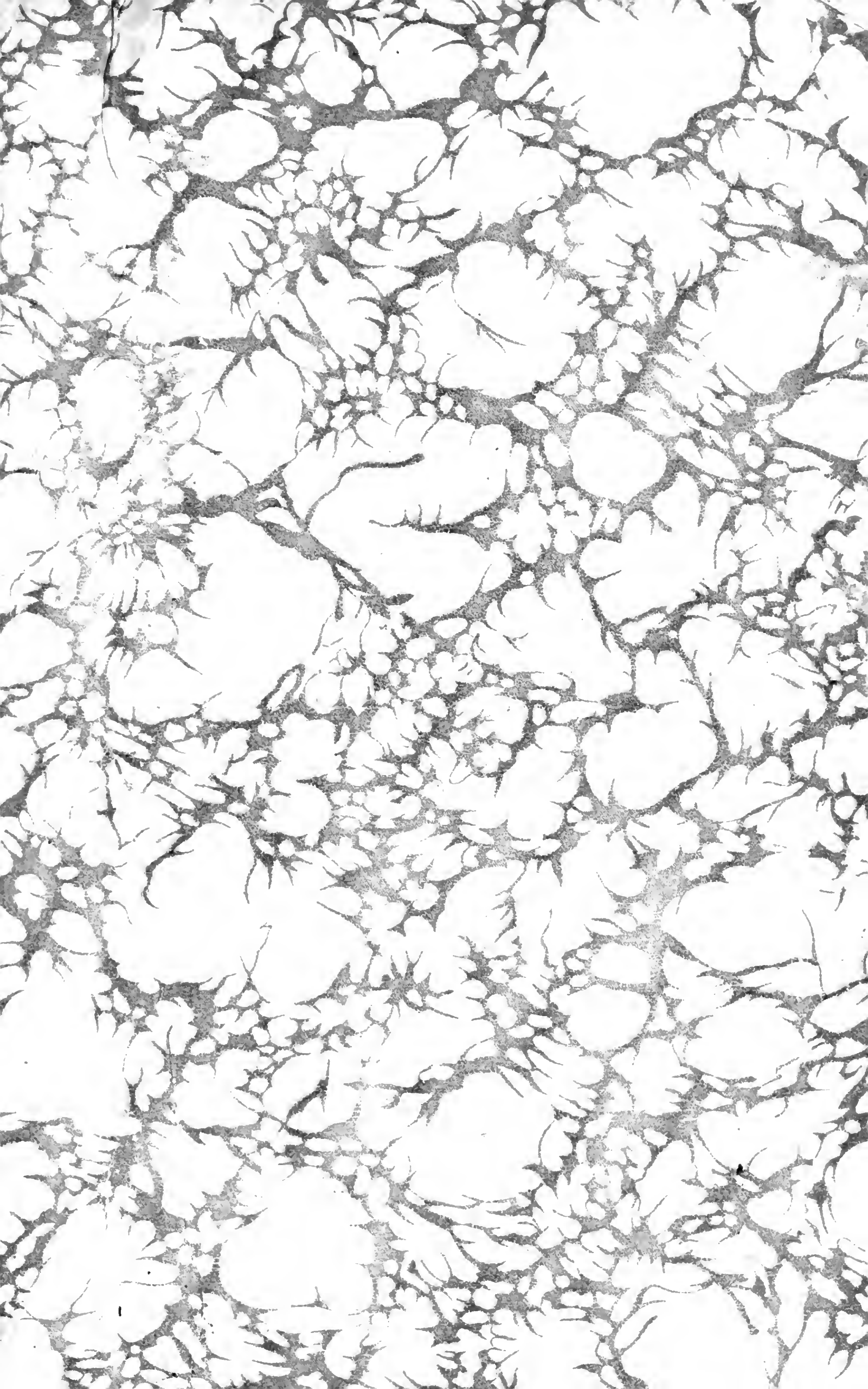

TEMPS, ESPACE, MATIÈRE

Leçons sur la théorie de la relativité générale

Collection de monographies scientifiques étrangères publiées
o o o o o o o o o o o o sous la direction de o o o o o o o o o o o o
o o M. G. JUVET, Professeur à l'Université de Neuchâtel o o

I

H. WEYL

Professeur à l'École Polytechnique de Zürich

TEMPS, ESPACE, MATIÈRE

Leçons sur la théorie de la relativité générale

TRADUITES SUR LA QUATRIÈME ÉDITION ALLEMANDE

PAR

Gustave JUVET et **Robert LEROY**

Professeur
à l'Université de Neuchâtel

Ancien Élève
de l'École normale supérieure

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ALBERT BLANCHARD

3 et 3 bis, Place de la Sorbonne

—

1922

NOTE DE L'ÉDITEUR

La difficulté pour le grand public de langue française de se mettre au courant des dernières théories scientifiques et des résultats essentiels obtenus depuis quelques années par les savants étrangers dans les domaines scientifiques les plus variés, nous a engagés à entreprendre la publication d'un certain nombre de traductions de monographies étrangères, écrites par les spécialistes les plus éminents de chacune des sciences qui, durant ces dernières années, se sont particulièrement développées. C'est ainsi que dans un délai de quelques mois, nous comptons offrir au public cultivé une série d'ouvrages sur les théories d'Einstein, sur les nouvelles théories de la constitution de la matière, sur la théorie des quanta, sur les derniers résultats de l'astronomie stellaire et de la géophysique, etc, etc.

Pour rendre plus accessibles encore la connaissance de ces travaux, nous nous efforcerons de produire des ouvrages très bon marché, sans d'ailleurs pour cela négliger aucune condition de belle présentation et d'élégance.

PRÉFACE DES TRADUCTEURS

Le livre de M. Weyl est le premier ouvrage où les théories de la relativité aient été exposées systématiquement et rigoureusement. La première édition, parue en 1918, était la rédaction d'un cours professé par l'auteur à l'Ecole Polytechnique fédérale de Zurich, en 1917.

Elle fut suivie immédiatement d'une nouvelle édition à peu près identique. Mais les progrès des théories einsteiniennes étaient si nombreux et si importants qu'une troisième édition, complètement remaniée sortit de presse dans l'automne de l'année 1919.

S'inspirant des travaux de M. Levi-Civita sur le déplacement parallèle et des siens propres sur la métrique généralisée, M. Weyl y exposait une théorie nouvelle de l'électromagnétisme. Pour un esprit ami des belles synthèses, cette nouvelle construction, qui forme avec les théories de la gravitation un ensemble harmonieux, est très satisfaisante. L'élément nouveau et irréductible, qui paraît être le potentiel électromagnétique dans toutes les théories antérieures, devient alors tout comme le potentiel gravifique un reflet de la métrique ; il y a plus, le terme cosmologique, que M. Einstein avait introduit dans ses développements mathématiques afin de satisfaire à certaines conditions aux limites, présentait un caractère presque miraculeux ; avec la nouvelle théorie, il s'introduit le plus naturellement du monde.

Dans ses pénétrantes études sur la théorie physique, le regretté Duhem aimait à montrer qu'une théorie physique ne forme pas un tout en soi, mais qu'elle implique déjà un ensemble d'éléments préalablement admis et dont la validité n'est pas mise en doute au moment où cette théorie s'édifie. Avait-il prévu qu'il viendrait un jour, où n'importe quelle affirmation sur la géométrie de l'univers aurait des conséquences dans les théories électriques et où, d'autre part, une distribution déterminée de charges électriques entraînerait telle ou telle détermination métrique pour la portion d'univers qui les contient? Les théories que l'on doit à M. Einstein et à M. Weyl nous permettent de développer apec une ampleur insoupçonnée les idées de Duhem sur l'interdépendance des explications géométriques, mécaniques et physiques. Mais ce n'en est pas ici le lieu.

Il s'agissait alors pour M. Weyl de tirer les conséquences de sa nouvelle théorie, en particulier il fallait tenter d'établir une théorie de la matière dans cette nouvelle conception. Dans la quatrième édition allemande qui date de 1921 et qui est celle que nous avons traduite, l'Auteur oppose aux idées de Mie, une théorie qui fait de la matière le lieu des singularités limites du champ et où la masse et la charge se comportent comme les flux de certains tenseurs dans le champ. Enfin un nouveau paragraphe, développe dans cette dernière édition le problème de l'espace ; des considérations, tirées de la théorie des groupes, légitiment l'utilisation et fondent la nécessité de l'emploi d'une forme quadratique comme forme métrique fondamentale dans la géométrie différentielle.

Telle est, rapidement esquissée, l'histoire du livre que nous présentons au public de langue française. Ce n'est pas une adaptation que nous donnons, mais une traduction fidèle ; nous avons constamment respecté la pensée enthousiaste et profonde de l'Auteur ; nous espérons en avoir rendu les nuances et notre but sera atteint si l'ouvrage français éveille des admirations nouvelles pour l'œuvre de M. Einstein, et suscite des recherches fécondes sur les questions qu'elle laisse encore en suspens.

Monsieur le Professeur M. Plancherel de Zurich, nous a considérablement aidés dans la correction des épreuves ; qu'il en soit ici cordialement remercié !

G. JUVET.
R. LEROY.

Novembre, 1921.

ERRATA

p. 12. ligne 13, lire : un point B.

p. 13. ligne 28, lire : $\pm \frac{m}{n} \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$

p. 15. ligne 7, lire : $\xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2$

p. 17. ligne 24, lire : $\overline{A'B'} = \mathbf{a}'$

p. 25. ligne 16, lire : $\mathbf{e}_i$

p. 25. La loi d'inertie a été trouvée par Hermite; c'est Sylvester qui l'a ainsi déterminée.

p. 29. formule (22′), lire : $\xi^i = \ldots$

p. 31. ligne 7, lire : des variables ξ_i

p. 31. ligne 25, lire : les nombres p_i

p. 32. ligne 20, lire : δ_i^k

p. 43. ligne 19, lire : $\overline{W}^{ik} \overline{\xi}_i \overline{\eta}_k$

p. 46. 4e ligne depuis le bas, lire : direction du plan

p. 49. ligne 19, lire : la différence entre :

$$\Delta f \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$$

est d'un ordre infinitésimal supérieur à l'ordre de la translation et aussi à l'ordre de la somme :

$$| \Delta x_1 | + | \Delta x_2 | + \cdots + | \Delta x_n |$$

p. 58. ligne 10, lire : $\mathbf{p}$

p. 59. 2e équation : $v = \ldots$, lire $\varrho(P)$ au lieu de $\delta(P)$

p. 81. dernière ligne, lire : définie

p. 92. ligne 2, lire : $f_{ikl} = \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l}$

p. 101. lignes 12 et 14, lire : Γ_{ir}^r

p. 103. ligne 3, 3e parenthèse, lire : $(\Gamma_{ri}^{\alpha} \Gamma_{\beta k}^{r} - \Gamma_{rk}^{\alpha} \Gamma_{\beta i}^{r})$

p. 105. ligne 28, lire : $p > q$

p. 121. ligne 10, lire : mais que G appartient à $V\mathcal{G}V^{-1}$ et que VGV^{-1} appartient à $\mathcal{G}$

p. 129. 2e §, ligne 8, lire : disons

p. 136. 3e ligne depuis le bas, lire : $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ au lieu de $\mathbf{XY}$

p. 145. 7e ligne depuis le bas, lire : $-F_{ir}S^r=-p_i$

p. 158. ligne 7, lire : $\mathbf{e}_1=$

p. 158. ligne 8, lire : $\mathbf{e}_2=$

p. 164. lignes 8 et 9, lire : $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots \mathbf{E}_{n-1}$

p. 164. ligne 10, lire : dans le système de coordonnées $\mathbf{E}_i \ldots$

p. 168. ligne 2 de la note, lire : le corps C

p. 174. ligne 1, lire : $\mu_0 \dfrac{du_i}{ds}=p_i$

p. 189. ligne 19, lire : de l'ensemble des lois.

p. 212. ligne 5, lire : $\Delta f=\dfrac{\partial \mathfrak{f}^i}{\partial x_i}$

p. 216. ligne 14, lire : la lumière de la raie $D \ldots$

p. 220. ligne 20, l'exposant de e est $(\alpha_0 x_0+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3)\sqrt{-1}$

INTRODUCTION

Nous avons l'habitude de concevoir l'*espace* et le *temps* comme les formes d'existence du monde réel, tandis que la *matière* en est la *substance*. Un morceau déterminé de matière occupe, à un instant donné, une portion déterminée d'espace ; de là, nait la notion du *mouvement* qui unit intimement ces trois représentations.

Pour Descartes, la tâche des sciences exactes consistait à reconstruire tout le donné au moyen de ces concepts fondamentaux, et de le ramener au mouvement. L'énigme qui s'attache à la perception du *temps*, à l'écoulement de la durée, au devenir, a toujours été troublante pour l'esprit humain depuis qu'il pense, c'est l'un des problèmes métaphysiques, pour la solution duquel la philosophie a inlassablement disputé durant toute son histoire. L'*espace* était pour les Grecs l'objet d'une science très claire et qui n'avait pour eux aucun caractère conjectural. C'est sur le modèle de cette science que s'est développée chez les anciens l'idée d'une science pure : la géométrie a été l'une des manifestations les plus puissantes du principe de la souveraineté de l'esprit qui animait la culture antique.

Lorsque la conception moyennageuse du monde fut périmée, et que les vagues du scepticisme menaçaient de tout renverser, la croyance en une vérité connaissable se cramponna à la géométrie comme au rocher solide, et pour plusieurs, l'idéal suprême fut, pour toute science, de se développer « more geometrico ». Enfin pour ce qui concerne la *matière*, nous croyons savoir que, dans tous les changements, une substance, précisément la matière, devait rester inaltérée, de telle sorte que chaque morceau de matière se laissât mesurer comme une quantité et trouvât l'expression de son caractère substantiel dans la loi de la conservation de la matière.

Cette science de l'espace et de la matière qui était la nôtre jusqu'à ce jour, et que la philosophie considérait comme une connaissance a priori tout à fait générale et nécessaire, est maintenant complètement en ruines. Après que la physique de Faraday et de Maxwell eut opposé à la matière une réalité d'une autre catégorie : le *champ;* après que, d'autre part, la mathématique eut perdu confiance en l'évidence de la géométrie euclidienne par un travail de critique logique poursuivi durant tout le dernier siècle, la tempête arriva qui détruisit ces conceptions d'espace, de temps et de matière pour faire place à une vision plus libre et plus aigüe des choses. Le bouleversement fut accompli essentiellement par le travail génial d'un seul homme : ALBERT EINSTEIN.

Actuellement, en ce qui regarde les idées fondamentales, le développement nouveau semble avoir atteint certaines conclusions que l'on doit analyser, quel que soit le sort que l'avenir leur réserve. D'ailleurs un retour en arrière n'est plus possible; le développement ultérieur doit partir du point atteint ; les vieux schémas étroits et rigides sont désormais exclus.

Aux problèmes qui viennent d'être soulevés, la philosophie, la mathématique et la physique ont apporté leur contribution. Nous ne nous occuperons que du côté mathématique et physique de la question ; nous ne dirons que fortuitement quelques mots du côté philosophique, parce que dans cette direction on n'a pas encore obtenu des résultats définitifs et parce que nous ne sommes pas en état de donner des réponses satisfaisantes aux nombreux problèmes qui se posent pour une théorie de la connaissance.

Les idées dont il s'agit ne sont pas nées à la suite de spéculations sur les fondements de la connaissance physique, mais ce sont des problèmes concrets de physique qui les ont fait naître, en montrant que les anciens cadres de la science étaient trop étroits ; chacun de ces problèmes imposait une revision partielle des principes, mais cette revision était tout juste suffisante.

Comme les choses se présentent maintenant, il ne reste pour chaque science, qu'à suivre en toute confiance le chemin sur lequel elle a été conduite par des motifs judicieux et relevant de ses méthodes propres.

Le travail de mise au point philosophique reste un grand travail d'une toute autre espèce que celui qui échoit à chaque science particulière.

Malgré tout, nous commencerons par quelques considérations *philosophiques.*

Nous accordons aux perceptions dont nous avons constamment conscience une cause objective. Nous admettons que cette cause réside dans tel ou tel objet auquel nous octroyons une existence réelle et telles propriétés de forme, de coloration, de dureté, etc., qui le distinguent objectivement de tel ou tel autre objet dont nous avons une autre perception (nous faisons bien entendu des réserves quant aux hallucinations et aux rêves). Ces objets coexistent avec une foule d'autres; toutes ces réalités se soudent en une seule : l'Univers spatial dans lequel d'ailleurs nous imaginons que notre corps est plongé. Il ne s'agit ici bien entendu, que de choses matérielles et non pas de ces objets d'autre espèce que nous appelons abstractions comme l'état, le droit, la langue, etc. Mais ce naïf réalisme auquel on accorde un certain crédit dans les premiers instants de la réflexion philosophique, fait place assez tôt à une autre attitude. On se rend compte très vite que telle qualité, la couleur, par exemple le vert, n'a pas une existence objective, ce n'est pas une chose existant en soi, mais c'est en quelque manière une relation entre le sujet et l'objet, qui est attachée à l'acte de perception. Cette *constatation de la subjectivité des qualités sensorielles* est en corrélation étroite chez Galilée, Descartes et Hobbes avec la méthode mathématico-constructive de notre physique moderne qui élimine la qualité et d'après laquelle, par exemple, les couleurs sont en réalité des vibrations de l'éther, c'est-à-dire des mouvements. Kant fut le premier qui montra qu'il n'y a pas que les qualités sensorielles qui soient privées d'objectivité, mais que l'espace et les attributs spatiaux n'ont pas de signification objective au sens absolu, *l'espace n'est ainsi qu'une forme de notre sensibilité*. Ce n'est peut-être que par la théorie de la relativité, que l'on se rend compte distinctement que rien de ce que l'intuition nous montre de l'essence du temps et de l'espace n'entre dans la construction mathématique que nous édifions du monde physique. Les couleurs sont donc en « réalité », non pas des vibrations de l'éther, mais des fonctions mathématiques de quatre arguments, correspondant aux trois dimensions de l'espace et à l'unique dimension du temps.

D'une manière générale chacune des parties constitutives du monde réel et chacune de ses déterminations sont et ne peuvent être données que comme objets jaillissant intentionnellement des actes de conscience.

Le donné brut est formé par les états de conscience que j'ai — et tels que je les ai. Il n'est pas formé comme les positivistes l'affirment, d'une légère étoffe tissée de sensations ; car, dans une perception, il y a pour le sujet un objet incarné auquel l'état de conscience est relatif d'une manière *sui generis* et incommunicable; nous désignerons cet objet avec Brentano, sous le nom d' « objet intentionnel ». Tout en percevant une chaise, par exemple, mon attention se porte vers elle. J' « ai » la perception, mais c'est seulement quand, par un acte libre de la réflexion, j'ai transformé cette perception en un objet intentionnel d'une nouvelle perception interne, que je *sais* quelque chose de ma perception (et non seulement de la chaise). Dans ce deuxième acte, l'objet intentionnel est immanent ; tout comme l'acte lui-même, c'est un fragment réel de mon courant de conscience; mais dans l'acte initial de la perception, l'objet est transcendant, c'est-à-dire qu'il est donné dans un état de conscience et qu'il n'est pas relatif à un fragment de réalité indépendant. L'immanent est absolu, c'est-à-dire qu'il est précisément tel que je l'éprouve, et son être, je puis l'exprimer par un acte de ma réflexion. Au contraire, les objets transcendants n'ont qu'une existence *phénoménale*. Une feuille de papier me paraît diversement grande, diversement colorée, suivant ma position ou suivant l'éclairement ; aucune de ces manières d'être ne peut prétendre à donner la feuille telle qu'elle est en soi. Dans chaque perception, il y a, sans aucun doute, *l'hypothèse implicite de la réalité* de l'objet perçu ; elle est d'ailleurs une partie de l'hypothèse générale de l'existence d'un monde réel. Mais quand nous passons du point de vue immédiat au point de vue philosophique, nous laissons de côté cette hypothèse; mais constatons précisément que dans la perception, il y a quelque chose qui est « supposé » réel. Le sens et la légitimité de cette supposition forment précisément le problème qui doit trouver sa solution dans les données de la conscience. Je ne crois donc nullement que la conception qui fait du monde un jeu de sensations du moi, soit plus vraie que le réalisme naïf ; au contraire. Il faut se rendre compte que les données de la conscience ne sont que le point de départ pour comprendre et légitimer l'hypothèse de la réalité.

Les choses se passent de même dans le domaine de la logique. Un jugement que je porte, exprime une relation entre des choses; il pose cette relation comme vraie. Ici encore la question philosophique consiste à trouver le sens et la légitimité de cette hypothèse de la vérité ; ici aussi je ne nie pas l'idée de vérité objective, mais c'est précisément le problème qu'il faut élucider à partir du donné.

Le pur état de conscience est le siège de l'a priori philosophique. Au contraire, l'élucidation philosophique de l'hypothèse de la réalité, montrera qu'aucun de ces actes de connaissance : perception, souvenirs, etc., par lesquels je saisis la réalité, ne donne la raison dernière qui nous permette d'octroyer aux objets perçus une existence et des propriétés indentiques à celles qu'on perçoit ; cette raison risque toujours d'être renversée par une autre qui s'appuie sur d'autres perceptions. Il y a dans l'essence d'une chose réelle un contenu inépuisable, dont on n'a connaissance que par approximations successives, grâce à des expériences réitérées et parfois contradictoires entre elles. Dans ce sens-là, la chose réelle est une idée limite. C'est en cela que consiste le caractère empirique de toute connaissance [1]).

La forme originelle du courant de conscience est le temps. C'est un fait qui peut être incompréhensible pour la raison, mais qui ne peut être nié : le contenu de la conscience n'est pas donné comme étant simplement, mais il *est maintenant;* il remplit la forme du présent qui dure, par un contenu changeant; de telle manière qu'il ne faut pas dire : cela *est*, mais cela *est maintenant* ou cela n'*est* plus *maintenant*. Si par la réflexion on cherche à concevoir le contenu de ce courant comme un objet, il nous apparaîtra comme un écoulement dans le temps dont les stades successifs se distinguent par les relations de *plus tôt* et de *plus tard*.

De même que le temps est la forme de ce courant de conscience, de même, nous pouvons affirmer de plein droit que l'*espace* est la forme de la réalité corporelle. Les choses corporelles telles que nous les percevons, possèdent en soi une extension spatiale. Mais c'est seulement quand l'Univers réel, unique et connexe se construit avec nos expériences répétées, que l'extension spatiale donnée par chaque perception, devient une partie d'un espace toujours le même, qui embrasse toute chose. Cet espace est la forme du monde extérieur; ce qui signifie que chaque chose corporelle peut occuper, sans être modifiée, une autre place que celle qu'elle occupe dans l'espace. Ce fait caractérise l'*homogénéité* de l'espace, il est la racine du concept de *congruence.*

Si le monde de la conscience et celui de la réalité transcendante étaient nettement différents, ou du moins si les seuls actes de la perception formaient le pont qui les unit, fort peu intimement d'ailleurs, il n'en resterait pas moins, comme il a déjà été dit, d'une part, la conscience inétendue se transformant dans la forme du présent continu ; d'autre part, la réalité étendue spatialement, mais intemporelle qui est la forme d'un phénomène changeant. Mais en nous, existe plus profondément que toute perception, le sentiment de l'effort et de la résistance, de l'action et de la passion (1). Pour un homme vivant normalement, la perception sert avant tout à préciser d'une manière imagée pour la conscience l'endroit où il veut agir et les résistances que son action rencontrera. En vivant mon action, je me sens en tant que réalité psychique individuelle, lié à un corps qui a sa place dans l'espace, parmi les autres choses et au moyen duquel, je puis me mettre en relation avec d'autres individus; la conscience se change sans perdre son immanence, en une portion de la réalité, attachée à cet homme particulier que je suis, qui naquit et qui mourra.

D'autre part la conscience étend aussi sa forme, *le temps,* sur la réalité : il s'y manifeste des changements, des mouvements, des transformations, etc.; et comme ma volonté se manifeste agissante par mon corps, telle une activité mobile dans le monde réel, la conscience est elle-même aussi agissante, les phénomènes qui s'y passent se rangent l'un après l'autre, mais aussi l'un *avec* l'autre, dans une connexion causale où ils sont indistincts. En fait, la physique montre bien que le temps cosmique et la causalité ne sont pas séparables. La nouvelle manière dont la théorie de la relativité résoud le problème des relations de l'espace et du temps, coïncide avec une nouvelle manière de concevoir la réalité.

La marche de nos considérations est ainsi clairement indiquée. Nous devons encore indiquer dans cette introduction ce qui est contenu dans la notion mathématique du temps.

Ensuite nous nous occuperons de l'espace d'une façon plus détaillée. Le chapitre I est consacré à *l'espace euclidien* et à sa construction mathématique. Dans le chapitre II, nous développerons les idées qui élargissent la notion euclidienne de l'espace et qui aboutissent à la *notion du continuum métrique* (espace de Riemann). *Les relations du temps et de l'espace* seront examinées dans le chapitre III; là, nos connaissances mécaniques et physiques joueront un rôle important, car ces relations se manifestent dans les phénomènes

(1) Ce mot est à comprendre dans son sens étymologique.

eux-mêmes. La synthèse des chapitres II et III nous conduira alors à la théorie de *la relativité généralisée* qui contient une nouvelle théorie de la gravitation; nous en tirerons de plus une généralisation qui englobe encore les phénomènes électromagnétiques. Les bouleversements que subiront les notions d'espace et de temps atteindront aussi la *notion de matière ;* ce que nous aurons à en dire trouvera aussi sa place dans les deux derniers chapitres.

Pour pouvoir mathématiser la notion de *temps*, nous partirons de cette possibilité idéale qui consisterait à fixer avec une précision arbitraire un instant du temps. De deux instants différents, l'un est nécessairement l'*antérieur* et l'autre l'*ultérieur*. Grâce à cette « ordination », l'on peut formuler le théorème fondamental : si A est antérieur à B, et B antérieur à C, alors A est antérieur à C. Deux instants A et B, déterminent l'*intervalle de temps* AB; dans cet intervalle, se trouvent tous les instants antérieurs à B, mais postérieurs à A. Puisque le temps est la forme du courant de conscience, il vient évidemment à l'idée d'y définir l'égalité; les données de la conscience qui remplissent un intervalle AB, peuvent être ce qu'elles sont, en n'importe quel autre moment du temps; l'intervalle qu'elles rempliraient alors est dit égal à l'intervalle AB. En physique, l'on emploie le critérium suivant pour objectiver cette définition; il est d'ailleurs en relation intime avec le principe de causalité. Si un système physique isolé (c'est-à-dire sur lequel n'agit aucune influence extérieure) revient au même état qu'il avait auparavant, la suite des phénomènes qu'il a présentés se reproduira; nous dirons qu'un tel système cyclique est une *horloge*. Chaque période a la *même* durée.

La *mesure* du temps repose sur ces deux relations : ordre et égalité. Essayons de faire saisir clairement la notion de mesure. Le temps est homogène, c'est-à-dire qu'il n'est aucune relation basée sur l'essence même du temps, qui, admissible pour un instant de temps ne le soit pas pour un autre; en particulier, chacune des propriétés qu'on peut déduire logiquement des deux relations fondamentales, s'appliquent à tous les instants du temps, ou ne s'appliquent à aucun. Il en est aussi de même pour les intervalles de temps; toute propriété déduite des relations fondamentales et, vraie pour un intervalle AB, est vraie pour tous les autres. Il en va autrement, dès que 3 instants sont en jeu. Soit un intervalle quelconque OE (O antérieur à E), il est toujours possible de situer d'autres instants P par rapport au segment unitaire OE, d'une manière conceptuelle. On pourra faire correspondre à tout instant P un nombre t et un seul de manière que, entre O, E et P on ait la relation :

$$\mathrm{OP} = t \cdot \mathrm{OE}.$$

Le *nombre* n'est pas autre chose qu'un symbole qui permet de condenser les relations d'ordre et d'égalité, ainsi que d'établir explicitement une relation entre trois instants. P est l'instant d'*abscisse* t, *dans le système de coordonnées dont* OE *est le segment unitaire.* Deux nombres différents t, t' correspondent nécessairement, dans un même système de coordonnées à deux instants différents; car, sinon, à cause de l'homogénéité du continuum pour tous les intervalles, l'on aurait :

$$t \cdot AB = t' \cdot AB$$

Les nombres nous donnent la possibilité de distinguer, conceptuellement, c'est-à-dire objectivement et clairement, tous les points du continuum temporel, relativement à un segment unitaire OE.

Mais cette objectivation par exclusion du moi et des démarches immédiates de son intuition n'est pas complète ; le système de coordonnées (approximativement représentatif seulement) établi par une action individuelle reste comme le résidu nécessaire du moi, après cette arithmétisation du temps.

Je crois que l'on saisit bien, par cette définition de la mesure du temps, comment la mathématique s'introduit dans la physique. Pour mesurer *une grandeur, il faut faire une différence essentielle entre le « donné » d'un objet (expérience individuelle) d'une part, et d'autre part la conceptualisation de ce donné.* Cette dernière opération n'est possible que relativement à des objets qui sont immédiatement représentés. C'est pourquoi à la mesure, est attachée toujours une *théorie de relativité.* Le problème que celle-ci se pose en général pour un objet quelconque se présente de la manière suivante : [1]) Quels sont les caractères qui doivent être explicités afin de pouvoir caractériser, avec un degré arbitraire de précision et d'une manière conceptuelle, un objet particulier P se trouvant dans la portion continûment étendue de la réalité, qui est en question? Ce qui permet l'explicitation, c'est le *système de coordonnées,* la définition conceptuelle s'appelle la *coordonnée* (ou abscisse) de P dans ce système. Deux systèmes de coordonnées différents sont objectivement équivalents; il n'y a aucune propriété saisissable conceptuellement, qui s'appliquant à l'un, ne s'applique pas à l'autre ; sinon alors trop de choses seraient explicitées immédiatement.

Quelle relation y a-t-il entre les coordonnées d'un seul et même objet P, dans deux systèmes de coordonnées différents.

Ici dans le domaine du temps, la première question est résolue immédiatement : le système de coordonnées consiste en un intervalle de temps OE (origine et unité); à la deuxième, pour le même domaine, on répond par la transformation :

$$t = at' + b \qquad (a > 0),$$

a et b étant des constantes, t et t' les coordonnées du même point arbitraire dans deux systèmes. Si l'on donne à a et à b toutes les valeurs réelles ($a > 0$), possibles, l'on obtient un ensemble de transformations qui est un *groupe*, c'est-à-dire :

1° Il contient l'*identité* $t = t'$;

2° Il contient l'inverse de chacune des transformations; la transformation inverse de (a, b) est $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$:

$$t = at' + b\,; \qquad t' = \frac{1}{a}\,t - \frac{b}{a}\,;$$

3° Si le groupe contient deux transformations il contiendra aussi celle qui résulte de leur exécution successive. En effet de

$$t = at' + b, \qquad t' = a't'' + b''$$

on tire :

$$t = a^* t'' + b^*,$$

où

$$a^* = a \cdot a', \qquad b^* = (ab') + b$$

et a^* est bien positif.

Le problème de la relativité traité dans les chapitres III et IV ne s'étend pas seulement aux instants du temps, mais à tout l'univers physique. Mais dès qu'on a posé un système de coordonnées pour les formes de cet univers, espace et temps, la réalité physique est représentable conceptuellement par des nombres.

Tous les commencements sont obscurs. Précisément le mathématicien qui dans sa science si développée opère logiquement avec ses notions, a besoin de se rappeler que les origines viennent de plus loin que ne le lui montrent ses méthodes. La première chose à faire, c'est de chercher à comprendre ; malgré les fluctuations de la philosophie et ses oscillations de système en système, nous ne devons pas renoncer à cette recherche, si la connaissance ne se transforme pas en un chaos incompréhensible.

CHAPITRE PREMIER

L'ESPACE EUCLIDIEN; SON EXPRESSION MATHÉMATIQUE ET SON ROLE EN PHYSIQUE

§ 1. — L'égalité et les concepts spatiaux élémentaires.

Comme nous avons fixé dans le temps un élément ponctuel : l'*instant*, nous pouvons distinguer dans l'espace divisible à l'infini un élément, un lieu défini avec une précision arbitraire : le *point*. L'espace n'est pas comme le temps un continu à une dimension ; son extension continue ne se laisse pas décrire au moyen du rapport simple de l'antérieur au postérieur. Mais comme le temps, l'espace est une *forme* des phénomènes, et l'idée d'*égalité* en découle immédiatement : lorsqu'une chose reste identique à elle-même,- et qu'on peut imaginer qu'elle occupe une autre place S' que celle S où on la considère dans l'espace, on dira que S' est égal ou *congruent* à S. A chaque point P de S, correspond un point P' de S', dit son *homologue;* c'est le point de l'espace qui coïnciderait avec la partie du corps qui primitivement coïncidait avec P.

Cette *représentation* d'une partie de l'espace sur une autre partie de l'espace, qui fait correspondre au point P le point P' est dite une représentation *congruente*. En supposant certaines conditions réalisées, nous pouvons effectuer matériellement cette correspondance au moyen du corps solide, c'est-à-dire d'un corps que nous pouvons déplacer ou manipuler sans que son aspect change pourvu que nous soyons toujours dans la même situation relativement à lui; si nous considérons deux positions quelconques du corps solide, la représentation congruente des deux portions d'espace S et S' sera matériellement réalisée. Nous allons montrer, dans une esquisse rapidement tracée, comment on peut déduire tous les concepts fondamentaux de la géométrie de celui d'égalité, et du concept difficile à analyser de continuum. Avant tout, nous distinguerons, parmi les représentations congruentes, les *translations*, qui seules nous permettront d'édifier la construction axiomatique de la géométrie euclidienne.

D'abord la *ligne droite !* Sa caractéristique est bien connue : la ligne droite est déterminée par deux de ses points. Toute autre ligne dont deux des points sont fixes peut occuper, par représentation congruente. une autre position.

Soient donc A et B deux points différents; chaque point qui est son propre correspondant lorsqu'on réalise une représentation congruente faisant correspondre A à A et B à B est un point de la ligne droite $g = AB$ (la ligne droite « ne s'écarte d'aucun côté »). Au point de vue cinématique, cela veut dire que nous pouvons considérer la droite comme un axe de rotation. Elle est homogène et constitue un continu linéaire comme le temps; un de ses points A la divise en deux parties, dites *demi-droites*. Si B et C appartiennent respectivement à chacune de ces deux parties, on dit que A est entre B et C; les points d'une demi-droite sont à gauche de A, ceux de l'autre sont à droite (bien entendu, c'est arbitrairement que l'on distingue laquelle est la droite et laquelle est la gauche).

Soit A' un point à droite de A; g est divisée par A' en deux demi-droites; celle qui contient A est dite, la gauche; c'est le contraire si A' est à gauche de A. De là, on tire les rapports de position de deux points quelconques de la droite. Les points de g sont ordonnés par les relations de position, gauche et droite, comme les instants de la durée par les relations : avant et après.

La gauche et la droite sont équivalentes; il y a une représentation congruente, qui laisse A fixe et qui échange les deux moitiés de la droite; toute droite AB se laisse ainsi recouvrir elle-même par retournement (A tombant en B, et B en A); au contraire, la représentation congruente qui, laissant fixe A, transforme les points de la moitié à droite de A en des points de la droite de A et ceux de sa gauche en des points de sa gauche, laisse chaque point de g invariable. L'homogénéité de la droite est une conséquence du fait suivant : on fait coïncider la droite avec elle-même lorsqu'on applique un point A sur un autre A' à la droite du premier, la gauche de A sur la gauche de A', et la partie droite de A sur la partie droite de A'. (Translation de la droite); alors un point quelconque B correspondra à un point déterminé B'; par définition nous posons $AB = A'B'$. Cette égalité exprime simplement ceci que AB peut être amené à coïncider avec A'B' par une translation le long de la droite g. Elle rend possible l'introduction du nombre et par là l'exact recensement des points de la droite, à la condition qu'on ait choisi une unité de longueur OE.

Considérons le groupe des représentations congruentes qui conservent la droite g (c'est-à-dire qui font correspondre à un point de g un point de g). Parmi celles-ci, nous avons déjà distingué les rotations qui font correspondre un point de g à lui-même. Comment pouvons-nous, dans le groupe en question, distinguer les translations des rotations? Indiquons d'abord une première voie, qui nous donnera une définition du plan et de la droite par le moyen d'une rotation.

Deux demi droites issues d'un point O forment un *angle*. Un angle coïncide avec celui qu'on obtient en échangeant ses côtés. Si l'une des demi-droites restant fixe, on considère la demi-droite opposée à l'autre, on forme un angle dit *supplémentaire* du précédent. Un angle droit est congruent à son angle supplémentaire. Soit donc h une droite qui est perpendiculaire (c'est-à-dire qui fait avec g deux angles droits) à g en A ; il existe une rotation autour de g qui échange les deux moitiés que A détermine sur h. Toutes les droites perpendiculaires à g en A forment un *plan* E, perpendiculaire à g. Deux quelconques de ces droites peuvent être amenées à coïncider par une rotation convenable autour de g. Si on échange les deux moitiés de g comme il a été dit plus haut, A restant fixe, le plan E arrive à coïncider avec lui-même dans sa nouvelle position. Les propriétés du plan découlent de ces deux faits; deux tables congruentes, à symétrie rayonnée autour d'un axe sont planes si leurs plateaux se recouvrent parfaitement quand on applique l'un d'eux par renversement sur l'autre, les axes de symétrie étant dans le prolongement l'un de l'autre. Le plan est homogène. Le point A de E, qui nous paraît tout d'abord un « centre » ne se distingue en rien des autres points; par chacun de ceux-ci, A' par exemple, part une droite g' à laquelle toutes les droites de E issues de A' sont perpendiculaires. Toutes les droites g' relatives à tous les points A' du plan E forment une famille de droites *parallèles;* g qui en fait partie ne se distingue des autres par aucun caractère essentiel. Les droites de cette famille remplissent l'espace, de façon que par tout point, il en passe une et une seule. Celle-ci d'ailleurs est indépendante du choix de g, de A, et de E qui nous a permis la construction précédente : Si A* est un point quelconque de g, le plan perpendiculaire à g en A*, coupe orthogonalement non seulement g mais aussi toutes les droites de la famille définie plus haut. Les plans E* relatifs à tous les points A* de g, ainsi construits, forment une famille de plans parallèles; eux aussi remplissent tout l'espace complètement et simplement. Il n'y a plus qu'une petite étape pour parvenir à la notion de système de coordonnées rectangulaires. Profitons de ces considérations pour préciser la notion de translation spatiale : la translation est une représentation congruente, qui transforme non seulement g, mais aussi chaque droite de la famille parallèle en elle-même. Il y a une et une seule translation qui amène le point A de g en un point A* quelconque de cette même droite.

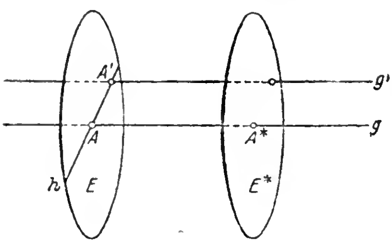

Fig. 1

Voici une deuxième voie qui aboutit au même résultat. Le caractère distinctif de la translation, c'est que sa définition ne distingue en rien les points de l'espace les uns des autres, tandis que la rotation permet précisément de distinguer les points de l'axe de l'ensemble des autres. En ayant présent à l'esprit ce point fondamental, nous allons pouvoir donner de la translation une définition, qui est indépendante de celle que nous avons donnée de la rotation. Par une représentation congruente I, imaginons qu'un point P corresponde au point P′; nous dirons que P et P′ forment un couple de points conjugués. S'il existe une deuxième représentation congruente II, qui transforme chaque couple de points conjugués PP′, en un autre couple quelconque de points conjugués QQ′, on dira que II est *permutable* avec I. Une représentation congruente est une *translation* si l'on peut trouver une représentation congruente qui lui soit permutable, telle que celle-ci transforme un point A quelconque en une point B quelconque. — Que deux représentations congruentes I, II soient permutables entre elles, cela veut dire que la représentation congruente obtenue en effectuant I et II successivement, est identique à celle qu'on obtient en effectuant d'abord II et ensuite I. Il est évident qu'il existe une translation qui amène un point quelconque A en un point quelconque B; il est évident aussi que si T est une translation, A et B deux points quelconques, non seulement, il existe en vertu de la définition, une translation permutable avec T, mais on peut affirmer aussi que la *translation*, qui amène A en B, possède la propriété exigée. Donc une translation est permutable avec toutes les autres translations, et une représentation congruente qui est permutable avec toutes les translations est elle-même une translation. L'opération « inverse » d'une translation est une translation : donc les translations forment un *groupe* [2]). Il n'y a pas de translation — sauf l'identité — qui laisse un point A coïncider avec lui-même. Car si cela était et si cette translation faisait passer P en P′, il y aurait une représentation congruente qui transformerait à la fois A en P et en P′, et par suite P serait identique à P′. Par suite, il n'y a pas deux translations différentes qui fassent passer A en B.

La translation étant ainsi définie sans l'aide de la rotation, on peut encore donner du plan et de la droite, une définition qui ne fasse intervenir que la notion qu'on vient d'éclaircir. En effet, soit $\mathbf{a}$ une translation qui amène A_0 en A_1; alors A_1 va en A_2, A_2 en A_3, etc.; A_0 de plus vient de A_{-1}, A_{-1} de A_{-2}. Nous obtenons ainsi, non pas une droite, mais une suite discrète de points équidistants. Si n est un nombre entier, il existe une translation $\frac{\mathbf{a}}{n}$, qui, si on l'applique n fois donne le même résultat que si l'on effectue $\mathbf{a}$. Nous trouvons alors, en l'appliquant à A_0, un nombre de points n fois plus grand sur la droite à construire. Si nous prenons pour n, tous les nombres entiers, nous obtiendrons un ensemble de points de plus en plus dense. La ligne droite, pouvons-nous dire, en passant à la limite et en invoquant notre intuition du continu, résulte de la même translation infinitésimale répétée indéfiniment, ainsi que son inverse. Un plan résulte de la translation d'une droite g le long d'une autre h; si g et h sont deux droites qui se coupent en A_0, on applique à g toutes les translations qui conservent h; l'ensemble des droites ainsi obtenu à partir de g forme le plan (g, h).

La construction logique de la géométrie est ordonnée plus simplement, si l'on borne la notion de représentation congruente à celle de translation (§§ 2, 3). Nous obtiendrons ainsi une géométrie dite *affine* dans les cadres de laquelle la notion générale de congruence sera introduite (§ 4). L'intuition nous ayant donné les notions nécessaires, nous entrons de suite dans le domaine de la mathématique déductive.

§ 2. — **Les bases de la géométrie affine.**

Nous désignerons dorénavant les translations $\mathbf{a}$ de l'espace sous le nom de *vecteurs*; plus tard ce nom désignera une notion plus générale que la translation. Si par la translation $\mathbf{a}$ le point P passe en Q, on dira : Q est l'*extrémité* du vecteur $\mathbf{a}$ dont P est l'*origine*. Si P et Q sont deux points quelconques, il y a une et une seule translation $\mathbf{a}$ qui fait passer P en Q; nous la désignerons par le vecteur déterminé par P et Q, vecteur que nous noterons $\overline{PQ}$; la première lettre désignant toujours l'origine du vecteur.

La translation $\mathbf{c}$, que l'on obtient en effectuant d'abord $\mathbf{a}$ et ensuite $\mathbf{b}$, est dite la somme de ces deux: $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$. De cette définition, on tire : 1) la signification de la multiplication (répétition) et de la division d'un vecteur par un nombre entier; 2) la signification de la soustraction, le vecteur $-\mathbf{a}$ étant le vecteur qui réalise la translation inverse de $\mathbf{a}$; 3) le sens qu'il faut attacher à la notion du vecteur $\mathbf{o}$; ce vecteur représente la translation qui laisse tous les points en repos. On a : $\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{a}$; $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{o}$. Le symbole $\pm\frac{m}{n}\mathbf{a}=\lambda\,\mathbf{a}$, où m et n sont des nombres entiers quelconque, a un sens bien clair; en invoquant la continuité, le vecteur $\lambda\,\mathbf{a}$, où λ est un nombre réel quelconque, représente, d'après tout ce qui a été dit, une translation bien déterminée.

Nous poursuivons cette étude par le système d'axiomes le plus simple de la géométrie affine :

I. Vecteurs

Deux vecteurs $\mathbf{a}$ *et* $\mathbf{b}$ *déterminent univoquement un vecteur* $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, *dite leur « somme » ; un nombre* λ *et un vecteur* $\mathbf{a}$ *déterminent univoquement un vecteur* $\lambda\mathbf{a}$, *le «* λ^{uple} *de* $\mathbf{a}$ *»* (*multiplication*). *Ces opérations obéissent aux lois suivantes :*

α) *Addition :*

1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ (*commutativité*).

2) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ (*associativité*).

3) *Si* $\mathbf{a}$ *et* $\mathbf{c}$ *sont deux vecteurs, il y a un et un seul vecteur* $\mathbf{x}$ *pour lequel on ait :* $\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{c}$. *Il s'appelle la différence* $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ *de* $\mathbf{c}$ *et de* $\mathbf{a}$. (*Possibilité de la soustraction.*)

β) *Multiplication :*

1) $(\lambda+\mu)\ \mathbf{a}=(\lambda\mathbf{a})+(\mu\mathbf{a})$ (1re *loi de distributivité*).
2) $\lambda\ (\mu\mathbf{a})=(\lambda\mu)\ \mathbf{a}$ (*associativité*).
3) $1\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}$.
4) $\lambda\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})=(\lambda\,\mathbf{a})+(\lambda\mathbf{b})$.

Les lois (β) sont des conséquences des lois de l'addition pour des multiplicateurs λ, μ rationnels. Conformément au principe de continuité, elles s'étendent aux cas où λ et μ sont des nombres réels quelconques; mais alors nous devons les formuler comme des axiomes puisque nous ne pouvons pas les déduire logiquement sans autre des lois de l'addition. De cette manière, nous n'avons pas à invoquer la continuité géométrique, qui, on le sait, ne laisse pas que d'être difficile à saisir. 4) résume les théorèmes de similitude.

γ) L'axiome dimensionnel, qui devrait trouver ici sa place, sera formulé plus loin.

II. Points et vecteurs

1) *Deux points quelconques* A *et* B *déterminent un vecteur* $\mathbf{a}$ *;* $\overline{AB} = \mathbf{a}$. *Si* A *est un point quelconque,* $\mathbf{a}$ *un vecteur, il y a un point* B *et un seul, pour lequel* $\overline{AB} = \mathbf{a}$.

2) *Si* $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{BC} = \mathbf{b}$, *on a* $\overline{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Dans ces axiomes entrent deux catégories d'objets : les points et les vecteurs; trois relations fondamentales :

(1) $$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}, \qquad \mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}, \qquad \overline{AB}=\mathbf{a}$$

Tous les concepts que l'on tire de ces relations par des considérations purement logiques ressortissent à la géométrie affine; l'ensemble des théorèmes que l'on en tire et qui forment la dite géométrie, est ainsi établi sur une base axiomatique. Du reste, nos axiomes ne sont pas logiquement indépendants les uns des autres; au contraire, les axiomes (Iα, 2 et 3) peuvent être tirés des axiomes (II). Mais nous voyons pourtant que les axiomes (I) relatifs aux vecteurs se suffisent à eux-mêmes pour tout ce qui concerne les relations où n'entrent que des vecteurs, sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours aux axiomes II.

(Iα) exprime qu'il existe un seul vecteur $\mathbf{o}$; tel que pour tous les $\mathbf{a}$, on ait $\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a}$; de II, on tire que si $\overline{AB}$ est ce vecteur $\mathbf{o}$, c'est que forcément $A = B$. Si O est un point $\mathbf{e}_1$ un vecteur différent de zéro, les extrémités P de tous les vecteurs $\overline{OP}=\xi\mathbf{e}_1$ (ξ réel quelconque) forment une *droite*. La définition de la droite au moyen d'une translation est ainsi rattachée aux axiomes de la géométrie affine. Les points P pour lesquels ξ est positif, forment une demi-droite; si $\xi<0$, les points P forment l'autre demi-droite. ξ est dite l'*abscisse* de P sur la droite, relativement à l'origine O. Soit maintenant $\mathbf{e}_2$ un autre vecteur qui ne soit pas exprimable sous la forme $\xi\mathbf{e}_1$, les points P tels que $\overline{OP}$ soit de la forme $\xi_1\mathbf{e}_1+\xi_2\mathbf{e}_2$ forment un *plan*. (Construction du plan par translation d'une droite le long d'une autre). Si nous déplaçons le plan E le long d'une droite issue de O et non située dans E, nous balayons tout l'espace. Donc si $\mathbf{e}_3$ est un vecteur qui ne soit pas de la forme $\xi_1\mathbf{e}+\xi_2\mathbf{e}_2$, tout vecteur peut être mis d'une seule manière sous la forme :

$$\xi_1\mathbf{e}_1+\xi_2\mathbf{e}_2+\xi_3\mathbf{e}_3$$

combinaison linéaire des 3 vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Nous pouvons généraliser.

Des vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$,.... $\mathbf{e}_h$ en nombre fini h, sont dits *linéairement indépendants*, si

$$\xi_1\mathbf{e}_1+\xi_2\mathbf{e}_2+\cdots+\xi_h\mathbf{e}_h \tag{2}$$

n'est nul que lorsque $\xi_1=\xi_2=\cdots\xi_h=0$, c'est-à-dire seulement si tous les ξ sont nuls. Sous cette hypothèse, l'ensemble des vecteurs de la forme (2) constitue une *multiplicité vectorielle linéaire à h dimensions, construite* ou déployée sur les vecteurs $\mathbf{e}_1$, ... $\mathbf{e}_h$. Une multiplicité vectorielle linéaire à h dimensions M, peut être définie de la manière suivante, indépendante de la « base » $\mathbf{e}_i$:

1) Les deux opérations : addition de deux vecteurs et multiplication d'un vecteur par un nombre ne font pas sortir de la multiplicité ; c'est-à-dire que la somme de deux vecteurs de M, comme le produit d'un vecteur de M par un nombre réel, sont des vecteurs de M.

2) Il existe dans M, h vecteurs linéairement indépendants, mais $h+1$ vecteurs quelconques de M sont toujours linéairement dépendants.

De cette deuxième propriété, qui provient de la définition et de théorèmes élémentaires sur les équations linéaires, nous tirons cette conséquence que le nombre de dimensions h pour la multiplicité est caractéristique de celle-ci et ne dépend en rien de la « base » particulière sur laquelle nous l'avons construite. L'axiome dimensionnel que nous avons laissé de côté plus haut se formulera ainsi :

Il y a n vecteurs linéairement indépendants, mais $n+1$ sont *linéairement dépendants.*

Ou encore : les vecteurs forment une multiplicité linéaire à n dimensions. Cela conduit pour $n=3$ à une géométrie affine spatiale, pour $n=2$ à une géométrie plane, pour $n=1$ à la géométrie de la droite. Il sera utile pour avoir une géométrie affine générale de laisser n indéterminé, car on voit ici — comme nous le verrons plus loin encore pour la géométrie complète — que dans la structure mathématique de l'espace, rien ne nous oblige logiquement à nous en tenir au nombre $n = 3$. Dans le système d'axiomes, ce nombre $n=3$ n'a pas une signification essentielle et nous devons passer sur elle dans une théorie déductive systématique. Nous reviendrons dans le prochain paragraphe sur la question d'une géométrie dans un espace n - dimensionnel (³). Pour l'instant, nous devons compléter les explications données.

Si O est un point quelconque, les extrémités P des vecteurs (2) issus de O remplissent une multiplicité linéaire à h dimensions M ; nous dirons aussi qu'ils forment un *ensemble linéaire de points à h dimensions*, construit à partir de O sur ces vecteurs $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_h$. Le point O, d'ailleurs n'y joue pas un rôle spécial ; si O' est un point quelconque de l'ensemble, le vecteur $\overline{O'P}$ décrit la même multiplicité M, quand P passe par tous les points de l'ensemble ponctuel ainsi défini. Si nous transportons l'ensemble des vecteurs issus de O, en O' nous obtenons une multiplicité, dite *parallèle* à la première. Les droites correspondantes sont parallèles, les plans correspondants le sont aussi. Si dans (2) nous donnons aux ξ les valeurs définies par les inégalités :

$$0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \xi_2 \leqslant 1, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqslant \xi_h \leqslant 1,$$

l'ensemble des points, extrémités des vecteurs ainsi construits, issus de O, est un *parallélipipède* à h dimensions, construit sur les vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \ldots, \mathbf{e}_h$. (Le parallélipipède à une dimension est un segment ; celui à deux dimensions, un parallélogramme). Un point O et les n vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n$, linéairement indépendants forment ensemble un système de coordonnées (C) ; chaque vecteur $\mathbf{x}$ peut être représenté d'une manière et d'une seule par une expression de la forme :

$$\mathbf{x} = \xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2 + \ldots \xi_n \mathbf{e}_n \tag{3}$$

les nombres ξ_i, sont dits ses *composantes* dans le système de coordonnées (C); si P est un point quelconque et $\overline{OP}$ égal au vecteur (3), les ξ_i sont alors des *coordonnées* de P. Tous les systèmes de coordonnées sont équivalents en géométrie affine: il n'y a aucune propriété de celle-ci qui permette de distinguer un système d'un autre. Si :

$$O' \,;\, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$$

est un deuxième système, on aura des relations de la forme :

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \mathbf{e}_k \tag{4}$$

entre les $\mathbf{e}'_i$ et les $\mathbf{e}_i$; les α_{ki} sont n^2 nombres qui, à cause de l'indépendance des $\mathbf{e}'_i$, forment un déterminant différent de zéro. Si les ξ_i sont les coordonnées d'un vecteur $\mathbf{x}$ dans l'ancien système, et les ξ'_i ses coordonnées dans le nouveau, on a :

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \xi'_k \tag{5}$$

cela provient de l'égalité :

$$\sum_i \xi_i \mathbf{e}_i = \sum_i \xi'_i \mathbf{e}'_i$$

et de (4).

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, étant les coordonnées de O' dans le premier système de coordonnées, x_i les coordonnées d'un point quelconque dans le même système, et x'_i celle du même point dans le deuxième système, on a :

$$(6) \qquad x_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x'_k + \alpha_i$$

car les $(x_i - \alpha_i)$ sont les composantes du vecteur

$$\overline{O'P} = \overline{OP} - \overline{OO'}$$

dans le premier système, et x'_i dans le deuxième. Les formules de transformation (6), pour les coordonnées, sont donc linéaires ; les formules (5), pour la transformation des composantes s'en tirent aisément en faisant abstraction des α_i. En géométrie affine, il est donc possible de représenter chaque vecteur par ses composantes et chaque point par ses coordonnées; les relations géométriques entre points et vecteurs s'expriment par des relations entre composantes et coordonnées, qui ne sont pas détruites par des transformations linéaires quelconques.

Les formules (5) et (6) ont encore une autre signification : elles peuvent exprimer une *correspondance affine* dans un système de coordonnées déterminé. Une correspondance qui associe à chaque vecteur $\mathbf{x}$, une « *image* » : le vecteur $\mathbf{x}'$, à chaque point P, l'image ponctuelle P', est dite *linéaire ou affine*, si les relations (1) persistent entre les images, quand elles ont lieu entre les objets primitifs ; c'est-à-dire, si ayant (1) on a pour les images :

$$\mathbf{a}' + \mathbf{b}' = \mathbf{c}', \qquad \mathbf{b}' = \lambda \mathbf{a}', \qquad \overline{A'B'} = \mathbf{a}' - \mathbf{b}'$$

et si, en outre, aucun vecteur différent de zéro, n'a zéro pour image; en d'autres termes, si l'image de deux points n'est la même que lorsque ces deux points sont confondus. Deux figures, telles que chacun des points de l'une est l'image affine des points de l'autre, sont dites *affines*. Du point de vue de la géométrie affine, elles sont équivalentes; toute propriété affine qui a lieu pour l'une a lieu pour l'autre. La notion de *représentation* (ou correspondance) *affine* joue dans la géométrie affine le même rôle que celui de la congruence dans la géométrie complète; de là provient sa signification essentielle. Des vecteurs linéairement indépendants se transforment par affinité en vecteurs linéairement indépendants, de là son importance (transformation ou correspondance affine); une multiplicité linéaire à h dimensions se transforme en une mulitiplicité à h dimensions; des parallèles en parallèles, un système de coordonnées O $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ en un nouveau système de coordonnées : $O'(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots \mathbf{e}'_n)$.

Les nombres α_{ki}, α_i ont la même signification que plus haut. Le vecteur (3) se change par l'affinité en :

$$\mathbf{x}' = \xi_1 \mathbf{e}'_1 + \xi_2 \mathbf{e}'_2 + \cdots + \xi_n \mathbf{e}'_n.$$

Introduisons les expressions des $\mathbf{e}'_i$, utilisons l'ancien système pour représenter l'affinité et appelons ξ_i les composantes d'un vecteur et ξ'_i celles de son image, alors :

$$\xi'_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\xi_k. \tag{5'}$$

Si P a son image en P', $\overline{OP}$ en $\overline{O'P'}$, si x_i sont les coordonnées de P, et x'_i celles de P', alors on a :

$$x'_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}x_k + \alpha_i.$$

En géométrie analytique, on a l'habitude de caractériser les multiplicités linéaires par des équations linéaires entre les coordonnées du *point courant;* nous le ferons dans le paragraphe suivant; ici, nous nous contenterons d'introduire la notion de *forme linéaire.* Une fonction $L(\mathbf{x})$ réelle, dont l'argument est un vecteur $\mathbf{x}$ est dite une forme linéaire, si elle possède les propriétés suivantes :

$$L(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = L(\mathbf{a}) + L(\mathbf{b}) \; ; \qquad L(\lambda\mathbf{a}) = \lambda.\ L(\mathbf{a}).$$

Dans un système de coordonnées $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$,... $\mathbf{e}_n$ chacune des composantes ξ_i du vecteur $\mathbf{x}$ est une forme linéaire. On a, pour une forme L, $\mathbf{x}$ étant défini par (3) :

$$L(\mathbf{x}) = \xi_i L(\mathbf{e}_1) + \xi_2 L(\mathbf{e}_2) + \cdots + \xi_n L(\mathbf{e}_n) \; ;$$

posons alors $L(\mathbf{e}_i) = a_i$, la forme linéaire se présente ainsi :

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n.$$

Inversement, une forme linéaire quelconque peut être donnée de cette manière. Plusieurs formes L_1, L_2,... L_h sont linéairement indépendantes, si l'on ne peut trouver n constantes λ_i, non toutes nulles, telles que pour les $\mathbf{x}$, on ait identiquement :

$$\lambda_1 L_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 L_2(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_h L_h(\mathbf{x}) = 0.$$

$(n+1)$ formes linéaires sont toujours linéairement dépendantes si les vecteurs auxquels on les applique forment une multiplicité à n dimensions.

§ 3. — Géométrie à n dimensions. Algèbre linéaire. Formes quadratiques.

Pour saisir l'harmonie mathématique parfaite des lois de l'espace, nous ne bornerons pas à 3 le nombre des dimensions des multiplicités que nous étudierons. On a constaté que non seulement dans la géométrie, mais encore d'une manière plus étonnante en physique, aussitôt que l'on découvre les lois de la nature, celles-ci se laissent représenter par des relations mathématiques de la plus grande simplicité et de la plus complète harmonie. Expliquer les raisons de cette simplicité et de cette harmonie, dont la physique ne peut pas aujourd'hui se passer, nous paraît être un des devoirs fondamentaux de l'enseignement mathématique. Cette harmonie est pour nous une source de profondes joies intellectuelles. La géométrie analytique, exposée sous une forme condensée, et dans ses notions essentielles, comme nous l'essayons ici, en donne une première idée, insuffisante encore. Cette raison, d'ailleurs n'est pas la seule qui nous décide à généraliser ainsi; pour les besoins de la théorie de la relativité, nous aurons à étudier la géométrie à quatre dimensions. Il n'est aucunement besoin d'avoir recours aux procédés occultes des spirites pour familiariser notre esprit avec la géométrie à n dimensions. Considérons, par exemple, un mélange gazeux et homogène d'hydrogène, d'oxygène, de soufre et d'acide carbonique. Une quantité quelconque d'un tel mélange est bien caractérisée, quand on connaît le poids de chacun des corps qui entrent dans sa composition. Appelons un tel mélange : un vecteur (nous pouvons bien lui donner le nom que nous voulons) et appelons addition, l'union de deux mélanges gazeux, les axiomes I de notre système sont satisfaits pour un nombre de dimensions égal à 4, si nous nous autorisons à parler de quantités négatives de gaz. 1 gr. d'hydrogène pur, 1 gr. d'oxygène, 1 gr. de soufre et 1 gr. d'acide carbonique sont 4 *vecteurs* indépendants, au moyen desquels tous les autres se laissent exprimer linéairement; ils forment donc un système de coordonnées. Voici un nouvel exemple. Soient 5 barres parallèles; sur chacune d'elles une petite sphère peut se déplacer. Un état déterminé de cette machine à calculer rudimentaire est connu, si l'on se donne les abcisses de chaque boule sur sa barre. Disons que chacun de ces états est un *point* et que chaque déplacement simultané des 5 boules est un vecteur; nos axiomes I jouent encore pourvu que l'on fasse $n=5$. On sait bien qu'il est possible d'imaginer une infinité d'exemples variés pour lesquels nos axiomes sont satisfaits, moyennant que l'on donne des noms appropriés aux objets que l'on considère.

Mais l'exemple suivant est beaucoup plus important que les petits jeux que nous venons d'imaginer. *Nos axiomes caractérisent les opérations fondamentales de la théorie des équations linéaires.* Soient α_i et α des nombres donnés, on sait que :

(7) $$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0.$$

est une équation homogène linéaire.

(8) $$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \alpha$$

une équation linéaire non homogène pour les inconnues x_i. Pour traiter les *équations homogènes*, il est bon d'avoir un nom unique pour désigner un système de valeurs des variables x_i ; nous dirons que c'est un *vecteur*. La somme de deux tels vecteurs

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \quad \text{et} \quad (b_1, b_2, \cdots, b_n).$$

sera le vecteur

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$$

et le λ^{uple} du premier de ces vecteurs sera le vecteur :

$$(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

Alors les axiomes I sont valables pour le nombre de dimensions n.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1,\ 0,\ 0, \dots,\ 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0,\ 1,\ 0, \dots,\ 0), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}_n &= (0,\ 0,\ 0, \dots,\ 1) \end{aligned}$$

forment un système de vecteurs indépendants; les composantes d'un vecteur $(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n)$ dans ce système-là, sont les x_i eux-mêmes. Le théorème fondamental sur les solutions d'un système d'équations linéaires s'exprime ainsi :

Si $L_1(\mathbf{x}),\ L_2(\mathbf{x}), \dots,\ L_h(\mathbf{x})$ sont h formes linéaires, linéairement indépendantes, les solutions $\mathbf{x}$ des équations

$$L_1(\mathbf{x}) = 0, \qquad L_2(\mathbf{x}) = 0, \dots, \quad L_h(\mathbf{x}) = 0$$

forment une multiplicité vectorielle linéaire à $(n-h)$ dimensions.

Dans la *théorie des équations linéaires non homogènes*, nous désignerons plutôt un ensemble de valeurs des variables x_i par le nom de point. Si x_i et x'_i sont deux solutions de l'équation (8), leur différence

$$x'_1 - x_1,\quad x'_2 - x_2,\quad \dots,\quad x'_n - x_n$$

est une solution de l'équation correspondante homogène (7), c'est ce qui explique le nom de *point*, puisque nous employons le mot *vecteur* pour désigner les solutions de (7). Si nous faisons les mêmes conventions pour l'addition et la multiplication des vecteurs ainsi définis, *nos axiomes sont encore valables*. Pour le système de coordonnées particulier choisi et avec l'origine $O = (0,\ 0, \dots,\ 0)$, les coordonnées d'un point (x_i) sont les nombres x_i eux-mêmes. Le théorème principal sur les équations linéaires s'exprime ainsi : Les points qui satisfont à h équations linéairement indépendantes, forment un ensemble ponctuel linéaire à $(n-h)$ dimensions.

On aurait pu édifier le système d'axiomes et les conséquences formelles que nous en avons tirées, d'une manière très naturelle, en n'ayant recours qu'à la théorie des équations linéaires, sans l'aide de la géométrie. Il serait même utile — à certains égards — de développer la théorie des équations linéaires sur une base axiomatique, et ensuite d'appliquer celle-ci à la géométrie. Cette théorie serait utile pour un ensemble d'opérations auxquelles s'appliquent les axiomes, et pas seulement aux systèmes de valeurs de n variables. Le passage de cette théorie plus compréhensive à la théorie donnée plus haut se ferait sans grande difficulté; il suffirait de construire un système de coordonnées et de remplacer les vecteurs et les points définis formellement, par leurs composantes et leurs coordonnées.

De tout cela, il découle que la géométrie affine appliquée à l'espace entier ne nous apprend qu'une seule chose, c'est que celui-ci forme un *domaine linéaire à 3 dimensions*. Tous les faits particuliers que l'intuition nous fournit, et que nous avons mentionnés dans le paragraphe 1), ne sont que des déguisements de cette simple vérité. S'il est, d'une part, très satisfaisant de pouvoir présenter les images spatiales et les relations qui constituent la géométrie sous une forme si synthétique, il faut néanmoins insister, d'autre part, sur le peu de renseignements que la mathématique nous donne, quant à l'essence même de l'espace; la géométrie ne nous renseigne en rien sur l'espace intuitif; sur ce qu'il *est* en soi et sur ce qui le distingue « des états d'une machine à calculer » « des mélanges gazeux » ou « des solutions d'un système d'équations linéaires ». Rendre cela concevable, ou éventuellement, montrer en quoi cela reste inconcevable, est un problème métaphysique. Nous, mathématiciens, pouvons être fiers de la merveilleuse clarté des théories que nous avons dégagées de la connaissance de l'espace; mais nous devons pourtant nous inciter à la modestie, puisque nos théories conceptuelles ne peuvent nous faire saisir que la partie la plus formelle et la plus superficielle de l'essence de l'espace.

L'algèbre nous donnera encore les notions nécessaires pour passer à un stade plus élevé de la géométrie, qui est la géométrie métrique. Ces notions sont celles de *formes bilinéaires et quadratiques*. Une fonction $Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ quelconques, est une forme bilinéaire, si elle est à la fois linéaire en $\mathbf{x}$, et linéaire en $\mathbf{y}$. Si dans un système de coordonnées, les ξ_i sont les composantes de $\mathbf{x}$, les η_i celles de $\mathbf{y}$, on aura :

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\xi_i\eta_k$$

où les α_{ik} sont des constantes. Cette forme est dite *non dégénérée*, si elle n'est identiquement nulle, pour n'importe quel $\mathbf{y}$, que si $\mathbf{x}=0$. Cela n'est possible que si les équations homogènes :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}\xi_i = 0 \qquad k = 1, 2, \cdots n$$

n'admettent que la solution $\xi_i=0$, c'est-à-dire si le déterminant $|\alpha_{ik}| \neq 0$. Par une transformation linéaire quelconque, cette propriété se conserve, comme on le sait par la théorie de la multiplication des déterminants. La forme bilinéaire est *symétrique*, si $Q(\mathbf{x}.\mathbf{y}) = Q(\mathbf{y},\mathbf{x})$, c'est-à-dire si $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$.

A chaque forme bilinéaire $Q(\mathbf{x},\mathbf{y})$, correspond une et une seule forme *quadratique* qui ne dépend que d'un vecteur $\mathbf{x}$:

$$Q(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\xi_i\xi_k.$$

On voit qu'inversement, à chaque forme quadratique, on peut faire correspondre une infinité de formes bilinéaires dont *une seule* est *symétrique*. De plus, on peut encore remarquer que, d'une forme bilinéaire non symétrique, on peut déduire une forme symétrique par l'opération :

$$\tfrac{1}{2}[Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) + Q(\mathbf{y},\mathbf{x})] ;$$

à deux formes bilinéaires symétriques, correspondent deux formes quadratiques différentes. C'est évident, si l'on montre qu'une forme symétrique bilinéaire $Q(\mathbf{x},\mathbf{y})$ est identiquement nulle, quand la forme quadratique $Q(\mathbf{x},\mathbf{x})$ est nulle quel que soit $\mathbf{x}$. Il suffit de considérer la relation :

$$Q(\mathbf{x}+\mathbf{y},\ \mathbf{x}+\mathbf{y}) = Q(\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) + Q(\mathbf{y},\mathbf{y}) \tag{9}$$

Si $Q(\mathbf{x})$ est une forme quadratique donnée, $Q(\mathbf{x},\mathbf{y})$ désignera toujours la forme bilinéaire symétrique que l'on tire de $Q(\mathbf{x})$. Si $Q(\mathbf{x},\mathbf{y})$ n'est pas dégénérée, on dira que $Q(\mathbf{x})$ ne l'est pas non plus. Une forme quadratique $Q(\mathbf{x})$ est *définie positive*, si l'on a toujours $Q(\mathbf{x})>0$ pour $\mathbf{x}\neq 0$; une telle forme est évidemment non-dégénérée, car pour aucun vecteur $\mathbf{x}\neq 0$, $Q(\mathbf{x},\mathbf{y})$ n'est nulle identiquement en $\mathbf{y}$, puisque si $\mathbf{y}=\mathbf{x}$, $Q>0$.

§ 4. — Les bases de la géométrie métrique

Nous aurons encore recours à l'intuition pour passer de la géométrie affine à la géométrie métrique. Rappelons (pour l'espace) ce qu'est la grandeur qu'on nomme *produit scalaire* de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$. Après avoir fait choix d'un vecteur unitaire, nous mesurons la longueur de $\mathbf{a}$ et (ayant égard à la direction) la longueur de la projection orthogonale de $\mathbf{b}$ sur $\mathbf{a}$; le produit des deux nombres qui mesurent ces longueurs est le produit scalaire $\mathbf{a}.\mathbf{b}$. Il ne s'agit pas seulement ici — comme dans la géométrie affine — de comparer les longueurs de segments parallèles, mais encore il faut que nous puissions comparer les longueurs de segments diversement dirigés. Les règles qui régissent le calcul du produit scalaire s'expriment par les égalités :

$$\lambda\mathbf{a}.\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}.\mathbf{b}), \qquad (\mathbf{a}+\mathbf{a}').\mathbf{b}=(\mathbf{a}.\mathbf{b})+(\mathbf{a}'.\mathbf{b})$$
$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}+\mathbf{b}')=(\mathbf{a}.\mathbf{b})+(\mathbf{a}.\mathbf{b}'), \qquad \mathbf{a}.\mathbf{b}=\mathbf{b}.\mathbf{a}.$$

Le produit scalaire de $\mathbf{a}$ par lui-même $\mathbf{a}.\mathbf{a}=\mathbf{a}^2$ est toujours positif, sauf si $\mathbf{a}=0$; il est égal au carré de la longueur de $\mathbf{a}$. Ces règles ont pour conséquence que le produit scalaire $\mathbf{x}.\mathbf{y}$ de deux vecteurs quelconques est une forme bilinéaire symétrique, dont la forme quadratique correspondante est définie positive. On reconnaît donc que ce n'est pas la longueur d'un vecteur, mais bien le carré de cette longueur qui dépend rationnellement du vecteur; cette dépendance s'exprime au moyen d'une forme quadratique : c'est là, à proprement parler le contenu essentiel du *théorème de Pythagore*. Le produit scalaire n'est pas autre chose que la forme symétrique bilinéaire, qui provient de cette forme quadratique. Nous formulerons donc ainsi l'*axiome métrique : Après le choix d'un vecteur unitaire* $\mathbf{e}$, *deux vecteurs* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *déterminent univoquement un nombre* $(\mathbf{x}.\mathbf{y})=Q(\mathbf{x},\mathbf{y})$; *ce nombre est une fonction bilinéaire symétrique des 2 vecteurs, et la forme quadratique* $Q(\mathbf{x},\mathbf{x})$ *qui lui correspond* $(\mathbf{x},\mathbf{x})=Q(\mathbf{x})$ *est définie positive.* $Q(\mathbf{e})=1$.

Q est la forme métrique fondamentale. *Une représentation affine, qui fait correspondre au vecteur* $\mathbf{x}$ *le vecteur* $\mathbf{x}'$ *est une congruence, si elle laisse invariante la forme métrique fondamentale :*

(10) $$Q(\mathbf{x}') = Q(\mathbf{x}) \ ;$$

Deux figures, qui sont la représentation congruente l'une de l'autre, sont congruentes. (Nous négligeons ici de faire la distinction entre la congruence directe et la congruence par réflexion. On eût pu la faire d'ailleurs pour la géométrie affine, et aussi bien dans la géométrie à n dimensions que dans celle à 3.)

La notion de congruence est donc *définie.*

Soit un ensemble d'opérations, pour lequel les axiomes du paragraphe 2 sont satisfaits, nous pouvons alors choisir une forme quadratique définie positive quelconque, que nous considérerons comme la forme métrique fondamentale de l'ensemble; par suite la congruence sera définie ; dans notre espace affine une métrique est introduite; et la géométrie euclidienne y est valable. — De nouveau, ces considérations ne sont pas liées à un nombre déterminé de dimensions. (10) et (9) nous montrent que pour une congruence, on a plus généralement :

$$Q(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Puisque la notion de congruence est définie par la forme métrique fondamentale, il n'y a rien d'étonnant alors, que celle-ci entre dans toutes les formules qui sont relatives à la mesure des grandeurs géométriques. Deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ sont congruents si l'on a :

$$Q(\mathbf{a}) = Q(\mathbf{a}')$$

Nous pourrions prendre le nombre $Q(\mathbf{a})$ comme mesure de la longueur du vecteur $\mathbf{a}$, mais pour que la longueur de la somme de deux vecteurs parallèles soit égale à la somme des longueurs des parties, nous prendrons comme *définition* de la longueur du vecteur $\mathbf{a}$ *la racine carrée positive de* $Q(\mathbf{a})$. Soient $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ deux couples de vecteurs de longueur égale à l'unité, les deux figures qu'ils forment chacun sont congruentes, pourvu que :

$$Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = Q(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$$

Nous ne prenons pas ce nombre $Q(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ comme mesure de *l'angle*, mais nous définissons celle-ci par la relation

$$\cos. \theta = Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

afin que la mesure de la somme de deux angles soit égale à la somme des mesures des parties. L'angle θ de deux vecteurs $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ quelconques, mais $\neq 0$, est alors donné par la relation :

(11) $$\cos\theta = \frac{Q(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\sqrt{Q(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \,.\, Q(\mathbf{b}, \mathbf{b})}}$$

$\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont rectangulaires, si $Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

Que l'angle défini par (11) soit toujours réel, nous le voyons par la relation :

(12) $$Q^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leqslant Q(\mathbf{a}) \,.\, Q(\mathbf{b})$$

qui est vraie pour toute forme quadratique Q définie positive. En effet :

$$Q(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=\lambda^2Q(\mathbf{a})+2\lambda\mu Q(\mathbf{a},\mathbf{b})+\mu^2Q(\mathbf{b})\geqslant 0$$

quels que soient λ et μ; donc le discriminant de la forme en (λ, μ) n'est jamais positif, c'est-à-dire que

$$Q^2(\mathbf{a},\mathbf{b}) - Q(\mathbf{a}).Q(\mathbf{b})\leqslant 0.$$

n vecteurs indépendants $\mathbf{e}_i$ forment un *système de coordonnées cartésien*, si pour chaque vecteur

(13) $$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$$

on a :

$$Q(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

c'est-à-dire si

$$Q(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k)=\begin{cases}1 & (i=k)\\ 0 & (i\neq k)\end{cases}$$

Au point de vue métrique, tous les systèmes cartésiens sont équivalents. Nous allons reconnaître leur existence non seulement dans le cas où Q est définie, mais aussi pour tous les cas où Q est une forme quadratique non dégénérée; cela est d'importance pour le but que nous poursuivons, puisque la théorie de la relativité correspond précisément à une forme indéfinie. Nous affirmons :

Etant donnée une forme quadratique Q, on peut toujours trouver un système de coordonnées $\mathbf{e}_i$, tel que Q prenne la forme :

(14) $$Q(\mathbf{x}) = \varepsilon_1 x_1^2+\varepsilon_2 x_2^2+\cdots+\varepsilon_n x_n^2 \qquad (\varepsilon_i=\pm 1)$$

En effet, on choisit un vecteur $\mathbf{e}_1$, pour lequel $Q(\mathbf{e}_1)\neq 0$; en le multipliant par un facteur convenable, on peut toujours s'arranger alors pour que $Q(\mathbf{e}_1)=\pm 1$. Un vecteur $\mathbf{x}$ tel que $Q(\mathbf{e}_1\mathbf{x})=0$ est encore dit *orthogonal* à $\mathbf{e}_1$. Si $\mathbf{x}^*$ en est un, et si x_1 est un nombre quelconque on sait que de

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\mathbf{x}^*$$

on tire le « théorème de Pythagore » :

(15) $$Q(\mathbf{x}) = x_1^2\,Q(\mathbf{e}_1)+2x_1\,Q(\mathbf{e}_1\mathbf{x}^*)+Q(\mathbf{x}^*) = \pm x_1^2+Q(\mathbf{x}^*).$$

Donc les vecteurs orthogonaux à $\mathbf{e}_1$ forment une multiplicité linéaire à $(n-1)$ dimensions, à laquelle est attachée la forme non dégénérée $Q(\mathbf{x})$. Puisque notre théorème est évident pour $n=1$, admettons qu'il soit vrai pour $(n-1)$ dimensions et démontrons alors qu'il est vrai pour n. C'est-à-dire admettons qu'il existe $(n-1)$ vecteurs $\mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n$ orthogonaux à $\mathbf{e}_1$, tels que pour

$$\mathbf{x}^*=x_2\mathbf{e}_2+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$$

on ait

$$Q(\mathbf{x}^*)=\pm x_2^2\pm\cdots\pm x_n^2,$$

mais alors, pour $Q(\mathbf{x})$, on trouve immédiatement la décomposition annoncée. L'on voit que

$$Q(\mathbf{e}_i)=\varepsilon_i, \qquad Q(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k)=0. \qquad (i\neq k)$$

Les $\mathbf{e}_i$ sont linéairement indépendants et chaque vecteur $\mathbf{x}$ se peut mettre sous la forme (13); cela est évident d'après les relations précédentes; on en tire encore :

(16) $$x_i = \varepsilon_i . Q(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}).$$

Si Q est une forme indéfinie, il existe encore un théorème important sur sa décomposition en une somme de carrés :

Les nombres r *et* s *des quantités* ε_i *respectivement positives et négatives sont déterminées univoquement par la forme quadratique;* nous dirons que celle-ci a r dimensions positives et s dimensions négatives. (On a l'habitude de dire que s est *l'indice d'inertie* de la forme quadratique, et le théorème que nous venons d'énoncer s'appelle aussi la *loi d'inertie* des formes quadratiques (*). On sait, par exemple, que la classification des quadriques en découle. On peut caractériser encore les nombres r et s d'une manière qui rend évidente leur invariance. *Il y a* r *vecteurs* $\mathbf{e}$, *orthogonaux entre eux pour lesquels* Q $(\mathbf{e}) > 0$; *mais pour tout vecteur* $\mathbf{x}$ $(\neq 0)$ *orthogonal à tous ceux-là, on a* Q $(\mathbf{x}) < 0$, *de telle sorte qu'il n'y a pas plus de* r *vecteurs* $\mathbf{e}$ *indépendants. Idem pour* s. Les r vecteurs en question sont, par exemple, les r vecteurs fondamentaux e_i, qui dans l'égalité (14) correspondent aux ε_i positifs; les composantes x_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ qui leur sont relatives sont des formes linéaires déterminées de $\mathbf{x}$: $x_i = L_i(\mathbf{x})$. (Comp. 16). Si maintenant les $\mathbf{e}_i (i = 1, 2, \dots r)$ forment un système de vecteurs, orthogonaux entre eux deux à deux, et tels que Q $(\mathbf{e}_i) > o$; et si $\mathbf{x}$ est un vecteur orthogonal à tous les $\mathbf{e}_i$, on peut trouver une combinaison linéaire

$$\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots, + \lambda_r \mathbf{e}_r + \mu \mathbf{x}$$

dont tous les coefficients ne sont pas nuls, et tels que les r équations linéaires et homogènes :

$$L_1 (\mathbf{y}) = 0, \qquad \dots, \qquad L_r (\mathbf{y}) = 0$$

soient satisfaites.

Alors, comme le montre la forme normale, Q $(\mathbf{y})$ est négatif, sauf si $\mathbf{y} = 0$. La formule :

$$Q(\mathbf{y}) - \{ \lambda_1^2 Q(\mathbf{e}_1) + \dots + \lambda_r^2 Q(\mathbf{e}_r) \} = \mu^2 Q(\mathbf{x})$$

montre bien que Q $(\mathbf{x}) < 0$; (sauf si $\mathbf{y} = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_i = 0$, mais alors puisque $\mu \neq 0$, $\mathbf{x} = 0$.)

Dans la théorie de la relativité, on a à considérer des formes quadratiques à une dimension négative, les $(n\text{-}1)$ autres étant positives. Dans une espace à 3 dimensions, l'équation

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

est, en coordonnées affines, l'équation d'un cône dont le sommet est à l'origine ; ce sommet divise le cône en 2 nappes correspondant l'une aux x_1 négatifs, l'autre aux x_1 positifs. Dans la théorie de la relativité ces 2 nappes sont l'image du passé et de l'avenir. Soit Q une forme non-dégénérée avec une seule dimension négative. Nous choisissons un vecteur $\mathbf{e}$, pour lequel $Q(\mathbf{e}) = -1$; les vecteurs $\mathbf{x}$ non nuls, pour lesquels $Q(\mathbf{x}) \leqq 0$, seront dits *vecteurs négatifs*. D'après la loi d'inertie, il n'y a pas de vecteurs négatifs pour lesquels on ait : $Q(\mathbf{e}, \mathbf{x}) = 0$. Ils se décomposent donc en 2 classes, ou « Cônes » suivant les relations $Q(\mathbf{e}\ \mathbf{x}) < 0$ et $Q(\mathbf{e}\ \mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{e}$ appartient à la première, $-\mathbf{e}$ à la deuxième. Un vecteur $\mathbf{x}$ est « *à l'intérieur* » de la nappe ou « *sur* » la nappe suivant que $Q(\mathbf{x}) < 0$. ou $Q(\mathbf{x}) = 0$.

Pour montrer que les 2 cônes sont indépendants du choix du vecteur $\mathbf{e}$, il suffit

* Ce théorème est dû à Sylvester. (Note du traducteur).

de faire voir que si $Q(\mathbf{e}) = Q(\mathbf{e}') = -1$, on a $Q(\mathbf{x}) \leqq 0$, dès que le signe de $\left(\frac{Q(\mathbf{e}',\mathbf{x})}{Q(\mathbf{e},\mathbf{x})}\right)$ est le même que celui de $-Q(\mathbf{e},\mathbf{e}')$.

En effet, chaque vecteur $\mathbf{x}$ peut se décomposer en :

$$\mathbf{x} = x\mathbf{e} + \mathbf{x}^*$$

la première partie étant proportionnelle à $\mathbf{e}$, la deuxième $\mathbf{x}^*$ lui étant orthogonale. On n'a pour cela qu'à faire $x = -Q(\mathbf{e},\mathbf{x})$ et l'on a :

$$Q(\mathbf{x}) = -x^2 + Q(\mathbf{x}^*)$$

$Q^* = Q(\mathbf{x}^*)$ est, nous le savons, certainement $\geqq 0$; la relation :

$$Q^* = x^2 + Q(\mathbf{x}) = Q^2(\mathbf{e},\mathbf{x}) + Q(\mathbf{x})$$

montre que Q^* est une forme quadratique de $\mathbf{x}$ (dégénérée du reste) qui satisfait à l'inégalité : $Q^*(\mathbf{x}) \geqq 0$ quel que soit $\mathbf{x}$. Posons maintenant :

$$Q(\mathbf{x}) = -x^2 + Q^*(x) \leqq 0 \qquad Q(\mathbf{e}') = -e'^2 + Q^*(\mathbf{e}') < 0$$

$$\{ x = -Q(\mathbf{e},\mathbf{x}) \} \qquad \{ e' = -Q(\mathbf{e},\mathbf{e}') \}$$

L'inégalité (12) appliquée à Q^* donne :

$$\{ Q^*(\mathbf{e}',\mathbf{x}) \}^2 \leqq Q^*(\mathbf{e}').\ Q^*(\mathbf{x}) < e'^2x^2 ;$$

donc :

$$-Q(\mathbf{e}',\mathbf{x}) = e'x - Q^*(\mathbf{e}',\mathbf{x})$$

a le signe du premier terme $e'x$.

Nous revenons au cas intéressant où la forme fondamentale est définie. Prenons un système cartésien pour représenter une correspondance congruente; les coefficients α_{ik} des formules (5') du § 2 doivent être tels que :

$$\xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \cdots + \xi_n'^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2$$

d'où l'on tire les relations :

$$(17) \qquad \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ri}\,\alpha_{rj} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

qui sont les *conditions d'orthogonalité*.

Elles expriment ce fait que dans la transformation inverse les α_{ik} se changent en les α_{ki} :

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\xi'_k.$$

On en tire encore que le déterminant $\Delta = |\alpha_{ik}|$ d'une transformation congruente est identique à celui de la transformation inverse, et puisque leur produit doit être égal à 1, on voit que $\Delta = \pm 1$. (Les deux signes permettent de distinguer les congruences vraies de celles que l'on obtient par réflexion.)

Pour le traitement analytique de la géométrie métrique, il y a deux possibilités. *Ou bien*, on ne particularise en aucune manière le système de coordonnées affine, et alors il faut développer une théorie de l'invariance vis-à-vis de n'importe quelle transformation linéaire pour laquelle, au contraire de la géométrie affine pure, une forme quadratique invariante est donnée une fois pour toutes; c'est la forme métrique fondamentale :

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\xi^i\xi_k$$

Ou bien l'on n'utilise que des systèmes de coordonnées cartésiens; alors il s'agit d'établir une théorie de l'invariance vis-à-vis des transformations orthogonales, c'est-à-dire des transformations linéaires dont les coefficients satisfont aux relations (17). Nous devons nous engager dans la première voie afin de pouvoir embrasser des généralisations qui dépassent la géométrie euclidienne. Il paraît aussi plus simple, algébriquement parlant, de considérer les expressions qui restent invariantes pour *toutes* les transformations linéaires, plutôt que celles qui ne sont invariantes que vis-à-vis des transformations orthogonales, lesquelles forment une classe caractérisée par des conditions algébriques assez complexes. Nous développerons donc cette théorie de l'invariance — dite *calcul tensoriel* — mais de telle manière qu'elle ne rende pas seulement possible l'étude des objets mathématiques, mais encore et surtout l'étude des lois physiques [1]).

§ 5. Les tenseurs

Deux transformations linéaires

$$\xi^i = \sum_k \alpha_k^i \bar{\xi}^k \qquad (\,|\,\alpha_k^i\,| \neq 0) \tag{18}$$

$$\eta_i = \sum_k \bar{\alpha}_i^k \bar{\eta}_k \qquad (\,|\,\bar{\alpha}_i^k\,| \neq 0) \tag{18'}$$

des variables ξ, η, en les variables $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, sont dites *contragrédientes* l'une de l'autre, si la forme bilinéaire unitaire $\sum_i \eta_i\xi^i$ se transforme en elle-même :

$$\sum_i \eta_i\xi^i = \sum_i \bar{\eta}_i\bar{\xi}^i. \tag{19}$$

La relation de contragrédience est donc réciproque. Si, par un premier couple de transformations, A, $\bar{A}$ les variables ξ, η se transforment en $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, et si celles-ci au moyen d'un deuxième couple B, $\bar{\mathrm{B}}$, se changent en $\bar{\bar{\xi}}$, $\bar{\bar{\eta}}$, on voit par les relations

$$\sum_i \eta_i\xi^i = \sum_i \bar{\eta}_i\bar{\xi}^i = \sum_i \bar{\bar{\eta}}_i\bar{\bar{\xi}}^i,$$

que les deux transformations qui permettent de passer directement des ξ, η aux $\bar{\bar{\xi}}$, $\bar{\bar{\eta}}$, sont aussi *contragrédientes*. Les coefficients des relations (18) et (18′) satisfont aux relations :

(20) $$\sum_r \alpha_i^r \bar{\alpha}_r^k = \delta_i^k = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}.$$

Si dans le premier membre de (19), on remplace les ξ par leurs expressions en les $\bar{\xi}$, on reconnaît que les équations (18′) sont résolues par les relations :

(21) $$\bar{\eta}_i = \sum_k \alpha_i^k \eta_k$$

ce qui montre aussi, qu'à une tranformation linéaire il correspond une et une seule transformation qui lui soit contragrédiente. De la même manière, on trouve :

$$\bar{\xi}^i = \sum_k \bar{\alpha}_k^i \xi^k.$$

En remplaçant les $\bar{\xi}_i$ et les $\bar{\eta}_i$ par leurs valeurs dans (19), on voit que les coefficients satisfont encore aux nouvelles relations :

(20′) $$\sum_r \alpha_r^i \bar{\alpha}_k^r = \delta_k^i.$$

Une transformation orthogonale est une transformation qui est à elle-même sa propre contragrédiente. Si l'on soumet une forme linéaire des variables ξ_i à une transformation linéaire quelconque, les coefficients se transforment suivant des relations qui sont contragrédientes aux transformations des variables; on dit aussi qu'ils se comportent d'une manière *contravariante* (ou contrevariante) vis-à-vis des variables.

Relativement à un système de coordonnées affines O $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \cdots \mathbf{e}_n)$ nous avons caractérisé les translations $\mathbf{x}$ par leurs composantes ξ_i :

$$\mathbf{x} = \xi^1 \mathbf{e}_1 + \xi^2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \xi^n \mathbf{e}_n$$

Si l'on prend un autre système de coordonnées O; $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{e}}_n$

où $$\bar{\mathbf{e}}_i = \sum_k \alpha_i^k \mathbf{e}_k$$

les composantes de $\mathbf{x}$ se transforment par

$$\xi^i = \sum_k \alpha_k^i \bar{\xi}^k$$

comme il appert de

$$\mathbf{x} = \sum_i \xi^i \mathbf{e}_i = \sum_i \bar{\xi}^i \bar{\mathbf{e}}_i;$$

donc ces composantes sont soumises à une transformation qui est contragrédiente à celle que subissent les vecteurs fondamentaux du système de coordonnées, elles se comportent d'une façon contravariante à ceux-ci, nous les appellerons les *composantes contravariantes* du vecteur $\mathbf{x}$. Dans l'espace *métrique*, on peut encore caractériser une translation par les valeurs des produits scalaires des vecteurs fondamentaux $\mathbf{e}_i$ par le vecteur qui la représente :

$$\xi_i = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i)$$

Dans le passage à un autre système de coordonnées, ces ξ_i se transforment comme les vecteurs fondamentaux eux-mêmes, ou comme l'on dit, d'une façon *cogrédiente* aux vecteurs fondamentaux, soit par les équations :

$$\bar{\xi}_i = \sum_k \alpha_i^k \xi_k ;$$

On le voit immédiatement par la signification géométrique de la notion ainsi définie; en effet les ξ_i ne sont pas autre chose que les projections orthogonales du vecteur $(\mathbf{x})$ sur les axes des vecteurs $\mathbf{e}_i$.

On dit que les ξ_i se comportent d'une manière *covariante*, et nous les dirons les *composantes covariantes* de la translation. La relation entre les composantes covariantes et les composantes contravariantes est donnée par la formule :

$$\xi_i = \sum_k (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k)\, \xi^k = \sum_k g_{ik} \xi^k, \tag{22}$$

et inversement, en résolvant, par :

$$\xi^i = \sum_k g^{ik} \xi_k. \;{}^{*)} \tag{22'}$$

Dans un système cartésien, les composantes covariantes coïncident avec les composantes contravariantes. Insistons encore bien sur ce point que dans un espace affine, seules les composantes contravariantes ont un sens, de sorte que lorsque nous parlerons des composantes d'une translation sans préciser plus, il sera bien entendu qu'il s'agit des composantes contravariantes.

Nous allons considérer maintenant des formes linéaires de plusieurs translations. Soit par exemple $A\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ une forme trilinéaire; supposons que $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ soient donnés par leurs composantes contravariantes, et $\mathbf{z}$ par ses composantes covariantes par rapport à un système quelconque de coordonnées. Alors A sera une forme trilinéaire des ξ^i, η^i, ζ_i avec des coefficients déterminés :

$$\sum_{i\,k\,l} a_{ik}^l \xi^i \eta^k \zeta_l. \tag{23}$$

Dans un autre système de coordonnées son expression serait par exemple :

$$\sum_{i\,k\,l} \bar{a}_{ik}^l \bar{\xi}^i \bar{\eta}^k \bar{\zeta}_l. \tag{23'}$$

et l'on passe de l'une à l'autre de ces deux formes par des formules de transformation qui, pour les ξ et les η sont contragrédientes aux formules de transformation des vecteurs de base du système et pour les ζ sont cogrédientes à celles-ci. On pourra alors calculer les coeffi-

*) On verra plus loin la signification des g^{ik}, qui est d'ailleurs évidente ici.

cients a_{ik}^{l} si l'on s'est donné les a_{ik}^{l} et si l'on connaît les coefficients α_{k}^{i} de la transformation de coordonnées. Nous sommes arrivés ainsi à la notion « *d'un tenseur de degré* (r+s), r *fois covariant*, s *fois contravariant* » ($r=2$, $s=1$, $r+s=3$, dans notre exemple qu'il est bien facile de généraliser), nous allons en donner une définition in abstracto, en particularisant malgré tout les nombres r et s comme dans l'exemple développé tout à l'heure, afin de ne pas compliquer trop les notations.

Une forme trilinéaire dépendant d'un système de coordonnées, et fonction de trois séries de variables, est un tenseur du 3e degré doublement covariant et simplement contravariant, si cette dépendance est telle que les expressions de la forme, dans deux systèmes de coordonnées :

$$\sum a_{ik}^{l}\,\xi^{i}\,\eta^{k}\,\zeta_{l}, \qquad \sum \bar{a}_{ik}^{l}\,\bar{\xi}^{i}\,\bar{\eta}^{k}\,\bar{\zeta}_{l}$$

se transforment l'une dans l'autre, quand l'on soumet deux des séries de variables (ici ξ et η) à deux transformations contragrédientes à la transformation des vecteurs de base du système, et la 3e série (ζ) à une transformation cogrédiente à cette dernière. Les coefficients de la forme sont les composantes du tenseur dans le système de coordonnées ; nous les disons covariantes pour les indices ik, qui sont liés aux variables contragrédientes, et contravariantes par rapport à l'autre indice l.

La terminologie adoptée se justifie en remarquant que les coefficients d'une forme simplement linéaire sont covariants si les variables sont contragrédientes, et contravariantes si elles sont cogrédientes. Les indices dont on affecte les coefficients seront placés en haut, si par rapport à eux le coefficient est contravariant, en bas dans le cas contraire. Les variables affectées d'un indice inférieur sont toujours cogrédientes et celles dont l'indice est supérieur, contragrédientes par rapport aux vecteurs de base du système de coordonnées. Un système de coordonnées étant donné, un tenseur est parfaitement connu, si ses composantes dans le système sont connues; elles sont d'ailleurs arbitraires. La tâche du calcul tensoriel est de trouver les propriétés et les relations des tenseurs qui sont indépendantes des coordonnées choisies. *Dans un sens étendu, une grandeur physique ou géométrique sera un tenseur, si elle détermine univoquement et sans arbitraire une forme algébrique linéaire, dépendant du système de coordonnées de la manière indiquée plus haut, et telle aussi qu'inversement la connaissance de cette forme la détermine complètement.*

Nous avons considéré tout à l'heure une fonction de trois translations à coefficients doublement covariants et simplement contravariants; cela n'est possible que dans la géométrie métrique qui seule donne un sens aux mots composantes covariantes, etc. ; dans la géométrie affine, il eût fallu transformer l'expression de la forme pour ne la faire dépendre que des composantes contravariantes des trois translations.

Donnons quelques exemples pour préciser ces questions en nous plaçant exclusivement au point de vue de l'affinité pure.

1) Représentons une translation **a** par ses composantes α^i dans un système de coordonnées et faisons-lui correspondre, relativement à ce système, la forme linéaire :

$$\alpha^1\xi_1 + \alpha^2\xi_2 + \cdots + \alpha^n\xi_n$$

des variables ξ^i; on voit que les α^i sont ainsi les composantes contravariantes d'un tenseur de premier ordre. Dorénavant, nous emploierons le mot « vecteur » non plus comme synonyme de translation, mais comme équivalent à « tenseur du 1[er] degré » de telle sorte que nous dirons : *la translation est un vecteur contravariant.* La même chose a lieu pour la *vitesse* d'un point puisque celle-ci est le quotient d'une translation infiniment petite par *dt.* L'emploi actuel du mot vecteur est bien en accord avec la signification habituelle qu'on lui accorde; on sait en effet qu'un vecteur n'est pas seulement une translation, mais aussi n'importe quelle grandeur, qui après le choix d'une unité, peut être représentée univoquement et sans arbitraire par une translation.

2) On a l'habitude de considérer la *force* comme susceptible de recevoir une représentation géométrique analogue. Mais à cette représentation ordinaire de la force, on peut en substituer une autre qui, nous semble-t-il, s'applique mieux à l'essence physique de cette notion, parce que cette nouvelle interprétation repose sur la notion de travail plus claire, qui s'est placée au premier plan de la physique nouvelle. Soit un système de coordonnées O $(\mathbf{e}_i)$, les nombres p^i seront les *composantes d'une force* s'ils sont respectivement égaux au travail que l'on obtient dans les déplacements virtuels $\mathbf{e}_i$ de son point d'application. La force est bien caractérisée par ces nombres; le travail qu'elle effectue pour le déplacement

$$\mathbf{x} = \xi^1\mathbf{e}_1 + \xi^2\mathbf{e}_2 + \ldots\ldots + \xi^n\mathbf{e}_n$$

de son point d'application est alors égal à $\sum_i p_i\xi^i$.

Il s'ensuit que dans deux systèmes de coordonnées

$$\sum_i p_i\xi^i = \sum_i \bar{p}_i\bar{\xi}^i.$$

Les variables ξ^i étant contragrédientes aux vecteurs fondamentaux, *la force est un vecteur covariant.* On saisit immédiatement la parenté de cette interprétation avec l'ancienne en passant de notre point de vue de la géométrie affine à celui de la géométrie métrique.

Remarques intermédiaires. — Puisque la transformation des composantes a_i d'un vecteur covariant est contragrédiente à la transformation des composants b^i d'un vecteur contravariant, le nombre $\sum_i a_ib^i$ déterminé par ces deux vecteurs est indépendant du système de coordonnées choisi. Nous avons ici le premier exemple d'une opération tensorielle invariante. Dans le système des tenseurs, les nombres ou scalaires ont le rang zéro. On sait ce qu'est une forme bilinéaire symétrique; on dira qu'une forme bilinéaire F $(\xi\eta)$ est *symétrique gauche*, si en échangeant les deux variables dont elle dépend, elle change de signe

$$F(\eta, \xi) = -F(\xi, \eta):$$

donc les coefficients a_{ik} sont liés par les relations :

$$a_{ik} = \quad a_{ki}$$

Ces propriétés se conservent si l'on soumet les deux variables à la même transformation linéaire. C'est donc, pour un tenseur covariant du deuxième ordre, une propriété indépendante du choix d'un système de coordonnées, que d'être symétrique gauche, ou symétrique. C'en est encore une du même genre, que d'être représenté par une forme bilinéaire non dégénérée.

