828.22139.17
8	3342.37554.86949.70231.25614.99	8	34743.41957.87671.28640.14
7	2938.37776.85209.64083.45412.39	7	30400.50733.15761.02389.69
6	2530.58652.64770.24084.67311.86	6	26057.59074.15010.57693.60
5	2118.92990.69938.07279.35052.67	5	21714.66980.85333.08831.62
4	1703.33392.98780.35484.77218.42	4	17371.74453.26641.70057.42
3	1283.72247.05172.20517.10711.95	3	13028.81491.38849.55598.63
2	0,0 ⁸ 860.01717.61917.56104.89366.92	2	0,0 ⁶ 8685.88095.21869.79656.80
1	432.13737.82642.57427.51881.78	1	4342.94264.75615.56407.44
1,0 ⁹	0,0 ⁸ 389.11662.36910.52171.52813.17	1,0 ⁹	0,0 ⁶ 3908.64857.82376.70075.57
8	346.05321.09506.48615.72276.44	8	3474.35446.54844.13726.27
7	302.94705.53618.00716.93257.67	7	3040.06030.93017.78673.69
6	259.79807.19908.59231.19629.85	6	2605.76610.96897.56231.94
5	216.60617.56507.67623.04206.38	5	2171.47186.66483.37715.16
4	173.37128.09000.52976.80271.06	4	1737.17758.01775.14437.46
3	130.09330.20418.11880.08262.79	3	1302.88325.02772.77712.98
2	0,0 ⁸ 86.77215.31226.91249.28427.08	2	0,0 ⁷ 868.58887.69476.18855.84
1	43.40774.79318.64066.89213.88	1	434.29446.01885.29180.14
1,0 ⁹	0,0 ⁸ 39.06892.49910.13102.88642.23	1,0 ⁹	0,0 ⁷ 390.86501.61240.01183.14
8	34.72966.85363.54068.77056.93	8	347.43557.16251.78782.41
7	30.38997.84812.49181.05176.68	7	304.00612.66920.61969.27
6	26.04985.47390.34681.78546.11	6	260.57668.13246.50735.02
5	21.70929.72230.20828.19128.84	5	217.14723.55229.45070.99
4	17.36830.58464.91882.26381.53	4	173.71778.92869.44968.48
3	13.02688.05227.06100.37808.72	3	130.28834.26166.50418.82
2	0,0 ⁴ 8.68502.11648.95722.88997.98	2	0,0 ⁸ 86.85889.55120.61413.30
1	4.34272.76862.66963.73135.28	1	43.42944.79731.77943.26
1,0 ⁹	0,0 ⁴ 3.90847.44584.16739.24188.05	1,0 ⁹	0,0 ⁸ 39.08650.31954.03400.37
8	3.47421.68884.03320.04935.02	8	34.74355.84132.85912.74
7	3.03995.49761.39869.40262.21	7	30.40061.36268.25480.37
6	2.60568.87215.39547.94562.29	6	26.05766.88360.22103.23
5	2.17141.81245.15513.71724.22	5	21.71472.40408.75781.33
4	1.73714.31849.80922.15122.78	4	17.37177.92413.86514.65
3	1.30286.39028.48926.07608.19	3	13.02883.44375.54303.18
2	0,0 ⁸ 86858.02780.32675.71495.64	2	0,0 ⁹ 8.68588.96293.79146.93
1	43429.23104.45318.68554.93	1	4.34294.48168.61045.87

IV (Suite).

RECHERCHE DU NOMBRE.			
NOMBRE.	$\text{Log} \left(1 + \frac{a}{10^a} \right)$	NOMBRE.	$\text{Log} \left(1 + \frac{a}{10^a} \right)$
1,0 ⁹	0,0 ³ 3.90865.03353.70373.80	1,0 ¹⁹	0,0 ¹³ 390.86503.37127.51
8	3.47435.58538.36272.28	8	347.43558.55224.62
7	3.04006.13722.58741.31	7	304.00613.73321.70
6	2.60576.68906.37780.90	6	260.57668.91418.73
5	2.17147.24089.73391.04	5	217.14724.09515.72
4	1.73717.79272.65571.73	4	173.71779.27612.66
3	1.30288.34455.14322.97	3	130.28834.45709.56
2	0,0 ¹⁰ 86858.89637.19644.76	2	0,0 ¹³ 86.85889.63806.42
1	43429.44818.81537.10	1	43.42944.81903.23
1,0 ¹⁰	0,0 ¹⁰ 39086.50336.95337.72	1,0 ¹⁹	0,0 ¹³ 39.08650.33712.91
8	34743.55855.08704.04	8	34.74355.85522.59
7	30400.61373.21636.06	7	30.40061.37332.27
6	26057.66891.34133.80	6	26.05766.89141.94
5	21714.72409.46197.23	5	21.71472.40951.62
4	17371.77927.57826.38	4	17.37177.92761.30
3	13028.83445.69021.22	3	13.02883.44570.97
2	0,0 ¹¹ 8685.88963.79781.78	2	0,0 ¹⁴ 8.68588.96380.65
1	4342.94481.90108.04	1	4.34294.48190.32
1,0 ¹¹	0,0 ¹¹ 3908.65033.71116.78		
8	3474.35585.52121.17		
7	3040.06137.33121.23		
6	2605.76689.14116.94		
5	2171.47240.95108.30		
4	1737.17792.76095.33		
3	1302.88344.57078.01		
2	0,0 ¹² 868.58896.38056.35		
1	434.29448.19030.35		

V

RECHERCHE DU NOMBRE.

a	Log a	a	Log a
1	0	21	32221.92947.33919.26800.72441.62
2	30102.99956.63981.19521.37388.95	22	34242.26808.22206.23596.39388.66
3	47712.12547.19662.43729.50279.03	23	36172.78360.17592.87886.77771.12
4	60205.99913.27962.39042.74777.89	24	38021.12417.11606.02293.62445.87
5	69897.00043.36018.80478.62611.05	25	39794.00086.72037.60957.25222.11
6	77815.12503.83643.63250.87667.98	26	41497.33479.70817.96442.02440.53
7	84509.80400.14256.83071.22162.59	27	43136.37641.58987.31188.50837.10
8	90308.99869.91943.58564.12166.84	28	44715.80313.42219.22113.96940.48
9	95424.25094.39324.87459.00558.07	29	46239.79978.98956.08733.28467.63
10	0	30	47712.12547.19662.43729.50279.03
11	04139.26851.58225.04075.01999.71	31	49136.16938.34272.67966.67041.00
12	07918.12460.47624.82772.25056.93	32	50514.99783.19905.97606.86944.74
13	11394.33523.06836.76920.65051.58	33	51851.39308.77887.47804.52278.74
14	14612.80356.78238.02592.59551.53	34	53147.89170.42255.12375.39087.89
15	17609.12590.55681.24208.12890.09	35	54406.80443.50275.63549.84773.64
16	20411.99826.55924.78085.49555.79	36	55630.25007.67287.26501.75335.96
17	23044.89213.78273.92854.01698.94	37	56820.17240.66994.99680.84506.90
18	25527.25051.03306.06980.37947.01	38	57978.35966.16810.15675.00723.70
19	27875.36009.52828.96153.63334.76	39	59106.46070.26499.20650.15330.61
20	30102.99956.63981.19521.37388.95	40	60205.99913.27962.39042.74777.89

$$\pi = 3,14159.26535.89793.23846.26433.83$$

$$\frac{1}{\pi} = 0,31830.98861.83790.67153.77675.27$$

$$\pi^2 = 9,86960.44010.89358.61883.44910.00$$

$$\sqrt{\pi} = 1,77245.38509.05516.02729.81674.83$$

$$\text{Log } \pi = 0,49714.98726.94133.85435.12682.88$$

V (Suite).

RECHERCHE DU NOMBRE.			
a	Log a	a	Log a
41	61278.38567.19735.49450.94118.50	71	85125.83487.19075.28609.28294.35
42	62324.92903.97900.46322.09830.57	72	85733.24964.31268.46023.12724.91
43	63346.84555.79586.52640.50881.53	73	86332.28601.20455.90107.43869.00
44	64345.26764.86187.43117.76777.61	74	86923.17197.30976.19202.21895.84
45	65321.25137.75343.67937.61369.12	75	87506.12633.91700.04686.75501.14
46	66275.78316.81574.07408.15160.07	76	88081.35922.80791.35196.38112.65
47	67209.78579.35717.46441.42193.99	77	88649.07251.72481.87146.24162.30
48	68124.12373.75587.21814.99834.82	78	89209.46026.90480.40171.52719.56
49	69019.60800.28513.66142.44325.17	79	89762.70912.90441.42799.48213.86
50	69897.00043.36018.80478.62611.05	80	90308.99869.91943.58564.12166.84
51	70757.01760.97936.36583.51977.98	81	90848.50188.78649.74918.01116.13
52	71600.33436.34799.15963.39829.47	82	91381.38523.83716.68972.31507.45
53	72427.58696.00789.04563.29922.92	83	91907.80923.76073.90383.27603.52
54	73239.37598.22968.50709.88226.04	84	92427.92860.61881.65843.47219.51
55	74036.26894.94243.84553.64610.77	85	92941.89257.14292.73332.64310.00
56	74818.80270.06200.41635.34329.43	86	93449.84512.43567.72161.88270.48
57	75587.48556.72491.39883.13613.79	87	93951.92526.18618.52462.78746.66
58	76342.79935.62937.28254.65856.58	88	94448.26721.50168.62639.14166.55
59	77085.20116.42144.19026.06563.85	89	94939.00066.44912.78472.35433.70
60	77815.12503.83643.63250.87667.98	90	95424.25094.39324.87459.00558.07
61	78532.98350.10767.03388.57485.14	91	95904.13923.21093.59991.87214.17
62	79239.16894.98253.87488.04429.95	92	96378.78273.45555.26929.52549.02
63	79934.05494.53581.70530.22720.65	93	96848.29485.53935.11696.17320.03
64	80617.99739.83887.17128.24333.68	94	97312.78535.99698.65962.70582.94
65	81291.33566.42855.57399.27662.63	95	97772.36052.88847.76632.25945.81
66	81954.39355.41868.67325.89667.69	96	98227.12330.39568.41336.37223.77
67	82607.48027.00826.43414.91316.29	97	98677.17342.66244.85178.43618.12
68	83250.89127.06236.31896.76476.84	98	99122.60756.92494.85663.81714.12
69	83884.90907.37255.31616.28050.16	99	99563.51945.97549.91534.02557.78
70	84509.80400.14256.83071.22162.59	100	0