Puisque, par deux transformations contragrédientes des deux séries de variables, la forme bilinéaire unitaire ne change pas de forme, c'est qu'il existe un tenseur mixte (c'est-à-dire covariant pour un indice, contravariant pour l'autre) du 2^e ordre, qui possède dans chaque système de coordonnées les composantes $\delta^k = \begin{matrix} 1 \ (i = k) \\ 0 \ (i \neq k) \end{matrix}$

Nous l'appellerons le *tenseur unité*, ou le *tenseur unitaire*.

3) La *métrique* d'un espace euclidien fait correspondre aux deux translations :

$$\mathbf{x} = \sum_i \xi^i \mathbf{e}_i. \qquad \mathbf{y} = \sum_i \eta^i \mathbf{e}_i$$

un nombre, indépendant des coordonnées choisies, qui est leur *produit scalaire.*

$$(\mathbf{xy}) = \sum_{ik} g_{ik}\xi^i\eta^k, \qquad g_{ik} = (\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_k)$$

La forme bilinéaire du second membre fournit un tenseur du deuxième ordre : le *tenseur métrique fondamental.* La métrique est déterminée parfaitement dès qu'on en connaît les composantes; son tenseur est symétrique et non dégénéré.

4) Une *transformation vectorielle linéaire* fait correspondre à toute translation $\mathbf{x}$ une translation $\mathbf{x}'$ telle qu'à $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ doit correspondre $\mathbf{x}'+\mathbf{y}'$ et au produit $\lambda\mathbf{x}$ le produit $\lambda\mathbf{x}'$. Pour caractériser d'un mot une telle transformation, nous l'appellerons une *matrice.* Si les vecteurs fondamentaux sont transformés par les relations :

$$\mathbf{e}'_i = \sum_k a_i^k \mathbf{e}_k$$

une translation quelconque

$$(24) \quad \mathbf{x} = \sum_i \xi^i\mathbf{e}_i \text{ se transforme en } \mathbf{x}' = \sum_i \xi^i\mathbf{e}'_i = \sum_{ik} a_i^k\xi^i\mathbf{e}_k.$$

Dans le système ($\mathbf{e}_i$), la matrice est donc caractérisée par la forme bilinéaire :

$$\sum_{ik} a_i^k \xi^i \eta_k$$

(24) montre que, pour deux systèmes de coordonnées, on a la relation :

$$\sum_{ik} \bar{a}_i^k \bar{\xi}^i \bar{\mathbf{e}}_k = \sum_{ik} a_i^k \xi^i \mathbf{e}_k \ (= \mathbf{x}')$$

si
$$\sum_i \bar{\xi}^i \bar{\mathbf{e}}_i = \sum_i \xi^i \mathbf{e}_i \ (= \mathbf{x});$$

c'est donc que l'on aura :

$$\sum_{ik} \bar{a}_i^k \bar{\xi}^i \bar{\eta}_k = \sum_{ik} a_i^k \xi^i \eta_k,$$

si les η_i sont cogrédients et les ξ^i contragrédients aux $\mathbf{e}_i$.

De cette manière, la matrice est représentée par *un tenseur mixte du deuxième ordre.* En particulier, la matrice qui fait correspondre $\mathbf{x}$ à lui-même, est le tenseur unité.

Les exemples empruntés à la notion de force et à la métrique ont montré que la représentation d'une grandeur physique ou géométrique par un tenseur n'est possible que si l'on s'est donné une *unité de mesure;* lorsqu'on change celle-ci, les tenseurs représentatifs sont multipliés par un nombre qui est le rapport des unités et qui, par suite ne dépend pas des coordonnées.

La définition de la notion de tenseur est donc la suivante : *Une forme linéaire de plusieurs séries de variables dépendant d'un système de coordonnées, est un tenseur, si elle a une valeur indépendante de ce système, quand on y remplace chaque série de variables contragrédientes par les composantes d'un vecteur contravariant arbitraire, et chaque série de variables cogrédientes par un vecteur covariant quelconque.*

Revenons à la géométrie métrique; alors entre la covariance et la contravariance qui, dans la géométrie affine, sont deux notions relatives au tenseur lui-même, la différence de signification disparaît presque, pour ne laisser place qu'à une différence de représentation. Au lieu des *tenseurs* covariants, contravariants ou mixtes, nous parlerons plus volontiers des composantes covariantes, contravariantes ou mixtes d'un tenseur. Ce passage se formule aisément. Considérons dans un tenseur, les variables contragrédientes comme les composantes contravariantes d'une translation quelconque, et les variables cogrédientes comme les composantes covariantes d'une translation ; le tenseur se change alors en une forme linéaire de plusieurs translations arbitraires, cette forme étant attachée à un système de coordonnées; en représentant à volonté les arguments par leurs composantes, ou covariantes, ou contravariantes, nous passons alors à une autre représentation du même tenseur. Algébriquement, cette transformation s'effectue par les formules (22) qui font passer des variables contravariantes ξ^i aux variables covariantes ξ_i correspondantes; la nature invariante de ce procédé repose sur le fait que cette substitution transforme des variables contragrédientes en variables cogrédientes. La transformation inverse est donnée par les formules (22′).

Le passage du contravariant au covariant, ou *l'abaissement de l'indice*, se fait donc toujours par le schéma :

$$a^i \text{ est remplacé par } a_i = \sum_j g_{ij} a^j,$$

que a^i soit affecté ou non d'autres indices. L'élévation de l'indice se fait par les formules inverses. Appliquons cela au tenseur métrique fondamental, on trouve :

$$\sum_{ik} g_{ik}\xi^i\eta^k = \sum_i \xi^i\eta_i = \sum_k \xi_k\eta^k = \sum_{ik} g^{ik}\xi_i\eta_k,$$

ses composantes mixtes sont donc les nombres δ^i_k, ses composantes contravariantes g^{ik} sont symétriques à cause de la symétrie du tenseur même. g^{ik} n'est pas autre chose que le quotient du mineur relatif à g_{ik} dans le déterminant $| g_{ik} |$, par ce déterminant lui-même.

Quant aux notations, nous faisons une fois pour toutes les conventions suivantes : les composantes d'un même tenseur sont désignées par une même lettre, qu'elles soient covariantes, contravariantes ou mixtes ; la position des indices nous renseigne précisément sur leur nature. L'exemple suivant emprunté à un tenseur du deuxième degré nous montre les différentes écritures d'un même tenseur :

$$\sum_{ik} a_{ik}\xi^i\eta^k = \sum_{ik} a^i_k\xi_i\eta^k = \sum_{ik} a^k_i\xi^i\eta_k = \sum_{ik} a^{ik}\xi_i\eta_k$$

où les grandeurs avec indices supérieurs ou inférieurs sont accouplées suivant les formules (22).

Dans l'espace métrique, la différence entre un vecteur covariant et un vecteur contravariant tombe d'après ce qui a été dit; nous pouvons donc représenter une force aussi bien par une translation que par un vecteur covariant, car la forme linéaire

$$\sum_i p_i\xi^i$$

peut aussi bien être représentée par

$$\sum_i p^i\xi_i$$

comme il appert des formules suivantes :

$$\sum_i p^i \xi_i = \sum_{ik} g_{ik} p^i \xi^k = \sum_{ik} g_{ik} p^k \xi^i = \sum_i p_i \xi^i ;$$

la translation représentative **p** est donc déterminée par la condition que le travail effectué par la force pour un déplacement arbitraire **x** soit égal au produit scalaire de **p** par **x**. Dans un système de coordonnées cartésien où le tenseur métrique a les composantes

$$g_{ik} = \begin{cases} 1 \ (i = k) \\ 0 \ (i \neq k) \end{cases}$$

les relations (22) deviennent $\xi^i = \xi_i$. Si donc, nous nous bornons à l'emploi de tels systèmes de coordonnées, la différence entre la covariance et la contravariance tombe, aussi bien pour les tenseurs que pour les composantes des tenseurs. Il faut mentionner toutefois que les notions analysées jusqu'ici ne supposent, relativement aux g_{ik}, que la symétrie et la non-dégénérescence de la forme métrique, alors que l'introduction d'un système cartésien suppose que la forme métrique est définie positive. Cela n'est pas indifférent. Dans la théorie de la relativité, aux trois coordonnées d'espace s'ajoute la coordonnée de temps qui est équivalente aux trois premières, et la détermination métrique ne repose pas sur une *forme* définie, mais bien sur une forme indéfinie (Chap. III). Si, dans cette multiplicité à quatre dimensions, nous nous bornons à des coordonnées réelles, nous ne pouvons y concevoir aucun système cartésien, mais les notions développées jusqu'ici conservent toute leur extension pourvu qu'on les spécialise pour $n=4$. D'ailleurs une vue rétrospective sur nos calculs montre bien la simplicité algébrique de nos notions, et comme nous le disions à la fin du paragraphe 4, nous voyons tout l'intérêt qui s'attache à des considérations qui ne sont pas établies exclusivement au moyen des systèmes cartésiens. Enfin et avant tout, il est d'importance en vue d'extensions débordant la géométrie euclidienne, que l'on puisse déjà ici, développer complètement la géométrie affine par une méthode indépendante de considérations métriques.

Les grandeurs géométriques et physiques sont des scalaires, des vecteurs et des tenseurs ; c'est par elles que s'exprime la nature mathématique de l'espace dans lequel ces grandeurs existent. Ces calculs symétriques ont leur application en physique aussi bien qu'en géométrie, car les phénomènes naturels se déroulent dans un espace métrique ; le calcul tensoriel est l'instrument mathématique naturel pour l'expression des lois auxquelles ces phénomènes sont soumis.

§ 6. — **Algèbre tensorielle. — Exemples.**

Addition des tenseurs. — Si l'on multiplie une forme linéaire d'une, de deux,... de plusieurs séries de variables par un nombre, et si l'on additionne deux formes linéaires d'une, de deux... de plusieurs séries de variables, on obtient évidemment une forme analogue à celles dont on est parti. On peut donc additionner des tenseurs de même degré et de même espèce, et on peut les multiplier par un nombre (scalaire). Ces opérations s'effectuent d'une part, par la réduction des termes semblables dans les sommes, c'est-à-dire par l'addition des composantes, ou d'autre part en faisant le produit des composantes par le multiplicateur. Dans l'ensemble des tenseurs de chaque ordre, il y a un tenseur, le tenseur nul, dont toutes les composantes sont nulles; en l'additionnant à n'importe quel tenseur de même ordre, celui-ci reste inaltéré. — L'état d'un système physique est donné par les valeurs d'un certain nombre de scalaires et de tenseurs ; si, par un certain nombre d'opérations mathématiques, on obtient un tenseur invariant T nul, l'égalité $T=0$ exprime une loi naturelle.

Exemples : Le mouvement d'un point est connu analytiquement si l'on se donne le lieu du point mobile, c'est-à-dire ses coordonnées x_i en fonction du temps t· (*). Les dérivées $\frac{dx_i}{dt}$ sont les composantes contravariantes u^i du vecteur « *vitesse* ». Son produit par un scalaire m, la masse du point (qui exprime l'inertie de la matière), est la *quantité de mouvement.* En ajoutant toutes les quantités de mouvement relatives à tous les points matériels d'un système ou à tous les points d'un corps solide, on obtient la quantité de mouvement totale du système ou du solide. Dans le cas d'un corps continu les sommes sont des intégrales. Si les G^i sont les composantes contravariantes de la quantité de mouvement d'un point, et les p^i celles de la force, les équations du mouvement sont :

$$\frac{dG^i}{dt} = p^i ; \qquad G^i = mu^i. \tag{25}$$

Ces équations ne sont possibles que dans un espace métrique, et non dans un espace affine où la force est un vecteur covariant. Les mêmes lois sont valables pour la quantité de mouvement d'un corps solide.

Multiplication des tenseurs. — Par la multiplication de deux formes linéaires

$$\sum_i a_i \xi^i, \qquad \sum_i b_i \eta^i$$

des variables ξ et η, on obtient une forme bilinéaire

$$\sum_{ik} a_i b_k \xi^i \eta^k \ ;$$

*) A cause de la signification très précise des coordonnées x_i, et de leurs différentielles dx_i, nous laisserons les indices en bas, bien que ces grandeurs-là soient contravariantes.

par suite, les deux vecteurs a et b donnent naissance à un tenseur de deuxième ordre : leur produit :

$$a_i b_k = c_{ik}. \tag{26}$$

Les équations (26) représentent une relation invariante entre les vecteurs a et b et le tenseur c, c'est-à-dire que dans un nouveau système de coordonnées où les composantes de ces grandeurs sont $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_{ik}$ on a encore

$$\bar{a}_i \bar{b}_k = \bar{c}_{ik}.$$

De la même manière, on pourra effectuer la multiplication d'un tenseur de premier ordre par un tenseur de deuxième ordre (et plus généralement de deux tenseurs d'ordre quelconque); le produit de :

$$\sum_i a_i \xi^i \quad \text{par} \quad \sum_{ik} b_i^k \eta^i \zeta_k$$

est donné par la forme trilinéaire :

$$\sum_{ikl} a_i b_k^l \xi^i \eta^k \zeta_l$$

et l'on obtient le tenseur de troisième ordre c, par les relations :

$$a_i b_k^l = c_{ik}^l.$$

On voit par cette opération, que chaque composante de l'un des facteurs doit être multipliée par chaque composante de l'autre ; on obtient donc autant de composantes distinctes pour le produit qu'il est de fois possible d'effectuer des produits 2 à 2; *les indices doivent être toujours nettement séparés.* On peut remarquer que les composantes covariantes par rapport à l du tenseur c s'obtiennent aisément en passant de :

$$c_{ik}^l = a_i b_k^l \quad \text{à} \quad c_{ikl} = a_i b_{kl} ;$$

il est donc possible de déplacer dans chaque membre le même indice.

Exemples de tenseurs symétriques et symétriques gauches. — De deux vecteurs dont les composantes contravariantes sont a^i et b^i on tire par multiplication un tenseur $\gamma^{ik} = a^i b^k$; si l'on forme $c^{ik} = \gamma^{ik} - \gamma^{ki} = a^i b^k - a^k b^i$ on obtient un tenseur symétrique gauche que l'on appelle le *produit vectoriel* de a et b. Si l'on distingue dans l'espace à trois dimensions un sens de rotation, il est possible d'établir entre ces tenseurs et les vecteurs, une correspondance univoque et réciproque qui permette par suite de représenter le tenseur c par un vecteur. (Dans l'espace à quatre dimensions, cette représentation est impossible parce qu'un tenseur symétrique gauche de deuxième ordre y possède six composantes indépendantes, tandis qu'un vecteur n'en a que quatre; la même impossibilité est manifeste pour des espaces à un plus grand nombre de dimensions. Les considérations qui suivent ne valent que pour trois dimensions. Utilisons un système cartésien et introduisons avec a et b une translation ξ; le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \end{vmatrix} = c^{23}\xi^1 + c^{31}\xi^2 + c^{12}\xi^3$$

se trouve multiplié par le déterminant des coefficients de la transformation quand on change de système d'axes cartésiens. Mais ce dernier déterminant est ± 1; si l'on se borne aux transformations qui sont des congruences au sens propre, c'est-à-dire si l'on se borne aux transformations pour lesquelles le déterminant est $+1$, la forme en ξ reste alors inchangée; donc on peut faire correspondre, par les formules

$$c^{23} = c^*_1, \quad c^{31} = c^*_2, \quad c^{12} = c^*_3$$

un vecteur covariant au tenseur symétrique gauche c; ce vecteur correspond au tenseur d'une manière qui est invariante vis-à-vis de toutes les transformations orthogonales. Le vecteur c^* est perpendiculaire aux deux vecteurs a et b et sa longueur est mesurée par le même nombre que l'aire du parallélogramme construit sur a et b. Cette substitution du vecteur au tenseur dans le calcul vectoriel ordinaire est justifiée par l'économie de notation qu'elle procure. Mais à beaucoup d'égards, elle cache l'essence de la chose, et, en électrodynamique, par exemple, elle amène à considérer dans l'espace où se déroulent les phénomènes électrodynamiques, un sens de rotation particulier (que la règle fameuse du bonhomme d'Ampère détermine) et qui ne s'impose pas d'après la nature des choses, mais que l'on est amené à introduire parce que le champ magnétique est considéré comme un vecteur, alors qu'en réalité, il est un tenseur symétrique gauche. S'il nous avait été octroyé une dimension spatiale de plus, cette erreur ne se fût jamais produite. Dans la mécanique, le tenseur symétrique gauche : produit de deux vecteurs se présente :

1) Comme *moment de la quantité de mouvement* par rapport à un point O. Si ξ^1, ξ^2, ξ^3 sont les composantes de $\overline{OP}$, u^i les composantes de la vitesse du point matériel P de masse m, le moment de la quantité de mouvement est défini par :

$$L^{ik} = m(u^i\xi^k - u^k\xi^i).$$

Pour un corps solide qui tourne autour d'un point fixe, on fait la somme de ces quantités-là pour chaque point.

2) Il se présente encore comme *moment d'une force*. Si celle-ci s'applique au point P et si p^i sont ses composantes contravariantes, ce moment est :

$$q^{ik} = p^i\xi^k - p^k\xi^i.$$

Par addition on trouve le moment de toutes les forces appliquées à un système par rapport au point O.

Pour un point matériel, comme d'ailleurs pour un corps solide, il faut adjoindre à (25) les relations :

$$\frac{dL^{ik}}{dt} = q^{ik}: \tag{27}$$

pour obtenir les lois complètes du mouvement.

Si le point O est fixe, les seules équations à considérer pour trouver le mouvement d'un corps solide qui tourne autour de O sont les équations (27).

Un autre exemple de tenseur symétrique gauche est la *vitesse de rotation* d'un corps solide autour d'un point fixe O. Si par une rotation autour de O le point P va en P', on peut dire que $\overline{OP'}$ et aussi $\overline{PP'}$, réalisent une correspondance linéaire de $\overline{OP}$. Si ξ^i sont les composantes de $\overline{OP}$, $\delta\xi^i$ celles de $\overline{PP'}$, v^{ik} les composantes de cette correspondance (matrice), on a :

$$\delta\xi^i = \sum_k v^i_k \xi^k. \tag{28}$$

Si l'on ne considère que des rotations infiniment petites, elles sont caractérisées par des matrices infinitésimales telles que l'on ait identiquement en ξ

$$\delta\left(\sum_i \xi_i \xi^i\right) = \delta\left(\sum_{ik} g_{ik}\xi^i\xi^k\right) = 0$$

ce qui donne :

$$\sum_i \xi_i \delta\xi^i = 0.$$

en introduisant $\delta\xi^i$ donné par (28), il vient :

$$\sum_{ik} v^i_k \xi_i \xi^k = \sum_{ik} v_{ik}\xi^i\xi^k = 0;$$

et par suite, puisque cette relation est identique en ξ :

$$v_{ki} + v_{ik} = 0;$$

Le tenseur v_{ik} est donc symétrique gauche.

Un corps solide en mouvement éprouve une rotation infiniment petite pendant le temps dt. Nous n'utiliserons que le quotient du tenseur v par dt (pris à la limite), ce qui nous donnera un nouveau tenseur symétrique gauche : la *vitesse angulaire* que nous désignerons encore par v puisque la confusion n'est pas à craindre. Les formules (28) se transforment dans les formules fondamentales de la cinématique du corps solide :

$$u_i = \sum_k v_{ik}\xi^k. \tag{29}$$

où les u_i sont les composantes covariantes de la vitesse du point P. L'existence d'un *axe instantané de rotation* découle du fait que les équations linéaires :

$$\sum_k v_{ik}\xi^k = 0$$

dans le cas de $n = 3$, possèdent toujours des solutions non-nulles si $v_{ik} = - v_{ki}$. On a l'habitude dans ce cas de considérer la vitesse de rotation comme un vecteur dirigé suivant l'axe de rotation.

Le *moment d'inertie* d'un corps offre enfin un exemple de tenseur symétrique de deuxième espèce. Le point *matériel* P de masse m détermine avec O le vecteur OP, dont nous appellerons ξ^i les composantes contravariantes; le tenseur symétrique de deuxième espèce dont les composantes contravariantes sont $m\xi^i\xi^k$ (multiplication) est dite *l'inertie de rotation du point matériel relativement à* O. L'inertie de rotation T^{ik} d'un système de points est la somme des inerties de chaque point. La définition s'écarte de celle qu'on donne habituellement pour le moment d'inertie; mais c'est bien celle qui convient si l'on considère la vitesse de rotation, non pas comme un vecteur, mais comme un tenseur. Pour les rotations autour de O, le tenseur T^{ik} joue le même rôle que le scalaire m pour les translations.

*Contraction**. — Si les c_i^k sont les composantes mixtes d'un tenseur de deuxième espèce, $\sum\limits_i c_i^i$ est un invariant. Si donc les $\bar{c}_i^k$ sont les composantes mixtes du même tenseur dans un autre système de coordonnées, on a :

$$\sum_i c_i^i = \sum_i \bar{c}_i^i.$$

En effet, les variables ξ^i, η_i de la forme bilinéaire

$$\sum_{ik} c_i^k \xi^i \eta_k$$

sont soumises aux transformations contragrédientes

$$\xi^i = \sum_k \alpha_k^i \bar{\xi}^k, \qquad \eta_i = \sum_k \bar{\alpha}_i^k \bar{\eta}_k$$

qui transforment la forme bilinéaire en :

$$\sum_{ik} c_i^k \bar{\xi}^i \bar{\eta}_k$$

ce qui montre que :

$$\bar{c}_r^r = \sum_{ik} c_i^k \alpha_r^i \bar{\alpha}_k^r,$$

$$\sum_r \bar{c}_r^r = \sum_{ik} \left(c_i^k \sum_r \alpha_r^i \bar{\alpha}_k^r \right),$$

et à cause de (20′)

$$= \sum_i c_i^i.$$

* Nous traduisons le mot *Verjüngung* des Allemands par *contraction* suivant l'exemple de M. Langevin, N. d. T.

L'invariant formé ainsi avec les composantes d'une matrice $\sum_i c_i^i$ est dit la *trace* de cette matrice.

Nous pouvons déduire de cela une opération de calcul général pour les tenseurs : la *contraction;* comme la multiplication, elle permet la formation de nouveaux tenseurs à partir de tenseurs connus. Considérons parmi les composantes mixtes d'un tenseur celles qui ont un indice supérieur bien déterminé, égal à un indice inférieur bien déterminé lui aussi, et faisons la somme de ces composantes par rapport à cet indice commun, nous obtenons un nouveau tenseur dont l'ordre est diminué de 2 unités; par exemple le tenseur a_{hik}^{lm} du 5e ordre donne le tenseur :

$$\sum_r a_{hir}^{lr} = c_{hi}^l \tag{30}$$

du 3e ordre. Les relations (30) sont invariantes, c'est-à-dire que pour un nouveau système de coordonnées, on a

$$\sum_r \bar{a}_{hir}^{lr} = \bar{c}_{hi}^l \,. \tag{31}$$

Pour le faire voir, considérons 2 vecteurs contravariants ξ^i, η^i et un vecteur covariant ζ_i; nous formons avec eux les composantes :

$$\sum_{hil} a_{hik}^{lm} \xi^h \eta^i \zeta_l = f_k^m$$

d'un tenseur mixte du 2e ordre, or

$$\sum_r f_r^r = \sum_r \bar{f}_r^r$$

ce qui montre, en ayant recours à (30) et (31) que :

$$\sum_{hil} c_{hi}^l \xi^h \eta^i \zeta_l = \sum_{hil} \bar{c}_{hi}^l \bar{\xi}^k \bar{\eta}^i \bar{\zeta}_l,$$

c'est-à-dire que les $\bar{c}_{ki}^l$ sont les nouvelles composantes du tenseur c_{ki}^l.

Nous avons déjà rencontré de nombreux exemples de contraction. Partout où il fallait sommer par rapport à un indice, le terme général de la somme était affecté de l'indice de sommation une fois supérieurement et une fois inférieurement; une telle sommation n'était pas autre chose qu'une contraction. Par exemple, par les formules (29) on procède à la contraction du tenseur du 3e ordre $v_{ik}\xi^l$ produit de v_{ik} par ξ^i, en considérant les composantes $v_{ik}\xi^k$ et en sommant par rapport à k, on obtient le tenseur contracté du 1er ordre u_i. Si une matrice A transforme $\mathbf{x}$ en $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{x})$, une deuxième matrice B, $\mathbf{x}'$ en $\mathbf{x}'' = \mathrm{B}(\mathbf{x}')$, il existe une matrice composée BA qui permet de passer directement de $\mathbf{x}$ à $\mathbf{x}''$, $\mathbf{x}'' = BA(\mathbf{x})$. Si A a les composantes a_i^k, B les composantes b_i^k, celles de BA sont :

$$c_i^k = \sum_r b_i^r a_r^k.$$

encore ici il s'agit de multiplication suivie de contraction. La contraction peut s'effectuer simultanément pour plusieurs couples d'indices. Les tenseurs a_i, a_{ik}, a_{ikl} de 1^re^, 2^e^, 3^e^... espèce fournissent les invariants :

$$\sum_i a_i a^i, \qquad \sum_{ik} a_{ik} a^{ik}, \qquad \sum_{ikl} a_{ikl} a^{ikl}, \qquad \ldots .$$

Si la forme quadratique qui correspond au tenseur métrique fondamental est définie positive, ces invariants sont tous positifs; car dans un système cartésien, ils sont simplement égaux à la somme des carrés des composantes. Nous dirons, comme dans le cas d'un vecteur, que la racine carrée positive de ces invariants est la *valeur absolue* ou la *grandeur* du tenseur de 1^re^, 2^e^, 3^e^.... espèce qui leur donne naissance.

Dorénavant, nous faisons la convention suivante : Si dans un terme d'une formule, affecté d'indices, et représentant les composantes d'un tenseur, il se présente un indice double, supérieur et inférieur, il sera toujours entendu que l'on doit contracter par rapport à cet indice *sans qu'il soit nécessaire d'indiquer toujours l'opération par un signe*

$$\sum$$

Les opérations d'addition, multiplication et contraction ne supposent que les principes de la géométrie affine ; elles ne se basent sur aucun « tenseur métrique fondamental », seul le procédé qui permet le passage des composantes covariantes aux composantes contravariantes et inversement suppose des considérations métriques.

Les équations d'Euler. — Pour nous exercer au calcul tensoriel, nous allons chercher les équations du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, en supposant qu'il n'est soumis à aucune force; on sait qu'elles sont dues, sous la forme cartésienne, à Euler. Les équations (27) peuvent s'écrire :

$$\frac{dL_{ik}}{dt} = 0$$

multiplions-les par les composantes contravariantes d'un tenseur symétrique gauche quelconque, indépendant du temps et contractons par rapport à i et k. Si H_{ik} est égal à la somme

$$\sum_m m u_i \xi_k$$

étendue à tous les points matériels du corps on aura :

$$\frac{1}{2} L_{ik} w^{ik} = H_{ik} w^{ik} = H$$

où H est un invariant et nos équations sont synthétisées en une seule :

$$\frac{dH}{dt} = 0. \tag{32}$$

En ayant recours aux expressions (29) de u_i et à l'expression du tenseur d'inertie T, on trouve :

$$H_{ik} = v_{ir} T^r_k. \tag{33}$$

Jusqu'ici nous avons utilisé un système de coordonnées fixe dans l'*espace*. Les composantes d'inertie T^r_k varient avec la répartition des masses au cours du temps. Utilisons plutôt, pour obvier à cet inconvénient, un système d'axes fixes dans le *corps* ; désignons par les mêmes lettres que tout à l'heure les composantes des tenseurs par rapport à ce nouveau système et par des lettres surlignées les composantes dans l'ancien système. A cause de l'invariance de H, l'équation (32) est encore valable. Les T^k_i sont maintenant des constantes ; les w^{ik} sont variables avec le temps. Notre équation donne :

$$\frac{dH^{ik}}{dt} \cdot w^{ik} + H_{ik} \cdot \frac{dw^{ik}}{dt} = 0. \tag{34}$$

Pour déterminer $\frac{dw^{ik}}{dt}$ nous choisissons deux vecteurs fixes dans le corps, dont les composantes covariantes sont (dans le système lié au corps) ξ_i et η_i ; elles sont variables avec le temps. L'on a d'ailleurs :

$$w^{ik}\xi_i\eta_k = \overline{w}^{ik}\overline{\xi}_i\overline{\eta}_k,$$

et par suite :

$$\frac{dw^{ik}}{dt} \cdot \xi_i\eta_k = \overline{w}^{ik}\left(\frac{d\overline{\xi}_i}{dt} \cdot \overline{\eta}_k + \overline{\xi}_i \cdot \frac{d\overline{\eta}_k}{dt}\right) \tag{35}$$

mais, d'après (29) on a :

$$\frac{d\overline{\xi}_i}{dt} = \overline{v}_{ir}\overline{\xi}^r = \overline{v}^r_i\overline{\xi}_r.$$

et par suite, le 2^e membre de (35) est :

$$\overline{w}^{ik}(\overline{v}^r_i\overline{\xi}_r\overline{\eta}_k + \overline{v}^r_k\overline{\xi}_i\overline{\eta}_r),$$

mais puisque c'est un invariant, on peut supprimer les barres sur chaque lettre, et par suite tout rapporter au système fixe dans le corps mobile :

$$\xi_i\eta_k\frac{dw^{ik}}{dt} = w^{ik}(\xi_r\eta_k v^r_i + \xi_i\eta_r v^r_k).$$

Si les H_{ik} sont des nombres quelconques, on aura, par suite de l'identité précédente en ξ et η :

$$H_{ik}\frac{dw^{ik}}{dt} = w^{ik}(v^r_i H_{rk} + v^r_k H_{ir}).$$

Si l'on prend, en particulier, pour H_{ik} les grandeurs désignées précédemment par ces lettres, le 2e terme de (34) est déterminé et notre équation s'écrit :

$$\left\{ \frac{dH_{ik}}{dt} + (v_i^r H_{rk} + v_k^r H_{ir}) \right\} w^{ik} = 0$$

C'est une identité pour tous les tenseurs symétriques gauches w^{ik} ; par suite, on a :

$$\frac{d(H_{ik} - H_{ki})}{dt} + \left\{ \begin{array}{c} v_i^r H_{rk} + v_k^r H_{ir} \\ - v_k^r H_{ri} - v_i^r H_{kr} \end{array} \right\} = 0.$$

Introduisons les expressions (33) de H_{ik} ; à cause de la symétrie des T_{ik}

$$v_k^r H_{ir} = v_k^r v_i^s T_{rs}$$

est aussi symétrique en i et k ; les deux derniers termes de l'accolade se détruisent ; introduisons encore le tenseur :

$$v_i^r v_{kr} = g_{rs} v_i^r v_k^s = (vv)_{ik},$$

nos équations deviennent :

$$\frac{d}{dt} (v_{ir} T_k^r - v_{kr} T_i^r) = (vv)_{ir} T_k^r - (vv)_{kr} T_i^r.$$

On sait qu'il est possible de trouver un système de coordonnées cartésien, formé par les axes principaux d'inertie pour lequel

$$g_{ik} = \left\{ \begin{array}{l} 1 (i = k) \\ 0 (i \neq k) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad T_{ik} = 0 \quad (\text{pour } i \neq k)$$

Posons T_1, au lieu de T_1^1 : de même pour les autres indices; dans le nouveau système de coordonnées, les équations se simplifient :

$$(T_i + T_k) \frac{dv_{ik}}{dt} = (T_k - T_i)(vv)_{ik}.$$

Ce sont les équations différentielles pour les composantes v_{ik} de la vitesse angulaire inconnue; on sait que ces équations s'intègrent par le moyen de fonctions elliptiques de t. Les moments d'inertie principaux T_i introduits ici sont en relation simple avec ceux que la théorie habituelle appelle T_i^* ; on a :

$$T_1^* = T_2 + T_3, \qquad T_2^* = T_3 + T_1, \qquad T_3^* = T_1 + T_2.$$

Le problème de la rotation d'un corps solide a été traité ainsi d'une manière générale et notre solution est indépendante du nombre des dimensions de l'espace ; au point de vue pratique $n > 3$ n'a pas de signification, mais il est intéressant de s'être affranchi de la valeur particulière que peut avoir le nombre des dimensions de l'espace, et l'expression des lois de la nature sous une telle forme nous garantit que leur signification mathématique complète est atteinte.

L'initiation au calcul tensoriel — abstraction faite de l'appréhension que causent les indices, et qui doit être vaincue — est certainement entourée de difficultés. Mais c'est bien la méthode de calcul formel la plus simple ; elle est beaucoup plus simple que la méthode du calcul vectoriel élémentaire.

2 opérations : multiplication et contraction : juxtaposition des composantes de 2 tenseurs avec des indices différents — identification de 2 indices, supérieur et inférieur, et (implicitement) sommation par rapport à l'indice commun : vraiment la simplicité en est grande ! On a essayé plusieurs fois d'établir une méthode de calcul invariante en procédant avec les tenseurs eux-mêmes, et non pas avec leurs composantes, de même qu'en calcul vectoriel on procède avec le vecteur et non pas avec ses composantes. Mais les résultats obtenus se montrent absolument inutiles et inadéquats à l'extension du calcul tensoriel, on est obligé d'introduire une foule de noms, de notations, de règles de calcul, ce qui fait que le gain que l'on croyait trouver en considérant le tenseur *in globo* est bien plutôt une perte. On doit protester énergiquement contre l'abus de ce formalisme avec lequel on commence aujourd'hui à surcharger même les techniciens.

§ 7. — **Propriétés de symétrie des tenseurs**

Par les exemples précédents, on se rend compte que les tenseurs de 2ᵉ espèce symétriques et symétriques gauches représentent des espèces de grandeurs tout à fait différentes. Le caractère d'une grandeur n'est donc pas encore complètement défini, quand on a dit qu'elle est représentable par un tenseur de tel ou tel degré ; il faut encore ajouter à ces données-là des attributs de *symétrie.*

Une forme linéaire de plusieurs séries de variables est dite *symétrique* si elle n'est pas altérée quand on y permute deux des suites quelconques de variables ; elle est *symétrique gauche* si cette permutation change son signe. Une forme symétrique ne change donc pas si l'on permute entre elles les séries de variables d'une manière quelconque ; une forme symétrique gauche reste inaltérée pour les permutations de classes paires des séries de variables ; pour une permutation de classe impaire, elle change de signe. Les coefficients a_{ikl} d'une forme trilinéaire symétrique, par exemple, satisfont aux conditions :

$$a_{ikl} = a_{kli} = a_{lik} = a_{kil} = a_{lki} = a_{ilk},$$

Si la forme est symétrique gauche les coefficients qui ont deux mêmes indices sont nuls, et pour ceux dont les 3 indices sont différents, on a :

$$a_{ikl} = a_{kli} = a_{lik} = -a_{kil} = -a_{lki} = -a_{ilk}.$$

Il ne peut donc exister de formes symétriques gauches non nulles identiquement, construites avec des séries de n variables, pour un nombre de séries supérieur à n. De même qu'une forme bilinéaire symétrique correspond univoquement et réciproquement à la forme quadratique que nous avons appris à lui adjoindre, de même à une forme trilinéaire symétrique on fait correspondre la forme cubique d'une seule série de variables dont les coefficients sont a_{ikl} et celle-ci détermine aussi univoquement celle-là. Si l'on effectue dans une forme trilinéaire symétrique gauche

$$F = \sum_{ikl} a_{ikl} \xi^i \eta^k \zeta^l$$

les 3 ! permutations des variables ξ, η, ζ, les formes obtenues seront du signe de F ou du signe contraire, suivant que la permutation qui les a fait naître est paire ou impaire ; si l'on fait abstraction du signe on obtient 6 fois la forme primitive. Additionnons-les toutes ensemble, en négligeant les variations de signe, on trouve alors pour F l'expression :

$$F = \frac{1}{3\,!} \sum a_{ikl} \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^k & \xi^l \\ \eta^i & \eta^k & \eta^l \\ \zeta^i & \zeta^k & \zeta^l \end{vmatrix}. \tag{36}$$

La propriété pour une forme linéaire d'être symétrique, ou d'être symétrique gauche, n'est pas détruite si l'on effectue sur chaque série de variables la même transformation linéaire. Par suite, il est naturel de parler de *tenseurs covariants ou contravariants symétriques ou symétriques gauches.* Mais pour des tenseurs mixtes, ces expressions n'ont aucun sens. Les tenseurs symétriques ne donnent lieu à aucune autre remarque ; nous allons nous étendre davantage sur les tenseurs symétriques gauches parce qu'ils ont une signification importante.

Par les composantes ξ^i d'une translation, on se donne la direction d'une droite, son sens de parcours et la grandeur d'un segment. Si ξ^i, η^i sont deux translations linéairement indépendantes, issues d'un même point, elles déterminent un plan. Les grandeurs :

$$\xi^i \eta^k - \xi^k \eta^i = \xi^{ik}$$

déterminent par leurs rapports, la *direction du plan* (une direction de surface) de même que les ξ^i déterminent par leurs rapports la direction d'une droite (une direction de ligne). Les ξ^{ik} sont nuls si les deux translations ξ^i et η^i sont linéairement dépendantes, c'est-à-dire si elles ne déterminent aucune multiplicité à 2 dimensions. Les deux translations linéairement indépendantes ξ et η étant données, on peut en tirer pour le plan qu'elles déterminent un sens de rotation bien défini : ce sera le sens de la rotation qu'il faut faire pour amener la direction de ξ sur la direction de η en effectuant un angle moindre que 180°; de plus, elles déterminent un nombre qui est la mesure de l'aire du parallélogramme construit sur ξ et η. Si l'on considère deux translations ξ et η issues de O, et deux autres ξ_* et η_* issues d'un autre point O_*, les 3 grandeurs qu'elles déterminent chacune : situation du plan, sens de rotation, et aire, sont respectivement égales l'une à l'autre si les ξ^{ik} de l'un des couples sont égaux à ceux de l'autre.

$$\xi^i \eta^k - \xi^k \eta^i = \xi^i_* \eta^k_* - \xi^k_* \eta^i_*.$$

De même que les ξ^i déterminent la direction d'une droite, un sens de parcours sur cette droite et la grandeur d'un segment, de même les ξ^{ik} déterminent la direction d'un plan, un sens de rotation dans ce plan et la grandeur d'une aire. On voit bien l'analogie complète. Nous dirons que la 1^re^ de ces expressions (ξ^i) est un élément d'espace à 1 dimension, et la 2^e^ (ξ^{ik}) un élément d'espace à 2 dimensions. Le carré de la grandeur du premier élément est l'invariant :

$$\xi_i\xi^i = g_{ik}\xi^i\xi^k = Q(\xi)$$

celui du 2^e^ élément est :

$$\frac{1}{2}\,\xi^{ik}\xi_{ik};$$

qu'on peut écrire aussi :

$$\xi_i\eta_k(\xi^i\eta^k - \xi^k\eta^i) = (\xi_i\xi^i)(\eta_k\eta^k) - (\xi_i\eta^i)(\xi^k\eta_k) = Q(\xi)\cdot Q(\eta) - Q^2(\xi\eta).$$

De la même manière, on peut faire correspondre à 3 translations indépendantes ξ, η, ζ, les déterminants :

$$\xi^{ikl} = \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^k & \xi^l \\ \eta^i & \eta^k & \eta^l \\ \zeta^i & \zeta^k & \zeta^l \end{vmatrix}$$

que l'on peut considérer comme les composantes d'un élément d'espace à 3 dimensions, dont la grandeur est la racine carrée de l'invariant :

$$\frac{1}{3!}\,\xi_{ikl}\xi^{ikl}$$

Dans l'espace à 3 dimensions, cet invariant est :

$$\xi_{123}\xi^{123} = g_{1i}g_{2k}g_{3l}\xi^{ikl}\xi^{123},$$

et puisque $\xi^{ikl} = \pm\xi^{123}$ suivant que ikl est une permutation paire ou impaire, notre invariant est :

$$g\cdot(\xi^{123})^2,$$

où g est le déterminant des g_{ik}. Le volume du parallélipipède devient ainsi :

$$\sqrt{g}\cdot\begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 \\ \zeta^1 & \zeta^2 & \zeta^3 \end{vmatrix}$$

pris en valeur absolue. C'est bien la formule que donne la géométrie analytique. On peut généraliser facilement ces considérations pour un espace à un nombre quelconque de dimensions.

Il résulte de la manière d'écrire une forme linéaire employée dans (36) que, à un élément d'espace à une dimension, on peut faire correspondre un tenseur covariant d'ordre 1, à un élément d'espace à deux dimensions un tenseur covariant d'ordre 2, etc. Nous sommes donc fondés à désigner les tenseurs covariants symétriques gauches sous le nom de *tenseurs linéaires*. Dans le domaine des tenseurs linéaires, mentionnons les deux opérations :

(37) $$a_i b_k - a_k b_i = c_{ik}.$$
(38) $$a_i b_{kl} + a_k b_{li} + a_l b_{ik} = c_{ikl}\,;$$
la première donne un tenseur linéaire de deuxième ordre, la deuxième en donne un de troisième ordre. Parfois, on est amené à considérer des *conditions de symétrie plus compliquées* que celles que nous avons vues jusqu'ici. Ainsi, parmi les formes quadrilinéaires F $(\xi\eta\xi'\eta')$ celles-ci jouent un rôle important qui satisfont aux conditions suivantes :

(39_1) $$F(\eta\xi\xi'\eta') = F(\xi\eta\eta'\xi') = -F(\xi\eta\xi'\eta')\,;$$
(39_2) $$F(\xi'\eta'\xi\eta) = F(\xi\eta\xi'\eta')\,;$$
(39_3) $$F(\xi\eta\xi'\eta') + F(\xi\xi'\eta'\eta) + F(\xi\eta'\eta\xi') = 0.$$

On peut montrer en effet que, à chaque forme quadratique d'un élément d'espace à deux dimensions
$$\xi^{ik} = \xi^i\eta^k - \xi^k\eta^i$$
on peut adjoindre une et une seule forme quadrilinéaire F satisfaisant aux conditions précédentes et qui engendre précisément la forme quadratique si l'on identifie les 2 couples ξ', η' et ξ, η. Nous devrons donc utiliser des tenseurs covariants de 4e espèce, répondant aux conditions (39) lorsque nous considérerons des fonctions qui dépendent quadratiquement d'un élément de surface.

L'aspect le plus général des conditions de symétrie pour un tenseur F du 5e ordre — nous prenons un exemple déterminé pour fixer les idées — dont la première, la deuxième et la quatrième série de variables sont contragrédientes, la troisième et la cinquième étant cogrédientes s'expriment ainsi :
$$\sum_S e_S F_S = 0\,;$$
où S représente toutes les permutations des 5 séries de variables qui échangent les séries contragrédientes entre elles et les séries cogrédientes entre elles. F_S est la forme qui s'obtient en effectuant sur F la permutation S. La sommation est étendue à tous les S, après qu'on ait multiplié chaque F_S par un coefficient approprié e_S qui correspond à S. Les caractères de symétrie d'une espèce déterminée de tenseurs s'expriment par une ou plusieurs conditions analogues.

§ 8. — **Analyse tensorielle. — Tensions**

Les grandeurs qui caractérisent l'état d'un système physique variable d'un point à un autre point de l'espace qu'il occupe, n'ont pas une valeur unique, mais elles changent aussi d'un point à un autre; mathématiquement, ce sont des « fonctions du lieu ». Suivant que les grandeurs sont des scalaires, des vecteurs ou des tenseurs, nous aurons à faire à des *champs* scalaires, vectoriels ou tensoriels. Un tel champ est donné, si pour chaque point de l'espace ou pour chaque point d'une région déterminée de l'espace, on connaît le scalaire, le vecteur ou le tenseur en question. Si nous utilisons un système particulier de coordonnées, alors la valeur de la grandeur scalaire, ou les valeurs des composantes du vecteur ou du tenseur dans ce système, sont des fonctions des coordonnées du point où l'on considère précisément l'une de ces quantités. L'analyse tensorielle apprend comment on peut obtenir à partir d'un champ de tenseur un nouveau champ de tenseur, lié au précédent d'une manière invariante, et cela par dérivation relativement aux coordonnées. Comme l'algèbre tensorielle, l'analyse tensorielle est très simple; elle ne connaît qu'une opération : la *différentiation*.

Soit $$\varphi = f\,(x_1 x_2, \ldots x_n) = f\,(x)$$

un champ scalaire donné; la variation de φ, lorsqu'on soumet le point $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ à une translation infiniment petite par laquelle x_i s'accroît de dx_i est donnée par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n.$$

Le sens de cette formule est le suivant : si Δx_i sont les composantes d'une translation fixe et Δf la variation qu'elle fait subir à f, la différence entre :

$$\Delta f \text{ et } \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\Delta x_i$$

tend vers zéro avec les composantes de la translation et aussi avec

$$|\,\Delta x_1\,| + |\,\Delta x_2\,| + \ldots + |\,\Delta x_n\,|$$

A cette différentielle, nous faisons correspondre la forme linéaire des variables ξ^i :

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\xi^i$$

Effectuons ces calculs dans un autre système de coordonnées, il s'ensuit par la définition même de la différentielle, que cette forme linéaire se transforme en une deuxième qui est analogue, si l'on soumet les ξ^i à une transformation contragrédiente à celle des vecteurs de base.

Par suite :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

sont les composantes covariantes d'un vecteur qui correspond au champ scalaire φ, cette correspondance étant indépendante du choix des coordonnées. Dans le calcul vectoriel ordinaire, ce vecteur est le *gradient* (**grad.** φ) du scalaire φ.

L'extension à un champ tensoriel quelconque se fait immédiatement.

Soient, par exemple, $f^h_{ik}\,(x)$ les composantes d'un champ tensoriel de 3e ordre :

$$f^h_{ik}\xi_h\eta^i\zeta^k$$

est alors un invariant, si nous y considérons les ξ_h comme les composantes covariantes d'un vecteur que nous supposerons constant, c'est-à-dire indépendant du lieu, et les η^i et les ζ^i comme les composantes contravariantes de deux vecteurs qui eux aussi seront supposés constants. La variation de cet invariant lorsqu'on passe du point (x_i) au point (x_i+dx_i) est par suite :

$$\frac{\partial f^h_{ik}}{\partial x_l}\xi_h\eta^i\zeta^k dx_l,$$

c'est-à-dire que les :

$$f^h_{ikl} = \frac{\partial f^h_{ik}}{\partial x_l}$$

sont les composantes d'un champ tensoriel du 4e ordre qui provient du champ considéré par un procédé de calcul, indépendant du système de coordonnées choisi. Ce procédé est celui de la *différentiation;* comme on le voit lorsqu'on l'applique à un tenseur, on en obtient un nouveau dont l'ordre est plus élevé d'une unité. Il est à remarquer encore, par suite de l'indépendance du tenseur métrique fondamental par rapport au lieu, que l'on obtient par exemple, les composantes contravariantes du tenseur formé relativement à l'indice k en déplaçant tout simplement l'indice k dans l'expression trouvée, soit $\frac{\partial f^{hk}_i}{\partial x_l}$; le passage du covariant au contravariant et la différentiation sont des opérations permutables. La différentiation peut donc être exécutée formellement de la manière suivante: on considérera les expressions :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \cdots, \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{40}$$

comme les composantes covariantes d'un vecteur par lequel on multiplie le tenseur à différencier; la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sera considérée comme le produit symbolique de f par $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Le vecteur symbolique (40) est souvent désigné par l'épithète pleine de mystère de « vecteur Nabla ».

Exemples. — Le vecteur covariant u_i donne naissance par dérivation au tenseur $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = u_{ik}$. Nous formons avec lui en particulier le tenseur linéaire de deuxième espèce dont les composantes covariantes sont :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}. \tag{41}$$

Pris avec le signe contraire, on l'appelle dans le calcul vectoriel ordinaire le *rotationnel* (rot. ou curl.). Au contraire les grandeurs

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x}\right)$$

sont les composantes covariantes d'un tenseur symétrique du 2ᵉ ordre. Si le vecteur u représente la vitesse d'une portion de matière continue et mobile, cette vitesse étant fonction du lieu, l'évanouissement de ce dernier tenseur en un point nous permet de considérer le voisinage immédiat de ce point comme analogue à un corps solide, tout au moins si l'on se place au seul point de vue cinématique; nous pouvons donc désigner ce tenseur sous le nom de « tenseur de déformation ». Enfin les composantes mixtes u^i_k donnent naissance par contraction au scalaire :

$$\frac{\partial u^i}{\partial x_i}$$

qui est connu en analyse vectorielle sous le nom de *divergence* (div.).

D'un tenseur de 2ᵉ espèce aux composantes mixtes S^k_i on fait naître par différentiation et contraction le vecteur

$$\frac{\partial S^k_i}{\partial x_k}.$$

Si v_{ik} sont les composantes d'un champ de tenseurs linéaires de 2ᵉ espèce, et si l'on se reporte à la formule (38) en mettant v à la place de b et en prenant pour a le vecteur symbolique (40), on obtient un tenseur de 3ᵉ ordre dont les composantes sont :

$$\frac{\partial v_{kl}}{\partial x_i}+\frac{\partial v_{li}}{\partial x_k}+\frac{\partial v_{ik}}{\partial x_l}. \tag{42}$$

Le tenseur (41) (curl) s'évanouit si u est le gradient d'un champ scalaire; le tenseur (42) est nul, si v_{ik} est le curl d'un vecteur u_i.

Tensions. — Un excellent exemple de champ tensoriel nous est fourni par les tensions qui existent dans un corps élastique; c'est d'ailleurs à ce propos que le mot tenseur a été forgé. Dans un corps élastique à la surface duquel s'exercent des tractions ou des pressions, à l'intérieur duquel des forces de volume (par exemple, la pesanteur) agissent sur les parties de la matière, il s'établit un état d'équilibre dans lequel les forces de cohésion, suscitées par la déformation, tiennent en échec les forces précédentes. Imaginons une portion J du corps, éloignons les autres parties de la matière, les forces de volume qui s'exercent dans J ne seront pas en équilibre; mais on peut le rétablir en faisant agir sur la surface Ω de J les pressions ou les tractions que la partie de la matière enlevée exerçait auparavant. En effet, sans nous préoccuper de la structure atomique de la matière, nous pouvons nous figurer que les forces de cohésion ne sont agissantes que dans le voisinage immédiat des points où elles naissent, de telle sorte que l'action de la matière enlevée ne se faisait sentir auparavant que sur la surface de J par des pressions et des tractions. Si $Td\omega$ est la force agissant sur l'élément de surface $d\omega$, T signifiant donc la pression par unité de surface, T ne doit dépendre que du lieu où se trouve $d\omega$ et de la direction de la normale n à cet élément, dirigée vers l'intérieur de J. Au lieu de T, nous écrivons pour exprimer cette dépendance T_n. Si $-n$ est la direction opposée à n, on voit que si un petit disque, infiniment mince est en équilibre, on a :

$$T_{-n} = -T_n. \tag{43}$$

Utilisons des coordonnées cartésiennes x_1, x_2, x_3. Désignons par T_1, T_2, T_3 les pressions par unité de surface, qui s'exercent contre des éléments de surface, dont les normales intérieures sont respectivement dirigées parallèlement à l'axe des x_1, à l'axe des x_2 et à l'axe des x_3. Nous choisissons 3 nombres positifs a_1, a_2, a_3 et un nombre positif aussi ε, qui devra tendre vers zéro (les a_i sont fixes). Nous portons à partir du point considéré et dans les directions des axes des coordonnées, les segments :

$$OP_1 = \varepsilon a_1, \qquad OP_2 = \varepsilon a_2, \qquad OP_3 = \varepsilon a_3$$

et nous considérons le tétraèdre $OP_1P_2P_3$; nous réservons le nom de faces pour OP_1P_2, OP_2P_3, OP_3P_1, tandis que nous appellerons $P_1P_2P_3$ la base. Si f est l'aire de la base et α_1, α_2, α_3 les cosinus directeurs de la normale intérieure n, à la base, les aires des faces sont :

$$-f\alpha_1 \ (=\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 a_2 a_3), \qquad -f\alpha_2, \qquad -f\alpha_3.$$

La force qui s'exerce sur les faces et sur la base vaut donc :

$$f\left\{ T_n - (\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \alpha_3 T_3 \right\}$$

f est de l'ordre de ε^2; les forces de volumes qui s'exercent sur le tétraèdre ne sont que de l'ordre de ε^3. Pour que l'équilibre soit réalisé, il faut que :

$$T_n = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \alpha_3 T_3;$$

à l'aide de la relation (43), on voit aisément que cette équation est valable quel que soit l'endroit où se trouve le tétraèdre. Soient T_{i1}, T_{i2}, T_{i3} les composantes de T_i dans le système d'axes choisi et ξ^i, η^i les composantes de deux translations de longueur 1, d'ailleurs quelconques, l'expression :

$$\sum_{ik} T_{ik}\xi^i\eta^k \tag{44}$$

est la composante dans la direction de η, de la pression sur un élément de surface dont ξ est la normale intérieure. La forme bilinéaire (44) a donc une signification indépendante du système de coordonnées; les T_{ik} sont les composantes d'un tenseur qui est la *tension*. Puisque nous opérons avec des systèmes cartésiens nous n'avons pas besoin ici de faire la distinction entre la covariance et la contravariance.

Formons le vecteur T'_i avec les composantes T_{1i}, T_{2i}, T_{3i}. La composante de T'_i suivant la direction de la normale intérieure n d'un élément de surface est égale alors à la composante de T_n suivant l'axe des x_1. La composante suivant x_1 de la pression totale sur la surface Ω qui limite J, est par suite égale à l'intégrale de surface de la composante normale de T'_1; mais cette intégrale est égale, d'après le théorème de Gauss, à l'intégrale de volume :

$$\int_J \operatorname{div} T'_1 \cdot dV ;$$

Les mêmes raisonnements sont valables pour les 2 autres composantes.

Nous avons donc à former le vecteur **p** dont les composantes sont :

$$p_i = -\sum_k \frac{\partial T_i^k}{\partial x_k}$$

(on voit bien que c'est une formation invariante); les pressions T sont donc équivalentes à des forces de volume dont la direction et la grandeur par unité de volume sont données par **p**, de telle sorte que pour chaque partie de matière J, l'on a :

$$\int_\Omega T_n do = \int_J \mathbf{p} dV. \tag{45}$$

Si **k** est la force donnée par unité de volume, la première condition d'équilibre pour la partie du corps que nous avons isolée est :

$$\int_J (\mathbf{p} + \mathbf{k}) dV = 0,$$

et puisqu'elle doit avoir lieu quel que soit J, elle entraîne :

$$\mathbf{p} + \mathbf{k} = 0. \tag{46}$$

Si nous choisissons une origine quelconque O, et si **x** représente le vecteur $\overline{OP}$ qui va de O au point P du corps, pour lequel on cherche les conditions d'équilibre, la 2[e] condition d'équilibre : l'équation des moments, est :

$$\int_\Omega [\mathbf{x}, T_n] dw + \int_J [\mathbf{x}, \mathbf{k}] dV = 0,$$

où la parenthèse carrée [ ] indique un produit vectoriel; or puisque (46) doit avoir lieu, on conclut que :

$$\int_\Omega [\mathbf{x}, T_n] dw = \int_J [\mathbf{x}, \mathbf{p}] dV$$

La composante de $[\mathbf{x}, T_n]$ suivant Ox_1 est égale à la composante de $x_2 T'_3 - x_3 T'_2$ suivant n ; le théorème de Gauss donne pour cette première composante la valeur :

$$-\int_J \operatorname{div}(x_2 T'_3 - x_3 T'_2) dV,$$

et l'on obtient la relation :

$$\operatorname{div}(x_2 T'_3 - x_3 T'_2) = -(x_2 p_3 - x_3 p_2).$$

Le premier membre est :

$$\begin{aligned}(x_2 \operatorname{div} T'_3 - x_3 \operatorname{div} T'_2) + (T'_3 \cdot \operatorname{grad} x_2 - T'_2 \cdot \operatorname{grad} x_3) \\ = -(x_2 p_3 - x_3 p_2) + (T_{23} - T_{32}).\end{aligned}$$

La dernière condition d'équilibre équivaut aux suivantes :

$$T_{23}=T_{32},\quad T_{31}=T_{13},\quad T_{12}=T_{21}$$

c'est-à-dire à la symétrie de la tension T.

Pour une translation ξ^i quelconque

$$\frac{\sum T_{ik}\xi^i\xi^k}{\sum g_{ik}\xi^i\xi^k}$$

est la composante suivant ξ de la pression par unité d'aire qui s'exerce contre un élément de surface perpendiculaire à ξ. (Ici, on peut utiliser de nouveau un système de coordonnées quelconque, et non plus seulement un système cartésien). *Les tensions sont équivalentes à une force de volume dont la densité* p *se calcule par les formules invariantes :*

(47) $$-p_i = \frac{\partial T_i^k}{\partial x_k}$$

Dans le cas d'une pression p égale dans toutes les directions on a :

$$T_i^k = p\cdot\delta_i^k, \qquad p_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

La notion de *tension* est ainsi définie et précisée au point de vue mathématique. Nous n'avons pas le dessein d'établir plus avant les lois fondamentales de l'élasticité qui exigent qu'on connaisse la dépendance entre les tensions et la déformation.

§ 9. — Le champ électromagnétique stationnaire

Là où il était question de choses mécaniques ou physiques, nous avons réussi à mettre les lois qui les régissent sous forme de relations tensorielles invariantes. Nous avons eu l'occasion d'expliquer la signification du calcul tensoriel, par des exemples concrets et de préparer les analyses ultérieures, qui s'appliqueront aux théories physiques, soit pour elles-mêmes, soit pour leur signification pour le problème du temps. A ce point de vue, la théorie du champ électromagnétique deviendra d'une importance très grande; c'est de plus la partie la plus parfaite de la physique. Pour l'instant, nous nous bornons au cas où le temps n'intervient pas, c'est-à-dire au cas où seuls des rapports indépendants du temps sont à considérer.

La loi de Coulomb de l'électrostatique peut s'exprimer de la manière suivante : Si des charges quelconques sont réparties dans l'espace avec la densité ρ, elles exercent sur une charge ponctuelle e la force

(48) $$\mathbf{k} = e.\mathbf{e}$$

où

(49) $$\mathbf{e} = -\int \frac{\rho\mathbf{r}}{4\pi r^3}\,dV$$

Ici, **r** est le vecteur $\overline{OP}$ qui joint l'origine O en laquelle on détermine **e**, au point argument ou point-source P, d'après lequel on intègre; r est la longueur de ce vecteur, dV l'élément de volume. La force se compose de deux facteurs, la charge e du corps d'épreuve qui ne dépend que de l'état de ce corps et le *champ* **e**, qui au contraire n'est déterminé que par la répartition des charges dans l'espace. Nous nous représentons alors les charges de la manière suivante : même dans le cas où nous n'observons pas la force **k** avec un corps d'épreuve, nous imaginons que les charges réparties dans l'espace créent un *champ électrique* représenté par le vecteur **e**; la force qui nous en donne connaissance est donnée par la formule (48).

On voit d'ailleurs que **e** dérive d'un potentiel $-\varphi$ *

$$\text{(50)} \qquad \mathbf{e} = \operatorname{grad} \varphi\,; \qquad -4\pi\varphi = \int \frac{\rho}{r} dV$$

Donc : 1) **e** a un tourbillon nul ; 2) le flux de **e** à travers toute surface fermée est égal aux charges qui sont à l'intérieur de cette surface, ce qui revient au même de dire que l'électricité est la source du champ électrique; en formules on a :

$$\text{(51)} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{e} = 0 \qquad \operatorname{div} \mathbf{e} = \rho$$

De ces simples lois différentielles, on peut tirer la loi de Coulomb, en supposant que le champ **e** soit nul à l'infini. En effet, la première équation (51), nous montre que $\mathbf{e} = \operatorname{grad} \varphi$, et pour déterminer φ, la deuxième nous donne l'équation de Poisson $\Delta\varphi = \rho$, dont la solution est donnée par (50).

La loi de Coulomb est une *loi d'action à distance ;* elle exprime que le champ en un point dépend des charges situées en tous les autres points de l'espace, les plus éloignés comme les plus proches. Au contraire les formules (51), beaucoup plus simples d'ailleurs, expriment des lois d'action de contact, puisque pour la détermination de la dérivée d'une fonction en un point, il suffit de connaître l'allure de cette fonction dans un voisinage arbitrairement petit autour de ce point; les valeurs de ρ et **e** en un point et dans un un voisinage immédiat sont liées par les équations (51). Ces lois *d'action de contact* doivent être considérées comme la vraie expression des dépendances entre les actions qui s'exercent dans la nature; l'équation (49) ne doit être considérée que comme une conséquence mathématique des équations (51); grâce aux équations (51) dont la signification intuitive est si simple, nous croyons *comprendre* d'où vient la loi de Coulomb. Certainement, nous obéissons avant tout à une contrainte d'ordre épistémologique; Leibnitz déjà, a formulé comme un principe général, la condition de continuité et d'action de contact, et la loi newtonienne d'action à distance par la gravitation, qui correspond tout à fait à la loi de Coulomb, n'a pu le

*Pour la suite (§ 26) il est plus commode d'appeler le potentiel $-\varphi$: au lieu de φ comme il est d'usage).

satisfaire. Mais en plus de cela, la pénétration mathématique et le sens intuitif simple des lois (51) nous apprennent une fois de plus que, si en physique, nous pénétrons le sens d'un certain domaine phénoménal jusqu'à en énoncer les lois, celles-ci se formulent mathématiquement d'une façon très harmonieuse. Enfin, en ce qui concerne son côté physique, la théorie de Maxwell nous donne la preuve de l'extraordinaire fécondité qui est la conséquence de la substitution du point de vue des actions de contact à celui des actions à distance. Le champ exerce sur les charges qui l'engendrent une force dont la densité par unité de volume est donnée par la formule

$$\mathbf{p} = \varrho \mathbf{e} \tag{52}$$

C'est ainsi que nous aurons à interpréter d'une manière étroite l'équation (48). Introduisons un corps d'épreuve chargé dans le champ, sa charge appartient aussi aux charges créatrices du champ, et la formule (48) ne pourra nous donner l'état du champ $\mathbf{e}$, avant l'introduction du corps épreuve que si la charge e de ce dernier est très faible afin qu'elle n'altère qu'imperceptiblement le champ. Il y a là une difficulté qui embarrasse toute la physique expérimentale : par l'introduction des instruments de mesure, on altère les rapports que l'on veut précisément mesurer; c'est là pour une grande partie, la source des erreurs que l'expérimentateur doit chercher à éliminer par un redoublement d'habileté.

La loi fondamentale de la mécanique : *Masse* $\times$ *accélération* $=$ *force,* nous apprend quelle sorte de mouvement prend une masse soumise à l'influence des forces données (pour certaines vitesses initiales données). Ce qu'est la *force*, la mécanique ne nous l'apprend pas, nous le savons par la physique. *La loi fondamentale de la mécanique est un schéma qui n'enferme un contenu concret que si le concept de force qu'on y introduit est explicité par la physique.* Les essais malheureux faits pour développer la mécanique comme une discipline fermée ne se sont jamais appuyés que sur une interprétation de la loi fondamentale qui en fait une définition : la force *est définie* par le produit masse $\times$ accélération. Ici, dans l'électrostatique, nous voyons ce qu'est la force et comment elle se détermine au moyen de (52) par les *grandeurs d'état :* charge et champ. Si nous regardons les charges comme données, les équations (51) nous montrent comment le champ est déterminé. On sait que les charges sont liées à la matière. La théorie électronique moderne montre que cela doit être entendu dans un sens très étroit : la matière se compose de particules élémentaires : les *électrons,* qui possèdent une masse invariable et bien déterminée, et une charge invariable aussi. Là où nous observons l'apparition de nouvelles masses, il faut admettre simplement que des charges élémentaires positives et négatives, naguère très rapprochées les unes des autres, à tel point que leurs actions à distance se compensaient, se sont séparées ; il se « forme » par un tel processus autant d'électricité positive que d'électricité négative. D'après cela, les lois forment un cycle fermé; la répartition des particules d'électricité, munies une fois pour toutes de charges fixes et leurs vitesses (car nous devons aussi envisager le cas non-stationnaire) déterminent le champ; le champ exerce sur la matière chargée une force pondéromotrice dont (52) nous donne la valeur, cette force détermine, d'après la loi fondamentale de la mécanique, l'accélération et par suite la répartition et les vitesses des masses à chaque instant. *C'est toute cette dépendance théorique qui est susceptible d'une vérification expérimentale.* Si nous admettons que le mouvement de la matière est ce que nous pouvons observer directement (ce qui du reste peut être donné) — ce n'est pas une loi particulière arrachée à cet ensemble que l'on vérifie. La dépendance entre l'expérience immédiate et celle que la raison cherche à saisir conceptuellement dans une théorie, comme étant la chose objective, cachée derrière elle, n'est pas aussi simple que l'on puisse croire que chaque hypothèse particulière de la théorie possède un sens intuitif immédiat. Nous verrons plus tard, plus distinctement encore, que la géométrie, la mécanique et la physique forment de cette manière une unité théorique indissoluble, que l'on doit avoir *en bloc* devant les yeux, quand on se demande si ces sciences-là expriment rationnellement la réalité transcendante à la conscience, mais dont on a connaissance par les états de conscience : la vérité forme un *système*. Du reste, l'image du monde que nous commençons d'esquisser, est caractérisée par le dualisme de la *matière* et du *champ*, qui se trouvent dépendre l'un de l'autre; c'est seulement par la théorie de la relativité que ce dualisme pourra être détruit, ce qui permettra de construire une physique du champ seulement (voir § 25).

La force pondéromotrice dans le champ électrique a été réduite déjà par Faraday à des *tensions*. Utilisons un système de coordonnées rectangulaires x_1, x_2, x_3, dans lequel E_1, E_2, E_3 sont les composants de la force électrique, la composante suivant l'axe des x_i de la densité de force est :

$$p_i = \rho E_i = E_i \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \right);$$

par un calcul simple, qui fait intervenir le fait que $\mathbf{e}$ est privé de tourbillon, on trouve que les composantes p_i de la densité de force dérivent par les formules (47) d'un *tenseur* dont les composantes S_{ik} sont représentées par le tableau :

$$(53) \qquad \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(E_2^2 + E_3^2 - E_1^2), & -E_1E_2 & -E_1E_3 \\ E_2E_1, & \frac{1}{2}(E_3^2 + E_1^2 - E_2^2), & E_2E_3 \\ E_3E_1 & E_3E_2, & \frac{1}{2}(E_1^2 + E_2^2 - E_3^2) \end{array} \right|$$

On voit bien que $S_{ik}=S_{ki}$. Il faut remarquer avant tout l'importance de ce fait : c'est que les composantes de ce tenseur en un point, ne dépendent que de la force électrique *en ce point*. (Elles ne dépendent que du *champ* et non pas de la *charge*.) Toutes les fois qu'une force p se détermine par les équations (47) au moyen d'un tenseur S du 2e ordre et symétrique, ne dépendant que des valeurs des grandeurs qui déterminent l'état physique au point considéré, nous regarderons ces tensions comme des grandeurs primordiales, les actions des forces n'étant que leurs conséquences. La justification mathématique de cette manière de voir provient de ce que la force p s'obtient par différentiation de la tension; de cette manière là, on n'obtient pas la tension par intégration, ce qui aurait le désavantage de faire intervenir toutes les valeurs des grandeurs d'état et non pas simplement la valeur au point considéré. Puisque les forces électriques qui agissent sur un corps chargé s'obtiennent à partir d'un tenseur symétrique du deuxième ordre, il s'ensuit que la force résultante, comme le moment résultant s'évanouissent (parce que l'intégrale d'une divergence étendue à tout l'espace est toujours nulle); cela veut dire qu'un système isolé, formé de masses chargées, primitivement en repos, ne peut se mettre de soi-même et en bloc en mouvement de translation ou de rotation. Le tenseur (53) est naturellement indépendant du choix du système de coordonnées. Si nous introduisons le carré de la valeur absolue du champ :

$$| E |^2 = E_i E^i,$$

on a en effet :

$$S_{ik} = \tfrac{1}{2} g_{ik} \, | E |^2 - E_i E_k$$

ce qui donne les composantes covariantes de la tension, non seulement dans le système cartésien de coordonnées, mais aussi dans un système quelconque de coordonnées affines, si les E_i sont les composantes covariantes du champ dans ce système. La signification intuitive des tensions est très simple. Utilisons en un point des coordonnées rectangulaires, dont l'axe des x_1 est dirigé suivant le champ e alors :

$$E_1 = | E |, \qquad E_2 = 0, \qquad E_3 = 0.$$

les tensions consistent en une traction d'intensité $\frac{1}{2} | E |^2$ dirigée suivant les lignes de forces et en une pression de même valeur perpendiculairement à celles-ci.

Les lois électrostatiques fondamentales peuvent être synthétisées sous la forme tensorielle suivante :

$$(54) \quad \begin{cases} \text{(I)} & \dfrac{\partial E_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial E_k}{\partial x_i} = 0, \quad \textit{ou} \quad E_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,; \\[2ex] \text{(II)} & \dfrac{\partial E^i}{\partial x_i} = \rho\,; \\[2ex] \text{(III)} & S_{ik} = \dfrac{1}{2} g_{ik} \, | E |^2 - E_i E_k \end{cases}$$

A un système de charges ponctuelles e_1, e_2, e_3,..., correspond l'énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{8\pi} \sum_{i \neq k} \frac{e_i e_k}{r_{ik}}$$

où r_{ik} est la distance de la charge e_i à la charge e_k. C'est donc dire que le travail virtuel des forces agissant sur les points chargés, pour un déplacement infinitésimal de ceux-ci, est égal à la différentielle exacte δU. Pour des charges réparties continuement, l'on a :

$$U = \int\int \frac{\delta(P)\delta(P')}{8\pi r_{PP'}} dVdV';$$

les deux volumes d'intégration s'étendant à tout l'espace; $r_{PP'}$ est la distance des deux points arguments. On peut aussi écrire, en introduisant le potentiel :

$$U = -\tfrac{1}{2}\int \varrho\varphi dV$$

or :

$$\varrho\varphi = \varphi.\ \mathrm{div}.\ \mathbf{e}$$

et par suite de l'équation :

$$\mathrm{div}\ (\varphi\mathbf{e}) = \varphi.\ \mathrm{div}\ \mathbf{e} + \mathbf{e}.\ \mathrm{grad}\ \varphi$$

et du théorème de Gauss d'après lequel, l'intégrale de div ($\varphi\mathbf{e}$) étendue à tout l'espace est nulle, on a :

$$(55) \qquad -\int \varrho\varphi dV = \int (\mathbf{e}.\ \mathrm{grad}\varphi)\ dV = \int |E|^2 dV$$

donc :

$$U = \int \frac{1}{2} |E|^2\ dV$$

Cela montre immédiatement que l'énergie a une valeur positive. En revenant aux tensions, on voit qu'elles sont liées (tout comme les tensions des corps élastiques) à une énergie potentielle de tension partout positive ; le siège de l'énergie doit donc être cherché dans le champ. La formule (55) nous en donne une raison satisfaisante, elle montre que l'énergie par unité de volume, liée à la tension, vaut $\frac{1}{2}|E|^2$; elle est donc égale à la traction et à la pression qui s'exercent en chaque point suivant les lignes de force et perpendiculairement à celles-ci respectivement. De nouveau, on voit que cette énergie ne dépend que de la grandeur d'état $\mathbf{e}$ qui caractérise le champ au *point considéré*. Donc on peut considérer dans chaque portion du champ, et non plus seulement pour le champ entier, une énergie potentielle déterminée $\int \frac{1}{2} | E |^2 dV$, l'intégrale s'étendant à cette portion considérée. Dans la statique, l'énergie totale seule joue un rôle ; ce n'est que lorsque nous aurons à considérer des champs variables que ces dernières considérations trouveront confirmation

Dans un champ statique, les charges sur un conducteur se rassemblent sur sa surface extérieure ; à son intérieur le champ est nul. Les équations (51) suffisent pour déterminer le champ électrique dans l'espace vide, dans « l'éther ». S'il se trouve des diélectriques dans le champ, il faut avoir égard au phénomène de la *polarisation électrique.*

Deux charges $+e$ et $-e$ attachées respectivement aux points P_1 et P_2 forment un « couple électrique », elles engendrent un champ qui correspond au potentiel

$$\frac{e}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

r_1 et r_2 sont les distances de P_1 et de P_2 au point considéré du champ. Le produit de e par le vecteur $\overline{P_2P_1}$ s'appelle le moment $\mathbf{m}$ du couple. Faisons tendre les deux charges vers un point P, suivant une direction déterminée en faisant varier leur valeur, de telle manière que le moment $\mathbf{m}$ reste constant; on obtient à la limite le « doublet » de moment $\mathbf{m}$ dont le potentiel est :

$$\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\operatorname{grad}_P\frac{1}{r}\cdot$$

Dans un diélectrique, la présence du champ a pour conséquence de créer de tels doublets ; ce phénomène s'appelle la polarisation. Si $\mathbf{m}$ est le moment électrique du doublet, par unité de volume, le potentiel au lieu d'être donné par la formule (50) est alors donné par :

$$-4\pi\varphi=\int\frac{\rho}{r}\,dV+\int\mathbf{m}.\operatorname{grad}_P\frac{1}{r}\quad dV \tag{56}$$

La théorie électronique rend compte de cela sans peine. Imaginons qu'un atome se compose d'un noyau chargé positivement, et au repos, autour duquel un électron chargé négativement tourne suivant une trajectoire circulaire. En moyenne, pour une révolution complète de l'électron, la charge de l'électron compense celle du noyau et l'atome paraît tout à fait neutre ; mais si un champ électrique agit, il exerce sur l'électron négatif une force, qui modifiera sa trajectoire et en fera une courbe excentrique, une ellipse, par exemple, dont le noyau occupe un des foyers. En moyenne pour des temps qui sont grands vis-à-vis de la période de révolution de l'électron, l'atome se comportera comme un couple électrique au repos ; ou si nous considérons la matière comme continue, nous devons admettre qu'elle est formée de doublets répartis continuement. Déjà dans une première approximation et sans plus préciser les notions sur la constitution de la matière, on peut admettre que le moment $\mathbf{m}$ par unité de volume est proportionnel au champ $\mathbf{m}=\varkappa\mathbf{e}$ où $\varkappa$ est une constante pour le diélectrique considéré. Puisque

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{m}}{r}\right) = \mathbf{m} \ \operatorname{grad} \frac{1}{r} + \frac{\operatorname{div} \mathbf{m}}{r}$$

l'équation (56) se transforme en :

$$-4\pi\varphi = \int \frac{\rho - \operatorname{div} \mathbf{m}}{r} dV$$

pour le champ $\mathbf{e} = \operatorname{grad} \varphi$, on trouvera alors que :

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = \rho - \operatorname{div} \mathbf{m}$$

Introduisons alors le « déplacement électrique »

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{m}$$

les équations fondamentales s'écrivent alors :

(57) $$\operatorname{rot} \mathbf{e} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{d} = \rho.$$

Elles correspondent aux équations (51) ; dans l'une, entre le champ $\mathbf{e}$, dans l'autre, le déplacement $\mathbf{d}$; les charges sont la source du déplacement. A cause de la relation $\mathbf{m} = \varkappa \mathbf{e}$, si l'on pose $\varepsilon = 1 + \varkappa$ on aura la loi matérielle

(58) $$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e}$$

Les lois se vérifient expérimentalement. L'influence du milieu intermédiaire démontrée par Faraday, et qui se manifeste dans ces lois, a été comme on sait, d'une grande importance pour la théorie des actions de contact. Nous renonçons ici à une extension correspondante des formules pour la tension, l'énergie et la force. Ces considérations prouvent que les lois (57) et (58) ne sont pas des lois rigoureuses, au sens étroit; elles ne sont relatives qu'aux valeurs moyennes ; elles s'appliquent à des espaces qui contiennent un grand nombre d'atomes et pour des temps qui sont grands vis-à-vis de la durée de révolution d'un électron. *Ce sont les équations* (51) *que nous considérons comme les lois exactes.* Notre dessein maintenant et plus tard est de nous en tenir aux lois exactes. Mais les lois phénoménologiques (57) et (58) forment le passage nécessaire qui permet d'aboutir à la théorie exacte, quand on part des phénomènes, puisqu'elles sont données directement par l'observation. Cette théorie sera démontrée exacte et valable, si l'on réussit grâce à une représentation déterminée par la constitution atomique de la matière à obtenir par formation des valeurs moyennes, les lois phénoménologiques. On doit en tirer, si la constitution de l'atome est connue, les valeurs des constantes, attachées à la matière, qui entrent dans ces lois (dans les lois exactes, il n'entre pas de telles constantes).

Puisque les lois matérielles, comme (58) qui n'ont égard qu'à l'influence en bloc de la matière, ne sont certainement pas valables pour des phénomènes qui font intervenir la structure intime de la matière, la théorie phénoménologique a donc forcément des limites, qui découlent d'une théorie de l'atome.

La théorie électronique a obtenu dans toutes ces questions de grands succès, bien qu'elle ne soit pas encore arrivée à des conclusions précises sur la structure intime de l'atome et sur les phénomènes qui se passent à son intérieur.

Le *magnétisme* paraît n'être qu'une répétition de l'électricité, quand on le considère dans les premières expériences sur les aimants permanents; ici aussi nous trouvons une loi de Coulomb. Mais on s'aperçoit assez vite d'une grande différence : on ne peut pas séparer le magnétisme positif du magnétisme négatif; il n'y a pas de source de magnétisme; il n'y a que des doublets magnétiques; l'aimant se compose d'aimants élémentaires infiniment petits dont chacun porte en soi du magnétisme positif et du magnétisme négatif. La somme de magnétisme dans n'importe quelle portion de matière est toujours nulle ; il n'y a pas de magnétisme vrai. L'explication de ce fait entraîna la découverte par Oersted de l'action magnétique des courants. L'expression quantitative par la *loi de Biot et Savart*, de cette action conduit ainsi que la loi de Coulomb, à deux lois d'action de contact : si $\mathbf{s}$ est la densité du courant électrique, $\mathbf{h}$ le champ magnétique, on a :

$$\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{s}, \qquad \text{div } \mathbf{h} = 0. \tag{59}$$

La deuxième équation exprime qu'il n'existe pas de magnétisme vrai. Les équations (59) forment le pendant des équations (51) si l'on échange *div* et *rot*. Ces deux opérations de l'analyse vectorielle se correspondent de la même manière que se correspondent dans l'algèbre vectorielle la multiplication scalaire et la multiplication vectorielle. (En multipliant scalairement un vecteur par le vecteur symbolique de la dérivation $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ on obtient la divergence, tandis qu'en multipliant vectoriellement par le même vecteur symbolique, on obtient le rotationnel).

La solution des équations (59) qui s'évanouit à l'infini et qui correspond à une distribution donnée du courant est :

$$\mathbf{h} = \int \frac{[\mathbf{sr}]}{4\pi r^3}\, dV \,; \tag{60}$$

C'est précisément la loi de Biot et Savart. On peut obtenir cette solution à partir d'un potentiel vecteur $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{f}, \qquad -4\pi \mathbf{f} = \int \frac{\mathbf{s}}{r}\, dV.$$

Enfin la densité de force du champ magnétique s'exprime d'une manière tout à fait analogue à (52)

$$\mathbf{p} = [\mathbf{sh}]. \tag{61}$$

Il n'y a aucun doute que nous ayons par ces lois la vérité sur le magnétisme. Elles ne sont pas une répétition des lois de l'électricité, mais elles en forment le pendant ; elles leur correspondent comme le produit vectoriel correspond au produit scalaire. On en peut déduire mathématiquement qu'un petit courant circulaire agit comme un petit aimant perpendiculaire au plan du courant. On s'est représenté à la suite d'Ampère que l'action magnétique des corps magnétisés est due à des courants moléculaires, la théorie électronique l'explique sans autre par le mouvement des électrons dans l'atome.

La force **p** du champ magnétique peut aussi s'obtenir à partir de tensions ; le schéma du tenseur magnétique est identique à celui du tenseur électrique, sauf à y remplacer **e** par **h**. L'énergie potentielle magnétique est aussi $\frac{1}{2} \mid \mathbf{h} \mid^2$; ce n'est d'ailleurs que par la théorie des champs variables que ce point-là sera justifié.

D'après (59), on voit que le courant n'a pas de source : div **s** $=$ o. Le champ du courant peut donc être décomposé en tubes de courant ; par chaque section d'un tube passe le même courant global. Les lois du champ stationnaire ne prouvent aucunement que ce courant soit un courant électrique au sens habituel de ce mot, c'est-à-dire qu'il soit formé d'électricité en mouvement ; mais cela est sans doute le cas. A la lumière de ce fait, la loi div **s** $= 0$ montre que l'électricité ne se perd ni ne se crée. Ce n'est que parce que le flux du vecteur courant **s** à travers une surface fermée est nul, que la densité de l'électricité peut rester invariable en tous lieux — il s'agit ici, bien entendu, de champs stationnaires seulement — sans que l'électricité se crée ou se perde.

Le potentiel vecteur **f** satisfait à l'équation div **f** $= 0$.

s est un vecteur au sens propre, sans aucun doute, il représente le courant électrique. Mais la loi de Biot et Savart montre que **h** *n'est pas un vecteur, c'est un tenseur linéaire du second ordre,* dont les composantes, dans n'importe quel système de coordonnées cartésien ou affine, sont H_{ik}. Le potentiel vecteur **f** est un vecteur véritable. Si les φ_i sont ses composantes covariantes et s^i les composantes contravariantes de la densité du courant (le courant est essentiellement comme la vitesse, un vecteur contravariant) la forme définitive (indépendante du nombre des dimensions) *des lois du champ magnétique d'un courant électrique stationnaire* est contenue dans le tableau suivant :

$$(62, \text{I.}) \qquad \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial H_{ik}}{\partial x_l} = 0, \quad \text{ou bien} \quad H_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

et

$$(62, \text{II}). \qquad \frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k} = s^i$$

Les tensions se déterminent par :

$$(62, \text{III}) \qquad S_i^k = H_{ir} H^{kr} - \frac{1}{2} \delta_i^k \mid H \mid^2,$$

où H est la valeur absolue du champ magnétique :

$$\mid H \mid^2 = \tfrac{1}{2} H_{ik} H^{ik}.$$

Le tenseur est symétrique puisque

$$H_{ir}H^r_k = H^r_i H_{kr} = g^{rs}H_{ir}H_{ks}.$$

Les composantes de la densité de force sont

(62, IV) $$p_i = H_{ik}s^k,$$

et la densité d'énergie est $\frac{1}{2} \mid H \mid^2$.

Telles sont les lois du champ dans l'espace vide ; nous les considérons comme dans le cas électrique, comme les lois exactes de la nature. Pour une théorie phénoménologique, il faut encore introduire *l'aimantation*, de même qu'on a dû introduire plus haut la polarisation; ici à côté de **h** il faut considérer « l'induction magnétique » **b**, comme on a dû considérer **d** à côté de **e**; les lois du champ deviennent :

$$\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{s} \qquad \text{div } \mathbf{b} = 0$$

et la loi matérielle est :

(63) $$\mathbf{b} = \mu\mathbf{h}$$

la constante μ est la perméabilité magnétique. Mais alors que l'atome est polarisé par l'action des forces électriques seulement, et dans la direction du champ lui-même, il forme déjà avant l'action du champ magnétique un aimant élémentaire à cause de la rotation de l'électron (cela est vrai au moins pour les corps para et ferromagnétiques). Mais tous ces aimants élémentaires ont des actions qui se contrarient tant qu'ils sont distribués au hasard, c'est-à-dire tant que les orbites des électrons sont inclinés au hasard. La force magnétique agissante a pour fonction ici *d'orienter* tout simplement les doublets existants. Le domaine de validité de l'équation (63) est beaucoup moins étendu que celui de l'équation (58). Les aimants permanents et les corps ferro-magnétiques (fer, nickel, cobalt) n'y satisfont pas.

Aux lois précédentes, il faut ajouter dans la théorie phénoménologique la *loi d'Ohm*

$$\mathbf{s} = \sigma\,\mathbf{e} \qquad (\sigma = \text{conductibilité})$$

qui exprime que le courant est proportionnel à la différence de potentiel dans une substance conductrice donnée. Dans la théorie atomique, à la loi d'Ohm correspond la loi fondamentale de la mécanique, d'après laquelle la force électrique et magnétique agissant sur les électrons « libres » détermine leur mouvement, et par suite, le courant électrique qu'ils engendrent. Par suite des chocs moléculaires les électrons ne prennent pas d'accélération durable, mais leur vitesse a une valeur moyenne limite (tout comme celle d'un corps pesant qui tombe dans un milieu résistant) qu'en première approximation on peut considérer comme proportionnelle à **e**; la loi d'Ohm est ainsi compréhensible.

Lorsque le courant est engendré par une pile ou par un accumulateur, les réactions chimiques qui s'y déroulent entretiennent aux deux extrémités du conducteur, une différence de potentiel constante, *la force électromotrice*. Puisque les phénomènes qui se déroulent dans un générateur de courant ne sont compréhensibles immédiatement que dans une théorie atomique, il est commode, au point de vue phénoménologique, de représenter le générateur par une section d'un circuit fermé, à travers laquelle le potentiel subit un saut, égal à la force électromotrice.

Ce court aperçu de la théorie de Maxwell du champ stationnaire nous suffira pour la suite. Nous n'avons pas naturellement le dessein d'en faire des applications concrètes, ni même de spécifier les unités.

CHAPITRE II

LE CONTINUUM MÉTRIQUE

§ 10. — Coup d'œil sur la géométrie non euclidienne [1].

Les doutes sur la géométrie euclidienne paraissent être aussi vieux que cette géométrie elle-même, et ils n'ont pas leur origine uniquement, comme les philosophes le croient souvent, dans les considérations critiques des mathématiciens modernes. C'est de tout temps que l'on a mis en doute le 5e *postulat d'Euclide*. On sait de quoi il s'agit; essentiellement ce postulat affirme que, dans un plan, par un point P pris hors d'une droite g de ce plan, on ne peut mener qu'une seule droite (on peut toujours la mener) qui ne coupe pas g; cette droite est dite la parallèle à g issue de P. Alors qu'on admettait les autres axiomes d'Euclide sans les mettre jamais en doute tant ils paraissaient évidents, les plus anciens commentateurs d'Euclide se sont évertués à démontrer ce postulat en se basant sur les autres. Aujourd'hui que nous savons qu'un tel but ne pouvait être atteint, ces considérations peuvent être regardées comme les débuts de la géométrie *non-euclidienne*, c'est-à-dire de la construction logique d'un système géométrique basé sur les axiomes d'Euclide à l'exception du postulat des parallèles. Nous possédons un mémoire de *Proclus* (5e siècle de notre ère) qui contient des essais de cette nature. Proclus y met en garde explicitement contre les abus que l'on peut commettre en faisant appel trop souvent à l'évidence. On ne peut d'ailleurs trop se fatiguer de répéter cet avertissement, mais on doit aussi insister sur ceci que l'évidence, malgré les abus multiples qu'on a commis en son nom, est la source initiale de toute connaissance. Après cette mise en garde, Proclus soutient qu'il peut exister des « droites asymptotiques ». Voici ce qu'il faut entendre par là :

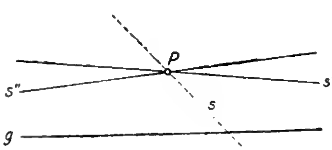

Fig. 2

Soit dans un plan une droite fixe g, un point P fixe non situé sur g, et une droite s mobile autour de P. Imaginons que dans sa position initiale elle soit perpendiculaire à g; dans sa rotation, son point d'intersection avec g se déplace le long de g, à droite par exemple et il arrive un moment où ce point a disparu à l'infini ; à ce moment on dit que s est asymptotique à g. Si nous tournons encore dans le même sens la droite s, que va-t-il arriver ? Euclide prétend qu'immédiatement le point d'intersection reparaît à gauche. Proclus indique au contraire une nouvelle possibilité. Il est probable que l'on doive encore tourner d'un certain angle autour de P avant de voir apparaître un point d'intersection à gauche. Nous aurions alors deux droites asymptotiques, une à droite s', l'autre à gauche s''. Si s se trouve dans l'angle formé par s' et s'' qui contient la perpendiculaire, elle coupera g; si elle se trouve dans l'angle adjacent de s' avec s'', elle ne coupera pas g. (*).

Qu'il existe au moins *une* droite non sécante, cela est démontré par les autres axiomes d'Euclide. Rappelons l'une des premières figures que l'on fait lorsqu'on commence l'étude de la géométrie. La droite h coupe deux droites g et g' en A et A' sous le même angle, elle détermine sur chacune d'elles une moitié gauche et une moitié droite. Si g et g' avaient quelque part à droite un point commun S, on pourrait affirmer, puisque d'après la figure $BAA'B'$ et $C'A'AC$ sont égaux, qu'il doit exister aussi à gauche un point d'intersection S^* de g avec g', mais cela est impossible puisque deux points S et S^* ne déterminent qu'une seule droite.

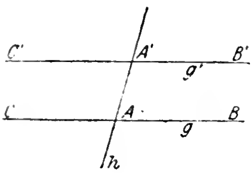

Fig. 3

Les essais de démonstration du postulat d'Euclide se poursuivirent chez les Arabes et chez les mathématiciens occidentaux du Moyen âge. Nous ne nous en occuperons pas, et nous passons à la période moderne en donnant les noms des plus importants protagonistes de la géométrie non-euclidienne : le Père jésuite Saccheri (commencement du dix-huitième siècle), les mathématiciens Lambert et Legendre. Saccheri sait que la question de la validité du postulat des parallèles est équivalente à la suivante : la somme des angles d'un triangle est-elle égale ou inférieure à 180° ? Si elle est égale à 180° dans *un* triangle, elle l'est dans tous; si dans un triangle elle est $<180°$, elle est aussi inférieure à 180° dans n'importe quel autre. Que cette somme ne puisse dépasser 180°, cela découle des mêmes considérations qui nous ont prouvé tout à l'heure l'existence d'une non-sécante. Lambert découvrit que dans l'hypothèse d'une somme inférieure à 180°, il existe en géométrie une longueur privilégiée; cela est en relation avec une remarque faite déjà, par Wallis qui énonce que dans la géométrie non-euclidienne (comme dans la géométrie sur la sphère) il ne peut y avoir des figures semblables de grandeurs différentes; si donc il est possible de définir la *forme* indépendamment de la grandeur, la géométrie euclidienne est vraie. En outre, Lambert trouva une formule qui donne l'aire d'un triangle et d'après laquelle on voit qu'il est impossible

(*) Voir la note de Poincaré dans le tome II du Traité de Géométrie de Rouché et Comberousse, Paris, Gauthier-Villars, 8e éd., 1912, p. 575 (N. d. T.).

que, dans la géométrie non-euclidienne, cette aire croisse au delà de toute limite. Il paraîtrait que par suite des recherches de ces géomètres, la croyance en l'impossibilité d'une démonstration du postulat des parallèles ait diminué quelque peu. La question passionna de nouveau les esprits; d'Alembert désignait comme un scandale de la géométrie le fait qu'on ne l'eût pas encore résolue d'une façon décisive. L'autorité de Kant, dont le système philosophique considère que la géométrie euclidienne nous donne une connaissance exacte, par des jugements adéquats, du contenu de l'intuition spatiale *a priori*, ne put pas étouffer les doutes sur la stabilité de l'édifice d'Euclide. Gauss lui-même a commencé par essayer de démontrer le postulat des parallèles; mais il a rapidement acquis la conviction que c'était là une chose impossible, et il a développé les principes d'une géométrie non-euclidienne, dans laquelle cet axiome n'est plus vrai, jusqu'à un point tel qu'il était aisé ensuite d'achever l'édifice avec la même aisance qu'on construit la géométrie euclidienne. Il n'a rien publié de ses recherches, car il craignait « les cris des Béotiens » comme il l'écrivit plus tard dans une lettre privée; en effet, il y aurait eu peu de gens qui pussent comprendre la véritable signification de ces choses. Un professeur de jurisprudence, Schweikart est arrivé indépendamment de Gauss à une compréhension complète de la géométrie non euclidienne, comme il résulte d'une note qu'il adressa à Gauss. Il n'admettait pas que dans notre espace réel la géométrie euclidienne fût évidemment valable et irréfutable. Son neveu Taurinus auquel il exposa ces questions, était au contraire un fervent euclidien; nous lui devons pourtant la découverte que les formules de la trigonométrie sphérique sur une sphère de rayon $\sqrt{-1}$ sont réelles, et qu'il est possible de construire par des moyens analytiques un système géométrique qui en dérive, et dans lequel les axiomes d'Euclide soient satisfaits, à l'exclusion du 5^e postulat.

Le russe *Nicolaj Iwanowitch Lobatschefskij* (1793-1856), professeur de mathématiques à Kasan, et le hongrois *Jean Bolyai* (1802-1860), officier dans l'armée autrichienne se partagent la gloire d'avoir découvert et développé la géométrie non-euclidienne, puisqu'ils furent les premiers à publier des résultats définitifs sur la question. Ils étaient tous deux en pleine possession de leurs découvertes en 1826, et les mémoires principaux où ils communiquèrent les résultats de leurs recherches, mémoires écrits dans le style d'Euclide, parurent dans les années 1830-1831. La méthode de Bolyai est en particulier si pénétrante, qu'il pousse le développement aussi loin qu'il est possible sans accepter ni rejeter le 5^e postulat; c'est seulement à la fin qu'il tire des propositions de sa « géométrie absolue » les théorèmes de la géométrie euclidienne ou de la géométrie non-euclidienne, suivant qu'il accepte ou qu'il rejette le 5^e postulat.

Il fallait encore démontrer que cette géométrie non-euclidienne n'est pas contradictoire, car toutes ces considérations ne prouvaient pas qu'une fois ou l'autre il était impossible d'aboutir à des propositions contradictoires. Cette démonstration est presque immédiate quand on étudie la suite du développement de la géométrie non-euclidienne. On ne suivit pas d'abord le chemin le plus aisé pour faire cette preuve; c'est seulement en 1870 environ que Klein le trouva en donnant un *modèle euclidien* pour la géométrie non euclidienne [2]).

Bornons-nous au plan. Décrivons le cercle U de rayon 1 centré à l'origine des coordonnées d'un système cartésien de coordonnées x et y. Prenons des coordonnées homogènes

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

de telle sorte que la position d'un point est définie par le rapport des 3 nombres $x_1 : x_2 : x_3$; l'équation du cercle est alors

$$- x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Désignons par $\Omega\,(x)$ la forme quadratique du premier membre et par $\Omega\,(x, x')$ la forme bilinéaire des 2 arguments x_i et x'_i qui lui correspond. Une correspondance entre le point x et le point x' dont les coordonnées sont :

$$x_i' = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} x_k \qquad (\,|\,\alpha_{ik}\,| \neq 0)$$

est une *collinéation* (les correspondances affines sont des collinéations particulières). Une telle transformation fait passer d'une droite à une droite et conserve le rapport anharmonique de 4 points en ligne droite. Imaginons alors un dictionnaire au moyen duquel les notions de la géométrie euclidienne seront traduites dans une langue étrangère « la géométrie non-euclidienne » dont nous écrirons les mots entre guillemets. Le dictionnaire se compose de 3 vocables :

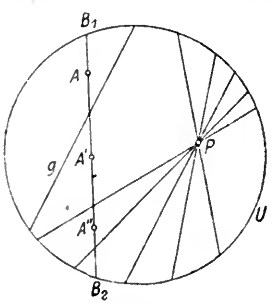

Fig. 4

« Point » chaque point à l'intérieur de U.

« Droite » toute corde de U.

Parmi toutes les collinéations qui transforment le cercle en lui-même, il faut distinguer celles qui conservent le sens de parcours sur le cercle de celles qui transforment ce sens en son inverse. Les collinéations de la première classe sont dites des *congruences* et deux figures sont « *congruentes* » si l'on peut passer point par point de l'un à l'autre par une telle collinéation. Pour ces « points » et ces « droites » et pour cette notion de « congruence » tous les axiomes d'Euclide, sauf le 5e postulat sont valables. Dans la figure 4, on a dessiné toute une série de « droites » issues de P et ne coupant pas la « droite » g. L'impossibilité d'une contradiction en géométrie non-euclidienne est ainsi démontrée puisque nous avons pu construire des objets auxquels s'appliquent tous les théorèmes de cette géométrie, moyennant un simple changement de noms. L'extension du modèle de Klein à l'espace est aisée. Nous définirons encore la « distance » non euclidienne de 2 « points »

$$A(x_1 : x_2 : x_3) \qquad A(x'_1 : x'_2 : x'_3).$$

La droite AA' coupe le cercle U en deux points B_1 et B_2. Les coordonnées homogènes de ces deux points ont la forme :

$$y_i = \lambda x_i + \lambda' x'_i,$$

et le rapport des deux paramètres λ et λ' est donné par l'équation $\Omega\,(y) = 0$

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{-\Omega(xx') \pm \sqrt{\Omega^2(xx') - \Omega(x)\Omega(x')}}{\Omega(x)}.$$

le rapport anharmonique des 4 points A, A', B_1, B_2 est par suite :

$$[AA'] = \frac{\Omega(xx') + \sqrt{\Omega^2(xx') - \Omega(x)\Omega(x')}}{\Omega(xx') - \sqrt{\Omega^2(xx') - \Omega(x)\Omega(x')}}.$$

Cette grandeur dépendant des 2 « points » A et A' conserve sa valeur quand on soumet A et A' à une « congruence ». Si A, A', A'' sont 3 points en « ligne droite » se suivant dans l'ordre énoncé, on a :

$$[AA''] = [AA'] \, . \, [A'A''].$$

La grandeur :

$$\tfrac{1}{2} \lg [AA'] = \overline{AA'} = r$$

jouit donc de la propriété fonctionnelle suivante :

$$\overline{AA'} + \overline{A'A''} = \overline{AA''}.$$

Puisque, en outre, pour des segments AA' « congruents » elle a la même valeur, on peut prendre r pour la distance non-euclidienne des 2 points A, A'. En prenant pour $lg\ [AA']$ le logarithme népérien, nous retrouvons avec Lambert la détermination d'une unité de longueur absolue. On transforme plus simplement la définition en

$$(1) \quad \operatorname{Ch} r = \frac{\Omega(xx')}{\sqrt{\Omega(x)\,\Omega(x')}} \qquad (\operatorname{Ch} r = \text{Cosinus hyperbolique de } r).$$

Cette détermination métrique avait déjà été trouvée avant Klein par *Cayley* qui partait d'une conique quelconque réelle ou imaginaire $\Omega(x) = 0$; l'illustre géomètre anglais l'appelait la « métrique projective [3]); mais c'est Klein qui le premier reconnut qu'elle conduit à la géométrie non-euclidienne si la conique est réelle.

On ne doit pas s'imaginer que le modèle de Klein prouve que le plan non-euclidien soit fini. On peut très bien porter indéfiniment à la suite les uns des autres des segments égaux sur une « droite »;

seulement si on mesure ces segments dans le modèle euclidien et avec la métrique euclidienne, ces « points équidistants » sont de plus en plus rapprochés. Pour ce plan non-euclidien le cercle limite U est l'image de l'infiniment lointain. La métrique cayleyenne pour une conique imaginaire conduit à la géométrie sphérique ordinaire, telle qu'on l'établit dans l'espace euclidien sur une sphère. Les grands cercles y jouent le rôle de droites; mais on doit considérer deux points diamétralement opposés comme un seul et unique «point» afin que deux «droites» n'aient qu'un seul «point» commun. Nous projetons les points de la sphère du centre de celle-ci sur le plan tangent en un point quelconque; dans cette image plane deux points diamétralement opposés ont la même représentation. Nous devons doter le plan d'une « droite à l'infini » qui est l'image du cercle dont le point de contact du plan tangent considéré est le pôle. Deux figures du plan de projection seront « congruentes » si elles sont les projections de 2 figures congruentes au sens ordinaire sur la sphère. Par l'application de cette notion de « congruence » la géométrie de notre plan est non-euclidienne. Deux « droites » quelconques se coupent toujours sans exception. et par suite la somme des angles d'un triangle y est supérieure à 180°. Cela semble être en contradiction avec une proposition énoncée plus haut. L'antinomie se résout dès que l'on remarque que dans la géométrie « sphérique » la droite est une ligne fermée, alors qu'Euclide suppose implicitement que c'est une ligne ouverte que chacun de ses points divise en deux moitiés. Les points S et S* considérés dans la démonstration de la proposition litigieuse sont différents pour Euclide, tandis que pour nous, ils sont identiques puisqu'ils résultent de la projection de deux points diamétralement opposés; la droite est bien fermée.