VI

LOGARITHMES DES FACTORIELLES.

SOMMES DES LOGARITHMES DES NOMBRES NATURELS.				SOMMES DES LOG. DES NOMBRES IMPAIRS.	
n	Log (1.2.3..... n)	n	Log (1.2.3..... n)	2n-1	Log [1.3.5.7..... (2n-1)]
1	0,0	31	33,91502.17687.59992.30990	1	0,0
2	0,30102.99956.63981.19521	32	35,42017.17470.79898.28597	3	0,47712.12547.19662.43730
3	0,77815.12503.83643.63251	33	36,93868.56869.57785.76401	5	1,17609.12590.55681.24208
4	1,38021.12417.11606.00294	34	38,47016.46040.00040.88777	7	2,02118.92990.69938.07279
5	2,07918.12460.47624.82772	35	40,01423.26483.50316.52326	9	2,97543.18085.09262.94738
6	2,85733.24964.31268.46023	36	41,57053.51491.17603.78828	11	4,01682.44936.67487.98813
7	3,70243.05364.45525.29094	37	43,13873.68731.84598.78509	13	5,13076.78459.74324.75734
8	4,60552.05234.37468.87658	38	44,71852.04698.01408.94184	15	6,30685.91050.30005.99942
9	5,55976.30328.76793.75117	39	46,30958.50768.27908.14834	17	7,53730.80264.08279.92796
10	6,55976.30328.76793.75117	40	47,91164.50681.55870.53877	19	8,81606.16273.61108.88950
11	7,60115.57180.35018.79192	41	49,52442.89248.75606.03328	21	10,13828.09220.95028.15751
12	8,68033.69640.82643.61965	42	51,14767.82152.73506.49650	23	11,50000.87581.12621.03637
13	9,79428.03163.89480.38885	43	52,78114.66708.53093.02290	25	12,89794.87667.84658.64595
14	10,94040.83520.67718.41478	44	54,42459.93473.39280.45408	27	14,32931.25309.43645.95783
15	12,11649.96111.23399.65686	45	56,07781.18611.14624.13346	29	15,79171.05288.42602.04516
16	13,32061.95937.79324.43772	46	57,74056.96927.96198.20754	31	17,28307.22226.76874.72483
17	14,55106.85151.57598.36626	47	59,41266.75507.31915.67195	33	18,80158.61625.54762.20288
18	15,80634.10202.60904.43606	48	61,09390.87881.07502.89010	35	20,34565.42069.05037.83837
19	17,08509.46212.13733.39760	49	62,78410.48681.36016.55153	37	21,91385.59309.72032.83518
20	18,38612.46168.77714.59281	50	64,48307.48724.72035.35631	39	23,50492.05379.98532.04168
21	19,70834.39116.11633.86082	51	66,19064.50485.69971.72215	41	25,11770.43947.18267.53619
22	21,05076.65924.33840.09678	52	67,90664.83922.04770.88178	43	26,75117.28502.97854.06260
23	22,41249.44284.51432.97565	53	69,63092.42618.05559.92742	45	28,40438.53640.73197.74197
24	23,79270.56701.63038.99859	54	71,36331.80216.28528.43452	47	30,07648.32220.08915.20639
25	25,19064.56788.35076.60816	55	73,10368.07111.22722.28005	49	31,76667.93020.37428.86781
26	26,60561.90268.05894.57258	56	74,85186.87381.28972.69641	51	33,47424.94781.35365.23365
27	28,03698.27909.64881.88446	57	76,60774.35938.01464.09524	53	35,19852.53477.36154.27928
28	29,48414.08223.07101.10560	58	78,37117.15873.64401.37778	55	36,93888.80372.30398.12482
29	30,94653.88202.06057.19294	59	80,14202.35990.06545.56804	57	38,69476.28929.02889.52365
30	32,42366.00749.25719.63023	60	81,92017.48493.90189.20055	59	40,46561.49045.45033.71391

VI (Suite).

LOGARITHMES DES FACTORIELLES.