Nous utilisons dans l'espace un système cartésien x_1, x_2, x_3 dont l'origine est au centre de la sphère, et dont l'axe des x_3 passe par le point de contact du plan de projection avec la sphère; nous prenons le rayon pour unité. L'équation de la sphère est :

$$\Omega(x) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

$\dfrac{x_1}{x_3}$ est la 1re coordonnée de la projection et $\dfrac{x_2}{x_3}$ la deuxième. x_1, x_2, x_3 peuvent donc être considérés comme les coordonnées homogènes d'un point du plan de projection. Les correspondances congruentes sur la sphère sont des transformations linéaires qui laissent invariante la forme quadratique $\Omega(x)$: les « congruences » d'un plan au sens de notre géométrie « sphérique » sont donc exprimées analytiquement par les transformations linéaires des coordonnées homogènes, qui laissent sa forme à l'équation $\Omega(x) = 0$; celle-ci représente une conique imaginaire. Nous avons ainsi démontré notre proposition sur la métrique cayleyenne. Conformément à ce que nous avons dit la formule qui donne la distance r de deux points A et A', est ici :

$$\cos r = \frac{\Omega(xx')}{\sqrt{\Omega(x)\Omega(x')}}. \tag{2}$$

Nous avons établi ainsi le théorème de Taurinus qui dit que la géométrie non-euclidienne est identique à la géométrie sur une sphère de rayon $\sqrt{-1}$.

Entre la géométrie de Bolyai-Lobatschefsky et la géométrie sphérique, la géométrie euclidienne s'introduit comme cas limite. Si l'on amène la conique fondamentale d'un état réel à un état imaginaire en passant par l'état où elle est dégénérée, la métrique cayleyenne est d'abord celle d'un plan de Bolyai-Lobatschefsky et elle se transforme en une métrique sphérique en passant par la métrique euclidienne.

§ 11. — Géométrie riemannienne.

Les idées de Riemann — qui pour la suite de nos développements sont d'une importance capitale — se rattachent aux principes fondamentaux de la géométrie infinitésimale, en particulier à ceux de la théorie des surfaces, tels qu'ils furent posés par Gauss dans ses *Disquitiones circa superficies curvas**.

La propriété la plus importante de l'espace, celle qui est à l'origine de toutes les autres, c'est que ses points forment une multiplicité à 3 dimensions. Qu'entendons-nous par là? Nous disons, par exemple, que les ellipses (d'après leur grandeur et leur forme, c'est-à-dire en considérant 2 ellipses comme égales, si elles sont congruentes, et différentes si elles ne le sont pas) forment une multiplicité à deux dimensions, parce qu'une ellipse peut être bien définie à l'intérieur de cet ensemble par la donnée de deux nombres : les longueurs de ses deux demi-axes.

Les états d'équilibre d'un gaz parfait se différencient les uns des autres par les variables indépendantes pression et température, ils forment donc une multiplicité à deux dimensions, comme les points sur une sphère, ou les sons simples qui se définissent par l'intensité et la qualité. Conformément à la théorie physiologique, les couleurs forment une multiplicité à trois dimensions, car d'après cette théorie la perception de la couleur est déterminée sur la rétine par la combinaison de trois procédés chimiques : le noir-blanc, le rouge-vert, le jaune-bleu, dont chacun est caractérisé pour une direction déterminée par une intensité déterminée; la multiplicité des couleurs est bien à 3 dimensions puisqu'une couleur est caractérisée par son intensité et sa qualité, celle-ci étant déjà une multiplicité à 2 dimensions; on trouve une confirmation de ce fait dans la construction du triangle des couleurs dù à Maxwell. Les positions possibles d'un corps solide forment une multiplicité à

*) Il existe une traduction française de ce mémoire : Recherches générales sur les surfaces courbes, suivies de notes et d'études sur divers points de la théorie des surfaces et sur certaines classes de courbes, trad. par E. Roger, 2e éd., 1870 (Librairie Albert Blanchard).

six dimensions; les positions possibles d'un système mécanique à n degrés de liberté en forment une à n dimensions. *Une multiplicité à* n *dimensions est caractérisée par le fait qu'un élément particulier qui en fait partie (dans nos exemples : les points, les états, les couleurs ou les sons) peut être déterminé par la donnée des valeurs de* n *grandeurs « les coordonnées » qui sont des fonctions continues à l'intérieur de la multiplicité.* Mais il n'est pas nécessaire d'exiger que toute la multiplicité, avec tous ses éléments soit représentée univoquement et réciproquement par les systèmes de valeurs des coordonnées, (par exemple, cela est exclu pour la sphère) mais il faut que, si P est un élément de la multiplicité, il existe un voisinage de P qui puisse être représenté univoquement, réciproquement et d'une manière continue, par les systèmes de valeurs de n coordonnées. Si x_i est un système de n coordonnées, x^*_i un autre, les valeurs des coordonnées x_i et x^*_i du même élément sont liées par des relations :

$$x_i = f_i(x_1^* x_2^* \cdots x\ ) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

qui sont résolubles par rapport aux x_k^*, et où les f_i sont continues. Tant que nous ne savons rien de plus sur la multiplicité, nous ne sommes pas en état de distinguer un système de coordonnées d'un autre.

Pour l'étude analytique d'une multiplicité continue quelconque, il est nécessaire d'échafauder une théorie de l'invariance vis-à-vis de toutes les transformations de coordonnées de la forme (3) ; dans le chapitre précédent, cette invariance ne se manifestait que pour la classe très particulière des transformations linéaires, ici il s'agit des transformations continues les plus générales.

La géométrie infinitésimale s'occupe de l'étude des courbes et des surfaces dans un espace euclidien à trois dimensions, dont nous désignerons les coordonnées par x, y, z. Une *courbe* est une multiplicité ponctuelle à une dimension ; ses points peuvent être distingués les uns des autres par les valeurs d'un paramètre u. Si le point u de la courbe se trouve coïncider avec le point de l'espace dont les coordonnées sont x, y, z, alors x, y, z, sont des fonctions déterminées et continues de u :

$$x = x(u), \qquad y = y(u), \qquad z = z(u), \tag{4}$$

Ces trois équations donnent la *représentation paramétrique* de la courbe. Supposons que u soit le temps, (4) donne alors la loi du mouvement d'un point dont la trajectoire est précisément la courbe donnée. Une courbe donnée ne détermine pas uniquement une représentation paramétrique, le paramètre u, en effet, peut être soumis encore à une transformation continue quelconque.

Une multiplicité ponctuelle à deux dimensions est une *surface ;* ses points se distinguent par les valeurs de deux paramètres u_1 et u_2 ; elle possède par suite une représentation paramétrique :

$$x = x(u_1\, u_2), \qquad y = y(u_1\, u_2), \qquad z = z(u_1\, u_2). \tag{5}$$

De nouveau, u_1 et u_2 peuvent être soumis à telle transformation que l'on voudra, sans que la représentation paramétrique cesse de donner la même surface. Nous supposerons que les fonctions de (5) sont non seulement continues, mais encore dérivables. C'est d'une telle représentation que Gauss part dans sa théorie générale ; les paramètres u_1 et u_2 sont les coordonnées curvilignes (ou de Gauss) sur la surface. Donnons une exemple : Projetons les points de la sphère de rayon 1, centrée à l'origine des coordonnées, de son centre sur le plan tangent $z=1$; soient x, y, z, les coordonnées d'un point de la sphère et u_1, u_2, l'abcisse et l'ordonnée de sa projection dans le plan de projection lui-même ; on a bien évidemment :

$$(6)\quad x=\frac{u_1}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}},\quad y=\frac{u_2}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}},\quad z=\frac{1}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}}$$

Nous avons là une représentation paramétrique de la sphère ; elle n'englobe cependant pas toute la sphère, mais seulement un certain voisinage du point $z=1$, $x=y=0$, l'hémisphère dont il est le pôle jusqu'à l'équateur, celui-ci non compris. On obtient une autre représentation paramétrique de la même surface au moyen des coordonnées géographiques, longitude et latitude. En thermodynamique, on utilise pour la représentation graphique un système d'axes rectangulaires dans un plan, l'axe des pressions p, et l'axe des températures θ; l'état d'un gaz est donc représenté par le point (p, θ). Le même procédé s'applique aux surfaces : au point u_1, u_2 sur la surface, nous faisons correspondre dans un plan le point de coordonnées rectangulaires (u_1, u_2). Chacun pense immédiatement à ce propos aux cartes géographiques. Une courbe sur la surface est donnée analytiquement par une représentation paramétrique :

$$(7)\qquad u_1=u_1(t),\qquad u_2=u_2(t),$$

qui donne dans le plan image une courbe image ; un domaine, une région sur la surface correspondent à un ensemble de points dans le plan des (u_1, u_2) caractérisé par certaines inégalités en u_1 et u_2. Si l'on trace dans le plan image des (u_1, u_2) un réseau de lignes parallèles aux axes à la manière du papier millimétrique, il y correspondra sur la surface, un réseau formé de mailles quadrangulaires, limitées par les deux familles de *lignes coordonnées* $u_1=$const., $u_2=$const. Si ce réseau est suffisamment ténu, il permettra à un dessinateur de construire sur la surface la figure qui correspond à une figure quelconque du plan.

La distance ds entre deux points infiniment voisins sur la surface

$$(u_1, u_2)\qquad (u_1+du_1,\ u_2+du_2)$$

se détermine par la relation :

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

où

$$(8)\qquad dx=\frac{\partial x}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial x}{\partial u_2}du_2,$$

dy et dz étant des expressions analogues. On obtient alors pour ds^2 une forme quadratique de différentielles

$$(9) \qquad ds^2 = \sum_{i,k=1}^{2} g_{ik} du_i du_k \qquad (g_{ki} = g_{ik}),$$

où les coefficients g_{ik} sont :

$$g_{ik} = \frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial x}{\partial u_k} + \frac{\partial y}{\partial u_i}\frac{\partial y}{\partial u_k} + \frac{\partial z}{\partial u_i}\frac{\partial z}{\partial u_k}$$

ce ne sont pas des constantes en général, mais bien des fonctions de u_1 et u_2. Pour la représentation de la sphère donnée par (6) par exemple, on trouve :

$$(10) \qquad ds^2 = \frac{(1 + u_1^2 + u_2^2)(du_1^2 + du_2^2) - (u_1 du_1 + u_2 du_2)^2}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2}.$$

Gauss fit voir que cette forme quadratique différentielle, ds^2, détermine la *géométrie sur la surface.* Les longueurs de courbes, les angles, les grandeurs de domaines donnés sur la surface dépendent seulement d'elle ; la géométrie sur deux surfaces est donc la même, si par un choix approprié des paramètres, les coefficients g_{ik} des deux formes métriques coïncident. En effet, la longueur d'une courbe donnée sur la surface s'obtient par l'intégrale :

$$\int ds = \int \sqrt{\sum_{ik} g_{ik} \frac{du_i}{dt}\frac{du_k}{dt}}\,.\,dt.$$

Considérons un point $P^\circ = (u_1^\circ, u_2^\circ)$ sur la surface, et utilisons, pour étudier son voisinage, les coordonnées relatives $u_i - u_i^\circ = du_i$; $x - x^\circ = dx$, $y - y^\circ = dy$, $z - z^\circ = dz$,les équations (8) où les dérivées sont prises avec leurs valeurs en P° seront d'autant plus exactement satisfaites que du_1 et du_2 seront plus petits, nous disons qu'elles sont vraies pour des valeurs *infiniment petites* du_1 et du_2 ; ou encore plus brièvement, nous dirons qu'elles sont vraies dans l'infiniment petit. Avec les relations qui donnent dy et dz on voit que le voisinage immédiat de P° est un plan et que du_1 et du_2 sont des coordonnées affines dans ce plan*.

D'après cela, nous pouvons employer dans le voisinage de P°, les formules de la géométrie affine. L'angle θ de deux translations infinitésimales (ou de deux éléments linéaires) de composantes du_1, du_2, δu_1 δu_2 est donné par

*) Nous faisons ici l'hypothèse que les déterminants du 2e ordre qu'on peut tirer du tableau :

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \end{matrix}\right|,$$

ne sont pas nuls à la fois; cette condition est remplie pour les points réguliers de la surface, pour lesquels existe un plan tangent.

Les trois déterminants sont identiquements nuls seulement si la surface dégénère en une courbe, en effet dans ce cas, x, y et z ne dépendent plus que d'un seul paramètre.

$$\cos \theta = \frac{Q(d, \delta)}{\sqrt{Q(d, d) . Q(\delta, \delta)}}$$

où $Q(d, \delta)$ est la forme bilinéaire symétrique que l'on tire de (9),

$$Q(d, \delta) = \sum_{ik} g_{ik} du_i \delta u_k;$$

l'aire du parallélogramme infiniment petit qu'on construit sur ces deux translations est :

$$\sqrt{g} \begin{vmatrix} du_1 & du_2 \\ \delta u_1 & \delta u_2 \end{vmatrix}.$$

g étant le déterminant des g_{ik}. L'aire d'une portion de la surface s'obtient donc par l'intégrale :

$$\int\int \sqrt{g}\, du_1\, du_2$$

étendue au domaine correspondant du plan image des (u_1, u_2). Nous avons ainsi démontré les faits énoncés plus haut. Les valeurs des expressions obtenues sont naturellement indépendantes du choix de la représentation paramétrique ; cette invariance vis-à-vis de n'importe quelle transformation se confirme analytiquement sans autre. Les rapports géométriques établis sur la surface peuvent être poursuivis dans le plan des (u_1, u_2) pourvu que l'on y prenne comme expression de la distance ds de deux points infiniment voisins, non pas celle que donne la forme de Pythagore

$$ds^2 = du_1^2 + du_2^2$$

mais bien celle que donne (9).

La géométrie sur la surface ne dépend en rien de la situation particulière que la surface occupe dans l'espace ; elle consiste en relations qui peuvent être obtenues par des *mesures effectuées sur la surface elle-même*. Ce furent les travaux géodésiques du Hannovre qui furent le point de départ des recherches de Gauss. On peut se rendre compte que la terre n'est pas un plan par la mesure d'une étendue de pays suffisamment grande; si l'on imagine que les triangles qui composent le réseau de triangulation sont assez petits pour qu'on puisse les assimiler à des portions du plan tangent en un de leurs points, il n'en reste pas moins vrai que l'étalement de ce réseau sur un plan, différera de ce qu'il était sur la sphère ; en d'autres termes, les triangles étalés sur le plan ne vérifieront pas les mêmes relations métriques que lorsqu'ils étaient appliqués sur la sphère. Pour faire voir la chose plus distinctement encore, traçons sur une sphère de rayon 1 un cercle γ, centré en un point quelconque P de la surface ; plus grands sont les rayons de ce cercle, c'est-à-dire les arcs qui rayonnent autour de P jusqu'à la périphérie, plus grand est le cercle sur la sphère (on suppose tout de même les rayons $< \frac{\pi}{2}$). Par des mesures sur la sphère, on peut affirmer que les rayons qui partent dans toutes les directions sont des lignes de longueurs plus petites que celles de n'importe quel autre arc qui va de P à la périphérie de γ; tous les rayons ont même longueur; la longueur de γ est s. Si nous étions dans un plan, s vaudrait $2\pi r$, mais au lieu de cela, les mesures sur la sphère donnent $s = 2\pi \sin r$. Donc on voit bien, par des mesures effectuées sur la surface elle-même, que celle-ci n'est pas un plan. Prenons au contraire une feuille de papier sur laquelle nous dessinons telles courbes qu'on voudra ; enroulons cette feuille ; par des mesures sur les figures de la feuille enroulée on trouvera les mêmes valeurs que si la feuille était à plat ; sur la feuille enroulée, la même géométrie est valable, qui vaut sur un plan ; par des mesures géodésiques nous sommes hors d'état de constater qu'elle est courbe. Ainsi sur deux surfaces qui proviennent l'une de l'autre par déformation sans extension ni déchirure, on a la même géométrie. On exprime analytiquement que sur la sphère la géométrie du plan n'est pas valable de la manière suivante : il est impossible de mettre la forme quadratique (10) sous la forme :

$$ds^2 = (du_1^*)^2 + (du_2^*)^2$$

au moyen d'une transformation :

$$\begin{array}{l|l} u_1 = u_1(u_1^* u_2^*) & u_1^* = u_1^*(u_1 u_2) \\ u_2 = u_2(u_1^* u_2^*) & u_2^* = u_2^*(u_1 u_2) \end{array}$$

Nous savons en effet qu'il est possible d'atteindre ce but en chaque point par une transformation linéaire des différentielles

$$(11) \qquad du_i^* = \alpha_{i1} du_1 + \alpha_{i2} du_2 \qquad (i = 1, 2)$$

Mais il est impossible de choisir la transformation des différentielles de façon que les expressions (11) soient des différentielles exactes.

Les coordonnées curvilignes ne sont pas seulement utilisées dans la théorie des surfaces; on les emploie encore souvent dans la résolution de problèmes relatifs à l'espace ; en physique mathématique, par exemple, on est parfois dans la nécessité d'employer des coordonnées qui s'adaptent particulièrement bien à la question traitée ; nous faisons allusion ici aux coordonnées cylindriques, sphériques ou elliptiques. Le carré de la distance de deux points infiniment voisins s'exprime encore, en employant de telles coordonnées, par une forme différentielle quadratique

$$(12) \qquad \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik} dx_i dx_k$$

Si nous croyons la géométrie euclidienne valable dans notre espace, c'est que nous sommes persuadés alors que cette forme peut se présenter avec des coefficients constants, si on fait subir une transformation appropriée aux coordonnées.

Ces prolégomènes posés, nous sommes en état de comprendre les idées que Riemann a développées dans sa thèse d'habilitation [4]) : *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen* (*). Nous avons vu au chapitre I, que dans un espace euclidien à 4 di-

(*) Une traduction française se trouve dans l'édition française des œuvres de Riemann, par Laugel. Voir la Bibliographie à la fin de l'ouvrage.

mensions, la géométrie euclidienne est valable sur les multiplicités linéaires à 3 dimensions, mais les espaces courbes tridimensionnels qui peuvent exister dans l'espace à 4 dimensions, tout comme il existe des surfaces courbes dans un espace à 3 dimensions, sont d'une autre espèce. N'est-il pas possible que notre espace intuitif soit un espace courbe ? En fait, il n'est pas plongé dans un espace à 4 dimensions, mais il se pourrait que les mesures qu'on y effectue soient de telle sorte qu'elles ne puissent être relatives à un espace *plan*. Il se pourrait que des opérations géodésiques de haute précision nous montrassent que notre espace n'est pas plan, de la même manière que les opérations géodésiques sur la terre nous prouvent qu'elle n'est pas plane. — Ce que nous savons et ce à quoi nous nous tenons, c'est que notre espace est une multiplicité à 3 dimensions, que les éléments linéaires infiniment petits s'y laissent mesurer et comparer entre eux indépendamment de leur position et de leur direction, et que le carré de leur longueur, c'est-à-dire de la distance de deux points infiniment voisins est donnée par une forme quadratique de différentielles de la forme (12) après qu'on y a caractérisé chaque point par des coordonnées x quelconques (cette hypothèse n'est pas contradictoire, car chaque transformation de coordonnées se traduisant par une transformation linéaire des différentielles des coordonnées, une forme quadratique de celles-ci se transforme en une forme quadratique). Mais ce que nous ne pouvons plus supposer nécessairement, c'est que les coordonnées puissent être choisies de telle manière que les coefficients g_{ik} de la forme fondamentale soient constants, c'est-à-dire qu'en fait, il n'existe pas nécessairement des coordonnées affines pour représenter les points de l'espace.

Le passage de la géométrie euclidienne à la géométrie de Riemann repose sur les mêmes principes que la physique des actions de contact. Par l'observation, nous apprenons par exemple, que dans un fil conducteur, l'intensité du courant est proportionnelle à la différence de potentiel à l'origine et à l'extrémité du fil (loi d'Ohm). Mais nous savons que les résultats des mesures faites sur un long conducteur quelconque ne vérifient pas exactement cette loi; pourtant ces mesures nous montrent que la loi d'Ohm est vraie pour un fil *infiniment petit*. C'est ce qu'exprime la formule (Ch. I, p. 64) qui est à la base de la théorie de Maxwell. De la loi différentielle, on remonte à la loi intégrale, en faisant l'hypothèse que le fil est *homogène* dans toutes ses parties. On procède de même pour la géométrie: le fait essentiel de la géométrie euclidienne est que le carré de la distance de 2 points est une forme quadratique des coordonnées relatives des 2 points. (*Théorème de Pythagore.*) *Si nous regardons ce théorème comme rigoureusement vrai quand les 2 points sont infiniments voisins, nous posons ainsi les prémisses de la géométrie riemannienne.* En même temps nous sommes dispensés d'une détermination précise du système de coordonnées, puisque le système de Pythagore ainsi énoncé est invariant vis-à-vis de n'importe quelle transformation de coordonnées. On saisit bien ainsi la correspondance qu'il y a entre le passage de la physique des actions à *distance* à la physique des actions de *contact* et le passage de la géométrie euclidienne à la géométrie riemannienne; celle-ci est une géométrie qui procède de proche en proche dans ses investigations, celle-là donne immédiatement les lois globales. La géométrie riemannienne est en quelque manière une formulation de la géométrie euclidienne, qui satisfait l'esprit de continuité, mais elle prend par cette formulation un caractère beaucoup plus général. La géométrie euclidienne intégrale a été créée pour l'étude des droites et des plans, ce sont ces problèmes qui l'ont orientée; mais aussitôt qu'on passe à la géométrie infinitésimale, c'est bien la chose la plus naturelle et la plus rationnelle que de poser comme principe essentiel la proposition de Riemann; on n'introduit ainsi aucune complication, et l'on est paré contre toutes les velléités de faire des raisonnements de géométrie globale. Dans l'espace de Riemann, une surface est aussi une multiplicité à deux dimensions que l'on se donne par une représentation paramétrique $x_i = x_i(u_1\ u_2)$; remplaçons dans la forme fondamentale (12) de l'espace de Riemann, les différentielles

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_i}{\partial u_2} du_2$$

par leurs valeurs en fonction des du_i, alors que le carré de la distance de deux points infiniment voisins sur la surface est une forme quadratique des différentielles du_1 et du_2 (tout comme dans l'espace euclidien, d'ailleurs). Alors qu'avec Euclide l'espace était d'une nature très particulière, puisque plan, avec Riemann la notion d'espace prend toute sa généralité. L'idée de comprendre l'univers par son aspect dans l'infiniment petit, est la raison épistémologique qui anime la physique des actions de contact et la géométrie riemannienne, mais c'est aussi l'âme des autres parties de l'œuvre grandiose que Riemann à conçue, principalement de sa théorie des fonctions d'une variable complexe. La question de la vérité du 5^e^ postulat à laquelle s'est rattaché tout le développement historique que nous avons rapidement esquissé, ne nous paraît plus maintenant que comme une question en quelque sorte fortuite. La vraie connaissance, à laquelle on doit s'élever pour pouvoir s'affranchir du point de vue euclidien, nous a été révélée par Riemann.

Nous avons encore à constater que la géométrie de Bolyai-Lobatschefsky et la géométrie sphérique sont contenues comme cas particuliers dans la géométrie riemannienne aussi bien que la géométrie euclidienne. A cet effet, prenons comme coordonnées d'un point du plan lobatschefskien, les coordonnées (u_1, u_2) du point image qui lui correspond dans le modèle de Klein, nous obtenons pour la distance ds de deux points infiniment voisins la formule suivante tirée de (1)

$$(13) \qquad ds^2 = \frac{(1 - u_1^2 - u_2^2)(du_1^2 + du_2^2) + (u_1du_1 + u_2du_2)^2}{(1 - u_1^2 - u_2^2)^2}$$

En comparant avec (10) nous avons une nouvelle confirmation du théorème de Taurinus. La forme métrique fondamentale de l'espace non-euclidien à 3 dimensions s'exprime d'une manière analogue. Si nous pouvons trouver dans l'espace euclidien une surface courbe pour laquelle la formule (13) soit valable pourvu qu'on prenne des coordonnées curvilignes u_1, u_2 convenables, alors la géométrie de Bolyai sera valable sur cette surface. Il existe en effet de telles surfaces, la plus simple est la surface de révolution engendrée par la rotation de la *tractrice* autour de son asymptote. La tractrice est une courbe plane dont la figure 5 donne à peu près l'allure; elle a un point de rebroussement et une asymptote, elle est caractérisée géométriquement par la propriété que la longueur de la portion de tangente comprise entre le point de contact et l'asymptote est constante. Sur la surface de révolution qu'on obtient en tournant la courbe autour de l'asymptote, la géométrie non-euclidienne est valable. Ce modèle euclidien a été donné d'abord par Beltrami [5]). Il n'est malheureusement pas parfait; en premier lieu il est borné à la géométrie à deux dimensions (du moins sous sa forme intuitive) et ensuite les deux moitiés de la surface séparées par l'arête qu'engendre le point de rebroussement, ne sont chacune qu'une partie du plan non-euclidien. Hilbert a démontré rigoureusement qu'il est impossible de trouver dans l'espace euclidien, une surface privée de singularités, qui réalise un modèle pour tout le plan lobatschefskien [6]). Le modèle de Klein présente les mêmes inconvénients. Jusqu'ici nous sommes restés dans le domaine du mathématicien. Une chose est de montrer la non contradiction de la géométrie non euclidienne, une autre est de savoir si *dans l'espace réel l'une ou l'autre des géométries est valable*. Gauss avait déjà examiné cette nouvelle question ; il mesura, avec un très grand soin, le triangle Inselberg, Brocken, Hoher Hagen (près de Goettingue) ; mais la différence de la somme des angles avec 180° fut trouvée inférieure aux erreurs possibles. Lobatschefski conclut de la très faible valeur des parallaxes des étoiles fixes que l'écart entre l'espace réel et un espace euclidien est très faible. Certains philosophes défendent d'autre part l'idée que des observations ou des expériences ne peuvent ni confirmer ni infirmer la validité d'une géométrie plutôt que la validité d'une autre. Par là il faut entendre que pour interpréter et même pour effectuer de telles expériences, il est nécessaire de faire des hypothèses physiques essentielles, comme, par exemple, celle qui est à la base de l'optique géométrique et qui dit que les rayons lumineux sont des droites. Mais nous ne trouvons là qu'une simple confirmation de la remarque faite plus haut que l'ensemble seul de la géométrie et de la physique est susceptible d'une vérification empirique. Des expériences décisives ne sont donc possibles que

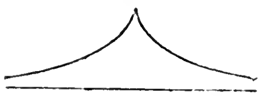

Fig. 5

lorsqu'on a développé non seulement la géométrie, mais aussi la physique dans l'espace euclidien et dans l'espace général de Riemann. Nous verrons bientôt qu'il est possible très simplement et sans arbitraire, de formuler les lois du champ électromagnétique que nous avions obtenues sous l'hypothèse que l'espace est euclidien, sous l'hypothèse plus générale que l'espace est riemannien. Cela fait, l'expérience peut très bien décider entre les deux théories. Mais pour nous, au point où nous sommes arrivés, la question n'est pas encore en état d'être résolue. Pour terminer, nous formulons encore une fois les principes de la géométrie riemannienne, d'une manière générale, c'est-à-dire sans nous borner à trois dimensions.

Un espace riemannien à n dimensions est une multiplicité à n dimensions, qui n'est pas quelconque, mais qui est telle qu'une métrique y est attachée par le moyen d'une forme différentielle quadratique définie positive. Les deux lois fondamentales d'après lesquelles cette forme détermine toutes les grandeurs, sont les suivantes (les x_i sont des coordonnées quelconques).

1. Si g est le déterminant des coefficients de la forme fondamentale, la grandeur de n'importe quelle portion d'espace est donnée par l'intégrale :

$$\int \sqrt{g}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \tag{14}$$

étendue au domaine entier des variables x_i qui représente la portion en question.

2. Si $Q(d,\delta)$ est la forme bilinéaire symétrique, correspondant à la forme quadratique fondamentale, des deux éléments linéaires d et δ issus d'un même point, l'angle θ qu'ils forment se calcule par :

$$\cos\theta = \frac{Q\,(d\delta)}{\sqrt{Q\,(dd).Q\,(\delta\delta)}}. \tag{15}$$

Une multiplicité à m dimensions ($1 \leqslant m \leqslant n$) plongée dans un tel espace est donnée par une représentation paramétrique :

$$x_i = x_i(u_1 u_2 \cdots u_m) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

La forme différentielle fondamentale de cette multiplicité à m dimensions s'obtient en remplaçant dans celle de l'espace considéré les différentielles dx_i par leurs valeurs :

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_i}{\partial u_2} du_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial u_m} du_m$$

Notre multiplicité à m dimensions devient aussi à son tour un espace riemannien et la grandeur d'une portion quelconque de son étendue se calculera par l'expression (14) appliquée au nouvel espace. On a ainsi le moyen de déterminer la longueur des courbes, l'aire des surfaces, etc.

§ 12. — **Suite. — Conception dynamique de la métrique.**

Revenons à la théorie des surfaces dans l'espace euclidien. La *courbure* d'une courbe plane peut être indéfinie par la mesure de la divergence de ses normales; cette mesure se fait de la manière suivante :

En un point P de la courbe considérons la normale ; sur cette normale, imaginons un segment de longueur 1. A partir d'un point O quelconque, menons le vecteur $\overline{Op}$ équipollent à ce segment de normale. Le point p est le point image de P sur le cercle de rayon 1 décrit autour de O comme centre. P parcourant un arc Δs de la courbe, le point image p parcourt un arc $\Delta\sigma$ du cercle ; $\Delta\sigma$ est l'angle des deux normales à la courbe aux deux extrémités de l'arc Δs. La limite du quotient $\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$ pour un arc Δs qui contient le point P lorsque Δs tend vers zéro est la *courbure* de la courbe en P.

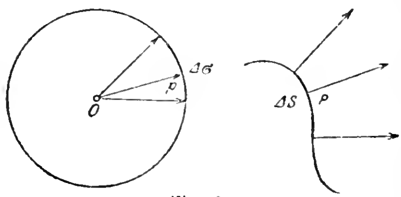

Fig. 6

Gauss définit d'une manière analogue la courbure d'une surface comme la mesure de la divergence de ses normales. Au lieu du cercle de rayon 1, il faut considérer la sphère de rayon 1 centrée en un point quelconque O; par une représentation analogue à la précédente, on fait correspondre, par l'équipollence des normales, un élément dw de la sphère à un élément de surface do, dw est l'angle solide que les normales à do forment quand on leur donne une même origine. Le rapport $\frac{dw}{do}$ (pris bien entendu à la limite) est la *courbure de Gauss. Gauss découvrit que cette courbure est parfaitement déterminée par des mesures faites sur la surface elle-même, et qu'elle peut être calculée au moyen d'une expression construite avec les coefficients de la forme fondamentale et leurs dérivées jusqu'au deuxième ordre.* Par suite, la courbure reste invariable, si l'on déforme la surface sans l'étendre ni la déchirer. C'était donc démontrer que la courbure est un *invariant différentiel de la forme différentielle quadratique binaire* attaché à la surface ; c'est-à-dire une expression formée avec les coefficients de la forme de telle manière que, pour deux formes différentielles qui passent de l'une à l'autre par une transformation des variables (et pour des couples d'arguments qui se correspondent dans la transformation), elle possède la même valeur. Riemann réussit à étendre la notion de courbure à des formes différentielles quadratiques de plusieurs variables : il montra que l'on n'a plus à faire à un scalaire, mais à un tenseur. (Nous nous en occuperons au § 15.) Plus précisément, il faut considérer dans un espace riemannien en chaque point et dans chaque direction de surfaces, une courbure que ces éléments déterminent. L'espace euclidien est caractérisé par une courbure nulle partout et dans toutes les directions. Pour la géométrie de Bolyai-Lobatschefsky comme pour la géométrie sphérique, cette courbure possède une valeur constante a indépendante du lieu et de la direction de surface; a est positif pour la géométrie sphérique, négatif pour la géométrie de Bolyai (en choisissant l'unité de longueur convenablement, on peut faire $a = \pm 1$). Si un espace à n dimensions a une courbure constante a, sa forme fondamentale prend l'aspect :

$$\frac{\left(1 + a\sum_i x_i^2\right) . \sum_i dx_i^2 - a\left(\sum_i x_i dx_i\right)^2}{\left(1 + a\sum_i x_i^2\right)^2};$$

moyennant un choix convenable des coordonnées x_i. Si l'espace est partout homogène, sa courbure doit être une constante et par suite sa forme métrique a l'aspect indiqué ; un tel espace est nécessairement euclidien, sphérique ou lobatschefskien. Dans ces conditions, non seulement les éléments linéaires ont une existence indépendante du lieu et de la direction, mais encore une figure quelconque, de grandeur finie, peut se déplacer d'un point à un autre en restant congruente à elle-même, c'est-à-dire sans que les rapports de mesure de ses parties soient altérés. Nous revenons ainsi à la notion de congruence, de laquelle nos considérations étaient parties (§ 1). Parmi les trois cas possibles, l'euclidien est caractérisé par le fait qu'à l'intérieur du groupe des transformations congruentes, on peut distinguer le groupe des translations par les propriétés particulières analysées au paragraphe premier. Les faits que nous venons de rappeler ont été brièvement indiqués par Riemann dans la thèse mentionnée, et plus longuement développés par Christoffel, Lipschitz, Helmholtz et Sophus Lie (7).

L'espace est la forme des phénomènes, et il est nécessairement homogène, aussi loin qu'il s'étende. Il semble donc que dans l'immense ensemble des géométries dont Riemann nous a montré la possibilité, il faille n'en retenir que trois et laisser toutes les autres de côté : *parturiunt montes, nascetur ridiculus mus!* Riemann pensait autrement et les derniers mots de sa thèse nous le prouvent. Mais ses contemporains ne pouvaient les comprendre et ils n'ont pas été entendus (seuls les écrits de W. K. Clifford nous en donnent un solitaire écho). Ce n'est qu'aujourd'hui, après qu'Einstein nous a ouvert les yeux par la théorie de la gravitation, que nous voyons ce qui se cache vraiment là-dessous. Pour bien le comprendre, remarquons d'abord que Riemann oppose les multiplicités *discrètes* formées d'éléments isolés, aux multiplicités *continues*. La mesure d'une partie quelconque d'une multiplicité discrète est donnée par le *nombre* des éléments qu'elle contient. Ainsi une multiplicité discrète porte le principe de sa métrique, *en soi a priori*, comme Riemann le dit. Il poursuit : « La question de la validité des hypothèses de la géométrie dans l'infiniment petit est liée avec la question du principe intime des rapports métriques dans l'espace. Dans cette dernière question, que l'on peut bien encore regarder comme appartenant à la doctrine de l'espace, on trouve l'application de la remarque précédente, que, dans une variété discrète, le principe des rapports métriques est déjà contenu dans le concept de cette variété, tandis que dans une variété continue, ce principe doit venir d'ailleurs. Il faut donc, ou que la réalité sur laquelle est fondé l'espace forme une variété discrète, ou que le fondement des rapports métriques soit cherché en dehors de lui, dans *les forces de liaison qui agissent en lui.*

« La réponse à ces questions ne peut s'obtenir qu'en partant de la conception des phénomènes, vérifiée jusqu'ici par l'expérience, et que Newton a prise pour base, et en apportant à cette conception les modifications successives exigées par les faits qu'elle ne peut pas expliquer. Des recherches partant de concepts généraux, comme l'étude que nous venons de faire, ne peuvent avoir d'autre utilité que d'empêcher que ce travail ne soit entravé par des vues trop étroites, et que le progrès dans la connaissance de la dépendance mutuelle des choses ne trouve un obstacle dans les préjugés traditionnels ».

« Ceci nous conduit dans le domaine d'une autre science, dans le domaine de la physique où l'objet auquel est destiné ce travail ne nous permet pas de pénétrer aujourd'hui* ».

Faisons abstraction de la première hypothèse, qu'il se puisse que « la réalité sur laquelle est fondé l'espace forme une variété discrète » quoique nous ne voulions pas prétendre par là que peut-être un jour la solution définitive du problème de l'espace ne se trouve pas dans cette partie de l'alternative; la théorie des quanta nous empêche d'ailleurs de renoncer à cette manière de voir; mais pour l'instant, laissons-la de côté et cherchons à pénétrer le sens de la 2e hypothèse. Riemann y nie que la métrique de l'espace soit indépendante des phénomènes physiques qui se déroulent dans son sein, et qu'elle soit fixée dès l'abord, de telle sorte qu'alors le réel entre dans l'espace comme en une maison locative ; *il affirme plutôt*, contrairement à la croyance habituelle, *que l'espace en soi n'est pas autre chose qu'une multiplicité tridimensionnelle amorphe et que c'est le contenu matériel qui le remplit qui lui donne sa forme et détermine ses rapports de mesure.* Le problème est alors à résoudre qui consiste à trouver suivant quelles lois cette détermination se fait; la forme métrique fondamentale changera au cours du temps, comme la matière change dans l'univers. La possibilité du changement de lieu d'un corps sans altération de ses rapports métriques est retrouvée si le corps entraîne dans son mouvement le « champ métrique » qu'il engendre; de même une masse qui sous l'influence d'un champ de force créé par elle, a pris une figure d'équilibre, se déformerait si l'on pouvait fixer le champ de force tout en déplaçant la masse, mais en fait conserve sa forme dans un

* Riemann. Œuvres, trad. Laugel, Paris, 1898, p. 297.

mouvement suffisamment lent puisqu'elle entraîne avec elle le champ de force qu'elle engendre. Nous préciserons l'idée hardie de Riemann et nous montrerons que si cette manière de voir est judicieuse, deux portions quelconques d'espace qui peuvent passer de l'une à l'autre par une déformation continue, doivent être considérées comme congruentes au sens que nous avons donné à ce mot dans le développement des principes, puisque la même quantité de matière remplit aussi bien l'une des portions que l'autre. Pour simplifier notre analyse, nous supposerons que la matière peut être décrite au moyen de grandeurs scalaires seulement : densité de masse, densité de charge, etc. Fixons un instant du temps pour lequel la densité de charge, par exemple, est une fonction $\varrho = f(x_1, x_2, x_3)$ bien déterminée des coordonnées x_i d'un certain système, et supposons que dans un autre système x_i^* elle soit une autre fonction $f^*(x_1^* x_2^* x_3^*)$.

Faisons d'abord une remarque. Les débutants sont souvent dans l'embarras parce qu'ils ne font pas attention que dans les écrits mathématiques, on utilise en général les lettres pour désigner des *fonctions* et que dans les mémoires de physique ou de physique mathématique, ces lettres désignent des *grandeurs*. Ainsi on emploie en thermodynamique une lettre déterminée E par exemple pour désigner l'énergie d'un gaz, on emploie la même lettre si on la considère comme fonction de la pression p et de la température θ, ou comme fonction du volume v ou de la température θ. Mais le mathématicien utilise deux signes différents :

$$E = \Phi(p, \theta) = \Psi(v, \theta).$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}$ qui ont des significations différentes sont désignées pourtant par le signe commun $\frac{\partial E}{\partial\theta}$ dans les livres de physique; mais on doit alors indiquer au moyen d'une indice (comme l'a fait Boltzmann) ou de quelques mots ajoutés dans le texte, que dans un cas la dérivation se fait en laissant p constant, et dans l'autre en laissant v constant. Le symbolisme mathématique est univoque sans qu'il soit nécessaire de faire de telles additions*. Nous imaginerons ensuite, bien que les choses soient plus compliquées, une optique très simple dont la loi fondamentale dit : le rayon lumineux qui part d'un point M pour aboutir à un observateur en P est une ligne « géodésique », c'est celle qui, parmi toutes les courbes joignant M à P, a la plus petite longueur; nous faisons abstraction de la vitesse finie de propagation de la lumière. Nous imaginons encore que l'œil soit un point qui perçoit immédiatement l'angle θ, défini par (15) entre les rayons lumineux:

* Bien entendu, nous ne faisons pas ici une critique des notations physiques; elles sont conformes à l'esprit de la physique puisque c'est sur des *grandeurs* que celle-ci opère.

l'œil a donc une image des objets extérieurs qui ne se construit qu'avec des directions (nous ignorons les qualités de la couleur). Non seulement l'action des choses physiques les unes sur les autres, mais aussi les actions psychophysiques d'échange sont soumises à la loi de la continuité : la direction dans laquelle nous percevons des objets n'est pas déterminée par le lieu où ils se trouvent, mais bien par la direction des rayons lumineux qui, arrivant d'eux, atteignent la rétine, donc c'est l'état du champ optique dans le voisinage du corps qui paraît donner du monde une connaissance objective. Dire qu'une portion de matière G est la même qu'une portion G', c'est dire qu'à tout point P qui voit G, on peut faire correspondre un point P' qui voit G' (et inversement) de manière que l'image qu'il a de G' soit la même que l'image que P a de G (en entendant le mot image avec le sens bien précis que nos hypothèses entraînent). Soit un système déterminé de coordonnées x_i ; les grandeurs scalaires qui caractérisent l'état des corps, comme la densité électrique ϱ sont des fonctions bien déterminées

$$\varrho = f(x_1 x_2 x_3),$$

soit de plus

$$\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik} dx_i dx_k,$$

la forme métrique fondamentale, où les g_{ik} sont des fonctions déterminées de x_1, x_2, x_3. Imaginons encore une représentation continue de l'espace sur lui-même, qui fasse correspondre un point P' à un point P dans le système utilisé, soient :

$$P = (x_1 x_2 x_3), \qquad P' = (x'_1 x'_2 x'_3)$$

les coordonnées de deux points et

$$x'_i = \varphi_i(x_1 x_2 x_3). \tag{16}$$

les équations de la transformation ; par elles, une portion S de l'espace se transforme en une portion S' ; nous allons montrer que S' est congruent à S au sens qu'on a donné de ce mot, si nous adoptons la manière de voir de Riemann. Utilisons à cet effet un deuxième système de coordonnées dans lequel le point P a pour coordonnées les nombres x'_i, déterminés par (16); ces formules (16) sont donc les formules de transformation. L'ensemble à trois variables des valeurs de x' qui représente S est identique à celui des valeurs des x qui représente S'. Un point quelconque P a en x' les mêmes coordonnées que P' en x. Imaginons maintenant l'espace rempli d'une deuxième manière par de la matière ; et supposons les grandeurs scalaires qui caractérisent le nouvel état, données par les formules

$$\varrho = f(x'_1 x'_2 x'_3) \text{ au point } P.$$

Si la détermination métrique de l'espace est donnée indépendamment de la matière, la forme métrique fondamentale sera comme pour la première configuration matérielle, l'expression :

$$\sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k = \sum_{ik} g'_{ik}(x'_1 x'_2 x'_3) dx'_i dx'_k ;$$

où l'on a effectué dans le second membre la transformation de coordonnées. Mais si les rapports de mesure sont déterminés par le contenu matériel — et nous voulons admettre maintenant avec Riemann, que cela soit bien ainsi — alors la forme métrique s'écrit dans le deuxième système

$$\sum_{ik} g_{ik}(x'_1 x'_2 x'_3) dx'_i dx'_k.$$

puisque cette deuxième distribution s'exprime avec les x', comme la première avec les x. D'après nos principes d'optique géométrique l'aspect du domaine S' dans la première configuration sera pour un observateur en P', le même qu'un observateur en P observera en S avec la deuxième configuration.

Le simple fait que je puis pétrir une sphère de plâtre dans ma main, de façon à lui donner une forme tout à fait quelconque, paraît être en contradiction avec le point de vue de Riemann. Cela n'est pourtant pas probant ; car si Riemann a raison, une toute autre déformation de la structure atomique du plâtre et aussi un bouleversement de toutes les masses dans l'univers seront nécessaires, entre autres, afin que l'aspect de l'objet comprimé paraisse sphérique à n'importe quel observateur. La raison en est qu'un aspect visuel n'est pas attaché à une portion d'espace en soi, mais bien que cet aspect résulte de la configuration matérielle de l'univers, à tel point qu'il peut être quelconque moyennant une distribution convenable de la matière. Par suite, on peut aussi évoquer le *même* aspect visuel en deux portions différentes de l'espace par une distribution *ad hoc* de la matière. Einstein a fait obtenir la victoire aux idées de Riemann (sans d'ailleurs avoir été guidé par Riemann) ; mais en examinant le point de vue einsteinien, on voit qu'une théorie valide ne pouvait confirmer ces idées qu'après que le *temps* fut rattaché comme une quatrième coordonnée aux trois coordonnées spatiales, comme le montre la théorie de la relativité restreinte. Puisque la notion de « congruence » d'après Riemann ne conduit à aucune métrique en général, on doit en effet chercher ailleurs « le principe intime des rapports métriques ». Il réside d'après Einstein dans les forces de la *gravitation*. Dans la théorie d'Einstein (chap. IV), les coefficients g_{ik} de la forme métrique jouent le même rôle que le potentiel dans la théorie newtonienne ; les lois d'après lesquelles la matière remplissant l'espace détermine la métrique, sont les lois de la gravitation. Le champ de gravitation exerce sur les rayons lumineux et sur les corps « solides » que nous prenons comme étalons de mesure, une action telle que si nous utilisons les rayons lumineux et les étalons pour mesurer des objets à la manière habituelle, il en résulte une métrique qui ne s'écarte que très peu de la métrique euclidienne. Mais les rapports métriques ne proviennent pas d'un espace considéré comme forme des phénomènes, mais ils naissent du calcul des modifications physiques des étalons et des rayons lumineux déterminés par le champ de gravitation.

Les résultats de Riemann engagèrent les mathématiciens à édifier la construction formelle du système géométrique qui en dérive : Christoffel, Ricci, Levi-Civita en furent les premiers et les plus importants protagonistes.[8]) Mais le vrai continuateur de Riemann, celui dont le génie mathématique et physique est du même ordre que le génie de l'illustre géomètre, celui qui accomplit, soixante-dix ans après, les prophéties que Riemann avait énoncées avec les précisions que nous venons de rappeler, c'est Einstein.

Par un examen des principes mathématiques, examen que les conséquences de la théorie d'Einstein rendaient nécessaire, l'auteur du présent livre a fait néanmoins la remarque que la géométrie riemannienne n'a réalisé qu'une partie de l'idéal d'une géométrie infinitésimale parfaite; il y a encore un dernier élément de géométrie globale à éliminer, qui provient d'ailleurs toujours de son passé euclidien. En effet, Riemann suppose que l'on peut comparer l'une à l'autre les mesures de deux éléments linéaires situés à *deux endroits différents ; la possibilité d'une telle comparaison à distance ne peut être conditionnée dans une véritable géométrie infinitésimale ;* il n'y a d'admissible que le principe qui rend possible le transport d'un étalon de longueur d'un point à un point infiniment voisin.

Ces remarques préliminaires étant faites, nous arrivons au développement systématique de la géométrie infinitésimale pure,[9]) il se fera en trois étapes : *le continu amorphe, la multiplicité à connexion affine, l'espace métrique.* Nous croyons que cette théorie a atteint son but et qu'elle a acquis sa forme définitive ; nous croyons que c'est une *géométrie* véritable, une doctrine de *l'espace lui-même,* et non pas seulement comme la géométrie d'Euclide, et presque tout ce qu'on a coutume d'appeler géométrie, une doctrine des formes possibles dans l'espace.

§ 13. — Tenseurs et densités tensorielles dans une multiplicité quelconque.

Multiplicité à n dimensions. — Conformément au but très général que nous poursuivons, nous supposerons que l'espace est un continuum à n dimensions. On peut par suite le représenter au moyen de n coordonnées x_1, x_2, ...x_n dont chacune prend une valeur bien déterminée en chaque point de l'espace ; des points différents correspondent à des systèmes de valeurs différents pour les coordonnées. Si $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ...$\bar{x}_n$ est un deuxième système de coordonnées, il doit y avoir entre les cordonnées x et $\bar{x}$ d'un même point des relations :

(17) $$x_i = f_i(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
qui s'expriment au moyen de certaines fonctions f_i desquelles nous supposerons qu'elles sont continues et qu'elles possèdent des dérivées continues
$$\alpha_k^i = \frac{\partial f_i}{\partial \bar{x}_k}$$
dont le déterminant n'est pas nul. Cette dernière condition est nécessaire et suffisante, pour que la géométrie affine soit valable dans l'infiniment petit, c'est-à-dire afin qu'il y ait des relations linéaires résolubles entre les différentielles des coordonnées dans les deux systèmes :

(18) $$dx_i = \sum_k \alpha_k^i d\bar{x}_k$$

Nous admettrons l'existence et la continuité des dérivées d'ordre supérieur là où elles se présenteront au cours de nos investigations. Dans chaque cas, la notion de fonction du lieu, continue et dérivable a un sens invariant indépendant du système de coordonnées; les coordonnées elles-mêmes sont de telles fonctions.

Notion du tenseur. — Les coordonnées relatives dx_i d'un point $P'(x_i + dx_i)$ infiniment voisin d'un point $P(x_i)$ sont les composantes d'un *élément linéaire* en P ou d'une *translation infinitésimale* $\overline{PP'}$ de P. Par le passage d'un système de coordonnées à un autre, les formules (18) transforment ces composantes, les α_k^i sont les valeurs des dérivées au point P. Les translations infinitésimales jouent le même rôle pour le développement du calcul tensoriel que celui que jouent les translations finies pour l'édification de la géométrie affine (Ch. I). Il est essentiel de remarquer que dans le cas qui nous occupe une *translation est liée essentiellement à un point P;* dire que deux translations en deux points différents sont égales ou différentes n'a aucun sens. On pourrait dire peut-être que deux translations infinitésimales en deux points différents sont égales si elles ont les mêmes composantes, mais parce que les α_k^i ne sont pas des constantes en général, il s'ensuivrait que cette égalité ayant lieu dans un système de coordonnées n'aurait plus lieu dans un autre. C'est pourquoi il n'est possible de parler que de translations d'un *point* et non plus comme dans le chapitre I de translation de tout l'espace, et par suite, on ne parlera pas simplement d'un vecteur ou d'un tenseur, mais bien d'un *vecteur* ou d'un *tenseur en un point P*. Un tenseur en P est une forme linéaire de plusieurs séries de variables dépendant du système de coordonnées auquel on rapporte le voisinage de P; cette dépendance est telle que les expressions de la forme linéaire dans deux systèmes de coordonnées x et $\bar{x}$, passent de l'une à l'autre, quand on transforme certaines séries de variables (celles dont l'indice est supérieur) d'une manière cogrédiente, et les autres séries (celles dont l'indice est inférieur) d'une manière contragrédiente à la façon dont se transforment les dx_i ; c'est-à-dire suivant les relations :

$$\xi^i = \sum_k \alpha^i_k \bar{\xi}^k, \text{ pour les premières.}$$

(19)

$$\bar{\xi}_i = \sum_k \alpha^k_i \xi_k, \text{ pour les secondes.}$$

Les α^k_i sont les valeurs des dérivées au *point P*. Les coefficients de la forme linéaire sont dits les *composantes* du tenseur dans le système de coordonnées choisi, celles-ci sont covariantes pour les indices qui correspondent aux variables affectées d'indices supérieurs, contravariantes pour les autres indices. La possibilité de la notion de tenseur repose sur le fait que le passage d'un système de coordonnées à un autre s'exprime pour les différentielles par des formules de transformation *linéaires*. Il est fait ici application de l'idée mathématique extrêmement féconde qui consiste à « linéariser » un problème par le passage à l'infiniment petit. Toute *l'algèbre tensorielle*, dans les opérations de laquelle n'entrent que des tenseurs attachés *au même point, est identique à celle qu'on a développée au chapitre I*. Nous appelons aussi *vecteurs* les tenseurs du premier ordre. Il y a des vecteurs covariants et des vecteurs contravariants ; là où nous dirons vecteur sans plus de précision, il faudra toujours entendre vecteur contravariant. Parmi les grandeurs infiniment petites de cette espèce, il faut distinguer les éléments linéaires en P. A chaque système de coordonnées sont attachés n « vecteurs unitaires » $\mathbf{e}_i$ en P, ce sont ceux qui possèdent les composantes :

$$\begin{array}{c|l} \mathbf{e}_1 & 1, 0, 0, \ldots, 0 \\ \mathbf{e}_2 & 0, 1, 0, \ldots, 0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}_n & 0, 0, 0, \ldots, 1 \end{array}$$

dans le système choisi. Un vecteur $\mathbf{x}$ en P dont les composantes sont ξ^i peut s'écrire

$$\mathbf{x} = \xi^1 \mathbf{e}_1 + \xi^2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \xi^n \mathbf{e}_n.$$

Les vecteurs unitaires $\bar{\mathbf{e}}_i$ d'un autre système $\bar{x}$ sont liés aux anciens par les équations :

$$\bar{\mathbf{e}}_i = \sum_k \alpha^k_i \mathbf{e}_k.$$

La possibilité du passage des composantes covariantes aux composantes contravariantes n'est évidemment pas en question ici. Deux éléments de ligne, linéairement indépendants, aux composantes dx_i et δx_i déterminent un *élément de surface* aux composantes ;

$$dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i = \Delta x_{ik},$$

trois éléments de ligne déterminent de la même façon un élément d'espace à trois dimensions, etc. Des formes différentielles invariantes qui font correspondre un nombre à un élément linéaire arbitraire, ou à un élément de surface, et cela linéairement, sont des « tenseurs linéaires » (= tenseurs covariants symétriques gauches.) La convention passée plus haut sur l'abolition du signe Σ est maintenue.

Courbe. — Si à chaque valeur d'un paramètre s on fait correspondre un point $P = P(s)$, d'une façon continue, s désignant le temps, on a la représentation d'un « mouvement » : à défaut d'une autre expression nous emploierons ce nom, même si le paramètre n'a pas la signification que nous venons de dire. En utilisant un système de coordonnées déterminé, nous trouvons une représentation

$$x_i = x_i(s) \tag{20}$$

du mouvement au moyen de n fonctions continues $x_i\,(s)$ dont nous supposerons encore qu'elles possèdent des dérivées continues. Quand le paramètre passe de s à $s + ds$ le point P subit une translation de composantes dx_i; le quotient $\frac{dx_i}{ds} = u^i$ donne les composantes d'un vecteur en P qui est la « vitesse »; (20) donne en même temps une représentation paramétrique de la trajectoire du mouvement. Deux mouvements s'effectuent sur une même trajectoire, si l'on passe de l'un à l'autre par une transformation du paramètre s, $s = w(\bar{s})$, w étant une fonction continue, dérivable, et monotone; la courbe parcourue n'est la même que dans ce cas. Les composantes de la vitesse ne sont pas déterminées par la courbe, seuls leurs rapports (qui déterminent la *direction* de la courbe) sont déterminés.

Analyse tensorielle. — Un champ *tensoriel* d'une certaine nature est donné dans une portion d'espace, si à chaque point P de cette portion on fait correspondre un *tenseur de l'espèce en question attaché à P.* Relativement à un système de coordonnées, les composantes du champ tensoriel sont des fonctions déterminées des coordonnées du *point P;* nous les supposerons continues et à dérivées continues. L'analyse tensorielle développée au chap. I, § 8, ne s'applique pas, sans changements à un continuum quelconque. Pour l'élaboration du procédé général de différentiation, nous utilisions alors des vecteurs arbitraires covariants ou contravariants dont les composantes étaient indépendantes du lieu. Cette condition n'est invariante que vis-à-vis des transformations linéaires, et non pas vis-à-vis des transformations les plus générales, puisqu'alors les α_k^i ne sont pas des constantes. Dans une multiplicité quelconque, on ne peut développer que *l'analyse des tenseurs linéaires.* D'un champ scalaire, on tire un champ tensoriel linéaire, par la différentiation

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \tag{21}$$

d'un champ tensoriel du premier ordre, on tire un champ du second ordre

$$f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i}; \tag{22}$$

puis un autre de celui-ci,

(23) $$f_{ikl} = \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l};$$

etc.

En effet, si φ est un champ scalaire donné dans l'espace, et si x_i et $\bar{x}_i$ sont deux systèmes de coordonnées, le champ scalaire se représente dans l'un et l'autre des systèmes par les relations :

$$\varphi = f(x_1 x_2 \dots x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n).$$

Si l'on forme l'accroissement de φ pour une translation du point argument, il vient

$$d\varphi = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_i \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_i} d\bar{x}_i.$$

l'on voit ainsi que les $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sont les composantes d'un champ tensoriel du 1er ordre, qui correspond au champ scalaire φ d'une manière invariante par rapport au système de coordonnées. Nous obtenons ainsi un exemple simple pour illustrer la notion de champ de vecteurs; en même temps, on voit que l'opération « grad » est invariante non seulement pour les transformations linéaires de coordonnées, mais pour toutes les transformations, comme nous l'annoncions.

Pour obtenir le champ (22), nous procédons de la manière suivante. Au point $P = P_{00}$ nous menons les 2 éléments linéaires de composantes dx_i et δx_i dont les extrémités sont P_{10} et P_{01}. Nous déplaçons l'élément dx en faisant décrire à son origine le segment $\overline{P_{01}P_{11}}$. Nous appellerons ce déplacement la translation δ. Les composantes dx_i subissent alors l'accroissement δdx_i,

$$\delta dx_i = \{x_i(P_{11}) - x_i(P_{01})\} - \{x_i(P_{10}) - x_i(P_{00})\}$$

Echangeons maintenant d et δ. Par une translation analogue d de l'élément linéaire δx le long de $\overline{P_{00}P_{10}}$, l'extrémité décrivant $\overline{P_{10}P'_{11}}$, l'accroissement de dx_i est

$$d\delta x_i = \{x_i(P'_{11}) - x_i(P_{10})\} - \{x_i(P_{01}) - x_i(P_{00})\}.$$

par suite :

(24) $$\delta dx_i - d\delta x_i = x_i(P_{11}) - x_i(P'_{11}).$$

Ce n'est que dans le cas où P_{11} et P'_{11} coïncident, c'est-à-dire si les deux éléments dx et δx, par les déplacements respectifs δ et d, forment un « parallélogramme » infiniment petit, que l'on a :

(25) $$\delta dx_i - d\delta x_i = 0.$$

Nous supposerons qu'il en est ainsi.

Soit maintenant un champ vectoriel covariant aux composantes f_i, nous formons la variation de l'invariant $df = f_i dx_i$ pour la translation δ :

$$\delta df = \delta f_i dx_i + f_i \delta dx_i$$

échangeons d et δ et soustrayons :

$$\Delta f = (\delta d - d\delta) f = (\delta f_i dx_i - df_i \delta x_i) + f_i (\delta dx_i - d\delta x_i).$$

et à cause de l'hypothèse faite :

(26) $$\Delta f = \delta f_i dx_i - df_i \delta x_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right) dx_i \delta x_k.$$

Si l'on n'aime pas opérer avec des grandeurs infiniment petites, on peut remplacer les différentielles par des dérivées. A chaque couple de valeurs de 2 paramètres s et t (dans un certain voisinage de $s=0$, $t=0$), faisons correspondre un point (s, t) de notre multiplicité; les fonctions $x_i = x_i\ (s, t)$ qui représentent ce « mouvement à deux paramètres » s'effectuant sur une surface, seront supposées dérivables deux fois, les secondes dérivées étant elles-mêmes continues. En chaque point (s, t) on peut distinguer 2 vecteurs vitesses aux composantes $\frac{dx_i}{ds}$, $\frac{dx_i}{dt}$. Nous pouvons choisir la correspondance de manière qu'aux valeurs $s = 0$, $t = 0$ correspondent le point P_{00} et que les deux vecteurs vitesses coïncident avec deux vecteurs u^i, v^i prescrits arbitrairement (il suffit que x_i soit fonction linéaire de s et de t) ; d signifiera la dérivation $\frac{d}{ds}$ et δ la dérivation $\frac{d}{dt}$. Alors :

$$df = f_i \frac{dx_i}{ds}; \qquad \delta df = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{dt} + f_i \frac{d^2 x_i}{dt ds}.$$

échangeons δ et d et soustrayons :

(27) $$\Delta f = \delta df - d\delta f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right) \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{dt}.$$

En faisant $s = t = 0$, nous obtenons au point P, les vecteurs arbitraires u et v, et l'invariant qui en dépend.

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right) u^i v^k.$$

Les relations avec les considérations infinitésimales consistent en ce que nous pouvons définir rigoureusement par cette méthode les parallélogrammes infiniment petits : ce sont ceux qui sont découpés sur la surface $x_i = x_i\ (s, t)$ par les lignes coordonnées $s = const;$ $t = const.$ Ces relations nous font penser au *théorème de Stokes*. L'invariant linéaire différentiel $f_i dx_i$ est dit *intégrable* si son intégrale le long d'une courbe fermée (tourbillon intégral) quelconque est nulle (On sait que cela n'est possible que pour une différentielle totale exacte). Imaginons une surface s'appuyant sur la courbe fermée, et soient $x_i = x_i\ (s, t)$ sa représentation paramétrique; décomposons-la en parallélogrammes infiniment petits par les lignes coordonnées. Le tourbillon le long de la courbe frontière se ramène au tourbillon pris autour de chaque maille du réseau de la surface, et ce tourbillon est donné par l'expression (27) multipliée par $ds\, dt$.

On obtient ainsi une décomposition différentielle du tourbillon intégral, et le tenseur (22) est en chaque endroit la mesure de l'intensité du tourbillon.

De la même manière, on s'élève au tenseur (23). Au lieu du parallélogramme infinitésimal, on aura à utiliser le parallélipipède construit sur les éléments linéaires d, $\mathfrak{d}$, δ. Indiquons rapidement le calcul

(28) $$\mathfrak{d}(f_{ik}dx_i\delta x_k) = \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} dx_i \delta x_k \mathfrak{d} x_l + f_{ik}(\mathfrak{d} dx_i\, \delta x_k + \mathfrak{d}\delta x_k . dx_i).$$

or $f_{ki} = -f_{ik}$ la parenthèse est

(29) $$= f_{ik}(\mathfrak{d} dx_i . \delta x_k - \mathfrak{d}\delta x_i . dx_k).$$

Si l'on effectue dans (28) les 3 permutations cycliques de d, δ et $\mathfrak{d}$ et si l'on additionne, les 6 termes que donnera (29) se détruisent mutuellement à cause des conditions de symétrie (25) et l'on est bien conduit au tenseur (23).

Notion de densité tensorielle. — Soit $\int \mathfrak{W} dx$ un invariant intégral (on écrit dx pour dx_1, dx_2 .... dx_n). $\mathfrak{W}$ est alors une grandeur, qui dépend du système de coordonnées choisi de telle façon que lorsqu'on change celui-ci elle se trouve multipliée par la valeur absolue du déterminant fonctionnel de la transformation. Si nous supposons que cette intégrale mesure la quantité d'une substance qui remplit le domaine d'intégration, $\mathfrak{W}$ est alors la densité de cette substance. Une grandeur de cette espèce sera désignée sous le nom de *densité scalaire*. C'est une importante notion dont l'introduction se justifie aussi bien que celle du scalaire, et qui d'ailleurs ne s'y réduit pas. D'une manière analogue, nous pouvons parler de *densités tensorielles*. Une forme linéaire de plusieurs séries de variables, dépendant d'un système de coordonnées choisi, ces séries étant affectées d'indices soit supérieurs, soit inférieurs, est une *densité tensorielle* au point P, si l'on obtient l'expression de cette forme dans un nouveau système de coordonnées en soumettant les variables aux transformations (19) et en multipliant le résultat obtenu par la valeur absolue du déterminant fonctionnel

$$\Delta = val.\ abs. \left| \alpha_i^k \right|$$

L'emploi des mots : composantes, covariant, contravariant, symétrique, symétrique gauche, champ, etc... est analogue à leur emploi pour des tenseurs. Pour autant que les tenseurs et les densités tensorielles ont un sens physique, nous croyons avoir explicité, au moyen de ces deux notions la différence entre les *extensions* et les *intensités : les tenseurs sont les grandeurs d'intensité, les densités tensorielles sont les grandeurs d'extension*. Les densités tensorielles covariantes symétriques gauche jouent le même rôle particulier parmi les densités tensorielles que celui que jouent les tenseurs correspondants dans l'ensemble des tenseurs; nous les appellerons aussi des *densités tensorielles linéaires*.

Algèbre des densités tensorielles. — Comme pour les tenseurs nous avons les opérations :

1) Addition de densités de même espèce; multiplication d'une densité par un nombre.

2) Contraction.

3) Multiplication d'une densité tensorielle par un tenseur (et non pas multiplication de deux densités), car par la multiplication de deux densités scalaires, par exemple, on n'obtiendrait pas une nouvelle densité scalaire, mais au contraire une grandeur qui se trouverait multipliée par le carré du jacobien de la transformation quand on changerait de coordonnées. La multiplication d'un tenseur par une densité tensorielle donne toujours une densité tensorielle (dont l'ordre est égal à la somme des ordres des facteurs); par exemple le vecteur contravariant f^i et la densité covariante $\mathfrak{w}_{ik}$ donnent par leur produit une densité tensorielle mixte de 3[e] ordre dont les composantes sont $f^i\mathfrak{w}_{kl}$; cette formation est invariante.

L'analyse des densités tensorielles ne se laisse fonder dans une multiplicité quelconque que pour des champs *linéaires*. Elle conduit alors aux processus de divergence

$$\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} = \mathfrak{w} \tag{30}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{w}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{w}^i \tag{31}$$

(30) nous permet d'obtenir une densité scalaire à partir d'un champ de densité du 1[er] ordre et linéaire; (31) part d'un champ linéaire du 2[e] ordre ($\mathfrak{w}^{ik} = -\mathfrak{w}^{ki}$) et crée un champ du 1[er]. Ces opérations sont indépendantes du système de coordonnées. D'un champ du 1[er] ordre $\mathfrak{w}^i$ qui provient du champ du 2[e] ordre $\mathfrak{w}^{ik}$ d'après le procédé (31), l'opération (30) tire un scalaire *nul*, etc.

L'invariance de (30) se démontre par des considérations basées sur la théorie du mouvement des milieux continus.

Soit en effet ξ^i un champ vectoriel donné; par

$$\bar{x}_i = x_i + \xi^i \delta t \tag{32}$$

on définit une *translation infiniment petite* des points du milieu continu, par laquelle le point (x_i) est transporté au point $(\bar{x}_i)$; le facteur δt peut représenter l'élément de temps pendant lequel s'effectue cette déformation. L'excès du déterminant de la transformation

$$A = \left| \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \right|$$

sur l'unité est

$$\delta t \cdot \frac{\partial \xi^i}{\partial x_i}.$$

Par ce déplacement une portion G du continuum qui correspond au domaine X des variables x_i, est devenue la portion $\bar{G}$ très peu différente. Si $\mathfrak{f}$ est un champ de densité scalaire, que nous imaginerons être la densité de la substance qui remplit G; la quantité de cette substance est alors dans G :

$$\int_X \mathfrak{f}(x)\,dx,$$

celle qui remplit $\bar{G}$ est :

$$\int \mathfrak{f}(\bar{x})d\bar{x} = \int_X \mathfrak{f}(\bar{x})A\,dx$$

où dans le 2^e^ membre on suppose $\bar{x}_i$ remplacé par sa valeur (32). (Nous déplaçons ici le volume vers la substance; on pourrait bien entendu déplacer la substance dans le volume; alors $\mathfrak{f}\xi^i$ serait l'intensité du courant de déplacement). Pour l'accroissement de substance que la portion d'espace G a gagné, on trouve l'intégrale étendue à X de la quantité

$$\mathfrak{f}(\bar{x}).A - \mathfrak{f}(x),$$

considérée comme fonction des x_i; or cette expression est :

$$\mathfrak{f}(\bar{x})(A - 1) - [\mathfrak{f}(\bar{x}) - \mathfrak{f}(x)] = \delta t\left[\mathfrak{f}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x_i}\xi_i\right] = \delta t.\frac{\partial(\mathfrak{f}\xi_i)}{\partial x_i}.$$

Par suite, nous établissons bien par la formule

$$\frac{\partial(\mathfrak{f}\xi^i)}{\partial x_i} = \mathfrak{w}$$

une dépendance invariante entre les deux densités scalaires $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{w}$ et le champ vectoriel contravariant ξ^i. Or, chaque densité vectorielle $\mathfrak{w}^i$ se laisse représenter par un produit $\mathfrak{f}\xi^i$; il suffit en effet de définir dans un système de coordonnées déterminé une densité scalaire $\mathfrak{f}$ et un champ de vecteurs ξ^i par $\mathfrak{f} = 1.$, $\xi^i = \mathfrak{w}^i$, alors on aura pour tous les systèmes $\mathfrak{w}^i = \mathfrak{f}\xi^i$; nous avons alors bien obtenu (30) d'une manière invariante.

Pour terminer ces réflexions, nous ajouterons des considérations sur le *principe d'intégration par parties* qui nous sera souvent utile dans la suite. Si les fonctions $\mathfrak{w}^i$ s'évanouissent à la limite d'un domaine G, on aura :

$$\int_G \frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i}\,dx = 0.$$

car cette intégrale multipliée par δt est la variation que le « volume » $\int dx$ de ce domaine subit par une déformation infinitésimale, dont les composantes sont $\delta t.\mathfrak{w}^i$.

Le procédé de divergence (30) étant bien invariant, on s'élève aux procédés d'ordre supérieur comme (31). On s'aide pour cela d'un champ de vecteurs covariants f_i, *dérivant d'un potentiel* f, $f_i = \frac{df}{dx_i}$; on forme la densité tensorielle de premier ordre $\mathfrak{w}^{ik}f_i$, dont la divergence est :

$$\frac{\partial(\mathfrak{w}^{ik}f_i)}{\partial x_k} = f_i\frac{\partial \mathfrak{w}^{ik}}{\partial x_k}.$$

En remarquant que les f_i peuvent prendre en un point P des valeurs quelconques, on termine la démonstration. De la même manière, on poursuit les calculs pour les ordres supérieurs.

§ 14. — **Multiplicité à connexion affine.**

Notion de la connexion affine. — Nous disons que le point P d'une multiplicité est en connexion affine avec son voisinage, si l'on sait dans quel vecteur en P' un vecteur quelconque en P s'est transformé quand on l'a *déplacé parallèlement* à lui-même de P au point infinitésimal voisin P'. Pour définir cette notion de déplacement parallèle [10]) nous allons lui attribuer toutes les propriétés que nous lui avons reconnues en géométrie affine (Ch. I), ni plus, ni moins, c'est-à-dire que nous postulons : *Il y a un système de coordonnées (pour le voisinage de P) au moyen duquel les composantes d'un vecteur quelconque de P ne sont pas altérées quand ce vecteur subit un déplacement parallèle infinitésimal.*

Cette condition caractérise le déplacement parallèle ; elle en fait une *propagation*, dont nous pouvons dire avec raison qu'elle laisse les vecteurs *inaltérés*. Un tel système de coordonnées est dit *géodésique* en P. Qu'arrive-t-il pour un système de coordonnées x quelconques? Soient x_0^i les coordonnées de P dans ce système, $x_0^i + dx_i$ celles de P', ξ^i les composantes d'un vecteur en P, $\xi^i + d\xi^i$ les composantes du même vecteur quand on l'a déplacé parallèlement à lui-même de P en P' [bien entendu ces composantes sont relatives au système (x)]. Tout d'abord comme le déplacement parallèle de P en P' réalise une représentation affine ou linéaire de l'ensemble des vecteurs en P dans l'ensemble des vecteurs en P', il faut que les $d\xi^i$ s'expriment linéairement en les ξ^i :

$$d\xi^i = -d\gamma^i_r \xi^r. \tag{33}$$

Ensuite les $d\gamma^i_r$ doivent être des formes différentielles linéaires des dx_i :

$$d\gamma^i_r = \Gamma^i_{rs} dx_s, \tag{33'}$$

$$\Gamma^i_{rs} = \Gamma^i_{sr} \tag{33''}$$

Pour démontrer cela, soient $\bar{x}_i$ un système de coordonnées géodésique en P ; les formules (17) et (18) règlent la transformation des x en les $\bar{x}$, et vice-versa. A cause de la nature géodésique du système $\bar{x}$, par le déplacement parallèle, ξ^i est altéré de

$$d\xi^i = d(\alpha^i_r \bar{\xi}^r) = d\alpha^i_r . \bar{\xi}^r.$$

Supposons que les ξ^i soient les composantes δx_i d'un élément linéaire en P, on a d'après cela :

$$-d\gamma^i{}_r \delta x_r = \frac{\partial^2 f_i}{\partial \bar{x}_r \partial \bar{x}_s} \delta \bar{x}_r d\bar{x}_s$$

où les dérivées secondes sont prises en P, bien entendu. Notre affirmation est démontrée et la forme symétrique bilinéaire

$$\Gamma^i_{rs}\delta x_r dx_s$$

se tire de

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial \bar{x} \partial_r \bar{x}_s}\, \delta\bar{x}_r d\bar{x}_s \tag{34}$$

par la transformation (18). Les conséquences en découlent immédiatement. Soient en effet Γ^i_{rs} des nombres donnés, quelconques à cela près qu'ils satisfont aux conditions de symétrie (33″), et définissons la connexion affine par (33) et (33′) les formules de transformation

$$x_i - x_i^0 = \bar{x}_i - \tfrac{1}{2}\Gamma^i{}_{rs}\bar{x}_r\bar{x}_s$$

définissent alors un système de coordonnées géodésique $\bar{x}_i$, en P puisque pour ce système, le passage (34) peut s'effectuer, car pour notre transformation, on a en P :

$$\bar{x}_i = 0, \quad d\bar{x}_i = dx_i(\alpha^i_k = \delta^i_k), \quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial \bar{x}_r \partial \bar{x}_s} = -\Gamma^i_{rs}.$$

Les formules qui donnent les composantes Γ^i_{rs} lorsqu'on passe d'un système à un autre s'obtiennent facilement en s'inspirant des considérations précédentes ; nous n'en ferons d'ailleurs aucun usage. Les Γ^i ne sont pas les composantes d'un tenseur (contravariant en i covariant en r et s) en P ; elles possèdent bien ce caractère pour des transformations linéaires ; mais elles le perdent pour des transformations quelconques. En effet, dans un système de coordonnées géodésique, elles sont nulles. Cependant chaque modification virtuelle de la connexion affine $[\Gamma^i_{rs}]$ peut être, elle, un tenseur, car :

$$[d\xi^i] = [\Gamma^i_{rs}]\xi^r dx_s$$

est la différence des deux vecteurs qui résultent de deux propagations différemment effectuées du vecteur ξ de P en P'.

Le *déplacement parallèle d'un vecteur covariant* ξ_i du point P au point P' se définit univoquement par la condition que le déplacement simultané de ξ_i et d'un vecteur contravariant η^i n'altère pas le produit invariant $\xi_i\,\eta^i$:

$$d(\xi_i\eta^i) = d\xi_i\eta^i + \xi_r d\eta^r = (d\xi_i - d\gamma^r_i\xi_r)\eta^i = 0$$

par suite :

$$d\xi_i = \sum_r d\gamma^r_i\xi_r. \tag{35}$$

Un *champ de vecteur* ξ^i sera dit *stationnaire* en P, si les vecteurs aux points voisins P', proviennent du vecteur en P par déplacement parallèle, c'est-à-dire si les équations aux différentielles totales

$$d\xi^i + d\gamma^i_r\xi^r = 0 \qquad \left(\text{ou } \frac{d\xi^i}{dx_s} + \Gamma^i_{rs}\xi^r = 0\right)$$

sont satisfaites. Il y a évidemment un tel champ ayant en P des composantes données d'avance (nous utiliserons cette remarque plus loin). La même notion peut s'étendre aux champs covariants. Nous nous occuperons dorénavant des *multiplicités affines*, c'est-à-dire des *multiplicités pour lesquelles tous les points sont en connexion affine avec leur voisinage.* Dans un système de coordonnées quelconque les Γ^i_{rs} sont les fonctions continues des coordonnées x_i du point P. Par un choix approprié du système, les Γ^i_{rs} peuvent être amenées à s'annuler toutes en un point arbitrairement choisi P, mais il est en général impossible de les annuler toutes, pour tous les points de la multiplicité. Il n'y a aucune différence entre les points de la multiplicité, relativement à la nature de leur connexion affine avec leur voisinage ; à cet égard la multiplicité est homogène. Il n'y a pas non plus de différences à faire entre les diverses multiplicités, suivant la nature de la connexion. La condition de laquelle nous sommes partis ne permet précisément qu'une seule espèce déterminée de connexion affine.

Lignes géodésiques. — Si un point mobile transporte avec lui un vecteur variable à volonté, à chaque valeur du paramètre s qui représente le temps, nous n'avons pas seulement à considérer un point

$$P(s) \ : \ x_i = x_i(s)$$

dans la multiplicité, mais encore un vecteur en ce point dont les composantes v^i sont fonctions de s. Le vecteur est stationnaire à l'instant s, si

$$\frac{dv^i}{ds} + \Gamma^i_{\alpha\beta} v^\alpha \frac{dx_\beta}{ds} = 0 \tag{36}$$

Dans un déplacement quelconque le premier membre V^i de (36) constitue la composante i d'un vecteur en (s) attaché au mouvement d'une manière indépendante du système de coordonnées; il mesure la variation du vecteur v^i en ce point pendant l'unité de temps. Car en passant de $P(s)$ en $P'(s+ds)$ le vecteur v^i en P devient

$$v^i + \frac{dv^i}{ds} ds$$

en P'. Déplaçons alors v^i d'une manière invariable de P en P'; nous obtenons :

$$v^i + \delta v^i = v^i - \Gamma^i_{\alpha\beta} v^\alpha dx_\beta \,;$$

la différence de ces deux vecteurs en P' représente bien la variation de v^i dans le temps ds, elle a pour composantes :

$$\frac{dv^i}{ds} ds - \delta v^i = V^i ds \,.$$

On peut encore montrer le caractère invariant du vecteur V de la manière suivante, qui est purement analytique : Prenons un vecteur covariant ξ_i arbitraire en $P(s)$, formons la variation de l'invariant $\xi_i v^i$ dans le passage de s à $s+ds$, en supposant que le vecteur ξ_i ne soit pas altéré, alors :

$$\frac{d(\xi_i v^i)}{ds} = \xi_i V^i.$$

Si V est nul quel que soit s, le vecteur v se déplace sans changer avec le point P le long de la courbe.

Dans chaque mouvement, un vecteur intéressant à considérer et qui se déplace avec le point mobile, c'est la vitesse $u^i = \frac{dx_i}{ds}$; dans ce cas particulier, le vecteur V se représentera par :

$$U^i = \frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = \frac{d^2x_i}{ds^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}$$

et nous l'appellerons *l'accélération*, puisqu'il mesure la variation de la vitesse par unité de temps. Un mouvement dans lequel la vitesse reste constamment invariable est dit une *translation ;* la trajectoire d'une translation est donc une courbe qui conserve sa direction, c'est une *ligne géodésique* ou une *ligne droite.* Conformément à l'interprétation de la droite par translation (voir Chap. I, § I), l'essence de la ligne droite réside dans cette dernière propriété.

L'analyse des tenseurs et des densités tensorielles se construit dans une multiplicité affine tout aussi aisément et complètement que dans la géométrie linéaire. Soient, par exemple, f^k_i les composantes, covariantes en i et contravariantes en k, d'un champ tensoriel de deuxième ordre; considérons en P deux vecteurs quelconques; l'un contravariant ξ^i l'autre covariant η_i; soit l'invariant :

$$f^k_i \xi^i \eta_k$$

et formons sa variation quand ξ et η se déplacent parallèlement à eux-mêmes :

$$d(f^k_i \xi^i \eta_k) = \frac{\partial f^k_i}{\partial x_l} \xi^i \eta_k dx_l - f^k_r \eta_k d\gamma^r_i \xi^i + f^r_i \xi^i d\gamma^k_r \eta_k;$$

par suite :

$$f^k_{il} = \frac{\partial f^k_i}{\partial x_l} - \Gamma^r_{il} f^k_r + \Gamma^k_{rl} f^r_i$$

sont les composantes d'un champ tensoriel du troisième ordre, covariantes en i et l, contravariantes en k et correspondant au champ f_i^k d'une manière absolument indépendante du système de coordonnées. Les termes supplémentaires sont caractéristiques, ils dépendent des composantes de la connexion affine et nous apprendrons à y reconnaître avec Einstein l'influence du champ de gravitation. Le procédé de différentiation ainsi généralisé peut s'étendre à un tenseur quelconque. Comme dans l'analyse tensorielle, l'opérateur « grad » est l'opérateur fondamental, de même dans l'analyse des *densités tensorielles*, l'opérateur « div » est l'opérateur essentiel. Il engendre en effet des opérateurs analogues qui peuvent s'appliquer aux densités de tous ordres. Veut-on, par exemple, former la divergence d'une densité mixte $\mathfrak{w}^k_i$ du deuxième ordre : on prend un champ de vecteur ξ^i stationnaire en P, et l'on construit la divergence de la densité ξ^i

$$\frac{\partial(\xi^i \mathfrak{w}^k_i)}{\partial x_k} = \frac{\partial \xi^r}{\partial x_k} \mathfrak{w}^k + \xi^i \frac{\partial \mathfrak{w}^k_i}{\partial x_k} = \xi_i \left(-\Gamma^r_{ik} \mathfrak{w}^k_r + \frac{\partial \mathfrak{w}^k_i}{\partial x_k} \right).$$

Cette grandeur est une densité scalaire, et par suite, puisque les composantes d'un champ de vecteurs stationnaire en P peuvent prendre des valeurs quelconques,

$$\frac{\partial \mathfrak{w}_i^k}{\partial x_k} - \Gamma_{is}^r \mathfrak{w}_r^s \tag{37}$$

est une densité covariante du 1[er] ordre qui correspond à $\mathfrak{w}_i^k$ par une transformation indépendante du système de coordonnées.

Mais la *divergence* est une opération qui fait passer d'une densité à une autre d'ordre moindre d'une unité ; il y a une autre opération qui fait passer à une densité tensorielle d'ordre supérieur, c'est la *différentiation*. Soit $\mathfrak{s}$ une densité scalaire, reprenons un champ vectoriel ξ^i stationnaire et formons la divergence de $\mathfrak{s}\xi^i$

$$\frac{\partial(\mathfrak{s}\xi^i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x_i}\xi^i + \mathfrak{s}\frac{\partial \xi^i}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x_i} - \Gamma_{ir}^r \mathfrak{s}\right)\xi^i ;$$

ce qui montre que

$$\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x_i} - \Gamma_{ir}^r \mathfrak{s}$$

représente une composante d'une densité tensorielle covariante. Pour effectuer la différentiation d'une densité tensorielle d'un ordre quelconque, par exemple $\mathfrak{w}_i{}^k$, on se sert de deux champs de vecteurs auxiliaires stationnaires en P, ξ et η, et l'on différentie $\mathfrak{w}_i^k \xi^i \eta_k$. Une contraction de la densité tensorielle ainsi obtenue par différentiation ramène à la divergence.

§ 15. — **Courbure**

Soient P et P', deux points réunis par une courbe; imaginons en P, un vecteur et déplaçons-le parallèlement à lui-même le long de la courbe de P en P'. Les équations (36) qui donnent les composantes inconnues v^i du vecteur obtenu en P' n'admettent qu'une solution pour des conditions initiales données. Le *transport d'un vecteur*, effectué comme il a été dit, *n'est donc pas en général intégrable ;* c'est-à-dire que le vecteur qu'on obtiendra en P', dépend du chemin le long duquel s'est fait le déplacement. C'est seulement dans le cas très particulier, où l'intégrabilité a lieu que l'on peut parler du *même* vecteur en deux points P et P' ; ce sont alors deux vecteurs qui passent de l'un à l'autre par un déplacement parallèle le long d'une courbe quelconque joignant P à P'. Dans ce cas, on dira que la multiplicité est *euclidiennement affine.* Si on soumet tous les points d'une telle multiplicité à une translation infinitésimale, définie par la condition d'être en chaque point représentée par le *même* vecteur infiniment petit nous dirons que l'espace considéré subit une *translation d'ensemble* infinitésimale. Conformément à la suite des développements que nous avons poursuivis au chapitre I (nous renonçons ici à donner la démonstration rigoureuse), il est possible de construire des systèmes de cordonnées « *linéaires* » qui sont caractérisés par la propriété suivante : des mêmes vecteurs en des points différents y possèdent les mêmes composantes. Dans un tel système « linéaire », les composantes de la connexion affine s'évanouissent. La multiplicité est un espace affine au sens du chapitre I : *L'intégrabilité du transport vectoriel est la propriété géométrique et infinitésimale par laquelle les espaces « linéaires » se distinguent dans l'ensemble des multiplicités à connexion affine.*

Fixons à nouveau notre attention sur le *cas général;* nous ne devons donc pas nous attendre, après avoir déplacé un vecteur parallèlement à lui-même le long d'une courbe fermée, à retrouver, au bout du trajet, le même vecteur que celui qu'on considérait au départ. Comme pour la démonstration du théorème de Stokes, nous tendons sur la courbe fermée une surface que nous décomposons en parallélogrammes infiniment petits. L'altération subie par un vecteur qui se déplace sur la courbe frontière résultera des altérations qu'il subira en parcourant la frontière de chaque petit parallélogramme ; nous désignerons par dx_i et δx_i les composantes des côtés d'un tel quadrilatère issus de P; calculons la variation sur le pourtour du parallélogramme. Nous constatons d'abord que l'accroissement $\Delta\mathbf{x} = (\Delta\xi^i)$ que le vecteur $\mathbf{x} = (\xi^i)$ subit, s'obtient à partir de $\mathbf{x}$ par une correspondance linéaire, qui détermine comme on sait une matrice ΔF.

(38) $$\Delta\mathbf{x} = \Delta F(\mathbf{x}) \, ; \qquad \Delta\xi^\alpha = \Delta F^\alpha_\beta . \xi^\beta.$$

Si $\Delta F = 0$, la multiplicité en P est « *plane* » dans l'élément de surface considéré ; si cela arrive pour tous les éléments d'une surface finie, chaque vecteur qui parcourt une courbe fermée située sur elle revient à son point de départ sans altération. — ΔF dépend aussi linéairement de l'élément de surface :

(39) $$\Delta F = F_{ik} dx_i \delta x_k = \tfrac{1}{2} F_{ik} \Delta x_{ik} \qquad (\Delta x_{ik} = dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i)\, ; \quad F_{ki} = - F_{ik}).$$

La forme différentielle que l'on vient d'écrire, caractérise la *courbure*, c'est-à-dire l'écart entre la multiplicité en P et une multiplicité qui, en P, est plane dans toutes les directions superficielles; les coefficients de cette forme ne sont pas des nombres, mais des matrices, nous pouvons dire que la courbure est définie par un « *tenseur-matrice linéaire du* 2e *ordre* ». Cherchons-en les composantes. Soient $F^\alpha_{\beta ik}$ les composantes de F_{ik} ou aussi les coefficients de la forme

(40) $$\Delta F^\alpha_\beta = F^\alpha_{\beta ik} dx_i \delta x_k.$$

Si les $\mathbf{e}_i$ sont les vecteurs unitaires du système choisi, la formule

(41) $$\Delta\mathbf{x} = F^\alpha_{\beta ik} \mathbf{e}_\alpha \xi^\beta dx_i \delta x_k$$

donne la variation cherchée. C'est dire que les $F^\alpha_{\beta ik}$ sont les composantes contravariantes en α, covariantes en β, i, k d'un tenseur du

4° ordre. Leur expression au moyen des composantes de la connexion affine sont :

$$F^\alpha_{\beta ik} = \left(\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta k}}{\partial r_i} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta i}}{\partial x_k}\right) + (\Gamma^\alpha_{ri}\Gamma_{\beta k} - \Gamma^\alpha_{rk}\Gamma^r_{\beta i}). \tag{42}$$

Elles satisfont aux conditions de symétrie « gauche » et « cyclique ».

$$F^\alpha_{\beta ki} = -F^\alpha_{\beta ik}\ ; \qquad F^\alpha_{\beta ik} + F^\alpha_{ik\beta} + F^\alpha_{k\beta i} = 0. \tag{43}$$

L'évanouissement de la courbure donne les lois différentielles invariantes qui caractérisent les espaces euclidiens.

Pour démontrer toutes ces propositions, nous nous servirons du même procédé de double balayage d'un petit parallélogramme que nous avons employé dans le cas du tourbillon (p. 92). Au point P_{00}, imaginons un vecteur, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(P_{00})$ aux composantes ξ^i; à l'extrémité P_{10} de l'élément dx, nous obtenons, par le déplacement parallèle de $\mathbf{x}$ le long de dx, le vecteur $\mathbf{x}(P_{10})$; soient $\xi^i + d\xi^i$ ses composantes,

$$d\xi^\alpha = -d\gamma^\alpha_\beta\xi^\beta = -\Gamma^\alpha_{\beta i}\xi^\beta dx_i$$

En appliquant la translation δ à l'élément dx (sans d'ailleurs qu'il soit nécessaire de transporter dx parallèlement à lui-même) le vecteur à l'extrémité, restant lié au vecteur à l'origine par les mêmes relations, les $d\xi^\alpha$ subiront l'accroissement :

$$\delta d\xi^\alpha = -\delta\Gamma^\alpha_{\beta i}dx_i\xi^\beta - \Gamma^\alpha_{\beta i}\delta dx_i\xi^\beta - d\gamma^\alpha_r\delta\xi^r.$$

Si, en particulier, le vecteur à l'origine se déplace parallèlement à lui-même, il faudra remplacer $\delta\xi^r$ par $-\delta\gamma^r_\beta\xi^\beta$; dans la position finale $P_{01}\,P_{11}$ de l'élément linéaire, nous avons en P_{01} le vecteur $\mathbf{x}(P_{01})$ qui provient de $\mathbf{x}(P_{00})$, par un déplacement parallèle le long de $\overline{P_{00}P_{01}}$, et en P_{11} le vecteur $\mathbf{x}(P_{11})$ qui est le résultat du déplacement de $\mathbf{x}(P_{01})$ le long de $\overline{P_{01}P_{11}}$, et l'on a :

$$\delta d\xi^\alpha = \left\{\xi^\alpha(P_{11}) - \xi^\alpha(P_{01})\right\} - \left\{\xi^\alpha(P_{10}) - \xi^\alpha(P_{00})\right\}.$$

appelons $\mathbf{x}_*$ le vecteur que l'on obtient en déplaçant $\mathbf{x}(P_{10})$ parallèlement à lui-même le long de $P_{10}P_{11}$, on trouve en échangeant d et δ une expression analogue pour $d\delta\xi^\alpha$:

$$d\delta\xi^\alpha = \left\{\xi^\alpha_*(P_{11}) - \xi^\alpha(P_{10})\right\} - \left\{\xi^\alpha(P_{01}) - \xi^\alpha(P_{00})\right\}.$$

et par soustraction :

$$\begin{aligned}\Delta\xi^\alpha &= \delta d\xi^\alpha - d\delta\xi^\alpha \\ &= \left\{\begin{aligned} &-\delta\Gamma^\alpha_{\beta i}dx_i + d\gamma^\alpha_r\delta\gamma^r_\beta - \Gamma^\alpha_{\beta i}\delta dx_i \\ &+ d\Gamma^\alpha_{\beta k}\delta x_k - \delta\gamma^\alpha_r\delta\gamma^r_\beta + \Gamma^\alpha_{\beta i}d\delta x_i \end{aligned}\right\}\xi^\beta\end{aligned}$$

à cause de $d\delta x_i = \delta dx_i$ les derniers termes de chaque ligne dans l'accolade s'entredétruisent, et il reste

$$\Delta\xi^\alpha = \Delta F^\alpha_\beta\,\xi^\beta$$

les $\Delta\xi^\alpha$ sont donc les composantes d'un vecteur $\Delta\mathbf{x}$ en P_{11}, différence des deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}_*$ *au même point :*

$$\Delta\xi^\alpha = \xi^\alpha(P_{11}) - \xi^\alpha_*(P_{11})$$

puisque à la limite P_{11} vient se confondre avec $P = P_{00}$, toutes nos propositions sont établies.

Pour peu que l'on éprouve de la défiance vis-à-vis de l'emploi que nous avons fait des différentielles, on peut donner une démonstration des théorèmes précédents en employant des dérivées relativement à 2 paramètres s et t. Pour ce faire, on attache à chaque couple de valeurs (s, t) non seulement un point $P(s,t)$, mais un vecteur covariant $f_i(s, t)$; si ξ^i est un vecteur quelconque en P, nous appellerons $d(f_i\xi^i)$ la dérivée $\dfrac{d(f_i\xi^i)}{ds}$, que l'on obtient en passant de (s,t) à $(s+ds,t)$, en effectuant le quotient de la variation par ds et en passant à la limite; $d(f_i\xi^i)$ est de nouveau une expression de la forme $g_i\xi^i$ (g_i étant une fonction qu'on tire aisément de f_i). Nous appliquons à cette nouvelle expression l'opérateur $\delta\left(=\dfrac{d}{dt}\right)$; on obtient successivement :

$$\delta d(f_i\xi^i) = \delta df_i . \xi^i + d\ {}_i\delta\xi^i + \delta f_i d\xi^i + f_i \delta d\xi^i$$

$$\Delta(f_i\xi^i) = (\delta d - d\delta)\,(f_i\xi^i) = f_i\Delta\xi^i.$$

car :

$$\delta df_i = \frac{d^2 f_i}{dtds} = \frac{d^2 f_i}{dsdt} = d\delta f_i :$$

$\Delta\xi^i$ est précisément alors l'expression trouvée plus haut. L'invariant obtenu s'exprime en $P = P_{00}$ par :

$$F^\alpha_{\beta ik} f_\alpha \xi^\beta u^i v^k :$$

il dépend d'un vecteur covariant arbitraire f_i et de trois vecteurs contravariants ξ, u, v ; les $F^\alpha_{\beta ik}$ sont par suite les composantes d'un tenseur de 4e espèce.

§ 16. — L'espace métrique

Notion de la multiplicité métrique. — Une multiplicité *porte au point P une détermination métrique*, si les éléments linéaires en P peuvent se comparer quant à leur longueur; nous admettons que dans l'infiniment petit les lois de Pythagore-Euclide sont valables. Chaque vecteur $\mathbf{x}$ détermine en P un segment ; et il existe une forme quadratique non dégénérée $\mathbf{x}^2$, telle que deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ déterminent le même segment si, et seulement si, $\mathbf{x}^2 = \mathbf{y}^2$. Par cette condition, la forme quadratique n'est déterminée qu'à un facteur de proportionnalité (différent de zéro) près. Si on fixe ce facteur, la multiplicité est dite *étalonnée* en P. Nous dirons que le nombre $\mathbf{x}^2$ est la mesure du vecteur $\mathbf{x}$, ou, puisqu'il ne dépend que du segment déterminé par $\mathbf{x}$, il est dit la mesure l de ce segment. Des segments différents ont des mesures différentes ; les segments en P forment donc une multiplicité à une dimension. Si l'on remplace l'étalonnage par un autre, le nouveau nombre l qui mesure un segment est égal à l'ancien l multiplié par un facteur λ indépendant de l ;

$l = \lambda l$. Le rapport entre les mesures de deux segments est indépendant de l'étalonnage. De même que la représentation d'un vecteur en P est un système de nombres (ses composantes) qui dépend du choix des coordonnées, de même la représentation d'un segment par un nombre dépend de l'étalonnage ; et de même que l'on passe des composantes d'un vecteur dans un système à ses composantes dans un autre système par une transformation linéaire, de même la mesure d'un segment subit une transformation linéaire (et homogène) quand on change l'étalonnage. — 2 vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ en P, pour lesquels la forme symétrique bilinéaire $\mathbf{xy}$ relative à $\mathbf{x}^2$, s'évanouit sont dits *perpendiculaires* ; cette relation — réciproque d'ailleurs — est indépendante de l'étalonnage. Que la forme $\mathbf{x}^2$ soit définie ou non, peu nous importe. Si elle a p dimensions positives et q négatives $(p+q=n)$ la multiplicité est au point considéré $(p+q)$ dimensionnelle. Si $p \neq q$, nous fixerons une fois pour toutes le signe de la forme métrique fondamentale par la condition $p > q$; le facteur λ (rapport d'étalonnage) est alors toujours positif. Après avoir choisi un système de coordonnées déterminé et un facteur d'étalonnage, pour chaque vecteur $\mathbf{x}(\xi^i)$, nous avons

$$(44) \qquad \mathbf{x}^2 = \sum_{ik} g_{ik}\xi^i\xi^k \qquad (g_{ki} = g_{ik}).$$

Nous admettons maintenant que notre multiplicité porte en chaque point une détermination métrique. Etalonnons-la partout et rapportons-la à un système de coordonnées x_i; alors les g_{ik} sont dans (44) des fonctions bien déterminées des coordonnées x_i ; nous supposons qu'elles sont continues et dérivables. Le déterminant $|g_{ik}|$ est supposé $\neq 0$ dans toute la multiplicité ; les nombres p et q ne changent donc pas d'un point à un autre ; et nous supposerons toujours $p > 1$.

Afin qu'une multiplicité soit un espace métrique, il ne suffit pas qu'elle porte en chaque point une détermination métrique, il faut en outre que chaque point soit en *connexion métrique avec son voisinage.* Cette notion est analogue à celle de la connexion affine, elle est relative aux *segments*, l'autre aux vecteurs. Un point P est en *connexion métrique avec son voisinage* si l'on connaît le segment au point infiniment voisin P' de P, que l'on obtient en déplaçant d'une manière congruente un segment quelconque de P en P', c'est-à-dire si l'on se donne la correspondance entre les segments, qui est appelée *congruence.* La seule condition que nous nous imposons (elle est d'ailleurs la plus large possible) est la suivante : le voisinage de P peut être étalonné d'une manière telle, que la mesure de chaque segment en P que l'on meut par déplacement congruent, ne soit pas altérée quand on passe au point infiniment voisin. L'étalonnage est alors géodésique en P. Si la multiplicité est étalonnée d'une manière quelconque, soit l la mesure d'un segment en P, $l + dl$ la mesure du segment qu'on obtient en le déplaçant par congruence de P en P', voisin de P ; il y a alors nécessairement une relation de la forme :

(45) $$dl = -\, l d\varphi,$$

où le facteur $d\varphi$ est indépendant du segment déplacé, car cette propagation réalise une correspondance des segments en P aux segments en P' qui est une proportionnalité, $d\varphi$ correspond aux $d\gamma_i^i$ de la formule (33). Si la multiplicité est étalonnée autrement de façon que $\bar{l} = \lambda l$ soit la mesure de notre segment en P (λ étant un facteur positif fonction du lieu), on a, au lieu de cela :

$$d\bar{l} = -\bar{l} d\bar{\varphi}$$

avec

(46) $$d\bar{\varphi} = d\varphi - \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $d\bar{\varphi}$ puisse s'annuler par un choix particulier de λ, est donc que $d\varphi$ soit une forme différentielle linéaire

(45') $$d\varphi = \varphi_i dx_i.$$

Avec (45) et (45') nous avons satisfait aux conditions que nous nous sommes posées. (En effet : les φ_i sont en P des nombres déterminés ; si P a ses coordonnées $x_i = 0$, il suffira de faire $\log \lambda = \sum \varphi_i x_i$ pour que en P, $d\bar{\varphi} = 0$). Tous les points de la multiplicité sont analogues vis-à-vis de la détermination métrique et de la nature de la connexion métrique avec leur voisinage. Cependant il y a, suivant que n est pair ou impair, $\frac{n}{2} + 1$, ou $\frac{n+1}{2}$ espèces différentes de multiplicités métriques qui se distinguent par l'indice d'inertie de la forme métrique fondamentale. Nous pouvons en effet avoir :

$p = n$, $q = 0$, ou $p = 0$, $q = n$; $p = n-1$, $q = 1$ ou $p = 1$, $q = n-1$, etc.

En résumé : *La métrique d'une multiplicité est caractérisée, relativement à un système de référence* (= système de coordonnées + étalonnage), *par deux formes différentielles fondamentales, l'une quadratique :* $Q = \sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k$ *et l'autre linéaire* $d\varphi = \sum_i \varphi_i dx_i$; *elles sont invariantes quand on change de système de coordonnées; en changeant l'étalonnage, la première est multipliée par un facteur λ qui est une fonction positive, continue, et dérivable du lieu, la deuxième est diminuée de la différentielle de log λ.*

Dans toutes les grandeurs et dans toutes les relations, qui représent des rapports métriques, les g_{ik} et les φ_i doivent entrer de telle manière qu'il y ait invariance : 1°) Pour tous les changements de coordonnées (*invariance pour les coordonnées* et 2°) pour les remplacements des g_{ik} et des φ_i, respectivement par :

$$\lambda \cdot g_{ik}, \quad \text{et} \quad \varphi_i - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i},$$

λ étant une fonction positive du lieu (*invariance pour l'étalonnage*). De même qu'au § 15, nous avons déterminé la variation d'un vecteur, qui, se déplaçant parallèlement à lui-même, parcourt le périmètre d'un parallélogramme $(dx_i, \delta x_i)$, de même, nous allons chercher la variation Δl de la mesure d'un segment l pour des conditions analogues; de $dl = ld\varphi$ on tire :

$$\delta dl = -\delta l d\varphi - l\delta d\varphi = l\delta\varphi d\varphi - l\delta d\varphi,$$

donc :

(47) $$\Delta l = \delta dl - d\delta l = -l\Delta\varphi,$$

ou $$\Delta\varphi = (\delta d - d\delta)\varphi = f_{ik} dx_i \delta x_k,$$

avec : $$f_{ik} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}$$

Le tenseur linéaire du 2ᵉ ordre dont les composantes sont f_{ik} peut être appelé par analogie avec la *courbure vectorielle* de l'espace affine, la *courbure segmentaire* de l'espace métrique. L'équation (46) confirme analytiquement que cette nouvelle courbure est indépendante de l'étalonnage; ce tenseur satisfait aux équations invariantes :

$$\frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} = 0$$

Si $f_{ik} = 0$, *on exprime ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que chaque segment puise être déplacé d'un point à un autre d'une manière indépendante du chemin suivi.* C'est bien le cas d'un espace de Riemann; si l'espace métrique est riemannien, il est possible de parler du même segment en des points différents de l'espace, la multiplicité peut être étalonnée de manière que $d\varphi$ soit identiquement nul. (Etalonnage normal). (En effet, puisque $f_{ik} = 0$ c'est que $d\varphi$ est une différentielle totale exacte, soit $d\varphi = d \log \lambda$ si l'on étalonne avec le rapport λ; alors $d\bar{\varphi}$ est nul partout). Pour l'étalonnage normal d'un espace riemannien, la forme fondamentale Q est déterminée à un facteur constant quelconque (positif tout au moins) près, que l'on peut déterminer une fois pour toutes par le choix d'une unité de segment; ce choix peut se faire en n'importe quel point puisqu'ici, l'étalon normal peut être transporté partout.

Connexion métrique d'un espace métrique. — Et maintenant, nous arrivons à un point qui est, comme nous l'appellerons désormais, le *théorème fondamental de la géométrie infinitésimale;* il amène la construction de l'édifice géométrique à un état d'achèvement d'une harmonie merveilleuse. Dans un espace métrique, la notion de déplacement parallèle se laisse définir d'une façon et d'une seule, de manière à satisfaire à notre précédente condition : *par le déplacement parallèle d'un vecteur, le segment qu'il détermine doit rester inaltéré.* Le principe géométrique fondamental du *transport infinitésimal des segments par des longueurs* porte en soi, en même temps le principe du *transport de la direction: un espace métrique a par sa nature même une connexion affine.*

Démonstration. — Soit un système de référence. Pour toutes les grandeurs, a^i, qui portent (à côté d'autres, peut-être) un indice supérieur i, nous définissons le déplacement de l'indice par les équations :

$$a_i = \sum_j g_{ij} a^j$$

on remontera l'indice par les équations inverses. Faisons passer le vecteur ξ^i en $P(x)$, au point $P'(x+dx)$ par déplacement parallèle, il sera en P' : $\xi^i + d\xi^i$:

$$d\xi_i = -d\gamma_{ik}\xi^k ; \qquad d\gamma^i_k = \Gamma^i_{kr} dx_r ;$$

mais pour la mesure

$$l = g_{ik}\xi^i\xi^k$$

nous aurons la variation

$$dl = -l d\varphi ,$$

ce qui peut s'écrire :

$$2\xi_i d\xi^i + \xi^i\xi^k dg_{ik} = -(g_{ik}\xi^i\xi^k) d\varphi ,$$

le premier terme du premier membre est :

$$= -2\xi_i\xi^k d\gamma^i_k = -2\xi^i\xi^k d\gamma_{ik} = -\xi^i\xi^k(d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki}) ;$$

et par suite :

$$d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki} = dg_{ik} + g_{ik} d\varphi$$

ou :

$$(48) \qquad \Gamma_{i,kr} + \Gamma_{k,ir} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} + g_{ik}\varphi_r$$

Soumettons dans nos équations les 3 indices ikr aux trois permutations cycliques, additionnons les deux dernières qu'on obtient et soustrayons-en la première, en nous rappelant que les Γ doivent être symétriques pour les deux derniers indices, nous obtenons :

$$(49) \quad \Gamma_{r,ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right) + \frac{1}{2}(g_{ir}\varphi_k + g_{kr}\varphi_i - g_{ik}\varphi_r).$$

Déterminons ensuite les Γ^r_{ik} par les équations :

$$(50) \qquad \Gamma_{r,ik} = g_{rs}\Gamma^s_{ik},$$

qui résolues donnent :

$$\Gamma^r_{ik} = g^{rs}\Gamma_{s,ik}$$

Ces composantes de la connexion affine remplissent toutes les conditions posées. L'espace métrique est donc bien doué naturellement d'une connexion affine ; l'analyse tensorielle, et l'analyse des densités tensorielles, les notions de ligne géodésique, de courbure, etc., s'y développent sans autre. Si la courbure y est identiquement nulle, l'espace est métriquement euclidien au sens du chapitre I. La courbure vectorielle est susceptible d'une *décomposition* qui a son importance : on y pourra mettre en évidence la courbure segmentaire. Il est d'ailleurs bien naturel que le transport du segment réalise en même temps le transport du vecteur. En utilisant le symbole $\Delta = \delta d - d\delta$ on a vu que :

(47) $\qquad \Delta l = -l\Delta\varphi, \qquad$ c'est-à-dire $\qquad \Delta(\xi_i\xi^i) = -(\xi_i\xi^i)\Delta\varphi.$

Nous avons de plus trouvé que si f_i est une fonction quelconque du lieu, on a

$$\Delta(f_i\xi^i) = f_i\Delta\xi^i$$

par suite,

$$\Delta(\xi_i\xi^i) = \Delta(g_{ik}\xi^i\xi^k) = g_{ik}\Delta\xi^i.\xi^k + g_{ik}\xi^i.\Delta\xi^k = 2\xi_i\Delta\xi^i\;;$$

et l'équation (47) donne :

$$2\xi_i.\Delta\xi^i = -(\xi_i\xi^i)\Delta\varphi$$

ce qui prouve que le vecteur $\Delta\xi^i$ forme avec le vecteur $\mathbf{x} = \xi^i$ un produit scalaire, égal au produit scalaire du vecteur $-\frac{1}{2}\xi^i\Delta\varphi$, avec le même vecteur $\mathbf{x} = \xi^i$; c'est dire donc que le vecteur $-\frac{1}{2}\xi^i\Delta\varphi$ qui n'est pas autre chose que $-\frac{1}{2}\mathbf{x}.\Delta\varphi$ est égal au vecteur $\Delta\mathbf{x}$ (dont les composantes sont $\Delta\xi^i$) à un vecteur $^*\Delta\mathbf{x}$ près normal à $\mathbf{x}$:

$$\Delta\mathbf{x} = {}^*\Delta\mathbf{x} - \mathbf{x}.\tfrac{1}{2}\Delta\varphi.$$

$\Delta\mathbf{x}$ est la somme de deux vecteurs, l'un $^*\Delta\mathbf{x}$ normal à $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}.{}^*\Delta\mathbf{x} = 0$), l'autre $-\frac{1}{2}\mathbf{x}\Delta\varphi$ parallèle à $\mathbf{x}$. On en tire immédiatement une décomposition analogue pour le tenseur de courbure :

(51) $$F^{\alpha}_{\beta ik} = {}^*F^{\alpha}_{\beta ik} - \tfrac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta}f_{ik}.$$

le terme $^*F$ est dit « courbure de direction », celle-ci est définie par :

$$^*\Delta\mathbf{x} = {}^*F^{\alpha}_{\beta ik}\mathbf{e}_{\alpha}\xi^{\beta}dx_i\delta x_k$$

Que $^*\Delta\mathbf{x}$ soit perpendiculaire à $\mathbf{x}$, cela s'exprime par :

$$^*F^{\alpha}{}_{\beta ik}\xi_{\alpha}\xi^{\beta}dx_i\delta x_k = {}^*F_{\alpha\beta ik}\xi^{\alpha}\xi^{\beta}dx_i\delta x_k = 0.$$

Ce système de nombres $^*F_{\alpha\beta ik}$ n'est donc pas seulement symétrique gauche en i et k mais aussi en α et β, par suite :

$$^*F^{\alpha}_{\alpha ik} = 0$$

Corollaires. — Si l'on choisit un système de coordonnées et un étalonnage géodésiques dans le voisinage d'un point P, on aura en P : $\varphi_i = 0$, $\Gamma^r_{ik} = 0$; d'où :

$$\varphi_i = 0, \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} = 0$$

en P. La forme $d\varphi$ s'évanouit et les coefficients de la forme quadratique fondamentale sont stationnaires. En d'autres termes, le *voisinage* de P se comporte comme un espace euclidien. Nous tirons de là une nouvelle définition du déplacement parallèle d'un vecteur dans l'espace métrique : soit en un point P, un système géodésique de référence, c'est-à-dire un système pour lequel $d\varphi$ s'annule en P, et dont les g_{ik} de la forme Q sont stationnaires en P ; un vecteur transporté de P en P' l'a été parallèlement à soi-même si ses composantes *relativement au système géodésique de référence sont restées invariables.* (Il y a toujours des systèmes géodésiques de référence; l'arbitraire qui se manifeste dans le choix d'un tel système n'a aucune influence sur le déplacement parallèle ainsi défini.)

Puisque par une *translation* $x_i = x_i(s)$, le vecteur vitesse $u^i = \dfrac{dx_i}{ds}$

se déplace parallèlement à lui-même, c'est qu'il satisfait en géométrie métrique à l'équation :

$$\frac{d(u_i u^i)}{ds} + (u_i u^i)(\varphi_i u^i) = 0. \tag{52}$$

Si à un instant : $u_i u^i = 0$ (cela peut se produire si la forme quadratique est indéfinie), alors : $u_i u^i = 0$ pendant tout le mouvement ; la trajectoire d'une telle translation est *une géodésique de longueur nulle*. Les géodésiques de longueur nulle ne changent pas, comme le montre un court calcul, si l'on modifie n'importe comment la connexion métrique de la multiplicité, sans altérer la détermination métrique en chaque point.

Calcul tensoriel. — D'après les définitions données plus haut, les composantes d'un tenseur ne dépendent que du système de coordonnées, et non pas de l'étalonnage. Nous allons élargir nos définitions ; une forme linéaire dépendant du système de coordonnées et *de l'étalonnage* sera dite encore un *tenseur*, si elle se transforme comme d'habitude quand on change de coordonnées, mais si elle se trouve multipliée par λ^e ($\lambda =$ rapport d'étalonnage) quand on change d'étalonnage, nous dirons de plus qu'il est de poids e. Ainsi les g_{ik} sont les composantes d'un tenseur symétrique covariant de deuxième ordre et de poids 1. Quand nous parlerons de tenseurs, sans spécifier le poids, il sera entendu que ce poids est zéro. Les relations obtenues dans l'analyse tensorielle sont des relations indépendantes de l'étalonnage et des coordonnées entre des tenseurs et des densités tensorielles au sens étroit. Cette notion étendue de tenseur de poids e, n'est qu'une notion auxiliaire, que nous employons simplement à cause de sa commodité pour le calcul. Cette commodité vient de ce que : 1°) le « jeu des indices » est possible : par la descente d'un indice contravariant dans les composantes d'un tenseur de poids e, on obtient les composantes (avec cet indice covariant) d'un tenseur de poids $e+1$, et inversement; 2°) Si g est le déterminant des g_{ik}, pris avec le signe + ou avec le signe —, suivant que le nombre q des dimensions négatives est pair ou impair, et si $\sqrt{g}$ est la racine carrée positive de g, on peut obtenir au moyen de chaque tenseur une densité tensorielle en le multipliant par $\sqrt{g}$; le poids de celle-ci est de $\frac{n}{2}$ unités plus élevé que le poids du tenseur dont on part ; d'un tenseur de poids $-\frac{n}{2}$, on tire en particulier une densité tensorielle au sens propre. La preuve repose sur le fait évident que $\sqrt{g}$ lui-même est une densité scalaire de poids $\frac{n}{2}$. Nous convenons que la multiplication par $\sqrt{g}$ transforme la notation d'une grandeur ; les lettres romaines qui la représentaient deviennent des lettres gothiques. Puisque dans la géométrie riemannienne, la forme quadratique Q est parfaitement déterminée, si l'étalonnage est normal (il ne sera pas question de facteur constant dans la suite), la distinction des tenseurs par le poids disparaît ; comme alors chaque grandeur qui est représentable par un tenseur, engendre la densité tensorielle correspondante par multiplication par $\sqrt{g}$. la distinction entre tenseur et densité tensorielle s'évanouit (comme la différence entre covariant et contravariant). Il est par suite compréhensible que l'on ait été si longtemps à mettre en évidence les densités tensorielles à côté des tenseurs. On emploie le calcul tensoriel en *géométrie* principalement pour l'usage *interne*, c'est-à-dire pour l'obtention des *champs* qui correspondent invariantivement à la métrique elle- même. Indiquons par exemple, deux cas fort importants pour la suite. Supposons que la multiplicité métrique soit à $(3+1)$ dimensions, et soit $-g$ le déterminant des g_{ik}. Dans cet espace, la courbure segmentaire (comme d'ailleurs dans tout autre) est un champ tensoriel linéaire au sens propre f^{ik} de deuxième ordre. On en tire le tenseur contravariant f^{ik} de poids—2, qui précisément à cause de son poids non nul est sans signification, mais par multiplication par $\sqrt{g}$ nous obtenons une densité tensorielle $\mathfrak{f}^{ik}$ linéaire de 2ᵉ espèce et de poids zéro.

$$\mathfrak{l} = \tfrac{1}{4} f_{ik}\mathfrak{f}^{ik} \tag{53}$$

est la densité scalaire la plus simple qui se puisse former et $\int \mathfrak{l}dx$ est l'invariant intégral le plus simple attaché à la métrique d'une multiplicité à $(3+1)$ dimensions. Au contraire, l'intégrale $\int\sqrt{g}dx$ qui, dans la géométrie riemannienne représente le volume, n'a aucun sens en géométrie généralisée. De $\mathfrak{f}^{ik}$, on peut tirer par divergence la densité tensorielle :

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{f}^i .$$

En *physique*, on utilise le calcul tensoriel, non pour représenter l'état métrique, mais pour former des champs d'états physiques, comme le champ électromagnétique, par exemple, et en décrire les lois. Nous verrons pourtant comme conclusion de nos recherches que cette distinction entre la géométrie et la physique est une erreur ; la physique ne se détache pas du tout de la géométrie ; l'univers est une multiplicité métrique de $(3+1)$ dimensions et tous les phénomènes physiques qui s'y déroulent ne sont que des manifestations du champ métrique; en particulier la connexion affine de l'univers n'est pas autre chose que le champ de gravitation, la métrique qui la régit exprime l'état de « l'éther » ; la matière même n'est pas épargnée par cette géométrisation et elle perd son caractère de substance éternelle. Cela confirme ce que Clifford, déjà en 1875, exprimait avec une précision remarquable dans un article de la *Fortnightly Review*, « The theory of space-curvature hints at a possibility of describing matter and motion in terms of extension only ». Mais tout cela ne sera exposé que plus tard ; pour l'instant, nous en resterons encore à l'ancien point de vue.

La construction de la géométrie infinitésimale étant achevée, nous rassemblons encore dans le paragraphe suivant une série de remarques et quelques formules dont il sera fait usage plus tard.

§ 17. — **Remarques sur le cas particulier d'un espace riemannien**

Le calcul tensoriel général est déjà d'une grande utilité dans la géométrie euclidienne quand on a à calculer non pas avec des systèmes cartésiens, mais avec des coordonnées curvilignes, comme il arrive souvent en physique mathématique. Pour illustrer cette application du calcul tensoriel, nous allons écrire les équations fondamentales du champ électrostatique et du champ magnétique avec des coordonnées curvilignes quelconques.

Soient : E_i les composantes du champ électrique dans un système cartésien ; en transformant les deux formes

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \qquad \text{et} \qquad E_1dx_1 + E_2dx_2 + E_3dx_3$$

attachées invariantivement à des systèmes cartésiens (x_1, x_2, x_3) avec des coordonnées curvilignes quelconques (que nous désignerons encore par x_i) elles deviennent :

$$ds^2 = g_{ik}dx_idx_k \qquad \text{et} \qquad E_idx_i.$$

Les E_i sont alors dans le nouveau système les composantes du même champ vectoriel covariant. Nous en tirons la densité vectorielle :

$$\mathfrak{E}^i = \sqrt{g}\, g^{ik}E_k \qquad (g = |\, g_{ik}\,|)$$

Le potentiel $-\varphi$ se transforme en un scalaire ; la densité ϱ de l'électricité sera définie par la condition que la charge électrique contenue dans une position d'espace soit $= \int \varrho dx_1dx_2dx_3$, elle n'est donc pas un scalaire, mais bien une densité scalaire; les lois s'écrivent :

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{ll} E_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \qquad \text{ou} & \dfrac{\partial E_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial E_k}{\partial x_i} = 0, \\ & \dfrac{\partial \mathfrak{E}^i}{\partial x_i} = \varrho\,; \\ \text{et} \quad \mathfrak{S}_i^k = E_i\mathfrak{E}^k - \frac{1}{2}\delta_i^k \mathfrak{S} & \text{avec} \qquad \mathfrak{S} = E_i\mathfrak{E}^i, \end{array} \right.$$

sont les composantes d'une densité tensorielle mixte de 2^e^ espèce : *la tension.* — Pour démontrer la justesse de ces résultats, il suffit de remarquer que ces équations sont invariantes absolument et qu'elles donnent précisément les équations obtenues plus haut, quand on prend comme coordonnées curvilignes des coordonnées cartésiennes.

Nous avons caractérisé le champ magnétique d'un courant stationnaire dans un système cartésien par une forme bilinéaire invariante symétrique gauche $H_{ik}dx_i\delta x_k$. En la transformant en coordonnées curvilignes quelconques, nous voyons que les H_{ik} obtenues sont des composantes covariantes d'un tenseur linéaire de 2ᵉ espèce : *le champ magnétique.* De la même façon, nous obtenons les composantes d'un champ vectoriel covariant.

En outre, définissons la densité tensorielle linéaire du deuxième ordre par les équations :

$$\mathfrak{H}^{ik} = \sqrt{g}\,.\,g^{i\alpha}g^{k\beta}H_{\alpha\beta}\,;$$

les lois du champ magnétique sont alors :

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} &H_{ik} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial H_{ik}}{\partial x_l} = 0, \\ &\qquad\qquad \frac{\partial \mathfrak{H}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{s}^i\,; \\ &\mathfrak{S}_i^k = H_{ir}\mathfrak{H}^{kr} - \tfrac{1}{2}\delta_i^k\mathfrak{S}, \qquad \mathfrak{S} = \tfrac{1}{2}H_{ik}\mathfrak{H}^{ik}. \end{aligned}\right.$$

Les $\mathfrak{s}^i$ sont les composantes d'une densité vectorielle : *la densité du courant électrique;* les tensions $\mathfrak{S}_i^k$ ont le même caractère d'invariance que dans le champ électrique. Qu'on essaye de spécialiser ces formules pour le cas des coordonnées sphériques ou le cas des coordonnées cylindriques, les calculs sont immédiats dès qu'on connaît l'expression du ds^2 dans ces systèmes; de simples considérations géométriques y conduisent.

Mais ce que nous avons obtenu par ces considérations est d'une importance encore plus grande : les équations (54) et (55) du champ électromagnétique stationnaire sont déjà écrites pour le cas où nous serions obligés d'abandonner la géométrie euclidienne pour une *géométrie riemannienne* dont la métrique serait autre. Car, avec des rapports métriques plus généraux, nos équations représentent la dépendance de la charge, du courant et du champ entre eux, par des expressions « objectives » indépendantes du système de cordonnées, à cause de leur nature invariante. Qu'elles soient l'extension naturelle des lois pour un espace euclidien, cela ne fait pas de doute; c'est un fait digne de remarque que cette extension s'opère simplement et sans contrainte grâce au calcul vectoriel général. La question de savoir si l'espace est ou n'est pas euclidien, ne peut être tranchée d'aucune manière par les lois de l'électromagnétisme. L' « euclidicité » s'exprime sous forme invariante générale par des équations différentielles du deuxième ordre en les g_{ik} (évanouissement de la courbure) ; dans les lois que nous venons d'obtenir, les dérivés des g_{ik} sont tout au plus du premier ordre.

Mais il est bon de remarquer qu'une telle extension n'est possible que pour les lois *d'action de contact.*

Les lois d'action à distance qui dérivent de ces équations et qui correspondent aux lois de Coulomb et de Biot et Savart, s'obtiennent par un traitement mathématique; voici l'idée essentielle : à la place de l'équation habituelle du potentiel $\Delta\varphi = 0$, on doit considérer en géométrie riemannienne sa généralisation invariante (voir (54) :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}.g^{ik}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right) = 0$$

c'est une équation différentielle aux dérivées partielles linéaire et du deuxième ordre, dont les coefficients ne sont plus constants. On en cherche une *solution fondamentale* infinie en un point arbitraire qui correspond à la solution fondamentale $\frac{1}{r}$ de l'équation $\Delta\varphi = 0$; cette recherche est difficile, elle est analogue à celle qu'on poursuit quand, se bornant à l'espace euclidien, on doit étudier des phénomènes qui se déroulent dans un milieu non homogène, par exemple un milieu dont la constante diélectrique varie d'un point à un autre.

L'extension des lois de l'électromagnétisme, lorsque l'espace n'est plus seulement riemannien, mais qu'il possède une métrique plus générale, ne se développe pas aussi simplement. La vraie solution de ce problème résultera des considérations qui terminent ce paragraphe.

Faisons encore quelques remarques sur le cas *particulier de l'espace riemannien.* L'unité de mesure (le cm) étant choisie une fois pour toutes (la même en tous points bien entendu), la métrique est donnée par une forme quadratique invariante $g_{ik}dx_idx_k$ ou, ce qui revient au même, par un champ tensoriel covariant du deuxième ordre. Dans les formules obtenues plus haut, il suffit de supprimer toutes les grandeurs φ_i pour avoir notre cas spécial.

Les composantes de la connexion métrique sont alors les *symboles de Christoffel à 3 indices:* $\left\{ {ik \atop r} \right\}$, on les forme à partir des symboles de Christoffel de première espèce

$$(56)\qquad \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right), \qquad \left\{ {ik \atop r} \right\} = g^{rs}\begin{bmatrix} ik \\ s \end{bmatrix}.$$

(Nous les emploierons tout de même, malgré que cette manière d'écrire ne soit pas conforme à nos règles sur la position des indices, pour nous conformer à un usage courant.)

Pour des calculs ultérieurs, nous mentionnons les formules suivantes :

$$(57)\qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_i} - \left\{ {ir \atop r} \right\} = 0,$$

$$(57')\qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{(\partial\sqrt{g}.g^{ik})}{\partial x_k} + \left\{ {rs \atop i} \right\} g^{rs} = 0.$$

$$(57'')\qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial'\sqrt{g}.g^{ik})}{\partial x_l} + \left\{ {lr \atop i} \right\} g^{rk} + \left\{ {lr \atop k} \right\} g^{ri} - \left\{ {lr \atop r} \right\} g^{ik} = 0.$$

Elles sont valables parce que $\sqrt{g}$ est une densité scalaire, $\sqrt{g}.g^{ik}$ une densité tensorielle; alors par suite des règles de l'analyse des densités tensorielles, si nous multiplions chaque membre de ces formules par $\sqrt{g}$, les premiers membres deviennent des densités tensorielles. Or, si en P nous utilisons un système géodésique$\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_r} = 0\right)$, les premiers membres sont identiquements nuls, et à cause du caractère d'invariance que ces relations possèdent, elles sont vraies dans tous les cas.

On a ensuite :

$$\frac{dg}{g} = g^{ik} dg_{ik}, \qquad \frac{d\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \tfrac{1}{2} g^{ik} dg_{ik}.$$

Car la différentielle totale d'un déterminant de n^2 éléments (variant indépendamment) g_{ik} est $= G^{ik}\, dg_{ik}$, où G^{ik} est le mineur de g_{ik}. Si $\mathfrak{t}^{ik}$ ($= \mathfrak{t}^{ki}$) est un système de nombres qui forment un tableau carré symétrique quelconque on a toujours :

$$\mathfrak{t}^{ik} dg_{ik} = - \mathfrak{t}_{ik} dg^{ik}.$$

car de

$$g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^k$$

on tire :

$$g_{ij}\, dg^{jk} = - g^{jk}\, dg_{ij}.$$

en multipliant les deux membres par $\mathfrak{t}^i_k$ (cette notation est compréhensible)

$$\mathfrak{t}^i_k = g_{kl} \mathfrak{t}^{il} = g_{kl} \mathfrak{t}^{li} = \mathfrak{t}^k_i.$$

on obtient la formule (59). En particulier au lieu de (58) on peut écrire

$$\frac{dg}{g} = - g_{ik} dg^{ik}.$$

Les *composantes* $R_{\alpha\beta ik}$ *de la courbure* satisfont dans l'espace riemannien aux conditions de symétrie

$$R_{\alpha\beta ki} = - R_{\alpha\beta ik}; \qquad R_{\beta\alpha ik} = - R_{\alpha\beta ik},$$

$$R_{\alpha\beta ik} + R_{\alpha ik\beta} + R_{\alpha k\beta i} = 0,$$

(car la courbure segmentaire est nulle); il est facile de montrer que l'on peut encore en tirer[11])

$$R_{ik\alpha\beta} = R_{\alpha\beta ik}$$

Ces conditions nous apprennent, d'après une remarque de la page 48, que le tenseur de courbure peut être complètement caractérisé par une forme quadratique d'un élément de surface :

$$\frac{1}{4} R_{\alpha\beta ik}\, \Delta x_{\alpha\beta}\, \Delta x_{ik} \qquad (\Delta x_{ik} = dx_i\, \delta x_k - \delta x_i\, dx_k).$$

Si l'on divise cette expression par le carré de l'aire de l'élément, le quotient ne dépend plus que du rapport des Δx_{ik}, c'est-à-dire de la position de l'élément de surface ; Riemann appelle le nombre obtenu, la courbure de l'espace en F dans la direction de surface considérée.

Dans un espace riemannien bidimensionnel (c'est-à-dire sur une surface), il n'y a qu'une direction superficielle à considérer et le tenseur se réduit à un scalaire (courbure de Gauss). Dans la théorie d'Einstein, le tenseur contracté du deuxième ordre

$$R^{\alpha}_{i\alpha k} = R_{ik}$$

qui, dans l'espace de Riemann, est symétrique, joue un rôle important, ses composantes sont :

$$R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} ir \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} rs \\ s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} ir \\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ks \\ r \end{Bmatrix}. \tag{60}$$

Seul le deuxième terme du deuxième membre ne laisse pas voir immédiatement la symétrie en i et k, mais d'après (57) il est égal à :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\log . g)}{\partial x_i \partial x_k}$$

Enfin l'on peut encore former le scalaire de courbure

$$R = g^{ik} R_{ik}$$

Dans l'espace métrique général, le scalaire de courbure F que l'on forme d'une manière analogue, mais qui n'a pas comme R une signification évidente, s'écrit :

$$F = R - (n-1)\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\varphi^i)}{\partial x_i} - \frac{(n-1)(n-2)}{4}(\varphi_i\varphi^i).$$

F est un scalaire de poids — 1. Dans un domaine où $F \neq 0$ on peut donc fixer une unité de longueur par l'équation $F = const.$ C'est curieux, car en quelque manière, ce résultat est en contradiction avec la notion du transport des longueurs dans l'espace métrique généralisé, d'après laquelle une comparaison à distance des longueurs ne doit pas être possible; mais il faut avoir égard ici à ce que l'unité de longueur mentionnée dépend des rapports de courbure de la multiplicité. (Au fond, l'existence d'un tel étalonnage distingué n'est pas aussi curieuse que l'existence dans un espace riemannien de certains systèmes de coordonnées distingués). Le « volume » mesuré avec cette unité est donné par l'invariant intégral :

(62) $$\int \sqrt{g}.F^n dx$$

Dans l'espace métrique, par le déplacement parallèle des deux vecteurs, ξ et η, on a :

$$d(\xi_i\eta^i) + (\xi_i\eta^i)d\varphi = 0,$$

Dans l'espace de Riemann, le deuxième terme disparaît. Il s'ensuit que dans un espace riemannien, le déplacement parallèle d'un vecteur covariant ξ exprimé par $\xi_i = g_{ik}\xi^k$, se traduit par les mêmes formules qui donnaient plus haut le déplacement du vecteur covariant dont les composantes sont ξ_i

$$d\xi_i - \left\{ \begin{matrix} i\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} dx_\alpha \xi_\beta = 0 \qquad \text{ou} \qquad d\xi_i - \left[\begin{matrix} i\alpha \\ \beta \end{matrix} \right] dx_\alpha \xi^\beta = 0.$$

Pour une translation on a, d'après cela :

(63) $$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} u^\alpha u^\beta = 0. \quad \left(u^i = \frac{dx_i}{ds}, \quad u_i = g_{ik}u^k \right)$$

car on a, (48) :

$$\left[\begin{matrix} i\alpha \\ \beta \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} i\beta \\ \alpha \end{matrix} \right] = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}$$

et par suite pour un système de nombres symétriques $t^{\alpha\beta}$:

(64) $$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \cdot t^{\alpha\beta} = \left[\begin{matrix} i\alpha \\ \beta \end{matrix} \right] t^{\alpha\beta} = \left\{ \begin{matrix} i\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} t^\alpha_\beta.$$

Puisque la mesure du vecteur vitesse reste invariable pendant la translation, on a :

(65) $$g_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} = u_i u^i = \text{const.}$$

Pour plus de simplicité, supposons la forme fondamentale définie positive; chaque courbe $x_i = x_i(s)[a \leqslant s \leqslant b]$ a une *longueur* (indépendante du choix du paramètre)

$$\int_a^b \sqrt{Q}ds \qquad \left(Q = g_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} \right).$$

Si l'on prend précisément l'arc comme paramètre, alors $Q = 1$. L'équation (65) exprime qu'une translation parcourt sa trajectoire, qui est une ligne géodésique, avec une vitesse constante, de telle sorte que le paramètre temps s est proportionnel à la longueur. La ligne géodésique ne possède pas seulement dans l'espace riemannien la propriété différentielle de conserver toujours la même direction, *mais elle possède encore la propriété intégrale que chacune de ses portions est la plus courte ligne qui joint son origine à son extrémité.* Il faut faire attention de ne pas prendre cet énoncé dans un sens trop littéral, mais il faut lui donner un sens analogue à celui qu'on donne en mécanique à la phrase : lorsqu'il y a équilibre, l'énergie potentielle est un minimum ; ou bien encore lorsqu'on dit, en analyse, qu'une fonction $f(x,y)$ a un minimum là où

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

est identiquement nul quels que soient dx et dy; on doit dire plutôt, afin d'être rigoureux, qu'elle prend une valeur *stationnaire*, qui peut être aussi bien un maximum qu'un minimum, pris au sens large aussi bien qu'au sens étroit, ou même encore qui peut n'être ni l'un ni l'autre, mais comme l'on dit, en allemand, qui peut être un « Sattelwert » (valeur en selle) expression dont la forme imagée se comprend immédiatement. La ligne géodésique n'est pas nécessairement une courbe de plus courte longueur, c'est bien plutôt une courbe de longueur stationnaire. Sur la sphère, par exemple, les grands cercles sont précisément des lignes géodésiques ; prenons sur un tel cercle deux points A et B, le plus petit des deux arcs AB est en effet la ligne de longueur moindre qui joint A à B, mais l'autre arc AB est aussi une ligne géodésique entre A et B, sa longueur n'est pas la plus courte, mais elle est stationnaire. Profitons de cette occasion pour exposer sous sa forme rigoureuse le principe de la variation infinitésimale.

Soit une courbe donnée par ses équations paramétriques :

$$x_i = x_i(s) \qquad (a \leqslant s \leqslant b)$$

nous l'appellerons la *courbe initiale*. Pour la comparer aux courbes voisines, nous considérons la famille

$$x_i = x_i(s,\varepsilon) \qquad (a \leqslant s \leqslant b)$$

le paramètre ε varie dans un intervalle contenant $\varepsilon = 0$; les $x_i(s,\varepsilon)$ sont des fonctions qui se réduisent à $x_i(s)$ pour $\varepsilon = 0$. Nous voulons de plus, que toutes les courbes de la famille aient la même origine et la même extrémité ; $x_i(a,\varepsilon)$ et $x_i(b,\varepsilon)$ sont donc indépendantes de ε. La longueur d'une telle courbe est donnée par :

$$L(\varepsilon) = \int_a^b \sqrt{Q}\,ds.$$

Nous admettons encore que s soit l'arc de la courbe initiale, de façon que $Q = 1$, si $\varepsilon = 0$; pour cette même courbe nous supposerons que $\frac{dx_i}{ds}$ soit désigné par u^i. Posons :

$$\varepsilon \cdot \left(\frac{dx_i}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \xi^i(s) = \delta x_i;$$

Ce sont les composantes du déplacement infiniment petit, par lequel on passe de la courbe initiale à la courbe « *variée* » infiniment voisine, correspondant à la valeur infiniment petite de ε; elles sont nulles aux extrémités. Alors :

$$\varepsilon\left(\frac{dL}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \delta L$$

est la variation de la longueur. $\delta L = 0$ est la condition pour que la courbe initiale possède parmi les courbes de la famille une longueur stationnaire. On définira δQ de la même façon, alors

$$(66) \qquad \delta L = \int \frac{\delta Q}{2\sqrt{Q}} ds = \frac{1}{2}\int \delta Q ds,$$

puisque pour la courbe initiale $Q = 1$. Or :

$$\frac{dQ}{d\varepsilon} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{d\varepsilon}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} + 2g_{ik}\frac{dx_k}{ds}\frac{d^2x_i}{d\varepsilon ds}$$

ce qui fait que :

$$\delta Q = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} u^\alpha u^\beta \xi^i + 2g_{ik}u^k \frac{d\xi^i}{ds}.$$

(car on peut intervertir les dérivations en ε et en s). Remplaçons alors dans (66), δQ par sa valeur, on a :

$$\delta L = \int_a^b \left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} u^\alpha u^\beta - \frac{du_i}{ds}\right)\xi^i ds.$$

après une intégration par parties effectuée sur le deuxième terme, le terme tout intégré étant nul, puisque les ξ_i s'évanouissent aux limites. On voit alors aisément que $\delta L = 0$ pour les courbes de la famille, si (63) est satisfaite et seulement dans ce cas. En effet, si pour $s = s_0$ par exemple ($a \leqslant s^0 \leqslant b$) l'une des expressions (63) celle qui correspond à $i = 1$ était différente de zéro, positive pour fixer les idées, on pourrait trouver autour de s_0 un petit intervalle dans lequel cette expression serait > 0. Si alors on choisissait pour ξ^1 qui est arbitraire, une fonction de s jamais négative, nulle hors de cet intervalle, et tous les autres ξ^i partout nuls, nous aurions $\delta L > 0$ ce qui serait contradictoire.

Cette démonstration prouve encore qu'une translation est parmi tous les mouvements qui font passer un point d'une même origine à une même extrémité, celui qui rend l'intégrale $\int_a^b \sqrt{Q} ds$ stationnaire.

Il ressort encore de cette démonstration que les *translations* sont caractérisées parmi tous les mouvements qui amènent dans le même temps $a \leqslant s \leqslant b$, un mobile d'une même origine à une même extrémité, par la propriété de rendre l'intégrale $\int_a^b Q ds$ stationnaire.

Malgré les efforts sincères de l'Auteur, les considérations qui nous ont amené à l'achèvement des principes de la géométrie infinitésimale ne sont pas allées sans une débauche de formules et d'indices qui peuvent parfois masquer la clarté intuitive des problèmes. Mais il est impossible de renoncer à cet appareil qui semble à quelques-uns un peu rebutant. De même qu'avant de pouvoir exprimer sa pensée dans une langue étrangère, il faut se soumettre à une discipline souvent pénible, de même il est nécessaire de s'astreindre à la discipline de l'analyse tensorielle avant de pouvoir entreprendre le problème que nous avons en vue et qui touche à l'essence de l'espace, du temps et de la matière. Mais avant de pénétrer dans les régions de la physique où le génie d'Einstein a fait de si belles conquêtes, nous voulons encore développer quelques considérations sur la métrique de l'espace ; il s'agit de bien saisir la nécessité interne et l'univocité de la structure métrique, telle qu'elle résulte du théorème de Pythagore.

§ 18. — **Considérations tirées de la théorie des groupes pour éclairer la notion de métrique de l'espace**

Alors que la nature de la connexion affine ne nous paraît pas du tout énigmatique, — puisque la notion de déplacement parallèle qui n'est pas autre chose en somme qu'une propagation sans déformation, détermine parfaitement la nature de cette connexion — nous n'avons pas encore précisé notre point de vue sur la métrique elle-même. Qu'elle soit donnée précisément par une forme quadratique différentielle, nous l'avons admis, mais rien n'imposait *a priori* cette représentation. Riemann avait déjà montré qu'on peut prendre comme forme métrique fondamentale, et avec le même droit, une fonction homogène du 4^e^ degré par rapport aux différentielles ou même aussi n'importe quelle fonction construite autrement, qui ne fût pas nécessairement rationnelle par rapport aux différentielles. Ce qui détermine originellement et généralement la métrique en un point P, c'est le *groupe des rotations;* les propriétés métriques de la multiplicité au point P sont connues, quand on sait quelles sont parmi les transformations linéaires de l'ensemble des vecteurs en P, celles qui sont des représentations congruentes de cet ensemble.

Il y a autant de sortes différentes de déterminations métriques qu'il y a de groupes essentiellement différents de transformations linéaires (il faut entendre par groupes essentiellement différents ceux qui ne diffèrent pas seulement par le choix des coordonnées). Pour la métrique pythagoricienne qui est la seule que nous ayons considérée jusqu'ici, le groupe des rotations est formé de toutes les transformations linéaires qui transforment la forme quadratique différentielle en elle-même.

Mais il n'était pas nécessaire que le groupe des rotations possédât un invariant, c'est-à-dire une fonction d'un seul vecteur arbitraire qui restât inchangée pour toutes les rotations.

Précisons un peu à quelles exigences doit satisfaire d'une manière naturelle la notion de rotation. Ce n'est qu'en un point déterminé seulement, que les parallélipipèdes n– dimensionnels peuvent être comparés sur le rapport de leur grandeur tant que la détermination métrique n'est pas fixée dans toute la multiplicité. Si les $\mathbf{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont n vecteurs quelconques déterminés par les équations :

$$\mathbf{a}_i = a_i^k \mathbf{e}_k$$

où les $\mathbf{e}_k$ sont des vecteurs fondamentaux de base, le déterminant des a_i^k que nous écrirons conformément à une notation due à Grassmann

$$\frac{[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n]}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_n]}$$

est le nombre qui mesure le volume du parallélipipède défini par les $\mathbf{a}_i$. En employant un autre système de vecteurs de base $\mathbf{e}_i$, tous les volumes sont multipliés par un facteur constant, comme il appert du « théorème de multiplication des déterminants ».

$$\frac{[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n]}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_n]} = \frac{[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n]}{[\overline{\mathbf{e}}_1\overline{\mathbf{e}}_2 \ldots \overline{\mathbf{e}}_n]} \cdot \frac{[\overline{\mathbf{e}}_1\overline{\mathbf{e}}_2 \ldots \overline{\mathbf{e}}_n]}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_n]}$$

Les volumes sont donc déterminés univoquement et indépendamment du système de coordonnées quand on a fait choix d'une unité de mesure. *Une rotation doit être évidemment une représentation qui conserve les volumes, puisqu'elle ne doit pas « altérer » le corps des vecteurs en P.*

La rotation, par laquelle on passe du vecteur $\mathbf{x} = (\xi^i)$ au vecteur $\overline{\mathbf{x}} = (\bar{\xi}^i)$, sera représentée par

$$\overline{\mathbf{e}}_i = a_i^k \mathbf{e}_k \qquad \text{ou} \qquad \bar{\xi}^i = a_k^i \xi^k.$$

le déterminant de la matrice de rotation (a_i^k) doit être alors égal à 1. Cette condition concerne une *rotation* particulière, nous aurons à exiger, pour leur ensemble qu'elles *forment un groupe* (au sens de la p. 7). Il s'agit d'un *groupe continu*, c'est-à-dire que les rotations sont les éléments d'une multiplicité continue à plusieurs dimensions.

Soit $A = (a_i^k)$ la matrice d'une correspondance linéaire ; changeons de système de coordonnées et passons des vecteurs de base $(\mathbf{e}_i)$ aux vecteurs $(\overline{\mathbf{e}}_i)$ par la transformation

$$U : \overline{\mathbf{e}}_i = u_i^k \mathbf{e}_k,$$

alors A se change en UAU^{-1} (U^{-1} étant l'inverse de U, $UU^{-1} = U^{-1}U = E =$ l'opération identique). De tout groupe $\mathfrak{G}$ de matrices on peut tirer un nouveau groupe par un changement de coordonnées, c'est le groupe $U\mathfrak{G}U^{-1}$ qu'on obtient en effectuant à partir de chaque matrice G du groupe et avec la même matrice U la transformation $U\mathfrak{G}U^{-1}$; nous disons qu'un tel groupe est de même espèce que $\mathfrak{G}$ ou encore qu'il ne se distingue de $\mathfrak{G}$. que par son orientation. Si $\mathfrak{G}$ est le groupe des matrices de rotation en P, et si U est identique à $U\mathfrak{G}U^{-1}$ (ce qui ne veut pas dire nécessairement que $G = UGU^{-1}$, mais que G appartient à UGU^{-1} et que UGU^{-1} appartient à G), alors la métrique dans les 2 systèmes de coordonnées (67) s'exprime de la même manière; U est une représentation du corps de vecteurs en P sur lui-même, qui laisse inchangées toutes les relations métriques. Une telle représentation est une similitude. $\mathfrak{G}$ est un sous-groupe du groupe $\mathfrak{G}^*$ des similitudes.

De la métrique en un point, nous passons à la *connexion métrique*. La connexion métrique du point P_0 avec son voisinage immédiat est connue dès que l'on peut dire quelles sont parmi les correspondances linéaires du corps de vecteurs de P_0 (x_i^0) avec le corps de vecteurs en $P(x_i^0 + dx_i)$ celles qui sont des congruences, ou qui représentent une *propagation congruente*. Si A est une telle transformation, AG_0 qui est le produit d'une rotation effectuée en P_0 d'abord et de A effectuée ensuite, est encore une congruence, et l'on obtient en effet toutes les représentations congruentes du corps de vecteurs de P_0 sur celui de P, en faisant le produit de l'une d'elles A par toutes les rotations du groupe $\mathfrak{G}_0$ des rotations en P_0, celles-ci étant effectuées d'abord. Considérons 2 positions du corps de vecteurs en P_0, telles que l'on passe de l'une à l'autre par la rotation G_0, les 2 positions qui leur correspondent en P, après la congruence sont évidemment dérivées l'une de l'autre par l'opération AG_0A^{-1}, de sorte que le groupe $\mathfrak{G}$ des rotations en P est identique au groupe $A\mathfrak{G}_0A^{-1}$. Les groupes de rotation en P et en P_0 ne diffèrent que par leur orientation, une fois qu'on a établi la connexion métrique de P_0 avec son voisinage.

Et si nous passons par continuité de P_0 à n'importe quel point P de la multiplicité, nous nous rendons compte aisément que les groupes de rotation en tous les points sont de même espèce; à cet égard la multiplicité est homogène.

Les seules propagations congruentes, que nous ayons à considérer, sont celles par lesquelles les composantes ξ^i d'un vecteur subissent les variations $d\xi^i$ infiniment petites, mais du même ordre que les composantes du déplacement de P_0

$$d\xi^i = d\lambda^i_k \, \xi^k$$

Etant données deux telles propagations L et M de P_0 en P, caractérisées respectivement par les coefficients $d\lambda^i_k$, et $d\mu^i_k$, la rotation ML^{-1} est infinitésimale; elle est représentée par les formules

(68) $$d\xi^i = d\alpha^i_k \cdot \xi^k \quad \text{avec} \quad d\alpha^i = d\mu^i_k - d\lambda_k.$$

Nous en tirons la conséquence suivante : l'exécution successive de 2 transformations congruentes infinitésimales du centre P_0 aux composantes dx_i et δx_i équivaut à la seule propagation congruente aux composantes $(dx_i + \delta x_i)$ (à un infiniment petit du 2ᵉ ordre près au plus). Si donc pour le passage de

$$P_0 \quad (x_1^0, \quad x_2^0, \quad \cdots, \quad x_n^0) \quad \text{à } P \quad (x_1^0 + \varepsilon, \quad x_2^0, \quad \cdots, \quad x_n^0)$$

suivant un déplacement ε parallèlement au 1ᵉʳ axe de coordonnées :

$$d\xi^i = \varepsilon \Lambda^i_{k1} \xi^k$$

est l'expression de la transformation congruente, et si Λ^i_{k2}, $\Lambda^i_{k3} \cdots$, Λ^i_{kn} ont la même signification pour les déplacements suivant les axes 2, 3... n respectivement, alors pour une translation aux composantes dx_i, les équations :

$$d\xi^i = \Lambda^i_{kr} dx_r \cdot \xi^k$$

représentent une propagation congruente.

Parmi les différentes sortes d'espaces métriques, nous allons apprendre à en connaître une par des propriétés internes simples; l'espace réel d'après Pythagore et Riemann fera partie de cette espèce. Le fait que le genre du groupe des rotations ne dépend pas du lieu est une propriété inhérente à l'espace, considéré comme forme des phénomènes; elle caractérise l'essence métrique de l'espace.

Mais la connexion métrique de point en point n'est pas déterminée par l'existence de l'espace, et par suite l'orientation réciproque des groupes de rotation aux différents points de la multiplicité ne l'est pas non plus. Cette connexion est plutôt dépendante du contenu matériel qui peut subir des déformations virtuelles quelconques. Afin qu'aucune restriction ne s'introduise, nous formulons comme premier axiome :

I. — *La nature de l'espace est compatible avec toute connexion métrique possible.*

D'après cela, une connexion métrique de P_0 avec son voisinage donné par les formules (69) est donc *possible* dans l'espace. Les formules (69) représentent un système de déplacements congruents de P_0 en P *pour n'importe quels nombres* Λ_{kr} *prescrits.*

A chaque système de coordonnées x_i en P_0, correspond une notion possible du déplacement parallèle : Transport des vecteurs de P_0 en P sans altération des composantes dans ce système. Un tel système de déplacements parallèles du corps des vecteurs en P_0 en tous les points infiniment voisins s'exprime dans un système de coordonnées, choisi une fois pour toutes, comme nous le savons, par les formules

$$d\xi^i = -d\gamma^i_k \cdot \xi^k \qquad \text{avec} \qquad d\gamma^i_k = \Gamma^i_{kr} dx_r,$$

les Γ satisfaisant aux conditions de symétrie :

(70) $$\Gamma^i_{kr} = \Gamma^i_{rk}$$

A chaque système de coefficients symétriques Γ correspond une définition possible du déplacement parallèle. Pour une connexion métrique donnée, on doit néanmoins ajouter la condition limitative que « les déplacements parallèles » doivent être des propagations congruentes. La deuxième exigence à laquelle nous devons satisfaire maintenant est celle qui résulte du théorème fondamental de la géométrie infinitésimale : pour une connexion métrique donnée, il y a toujours parmi les représentations congruentes du corps de vecteurs, un *seul* système de déplacements parallèles. Nous avons considéré provisoirement au § 15, la connexion affine comme un caractère originel de l'espace ; la vraie nature des choses réside plutôt en ce que la notion de déplacement parallèle est déterminée par la connexion métrique, de telle sorte que les déplacements parallèles se distinguent par des propriétés particulières dans l'ensemble des déplacements congruents dont ils sont une partie.

Nous exprimons cette condition par :

II. — *La connexion métrique détermine univoquement la connexion affine.*

Avant de pouvoir la formuler analytiquement, nous devons encore nous occuper des rotations infinitésimales. Un groupe continu $\mathcal{G}$ à r paramètres est une multiplicité r- dimensionnelle de matrices; si s_1, s_2, ...s_r sont des coordonnées dans cette multiplicité, il correspond à chaque système de valeurs des coordonnées une matrice $A(s_1, s_2 \ldots. s_r)$ du groupe. Il y a un système de valeurs déterminé — nous pouvons supposer que c'est $s_1 = s_2 = \ldots s_r = 0$, — auquel correspond l'identité E.

Les matrices infiniment voisines de E et qui font partie du groupe, diffèrent de E de :

$$\mathbf{A}_1 ds_1 + \mathbf{A}_2 ds_2 + \cdots + \mathbf{A}_r ds_r$$

où

$$\mathbf{A}_i = \left(\frac{\partial A}{\partial s_i}\right)_0.$$

Une matrice $\mathbf{A}$ est dite une opération infinitésimale du groupe, s'il existe dans le groupe une transformation (dépendante de ε) qui coïncide avec $E + \varepsilon\mathbf{A}$ à un infiniment petit près d'ordre supérieur à ε. Les opérations infinitésimales du groupe forment la famille :

(71) $\mathfrak{g}$: $\lambda_1 \mathbf{A}_1 + \lambda_2 \mathbf{A}_2 + \ldots \lambda_r \mathbf{A}_r$(les λ_i sont des nombres quelconques)

$\mathfrak{g}$ est précisément r- dimensionnel, les $\mathbf{A}$ sont linéairement indépendants. Car si A est une matrice du groupe, les matrices infinimen voisines de A sont données par la formule $A(E + \varepsilon\mathbf{A})$ où ε est infiniment petit et où $\mathbf{A}$ parcourt tout l'ensemble $\mathfrak{g}$. Si alors $\mathfrak{g}$ n'était pas r dimensionnel, le voisinage de chaque matrice du groupe ne le serait pas; il y aurait des relations linéaires entre les dérivées $\dfrac{\partial A}{\partial s_i}$, $\mathbf{A}$ dépendrait vraiment d'un nombre de paramètres moindres que r. Les opérations infinitésimales déterminent et engendrent tout le groupe. Si l'on exécute n fois l'opération $E+\frac{1}{n}\mathbf{A}$ (n étant un nombre qui dépasse tout nombre donné à l'avance), on obtient une matrice finie différente de E et qui fait partie du groupe :

$$A = \lim_{n=\infty}\left(E+\frac{1}{n}\mathbf{A}\right)^n = E+\frac{\mathbf{A}}{1!}+\frac{\mathbf{A}^2}{2!}+\frac{\mathbf{A}^3}{3!}+\cdots$$

on obtient ainsi chaque matrice du groupe (ou au moins toutes celles qui se laissent atteindre continuement à l'intérieur du groupe à partir de l'identité) en faisant parcourir à $\mathbf{A}$ tout l'ensemble $\mathfrak{g}$. Mais n'importe quelle famille de la forme (71) ne donne pas par ce procédé un groupe, les $\mathbf{A}_i$ doivent remplir certaines conditions d'intégrabilité. On les obtient de la même façon qu'on a obtenu les conditions d'intégrabilité pour le déplacement parallèle dans l'espace euclidien. Partons de l'identité E ($s_i = 0$) et faisons subir aux paramètres les variations ds_i, nous obtenons la matrice $A_d = E + dA$; on forme de même pour une autre variation δs_i la matrice A_δ; ensuite on forme le produit $A_\delta A_d$ et l'on rétrograde en effectuant les 2 opérations en sens inverse, ce qui donne le produit $A_\delta^{-1}A_d^{-1}A_\delta A_d$ qui représente une matrice infiniment peu différente de E. Soit, par exemple, d une variation dans la direction du 1er axe de coordonnées et δ une variation dans la direction du 2^e, nous avons alors à considérer les 2 matrices :

$$A_s = A(s, 0, 0, \dots, 0) \quad \text{et} \quad A_t = A(0, t, 0, \dots, 0)$$

et le produit

$$A_{st} = A_t^{-1}A_s^{-1}A_tA_s$$

on a :

$$A_{s0} = A_{0t} = E$$

et par suite :

$$\lim_{s=0,\quad t=0} \frac{A_{st}-E}{s.t} = \left(\frac{\partial^2 A_{st}}{\partial s\,\partial t}\right)_{\substack{s=0\\t=0}}.$$

Puisque A_{st} appartient au groupe, cette limite est une opération infinitésimale du groupe; on trouve :

$$\frac{\partial A_{st}}{\partial t} = -\mathbf{A}_2 + A_s^{-1}\mathbf{A}_2A_s \qquad \text{pour } t = 0 \qquad \text{d'où :}$$

$$\frac{\partial^2 A_{st}}{\partial s\partial t} = -\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 \qquad \text{pour} \qquad t=0, \qquad s=0.$$

D'après cela

$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$, comme d'ailleurs $\mathbf{A}_i\mathbf{A}_l - \mathbf{A}_l\mathbf{A}_i$

doit être une transformation infinitésimale du groupe; ou ce qui revient au même : si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont 2 opérations infinitésimales du groupe, $\mathbf{AB}-\mathbf{BA}$ en est aussi une. Sophus Lie, auquel nous devons les notions fondamentales et les résultats essentiels de la théorie des groupes continus de transformations [12]), a démontré que cette condition nécessaire est encore suffisante. Nous pouvons donc préciser : *Une famille linéaire à* r *dimensions de matrices est dite un groupe infinitésimal à* r *paramètres si* **AB** **BA** *est une matrice du groupe quand* **A** *et* **B** *en sont 2 quelconques.* Par l'introduction des opérations infinitésimales du groupe, le problème des groupes continus de transformations est « linéarisé ».

Si toutes les transformations du groupe conservent les volumes, la trace de toute opération infinitésimale est nulle, car le développement du déterminant de $E + \varepsilon\mathbf{A}$ suivant les puissances de ε commence par les termes : $1 + \varepsilon$. trace $(\mathbf{A})$.—U est une similitude, si pour chaque G du groupe des rotations la transformation UGU^{-1}, ou ce qui revient au même la transformation $UGU^{-1}G^{-1}$ appartient au groupe $\mathcal{G}$ des rotations. D'après cela $\mathbf{A}_0^*$ est une opération infinitésimale du groupe des similitudes si, et seulement si, $\mathbf{A}_0^*\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{A}_0^*$ est une opération qui fait partie de $\mathbf{g}$ pour toutes les opérations $\mathbf{A}$ de $\mathbf{g}$. Les rotations euclidiennes :

$$d\xi^i = v^i_k\xi^k$$

qui sont les transformations linéaires laissant invariante la forme quadratique unitaire.

$$Q \quad = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + \ldots\ldots + (\xi^n)^2$$

ont été déterminées à la page 39. La condition caractéristique pour elles, c'est que :

$$\tfrac{1}{2}\,dQ_0 = \xi^i d\xi^i = 0, \text{ ce qui exige que :}$$

$$v^k_i = -v^i_k$$

Il s'agit donc du groupe infinitésimal des matrices symétriques gauches ; il est évidemment à $\dfrac{n(n-1)}{2}$ paramètres. Qu'on s'en convainque par le calcul direct ! Si Q est une forme quadratique quelconque qui reste invariante pour les rotations infinitésimales euclidiennes : $dQ = 0$, alors Q ne diffère de Q_0 que par un facteur constant. En effet, si :

$$Q = a_{ik}\xi^i\xi^k, \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

on doit avoir pour tout système symétrique gauche de nombres v^i_k

(72) $$a_{rk}v^r_i + a_{ri}\,v^r_k = 0$$

faisons d'abord $k = i$ et remarquons que les nombres $v^1_i, v^2_i \ldots, v^n_i$ pour un indice i particulier peuvent être choisis arbitrairement à l'exception de v^i_i qui est nul; on a alors :

$$a_{ri} = 0 \text{ pour } r \neq i.$$

Faisons $a_{ii} = a_i$, alors (72) s'écrit :

$$v^k_i(a_i - a_k) = 0\,;$$

c'est-à-dire $a_i = a_k$.

Le groupe infinitésimal $\mathbf{d}^*$ des similitudes s'obtient à partir de $\mathbf{d}$ en lui associant une matrice E qui représente ici la dilatation infinitésimale $d\xi^i = \varepsilon\xi^i$. Car, si la matrice $C = (c^k_i)$ appartient à $\mathbf{d}^*$ c'est-à-dire si pour chaque système symétrique gauche v_l, le système :

$$c_r v_k^r - v_r^i c_k^r$$

est aussi symétrique gauche, c'est que les $a_{ik} = c_k^i + c_i^k$ satisfont aux équations (72); par suite $a_{ik} = 2a.\delta v_i$ c'est-à-dire que C est égal à aE augmenté d'une matrice symétrique gauche.

Plus généralement, soit $\mathbf{d}_Q$ le groupe infinitésimal des transformations linéaires qui transforment une forme quadratique non dégénérée quelconque Q en elle-même; $\mathbf{d}_Q$ et $\mathbf{d}_{Q'}$ ne se distinguent que par l'orientation, si Q' provient de Q par une transformation linéaire. Il n'y a donc qu'un nombre fini d'espèces différentes de groupes infinitésimaux $\mathbf{d}_Q$ qui se distinguent par l'indice d'inertie de Q. Mais cette différence tombe d'elle-même, si l'on ne se borne pas aux grandeurs réelles, mais qu'on introduise des variables complexes; alors $\mathbf{d}_Q$ est de même espèce que $\mathbf{d}$.

Après ces préparatifs, nous pouvons formuler analytiquement les conditions I et II. Soit $\mathbf{g}$ le groupe infinitésimal des rotations en P. Nous entendons par Λ^i_{kr} chaque système de n^3 nombres, par A^i_{kr} chaque système qui n'est composé que par des matrices appartenant à $\mathbf{g}$: (A^i_{k1}), (A^i_{k2}), ..., (A^i_{kn}); enfin par Γ^i_{kr} un système quelconque de nombres satisfaisant aux conditions de symétrie (70). Si le groupe infinitésimal des rotations est à N paramètres, ces nombres forment respectivement des multiplicités linéaires à n^3; nN et $n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ dimensions.

D'après I, quand la connexion métrique parcourt toutes ses possibilités, des systèmes de nombres quelconques Λ^i_{k1}, Λ^i_{k2}, Λ^i_{kn} peuvent représenter les coefficients de n déplacements infinitésimaux congruents suivant les n directions d'axes [voir (69)], alors d'après II [voir (70)] chaque Λ doit être décomposable *d'une manière et d'une seule*, d'après la formule :

$$\Lambda^i_{kr} = \mathsf{A}^i_{kr} - \Gamma^i_{kr}$$

cela exige que :

1) $$n^3 = nN + n\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ou} \quad N = \frac{n(n-1)}{2};$$

2) et que l'on n'ait jamais $\mathsf{A}^i_{kr} - \Gamma^i_{kr} = 0$ sans que tous les A et tous les Γ s'évanouissent; en d'autres termes un système de nombres A non tous nuls ne peut jamais remplir les conditions de symétrie $\mathsf{A}^i_{kr} = \mathsf{A}^i_{rk}$. Supposons, afin de formuler invariantivement cette condition, que l'on obtienne à partir de 2 vecteurs ξ et η et conformément à ces conditions de symétrie un vecteur ζ par la loi

$$\zeta^i = \mathsf{A}^i_{kr}\xi^k\eta^r$$

on peut dire que cette relation représente une *double rotation infinitésimale* qui fait passer de ξ en ζ pour chaque vecteur η fixe, et de η à ζ pour chaque ξ fixe, chacune de ces opérations faisant partie de $\mathbf{g}$. Une telle correspondance est une *matrice double symétrique.* On peut alors présenter les conditions analytiques qui sont les conséquences de I et II, sous la forme suivante :

Le groupe infinitésimal $\mathfrak{g}$ *des rotations possède les propriétés suivantes :*

a) *la trace de chaque matrice est nulle ;*

b) *en dehors de zéro, il n'y a dans* $\mathfrak{g}$ *aucune matrice double symétrique;*

c) *le nombre maximum des dimensions de* $\mathfrak{g}$ *qui soit compatible avec* b) *est* $N = \frac{n(n-1)}{2}$.

Ces propriétés conservent leur sens dans le domaine des grandeurs complexes. Nous nous rendons compte qu'elles existent pour le groupe $\mathfrak{d}$ des rotations infinitésimales euclidiennes, c'est-à-dire que les n^3 nombres v^i_{kl} ne satisfont pas à la fois aux conditions

$$v^i_{lk} = v^i_{kl}, \qquad v^k_{il} = -v^i_{kl}$$

sans être tous nuls. C'est ce que l'on voit en faisant un calcul analogue à celui de la page 110; on écrit les 3 équations qui s'obtiennent à partir de $v^i_{kl} + v^k_{il} = 0$ par les permutations cycliques des indices *ikl*, on additionne la première et la dernière, on soustrait ensuite la deuxième et l'on trouve $v^i_{kl} = 0$, en se référant aux conditions de symétrie.

Je tiens pour très probable que $\mathfrak{d}$ est essentiellement le seul groupe infinitésimal qui satisfasse aux postulats *a*), *b*), *c*); plus précisément, dans le domaine complexe, chaque groupe infinitésimal $\mathfrak{g}$ satisfaisant à *a*), *b*), *c*) est identique à $\mathfrak{d}$ moyennant un choix convenable du système de coordonnées. Si cela est, le groupe infinitésimal des rotations est identique à un certain groupe $\mathfrak{d}_Q$ où Q est une forme quadratique non dégénérée. Q est même déterminé par $\mathfrak{g}$ à un facteur constant près.

Q est réelle si $\mathfrak{g}$ l'est. Car si Q (où les variables sont réelles) se décompose en : $Q_1 + iQ_2$, $\mathfrak{g}$ laisse les deux formes Q_1 et Q_2 invariantes; par suite

$$Q_1 = c_1 Q \qquad Q_2 = c_2 Q$$

et parce que $c_1 + c_2 i = 1$; il faut que l'une au moins des constantes c_1 et c_2 soit différente de zéro ; par suite Q est une forme réelle, à un facteur constant près.

Les développements du paragraphe précédent seraient ainsi raccordés à une analyse complète de l'espace ; l'on pourrait prétendre avoir trouvé la raison profonde de la validité du théorème de Pythagore dans les bases mêmes les plus solides de l'essence de l'espace [13]). Si au contraire la proposition mathématique qui nous a paru probable, n'est pas vraie, les caractères essentiels et distinctifs de l'espace nous échapperaient encore. En fait, j'ai établi que la proposition est vraie pour $n=2$, et $n=3$; cette démonstration purement mathématique nous entraînerait trop loin.

Je préfère attirer l'attention sur deux points : 1) il ne résulte aucune contradiction avec l'axiome I, de ce que l'on puisse déterminer d'après II non seulement la métrique, mais aussi la connexion métrique de la même manière en chaque point, et même on peut faire cette détermination le plus simplement qu'il est possible : en chaque point, il y a un système géodésique de telle sorte que le transport de tout vecteur d'un point à un point voisin sans altération de ses composantes, est un transport congruent; 2) la possibilité de concevoir la métrique pythagoricienne de l'espace comme l'unique métrique, dépend essentiellement de ce qu'on peut faire subir aux rapports métriques des modifications virtuelles; nous sommes ainsi en accord avec la détermination dynamique de la métrique telle que nous l'avons développée plus haut suivant les idées de Riemann et d'Einstein. Ce sont d'ailleurs des considérations de cet ordre — qui ne prêteront plus à aucun doute quand on aura saisi les résultats de la théorie einsteinienne de la gravitation — qui nous ont permis de déblayer les voies conduisant à *l'intelligibilité de l'espace*. Les recherches sur l'espace développées dans ce chapitre II nous paraissent être un bon exemple pour l'analyse critique telle que la conçoit la philosophie phénoménologique (Husserl) ; c'est un exemple typique pour les cas où l'on considère une existence non immanente. Nous voyons par le développement historique du problème de l'espace, combien il nous est difficile d'atteindre des résultats définitifs. Une longue évolution mathématique, la grande extension des études géométriques depuis Euclide à Riemann, la pénétration des lois de la nature depuis Galilée et toutes les impulsions que cette étude a reçue de l'expérience, enfin le génie de quelques grands esprits — Newton, Gauss, Riemann, Einstein — tout à concouru (et tout était nécessaire) pour nous libérer des notions superficielles auxquelles nous serions sans cela encore attachés. En vérité, lorsque le vrai point de vue est atteint, la raison est inondée de lumière et les découvertes qu'elle fait ont alors pour elle le caractère de l'évidence; cependant, elle n'avait pas la force d'atteindre d'un seul coup ce point de vue. Cela devrait calmer un peu l'impatience des philosophes qui croient que l'être peut être atteint par une seule démarche et un seul acte de représentation ; ils ont raison dans l'absolu, mais au point de vue humain, ils ont tort. L'exemple de l'espace est très instructif pour éclaircir cette question qui nous paraît décisive au point de vue phénoménologique : jusqu'à quel point la démarcation des entités qui surgissent dans la conscience, exprime-t-elle une structure intrinsèque du donné lui-même et jusqu'à quel point n'est-elle qu'une simple convention.

CHAPITRE III

RELATIVITÉ DE L'ESPACE ET DU TEMPS

§ 19. — Le principe de relativité de Galilée.

Nous avons déjà expliqué dans l'introduction de quelle manière on mesure le temps au moyen d'une horloge, et comment on peut, après avoir choisi une origine dans le temps et une unité de temps, caractériser chaque instant par un nombre t. Mais le problème des *relations du temps et de l'espace* qui forme l'objet de la théorie de la relativité, est l'un des plus difficiles, sa solution, l'un des faits les plus importants de l'histoire de l'esprit humain, est due avant tout à Copernic et à Einstein.

Une horloge donne des indications sur les rapports temporels de certains événements qui précisément arrivent, là où l'horloge se trouve. Mais naïvement et avec une évidence pleine et entière, tout en percevant à chaque instant les faits qui se trouvent dans notre voisinage immédiat, nous étendons à tout l'univers notre notion du temps ; nous croyons que cela a un sens objectif d'affirmer que tel événement qui arrive n'importe où, a lieu « maintenant » (au moment où nous dirons ce mot); nous croyons que la question de savoir si, de deux événements arrivés en deux points différents, l'un est antérieur ou postérieur, ou simultané de l'autre, possède en elle-même un sens objectif. *C'est bien à cette thèse que nous nous tiendrons d'abord.* Chaque événement localisé étroitement dans le temps et dans l'espace, comme par exemple l'éclatement brusque et instantané d'une petite étincelle, se produit en un point déterminé de l'espace-temps, de *l'univers* comme nous dirons ; d'après la thèse que nous soutenons, à chaque point de l'univers correspond une coordonnée *bien déterminée* de temps : t. Il s'agit maintenant de fixer le *lieu* dans l'espace d'un tel événement ponctuel. Nous attribuons une distance, à un moment déterminé, par exemple à deux points matériels. Nous admettons donc que les points de l'univers, qui correspondent à un instant t déterminé, forment une multiplicité ponctuelle à trois dimensions, dans laquelle la géométrie euclidienne est valable (nous revenons en ce qui concerne l'espace au point de vue du chapitre I). Nous choisissons une unité de longueur déterminée et un système de coordonnées rectangulaires, à l'instant t (par exemple un coin de la salle où nous nous trouvons). Alors à chaque point de l'univers dont la coordonnée de temps est t, nous pouvons attribuer trois coordonnées d'espace déterminées x_1, x_2, x_3.

Considérons alors un autre instant t'. Nous attachons un sens objectif à la mesure de l'espace à l'instant t' avec la même unité de longueur qu'au moment t (au moyen d'une règle « rigide » donnée en t ausi bien qu'en t'); une fois pour toutes, fixons cette unité de longueur et l'unité de temps (cm, sec.). Mais alors nous pouvons encore choisir arbitrairement la position du système cartésien de coordonnées, indépendamment du choix de t. Mais ce n'est que si nous posons la condition que l'on peut attacher un sens objectif aux propositions suivantes : deux événements ponctuels donnés, non simultanés se passent au *même point* de l'espace, tel corps est en *repos*, que nous pouvons fixer objectivement la position du système de coordonnées à chaque instant, l'unité de longueur ayant été choisie une fois; en effet, il suffit que le système de coordonnées soit en repos.

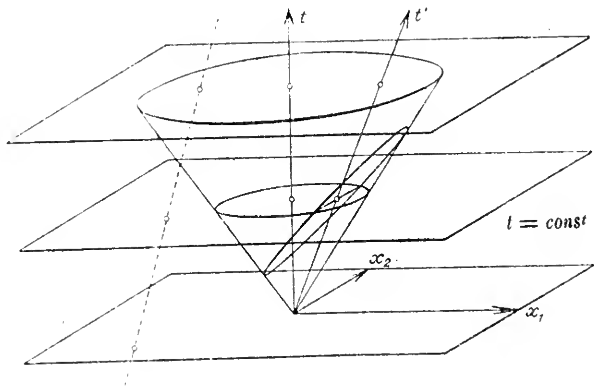

Fig. 7

Alors, après avoir fixé l'origine du temps, chaque point d'univers sera caractérisé par quatre coordonnées déterminées : la coordonnée temporelle et les trois coordonnées spatiales x_1, x_2, x_3. Pour rendre possible une représentation graphique, supprimons une coordonnée d'espace, de telle sorte que, à un instant donné nous admettons que la multiplicité des événements soit située dans un plan euclidien.

Nous nous confectionnerons une image en représentant un point d'univers dans l'espace au moyen des trois coordonnées x_1, x_2, t relatives à un système d'axes rectangulaires x_1, x_2, t. Dans cette image nous pouvons alors construire « l'horaire graphique » de tous les mouvements des points matériels; chacun de ces mouvements sera caractérisé par une « ligne d'univers » dont la direction possède constamment une composante positive parallèle à l'axe des t. Les lignes d'univers de points matériels en repos sont des droites parallèles à l'axe des t; la ligne d'univers d'une translation uniforme d'un point matériel est une droite. Dans une section plane $t = const.$ on peut lire la position de chaque point matériel au même moment t. Si nous choisissons l'origine du temps et le système cartésien de coordonnées d'une autre manière, nous aurons des formules de transformation de la forme :

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} x = \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + \alpha_1 \\ x = \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \alpha_2 \\ t = \qquad\qquad\quad t' + a, \end{cases}$$

entre les nouvelles coordonnées (x'_1, x'_2, t') d'un évènement et les anciennes (x_1, x_2, t); les α_1, α_2, a sont des constantes, les α_{ik} sont les coefficients (constants aussi) d'une transformation orthogonale. Les coordonnées d'univers sont donc déterminées objectivement *à une transformation quelconque de l'espèce* (I) *près*. Nous faisons abstraction du choix arbitraire des deux unités de mesure. Si l'origine de l'espace et du temps reste inchangée, $\alpha_1 = \alpha_2 = a = 0$; x'_1, x'_2, t' sont alors les coordonnées par rapport à un système de coordonnées dont l'axe des t' coïncide avec l'axe des t, et dont les axes des x_1 et des x_2 ont tourné dans leur plan $t = 0$ d'un certain angle. Déjà une réflexion immédiate nous montre que l'une des hypothèses admises : *le concept de repos a un contenu objectif*, n'a pas de sens*. Si je conviens avec quelqu'un d'un rendez-vous pour demain, « à la même place » où nous sommes en ce moment, cela veut dire que nous nous retrouverons, mon interlocuteur et moi, demain devant le même bâtiment, dans la même rue, au pied de la même statue (toutes choses qui seront, d'après Copernic, fort loin de l'endroit où elles se trouvent aujourd'hui dans l'univers) ; et cela est bien conforme malgré tout au sens commun, par suite des circonstances heureuses qui font que nous sommes nés dans une portion de l'univers qui est essentiellement stable, c'est-à-dire dont les changements globaux sont imperceptibles. Les maisons sont fixes, le navire file tant de nœuds, toutes ces affirmations journalières s'entendent sans qu'on y insiste, par rapport à la « terre invariable dans son aspect ». *Seuls les mouvements relatifs des corps l'un par rapport à l'autre ont une signification objective*, c'est-à-dire que les éloignements et les angles déterminés par les positions simultanées des points matériels, dans leur dépendance fonctionnelle du temps ont seuls un sens objectif. Chaque système de coordonnées cartésien est donc équivalent à tout autre. La dépendance des coordonnées du même point d'univers par rapport à l'un et à l'autre de deux de ces systèmes est donnée par les formules :

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}(t')\, x'_1 + \alpha_{12}(t')\, x'_2 + \alpha_1(t'), \\ x_2 = \alpha_{21}(t')\, x'_1 + \alpha_{22}(t')\, x'_2 + \alpha_2(t'), \\ t = t' + a, \end{cases}$$

* Aristote avait déjà vu cela clairement : le « lieu » (τόπος) désigne chez lui une relation d'un corps aux corps qui sont dans son voisinage.

où les α_i peuvent être des fonctions continues de t', arbitraires à ceci près que les valeurs des α_{ik} pour une valeur déterminée de t', sont les coefficients d'une transformation orthogonale. Les surfaces $t' = const$ sont encore des surfaces $t = const$, dans notre représentation graphique, mais les surfaces $x'_1 = const$, ou $x'_2 = const$ ne sont plus des plans dans le système (x_1, x_2, t) mais des surfaces courbes ; les formules de transformation ne sont plus linéaires.

Dans ces circonstances, lorsqu'on aura à étudier le mouvement d'un système matériel, les planètes par exemple, il ne s'agira que de choisir le système de coordonnées par rapport auquel les fonctions $x_1(t)$, $x_2(t)$ qui représentent les coordonnées d'espace pour chaque instant du temps, soient le plus simple possible, ou satisfassent à des lois simples. Ce fut la découverte de Copernic, approfondie par Képler, de montrer qu'il existe un système de coordonnées pour lequel les lois du mouvement des planètes prennent une forme extrêmement plus simple et plus suggestive que si l'on rapporte ces mouvements à la terre supposée immobile. Avant tout, ce qui est à la base des recherches de Copernic, *c'est qu'il se libéra de la croyance à la signification absolue de la terre considérée comme repère*. Ses considérations, de même que celles de Képler, sont de nature purement *cinématique*. Newton couronna leur œuvre en découvrant dans la loi d'attraction et dans les lois de la mécanique, la raison d'ordre dynamique qui rend compte des lois cinématiques de Képler. On sait de quelle façon éclatante la mécanique newtonienne a été confirmée tant dans le ciel que sur la terre. Puisque sa validité n'est pas bornée au système solaire, et que ses lois ne sont pas invariantes vis-à-vis des transformations (II), c'est donc qu'il est possible d'une manière absolue et indépendante de toute contingence, de spécialiser, grâce à cette mécanique, le système de coordonnées d'une façon beaucoup plus restrictive que par les considérations cinématiques qui ont conduit au « principe de relativité » (II).

En tête de la liste des propositions de la mécanique, se formule le *principe galiléen d'inertie* : un point matériel qui n'est soumis à aucune force et à aucune action extérieure, se meut rectilignement avec une vitesse uniforme. Sa ligne d'univers est par suite une droite ; les coordonnées spatiales (x_1, x_2) du point matériel sont des fonctions linéaires de t. Si ce principe est valable pour deux systèmes de coordonnées liés par les relations (II), les x_1 et les x_2 doivent se transformer en des fonctions linéaires de t', si l'on y remplace x'_1 et x'_2 par des fonctions linéaires de t'. Il s'ensuit que les α_{ik} doivent être des constantes, et que α_1 et α_2 doivent être des fonctions linéaires de t' ; c'est-à-dire qu'un système de coordonnées cartésien se meut relativement à un autre suivant une translation rectiligne et uniforme, si le principe d'inertie est vrai pour les deux. Réciproquement, soient C et C', deux systèmes de coordonnées, si pour C les lois de la mécanique newtonienne et le principe d'inertie sont valables, et si C et C' sont liés suivant les relations (II) où les α_{ik} et les α_i ont été spécialisés comme il vient d'être dit, alors les lois de la mécanique newtonienne sont valables aussi pour C'. Deux systèmes de coordonnées pour lesquels la mécanique newtonienne est valable sont donc liés par les équations :

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2' + \gamma_1 t' + \alpha_1, \\ x_2 &= \alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2' + \gamma_2 t' + \alpha_2, \\ t &= t' + \alpha, \end{aligned} \right.$$

où les α_{ik} sont les coefficients constants d'une transformation orthogonale, a, les α_i et les γ_i des constantes arbitraires; et chaque transformation de cette espèce représente le passage d'un système de coordonnées à un autre où les lois de la mécanique sont les mêmes que dans le premier. (*Principe de relativité de Galilée-Newton.*)

L'essentiel de ces résultats, si nous faisons abstraction de l'arbitraire évident qui s'attache à la direction des axes, c'est que les lois de la mécanique sont invariantes, vis-à-vis des transformations :

$$(1) \qquad x_1 = x_1' + \gamma_1 t', \qquad x_2 = x_2' + \gamma_2 t', \qquad t = t'.$$

Dans notre graphique (fig. 7), les x_1', x_2', t' seraient les coordonnées relativement à un système d'axes dont les axes des x_1' et des x coïncideraient avec le système (x_1, x_2), tandis que l'axe des t' aurait une direction quelconque.

Que les lois de la dynamique newtonienne ne soient pas altérées quand on passe d'un système (C) à un système (C') par les relations (III), c'est un fait dont on se rend compte de la manière suivante : D'après la loi d'attraction, la force de gravitation avec laquelle un point matériel agit à un instant donné sur un autre point matériel, est représentable par un vecteur spatial indépendant du système de coordonnées. N'importe quelle autre force de nature physique doit être susceptible d'une même représentation, pour qu'on puisse lui appliquer les hypothèses de la mécanique newtonienne ; on se rend compte, par exemple, que les tensions de la théorie de l'élasticité sont bien de l'espèce exigée. La masse est un scalaire indépendant du système de coordonnées ; enfin à cause de (1) on a pour le mouvement d'un point matériel, les relations :

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_1'}{dt'} + \gamma_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_2'}{dt'} + \gamma_2 ; \quad \frac{d^2x_1}{dt} = \frac{d^2x_1'}{dt'}, \quad \frac{d^2x_1}{dt} = \frac{d^2x_2'}{dt'}$$

qui montrent que l'accélération, et non pas la vitesse, est un vecteur d'espace indépendant du système de coordonnées choisi. Par suite, la loi fondamentale :

$$\text{masse} \times \text{accélération} = \text{force}$$

possède bien l'invariance annoncée.

D'après la mécanique newtonienne, le mouvement du centre de gravité d'un système matériel fermé, ne subissant aucune action de l'extérieur, est une translation rectiligne uniforme. Si nous admettons que le soleil et les planètes constituent un tel système, il n'y aurait pas de sens à demander si le centre de gravité du système solaire se trouve en repos ou bien s'il a un mouvement de translation uniforme. Quand les astronomes affirment malgré cela, que le soleil se dirige vers un point du ciel situé dans la constellation d'Hercule, ils appuient leurs affirmations sur l'observation statistique que les étoiles semblent en moyenne s'écarter radialement de ce point, comme les arbres d'une forêt dont on s'approche, semblent s'écarter du point vers lequel on se dirige ; s'il est vrai qu'en moyenne les étoiles sont au repos, c'est-à-dire que le centre de gravité du système des étoiles fixes est en repos, l'affirmation des astronomes n'est qu'une proposition sur le mouvement du centre de gravité du système solaire relativement au centre de gravité du système des étoiles fixes.

On doit s'habituer à penser non plus dans l'espace, ni dans le temps, mais dans *l'univers* ou *l'espace-temps* pour bien saisir la signification du principe de relativité. Ce n'est que la coïncidence de deux événements dans l'espace-temps qui a un sens immédiat. Que l'espace et le temps ne se laissent pas séparer d'une manière absolue, telle est l'affirmation du principe de relativité. Conformément à la conception mécanistique du monde suivant laquelle tous les phénomènes physiques se réduisent en dernière analyse à la mécanique, nous admettons que, non seulement la mécanique, mais encore tout l'ensemble des lois de la physique, sont soumis au principe de relativité galiléo-newtonien, de telle façon qu'il est donc impossible de faire un choix plus étroit parmi les systèmes de coordonnées équivalents pour la mécanique, dont deux quelconques sont liés par les formules (III). Par suite de cela, la géométrie de *l'univers quadridimensionnel* est établie précisément dans le même sens où l'on entend que la géométrie euclidienne est établie dès que l'on connaît le groupe de transformations qui permet de passer d'un système cartésien à un autre système cartésien. Une relation entre deux points d'univers a un sens objectif dans le cas seul où elle s'exprime par des équations entre les coordonnées des points qui restent invariantes pour les transformations (III). On dit de l'espace qu'il est *homogène* en tous les points, et en chaque point dans toutes les directions ; ces propositions ne sont que des parties de l'énoncé complet du principe d'homogénéité suivant lequel tous les systèmes de coordonnées cartésiens sont équivalents. De la même manière, le principe de relativité indique dans quel sens précis il faut entendre la proposition suivante : *l'univers est homogène* (l'univers étant l'espace-temps, considéré comme « forme » des phénomènes). Il est assez curieux de remarquer que deux phénomènes mécaniques, qui sont complètement équivalents au point de vue cinématique, peuvent être différents au point de vue de la dynamique, comme le montre l'opposition des deux principes de relativité exprimés par (II) et par (III) ; celui-là étant beaucoup plus étendu que celui-ci :

une sphère liquide en rotation ou un volant de machine qui tourne ne sont pas en soi différents d'une sphère en repos ou d'une roue en repos; néanmoins la sphère en rotation *s'aplatit*, celle qui est en repos garde sa forme, et le volant qui tourne est le siège de tensions internes qui peuvent le faire éclater si la vitesse est trop grande, tandis que le volant en repos ne présente rien de semblable. La cause de ces différences ne peut résider que dans « la métrique de l'univers » qui se manifeste comme une puissance agissante dans la force centrifuge. De ce point de vue, on peut faire jaillir quelque lumière sur les idées de Riemann : si, à la métrique (et ici il faut entendre la métrique d'univers et non pas la métrique spatiale) correspond quelque chose dont la réalité se manifeste par des forces agissant sur la matière comme par exemple le tenseur d'élasticité, il faut bien admettre qu'inversement la matière agit sur ce quelque chose. Ce n'est d'ailleurs que dans le Chapitre IV que nous développerons cette idée. Insistons tout d'abord sur le fait que les formules (III) sont linéaires ; cela veut dire que *l'univers est un espace quadridimensionnel euclidien affine*. Pour en faire une représentation géométrique systématique, nous utiliserons à côté des points d'univers, les *vecteurs d'univers*. Un déplacement d'univers, est une transformation qui fait correspondre à chaque point P un point P', de telle façon que les coordonnées de $P'(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)$ s'expriment au moyen des coordonnées de $P(x_0, x_1, x_2, x_3)$ par les relations :

$$x'_i = x_i + a_i \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

(on a écrit x_0 à la place de t), les a_i étant des constantes. Cette notion est indépendante du choix du système de coordonnées parmi ceux qui sont admissibles. Le déplacement qui conduit de P en P' sera désigné par $\overline{PP'}$. Parmi les points et les vecteurs d'univers, les axiomes de la géométrie affine sont valables moyennant qu'on fasse égal à 4, le nombre n des dimensions. Le principe d'inertie galiléen est une loi affine ; il dit par quels mouvements les lignes *droites* de notre univers affine sont réalisées.

Passons du point de vue de *l'affinité* au point de vue *métrique*. Sur notre représentation graphique qui (par la suppression d'une coordonnée) nous donnait une image affine de l'univers, nous voyons que sa structure métrique essentielle n'est pas autre chose que celle d'un espace euclidien; l'univers est « stratifié », les plans $t = const.$ ($x_0 = const.$) y ont une signification absolue. Après avoir fait choix d'une unité de mesure pour le temps, deux points d'univers A et B déterminent une différence de temps, la composante temporelle du vecteur $AB = \mathbf{x}$; c'est une forme linéaire, $t(\mathbf{x})$ du vecteur $\mathbf{x}$, comme le sont, en général, les composantes d'un vecteur dans un espace affine. Le vecteur $\mathbf{x}$ est dirigé vers le passé ou vers l'avenir suivant que $t(\mathbf{x})$ est négatif ou positif. De deux points d'univers A et B, l'un A, par exemple, est antérieur, simultané ou postérieur à l'autre B suivant que

$$t(\overline{AB}) > 0, \quad = 0, \quad \text{ou} \quad < 0.$$

Dans chaque « couche » la géométrie euclidienne est valable ; elle repose sur une forme quadratique définie, qui n'a de sens que pour les vecteurs d'univers $\mathbf{x}$, qui sont dans une couche, c'est-à-dire ceux pour lesquels $t(\mathbf{x}) = 0$ (car la distance de deux positions simultanées de deux points matériels a seule un sens). La métrique euclidienne reposant sur l'existence d'une forme quadratique définie positive, *la métrique galiléenne repose alors :*

1) *Sur l'existence d'une forme linéaire* $t(\mathbf{x})$ *du vecteur quelconque* $\mathbf{x}$ *(la « durée » du déplacement* $\mathbf{x}$*) ;*

2) *Sur l'existence d'une forme quadratique définie positive* $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ *(le carré de la longueur de* $\mathbf{x}$*), cette existence ne se manifestant qu'à l'intérieur de la multiplicité linéaire tri-dimensionnelle formée des vecteurs* $\mathbf{x}$ *pour lesquels* $t(\mathbf{x}) = 0$.

Pour la représentation intuitive des rapports physiques, nous ne pouvons pas nous priver de l'introduction d'un système de référence déterminé. Cette introduction dépend du choix d'un vecteur $\mathbf{e}$ arbitraire dans l'univers (celui suivant lequel est dirigé l'axe des temps dans la représentation graphique), et elle se trouve réalisée par le fait que tous les points d'univers qui se trouvent sur une même parallèle au vecteur $\mathbf{e}$ tombent tous au *même* point de l'espace. Il ne s'agit pas d'autre chose, géométriquement parlant, que d'une *projection parallèle.* Afin d'obtenir une formulation convenable, nous allons exposer quelques éclaircissements géométriques, relatifs à un espace affine, n- dimensionnel quelconque.

Attachons-nous, à cause de son intuitivité, au cas de $n = 3$. Soit dans l'espace une famille de droites parallèles à un vecteur $\mathbf{e}$ $(\neq 0)$. Si quelqu'un regarde dans l'espace de façon que son rayon visuel suive une telle droite, il n'en verra qu'un point; il n'est par suite pas nécessaire de se donner un plan *sur* lequel on projette. Nous posons les définitions :

Soit $\mathbf{e} \neq 0$. De 2 points A et A' tels que AA' soit un multiple de $\mathbf{e}$ nous disons qu'ils tombent dans un seul et même point $\mathbf{A}$ du sous-espace déterminé par $\mathbf{e}$. Nous pouvons représenter $\mathbf{A}$ par la droite parallèle à $\mathbf{e}$, sur laquelle se trouvent tous ces points A, A' qui coïncident dans le sous-espace.

Puisque chaque déplacement $\mathbf{x}$ de l'espace transforme une droite parallèle à $\mathbf{e}$ en une droite qui est encore parallèle à $\mathbf{e}$, c'est que $\mathbf{x}$ engendre un déplacement déterminé $\mathbf{X}$ du sous-espace ; mais deux déplacements $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ coïncident dans le sous-espace si leur différence est un multiple de $\mathbf{e}$.

Le passage au sous-espace ou la projection dans la direction de $\mathbf{e}$ sera désigné symboliquement par l'emploi de caractères gras pour les points et de capitales grasses pour les vecteurs. Par projection :

$$\lambda\mathbf{x},\ \mathbf{x}+\mathbf{y},\ AB \text{ se transforment en } \lambda\mathbf{X},\ \mathbf{XY},\ \mathbf{AB}\ ;$$

c'est-à-dire que la projection conserve le caractère d'affinité, et que dans le sous-espace la géométrie affine est valable avec un nombre de dimensions moindre d'une unité que le nombre des dimensions de l'espace complet.

Si l'espace est un espace métrique au sens euclidien, c'est-à-dire si la métrique y provient d'une forme quadratique $Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x},\mathbf{x})$ non dégénérée, que nous supposerons être définie positive pour nous en tenir au cas intuitif, sans d'ailleurs altérer la généralité de ce qui va suivre, nous pourrons prescrire une distance aux deux points du sous-espace, considéré comme les représentations en quelque manière de deux droites parallèles à $\mathbf{e}$ que l'on regarde de bout, cette distance étant évidemment égale à la longueur de la perpendiculaire commune aux deux droites. Formulons cela analytiquement. Supposons : $(\mathbf{ee}) = e \neq 0$, chaque déplacement $\mathbf{x}$ peut être décomposé en deux parties :

$$\mathbf{x} = \xi\mathbf{e} + \mathbf{x}^{*}, \tag{2}$$

dont la première est proportionnelle à $\mathbf{e}$ et dont la deuxième est orthogonale à $\mathbf{e}$,

$$(\mathbf{x}^{*}\mathbf{e}) = 0, \qquad \xi = \frac{1}{e}(\mathbf{x},\mathbf{e}). \tag{3}$$

Nous appellerons ξ *la hauteur* du déplacement $\mathbf{x}$ (la différence des hauteurs de A et B, si $\mathbf{x} = \overline{AB}$).

L'on a :

$$(\mathbf{xx}) = e\xi^2 + (\mathbf{x}^{*}\mathbf{x}^{*}). \tag{4}$$

$\mathbf{x}$ est donc complètement caractérisé par sa hauteur ξ et par le déplacement $\mathbf{X}$ que suscite $\mathbf{x}$ dans le sous-espace. Nous écrivons :

$$\mathbf{x} = \xi \mid \mathbf{X}.$$

L'espace complet est *décomposé* en hauteur et sous-espace ; la différence de position (ou vecteur de jonction) $\mathbf{x}$ de deux points de l'espace complet est décomposé en la différence de hauteur ξ des deux points, et la « différence de position » $\mathbf{X}$ dans le sous-espace ; non seulement l'énoncé de la coïncidence de deux points dans l'espace a un sens, mais encore les deux propositions suivantes en ont un : deux points coïncident dans le sous-espace ; ou deux points se trouvent à la même hauteur. Chaque translation $\mathbf{X}$ du sous-espace est suscité par une, et par une seule translation $\mathbf{x}^{*}$ de l'espace entier, perpendiculaire à $\mathbf{e}$; la relation entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}^{*}$ est réciproque et univoque, elle est affine. Par l'équation de définition :

$$(\mathbf{X},\mathbf{X}) = (\mathbf{x}^{*},\mathbf{x}^{*}),$$

nous octroyons au sous-espace une métrique qui repose sur la forme fondamentale $(\mathbf{XX})$; alors (4) se transforme en l'équation fondamentale de Pythagore

$$(\mathbf{x},\mathbf{x}) = e\xi^2 + (\mathbf{X},\mathbf{X}) \tag{5}$$

que l'on peut généraliser évidemment sans autre explication en

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = e\xi\eta + (\mathbf{X},\mathbf{Y}). \tag{5'}$$

L'application de tous ces résultats géométriques à l'objet qui nous préoccupe est évidente : l'espace entier est l'univers quadridimensionnel, **e** est un vecteur quelconque dirigé vers l'avenir ; le sous-espace est ce que nous appelons généralement *l'espace*. Deux points d'univers qui sont sur une ligne d'univers parallèle à **e** tombent en un même point de l'espace ; ce point de l'espace peut être représenté graphiquement par une droite parallèle à **e**, ce serait alors la ligne d'univers d'un point matériel constamment au repos. Mais en ce qui concerne la métrique, celle-ci est d'une autre espèce que celle que nous avons admise conformément au principe de relativité de Galilée ; c'est pourquoi nous y apporterons quelques modifications. Chaque translation d'univers $\mathbf{x}$ a une durée déterminée $t(\mathbf{x}) = t$ (qui tient la place de la hauteur dans nos analyses géométriques) et engendre dans le sous-espace une translation $\mathbf{X}$; conformément à cela, on décompose en temps et en espace suivant le schéma :

$$\mathbf{x} = t \mid \mathbf{X}$$

En particulier, chaque translation $\mathbf{X}$ de l'espace est engendrée par une, et une seule, translation d'univers $\mathbf{x}^*$ qui satisfait à $t(\mathbf{x}^*) = 0$. Par la forme quadratique qui est définie au moyen de $\mathbf{x}^*$, soit $(\mathbf{x}^*\mathbf{x}^*)$, on donne à l'espace sa métrique euclidienne

$$(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = (\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*).$$

L'espace est dépendant de la direction de projection ; en réalité la direction de projection peut être donnée par n'importe quelle translation uniforme d'un point matériel (ou du centre de gravité d'un système matériel).

Nous avons analysé ces choses avec une précision quelque peu pédante, afin de pouvoir saisir rapidement le sens analytique du principe de relativité d'Einstein.

Nous revenons alors au domaine physique. Grâce à la découverte que la *lumière a une vitesse de propagation finie*, l'idée naïve que les choses sont simultanées avec la perception que nous en avons, devient insoutenable. Puisque nous n'avons pas un moyen de transport de l'heure plus rapide que la lumière elle-même (ou que la T.S.F.), il est naturellement impossible d'obtenir la vitese de la lumière par la mesure du temps qui s'écoule entre l'envoi d'un signal lumineux expédié d'une station A et sa réception à une autre station B. Rœmer (1675) la calcula grâce à une irrégularité apparente dans la révolution des satellites de Jupiter, irrégularité dont la période est précisément une année; il paraissait absurde d'admettre que cette irrégularité fût due à une action de la terre sur les satellites de Jupiter, cette action ne pouvant causer une perturbation aussi importante sur leurs mouvements.

Fizeau confirma la découverte par des mesures terrestres ; sa méthode repose sur l'idée fort simple de faire coïncider la station réceptrice B avec la station expéditrice A, grâce à la réflexion d'un rayon lumineux issu de A sur un miroir perpendiculaire à sa direction. D'après ces mesures, nous devons admettre que la lumière se propage avec une vitese constante c autour du centre d'émission suivant des sphères concentriques. Dans notre représentation graphique (toujours en supprimant une coordonnée), la propagation d'un signal lumineux issu de O est représentée par le cône circulaire droit (fig. 7) :

$$c^2t^2 - (x_1^2 + x_2^2) = 0 \tag{6}$$

Chaque plan $t = const.$ coupe le cône suivant un cercle dont la circonférence est le lieu des points atteints par le signal à l'instant t ; l'équation (6) est satisfaite par tous les points d'univers qui sont atteints par le signal (on doit bien entendu supposer $t > 0$ dans l'équation [6]). De nouveau la question se pose de savoir quel système de référence est à la base de cette description du phénomène.

L'*aberration des étoiles fixes*, montre que la Terre se meut relativement à chaque étoile conformément aux lois de Newton, ce qui veut dire que chaque étoile peut être considérée comme un système de référence propre au sens de la mécanique newtonienne. Mais d'autre part, la propagation par sphères concentriques n'est certainement pas invariante vis-à-vis des transformations galiléennes (III); car un axe des t' incliné coupe dans la figure 7, les plans $t = const$, en des points qui sont excentriques aux cercles de propagation. Malgré tout, cela n'est pas une objection contre le principe de relativité galiléen, si l'on admet la représentation habituelle dela physique suivant laquelle la lumière se propagerait dans un milieu : *l'éther lumineux*, dont les particules sont mobiles les unes par rapport aux autres. Il se comporte alors vis-à-vis de la lumière comme la surface de l'eau sur laquelle une pierre qui la frappe engendre des ondes concentriques ; de ce phénomène on ne peut certes pas conclure que les équations de l'hydrodynamique contredisent le principe de relativité galiléen. Car le milieu même, l'eau ou l'éther, dont les particules, abstraction faite de petites oscillations, sont en repos les unes par rapport aux autres, fait l'office de système de référence pour lequel l'affirmation de la propagation concentrique est vérifiée.

Pour une discussion plus approfondie de cette question, nous développerons tout d'abord une théorie à laquelle l'optique est indissolublement liée depuis Maxwell : la théorie des champs électromagnétiques variables.

§ 20. — Electrodynamique des champs variables avec le temps. Théorème de relativité de Lorentz.

Le passage des champs électromagnétiques stationnaires aux champs variables a appris ce qui suit :

1) Ce que nous appelons courant électrique est bien un déplacement d'électricité; si nous faisons tourner un fil circulaire chargé, il engendre un champ magnétique, suivant la loi de Biot et Savart ;

ρ étant la densité de la charge, **v** la vitesse; la densité de ce courant de convection **s** est bien égale à ρ**v**; cependant pour conserver la loi de Biot et Savart sous son ancienne forme, il nous faudra changer d'unité: nous poserons donc $\mathbf{s} = \frac{\rho \mathbf{v}}{c}$, où c est une constante universelle ayant les dimensions d'une vitesse. L'expérience réalisée déjà par Weber et Kohlrausch, puis reprise plus tard par Rowland et Eichenwald, a fourni pour c une valeur qui, aux erreurs d'observation près, coïncide avec la vitesse de la lumière [2]). On prend $\frac{\rho}{c} = \rho'$ comme mesure électromagnétique de la densité de charge, et, pour donner aussi en unités électromagnétiques à la densité de force électrique la valeur $\rho'\mathbf{e}$, on prendra $\mathbf{e}' = c\mathbf{e}$ comme mesure électromagnétique du champ.

2) Un champ magnétique variable induit un courant dans un fil homogène : on peut le déterminer grâce à la loi matérielle $\mathbf{s} = \sigma \mathbf{e}$ et à la *loi de Faraday* sur l'induction qui s'énonce ainsi : la force électromotrice induite est égale, au signe près, à la dérivée par rapport au temps du flux d'induction magnétique embrassé par le conducteur, soit :

$$\int \mathbf{e}' d\mathbf{x} = -\frac{d}{dt}\int b_n do \tag{7}$$

(le premier membre est l'intégrale de la force électromotrice prise suivant une courbe fermée, le second membre est l'intégrale de surface de la composante normale de l'induction magnétique, étendue à une surface limitée par la courbe). Le flux d'induction est parfaitement déterminé, sans ambiguité, par le seul contour, attendu qu'il n'existe pas de magnétisme vrai, c'est-à-dire attendu que :

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0 \tag{8'}$$

Le théorème de Stockes nous permet de tirer de (7) la loi différentielle :

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

L'équation de l'électrostatique : rot $\mathbf{e} = 0$ est complétée ici par l'addition à son premier membre d'un terme résultant d'une dérivation par rapport au temps : $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}$. Toute l'électrotechnique repose sur cette équation, et la nécessité de l'introduction du dernier terme est complètement justifiée par l'expérience.