SOMMES DES LOGARITHMES DES NOMBRES NATURELS.		SOMMES DES LOG. DES NOMBRES IMPAIRS.			
n	Log (1.2.3..... n)	n	Log (1.2.3..... n)	2n-1	Log [1.3.5.7..... (2n-1)]
61	83,70550.46844.00956.23444	81	120,76321.27413.78242.40739	61	42,25094.47395.55800.74780
62	85,49789.63783.99210.10932	82	122,67702.65937.61959.09712	63	44,05028.52890.09382.45310
63	87,29723.69233.52791.81462	83	124,59610.46861.38033.00095	65	45,86319.86456.52238.02709
64	89,10341.68973.36678.98590	84	126,52038.39721.99914.65938	67	47,68927.34483.53064.46124
65	90,91633.02539.79534.55990	85	128,44980.28979.14207.39271	69	49,52812.25390.90319.77740
66	92,73587.41895.21403.23316	86	130,38430.13491.57775.11433	71	51,37938.08878.09395.06350
67	94,56194.89922.22229.66730	87	132,32382.06017.76393.68896	73	53,24270.37479.29850.96457
68	96,39445.79049.28465.98627	88	134,26830.32739.26562.26535	75	55,11776.50113.21551.01144
69	98,23330.69956.65721.30244	89	136,21769.32805.71475.05007	77	57,00425.57364.94032.88290
70	100,07840.50356.79978.13315	90	138,17193.57900.10799.92466	79	58,90188.28277.84474.31089
71	101,92966.33843.90053.41924	91	140,13097.71823.31893.52458	81	60,81036.78466.63124.06007
72	103,78699.58808.30321.87947	92	142,09476.50096.77448.79388	83	62,72944.59390.39197.96391
73	105,65031.87409.50777.78055	93	144,06324.79582.31383.91084	85	64,65886.48647.53490.69723
74	107,51955.04606.81753.97257	94	146,03637.58118.31082.57047	87	66,59838.41173.72109.22186
75	109,39461.17240.73454.01944	95	148,01409.94171.19930.33679	89	68,54777.41240.17022.00659
76	111,27542.53163.54245.37140	96	149,99637.06501.59498.75015	91	70,50681.55163.38115.60650
77	113,16191.60415.26727.24286	97	151,98314.23844.25743.60194	93	72,47529.84648.92050.72347
78	115,05401.06442.17207.64458	98	153,97436.84601.18238.45857	95	74,45302.20701.80898.48979
79	116,95163.77355.07649.07257	99	155,97000.36547.15788.37391	97	76,43979.38044.47143.34157
80	118,85472.77224.99592.65821	100	157,97000.36547.15788.37391	99	78,43542.89990.44693.25691

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\text{Log } x = n (\sqrt[n]{x} - 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{(2)} + \frac{x^3}{(3)} + \dots$$

$$a^x = 1 + \frac{x}{k} + \frac{1}{(2)} \cdot \frac{x^2}{k^2} + \frac{1}{(3)} \cdot \frac{x^3}{k^3} + \dots$$

k étant le module et n un nombre infini.

VII

LOGARITHMES			
<small>POUR LES CALCULS D'INTÉRÊT COMPOSÉ ET D'ANNUITÉS.</small>			
<i>r</i>	Log <i>r</i>	<i>r</i>	Log <i>r</i>
100	0	103	01283.72247.05172.20517.10711.95
1/8	00054.25290.92294.07367.23824.92	1/8	01336.39615.57981.50197.65334.01
1/4	00108.43812.92219.91611.71633.59	1/4	01389.00603.28438.63054.53948.54
3/8	00162.55582.86737.35618.33701.88	3/8	01441.55225.60603.08507.04505.00
1/2	00216.60617.56507.67623.04206.38	1/2	01494.03497.92936.55824.40940.24
5/8	00270.58933.75924.92872.50377.92	5/8	01546.45435.58329.96747.39201.04
3/4	00324.50548.13147.05844.57314.69	3/4	01598.81053.84130.31819.15436.68
7/8	00378.35477.30126.83174.10397.35	7/8	01651.10367.92167.40543.15675.39
101	00432.13737.82642.57427.51881.78	104	01703.33392.98780.35484.77218.42
1/8	00485.85346.20328.71868.24118.62	1/8	01755.50144.14844.00432.33857.27
1/4	00539.50318.86706.16353.88949.29	1/4	01807.60636.45795.12732.39833.16
3/8	00593.08672.19212.44504.91141.64	3/8	01859.64884.91658.49912.91203.31
1/2	00646.60422.49231.72283.13241.27	1/2	01911.62904.47072.80707.27945.52
5/8	00700.05586.02124.58117.49914.14	5/8	01963.54710.01316.40591.05711.26
3/4	00753.44178.97257.64713.11728.71	3/4	02015.40316.38332.91942.32618.10
7/8	00806.76217.48033.02678.51358.57	7/8	02067.19738.36756.68935.73845.43
102	00860.01717.61917.56104.89366.92	105	02118.92990.69938.07279.35052.67
1/8	00913.20695.40471.90230.02049.45	1/8	02170.60088.05968.58902.44768.42
1/4	00966.33166.79379.41318.20249.28	1/4	02222.21045.07795.91701.65891.34
3/8	01019.39147.68474.88886.75605.39	3/8	02273.75876.32798.74451.77291.35
1/2	01072.38653.91773.10408.19340.61	1/2	02325.24596.33711.46986.78192.35
5/8	01125.31701.27497.18616.28426.58	5/8	02376.67219.57748.75755.80547.37
3/4	01178.18305.48106.81543.04767.41	3/4	02428.03760.47079.94857.67974.17
7/8	01230.98482.20326.25412.64910.72	7/8	02479.34233.38763.32657.13995.17

$\frac{1}{2} \log. \pi = 0,24857.49363.47066.92717.56341.44145.45$
 $\frac{1}{2} \log. 2 = 0,15051.49978.31990.59760.68694.47362.25$
 $\frac{1}{2} \log. 2\pi = 0,39908.99341.79057.52478.25035.91507.70$
 $\frac{1}{2} \log. \frac{\pi}{2} = 0,09805.99385.15076.32956.87646.96783.20$
 $k = 0,43429.44819.03251.82765.11289.18916.60508.22944$

VII (Suite).

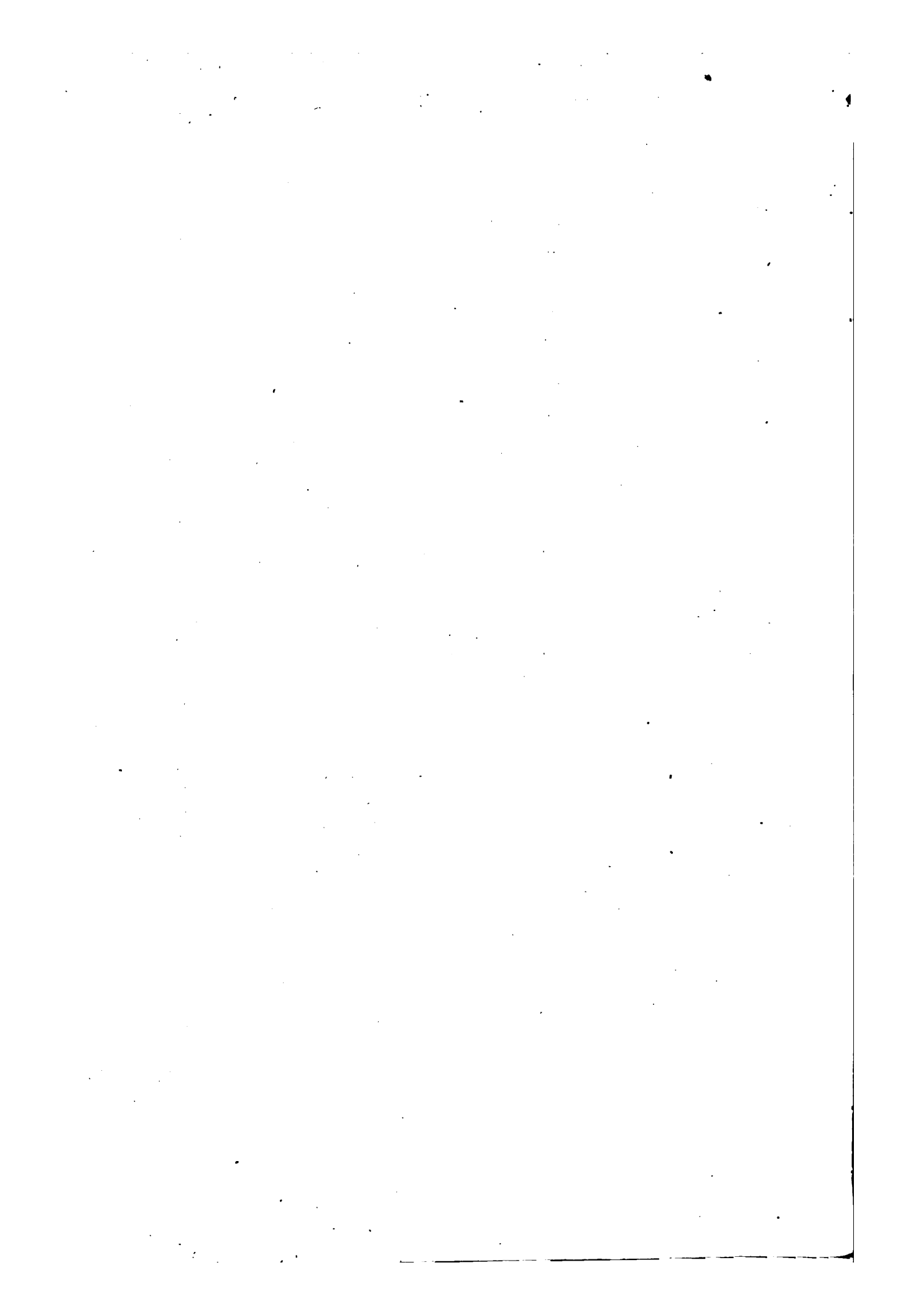
LOGARITHMES			
POUR LES CALCULS D'INTÉRÊT COMPOSÉ ET D'ANNUITÉS.			
<i>r</i>	Log <i>r</i>	<i>r</i>	Log <i>r</i>
106	02530.58652.64770.24084.67311.86	109	03742.64979.40623.63520.05133.08
1/8	02581.77032.52009.08721.27631.30	1/8	03792.42567.13626.14073.32009.34
1/4	02632.89387.22349.14768.52143.15	1/4	03842.14456.42459.44997.66327.99
3/8	02683.95730.92644.29003.50111.18	3/8	03891.80660.30369.65942.97828.90
1/2	02734.96077.74756.52817.41184.44	1/2	03941.41191.76137.14315.56759.09
5/8	02785.90441.75579.44435.71943.92	5/8	03990.96063.74096.93258.68111.54
3/4	02836.78836.97061.47417.04869.83	3/4	04040.45289.14158.98020.62633.61
7/8	02887.61277.36229.05527.14337.03	7/8	04089.88880.81828.30789.75697.32
107	02938.37776.85209.64083.45412.39	110	04139.26851.58225.04075.01999.71
1/8	02989.08349.31254.57865.13130.11	1/8	04188.59214.20104.32710.11511.05
1/4	03039.73008.56761.85682.42552.43	1/4	04237.85981.39876.14558.70105.34
3/8	03090.31768.39298.71698.73275.28	3/8	04287.07165.85624.99997.46886.89
1/2	03140.84642.51624.13597.76103.64	1/2	04336.22780.21129.50253.29361.58
5/8	03191.31644.61711.17687.54393.28	5/8	04385.32837.05881.84670.07287.09
3/4	03241.72788.32769.21032.28025.37	3/4	04434.37348.95107.16980.26267.00
7/8	03292.08087.23266.00702.24141.86	7/8	04483.36328.39782.80655.52923.31
108	03342.37554.86949.70231.25614.99	111	04532.29787.86657.43410.34785.93
1/8	03392.61204.72870.63370.55746.80	1/8	04581.17739.78270.10931.79869.96
1/4	03442.79050.25403.05227.05886.60	1/4	04630.00196.52969.19908.23266.86
3/8	03492.91104.84266.70873.41510.08	3/8	04678.77170.44931.20428.90949.00
1/2	03542.97381.84548.31516.51814.64	1/2	04727.48673.84179.47826.14373.22
5/8	03592.97894.56722.88310.38046.74	5/8	04776.14718.96602.84030.93361.91
3/4	03642.92656.26674.93898.66579.82	3/4	04824.75318.03974.08512.49136.50
7/8	03692.81680.15719.61771.44201.03	7/8	04873.30483.23968.38871.54271.13