3) Au contraire, au temps de Maxwell, le terme par lequel se complétait l'équation fondamentale du magnétisme

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \mathbf{s}$$

était douteux. Dans un champ variable, par exemple, pendant la décharge d'un condensateur, on n'a plus :

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = 0$$

mais bien plutôt « l'équation de continuité » :

(10) $$\frac{1}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{s} = 0$$

exprimant le fait que le courant est un mouvement d'électricité. Comme $\rho = \operatorname{div} \mathbf{d}$, ce n'est plus $\mathbf{s}$, mais $\mathbf{s} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}$ dont la divergence est nulle, et l'on est amené à substituer, pour des champs variables à l'équation (9), l'équation :

(11) $$\operatorname{rot} \mathbf{h} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} = \mathbf{s}.$$

A côté de (11) nous avons toujours comme auparavant :

(11′) $$\operatorname{div} \mathbf{d} = \rho$$

Inversement (11) et (11′) entraînent l'équation de continuité (10). C'est l'introduction du terme différencié par rapport au temps $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}$ (du courant de déplacement de Maxwell) qui entraîne la propagation des perturbations électromagnétiques dans l'éther avec la vitesse finie c ; ce terme est à la base de la théorie électromagnétique de la lumière, qui a pu si merveilleusement expliquer les phénomènes optiques et qui trouve une confirmation expérimentale directe et une utilité technique, dans les recherches classiques de Hertz et la radiotélégraphie actuelle.

D'après cela il est manifeste que ces lois s'appliquent aux systèmes de référence dans lesquels la propagation de la lumière se fait par ondes sphériques, soit à l'éther lumineux « au repos ».

Aux équations du champ de Maxwell (8) et (8′), (11) et (11′), il faut adjoindre les lois relatives à la matière. Mais ici nous nous limitons à l'étude des états de l'éther ; alors :

$$\mathbf{d} = \mathbf{e}\,; \qquad \mathbf{h} = \mathbf{b}$$

et les équations de Maxwell se formulent ainsi :

(12_1) $$\operatorname{rot} \mathbf{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{b} = 0\,;$$

(12_2) $$\operatorname{rot} \mathbf{b} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \mathbf{s}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{e} = \rho.$$

Dans la théorie électronique, on considère ces équations comme absolument générales et rigoureuses ; on pose en outre $\mathbf{s} = \frac{\rho \mathbf{v}}{c}$, où $\mathbf{v}$ est la vitesse de la matière à laquelle adhère la charge électrique.

La force agissante sur les masses est due aux champs électrique et magnétique ; sa densité est :

(13) $$\mathbf{p} = \rho \mathbf{e} + [\mathbf{s}\mathbf{b}]$$

Comme $\mathbf{s}$ est parallèle à $\mathbf{v}$, le travail effectué par les électrons dans l'unité de temps et dans l'unité de volume est :

$$\mathbf{p}\mathbf{v} = \rho \mathbf{e}.\mathbf{v} = c(\mathbf{s}\mathbf{e}) = \mathbf{s}.\mathbf{e}'$$

Ce travail sert à accroître l'énergie cinétique des électrons, énergie qui est transmise partiellement, en vertu des chocs, aux molécules neutres. Cet accroissement d'énergie moléculaire se manifeste dans l'intérieur des conducteurs sous forme de *chaleur de Joule*. En fait, l'observation montre bien que $\mathbf{s}\cdot\mathbf{e}'$ est la quantité de chaleur engendrée par le courant, dans l'unité de temps et pour l'unité de volume; cette énergie consommée est évidemment fournie par la génératrice de courant. Multiplions (12_1) par $-\mathbf{b}$,(12_2) par $\mathbf{e}$, et ajoutons ; il vient :

$$-c\cdot\mathrm{div}\,[\mathbf{eb}]-\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\mathbf{e}^2+\tfrac{1}{2}\mathbf{b}^2)=c(\mathbf{se}).$$

Posons

$$[\mathbf{eb}]=\mathbf{S} \qquad \tfrac{1}{2}\mathbf{e}^2+\tfrac{1}{2}\mathbf{b}^2=W$$

et intégrons dans un volume V quelconque :

$$-\frac{d}{dt}\int_V W\,dV+c\int_\Omega S_n do=\int_V c(\mathbf{se})dV;$$

le deuxième terme du premier membre représente l'intégrale prise sur la surface limitant V, de la composante S_n suivant la normale intérieure. Au second membre figure le travail exécuté dans le volume V, pendant l'unité de temps ; il est compensé par la diminution de l'énergie du champ contenue dans V et par l'énergie qui y pénètre de l'extérieur. Notre équation traduit donc la *loi de l'énergie : elle confirme définitivement l'expression donnée précédemment pour l'énergie du champ et nous montre de plus que* $c\mathbf{S}$, qu'on appelle le vecteur de *Poynting*, *représente le courant d'énergie.*

Lorentz a intégré comme suit les équations (12), en supposant connue la distribution des charges et des courants.

On satisfait à l'équation : div $\mathbf{b}=0$ en posant :

$$-\mathbf{b}=\mathrm{rot}\,\mathbf{f} \tag{14}$$

($-\mathbf{f}=$ potentiel vecteur). Portant cette valeur dans la première équation, on trouve que le tourbillon de $\mathbf{e}-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}$ est nul ; on peut donc écrire :

$$\mathbf{e}-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}=\mathrm{grad}\,\varphi \tag{15}$$

($-\varphi$ est le potentiel scalaire). L'arbitraire qui existe dans la détermination de $\mathbf{f}$ nous permet d'imposer la condition supplémentaire :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathrm{div}\,\mathbf{f}=0$$

qui nous paraît la plus indiquée (puisque dans un champ constant div $\mathbf{f}=0$). Introduisons les potentiels dans les équations (12_1 et 12_2). il vient immédiatement :

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\Delta\varphi=\rho, \tag{16}$$

(16′) $$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} + \Delta \mathbf{f} = \mathbf{s}.$$

Une équation de la forme (16) représente une propagation d'ondes avec la vitesse c. En effet, de même que l'équation de Poisson $\Delta\varphi = \rho$ a pour solution

$$-4\pi\varphi = \int \frac{\rho}{r}\, dV,$$

l'équation (16) est vérifiée par :

$$-4\pi\varphi = \int \frac{\rho\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\, dV\ ;$$

au premier membre figure la valeur de φ en un point O au temps t, r est la distance à O du point-source P par rapport auquel on intègre, et la valeur entrant dans l'intégrale est celle de la densité ρ en P au temps $t - \frac{r}{c}$ De même la solution de (16′) est :

$$-4\pi\mathbf{f} = \int \frac{\mathbf{s}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\, dV.$$

Le champ en un point O ne dépend donc pas de la distribution au même instant des charges et des courants ; l'instant qui intervient dans l'action d'un point P quelconque est antérieur de $\frac{r}{c}$, c'est-à-dire du temps que met une action émanant de P, et dont la vitesse de propagation est c, à atteindre O.

De même que (en coordonnées cartésiennes) le laplacien

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}$$

reste invariant pour toutes les transformations linéaires effectuées sur les variables x_1, x_2, x_3, qui conservent la forme quadratique

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

de même en passant du champ constant au champ variable nous rencontrons l'expression : (le dalembertien $\Box\,\varphi$)

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}$$

qui reste invariante pour toutes les transformations linéaires effectuées sur les quatre coordonnées t, x_1, x_2, x_3 (transformation de Lorentz), qui conservent la forme quadratique indéfinie :

(17) $$-c^2t^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Lorentz et Einstein ont reconnu que, non seulement l'équation (16), *mais tout le système des lois électromagnétiques dans l'éther possède cette propriété d'invariance, ces lois s'exprimant par des relations tensorielles invariantes dans un espace affine à quatre dimen-*

sions de coordonnées t, x_1, x_2, x_3 dont la forme indéfinie (17) *fixe la métrique : c'est le théorème de relativité de Lorentz-Einstein.*

Dans la démonstration, nous changerons d'unité de temps en posant : $ct = x_0$; les coefficients de la forme métrique fondamentale sont alors :

$$g_{ik} = 0 \; (i \neq k) \; ; \qquad g_{ii} = \varepsilon_i,$$

où $\varepsilon_0 = -1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1$. Si l'on veut transformer les composantes covariantes d'un tenseur en ses composantes contravariantes, il suffira de multiplier la i^{me} par ε_i, par exemple :

$$T_i = \sum_j g_{ij} T^j = \varepsilon_i T^i$$

donc :

$$T^i = \varepsilon_i T_i \qquad \text{puisque} \qquad \frac{1}{\varepsilon_i} = \varepsilon_i.$$

L'équation de continuité (10) prend la forme invariante cherchée :

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial s^i}{\partial x_i} = 0$$

si l'on fait :

$$s^0 = \rho \; ; \qquad s^1, s^2, s^3$$

égales aux composantes du courant ; le vecteur ainsi obtenu (à 4 dimensions) est dit « l'hypercourant ».

De la même manière (cp. 16 et 16'), nous devons réunir les potentiels scalaires et vecteurs pour en faire les composantes contravariantes d'un hypervecteur que nous appellerons le potentiel électromagnétique

$$\varphi^0 = \varphi \; ; \; \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3 = \mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \mathbf{f}^3 \; ;$$

les composantes covariantes seront les mêmes pour les indices 1, 2, 3, mais $\varphi_0 = -\varphi$.

Les équations (14) et (15) exprimant les champs **b** et **e** en fonction des potentiels se mettent dès lors sous la forme invariante :

$$\text{(18)} \qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = F_{ik}.$$

$$\mathbf{e} = (F_{10}, F_{20}, F_{30}), \qquad \mathbf{b} = (F_{23}, F_{31}, F_{12})$$

Ainsi les champs électriques et magnétiques sont réunis dans un même tenseur linéaire du second ordre, le « champ ».

De (18), on tire les équations invariantes :

$$\text{(19)} \qquad \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0.$$

qui constituent le premier système d'équations de Maxwell (12_1). Nous avons fait un détour en utilisant la solution de Lorentz au moyen des potentiels, mais c'est ce qui nous a conduits tout naturellement à passer des grandeurs à 3 aux grandeurs à 4 dimensions, vecteurs ou tenseurs.

Passons aux composantes contravariantes, on a :

$$\mathbf{e} = (F^{01}, F^{02}, F^{03}), \qquad \mathbf{b} = (F^{23}, F^{31}, F^{12}),$$

le second système d'équations de Maxwell peut s'écrire maintenant sous forme tensorielle invariante, dans l'espace à 4 dimensions :

$$\sum_k \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = s^i. \tag{20}$$

Introduisons l'hypervecteur de composantes covariantes :

$$p_i = F_{ik}s^k \tag{21}$$

et de composantes contravariantes

$$p^i = F^{ik}s_k$$

(nous omettrons maintenant le signe $\sum$ pour alléger l'écriture) ; alors : p^0 est la densité de travail, ou le travail par unité de temps et de volume : $p^0 = (\mathfrak{s}\mathfrak{e})$, (n'oublions pas que l'unité de temps doit correspondre à notre nouveau choix $x_0 = ct$) et p^1, p^2, p^3 sont les composantes de la densité de force.

Le théorème de relativité de Lorentz est ainsi complètement démontré. Mais nous remarquons en même temps, que les lois obtenues s'expriment exactement comme celle du champ magnétique constant [§ 9, (62)] par simple transposition de l'espace à 3, à l'espace à 4 dimensions. Sans nul doute, c'est dans les formules tensorielles de l'espace quadridimensionnel que se manifeste leur véritable harmonie mathématique, imparfaite auparavant. De là, résulte encore la possibilité d'obtenir pour l'hyperforce une expression semblable à celle de la force dans l'espace à 3 dimensions : l'hyperforce dépend comme suit d'un tenseur symétrique S à 4 dimensions : (la tension).

$$-p_i = \frac{\partial S_i^k}{\partial x_k} \quad \text{ou} \quad -p^i = \frac{\partial S^{ik}}{\partial x_k} \tag{22}$$

$$S_i^k = F_{ir}F^{kr} - \frac{1}{2}\delta_i^k \,|\, F \,|^2. \tag{22'}$$

$|\,F\,|^2 = \frac{1}{2} F_{ik}F^{ik}$ est le carré (non nécessairement positif) du module du champ. Etablissons directement la formule (22), nous avons :

$$\frac{\partial S_i^k}{\partial x_k} = F_{ir}\frac{\partial F^{kr}}{\partial x_k} + F^{kr}\frac{\partial F_{ir}}{\partial x_k} - \frac{1}{2}F^{kr}\frac{\partial F_{kr}}{\partial x_i};$$

mais le premier terme du second membre est :

$$-F_{i}S^r = -p_i,$$

le deuxième devient en écrivant d'une manière symétrique le coefficient de F^{kr} :

$$\frac{1}{2}F^{kr}\left(\frac{\partial F_{ir}}{\partial x_k} - \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_r}\right)$$

ajouté au 3^e, il donne :

$$-\frac{1}{2}F^{kr}\left(\frac{\partial F_{kr}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ri}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_r}\right)$$

ce qui est nul, en vertu de (19).

$| F |^2$ est égal à $\mathbf{b}^2 - \mathbf{e}^2$. Cherchons la signification des diverses composantes de S^{ik} en distinguant, pour la décomposition en espace et en temps, l'indice o des indices 1, 2, 3. S^{oo} représente la densité d'énergie $W = \frac{1}{2}(\mathbf{e}^2 + \mathbf{b}^2)$, les S^{oi} représente les composantes de $\mathbf{S} = [\mathbf{eb}]$ $(i=1, 2, 3)$ les S^{ik} représentent les composantes du tenseur de Maxwell $(i,k = 1, 2, 3)$ tenseur comprenant deux parties, l'une électrique, l'autre magnétique, que nous avons déterminées au § 9.

L'équation (22), d'indice zéro, exprime la loi de conservation de l'énergie. Les autres ont une forme analogue. Désignons un instant par G^1, G^2, G^3 les composantes du vecteur $\frac{1}{c}\mathbf{S}$ et désignons par $\mathbf{t}^{(i)}$ le vecteur aux composantes :

$$S^{i1},\ S^{i2},\ S^{i3}$$

nous aurons :

$$-p^i = \frac{\partial G^i}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{t}^{(i)}. \tag{23}$$

La force exercée sur les électrons contenus dans un domaine V, détermine un accroissement de leur quantité de mouvement, égal par unité de temps à cette force même. Cet accroissement est compensé par une diminution correspondante de *l'impulsion du champ*, répartie avec la densité $\frac{\mathbf{S}}{c}$ et par le flux d'impulsion qui y pénètre de l'extérieur. $\mathbf{t}^{(i)}$ représente le courant de la i^e composante de l'impulsion; le flux d'impulsion lui-même n'est donc autre que le tenseur de Maxwell.

La loi de conservation de l'énergie n'est exprimée que par l'une des équations : la composante de temps d'une loi invariante vis-à-vis de la transformation de Lorentz, les autres composantes donnent la conservation de l'impulsion.

L'énergie totale et l'impulsion totale se conservent; mais elles circulent, elles vont et viennent à travers le champ, passent de la forme d'énergie et d'impulsion du champ à celle d'énergie cinétique ou de quantité de mouvement de la matière, et vice-versa. Telle est la signification intuitive de la formule (22). Nous appellerons donc désormais le tenseur d'univers S : *tenseur d'énergie et d'impulsion;* ou plus brièvement tenseur d'énergie. En raison de la symétrie de ce tenseur, la *densité d'impulsion est égale au quotient par c^2 du courant d'énergie;* l'impulsion du champ est par suite très faible, mais on peut la constater comme pression de la lumière sur une surface réfléchissante.

Une transformation de Lorentz est linéaire; elle revient donc (si nous retournons par suppression d'une coordonnée, comme auparavant, à l'espace à 3 dimensions, (§ 19) à l'introduction d'un autre système de coordonnées affine. Voyons comment les vecteurs fondamentaux $\mathbf{e}'_0$, $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ du nouveau système sont situés par rapport aux vecteurs $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ de l'ancien, c'est-à-dire par rapport aux vecteurs-unités portés sur les axes des x_0 (t), x_1, x_2, Si :

$$\mathbf{x} = x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = x'_0\mathbf{e}'_0 + x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2.$$

on doit avoir

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -x'^2_0 + x'^2_1 + x'^2_2 [= Q(\mathbf{x})]$$

et par suite :

$$Q(\mathbf{e}'_0) = -1.$$

Le vecteur $\mathbf{e}'_0$ mené par O, c'est-à-dire l'axe des t' se trouve à l'intérieur du cône de propagation de la lumière; les plans parallèles $t' = const$, sont situés de telle manière qu'ils décomposent sur le cône des ellipses dont le centre est sur l'axe des t' (voir fig. 7) ; les axes des x'_1 et des x'_2 sont des directions conjuguées de sorte que l'équation de ces sections a la forme :

$$x'^2_1 + x'^2_2 = \text{const.}$$

Tant que l'on s'en tient à l'hypothèse d'un éther réel capable de vibrer, on ne peut voir dans le théorème de relativité de Lorentz qu'une remarquable propriété mathématique sur la transformation des équations de Maxwell; le véritable théorème de la relativité reste encore celui de Galilée-Newton. Mais le problème se pose alors de rendre compte, non seulement des phénomènes optiques, mais de toute l'électrodynamique, à l'aide d'une mécanique de l'éther satisfaisant à la relativité galiléenne, et qui lie les grandeurs du champ à la densité et à la vitesse de cet éther. Avant la théorie électromagnétique de la lumière de Maxwell, on avait cherché à résoudre ce problème pour l'optique, mais le succès ne fut que partiel; dans le domaine plus vaste où Maxwell a fait entrer l'optique, on n'a plus fait aucune tentative de ce genre.[3]) Bien plus, on en venait peu à peu à l'hypothèse d'un champ existant dans l'espace vide, sans support matériel; déjà Faraday avait exprimé clairement l'hypothèse que le champ ne postule pas la matière, mais qu'au contraire la matière se réduisait à des singularités du champ.

§ 21. — Le principe de relativité d'Einstein.

Attachons-nous encore à la théorie de l'éther. Il doit être possible de déceler le mouvement d'un corps, par exemple, la Terre, par rapport à l'éther au repos. L'aberration ne le permet pas ; elle ne prouve qu'une chose, c'est que le mouvement relatif *change* au cours d'une année. Soient A_1, O, A_2, 3 points fixes de la Terre, qui participent donc à son mouvement; imaginons qu'ils soient sur une ligne droite dirigée suivant la direction du mouvement terrestre, et qu'ils soient équidistants : $A_1O = OA_2 = l$; si v est la vitesse de translation de la Terre par rapport à l'éther, le rapport $\frac{v}{c} = q$ est vraisemblablement très petit. Un signal parti de O arrive en A_2 après un temps égal à $\frac{l}{c-v}$, et en A_1 après $\frac{l}{c+v}$ secondes.

Malheureusement on ne peut pas constater la différence de ces 2 temps, car on n'a pas de moyen de signalisation plus rapide que la lumière, qui nous permette de nous rendre compte de l'heure en un autre lieu *. Nous appliquons alors les idées de Fizeau : mettons un miroir en A_1 et en A_2 et faisons-y se réfléchir les 2 signaux lumineux de façon à les renvoyer en O. Si le signal est expédié de O à l'instant zéro, il reviendra en O, après réflexion en A_2 au bout du temps :

$$\frac{l}{c-v}+\frac{l}{c+v}=\frac{2lc}{c^2-v^2}$$

et celui qui parti en même temps de O, se réfléchit en A_1, reviendra en O après un intervalle égal à :

$$\frac{l}{c+v}+\frac{l}{c-v}=\frac{2lc}{c^2-v^2}.$$

Il n'y a donc pas de différence. Concevons alors un troisième point A participant au mouvement de la Terre dans l'éther, tel que $OA = l$, mais tel aussi que la direction OA fasse un angle θ avec la direction du mouvement. Dans la figure O, O', O'' sont les positions successives du point O, d'abord à l'instant zéro de l'envoi du signal, puis à l'instant t' de la réflexion sur le miroir au lieu A' qu'il occupe à cet instant, et enfin au temps $t' + t''$ où le signal atteint de nouveau O. La figure montre que :

$$\frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{O''A'}}=\frac{\mathrm{OO'}}{\mathrm{O''O'}}$$

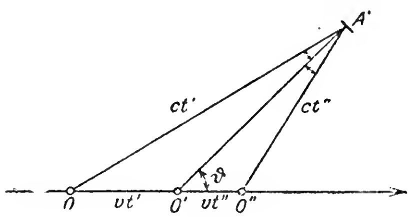

Fig. 8

parce que les 2 angles en A' sont égaux; le miroir réfléchissant doit être, comme dans le cas du repos, perpendiculaire à la ligne rigide OA, afin que le rayon lumineux puisse revenir en O. Un calcul trigonométrique élémentaire donne pour la *vitesse de propagation apparente dans la direction* θ :

$$\text{(24)} \qquad \frac{2l}{t'+t''}=\frac{c^2-v^2}{\sqrt{c^2-v^2\sin^2\theta}}.$$

Elle est donc fonction de l'angle θ; en la déterminant expérimentalement, on doit donc espérer pouvoir calculer la grandeur et la direction de v.

L'expérience célèbre qui fut conçue pour cela est *l'expérience de*

* On pourrait penser remédier à cela en transportant une montre d'un point à un autre. Pratiquement ce procédé n'a pas la précision qui est exigée ici. Théoriquement, il semble qu'un tel transport soit indépendant du chemin employé; mais la théorie de la relativité conduit précisément à la démonstration d'une telle dépendance : (voir § 22).

Michelson[1]). Soient deux miroirs A et A^* liés rigidement à O, à une distance l et l^*, l'un dans la direction du mouvement, l'autre perpendiculaire à celle-ci. Tout l'appareil est mobile autour de O. Au moyen d'un miroir semi-argenté placé suivant la bissectrice de l'angle droit AOA^*, les rayons lumineux sont séparés en 2 parties dont l'une se dirige vers A et l'autre vers A^*; en ces 2 points, chaque partie est réfléchie, et en O grâce à une réflexion nouvelle du rayon qui revient de A^*, elles sont de nouveau unies. Comme l et l^* sont très sensiblement égaux, il y aura interférence des rayons, car ils présentent à cause de (24) une différence de chemin optique :

$$\frac{2l}{1-q^2} - \frac{2l^*}{\sqrt{1-q^2}}.$$

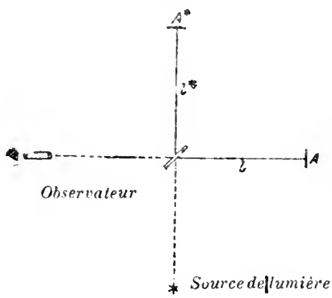

Fig. 9

Si l'on tourne l'appareil entier de 90° de façon que OA^* soit dans la direction du mouvement, la différence des chemins passe par continuité à la valeur :

$$\frac{2l}{\sqrt{1-q^2}} - \frac{2l^*}{1-q^2}$$

ce qui fait une diminution sur la première de

$$2(l+l^*)\left(\frac{1}{1-q^2} - \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}\right) \sim (l + l^* q^2)$$

Il doit donc y avoir un déplacement des franges d'interférence. *Quoique les rapports numériques fussent tels que le centième du déplacement des franges fût encore observable au moyen de l'interféromètre de Michelson, l'expérience ne montra aucun déplacement.*

Lorentz chercha à expliquer cet étrange résultat par une hypothèse hardie : un corps solide se déplaçant dans l'éther subirait une contraction dans la direction de son mouvement dans le rapport de 1 à $\sqrt{1-q^2}$. En effet, une telle hypothèse expliquerait le résultat négatif de l'expérience de Michelson. Car alors OA aurait la longueur $l\sqrt{1-q^2}$, OA^* la longueur l^*, dans la première position ; dans la seconde $OA = l$ et $OA^* = l^*\sqrt{1-q^2}$, la différence des chemins serait dans les deux cas : $\frac{2(l-l^*)}{\sqrt{1-q^2}}$. D'après cela on obtiendrait pour la vitesse apparente de la lumière dans toutes les directions la même valeur $\sqrt{c^2-v^2}$, indépendante de la direction. Il semblerait encore possible théoriquement, de constater le mouvement par la comparaison de c à $\sqrt{c^2-v^2}$; mais si l'éther raccourcit les étalons de longueurs dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$, il doit encore ralentir la marche des montres dans le même rapport, pour détruire aussi cet effet. *En fait, ce n'est pas l'expérience de Michelson seule, mais un grand nombre d'autres encore, qui ont donné un résultat négatif à la recherche d'une influence du mouvement de la Terre sur les phénomènes électromagnétiques et mécaniques combinés.* [5]) Ce serait donc la tâche de la mécanique de l'éther d'expliquer non seulement les équations de Maxwell, mais encore cette action curieuse sur la matière qui semble être une défense de l'éther contre l'indiscrétion des physiciens cherchant à en pénétrer la nature.

Mais la seule réponse raisonnable faite à la question : Comment se fait-il qu'une translation dans l'éther ne puisse pas se distinguer du repos? a été donnée par Einstein : *parce que l'éther n'existe pas.* (L'éther est toujours resté une hypothèse vague qui d'ailleurs a fait ses preuves aussi mal que possible). La question se présente alors de la manière suivante : on a deux principes de relativité, l'un de Galilée, pour la mécanique, l'autre, celui de Lorentz, pour l'électrodynamique. S'ils sont vrais tous deux, ils déterminent un système de référence dans lequel la dynamique est newtonienne, et où les lois de l'électrodynamique prennent la forme des équations de Maxwell. La difficulté est alors vaincue qui consiste à expliquer l'échec des expériences qui devaient distinguer la translation du repos ; il suffit d'admettre que toutes les lois de la nature sont soumises à l'un des deux principes de relativité. Celui de Galilée n'est pas en cause pour l'électrodynamique ; il exigerait que dans les équations de Maxwell, les termes qui permettent de distinguer les champs variables des champs stationnaires, disparussent ; il n'y aurait aucune induction, aucune lumière, et la T. S. F. serait impossible. Au contraire, l'hypothèse de Lorentz sur la contraction laisse présumer que la mécanique newtonienne pourra être modifiée de façon à satisfaire au théorème de relativité d'Einstein-Lorentz puisque les écarts qu'elle présente avec ce théorème ne sont que de l'ordre de $\left(\frac{v}{c}\right)^2$; ces écarts sont hors des limites de l'observation pour toutes les vitesses v terrestres ou planétaires. Voici donc la théorie d'Einstein [6]) qui d'un seul coup supprime toutes les difficultés : *l'univers est un espace affine à quatre dimensions, dont la détermination métrique repose sur une forme quadratique*

$$Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

indéfinie, à trois dimensions positives et à une dimension négative. Toutes les grandeurs physiques sont des scalaires et des tenseurs de cet univers quadridimensionnel; les lois naturelles s'expriment alors par des relations invariantes entre elles. La signification concrète de la forme $Q(\mathbf{x})$ est la suivante : un signal lumineux parti du point d'univers O ne peut atteindre les points d'univers A pour lesquels $\overrightarrow{OA} = \mathbf{x}$ que si ceux-ci sont sur l'une des nappes du cône déterminé par l'équation $Q(\mathbf{x}) = 0$ (comp. § 4). Par là, on distingue d'une manière objective le « cône ouvert sur l'avenir » de celui qui est ouvert sur le passé, ils satisfont tous deux à $Q(\mathbf{x}) \leqslant 0$. On peut faire en sorte que $Q(\mathbf{x})$ s'écrive, après introduction d'un système de coordonnées « normal », de la manière suivante :

$$(\overline{OA}, \overline{OA}) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

les x_i étant les coordonnées de A; des 4 vecteurs fondamentaux $\mathbf{e}_i$, le vecteur $\mathbf{e}_0$ doit appartenir au cône de l'avenir. *Parmi ces systèmes normaux, on ne peut faire un choix plus restrictif basé sur des raisons objectives;* ils sont tous équivalents. Considérons l'un d'entre eux; x_0 est le temps, x_1, x_2, x_3 des coordonnées cartésiennes spatiales ; toutes les expressions relatives à l'espace et au temps ont dans ce système de référence le même usage qu'auparavant. La formulation mathématique adéquate de la théorie d'Einstein est due à Minkowski [7]; nous lui devons la représentation de la géométrie quadridimensionnelle de l'univers, que nous avons prise comme base dès l'abord.

L'échec de l'expérience de Michelson est maintenant compréhensible. Car si les actions des forces de cohésion de la matière, de même que la propagation de la lumière, satisfont au principe de relativité d'Einstein, les étalons de mesure doivent se comporter de telle manière que rien ne puisse rendre compte d'une différence objective entre le mouvement de translation uniforme et le repos. Puisque les équations de Maxwell satisfont au principe d'Einstein comme Lorentz l'avait déjà vu, *l'expérience de Michelson est une preuve que la mécanique des corps solides doit être rigoureusement conforme au principe d'Einstein et non pas au principe de Galilée.* Mathématiquement, le principe d'Einstein est d'une plus grande simplicité et beaucoup plus pénétrant que l'autre ; la géométrie de l'univers a été rapprochée de la géométrie euclidienne par Einstein et Minkowski. Du reste, on peut montrer que la géométrie de Galilée est un cas-limite de la géométrie de l'univers, celui qu'on obtient en faisant croître c au delà de toutes limites. *La théorie d'Einstein détruit la croyance à l'objectivité de la simultanéité ; c'est dans la suppression de ce dogme que réside la grande conquête d'Einstein pour la théorie de la connaissance ;* c'est pourquoi son nom doit être placé à côté de celui de Copernic. La représentation graphique donnée à la fin du paragraphe précédent montre sans autre que les plans $x'_0 = const.$ ne coïncident pas avec les plans $x_0 = const.$ Chaque plan $x_0 = const.$ porte une détermination métrique qui dérive de la métrique d'univers par la forme $Q(\mathbf{x})$, de telle manière que l'ellipse qu'il donne par son intersection avec le « cône de lumière » soit un cercle ; dans ce plan la géométrie euclidienne est valable. Son point d'intersection avec l'axe des x'_0 est le centre de l'ellipse. C'est ainsi que dans le système de référence aux coordonnées accentuées, la lumière se propage encore suivant des cercles concentriques.

Cherchons maintenant à élucider les difficultés qui paraissent naître de ce bouleversement de la notion du temps pour l'intuition habituelle que nous avons du temps et de l'espace. D'après notre manière de penser habituelle, on sait que si l'on tire d'un point dans toutes les directions et avec toutes les vitesses, on atteindra tous les points d'univers qui sont ultérieurs à O; on ne peut pas tirer dans le passé. Si O représente un événement, il ne peut avoir d'influence que sur les points d'univers ultérieurs, alors que dans le passé « rien ne peut plus être changé », l'extrême limite pour une influence est atteinte par la gravitation ; d'après la loi d'attraction newtonienne, si j'agite mes bras, au même moment une action sur les trajectoires des planètes se fait sentir qui les modifie quelque peu. En supprimant de nouveau un axe de coordonnées spatial, et en utilisant la représentation graphique, le plan $t=0$ qui passe par O et qui sépare les points d'univers qui peuvent subir une influence due à O, de ceux qui ne peuvent plus en subir, en d'autres termes, le plan qui sépare les points de l'avenir de ceux du passé, a un sens absolu. D'après le principe de relativité d'Einstein, à la place de ce plan $t=0$, il faut mettre pour réaliser cette séparation absolue, le cône lumineux :

$$x_1^2 + x_2^2 - c^2t^2 = 0$$

(qui d'ailleurs dégénère pour $c=\infty$ en le plan $t=0$); les choses se présentent alors comme suit : les directions de toutes les lignes d'univers des corps dont la vitesse est faible et qui partent de O, se trouvent dans le cône ouvert sur l'avenir (par exemple la direction de la ligne d'univers de mon corps, ma « ligne d'univers » si je me trouve en O), ce n'est que sur les événements représentés par des points d'univers de cette portion du cône que ce qui se passe en O peut avoir une influence ; la limite est donnée par les points qui sont atteints par la lumière qui se propage dans l'espace vide *. Si je me trouve en O, ma ligne d'univers est partagée en O en deux parties : le passé et l'avenir; là, rien n'est changé. Mais pour ce qui concerne mes rapports avec l'univers, le cône ultérieur renferme tous les points sur lesquels mes faits et gestes en O peuvent avoir une influence; en dehors de celui-ci se trouvent tous les événements isolés derrière moi, auxquels « il n'est plus possible de rien changer », *la nappe du cône d'avenir sépare mon avenir actif de mon passé actif.* Au contraire, à l'intérieur du cône postérieur se trouvent localisés tous les événements que j'ai vécu ou bien desquels j'ai pu avoir une connaissance quelconque; ce ne sont que des événements qui ont eu ou auraient pu avoir une influence sur moi, à l'extérieur de ce cône se trouvent des événements que je n'ai ni vécu, et auxquels je ne pourrais ni assister même si la durée de ma vie était illimitée, et si mon regard pouvait scruter toute l'étendue : *la nappe du cône postérieur sépare mon passé actif de mon avenir passif.*

* Dans l'espace vide, la gravitation doit aussi se propager, d'après la théorie de la relativité, avec la vitesse de la lumière; la loi pour le potentiel de gravitation doit se modifier d'une manière analogue à celle qui a permis de passer du cas des champs électrostatiques au cas des champs variables.

Sur la nappe se trouve ce que je vois ou ce que je puis voir instantanément ; c'est proprement l'image des frontières de mon univers.

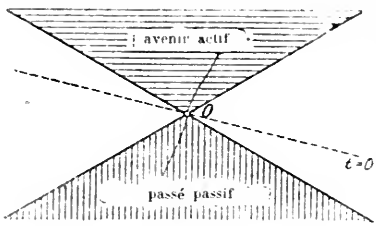

Fig. 10

Cette distinction entre le passé et l'avenir *actif* et *passif*, est la signification profonde et essentielle de la découverte de Roemer sur la vitesse finie de la propagation de la lumière. Le plan $t=0$ qui passe par O dans un système de référence convenable, doit être situé de telle manière que le cône lumineux $Q(\mathbf{x})=0$, ne le coupe qu'en O; il sépare donc le cône de l'avenir actif du cône du passé passif.

A un corps qui se meut en translation uniforme, on peut toujours attacher un système de référence convenable (un système de coordonnées normal) par rapport auquel il est en repos. Dans ce système de référence, les points particuliers du corps possèdent des distances déterminées, les lignes droites qui les joignent forment des angles déterminés, etc., toutes grandeurs qui sont à calculer au moyen des formules de la géométrie analytique, dans un espace à trois coordonnées x_1, x_2, x_3 : le système de référence en question. Les nombres obtenus seront dits les *mesures au repos* du corps (on voit en particulier le sens qu'il faut donner à l'expression : longueur au repos d'une règle). Si ce corps est une horloge, où se déroule un phénomène périodique, on pourra faire correspondre dans notre système de référence à une de ces périodes un accroissement de la coordonnée x_0; on aura ainsi une durée déterminée qui est dite : « *le temps propre* » de l'horloge. Poussons le corps en repos en quelques-uns de ces points au même moment ; ces points isolés vont se mettre en mouvement ; mais puisque notre impulsion ne peut se propager qu'avec une vitesse moindre que celle de la lumière, ou tout au plus égale à celle-ci, le mouvement s'étendra peu à peu à tout le corps et non pas instantanément. Aussi longtemps que les sphères de propagation de l'impulsion autour des points de choc ne se seront pas recouvertes, les mouvements des voisinages de ces points se déplaceront indépendamment les uns des autres. On se rend donc bien compte par là qu'il ne peut y avoir de corps solide au sens qu'on donne habituellement à ce mot ; c'est-à-dire qu'il n'y a pas de corps qui, pour toutes les actions auxquelles ils sont soumis, restent objectivement identiques à eux-mêmes. Comment alors, malgré cela, pouvons-nous employer une règle pour faire des mesures spatiales ? Prenons une image. Soit un gaz en équilibre dans un récipient fermé ; en quelques-uns de ses points, élevons simultanément sa température au moyen de petites flammes, et isolons le tout adiabatiquement; il y aura alors tout d'abord une suite d'états compliqués qui ne satisfont pas aux théorèmes d'équilibre de la thermodynamique. Enfin il arrivera un instant où le gaz reprendra un état d'équilibre différent de l'état initial par une quantité d'énergie supplémentaire due à la chaleur communiquée. D'un corps employé pour faire des mesures (une règle par exemple) nous exigeons *qu'il possède toujours la même mesure au repos*, c'est-à-dire la même mesure dans tout système de référence où il est au repos; et d'une horloge, nous *exigeons qu'elle ait toujours le même temps propre quel que soit le système de référence dans lequel elle repose.* Nous admettons que les règles et les horloges que nous employons satisfont avec une approximation suffisante à ces conditions. Reprenons notre gaz alors, si nous l'échauffons infiniment lentement, il parcourra une suite d'états d'équilibre que la thermodynamique peut étudier cette fois ; de même alors si nous déplaçons nos règles et nos horloges avec une lenteur suffisante, elles conservent à chaque instant leur longueur au repos et leur temps propre. En fait, les limites d'accélération, à l'intérieur desquelles cette hypothèse peut être faite sans erreur appréciable, sont très éloignées. Une *dynamique* basée sur les lois physiques et mécaniques ordinaires est donc valable et exacte dans la grande majorité des cas. Pour comprendre intuitivement la contraction de Lorentz du point de vue de la relativité einsteinienne, imaginons le phénomène-plan suivant. Dans un système de référence convenable (aux coordonnées t, x_1, x_2 avec suppression d'une coordonnée spatiale) par rapport auquel nous rapporterons les expressions spatiales et temporelles employées dans la suite, imaginons une feuille plane de papier sur laquelle est dessinée une courbe C. Soit un autre disque circulaire, au centre duquel est fixée une aiguille qui peut tourner ; en la tournant lentement, son extrémité décrit le bord du disque, ce qui indique bien qu'il est circulaire. Déplaçons alors le disque sur la feuille de papier par une translation uniforme ; si l'aiguille tourne lentement pendant ce temps, son extrémité décrira toujours le bord du disque ; celui-ci reste donc circulaire durant la translation. A un moment déterminé le bord du disque coïncide avec la courbe C. En mesurant C au moyen d'une règle au repos, nous trouvons que ce n'est pas un cercle, mais une ellipse. La figure 11 nous représente graphiquement ce phénomène. On y a ajouté le système $t'x'_2x'_1$ dans lequel le disque est au repos. La section d'un plan $t = const$ avec le cône lumineux est dans le système un « cercle instantané »; le cylindre dont ce cercle est la directrice et dont les génératrices sont parallèles à l'axe des t' représente dans le système accentué un cercle en repos. La section de ce cylindre par le plan $t=o$ n'est pas un cercle mais une ellipse; le cylindre construit

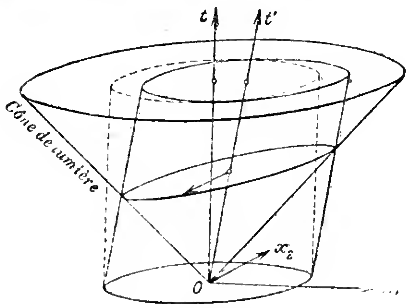

Fig. 11

avec cette ellipse comme directrice et dont les génératrices sont parallèles à l'axe des t représente la courbe dessinée sur la feuille de papier à chaque instant. Si nous nous demandons de quelles lois physiques nous avons besoin pour distinguer les systèmes de coordonnées normaux de tous les autres (au sens général de Riemann) nous reconnaîtrons qu'il suffit d'exiger le principe d'inertie galiléen et la loi de la propagation de la lumière; au moyen de signaux lumineux et de points matériels libres de toute force, nous sommes en état de fixer un tel système de coordonnées. Pour le voir, ajoutons encore un complément au principe d'inertie. Si l'on fait participer une horloge au mouvement d'un point matériel libre, le temps qu'elle mesurera sera le « temps propre » s du point. La ligne d'univers du point est une droite, d'après le principe de Galilée; les positions du point aux instants $s=0, 1, 2, 3, \ldots$ (ou pour des valeurs de s formant n'importe quelle progression arithmétique) forment sur cette droite une suite de points équidistants. D'après cela, si nous introduisons le paramètre du temps propre pour distinguer les différents stades du mouvement, nous obtenons, non seulement une ligne dans l'univers quadridimensionnel, mais un « mouvement » dans l'univers (voir définition p. 91) et ce mouvement, d'après Galilée, est une translation. Les points d'univers forment une multiplicité quadridimensionnelle; c'est là peut-être le point le plus sûr de notre science. Un système de quatre coordonnées x_i ($i=0, 1, 2, 3$) représentant les points d'un certain domaine d'univers sera dit un *système de coordonnées linéaire*, si le mouvement d'un point matériel libre se représente paramétriquement au moyen du temps propre s par des fonctions x_i linéaires en s. Qu'il y ait de tels systèmes de coordonnées, c'est là une affirmation qui est la vraie signification du principe d'inertie. Par ces conditions sur la nature linéaire de ces fonctions, le système de coordonnées est déterminé à une transformation linéaire près ; c'est-à-dire si les x'_i sont les coordonnées dans celui qui nous occupe, les x'_i sont fonctions linéaires des x_i. Si nous prenons les x_i comme coordonnées cartésiennes dans un espace euclidien à quatre dimensions, nous pouvons dire qu'un système de coordonnées nous donne toujours une représentation de l'univers (ou de la portion d'univers où les x_i existent) sur un espace euclidien image. Notre afmation peut alors se formuler de la manière suivante : une correspondance entre deux espaces euclidiens telle que les droites de l'un correspondent aux droites de l'autre, et qu'une série de points équidistants sur une droite corresponde à une série de points équidistants sur une droite corcorrespondante est nécessairement une correspondance affine. Vrai-

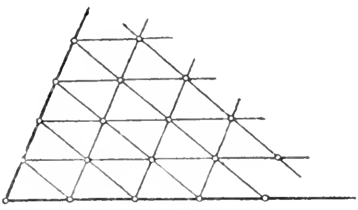

Fig. 12

semblablement la figure ci-contre qui met en évidence la « construction du réseau de Mobius [8]) donnera immédiatement au lecteur la démonstration de ce théorème. La construction du réseau peut évidemment être dirigée de telle manière que les trois directions des droites employées soient empruntées à un cône directeur étroit donné d'avance ; de telle sorte que ce théorème géométrique reste vrai, si l'on sait que les droites dont les directions appartiennent à ce cône correspondent à des droites.

Le principe d'inertie de Galilée prouve à lui seul complètement que l'univers est affine ; on n'en tire d'ailleurs rien de plus. La forme métrique fondamentale $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ de l'univers s'explicite en utilisant la loi de propagation de la lumière ; un signal lumineux issu de O atteint A, si $\mathbf{x}=\overline{OA}$ satisfait à l'équation $(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$ qui est celle d'un cône. La forme quadratique est déterminée par là à un facteur constant près; pour le fixer il faut choisir une unité de mesure particulière. (Voir Appendice 1).

§ 22. — Géométrie, cinématique et optique de la relativité.

Un vecteur d'univers $\mathbf{x}$ sera dit un *vecteur spatial ou un vecteur temporel* suivant que $(\mathbf{x},\mathbf{x})$ est positif ou négatif. Les vecteurs temporels sont dirigés soit dans le *passé*, soit dans *l'avenir*. *L'invariant :*

$$\Delta s = \sqrt{-(\mathbf{x},\mathbf{x})} \tag{25}$$

est le *temps propre* d'un vecteur temporel $\mathbf{x}$, dirigé vers l'avenir. Posons :

$$\mathbf{x} = \Delta s \cdot \mathbf{e}$$

$\mathbf{e}$ est la « direction » de la translation temporelle ; c'est un vecteur temporel dirigé vers l'avenir et tel que $(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}) = -1$.

Comme dans la géométrie galiléenne, nous pouvons faire dans la géométrie de l'univers einsteinien, une *décomposition de l'univers en espace et en temps*, par projection dans la direction d'un vecteur temporel dirigé vers l'avenir, que nous supposerons normé par la condition : $(\mathbf{e},\mathbf{e}) = -1$. Le procédé a été exposé au paragraphe 19 ; les équations (3), (5) et (5′) sont valables ici avec $e = -1$*. Des points d'univers situés sur une droite parallèle à $\mathbf{e}$, tombent au même point de l'espace (sous-espace) ; nous pouvons le matérialiser par une masse ponctuelle au repos, et, graphiquement, il est représenté par une droite d'univers. L'espace tridimensionnel R_e qu'on obtient par cette projection porte une métrique eucli-

* Les unités de longueur et de temps sont choisies de manière que la vitesse de la lumière dans le vide soit égale à 1. Pour revenir au système $C.G.S$, il faut remplacer l'égalité $(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = -1$ par $(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = c^2$ — et faire $e = -c^2$.

dienne, puisque pour chaque vecteur $\mathbf{x}^*$, orthogonal à $\mathbf{e}$, c'est-à-dire pour chaque vecteur $\mathbf{x}^*$ tel que $(\mathbf{x}^*\mathbf{e}) = 0$, $(\mathbf{x}^*\mathbf{x}^*)$ est positif (sauf si $\mathbf{x}^* = 0$; (voir § 14). Chaque vecteur $\mathbf{x}$ de l'univers se décompose suivant la formule :

$$\mathbf{x} = \Delta t | \mathbf{X}$$

Δt est la *durée* (ce que nous avons appelé la « hauteur » au § 19), $\mathbf{X}$ est la translation engendrée par $\mathbf{x}$ dans l'espace $\boldsymbol{R}_e$. Si $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3$ forment un système de coordonnées dans $\boldsymbol{R}_e$, alors les vecteurs $\mathbf{e} = \mathbf{e}_0$ engendrant les translations d'espace indiquées forment avec $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ qui représentent les translations d'univers orthogonales à $\mathbf{e}_0$ « un système de coordonnées appartenant à $\boldsymbol{R}_e$ » pour tous les points d'univers. Il est normal, si les trois vecteurs $\boldsymbol{E}_i$ dans $\boldsymbol{R}_e$ forment un système cartésien ; dans chaque cas le système de coefficients de la forme métrique fondamentale a l'aspect suivant :

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}.$$

Le temps propre Δs d'un vecteur temporel d'avenir $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} = \Delta s.\mathbf{e}$) est égal à la durée de $\mathbf{x}$ dans l'espace $\boldsymbol{R}_e$ où $\mathbf{x}$ n'engendre aucune translation spatiale. Nous aurons à considérer dans la suite, plusieurs décompositions d'après les vecteurs $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$, ...; toujours un $\mathbf{e}$ sans indice représentera un vecteur d'univers, temporel, dirigé vers l'avenir et tel que $(\mathbf{ee}) = -1$.

Soit C un corps reposant dans $\boldsymbol{R}_e$; C' un corps reposant dans $\boldsymbol{R}_{e'}$; C' est en translation uniforme relativement à $\boldsymbol{R}_e$. Si l'on décompose $\mathbf{e}'$, relativement à $\boldsymbol{R}_e$, et qu'on ait :

(26) $$\mathbf{e} = h | h\mathbf{V}$$

C' subit dans $\boldsymbol{R}_e$ pendant le temps h, la translation spatiale $h\mathbf{V}$; $\mathbf{V}$ est donc la *vitesse* de C' dans $\boldsymbol{R}_e$, *ou la vitesse relative de C' par rapport à C*. Sa grandeur v est telle que $v^2 = (\mathbf{VV})$.

D'après (3), l'on a :

(27) $$h = -(\mathbf{e}'\mathbf{e})$$

D'autre part, d'après (5) :

$$1 = -(\mathbf{e}'\mathbf{e}') = h^2 - h^2(\mathbf{VV}) = h^2(1 - v^2)$$

donc :

(28) $$h = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Si C', entre deux instants de son mouvement, subit la translation d'univers $\Delta s.\mathbf{e}'$, (26) montre que $h\Delta s = \Delta t$ est la durée de cette translation dans $\boldsymbol{R}_e$; entre le temps propre Δs et la durée Δt de la translation dans $\boldsymbol{R}_e$, on a :

(29) $$\Delta s = \Delta t \sqrt{1 - v^2}.$$

Puisque (27) est symétrique en $\mathbf{e}$ et en $\mathbf{e}'$, (28) nous apprend que la grandeur de la vitesse relative de C' par rapport à C est la même que celle de C par rapport à C' ; les vitesses relatives au point de vue vectoriel ne se peuvent comparer, puisque l'une est dans l'espace $\boldsymbol{R}_e$ et l'autre dans $\boldsymbol{R}_{e'}$.

Considérons trois décompositions, d'après $\mathbf{e}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Soient C_1 et C_2 deux corps, qui sont au repos respectivement dans $\boldsymbol{R}_{e1}$ et dans $\boldsymbol{R}_{e2}$. Dans $\boldsymbol{R}_e$ soit :

$$\mathbf{e} = h_1 \mid h_1\mathbf{V}_1 \,; \qquad h_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2}} \,;$$

$$\mathbf{e} = h_2 \mid h_2\mathbf{V}_2 \,; \qquad h_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2}}$$

par suite :

$$-(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = h_1 h_2[1-(\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2)]$$

Les deux vitesses $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_2$, de C_1 et C_2 dans $\boldsymbol{R}_e$ dont les grandeurs sont v_1, v_2, forment un angle θ ; les deux grandeurs v_{12} et v_{21} des vitesses relatives de C_1 pour C_2, et de C_2 pour C_1 sont égales ; on a donc la formule :

$$\frac{1 - v_1 v_2 \cos\theta}{\sqrt{1 - v_1^2}\sqrt{1 - v_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{12}^2}}, \tag{30}$$

qui donne la *vitesse relative de deux corps dont on connaît les vitesses par rapport à un troisième*. Posons pour chaque grandeur de vitesse $v(<1)$:

$$v = \operatorname{th} u \qquad (\text{th} = \text{tangente hyperbolique})$$

on trouve :

$$\operatorname{ch} u_1 \ \operatorname{ch} u_2 - \operatorname{sh} u_1 \ \operatorname{sh} u_2 \ \cos\theta = \operatorname{ch} u_{12}$$

Cette formule ne serait autre chose que l'une des formules fondamentales de la trigonométrie sphérique, si les fonctions hyperboliques étaient remplacées par les fonctions trigonométriques correspondantes; donc u_{12} est le côté opposé à l'angle θ dans un triangle du plan de Bolyai-Lobatschefsky dont u_1 et u_2 sont les autres côtés.

A côté de la relation (29) entre le temps et le temps propre, il en existe une, entre la longueur et la longueur au repos. Prenons l'espace de référence $\boldsymbol{R}_e$. A un instant déterminé, les points matériels du corps se trouvent aux points d'univers $O, A\ldots;$ les points de l'espace $\boldsymbol{O}\ \boldsymbol{A},\ldots$ de $\boldsymbol{R}_e$ en lesquels ils sont, forment une figure dans $\boldsymbol{R}_e$ à laquelle nous pourrions conférer une durée, si le corps C' laissait une « empreinte » dans $\boldsymbol{R}_e$, comme l'image développée à la fin du paragraphe précédent nous en donnait un exemple intuitif. Si, d'autre part, les points d'univers $O, A_1,\ldots$ coïncident dans l'espace $\boldsymbol{R}_{e'}$ où C' repose, avec les points $\boldsymbol{O}', \boldsymbol{A}',\ldots$, alors $\mathbf{O}', \mathbf{A}',\ldots$ donnent « l'aspect au repos » de C' (voir la figure, où les directions d'univers « orthogonales » sont représentées perpendiculaires entre elles.) Entre la partie $\boldsymbol{R}_e$ qui subit l'empreinte, et la forme au repos du corps dans $\boldsymbol{R}_{e'}$ il existe une correspondance de point $\boldsymbol{A}$ à point $\boldsymbol{A}'$; elle est évidemment affine (ce n'est pas autre chose en effet qu'une projection orthogonale). Puisque les points $O, A, \ldots\ldots$ sont *simultanés* pour la décomposition suivant **e**, on a :

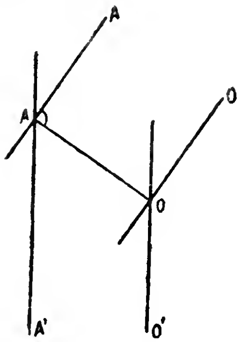

Fig. 13

$$\overline{OA} = \mathbf{x} = o \mid \mathbf{X} \text{ dans } R_e \,; \qquad \mathbf{X} = \overline{OA}$$

D'après (5) :

$$\overline{\mathbf{OA}}^2 = (\mathbf{XX}) = (\mathbf{xx})$$
$$\overline{\mathbf{O'A'}}^2 = (\mathbf{xx}) + (\mathbf{xe'})^2$$

Déterminons d'après (5') $(\mathbf{xe'})$ dans R_e

$$(\mathbf{xe'}) = h\,(\mathbf{XV})$$

donc :

$$\overline{\mathbf{O'A'}}^2 = (\mathbf{XX}) + \frac{(\mathbf{XV})^2}{1 - v^2}$$

Utilisons dans R_e un système cartésien x_1, x_2, x_3 avec O comme origine; l'axe des x_1 sera dirigée suivant la vitesse $\mathbf{V}$, si x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées de A on a :

$$\overline{\mathbf{OA}}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

$$\overline{\mathbf{O'A'}}^2 = \frac{x_1^2}{1 - v^2} + x_2^2 + x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$$

en posant :

(31) $$x_1' = \frac{x_1}{\sqrt{1 - v^2}}, \qquad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3,$$

En faisant correspondre dans R_e à chaque point (x_1, x_2, x_3), le point (x'_1, x'_2, x'_3) on obtient une dilatation de l'empreinte dans la direction du mouvement du corps dans le rapport $1 : \sqrt{1 - v^2}$. Nos formules expriment que l'empreinte se transforme en une figure congruente à la figure au repos du corps : c'est la *contraction de Lorentz*. En particulier il y a entre le volume V que le corps C' occupe à un moment donné dans R_e, et son volume au repos V_0 la relation :

$$V = V_0 \sqrt{1 - v^2}$$

Toutes les mesures optiques d'angles au moyen de viseurs donnent l'angle que font deux rayons lumineux dans l'espace de référence où l'appareil de mesure (formé de corps solide) est en repos. *Ces angles sont aussi ceux que perçoit l'œil si on le met à la place de l'appareil de mesure; ils donnent l'aspect perçu par un observateur des objets qui sont dans son champ visuel.* Pour développer les rapports entre la géométrie et l'observation des grandeurs géométriques, nous devons faire quelques incursions dans l'optique.

Les solutions des équations de Maxwell qui correspondent à un rayon lumineux aussi bien pour l'éther que pour un milieu homogène en repos, ont une forme, telle que les composantes des grandeurs d'état sont toutes (avec la notation complexe) égales à :

$$const.\ e^{2\pi i (P)}$$

où $\Theta = \Theta(P)$ « la phase » est une fonction du point d'univers P définie comme on le voit à une constante additive près. Après n'importe quelle transformation linéaire des coordonnées d'univers, les composantes dans le nouveau système possèdent le même aspect avec la même fonction Θ. La phase est donc un invariant. C'est une fonction *linéaire* pour une onde plane, et si nous excluons les milieux absorbants, c'est une fonction réelle des coordonnées d'univers de P; la différence de phase en deux points A et B : $\Theta(B) - \Theta(A)$ est par suite une fonction linéaire du vecteur $\mathbf{x} = \overline{AB}$, c'est donc un vecteur d'univers covariant. Représentons-le alors par la translation correspondante $\mathbf{l}$ (nous parlerons dorénavant du rayon lumineux $\mathbf{l}$); on a : $\Theta(B) - \Theta(A) = (\mathbf{lx})$

Décomposons en espace et en temps, suivant le vecteur temporel $\mathbf{e}$; et posons :

$$\mathbf{l} = \nu \,\Big|\, \frac{\nu}{q} A \tag{32}$$

de manière que le vecteur A dans R_e ait la longueur 1, de plus :

$$\mathbf{x} = \Delta t \mid \mathbf{X}$$

la différence de phase est alors :

$$\nu \left\{ \frac{(\mathbf{XA})}{q} - \Delta t \right\};$$

on voit alors que ν est la fréquence, q la vitesse de propagation et $\mathbf{A}$ la direction du rayon lumineux dans R_e. Dans l'éther, on a comme le montrent les équations de Maxwell, $q = 1$, c'est-à-dire :

$$(\mathbf{ll}) = 0.$$

Si l'on décompose l'univers en espace et en temps de 2 manières, une fois d'après $\mathbf{e}$, une autre fois d'après $\mathbf{e}'$ et si l'on distingue les résultats obtenus pour la seconde par un accent, l'on a :

$$\nu^2 \left(\frac{1}{q^2} - 1 \right) = \nu'^2 \left(\frac{1}{q'^2} - 1 \right). \tag{33}$$

Imaginons 2 rayons lumineux $\mathbf{l}_1$ et $\mathbf{l}_2$, aux fréquences ν_1 et ν_2 dont les vitesses de propagation sont q_1 et q_2, alors :

$$(\mathbf{l}_1\mathbf{l}_2) = \nu_1\nu_2 \left\{ \frac{(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)}{q_1 q_2} - 1 \right\}$$

s'ils forment l'angle ω entre eux, on a :

$$\nu_1\nu_2 \left\{ \frac{\cos \omega}{q_1 q_2} - 1 \right\} = \nu'_1\nu'_2 \left\{ \frac{\cos \omega'}{q'_1 q'_2} - 1 \right\}. \tag{34}$$

Pour l'éther, où $q_1 = q'_1 = 1$, $q_2 = q'_2 = 1$, ces équations montrent que :

$$\nu_1\nu_2 \sin^2 \frac{\omega}{2} = \nu'_1\nu'_2 \sin^2 \frac{\omega'}{2}. \tag{35}$$

Enfin pour obtenir la relation entre les fréquences ν et ν', imaginons un corps en repos dans $R_{e'}$; il a dans l'espace R_e la vitesse $\mathbf{V}$, de sorte qu'on doit poser comme plus haut :

(26) $$\mathbf{e}' = h \mid h\mathbf{V} \text{ dans } R_e.$$

De (26) et (32) on tire :

$$\nu' = -(\mathbf{l}\mathbf{e}') = \nu h \left\{ 1 - \frac{(\mathbf{A}\mathbf{V})}{q} \right\}.$$

Si l'on appelle θ l'angle entre la direction du rayon lumineux dans R_e avec la vitesse du corps, on a :

(36) $$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1 - \dfrac{v\cos\theta}{q}}{\sqrt{1-v^2}}$$

L'équation (36) exprime *le principe de Doppler-Fizeau*. Considérons par exemple un atome de sodium, au repos dans un système de référence, il reste toujours identique à lui-même, la relation entre la fréquence observée ν' au moyen d'un spectroscope en repos et la fréquence ν d'un atome qui se meut avec une vitesse v est donnée précisément par (36), où θ est l'angle que fait la direction du mouvement de l'atome avec le rayon lumineux qui entre dans le spectroscope. Portons la valeur de $\frac{\nu'}{\nu}$, de (36) dans (33), on obtient une équation entre q et q' : elle permettra de calculer la vitesse de propagation q de la lumière dans un milieu en mouvement. connaissant la vitesse de propagation q' dans le même milieu en repos : v est la vitesse du milieu, θ l'angle du rayon lumineux avec la vitesse du milieu. Supposons que $\theta = o$, et négligeons les puissances de v supérieures à l'unité (v est en effet très petit), on trouve :

$$q = q' + v\,(1 - q'^2)$$

c'est-à-dire que q n'est pas égal à q' plus la vitesse entière v, comme si les ondes étaient entraînées totalement, mais bien plutôt le facteur $1 - \frac{1}{n^2}$ qui multiplie v est inférieur à l'unité ($n = \frac{1}{q'}$ indice de réfraction du milieu). Ce *coefficient d'entraînement* $1 - \frac{1}{n^2}$ avait déjà été obtenu expérimentalement par Fizeau; ce physicien faisait interférer deux rayons issus d'une même source, l'un traversant de l'eau au repos, l'autre traversant de l'eau courante[9]). Puisque la théorie de la relativité explique ce curieux résultat, c'est qu'elle est valable pour l'étude de l'optique et de l'électrodynamique des corps en mouvement (il n'est pas nécessaire pour ce faire de poser un nouveau principe de relativité, obtenu à partir de celui d'Einstein en remplaçant c par q, comme on pourrait le présumer d'après l'équation des ondes dans ce milieu). La formule (34) que nous voulons appliquer à l'éther où $q = q' = 1$, nous donne :

$$\sin^2\frac{\omega}{2} = \frac{(1 - v\cos\theta_1)(1 - v\cos\theta_2)}{1 - v^2}\sin^2\frac{\omega'}{2}$$

Si l'espace de référence R_e est celui auquel on rapporte les mouvements planétaires (celui où le centre de gravité du système solaire est en repos), si v est la vitesse dans R_e de la Terre (où les instruments se trouvent), ω l'angle dans R_e que forment les rayons issus de 2 étoiles infiniment éloignées, θ_1 et θ_2 les angles que ces rayons forment avec la direction du mouvement de la Terre, l'angle ω' sous lequel on voit de la Terre les deux étoiles se détermine par la formule précédente. ω ne peut évidemment être mesuré, mais nous observons les variations de ω' liées aux variations de θ_1 et θ_2 dans le cours d'une année (*aberration*).

Les formules qui donnent la dépendance entre le temps et le temps propre, les volumes et les volumes au repos sont aussi valables pour les *mouvements variés*. Si $d\mathbf{x}$ est le déplacement d'univers infiniment petit que subit un point matériel mobile dans un temps infiniment petit, on obtient par :

$$d\mathbf{x} = ds.\mathbf{u}, \qquad (\mathbf{uu}) = -1, \qquad ds > o$$

le temps propre ds et la direction d'univers $\mathbf{u}$ de cette translation. L'intégrale étendue à une portion de la ligne d'univers :

$$\int ds = \int \sqrt{-(d\mathbf{x}, d\mathbf{x})}$$

est le *temps propre* écoulé pendant cette partie du mouvement qui est précisément représentée par la portion de ligne d'univers en question; cette intégrale est indépendante des décompositions en espace et en temps que l'on peut effectuer; sa valeur est donnée par une horloge liée au point matériel pourvu que l'accélération ne soit pas trop grande. Si nous utilisons des coordonnées linéaires dans l'univers et si nous prenons le temps propre s comme paramètre de la représentation analytique de la ligne d'univers (comme on prend l'arc comme paramètre en géométrie classique), alors :

$$\frac{dx_i}{ds} = u^i$$

sont les composantes contravariantes de $\mathbf{u}$, et l'on a $\sum_i u_i u^i = -1$.

Décomposons l'univers en espace et en temps suivant $\mathbf{e}$, on a :

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \,\Big|\, \frac{\mathbf{V}}{\sqrt{1-v^2}} \text{ dans } R_e$$

où $\mathbf{V}$ est la vitesse du point matériel; entre le temps dt écoulé dans R_e et le temps propre, on a :

$$ds = dt\,\sqrt{1-v^2}. \tag{37}$$

Si 2 points d'univers A et B sont tels que AB soit un vecteur temporel dirigé vers l'avenir, A et B peuvent être reliés par des lignes d'univers de points matériels allant de A en B. Le temps propre pour chacun de ces mouvements dépend de la ligne d'univers, il est maximum pour un point matériel qui va de A en B suivant une translation uniforme. Car si l'on décompose l'univers de manière que A et B tombent au même point de l'espace, la translation d'univers est ici le repos, et la démonstration de notre affirmation découle de la formule (37) qui nous montre que le temps propre s est moindre que le temps t. La vie d'un homme peut très bien être comparée à une horloge. De 2 jumeaux qui se séparent en A, l'un reste au pays, (c'est-à-dire ne bouge pas dans son système de référence), l'autre entreprend des voyages avec une vitesse (relative à sa patrie) voisine de celle de la lumière; lorsque celui-ci revient au pays, il est appréciablement plus jeune que son frère sédentaire.

Un élément matériel dm (d'un corps continu) qui se meut avec une vitesse v, a un volume à un instant qui vaut dV; celui-ci est donné en fonction du volume au repos dV_0 par :

$$dV = dV_0 \sqrt{1 - v^2}$$

pour la densité $\frac{dm}{dV} = \mu$ et la densité au repos $\frac{dm}{dV_0} = \mu_0$ on a encore l'équation :

$$\mu_0 = \mu \sqrt{1 - v^2}$$

μ_0 est un invariant; $\mu_0 \mathbf{u}$, est donc un vecteur aux composantes contravariantes $\mu_0 u^i$: le *flux matériel*, déterminé par le mouvement de la masse d'une manière indépendante du système de coordonnées. Il satisfait à l'équation de continuité :

$$\sum_i \frac{\partial(\mu_0 u^i)}{\partial x_i} = 0 \cdot$$

On peut faire les mêmes remarques à propos de l'électricité : si de est la charge de l'élément dm, on a entre la densité au repos $\rho_0 = \frac{de}{dV_0}$ et la densité $\rho = \frac{de}{dV}$, la relation :

$$\rho_0 = \rho \sqrt{1 - v^2}$$

et

$$s_i = \rho_0 u^i$$

sont les composantes contravariantes du « courant électrique »; cela correspond précisément au théorème du § 20. Dans la théorie électrique de Maxwell, le mouvement caché des électrons n'a rien à voir avec le mouvement de la matière, l'électricité n'est pas attachée à la matière. La charge correspondant à une portion de matière ne peut être considérée autrement que comme la charge qui, au moment en question, occupe la même portion de l'espace que cette matière; il s'ensuit que la charge n'est pas comme dans la théorie électronique un invariant déterminé par la portion de matière, mais elle dépend de la décomposition de l'univers en espace et en temps.

§ 23. — **Electrodynamique des corps en mouvement.**

La décomposition de l'univers en espace et temps entraîne la décomposition de tous les tenseurs. Nous allons d'abord l'étudier au point de vue mathématique pour en déduire les équations fondamentales de l'électrodynamique des corps en mouvement. Soit un espace à n dimensions que nous prendrons pour « univers » dont la métrique est définie par la forme $(\mathbf{xx})$. Soit $\mathbf{e}$ un vecteur de cet univers tel que $(\mathbf{ee}) = e \neq 0$, décomposons l'univers suivant ce vecteur, de la manière connue, en temps et en espace R_e. Nous désignerons par $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots \mathbf{E}_{n-1}$ un système quelconque de coordonnées dans l'espace R_e, et par $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{n-1}$ les vecteurs d'univers orthogonaux à $\mathbf{e} = \mathbf{e}_0$, qui ont donné naissance, dans R_e à $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots \mathbf{e}_{n-1}$.

Dans le système de coordonnées $\mathbf{e}_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) déterminé par R_e, les composantes covariantes du tenseur définissant la métrique de l'univers sont représentées par un tableau de la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & g_{12} \\ 0 & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \qquad (n = 3).$$

Prenons comme exemple un tenseur du second ordre, dont les composantes sont T_{ik} dans ce système. La décomposition de l'univers définie par $\mathbf{e}$ le met, comme nous allons l'établir sous la forme suivante :

$$\left|\begin{array}{c|cc} T_{00} & T_{01} & T_{02} \\ \hline T_{10} & T_{11} & T_{12} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} \end{array}\right|$$

le décomposant en un scalaire, deux vecteurs et un tenseur du second ordre dans R_e caractérisés ici par leurs composantes dans le système $\mathbf{E}_i$ ($i = 1, 2 \dots n-1$).

Soit en effet :

$$\mathbf{x} = \xi \mid \mathbf{X}$$

la décomposition suivant $\mathbf{e}$ du vecteur d'univers quelconque $\mathbf{x}$ et

$$\mathbf{x} = \xi\mathbf{e} + \mathbf{x}^*$$

sa division en un vecteur parallèle et un vecteur orthogonal à $\mathbf{e}$; nous aurons, en appelant ξ^i les composantes de $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{n-1} \xi^i \mathbf{e}_i, \qquad \xi = \xi^0, \qquad \mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^{n-1} \xi^i \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \mathbf{E}_i.$$

Sans utiliser de systèmes de coordonnées, la décomposition du tenseur pourra donc se représenter comme suit :

Prenons deux vecteurs d'univers quelconques $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ et posons

$$\mathbf{x} = \xi\mathbf{e} + \mathbf{x}^*, \qquad \mathbf{y} = \eta\mathbf{e} + \mathbf{y}^* \tag{38}$$

où $\mathbf{x}^*$ et $\mathbf{y}^*$ sont orthogonaux à $\mathbf{e}$.

La forme bilinéaire correspondant au tenseur du second ordre deviendra :

$$T(\mathbf{xy}) = \xi\eta T(\mathbf{ee}) + \eta T(\mathbf{x}^*\mathbf{e}) + \xi T(\mathbf{ey}^*) + T(\mathbf{x}^*\mathbf{y}^*).$$

Nous obtiendrons ainsi, en désignant par $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ les déplacements d'univers orthogonaux à $\mathbf{e}$ dont proviennent les déplacements d'espace arbitraires $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$:

1. Un scalaire $T(\mathbf{ee}) = J = \boldsymbol{J}$.
2. Deux formes linéaires (vecteurs) dans l'espace R_e définies par :

$$L(\mathbf{X}) = T(\mathbf{x}^*\mathbf{e}), \qquad L'(\mathbf{X}) = T(\mathbf{e}\mathbf{x}^*)$$

3. Une forme bilinéaire (tenseur) dans l'espace R_e définie par :

$$\boldsymbol{T}(\mathbf{XY}) = T(\mathbf{x}^*\mathbf{y}^*)$$

Si $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ sont des déplacements d'univers arbitraires déterminant $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ dans R_e on peut, dans les équations précédentes, remplacer $\mathbf{x}^*$ et $\mathbf{y}^*$ par leurs valeurs tirées de (38) $\mathbf{x}-\xi\mathbf{e}$, $\mathbf{y}-\eta\mathbf{e}$, où :

$$\xi = \frac{1}{e}(\mathbf{x}\mathbf{e}), \qquad \eta = \frac{1}{e}(\mathbf{y}\mathbf{e}).$$

Posons encore :

$$T(\mathbf{xe}) = L(\mathbf{x}), \qquad T(\mathbf{ex}) = L'(\mathbf{x})$$

et nous obtenons

$$(39)\left\{\begin{aligned} &L(\mathbf{X}) = L(\mathbf{x}) - \frac{J}{e}(\mathbf{x}\mathbf{e}); \qquad L'(\mathbf{X}) = L'(\mathbf{x}) - \frac{J}{e}(\mathbf{x}\mathbf{e}) \\ &\boldsymbol{T}(\mathbf{XY}) = T(\mathbf{xy}) - \frac{1}{e}(\mathbf{y}\mathbf{e})L(\mathbf{x}) - \frac{1}{e}(\mathbf{x}\mathbf{e})L'(\mathbf{y}) + \frac{J}{e^2}(\mathbf{x}\mathbf{e})(\mathbf{y}\mathbf{e}). \end{aligned}\right.$$

Dans le cas précédent, par exemple, le tenseur

$$\boldsymbol{T} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix}$$

sera représenté par le tenseur d'univers

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{21} & T_{22} \end{vmatrix}.$$

On voit de suite que dans tous les calculs, on peut remplacer les tenseurs d'espace par les tenseurs d'univers qui les représentent; nous n'utiliserons d'ailleurs que la propriété suivante :

Si deux tenseurs d'espace sont dans le rapport λ, il en est de même des tenseurs d'univers qui les représentent.

Prenons pour développer le calcul un système quelconque de coordonnées dans lequel

$$\mathbf{e} = (e^0, e^1, \ldots, e^{n-1}),$$

alors les invariants J et e sont donnés par les équations :

$$J = T_{ik}e^ie^k$$

et

$$e = e^ie_i.$$

Les deux vecteurs et le tenseur dans R_e sont d'après (39) représentés dans l'univers par les deux vecteurs et le tenseur dont les composantes sont :

$$L: \quad L_i - \frac{J}{e} e_i, \qquad L_i = T_{ik} e^k,$$
$$L': \quad L'_i - \frac{J}{e} e_i, \qquad L'_i = T_{ki} e^k;$$
$$T: \quad T_{ik} - \frac{e_k L_i + e_i L'_k}{e} + \frac{J}{e^2} e_i e_k.$$

Pour un tenseur symétrique gauche $J = o$ et $L' = - L$, nos formules se réduisent à

$$L: \quad L_i = T_{ik} e^k$$
$$T: \quad T_{ik} + \frac{e_i L_k - e_k L_i}{e}.$$

Un tenseur linéaire du deuxième ordre se décompose ainsi dans l'espace en un vecteur et un tenseur d'espace linéaire du second ordre.

L'ensemble des équations du champ de Maxwell pour les corps en repos est donné au paragraphe 20. C'est Hertz qui le premier chercha à les étendre en toute généralité aux corps en mouvement La loi de Faraday sur l'induction s'énonce ainsi : la dérivée par rapport au temps du flux d'induction embrassé par un conducteur est égale au signe près à la force électromotrice induite :

$$(40) \qquad -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int B_n do = \int e d\mathbf{x}.$$

Si le conducteur se meut, l'intégrale du premier membre devrait être prise sur une surface liée au conducteur, entraînée dans son mouvement. Comme la loi de Faraday sur l'induction est vérifiée précisément dans des cas où la variation du flux d'induction embrassé par le conducteur est due au déplacement de celui-ci, Hertz ne douta pas que cette loi était applicable à un conducteur en mouvement. L'équation : div $\mathbf{b} = o$ subsiste; l'analyse vectorielle nous permet de mettre la loi d'induction (40) sous la forme différentielle :

$$(41) \qquad \operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \frac{1}{c} \operatorname{rot} [\mathbf{vb}]$$

où $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}$ représente la dérivée par rapport au temps prise en un point fixe de l'espace et $\mathbf{v}$ la vitesse de la matière.

On peut tirer de (41) des conséquences remarquables. Imaginons (expérience de Wilson) entre les deux plateaux d'un condensateur, un diélectrique homogène se mouvant avec une vitesse constante $\mathbf{v}$ de grandeur v; supposons les deux armatures réunies métalliquement et l'existence d'un champ magnétique uniforme parallèle aux plateaux et normal à la vitesse — représentons-nous le diélectrique séparé du condensateur par d'étroits intervalles vides, dont nous ferons tendre l'épaisseur vers zéro. — De (41) il résulte que, entre les plateaux $\mathbf{e} - \frac{1}{c}[\mathbf{vb}]$ dérive d'un potentiel; comme ce dernier pourra être pris égal à zéro sur les armatures réunies métalliquement, il s'ensuit facilement que

$$\mathbf{e} = \frac{1}{c}[\mathbf{vb}].$$

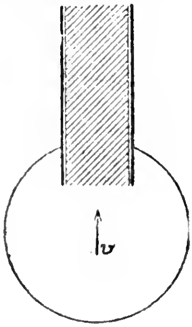

Fig. 14

Il s'exerce alors normalement aux plateaux un champ électrique uniforme de grandeur

$$E = \frac{\mu}{c} vH. \qquad (\mu = \text{permutabilité}).$$

D'où sur les plateaux une distribution d'électricité statique de densité superficielle

$$\frac{\varepsilon\mu}{c} vH$$

où ε est la constante diélectrique.

Si le diélectrique est un gaz, cet effet doit s'observer, si raréfié le gaz soit-il, car si le vide croît, $\varepsilon\mu$ tend vers 1 et non pas vers zéro.

Ceci n'a un sens que si l'on admet l'existence de l'éther, car cela signifie que l'on observe l'effet précédent lorsque, entre les plateaux, l'éther se meut relativement à eux et à l'éther extérieur en repos. Mais pour expliquer l'induction, il faudrait admettre l'entraînement total de l'éther par les conducteurs en mouvement *.

Or l'expérience montre la fausseté de cette hypothèse, aussi bien celle de Fizeau sur la propagation de la lumière à travers de l'eau en mouvement que celle de Wilson [10]) même : l'expérience de Fizeau donne un coefficient d'entraînement $1 - \frac{1}{n^2}$ tandis que la seconde ne décèle qu'une charge de densité

$$\frac{\varepsilon\mu - 1}{c} vH$$

charge qui s'annule si $\varepsilon\mu = 1$. Cela paraît en contradiction formelle avec le phénomène de l'induction dans les corps en mouvement.

La théorie de la relativité nous donne l'explication complète. Posons de nouveau comme au paragraphe 20, $ct = x_0$ et constituons, de même qu'avec $\mathbf{e}$ et $\mathbf{b}$ le tenseur F, avec $\mathbf{d}$ et $\mathbf{h}$ un tenseur symétrique gauche du deuxième ordre H : les équations du champ prennent alors la forme suivante :

$$(42) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \dfrac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0, \\ \displaystyle\sum_k \frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k} = s^i. \end{cases}$$

Ces équations où nous considérons les F_{ik} comme composantes covariantes d'un tenseur du second ordre, les H^{ik} comme compo-

* Et v dans (41) représentait la vitesse de l'éther et non celle de la matière, mais relativement à quoi ?

santes contravariantes d'un second tenseur dans l'univers quadridimensionnel, seront valables, vu leur caractère d'invariance, dans tout système linéaire de coordonnées.

Il n'en est pas de même des lois matérielles

$$\mathbf{d} = \varepsilon\mathbf{e}\ ;\ \mathbf{b} = \mu\mathbf{h}\ ;\ \mathbf{s} = \sigma\mathbf{e}.$$

Pour les appliquer, il nous faut décomposer l'univers en espace et temps, de sorte que la matière soit au repos, **e** et **b** résultant de la décomposition de F, **h** et **d** de celle de H, ρ et **s** de celle de $\boldsymbol{s}$. Prenons maintenant un système quelconque de coordonnées dans lequel les composantes de la direction d'univers de la matière seront u^i, les phénomènes pourront s'exprimer, comme il résulte de l'étude mathématique que nous avons faite, par les formules suivantes :

$$(43)\qquad H_i^* = \varepsilon F_i^*.$$

où :

$$F_i^* = F_{ik}u^k. \qquad H_i^* = H_{ik}u^k$$

$$(44)\qquad F_{ik} - (u_iF_k^* - u_kF_i^*) = \mu\left\{H_{ik} - (u_iH_k^* - u_kH_i^*)\right\}$$

et :

$$(45)\qquad s_i + u_i(s_ku^k) = \sigma F_i^*.$$

Telle est la forme invariante de ces lois. Pour la suite du calcul, il est encore commode de substituer aux équations (44) les suivantes qui en découlent immédiatement :

$$(46)\qquad F_{kl}u_i + F_{li}u_k + F_{ik}u_l = \mu\left\{H_{kl}u_i + H_{li}u_k + H_{ik}u_l\right\}$$

D'après la manière dont nous les avons obtenues, elles s'appliquent seulement à la matière en translation uniforme ; mais nous pouvons aussi les admettre pour un corps unique animé d'un mouvement uniforme, qui est séparé par l'espace vide d'autres corps se déplaçant à des vitesses différentes,* et aussi enfin pour un corps animé d'un mouvement quelconque, si la vitesse ne varie pas trop rapidement aussi bien avec le temps qu'avec le point du corps où nous la prenons.

Ayant maintenant l'expression des lois sous forme invariante, nous pourrons décomposer suivant un vecteur arbitraire **e** ; dans R_e les instruments qui nous servent à mesurer les actions pondéromotrices du champ seront au repos.

Nous employons un système de cordonnées relatif à R_e et posons :

$$\begin{array}{l}
(F_{10},\ F_{20},\ F_{30}) = (E_1,\ E_2,\ E_3) = \mathbf{E}\\
(F_{23},\ F_{31},\ F_{12}) = (B_{23},\ B_{31},\ B_{12}) = \mathbf{B}\\
\hline
(H_{10},\ H_{20},\ H_{30}) = (D_1,\ D_2,\ D_3) = \mathbf{D}\\
(H_{23},\ H_{31},\ H_{12}) = (H_{23},\ H_{31},\ H_{12}) = \mathbf{H}\\
\hline
\end{array}$$

* C'est dans la plupart des applications le point délicat, si nous appliquons à l'ensemble d'un corps c et de l'espace vide qui l'entoure, les lois de Maxwell pour les corps en repos dans le système de référence pour lequel C est au repos, c'est que nous ne pouvons aucunement différencier au point de vue de leur mouvement, les divers corps qui se meuvent dans le vide, parce que là, le principe de la relativité s'applique.

$$s^0 = \varrho \,; \qquad (s^1,\ s^2,\ s^3) = (\mathbf{s}^1,\ \mathbf{s}^2,\ \mathbf{s}^3) = \mathbf{S}$$

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \,; \quad (u^1,\ u^2,\ u^3) = \frac{(\mathbf{v}^1.\mathbf{v}^2.\mathbf{v}^3)}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\mathbf{V}}{\sqrt{1-v^2}}$$

puis nous appliquerons de nouveau les équations du champ de Maxwell qui maintenant conviennent non seulement à la matière au repos, mais à la matière en mouvement uniforme.

N'y a-t-il pas là cependant une contradiction formelle avec les expériences d'induction qui semblent exiger l'introduction d'un terme supplémentaire comme dans (41) ?

Nullement, car dans ces expériences, ce n'est pas en réalité le champ **E** que l'on observe, mais le courant circulant dans le conducteur ; et la relation qui existe entre les deux pour les corps en mouvement n'est plus la même que pour les corps en repos : elle est donnée par l'équation (45).

Prenons parmi les équations (43), (45) celles qui correspondent aux indices $i=1,\ 2,\ 3$, et parmi les équations (46) celles qui correspondent aux combinaisons :

$$(ikl) = (230),\ (310),\ (120)$$

(les autres sont superflues) et nous obtiendrons comme on le voit tout de suite le résultat suivant, posant :

$$\mathbf{E} + [\mathbf{VB}] = \mathbf{E}^*, \quad \mathbf{D} + [\mathbf{VH}] = \mathbf{D}^*$$
$$\mathbf{B} - [\mathbf{VE}] = \mathbf{B}^*, \quad \mathbf{H} - [\mathbf{VD}] = \mathbf{H}^*.$$

nous avons :

$$\mathbf{D}^* = \varepsilon \mathbf{E}^* \,; \quad \mathbf{B}^* = \mu \mathbf{H}^*.$$

Décomposons d'autre part **S** en courant de convection **C** et courant de conduction $\mathbf{S}^*$

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} + \mathbf{S}^*$$

$$\mathbf{c} = \rho^* \mathbf{V} \qquad \rho^* = \frac{\rho - (\mathbf{VS})}{1 - v^2} = \rho - (\mathbf{VS}^*)$$

on a alors :

$$\mathbf{S}^* = \frac{\sigma \mathbf{E}^*}{\sqrt{1-v^2}}$$

Tout s'éclaircit maintenant : le courant est partie courant de convection provenant du mouvement de la matière chargée, partie courant de conduction déterminée par la conductivité σ de la substance. Le courant de conduction se calcule par la loi d'Ohm, si l'on définit la forme électromotrice comme l'intégrale de ligne de **E** et non de $\mathbf{E}^*$; mais pour **E** nous avons justement l'équation suivante, analogue à (41) :

$$\text{rot } \mathbf{E}^* = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot } [\mathbf{VB}]$$

(c est maintenant égal à 1) ou, sous forme intégrale :

$$-\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}_n do = \int \mathbf{E}^* d\mathbf{X}$$

Ainsi s'explique complètement l'induction de Faraday dans les conducteurs en mouvement. En ce qui concerne l'expérience de Wilson, la théorie présente nous donne rot $\mathbf{E}=0$ et par suite $\mathbf{E}=0$ entre les plateaux. De là résulte pour la valeur constante des deux vecteurs dont l'un, l'électrique, est normal au plateau, et le second, le magnétique, parallèle au plateau, et normal à la vitesse :

$$E^* = vB^* = v\mu H^* = \mu v(H + vD)$$
$$D = D^* - vH = \varepsilon E^* - vH.$$

Tirant E^* de la première et portant dans la seconde, il vient :

$$D = v\left\{(\varepsilon\mu - 1)\, H + \varepsilon\mu v D\right\}.$$
$$D = \frac{\varepsilon\mu - 1}{1 - \varepsilon\mu v^2}\, vH.$$

Telle est la valeur de la densité superficielle de la couche d'électricité qui se distribue sur les plateaux du condensateur ; elle coïncide avec celle que donne l'expérience (car vu la petitesse de v, le dénominateur de notre expression est extrêmement voisin de 1).

Les conditions aux limites à la frontière de la matière se déterminent en exprimant que les grandeurs des champs F et H ne subissent aucune discontinuité si l'on suit la matière dans son mouvement ; tandis qu'au contraire, en un point fixe de l'espace pris à l'origine dans l'éther, ces grandeurs présentent généralement des discontinuités, lors du passage de la matière en ce point. Si s est le temps propre d'un élément matériel, l'expression

$$\frac{dF_{ik}}{ds} = \frac{\partial F_{ik}}{dx_l}\, u^l$$

restera toujours finie.

Tenant compte de

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = -\left(\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}\right)$$

on voit que cette expression devient :

$$\frac{\partial F^*_i}{\partial x_k} - \frac{\partial F^*_k}{\partial x_i}$$

D'où il résulte que le flux de $\mathbf{E}^*$ à travers une surface fermée située d'une manière quelconque par rapport à la frontière reste encore nul (de même que le flux de l'induction $\mathbf{B}$).

Les équations fondamentales de l'électrodynamique des corps en mouvement ont été déjà données par Lorentz sous une forme très voisine de celles-ci avant la découverte du principe de relativité : il les déduisait de la théorie électronique. Rien d'étonnant à cela : les lois fondamentales de Maxwell satisfont au principe de relativité pour l'éther et la théorie électronique en déduit les lois applicables à la matière par l'utilisation des valeurs moyennes. L'expérience de Fizeau, celle de Wilson et encore une autre, celle de Röntgen-Eichenwald [11]) montrent que le principe de relativité s'applique à la matière, en ce qui concerne les phénomènes électromagnétiques. Ce sont les problèmes de l'électrodynamique des corps en mouvement qui ont suggéré à Einstein son système.

C'est à Minkowski que revient le mérite d'avoir vu clairement que les équations fondamentales pour les corps en mouvement sont complètement déterminées par le principe de relativité si l'on admet la théorie de Maxwell pour les corps en repos ; c'est lui qui en a donné l'expression définitive ([12]).

Il s'agit maintenant de soumettre au principe de relativité la mécanique qui n'y satisfait pas sous sa forme classique, et de rechercher si les modifications qu'il faut y apporter pour ce but sont en accord avec l'expérience.

§ 24. — Mécanique de la relativité.

Pour mesurer l'action pondéromotrice du champ électromagnétique, nous avons trouvé dans la théorie électronique, un vecteur **p**, dont les composantes contravariantes sont :

$$p^i = F^{ik} s_k = \varrho_0 F^{ik} u_k$$

Ce vecteur satisfait à la relation :

$$p^i u_i = (\mathbf{pu}) = 0 \tag{47}$$

u étant la direction d'univers de la matière. Décomposons en espace et en temps :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{u} &= h \mid h\mathbf{V} \\ \mathbf{p} &= \lambda \mid \mathbf{P}, \end{aligned} \right. \tag{48}$$

P est la densité de la force, et puisque d'après (47) on a :

$$h[\lambda - (\mathbf{PV})] = 0$$

λ est la *densité de travail.*

On obtiendra la loi fondamentale de la mécanique conforme au principe de relativité d'Einstein, par la même méthode qui nous a conduit dans le paragraphe précédent aux équations fondamentales de l'électromagnétisme des corps en mouvement ; nous admettons que la loi de Newton est vraie dans tous les systèmes de référence où la matière est au repos. Soit un point matériel m, qui se trouve au point d'univers O, à un instant donné, et décomposons en espace et en temps suivant sa direction d'univers, m est au repos momentanément dans R_u. Soit μ_0 la densité de la matière dans R_u en O. Après écoulement d'un petit instant ds, m a la direction d'univers $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$. De

$$(\mathbf{uu}) = -1$$

on tire

$$(\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}) = 0,$$

par conséquent en décomposant en espace et en temps :

$$\mathbf{u} = 1 \mid 0, \qquad d\mathbf{u} = 0 \mid d\mathbf{V}, \qquad p = 0 \mid \mathbf{P}$$

et à cause de :

$$\mathbf{u}+d\mathbf{u}=1 \mid d\mathbf{V}$$

on voit que $d\mathbf{V}$ est l'accroissement de la vitesse relative de m (dans R_u) pendant le temps ds. La loi fondamentale de la mécanique s'écrit donc sans aucun doute :

$$\mu_0 \frac{d\mathbf{V}}{ds}=\mathbf{P},$$

mais, on en tire immédiatement la forme invariante pour toute décomposition en espace et en temps :

$$\mu_0 \frac{d\mathbf{u}}{ds}=\mathbf{p} \tag{49}$$

μ_0 est la *densité au repos*, ds le *temps propre* écoulé pendant la translation d'univers pour laquelle la direction d'univers de la particule matérielle subit l'accroissement $d\mathbf{u}$.

La décomposition d'après $\mathbf{u}$ change avec le mouvement de la particule matérielle. Si nous décomposons en espace et en temps, d'après n'importe quel vecteur temporel $\mathbf{e}$ dirigé vers l'avenir, et tel que $(\mathbf{ee})=-1$, alors (49) se dédouble d'après (48) en :

$$\left\{\begin{aligned} &\mu_0 \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)=\lambda \\ &\mu_0 \frac{d}{ds}\left(\frac{\mathbf{V}}{\sqrt{1-v^2}}\right)=\mathbf{P} \end{aligned}\right. \tag{50}$$

Si dans cette décomposition t est le temps, dV le volume et dV_0 le volume au repos de la particule matérielle, on a, à un moment donné : $m=\mu_0 dV_0$; alors

$$\mathbf{P}dV=\mathbf{F} \qquad \lambda dV=A$$

sont respectivement la force agissant sur la particule matérielle, et le travail de celle-ci : en multipliant nos équations par dV, et en ayant égard à ce que :

$$\mu_0 dV \cdot \frac{d}{ds}=m\sqrt{1-v^2} \cdot \frac{d}{ds}=m \cdot \frac{d}{dt}$$

et à ce que la masse m se conserve dans le mouvement, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}\right)=A. \tag{51}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1-v^2}}\right)=\mathbf{F} \tag{52}$$

Ce sont les équations de la mécanique du point matériel. Les équations (52) relatives à la quantité de mouvement nous montrent que la quantité de mouvement d'un point matériel n'est pas comme dans la théorie de Newton $m\mathbf{V}$, mais bien :

$$\frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1-v^2}}$$

L'équation de l'énergie (51) a un aspect étrange au premier abord : si l'on développe suivant les puissances de v, on trouve :

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m + \frac{mv^2}{2} + \cdots,$$

et si nous négligeons les puissances supérieures et le terme constant, on retrouve l'expression classique de l'énergie cinétique $\frac{mv^2}{2}$ et la loi bien connue.

Comme on le voit, les écarts que présente cette nouvelle mécanique relativement à la mécanique newtonienne, ne sont que de l'ordre du carré de la vitesse de la particule matérielle (la vitesse de la lumière étant prise pour unité) ; pour les petites vitesses avec lesquelles on a à faire en mécanique, l'écart est expérimentalement inappréciable. Il en est autrement quand on considère des vitesses de l'ordre de celle de la lumière; la résistance d'inertie de la matière à la force accélératrice devient si grande que la vitesse de la lumière ne peut être atteinte. Les électrons libres (ils sont négatifs), qui forment les *rayons cathodiques* ou les rayons β d'un corps radioactif, sont des corpuscules dont la vitesse est comparable à celle de la lumière ; les expériences de Kaufmann, Bucherer, Ratnowsky, Hupka, ont vérifié les conséquences de la théorie. Une nouvelle confirmation qui concerne le mouvement d'un électron tournant dans l'atome, a été donnée par l'étude de la structure des raies spectrales relatives à l'atome ([13]).

En ajoutant aux équations fondamentales de la théorie électronique obtenues sous forme invariante au paragraphe 20, l'équation $s^i = \varrho_0 u^i$, l'hypothèse que l'électricité est attachée à la matière et les équations fondamentales de la mécanique, nous obtenons un ensemble fermé de lois, qui représente les phénomènes naturels indépendamment des conventions de notation. Ce n'est que maintenant qu'on peut vraiment affirmer avoir démontré la validité du principe de relativité pour un certain domaine ; celui des phénomènes électromagnétiques.

Dans le champ électromagnétique, on obtenait le vecteur pondéromoteur à partir d'un tenseur S_{ik}, au moyen de la formule :

$$p_i = -\frac{\partial S_i^k}{\partial x_k}$$

Conformément à la signification universelle que nous prescrivons à la notion d'énergie dans les sciences de la nature, nous devons admettre que cette loi ne doit pas concerner uniquement le champ électromagnétique, mais aussi n'importe quel phénomène physique. Il s'agit donc, pour chaque ordre de phénomènes, de trouver de quelle manière le tenseur d'énergie et d'impulsion (dont les composantes S_{ik} sont symétriques) dépend du champ ou des grandeurs d'état caractéristiques. Le premier membre des équations de la mécanique :

$$\mu_0 \frac{du}{ds} = p_i$$

provient sans autre d'un tenseur « cinétique » d'énergie et d'impulsion :

$$U_{ik} = \mu_0 u_i u_k.$$

on a en effet :

$$\frac{\partial U_i^k}{\partial x_k} = u_i \frac{\partial(\mu_0 u^k)}{\partial x_k} + \mu_0 u^k \frac{\partial u_i}{\partial x_k};$$

le premier terme est nul conformément à l'équation de continuité de la matière, le deuxième est égal à $\mu_0 \frac{du_i}{ds}$ à cause de :

$$u^k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{dx_k}{ds} = \frac{du_i}{ds}$$

Donc les équations de la mécanique expriment que le tenseur total d'énergie et d'impulsion

$$T_{ik} = U_{ik} + S_{ik}$$

formé au moyen d'un tenseur cinétique U et d'un tenseur potentiel S satisfait au théorème de conservation :

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x_k} = 0.$$

Le principe de la conservation de l'énergie est ainsi formulé parfaitement; il est, comme on le voit, lié indissolublement dans la théorie de la relativité, au principe de la conservation de la quantité de mouvement ; *on doit accorder à la notion d'impulsion une signification tout aussi générale qu'à la notion d'énergie.* Si nous exprimons le tenseur cinétique en un point d'univers dans un système de coordonnées normales, par rapport auquel la matière est en repos, ses composantes ont une forme particulièrement simple : on a $U_{00} = \mu_0$ (ou $c^2\mu_0$, car dans le système *C-G-S* la vitesse de la lumière n'est pas égale à 1) et toutes les autres composantes sont nulles. Cela suggère l'idée que la masse pourrait bien être assimilable à une énergie potentielle concentrée qui se déplace à travers l'espace.

§ 25. — **Masse et énergie.**

Pour préciser davantage cette idée, considérons le mouvement d'un électron. Jusqu'ici, nous nous sommes représenté la force **F** qui entre dans les équations (52) par l'expression :

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + [\mathbf{VH}]) \qquad e = \text{charge de l'électron}$$

qui est dérivée du champ électrique **E** et du champ magnétique **H**. Mais en fait, l'électron n'est pas seulement soumis à l'action de ces forces extérieures pendant son mouvement, mais il subit aussi l'action du champ qu'il engendre et qu'il déplace avec soi. Nous ne le connaissons pas, car la constitution interne de l'électron nous est inconnue; en particulier, nous ne savons rien des forces de cohésion qui conservent l'électron malgré les énormes forces dispersives de la charge négative qui lui est accolée. Mais en tous cas, l'électron en repos forme avec son champ électrique un système physique en équilibre statique. Utilisons un système de coordonnées normal, dans lequel l'électron soit au repos. Soit t_{ik} les composantes de son tenseur d'énergie. Puisqu'il y a repos, cela veut dire que le courant d'énergie de composantes t_{0i} ($i=1,2,3$) s'évanouit. La condition d'équilibre de rang zéro :

$$\frac{\partial t_i^k}{\partial x_k} = 0 \tag{53}$$

nous montre que la densité d'énergie t_{00} est indépendante du temps x_0. A cause de la symétrie, les composantes $t_{i0}(i=1,2,3)$ de la densité d'impulsion sont aussi nulles. Soit $T^{(1)}$ le vecteur de comsantes t_{11}, t_{12}, t_{13}, l'équation (53) donne :

$$\mathrm{div}\, T^{(1)} = 0$$

et par suite, par exemple :

$$\mathrm{div}\,(x_2 T^{(1)}) = x_2\, \mathrm{div}\, T^{(1)} + t_{12} = t_{12}$$

et puisque l'intégrale d'une divergence est nulle (nous devons admettre que t est un infiniment petit du quatrième ordre au moins à l'infini), on a :

$$\int t_{12}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = 0.$$

On trouve de la même manière que les intégrales de volume $\int t_{ik} dV_0$ sont nulles (i, $k=1$, 2, 3). Nous pouvons admettre que ces circonstances ont lieu pour n'importe quel système en équilibre statique. Le résultat trouvé s'exprime en formules invariantes par :

$$\int t_{ik} dV_0 = E_0 u_i u_k \quad (i,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3) \tag{54}$$

E est l'énergie totale (mesurée dans le système de référence où l'électron est au repos), les u_i sont les composantes covariantes de la direction d'univers de l'électron et dV_0 est le volume au repos d'un élément d'espace (calculé en supposant que tout l'espace participe au mouvement de l'électron). L'équation (54) est rigoureusement vraie pour une translation uniforme ; mais nous pouvons l'appliquer aussi à des mouvements variés, quand u ne varie pas trop rapidement dans le temps et dans l'espace. Mais alors les composantes

$$\overline{p}^i = -\frac{\partial t^{ik}}{\partial x_k}$$

de la force pondéromotrice, que l'électron exerce sur lui-même, ne sont plus nulles.