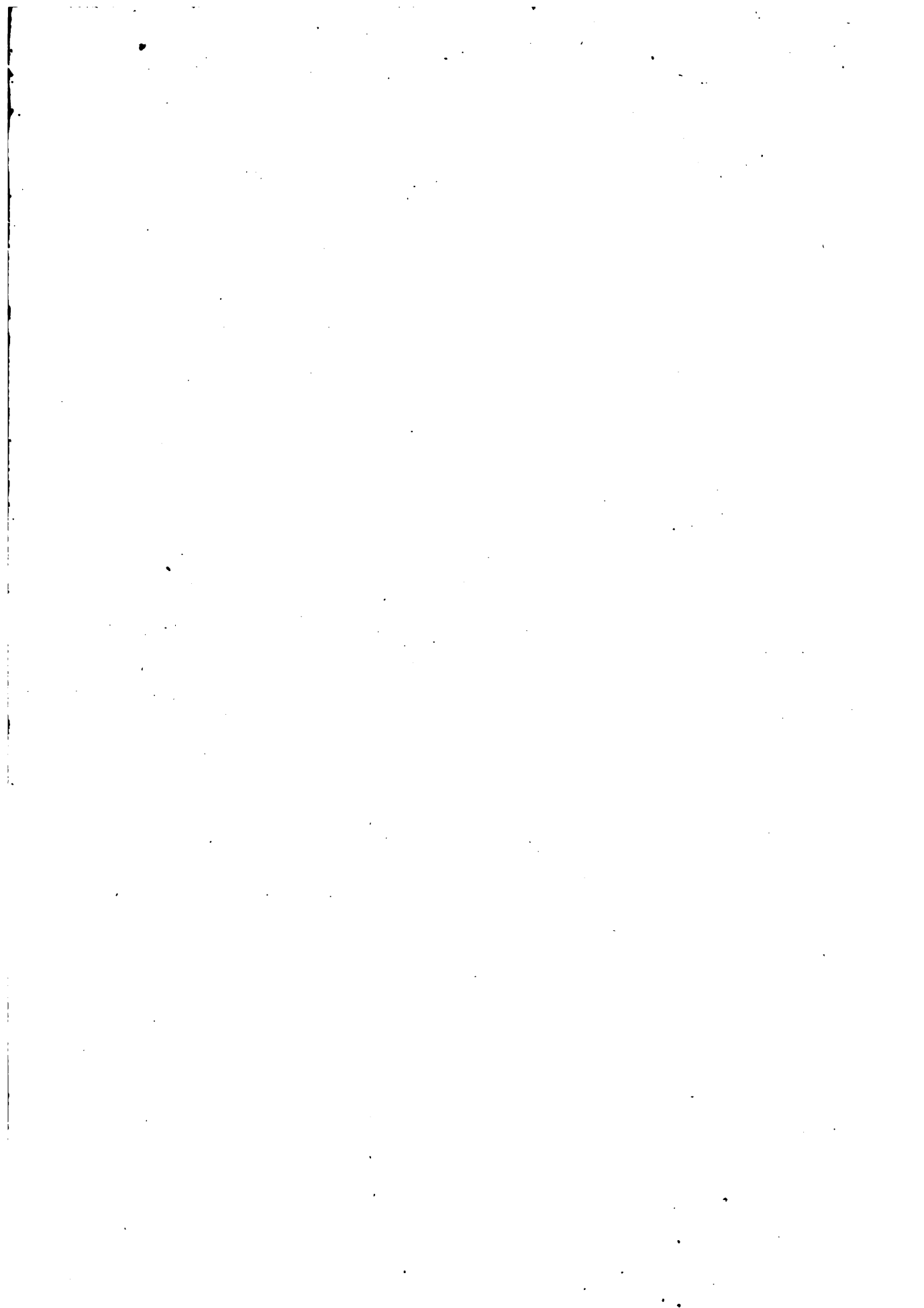
$$\text{Log}(1+x) = k \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right)$$