Supposons que l'électron soit absolument sans masse et soit p_i la force tétrale (ou hyperforce) extérieure qui agit sur lui; les équations d'équilibre exigent que :

(55) $$\bar{p}^i + p^i = 0.$$

Décomposons suivant une direction d'univers fixe **e** en espace et en temps :

$$\mathbf{u} = h \mid h\mathbf{V} \qquad \mathbf{p} = (p^i) = \lambda \mid \mathbf{P}$$

et intégrons (55) après avoir multiplié par $dV = dV_0\sqrt{1-v^2}$. Puisque, par l'utilisation d'un système de coordonnées normal dans R_e, on a :

$$\int \bar{p}^i dV = \int \bar{p}^i dx_1 dx_2 dx_3 = -\frac{d}{dx_0}\int t^{i0} dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= -\frac{d}{dx_0}(E_0 u^0 u^i \sqrt{1-v^2}) = -\frac{d}{dt}(E_0 u^i)$$

(ou $x = t$ est le temps), il vient alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{E_0}{\sqrt{1-v^2}}\right) = A\left(=\int \lambda dV\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{E_0\mathbf{V}}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \mathbf{F}\left(=\int \mathbf{P}dV\right).$$

Ces équations sont valables quand la force extérieure **F** (*comparée* à $\frac{E_0}{a}$ où a est le rayon de l'électron) n'est pas trop grande et que sa densité dans le domaine de l'électron est essentiellement constante. Elles coïncident précisément avec les équations fondamentales de la mécanique si nous y remplaçons m par E_0 En d'autres termes : *l'inertie est une propriété de l'énergie.* En mécanique, on attribue à chaque corps une masse invariable m, qui représente comme on sait l'inertie, la résistance de la matière aux forces accélératrices. La mécanique considère cette masse inerte comme une donnée pour laquelle elle ne prodigue pas les explications. Mais ici nous reconnaissons que l'énergie potentielle contenue dans un corps matériel est l'origine de cette inertie, et dans le système *CGS* où la vitesse de la lumière n'est pas 1 mais c, la masse m vaut :

(56) $$m = \frac{E_0}{c^2}$$

Nous obtenons ainsi une nouvelle conception purement dynamique de la matière. (Kant déjà dans ses « Fondements métaphysiques aux sciences de la nature » montre que la matière ne remplit pas une portion d'espace grâce à sa seule existence, mais grâce à des forces répulsives de ses parties.) De même que nous nous sommes déjà libérés de la croyance à l'individualité d'un point de l'espace à des instants déterminés, de même nous pouvons affirmer qu'il *n'y a pas de sens de parler de la « même » portion de matière à différents instants.* L'électron que l'on se représentait auparavant comme un corps substantiel étranger, plongé dans un champ électromagnétique non substantiel, ne nous paraît maintenant plus comme la région très petite, fort peu nettement délimitée, dans laquelle le champ et la densité électrique ont des valeurs très élevées. Un tel « *nœud d'énergie* » ne se propage pas autrement dans l'espace vide que ne se propage une onde à la surface d'un lac; il n'y a pas « une seule et même substance » dont se compose l'électron à chaque instant. Il n'existe que le seul tenseur potentiel; le tenseur cinétique de l'énergie et de l'impulsion n'existe pas à côté de celui-là. La décomposition en ces deux tenseurs, qui se présentent en mécanique, n'est que le signe de la distinction entre l'énergie dispersée dans le champ et celle qui est concentrée dans les nœuds d'énergie : les atomes et les électrons; la limite entre les deux est indistincte. C'est le devoir de la théorie du champ d'expliquer pourquoi le champ possède une telle structure granulaire et pourquoi ces nœuds d'énergie conservent dans leurs vicissitudes leur énergie et leur impulsion (à très peu près au moins) : c'est en cela que consiste le *problème de la matière*. La théorie de Maxwell-Lorentz ne peut le résoudre, car elle ne prévoit pas la force de cohésion qui fait que l'électron ne se disperse pas. *Ce que nous appelons la matière est, dans son essence, atomique*, car nous n'avons pas l'habitude de considérer l'énergie diffuse dans le champ comme un corps matériel. En fait, *les atomes et les électrons ne sont pas les derniers éléments invariables* sur lesquels les forces naturelles agissent extérieurement, les déplaçant de ci, de là; ils sont eux-mêmes étendus et continus, et dans leurs parties les plus ténues ils sont soumis à des changements rapides. Non seulement la matière engendre le champ, mais inversement aussi, *la matière* est une *émanation du champ;* les formules qui expriment les composantes du tenseur d'énergie T_{ik} au moyen des grandeurs d'état du champ, montrent *suivant quelles lois* le champ est lié à l'énergie et à l'impulsion, c'est-à-dire à la matière. Puisqu'il n'y a pas de limites précises entre l'énergie diffuse dans le champ et celle qui forme les électrons et les atomes, nous devons concevoir la notion de matière, dans les cas où elle doit conserver un sens précis, comme auparavant : la matière est la chose réelle qui est représentée par le tenseur d'énergie et d'impulsion. Dans ce sens-là, le champ optique, par exemple est aussi lié à la matière. Comme la matière se confond avec le champ, la mécanique se confond avec la physique. Car la loi de conservation de la matière :

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x_k} = 0, \tag{57}$$

qui est l'équation fondamentale de la mécanique, représente une relation différentielle entre les grandeurs d'état du champ; par suite, elle provient bien des équations du champ. La matière est au sens large que nous adoptons maintenant, ce dont nous avons connaissance directement par nos sens. Si je prends dans la main un morceau de glace, au point de contact entre ce corps et mes organes des sens, je perçois le courant d'énergie comme un courant calorifique et le courant d'impulsion comme une pression; le courant d'énergie à la surface de ma rétine détermine mes perceptions optiques. Derrière la matière directement évidente à nos organes des sens, se cache *le champ*. Par la découverte des lois qui le régissent et de celles d'après lesquelles il détermine la matière, la théorie de Maxwell a fait un lumineux début; mais nous n'avons pas encore atteint le but de notre science.* D'après la formule (56) nous devons conférer à un corps matériel, pour en expliquer l'inertie, une énorme quantité d'énergie : dans 1 kg. d'eau se cachent 9.10^{23} ergs. Cette énergie est formée pour une faible part de l'énergie de cohésion du corps, puis de l'énergie chimique qui unit les atomes et les molécules et qu'on peut observer par une libération brusque due à une explosion (pour un corps solide, cette énergie chimique ne peut se distinguer de l'énergie de cohésion). Dans l'énergie chimique, il faut aussi comprendre l'énergie du champ électrique qui soude les parties constitutives de l'atome. les charges négatives de l'électron et les noyaux positifs; tous les phénomènes d'ionisation sont encore des manifestations de cette catégorie d'énergie. L'énergie du noyau atomique dont une partie est libérée dans les phénomènes radioactifs est beaucoup plus grande que tout cela. Mais ce qui dépasse de beaucoup celle-ci. c'est l'énergie propre des éléments de l'électron et du noyau; elle n'est connue que par on inertie, puisque nous n'avons pas encore trouvé le moyen — Dieu soit béni!—de la faire exploser. *La masse inerte varie avec la quantité d'énergie* : si l'on échauffe un corps, sa masse inerte augmente; si on le refroidit. elle diminue; mais ces effets sont trop faibles pour être mesurés directement. Les réflexions que nous venons de faire d'après Laue [14]) furent tout d'abord appliquées, sous des hypothèses particulières, à l'électron, avant la découverte d'Einstein ; on supposait que l'électron était une sphère uniformément chargée à sa surface ou dans son intérieur, et soumise à des forces de cohésion antagonistes et uniformément réparties. La « masse électromagnétique » $\dfrac{E_0}{c^2}$ qu'on lui attribuait était conforme à l'expérience si l'on prescrivait à l'électron un rayon de l'ordre de 10^{-13}. Il ne faut pas être étonné qu'avant la théorie de la relativité l'idée de l'inertie de l'électron pût germer; car dès l'instant où l'on opère avec les équations de Maxwell, on est implicitement en accord avec le principe de relativité. La connaissance de l'inertie de l'énergie est due à Einstein et à Planck [15]); Planck s'appuyait pour développer la dynamique sur la théorie du rayonnement; des considérations de thermodynamique et non pas des hypothèses sur l'électron forment donc la base de ses idées. Dans les théories phénoménologiques où nous faisons abstraction de la structure atomique de la

* Nous modifierons plus loin (§ 32 et § 36) nos idées sur la matière, mais quoi qu'il en soit, la destruction de la représentation substantielle reste acquise.

matière, nous nous représentons l'énergie emmagasinée dans les atomes et dans les électrons, comme de l'énergie répartie dans la matière d'une façon continue : nous devons simplement faire en sorte d'introduire la densité de masse au repos μ_0 comme densité d'énergie dans le tenseur d'énergie et d'impulsion, rapporté à un système de coordonnées dans lequel la matière est au repos. En hydrodynamique, par exemple, en nous bornant aux phénomènes adiabatiques, nous n'avons qu'à poser :

$$|T_i^k| = \left|\begin{array}{c|ccc} -\mu_0 & o & o & o \\ \hline o & p & o & o \\ o & o & p & o \\ o & o & o & p \end{array}\right|$$

p est la pression uniformément répartie ; le courant d'énergie est nul pour des phénomènes adiabatiques. Pour avoir les composantes de ce tenseur dans un système quelconque, posons : $\mu_0 = \mu^* - p$; on obtient alors les équations invariantes :

58 $$T_i^k = \mu^* u_i u^k + p\delta_i^k$$

ou

$$T_{ik} = \mu^* u_i u_k + p.g_{ik}$$

La densité de masse au repos est :

$$T_{ik}u^i u^k = \mu^* - p = \mu_0$$

elle doit donc être considérée comme une constante (et non pas μ^*) pour un fluide incompressible. Si aucune force n'agit sur le fluide, les équations de l'hydrodynamique s'écrivent :

$$\frac{\partial T_i^k}{dx_k} = o.$$

De la même façon, on obtiendrait les lois de l'élasticité dans la théorie de la relativité [16]). Il reste encore à ajouter à la théorie d'Einstein, la loi de la gravitation newtonienne qui dans sa forme habituelle se rattache au principe de Galilée. Mais elle porte en soi une énigme dont nous débrouillerons la solution dans le dernier chapitre.

§ 26. — **La théorie de Mie.**

A l'intérieur de l'électron, on ne peut plus appliquer la théorie de Maxwell-Lorentz ; dans la théorie électronique habituelle, on considère l'électron comme donné *a priori*, on l'envisage comme un corps d'épreuve dans un champ. Mais Mie a construit une électrodynamique bien plus générale fondée sur la possibilité de définir la matière à partir du champ [17]). Nous allons en exposer brièvement les principes, car elle nous offre l'exemple d'une théorie physique conforme aux idées modernes sur la matière. Elle nous sera encore très utile dans la suite et nous permettra de poser d'une manière précise le problème de la matière.

Posons que l'état du milieu est défini par la connaissance des grandeurs suivantes :

1) Le vecteur courant à quatre dimensions s, que nous appellerons « l'électricité » ;

2) Le tenseur linéaire du second ordre F que nous appellerons « le champ ». Ces grandeurs sont soumises aux relations suivantes :

$$1) \qquad \frac{\partial s^i}{\partial x_i} = 0,$$

$$2) \qquad \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0.$$

Nous vérifierons les équations (2) en prenant pour F le rotationnel d'un vecteur φ :

$$3) \qquad F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}.$$

Inversement, les équations (2) impliquent l'existence d'un vecteur φ satisfaisant à (3).

De même, nous vérifierons (1) en prenant pour s la divergence d'un tenseur symétrique gauche du second ordre H :

$$4) \qquad s^i = \frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k}.$$

Inversement, (1) permet de déterminer un tenseur H qui vérifie (4). Les équations (4) sont de même forme que le second système de Maxwell. Lorentz admettait partout l'identité des tenseurs H et F, à l'intérieur des électrons comme dans l'éther. Nous ferons, d'après Mie, l'hypothèse plus générale que le tenseur H n'est pas un pur symbole mathématique, mais qu'il a une signification physique et que ses composantes sont des fonctions universelles des grandeurs primitives s et F déterminant l'état du milieu. Par suite, nous devons faire pour φ une hypothèse analogue. Si donc nous formons le tableau :

$$\begin{array}{c|c} \varphi & F \\ \hline s & H \end{array}$$

la première ligne contient les grandeurs d'intensité qui sont liées par (3), la seconde les grandeurs d'extension * liées par (4). Opérons maintenant la décomposition de l'univers en espace et en temps, en reprenant les notations du paragraphe 20, et nous retombons sur les équations suivantes qui nous sont bien connues :

$$1) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{s} = 0,$$

$$2) \qquad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{e} = 0. \qquad (\operatorname{div} \mathbf{b} = 0),$$

* Ou d'extensité comme l'on dit aussi parfois.

$$3) \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \text{grad}\, \varphi = \mathbf{e}. \quad (-\text{rot}\, \mathbf{f} = \mathbf{b}),$$

$$4) \quad \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} - \text{rot}\, \mathbf{h} \quad = -\mathbf{s}. \quad (\text{div}\, \mathbf{d} = \rho).$$

Malgré que nous eussions l'habitude d'indiquer par des lettres majuscules grasses les translations d'espace relatives à des vecteurs d'univers, nous préférons ici reprendre les notations habituelles dans un espace ordinaire puisqu'il n'y a pas de confusion à craindre. Si nous connaissons les fonctions universelles donnant φ et H en fonction de s et F, les équations précédentes (abstraction faite de celles qui figurent entre parenthèses) nous donnent au total 10 « équations fondamentales » qui nous permettent de déterminer les dérivées par rapport au temps des 10 grandeurs définissant l'état du milieu, en fonction de ces grandeurs elles-mêmes et de leurs dérivées spatiales ; c'est là la forme des lois fondamentales telle que l'exige le principe de causalité. Mais le principe de relativité, qui semble ici en contradiction avec le premier, impose l'adjonction aux équations fondamentales de celles que nous avons mises entre parenthèses — où ne figure aucune dérivée par rapport au temps.

La contradiction s'évanouit parce que les conditions supplémentaires sont superflues. De (2) et de (3) nous tirons, en effet

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{b} + \text{rot}\, \mathbf{f}) = 0,$$

et de (1) et de (4) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\, \mathbf{d}).$$

Il nous sera très instructif de comparer les équations fondamentales de Mie et celles de la théorie électronique de Lorentz. Lorentz prend les équations (1), (2) et (4), et déduit le tenseur H des grandeurs initiales en posant simplement : $\mathbf{d} = \mathbf{e}$, $\mathbf{h} = \mathbf{b}$. Au contraire, les grandeurs φ et $\mathbf{f}$ sont définies mathématiquement par (3), et il manque une loi donnant leur expression en fonction des grandeurs initiales, le tenseur champ et le vecteur électricité. A sa place, nous avons une formule pour la densité de la force pondéromotrice et la loi fondamentale de la mécanique pour obtenir le mouvement de l'électron sous l'influence de cette force. Mais dans notre conception actuelle, la loi mécanique doit se tirer des équations du champ, — d'où la nécessité d'une généralisation physique, au sens donné plus haut. A la force pondéromotrice, nous opposons la force « électrique » $\mathbf{e}$. Dans le cas du champ constant, (3) nous donne :

$$(59) \qquad \mathbf{e} - \text{grad}\, \varphi = 0.$$

La force électrique $\mathbf{e}$ est alors équilibrée par une « *pression électrique* » φ dans l'éther. Dans le cas général, nous avons une force électrique totale donnée par les équations (3), où les $\mathbf{f}$ figurent comme « *impulsion électrique* ». Il est extrêmement remarquable de voir comment, dans la théorie de Mie, l'équation fondamentale de l'électrostatique (59), que l'on rencontre tout au début de l'étude de l'électricité, acquiert une signification tout à fait intuitive, le potentiel étant considéré comme une pression électrique ; c'est la pression de cohésion cherchée, qui maintient l'électron.

Jusqu'ici, nous n'avons qu'un schéma vide ; pour le remplir, il nous faut connaître les fonctions universelles encore inconnues exprimant les grandeurs d'extension au moyen de celles d'intensité. Jusqu'à un certain point, nous pouvons les obtenir d'une manière purement théorique en admettant la validité du théorème de conservation, c'est-à-dire en admettant que le tenseur T_{ik} d'énergie et d'impulsion satisfait aux équations (57).

C'est sans doute, en effet, une condition nécessaire pour que l'on puisse accorder d'une manière générale la théorie et l'expérience. La conservation de l'énergie devra s'exprimer sous la forme suivante :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0$$

où W est la densité d'énergie et $\mathbf{S}$ le courant d'énergie. On obtient cette équation dans la théorie de Maxwell en multipliant (2) par $\mathbf{h}$, (4) par $\mathbf{e}$ et ajoutant :

$$\mathbf{h}\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t} + \mathbf{e}\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t} + \operatorname{div}[\mathbf{eh}] = -(\mathbf{es}). \tag{60}$$

Au second membre de cette relation, figure le travail employé à accroître l'énergie cinétique des électrons, ou, suivant nos idées actuelles, à accroître l'énergie potentielle du champ dans le domaine de ces électrons. Ce terme devra lui-même se décomposer en deux, l'un étant une dérivée par rapport au temps, l'autre une divergence. Nous n'avons qu'à opérer sur (1) et (3), comme nous venons de le faire sur (2) et (4), c'est-à-dire à multiplier (1) par φ et (3) scalairement par $\mathbf{s}$, pour obtenir après addition :

$$\varphi\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{s}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi\mathbf{s}) = (\mathbf{es}). \tag{61}$$

Ajoutant (60) et (61) nous obtiendrons la loi de l'énergie ; le courant d'énergie sera donc nécessairement :

$$\mathbf{S} = [\mathbf{eh}] + \varphi\mathbf{s}$$

et la différentielle totale de la densité d'énergie :

$$\delta W = \varphi\delta\rho + \mathbf{s}\delta\mathfrak{f} + \mathbf{h}\delta\mathfrak{b} + \mathbf{e}\delta\mathfrak{d}.$$

Le fait que, dans le courant d'énergie, il faut ajouter au terme $[\mathbf{eh}]$ existant seul dans l'éther, un autre terme $\varphi\mathbf{s}$ proportionnel à φ, s'explique immédiatement, car l'électron en mouvement, qui produit le courant de convection $\mathbf{s}$, entraîne avec lui l'énergie qu'il contient. Dans l'éther, c'est le terme $[\mathbf{eh}]$ qui est prépondérant, tandis que dans l'électron, c'est le second $\varphi\mathbf{s}$ qui domine de beaucoup. Dans l'expression de la différentielle totale de la densité d'énergie, nous avons comme variables indépendantes ρ, **f**, **b** et **d**. Pour la symétrie, nous prendrons comme variables indépendantes l'ensemble des grandeurs d'intensité.

Formons :

(62) $$L = W - \mathbf{ed} - \rho\varphi;$$

d'où

$$\delta L = (\mathbf{h}\delta\mathbf{b} - \mathbf{d}\delta\mathbf{e}) + (\mathbf{s}\delta\mathbf{f} - \rho\delta\varphi)$$

Si l'on connaît L en fonction des grandeurs d'intensité, cette équation détermine les grandeurs d'extension en fonction des premières. A la place des *dix fonctions universelles inconnues, nous n'en avons plus qu'une : L;* tel est le résultat que nous donne le principe de conservation de l'énergie.

Revenons maintenant aux notations de l'univers à 4 dimensions; nous aurons :

(63) $$\delta L = \tfrac{1}{2} H^{ik}\delta F_{ik} + s^i\delta\varphi_i.$$

De là, il résulte que δL est un invariant, par suite L, la « fonction hamiltonienne » en est aussi un.

Les invariants les plus simples que l'on puisse former avec un vecteur de composantes φ_i et un tenseur linéaire du second ordre de composantes F_{ik}, sont les carrés des modules : du vecteur φ^i $\varphi_i\varphi^i$, du tenseur F_{ik} : $2L^\circ = \frac{1}{2}F_{ik}F^{ik}$, du tenseur linéaire du 4^e ordre de composantes $\sum \pm F_{ik}F_{lm}$ (la sommation s'étend aux 24 permutations des indices i, k, l, m; le signe + convient aux permutations paires, le signe — aux impaires) et enfin du vecteur $F_{ik}\varphi^k$.

De même que dans la géométrie à 3 dimensions, le théorème fondamental sur la congruence nous apprend que l'ensemble de **a** et **b** est complètement défini à un déplacement près par les invariants $\mathbf{a}^2$, **ab**, $\mathbf{b}^2$, de même, dans la géométrie à 4 dimensions, on peut facilement établir que les invariants précédents déterminent parfaitement, au point de vue de la congruence, la figure constituée par un vecteur et un tenseur linéaire du second ordre. Tout invariant, en particulier la fonction hamiltonienne, pourra s'exprimer algébriquement au moyen des quatre que nous avons indiqués. C'est à la détermination de cette expression que la théorie de Mie réduit le problème de la matière. La théorie de l'éther de Maxwell, qui exclut l'existence des électrons rentre dans la précédente : on n'à qu'à prendre $L = L^\circ$.

Si l'on écrit W et les composantes de **S** en employant les notations de l'espace à 4 dimensions, on reconnaît qu'elles constituent la ligne d'indice zéro (correspondant à la dimension négative) du tableau :

(64) $$T_i^k = F_{ir}H_{kr} + \varphi_i s^k - L\cdot\delta_i^k.$$

Les T_i^k sont donc les composantes mixtes du tenseur d'énergie et d'impulsion qui, d'après nos calculs, satisfait à la loi de conservation pour $i = 0$ et par suite aussi pour $i = 1, 2, 3$. Nous établirons, dans le chapitre suivant, la symétrie de ses composantes covariantes; $T_{ki} = T_{ik}$. Les lois du champ peuvent se ramener dans leur ensemble à un principe de variation simple « *le principe d'Hamilton* ». Nous allons considérer maintenant, comme variables indépendantes, les seules composantes φ_i du potentiel et *définir* le champ par l'équation :

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

Dans les lois, figure la fonction invariante hamiltonienne L qui dépend du potentiel et du champ. Nous *définissons* par (63) le vecteur courant s et le tenseur symétrique gauche H. Soit dans un système linéaire quelconque de coordonnées :

$$d\omega = \sqrt{g}\, dx_0 dx_1 dx_2 dx_3$$

« l'élément de volume » de l'univers ($-g$ étant le déterminant de la forme métrique fondamentale); l'intégrale $\int L d\omega$ étendue à un domaine quelconque d'univers sera invariante; nous l'appellerons la *quantité d'action* ou mieux *l'action* contenue dans ce domaine. Le principe hamiltonien s'énonce ainsi :

L'action est stationnaire pour toute variation infinitésimale du champ, s'annulant en dehors d'un domaine fini :

$$\delta \int L d\omega = \int \delta L d\omega = 0 \quad . \tag{65}$$

L'intégrale est ici étendue à tout l'univers, ou, ce qui revient au même, au domaine fini hors duquel la variation d'action est nulle. Cette variation est déterminée par les accroissements infinitésimaux $\delta\varphi_i$ des composantes du potentiel et ceux qui en résultent pour le champ d'après :

$$\delta F_{ik} = \frac{\partial(\delta\varphi_i)}{\partial x_k} - \frac{\partial(\delta\varphi_k)}{\partial x_i},$$

les $\delta\varphi_i$ étant des fonctions d'univers n'existant que dans un domaine fini. Reprenons la valeur de δL donné par (63); il vient :

$$\delta L = s^i \delta\varphi_i + H_{ik} \frac{\partial(\delta\varphi_i)}{\partial x_k}.$$

La méthode d'intégration par parties (voir p. 96) nous donne :

$$\int H^{ik} \frac{\partial(\delta\varphi_i)}{\partial x_k} d\omega = -\int \frac{\partial H^{ik}}{dx_k} \delta\varphi_i d\omega,$$

et par suite :

$$\delta \int L d\omega = \int \left\{ s^i - \frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k} \right\} \delta\varphi_i d\omega. \tag{66}$$

Tandis que nous avons posé les équations (3) comme équations de définition, le principe hamiltonien nous fournit maintenant le système (4). Supposons en effet qu'en un point, $s^1 - \dfrac{\partial H^{1k}}{\partial x_k}$ soit différent de zéro, positif par exemple ; nous pouvons délimiter autour de ce point un domaine où cette différence soit constamment positive. Prenant alors pour $\delta\varphi_1$, une fonction non négative s'annulant hors de ce domaine. et faisant $\delta\varphi_2 = \delta\varphi_3 = \delta\varphi_4 = 0$, nous voyons que (65) n'est pas vérifiée. 1) et 2) résultent de 3) et 4).

L'électrodynamique de Mie se réduit donc finalement au simple principe d'action (65); il en est d'elle comme de la mécanique qui sous sa forme définitive est toute entière dominée par le principe d'action. Mais tandis qu'en mécanique, à tout système correspond une fonction L dépendant de sa constitution, nous n'avons plus ici à faire qu'à un seul système, l'univers. Le véritable problème de la matière, c'est dès lors, la détermination de l'action contenue dans l'univers, de la « fonction d'univers » L; mais devant ce problème, nous restons encore perplexes. Si nous choisissons arbitrairement une fonction L, nous obtiendrons l'univers « possible » que régirait une action de cette forme, univers qui nous sera bien mieux connu que l'univers réel, si du moins les ressources de l'analyse mathématique ne nous font pas défaut. Mais tout revient naturellement à extraire, de tous les univers possibles, le seul qui existe, l'univers réel; d'après tout ce que nous savons des lois naturelles, la fonction qui lui correspond sera déterminée par des propriétés mathématiques simples. De nouveau la physique, cette fois comme physique du champ, tend à ramener à une seule loi, l'ensemble des phénomènes naturels. C'est un but qu'elle se crut près d'atteindre, une fois déjà, lorsqu'on célébrait le triomphe de la physique « dynamiste » fondée sur les principes de Newton. D'ailleurs aujourd'hui encore, il nous faut prendre garde de ne pas nous illusionner. Pour l'instant nous ne savons pas encore si les grandeurs sur lesquelles repose la théorie de Mie suffisent à définir la matière, et si celle-ci est un fait de nature purement électrique. Et surtout, il y a les phénomènes dont nous rendons à peine compte par la théorie du quantum d'action, qui obscurcissent notre connaissance du monde et nous menacent d'on ne sait quel nouveau bouleversement.

Voyons quel univers nous donnerait l'hypothèse suivante sur L

(67) $$L = \tfrac{1}{2}\,|F|^2 + w\left(\sqrt{-\varphi_i\varphi^i}\right)$$

(où w désigne une fonction d'une seule variable) qui paraît la plus simple après celle qui correspond à la théorie de Maxwell, (nous n'avons d'ailleurs aucune raison de supposer que la fonction d'univers ait effectivement cette forme).

Limitons-nous au cas statique, pour lequel :

$$\mathbf{b} = \mathbf{h} = 0 \qquad\qquad \mathbf{s} = \mathbf{f} = 0$$

Nous avons :

$$\mathbf{e} = \operatorname{grad} \varphi \qquad\qquad \operatorname{div} \mathbf{d} = \rho$$
$$\mathbf{d} = \mathbf{e} \qquad\qquad \rho = -\,w'(\varphi)$$

(l'accent indique la dérivation). Contrairement à ce qui a lieu dans l'électrostatique habituelle, il se présente ici cette circonstance remarquable que la densité ρ est une fonction universelle de la pression électrique φ. « L'équation de Poisson » est ici :

(68) $$\Delta\varphi + w'(\varphi) = 0.$$

Si $w(\varphi)$ n'est pas une fonction paire de φ : cette équation ne se conserve pas lorsqu'on change φ en $-\varphi$: cela ferait comprendre *la différence essentielle entre l'électricité positive et l'électricité négative.* Il est vrai que, dans le cas de champs variables, il se présente des difficultés remarquables. Si, en effet, nous avons des charges des deux signes, le radical qui figure dans (67) devra être pris, en différentes régions du champ, avec des signes différents ; il doit donc y avoir des points du champ où $\varphi_i\varphi^i$ s'annule. Dans leur voisinage, $\varphi_i\varphi^i$ prendrait alors des valeurs positives et des valeurs négatives (cette conclusion ne vaut point pour le cas statique, puisque o est le minimum de la fonction φ_0^2 de φ_0). Les solutions de nos équations du champ deviendraient donc imaginaires dans certaines zones. Il est bien difficile de voir ce que signifie un champ de cette sorte, qui n'existe que dans les régions contenant des charges d'un certain signe et devient imaginaire dans les domaines intermédiaires. Une solution (nulle à l'infini) de l'équation (68) représente un état d'équilibre électrique possible, un corpuscule capable d'exister par lui-même dans l'univers que nous construisons actuellement. L'équilibre ne pourra être stable que si la solution possède la symétrie sphérique. Dans ce cas, l'équation (68) prend la forme :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) + w'(\varphi) = 0, \tag{69}$$

où r représente la distance à l'origine. Si nous voulons que (69) admette une solution régulière à l'infini, de la forme :

$$-\varphi = \frac{e_0}{r} + \frac{e_1}{r^2} + \cdots \tag{70}$$

nous trouvons, en substituant ce développement en série dans le premier membre de l'équation, que le développement de $w'(\varphi)$ commence par un terme en r^{-4} ou par un terme de degré négatif encore plus haut ; de sorte que lorsque x tend vers zéro, $w(x)$ est un infiniment petit du 3^e ordre au moins. Sous ces hypothèses, l'équation admet une simple infinité de solutions régulières pour $r=0$, et une simple infinité de solutions régulières pour $r=\infty$. On est en droit de penser que, en général, ces deux séries *à une dimension* (parmi l'ensemble bi-dimensionnel de toutes les solutions) auront en commun un nombre fini de solutions ou peut-être dans certains cas, un ensemble discret. Elles représentent les différents corpuscules possibles (électrons ou éléments du noyau de l'atome ?). Il n'y a point, à la vérité, qu'un seul électron ou un seul noyau atomique dans l'univers ; mais les distances qui les séparent sont si grandes par rapport à eux, que leurs actions réciproques modifient fort peu l'allure du champ à l'intérieur d'un électron ou d'un noyau atomique. Soit φ la solution (70) de (69) représentant un tel corpuscule, sa charge totale sera :

$$= -4\pi\int_0^\infty w'(\varphi)r^2dr = -4\pi\cdot r^2\frac{d\varphi}{dr}\bigg|_{r=\infty} = 4\pi e_0,$$

Sa masse se calculera comme l'intégrale de la densité d'énergie résultant de (62) :

$$\textit{Masse} = 4\pi \int_0^\infty \left\{ \tfrac{1}{2}(\text{grad}\,\varphi)^2 + w(\varphi) - \varphi w'(\varphi) \right\} r^2 dr$$
$$= 4\pi \int_0^\infty \left\{ w(\varphi) - \tfrac{1}{2}\varphi w'(\varphi) \right\} r^2 dr$$

Nous pouvons ainsi *déduire des lois de la nature la masse et la charge de l'électron, le poids et la charge de l'atome des seuls éléments qui existent*, tandis que, jusqu'ici, nous avions considéré les éléments ultimes de la matière comme donnés *a priori*, avec leurs propriétés numériques. A la vérité, ce n'est pour l'instant qu'un *programme*, tant que nous ignorons la forme de la fonction d'univers L ; l'hypothèse (67) que nous avons mise à la base de l'étude précédente, ne nous a servi qu'à montrer quelle intelligence complète et profonde nous aurions des lois de la matière et de son organisation, par la connaissance de l'action L. Du reste, la discussion d'hypothèses arbitraires ne peut nous mener plus loin, mais il nous faut des conceptions physiques et des principes nouveaux qui nous donnent une méthode sûre pour déterminer la fonction hamiltonienne.

Pour préciser *ex contrario*, la nature de la force physique du champ, développée de la manière la plus générale par Mie en ce qui concerne l'électrodynamique, nous allons mettre en face du principe d'action (65) qui la régit, celui qui domine toute la théorie de Maxwell-Lorentz et qui pose l'existence, à côté du champ électromagnétique, d'une « *substance* » qui se meut. Cette substance est un continuum à trois dimensions ; nous pouvons donc en déterminer les positions d'une manière continue, au moyen d'un système de coordonnées $\alpha\beta\gamma$. Imaginons la substance divisée en éléments infiniments petits; à chaque élément de substance, fixons une masse positive invariable dm et une charge électrique invariable de; l'histoire de cet élément est exprimée par une ligne de l'univers à quatre dimensions qui précise la manière dont il décrit sa trajectoire, ou mieux encore par un « *tube d'univers* » infiniment délié. Partageons ce tube en sections élémentaires et soit :

$$ds = \sqrt{-g_{ik}dx_i dx_k}$$

la grandeur du temps propre d'une telle section ; $d\omega$ son hypervolume ; nous définissons la fonction d'univers μ_0, densité de masse au repos par l'équation invariante :

$$dm\,ds = \mu_0 d\omega. \tag{71}$$

Nous appellerons « *action substantielle de la masse* », l'intégrale étendue à un domaine d'univers X :

$$\int_X \mu_0 d\omega = \int dm\,ds = \int \left(dm \int \sqrt{-g_{ik}dx_i dx_k}\right).$$

Dans la dernière intégrale, l'intégration intérieure s'étend à la portion de ligne d'univers décrite dans le domaine X, par l'élément de masse dm ; l'intégration extérieure s'applique à tous les éléments de substance. Ce passage du temps propre de la substance aux intégrales habituelles d'univers s'effectue mathématiquement comme suit :

Introduisons d'abord la « *densité de substance* » ν de la masse par l'équation

$$dm = \nu d\alpha d\beta d\gamma$$

(relativement à toute transformation des coordonnées $\alpha\beta\gamma$ de la substance, ν se comporte comme une densité scalaire). Sur la ligne d'univers relative à un élément quelconque de substance (α, β, γ) nous comptons le temps propre s à partir d'une origine déterminée (qui naturellement variera d'une manière continue avec l'élément de substance). Les coordonnées x_i du point d'univers qu'occupe le point $(\alpha\beta\gamma)$ de la substance à l'instant s de son mouvement (c'est-à-dire après écoulement du temps propre s), sont alors des fonctions continues de $\alpha\beta\gamma s$, dont le jacobien

$$\frac{\partial(x_0 x_1 x_2 x_3)}{\partial(\alpha\beta\gamma s)}$$

a une valeur absolue Δ. L'équation (71) nous donne alors :

$$\mu_0 \sqrt{g} = \frac{\nu}{\Delta}$$

Nous introduisons de même la densité ρ_0 de charge électrique au repos. Prenons pour « l'action substantielle de l'électricité » l'expression :

$$\int (de \int \varphi_i dx_i)$$

où l'intégrale extérieure s'étend encore à tous les éléments de substance, l'intérieure à la portion de ligne d'univers décrite dans X par l'élément de substance de charge de. Nous pouvons encore l'écrire :

$$\int de ds \cdot \varphi_i u^i = \int \rho_0 u^i \varphi_i d\omega = \int s^i \varphi_i d\omega$$

où les $u^i = \dfrac{dx_i}{ds}$ sont les composantes de la direction d'univers et les $s^i = \rho_0 u^i$, les composantes de l'hypercourant (courant de convection). Enfin il existe encore à côté de « l'action de la substance » une « action du champ électrique » que la théorie de Maxwell prend simplement égale à

$$\frac{1}{4}\int F_{ik}F^{ik} d\omega \qquad \left(F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right)$$

Le principe hamiltonien qui condense toutes les lois de Maxwell-Lorentz peut s'énoncer alors ainsi :

L'action totale, composée de l'action du champ électrique, de l'action substantielle de l'électricité et de l'action substantielle de la masse n'éprouve aucune altération pour toutes variations :

des composantes φ_i de l'état du champ,

des lignes d'univers décrites par les divers éléments de substance,

Ces variations s'annulant hors d'un domaine fini.

Ce principe nous fournit tout de suite, en faisant varier les φ_i, les équations :

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = s^i = \rho_0 u^i.$$

Laissons maintenant les φ_i invariés et varions les lignes d'univers des éléments de substance; en permutant (comme au § 17, dans la recherche des lignes minima) les signes d et δ, puis intégrant par parties, il vient :

$$\begin{aligned}\delta\int\varphi_i dx_i &= \int(\delta\varphi_i dx_i + \varphi_i d\delta x_i) = \int(\delta\varphi_i dx_i - \delta x_i d\varphi_i)\\ &= \int\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\right)\delta x_k \cdot dx_i.\end{aligned}$$

Les δx_i sont ici les composantes du déplacement infiniment petit que subissent les points d'une ligne d'univers. Donc :

$$\delta\int(de\int\varphi_i dx_i) = \int deds \cdot F_{ik}u^i\delta x_k = \int\rho_0 F_{ik}u^i\delta x_k \cdot d\omega.$$

Déterminons de même la variation de l'action substantielle de la masse (ce calcul a déjà été fait de la manière la plus générale au paragraphe 17, avec des g_{ik} variables) et nous trouvons finalement les équations mécaniques qui figurent à côté de celles du champ dans la théorie de Maxwell :

$$\mu_0 \frac{du_i}{ds} = p_i, \qquad p_i = \rho_0 F_{ik}u^k = F_{ik}s^k.$$

Nous obtenons ainsi cet enchaînement parfait des ensembles des lois, dont il était question page 173. Cette théorie ne rend évidemment pas compte de l'existence de l'électron, puisqu'elle ne fait pas allusion aux forces de cohésion.

Il manque dans l'expression que nous venons de donner au principe d'action, un terme représentant l'action du champ de la masse, tel qu'il en existe pour l'électricité ; nous allons combler cette lacune dans le chapitre suivant, où le potentiel de gravitation jouera vis-à-vis de la masse, le même rôle que le champ électromagnétique *vis-à-vis de la charge électrique*.

La découverte capitale que nous venons de faire dans ce chapitre, c'est que la scène du monde réel n'est pas un espace euclidien à trois dimensions, mais un *univers à quatre dimensions où l'espace et le temps sont enchevêtrés inextricablement*. Subjectivement, il y a un abîme entre nos modes de perception du temps et de l'espace, mais il ne reste pas trace de cette différence qualitative dans l'univers objectif, que la physique cherche à épurer de l'intuition immédiate. Cet univers est un continu à quatre dimensions qui n'est ni « l'espace » ni le « temps » ; c'est la conscience seule qui, se mouvant dans un domaine de cet univers enregistre la section qui vient à elle et la laisse en arrière, comme « histoire », c'est-à-dire comme un processus qui se déroule dans l'espace et se développe dans le temps. Cet univers à quatre dimensions est métrique, comme l'univers euclidien; mais la forme quadratique qui détermine cette métrique, n'est pas définie positive, elle possède *une* dimension négative. Ce fait, sans grande importance au point de vue mathématique, est de la plus haute signification en ce qui concerne le monde réel et l'enchaînement des choses qui s'y passent. Il était nécessaire que nous ne nous bornassions pas à prendre *in abstracto*, l'idée mathématiquement si simple de l'univers métrique à quatre dimensions, mais de la poursuivre dans ses conséquences les plus importantes pour la conception des phénomènes physiques, si nous voulions avoir une compréhension exacte de son contenu et de sa portée; il était nécessaire de l'exposer aussi brièvement que possible. Ce qui demeure fort remarquable, c'est le caractère d'évidence que prend à nos yeux la géométrie à trois dimensions du monde statique dont Euclide fit déjà un système logiquement parfait tandis que ce n'est qu'au prix des plus grandes peines et en lui faisant correspondre un système de nature physique et empirique que nous parvenons à dominer l'univers quadridimensionnel. C'est seulement par la théorie de la relativité, on peut bien le dire, que nous acquérons pour la première fois une connaissance parfaitement conforme de la nature du mouvement, du changement dans le monde.

CHAPITRE IV

THÉORIE GÉNÉRALE DE LA RELATIVITÉ.

§ 27. — Relativité du mouvement, champ métrique et gravitation [1].

Au point de vue de la théorie de la connaissance, nous ne pouvons pas encore être très satisfaits du principe de relativité einsteinien dont nous avons développé les conséquences et dont nous avons montré l'accord avec l'expérience dans le chapitre précédent. Revenons encore une fois sur les idées développées au début du chapitre. Nous y avons appris à connaître un principe « cinématique » de relativité. x_1, x_2, x_3, t étaient les coordonnées d'un point d'univers rapportées à un système cartésien dans l'espace et x'_1, x'_2, x'_3, t' les coordonnées du même point par rapport à un autre système en mouvement relativement au premier, ce mouvement étant quelconque; entre les coordonnées, nous avions les relations (11) de la page 131. Nous nous sommes rendu compte avec une pleine évidence que deux changements d'état physiques ne diffèrent objectivement en rien l'un de l'autre, si les grandeurs qui caractérisent l'un sont des fonctions de x'_1, x'_2, x'_3, t' qui sont les mêmes que les fonctions de x_1, x_2, x_3, t qui caractérisent l'autre. Les lois de la nature doivent donc s'exprimer de la même manière dans le premier système que dans le deuxième. En fait, les résultats de la dynamique semblent démontrer le contraire, et depuis Newton, il a fallu se résoudre à donner une signification absolue à la rotation, la translation seule étant relative; cependant la raison n'a jamais été satisfaite par ces conséquences prétenduement imposées par la réalité — même après les essais de justification philosophique (voir par exemple Kant : Fondements métaphysiques des sciences de la nature) — et le problème de la force centrifuge a toujours été une énigme insoluble [2].

Où se trouve l'origine de la force centrifuge et des autres forces d'inertie ? Newton répondait : dans l'espace absolu. La réponse que donne la théorie de la relativité restreinte n'est pas essentiellement différente de celle de Newton ; elle en rend responsable la structure métrique de l'univers qu'elle considère comme une de ses propriétés géométriques formelles. Mais ce qui engendre la force doit posséder soi-même une réalité. Or, la seule réalité que nous pouvons admettre pour cela, c'est la structure métrique; elle devrait être elle-même susceptible de variations et elle devrait pouvoir subir une réaction de la part de la matière. Nous ne pouvons sortir du dilemme — et c'est Einstein qui nous en a montré le chemin — qu'en reprenant les idées de Riemann (voir chap. II) et en les appliquant non pas à l'espace tridimensionnel, mais à l'univers quadridimensionnel d'Einstein-Minkowski, dont il était question dans le chapitre précédent. Nous ne nous occuperons pas tout d'abord de la notion la plus générale de multiplicité métrique, mais nous en restons plutôt aux idées de Riemann. Les points d'univers forment une multiplicité à quatre dimensions, qui possède une détermination métrique grâce à une forme différentielle quadratique Q, à trois dimensions négatives à une dimension positive*. En utilisant un système de coordonnées quelconque $x_i (i=0, 1, 2, 3)$, nous avons au sens général de Riemann :

(I) $$Q = \sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k.$$

Les lois naturelles s'expriment maintenant au moyen de relations entre tenseurs, qui doivent être invariantes pour tout changement continu des coordonnées x_i; à côté des grandeurs d'état physique, les g_{ik} de la forme (I) entrent dans l'expression de ces lois. L'exigence que nous impose le point de vue de la relativité est d'après cela réalisée conformément à l'expérience, *si nous considérons les* g_{ik} *comme des grandeurs d'état physique auxquelles correspond une réalité : le champ métrique*, de la même manière que l'on considère les composantes φ_i du potentiel électromagnétique ($\sum_i \varphi_i dx_i$ est une forme différentielle linéaire invariante) comme représentant un champ. Dans ces circonstances, il y a une invariance non seulement vis-à-vis des transformations (II) qui ne sont complètement arbitraires (non linéaires) que pour le temps, mais vis-à-vis de n'importe quelles transformations. La distinction de la coordonnée temporelle dans (II) est en effet incompatible avec les résultats obtenus par le principe de relativité d'Einstein. Si, au lieu de (II) nous admettons des transformations tout à fait quelconques, nous nous rendons bien compte qu'un système cartésien ne se distingue en aucune manière d'un système de cordonnées analogues quelconques. *L'existence d'une géométrie indépendante de la physique est définitivement compromise*, et c'est précisément parce que nous ne nous étions pas encore libérés du dogme de l'existence d'une telle géométrie, que nous étions arrivés au principe de relativité (II) par des réflexions logiques au lieu d'aboutir au principe général d'invariance. En vérité, les mesures spatiales reposent sur un phénomène physique : la réaction des rayons lumineux et des règles de mesure sur l'ensemble de l'univers matériel. Déjà au § 21, le point

* Nous changeons les signes, car notre nouvelle définition est plus commode que celle qui nous a servis dans le troisième chapitre

de vue paraissait s'imposer, mais nous pouvons le rattacher avant tout aux considérations du § 12, car en effet, nous sommes arrivés à la notion dynamique de la métrique comme à une conséquence nécessaire de la relativité de tous les mouvements. La manière d'agir des rayons lumineux ou les réactions des règles de mesure sont déterminées, par leurs propriétés intrinsèques bien entendu, mais en outre par le champ métrique (ou mathématiquement parlant, par le tenseur g_{ik}) précisément comme les vicissitudes d'une charge électrique sont réglées par le champ électrique et par les propriétés intrinsèques de cette charge. Mais de même que le champ électrique dépend de son côté des charges, nous devons admettre ici que le *champ métrique dépend des réalités matérielles qui remplissent l'univers.* Nous verrons à la fin du paragraphe un principe d'action où la masse s'oppose au champ métrique comme la charge au champ électrique. L'hypothèse faite dans le paragraphe précédent, qu'il existe un système particulier de coordonnées (un système linéaire) pour lequel la forme métrique fondamentale a des coefficients constants, est évidemment à éliminer.

Par un exemple intuitif simple, on peut montrer clairement comment les rapports géométriques subissent l'influence du mouvement. Mettons un disque plan en rotation uniforme. Si dans l'espace où le disque tourne, la géométrie euclidienne est valable, j'affirme qu'elle ne l'est plus sur le disque, si l'on fait des mesures sur lui au moyen de règles en mouvement avec lui. Considérons, en effet, un cercle centré au centre de rotation et tracé sur le disque. Son rayon a la même valeur, qu'on le mesure avec une règle au repos ou qu'on le mesure avec une règle en mouvement, car la direction du mouvement est perpendiculaire à la direction des rayons. Au contraire, si l'on mesure la circonférence au moyen d'une règle entraînée avec le disque, on trouve une valeur plus grande que si l'on fait la mesure avec une règle au repos, car elle subit dans le premier cas la contraction de Lorentz. Sur le disque en rotation, la loi euclidienne qui dit que la circonférence vaut 2π fois le rayon, n'est plus valable.

Si dans un wagon restaurant, qui se déplace sur une courbe à faible rayon, les verres se renversent, ou si dans une usine, un volant en rotation éclate, nous n'avons pas à rendre compte de ces phénomènes par l'explication newtonienne de l'action d'une « rotation absolue », mais nous dirons bien plutôt, conformément à l'esquisse que nous venons d'ébaucher, que ces phénomènes résultent de l'action du *champ métrique* ou plus exactement de la connexion affine qui en dérive. Le principe d'inertie de Galilée montre que dans l'univers, il y a une « contrainte » qui dirige le mouvement d'un corps abandonné à lui-même, de telle manière que pour le détourner de cette trajectoire nécessaire, il faut appliquer au corps des forces extérieures. Ce « champ de contrainte » qui est une réalité, est ce que nous avons appelé auparavant la « connexion affine ». Si le corps s'écarte grâce à des forces extérieures, la contrainte se manifeste par des forces de réaction, la force centrifuge, par exemple. Si l'état du champ de contrainte varie, les aspects successifs se distinguent par l'influence des masses existant dans l'univers, les étoiles fixes, qui engendrent le champ ; les phénomènes mentionnés plus haut sont donc en partie dus à l'action des étoiles fixes, relativement *auxquelles* la rotation a lieu. (Nous disons « en partie » parce que la répartition des masses ne détermine pas univoquement le champ de « contrainte ».) Pour atteindre les principes de la relativité générale que nous sommes maintenant à même d'obtenir en partant de la théorie « restreinte » du chapitre précédent, nous procéderons en deux temps : 1° Nous accomplissons pour l'univers quadridimensionnel, conformément à l'esprit de continuité, le même chemin qui nous mena, au chapitre II, de la géométrie euclidienne à la géométrie riemanienne. Nous nous donnons une forme différentielle quadratique comme forme métrique fondamentale. Il est alors possible sans autre, de conformer les lois physiques à cette généralisation. Il est commode pour cela de représenter les extensions par des densités tensorielles au lieu de les figurer par des tenseurs comme dans le chapitre III; on y arrive en multipliant les tenseurs par $\sqrt{g}$ (g est le déterminant changé de signe des g_{ik}). Alors, la densité matérielle, et la densité de charge μ et ϱ sont données par les formules

$$dm ds = \mu dx, \qquad de ds = \varrho dx \qquad (dx = dx_0 dx_1 dx_2 dx_3)$$

au lieu d'être données par les formules (71) du § 26; le temps propre ds le long d'une ligne d'univers se détermine par :

$$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k.$$

Les équations de Maxwell s'expriment de la manière suivante :

$$F_{ik} = \frac{d\varphi_i}{dx_k} - \frac{d\varphi_k}{dx_i}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{s}^i$$

les φ_i sont les coefficients d'une forme différentielle linéaire invariante $\varphi_i dx_i$, et $\mathfrak{F}^{ik} = \sqrt{g} \cdot F^{ik}$. Dans la théorie de Lorentz on a posé :

$$\mathfrak{s}^i = \varrho u^i \qquad \left(u^i = \frac{dx_i}{ds} \right).$$

La force pondéromotrice par unité de volume (une densité vectorielle covariante dans l'univers se détermine par *

$$\mathfrak{p}_i = - F_{ik} \mathfrak{s}^k \; ; \tag{2}$$

les équations de la mécanique prennent la forme générale :

$$\mu \left(\frac{du^i}{ds} - \left\{ \begin{matrix} i\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} u_\alpha u^\beta \right) = \mathfrak{p}_i \tag{3}$$

et l'on a toujours $\mathfrak{p}_i u^i = 0$. On peut leur donner la forme habituelle, si l'on pose :

$$\overline{\mathfrak{p}}_i = \mu \left\{ \begin{matrix} i\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} u_\alpha \, u^\beta = \frac{1}{2} \, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \mu u^\alpha u^\beta \tag{4}$$

* Le signe est changé par suite de notre nouvelle convention sur la forme métrique.

[Comp § 17, éq. (64)] — $\bar{\mathfrak{p}}_i$ est alors une force « fictive » engendrée par le champ métrique (réaction due à la contrainte); les équations de la mécanique s'écrivent alors :

$$\mu \frac{du_i}{ds} = \mathfrak{p}_i + \bar{\mathfrak{p}}_i \, .$$

Les exemples les plus simples de cette force fictive sont donnés par la force centrifuge et la force de Coriolis. En comparant l'équation (4) qui donne les composantes de la « force fictive » due au champ métrique avec celle qui donne la force pondéromotrice du champ électrique, on voit l'analogie complète. De même que la densité vectorielle aux composantes $\mathfrak{s}^i$ caractérise l'électricité, de même, comme nous l'avons vu, la matière en mouvement est complètement caractérisée par la densité tensorielle $\mathfrak{T}_i^k = \mu u_i u^k$. Aux composantes F_{ik} du champ électrique, correspondent dans le champ métrique, les grandeurs dont :

$$\Gamma^\alpha_{i\beta} = \left\{ \begin{matrix} i\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\}$$

sont les composantes. De même que F provient du potentiel φ_i par dérivation, Γ provient des g_{ik} par dérivation ; les g_{ik} forment donc le potentiel du champ métrique. La densité de la force est le produit de l'électricité et du champ d'une part, et du champ métrique et de la matière d'autre part,

$$\mathfrak{p}_i = - F_{ik}\mathfrak{s}^k. \qquad \bar{\mathfrak{p}}_i = \Gamma^\alpha_{i\beta}\mathfrak{T}^\beta_\alpha.$$

Abandonnons l'idée d'une substance indépendante de l'état physique, et considérons à sa place la densité d'énergie et d'impulsion. $\mathfrak{T}_i^k$ déterminée par l'état du champ. D'après la relativité restreinte, les équations de conservation sont :

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k} = 0$$

Cette équation doit être remplacée par

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k} - \Gamma^\alpha_{i\beta}\mathfrak{T}^\beta_\alpha = 0. \tag{5}$$

d'après la formule (37) du § 14. S'il n'y avait dans le premier membre que le premier terme, c'est que $\mathfrak{T}$ satisferait aussi aux lois de conservation. Mais à sa place, s'ajoute un deuxième terme ; la force réelle :

$$\mathfrak{p}_i = - \frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k}$$

ne s'évanouit pas, mais elle doit être tenue en équilibre par la force fictive due au champ métrique :

$$\bar{\mathfrak{p}}_i = \Gamma^\alpha_{i\beta}\mathfrak{T}^\beta_\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \mathfrak{T}^{\alpha\beta}. \tag{6}$$

Ces formules sont aussi utiles dans la relativité restreinte quand on emploie un système de coordonnées curvilignes mobile ou non, ou un système accéléré. Pour rendre bien claires les opérations que nous venons de faire, déterminons la *force centrifuge* qui s'applique à un système de référence en rotation. Prenons un système normal de coordonnées d'univers : t, x_1, x_2, x_3 et à la place des coordonnées cartésiennes pour l'espace, prenons un système de coordonnées cylindriques r, z, θ, il vient :

$$ds^2 = dt^2 - (dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2).$$

Faisons la substitution :

$$\theta = \theta' + \omega t', \qquad t = t'$$

où ω est une vitesse angulaire constante. Il vient, en laissant tomber les accents :

$$ds^2 = dt^2(1 - r^2\omega^2) - 2r^2\omega d\theta dt - (dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2).$$

Faisons pour un moment

$$t = x_0, \qquad \theta = x_1, \qquad z = x_2, \qquad r = x_3,$$

et soient : $u^1 = u^2 = u^3 = 0$ les composantes de la vitesse d'un point matériel au repos dans le système de référence utilisé, on a donc :

$$(u^0)^2(1 - r^2\omega^2) = 1;$$

et pour les composantes de la force centrifuge, on a d'après (4) :

$$\bar{\mathfrak{p}}_i = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x_i} \cdot \mu (u^0)^2;$$

or les dérivées de $g_{00} = 1 - r^2\omega^2$ par rapport à x_0, x_1, x_2 s'évanouissent, et :

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial x_3} = \frac{\partial g_{00}}{\partial r} = -2r\omega^2;$$

en revenant alors aux notations antérieures et aux unités habituelles, où la vitesse de la lumière n'est pas l'unité, et en passant aux composantes contravariantes, on trouve :

$$(7) \qquad \bar{\mathfrak{p}}^t = \bar{\mathfrak{p}}^\theta = \bar{\mathfrak{p}}^z = 0, \qquad \bar{\mathfrak{p}}^r = -\frac{\mu r\omega^2}{1 - \left(\frac{r\omega}{c}\right)^2}.$$

Deux circonstances très intimement liées d'ailleurs, caractérisent la « force fictive » du champ métrique.

1° L'accélération qu'elle communique à un point matériel qui se trouve en un point de l'espace-temps (plus précisément : au point qui passe avec une certaine vitesse) est indépendante de sa masse — ou mieux encore, la force même est proportionnelle à la masse inerte du point matériel auquel elle s'applique — 2° en utilisant un système de coordonnées appropriées — un système géodésique — en un point, cette force « fictive » peut s'annuler complètement en ce point. (Comp. § 14). Si la relativité restreinte est valable, cet évanouissement peut se produire pour tous les points d'univers par l'introduction d'un système de coordonnées linéaire; mais dans le cas général on peut faire en sorte seulement que les 40 composantes

$\Gamma^{\alpha}_{\iota\beta}$ de la connexion affine s'évanouissent en chaque point où l'on introduit le système géodésique qui lui est relatif*, ailleurs les $\Gamma^{\alpha}_{\iota\beta}$ ne sont pas forcément nulles. Mais ces deux circonstances se trouvent réalisées expérimentalement par la force de gravitation. La vraie énigme de la pesanteur réside dans ce fait, qu'un champ de gravitation communique à chaque masse, quelle qu'elle soit, placée en un même point, la même accélération. Dans le champ électrostatique la force qui s'exerce sur un pendule électrostatique de charge e est $e.\mathbf{E}$. $\mathbf{E}$ ne dépend que du pendule, e que du champ. Si aucune force n'agit, cette force $e\mathbf{E}$ communique à la balle de sureau une accélération $\mathbf{B}$ telle que $m\mathbf{B}=e\mathbf{E}$, m étant la masse inerte de la balle. Dans un champ de gravitation, il y a quelque chose d'analogue. La force agissant sur un corps est $p\mathbf{G}$, où p, « la charge de gravitation », ne depend que du corps et $\mathbf{G}$ ne dépend que du champ; l'accélération $\mathbf{B}$ est donnée par $m\mathbf{B}=p\mathbf{G}$. Mais la gravitation présente alors la propriété remarquable suivante, c'est que la « *masse pesante p est égale à la* « *masse inerte* » *m*. Eötvös a vérifié cette loi expérimentalement avec une précision extrême [3]). La force centrifuge qui agit sur un corps placé à la surface de la terre et due à la rotation de notre planète est proportionnelle à la masse inerte de ce corps, tandis que son poids est proportionnel à sa masse pesante. La résultante des deux, la pesanteur qu'on observe, aurait des directions différentes suivant les corps dont on formerait le fil à plomb, s'il n'y avait pas proportionnalité de la masse inerte à la masse pesante. Eötvös constata au moyen de la balance de torsion, qu'une telle différence de direction n'existe pas; cela permet de mesurer la masse inerte avec la même précision que l'on mesure la masse pesante au moyen d'une balance de précision. La proportionnalité de la masse inerte à la masse pesante est encore rigoureusement vraie dans les cas où il y a perte de masse due, non pas à une disparition de substance comme on l'imaginait, mais à une libération de l'énergie radioactive. La masse inerte d'un corps a une signification *universelle* d'après les lois fondamentales de la mécanique; elle règle l'attitude des corps pour toutes les actions de forces, quelle que soit leur origine physique, mais sa masse pesante n'est, d'après la notation habituelle, relative qu'à un champ de force particulier, le champ de gravitation (comme la charge électrique pour le champ électrique). D'un tel point de vue, l'identité de la masse inerte à la masse pesante doit rester incompréhensible, elle ne peut être fondée que sur une mécanique, qui, dès l'abord introduit la gravitation à côté de la masse inerte. C'est le cas de la mécanique du principe de relativité généralisée, si nous admettons, que *la gravitation tout comme la force centrifuge ou la force de Coriolis, réside dans cette* « *force apparente* » *qui correspond au champ métrique*. Alors les planètes sui-

* Le champ métrique n'est donc pas représentable par un tenseur invariant pour des transformations quelconques.

vent une trajectoire qui s'écarte de la trajectoire galiléenne, mais qui est déterminée par le champ métrique, et nous n'avons plus besoin d'invoquer avec Newton, pour expliquer cet écart une « pesanteur » particulière. Les forces de gravitation satisfont encore à la deuxième condition : on peut les faire s'évanouir dans un système de coordonnées particulier: Une benne fermée, un ascenseur, dont la corde est cassée et qui se précipite sans frottement à travers le champ de pesanteur terrestre est un exemple intuitif d'un tel système de référence. Tous les corps libres dans l'ascenseur paraîtront au repos; les phénomènes se déroulent à son intérieur, comme si l'ascenseur était au repos et qu'aucun champ de pesanteur n'existât.

II. La voie indiquée tout à l'heure qui permet de passer de la relativité restreinte à la relativité généralisée, est une opération purement mathématique. Ayant introduit la forme métrique fondamentale (1), nous pouvons formuler les lois de la nature, de telle sorte qu'elles soient invariantes pour n'importe quelles transformations de coordonnées; c'est une possibilité d'existence mathématique et non pas un caractère distinctif de ces lois. On fait un nouveau pas quand on admet que la métrique d'univers n'est pas donnée *a priori*, mais que la forme quadratique qui la représente dépend de la matière par des lois invariantes aussi. Ce n'est que lorsque ce pas est franchi qu'on s'est élevé à une théorie qui mérite vraiment le nom de théorie de la relativité générale. Elle permet alors de résoudre le problème de la relativité du mouvement. Et c'est alors seulement qu'on peut préciser l'analogie mentionnée dans (I), qui existe entre le champ métrique et le champ électrique d'une part, la matière et la charge d'autre part. Et ce n'est que si nous admettons cette théorie, que la gravitation nous apparaîtra comme une émanation du champ métrique, car nous savons par l'expérience que le champ de gravitation est conditionné par la répartition des masses (loi d'attraction de Newton). C'est moins dans la condition d'invariance générale, que dans cette nouvelle étape, que nous paraît être le noyau de la théorie de la relativité généralisée.

Si nous nous plaçons à ce point de vue, nous ne sommes plus fondés à appeler « forces fictives », les forces dues au champ métrique; elles ont alors une existence aussi réelles que celles de la force pondéromotrice du champ électromagnétique. La force de Coriolis, la force centrifuge composée sont des forces réelles qui sont exercées sur la matière par le champ de gravitation ou par le champ métrique. Après avoir résolu le problème mathématique simple qui consiste à exprimer les lois de la nature (comme les équations de Maxwell, par exemple) avec un tenseur métrique fondamental quelconque, il reste à découvrir la *loi invariante de la gravitation, d'après laquelle la matière détermine les composantes* $\Gamma^{\alpha}_{i\beta}$ *du champ de gravitation*, et qui remplace dans la théorie d'Einstein la loi d'attraction newtonienne. Pour ce faire, les lois connues des champs ne nous offrent aucun point d'appui. Malgré cela, Einstein réussit à résoudre victorieusement le problème, et à montrer que la loi trouvée explique les mouvements des planètes tout aussi bien que la loi de Newton et même qu'elle rend compte du déplacement du périhélie de Mercure que la mécanique céleste classique n'arrivait pas à expliquer; ce déplacement de 43″ par siècle est quantitativement retrouvée par la théorie d'Einstein.

Cette théorie, qui est l'une des plus belles preuves de la force de la pensée spéculative, nous donne en même temps que la solution du problème de la relativité du mouvement, (solution qui est la seule en état de satisfaire notre raison), la solution de l'énigme de la pesanteur.[4]) On voit quel argument important, la relativité généralisée apporte aux idées de Riemann, développées au chapitre II. L'on peut aussi affirmer que le point de vue qui oppose l'espace et le temps comme *formes* des phénomènes, au contenu matériel du monde, n'est fondé que si on le comprend de la manière suivante : seules des grandeurs d'état physique sont mesurables, au moyen d'opérations matérielles; les 4 coordonnées d'univers ne se mesurent pas, elles servent plutôt à ordonner a priori les points de l'univers d'une manière tout à fait arbitraire, afin de rendre possible la représentation des grandeurs physiques par des fonctions mathématiques (de 4 variables indépendantes).

Pendant que le potentiel du champ électromagnétique est représenté par les coefficients d'une forme différentielle *linéaire* $\varphi_i dx_i$ invariante, des 4 coordonnées d'univers, le potentiel du champ de gravitation lui, est représenté par les coefficients d'une forme différentielle quadratique invariante. Dans les développements qui nous ont conduits à cette théorie, le *théorème de Pythagore* a pris une physionomie un peu différente. Il n'a pas été obtenu par l'observation des phénomènes de gravitation, mais bien plutôt par l'expérience de la mesure, par la géométrie. La théorie de la gravitation d'Einstein résulte en quelque manière de la conjonction de deux ordres de connaissance, qui jusqu'ici avaient été complètement séparés dans le développement historique de la science ; la synthèse einsteinienne est donc due à l'amalgame des idées de Newton sur la gravitation et de celles de Pythagore sur la mesure.

Pour obtenir les valeurs des g_{ik} nous pouvons recourir à des expériences immédiates, en utilisant des signaux lumineux comme en relativité restreinte et des points matériels libres. Soient x_i les coordonnées des points d'univers. Les lignes géodésiques qui passent par un point O et dont voici les équations :

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0 \tag{8}$$

$$g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = \text{const} = C \tag{9}$$

se partagent en deux classes, celles qui ont une direction *spatiale* ($C<0$) et celles qui ont une direction *temporelle* ($C>0$). Ces dernières remplissent un « double cône », de sommet O ; les deux cônes déterminés par O sont ouverts, l'un dans l'avenir, l'autre dans le passé. Le premier contient tous les points d'univers qui appartiennent à l'*avenir actif* de O, l'autre tous les points d'univers qui forment le « *passé passif* » de O. Les nappes du cône sont formées par les lignes géodésiques de longueur nulle ($C = 0$) ; sur la nappe d'avenir se trouvent tous les points d'univers qui peuvent être atteints par un signal lumineux de O, ou plus généralement les points limites qui peuvent être atteints par une action émanée de O. La forme métrique fondamentale détermine ainsi quels points d'univers peuvent exercer une action les uns sur les autres. Soient dx_i les coordonnées relatives d'un point d'univers O' infiniment voisin de O, O' ne sera atteint par un signal lumineux issu de O que si $g_{ik}dx_i dx_k = 0$. Par l'observation de l'arrivée des signaux lumineux en des points voisins de O, on peut donc obtenir les rapports des g_{ik} en O ; de même pour n'importe quel autre point d'univers. Mais la propagation de la lumière ne nous donne pas d'autre renseignement ; car on sait, par une remarque faite à la page 110, que les lignes géodésiques de longueur nulle ne dépendent que du rapport des g_{ik}. L'image optique des directions qu'un observateur (que nous supposerons être réduit à un œil ponctuel) reçoit à un moment donné du ciel étoilé, par exemple, se construit de la manière suivante : du point d'univers O, auquel l'observateur se trouve, on trace sur le cône antérieur les géodésiques de longueur nulle qui coupent les lignes d'univers des étoiles. La direction de chaque ligne lumineuse se décompose en O, en une composante $\mathbf{e}$ dirigée suivant la ligne d'univers de l'observateur, et en une composante $\mathbf{s}$ qui lui est perpendiculaire (« perpendiculaire » a ici le sens que nous lui avons donné à la page 105; $\mathbf{s}$ est la direction spatiale du rayon de lumière). A l'intérieur de la multiplicité linéaire tridimensionnelle d'éléments de lignes normaux à $\mathbf{e}$, — ds^2 est une forme définie positive, calculée d'après la formule (15) du paragraphe 11; en employant cette nouvelle forme métrique, les angles que forment les directions spatiales $\mathbf{s}$ des rayons lumineux, donnent les positions des étoiles telles que les perçoit l'observateur.

Le facteur de proportionnalité qui achève de faire connaître la forme métrique fondamentale et que les phénomènes lumineux sont incapables de nous fournir, peut se déterminer par l'observation du mouvement d'un point matériel qui transporte une horloge. Si nous admettons, en effet, que cette montre mesure le temps propre s, si le mouvement n'est pas accéléré, l'équation (9) nous renseigne évidemment sur le transport de l'unité de mesure le long de la ligne d'univers du mouvement (comp. Appendice I).

§ 28. — **La loi einsteinienne fondamentale de la gravitation.**

D'après la théorie de Newton l'état de la matière est caractérisé par un *scalaire :* la densité de masse μ ; d'autre part le potentiel de la gravitation est aussi un scalaire Φ ; entre ces deux grandeurs, Poisson a établi la relation :

(10) $\Delta\Phi = 4\pi k\mu$ (Δ=div. grad; k=constante de la gravitation).

C'est la loi suivant laquelle la matière détermine le champ de gravitation. D'après la théorie de la relativité, la matière au sens étroit peut être représentée par un *tenseur* symétrique T_{ik}, ou mieux encore par la densité tensorielle mixte $\mathfrak{T}_i^k$ correspondante ; le champ de gravitation est aussi déterminé par un tenseur symétrique g_{ik}. A la place de l'unique équation (10), il faut s'attendre à trouver dans la théorie d'Einstein un système d'équations dont les premiers membres seront des expressions différentielles du deuxième ordre en les g_{ik}, et dont les seconds membres seront les composantes de la densité de l'énergie $\mathfrak{T}$; ce système doit être d'ailleurs invariant pour toute transformation de coordonnées. Pour trouver ces lois, le chemin le plus commode est de partir du principe hamiltonien formulé à la fin du paragraphe 26. L'action se composait là de trois parties : l'action du champ électrique, l'action substantielle de l'électricité, l'action substantielle de la masse ou gravitation. Il manque encore la quatrième partie : l'action du champ de gravitation que nous allons obtenir. Mais auparavant, il nous faut encore calculer la variation que la somme des trois termes mentionnés ci-dessus, subit, quand laissant invariables les potentiels φ_i du champ électromagnétique et les lignes d'univers des éléments matériels on soumet les g_{ik}, potentiels du champ métrique, à une variation virtuelle infiniment petite δ; c'est là un problème qui se présente seulement dans la théorie de la relativité générale.

L'action substantielle de l'électricité ne subit aucun changement; la variation de la fonction à intégrer pour trouver l'action du champ électrique

$$\frac{1}{2}\mathfrak{S} = \frac{1}{4}F_{ik}\mathfrak{F}^{ik}$$

est :

$$\frac{1}{4}\left\{\sqrt{g}\,\delta(F_{ik}F^{ik}) + (F_{ik}F^{ik})\,\delta\sqrt{g}\right\}$$

Or, le premier terme dans le crochet vaut $\mathfrak{F}_{rs}\delta F^{rs}$, car δF_{ik} est nul d'après nos hypothèses sur l'invariabilité du potentiel électromagnétique ; or :

$$F^{rs} = g^{ri}g^{sk}F_{ik};$$

donc pour ce premier terme, on trouve :

$$2\sqrt{g}F_{i r}F_{k}^{r}\,\delta g^{ik}.$$

Le deuxième terme est d'après (58′, § 17)

$$-\mathfrak{S}g_{ik}\delta g^{ik}.$$

donc la variation de l'action du champ électrique est :

$$-\int \frac{1}{2}\mathfrak{S}_{ik}\delta g^{ik}dx = \int \frac{1}{2}\mathfrak{S}^{ik}\delta g_{ik}dx$$

(comp. § 17 [59])

(11) $$\mathfrak{S}_i^k = \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}\delta_i^k - F_{ir}\mathfrak{F}^{kr}$$

ne sont pas autre chose que les composantes de la densité d'énergie du champ électromagnétique. (Le changement de signe est toujours une conséquence du changement de signe de la forme métrique.) C'est seulement maintenant que nous voyons tout à coup d'où viennent les expressions compliquées (11) pour la densité d'énergie et d'impulsion du champ électromagnétique, et c'est la variation de la métrique d'univers qui nous en donne la raison. Pour l'action de la masse, nous obtenons un résultat correspondant :

$$\delta\sqrt{g_{ik}dx_i dx_k} = \tfrac{1}{2}\,\frac{dx_i dx_k \delta g_{ik}}{ds} = \tfrac{1}{2}ds\ u^i\ u^k \delta g_{ik}$$

donc

$$\delta\int(dm\int\sqrt{g_{ik}dx_i dx_k}) = \int\tfrac{1}{2}\mu u^i u^k \delta g_{ik} dx.$$

Pour la variation de la partie que nous connaissons déjà de l'action totale, nous trouvons :

(12) $$\int\tfrac{1}{2}\mathfrak{T}^{ik}\delta g_{ik}\,dx,$$

où $\mathfrak{T}_i^k$ est la densité tensorielle de l'énergie totale.

Le quatrième terme de l'action qui nous manque encore, l'action du champ de gravitation, doit être un invariant intégral, $\int\mathfrak{G}dx$, où la fonction $\mathfrak{G}$ est construite avec les potentiels g_{ik} et avec les composantes du champ de gravitation $\left\{ {ik \atop r} \right\}$ (c'est-à-dire avec les g_{ik} et leurs dérivées premières $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} = g_{ik,r}$) ; ce n'est que dans ces circonstances-là qu'on pourra obtenir les lois de la gravitation par des équations différentielles qui ne soient pas d'ordre supérieur au deuxième. La différentielle totale est :

(13) $$\delta\mathfrak{G} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{G}^{ik}\delta g_{ik} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{G}^{ik,r}\delta g_{ik,r} \quad (\mathfrak{G}^{ki} = \mathfrak{G}^{ik},\ \mathfrak{G}^{ki,r} = \mathfrak{G}^{ik,r});$$

on trouve alors pour une variation infinitésimale δg_{ik}, nulle à l'extérieur d'un domaine fini et sur sa frontière, grâce à une intégration par parties :

(14) $$\delta\int\mathfrak{G}\,dx = \int\tfrac{1}{2}[\mathfrak{G}]^{ik}\delta g_{ik}dx$$

où les « dérivées lagrangiennes » $[\mathfrak{G}]^{ik}$ symétriques en i et en k se calculent par la formule :

$$[\mathfrak{G}]^{ik} = \mathfrak{G}^{ik} - \frac{\partial\mathfrak{G}^{ik,r}}{\partial x_r}$$

Les équations de la gravitation prennent alors la forme

(15) $$[\mathfrak{G}]_i^k = -\mathfrak{T}_i^k$$

et l'on ne s'étonne plus de ce que les composantes de l'énergie et de l'impulsion se présentent précisément comme coefficients lorsqu'on varie les g_{ik}, dans les trois premières parties constitutives de l'action. Malheureusement il n'existe aucune densité scalaire $\mathfrak{G}$, formée comme nous le voudrions ; car on peut toujours amener les $\left\{ {ik \atop r} \right\}$

à être tous nuls en un point moyennant un choix approprié du système de coordonnées. Mais nous avons appris à connaître un invariant qui contient les dérivées secondes des g_{ik} linéairement : c'est le scalaire R de la courbure riemannienne ; on peut même prouver que c'est le seul invariant de cette espèce (voir Appendice II). Puisque les dérivées du second ordre y entrent linéairement, elles disparaissent par une intégration par parties dans l'invariant intégral $\int \frac{1}{2} R \sqrt{g} dx$. Nous avons donc :

$$\int \tfrac{1}{2} R \sqrt{g}\, dx = \int \mathfrak{G}\, dx$$

plus l'intégrale d'une divergence, c'est-à-dire l'intégrale d'une fonction qui a la forme $\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i}$; $\mathfrak{G}$ ne dépend ici que des g_{ik} et de leurs dérivées premières. Pour une variation δg_{ik}, nulle à l'extérieur et sur la frontière d'un domaine fini, on a :

$$\delta \int \tfrac{1}{2} R \sqrt{g}\, dx = \delta \int \mathfrak{G}\, dx$$

parce que

$$\int \frac{\partial(\delta \mathfrak{w}^i)}{\partial x_i}\, dx = 0$$

d'après le principe d'intégration par parties. Ce n'est donc pas $\int \mathfrak{G} dx$ qui est un invariant, mais c'est $\delta \int \mathfrak{G} dx$ et c'est bien ce qui seul importe pour le principe de Hamilton.

Nous dirons donc que $\int \mathfrak{G} dx$ est l'action du champ de gravitation; et cette expression est la seule qui soit possible. Nous sommes donc arrivés victorieusement aux équations de la gravitation (15) ; elles sont déterminées univoquement. Elles nous montrent que *chaque espèce d'énergie a une action gravitationnelle*; cette action n'est pas seulement l'apanage de l'énergie concentrée dans les électrons et les atomes, c'est-à-dire la matière au sens étroit, mais l'énergie diffuse dans le champ (car les $\mathfrak{T}_i^k$ sont les composantes de l'énergie totale) y participe aussi.

Avant de poursuivre les calculs qui sont nécessaires pour que les équations de la gravitation prennent une forme explicite, nous examinerons d'abord si nous parvenons à des résultats analogues *avec la théorie de Mie.* L'action $\int \mathfrak{L} dx$ qu'on y considère est un invariant, non seulement pour les transformations linéaires, mais pour des transformations quelconques, car $\mathfrak{L}$ est formé au moyen des φ_i, des F_{ik} et des g_{ik} par des procédés purement algébriques où n'interviennent aucune considération d'analyse tensorielle. Formons la différentielle totale de $\mathfrak{L}$; on a formellement :

$$(16) \qquad \delta \mathfrak{L} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{T}^{ik} \delta g_{ik} + \delta_0 \mathfrak{L}, \qquad \delta_0 \mathfrak{L} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{H}^{ik} \delta F_{ik} + \mathfrak{s}^i \delta \varphi_i$$
$$(\mathfrak{T}^{ki} = \mathfrak{T}^{ik}, \qquad \mathfrak{H}^{ki} = -\mathfrak{H}^{ik})$$

et appelons énergie ou matière la densité tensorielle $\mathfrak{T}_i^k$. Nous supposons seulement que le champ métrique (de potentiels g_{ik}) est à la matière ($\mathfrak{T}^{ik}$) comme le champ électromagnétique (de potentiels φ_i) est au courant électrique ($\mathfrak{s}^i$). Mais nous devons prouver maintenant que les explications actuelles conduisent précisément aux expressions données au § 26 (64) pour l'énergie et l'impulsion ; nous obtiendrons en plus la preuve, encore à faire, de la symétrie du tenseur d'énergie. Nous ne pouvons pas atteindre ici notre but par un calcul direct ; mais nous nous servirons d'une idée fort belle dont les germes se trouvent dans l'œuvre magistrale de Lagrange et dont la forme la plus parfaite a été développée par Klein [5]).

Faisons subir au continuum universel une déformation infinitésimale, qui fait passer le point (x_i) au point $(\bar{x}_i)$:

$$\bar{x}_i = x_i + \varepsilon \cdot \xi^i(x_0 x_1 x_2 x_3) \tag{17}$$

(ε est le paramètre infinitésimal constant, dont on négligera les puissances supérieures à la première dans la suite.) Nous supposons que les grandeurs d'état participent à la déformation, de telle sorte que les nouveaux φ_i (qu'on désignera par $\bar{\varphi}_i$) sont des fonctions des coordonnées qui, par suite des équations (17), satisfont à :

$$\varphi_i(x) dx_i = \bar{\varphi}_i(\bar{x}) d\bar{x}_i \tag{18}$$

et dans le même sens, les formes différentielles symétriques et symétriques gauches dont g_{ik} et F_{ik} sont respectivement les coefficients doivent rester invariables. Les variations $\bar{\varphi}_i(x) - \varphi_i(x)$ que subissent par la déformation les grandeurs φ_i en un point fixe (x_i) seront désignées par $\delta\varphi_i$; on aura des définitions identiques pour δg_{ik} et δF_{ik}. Remplaçons dans $\mathfrak{L}$ les φ_i, g_{ik}, F_{ik} par les $\bar{\varphi}_i$, $\bar{g}_{ik}$, $\bar{F}_{ik}$ on obtient $\bar{\mathfrak{L}}$:

$$\bar{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L} + \delta\mathfrak{L}$$

$\delta\mathfrak{L}$ est donné par les relations (16). Soit maintenant X un domaine quelconque d'univers qui, déformé, devient le domaine $\bar{\mathrm{X}}$. Par la déformation, l'action :

$$\int_{\mathrm{X}} \mathfrak{L} dx \text{ subit une variation } \delta' \int_{\mathrm{X}} \bar{\mathfrak{L}} dx$$

qui est égale à la différence de l'intégrale de $\bar{\mathfrak{L}}$ sur $\bar{\mathrm{X}}$ et de l'intégrale de $\mathfrak{L}$ sur X, l'action étant un invariant, on doit avoir :

$$\delta' \int_{\mathrm{X}} \mathfrak{L} dx = 0. \tag{19}$$

Nous décomposons cette variation tout naturellement en deux parties : 1) la différence des intégrales de $\bar{\mathfrak{L}}$ et de $\mathfrak{L}$ sur $\bar{\mathrm{X}}$; 2) la différence des intégrales de $\mathfrak{L}$ sur $\bar{\mathrm{X}}$ et sur X :

$$\int_{\bar{\mathrm{X}}} \bar{\mathfrak{L}} d\bar{x} - \int_{\mathrm{X}} \mathfrak{L} dx = \left\{ \int_{\bar{\mathrm{X}}} \bar{\mathfrak{L}} d\bar{x} - \int_{\bar{\mathrm{X}}} \mathfrak{L} d\bar{x} \right\} + \left\{ \int_{\bar{\mathrm{X}}} \mathfrak{L} d\bar{x} - \int_{\mathrm{X}} \mathfrak{L} dx \right\}$$

Pour la première partie, puisque $\bar{\mathrm{X}}$ ne diffère de X que d'une quantité infiniment petite, nous pouvons prendre la valeur :

$$\delta \int_{\mathrm{X}} \mathfrak{L} dx = \int_{\mathrm{X}} \delta\mathfrak{L} dx$$

la deuxième partie est, d'après les résultats de la page 96,

$$\varepsilon \cdot \int_X \frac{(\partial \mathfrak{L}\xi^i)}{\partial x_i}\, dx.$$

Pour mener à bien notre calcul, nous devons encore connaître $\delta\varphi_i$, δg_{ik} et δF_{ik}. Si pour un instant nous posons

$$\bar{\varphi}_i(\bar{x}) - \varphi_i(x) = \delta'\varphi_i,$$

nous obtenons à cause de (18) :

$$\delta'\varphi_i \cdot dx_i + \varepsilon\varphi\; d\xi^r = 0, \qquad \text{donc :}$$

$$\delta'\varphi_i = -\varepsilon\; \varphi_r \frac{\partial \xi^r}{\partial x_i},$$

et puisque

$$\delta\varphi_i = \delta'\varphi_i - \left\{\bar{\varphi}_i(\bar{x}) - \bar{\varphi}_i(x)\right\} = \delta'\varphi_i - \varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^i}{\partial r_r}\xi^r$$

on obtient enfin, après la suppression du facteur ε, qu'on sous-entendra toujours :

(20) $$-\delta\varphi_i = \varphi_r \frac{\partial \xi^r}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_r}\xi^r$$

on aurait de même :

(20′) $$-\delta g_{ik} = g_{ir}\frac{\partial \xi^r}{\partial x_k} + g_{rk}\frac{\partial \xi^r}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\xi^r$$

(20″) $$-\delta F_{ik} = F_{ir}\frac{\partial \xi^r}{\partial x_k} + F_{rk}\frac{\partial \xi^r}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_r}\xi^r,$$

or on a :

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}, \qquad \text{et par suite :}$$

(21) $$\delta F_{ik} = \frac{\partial(\delta\varphi_i)}{\partial x_k} - \frac{\partial(\delta\varphi_k)}{\partial x_i}$$

mais à cause de l'invariance de F_{ik}, on a :

$$\bar{F}_{ik}(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{\varphi}_i(\bar{x})}{\partial \bar{x}_k} - \frac{\partial \bar{\varphi}_k(\bar{x})}{\partial \bar{x}_i}$$

$$\bar{F}_{ik}(x) = \frac{\partial \bar{\varphi}_i(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial \bar{\varphi}_k(x)}{\partial x_i}.$$

Remplaçons alors dans (16), il vient :

$$-\delta\mathfrak{L} = (\mathfrak{T}_i^k + \mathfrak{H}^{rk}F_{ri} + \mathfrak{s}^k\varphi_i)\frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} + (\frac{1}{2}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} + \cdots)\xi^i$$

Débarassons-nous des dérivées des ξ^i par des intégrations par parties et posons pour abréger

$$\mathfrak{B}_i^k = \mathfrak{T}_i^k + F_i\,\mathfrak{H}^{kr} + \varphi_i\mathfrak{s}^h - \delta_i^k\mathfrak{L}$$

nous obtenons une formule qui a l'aspect suivant :

$$(22) \qquad -\delta' \int_X \mathfrak{L}dx = \int_X \frac{\partial(\mathfrak{B}_i^k \xi^i)}{\partial x_k} dx + \int_X (\mathfrak{t}_i \xi^i) dx = 0.$$

Or, on sait que, si les ξ^i sont choisis de façon à être nuls hors du domaine X, il faut que, en chaque point :

$$(23) \qquad \mathfrak{t}_i = 0$$

D'après cela, le premier terme du deuxième membre de (22) est nul ; on obtient ainsi une identité valable quels que soient les ξ^i et le domaine d'intégration X ; or l'intégrale d'une fonction continue n'est nulle, quel que soit le domaine d'intégration, que si la fonction elle-même est nulle :

$$\frac{\partial(\mathfrak{B}_i^k \xi^i)}{\partial x_k} = \mathfrak{B}_i^k \frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathfrak{B}_i^k}{\partial x_k} \xi^i = 0$$

mais comme on peut choisir les ξ^i et les $\frac{\partial \xi^i}{\partial x_k}$ arbitrairement, il faut que :

$$\mathfrak{B}^k = 0, \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{B}_i^k}{\partial x_k} = 0\right)$$

Nous sommes donc bien arrivés au résultat :

$$\mathfrak{T}_i^k = \mathfrak{L}\delta_i^k - F_{ik}\mathfrak{H}^{kr} - \varphi_i \mathfrak{s}^k$$

Ces considérations nous donnent en même temps les *lois de la conservation de l'énergie et de l'impulsion* que nous avons déjà obtenues au § 26 et qui sont exprimées par les équations (23). La variation de l'action de tout l'univers pour une déformation infinitésimale nulle à l'extérieur d'un domaine fini est :

$$(24) \qquad \int \delta\mathfrak{L}\, dx = \int \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{ik}\delta g_{ik} dx + \int \delta_0 \mathfrak{L} dx = 0.$$

Or, le deuxième terme est nul ici par suite des *conséquences du principe de Hamilton* (équations de Maxwell),

$$(25) \qquad \int \delta_0 \mathfrak{L} dx = 0$$

le premier terme vaut ·

$$= -\int \left(\mathfrak{T}_i^k \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}\xi^i\right) dx = \int \left(\frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}\right)\xi^i dx$$

Cela résulte immédiatement du calcul effectué ci-dessus. On obtient alors *les équations de la mécanique* :

$$(26) \qquad \frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\mathfrak{T}^{\alpha\beta} = 0.$$

comme une conséquence des lois du champ électromagnétique. (A cause du terme supplémentaire dû à la gravitation ces équations ne peuvent plus être considérées dans la théorie générale de la relativité, comme les équations de conservation ; la question de savoir s'il existe des équations de conservation, sera examinée au § 33).

Du principe hamiltonien complété par *l'introduction de l'action du champ gravifique* :

(27) $$\delta \int (\mathfrak{L} + \mathfrak{G}) dx = 0$$

où il faut considérer les variations virtuelles infinitésimales que subissent les champs électromagnétiques et gravifiques comme indépendantes l'une de l'autre, on obtient d'une part les équations électromagnétiques et d'autre part les équations (15) de la gravitation. Appliquons maintenant les considérations qui nous ont mené aux équations (26) à $\mathfrak{G}$ au lieu de $\mathfrak{L}$, alors pour une variation δ, infinitésimale et nulle hors d'un domaine fini, on obtient :

$$\delta \int \mathfrak{G} dx = \delta \int \frac{1}{2} R \sqrt{g} dx = 0$$

et l'on trouve des *identités mathématiques* analogues aux identités (26)

$$\frac{\partial \mathfrak{G}_i^k}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} [\mathfrak{G}^{\alpha\beta}] = 0.$$

Le fait que $\mathfrak{G}$ contient les dérivées des g_{ik} n'y fait rien. *Les équations mécaniques* (26) *sont d'après cela aussi bien une conséquence des équations* (15) *de la gravitation que des équations du champ électromagnétique :*

Les dépendances remarquables qui se dévoilent ici peuvent être formulées de la manière suivante qui est indépendante de la validité de la théorie électrodynamique de Mie. L'état d'un système physique est représenté, relativement à un système de coordonnées par certaines *grandeurs d'état* φ variables dans l'espace et dans le temps (c'est ce que nous appelions plus haut les φ_i). En plus de ces variables, le *champ métrique* dans lequel le système est plongé est déterminé par ses potentiels g_{ik}. Les lois des phénomènes dépendent d'un *invariant intégral* $\int \mathfrak{L} dx$; la densité scalaire $\mathfrak{L}$ est une fonction des φ et de leurs dérivées premières (éventuellement des dérivées supérieures), elle dépend aussi des g_{ik}, mais pas de leurs dérivées. Nous prenons la différentielle totale de $\mathfrak{L}$ en explicitant les termes en δg_{ik} :

$$\delta \mathfrak{L} = \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{ik} \delta g_{ik} + \delta_0 \mathfrak{L}.$$

Alors $\mathfrak{T}_i^k$ est la densité de *l'énergie* (*matière*) liée à l'état physique du système. La détermination de ses composantes est ramenée une fois pour toutes à la détermination de la fonction hamiltonienne $\mathfrak{L}$: *c'est la théorie de la relativité générale seule, qui, rendant possible la variation de la métrique d'univers, conduit à une vraie définition de l'énergie.* Les *lois d'état* s'obtiennent par le principe « partiel » de variation d'action, d'après lequel, seules les grandeurs d'état sont à varier ; on obtient alors autant d'équations que de grandeurs φ à déterminer. Les dix *équations de la gravitation* (15) qui donnent les dix potentiels g_{ik} s'obtiennent lorsqu'on applique le principe de variation complète (27), les g_{ik} variant à leur tour. Les *équations mécaniques* (26) sont aussi bien une conséquence des lois d'état que des lois de la gravitation ; on pourrait les considérer comme les résultants de ces deux séries. Donc dans le système des lois d'état et des lois de la gravitation, il en est quatre qui sont en excès. En effet, la solution générale doit contenir quatre fonctions arbitraires, puisque les équations, par suite de l'invariance, laissent complètement indéterminé le système de coordonnées x_i; par conséquent, si l'on opère une transformation quelconque sur les variables x_i dont dépend une solution, on obtient une nouvelle solution (mais qui représente le même état de l'univers que la première). La vieille division en géométrie, mécanique et physique doit être remplacée dans la théorie d'Einstein par la distinction entre l'état physique et le champ gravifique. Pour être tout à fait complet, revenons encore au *principe hamiltonien de la théorie de Maxwell-Lorentz.* La variation des φ_i donne les lois électromagnétiques, la variation des g_{ik}, celles de la gravitation. Puisque l'action est un invariant, la variation qu'elle subit pour une déformation infinitésimale du continuum universel, doit être nulle ; à cette déformation doivent participer : le champ électromagnétique, le champ gravifique, et les lignes d'univers des éléments de substance (matière et électricité). Cette variation se compose de trois termes ; les variations dues aux deux champs et aux lignes d'univers considérées chacune pour soi. Les deux premières sont nulles par suite des lois des champs électromagnétiques et gravifiques; la troisième doit donc être nulle aussi et l'on obtient bien ainsi les équations de la mécanique comme une conséquence des deux groupes de lois qu'on vient de mentionner. Récapitulons les calculs précédents : nous pouvons réaliser les opérations de la façon suivante : des équations de la gravitation, on tire les équations (26), ou :

$$\mu U_i + u_i M = -\left\{ \frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \mathfrak{S}^{\alpha\beta} \right\} \tag{28}$$

$\mathfrak{S}_i^k$ étant la densité tensorielle de l'énergie du champ électromagnétique ;

$$U_i = \frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} u^\alpha u^\beta$$

et M, le premier membre de l'équation de continuité de la matière,

$$M = \frac{\partial(\mu u^i)}{\partial x_i}.$$

Par suite des équations de Maxwell, le second membre de (28) est égal à :

$$\mathfrak{p}_i = - F_{ik}\, \mathfrak{s}^k \qquad (\mathfrak{s}^i = \varrho u^i)$$

en multipliant (28) par u^i et sommant d'après l'indice i, on trouve :

$$M = 0.$$

Nous sommes ainsi parvenus à la forme habituelle de l'équation de continuité de la matière et des équations mécaniques.

Maintenant que nous avons une idée synthétique des relations que soutiennent les lois d'Einstein avec les autres lois physiques, il nous reste encore, pour terminer ce que nous nous sommes proposés de faire, à calculer explicitement les expressions $[\mathfrak{G}]_i^k$ [6]. La variation virtuelle des composantes de la connexion affine :

$$\delta \Gamma_{ik}^r = \delta \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} = \gamma_{ik}^r$$

est un tenseur, comme nous le savons (page 98). Utilisons en un point un système de coordonnées géodésique, on tire de la formule [§ 17, (60)] qui donne R_{ik} :

$$\delta R_{ik} = \frac{\partial \gamma_{ik}^r}{\partial x_r} - \frac{\partial \gamma_{ir}^r}{\partial x_k}$$

d'où

$$g^{ik} \delta R_{ik} = g^{ik} \frac{\partial \gamma_{ik}^r}{\partial x_r} - g^{ir} \frac{\partial \gamma_{ik}^k}{\partial x_r}.$$

posons :

$$g^{ik} \gamma_{ik}^r - g^{ir} \gamma_{ik}^k = w^r,$$

on voit que :

$$g^{ik} \delta R_{ik} = \frac{\partial w^r}{\partial x_r}$$

et alors avec un système quelconque de coordonnées :

$$\delta R = R_{ik} \delta g^{ik} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} w^r)}{\partial x_r}$$

En intégrant, la divergence du second terme tombe ; d'après la définition, l'on doit avoir :

$$\delta \int R \sqrt{g} dx = \int [\mathfrak{G}]^{ik} \delta g_{ik} dx = - \int [\mathfrak{G}]_{ik} \delta g^{ik} dx$$

et comme les R_{ik} sont symétriques, on trouve :

$$[\mathfrak{G}]_{ik} = \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} g_{ik} R - R_{ik}\right) = \frac{1}{2} g_{ik} \mathfrak{R} - \mathfrak{R}_{ik}$$

$$[\mathfrak{G}]_i^k = \frac{1}{2} \delta_i^k \mathfrak{R} - \mathfrak{R}_i^k$$

Les équations de la gravitation sont alors :

$$\boxed{\mathfrak{R}_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k \mathfrak{R} = \mathfrak{T}_i^k} \tag{29}$$

Nous avons utilisé dans ce qui précède l'unité rationnelle de masse (de la même manière que nous avons employé dans les équations électromagnétiques l'unité rationnelle de charge). Si l'on emploie le système *CGS*, on doit multiplier le second membre par une constante universelle $8\pi\varkappa$. Le signe de $\varkappa$ pourrait encore être douteux, car jusqu'ici, rien ne le précise. C'est dans le prochain paragraphe que nous verrons que $\varkappa$ est positif puisque les masses s'attirent. On doit remarquer que les *équations rigoureuses de la gravitation ne sont pas linéaires;* elles sont bien linéaires par rapport aux dérivées des $\left\{ {ik \atop r} \right\}$ mais pas par rapport aux $\left\{ {ik \atop r} \right\}$ eux-mêmes. Contractons les équations (29); c'est-à-dire faisons $k = i$ et sommons, on trouve :

$$-\mathfrak{R} = \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_i^i;$$

c'est pourquoi on peut écrire les équations (29) sous la forme

$$\mathfrak{R}_i^k = \mathfrak{T}_i^k - \frac{1}{2}\,\delta_i^k \mathfrak{T}. \tag{30}$$

Dans le premier mémoire où Einstein, sans passer par le principe de Hamilton, a donné les équations de la gravitation, le terme $-\frac{1}{2}\delta_i^k\mathfrak{T}$ manquait; il reconnut après que sa présence est exigée par les théorèmes de conservation. [7]) Les relations avec le principe de Hamilton que nous avons développées dans ce paragraphe n'ont été exposées que dans des travaux ultérieurs dus à H. A. Lorentz, Hilbert, Einstein, Klein et l'Auteur lui-même [8]).

Pour la suite, il est bon de connaître $\mathfrak{G}$. Pour transformer :

$$\int R\sqrt{g}\,dx \qquad \text{en} \qquad 2\int \mathfrak{G}\,dx$$

(à une divergence près), nous avons à calculer :

$$\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial}{\partial x_r}\left\{ {ik \atop r} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\sqrt{g}g^{ik}\left\{ {ik \atop r} \right\}\right) - \left\{ {ik \atop r} \right\}\frac{\partial}{\partial x_r}(\sqrt{g}g^{ik}),$$

$$\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{ {ir \atop r} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{g}g^{ik}\left\{ {ir \atop r} \right\}\right) - \left\{ {ir \atop r} \right\}\frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{g}g^{ik})\,;$$

et par suite :

$$2\mathfrak{G} = \left\{ {is \atop s} \right\}\frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{g}g^{ik}) - \left\{ {ik \atop r} \right\}\frac{\partial}{\partial x_r}(\sqrt{g}g^{ik}) + \left(\left\{ {ik \atop r} \right\}\left\{ {rs \atop s} \right\} - \left\{ {ir \atop s} \right\}\left\{ {ks \atop r} \right\}\right)\sqrt{g}g^{ik}$$

d'après (57′) et (57″), du § 17, les deux premiers termes donnent au facteur $\sqrt{g}$ près :

$$= -\left\{ {is \atop s} \right\}\left\{ {kr \atop i} \right\}g^{kr} + 2\left\{ {ik \atop r} \right\}\left\{ {rs \atop i} \right\}g^{sk} - \left\{ {ik \atop r} \right\}\left\{ {rs \atop s} \right\}g^{ik}$$

$$= \left(-\left\{ {rs \atop s} \right\}\left\{ {ik \atop r} \right\} + 2\left\{ {sk \atop r} \right\}\left\{ {ri \atop s} \right\} - \left\{ {ik \atop r} \right\}\left\{ {rs \atop s} \right\}\right)g^{ik}$$

$$= 2g^{ik}\left(\left\{ {ir \atop s} \right\}\left\{ {ks \atop r} \right\} - \left\{ {ik \atop r} \right\}\left\{ {rs \atop s} \right\}\right);$$

par suite :

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\mathfrak{G} = \frac{1}{2}g^{ik}\left(\left\{ {ir \atop s} \right\}\left\{ {ks \atop r} \right\} - \left\{ {ik \atop r} \right\}\left\{ {rs \atop s} \right\}\right) \tag{31}$$

Nous avons ainsi développé les bases de la théorie einsteinienne de la gravitation. La question se pose maintenant de savoir si l'expérience confirme cette théorie purement spéculative, et avant tout si les trajectoires des planètes sont aussi bien (ou mieux peut-être) représentées que par la loi newtonienne de l'attraction. Les §§ 29-32 sont relatifs à la solution des équations de la gravitation; l'élargissement de la théorie générale ne sera poursuivi que dans les paragraphes 33 et suivants.

§ 29. — **Champ statique de gravitation. Relation avec l'expérience.**

Pour l'étude du système solaire, nous allons spécialiser tout d'abord les lois d'Einstein au cas du champ statique de gravitation [9]) Celui-ci est caractérisé par le fait que l'univers, avec un système approprié de coordonnées, se décompose en espace et en temps, de telle manière que la forme métrique ait l'aspect :

$$ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2, \quad d\sigma^2 = \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik} dx_i dx_k$$

avec

$$g_{00} = f^2; \quad g_{0i} = g_{i0} = 0; \quad g_{ik} = -\gamma_{ik} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$$

et que les coefficients f et γ_{ik} ne dépendent que des coordonnées spatiales x_1, x_2, x_3 et pas du tout du temps $t = x_0$. $d\sigma^2$ est une forme différentielle quadratique définie positive. La mesure du temps t est complètement déterminée (après le choix d'une unité de mesure) par ces conditions; les coordonnées spatiales x_1, x_2, x_3 ne sont déterminées qu'à une transformation quelconque continue près. Dans le cas statique, la métrique de l'univers donne en plus de la détermination métrique de l'espace, un champ scalaire f dans l'espace.

Désignons les symboles de Christoffel attachés à la forme ternaire $d\sigma^2$ par $\left\{ {ik \atop l} \right\}^*$; lorsque les i, k, l ne prennent que les valeurs 1, 2, 3; on tire des définitions précédentes :

$$\left\{ {ik \atop l} \right\} = \left\{ {ik \atop l} \right\}^*;$$

$$\left\{ {ik \atop 0} \right\} = 0, \qquad \left\{ {0i \atop k} \right\} = 0, \qquad \left\{ {00 \atop 0} \right\} = 0;$$

$$\left\{ {i0 \atop 0} \right\} = \frac{f_i}{f}, \qquad \left\{ {00 \atop i} \right\} = ff^i.$$

où l'on a posé $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$; ces grandeurs sont les composantes covariantes du gradient de f; $f^i = \gamma^{ik} f_k$ en sont les composantes contravariantes; $\sqrt{\gamma} f^i = \mathfrak{f}^i$ sont les composantes d'une densité vectorielle contravariante dans l'espace. Pour le déterminant γ des γ_{ik}, on a $\sqrt{g} = f\sqrt{\gamma}$. Posons ensuite :

$$f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\}^* f_r = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\}^* \frac{\partial f}{\partial x_r}$$

(l'indice de sommation r ne prenant ici que les valeurs 1, 2, 3);

et $$\Delta f = \frac{\partial \mathfrak{f}^i}{\partial x_i} \qquad (\Delta f = \sqrt{\gamma}.f^i_i),$$

on trouve alors entre les composantes R_{ik} et P_{ik} des tenseurs de courbure, attachés respectivement aux formes ds^2 et $d\sigma^2$, les relations :

$$R_{ik} = \mathsf{P}_{ik} - \frac{f_{ik}}{f}$$

$$R_{io} = R_{oi} = 0$$

$$R_{oo} = f \cdot \frac{\Delta f}{\sqrt{\gamma}} \qquad (\mathfrak{R}^o_o = \Delta f)$$

Pour de la matière à l'intérieur de laquelle aucune tension n'existe, la seule composante de la densité tensorielle d'énergie est $\mathfrak{T}^o_o = \mu$; on a par suite aussi $\mathfrak{T} = \mu$. La matière au repos crée un champ de gravitation statique. La seule équation (30) qui nous intéresse est celle dont les indices sont $\binom{o}{o}$, elle donne :

(32) $$\Delta f = \frac{1}{2}\mu$$

ou avec le facteur de proportionnalité $8\pi\varkappa$:

(32') $$\Delta f = 4\pi\varkappa\mu.$$

Si nous admettons que ds^2 ne s'écarte, moyennant un choix approprié des coordonnées x_1, x_2, x_3, qu'infiniment peu de la forme :

(33) $$c^2dt^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

— ce qui exige que les masses agissantes soient infiniment faibles — on obtient en posant :

(34) $$f = c + \frac{\Phi}{c}$$

Φ étant infiniment petit :

(10) $$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2} = 4\pi\varkappa c\mu$$

et μ est la densité de masse en unités ordinaires divisée par c.