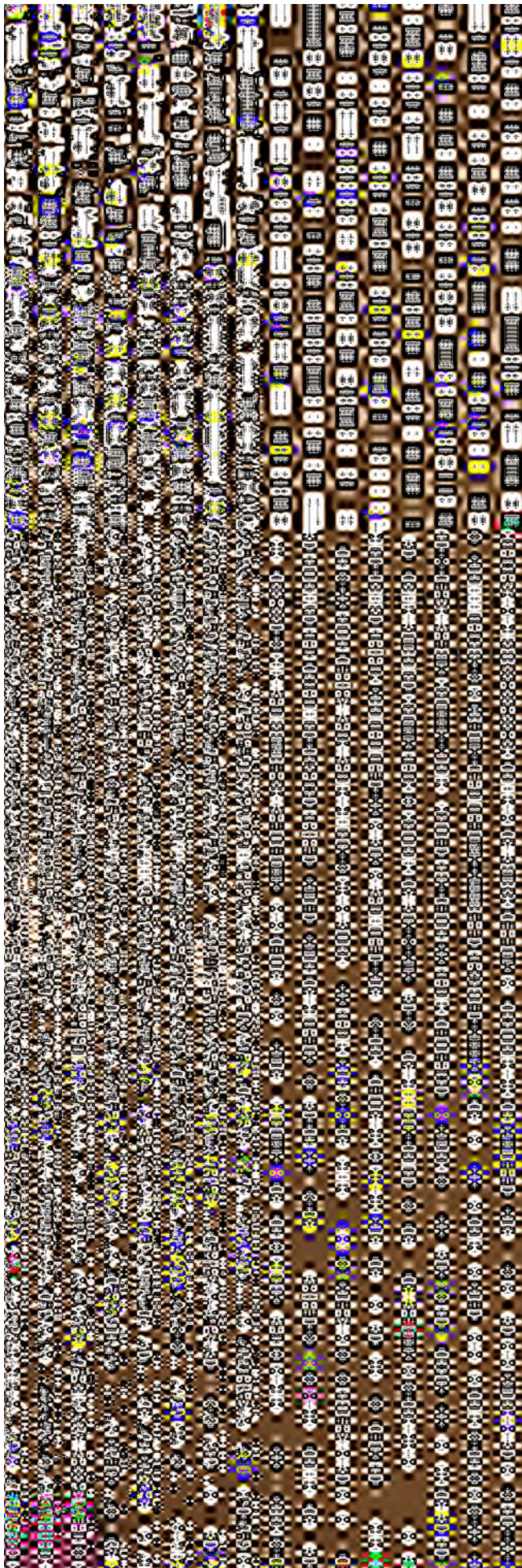
$$\text{Log} \frac{x+1}{x-1} = 2k \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots \right)$$

$$\text{Log}(x+d) = \log x + 2k \left[\frac{d}{2x+d} + \frac{1}{3} \left(\frac{d}{2x+d} \right)^3 + \dots \right]$$

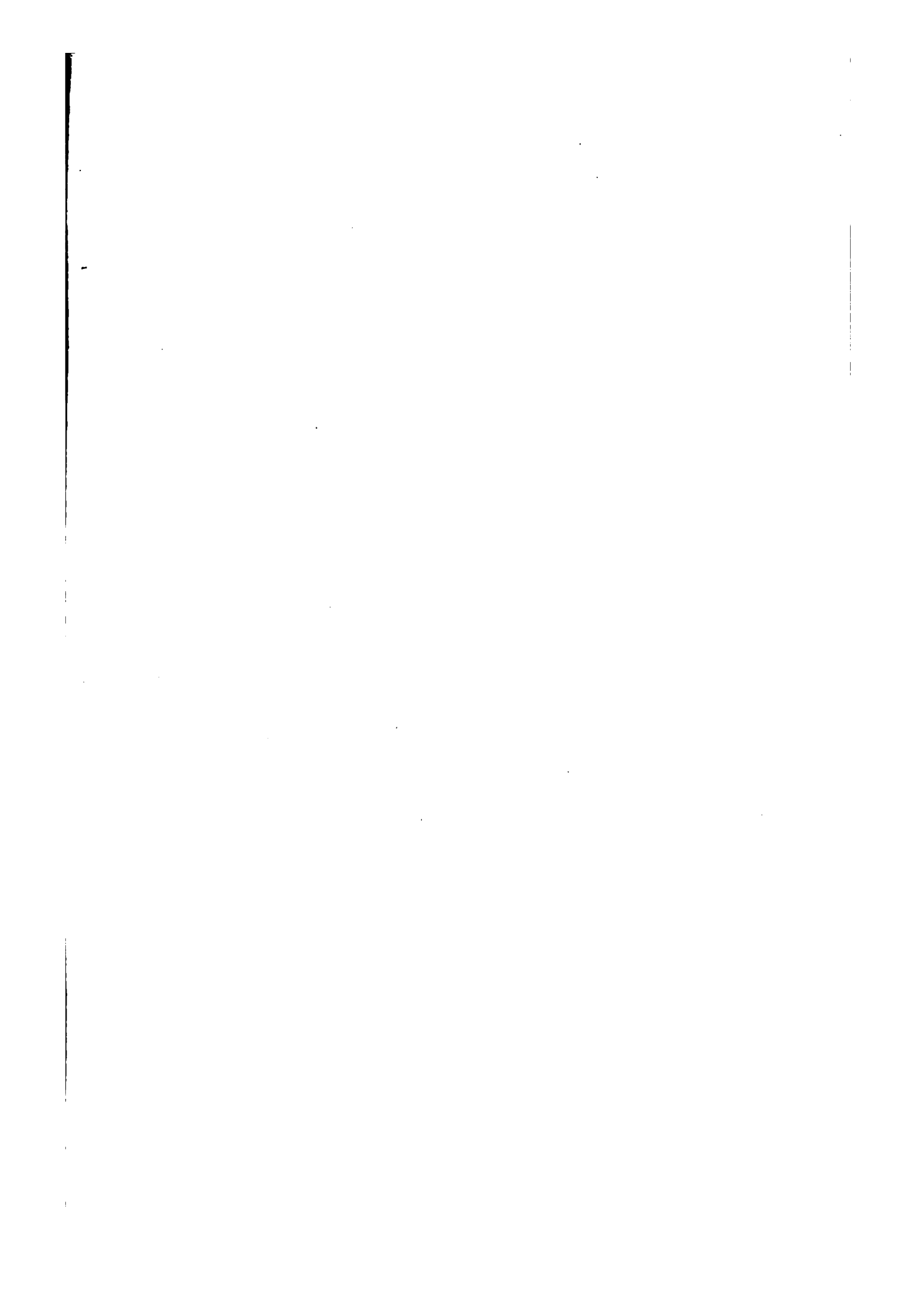
$$\text{Log} x = \frac{1}{2} \left[\log(x+1) + \log(x-1) \right] + \frac{1}{4x} \left[\log(x+1) - \log(x-1) \right] + \frac{k}{3 \cdot 4x^3} + \frac{2k}{5 \cdot 6x^5} + \frac{3k}{7 \cdot 8x^7} + \dots$$







PARIS.
GER, LIBRAIRE-ÉDITEUR,
DES ASSURANCES.
LAFFITTE, 48.



**JOHN G. WOLBACH LIBRARY
HARVARD COLLEGE OBSERVATORY
80 GARDEN STREET
CAMBRIDGE, MASS. 02138**



JOHN G. WOLBACH LIBRARY
HARVARD COLLEGE OBSERVATORY
80 GARDEN STREET
CAMBRIDGE, MASS. 02138