En fait, cette hypothèse s'accorde avec toutes nos expériences géométriques à l'intérieur du système solaire, d'une façon fort approchée. Les masses des planètes sont très faibles vis-à-vis de la masse du soleil qui engendre le champ de gravitation; cette dernière est au repos; on peut alors considérer les planètes comme des « corps d'épreuve » qui nous renseignent sur la valeur du champ là où ils sont placés; ils ne modifient pas en effet de façon sensible ce champ. Le mouvement d'un tel corps d'épreuve, (abstraction faite précisément des très faibles perturbations négligeables) est donné par une ligne géodésique d'univers dans ce champ statique. Celle-ci satisfait à la relation :

$$\delta \int ds = 0$$

les extrémités étant fixes. Dans le champ en question, on a :

$$\delta \int \sqrt{f^2 - v^2}\, dt = 0,$$

où l'on a fait :

$$v^2 = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \sum_{ik=1}^{3} \gamma_{ik} \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{dt}$$

cette grandeur n'est pas autre chose que le carré de la vitesse. Nous avons à trouver, tout à fait comme dans la mécanique classique, les équations du mouvement en partant d'une fonction de Lagrange qui est ici $L = \sqrt{f^2 - v^2}$. Faisons la même approximation que tout à l'heure et supposons que pour un champ de gravitation infiniment faible, les vitesses sont aussi infiniment petites (vis-à-vis de c), on a:

$$\sqrt{f^2 - v^2} = \sqrt{c^2 + 2\Phi - v^2} = c + \frac{1}{c}\left(\Phi - \frac{1}{2}v^2\right)$$

et puisque

$$v^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 = \sum_i \dot{x}_i^2$$

il vient, toutes réductions faites :

$$\delta \int \left\{\frac{1}{2}\sum_i \dot{x}_i^2 - \Phi\right\} dt = 0$$

c'est-à-dire que la planète de masse m se meut d'après les lois de la mécanique classique, si l'on admet qu'une force due au potentiel $m\Phi$ agit sur elle. *Nous avons ainsi atteint en première approximation les résultats de Newton :* Φ est le potentiel newtonien, il satisfait à l'équation de Poisson (10), $k = c^2\varkappa$ est la constante de la gravitation. Pour $8\pi\varkappa$, on trouve d'après la valeur mumérique de k la valeur :

$$8\pi\varkappa = \frac{8\pi k}{c^2} = 1{,}87 \cdot 10^{-27} \text{cm} \cdot \text{gr}^{-1}$$

L'écart de la forme métrique avec la forme « euclidienne » (33) est donc assez considérable pour que les géodésiques d'univers que les planètes décrivent, se distinguent nettement des translations rectilignes uniformes, — quoique la géométrie de l'espace au repos, dont $d\sigma^2$ donne les propriétés s'écarte d'une quantité tout à fait inappréciable de la géométrie euclidienne (la somme des angles d'un triangle géodésique est donc très peu différente de 180°). Avant tout, le rayon de l'orbite de la terre vaut environ 8 minutes-lumière; la durée de sa révolution est au contraire une année.

Nous allons compléter maintenant la théorie exacte du mouvement d'un point matériel et des rayons lumineux dans le champ statique de gravitation [10]). Les lignes géodésiques sont déterminées d'après le § 17, par les 2 principes de variation :

$$\delta\int\sqrt{Q}ds = 0 \quad \text{ou} \quad \delta\int Qds = 0, \qquad Q = g_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} \tag{35}$$

Le second suppose que le paramètre s ait été choisi d'une manière convenable. Pour les lignes géodésiques de longueur nulle, qui sont telles que $Q = 0$, le second seul entre en considération. La variation est exécutée de telle manière que les extrémités de la ligne d'univers soient invariées. Soumettons seulement $x_0 = t$ à une variation, on a dans le champ statique :

$$\delta\int Qds = \left[2f^2\frac{dx_0}{ds}\delta x_0\right] - 2\int\frac{d}{ds}\left(f^2\frac{dx_0}{ds}\right)\delta x_0 ds \tag{36}$$

donc :

$$f^2\frac{dx_0}{ds} = \text{const.}$$

Attachons-nous au cas du rayon lumineux; nous pouvons par un choix approprié de l'unité de mesure du paramètre s — car on sait que s n'est fixé par le principe de variation qu'à l'unité de mesure près — faire ensuite que la constante précédemment trouvée soit l'unité. Effectuons une variation d'espèce plus générale; la trajectoire spatiale de la lumière sera variée sauf à ses extrémités, mais nous laissons tomber la condition $\delta x_0 = 0$ pour ces extrémités, alors :

$$\delta\int Qds = 2[\delta t] = 2\delta\int dt.$$

Si en particulier le chemin varié est décrit avec la vitesse de la lumière, on a aussi pour la ligne d'univers qui lui est relative :

$$Q = 0, \qquad d\sigma = fdt$$

et l'on trouve alors :

$$\delta\int dt = \delta\int\frac{d\sigma}{f} = 0. \tag{37}$$

Cette équation donne la trajectoire spatiale du signal lumineux; elle n'exprime pas autre chose que le *principe de Fermat du chemin optique minimum*. Dans la dernière formule, le temps est éliminé complètement; elle est valable pour n'importe quelle portion d'un rayon lumineux dont on se donne les extrémités.

Prenons dans un champ de gravitation n'importe quelles coordonnées $x_1x_2x_3$ (pour nous servir d'une image commode, faisons correspondre au point x_1, x_2, x_3, dans leur système cartésien le point dont les 3 cordonnées sont dans ce système x_1, x_2, x_3). Considérons dans ce système, les images de 2 étoiles S_1 et S_2 et d'un observateur au repos O, l'angle que forment les 2 droites OS_1 et OS_2 n'est pas égal à l'angle sous lequel l'observateur voit les étoiles; mais on doit relier O à S_1 et à S_2 par les lignes de plus court chemin optique données par (37) et l'angle que ces 2 courbes forment en O doit être transformé par une construction auxiliaire euclidienne, pour obtenir l'angle vrai basé sur la forme du $d\sigma$ [§ 11 (15]. Les angles ainsi calculés qui nous donnent donc les positions relatives des étoiles sont bien ceux que l'on mesure sur le cercle divisé de l'instrument d'observation : O, S_1 et S_2 restant immobiles dans l'espace, imaginons que de grosses masses passent dans le voisinage des rayons lumineux, alors l'angle S_1OS_2 peut varier; ce qui revient à dire que, dans le sens où nous venons de préciser les choses, les *rayons lumineux sont courbés par le champ de gravitation*. Cependant les rayons ne sont pas des lignes géodésiques dans l'espace de métrique $d\sigma^2$, comme nous nous l'étions figuré pour fixer nos idées dans les considérations du § 12, ils ne rendent pas $\int d\sigma$ extrémale, mais bien plutôt l'intégrale :

$$\int \frac{d\sigma}{f}.$$

La courbure des rayons lumineux se manifestera en particulier dans le champ de gravitation solaire. Prenons un système de coordonnées x_1, x_2, x_3, pour lequel on ait à l'infini :

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2;$$

alors un rayon lumineux passant au voisinage du soleil subit une déviation de $1'',74$ (voir § 31) c'est-à-dire que les étoiles fixes dans le voisinage immédiat du soleil doivent paraître avoir subi ce déplacement, si on compare leurs positions actuelles à celles qu'elles ont lorsque le soleil occupe une autre position dans le ciel. On ne peut faire de telles observations que pendant les éclipses totales de soleil Les étoiles de la région occupée alors par le soleil doivent être suffisamment nombreuses et brillantes, elles doivent être assez près du soleil pour que l'effet ait une valeur appréciable, mais pourtant elles ne doivent pas être noyées dans les protubérances solaires. On se rend compte aisément que l'observation n'est pas facile. L'éclipse totale du 29 mai 1919, était particulièrement favorable à de telles mesures. 2 expéditions anglaises furent envoyées dans la zone de totalité, pour faire précisément des observations à ce sujet; l'une alla à Sobral (Brésil), l'autre à l'Ile du Prince, dans le Golfe de Guinée. Le phénomène fut bien de l'ordre de grandeur indiqué; les résultats pour Sobral donnèrent un déplacement de $1''98 \pm 0''12$ et ceux de l'Ile du Prince $1''61 \pm 0''30$ [11]. Une autre conséquence optique, due à un champ statique de gravitation, et qui peut être soumise à l'observation dans les cas les plus favorables, se tire de la relation

$$ds = f dt$$

entre le *temps* cosmique t et le temps propre s.

Deux atomes de sodium au repos sont identiques l'un à l'autre; le phénomène qui donne naissance à la raie D, doit avoir la même fréquence mesurée *en temps propre* pour chacun des deux atomes; plus clairement, dans une seconde du temps propre de chacun d'eux il se produit le même nombre de vibrations dans chaque atome. Si on mesure les fréquences au moyen du temps cosmique, on obtiendra deux nombres différents ν_1 et ν_2 pour chacun d'eux, si f a les valeurs différentes f_1 et f_2 aux deux points où se trouvent les sources, c'est-à-dire que, en une seconde de temps cosmique, le premier effectue ν_1 vibrations, le second ν_2. Or, soit Δs la durée d'une vibration exprimée en temps propre, l'on a : $f_1 \Delta t_1 = f_2 \Delta t_2 = \Delta s$, c'est-à-dire que en Δt_1 unités (secondes) de temps cosmique en Na_1, il s'est effectué une vibration, en une seconde de t_1, il s'en effectue $\frac{1}{\Delta t_1}$; c'est précisément la fréquence ν_1, on a donc :

$$\frac{f_1}{\nu_1} = \frac{f_2}{\nu_2}$$

Les ondes lumineuses émises par un atome, ont naturellement la même fréquence partout, mesurée en temps *cosmique* (car dans un champ métrique statique, les équations de Maxwell ont une solution qui dépend du temps par l'expression $e^{\nu i t}$, ν étant une constante.) Si donc on compare la lumière de la raie [11]) d'une source sodique située dans une étoile de masse considérable, à celle qu'émet une source sodique terrestre, on devra trouver que la ligne stellaire est du côté du rouge par rapport à la ligne terrestre; en effet f est plus petit dans le voisinage d'une grosse masse que dans le voisinage d'une petite, la fréquence de la lumière stellaire est donc plus faible que la fréquence de la lumière terrestre. Le rapport des fréquences, d'après la formule approximative (34), à une distance r d'une masse m, a la valeur : $1 - \frac{\varkappa m_0}{r}$. A la surface du soleil une ligne de 4000 Å subit un déplacement de 0.008 Å. Cette valeur est à la limite de ce qui est observable; il s'y ajoute l'effet Doppler, la largeur des raies terrestres, certains déplacements périodiques des lignes solaires, dont les causes sont en partie inconnues. En ayant égard à tout cela, les observations semblent confirmer [12]) l'existence d'un déplacement de l'ordre prévu; mais la question expérimentale reste ouverte*.

Il y a une troisième possibilité de contrôle expérimental. D'après Einstein, la théorie newtonienne du mouvement des planètes n'est qu'une première approximation; il s'agit de savoir si les différences des résultats de la théorie einsteinienne et de ceux qui sont dus à Newton sont appréciables. Evidemment les chances d'obtenir une différence perceptible sont d'autant plus grandes que la planète, à laquelle on applique la théorie est plus voisine du soleil. En effet, Einstein et Schwarzschild [13]) ont obtenu, le premier par une première approximation, le deuxième rigoureusement, le champ de gravitation à symétrie sphérique engendré par une masse en repos et les trajectoires qu'y décrit une masse infiniment petite ; appliqués

* Les mesures récentes effectuées par M. Pérot d'une part, et par MM. Buisson et Fabry d'autre part, confirment ces conclusions (voir la préface de M. Langevin au Livre de M. Eddington : Espace, temps, gravitation; Paris 1921.) (N. D. T.)

à Mercure, les résultats obtenus donnent pour sa trajectoire *une ellipse qui subit une lente rotation de 43″ par siècle dans le sens du mouvement.* On connaissait déjà depuis Le Verrier la valeur de la perturbation séculaire du périhélie de Mercure, mais la théorie n'en rendait pas compte ; on essaya les hypothèses les plus variées pour expliquer cette perturbation, mais aucune ne fut prouvée [14]). Nous reviendrons dans le prochain paragraphe sur la solution de Schwarzschild. Nous voyons donc que si le bouleversement amené par les idées d'Einstein sur le temps et l'espace est radical, les écarts effectifs qu'elles présentent avec les idées habituelles sont extrêmement faibles. Parmi ces écarts, ceux qui sont mesurables ont été confirmés par l'observation. Cependant la théorie trouve sans doute son appui moins dans l'expérience que dans sa contexture logique qui la place fort au-dessus de la mécanique classique puisqu'elle résout, d'un coup et d'une manière fort satisfaisante pour l'esprit, la double énigme de la gravitation et de la relativité du mouvement. La méthode qui nous a fourni les trajectoires lumineuses au moyen d'un principe de variation sur les quatre éléments spatiaux, peut nous donner le mouvement d'un point matériel dans un champ statique de gravitation. Si s est le temps propre, c'est que :

$$(38) \qquad Q = 1, \quad \text{et} \quad f^2 \frac{dt}{ds} = \text{const.} = \frac{1}{E}$$

Appliquons maintenant le premier principe de variation (35) et généralisons-le comme plus haut, en faisant varier spatialement la courbe, les extrémités étant fixes et en faisant varier $x_0 = t$ d'une façon quelconque. Il vient :

$$\delta \int \sqrt{Q} ds = \left[\frac{1}{E}\, \delta t \right] = \delta \int \frac{dt}{E};$$

pour éliminer le temps propre, divisons la première des équations (38), membre à membre par la deuxième élevée au carré :

$$(40) \qquad \frac{1}{f^4} \left\{ f^2 - \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 \right\} = E^2, \qquad \text{donc : } d\sigma = f^2 \sqrt{U}\, dt\,,$$

où

$$U = \frac{1}{f^2} - E^2.$$

(40) donne la loi de la vitesse suivant laquelle le point matériel décrit sa trajectoire. Si nous effectuons la variation de telle manière que la trajectoire variée soit décrite avec la même loi de vitesse et la même constante E, (39) nous donne :

$$\delta \int \frac{dt}{E} = \delta \int \sqrt{f^2 - \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2}\, dt = \delta \int E f^2 dt, \qquad \text{c'est-à-dire :}$$

$$\delta \int f^2 U dt = 0$$

ou enfin en exprimant dt au moyen de l'élément d'arc $d\sigma$

$$\delta \int \sqrt{U} d\sigma = 0$$

Quand la trajectoire est connue, la loi du mouvement sur sa trajectoire est alors donnée par

$$dt = \frac{d\sigma}{f^2\sqrt{U}};$$

pour $E = 0$, on retrouve les lois du rayon lumineux.

§ 30. — **Ondes de gravitation.**

Einstein [15]) est parvenu à intégrer les équations de la gravitation moyennant l'hypothèse que le champ énergétique $\mathfrak{T}_i^k$ est infiniment faible. Les g_{ik} sont très peu différents, pour un système de coordonnées approprié, de constantes $\mathring{g}_{ik}$; soient γ_{ik} les petits excès de g_{ik} sur $\mathring{g}_{ik}$. Nous considérons alors l'univers comme un univers euclidien avec la forme fondamentale :

$$\mathring{g}_{ik}dx_i dx_k \tag{41}$$

et les γ_{ik} comme les composantes d'un champ de tenseurs symétriques du deuxième ordre *dans* cet univers. Les opérations qui suivent sont relatives à la forme (41) ; nous sommes donc de nouveau pour un instant dans le domaine de la relativité restreinte. Le système de coordonnées peut être aussi choisi de manière à être normal, c'est-à-dire tel que :

$$\mathring{g}_{00} = 1, \qquad \mathring{g}_{11} = \mathring{g}_{22} = \mathring{g}_{33} = -1.$$
$$\mathring{g}_{ik} = 0 \qquad\qquad (i \neq k)$$

x_0 est le temps, x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées spatiales; la vitesse de la lumière est choisie pour unité. Posons :

$$\psi_i^k = \gamma_i^k - \gamma\delta_i^k \qquad (\gamma = \tfrac{1}{2}\gamma_i^i).$$

Nous prétendons tout d'abord que nous ne sortons pas de la généralité en supposant :

$$\frac{\partial\psi_i^k}{\partial x_k} = 0. \tag{42}$$

Car, si cela n'était pas, nous n'aurions qu'à modifier infiniment peu le système de coordonnées, jusqu'à ce que (42) ait lieu. En effet, les nouvelles coordonnées $\bar{x}_i = x_i + \xi^i(x_0, x_1, x_2, x_3)$, contiennent des fonctions ξ^i infiniment petites de l'ordre de γ. Nous avons aussi de nouveaux g_{ik}, et l'on a :

$$g_{ik}(x) - \bar{g}_{ik}(x) = g_{ir}\frac{\partial\xi^r}{\partial x_k} + g_{kr}\frac{\partial\xi^r}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\xi^r \qquad \text{[voir (20')]}$$

et par suite

$$\gamma_{ik}(x) - \bar{\gamma}_{ik}(x) = \frac{\partial\xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}, \qquad \gamma(x) - \bar{\gamma}(x) = \frac{\partial\xi^i}{\partial x_i} = \Xi,$$

et il vient :

$$\frac{\partial\gamma_i^k}{\partial x_k} - \frac{\partial\bar{\gamma}_i^k}{\partial x_k} = \square\xi^i + \frac{\partial\Xi}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial x_i} - \frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial x_i} = \frac{\partial\Xi}{\partial x_i},$$

∇ étant un opérateur qui, sur une fonction quelconque f, donne :

$$\nabla f = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overset{=}{g}^{ik}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\right).$$

La condition désirée est réalisée avec le nouveau système de coordonnées si l'on détermine les ξ^i par l'équation

$$\nabla \xi_i = \frac{\partial \psi_i^k}{\partial x_k}$$

qu'on intègre par les potentiels retardés (chap. III, page 143). Donc le système de coordonnées est déterminé jusqu'ici non pas à un infiniment petit du premier ordre près, mais bien à un infiniment petit du deuxième ordre près (bien entendu à une transformation de Lorentz près aussi); il est remarquable qu'une telle normalisation invariante soit possible.

Calculons les R_{ik}. Puisque les $\left\{ {ik \atop r} \right\}$ sont infiniment petits, on obtient en se bornant au premier ordre

$$R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_r}\left\{ {ik \atop r} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{ {ir \atop r} \right\},$$

$$\left[{ik \atop r} \right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_r}\right),$$

$$\left\{ {ik \atop r} \right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_i^r}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_k^r}{\partial x_i} - \overset{=}{g}^{rs}\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_s}\right).$$

Si, maintenant, on se sert de l'équation (42), qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial \gamma_i^k}{\partial x_k} = \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}$$

l'on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left\{ {ik \atop r} \right\} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{2}\nabla \gamma_{ik}.$$

Il vient de même

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{ {ir \atop r} \right\} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_k}$$

donc :

$$R_{ik} = -\frac{1}{2}\nabla \gamma_{ik}$$

et par suite :

$$\mathrm{R} = -\nabla\gamma.$$

Les équations de la gravitation :

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = -\frac{1}{2}\nabla \psi_i^k$$

deviennent :

(43) $$\frac{1}{2}\nabla \psi_i^k = -T_i^k.$$

On les intègre par les potentiels retardés (voir p. 143)

$$\psi_i^k = -\int \frac{T_i^k\,(t-r)}{2\pi r} dV$$

T_i^k étant pris sous le signe $\int$ à l'instant $t-r$.

Chaque variation de la distribution de matière engendre une action gravifique qui se propage dans l'espace avec la vitesse de la lumière. Des masses oscillantes engendrent des ondes gravifiques.

En fait, il n'existe pas dans la matière des oscillations de masses assez fortes pour que les ondes qui en résultent soient observables.

Les équations (43) correspondent complètement aux équations électromagnétiques

$$\nabla\varphi^i = s^i,$$

et comme les potentiels φ^i du champ électrique doivent satisfaire à $\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial x^i} = 0$, parce que le courant s^i satisfait à :

$$\frac{\partial s^i}{\partial x_i} = 0 \cdot$$

les conditions supplémentaires (42) devraient bien être introduites puisque le tenseur T_i^k satisfait à :

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x_k} = 0 \cdot$$

Dans un espace vide de matière il peut exister des ondes gravifiques ; on les obtient comme en optique :

$$\psi_i^k = a_i^k \cdot e^{(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \sqrt{-1})}$$

Les a_i^k et les α_i sont des constantes; on doit avoir : $\alpha_i\alpha^i = 0$. $\alpha_0 = \nu$ est la fréquence de l'oscillation, les équations $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = const.$ représentent les plans de phases constantes. Les équations différentielles $\nabla\psi_i^k = 0$ sont identiquement satisfaites ; les conditions (42) exigent alors :

$$a_i^k\,\alpha_k = 0 \tag{44}$$

Si l'axe x_1 est la direction de la propagation des ondes, l'on a :

$$\alpha_2 = \alpha_3 = 0 \qquad -\alpha_1 = \alpha_2 = \nu$$

et les équations (44) donnent :

$$a_i^0 = a_i^1 \qquad \text{ou} \qquad a_{0i} = -a_{1i} \tag{45}$$

Il suffit d'après cela de donner la partie spatiale du tenseur symétrique a :

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

puisque les a avec un indice zéro se déterminent par (45).

Il se décompose, d'après la direction de propagation en trois parties :

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

D'après cela l'oscillation du tenseur se laisse décomposer en trois parties indépendantes l'une de l'autre : une onde longitudo-longitudinale, une onde transverso-longitudinale et une onde transverso-transversale.

De l'intégration approximative des équations de la gravitation, H. Thirring a tiré deux applications intéressantes [16]). Il a recherché l'influence de la rotation d'une grande et lourde sphère creuse sur le mouvement des points matériels dans le voisinage du centre de la sphère et il a trouvé une action mécanique de même espèce que la force centrifuge. Il existe encore à côté de celle-ci une autre action qui tend à diriger le point matériel dans le plan équatorial de la rotation, suivant la même loi avec laquelle la force centrifuge tend à l'écarter de l'axe. Ensuite, il a montré avec J. Lense l'influence de la rotation du corps central sur les planètes ou les satellites qui gravitent autour de lui; pour le cinquième satellite de Jupiter la perturbation est d'une grandeur telle qu'une comparaison avec l'observation est peut-être possible.

Nous allons procéder maintenant à l'intégration rigoureuse des équations du champ statique ; jusqu'ici dans les paragraphes 29 et 30, nous nous sommes bornés à une intégration approchée en ne prenant que les termes linéaires ; essayons de poursuivre.

§ 31. — **Solution rigoureuse du problème du corps unique** [17]).

Pour un champ de gravitation statique on a :

$$ds^2 = f^2 dx_0^2 - d\sigma^2,$$

où $d\sigma^2$est une forme quadratique définie positive des trois variables d'espace x_1, x_2, x_3; la vitesse de la lumière f ne dépend que de x_1, x_2, x_3. Le champ est à symétrie sphérique, si pour un choix approprié des coordonnées, f et $d\sigma^2$ sont invariants pour toute transformation orthogonale linéaire effectuée sur ces variables.

Pour que cela soit, f doit être une fonction de

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

et $d\sigma^2$ doit avoir la forme :

$$\lambda(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + l(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2 \tag{46}$$

λ et l étant des fonctions de r seulement. Sans limiter la généralité, on peut encore choisir les coordonnées de manière que l'une des fonctions de r soit l'unité ; il suffit de multiplier x_1, x_2, x_3 par un facteur convenable l fonction de r seulement. Supposons que cela soit fait et que $\lambda = 1$. D'après les notations du paragraphe 29, nous avons :

$$\gamma_{ik} = -g_{ik} = \delta_{ik} + l.x_i x_k, \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3).$$

Nous déterminerons d'abord ce champ, de façon qu'il satisfasse aux équations homogènes de la gravitation, c'est-à-dire aux équations où $\mathfrak{T}_i^k = 0$.

Ces équations sont synthétisées dans la formule :

$$\delta \int \mathfrak{G}\, dx = 0.$$

Le champ de gravitation que l'on obtient alors *est celui qui est dû à des masses en repos réparties autour d'un centre suivant la symétrie sphérique.*

En désignant par des accents les dérivées par rapport à r, on trouve :

$$\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_\alpha} = l' \frac{x_\alpha}{r} x_i x_k + l(\delta_i^\alpha x_k + \delta_k^\alpha x_i)$$

et par suite :

$$-\begin{bmatrix} ik \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{x_\alpha}{r} l' x_i x_k + l \delta_i^k x_\alpha, \qquad (i,\ k,\ \alpha = 1,\ 2,\ 3)$$

or, de :

$$x_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} \gamma_{\alpha\beta} x^\beta,$$

on tire :

$$x^\alpha = \frac{1}{h^2} x_\alpha, \qquad h^2 = 1 + l r^2,$$

donc par analogie

$$\begin{Bmatrix} ik \\ \alpha \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{x_\alpha}{r} \frac{l' x_i x_k + 2 l r \delta_i^k}{h^2}.$$

Il suffit d'effectuer les calculs pour $x_1 = r$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Alors pour ce point, les symboles de Christoffel deviennent :

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{h'}{h}, \qquad \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 33 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{lr}{h^2},$$

les symboles qui ne portent que les indices 1, 2, 3, sont nuls. Ensuite, d'après le paragraphe 29 :

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 01 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{f'}{f}\ ; \qquad \begin{Bmatrix} 00 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{ff'}{h^2},$$

les autres sont nuls. Les termes de la diagonale principale du déterminant formé avec les g_{ik}, $(i = k)$ sont :

$$f^2, \quad -h^2, \quad -1, \quad -1,$$

les autres sont nuls (c'est toujours bien entendu pour $x_1 = r$, $x_2 = x_3 = 0$) ; pour les g_{ik} quand $i = k$, on trouve :

$$\frac{1}{f^2}, \quad -\frac{1}{h^2} \quad -1, \quad -1,$$

pour $i \neq k$, $g^{ik} = 0$. La définition (31) de $\mathfrak{G}$ donne :

$$-\frac{2}{\sqrt{g}}\,\mathfrak{G} =$$

$$\begin{array}{r|l}
\dfrac{1}{f^2} & \begin{Bmatrix}00\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}10\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right)-2\begin{Bmatrix}01\\0\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}00\\1\end{Bmatrix}\\
-\dfrac{1}{h^2} & \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}10\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right)-\begin{Bmatrix}10\\0\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}10\\0\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\\
-1 & \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}10\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right)\\
-1 & \begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}10\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right).
\end{array}$$

Les termes de la première et de la deuxième ligne donnent :

$$\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}10\\0\end{Bmatrix}\right)\left(\frac{1}{f^2}\begin{Bmatrix}00\\1\end{Bmatrix}-\frac{1}{h^2}\begin{Bmatrix}10\\0\end{Bmatrix}\right).$$

Or le deuxième facteur de ce produit est nul. D'autre part : [§ 17 (57)]

$$\sum_{i=0}^{3}\begin{Bmatrix}1i\\i\end{Bmatrix}=\frac{\Delta'}{\Delta}\qquad(\Delta=\sqrt{g}=hf)$$

ce qui permet d'écrire de suite pour la somme des troisième et quatrième lignes :

$$-\frac{2lr}{h^2}\cdot\frac{\Delta'}{\Delta}.$$

Effectuons l'intégrale de $\mathfrak{G}$ sur un domaine d'univers dont la trace spatiale est formée d'une couche sphérique limitée par deux sphères concentriques et dont la trace temporelle est un intervalle fixe de l'axe des x_0, l'élément dx vaut :

$$dx = dx_0\cdot d\Omega\cdot r^2dr\qquad(d\Omega = \text{angle solide})$$

et l'équation à résoudre — qu'on peut tout d'abord écrire :

$$\partial\int\mathfrak{G}r^2dr = 0,$$

devient

$$\partial\int w\Delta' dr = 0.$$

Si l'on pose :

$$\frac{lr^3}{h^2}=\frac{lr^3}{1+lr^2}=\left(1-\frac{1}{h^2}\right)r = w.$$

Dans notre nouvelle intégrale, nous pouvons considérer Δ et w comme des fonctions qu'on a le droit de varier indépendamment l'une de l'autre.

En variant w, il vient :

$$\Delta' = 0\qquad\qquad \Delta = \text{const.}$$

et par un choix approprié de l'unité de temps, on peut faire :

$$\Delta = hf = 1.$$

Une intégration par parties nous donne ensuite :

$$\int w\Delta' dr = [w\Delta] - \int \Delta w' dr;$$

varions Δ, alors

$$w' = o, \qquad w = const = 2m;$$

par suite, de la définition de w et de $\Delta = 1$ on tire :

$$\boxed{f^2 = 1 - \frac{2m}{r}, \qquad h^2 = \frac{1}{f^2}}$$

Nous sommes ainsi arrivés au but. L'unité de temps est ici telle que la vitesse de la lumière à l'infini est égale à 1. A une distance r grande vis-à-vis de m, nous pouvons employer les valeurs du potentiel newtonien pourvu que nous considérions la masse m_0, telle que $m = \varkappa m_0$, comme la masse créatrice du champ. Nous appelons *m le rayon de gravitation* de la matière causant la perturbation du champ. Puisque $4\pi m$ est le flux de la densité vectorielle spatiale $\mathfrak{f}^i$ à travers une sphère quelconque enveloppant les masses, (32') nous montre que pour la matière sans cohésion, on a :

$$m_0 = \int \mu dx_1\, dx_2\, dx_3$$

ce qui donne m. Or f^2 ne peut être négatif, c'est donc que pour la région de l'espace libre de matière, le système de coordonnées employé doit y donner partout $r > 2m$. Nous reprendrons ce point à propos de la sphère fluide pour laquelle nous déterminerons le champ de gravitation intérieur. Nous pouvons appliquer la solution obtenue au champ solaire en négligeant les actions des planètes et des étoiles fixes. Le rayon de gravitation pour la masse solaire est 1,47 km., pour la terre, il n'est que de 5 mm.

Le mouvement d'une planète (dont nous considérons la masse comme infiniment petite par rapport à la masse solaire) est représenté par une géodésique d'univers, dont les équations sont :

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = o.$$

Celle qui est relatif à l'indice $i = o$, donne dans le champ statique, comme nous l'avons vu, l'intégrale de l'énergie :

$$f^2 \frac{dx_0}{ds} = const.,$$

or puisque :

$$\left(f \frac{dx_0}{ds}\right)^2 = 1 + \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2:$$

$$f^2 \left[1 + \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2\right] = const.$$

Les équations où $i = 1, 2, 3$ donnent pour un champ à symétrie sphérique :

$$\frac{d^2x_1}{ds^2} : \frac{d^2x_2}{ds^2} : \frac{d^2x_3}{ds^2} = x_1 : x_2 : x_3$$

ainsi qu'il appert des formules qui donnent $\left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ i \end{matrix} \right\}$.

Comme d'ordinaire, on en tire les intégrales des aires

$$\ldots, \qquad x_1 \frac{dx_2}{ds} - x_2 \frac{dx_1}{ds} = \text{const.}$$

où il faut remarquer que ce n'est pas le temps cosmique qui est la variable de dérivation, mais bien plutôt le temps propre s de la planète. Ce théorème des aires nous prouve que le mouvement est plan; supposons qu'il s'effectue dans le plan $x_3 = o$ et posons alors :

$$x_1 = r \cos \varphi \qquad x_2 = r \sin \varphi.$$

L'intégrale des aires s'écrit alors :

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = const. = b. \tag{47}$$

Or :

$$dx_1^2 + dx_2^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2, \qquad x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 = r\,dr$$
$$d\sigma^2 = (dr^2 + r^2 d\varphi^2) + l(rdr)^2 = h^2 dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

et le théorème de l'énergie nous permet d'écrire :

$$f^2 \left\{ 1 + h^2 \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right\} = const.$$

Puisque $fh = 1$ on trouve :

$$-\frac{2m}{r} + \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r(r - 2m) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = -E = const. \tag{48}$$

Cette équation, outre les dérivations par rapport à s ne présente qu'une seule différence avec l'intégrale des forces vives de la théorie newtonienne, elle contient le facteur $r - 2m$ au lieu que l'ancienne ne présente à cette place que le facteur r. On procède ensuite tout comme dans la mécanique classique, on élimine $\frac{d\varphi}{ds}$:

$$\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = \frac{2m}{r} - E - \frac{b^2(r - 2m)}{r^3},$$

ou, en posant $\rho = \frac{1}{r}$,

$$\left(\frac{d\rho}{\rho^2 ds} \right)^2 = 2m\rho - E - b^2\rho^2(1 - 2m\rho)$$

Si nous voulons la trajectoire, il faut éliminer ds, on trouve :

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2m}{b^2}\rho - \frac{E}{b^2} - \rho^2 + 2m\rho^3.$$

Dans la théorie newtonienne $2m\rho^3$ n'existe pas. Le polynôme du

3° degré en ρ qui se trouve dans le second membre a 3 racines positives $\rho_0 > \rho_1 > _2$. Ce polynôme s'écrit donc :

$$2m\,(\rho_0 - \rho)\,(\rho_1 - \rho)\,(\rho - \rho_2)$$

et ρ varie entre ρ_1 et ρ_2 la racine ρ_0 est très grande vis-à-vis de ρ_1 et ρ_2 pour les planètes de notre système. Posons encore :

$$\frac{1}{\rho_1} = a(1-e), \qquad \frac{1}{\rho_2} = a(1+e)$$

et appelons a le demi grand axe et e *l'excentricité*; on en tire :

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{2}{a(1-e^2)}.$$

D'autre part, le coefficient de ρ^2 permet d'écrire :

$$\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 = \frac{1}{2m}$$

φ s'exprime au moyen d'une intégrale elliptique de 1^re^ espèce, donc ρ est une fonction elliptique de φ. Le mouvement est précisément du même type que le mouvement du pendule sphérique. Pour obtenir une formule d'approximation, faisons la même substitution que dans la théorie newtonienne :

$$\rho - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\cos\theta,$$

alors :

$$\varphi = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2m\left(\rho_0 - \frac{\rho_1+\rho_2}{2} - \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\cos\theta\right)}}. \tag{49}$$

Le périhélie est caractérisé par les valeurs $\theta = 0,\ 2\pi,\ \ldots$, l'accroissement de l'azimuth φ pour deux passages successifs au périhélie est donné par cette intégrale prise de 0 à 2π. Avec une précision suffisante, cet accroissement est :

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{2m\left(\rho_0 - \frac{\rho_1+\rho_2}{2}\right)}}$$

Mais

$$\rho_0 - \frac{\rho_1+\rho_2}{2} = (\rho_0 + \rho_1 + \rho_2) - \frac{3}{2}(\rho_1+\rho_2) = \frac{1}{2m} - \frac{3m}{a(1-e^2)}.$$

Par suite, l'acroissement cherché est :

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{6m}{a(1-e^2)}}} \sim 2\pi\left\{1 + \frac{3m}{a(1-e^2)}\right\};$$

donc le déplacement du périhélie dans le sens du mouvement est de

$$\frac{6\pi m}{a(1-e^2)}$$

m est le rayon de gravitation du soleil, on peut l'obtenir, au moyen de la 3e loi de Képler, en introduisant la période T de la révolution de la planète :

$$m = \frac{4\pi^2 a^3}{c^2 T^2}.$$

Seul Mercure donne pour ce déplacement une valeur appréciable [18]).

La formule (49) donne aussi la déviation α d'un rayon lumineux. Si $\theta_0 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ est la valeur de θ pour laquelle $\rho = 0$ la valeur de l'intégrale (49) prise entre $-\theta_0$ et $+\theta_0$ donne précisément $\pi + \alpha$. Maintenant on a :

$$2m(\rho_0 - \rho)(\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2) = \frac{1}{b^2} - \rho^2 + 2m\rho^3.$$

ρ varie entre o et ρ_1 ; $\frac{1}{\rho_0} = r_1$ est la distance jusqu'à laquelle le rayon s'approche du centre O de la masse; b est la distance de O aux deux asymptotes du rayon lumineux (car pour une courbe quelconque cette distance est la valeur de $\frac{d\varphi}{d\rho}$ pour $\rho = 0$). On sait que :

$$2m(\rho_0 + \rho_1 + \rho_2) = 1$$

et si $\frac{m}{b}$ est une petite fraction, une première approximation nous donne :

$$m\rho_1 = -m\rho_2 = \frac{m}{b}, \quad \frac{m}{2}(\rho_1 + \rho_2) = \left(\frac{m}{b}\right)^2, \quad \varepsilon = \frac{m}{b}$$

$$\alpha = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \left(1 + \frac{m}{b}\cos\theta\right) d\theta - \pi = 2\varepsilon + \frac{2m}{b},$$

donc :

$$\boxed{\alpha = \frac{4m}{b}}$$

Si l'on calcule la trajectoire lumineuse d'après la théorie newtonienne, en ayant égard au fait que la lumière est pesante, c'est-à-dire, si l'on détermine la trajectoire d'un point matériel dont la vitesse est à l'infini celle de la lumière c, on trouve en posant :

$$\frac{1}{b^2} + \frac{2m}{b^2}\rho - \rho^2 = (\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2)$$

avec $\rho_1 > 0$, $\rho_2 < 0$ et :

$$\cos\theta_0 = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}$$

$$\pi + \alpha = 2\theta_0, \qquad \alpha \backsim \frac{2m}{b}.$$

La théorie newtonienne de l'attraction donne donc une déviation moitié moindre que celle que donne celle d'Einstein. Les observations de Sobral et de l'Ile du Prince tranchent en faveur de celle d'Einstein [19]).

§ 32. — Solutions rigoureuses de quelques problèmes relatifs au champ statique de gravitation.

Dans un système de coordonnées cartésien x_1, x_2, x_3, l'équation d'une surface de révolution, autour de l'axe des x_3, peut s'écrire :

$$x_3 = F(r), \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,;$$

le carré de la distance de deux points voisins situés sur cette surface est :

$$d\sigma^2 = (dx_1^2 + dx_2^2) + (F'(r))^2 dr^2 = (dx_1^2 + dx_2^2) + \left(\frac{F'(r)}{r}\right)^2 (x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2 .$$

Dans un champ gravifique à symétrie sphérique, le carré de la distance entre deux points voisins, situés sur un plan passant par le centre de symétrie ($x_3 = 0$ par exemple.) est :

$$d\sigma^2 = (dx_1^2 + dx_2^2) + l(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2,$$

où

$$l = \frac{h^2 - 1}{r^2} = \frac{2m}{r^2(r - 2m)}.$$

Les deux formules coïncident, si l'on pose :

$$F'(r) = \sqrt{\frac{2m}{r - 2m}}, \qquad F(r) = \sqrt{8m(r - 2m)}.$$

La géométrie dans ce plan est donc la même que celle qui est valable sur un paraboloïde de révolution

$$z = \sqrt{8m(r - 2m)}$$

tracé dans l'espace euclidien [20]).

Une *sphère chargée* engendre, à côté du champ de gravitation, un champ électrostatique à symétrie sphérique aussi; puisque les deux champs exercent l'un sur l'autre une influence, ils peuvent être déterminés simultanément [21]).

Employons les unités *CGS* (et non plus les unités de Heaviside). Dans un domaine libre de masses et de charges, l'état d'équilibre s'exprime en écrivant que l'intégrale

$$\int \left\{ w\Delta' - \varkappa \frac{\Phi'^2 r^2}{\Delta} \right\} dr$$

étendue à un tel domaine a une variation nulle. Les notations sont les mêmes que plus haut, Φ est le potentiel électrostatique. Pour représenter l'action du champ électrique, nous avons pris comme dans la théorie classique le carré de la valeur du champ. La variation de w donne comme auparavant :

$$\Delta' = 0, \qquad \Delta = const. = c,$$

la variation de Φ donne :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2\Phi'}{\Delta}\right) = 0 \qquad \text{donc} \qquad \Phi = \frac{e_0}{r}.$$

Pour le champ électrostatique, on trouve donc la même formule que si la gravitation n'existait pas, la constante e_0 est la charge qui engendre le champ. En variant Δ, on trouve enfin :

$$w' - \varkappa \frac{\Phi'^2 r^2}{\Delta^2} = 0$$

d'où :

$$w = 2m - \frac{\varkappa}{c^2}\frac{e_0^2}{r}, \qquad \frac{1}{h^2} = \left(\frac{f}{c}\right)^2 = 1 - \frac{2\varkappa m_0}{r} + \frac{\varkappa}{c^2}\frac{e_0^2}{r^2}.$$

m_0 est la masse qui engendre le champ de gravitation. Mais il entre dans f^2, comme on le voit, outre le terme dépendant de la masse, un terme complémentaire dépendant de la charge et croissant lorsque r décroît. $m = \varkappa m_0$ étant le rayon de gravitation de la masse m_0, $\frac{\sqrt{\varkappa}}{c} e_0 = e$ est dit le rayon de gravitation de la charge e_0. *Notre formule donne une idée de la constitution de l'électron essentiellement différente de l'idée que nous en avons.* L'électron, en effet, est supposé avoir un rayon fini afin que l'énergie totale du champ ne soit pas infinie, et par suite que l'électron n'ait pas lui-même une masse inerte infinie. Si la masse inerte de l'électron ne provient que de l'énergie de son champ, son rayon est de l'ordre de grandeur de :

$$a = \frac{e_0^2}{m_0 c^2}$$

Mais dans notre formule, il entre une masse m_0 (qui engendre le champ de gravitation) tout à fait indépendante des grandeurs précitées; au point de vue de la gravitation, notre formule est valable même pour de très petites valeurs de r, comment concilier ces choses-là ? D'après Faraday, la charge qui se trouve à l'intérieur d'une surface fermée Ω n'est pas autre chose que le flux du champ électrique à travers Ω. Nous verrons aussi dans les prochains paragraphes que la masse, aussi bien *l'inerte* et la *pesante* que celle *qui engendre le champ*, doit être représentée par un flux. Pour la solution statique que nous venons de rencontrer, le flux du champ électrique à travers n'importe quelle sphère centrée au centre de symétrie du champ, vaut $4\pi e_0$. Au contraire, la masse intérieure à une sphère de rayon r, dépend de r, elle vaut :

$$m_0 - \frac{1}{2}\frac{e_0^2}{c^2 r}.$$

La masse est, d'après cela, répandue d'une façon continue. La densité de masse coïncide naturellement avec la densité d'énergie, mais à cause de la singularité au centre, la masse est finie malgré que l'énergie soit infinie. Le niveau de base, à partir duquel la masse doit être calculée, n'est pas zéro, mais $-\infty$; la masse m_0 de l'électron ne peut donc pas être déterminée à partir de ce niveau, mais elle représente le niveau à distance infiniment grande.

a est donc le rayon de la sphère qui entoure la masse zéro. Contrairement à l'idée de Mie, la *matière apparaît comme une singularité véritable dans le champ.* Dans la théorie générale de la relativité, où nous supposons que l'espace n'est pas nécessairement euclidien, il se pourrait très bien que les limites de l'espace, outre les frontières infinies, fussent en partie situées à distance finie; par exemple, l'espace serait un espace euclidien à connexion multiple, les points singuliers étant exclus, grâce à des surfaces fermées les entourant; ces frontières seraient encore des frontières à distance infinie (comp. § 34); *les points singuliers, en effet, n'appartiennent pas au champ ;* * mais on pourrait néanmoins en faire le tour.

Nous pouvons donc justement opposer à la théorie de Mie, la représentation que nous venons d'esquisser, d'après laquelle il n'existe aucune dépendance entre la masse de l'électron et l'énergie potentielle du champ qu'il engendre; la question, que nous avions réservée plus haut, des forces de cohésion de l'électron n'a plus de sens. Cependant, il n'est pas satisfaisant d'admettre un champ privé de charge, alors que la masse (= l'énergie) s'étend dans tout le champ avec une densité continue; nous devrons plus tard reprendre ce point.

Du reste, on a :

$$\frac{a}{e} = \frac{e}{m} \qquad \text{ou} \qquad e = \sqrt{am}\,.$$

Pour l'électron le quotient $\frac{e}{m}$ est de l'ordre de 10^{20}, $\frac{a}{m}$ est de l'ordre de 10^{40}; c'est dire que la répulsion électrique que 2 électrons (très distants) exercent l'un sur l'autre est 10^{40} plus grande que leur attraction gravifique. Or, la thèse de Mie admet précisément que tous les nombres relatifs à la grandeur des électrons sont des constantes mathématiques déduites des lois de la nature; le nombre trouvé qui est d'un ordre de grandeur tout autre que l'unité rend cette thèse fragile; d'autre part il paraît difficile de croire qu'il soit attaché à la structure de l'univers des nombres purs dont la valeur numérique est fortuite.

Le champ de gravitation qui règne à *l'intérieur d'un corps massif* n'est déterminé d'après la théorie d'Einstein, que si la constitution dynamique du corps est complètement connue; les équations de la gravitation contiennent les équations mécaniques, ou pour le cas statique, les conditions d'équilibre. Les rapports dynamiques les plus simples que nous puissions imaginer, sont ceux

* Dès l'instant où, dans la théorie de la relativité, nous abandonnons la géométrie euclidienne, nous ne sommes pas forcés d'accorder à l'espace une connexion euclidienne; il se pourrait qu'il eût des frontières autres que les éléments à l'infini; en particulier, il est possible qu'il se comporte comme un espace euclidien duquel on aurait enlevé quelques points.

que présentent des corps formés d'un *fluide incompressible*. Le tenseur d'énergie d'un fluide, sur lequel n'agit aucune force de volume, est donné par les équations du § 25

$$T_{ik} = \mu^* u_i u_k - p g_{ik},$$

où les u_i sont les composantes covariantes de la direction d'univers de la matière; le scalaire p est la pression et μ^* s'obtient à partir de la densité constante μ_0 par l'équation $\mu^* = \mu_0 + p$.

Soit :

$$\mu^* u_i = v_i$$

et considérons les v_i comme indépendants. Posons :

$$L = \frac{1}{\sqrt{g}} \mathfrak{L} = \mu_0 - \sqrt{v_i v^i}.$$

varions les g^{ik} et laissons les v_i inchangés; on trouve bien :

$$\delta\mathfrak{L} = -\frac{1}{2} \mathfrak{T}_{ik} \delta g^{ik}.$$

Par suite, les équations de la gravitation sont synthétisées dans la formule suivante :

$$\delta \int (\mathfrak{L} + \mathfrak{G}) \, dx = 0$$

Il faut bien s'attendre à ce que ce principe, quand on y considère les v_i comme les grandeurs indépendantes à varier, ne nous donne *pas* les lois exactes de l'hydrodynamique (lesquelles seraient alors $\frac{v^i}{\sqrt{v_i v^i}} = 0$ dont on ne peut rien tirer). Celles-ci sont déjà contenues dans les équations de la gravitation, ce sont les équations de conservation.

Dans le cas statique, on a : $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ et toutes les grandeurs sont indépendantes du temps, nous posons $v_0 = v$ et nous appliquons la variation δ avec la même signification que celle que nous lui avons donnée au § 28, c'est-à-dire que δ est une déformation infinitésimale, mais ici nous la restreignons à l'espace. On a :

$$\delta\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{ik} \delta g_{ik} - h\delta v, \qquad \left(h = \frac{\Delta}{f}\right)$$

et δv n'est pas autre chose que la différence des valeurs de v aux 2 points de l'espace, qui passent de l'un à l'autre par la déformation. En reprenant la conclusion par laquelle nous obtînmes au § 28, les théorèmes de conservation, nous avons conformément à ces lois :

$$\int \mathfrak{T}^{ik} \delta g_{ik} . dx = 0$$

et l'équation

$$\int \delta\mathfrak{L} \cdot dx = 0$$

qui exprime l'invariance de l'intégrale d'univers de $\mathfrak{L}$ nous montre que $\delta v = 0$. Cela signifie que *v possède une valeur constante dans une portion connexe d'espace remplie d'un fluide incompressible*. Le théorème de l'énergie est identiquement satisfait, et la loi d'impulsion s'exprime de la manière la plus simple.

Une masse fluide unique en équilibre possèdera une symétrie sphérique quant à la répartition des masses et à l'aspect du champ qu'elle engendre. Considérons donc ce cas, on aura pour le ds^2, 3 fonctions λ, l, f, à déterminer tout comme au début du § 31. Nous posons d'abord $\lambda = 1$; ce qui fera que l'équation qu'on obtient en variant λ nous échappera. D'ailleurs cette équation est remplacée complètement par celle que nous avons déduite de l'invariance de l'action pour une translation spatiale dans la direction radiale, c'est-à-dire l'équation d'impulsion $v = const.$ Le problème variationnel à résoudre s'exprime alors :

$$\delta\int \left\{ \Delta' w + r^2\mu_0\Delta - r^2 vh \right\} dr = 0\,;$$

et l'on y doit varier Δ et h. On sait que

$$w = \left(1 - \frac{1}{h^2}\right) r.$$

Varions Δ, il vient :

$$w' - \mu_0 r^2 = 0, \qquad w = \frac{\mu_0}{3} r^3,$$

donc :

$$\boxed{\frac{1}{h^2} = 1 - \frac{\mu_0}{3} r^2}. \tag{50}$$

Si la sphère fluide a le rayon $r = r_0$, on voit que l'on doit avoir :

$$r_0 < a = \frac{\sqrt{3}}{\mu_0}.$$

Comme nous avons ici les unités naturelles, on trouve en unités CGS pour une sphère remplie d'eau, que cette limite supérieure est :

$$a = \sqrt{\frac{3}{8\pi\varkappa}} = 4.10^8 \text{ km} = 22 \text{ minutes lumière.}$$

Hors de la sphère, les formules précédentes sont valables, en particulier on y a :

$$\frac{1}{h^2} = 1 - \frac{2m}{r}, \qquad \Delta = 1.$$

Les conditions aux limites exigent que h et f soient continues à la surface de la sphère et que la pression p s'y annule. La continuité de h donne le rayon de gravitation m de la sphère fluide :

$$m = \frac{\mu_0 r_0^3}{6}.$$

L'inégalité qui existe entre r_0 et a, nous montre que le rayon r doit être supérieur à $2m$. Avant d'étudier ce qui se passe de l'infini à la sphère singulière $r = 2m$, étudions un peu l'intérieur du fluide. Reprenons les unités ordinaires :

μ_0 doit être remplacé par $8\pi\varkappa\mu_0$, et $m = \varkappa m_0$, si m_0 représente la masse gravitante; alors on trouve :

$$m_0 = \mu_0 \frac{4\pi r_0^3}{3}.$$

Puisque

$$v = \mu^* f = \frac{\mu^* \Delta}{h}$$

est une constante et que sur la surface de la sphère, elle est égale à $\frac{\mu_0}{h_0}$, où h_0 s'obtient par la formule (50), on a donc dans tout l'intérieur du liquide :

(51) $$v = (\mu_0 + p) f = \frac{\mu_0}{h_0}.$$

La variation de h donne :

$$-\frac{2\Delta'}{h^3} + rv = 0.$$

Or, de l'égalité (50), on tire :

$$\frac{h'}{h^3} = \frac{\mu_0}{3} r$$

par suite :

$$\Delta = \frac{3v}{2\mu_0} h + const.$$

Au moyen de la valeur de r et de la condition à la surface $\Delta = 1$, on obtient :

$$\Delta = \frac{3h - h_0}{2h_0}, \qquad \boxed{f = \frac{3h - h_0}{2hh_0}}.$$

Enfin, (51) donne encore

$$\boxed{p = \mu_0 \cdot \frac{h_0 - h}{3h - h_0}}.$$

Par suite, la forme métrique fondamentale de l'espace est :

(52) $$d\sigma^2 = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - r^2}$$

la vitesse de la lumière f et le champ de pression p sont déterminés. Introduisons une coordonnée d'espace x_4 qui est bien entendu surabondante :

$$x_4 = \sqrt{a^2 - r^2}$$

on a

(53) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2$$

par suite :

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + x_4 dx_4 = 0,$$

et (52) se transforme en :

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Dans tout l'intérieur de la sphère fluide, la géométrie sphérique de l'espace est valable; c'est la géométrie intrinsèque de la « sphère » (53) *dans l'espace euclidien à 4 dimensions, les coordonnées x_i étant cartésiennes.* Le fluide couvre une calotte de cette sphère; la pression dans le fluide est une fonction homographique de la « cote » $z = x_4$ sur la sphère :

$$\frac{p}{\mu_0} = \frac{z - z_0}{3z_0 - z}.$$

De plus, la pression p ne peut pas devenir infinie dans la région $z = const$, il faut que $3z_0 > a$, et la limite supérieure trouvée pour a doit être diminuée, elle est en définitive $\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{3}{\mu_0}}$.

Ces résultats sur la sphère fluide ont été obtenus d'abord par Schwarzchild [22]).

Après avoir résolu les problèmes du champ de gravitation statique, l'Auteur a réussi à résoudre le problème plus général du champ *statique à symétrie cylindrique* [23]). Nous ne donnerons ici que les résultats les plus simples de ces recherches. Il s'agit tout d'abord de masses *non chargées* et nous étudions le champ de gravitation dans un espace libre de matière. En introduisant des *coordonnées cylindriques* r, θ, z, on met le ds^2 sous la forme :

$$ds^2 = f^2dt^2 - d\sigma^2\,; \qquad d\sigma^2 = h(dr^2 + dz^2) + \frac{r^2d\theta^2}{f^2};$$

θ est un angle déterminé à un multiple de 2π près. Sur l'axe de symétrie, $r = o$, h et f sont des fonctions de r et de z. Nous représentons l'espace véritable sur un espace euclidien, dans lequel r, θ, z sont des coordonnées cylindriques. Le système canonique de coordonnées est défini univoquement à une translation $z = z' + \text{const.}$ près. Si $h = f = 1$, ds^2 coïncide avec la forme fondamentale de l'espace euclidien. Le problème peut être résolu de la même manière que le problème analogue en dynamique newtonienne si la répartition des masses est connue dans le système canonique. On peut transporter les masses dans l'espace image de manière que la région représentée contienne la même masse que la région à représenter; si alors ψ est le potentiel newtonien de cette répartition de masses dans l'espace-image, on trouve que :

$$f = e^{\frac{\psi}{c^2}} \tag{54}$$

Enfin la fonction inconnue h se détermine par la résolution d'une équation de Poisson (dans le plan du méridien $\theta = o$). Si l'on a à faire à *un corps chargé*, on peut encore trouver le système canonique de coordonnées. Si l'on admet que les masses sont négligeables vis-à-vis des charges, c'est-à-dire si l'on admet que le rayon de gravitation des masses pour une région quelconque de l'espace, est beaucoup plus petit que le rayon de gravitation des charges électriques qui y sont situées, et si φ est le potentiel électrostatique de la théorie classique pour les masses réparties dans l'espace image, on obtient pour f et pour le potentiel électrique Φ dans l'espace véritable les formules :

$$\Phi = \frac{c}{\sqrt{\varkappa}} \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{\varkappa}}{c}\varphi\right), \qquad f = \frac{1}{\cos\left(\frac{\sqrt{\varkappa}}{c}\varphi\right)}. \tag{54'}$$

L'étude du cas de la symétrie sphérique dans cette théorie plus générale ne se présente pas aussi simplement; elle exige une transformation des coordonnées spatiales, de laquelle nous ne dirons rien, si ce n'est qu'elle est passablement compliquée.

Comme les lois de l'électrodynamique de Mie, les *lois de la gravitation d'Einstein ne sont pas linéaires*. Mais l'observation ne permet pas de déceler ces termes non linéaires qui sont négligeables vis-à-vis des autres ; il est donc permis d'appliquer le *principe de superposition* aux forces de l'univers visible. Tout au plus, ce principe est-il en défaut à l'intérieur de l'atome, où d'ailleurs nous ne voyons pas grand chose encore. On sait que les équations différentielles non linéaires, en ce qui concerne les singularités, présentent des difficultés qui ne sont pas encore surmontées ; il semblerait par là que ces deux choses : les particularités des équations non linéaires et les phénomènes intra-atomiques devraient être en relation. Les équations (54) et (54') nous donnent un bon exemple de la manière dont se modifie le principe de superposition dans la théorie rigoureuse de la gravitation : les potentiels f et Φ dépendent dans un cas par la fonction exponentielle et dans l'autre par une fonction trigonométrique des grandeurs ψ et φ, qui satisfont, elles, au principe de superposition. Mais en même temps, ces formules nous montrent distinctement qu'il n'y a rien à espérer du rapprochement de la non-linéarité des équations avec les phénomènes intra-atomiques. Car les écarts entre φ et Φ ne deviennent appréciables que là où $\frac{\sqrt{\varkappa}}{c}\varphi$ est de l'ordre de grandeur de l'unité, et cela ne se présente à l'intérieur de l'atome que sur des sphères dont le rayon est de l'ordre du rayon de gravitation de la charge e_0, soit $e = \frac{\sqrt{\varkappa}}{c} e_0 \sim 10^{-33}$cm. Il est clair que les équations différentielles de la gravitation ne peuvent déterminer univoquement les solutions relatives au cas statique ; il est nécessaire de donner des conditions aux limites (à l'infini par exemple) ou des conditions de symétrie. Les solutions que nous avons trouvées sont de nature telle que la forme métrique fondamentale qu'on peut construire avec leur aide se présente à l'infini sous la forme :

$$dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2).$$

Une série de belles recherches sur les problèmes de statique a été effectuée par M. Levi-Civita [24]). Les géomètres italiens ont encore étudié à côté du cas « stationnaire », le cas où les g_{01}, g_{02}, g_{03} sont variables avec le temps [25]); un exemple d'un tel problème est donné par l'étude du champ engendré par un corps en rotation stationnaire.

§33. — **Energie de gravitation. Les théorèmes de conservation.**

Un *système isolé* balaie un « canal d'univers » dans le cours de son histoire ; nous admettons que, hors de ce canal, la densité de courant $\mathfrak{s}^i$ s'annule (si cela n'est pas exact, elle est si faible que les considérations suivantes sont encore valables). L'équation de continuité

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^i}{\partial x_i} = 0 \tag{55}$$

nous montre que le flux de la densité vectorielle $\mathfrak{s}^i$ possède la même valeur e à travers n'importe quelle « surface » tridimensionnelle située en travers du canal. Afin que e soit déterminé en signe nous prendrons comme sens de parcours sur le canal celui qui va du passé vers l'avenir. L'invariant e est la *charge* de notre système. Si le système de coordonnées est tellement choisi que chaque « plan » $x_0 = const.$, coupe le canal suivant un domaine fini, et que ces plans se succèdent, lorsque x_0 croît, du passé vers l'avenir, l'on pourra calculer e par la formule :

$$\int \mathfrak{s}^0 dx_1 dx_2 dx_3 = e,$$

où le domaine d'intégration est précisément l'une de ces hypersurfaces $x_0 = const.$ Cette intégrale $e = e(x_0)$ est d'après cela, indépendante du « temps » x_0, comme on s'en aperçoit d'ailleurs immédiatement au moyen de l'équation (55) par l'intégration suivant les coordonnées d'espace x_1, x_2, x_3.

Tout cela repose uniquement sur l'équation de continuité ; la représentation $\mathfrak{s}^i = \rho u^i$ de la théorie de Lorentz qui fait intervenir la notion d'une substance n'est pas du tout en question. Y a-t-il un *théorème de conservation pour l'énergie et l'impulsion ?* L'équation (26) paragraphe 28, ne permet pas de le reconnaître à cause du terme supplémentaire caractéristique pour la théorie de la gravitation. Mais il est possible *d'écrire ce terme supplémentaire sous la forme d'une divergence.* Partons d'un système de coordonnées déterminé et faisons subir au continuum universel une *translation*, c'est-à-dire une déformation où les composantes ξ^i sont constantes (comp. § 28). Pour n'importe quel domaine X, on a évidemment :

$$\delta' \int_X \mathfrak{G}\, dx = 0$$

(cela est vrai pour *chaque* fonction des g_{ik} et de leurs dérivées, la propriété d'invariance n'a rien à faire ici ; δ' désigne comme au paragraphe 28, la variation due à la translation). Et par suite :

$$(13) \qquad \int_X \frac{\partial(\mathfrak{G}\xi^k)}{\partial x_k} dx + \int_X \delta\mathfrak{G} dx = 0$$

Posons comme auparavant :

$$\delta\mathfrak{G} = \frac{1}{2}\mathfrak{G}^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\mathfrak{G}^{\alpha\beta,k}\,\delta g_{\alpha\beta,k}$$

alors une intégration par parties donne :

$$2\int_X \delta\mathfrak{G} dx = \int_X \frac{\partial(\mathfrak{G}^{\alpha\beta,k}\delta g_{\alpha\beta})}{\partial x_k} dx + \int_X [\mathfrak{G}]^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} dx.$$

Or, puisque les ξ^i sont constants :

$$\delta g_{\alpha\beta} = -\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\xi^i.$$

Introduisons les grandeurs :

$$\mathfrak{t}_i^k = \mathfrak{G}\delta_i^k - \frac{1}{2}\mathfrak{G}^{\alpha\beta,k}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}.$$

Nos équations s'écrivent alors :

$$\int_X \left\{\frac{\partial \mathfrak{t}_i^k}{\partial x_k} - \frac{1}{2}[\mathfrak{G}]^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{dx_i}\right\}\xi^i dx = 0.$$

Cela ayant lieu pour n'importe quel domaine X, et les ξ^i étant des constantes arbitraires, on doit avoir les quatre identités :

$$\frac{1}{2}[\mathfrak{G}]^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathfrak{t}_i^k}{\partial x_k}.$$

Or, d'après les équations de la gravitation le premier membre est :

$$-\frac{1}{2}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i},$$

et les équations mécaniques (26) se transforment en :

$$(36) \qquad \frac{\partial \mathfrak{U}_i^k}{\partial x_k} = 0, \qquad \mathfrak{U}_i^k = \mathfrak{T}_i^k + \mathfrak{t}_i^k.$$

Si nous considérons les $\mathfrak{t}_i^k$ qui ne dépendent que des potentiels et des composantes du champ de gravitation, comme les composantes de la densité d'énergie du champ de gravitation, nous obtenons pour l'énergie *totale* liée à *l'état physique* et à la *gravitation*, des équations où n'interviennent que des divergences [26]). Cependant cette convention n'a aucun sens physique car les nombres $\mathfrak{t}_i^k$ *ne sont pas symétriques, et ils ne peuvent pas être considérés comme les composantes d'une densité tensorielle*. En effet, par un choix approprié du système de coordonnées on peut faire en sorte que tous les $\mathfrak{t}_i^k$ s'annulent en un point ; il suffit de prendre pour cela un système géodésique au point considéré. D'autre part, dans un univers privé de champ de gravitation, c'est-à-dire « euclidien », si l'on utilise un système de coordonnées curvilignes, les $\mathfrak{t}_i^k$ peuvent être différents de zéro, c'est-à-dire qu'il y aurait de l'énergie de gravitation là où il n'est pas question d'en trouver. Les équations (56) n'ont donc pas de signification physique véritable, ce n'est donc que par leur *intégration pour un système isolé* qu'elles expriment un théorème de conservation, possédant nettement un caractère d'invariance [27]). Un système isolé, ainsi que son champ de gravitation balaie dans l'univers un canal, hors duquel nous supposons que les $\mathfrak{T}_i^k$ et le champ de gravitation sont nuls. Nous pouvons alors utiliser des coordonnées $x_0 = t$, x_1, x_2, x_3 de telle sorte que la forme métrique fondamentale y prenne l'aspect :

$$dt^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

Ces coordonnées sont déterminées hors du canal à une transformation de Lorentz près, les $\mathfrak{t}_i^k$ sont nuls. Nous supposons que chacun des plans, $t = const.$ n'a qu'une région finie en commun avec le canal. Intégrons les équations (56) relativement à x_1, x_2, x_3 sur un tel plan, on voit alors que les grandeurs :

$$J_i = \int \mathfrak{U}_i^0 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$$

sont indépendantes du temps : $\frac{dJ_i}{dt} = 0$. Nous appellerons J_0 *l'énergie* et J_1, J_2, J_3 les *composantes de l'impulsion du système*. Ces grandeurs ont une signification indépendante du système de coordonnées choisi. Nous affirmons tout d'abord qu'elles conservent leur valeur quand on change de système de coordonnées *à l'intérieur du canal*. Soient $\bar{x}_i$ les nouvelles coordonnées, coïncidant à l'extérieur du canal avec les anciennes. Soient deux hypersurfaces :

$$x_0 = const. = a, \text{ et } \bar{x}_0 = const. = \bar{a} \qquad (\bar{a} \neq a),$$

qui ne se coupent pas dans le canal (il suffit évidemment puisque le canal a une section finie de faire $\bar{a}$ suffisamment différent de a).

On peut alors construire un troisième système de coordonnées x^* qui dans le voisinage de la première « surface » coïncide avec les x_i, et dans le voisinage de la deuxième « surface », avec les $\bar{x}_i$; au dehors, il coïncide avec les deux. Si l'on exprime que les composantes de l'énergie J_i^* dans ce système prennent les mêmes valeurs en $x_0^* = a$ et $x_0^* = \bar{a}$, on trouve le résultat annoncé $\bar{J}_1 = J_1$.

Il faut encore étudier comment se comportent les J_1 dans un changement linéaire de coordonnées. On sait qu'un vecteur, dont les composantes sont constantes (indépendantes du lieu), jouit de la même propriété quand on effectue une transformation linéaire. Soit p^i un tel vecteur ; formons $\mathfrak{U}^k = \mathfrak{U}_i^k p^i$ on voit que :

$$\frac{\partial \mathfrak{U}^k}{\partial x_k} = 0$$

Par le même raisonnement que nous avons fait à propos du courant électrique, on remarque que :

$$\int \mathfrak{U}^{0} dx_1 dx_2 dx_3 = J_i p^i$$

est un invariant vis-à-vis de toutes les transformations linéaires.

Les J_i sont par suite les composantes d'un vecteur covariant constant à l'extérieur du canal : ce vecteur de l'énergie et de l'impulsion est univoquement déterminé par l'état physique du système. Sa direction donne *grosso modo* la direction dans laquelle circule le canal. L'invariant :

$$\sqrt{J_0^2 - J_1^2 - J_2^2 - J_3^2}$$

est la *masse* du système.

Dans le cas statique $J_1 = J_2 = J_3 = 0$ et J_0 est l'intégrale de

$$\mathfrak{R}_0^0 - \left(\frac{1}{2}\mathfrak{R} - \mathfrak{G}\right)$$

étendue à l'espace. D'après le paragraphe 29, et les considérations du paragraphe 28 (p. 210), on a :

$$\mathfrak{R}_0^0 = \frac{\partial \mathfrak{f}^i}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\mathfrak{R} - \mathfrak{G} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{g}\left(g^{\alpha\beta}\left\{ {\alpha\beta \atop i} \right\} - g^{i\alpha}\left\{ {\alpha\beta \atop \beta} \right\}\right);$$

c'est pourquoi dans les notations des paragraphes 29 et 31, la masse J_0 est égale au flux de la densité vectorielle spatiale (impropre)

$$\mathfrak{m}^i = \frac{1}{2} f\sqrt{\gamma}\left(\gamma^{\alpha\beta}\left\{ {\alpha\beta \atop i} \right\} - \gamma^{i\alpha}\left\{ {\alpha\beta \atop \beta} \right\}\right) \qquad (i\alpha\beta = 1, 2, 3)$$

qui avec des unités *CGS* doit être multipliée par $\frac{1}{8\pi\varkappa}$. Comme la solution du paragraphe 31 est valable à une grande distance du système, dans le champ pour lequel $\mathfrak{m}^i$ est un courant radial d'intensité

$$\frac{1 - f^2}{8\pi\varkappa r} = \frac{m_0}{4\pi r^2}$$

on voit que *l'énergie ou la masse inerte J_0 du système est égale précisément à cette masse m_0 qui détermine le champ de gravitation du système* [28]). La physique de la substance assigne au contraire à la masse la valeur de l'intégrale de $\frac{\mu}{f}$ prise dans l'espace, alors qu'en vérité pour que de la matière incohérente $J_0 = m_0 =$ l'intégrale spatiale de μ; c'est là un indice clair des erreurs qui résultent de la notion de substance.)

§ 34. — **Sur la topologie de l'univers, considéré dans son ensemble.**

La théorie de la relativité générale laisse de côté la question de savoir si les points de l'univers peuvent être représentés d'une manière continue, univoque et réciproque par les valeurs de quatre coordonnées x.

Elle suppose simplement que le *voisinage* de chaque point d'univers peut être représenté d'une manière continue, réciproque et univoque sur un domaine de l'espace numérique à quatre dimensions (on entend par « point de l'espace numérique quadridimensionnel » chaque quadruple de nombres) ; elle ne fait aucune hypothèse sur la configuration générale de l'univers. Quand on étudie d'ailleurs une surface au moyen d'une représentation paramétrique, celle-ci ne donne que les propriétés d'une partie de la surface; en général, la surface entière ne peut pas être représentée univoquement et continuement sur le plan euclidien ou sur un domaine plan par une seule représentation paramétrique. Les propriétés des surfaces qui se conservent dans toutes les correspondances bi-univoques et continues sont du ressort de l'*Analysis situs ;* la propriété de *fermeture* par exemple, est une de ces propriétés étudiées par l'Analysis situs. Toute surface qui s'obtient par la déformation continue d'une sphère ne diffère pas d'une sphère au point de vue de l'Analysis situs; mais par exemple, le tore en diffère. En effet, il y a sur le tore des lignes fermées qui ne décomposent pas la surface en plusieurs domaines; sur la sphère, de telles lignes n'existent pas, car toute ligne fermée y décompose la surface en deux ou plusieurs régions. Sur la sphère, nous avons développé la « géométrie sphérique » qui s'oppose à celle de Bolyai-Lobatschefsky (§ 10) et pour laquelle deux points diamétralement opposés sont identiques. La surface S qui engendre une telle géométrie (et qui n'est pas identique à la sphère à cause précisément de cette dernière propriété) est différente de la sphère aussi au point de vue de l'Analysis situs, elle en diffère parce qu'elle est une surface à un seul côté. Imaginons une petite roue tournant sur une surface, le sens de rotation ne changeant pas et supposons en plus qu'elle se déplace sur la surface, son centre décrivant une courbe fermée; nous devrions nous attendre à ce que la roue revienne au point de départ en tournant dans le même sens qu'à son départ. Si cela est, la surface est dite à deux *côtés ;* dans le cas contraire elle est dite à un *côté.* Moebius, semble-t-il, est le premier qui ait signalé l'existence de surfaces à un seul côté. La surface S dont nous avons parlé tout à l'heure est une surface à un seul côté, alors que la sphère a deux côtés. On le voit sans autre en remarquant que sur la sphère la petite roue doit décrire un grand cercle complet avant d'arriver à son point de départ, tandis que sur S la trajectoire se ferme alors que la roue n'a décrit qu'un *demi* grand cercle. D'une manière tout à fait analogue à la théorie des surfaces à deux dimensions, la théorie des multiplicités quadridimensionnelles permet de développer une Analysis situs où les propriétés sont extrêmement variées. Mais sur chaque multiplicité quadridimensionnelle, le voisinage d'un point se laisse représenter certainement d'une manière continue par un ensemble de quadruples de nombres, de telle manière qu'à des points différents de ce voisinage correspondent toujours deux quadruples de nombres différents. C'est dans ce sens très précis qu'on doit entendre que l'univers est une multiplicité à quatre dimensions.

De chaque point part le double cône du passé passif et de l'avenir actif. Alors que dans la théorie restreinte ces deux cônes sont nettement séparés par un domaine intermédiaire, il se pourrait très bien qu'ici ils empiétassent l'un sur l'autre ; il peut arriver donc que je constate maintenant un événement qui résulte en partie de mes faits et gestes à venir. Il n'est pas exclu non plus qu'une ligne d'univers repasse dans le voisinage immédiat d'un point où elle a déjà passé, malgré qu'elle eût toujours une direction temporelle ; par exemple la ligne d'univers de mon corps peut revenir dans le voisinage d'un point où elle a passé jadis. En fait, dans le domaine d'univers où nous vivons, la variabilité des g_{ik} n'est pas assez grande pour que de tels retours soient possibles ; cependant il y a un certain intérêt à examiner ces possibilités si l'on se pose le problème philosophique des rapports du temps cosmique et du temps phénoménal. Quelque paradoxales que les choses puissent être, il ne se présentera jamais de contradictions avec les faits qui forment notre expérience immédiate.

Au paragraphe 26, nous avons vu que les lois fondamentales de l'électrodynamique de Mie ont une forme compatible avec le principe de causalité : les dérivées par rapport au temps des grandeurs d'état s'expriment au moyen de ces grandeurs elles-mêmes et de leurs dérivées spatiales ; la gravitation n'intervenait pas alors. Mais ces faits restent exacts quand on fait intervenir la gravitation et qu'on complète la table des grandeurs d'état φ_i, F_{ik} par les g_{ik} et les $\left\{ {ik \atop r} \right\}$. A cause de l'invariance générale des lois de la nature on peut dire que les hypothèses que l'on fait sur les grandeurs d'état à un moment donné et *qui ont un caractère d'invariance* persistent à cause des lois naturelles ; mais il faut faire attention que cette affirmation ne se rapporte pas à l'univers global, mais seulement à un secteur représentable par le moyen de quatre coordonnées. Nous allons suivre Hilbert. [29]) Dans le voisinage du point d'univers O, introduisons quatre coordonnées x_i de telle sorte que, en O même, l'on ait :

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

Nous pouvons limiter dans l'espace à trois dimensions $x_0 = c$, un domaine autour de O dans lequel $-ds^2$ reste une forme définie positive. Par chaque point de R menons les lignes géodésiques d'univers orthogonales à cet espace et possédant une direction temporelle. Elles couvriront un certain voisinage de O, à quatre dimensions, et cela une seule fois. Nous prenons alors un nouveau système de coordonnées qui coïncide avec l'ancien dans R ; soit P le point de la ligne géodésique relative à $P_0(x_1, x_2, x_3)$ dans R ; si l'on considère P_0 comme correspondant à l'instant initial du temps propre, le segment P_0P de géodésique mesure le temps propre, nous ferons

$x_0 = P_0P$. A chaque point P du voisinage de O nous avons fait correspondre ainsi quatre coordonnées. Gauss avait déjà introduit un tel système pour étudier les surfaces. Puisque sur chacune des lignes géodésiques $ds^2 = dx_0^2$, c'est que, avec le système de coordonnées, on a identiquement en x_0, x_1, x_2, x_3 :

(58) $$g_{00} = 1.$$

Parce que les lignes géodésiques sont orthogonales à l'espace tridimensionnel $x_0 = 0$, on a pour $x_0 = 0$:

(59) $$g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0.$$

Or, les lignes où x_1, x_2, x_3 sont constants et où x_0 varie, sont des lignes géodésiques, c'est donc que l'on a : (voy. l'équation des lignes géodésiques)

$$\left\{ \begin{matrix} 00 \\ i \end{matrix} \right\} = 0, \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

par suite :

$$\begin{bmatrix} 00 \\ i \end{bmatrix} = 0$$

et eu égard à (58), on a identiquement :

$$\frac{\partial g_{0i}}{\partial x_0} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

mais, à cause de cela, ce n'est pas seulement pour $x_0 = 0$, mais identiquement en les quatre coordonnées que l'on a :

(60) $$g_{0i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Nous avons donc la figure suivante : une famille de lignes géodésiques à direction temporelle, recouvrant une seule fois et sans lacune, un certain domaine d'univers, et une famille d'espace à trois dimensions $x_0 = const.$ D'après (60), ces deux familles sont orthogonales entre elles, et les arcs découpés sur les géodésiques par deux espaces « parallèles » $x_0 = const.$, ont le même temps propre. Dans ce système de coordonnées, on a :

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_0} = -2 \left\{ \begin{matrix} ik \\ 0 \end{matrix} \right\} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

et les équations de la gravitation permettent d'exprimer les dérivées

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ \begin{matrix} ik \\ 0 \end{matrix} \right\} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

au moyen des φ_i et de leurs dérivées, mais aussi au moyen des g_{ik}, de leurs dérivées du premier et du second ordre relativement à x_1, x_2, x_3 et au moyen des $\left\{ \begin{matrix} ik \\ 0 \end{matrix} \right\}$ eux-mêmes.

En considérant les douze grandeurs :

$$g_{ik}, \qquad \left\{ \begin{matrix} ik \\ 0 \end{matrix} \right\} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

ainsi que les grandeurs électromagnétiques, comme les inconnues du problème, nous avons atteint le but visé, qui était d'avoir des équations différentielles donnant les dérivées par rapport au temps x_0 en fonction des autres grandeurs et de leurs dérivées spatiales.

Le cône du passé passif d'un point O′ (dont le temps $x_0 > o$), découpe dans R une certaine région R', laquelle limite avec la nappe du cône, un domaine fini d'univers G; si notre affirmation que les lignes géodésiques de longueurs nulles représentent les points limites atteints par une action quelconque, est rigoureusement vraie, alors il est vrai aussi que si l'on connaît dans R' les valeurs des douze grandeurs mentionnées et celles des φ_i et des F_{ik}, les valeurs de toutes ces quantités seront bien déterminées dans G. Mais jusqu'ici notre première affirmation n'a pas été démontrée. *Cependant on reconnaît dans chaque cas, que les équations différentielles du champ contiennent entièrement les lois de la nature*, et qu'il n'y a pas lieu de donner des conditions à l'infini de l'espace pour déterminer l'état du champ.

Einstein est parvenu par des considérations cosmologiques sur l'univers global [30]) au résultat suivant : l'univers est spatialement fermé. De même que dans la théorie newtonienne de la gravitation qui se développe à partir de l'équation de Poisson, l'on ajoute les conditions à l'infini (évanouissement du potentiel) pour déterminer sans ambiguité le champ, de même Einstein chercha à compléter sa théorie des équations de la gravitation par des conditions à l'infini de l'espace. Dans l'impossibilité où il était de formuler des conditions invariantes, qui soient en accord avec les faits astronomiques, le seul moyen qui s'offrit à lui de tourner la difficulté fut de supposer que l'univers est spatialement borné ; car sous cette hypothèse les conditions aux limites n'ont plus de raison d'être. Par suite de ce que nous venons de développer, je ne trouve, à cette manière de voir, aucune force démonstrative, puisque les équations différentielles expriment complètement les lois de la nature sans indétermination et sans recours à des conditions aux limites. Tout au plus les réflexions qui sont relatives à la question suivante possèdent-elles un certain poids : Comment se fait-il que le système des étoiles fixes dont les vitesses relatives sont faibles vis-à-vis de la vitesse de la lumière ne se soit pas dispersé dans l'infini depuis longtemps? Ce système a pour nous l'aspect qu'aurait pour un observateur de très petites dimensions, l'ensemble des molécules d'un gaz qui se trouve en équilibre. Dans ce gaz, en effet, les molécules considérées isolément ne sont pas au repos, mais leurs vitesses sont néanmoins réparties suivant la loi de Maxwell d'après laquelle les grandes valeurs des vitesses sont extraordinairement rares ; la répartition des molécules est en moyenne uniforme, de telle sorte que des différences de densité observables sont rarissimes. Si cette analogie avait quelque fondement nous pourrions admettre que l'état du système des étoiles fixes et de son champ de gravitation est soumis aux *principes statis-*

tiques qui nous apprennent qu'un gaz renfermé dans une enceinte est presque toujours en équilibre. Mais cela ne serait possible que si la *répartition uniforme des étoiles au repos dans un champ de gravitation statique* est un état d'équilibre compatible avec les lois de la gravitation. Dans un champ statique, la ligne d'univers d'un point matériel au repos, c'est-à-dire d'un point dont les coordonnées x_1, x_2, x_3 sont constantes et x_0 variable, est une géodésique si

$$\left\{ \begin{matrix} 00 \\ i \end{matrix} \right\} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

et par suite si

$$\left[\begin{matrix} 00 \\ i \end{matrix} \right] = 0 \qquad \frac{\partial g_{00}}{\partial x_i} = 0$$

Une répartition de masses au repos n'est donc possible que si

$$\sqrt{g_{00}} = f = const. = 1$$

or l'équation :

$$(32) \qquad \Delta f = \frac{1}{2}\mu \qquad (\mu = \text{densité de masse})$$

montre que l'état d'équilibre que nous avons en vue est *incompatible* avec les lois de la gravitation.

Dans les considérations qui nous ont conduits aux équations de la gravitation (§ 28), nous avons commis une petite erreur. R n'est pas le seul invariant contenant les g_{ik}, leurs dérivées premières et leurs dérivées secondes (ces dernières linéairement), mais l'invariant le plus général de cette espèce a la forme $\alpha R + \beta$, où α et β sont des constantes numériques. Par suite, nous pouvons généraliser les lois de la gravitation en y remplaçant R par $R + \lambda$ (et $\mathfrak{G}$ par $\mathfrak{G} + \frac{1}{2}\lambda\sqrt{g}$) en désignant par λ une constante universelle. Si elle n'est pas nulle comme nous l'avons admis précédemment, nous pouvons la choisir égale à 1; cela revient à déterminer l'unité de longueur d'une manière absolue, car le principe de relativité détermine déjà l'unité de temps et les lois de la gravitation l'unité de masse d'une manière absolue. Par cette modification, les équations de la gravitation, pour un champ créé par de la matière sans tension (incohérente) et au repos ($\mathfrak{T}_0^0 = \mu = \mu_0\sqrt{g}$, les autres composantes de $\mathfrak{T}$ sont nulles), nous donnent par l'utilisation de l'équation $f = 1$ et des notations du paragraphe 29 :

$$\lambda = \mu_0 \quad [\text{à la place de } (32)] \quad \text{et :}$$

$$(61) \qquad \mathsf{P}_{ik} - \lambda\gamma_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Cet état d'équilibre idéal n'est donc possible que si la masse est répartie avec la densité λ. L'espace doit alors être homogène au point de vue métrique, et en effet les équations (61) sont satisfaites pour un espace sphérique de rayon $a = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}$. Nous pouvons donc introduire quatre coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 pour l'espace seul, satisfaisant à l'équation :

(62) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2$$

et pour lesquelles on a :

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

L'espace est donc fermé et par conséquent fini. Si ce n'était pas le cas, on ne pourrait pas se représenter, comment un état d'équilibre statistique pourrait y exister. Si l'univers est spatialement fermé, il est possible qu'un observateur voie d'une seule et même étoile divers aspects simultanés, qui montrent l'étoile à des moments qui sont séparés par d'énormes intervalles de temps, époques pendant lesquelles la lumière fait le tour de l'espace. Il serait bon encore de se demander si les points de l'espace qui satisfont à (61) sont représentés univoquement et réciproquement au moyen des quadruples de valeurs x_i ou bien si à deux systèmes :

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) \quad \text{et} \quad (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$$

correspond le même point. Au point de vue de l'Analysis situs ces deux possibilités sont différentes, quoique les deux espaces fussent à deux côtés (contrairement à ce qui arrive pour le cas de deux dimensions). Suivant que l'un ou l'autre de ces cas est vrai, la masse totale de l'univers serait en grammes :

$$\frac{\pi a}{2\varkappa} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi a}{4\varkappa}$$

Notre hypothèse exige donc, en tous cas, que la masse totale qui est dans l'univers, soit représentée par un nombre en relation très intime avec la constante universelle $\lambda = \frac{2}{a^2}$; c'est là une exigence qui entraîne une bien remarquable coïncidence, puisque les deux grandeurs en question n'ont pas de relation logique entre elles.

Les solutions des équations de la gravitation pour le cas où la symétrie du champ est sphérique et où l'univers est privé de masse, là où on les considère, doivent être modifiées ; le principe de variation s'exprime par : (Voyez les notations au § 21.)

$$\delta \int (2w\Delta' + \lambda\Delta r^2)dr = 0$$

la variation de w donne comme auparavant $\Delta = 1$; la variation de Δ donne à son tour :

(63) $$w' = \frac{\lambda}{2} r^2$$

Si nous exigeons la régularité pour $r = 0$, on trouve :

$$w = \frac{\lambda}{6} r^3,$$

(64) $$\frac{1}{h^2} = f^2 = 1 - \frac{\lambda}{6} r^2.$$

L'espace se laisse appliquer congruement sur une « sphère » :

(65) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 3a^2$$

de rayon $\sqrt{3}a$, dans l'espace euclidien à quatre dimensions ; à notre centre de symétrie correspond l'un des pôles de la sphère dont les trois premières coordonnées sont $x_1=x_2=x_3=0$. L'univers est un cylindre érigé sur cette sphère dans la direction d'un cinquième axe de coordonnées. Mais puisque f est nul sur la « grande sphère » $x_4=0$, qu'on peut considérer come l'équateur ou espace-horizon de notre centre, c'est que la forme métrique fondamentale de l'univers devient singulière dans cette région, ce qui montre que la possibilité d'un univers statique et vide contredit aux lois naturelles, que nous considérons comme valables. Tout au moins, à l'horizon doit-il se trouver des masses. Les calculs se font le plus simplement en y supposant l'existence d'un fluide incompressible; ce n'est d'ailleurs que pour fixer nos idées. Le problème variationnel à résoudre s'exprime comme au paragraphe 32, il suffit d'ajouter le terme en λ :

$$\delta \int \left\{ \Delta' w + \left(\mu_0 + \frac{\lambda}{2} \right) r^2 \Delta - r^2 v h \right\} dr = 0.$$

Comme plus haut, l'on obtient :

$$w' - \left(\mu_0 + \frac{\lambda}{2} \right) r^2 = 0, \quad w = -2M + \frac{2\mu_0 + \lambda}{6} r^3$$

$$\frac{1}{h^2} = 1 + \frac{2M}{r} - \frac{2\mu_0 + \lambda}{6} r^2. \tag{66}$$

Si le fluide se trouve entre deux sphères de latitude dont les équations sont $x_4 = const$, et dont le rayon est $r_0 (< a\sqrt{3})$, la continuité avec (64) exige que :

$$M = \frac{\mu_0}{6} r_0^3.$$

$\frac{1}{h^2}$ est nul (du premier ordre) pour une valeur $r=b$ comprise entre r_0 et $a\sqrt{3}$. L'espace se laisse de nouveau représenter sur la sphère (65), mais cette représentation n'est plus congruente dans la zone remplie de fluide. L'équation pour Δ (p. 233) donne maintenant une valeur pour f qui n'est pas nulle à l'équateur. Les conditions aux limites pour la pression ($p=0$) amènent entre μ_0 et r_0 une relation qui montre que si l'horizon matériel est pris arbitrairement large, le fluide doit avoir une densité telle que la masse totale ne peut descendre au-dessous d'une certaine limite positive. [31]).

La solution générale de (63) donne ensuite :

$$\frac{1}{h^2} = f^2 = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda}{6} r^2 \qquad (m = const)$$

Elle correspond au cas où le centre de symétrie est entouré d'une sphère matérielle. Il n'y a qu'une zone $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$ où f^2 est positif, dans laquelle l'univers est privé de masse ; de nouveau l'on doit imaginer un horizon matériel. Il en est de même quand la masse centrale est chargée électriquement, car alors $\Delta=1$. Dans l'expression de $\frac{1}{h^2} = f^2$, on doit ajouter le terme $+\frac{e^2}{r^2}$ et le potentiel électrostatique est $\frac{e}{r}$.

Nous avons peut-être suivi, dans ces considérations, les suggestions d'une fantaise quelque peu aventureuse. Cependant, nous avons appris à faire quelques distinctions dans le domaine des *possibilités* en ce qui concerne les nouvelles conceptions de l'espace et du temps pour la théorie à faire naître. L'hypothèse à la base de ces considérations était dans chaque cas la plus simple qui pût nous faire comprendre que dans l'univers réel, relativement aux phénomènes électriques et gravifiques, il existe des rapports *grosso modo* d'ordre statique, et que les solutions du cas statique s'évanouissent à l'infini ou convergent vers la métrique euclidienne. Sur la sphère, ces équations possèdent en effet une seule solution (ici les considérations aux limites n'interviennent pas, elles sont remplacées par la condition de régularité dans tout le domaine fermé), si l'on fait tendre $\lambda \to 0$. la solution sphérique converge vers la solution, qui pour l'univers infini satisfait précisément à l'infini aux conditions aux limites auxquelles nous avons fait allusion.

Un univers métriquement homogène se conçoit le plus simplement du monde en coupant un espace à cinq dimensions, où la métrique est donnée par $ds^2 = -\Omega(dx)$, — Ω est une forme quadratique non dégénérée à coefficients constants — par la variété représentée par l'équation $\Omega(x) = \frac{6}{\lambda}$, cette section est en quelque sorte une section conique à quatre dimensions. Nous obtiendrons par là une solution des équations d'Einstein, modifiées par le terme en λ, pour une région d'univers sans masse. Si la forme métrique d'univers que l'on obtient ainsi possède trois dimensions négatives et une positive, comme cela doit être, il faut prendre pour $\Omega(x)$ une forme à quatre dimensions positives et une négative :

$$\Omega(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2$$

Cette solution se ramène du reste, à la solution trouvée plus haut par les substitutions :

$$x_4 = z.\operatorname{ch} t, \qquad x_5 = z.\operatorname{sh} t$$

alors :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + z^2 = \frac{6}{\lambda}, \; -ds^2 = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3 + dz^2) - z^2dt^2.$$

Mais les nouvelles coordonnées z, t ne représentent que la section « en forme de coin » $x_4^2 - x_5^2 > 0$. Sur l' « arête » du coin (où $x_4 = x_5 = 0$) t est indéterminé. Cette arête qui paraît être, avec les anciennes coordonnées, un domaine à deux dimensions est avec les nouvelles un domaine à trois dimensions : c'est le cylindre érigé sur l'équateur $t = 0$ de la sphère (65), dans la direction de l'axe des t. Il s'agit de savoir si c'est l'ancien ou le nouveau de ces systèmes de coordonnées qui représente d'une manière régulière l'univers entier. Dans le premier cas, l'univers ne serait pas globalement statique et il s'accorderait avec les lois naturelles s'il était vide de masse; cette hypothèse est due à M. de Sitter [32]). Dans le deuxième cas, nous avons un univers statique, mais il n'est pas possible sans masse à l'horizon; c'est à cette hypothèse qu'Einstein donne la préférence.

§ 35. — La métrique d'univers, cause des phénomènes électromagnétiques. [33]).

Nous parvenons à une dernière synthèse. Pour pouvoir caractériser par des nombres l'état physique de l'univers en un point, on doit non seulement rapporter le voisinage de ce point à un système de coordonnées, mais encore il faut faire le choix d'unités de mesure. Il y a un avantage à se placer pour ce deuxième point, dans la situation analogue à celle d'où Einstein est parti pour développer sa théorie de l'arbitraire qui s'attache au choix du système de coordonnées.

Appliquée à la géométrie et à la notion de segment, cette idée a permis de franchir (Ch. II) la dernière étape qui séparait la géométrie de Riemann d'une pure géométrie infinitésimale. Admettons, après nous être débarrassés de tous les reliquats de la « représentation à distance », que la géométrie d'univers est bien de cette espèce. Alors la métrique d'univers dépendra de la forme quadratique (I) et en outre de la forme différentielle linéaire $\varphi_i dx_i$.

Cette extension ne concerne tout d'abord que les fondements géométriques de la physique, tout à fait comme l'extension de la relativité restreinte à la relativité générale. La mécanique newtonienne, ainsi que la relativité restreinte, admettent que la translation uniforme est un état de mouvement distingué d'un système de vecteurs, tel que la position des axes à un moment donné détermine leur position à un instant quelconque. Mais cela est incompatible avec le principe évident de la *relativité du mouvement*. Cependant, sans en venir en conflit grossier avec les faits, nous avons pu satisfaire à ce principe, en élaborant la notion de déplacement parallèle *infinitésimal* d'un corps de vecteurs ; il nous a fallu considérer comme une réalité physique la *connexion affine* que ce déplacement détermine ; cette réalité physique qui dépend des états de la matière, c'est ce que nous avons appelé le *champ de contrainte*. Les propriétés empiriquement connues de la *gravitation*, comme l'égalité de la masse inerte et de la masse pesante, nous ont appris enfin que dans le champ de contrainte outre l'inertie, il faut faire entrer la gravitation; ainsi la théorie de la relativité généralisée a passé du stade *géométrique* (géométrie d'univers) au stade *physique*. C'est avec la même évidence qui s'attache au principe de la relativité du mouvement, que nous apparaît le principe de la *relativité de la grandeur*. Il faut avoir le courage de soutenir ce principe d'après lequel la grandeur d'un corps à un moment donné n'est pas déterminée en soi par sa grandeur à un autre moment ; et l'on doit soutenir ce principe malgré l'existence des corps solides *. Pourtant c'est par la notion de déplacement congruent *infinitésimal* que nous pourrons lever les difficultés qui s'attachent à un tel problème, l'on devra donc prescrire en chaque point outre la *détermination métrique*, une *connexion métrique*. Mais il ne faut pas voir là une propriété « géométrique », qui appartienne à l'univers considéré comme forme des phénomènes, c'est bien plutôt la conséquence d'une réalité physique qui se manifeste par un champ. Si donc nous sommes conduits à fonder la connexion affine sur des bases plus profondément enfoncées dans la nature de la métrique d'univers, et cela par le fait de la propagation de l'action et par l'existence du corps solide, il n'y a pas un grand pas à franchir pour identifier non seulement les coefficients g_{ik} de la forme métrique $g_{ik}\,dx_i\,dx_k$ avec les potentiels du champ de gravitation, mais aussi et surtout les *coefficients de la forme linéaire* $\varphi_i dx_i$ *avec les potentiels électromagnétiques*. Alors le champ et les forces électromagnétiques sont aussi des émanations de la métrique universelle. Or, dans la nature, nous ne connaissons pas d'action essentiellement différente de celle de la gravitation et de l'électricité, les autres, en effet, semblent plausiblement résulter de l'application des lois statistiques aux deux ordres de phénomènes que nous venons de mentionner. Nous arrivons donc à la conséquence suivante : *L'univers est une multiplicité métrique à* $(3+1)$ *dimensions; tous les phénomènes physiques sont des émanations de sa métrique*. (La vieille conception disait : Le continuum métrique à quatre dimensions est le théâtre des phénomènes physiques ; les entités physiques sont précisément ce qui existe dans cet univers, et nous devons les accepter spécifiquement et quantitativement comme l'expérience nous les donne.) Nous emploierons pour exprimer le caractère physique de la métrique, l'expression « Etat de l'éther » dans une acception tout à fait synonyme de métrique; il ne faut pas que ce nouveau terme engendre dans l'esprit des images fausses. Dans cette terminologie, le théorème fondamental de la géométrie infinitésimale exprime que le champ de contrainte, et par suite la gravitation, est déterminé par l'état de l'éther. L'opposition entre « l'état physique » et la « gravitation » qui se présentait au paragraphe 28, et qui correspondait à la décomposition en deux parties de la fonction hamiltonienne, est détruite par la nouvelle conception ; une théorie unitaire et parfaitement synthétique apparaît à nos yeux. Le rêve de Descartes d'une physique purement géométrique semble se réaliser d'une manière toute naturelle et imprévue. Là se particulariseraient nettement les grandeurs d'extension.

* Il faudra faire en sorte que l'ensemble des directions spatiales à un instant donné ne dépende que du rapport des g_{ik}.

La forme linéaire fondamentale $\varphi_i dx_i$ n'est déterminée qu'à une différentielle totale additive près ; seul le tenseur de la courbure segmentaire

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

ne comporte aucun élément arbitraire. Il en est précisément ainsi, d'après la théorie de Maxwell, pour la forme potentielle électromagnétique; le tenseur du champ électromagnétique, que nous avons désigné par F_{ik} peut être identifié maintenant à la courbure segmentaire f_{ik}. Le premier système des équations de Maxwell

$$(67) \qquad \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k} = 0,$$

si notre conception de l'électricité est vraie représente une loi essentielle, dont la validité est absolument indépendante de la forme des lois naturelles qui régissent le cours universel des grandeurs physiques. Dans une multiplicité métrique l'invariant intégral le plus simple qui puisse exister est :

$$(68) \qquad \int \mathfrak{l} dx = \frac{1}{4} \int f_{ik} \mathfrak{f}^{ik} dx$$

et c'est précisément la forme que prend *l'action* dans le principe hamiltonien d'où dérive la théorie de Maxwell. Nous pouvons donc affirmer que toute l'expérience résumée par la théorie de Maxwell parle en faveur de la nature métrique de l'électricité. Et puisque l'on ne peut pas construire dans une multiplicité métrique à un nombre de dimensions différent de 4, un invariant intégral aussi simple, nos conceptions ne nous donnent pas seulement une compréhension plus profonde de la théorie de Maxwell, mais elles nous font comprendre, en quelque manière, pourquoi l'univers que nous avions considéré comme quadridimensionnel d'une manière assez fortuite, a précisément 4 dimensions. Dans la forme linéaire fondamentale $\varphi_i dx_i$, il y a un élément arbitraire : une différentielle totale; l'action est un nombre pur, cela doit en être bien ainsi, si la théorie doit s'accorder avec la structure atomique de l'univers, à laquelle les résultats récents attachent une signification essentielle (théorie des quanta).

Au cas *statique* correspondent les formes :

$$ds^2 = f^2 dx_0^2 - d\sigma^2$$
$$d\varphi = \varphi_0 dx_0$$

moyennant un choix convenable des coordonnées et de l'étalonnage; φ et f sont indépendants du temps x_0, ils ne dépendent que des coordonnées spatiales x_1, x_2, x_3; $d\sigma^2$ est une forme différentielle quadratique définie positive attachée à l'espace (x_1, x_2, x_3). Cet aspect particulier des formes fondamentales n'est pas altéré par une transformation de coordonnées et un changement d'étalonnage du type suivant le temps x_0 et l'espace (x_1, x_2, x_3) se transforment linéairement chacun pour son compte et le rapport d'étalonnage est une constante. Dans le cas statique, nous avons donc un espace riemannien à 3 dimensions dont $d\sigma^2$ est la forme métrique et deux champs scalaires : le potentiel électrostatique φ et le potentiel de gravitation ou la vitesse de la lumière. Comme unités de mesure, nous choisissons arbitrairement les unités de longueur et de temps (cm., sec.); $d\sigma^2$ est donc de dimension L^2, f de dimension LT^{-1}, et φ de dimension T^{-1}. Toutes les fois que l'on parlera d'espace dans la théorie de la relativité générale (à savoir dans le cas statique), il sera entendu que c'est d'un espace *riemannien* comme on peut s'y attendre, et non pas d'un espace métrique doué de cette propriété plus générale d'après laquelle le transport des segments n'est pas intégrable. Nous retrouvons la relativité restreinte, si nous pouvons choisir les coordonnées et l'étalonnage de manière que

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

Si x_i et $\overline{x_i}$ sont les coordonnées d'un point dans 2 systèmes pour lesquels la forme du ds^2 a cet aspect, alors le passage des x_i aux $\overline{x_i}$ est une transformation conforme, c'est-à-dire que

$$dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3) \text{ est égal à } d\overline{x}_0^2 - (d\overline{x}_1^2 + d\overline{x}_2^2 + d\overline{x}_3^2),$$

à un facteur de proportionnalité près. Les transformations conformes de l'univers minkowskien quadridimensionnel coïncident avec les transformations des sphères [34]), c'est-à-dire avec les correspondances de sphère à sphère dans l'univers. Une sphère est représentée par une équation linéaire homogène au moyen des coordonnées « hexasphériques » :

$$u_0 : u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : u_5 = x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : \frac{(xx) + 1}{2} : \frac{(xx) - 1}{2}$$

$$[(xx) = x_0^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)]$$

lesquelles satisfont à la condition :

$$u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 + u_5^2 = 0$$

Les transformations de sphères entre elles, s'expriment donc par des fonctions linéaires des u_i, laissant invariante cette équation de condition. Les équations de Maxwell dans l'éther, telles qu'elles sont formulées dans la relativité restreinte ne sont pas seulement invariantes pour le groupe à 10 paramètres des transformations de Lorentz, mais encore elles le sont pour le groupe à 15 paramètres des transformations sphériques [35]).

Pour examiner si la nouvelle hypothèse sur la nature du champ électromagnétique permet d'expliquer les phénomènes connus, cherchons à en tirer les conséquences. Nous déduirons les lois de la nature d'un principe hamiltonien, en exprimant que la variation de l'action $\int \mathfrak{W}\, dx$, pour une altération infiniment petite de la métrique dans un domaine fini, est nulle. L'action est un invariant, $\mathfrak{W}$ est par suite une densité scalaire (au sens propre) attachée à la métrique. Mie, Hilbert et Einstein posent que l'action est un invariant vis-à-vis des transformations de coordonnées; nous ajouterons comme nouvelle condition qu'elle soit aussi invariante vis-à-vis des transformations d'étalonnage, c'est-à-dire des transformations qui changent :

$$g_{ik} \quad \text{en} \quad \lambda g_{ik}$$

(69) $$\text{et } \varphi_i \text{ en } \varphi_i - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i},$$

(λ étant une fonction positive du lieu). Nous supposons encore que $\mathfrak{W}$ est une expression du second ordre, c'est-à-dire qu'elle est construite d'une part avec les g_{ik} et leurs dérivées premières et secondes, et d'autre part avec les φ_i et leurs dérivées premières. L'exemple le plus simple est la densité d'action de Maxwell $\mathfrak{l}$. Nous développerons nos recherches sans supposer une forme déterminée pour $\mathfrak{W}$ En appliquant la méthode de Klein (§ 28), dont l'extension complète n'est possible que maintenant, nous obtiendrons quelques identités mathématiques valables pour n'importe quelle densité scalaire attachée à la métrique.

I. — Faisons subir aux grandeurs g_{ik} et φ_i, qui permettent d'exprimer la métrique relativement à un système de référence, des accroissements infiniment petits $\delta\varphi_i$ et δg_{ik}; soit X un domaine fini d'univers. L'intégrale de la variation $\delta\mathfrak{W}$ sur le domaine X se décompose en deux parties; une intégrale de divergence et une intégrale portant sur une fonction linéaire des $\delta\varphi_i$ et δg_{ik} :

(70)
$$\int_X \delta\mathfrak{W} dx = \int_X \frac{\partial(\delta\mathfrak{v}^k)}{\partial x_k}\,dx + \int_X \left(\mathfrak{w}^i\delta\varphi_i + \frac{1}{2}\mathfrak{W}^{ik}\delta g_{ik}\right)dx.\left[\mathfrak{W}^{ki} = \mathfrak{W}^{ik}\right]$$

les $\mathfrak{w}^i$ sont les composantes d'une densité vectorielle contravariante, les $\mathfrak{W}_i^k$, celles d'une densité tensorielle mixte du 2^e ordre (au sens propre). Les $\delta\mathfrak{v}^k$ sont des combinaisons linéaires des

$$\delta\varphi_\alpha, \quad \delta g_{\alpha\beta} \text{ et } \delta g_{\alpha\beta,i} \qquad \left[g_{\alpha\beta,i} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\right];$$

ce que nous exprimons par :

$$\delta\mathfrak{v}^k = (k\alpha)\,\delta\varphi_\alpha + (k\alpha\beta)\,\delta g_{\alpha\beta} + (ki\alpha\beta)\,\delta g_{\alpha\beta,i}.$$

Les $\delta\mathfrak{v}^k$ sont déterminés univoquement par l'équation (70) pourvu que l'on ajoute les conditions de symétrie :

$$(ki\alpha\beta) = (ik\alpha\beta)$$

Alors les $\delta\mathfrak{v}^k$ sont les composantes d'une densité vectorielle (au sens propre) si l'on considère les $\delta\varphi_i$ comme les composantes d'un vecteur covariant de poids o et les δg_{ik} comme celles d'un tenseur de poids 1. (Naturellement rien ne s'oppose à ce qu'on change ces conditions en d'autres qui soient aussi invariantes). Nous exprimons avant tout que $\int\mathfrak{W}dx$ est un invariant relativement à l'étalonnage, c'est-à-dire que cette valeur ne change pas quand l'étalonnage de l'univers est varié infiniment peu. Prenons $\lambda = 1 + \pi$, comme coefficient du changement d'étalonnage, π est un champ scalaire infinitésimal, pris arbitrairement. Les grandeurs fondamentales subissent des variations qui sont données par (69) :

$$\delta g_{ik} = \pi g_{ik}. \qquad \delta \varphi_i = - \frac{\partial \pi}{\partial x_i}. \tag{71}$$

Substituons ces valeurs dans $\delta \mathfrak{v}^k$; il prendra la forme :

$$\mathfrak{s}^k(\pi) = \pi \cdot s^k + \frac{\partial \pi}{\partial x_\alpha} \cdot \mathfrak{h}^{k\alpha} \tag{72}$$

Les $\mathfrak{s}^k$ (π) sont les composantes d'une densité vectorielle qui dépend linéairement du champ scalaire π. Il s'ensuit, du moment que les $\frac{\partial \pi}{\partial x_\alpha}$ sont les composantes d'un champ vectoriel covariant, que $\mathfrak{s}^k$ est une densité vectorielle contravariante et que $\mathfrak{h}^{k\alpha}$ est une densité covariante du second ordre. La variation (70) de l'intégrale d'action doit s'évanouir pour les déformations (71) à cause de l'invariance qu'elle présente vis-à-vis des changements d'étalonnage :

$$\int_X \frac{\partial \mathfrak{s}^k(\pi)}{\partial x_k} dx + \int_X \left(- \mathfrak{w}^i \frac{\partial \pi}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \mathfrak{W}_i^i \pi \right) dx = 0.$$

Transformons le premier terme de la deuxième intégrale par une intégration par parties; l'on obtient :

$$\int_X \frac{\partial(\mathfrak{s}^k(\pi) - \pi \mathfrak{w}^k)}{\partial x^k} dx + \int_X \pi \left(\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \mathfrak{W}_i^i \right) dx = 0 \tag{73}$$

L'on trouve tout d'abord l'identité :

$$\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \mathfrak{W}_i^i = 0 \; ; \tag{74}$$

en effet, si le premier membre n'est pas identiquement nul, supposons qu'il soit positif en un point (x_i); on peut alors prendre pour X un petit domaine entourant (x_i) dans lequel ce premier membre est positif. Choisissons π de telle façon qu'il soit nul à l'extérieur de X, et positif dans X, la première intégrale de (73) est nulle, tandis que la deuxième est positive; la contradiction démontre donc bien l'identité (74). On a par suite :

$$\int_X \frac{\partial (\mathfrak{s}^k(\pi) - \pi \mathfrak{w}^k)}{\partial x_k} dx = 0$$

et cette égalité doit être satisfaite pour n'importe quel domaine X, quand le champ scalaire π est donné, donc :

$$\frac{\partial (\mathfrak{s}^k(\pi) - \pi \mathfrak{w}^k)}{\partial x_k} = 0 \tag{75}$$

Substituons la valeur de $\mathfrak{s}^k$ (π) tirée de (72) et remarquons que l'on peut se donner arbitrairement en un point les valeurs de π, $\frac{\partial \pi}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_k}$ alors la relation (75) se décompose en les identités suivantes :

$$(75_{1,2,3}) \quad \frac{\partial \mathfrak{s}^k}{\partial x^k} = \frac{\partial \mathfrak{w}^k}{\partial x_k}\,; \quad \mathfrak{s}^i + \frac{\partial \mathfrak{h}^{\alpha i}}{\partial x_\alpha} = \mathfrak{w}^i\,; \quad \mathfrak{h}^{\alpha\beta} + \mathfrak{h}^{\beta\alpha} = 0.$$

La troisième nous montre que $\mathfrak{h}^{ik}$ est une densité tensorielle linéaire du second ordre. La première est d'ailleurs une conséquence de la deuxième, si l'on a égard à la symétrie gauche de $\mathfrak{h}^{\alpha\beta}$ puisque :

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathfrak{h}^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

II. — Faisons subir maintenant au continuum d'univers une déformation infinitésimale, par laquelle un point éprouve un déplacement dont les composantes sont ξ^i; nous supposons que la métrique est entraînée dans la déformation sans qu'elle soit changée. Désignons par δ la variation de n'importe quelle grandeur dans la déformation, quand on la considère au même point d'univers et par δ' la variation quand on suit la déformation. D'après (20), (20') et (71), on a :

$$(76) \quad \begin{cases} -\delta\varphi_i = \left(\varphi_r \dfrac{\partial \xi^r}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_r}\xi^r\right) + \dfrac{\partial \pi}{\partial x_i} \\ -\delta g_{ik} = \left(g_{ir}\dfrac{\partial \xi^r}{\partial x_k} + g_{kr}\dfrac{\partial \xi^r}{\partial x_i} + \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\xi^r\right) - \pi g_{ik}. \end{cases}$$

Ici π représente encore un champ scalaire infinitésimal et arbitraire. L'invariance de l'action, vis-à-vis d'une transformation de coordonnées et de la variation de l'étalonnage s'exprime par l'équation :

$$(77) \quad \delta' \int_X \mathfrak{W} dx = \int_X \left\{ \frac{\partial (\mathfrak{W}\xi^k)}{\partial x_k} + \delta\mathfrak{W} \right\} dx = 0$$

Pour se borner à l'invariance relativement aux coordonnées, on fera $\pi = 0$; mais les formules de variation (76) n'ont aucun caractère d'invariance. En effet, ce qui a été supposé signifie simplement ceci, c'est que les formes fondamentales de la métrique ont été variées de telle manière que la mesure l d'un élément linéaire restât inchangée $\delta' l = 0$. Or, la propagation congruente d'un segment s'exprime par

$$\delta' l = -l(\varphi_i \delta' x_i) = -l(\varphi_i \xi^i).$$

Par suite il faut faire dans (76) $\pi = -(\varphi_i \xi^i)$ et non pas $\pi = 0$. L'on obtient alors :

$$(78) \quad \begin{cases} -\delta\varphi_i = f_{ir}\xi^r \\ -\delta g_{ik} = \left(g_{ir}\dfrac{\partial \xi^r}{\partial x_k} + g_{kr}\dfrac{\partial \xi^r}{\partial x_i}\right) + \left(\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} + g_{ik}\varphi_r\right)\xi^r. \end{cases}$$

Ces formules expriment que la variation des deux formes fondamentales est telle que *la métrique est entraînée sans changement dans la déformation et que chaque élément linéaire s'est déplacé congruement.* Le caractère d'invariance se démontre facilement par l'analyse, la deuxième équation (78) par exemple, si l'on introduit le tenseur mixte

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} + \Gamma^i_{kr}\xi^r = \xi^i_k$$

s'écrit alors :

$$-\delta g_{ik} = \xi_{ik} + \xi_{ki}$$

Puisque l'invariance par rapport à l'étalonnage a été exprimée dans I, nous pouvons nous borner au choix particulier de π que nous venons de faire.

Pour la variation (78), posons :

$$\mathfrak{W}\xi^k + \mathfrak{v}^k = \mathfrak{S}^k(\xi)$$

$\mathfrak{S}^k(\xi)$ est une densité vectorielle linéaire infinitésimale dépendant du champ ξ^i, écrivons explicitement :

$$\mathfrak{S}^k(\xi) = \mathfrak{S}^k_i\xi^i + \mathfrak{H}^{k\alpha}_i\frac{\partial \xi^i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2}\mathfrak{H}^{k\alpha\beta}_i\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}$$

(le dernier coefficient est naturellement symétrique en α et β. $\mathfrak{S}^k(\xi)$ est une densité vectorielle dépendant du champ ξ^i; c'est ce qui exprime le plus simplement le caractère des coefficients du second membre; en particulier $\mathfrak{S}^k_i$ n'est pas une densité tensorielle mixte, nous dirons que c'est une « pseudo densité tensorielle ». Introduisons dans (77), les expressions (70) et (78); on obtient une intégrale portant sur la fonction :

$$\frac{\partial \mathfrak{S}^k(\xi)}{\partial x_k} - \xi^i\left\{f_{ki}\mathfrak{v}^k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} + g_{\alpha\beta}\varphi_i\right)\mathfrak{W}^{\alpha\beta}\right\} - \mathfrak{W}^k_i\frac{\partial \xi^i}{\partial x_k}.$$

Or

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} + g_{\alpha\beta}\varphi_i = \Gamma_{\alpha,\beta i} + \Gamma_{\beta,\alpha i}$$

et à cause de la symétrie des $\mathfrak{W}^{\alpha\beta}$ il vient :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} + g_{\alpha\beta}\varphi_i\right)\mathfrak{W}^{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha,\beta i}\,\mathfrak{W}^{\alpha\beta} = \Gamma^\alpha_{\beta i}\,\mathfrak{W}^\beta_\alpha$$

Effectuons une intégration par parties sur le dernier terme de la fonction à intégrer, l'on obtient en fin de compte :

$$\int_X \frac{\partial(\mathfrak{S}^k(\xi) - \mathfrak{W}^k_i\,\xi^i)}{\partial x_k}\,dx + \int_X [\cdots]_i\,\xi^i dx = 0$$

En faisant les raisonnements bien connus l'on trouve qu'il faut que :

(79) $[\cdots]_i$ c.-à-.d. $\left(\dfrac{\partial \mathfrak{W}^k_i}{\partial x_k} - \Gamma^\alpha_{\beta i}\,\mathfrak{W}^\beta_\alpha\right) + f_{ik}\mathfrak{W}^k = 0$

et

(80) $$\frac{\partial(\mathfrak{S}^k_i \xi^i - \mathfrak{W}^k_i \xi^i)}{\partial x_k} = 0.$$

Cette dernière identité se décompose en :

$$(80_{1,2,3,4}) \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial \mathfrak{S}^k_i}{\partial x_k} = \dfrac{\partial \mathfrak{W}^k_i}{\partial x_k}; & \mathfrak{S}^k_i + \dfrac{\partial \bar{\mathfrak{H}}^{\alpha k}_i}{\partial x_\alpha} = \mathfrak{W}^k_i; \\ (\bar{\mathfrak{H}}^{\alpha\beta}_i + \bar{\mathfrak{H}}^{\beta\alpha}_i) + \dfrac{\partial \mathfrak{H}^{\gamma\alpha\beta}_i}{\partial x_\gamma} = 0; & \mathfrak{H}^{\alpha\beta\gamma}_i + \mathfrak{H}^{\beta\gamma\alpha}_i + \mathfrak{H}^{\gamma\alpha\beta}_i = 0 \end{array} \right.$$

Remplaçons dans ($_3$), d'après ($_4$),

$$\mathfrak{H}^{\gamma\alpha\beta}_i \quad \text{par} \quad -\mathfrak{H}^{\alpha\beta\gamma}_i - \mathfrak{H}^{\beta\alpha\gamma}_i$$

on trouve que :

$$\bar{\mathfrak{H}}^{\alpha\beta}_i - \frac{\partial \mathfrak{H}^{\alpha\beta\gamma}_i}{\partial x_\gamma} = \mathfrak{H}^{\alpha\beta}_i$$

est symétrique gauche par rapport aux indices α et β.

A la place de $\bar{\mathfrak{H}}^{\alpha\beta}_i$, nous introduisons $\mathfrak{H}^{\alpha\beta}_i$, ($_3$) et ($_4$) expriment simplement des conditions de symétrie; ($_2$) se transforme en :

(81) $$\mathfrak{S}^k_i + \frac{\partial \mathfrak{H}^{\alpha k}_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}^{\alpha\beta k}_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \mathfrak{W}^k_i.$$

et à cause des conditions de symétrie, on a :

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}^{\alpha\beta}_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0 \qquad \frac{\partial^3 \mathfrak{H}^{\alpha\beta\gamma}_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} = 0$$

ce qui montre que ($_1$) est une conséquence de ($_2$).

Exemple. — Pour la densité d'action selon Maxwell, on obtient aisément :

$$\delta \mathfrak{v}^k = \mathfrak{f}^{ik} \delta \varphi_i$$

et ensuite :

$$\mathfrak{s}^i = 0, \quad \mathfrak{h}^{ik} = \mathfrak{f}^{ik}; \quad \mathfrak{S}^k_i = \mathfrak{l}\delta^k_i - f_{i\alpha}\mathfrak{f}^{k\alpha}$$

Les identités s'écrivent :

$$\mathfrak{w}^i = \frac{\partial \mathfrak{f}^{\alpha i}}{\partial x_\alpha}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} = 0, \qquad \mathfrak{W}^i_i = 0 \, ;$$

$$\mathfrak{W}^k_i = \mathfrak{S}^k_i, \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{S}^k_i}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \mathfrak{S}^{\alpha\beta} \right) + f_{i\alpha} \frac{\partial \mathfrak{f}^{\beta\alpha}}{\partial x_\beta} = 0$$

Nous avons déjà obtenu les deux formules de la dernière ligne respectivement aux pages 201 et 145; la dernière exprimait la relation existant entre la densité tensorielle $\mathfrak{S}^k_i$ de l'énergie du champ et la force pondéromotrice.

Lois du champ et théorèmes de conservation. — Prenons pour δ dans (70) une variation quelconque, nulle en dehors d'un domaine fini, et prenons pour X tout l'univers, ou un domaine fini hors duquel nous supposons $\delta = 0$, nous avons :

$$\int \delta \mathfrak{W} dx = \int (\mathfrak{w}^i \delta \varphi_i + \frac{1}{2} \mathfrak{W}^{ik} \delta g_{ik}) dx.$$

Si $\int \mathfrak{W} dx$ est l'action, on reconnaît aisément que le principe d'Hamilton exige que les lois invariantes suivantes soient satisfaites :

$$\mathfrak{w}^i = 0 \qquad \mathfrak{W}_i^k = 0;$$

nous dirons que les premières sont les lois électromagnétiques et que les secondes sont les lois de la gravitation. Entre les premiers membres de ces équations, il existe 5 identités, ce sont celles qui sont écrites sous les numéros (74) et (79). Les équations du champ ne sont donc pas toutes nécessaires, il en est 5 qui sont superflues, elles correspondent aux 5 fonctions arbitraires qui caractérisent le passage d'un système de référence à un autre.

D'après (75_2) les lois de l'électromagnétisme ont l'aspect suivant :

$$\frac{\partial \mathfrak{h}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{s}^i \qquad [\text{ et } (67)] \tag{82}$$

qui est complètement en accord avec la théorie de Maxwell : $\mathfrak{s}^i$ est la densité de l'hypercourant, $\mathfrak{h}^{ik}$ qui est une densité tensorielle linéaire est la densité du champ électromagnétique. *Sans qu'il soit nécessaire de spécialiser la fonction qui représente l'action, toute la structure de la théorie de Maxwell se tire de l'invariance vis-à-vis de l'étalonnage.* La forme particulière de la fonction hamiltonienne $\mathfrak{W}$ influe seulement sur les formules qui permettent de déterminer le courant et la densité du champ, au moyen des grandeurs d'état φ_i et g_{ik}. Dans le cas de la théorie de Maxwell au sens étroit ($\mathfrak{W} = \mathfrak{l}$) qui n'est valable que dans l'espace vide, l'on a précisément : $\mathfrak{h}^{ik} = \mathfrak{f}^{ik}$; $\mathfrak{s}^i = 0$.

De même que les $\mathfrak{s}^i$ constituent la densité de l'hypercourant, de même le tableau des $\mathfrak{t}^{ik}$ représentera la pseudo-densité tensorielle de l'énergie; dans le cas le plus simple où $\mathfrak{W} = \mathfrak{l}$, ce tableau coïncide avec les expressions de Maxwell. *D'après* (75_1) *et* (80_1) *on a en général les théorèmes de conservation suivants :*

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^i}{\partial x_i} = 0 \qquad \frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} = 0$$

et l'on voit nettement que les équations de conservation se tirent des lois du champ par une double méthode. On a, en effet, non seulement :

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^i}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} \text{ mais aussi } \equiv -\frac{1}{2}\mathfrak{W}_i^i$$

et non seulement

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial \mathfrak{W}_i^k}{\partial x_k} \text{ mais aussi } \equiv \Gamma_{i\beta}^{\alpha}\mathfrak{W}_\alpha^\beta - f_{ik}\mathfrak{w}^k.$$

La forme des équations de la gravitation se tire de (81). Les lois du champ et les théorèmes de conservation qui s'y rapportent se laissent résumer d'après (75) et (80) dans les deux équations :

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^i(\pi)}{\partial x_i} = 0 \qquad \frac{\partial \mathfrak{S}^i(\xi)}{\partial x_i} = 0$$

La relation étroite qui existe entre les théorèmes de conservation de l'énergie et de l'impulsion et l'invariance vis-à-vis des coordonnées, nous était déjà connue. A ceux-ci, s'ajoute la cinquième loi de conservation qui est la loi de conservation de l'électricité; par suite il doit correspondre à cette dernière loi une propriété d'invariance qui entraîne une cinquième fonction arbitraire; c'est ainsi que l'on retrouve la raison de l'invariance vis-à-vis de l'étalonnage. Du reste, nous avons obtenu plus haut le théorème de conservation pour l'énergie et l'impulsion en ne faisant intervenir que l'invariance pour les coordonnées, il fallait décomposer la fonction hamiltonienne en deux parties : l'action du champ de gravitation et l'action de « l'état physique »; ces deux parties devaient être traitées différemment et les résultats partiels étant rapprochés d'une manière particulière (§ 33). Distinguons par un astérisque, les grandeurs qui proviennent de $\mathfrak{W}\xi^k + \delta\mathfrak{v}^k$, quand les variations des grandeurs fondamentales se tirent de (76) avec $\pi = 0$, au lieu de (78); dans ce cas, par suite de l'invariance pour les coordonnées, les équations de conservation s'écrivent $\frac{\partial {}^*\mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} = 0$. Mais pour la fonction d'action du § 28 les ${}^*\mathfrak{S}_i^k$ ne sont pas les composantes de l'énergie et de l'impulsion. Pour le terme relatif à la gravitation, ($\mathfrak{W} = \mathfrak{G}$) nous avons bien défini l'énergie par ${}^*\mathfrak{S}_i^k$ (§ 33). Mais pour le terme électromagnétique ($\mathfrak{W} = \mathfrak{L}$, § 28), nous avons défini les composantes de l'énergie par $\mathfrak{W}_i^k$. Ce deuxième terme $\mathfrak{L}$ ne contient que les g_{ik}, leurs dérivées n'y figurant pas; pour une telle grandeur, d'après (80_2), on a $\mathfrak{W}_i^k = \mathfrak{S}_i^k$.

Par suite, nous pouvons (*en utilisant la transformation que subissent les grandeurs fondamentales pour une variation infinitésimale de l'étalonnage,* comparer les deux définitions de l'énergie l'une à l'autre lors même qu'on ne peut plus les identifier. Ce n'est qu'ici que se révolvent ces oppositions, puisque nous arrivons à une définition du courant $\mathfrak{s}^i$, de la densité du champ électromagnétique $\mathfrak{h}^{ik}$ et de l'énergie $\mathfrak{S}_i^k$, au moyen de la nouvelle théorie; ces définitions ne sont plus liées à l'hypothèse que l'action se décompose en deux parties dont l'une ne contient pas les φ_i ni leurs dérivées, et dont l'autre est privée des dérivées des g_{ik}. La déformation virtuelle du continuum universel, qui conduit à la définition des $\mathfrak{S}_i^k$ doit entraîner la métrique et les éléments de lignes, mais elle doit les laisser *inaltérées* au sens que *nous* donnons à ce mot et non pas au sens *d'Einstein.* Les théorèmes de conservation pour $\mathfrak{s}^i$ et $\mathfrak{S}_i^k$ ne sont donc liés à aucune hypothèse sur la décomposition de l'action. Nous sommes ainsi parvenus à un point de vue supérieur d'où l'on saisit tout l'ensemble d'une manière vraiment synthétique. La théorie de la gravitation d'Einstein reconnaît dans l'égalité de la masse inerte et de la masse pesante une *nécessité* et non pas une conséquence des lois de la nature; la théorie que nous venons de développer reconnaît que la structure des équations de Maxwell et les théorèmes de conservation sont *nécessaires* et qu'on ne doit pas chercher leur origine dans les phénomènes. Des théorèmes de conservation, on tire tout à fait comme dans le § 33, par l'intégration sur une section transversale d'un canal d'univers, les conséquences suivantes : si les $\mathfrak{s}^i$ et les $\mathfrak{S}_i^k$ y sont nuls au dehors, le système a une charge constante e et une énergie d'impulsion constante J. Toutes les deux peuvent être représentées par les équations (82) et (81) respectivement, comme le flux d'un certain champ spatial à travers une surface Ω qui entoure le système. Si l'on prend cette représentation-là comme définition, les théorèmes intégraux de conservation sont aussi valables quand le champ possède à l'intérieur du canal une singularité véritable. Pour le faire voir, on remplace le champ à l'intérieur du canal arbitrairement (en conservant toutefois la continuité avec l'extérieur) par un champ régulier et l'on définit les $\mathfrak{s}^i$ et les $\mathfrak{S}_i^k$ par les équations (82) et (81) (dans cette dernière le second membre est pris égal à zéro) au moyen des grandeurs $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{H}$ qui caractérisent le champ modifié. Les intégrales, étendues à une section du canal, (intérieure à Ω) de ces grandeurs fictives $\mathfrak{s}^0$ et $\mathfrak{S}_i^0$ sont constantes; d'autre part, elles coïncident avec le flux du champ véritable à travers la surface Ω puisque sur Ω le champ fictif coïncide avec le champ véritable, et le théorème est ainsi démontré.

§ 36. — Conséquences du principe d'action le plus simple. Les équations fondamentales de la mécanique.

Nous devons montrer maintenant qu'il est possible de trouver pour développer la nouvelle théorie, une fonction $\mathfrak{W}$ dont les conséquences vérifiables par l'expérience coïncident avec celles de la théorie d'Einstein. La plus commode pour le calcul, dont je n'affirme pas d'ailleurs qu'elle soit réalisée dans la nature est [36] :

$$\mathfrak{W} = -\frac{1}{4} F^2 \sqrt{g} + \alpha \mathfrak{l} \tag{83}$$

L'action doit se composer du volume mesuré au moyen du rayon de courbure comme unité de longueur [comp. § 17 (62)] et de l'action de Maxwell; la constante positive α est un nombre pur. On trouve :

$$\delta\mathfrak{W} = -\frac{1}{2} F\delta(F\sqrt{g}) + \frac{1}{4} F^2 \delta\sqrt{g} + \alpha\delta\mathfrak{l}$$

Supposons que $-F$ soit positif, alors on peut choisir l'étalonnage d'une manière telle que $F = -1$, $\delta\mathfrak{W}$ est alors égal à la variation de de

$$\frac{1}{2} F\sqrt{g} + \frac{1}{4}\sqrt{g} + \alpha\mathfrak{l}.$$

Utilisons pour F la formule [§ 17; (61)], laissons de côté la divergence

$$\delta \frac{\partial(\sqrt{g}\varphi^i)}{\partial x_i}$$

qui s'évanouit par l'intégration sur l'univers et transformons par une intégration par parties, l'intégrale d'univers de $\delta(\frac{1}{2}R\sqrt{g})$ en l'intégrale de $\delta\mathfrak{G}$ (§ 28), notre principe d'action s'exprime alors par la relation :

$$(84) \quad \delta\int \mathfrak{W}dx = 0 \text{ avec } \mathfrak{W} = \mathfrak{G} + \alpha\mathfrak{l} + \frac{1}{4}\sqrt{g}\left\{1 - 3(\varphi_i\varphi^i)\right\}$$

Notre condition signifie que nous mesurons avec des étalons d'ordre cosmique. Choisissons aussi la coordonnée x_i, de manière que les points d'univers dont les coordonnées présentent des différences dont l'ordre de grandeur est l'unité, soient à une distance d'ordre cosmique, nous pouvons alors admettre que les φ_i et les g_{ik} sont de l'ordre de grandeur de l'unité. (Bien que les potentiels aient des mesures extraordinairement faibles vis-à-vis des distances cosmiques, ils varient appréciablement.)

Par la substitution $x_i = \varepsilon x_i$, introduisons des coordonnées de l'ordre habituel de grandeur (grandeur du corps humain), ε est une très petite constante. Les g_{ik} ne changent pas dans cette transformation parce que nous effectuons en même temps le changement d'étalonnage par lequel ds^2 est multiplié par $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Dans le nouveau système de référence, l'on a alors :

$$g'_{ik} = g_{ik}, \qquad \varphi'_i = \varepsilon\varphi_i\,; \qquad F' = -\varepsilon^2.$$

$\frac{1}{\varepsilon}$ est d'après cela, en mesures à notre échelle, le rayon de courbure de l'univers. Conservons aux g_{ik} et aux φ_i leur ancienne signification, mais désignons par x_i les coordonnées désignées jusqu'ici par x'_i et soient Γ^r_{ik} les composantes de la connexion affine correspondant à ces coordonnées, alors :

$$\mathfrak{W} = (\mathfrak{G} + \alpha\mathfrak{l}) + \frac{\varepsilon^2}{4}\sqrt{g}\left\{1 - 3(\varphi_i\varphi^i)\right\}$$

$$\Gamma^r_{ik} = \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\varepsilon^2(\delta^r_i\varphi_k + \delta^r_k\varphi_i - g_{ik}\varphi^r)$$

En faisant abstraction du terme cosmologique fort petit nous obtenons ici précisément la théorie classique de Maxwell-Einstein de l'électricité et de la gravitation. Pour avoir la coïncidence avec les notations du § 34, il suffit de faire $\frac{\varepsilon^2}{2} = \lambda$. *Notre théorie nous donne sans artifice aucun, le terme cosmologique d'Einstein* $\frac{1}{2}\lambda\sqrt{g}$. La répartition uniforme de matière en repos, électriquement neutre, dans tout l'espace sphérique, est un état d'équilibre incompatible avec nos lois. Alors que dans la théorie d'Einstein (comp. § 34), il doit y avoir une harmonie préétablie entre λ considérée comme une constante universelle, et la masse totale de l'univers (parce que chacune de ces deux grandeurs détermine pour son compte la courbure de l'univers) dans notre théorie (où λ *signifie* simplement la courbure), la masse existant dans l'univers *détermine* la courbure d'univers; il me paraît que c'est seulement par là que la cosmologie einsteinienne est physiquement possible. Dans le cas de l'existence d'un champ électrique, le terme cosmologique se complète par $-3\lambda\sqrt{g}(\varphi_i\varphi^i)$; et les composantes Γ^r_{ik} du champ de gravitation contiennent aussi une expression qui dépend de λ. Notre théorie comporte à sa base une unité déterminée d'électricité ; elle est égale à e en unités électrostatiques habituelles. Puisque dans (84), par l'utilisation de ces unités $\frac{2\varkappa}{c^2}$ remplace α, c'est que :

$$\frac{2e^2\varkappa}{c^2} = \frac{\alpha}{-F}, \qquad \frac{e\sqrt{\varkappa}}{c} = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\alpha}{2}};$$

notre unité d'électricité est la quantité d'électricité dont le rayon de gravitation est égal à $\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$ fois le rayon de courbure de l'univers. Elle est d'après cela de l'ordre de grandeur cosmique comme le quantum d'action. Le développement cosmogonique qu'Einstein n'introduit qu'après coup dans sa théorie, se rattache immédiatement aux bases de la nôtre.

Si les φ_i varient, on obtient les équations de Maxwell :

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{s}^i,$$

et l'on a simplement :

$$\mathfrak{s}^i = -\frac{3\lambda}{\alpha}\varphi^i\sqrt{g}.$$

De même que dans la théorie de Maxwell l'éther est le siège de l'énergie et de la masse, de même d'après notre théorie nous trouvons qu'il existe dans l'univers une charge électrique répartie suivant une distribution raréfiée (avec courant). La variation des g_{ik} donne les équations de la gravitation :

$$\text{(85)} \qquad \mathfrak{R}^k_i - \frac{\mathfrak{R} + \lambda\sqrt{g}}{2}\,\delta^k_i = \alpha\mathfrak{T}^k_i,$$

$$\mathfrak{T}^k_i = \left\{\mathfrak{l} + \frac{1}{2}(\varphi_r\mathfrak{s}^r)\right\}\delta^k_i - f_{ir}\mathfrak{f}^{kr} - \varphi_i\mathfrak{s}^k$$

La conservation de l'électricité s'exprime par l'équation :

$$\text{(86)} \qquad \frac{\partial(\sqrt{g}\,\varphi^i)}{\partial x_i} = 0$$

C'est une conséquence, d'une part, des équations de Maxwell; elle peut, d'autre part, se tirer des équations de la gravitation au moyen de nos résultats généraux.

En effet, contractons ces dernières en ik, il vient :

$$R - 2\lambda = \frac{3}{2}(\varphi_i\varphi^i)$$

et puisque $-F = 2\lambda$, on trouve bien (86). La pseudo-densité tensorielle de l'énergie et de l'impulsion est, comme on devait s'y attendre :

$$\mathfrak{S}_i^k = \alpha\mathfrak{T}_i^k - \left\{\left(\mathfrak{G} - \frac{1}{2}\lambda\sqrt{g}\right)\delta_i^k - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\mathfrak{G}^{\alpha\beta,k}\right\}.$$

De l'équation $\delta'\int\mathfrak{W}dx = 0$, pour une variation δ' qui est suscitée par une translation au sens propre [formule (76) avec $\xi^i = \text{const.}$, $\pi = 0$] on trouve, en effet, tout d'abord :

$$(87) \qquad \frac{\partial\, {}^*\mathfrak{S}_i^k\xi^i}{\partial x_k} = 0$$

où

$$ {}^*\mathfrak{S}_i^k = \mathfrak{W}\delta_i^k - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\mathfrak{G}^{\alpha\beta,k} - \alpha\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_i}\mathfrak{f}^{kr}.$$

Pour obtenir les équations de conservation, on doit écrire les équations de Maxwell sous la forme :

$$\frac{\partial\left(\pi\mathfrak{s}^i + \dfrac{\partial\pi}{\partial x_k}\mathfrak{f}^{ik}\right)}{\partial x_i} = 0$$

où $\pi = -(\varphi_i\xi^i)$, on multiplie par α et l'on ajoute membre à membre à (87). L'on trouve alors :

$$\frac{\partial\,\mathfrak{S}_i^k\xi^i}{\partial x_k} = 0$$

Dans $\mathfrak{S}_i^k$ il y a les termes suivants : la densité d'énergie de Maxwell :

$$\mathfrak{l}\delta_i^k - f_{ir}\mathfrak{f}^{kr},$$

l'énergie de gravitation :

$$\mathfrak{G}\delta_i^k - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\mathfrak{G}^{\alpha\beta,k}$$

et les termes cosmologiques :

$$\frac{1}{2}\lambda\sqrt{g} - \varphi_r\mathfrak{s}^r\,\delta_i^k - \varphi_i\mathfrak{s}^k.$$

L'univers statique est étalonné dès l'abord ; il s'agit de savoir si pour cet étalonnage F peut être constant. La réponse est affirmative. Changeons l'étalonnage de l'univers statique et désignons les grandeurs relatives à cet étalonnage par des lettres surlignées ; l'on a :

$$\overline{\varphi}_i = -\frac{F_i}{F} \qquad \text{où } F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$\overline{g}_{ik} = -Fg_{ik}, \text{ donc } \overline{g}^{ik} = -\frac{g^{ik}}{F}, \sqrt{\overline{g}} = F^2\sqrt{g},$$

l'équation (86) s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathfrak{F}_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (\mathfrak{F}^i = \sqrt{g}F^i),$$

mais cela prouve que $F = const.$

C'est parce qu'au terme cosmologique d'Einstein s'ajoute le terme électrique, que l'existence d'une particule matérielle est possible sans qu'il soit nécessaire d'exiger un horizon matériel. La particule est nécessairement chargée. Reprenons, pour déterminer les solutions à symétrie sphérique du cas statique, les anciennes notations du § 31, et soit φ le potentiel électrostatique, l'intégrale dont la variation est nulle est :

$$\int \mathfrak{V} r^2 dr = \int \left\{ w\Delta' - \frac{\alpha r^2 \varphi'^2}{2\Delta} + \frac{\lambda r^2}{2}\left(\Delta - \frac{3h^2\varphi^2}{2\Delta}\right) \right\} dr$$

(l'accent indique la dérivation par rapport à r). Les variations respectives de w, puis de Δ et enfin de φ donnent successivement :

$$\Delta\Delta' = \frac{3\lambda}{4} h^4\varphi^2 r,$$

$$w' = \frac{\lambda r^2}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{h^2\varphi^2}{\Delta^2}\right) + \frac{\alpha}{2}\frac{r^2\varphi'^2}{\Delta^2}$$

$$\left(\frac{r^2\varphi'}{\Delta}\right)' = \frac{3}{2\alpha}\frac{h^2 r^2 \varphi}{\Delta}.$$

Par les hypothèses faites, le système de coordonnées spatiales est déterminé à une rotation euclidienne près ; par suite h^2 est univoquement déterminé ; dans f et φ il reste un facteur commun constant, arbitraire par suite de l'indétermination de l'unité de temps. (C'est d'ailleurs une circonstance que l'on peut utiliser pour réduire à l'unité l'ordre de grandeur des quantités à déterminer.)

Si l'équateur de l'espace est atteint pour $r = r_0$, les grandeurs à déterminer sont fonctions de $z = \sqrt{r_0^2 - r^2}$ et pour $z = 0$, ces fonctions se comportent de la manière suivante : f et φ sont régulières, $f \neq 0$; h^2 est infini du second ordre, et Δ du premier. Les équations différentielles elles-mêmes montrent que le développement de $h^2 z^2$ suivant les puissances de z commence par le terme h_0^2 :

$$h_0^2 = \frac{2r_0^2}{\lambda r_0^2 - 2},$$

ce qui prouve d'ailleurs que λ doit être nécessairement positif (F négatif) et que $r_0^2 > \frac{2}{\lambda}$ On a de plus la relation suivante :

$$f_0^2 = \frac{3\lambda}{4} h_0^2 \varphi_0^2$$

entre les valeurs initiales de f et de φ. Si les points diamétralement opposés doivent être identifiés, φ doit être alors une fonction paire de z et la solution est déterminée univoquement par les conditions initiales pour $z = 0$ [37]). Elle ne peut rester régulière dans tout le domaine $0 \leqslant r \leqslant r_0$, mais elle doit présenter une singularité au plus tard pour $r = 0$ lorsque r décroît à partir de r_0. Sinon de l'équation différentielle qui définit φ, l'on tirerait en multipliant par φdr et intégrant de o à r_0,

$$\int_0^{r_0} \frac{r^2}{\Delta}\left(\varphi'^2 + \frac{3}{2\alpha} h^2 \varphi^2\right) dr = 0.$$

La matière est par suite de cela une véritable singularité du champ. Que les grandeurs d'état varient notablement dans les domaines dont les dimensions linéaires sont petites vis-à-vis de $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, cela s'explique peut-être parce que r_0^2 est très grand vis-à-vis de $\frac{1}{\lambda}$. Que toutes les parties élémentaires de la matière possèdent la même masse et la même charge, cela paraît être dû au fait qu'elles sont toutes dans le même univers de rayon r_0 ce qui paraît être en accord avec la représentation exposée au paragraphe 32, d'après laquelle ces grandeurs se déterminent à l'infini.

Pour terminer, nous écrivons les équations de la mécanique qui règlent le mouvement d'une particule matérielle. En fait, jusqu'ici, nous n'avons pas obtenu directement ces équations dans la théorie générale de la relativité. Nous pouvons ainsi tenir une promesse faite antérieurement (§ 32) ; nous avions dit, en effet, que la masse inerte est égale au flux du champ de gravitation à travers une surface entourant la matière, ce qui amène à concevoir la matière comme une singularité située en quelque sorte au delà du champ. Nous n'emploierons pas la mise en équation du paragraphe 27,

$$dmds = \mu dx, \qquad \mathfrak{T}_i^k = \mu u_i u^k$$

qui suppose une substance en mouvement; ces équations sont ici impossibles parce qu'elles contredisent aux propriétés d'invariance. En effet, d'après la première équation, μ est une densité scalaire de poids $\frac{1}{2}$, d'après la deuxième elle est de poids o puisque $\mathfrak{T}_i^k$ est une densité tensorielle au sens propre. Et l'on voit ainsi fort bien que ces équations sont incompatibles avec la nouvelle théorie pour la même raison qui fait qu'elles conduisent dans la théorie d'Einstein à des valeurs fausses pour la masse (fin du § 33). C'est donc dire que l'intégrale $\int dmds$ n'a aucune signification et qu'on ne peut pas par suite, la prendre pour expression de « l'action substantielle de la gravitation ». Nous avons déjà fait le premier pas vers notre but au paragraphe 33 ; nous avons envisagé le cas particulier d'un corps complètement isolé sur lequel n'agit aucune force extérieure.

Nous voyons par là, que nous devons partir des théorèmes de conservation de *l'énergie totale* $\mathfrak{S}$:

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} = 0 \tag{89}$$

Considérons un volume Ω entourant la particule, dont les dimensions soient grandes vis-à-vis des dimensions du noyau de concentration de celle-ci, mais petite vis-à-vis des dimensions de la région où le champ extérieur varie notablement. Dans son mouvement, Ω décrit un canal d'univers à l'intérieur duquel la particule matérielle balaie un canalicule. Le système de coordonnées est supposé choisi de telle manière que $x_0 = t$ représente le temps et que x_1, x_2, x_3 soient des coordonnées d'espace, les espaces $x_0 = const$, coupent le canal suivant le volume Ω. Les intégrales :

$$\int_{\Omega} \mathfrak{S}_i^0 dx_1 dx_2 dx_3 = J_i$$

prises sur Ω dans un espace $x_0 = const$, sont des fonctions de x_0 seule, elles représentent l'énergie ($i = 0$) et l'impulsion ($i = 1, 2, 3$) de la particule matérielle.

Intégrons le premier membre de (89) multiplié par dx_1, dx_2, dx_3 dans l'espace $x_0 = const$, sur le domaine Ω, le premier terme ($k = 0$) donne la dérivée $\frac{dJ_i}{dt}$, la somme des trois autres termes se transforme en une intégrale prise sur la surface de Ω ; nous l'appellerons $-K_i$, les équations

$$\frac{dJ_i}{dt} = K_i \tag{90}$$

sont donc les équations mécaniques ; les premiers membres représentent les composantes de la « *force d'inertie* », les seconds membres sont les composantes du « *champ de forces* » extérieur. Non seulement la force due au champ, mais aussi l'impulsion quadridimensionnelle J_i peut être représentée d'après la remarque du paragraphe 35, comme un flux à travers la surface limite de Ω. Si l'intérieur du canal renferme une singularité véritable, l'impulsion doit même être nécessairement définie de cette façon-là; l'on utilise alors l'artifice du « champ fictif » à la fin du paragraphe 35, et l'on en tire les équations mécaniques démontrées plus haut. *Il est important de remarquer, que dans ces équations n'interviennent que des quantités qui se déterminent par l'aspect du champ hors de la particule* (sur la surface de Ω) *et qui n'ont rien de commun avec la nature singulière de l'intérieur de la particule.* La séparation entre le champ extérieur et la particule n'est pas conditionnée par l'opposition entre l'énergie et l'impulsion, comme nous l'imaginions au paragraphe 25; mais c'est bien plutôt l'opposition, créée par la distinction du temps et de l'espace, entre le premier et les trois derniers termes des équations de conservation (89), ou, si l'on veut, c'est le fait que les canaux de singularité des particules matérielles n'ont *qu'une seule* dimension infiniment étendue tandis que les trois autres ont une extension très minime, qui donne vraiment la raison de l'opposition entre ce qui est cinétique et ce qui est potentiel dans l'expression des lois fondamentales de la mécanique. Cette conception fut explicitée très distinctement par Mie dans la troisième partie de « Force et inertie » de son travail d'approche sur « les fondements d'une théorie de la matière » [38]). Ce point de vue est bien le meilleur pour le développement des conséquences du principe d'action admis.

A côté de cela, il est nécessaire que nous nous rendions compte du sens des équations électromagnétiques et des équations de la gravitation. Parlons d'abord des équations de Maxwell; nous pouvons faire complètement abstraction de la gravitation, et nous replacer un instant sur le terrain de la théorie de la relativité restreinte. Pour ne pas retomber dans la représentation substantielle, nous ne voulons pas considérer les équations :

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{ik}}{\partial x_k} = \rho u^i,$$

qui s'appliquent à l'électron.

Leur vraie signification est plutôt la suivante : hors du canal Ω, l'on a les équations :

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{91}$$

La solution $\bar{f}_{ik}$ statique, à symétrie sphérique de celles-ci correspond au potentiel $\frac{e}{r}$, elle donne le flux e du champ électrique à travers une surface Ω enveloppant la particule. (Ce flux n'est pas nul, comme cela serait pour une solution de (91) ne présentant aucune singularité.) Puisque les équations (91) sont linéaires, cette propriété se conserve si l'on ajoute à f_{ik} une solution de (91) f_{ik} régulière ; par exemple, on peut faire $f_{ik} = const.$ Donc : $f_{ik}+\bar{f}_{ik}$ *doit être le champ qui entoure l'électron mobile*, pourvu que nous introduisions au moment considéré un système de coordonnées dans lequel l'électron soit en repos ; cette hypothèse sur la nature du champ hors de Ω n'est admissible, que si le mouvement considéré est quasi-stationnaire, la ligne d'univers de la particule s'écartant peu d'une droite. Le terme ρu^i dans l'équation de Lorentz, doit exprimer en bloc l'influence des singularités dues aux charges pour un domaine contenant beaucoup d'électrons. Mais ce terme ne se présente en général tel quel, que pour un *mouvement quasi stationnaire*. On ne peut rien tirer de là pour de fortes accélérations. L'idée, admise par les physiciens, suivant laquelle, d'après l'électrodynamique classique, une particule accélérée doit rayonner, ne me paraît pas du tout fondée, elle ne se justifie que si l'on attribue aux équations de Lorentz, la signification rappelée tout à l'heure et si l'on admet encore que la constitution de l'électron n'est pas modifiée par l'accélération. *La théorie atomique de Bohr*, brillamment confirmée par l'expérience a conduit aux résultats suivants : Il existe pour les électrons qui tournent dans l'atome, des trajectoires stationnaires particulières, sur lesquelles ils peuvent constamment se mouvoir sans être cause d'un rayonnement quelconque; ce n'est que lorsqu'ils passent d'une trajectoire stationnaire à une autre qu'ils émettent de l'énergie vibratoire électromagnétique [39]). Si la matière doit être considérée comme une singularité frontière du champ, nos équations ne donnent aucun renseignement sur la *création du champ par la matière ; elles ne donnent que les états possibles du champ ;* c'est cette lacune que comble provisoirement la *théorie des quanta.* L'hypothèse faite plus haut sur l'allure singulière du champ dans le voisinage de la particule se réalise, croyons-nous, pour un électron en mouvement quasi stationnaire. Naturellement, on peut développer d'autres hypothèses ; si la particule est un atome rayonnant, par exemple, on prendra pour f_{ik}, le champ d'un dipôle oscillant de Hertz. (C'est un état du champ qui est possible, mais qui est créé par la matière d'après Bohr, d'une manière toute différente de celle que Hertz imaginait).

Pour ce qui est de la gravitation, plaçons-nous tout d'abord sur le terrain de la théorie primitive d'Einstein. Les équations homogènes de la gravitation (d'après le § 31) admettent une solution statique à symétrie sphérique qui dépend *d'une seule constante m, la masse;* le flux du champ de gravitation à travers une sphère suffisamment grande entourant le centre, n'est pas nul, comme il devrait l'être si la solution ne présentait pas de singularité, mais il est égal à m.

Nous imaginons que par cette solution les valeurs des g_{ik} soient données sur le canal par certaines fonctions des coordonnées ; la présence de la particule matérielle change très peu ces fonctions, nous ne tiendrons pas compte de ces changements. Nous considérons la canalicule d'univers de la particule comme une ligne dans ce champ métrique.

Soit ds la différentielle de son temps propre. En un point de la ligne d'univers du mobile, introduisons un système de coordonnées normal, tel que en ce point :

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2),$$

les dérivées $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}$ s'évanouissent et la direction du courant est donnée par :

$$dx_0 : dx_1 : dx_2 : dx_3 = 1 : 0 : 0 : 0$$

Dans ce système de coordonnées, le champ doit s'exprimer par la solution statique mentionnée (bien entendu cela ne peut être que dans le voisinage immédiat du point d'univers considéré ; hors de ce voisinage le canal de la particule s'élargit.) Supposons que les coordonnées normales x_i soient considérées comme des coordonnées cartésiennes dans un espace image euclidien à quatre dimensions ; la ligne d'univers de la particule est représentée par une certaine courbe de l'espace image ; notre hypothèse n'est d'ailleurs admissible que si le mouvement est quasi stationnaire, c'est-à-dire si cette courbe image a une faible courbure en chacun des deux points. (Le passage des équations homogènes aux équations non homogènes dont le deuxième nombre est $\mu u_i u_k$ fait la part des singularités matérielles en les étalant dans un continuum ; cette disposition n'est valable que pour le cas quasi stationnaire.)

Reprenons maintenant les équations mécaniques. Nous utilisons une fois pour toutes l'étalonnage formé par $F = const$, et nous négligeons les termes cosmologiques hors du canal. On sait (§ 32) qu'on peut négliger, à une distance suffisante de la particule l'influence de la charge, vis-à-vis de l'influence de la masse. Par suite, nous pouvons admettre, en prenant le système normal de coordonnées, que le champ de gravitation est celui qui a été déterminé plus haut. La détermination du champ électromagnétique est alors, comme dans le problème de l'espace sans gravitation, un problème linéaire ; ce champ doit avoir la forme $f_{ik} + \overline{f}_{ik}(f_{ik} = const$ sur la surface de Ω). Cette forme n'est compatible avec les lois du champ que si $e = const$. Pour le prouver, calculons e pour un champ fictif, remplissant régulièrement le canal et coïncidant avec le champ donné hors de ce canal ; prenons un système de coordonnées quelconques :

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{s}^i, \qquad \int \mathfrak{s}^0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = e^*.$$

e^* est indépendant du choix du champ fictif puisque c'est un flux à travers la surface Ω. Or, les $\mathfrak{s}^i$ s'annulent sur la surface (en négligeant les termes cosmologiques), par conséquent l'équation de définition donne, grâce à :

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^i}{\partial x_i} = 0, \qquad \text{et par intégration, } \frac{de^*}{dt} = 0$$

et en outre les développements du paragraphe 33, montrent que e^* est indépendant du système de coordonnées. En utilisant en un point un système normal de coordonnées, la représentation de e^* par un flux montre que $e = e^*$. En passant de la charge à l'impulsion, nous devrons faire attention que nous ne pouvons pas nous appuyer ici sur la théorie générale du paragraphe 35, pour la représentation des composantes de l'énergie et de l'impulsion, parce que, dans l'intégration par parties qui conduisait à (84), nous avons particularisé nettement l'étalonnage.

A l'aide du champ fictif régulier dans tout le canal, nous définissons :

$\alpha\mathfrak{S}_i^k$ par l'expression $\left(\mathfrak{R}_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k\mathfrak{R}\right) + \left(\mathfrak{G}\delta_i^k - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\mathfrak{G}^{\alpha\beta,k}\right)$

et pour cette grandeur, l'équation :

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} = 0 \tag{92}$$

est une identité. Par intégration, on trouve l'équation (90) avec

$$J_i = \int_\Omega \mathfrak{S}_i^0 dx_1 dx_2 dx_3.$$

K_i s'exprime par un flux à travers la surface de Ω ; dans ces expressions, le champ fictif peut être remplacé par le champ véritable et outre cela, d'après les équations de la gravitation,

$$\frac{1}{\alpha}\left(\mathfrak{R}_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k\mathfrak{R}\right)$$

peut être remplacé par

$$\mathfrak{l}\delta_i^k - f_{ir}\mathfrak{f}^{kr}.$$

En utilisant un système normal de coordonnées, le terme relatif à l'énergie de gravitation disparaît; car les composantes de celle-ci ne dépendent pas linéairement, mais bien quadratiquement des dérivées (nulles ici) $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}$. Il ne reste plus que la partie électromagnétique qu'on calcule d'après les équations de Maxwell. Puisque les composantes de la densité d'énergie de Maxwell dépendent quadratiquement du champ $f + \bar{f}$, chacune d'elles comprend 3 termes conformément à la formule :

$$(f + \bar{f})^2 = f^2 + 2f\bar{f} + \bar{f}^2.$$

Or, le premier terme ne donne rien car le flux d'un vecteur constant à travers une surface fermée est nul; le dernier est négligeable puisque $\bar{f}$ est faible; il ne reste que le deuxième terme, celui-ci donne :

$$K_i = e f_{0i}.$$

En suivant les mêmes chemins qu'au § 33, en nous appuyant sur les identités (92) et en considérant la section du canalicule d'univers de la particule comme infiniment petite, l'on tire les conséquences suivantes :

1) vis-à-vis des transformations de coordonnées qui sont à considérer comme linéaires dans la section du canal, les J_i sont les composantes covariantes d'un vecteur indépendant du système de coordonnées. 2) par le changement d'un champ fictif remplissant le canal en un autre (dans le § 33, il s'agissait à la place de ce changement d'un changement de coordonnées) les grandeurs J_i conservent leurs valeurs. Mais dans un système normal de coordonnées, où le champ gravifique entourant la particule possède l'aspect déterminé au § 31, on sait que l'on peut choisir le champ fictif comme un

champ statique, et d'après la page 239, : J_1, J_2, $J_3 = 0$ et J_0 est égal au flux d'une densité vectorielle spatiale à travers la surface de Ω, et vaut par suite m. A cause de la propriété de covariance de J_i, on a, non seulement au point considéré du canal, mais aussi immédiatement avant et après :

$$J_i = mu_i \qquad \left(u^i = \frac{dx_i}{ds}\right);$$

Par conséquent les équations du mouvement de notre particule s'écrivent dans un système normal,

$$\frac{d(mu_i)}{dt} = ef_{0i}. \tag{93}$$

L'équation (93) relative à l'indice $i = 0$ donne :

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

donc les équations du champ exigent la constance de la masse.

Mais dans un système de coordonnées quelconque, on a :

$$\frac{d(mu_i)}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} mu^\alpha u^\beta = e \cdot f_{ki}u^k. \tag{94}$$

En effet, les équations (94) sont invariantes, et elles donnent bien (93) quand on particularise le système.

La condition nécessaire pour qu'un canal de singularités, dans le voisinage duquel le champ possède la structure exigée, soit compatible avec les propriétés de ce champ, c'est que les grandeurs e et m qui caractérisent la singularité en chaque point du canal, restent constantes le long du dit canal, la direction universelle du canal satisfaisant aux équations :

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} u^\alpha u^\beta = \frac{e}{m} \cdot f_{ki}u^k.$$

A la lumière de ces remarques il faut considérer, nous semble-t-il, l'idée émise au § 25 que la masse et l'énergie du champ sont identiques comme une conséquence tirée trop hâtivement ; les conceptions de Mie sur la matière paraissent dans leur ensemble peu fondées. En vérité, la théorie de la relativité restreinte conduit nécessairement à ces conceptions; ce n'est que par la théorie générale qu'il est possible de représenter la masse comme un flux et que l'on peut assigner à l'univers une constitution comme celle que possède « l'univers cylindrique » (§ 34) d'Einstein, en y traçant des canaux déliés s'étendant à l'infini dans les deux sens. Cette représentation-là de la masse m exprime que non seulement la masse inerte est identique à la masse pesante, mais aussi que la masse considérée comme le *lieu d'action* du champ métrique est essentiellement identique à la masse considérée comme la *cause* du champ métrique. La théorie de l'inertie de l'énergie reste naturellement acquise. Par exemple, une particule rayonnante perd autant de masse inerte qu'elle rayonne d'énergie électromagnétique. (C'est cet exemple qui montra tout d'abord à Einstein la relation entre l'énergie et l'inertie); on le démontre rigoureusement et simplement au moyen des considérations que nous avons développées tout à l'heure. De plus, le nouveau point de vue ne nous ramène pas du tout vers la représentation des choses au moyen de la substance. La question qui se posait à propos de la pression de cohésion fixant la charge sur l'électron, n'a pas de sens à ce point de vue.

A peu près avec la même vraisemblance que dans la théorie d'Einstein, nous pouvons conclure de nos résultats qu'une *horloge* en mouvement quasi stationnaire mesure le temps propre $\int ds$ qui correspond à la normalisation $F = const.$ * Si une horloge (un atome) dont la période est infiniment petite se déplaçait congruement au sens de notre géométrie d'univers durant chacune de ses périodes, il s'ensuivrait que deux horloges parties d'un même point d'univers A en lequel elles sont identiques, c'est-à-dire qui subiraient durant leur première période le même déplacement d'univers, présenteraient des périodes différentes en un point B où elles se rencontreraient à nouveau. Le mouvement de l'électron dans l'atome ne se fait certainement pas de cette manière puisque la fréquence des raies spectrales des atomes ne dépend pas de l'histoire de l'atome ; donc une période ne correspond pas à un déplacement congruent. De même, un étalon de longueur ne subit pas un déplacement congruent dans un champ statique ; car la mesure $l = d\sigma^2$ d'une règle au repos ne change pas alors qu'elle devrait satisfaire à l'équation $\frac{dl}{dt} = -l.\varphi$. En quoi consiste donc la différence entre le déplacement congruent et le maintien des règles, des horloges et des atomes ? — Je distingue dans la nature deux manières de se comporter pour une grandeur : ou bien elle *réagit*, ou bien elle *subit*. Expliquons cela par des exemples. Nous pouvons donner à chaque instant à l'axe d'une toupie en rotation une direction arbitraire dans l'espace; la direction de l'axe, à un instant quelconque, de la toupie laissée à elle-même, se détermine à partir de la direction initiale arbitraire de moment en moment grâce au fait que cette direction réagit et semble se conserver : l'axe subit à chaque instant une translation parallèle. Au contraire de l'axe d'une toupie, l'aiguille aimantée prend à chaque instant une position qui ne dépend en rien de son état antérieur, mais qui dépend uniquement de la forme du champ ; le système se présente donc en un point d'une manière tout à fait univoque indépendante de son histoire antérieure.

* En fait la forme quadratique invariante $F ds^2$ ne se distingue pas immédiatement des autres formes qui ont l'aspect $E ds^2$ (où E est un scalaire de poids -1) comme le ds^2 d'Einstein qui ne contient pas les dérivées du potentiel en général. C'est pourquoi ici la théorie du déplacement vers le rouge (p. 215) n'est pas aussi convaincante que chez Einstein; elle perd en général sa validité quand on considère un autre principe d'action que celui que nous discutons ici.

A priori, rien ne nous oblige à admettre que le déplacement d'une grandeur qui tend à se conserver soit intégrable. En admettant même que cela soit le cas, deux toupies partant d'un même point avec la même direction d'axes, suivant chacune un chemin particulier et se rencontrant en un point, y présenteront un écart de leurs axes tout-à-fait quelconque, car les toupies ne peuvent être protégées complètement contre les actions extérieures. Quoique, par exemple, les équations de Maxwell exigent que la charge e d'un électron satisfassent à l'équation $\frac{de}{dt} = o$ nous ne pouvons pas comprendre pour quelles raisons un électron possède toujours la même charge, après un long intervalle de temps, ni pourquoi tous les électrons possèdent la même charge e, si l'on suppose que la charge est une grandeur qui conserve son individualité. Ces faits montrent que la charge n'est pas une grandeur qui tend à se conserver, mais au contraire, c'est une grandeur qui se détermine en chaque point, par les influences extérieures ; il ne peut y avoir qu'un *seul* état d'équilibre de l'électricité négative, cet état est celui dans lequel le corpuscule se place à chaque instant. Nous pouvons faire un raisonnement analogue pour les raies spectrales de l'atome; ce qui est vraiment commun aux atomes qui rayonnent la même fréquence, c'est leur constitution et non pas la coïncidence de leurs fréquences quand on les remet dans les mêmes conditions après une longue séparation.

La détermination de la longueur d'une règle placée en un point se fait par les influences extérieures, car je ne pourais pas donner arbitrairement *à cette règle* et *en un point* n'importe quelle valeur, par exemple le double ou le triple de celle qu'elle a, comme je puis lui donner la direction que je veux. Grâce à la courbure de l'univers, la possibilité théorique d'une détermination de la longueur par le champ est possible; par suite de sa constitution, la règle prend telle ou telle longueur qui est en rapport avec le rayon de courbure de l'univers. (La durée de révolution d'une toupie autour de son axe est peut-être un exemple d'une durée qui se détermine d'instant en instant ; si c'est la même chose, comme nous l'admettions plus haut, pour la direction de l'axe, alors la vitesse de rotation subit à chaque instant un déplacement parallèle). En résumé nous pouvons donc dire : par les connexions affine et métrique, on fixe à priori comment les *vecteurs et les longueurs se comportent, au cas où ils suivent purement leur tendance à persévérer, c'est-à-dire au cas où ils réagissent sur le champ.*

Jusqu'à quel point cela se produit-il dans la nature et dans quels rapports les deux tendances se modifient-elles ? voilà des questions qu'on ne peut résoudre qu'en se référant au fondement des lois de la nature : le principe d'action.

Ce que nous avons discuté jusqu'ici, ce sont les conséquences du plus simple principe d'action que l'on puisse imaginer d'après les théories de Maxwell-Einstein, et d'après les fondements de la nouvelle théorie de l'invariance vis-à-vis de l'étalonnage. Nous avons vu qu'il y a un accord parfait entre l'expérience et les conséquences prévues par la théorie ; de plus, relativement aux questions très profondes qui s'attachent au problème cosmologique et au problème de la matière, elle donne des précisions plus importantes que les autres théories. Nous doutons cependant que la fonction hamiltonienne (83) corresponde à la réalité.

Nous pouvons admettre que $\mathfrak{W}$ a bien la forme : $W.\sqrt{g}$ où W est un invariant formé rationnellement avec les composantes de la courbure et de poids — 2. Il n'existe que *quatre* invariants indépendants ayant cette forme ; les autres peuvent s'exprimer avec ceux-là [40]. L'un est l'invariant de Maxwell :

$$l = \frac{1}{4} f_{ik}f^{ik} \tag{95}$$

un autre est celui que nous avons utilisé plus haut F^2. La courbure est par sa naissance, un tenseur-matrice de deuxième espèce : $\mathsf{F}_{ik}dx_i dx_k$. D'après la même loi qui donne le carré de la valeur absolue de la courbure segmentaire (95), on forme la courbure totale

$$\frac{1}{4} \mathsf{F}_{ik}\mathsf{F}^{ik} \tag{96}$$

La multiplication doit s'entendre ici comme une composition de matrice; (96) est à son tour une matrice. Seulement sa trace L est un scalaire; c'est même un scalaire de poids — 2. Les deux grandeurs L et l me paraissent être les invariants de l'espèce exigée qui se forment de la manière la plus simple, et ce n'est que dans un univers à quatre dimensions qu'il existe des invariants d'une construction aussi aisée et aussi naturelle. Je crois plutôt que W est une combinaison linéaire de L et de l. Les équations de Maxwell s'expriment comme plus haut : par le choix d'un étalonnage normal tel que $F = const$, l'on voit que $\mathfrak{s}^i$ est égal à un multiple de $\sqrt{g}\varphi^i$ (le facteur étant constant) et $\mathfrak{h}^{ik} = \mathfrak{f}^{ik}$. Les lois de la gravitation coïncident aussi dans le cas statique et en première approximation avec les lois de Newton. Les calculs de M. Pauli [41] ont même prouvé que le champ déterminé au § 31 n'est pas seulement une solution rigoureuse des équations d'Einstein, mais est aussi une solution de nos équations, de sorte que les nombres obtenus pour le déplacement du périhélie de Mercure et pour la déviation des rayons lumineux ne sont pas en contradiction avec notre théorie. Mais dans la question des équations mécaniques et dans celle des rapports entre les mesures de longueur et de temps d'une part, et de la forme quadratique ds^2 d'autre part, il semble qu'il y ait un hiatus avec l'ancienne théorie; il faut attendre d'ailleurs de nouvelles conséquences.

Il y a une objection sérieuse contre la théorie que nous avons développée : elle ne rend pas compte du tout de *la différence entre l'électricité négative et l'électricité positive* [42]. Pour lever cette difficulté, deux chemins s'offrent à nous : ou bien il faudrait introduire dans la fonction qui donne l'action une racine carrée ou une irrationnalité convenable; cette manière de faire a été discutée à propos de la théorie de Mie et nous avons vu quelle interprétation suppose une action irrationnelle. Ou bien, comme je le crois plus volontiers, il faut imaginer une autre conception de la réalité. Nous ne nous sommes occupé que du *champ* jusqu'ici; il satisfait à certaines lois invariantes. Mais il s'agit de savoir quelle est la *cause* de ces différents états du champ compatibles avec nos lois; cette cause doit correspondre à certaines réalités que nous n'avons pas encore analysées. Ainsi dans l'éther, des ondes sphériques électromagnétiques peuvent être aussi bien convergentes que divergentes, mais les dernières seules peuvent se produire; il suffit d'une émission d'énergie par un électron dans un atome de Bohr pour les réaliser. Cet exemple montre que l'idée de cause est liée d'une manière très étroite *à la direction d'écoulement du temps Passé → Avenir* (et non pas à la relation fonctionnelle qui est réversible). Cette dissymétrie du temps est indiscutable, — c'est même ce qui est essentiel dans l'idée que nous en avons — mais la physique du champ ne peut la mettre en évidence. Or nous avons vu plus haut (§ 33) que la charge d'un système isolé est complètement déterminée, en signe comme en grandeur, dès que l'on a fixé un sens de parcours déterminé passé→ avenir, dans le canal d'univers balayé par le système. On voit par là, que la différence entre les deux électricités est liée en quelque manière à la dissymétrie du temps; mais ce problème n'a pas ses racines dans le champ. D'autres faits encore ressortissent à l'origine du champ plutôt qu'à son état: l'existence de frontières du champ dont les formes sont analogues à celles d'un tube très allongé, nos hypothèses sur la nature du champ dans le voisinage immédiat de ces frontières, enfin et surtout la théorie des quanta. Mais la manière dont ces points sont étudiés actuellement est encore provisoire. En tout cas, il me paraît que la *statistique* doit jouer dans la résolution de ces problèmes un rôle essentiel. Il doit être dit une fois clairement que la physique actuelle ne peut plus s'appuyer sur la croyance à une causalité de nature matérielle reposant sur des lois rigoureusement exactes. Le champ, « l'éther » est simplement le *véhicule* passif de l'action ; il ne joue pas d'autre rôle que celui que jouait l'espace euclidien dans l'ancienne physique ; ce n'est qu'un serviteur modeste plus souple et plus docile. La variété des possibles dans l'univers n'est pas plus bornée par les lois rigoureuses du champ qu'elle ne l'était dans l'ancienne physique par la validité des lois de la géométrie euclidienne. Si l'idée de Mie était réalisée, nous reconnaîtrions dans le champ seul, la réalité objective, et la physique ne serait plus très loin du but qu'elle se propose ; elle nous donnerait sur l'essence du monde physique, de la matière et des forces naturelles, un ensemble de théories où les lois qui règlent les phénomènes s'enchaîneraient d'une façon nécessaire et intelligible [43]).

Malheureusement de telles espérances s'envolent actuellement. Les lois du champ métrique nous renseignent moins sur la réalité que sur ce milieu qui permet le transport de l'action et qui engendre les relations dans le réel. *La physique statistique* et la théorie des quanta ont déjà entamé une couche profonde de la réalité et les résultats obtenus sont en accord avec la physique du champ; mais le problème de la matière est encore tout à fait dans l'ombre. Cependant la connaissance de la signification restreinte du champ ne doit pas nous empêcher de reconnaître les résultats importants que nous avons obtenus. Celui qui mesure le chemin parcouru, depuis la métrique euclidienne jusqu'au champ métrique variable dépendant de la matière et renfermant les manifestations de la gravitation et de l'électromagnétisme, celui qui cherche à embrasser d'un coup d'œil ce que notre exposé a forcément fragmenté et morcelé, celui-là doit éprouver un sentiment de liberté, comme s'il sortait d'une cage où il était enfermé jusqu'ici ; il doit être pénétré de la certitude que notre raison n'est pas seulement un pis aller humain, par trop humain, pour la lutte pour la vie, mais qu'elle s'est développée malgré toutes les embûches et les errements jusqu'au point où elle peut embrasser objectivement la vérité.

Quelques-uns des accords puissants de cette harmonie des sphères auxquels Pythagore et Képler rêvaient, sont parvenus à nos oreilles.

APPENDICE I

(Voir pages 156 et 200)

Pour distinguer dans la théorie de la relativité restreinte, les systèmes *normaux* de coordonnées de tous les autres, et pour déterminer dans la théorie générale, la forme métrique fondamentale, on doit se référer non seulement au corps solide, mais aussi à la marche des horloges.

Dans la théorie *restreinte*, la représentation d'une portion d'univers par des coordonnées x_i sur un espace-image euclidien à 4 dimensions où l'on a pris les x_i comme coordonnées cartésiennes, doit être telle que les lignes d'univers des points qui ne sont soumis à aucune force soient représentés par des *droites;* cet espace-image est déterminé à une transformation projective près. On sait que parmi les transformations continues d'une portion d'espace, les seules qui font correspondre toujours une droite à une droite sont les transformations projectives. Ce théorème est immédiat quand on remplace dans la construction du réseau de Möbius (fig. 12) la droite de l'infini par une droite qui coupe notre portion d'espace (fig. 15). Le phénomène de la propagation de la lumière fixe dans notre espace-image projectif quadridimensionnel, *l'infini* et la *métrique; car son plan* (tridimensionnel) *à l'infini E* est déterminé par la condition que les cônes de lumière qui sont issus des différents points d'univers soient les lieux des projetantes d'une seule et même conique bidimensionnelle située dans E.

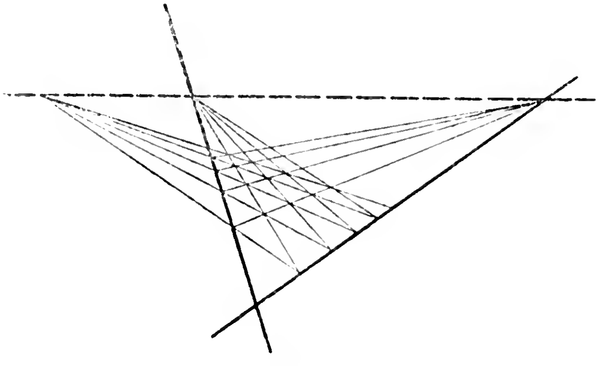

Fig. 15

Dans la théorie *de la relativité généralisée*, ces conclusions se présentent très simplement de la manière suivante : L'espace riemannien à 4 dimensions, au moyen duquel Einstein se représente l'univers, est un cas particulier de l'espace métrique général (§ 16). C'est pour cela que nous pouvons dire que la propagation de la lumière détermine la forme *quadratique* fondamentale ds^2 tandis que la forme *linéaire* reste arbitraire. A deux choix distincts de la forme linéaire fondamentale, qui diffèrent de $d\varphi = \varphi_i dx_i$ correspondent deux espèces de connexions affines; leur différence est caractérisée par : [§ 16, formule (49)].

$$[\Gamma^i_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2}(\delta^i_\alpha \varphi_\beta + \delta^i_\beta \varphi_\alpha - g_{\alpha\beta}\varphi^i).$$

La différence de deux vecteurs provenant du vecteur u^i attaché au point d'univers O, et qu'on a déplacé parallèlement à lui-même dans sa propre direction suivant les deux procédés relatifs à chacune des connexions, de la même quantité $dx_i = \varepsilon u^i$ est par suite égale à ε fois :

$$(*) \qquad u^i(\varphi_\alpha u^\alpha) - \frac{1}{2}\varphi^i\ ;$$

on a fait : $g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 1$. Si pour les deux champs, les géodésiques issues de O et tangentes à u^i coïncident, les deux vecteurs obtenus par le déplacement parallèle de u^i doivent avoir des directions identiques; le vecteur (*), et par suite le vecteur φ^i, doivent avoir la direction du vecteur u^i. Si cette coïncidence a lieu pour *deux* lignes géodésiques différentes issues de O, on aura $\varphi^i = 0$. Si nous connaissons donc les lignes d'univers de deux points matériels soumis uniquement à l'action du champ de contrainte, et si ces deux lignes passent par O, la forme linéaire fondamentale est parfaitement déterminée en O.

APPENDICE II

(*Voir page* 203).

Démonstration du théorème qui dit que dans l'espace riemannien, R est le seul invariant qui ne contienne les dérivées des g_{ik} que jusqu'au 2e ordre, celles du 2e ordre n'y entrant que linéairement.

L'invariant J est formé d'après l'hypothèse au moyen des dérivées du deuxième ordre :

$$g_{ik,rs} = \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_r \partial x_s}$$

de la manière suivante :

$$J = \Sigma \lambda_{ik,rs} g_{ik,rs} + \lambda$$

Les $\lambda_{ik,rs}$ sont des expressions construites avec les g_{ik} et leurs dérivées premières. Elles satisfont aux conditions de symétrie :

$$\lambda_{ki,rs} = \lambda_{ik,rs}, \qquad \lambda_{ik,sr} = \lambda_{ik,rs}.$$

Au point O, où nous considérons l'invariant, introduisons un système de coordonnées géodésique et orthogonal, de sorte que l'on ait :

$$g_{ik} = \delta_i^k \qquad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} = 0$$

Les λ se transforment alors en *constantes absolues*. Le caractère particulier du système de coordonnées n'est pas détruit :

1° par une tranformation orthogonale;

2° par une transformation :

$$x_i = x'_i + \frac{1}{6} \alpha^i{}_{krs} x'_k x'_r x'_s,$$

qui ne contienne aucun terme quadratique; les coefficients α étant symétriques en k, r, s, et à part cela arbitraires.

Considérons alors un espace euclidien et cartésien (dans lequel des transformations linéaires orthogonales quelconques sont possibles) la forme biquadratique

$$G = g_{ik,rs} x_i x_k y_r y_s$$

dépendant des deux vecteurs $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ et dont les coefficients $g_{ik,rs}$ sont quelconques, à la symétrie près, en i et k comme en r et s; alors :

(1) $$\lambda_{ik,rs} g_{ik,rs}$$

doit être un invariant de cette forme. Puisque d'autre part, par la transformation 2) les dérivées $g_{ik,rs}$ se transforment, comme un calcul simple le montre, en :

$$g'_{ik,rs} = g_{ik,rs} + \frac{1}{2} (\alpha^i_{krs} + \alpha^k_{irs}),$$

c'est que l'on doit avoir :

(2) $$\lambda_{ik,rs} \alpha^i_{krs} = 0$$

pour chaque système de nombres α symétriques en k, r, s.

Continuons à opérer dans l'espace euclidien et cartésien, soit (xy) le produit scalaire $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$. Il suffit d'employer pour G une forme de l'espèce particulière :

$$G = (ax)^2(by)^2,$$

où a et b sont des vecteurs arbitraires. Ensuite, écrivons à nouveau x et y à la place de a et b; 1) montre que :

$$(1^*) \qquad \Lambda = \Lambda_x = \Sigma\lambda_{ik,rs}x_ix_ky_ry_s$$

est un invariant orthogonal des deux vecteurs x, y. Dans 2) il suffit de choisir :

$$\alpha^i_{krs} = x_i \cdot y_ky_ry_s$$

et alors cette condition signifie que la forme Λ_y qu'on obtient en changeant dans Λ_x un des x en y

$$(2^*) \qquad \Lambda_y = \Sigma\lambda_{ik,rs}x_iy_ky_ry_s$$

est nulle identiquement.

(On obtient cette forme en considérant la forme bilinéaire symétrique $\Lambda_{xx'}$ en x et x' et quadratique en y, qui se transforme en Λ_y par identification des x et des x' et en y remplaçant ensuite x' par y). Je dis que d'après 1*), Λ a la forme

$$(\mathrm{I}) \qquad \Lambda = \alpha(xx)(yy) - \beta(xy)^2$$

et d'après 2*) que :

$$(\mathrm{II}) \qquad \alpha = \beta$$

Nous serons alors parvenus au but. Car nous en tirons :

$$J = \alpha(g_{ii,kk} - g_{ik,ik}) + \lambda;$$

ou puisque dans le système de coordonnées choisi le scalaire de courbure est

$$R = g_{ik,ik} - g_{ii,kk}$$

on a :

$$(^*) \qquad J = -\alpha R + \lambda.$$

Démonstration de (I). Choisissons, ce qui est possible, un système de coordonnées cartésien, tel que le vecteur x soit sur le 1er axe de coordonnées et y dans le plan (1, 2); alors :

$$x = (x_1, 0, 0, \ldots, 0), \qquad y = (y_1, y_2, 0, \ldots, 0);$$

$$\Lambda = x_1^2(ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2).$$

En outre, le sens du deuxième axe de coordonnées peut être arbitrairement choisi et puisque Λ n'en doit point dépendre, $b = 0$

$$\Lambda = cx_1^2(y_1^2 + y_2^2) + (a - c)(x_1y_1)^2 = c(xx)(yy) + (a - c)(xy)^2.$$

Démonstration de (II). Formons $\Lambda_{xx'}$ en partant de (1) :

$$\Lambda_{xx'} = \alpha(xx')(yy) - \beta(xy)(x'y),$$

et par suite :

$$\Lambda_y = (\alpha - \beta)(xy)(yy).$$

mais $\Lambda^y = 0$ identiquement; donc $\alpha = \beta$.

Nous avons admis implicitement que la forme métrique fondamentale était définie positive; dans le cas d'un autre indice d'inertie, il faut apporter à la démonstration de (1) une légère modification. Afin que dans l'intégrale quadruple prise sur J, les dérivées partielles du second ordre puissent disparaître par intégration partielle, il faut que les $\lambda_{ik,rs}$ ne dépendent que des g_{ik} et pas de leurs dérivées; mais cela n'était pas à considérer dans la démonstration. Sur la signification physique de la possibilité d'ajouter d'après (*) à un multiple de R une constante universelle λ, voyez § 34; et comparer pour la démonstration indiquée ici : Vermeil : Nachr. der Gesell. d. Wissensch zu Göttingen : 1917, p. 334-344. On peut démontrer de la même manière que g_{ik}, Rg^{ik} sont les seuls tenseurs de 2e espèce qui ne contiennent que les dérivées du 1er ordre et du 2e ordre des g_{ik} ; ces dernières linéairement.

BIBLIOGRAPHIE

*(Après le numéro d'ordre de chaque remarque bibliographique, on a donné en caractères gras le numéro de la page à laquelle elle est relative *).*

Introduction et chapitre I

1). **4**. L'expression de cette idée est calculée sur : *Husserl* « Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie » (Jahrbuch f. Philos. u. phänomenol. Forschung. Bd I, Halle, 1913).

2). **12**. *Helmholtz* a fait un premier essai pour fonder la géométrie sur les propriétés des groupes de mouvements, dans son travail : « Ueber die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen ». (Nachr. der K. Gesellschaft d. Wissenschaft zu Göttingen, math-phys. Kl. 1868). Une traduction française d'un travail qui porte le même titre, mais où les calculs ne sont pas développés a paru à Paris en 1900; elle est due à *Hoüel*. Une forme mathématique très élégante de ce problème de *Helmholtz* se trouve dans les travaux de *S. Lie* (Berichte der K. Sächs. Ges. d. Wissenschaften zu Leipzig, math.-phys. Kl. 1890); elle est fondée sur la théorie des groupes continus de transformations (voir aussi *Lie-Engel*, Theorie der Transformationsgruppen Bd. 3 Abt. 5). Les hypothèses fondamentales ont été étudiées par *Hilbert ;* (Grundlagen der Geometrie, 4. Aufl. Leipzig, 1913, Anhang IV) avec les méthodes de la théorie des ensembles.

3). **16**. Pour l'étude systématique de la géométrie affine, comme pour tout ce qui concerne le calcul géométrique, c'est le mémoire de *Grassmann* « Lineale Ausdehnungslehre » (Leipzig, 1844) qui est le travail le plus pénétrant. Pour l'étude des multiplicités à plus de 3 dimensions, *Grassmann* et *Riemann* ont été influencés par les idées philosophiques de *Herbart*.

4). **27**. L'aspect systématique que le calcul tensoriel prend ici est dû essentiellement à *Ricci* et *Levi-Civita* : Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. — Math. Ann. Bd 54 (1901).

* Nous avons complété les indications bibliographiques données par M. Weyl, par quelques adjonctions relatives à des travaux écrits en langue française. (N. d. T.).

CHAPITRE II

1). **66**. Pour une orientation plus précise, nous renvoyons à *Bonola* et *Liebmann* : Die Nicht-Euklidische Geometrie (Sammlung « Wissenschaft und Hypothese » Bd. IV. Teubner) ou à *Barbarin*. La géométrie non euclidienne (Collection Scientia).

2). **69**. *F. Klein*. Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie : Math. Annalen Bd. IV. 1871, p. 573. Voy. aussi Math. Ann. Bd. 6 (1873), p. 112 et Bd. 37 (1890), p. 544. Une traduction du premier article a paru dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 1re série, t. II, 1871, p. 341.

3). **70**. Sixth Memoir upon Quantics. Philosophical Transactions, t. 149, (1859).

4). **77**. Mathematische Werke (2e éd., Leipzig, 1892). Nr. XIII, p. 272, trad. française de Laugel, Paris, 1898, p. 280. Voir une édition particulière de ce mémoire, commenté par l'Auteur du présent livre (2e éd., Berlin, 1920).

5). **80**. Saggio di interpretazione della geometria non euclidea. Giorn. di Matem. t. IV (1868), p. 204; Opera matem. (Milano, 1902), t. I, p. 374.

6). **80**. Grundlagen der Geometrie (4e éd., Leipzig, 1913), Anhang V.

7). **83**. Voir les travaux cités sous I[2]). *Christoffel :* Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. Journal f. d. reine und angew. Mathematik, Bd. 70 (1869); *Lipschitz* dans le même journal Bd. 70 (1869), p. 71 et Bd. 72 (1870), p. 1.

8). **88**. *Christoffel*, l. c. [7]). *Ricci* et *Levi-Civita* loco cit. I[4]).

9). **88**. Les travaux suivants, très utiles pour la théorie de la gravitation, sont extrêmement importants pour l'édification de cette géométrie : *Levi-Civita* : Nozione di parallelismo in una varietà qualunque..., Rend. del. Circ. Mat. di Palermo, t. 42, 1917 et *Hessenberg*: Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie. Math. Ann. Bd. 78 (1917). Pour une étude généralisée, voir aussi *Weyl* « Reine Infinitesimalgeometrie » Math. Zeitschrift, Bd. 2 (1918).

10). **97**. La notion de déplacement parallèle d'un vecteur a été élaborée suivant les idées de Riemann, par *Levi-Civita* [9]) ; l'auteur y suppose que l'espace riemannien est plongé dans un espace euclidien à un nombre suffisant de dimensions. Une exposition directe de cette notion a été indiquée par nous, dans la 1re édition allemande de ce livre, avec l'aide des systèmes géodésiques de coordonnées; pour une exposition axiomatique, voir le travail de l'auteur cité sous [9]) (Reine Infinitesimalgeometrie) Voir en outre : *J.-A. Schouten*. Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie. Verh. d. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, 1919.

11). **115**. *Hessenberg*, l. c. [9]), p. 190.

12). **124**. Voir le grand ouvrage *Lie-Engel :* Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig, 1888-1893; relativement à ce « 2e théorème fondamental » et sa réciproque, voir en particulier Bd. I, p. 156, Bd. III, p. 583 et 659; voir aussi *Fr. Schur*. Math. Ann. Bd. 33, p. 54.

13). **127**. Une autre expression, tirée de la théorie des groupes, de ce problème de l'espace se base sur les recherches de *Lie* et *Helmholtz* mentionnées dans le chapitre I[2]).

CHAPITRE III

1). **129**. Sur la bibliographie concernant la relativité restreinte, voir une fois pour toutes le livre de *Laue :* Die Relativitätstheorie I (4e éd., Braunschweig, 1921).

2). **140**. *Helmholtz :* Monatsber. d. Berliner Akademie. Mars 1876 ou Ges. Abhandlungen. Bd. I (1882), p. 791. *Eichenwald :* Annalen der Physik, Bd. 11 (1903), p. 1.

3). **147**. Cette affirmation n'est pas valable sans quelques restrictions; voir *A. Korn :* Mechanische Theorie des elektromagnetischen Feldes; une série d'articles parus dans la Physikalische Zeitschrift Bd. 18, 19 et 20 (1917-1919).

4). **149**. *A.-A. Michelson*, Sill. Journal. vol. 22 (1881), p. 120. *A.-A. Michelson* and *E. W. Morley* id, vol. 34 (1887), p. 333. *E. W. Morley* and *D. C. Miller*, Philos. Magazine, vol. 8 (1904), p. 753 et vol. 9 (1905), p. 680. *H. A. Lorentz*. Arch. néerl. vol. 21 (1887), p. 103 ou Ges. Abhandlungen Bd. I, p. 341. Depuis l'élaboration de la théorie de la relativité par Einstein, l'expérience a été discutée un grand nombre de fois.

5). **150**. Voir p. ex. *Trouton* and *Noble :* Proc. Roy. Soc. vol. 72 (1903), p. 132. *Lord Rayleigh* : Philos. Magaz. vol. 4 (1902), p. 678, *D. B. Brace* : id. vol. 7 (1904), p. 317, vol. 10 (1905), p. 71 et p. 591 : *B. Strasser* : Annalen d. Physik, Bd. 24 (1907), p. 137; *Des Coudres :* Wiedemanns Annalen Bd. 38 (1889), p. 71; *Trouton and Rankine* : Proc. roy. Soc. vol. 8 (1908), p. 420.

6). **150**. Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annalen d. Physik Bd. 17 (1905), p. 891.

7). **151**. *Minkowski*. « Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern », Nachr. d. K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, 1908, p. 53, ou Ges. Abhandl. Bd. II. p. 352.

8). **156**. *Möbius :* Der baryzentrische Calcül (Leipzig, 1827; ou Werke Bd. I), chap. 6 et 7.

9). **161**. Pour ce qui est de la dispersion, il faut faire attention que q' est la vitesse de propagation dans l'eau au repos pour la fréquence

ν' et non pas pour la fréquence ν (que l'on considère à l'intérieur ou à l'extérieur de l'eau). Des confirmations expérimentales précises du résultat sont dues à *Michelson* and *Morley* : American Journ. of Science 31 (1886), p. 377; *Zeemann* : Versl. d. K. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, 23 (1914), p. 245; 24 (1915), p. 18. Il y a une expérience d'interférence due à *Zeeman* et analogue à celle de *Fizeau* : *Zeeman* : Versl. Akad. d. Wetensch. Amsterdam 28 (1919), p. 1451; *Zeeman* und *Snethlage*, id. p. 1462. Sur les expériences d'interférence sur des corps en rotation, voir *Laue* : Ann. d. Physik 62 (1920), p. 448.

10). **167**. *Wilson* : Philosoph. Transact. (A) vol. 204 (1904), p. 121.

11). **170**. *Rontgen* : Sitzungsber. d. Berliner Akademie 1885, p. 195; Wied. Annalen Bd. 35 (1888), p. 264 et Bd. 40 (1890), p. 93. *Eichenwald* : Annalen d. Physik, Bd. 11 (1903), p. 421.

12). **171**. Minkowski. l. c. [7]).

13). **173**. *W. Kaufmann* : Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wissenschaft zu Göttingen, 1902, p. 291; Ann. d. Physik Bd. 19 (1906), p. 487 et Bd. 20 (1906), p. 639. *A. H. Bucherer* : Ann. d. Physik Bd. 28 (1909), p. 513, et Bd. 29 (1909), p. 1063. *S. Ratnowsky* : Détermination expérimentale de la variation d'inertie des corpuscules cathodiques en fonction de la vitesse. Thèse, Genève, 1911. *E. Hupka* : Ann. d. Physik, Bd. 31 (1910), p. 169. *G. Neumann*. Ann d. Physik, Bd. 45 (1914), p. 529, avec un supplément de *C. Schaefer*, id. Bd. 49, p. 934. Quant à la théorie atomique, voir *K. Glitscher* : Spektroskopischer Vergleich zwischen den Theorien des starren und des deformierbaren Elektrons, Ann. d. Physik, Bd. 52 (1917), p. 608.

14). **178**. Die Relativitätstheorie I (3e éd., 1919), p. 229.

15). **178**. *Einstein* l. c. [6]). *Planck*. Bemerkungen zum Prinzip der Aktion und Reaktion in der allgemeinen Dynamik, Physik. Zeitschr Bd. 9 (1908), p. 828; Zur Dynamik bewegter Systeme, Ann. der Physik, Bd. 26 (1908), p. 1.

16). **179**. *Herglotz*. Ann. d. Physik. Bd. 36 (1911), p. 453.

17). **179**. Ann. d. Physik, Bd. 37, 39, 40 (1912-1913).

CHAPITRE IV

1). **191**. Voir pour tout ce chapitre jusqu'au paragraphe 34 : *A. Einstein* : Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie (Leipzig, J. A. Barth 1916); Ueber die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie (vulgarisation) 10e éd., 1920; trad. française par *Mlle Rouvière*, Paris, 1921. *E. Freundlich* : Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie (4e éd., Berlin, 1920). *S. Schlick* : Raum. u. Zeit in der gegenwärtigen Physik (3e éd., Berlin, 1920). *A. S. Eddington* : Space, Time and Gravitation, Cambridge, 1920 (exposé remarquable, intuitif et vulgarisé de la théorie de la relativité généralisée et des §§ 35 et 36 du présent livre), trad. aussi en français par *R. Rossignol*, Paris. 1921; du même auteur : Report on the relativity Theory of Gravitation (London, 1919), *M. Born :* Die Relativitätstheorie Einsteins (2e éd., Berlin, 1920). *E. Cassirer :* Zur Einsteinschen Relativitätstheorie (Berlin, 1921); *E. Kretschmann :* Ueber den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate, Ann. d. Phys. Bd. 53 (1917, p. 575). *G. Mie :* Die Einsteinsche Gravitationstheorie und das Problem der Materie. Phys. Zeitsch. Bd. 18 (1917), p. 551-556, 574-580 et 596-602; *F. Kottler :* Ueber die physikalischen Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Physik, Bd. 56 (1918), p. 401. *Einstein :* Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Phys. Bd. 55 (1918), p. 241.

2). **191**. La difficulté fut déjà aperçue par *Newton;* elle a été formulée d'une manière plus nette par *E. Mach.* Voir la bibliographie dans : *A. Voss :* Die Prinzipien der rationellen Mechanik, Mathem. Enzyclopädie, Bd. IV, Art. 1, fasc. 13-17.

3). **197.** Math. und wissenschaftl. Berichte aus Ungarn VIII (1890).

4). **199**. Sur d'autres essais (*Abraham, Mie Nordström*) pour asseoir la théorie de la gravitation sur la relativité restreinte, voir *M. Abraham :* Neuere Gravitationstheorie (Jahrb. d. Radioaktivität und Elektrotechnik, Bd. XI (1915), p. 470.

5). **204**. *F. Klein :* Ueber die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, 1918. Voir aussi à ce propos les calculs très généraux de *E. Noether* : Invariante Variationsprobleme, id.

6). **209**. D'après *A. Palatini :* Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton, Rend. del. Circ. matem, di Palermo, t. 43 (1919), p. 203-212.

7). **210**. *Einstein :* Zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissenschaften 1915, 44, p. 778, avec supplément, p. 799; du même auteur : Die Feldgleichungen der Gravitation, id. 1915, p. 844.

8). **210**. *H. A. Lorentz.* Het beginsel van Hamilton in Einsteins theorie der zwaartekracht, Versl. d. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam XXIII, p. 1073; Over Einsteins theorie der zwaartekracht, I, II, III, id XXIV, p. 1389, 1759, XXV, p. 468. *Tresling :* id. nov. 1916; *Fokker*, id. Janv. 1917, p. 1067. *Hilbert :* Die Grundlagen der Physik 1er mémoire, Nachr. d. K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1915, 2e mémoire 1917. *Einstein :* Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch. 1916, 42, p. 1111. *Klein :* Zu Hilberts erster Note über die Grundlagen d. Physik, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1918, et le travail noté sous 5) *Weyl :* Zur Gravitationstheorie, Ann. d. Physik. Bd, 54 (1917), p. 117.

9). **211**. D'après *Levi-Civita :* Statica Einsteiniana, Rend. della R. Accad. dei Lincei 1917, vol. XXVI, série 5, 1er sem., p. 458.

10). **214**. Voir aussi *Levi-Civita.* La teoria di Einstein e il principio di Fermat, Nuovo Cimento, Ser. VI, vol. 16 (1918), pp. 105-114.

11). **215**. *F. W. Dyson, A. S. Eddington, C. Davidson :* A Determination of the deflection of light by the Sun's gravitational Field from Observations made at the total eclipse of May 29, 1919; Philos. Transact. of the Royal Society of London, Ser. A. vol. 220 (1920), p. 291-333, voir aussi *Freundlich :* Die Naturwissenschaften, 1920, pp. 667-673.

12). **216**. *Schwarzschild :* Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissenschaft, 1914, p. 1201. *Ch. E. St. John.* Astrophys. Journal 46 (1917) p. 249, (voir aussi les travaux qui sont cités là de *Halm* et *Adams*) ; *Evershed et Royds* : Kodaik. Obs. Bull. 39. *L. Grebe* und *A. Bachem:* Verhandl. d. Deutsch. Physik. Ges. 21 (1919), p. 454; Zeitschrift für Physik 1 (1920), p. 51. *E. Freundlich,* Physik. Zeitschr. 20 (1919), p. 561.

13). **216**. *Einstein,* Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch. 1915, 47, p. 831. *Schwarzschild,* Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch. 1916, 7, p. 189.

14). **217**. L'hypothèse qui trouve le plus de crédit est celle de *H. Seeliger:* Das Zodiakallicht und die empirischen Glieder in der Bewegung der inneren Planeten, Münch. Akad. Ber. 36 (1906), voir aussi *E. Freundlich :* Astr. Nachr. Bd. 201, Juin 1915, p. 48.

15). **218**. *Einstein,* Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch. 1916, p. 688; et le complément de cette note : Ueber Gravitationswellen, id. 1918, p. 154. Et *Hilbert* : l. c. [8]) 2e Mémoire.

16). **221**. Phys. Zeitsch. Bd. 19 (1918), p. 33 et 156. Aussi *de Sitter:* Planetary motion and the motion of the moon according to Einstein's theory, Amsterdam, Proc. Bd. 19, 1916.

17). **221**. *Schwarzschild,* l. c. [12]); *Hilbert,* l. c. [8]), 2e Mémoire, *J. Droste :* Versl. K. Akad. v. Wetensch. Bd. 25 (1916), p. 163.

18). **227**. Pour le problème des n-corps, voir *J. Droste* : Versl. K. Akad. v. Wetensch. Bd. 25 (1916), p. 460.

19). **228**. *Eddington* : Report [1]) §§ 29 et 30.

20). **228**. *L. Flamm,* Beitrage zur Einsteinschen Gravitationstheorie, Phys. Zeitsch. Bd. 17 (1916), p. 449.

21). **228**. *H. Reissner :* Ann. d. Physik, Bd. 50 (1916), pp. 106-120; *Weyl* l. c. [8]); *G. Nordström,* On the Energy of the Gravitation Field in Einstein's Theory, Versl. d. K. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, Vol. XX, Nr. 9, 10 (26 Janv. 1918). *C. Longo :* Legge elletrostatica elementare nella teoria di Einstein, Nuovo Cimento, Ser. VI, vol. 15 (1918), p. 191.

22). **234**. Sitzungsber d. Preuss. Akad. d. Wissensch. 1916, 18, p. 424, *H .Bauer :* Kugelsymmetrische Lösungssysteme der Einsteinchen Feldgleichungen der Gravitation für eine ruhende, gravitierende Flüssigkeit mit linearer Zustandsgleichung, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien, math.-naturw. Kl., Abt. IIa, Bd. 127 (1918).

23). **234**. *Weyl*, l. c. [8]) §§ 5 et 6; voir aussi une remarque dans Ann. d. Physik, Bd. 59 (1919).

24). **235**. *Levi-Civita : ds^2* einsteiniani in campi newtoniani, Rend. Acc. dei Lincei (1917-1919).

25). **236**. *A. De-Zuani :* Equilibrio relativo ed equazioni gravitazionali di Einstein nel caso stazionario, Nuovo Cimento, Ser. VI, vol. 18 (1919), p. 5. *A. Palatini :* Moti Einsteiniani stazionari, Atti del R. Istit. Veneto di scienze, lett. ed arti, t. 78 (2) (1919), p. 589.

26). **237**. *Einstein*, Grundlagen [l. c. [1])], p. 49. La démonstration donnée ici est de *Klein* l. c. [5]).

27). **238**. Pour la discussion du sens physique de ces équations, voir *Schrödinger :* Phys. Zeitschr. Bd. 19 (1918), p. 4; *H. Bauer :* id. p. 163; *Einstein :* id. p. 115 et enfin le travail d'*Einstein :* Der Energiesatz in der allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., 1918, p. 448, que nous avons suivi ici. Comp. *F. Klein :* Ueber die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der raümlichgeschlossenen Welt, Nach. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1918.

28). **239**. Voir à ce propos *G. Nordström :* On the mass of a material system according to the Theory of Einstein, Akad. v. Wetensch. Amsterdam, Vol. XX, No. 7 (29 Déc. 1917).

29). **241**. *Hilbert* : l. c. [8]), 2e Mémoire.

30). **243**. *Einstein :* Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch, 1917, 6, p. 142.

31). **246**. *Weyl :* Physik. Zeitsch. Bd. 20 (1919), p. 31.

32). **248**. Comp. *de Sitter :* Une série de communications dans les Versl. d. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, 1917, ainsi qu'une série d'articles : On Einsteins theory of gravitation and its astronomical consequences (Monthly Notices of the R. Astronom. Society) et aussi *F. Klein* l. c. [27]).

33). **248**. La théorie indiquée dans les deux paragraphes suivants a été développée par l'Auteur dans la note « Gravitation und Elektrizität » Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch. 1918, p. 465. Voir aussi *Weyl :* Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie, Ann. d. Physik, Bd. 59 (1919). Une tendance analogue paraît se manifester dans la théorie (incompréhensible pour nous sur certains points) de *E. Reichenbächer :* Grundzüge zu einer Theorie der Elektrizität und Gravitation, Ann. d. Physik, Bd. 52 (1917), p. 135; et

Ann. d. Physik, Bd. 63 (1920), pp. 93-144. Relativement à d'autres essais pour rapprocher la gravitation et l'électricité, voir les articles cités par *Abraham* sous [4]) et *G. Nordström* : Physik. Zeitschr. 15 (1914), p. 504; *E. Wiechert :* Die Gravitation als elektrodynamische Erscheinung, Ann. d. Physik, Bd. 63 (1920), p. 301.

34). **251**. Ce théorème est dû à Liouville : Note IV à l'appendice de *G. Monge*. Application de l'analyse à la géométrie (1850), p. 609.

35). **251**. Ce fait qui paraît ici tout à fait évident, a été déjà remarqué par *E. Cunningham :* Proc. of the London Mathem. Society, (2) vol. 8 (1910), p. 77-98; *H. Bateman :* id., p. 223-264.

36). **259**. Voir aussi M. Pauli, Zur Theorie der Gravitation und der Elektrizität von H. Weyl. Physik. Zeitschr. Bd. 20 (1919), p. 457-467. *Einstein* arrive à des résultats à peu près analogues par une modification de ses équations de la gravitation dans le travail : Spielen Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle ? Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch., 1919, p. 349-356.

37). **264**. Pour le théorème d'existence en un point singulier, voir p. ex. *Picard*. Traité d'analyse, vol. 3, p. 21.

38). **266**. Ann. d. Physik, Bd. 39 (1913).

39). **267**. Voir le livre de *Sommerfeld :* Atombau u. Spektrallinien, Vieweg, 1921, 2e éd.

40). **273**. Cela est démontré dans une lettre par *R. Weitzenbock;* ses recherches seront publiées dans les Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien.

41). **273**. *W. Pauli*, Merkur-Perihelbewegung und Strahlenablenkung in Weyls Gravitationstheorie, Verhandl. d. Deutschen physik. Ges. Bd. 21 (1919), p. 742.

42). **273**. *Pauli* l. c. [36]).

43). **274**. *Weyl :* Feld und Materie, Ann. d. Phys. Bd. 65, p. 541, 1921; et Ueber die physikalischen Grundlagen der erweiterten Relativitätstheorie, Phys. Zs. Bd. 22, n° 17, 1921.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre IV.

Théorie générale de la relativité.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet