Bowker Journ. p. 53, 55.

Georg von Oettingen
1841

Theoretische

und

practische

Astronomie.

Von

oseph ohann

J. J. Littrow,

Director der Sternwarte, und Professor der Astronomie
an der k. k. Universität in Wien.

Zweyter Theil.

Mit zwey Kupfertafeln.

Wien.

Gedruckt und im Verlage bey J. B. Wallishausser.

1821.

INHALT DES ZWEYTEN BANDES.

EINLEITUNG.

ERSTES KAPITEL.

Theorie der elliptischen Bewegung.

ZWEYTES KAPITEL.

Heliocentrischer und geocentrischer Ort der Planeten.

DRITTES KAPITEL.

Bestimmung der Elemente der Planeten und Kometen aus geocentrischen Beobachtungen.

VIERTES KAPITEL.

Verbesserung der schon nahe bekannten Elemente.

FÜNFTES KAPITEL.

Von dem Monde der Erde, und denen der übrigen Planeten.

SECHSTES KAPITEL.

Von den Finsternissen.

SIEBENTES KAPITEL.

Durchgänge der untern Planeten vor der Sonne.

ACHTES KAPITEL.

Verfertigung der Erd- und Himmelskarten, der Sonnenuhren und der Kalender.

ZWEYTER THEIL:

THEORETISCHE ASTRONOMIE.

Einleitung.

So wie wir im Eingange des ersten Theiles, welcher die scheinbaren Orte der himmlischen Körper zum Gegenstande hatte, uns mit den Hülfsmitteln zu diesen Untersuchungen, von denen der grösste Theil unter der Benennung der sphärischen Trigonometrie bekannt ist, beschäftigt haben, eben so wollen wir auch hier, wo es um die wahren Orte jener Körper und die Lage der Bahnen derselben zu thun ist, einige allgemeine Betrachtungen über die Lagen der Ebenen unter einander vorausschicken, welche uns in der Folge nützlich seyn werden.

1. Man denke sich drey Ebenen, (Fig. A) die erste ABD, die zweyte ACE, und die dritte ADE, welche alle durch den Anfangspunct A der Coordinaten gehen. Von einem Puncte F der dritten Ebene fälle man das Loth FG auf die erste, und FH auf die zweyte Ebene. Durch den Punct G ziehe man auf die willkührliche Linie AB das Loth GB, und durch den Punct H auf die Durchschnittslinie AC der ersten und zweyten Ebene das Loth HC. Es sey $AB = x$, $BG = y$, $GF = z$, und eben so $AC = X$, $CH = Y$, $HF = Z$, und die Gleichung der dritten Ebene gegen die erste sey

$$o = mx + ny + pz$$

so wie die Gleichung der dritten Ebene gegen die zweyte

$$o = MX + NY + PZ$$

Es sey α die Neigung der zweyten Ebene gegen die erste oder gegen die Ebene der xy, und eben so α' und α'' die Neigung der zweyten Ebene gegen die der xz und der yz. Ist von der Lage der dritten Ebene gegen die erste die Rede, so sollen diese Grössen in derselben Ordnung $a\,a'\,a''$ seyn, und ist von der Lage der dritten Ebene gegen die zweyte die Rede, so sollen sie $A\,A'\,A''$ seyn. Dasselbe soll auch von allen folgenden Zeichen $\beta\,\beta'\,\beta''$, $b\,b'\,b''$, $B\,B'\,B''$ u. s w. verstanden werden, deren Bedeutung in der Folge erklärt werden wird. Endlich bezeichne ich noch der Kürze wegen die coordinirten Ebenen

yz	durch	o	und YZ	durch	O
xz		1	XZ		I
xy		2	XY		II

2. Diess vorausgesetzt, wollen wir mit der Bestimmung der Lage der dritten Ebene gegen die erste anfangen. Es sey also $a\, a'\, a''$ die Neigung der dritten Ebene in derselben Ordnung gegen die Ebene 2, 1, 0. Setzt man der Kürze wegen $r^2 = m^2 + n^2 + p^2$, so ist bekanntlich

$$\left.\begin{aligned} \text{Cos } a &= \frac{p}{r} \\ \text{Cos } a' &= \frac{n}{r} \\ \text{Cos } a'' &= \frac{m}{r} \end{aligned}\right\}$$

woraus man leicht auch die Werthe von Sin a, tg a, u. f. entwickeln wird.

3. Sey eben so $b\, b'\, b''$ der Winkel der Knotenlinie der dritten Ebene in 2 1 0 mit der Axe der x y z, so hat man

$$\left.\begin{aligned} \text{tg } b &= -\frac{m}{r} \\ \text{tg } b' &= +\frac{p}{m} \\ \text{tg } b'' &= -\frac{n}{p} \end{aligned}\right\}$$

Um Gleichförmigkeit in den Zeichen dieser trigonometrischen Functionen zu erhalten, kann man annehmen, dass eine gegen 2 positiv geneigte Ebene im ersten und vierten Quadranten gegen das positive y, und im zweyten und dritten Quadranten gegen das negative y gekehrt ist, vorausgesetzt, dass man bloss diejenige Seite der Ebene betrachtet, welche dem positiven z entspricht. Dasselbe wird man von den beyden andern Neigungen a' und a'' bemerken. Die Winkel der Knotenlinien mit den Axen der drey Coordinaten aber sollen so gewählt werden, dass die positiven b von x A gegen y (Fig. B), die positiven b' von Z A gegen ξ, und die positiven b'' von Y A gegen Z zu nehmen sind, durch welche Annahme man alle Winkel in einer und derselben Richtung zählt. Für diese Winkel der Knotenlinie muss noch bemerkt werden, dass es noch sechs andere Winkel gibt, welche ebenfalls hieher gehören, von denen aber drey die Complemente der drey oben gegebenen zu rechten Winkeln, und die drey letzten selbst rechte Winkel sind.

4. Sey $c\, c'\, c''$ nach der Ordnung der Winkel der Knotenlinie der dritten Ebene in 2, 2, 1 mit der Knotenlinie der dritten Ebene in 1, 0, 0, so ist

$$\left.\begin{aligned} \text{tg } c &= \frac{mr}{np} \\ \text{tg } c' &= \frac{nr}{mp} \\ \text{tg } c'' &= \frac{pr}{mn} \end{aligned}\right\}$$

5. Schon aus den gegebenen drey Systemen zwischen den Grössen a b c folgen mehrere merkwürdige Combinationen, von welchen ich nur die vorzüglichsten angeben werde.

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} b &= \frac{\operatorname{Cos} a''}{\operatorname{Cos} a'} \\ \operatorname{tg} b' &= \frac{\operatorname{Cos} a}{\operatorname{Cos} a''} \\ \operatorname{tg} b'' &= \frac{\operatorname{Cos} a'}{\operatorname{Cos} a} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \operatorname{Sin} b &= \frac{\operatorname{Cos} a''}{\operatorname{Sin} a} \\ \operatorname{Sin} b' &= \frac{\operatorname{Cos} a}{\operatorname{Sin} a'} \\ \operatorname{Sin} b'' &= \frac{\operatorname{Cos} a'}{\operatorname{Sin} a''} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos} b &= \frac{\operatorname{Cos} a'}{\operatorname{Sin} a} \\ \operatorname{Cos} b' &= \frac{\operatorname{Cos} a''}{\operatorname{Sin} a'} \\ \operatorname{Cos} b'' &= \frac{\operatorname{Cos} a}{\operatorname{Sin} a''} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \operatorname{Cotg} a &= \operatorname{Sin} b \operatorname{tg} b' = \operatorname{Cos} b \operatorname{Cotg} b'' \\ \operatorname{Cotg} a' &= \operatorname{Sin} b' \operatorname{tg} b'' = \operatorname{Cos} b' \operatorname{Cotg} b \\ \operatorname{Cotg} a'' &= \operatorname{Sin} b'' \operatorname{tg} b = \operatorname{Cos} b'' \operatorname{Cotg} b' \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} c &= -\frac{\operatorname{Cos} a''}{\operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} a'} = -\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{Cos} a} = -\frac{\operatorname{Cotg} b'}{\operatorname{Cos} a'} \\ \operatorname{tg} c' &= -\frac{\operatorname{Cos} a'}{\operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} a''} = -\frac{\operatorname{tg} b''}{\operatorname{Cos} a''} = -\frac{\operatorname{Cotg} b}{\operatorname{Cos} a} \\ \operatorname{tg} c'' &= -\frac{\operatorname{Cos} a}{\operatorname{Cos} a' \operatorname{Cos} a''} = -\frac{\operatorname{tg} b'}{\operatorname{Cos} a'} = -\frac{\operatorname{Cotg} b''}{\operatorname{Cos} a''} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin} c &= \frac{\operatorname{Cos} a''}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} a'} = \frac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin} a'} = \frac{\operatorname{Cos} b'}{\operatorname{Sin} a} \\ \operatorname{Sin} c' &= \frac{\operatorname{Cos} a'}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} a''} = \frac{\operatorname{Sin} b''}{\operatorname{Sin} a} = \frac{\operatorname{Cos} b}{\operatorname{Sin} a''} \\ \operatorname{Sin} c'' &= \frac{\operatorname{Cos} a}{\operatorname{Sin} a' \operatorname{Sin} a''} = \frac{\operatorname{Sin} b'}{\operatorname{Sin} a''} = \frac{\operatorname{Cos} b''}{\operatorname{Sin} a'} \end{aligned}\right\} \text{u. s. w.}$$

Diese Gleichungen biethen zugleich mehr als ein Mittel dar, zu entscheiden, in welchen Quadranten man die Winkel a b c zu nehmen habe. Gewöhnlich wird die Lage der Ebene durch die beyden Grössen a und b gegeben; da aber die Winkel a a' a'' nur dem ersten oder dem zweyten Quadranten angehören können, so sieht man sofort, wenn a und b gegeben ist, ob a' und a'' in den ersten oder in den zweyten Quadranten fallen, durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{Cos} a' &= \operatorname{Sin} a \operatorname{Cos} b \\ \operatorname{Cos} a'' &= \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \end{aligned}$$

und für die Grösse b' und b'' hat man eben so

$$\operatorname{tg} b' = \frac{\operatorname{Cotg} a}{\operatorname{Sin} b}$$

$$\operatorname{tg} b'' = \frac{\operatorname{Cotg} a}{\operatorname{Cos} b}$$

welche Gleichungen für b′ und b″ zwey Quadranten geben, von welchen der hiehergehörende durch die Gleichungen

$$\operatorname{Sin} b' = \frac{\operatorname{Cos} a}{\operatorname{Sin} a'} \quad \operatorname{Sin} b'' = \frac{\operatorname{Cos} a'}{\operatorname{Sin} a''}$$

oder auch durch die Gleichungen:

$$\operatorname{Cos} b' = \frac{\operatorname{Cos} a''}{\operatorname{Sin} a'} \quad \operatorname{Cos} b'' = \frac{\operatorname{Cos} a}{\operatorname{Sin} a'}$$

bestimmt wird.

Endlich lassen sich auch die Verhältnisse der constanten Grössen m n p durch die Winkel a b c auf verschiedene Art ausdrücken. So ist

$$\frac{m}{n} = -\operatorname{tg} b = -\operatorname{tg} a' \operatorname{Cos} b' = \operatorname{tg} c \operatorname{Cos} a = -\frac{\operatorname{Cos} a''}{\operatorname{Cos} a'} = -\frac{\operatorname{Cotg} a'}{\operatorname{Sin} b''}$$

$$\frac{p}{m} = +\operatorname{tg} b' = +\operatorname{tg} a'' \operatorname{Cos} b'' = -\operatorname{tg} c'' \operatorname{Cos} a' = +\frac{\operatorname{Cos} a}{\operatorname{Cos} a''} = +\frac{\operatorname{Cotg} a}{\operatorname{Sin} b}$$

$$\frac{n}{p} = -\operatorname{tg} b'' = -\operatorname{tg} a \operatorname{Cos} b = \operatorname{tg} c' \operatorname{Cos} a'' = -\frac{\operatorname{Cos} a'}{\operatorname{Cos} a} = -\frac{\operatorname{Cotg} a'}{\operatorname{Sin} b'}$$

Ex. Ist $a = b = 10°$ so ist

$$\operatorname{Log} \frac{m}{p} = 8.4859890$$

$$\operatorname{Log} \frac{n}{p} = 9.2396703\ n$$

$$\operatorname{Log} \frac{m}{n} = 9.2463187\ n \text{ und}$$

$a' =$	80°	9′	12″	$b' =$	88°	14′	46″
$a'' =$	88	16	19	$b'' =$	9	51	4

$c =$	169°	50′	56″
$c' =$	99	51	4
$c'' =$	90	18	0

6. Dieselben Ausdrücke lassen sich auch sofort auf die Lage der dritten Ebene gegen die zweyte anwenden, wenn man a b . . . in die analogen A B . . verwandelt. Ist nähmlich, der anfangs angenommenen Bezeichnung zu Folge, A A′ A″ die Neigung der dritten Ebene gegen die coordinirte Ebene II I O, und B der Winkel der Knotenlinie der dritten Ebene in II mit der Axe der X, und C der Winkel derselben Knotenlinie der dritten Ebene in II

mit der Knotenlinie der dritten Ebene in I u. s. w. so ist, wenn wieder $R^2 = M^2 + N^2 + P^2$ gesetzt wird,

$$\text{Cos } A = \frac{P}{R} \text{ u. f. wie §. 2}$$

$$\text{tg } B = \frac{\text{Cos } A''}{\text{Cos } A'} \text{ u. f. wie §. 5}$$

und sofort für alle übrigen.

7. Es ist angenehm und oft nützlich, die Resultate der analytischen Geometrie auch auf dem bisher gewöhnlicheren Wege der sphärischen Trigonometrie zu suchen. Zu diesem Zwecke sey, (Fig. B) $A\xi\upsilon$, $A\xi Y$, ABC die vorhin betrachtete erste, zweyte und dritte Ebene, deren gemeinschaftlicher Anfangspunct der Mittelpunct einer Kugel von unbestimmtem Halbmesser ist. Man kann sich vorstellen, dass von dieser Kugel die Halbmesser $A\xi$ und $A z$ in der Ebene der Tafel liegen, während der Durchmesser $\upsilon A \upsilon'$ auf derselben Ebene senkrecht steht.

Der leichtern Übersicht wegen wollen wir annehmen, dass die Axe der x oder $A\xi$ in der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der ersten und zweyten Ebene liegt. Die Axe der y und Y ist $A\upsilon$ und AY, und die Axe der z und Z ist Az und AZ, unter welchen genannten Axen wir die positiven Hälften derselben verstehen wollen. Diess vorausgesetzt, ist daher z der Pol der Ebene $A\xi\upsilon$ oder der Ebene 2 und eben so

υ	der Pol der Ebene	1
ξ	— — —	o
Z	— — —	II
Y	— — —	I
$X = \xi$	— — —	O

Endlich sey noch p der Pol der dritten Ebene, welche man sich auf der dem Zuschauer zugewendeten Seite der Tafel denken wird.

Da β oder der Winkel der Knotenlinie der zweyten Ebene in 2 mit der Axe der x, nach dem Vorhergehenden, gleich Null ist, und da α die Neigung der zweyten Ebene gegen die Ebene 2 ist, so ist leicht zu sehen, dass man hat

$$Z\xi = \alpha \text{ und } Z\upsilon = 90 + \alpha$$

und dass überdiess die Winkel

$$\xi\upsilon, \upsilon z, \xi z\ \xi Y, YZ, \xi Z, Cp$$

so wie die folgenden

$$\xi Z z, \xi z Z, ZY\xi, \xi\upsilon z$$

sämmtlich rechte Winkel sind. Behält man daher die Bezeichnung der oben gewählten Grösse a, b, c, A, B, C bey, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} a = p\zeta \\ a' = 180 - p\upsilon \\ a'' = p\xi \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} b = 90 - p\zeta\xi = 180 - p\zeta\upsilon \\ b' = 90 - p\upsilon\zeta = 360 - p\upsilon\xi \\ b'' = p\xi\zeta \quad\;\; = 270 - p\xi\upsilon \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c = 180 - \upsilon p\zeta \\ c' = \xi p\zeta \\ c'' = 180 + \xi p\upsilon \end{array}\right\}$$

und ganz ähnliche Ausdrücke wird man auch für $A\,B\,C$ erhalten nähmlich $A = pZ$, $A' = 180 - pY$, $A'' = pX$, $B = 90 - pZX = 180 - pZY$, u. s. w., so dass man in den vorhergehenden Gleichungen für $\xi\,\upsilon\,\zeta$ nur $X\,Y\,Z$ zu setzen hat. Endlich ist $\zeta\xi Z = \alpha$.

Wendet man also auf die verschiedenen Dreyecke, welche die Fig. B darbiethet, die bekannten Ausdrücke der sphärischen Trigonometrie für solche Dreyecke, deren eine Seite gleich 90 Grad ist, an, so findet man sofort in dem Dreyecke $p\,\xi\,\upsilon$

$$\text{Cos}\, p\upsilon\xi = \frac{\text{Cos}\, p\xi}{\text{Sin}\, p\upsilon} \quad \text{das heisst} \quad \text{Cos}\, b' = \frac{\text{Cos}\, a''}{\text{Sin}\, a'}$$

$$\text{Cos}\, p\xi\upsilon = \frac{\text{Cos}\, p\upsilon}{\text{Sin}\, p\xi} \quad \ldots\ldots \quad \text{Sin}\, b'' = \frac{\text{Cos}\, a'}{\text{Sin}\, a''}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Cotg}\, p\upsilon = \text{Sin}\, p\upsilon\xi\, \text{Cotg}\, p\xi\upsilon & \ldots\ldots & \text{Cotg}\, a' = \text{Sin}\, b'\, \text{tg}\, b'' \\ \text{Cos}\, \xi p\upsilon = -\, \text{Cotg}\, p\upsilon\, \text{Cotg}\, p\xi & \ldots\ldots & \text{Cos}\, c'' = -\, \text{Cotg}\, a'\, \text{Cotg}\, a'' \\ \text{Cos}\, \xi p\upsilon = -\, \text{Cos}\, p\upsilon\xi\, \text{Cos}\, p\xi\upsilon & \ldots\ldots & \text{Cos}\, c'' = -\, \text{Cos}\, b'\, \text{Sin}\, b'' \end{array}$$

$$\text{Sin}\, \xi p\upsilon = \frac{\text{Sin}\, p\upsilon\xi}{\text{Sin}\, p\xi} = \frac{\text{Sin}\, p\xi\upsilon}{\text{Sin}\, p\upsilon} \quad \ldots\ldots \quad \text{Sin}\, c'' = \frac{\text{Sin}\, b'}{\text{Sin}\, a''} = \frac{\text{Cos}\, b''}{\text{Sin}\, a'} \quad \text{u. f.}$$

Ähnliche Ausdrücke geben die beyden sphärischen Dreyecke $p\xi\zeta$ und $p\upsilon\zeta$, und man sieht, dass man dadurch alle Gleichungen des §. 5, selbst bis auf ihre Zeichen, wieder erhält. Ganz ähnliche Ausdrücke wird man endlich aus den Dreyecken pXY, pXZ und pYZ zwischen den Grössen $A\;B\;C$ finden, und diese werden mit jenen identisch seyn, welche oben in §. 6 angezeigt wurden.

8. Wir wollen nun durch den Anfangspunct A der Coordinaten in der dritten Ebene eine gerade Linie AF (Fig. A) ziehen, und den Winkel FAD, welchen sie mit der Knotenlinie AD bildet, durch s bezeichnen.

Die rechtwinkelichten Coordinaten des Punctes F, dessen Entfernung vom Anfangspuncte A die Einheit seyn soll, findet man leicht

$$\begin{array}{l} AB = x' = \text{Cos}\, s\, \text{Cos}\, b - \text{Sin}\, s\, \text{Sin}\, b\, \text{Cos}\, a \\ BG = y' = \text{Cos}\, s\, \text{Sin}\, b + \text{Sin}\, s\, \text{Cos}\, b\, \text{Cos}\, a \\ GF = z' = \text{Sin}\, s\, \text{Sin}\, a \end{array}$$

und die Gleichungen der Projectionen der Linie AF, welche ich der Kürze wegen den Radius nennen will, werden seyn

$$\begin{array}{lll} xy' = yx' & \text{in der Ebene} & 2 \\ xz' = zx' & \ldots\ldots & 1 \\ yz' = zy' & \ldots\ldots & 0. \end{array}$$

Diess vorausgesetzt, wird man ohne Schwierigkeit folgende Ausdrücke beweisen.

Sey d d′ d″ der Winkel des Radius mit der Axe der x y z, so ist

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos} d &= x' \\ \operatorname{Cos} d' &= y' \\ \operatorname{Cos} d'' &= z' \end{aligned}\right\}$$

Sey e e′ e″ die Neigung des Radius gegen die Ebene 2. 1. 0, so ist

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin} e &= z' \\ \operatorname{Sin} e' &= y' \\ \operatorname{Sin} e'' &= x' \end{aligned}\right\}$$

Sey f f′ f″ der Winkel der Projection des Radius in der Ebene 2 1 0 mit der Axe der x z y, so ist

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} f &= \frac{y'}{x'} \\ \operatorname{tg} f' &= \frac{x'}{z'} \\ \operatorname{tg} f'' &= \frac{z'}{y'} \end{aligned}\right\}$$

und von den sechs andern hiehergehörenden Winkeln sind drey die Complemente der f f′ f″ zu rechten Winkeln, die drey übrigen aber selbst rechte Winkel.

Sey g g′ g″ der Winkel des Radius mit der Knotenlinie der dritten Ebene in 2 1 0, so ist

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos} g &= \frac{m y' - n x'}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ \operatorname{Cos} g' &= \frac{p x' - m z'}{\sqrt{p^2 + m^2}} \\ \operatorname{Cos} g'' &= \frac{n z' - p y'}{\sqrt{p^2 + n^2}} \end{aligned}\right\}$$

Sey endlich h h′ h″ der Winkel der Projection des Radius in 2 1 0 mit der Knotenlinie der dritten Ebene in 2 1 0, so ist

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos} h &= \frac{m y' - n x'}{\sqrt{m^2 + n^2}\sqrt{x'^2 + y'^2}} \\ \operatorname{Cos} h' &= \frac{p x' - m z'}{\sqrt{m^2 + p^2}\sqrt{x'^2 + z'^2}} \\ \operatorname{Cos} h'' &= \frac{n z - p y'}{\sqrt{p^2 + n^2}\sqrt{y'^2 + z'^2}} \end{aligned}\right\}$$

9. Zwischen der Grösse x' y' z' und m n p gibt es mehrere Combinationen, die man leicht aus den beyden Gleichungen

$$\begin{aligned} o &= m x' + n y' + p z' \\ 1 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \end{aligned}$$

ableiten wird. Man findet so, wenn man der Kürze wegen $r^2 = m^2 + n^2 + p^2$ setzt, erstens zwischen den Grössen m n p selbst folgende Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} m^2 r^2 + n^2 p^2 &= (m^2 + n^2)(m^2 + p^2) \\ n^2 r^2 + m^2 p^2 &= (n^2 + m^2)(n^2 + p^2) \\ p^2 r^2 + m^2 n^2 &= (p^2 + m^2)(p^2 + n^2) \end{aligned}\right\}$$

und zwischen ihnen und den Grössen x' y' z' folgende

$$\left.\begin{aligned} y'(m y' - n x') - z'(p x' - m z') &= m \\ z'(n z' - p y') - x'(m y' - n x') &= n \\ x'(p x' - m z') - y'(n z' - p y') &= p \end{aligned}\right\}$$

und daraus

$$\left.\begin{aligned} (m y' - n x')^2 &= m^2 + n^2 - r^2 z'^2 \\ (p x' - m z')^2 &= p^2 + m^2 - r^2 y'^2 \\ (n z' - p y')^2 &= p^2 + n^2 - r^2 x'^2 \end{aligned}\right\}$$

10. Die in 8 und 9 entwickelten Ausdrücke geben verschiedene merkwürdige Relationen zwischen den Grössen d e f . . ., von welchen die vorzüglichsten sind

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} f &= \frac{\operatorname{Sin} e'}{\operatorname{Sin} e''} = \frac{\operatorname{Cos} d'}{\operatorname{Cos} d} \\ \operatorname{tg} f' &= \frac{\operatorname{Sin} e''}{\operatorname{Sin} e} = \frac{\operatorname{Cos} d}{\operatorname{Cos} d''} \\ \operatorname{tg} f'' &= \frac{\operatorname{Sin} e}{\operatorname{Sin} e'} = \frac{\operatorname{Cos} d''}{\operatorname{Cos} d'} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \operatorname{Cos} d &= \operatorname{Cos} f \operatorname{Cos} e = \operatorname{Sin} f' \operatorname{Cos} e' \\ \operatorname{Cos} d' &= \operatorname{Cos} f' \operatorname{Cos} e'' = \operatorname{Sin} f \operatorname{Cos} e \\ \operatorname{Cos} d'' &= \operatorname{Cos} f' \operatorname{Cos} e' = \operatorname{Sin} f'' \operatorname{Cos} e'' \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos} g &= \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} d' + \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} d = \operatorname{Sin} d'' \operatorname{Cos}(f - b) \\ \operatorname{Cos} g' &= \operatorname{Sin} b' \operatorname{Cos} d + \operatorname{Cos} b' \operatorname{Cos} d'' = \operatorname{Sin} d' \operatorname{Cos}(f' - b') \\ \operatorname{Cos} g'' &= \operatorname{Sin} b'' \operatorname{Cos} d'' + \operatorname{Cos} b'' \operatorname{Cos} d' = \operatorname{Sin} d \operatorname{Cos}(f'' - b'') \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} g &= \frac{\operatorname{Cotg} d''}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Cos}(f - b)} \\ \operatorname{tg} g' &= \frac{\operatorname{Cotg} d'}{\operatorname{Sin} a' \operatorname{Cos}(f' + b')} \\ \operatorname{tg} g'' &= \frac{\operatorname{Cotg} d}{\operatorname{Sin} a'' \operatorname{Cos}(f'' - b'')} \end{aligned}\right\}.$$

$$\left.\begin{aligned}\text{Sin}\,(g'-g) &= \frac{\text{Cos}\ a''}{\text{Sin}\ a\ \text{Sin}\ a}\\ \text{Sin}\,(g-g'') &= \frac{\text{Cos}\ a'}{\text{Sin}\ a''\ \text{Sin}\ a}\\ \text{Sin}\,(g''-g') &= \frac{\text{Cos}\ a}{\text{Sin}\ a''\ \text{Sin}\ a'}\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\text{Cos}\,(g'-g) &= -\text{Cotg}\ a\ \text{Cotg}\ a'\\ \text{Cos}\,(g-g'') &= -\text{Cotg}\ a\ \text{Cotg}\ a''\\ \text{Cos}\,(g''-g') &= -\text{Cotg}\ a''\ \text{Cotg}\ a'\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\text{Cos}\ h &= \frac{\text{Cos}\ g}{\text{Cos}\ e}\\ \text{Cos}\ h' &= \frac{\text{Cos}\ g'}{\text{Cos}\ e'}\\ \text{Cos}\ h'' &= \frac{\text{Cos}\ g''}{\text{Cos}\ e''}\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned}\text{Sin}\ h &= \text{tg}\ e\ \text{Cotg}\ a = \text{Sin}\,(f-b)\\ \text{Sin}\ h' &= \text{tg}\ e'\ \text{Cotg}\ a' = \text{Sin}\,(f'+b')\\ \text{Sin}\ h'' &= \text{tg}\ e''\ \text{Cotg}\ a'' = \text{Sin}\,(f''-b'')\end{aligned}$$

11. Dieselben Ausdrücke wird man auch aus der Betrachtung der Fig. B ableiten, wo man hat

$$\begin{aligned}D\,\xi &= d = 90 - e'' &\qquad D\,z\,\xi &= 90 - D\,z\,v = f\\ D\,v &= d' = 90 - e' &\qquad D\,v\,z &= 90 - D\,v\,\xi = f'\\ D\,z &= d'' = 90 - e &\qquad D\,\xi\,v &= 90 - D\,\xi\,z = f''\end{aligned}$$

Ferner $g = 90 - D\,p\,z$, $h = p\,z\,D - 90 = 270 + p\,z\,D$ u. s. w., wenn man die bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie auf die Dreyecke $D\,v\,\xi$, $D\,\xi\,z$, $D\,v\,z$, und auf die Dreyecke $D\,p\,\xi$, $D\,p\,v$, $D\,p\,z$ anwendet.

12. Ähnliche Ausdrücke endlich wird man auch für die Lage der dritten Ebene gegen die zweyte erhalten, wenn man in den vorhergehenden die d e f . . . in die analogen D E F . . . verwandelt. Ist nähmlich $F\,A\,E = S$, und D der Winkel des Radius A F mit der Axe der X; E die Neigung des Radius gegen die Ebene II; F der Winkel der Projection des Radius in II mit der Axe der X u. s. w., so ist wieder

$$\left.\begin{aligned}X' &= \text{Cos}\ S\ \text{Cos}\ B - \text{Sin}\ S\ \text{Sin}\ B\ \text{Cos}\ A\\ Y' &= \text{Cos}\ S\ \text{Sin}\ B + \text{Sin}\ S\ \text{Cos}\ B\ \text{Cos}\ A\\ Z' &= \text{Sin}\ S\ \text{Sin}\ A\end{aligned}\right\}\ \text{wie §. 8.}$$

$$\text{Cos}\ D = \text{Sin}\ E'' = X'$$

$$\text{tg}\ F = \frac{Y'}{X'}$$

$$\text{Cos}\ G = \frac{M\,Y' - N\,X'}{\sqrt{M^2 + N^2}}\ \text{u. s. w. wie §. 8.}$$

und daraus

$$\text{tg } F = \frac{\text{Cos } D'}{\text{Cos } D}$$

$$\text{Cos } D = \text{Cos } F \text{ Cos } E = \text{Sin } F' \text{ Cos } E' \text{ u. s. w. wie §. 9.}$$

welche Gleichungen endlich auch aus der Betrachtung der (Fig. B) folgen, wo man hat

$$\begin{aligned} D &= 90 - E'' = D\,X \\ D' &= 90 - E' = D\,Y \\ D'' &= 90 - E = D\,Z \\ \text{und } F &= D\,Z\,X = 90 - D\,Z\,Y \\ G &= 90 - D\,p\,Z \\ H &= 270 + p\,Z\,D \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

13. Die vorhergehenden Gleichungen sind auf die einfachste Weise ausgedrückt, nähmlich die kleinen a b c . . durch die kleinen m n p und x' y' z', so wie die grossen ähnlichen Buchstaben durch sich selbst. Es ist aber oft nützlich, eine Gattung dieser Grössen durch die andere, die kleinen Zeichen durch die grossen, oder umgekehrt auszudrücken. Um diese Ausdrücke zu finden, muss man zuerst die Abhängigkeit der Grössen M N P von m n p und der Grössen X' Y' Z' von x' y' z' haben, welche Abhängigkeit durch die Grössen ausgedrückt werden muss, welche die Lage der zweyten Ebene gegen die erste bestimmen. Da sich aber diese Lage durch die Grössen $\alpha\,\beta\,\gamma$ . . auf sehr verschiedene Weise ausdrücken lässt, woraus eben so viele verschiedene Bestimmungen der M N P durch m n p u. s. w. folgen, so würden sich die hiehergehörenden Ausdrücke beynahe in das Unendliche vermehren lassen. Es ist aber am einfachsten, und zugleich dem astronomischen Gebrauche am angemessensten, zu diesem Zwecke die beyden ersten Grössen α und β zu wählen. Man wird so ohne Mühe finden

$$\begin{aligned} x &= X \text{ Cos } \beta - (Y \text{ Cos } \alpha - Z \text{ Sin } \alpha) \text{ Sin } \beta \\ y &= X \text{ Sin } \beta + (Y \text{ Cos } \alpha - Z \text{ Sin } \alpha) \text{ Cos } \beta \\ z &= Y \text{ Sin } \alpha + Z \text{ Cos } \alpha \end{aligned}$$

und eben so für die constanten Factoren m n p die analogen Ausdrücke

$$\begin{aligned} m &= M \text{ Cos } \beta - (N \text{ Cos } \alpha - P \text{ Sin } \alpha) \text{ Sin } \beta \\ n &= M \text{ Sin } \beta + (N \text{ Cos } \alpha - P \text{ Sin } \alpha) \text{ Cos } \beta \\ p &= N \text{ Sin } \alpha + P \text{ Cos } \alpha \end{aligned}$$

aus welchen Gleichungen man leicht auch die Werthe von X Y Z durch x y z, so wie die M N P durch m n p ableiten wird.

14. Substituirt man in den §. 2 gegebenen Werthen von Cos a, Cos a', Cos a'' für m n p die zu Ende des §. 13 gegebenen Werthe dieser Grössen, und bemerkt man, dass

$r^2 = m^2 + n^2 + p^2 = M^2 + N^2 + P^2$, also auch

$$\frac{M^2 + N^2 + P^2}{P^2} = \frac{1}{\text{Cos}^2 A}$$

und nach §. 6

$\frac{M}{N} = -\text{tg } B$, $\frac{M}{P} = \text{tg } A \text{ Sin } B$, $\frac{N}{P} = -\text{tg } A \text{ Cos } B$ ist,

so hat man

$$\text{Cos } a = \frac{N \text{ Sin } \alpha + P \text{ Cos } \alpha}{\sqrt{M^2 + N^2 + P^2}}$$

oder nach einigen leichten Substitutionen

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cos } a = \text{Cos } \alpha \text{ Cos } A - \text{Sin } \alpha \text{ Sin } A \text{ Cos } B \\ \text{und eben so} \\ \text{Cos } a' = \text{Sin } A \text{ Sin } B \text{ Sin } \beta - (\text{Sin } \alpha \text{ Cos } A + \text{Cos } \alpha \text{ Sin } A \text{ Cos } B) \text{ Cos } \beta \\ \text{Cos } a'' = \text{Sin } A \text{ Sin } B \text{ Cos } \beta + (\text{Sin } \alpha \text{ Cos } A + \text{Cos } \alpha \text{ Sin } A \text{ Cos } B) \text{ Sin } \beta \end{array}\right\}$$

oder auch

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cos } a = \text{Cos } \alpha \text{ Cos } A - \text{Sin } \alpha \text{ Cos } A' \\ \text{Cos } a' = \text{Cos } A'' \text{ Sin } \beta - (\text{Sin } \alpha \text{ Cos } A + \text{Cos } \alpha \text{ Cos } A') \text{ Cos } \beta \\ \text{Cos } a'' = \text{Cos } A'' \text{ Cos } \beta + (\text{Sin } \alpha \text{ Cos } A + \text{Cos } \alpha \text{ Cos } A') \text{ Sin } \beta \end{array}\right\}.$$

15. Einfacher werden die umgekehrten Ausdrücke. Es war nähmlich $\text{Cos } A = \frac{P}{R}$ . . $\text{Cos } A' = \frac{N}{R}$ . . $\text{Cos } A'' = \frac{M}{R}$ und $\frac{m}{n} = -\text{tg } b$ etc. und $\frac{m^2 + n^2 + p^2}{p^2} = \frac{1}{\text{Cos}^2 a}$ . . also ist

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cos } A = \text{Cos } \alpha \text{ Cos } a + \text{Sin } \alpha \text{ Sin } a \text{ Cos } (b - \beta) \\ \text{Cos } A' = \text{Sin } \alpha \text{ Cos } a - \text{Cos } \alpha \text{ Sin } a \text{ Cos } (b - \beta) \\ \text{Cos } A'' = \text{Sin } a \text{ Sin } (b - \beta) \end{array}\right\}$$

16. Ferner wurde oben gefunden

$$\text{Sin}^2 A = \frac{M^2 + N^2}{R^2}, \text{Sin}^2 B = \frac{M^2}{M^2 + N^2}, \text{Cos}^2 B = \frac{N^2}{M^2 + N^2}$$

also ist $\text{Sin } A \text{ Sin } B = \frac{M}{R} = \frac{m \text{ Cos } \beta + n \text{ Sin } \beta}{r}$

$$\text{Sin } A \text{ Cos } B = \frac{N}{R} = \frac{p \text{ Sin } \alpha + n \text{ Cos } \beta \text{ Cos } \alpha - m \text{ Sin } \beta \text{ Cos } \alpha}{r}$$

woraus man sofort findet

$\text{Sin } A \text{ Sin } B = \text{Sin } a \text{ Sin } (b - \beta)$

$\text{Sin } A \text{ Cos } B = \text{Sin } \alpha \text{ Cos } a - \text{Cos } \alpha \text{ Sin } a \text{ Cos } (b - \beta)$

und

$$\text{Sin A}' \text{ Sin B}' = \text{Cos } \alpha \text{ Cos a} + \text{Sin } \alpha \text{ Sin a Cos } (b - \beta)$$
$$\text{Sin A}' \text{ Cos B}' = \text{Sin a Sin } (b - \beta)$$

und endlich eben so

$$\text{Sin A}'' \text{ Sin B}'' = \text{Sin } \alpha \text{ Cos a} - \text{Cos } \alpha \text{ Sin a Cos } (b - \beta)$$
$$\text{Sin A}'' \text{ Cos B}'' = \text{Cos } \alpha \text{ Cos a} + \text{Sin } \alpha \text{ Sin a Cos } (b - \beta)$$

17. Es war ferner $\text{tg B} = -\frac{M}{N}$ das heisst nach §. 13

$$\text{tg B} = \frac{-(\text{m Cos } \beta + \text{n Sin } \beta)}{\text{p Sin } \alpha + (\text{n Cos } \beta - \text{m Sin } \beta) \text{ Cos } \alpha}$$

woraus sofort folgt

$$\text{tg B} = \frac{\text{Sin } (b - \beta)}{\text{Cos } \alpha \text{ Cos } (b - \beta) - \text{Sin } \alpha \text{ Cotg a}}$$

und eben so

$$\text{tg B}' = \frac{\text{Sin } \alpha \text{ Cos } (b - \beta) + \text{Cos } \alpha \text{ Cotg a}}{\text{Sin } (b - \beta)}$$

$$\text{tg B}'' = \frac{\text{Cos } \alpha \text{ Cos } (b - \beta) - \text{Sin } \alpha \text{ Cotg a}}{\text{Sin } \alpha \text{ Cos } (b - \beta) + \text{Cos } \alpha \text{ Cotg a}}$$

18. So könnte man fortfahren, und auch die folgenden Grössen d e f . . . mit in die mannigfaltigen Verbindungen aufnehmen, welche sich hier gleichsam von selbst darbiethen. Da aber die meisten derselben nur einfache Substitutionen enthalten, so können wir sie mit Ausnahme der folgenden übergehen, auf welche wir weiter unten wieder zurückkommen werden.

Es war §. 8 $\text{Cos g} = \frac{\text{m y}' - \text{n x}'}{\sqrt{\text{m}^2 + \text{n}^2}}$ also auch

$$\text{tg g} = \frac{\sqrt{\text{m}^2 + \text{n}^2 - (\text{m y}' - \text{n x}')^2}}{\text{m y}' - \text{n x}'}$$

welcher Ausdruck sich nach §. 9 in folgenden einfachen verwandelt

$$\text{tg g} = \frac{\text{r z}'}{\text{m y}' - \text{n x}'}$$

und eben so

$$\text{tg g}' = \frac{\text{r y}'}{\text{p x}' - \text{m z}'} \qquad \text{tg g}'' = \frac{\text{r x}'}{\text{n z}' - \text{p y}'}$$

Setzt man aber der grössern Einfachheit wegen die Grösse β

gleich Null, und substituirt in den drey letzten Gleichungen für m n p und x′ y′ z′ ihre Werthe aus §. 13, so erhält man

$$\operatorname{tg} g = \frac{Y' \operatorname{Sin} \alpha + Z' \operatorname{Cos} \alpha}{X' (\operatorname{Cos} A \operatorname{Sin} \alpha + \operatorname{Sin} A \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} \alpha) + (Y' \operatorname{Cos} \alpha - Z' \operatorname{Sin} \alpha) \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B}$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke die Werthe von X′ Y′ Z′ aus §. 12, so erhält man

$$\operatorname{tg} g = \frac{\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos} S + (\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} A \operatorname{Cos} B) \operatorname{Sin} S}{(\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} A \operatorname{Cos} B) \operatorname{Cos} S - \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} S}$$

und eben so

$$\operatorname{tg} g' = \frac{\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos} S + (\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} A \operatorname{Cos} B - \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} A) \operatorname{Sin} S}{(\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} A \operatorname{Cos} B - \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} A) \operatorname{Cos} S - \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} S}$$

$$\operatorname{tg} g'' = \frac{\operatorname{Cos} A \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} S - \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} S}{\operatorname{Cos} B \operatorname{Sin} S + \operatorname{Cos} A \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos} S}$$

und auf eine ähnliche Art werden sich auch die Sinus und Cosinus von g g′ g″ bestimmen lassen.

So ist $\operatorname{Cos} g = \dfrac{m y' - n x'}{\sqrt{m^2 + n^2}}$ und $\sqrt{m^2 + n^2} = r \operatorname{Sin} a$, also

$$\operatorname{Cos} g = \frac{M (Y' \operatorname{Cos} \alpha - Z' \operatorname{Sin} \alpha) - X' (N \operatorname{Cos} \alpha - P \operatorname{Sin} \alpha)}{R \operatorname{Sin} a}$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke für $\frac{M}{P}$ $\frac{N}{P}$ $\frac{R}{P}$ und für X′ Y′ Z′ die oben gegebenen Werthe, so erhält man

$$\operatorname{Cos} g = \frac{(\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} A \operatorname{Cos} B) \operatorname{Cos} S - \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} S}{\operatorname{Sin} a}$$

und eben so

$$\operatorname{Cos} g' = \frac{(\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} A \operatorname{Cos} B - \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} A) \operatorname{Cos} S - \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} S}{\operatorname{Sin} a'}$$

$$\operatorname{Cos} g'' = -\left\{\frac{\operatorname{Cos} B \operatorname{Sin} S + \operatorname{Cos} A \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos} S}{\operatorname{Sin} a''}\right\}$$

19. Die in dieser Einleitung entwickelten Ausdrücke werden bey vielen Untersuchungen ihre nützliche Anwendung finden. Ist z. B. die erste Ebene der Äquator, und die zweyte die Ekliptik, so ist e f die Declination und Rectascension, so wie E F die Breite und Länge eines Gestirns D, und es war

$$\operatorname{Sin} e = z' \quad \text{so wie} \quad \operatorname{Sin} E = Z'$$

$$\operatorname{tg} f = \frac{y'}{x'} \qquad \operatorname{tg} F = \frac{Y'}{X'}$$

Verbindet man die beyden ersten Gleichungen mit dem Ausdrucke $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, oder die beyden letzten mit dem Ausdrucke $X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 1$, so geben die ersten

$$x' = \mathrm{Cos}\, e\ \mathrm{Cos}\, f$$
$$y' = \mathrm{Cos}\, e\ \mathrm{Sin}\, f$$
$$z' = \mathrm{Sin}\, e$$

und die letzten

$$X' = \mathrm{Cos}\, E\ \mathrm{Cos}\, F$$
$$Y' = \mathrm{Cos}\, E\ \mathrm{Sin}\, F$$
$$Z' = \mathrm{Sin}\, E$$

also ist $\mathrm{Sin}\, e = z' = Y'\, \mathrm{Sin}\, \alpha + Z'\, \mathrm{Cos}\, \alpha$ und

$$\mathrm{tg}\, f = \frac{y'}{x'} = \frac{X'\, \mathrm{Sin}\, \beta + (Y'\, \mathrm{Cos}\, \alpha - Z'\, \mathrm{Sin}\, \alpha)\, \mathrm{Cos}\, \beta}{X'\, \mathrm{Cos}\, \beta - (Y'\, \mathrm{Cos}\, \alpha - Z\ \mathrm{Sin}\, \alpha)\, \mathrm{Sin}\, \beta}.$$

wo α die Schiefe der Ekliptik bezeichnet. Substituirt man in den beyden letzten Ausdrücken die Werthe von $X'\ Y'\ Z$, so hat man

$$\mathrm{Sin}\, e = \mathrm{Cos}\, \alpha\ \mathrm{Sin}\, E + \mathrm{Sin}\, \alpha\ \mathrm{Cos}\, E\ \mathrm{Sin}\, F$$

$$\mathrm{tg}\, f = \frac{\mathrm{Cos}\, E\, \mathrm{Cos}\, F\, \mathrm{Sin}\, \beta + (\mathrm{Cos}\, E\, \mathrm{Sin}\, F\, \mathrm{Cos}\, \alpha - \mathrm{Sin}\, E\, \mathrm{Sin}\, \alpha)\, \mathrm{Cos}\, \beta}{\mathrm{Cos}\, E\, \mathrm{Cos}\, F\, \mathrm{Cos}\, \beta - (\mathrm{Cos}\, E\, \mathrm{Sin}\, F\, \mathrm{Cos}\, \alpha - \mathrm{Sin}\, E\, \mathrm{Sin}\, \alpha)\, \mathrm{Sin}\, \beta}$$

und eben so wird man finden

$$\mathrm{Sin}\, E = \mathrm{Sin}\, e\ \mathrm{Cos}\, \alpha + \mathrm{Sin}\, \alpha\ \mathrm{Cos}\, e\ \mathrm{Sin}\, (\beta - f)$$

$$\mathrm{tg}\, F = \frac{\mathrm{Sin}\, e\ \mathrm{Sin}\, \alpha - \mathrm{Cos}\, \alpha\ \mathrm{Cos}\, e\ \mathrm{Sin}\, (\beta - f)}{\mathrm{Cos}\, e\ \mathrm{Cos}\, (\beta - f)}.$$

wo man, wenn man in den vier letzten Gleichungen β Null setzt, die schon aus dem ersten Theile bekannten Ausdrücke für die Tangente der Länge und der Rectascension, und für die Sinus der Breite und Declination erhält.

Ist aber die erste Ebene der Horizont, und die zweyte der Äquator, so ist $Z\mathfrak{z} = \alpha$ die Höhe des Äquators, $D\mathfrak{z} = 90 - e$ die Zenithdistanz, $DZ = 90 - E$ die Poldistanz, $D\mathfrak{z}Z = 90 + f = 180 -$ Azimut und $DZ\mathfrak{z} = 90 - F$ der Stundenwinkel des Punctes D und die zwey letzten Gleichungen geben, wenn $\beta = 0$ gesetzt wird, die Declination und den Stundenwinkel aus der Zenithdistanz, dem Azimut und der Polhöhe, und die zwey vorhergehenden geben die Zenithdistanz und das Azimut aus der Declination, dem Stundenwinkel und der Polhöhe.

ERSTES KAPITEL.

Theorie der elliptischen Bewegung.

§. 1.

In der vorhergehenden Abtheilung haben wir bloss die scheinbaren Orte der Gestirne, die Projection derselben an der Fläche des Himmels oder die Lage der Gesichtslinie betrachtet, in welcher diese Körper dem Auge des Beobachters erscheinen. Wir wollen nun, indem wir die Erscheinungen verlassen, und zu den Gegenständen selbst, die uns unter so verschiedenen Gestalten und Verhältnissen sich darstellen, übergehen, die Puncte jener Gesichts-Linien, welche die Gestirne in der That einnehmen, oder die ~~wahren Orte~~ derselben betrachten.

Unter allen Gestirnen, die eine eigene Bewegung zu haben scheinen, dringt sich unsern Blicken vorzüglich die Sonne auf. Eine einfache Ansicht des nächtlichen Himmels in zwey verschiedenen Jahreszeiten überzeugt uns von ihrer eigenen Bewegung. Die auf dem Wege der Sonne liegenden Sterne, die bald nach ihr untergehen, verlieren sich schon nach einigen Tagen in ihrem Glanze, und erscheinen in der Folge wieder vor ihrem Aufgange. Die Sonne rückt daher von West gegen Ost oder in einer Richtung fort, welche der ihrer täglichen Bewegung entgegen gesetzt ist. Auf diese Art haben unsere Vorgänger die eigene Bewegung der Sonne lange beobachtet; die Neueren bestimmen die Richtung dieser Bewegung und ihre Geschwindigkeit viel genauer dadurch, dass sie täglich die Mittagshöhe der Sonne und die Zeit beobachten, die zwischen ihrem und der Sterne Durchgang durch den Meridian verfliesst. Auf diese Art erhält man täglich ihre gerade Aufsteigung sowohl, als ihre Abweichung, und daraus im Verfolg des ganzen Jahres die Lage der Bahn, welche die Sonne beschreibt.

Allein die Beobachtungen haben uns noch eine grosse Anzahl anderer Himmelskörper kennen gelehrt, welche ebenfalls eigene Bewegungen haben. Einige derselben scheinen sich in beynahe kreisförmigen Bahnen, die nicht zu ferne von der Sonnenbahn liegen, um die Sonne ☉ in regelmässigen Perioden zu bewegen, und sie sind unter dem Namen der *Planeten* bekannt. Ihrer sind eilf, nähmlich Merkur ☿, Venus ♀, Mars ♂, Ceres ⚳, Pallas ⚴, Juno ⚵, Vesta ⚶, Jupiter ♃, Saturn ♄ und Uranus ♅, und zu ihnen gehört auch, wie wir sehen werden, unsere Erde ♁. Um mehrere derselben bewegen sich andere kleinere Gestirne, *Monde oder Satelliten*, deren die Erde einen, Jupiter vier, Uranus sechs, und Saturn sieben hat, welcher letztere noch überdiess von einem doppelten Ringe umgeben ist. Ausser den Planeten gibt es aber noch eine wahrscheinlich sehr grosse Menge anderer Körper, die eigenen Bewegungen unterworfen sind, deren Bahnen sehr von Kreisen verschieden, deren Ebenen in allen Gegenden des Himmels verstreut sind, die meistens mit einer Art von Nebel, der verschiedene Gestalten annimmt, umgeben sind, und die im Anfange ihrer Erscheinung oft beynahe unmerklich schnell an Grösse und Geschwindigkeit wachsen, hierauf wieder abnehmen, und endlich gänzlich verschwinden. Sie sind unter dem Nahmen der *Kometen* bekannt.

Diese Bewegungen der Planeten und Kometen, wie sie von der Erde gesehen werden, zeigen sich so zusammengesetzt, dass sie auf den ersten Blick ganz regellos vor sich zu gehen scheinen. Die Untersuchung derselben ist einer der wichtigsten und schwersten Gegenstände, an welchen der menschliche Geist seine Kraft geübt hat. Erst nach Jahrtausenden von vergeblichen Versuchen ist es ihm endlich gelungen, durch eine lange Reihe von Hindernissen und Irrthümern sich bis zu der Höhe zu erheben, auf welcher er die wahren Verhältnisse dieser verwickelten Gegenstände übersehen, und ihre sonderbaren Erscheinungen auf die wahren und einfachen Gesetze der Natur zurückführen konnte.

Es wird erlaubt seyn, schon jetzt die Erde mit unter den, um die Sonne sich bewegenden Planeten aufzuführen. Zwar scheint die Annahme der bewegten Erde einer anderen sehr bekannten Erscheinung zu widersprechen, nähmlich der oben betrachteten jährlichen Bewegung der Sonne in einer beynahe kreisförmigen Linie, deren Mittelpunct die ruhende Erde ist. Allein es geht mit dieser jährlichen Bewegung der Sonne, wie mit der nicht minder bekannten täglichen Bewegung dieses sowohl, als aller andern Gestirne des Himmels in einer der vorigen entgegengesetzten Richtung. Beyde biethen offenbar dieselben Erscheinungen dar, wenn die Gestirne selbst, wie es uns vorkömmt, diese Bewegungen um die ruhende Erde haben, oder wenn die Erde dieselbe Bewegung in der entgegengesetzten Richtung hat. Eben so wird uns die Sonne die Bahn, welche sie jährlich um die ruhende Erde zurückzulegen scheint, auch dann noch zu beschreiben scheinen, wenn die Erde jährlich dieselbe Bahn um die ruhende Sonne zurück legt, wie uns alle Gestirne täglich von Ost nach West zu gehen scheinen werden, wenn sich die Erde täglich von West nach Ost um ihre Axe dreht. In den blossen äusseren Erscheinungen dieser Bewegungen liegt nichts, was uns zu der

Annahme der einen oder der anderen dieser beyden Hypothesen vorzugsweise bestimmen könnte; vielmehr hängt diese Wahl, so lange wir bloss bey jenen Erscheinungen stehen bleiben, allein von unserer Willkühr ab, und erst andere, mit diesen Erscheinungen selbst nicht unmittelbar zusammenhängende Gründe werden die Wahrheit oder den Irrthum der getroffenen Wahl darthun können. Die Richtigkeit der gegenwärtigen Annahme, einer sich jährlich um die Sonne, und täglich um sich selbst bewegenden Erde, hat schon im ersten Theile dieses Werkes mehrere Bestätigungen erhalten: so würde die dort aufgestellte Theorie der Aberration des Lichts, welche sowohl mit den Beobachtungen harmonirt, ohne dieser Voraussetzung nicht zugelassen werden können, und sie wird in der Folge noch mehr bestätiget werden. Da überhaupt diese Überzeugung schon längst ohne Widerstand selbst bis zu dem gemeinen Manne vorgedrungen ist, so scheint es dem Zustande der Wissenschaft nicht mehr angemessen, sich den Irrthümern verflossener Jahrhunderte anzuschliessen, und von einer bereits lange als irrig erkannten Meinung sich erst nach und nach mühsam zu einer schon allgemein angenommenen Wahrheit zu erheben; ein Verfahren, welches wohl in die Geschichte, aber nicht in das System der Wissenschaft gehört.

§. 2.

Die Beobachtungen der Rectascension und Declination der Sonne geben uns, wie wir im ersten Theile gesehen haben, die Lage der Ebene, in welcher sich die Sonne, oder nach dem vorhergehenden, die Erde bewegt. Ist die beobachtete Rectascension und Declination der Sonne α und δ, so wird man daraus die aus der Sonne gesehene Rectascension A und Declination D der Erde ableiten, wenn man die Rectascension der Sonne um 180 Grade vermehrt, und ihre Declination mit veränderten Zeichen nimmt, oder es wird seyn $A = \alpha + 180$ und $D = -\delta$. Wie soll man aber die krumme Linie in dieser Ebene finden, in welcher sich der Mittelpunct der Erde in der That bewegt? — Dazu muss man offenbar die Entfernung dieser beyden Gestirne von einander zu verschiedenen Zeiten kennen.

Das einfachste Mittel, zu diesen Entfernungen zu gelangen, gibt uns die Beobachtung des Durchmessers der Sonne.

Wenn die scheinbaren Durchmesser der Sonne und auch ihre Geschwindigkeiten (d. h. ihre täglichen Bewegungen in Länge) alle Tage des Jahres einander gleich wären, so würde daraus folgen, dass die Bahn der Sonne ein Kreis ist, in deren Mittelpunct die Erde ruht, wenn man dem gemeinen Sprachgebrauche folgt, oder eigentlich, dass die Bahn der Erde ein Kreis ist, in deren Mittelpuncte die Sonne ruht. Allein die Beobachtungen zeigen, dass beyde, Durchmesser und Geschwindigkeit der Sonne, sich ändern, und dass sie in zwey einander entgegengesetzten Puncten zugleich ihren grössten und ihren kleinsten Werth erhalten, so wie sie in den zwischenliegenden Puncten nach und nach durch alle zwischen diesen Gränzen liegende Werthe durchgehen.

Im Anfange des Jänners nähmlich ist der grösste Durchmesser $D = 1955''6$ und die grösste Geschwindigkeit oder die tägliche Bewegung in Länge $dV = 3672''4$. Am Ende des Junius aber sind die kleinsten Werthe dieser Grössen $d = 1891''0$ und $dv = 3433''6$.

Es wäre möglich, dass diese Veränderungen der Geschwindigkeiten der Erde nur scheinbar sind, oder dass sich die Erde doch in einem Kreise, also mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit bewegte, die Sonne aber nicht im Mittelpuncte dieses Kreises wäre. Wenn aber die beobachtete Veränderung der Geschwindigkeit der Erde nur diese Ursache hat, und die wahre Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn beständig ist, so müssen ihre scheinbaren Geschwindigkeiten sich wie die Durchmesser der Sonne verhalten, oder man muss haben

$$\frac{dV}{dv} = \frac{D}{d}.$$

Es ist aber $\frac{dV}{dv} = 1.0659$ und $\frac{D}{d} = 1.0342$

Man hat also nicht $\frac{dV}{dv} : \frac{D}{d} = 1$ wie es unter dieser Voraussetzung seyn sollte. Da aber $\frac{D^2}{d^2} = 1.0695$ ist, so hat man

$$\frac{dV}{dv} : \frac{D^2}{d^2} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{dV}{dv} = \frac{D^2}{d^2},$$

oder die Geschwindigkeiten nehmen nach den Beobachtungen in einem zweymahl grösseren Verhältniss ab und zu, als die Durchmesser. Es findet daher bey der Bewegung der Erde, wenn sie sich von der Sonne entfernt, eine w a h r e Verminderung der Geschwindigkeit Statt, und die Bahn der Erde ist daher kein Kreis.

Ist aber r die grösste Entfernung der Sonne von der Erde, zu welcher die Geschwindigkeit dv und der Durchmesser der Sonne d gehört, und R die kleinste Entfernung beyder Körper, so ist

$$\frac{r}{R} = \frac{D}{d}$$

also auch

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{d.V}{d.v}$$

und da nach dem Vorhergehenden den Beobachtungen gemäss die Grösse D, R, dV nach demselben Gesetze durch die ganze Bahn sich ändern, so wird die letzte Gleichung auch gelten, wenn $d.v$

die Geschwindigkeit irgend eines anderen Punctes der Bahn heisst, zu welchem die Distanz r gehört, und da R und d. V beständige Grössen sind, so hat man allgemein

$$r^2 \, d\, v = A$$

wo A ebenfalls eine constante Grösse bezeichnet.

Welches also auch immer die krumme Linie seyn mag, die von der Erde beschrieben wird, so ist in jedem Puncte derselben das Product des Quadrats der Entfernung der Sonne von der Erde in die Geschwindigkeit der Erde eine constante Grösse. Alle Messungen des scheinbaren Durchmessers dieses Gestirns bestätigen dieses Resultat.

Es ist aber bekanntlich $\frac{1}{2}\, r^2\, dv$ der Ausdruck des Flächenraumes des täglich zurückgelegten Sectors der Bahn oder die durch die Entfernung r in einem Tage um die Erde beschriebene Fläche. Diese Fläche ist also beständig, und die ganze durch die Entfernung r beschriebene Fläche, wenn man von einer ersten unbeweglichen Entfernung ausgeht, wächst, wie die Zahl der vor dem Zeitpuncte, da die Erde auf der ersten Entfernung war, verflossenen Tage, oder mit andern Worten: die durch die Entfernungen der Erde von der Sonne beschriebenen Flächen sind den Zeiten proportionirt.

Um die Verhältnisse dieser verschiedenen Entfernungen unter einander zu finden, wollen wir r' die Entfernung nennen, in welcher die Geschwindigkeit der Erde ihren mittleren Werth $d\,v' = \frac{d\,V + d\,v}{2} = 3553.''0$ hat, so ist

$$R = r' \sqrt{\frac{d\,v}{d\,v'}} \text{ und } r = r' \sqrt{\frac{d\,V}{d\,v'}}$$

oder wenn diese Entfernung r' für die Einheit angenommen wird,

$$R = 0.9830 \quad , \quad r = 1.0167 \text{ und } \frac{r - R}{2} = 0.0168$$

wodurch uns die grösste und kleinste Entfernung der Sonne in Theilen ihrer mittleren Entfernung gegeben ist.

Wenn man nun täglich die Länge der Sonne und ihre Geschwindigkeit beobachtet, welches erste die Lage, und das zweyte die Grösse der Entfernung r gibt, und wenn man durch die Endpuncte aller dieser Entfernungen eine krumme Linie zieht, so sieht man, dass diese krumme Linie nicht genau kreisförmig ist, sondern nach der Richtung der geraden Linie, welche durch den Mittelpunct der Sonne und durch die zwey einander entgegengesetzten Puncte der Bahn geht, in welchen die Geschwindigkeit der Erde oder der Durchmesser der Sonne ein Grösstes und ein Kleinstes ist, sich etwas in die Länge zieht. Die Ähnlichkeit dieser krummen Linie mit der Ellipse gab Anlass, sie mit dieser zu vergleichen, und aus der bemerkten Übereinstimmung zog man den Schluss, **dass die Erdbahn eine Ellipse ist, in deren einem Brennpuncte der Mittelpunct der Sonne sich befindet.**

Diese beyden Hauptgesetze der Bewegung sind auf andern, minder bequemen Wegen gefunden worden, deren umständliche Erwähnung der Geschichte der Wissenschaft aufbehalten ist. Hier ist es genug, zu bemerken, dass selbst die Alten mit ihren unvollkommenen Instrumenten die vorhin bezeichnete Bahn mit Sicherheit hätten betreten können, wenn sie das, was von der Erde gesagt wurde, auf den Mond angewendet hätten, bey welchem die Veränderungen seines Durchmessers und seiner Geschwindigkeit viel beträchtlicher sind, als bey der Sonne, wie wir weiter unten sehen werden.

§. 3.

Kennt man also aus dem vorhergehenden die Lage der Bahn der Erde und die Gestalt der krummen Linie, in welcher sie sich bewegt, oder die Excentricität der Ellipse, welche wir oben gleich 0.0168 Theile der mittleren Entfernung der Sonne von der Erde gefunden haben, so wird man auch, wenn man einen Ort der Sonne oder der Erde in ihrer Bahn für eine gegebene Zeit kennt, den Ort derselben für jede andere Zeit bestimmen können. Zu diesem Zwecke wollen wir uns einen Punct denken, der sich gleichförmig in einem Kreise bewegt, dessen Mittelpunct der der Erde und dessen Halbmesser irgend eine der Entfernungen der Sonne von der Erde, z. B. die kleinste dieser Entfernungen ist. Wir wollen diesen Punct die mittlere Sonne nennen. Da die Sonne nach den Beobachtungen immer in denselben Zeiträumen zu dem Punct ihrer kleinsten Entfernung zurückkömmt, welche Periode man ihre Revolution nennt, so wollen wir annehmen, dass die mittlere Sonne dieselbe Revolution mit der wahren Sonne habe, und mit ihr zugleich von jenem Puncte der kleinsten Entfernung ausgehe. Während der Radius der mittleren Sonne sich gleichförmig um die Erde bewegt, bewegt sich der Radius der wahren Sonne auf eine ungleiche Art, indem er immer mit der ersten Entfernung elliptische Sectoren beschreibt, die den Zeiten proportionirt sind. Beyde Radien werden sich übrigens nie beträchtlich von einander entfernen, weil die Excentricität der Ellipse nach dem vorhergehenden gegen die halbe Axe derselben nur sehr klein ist.

Eine einfache Addition wird für jede Zeit den Ort der mittlern Sonne geben, deren Bewegung der Zeit proportional ist, und wenn man zu diesem Orte der mittlern Sonne den Winkel hinzusetzt, welchen die beyden Radien der mittlern und der wahren Sonne mit einander im Mittelpunct der Erde bilden, so wird man den Ort der wahren Sonne haben. Die Bestimmung dieses Winkels ist daher eine wichtige Aufgabe, mit welcher wir uns hier beschäftigen wollen.

Wir wollen durch T die Revolution der beyden Sonnen bezeichnen, und diese in dem Puncte der Bahn anfangen, wo die Geschwindigkeit der Sonne am grössten, oder ihre Entfernung von der Erde am kleinsten ist. Nach einer Zeit von t Tagen seit dem Durchgange beyder Sonnen durch diesen Punct wird der Winkel des Radius der mittlern Sonne mit dem ersten Radius gleich $360 \frac{t}{T} = m$ seyn. Sey, eben so v der Winkel des Radius der wahren Sonne zur Zeit t mit dem ersten Radius und r die Entfernung der wahren Sonne in dieser Zeit von dem Mittelpuncte der Erde. Nennt man a die mittlere Entfernung oder die halbe grosse Axe der von der Sonne beschriebenen Ellipse und $a\varepsilon$ ihre Excentricität, so ist, wie bekannt,

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \operatorname{Cos} v}$$

die Gleichung der Ellipse. Ist aber $\frac{1}{2} f$ die Fläche, welche der Radius r in der Zeit t und $\frac{1}{2} F$ die, welche er in der Zeit T beschreibt, also $\frac{1}{2} F$ die ganze Fläche der Ellipse, so hat man, da nach dem Vorhergehenden diese Flächen sich wie ihre Zeiten verhalten,

$$T : t = \tfrac{1}{2} F : \tfrac{1}{2} f \text{ oder}$$

$$f = \frac{F}{T} \cdot t$$

Es ist aber $\frac{1}{2} F = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, wo π das Verhältniss der halben Peripherie zum Halbmesser des Kreises ausdrückt, also ist auch

$$d f = \frac{2 \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{T} \cdot d t$$

Und da $d.f = r^2 \, d v$ ist, so hat man, wenn man diese beyden Werthe von d f gleich setzt, und für r den oben gegebenen Werth, so wie für d t seinen Werth $\frac{T}{2 \pi} \cdot d m$ substituirt,

$$\frac{d m}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d v}{(1 + \varepsilon \operatorname{Cos} v)^2}$$

Diesen Ausdruck leichter zu integriren, kann man ihm folgende Gestalt geben

$$\frac{d m}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d v}{[(1 + \varepsilon) \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} v + (1 - \varepsilon) \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} v]^2} =$$

$$\frac{d v}{(1 + \varepsilon)^2 \operatorname{Cos}^4 \tfrac{1}{2} v \left[1 + \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} v\right]^2}$$

Um auch diesen Ausdruck noch einfacher darzustellen, sey $tg^2 \frac{1}{2} u = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot tg^2 \frac{1}{2} v$ so hat man nach einigen Reductionen

$$d\,m = d\,u\,(1 - \varepsilon \,\mathrm{Cos}\, u)$$

und dieser Gleichung Integral ist

$$m = u - \varepsilon \,\mathrm{Sin}\, u$$

vorausgesetzt, dass t oder m zugleich mit u und v verschwindet.

Hat man also die Grösse m aus $m = 360 \frac{t}{T}$ gefunden,

so suche man u aus $m = u - \varepsilon \,\mathrm{Sin}\, u$

und v aus $tg \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \cdot tg \frac{1}{2} u$

und endlich r aus $r = \frac{a\,(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \,\mathrm{Cos}\, v}$

und durch die Grössen v r wird der Ort der wahren Sonne bestimmt, wenn die Lage des Anfangspunctes der Grösse m, u, v . . gegeben ist. Man nennt m die mittlere, u die excentrische, v die wahre Anomalie, und r den Radius Vector der Sonne. p.35.

§. 4.

Es wird angenehm seyn, dieselben Ausdrücke auch auf anderem Wege, unmittelbar aus den ersten Gesetzen der Bewegung zu finden.

Wird die Lage der Erde gegen den Mittelpunct der Sonne durch zwey rechtwinklichte Coordinaten x und y gegeben, wo x in der Linie liegt, welche durch die Puncte der grössten und der kleinsten Geschwindigkeit geht, so ist, wenn S die Kraft der Sonne bezeichnet, und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Distanz der Sonne von der Erde ist, $S \frac{x}{r}$ diese Kraft parallel mit der Axe der x, und $S \frac{y}{r}$ dieselbe Kraft der Sonne, parallel mit der Axe der y zerlegt. Bezeichnet also d t das constante Element der Zeit, so hat man, wie bekannt, für die Bewegung der Erde folgende einfache Gleichungen

$$\frac{d^2 x}{d\,t^2} + S \cdot \frac{x}{r} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{d\,t^2} + S \cdot \frac{y}{r} = 0$$

Aus diesen Gleichungen findet man leicht

$$\frac{d\,x^2 + d\,y^2}{d\,t^2} = A - 2 \int S\,d\,r$$

$$x\,d\,y - y\,d\,x = B + d\,t$$

wo A und B zwey constante Grössen sind, welche die Integration einführt. Um diesen Ausdrücken eine einfachere Gestalt zu geben, sey v der Winkel des Radius r mit der Axe der x, so ist $x = r \operatorname{Cos} v$ und $y = r \operatorname{Sin} v$, wodurch die vorhergehenden zwey Gleichungen in folgende übergehen:

$$\frac{r^2 dv^2 + dr^2}{dt^2} = A - 2\int S dr$$

$$r^2 dv = B . dt$$

und der letzte dieser Ausdrücke enthält offenbar das oben gefundene Gesetz, dass die von dem Radius beschriebenen Räume der Zeit proportional sind. Eliminirt man dann aus den beyden letzten Gleichungen die Grösse d t, so erhält man

$$\frac{B^2}{r^2} + \frac{B^2 dr^2}{r^4 dv^2} = A - 2\int S dr$$

und diese Gleichung wird die Kraft S geben, wenn die krumme Linie bekannt ist, in welcher sich die Erde bewegt. Diese krumme Linie ist aber den Beobachtungen gemäss eine Ellipse, in deren einem Brennpuncte der Mittelpunct der Sonne ist. Die Gleichung der Ellipse aber ist

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{(1 + \varepsilon \operatorname{Cos} \nu)}$$

wenn, wie zuvor, a die halbe grosse Axe, und $a \varepsilon$ die Excentricität derselben ist. Differentiirt und quadrirt man diese Gleichung, so ist

$$\frac{dr^2}{r^4 dv^2} = \frac{2}{ar(1 - \varepsilon^2)} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2(1 - \varepsilon^2)}$$

und substituirt man diesen Werth von $\frac{dr^2}{r^4 dv^2}$ in dem vorhergehenden Ausdruck, so erhält man

$$A - 2\int S dr = \frac{2B^2}{ar(1 - \varepsilon^2)} - \frac{B^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)}$$

dessen Differential

$$S = \frac{B^2}{a(1 - \varepsilon^2)} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{B^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}$$

wo $p = a(1 - \varepsilon^2)$ der halbe Parameter der Ellipse ist. Die Kraft der Sonne auf einen der um dieselbe sich bewegenden Körper verhält sich daher wie verkehrt das Quadrat der Entfernung der Sonne von dem Körper. Die Grösse $\frac{B^2}{p}$, die wir der Kürze wegen durch μ^2 bezeichnen wollen, ist offenbar die Intensität der Kraft in der Entfernung $= 1$.

Ferner war $r^2\,dv = B.\,dt$ oder $\int r^2\,dv = B\,t$. Ist aber $\frac{1}{2}f$ die Fläche des Sectors, so ist $f = \int r^2\,dv$, also $B\,t = f$ oder $f = t\,\mu\sqrt{p}$. Um daraus den Werth vou μ zu finden, ist für die Erde, wenn die halbe Axe ihrer Bahn gleich der Einheit genommen wird, die Fläche der ganzen Ellipse $\frac{1}{2}F = \pi\sqrt{p}$ und nach den Beobachtungen ihre Revolution um die Sonne $T = 365.256384$ Tage, also

$$\mu = \frac{F}{T.\sqrt{p}} = \frac{2\pi}{T} = 0.0172021$$

und diess μ ist die Entfernung in Halbmessern der Erdbahn von dem Mittelpuncte der Sonne, in welcher ihre Kraft gleich der Einheit, oder gleich der Schwere auf der Oberfläche unserer Erde ist. Diese Entfernung im Halbmesser der Erde selbst ausgedrückt, ist daher

$$\frac{\mu}{\operatorname{Sin}\pi}$$

wenn π die Parallaxe der Sonne bezeichnet.

I. Wenn so die Kraft gegeben ist, so kann man auch umgekehrt die krumme Linie finden, welche der Körper, auf welchen diese Kraft wirkt, beschreibt. Substituirt man nähmlich in den beyden ersten Gleichungen für S ihren Werth $\frac{\mu^2}{r^2}$, so erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu^2 x}{r^3} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu^2 y}{r^3} = 0$$

woraus man wieder leicht findet

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} - \frac{2\mu^2}{r} + \frac{\mu^2}{a} = 0$$

$$x\,dy - y\,dx = \mu\,dt.\sqrt{p}$$

wenn a, p die Constanten der Integrationen bezeichnen. Setzt man auch hier $x = r\operatorname{Cos}v$, $y = r\operatorname{Sin}v$, so werden diese zwey Gleichungen in folgende übergehen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dr^2 + r^2dv^2}{dt^2} - \frac{2\mu^2}{r} + \frac{\mu^2}{a} = 0 \\ &r^2dv = \mu\,dt.\sqrt{p} \end{aligned}\right\}(a)$$

Eliminirt man aus ihnen die Grösse dt und setzt der grössern Einfachheit wegen $r = \frac{1}{z}$, so ist

$$dv = \frac{p\,dz}{\sqrt{1 - \frac{p}{a} - (1 - pz)^2}}$$

und davon ist das Integral

$$pz = t + \sqrt{1 - \frac{p}{a}}\ \mathrm{Cos}\ v$$

wenn $r = p$ für $v = 90°$ ist. Setzt man wieder $z = \frac{1}{r}$ und $1 - \frac{p}{a} = \varepsilon^2$, so hat man

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\ \mathrm{Cos}\ v} = \frac{a\ (1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\,\mathrm{Cos}\ v}$$

für die Gleichung der gesuchten krummen Linie, die also ein Kegelschnitt ist, deren halbe grosse Axe a, halber Parameter p und Excentricität $a\,\varepsilon$ ist. Diese Linie ist daher eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, nachdem a positiv, negativ oder unendlich ist, oder auch, nachdem ε kleiner, grösser als eins, oder gleich eins ist.

Eliminirt man dv aus den beyden Gleichungen (a), so hat man

$$dt = \frac{\sqrt{\frac{a}{\mu^2}}\ .\ rdr}{\sqrt{a^2\,\varepsilon^2 - (a - r)^2}}$$

Diesen Ausdruck einfacher zu machen, sey

$$r = a\ (1 - \varepsilon\ \mathrm{Cos}\ u)$$

so ist

$$\frac{\mu}{a^{\frac{3}{2}}}\ .\ dt = (1 - \varepsilon\ \mathrm{Cos}\,u)\ du$$

wovon das Integral ist

$$\frac{\mu}{a^{\frac{3}{2}}}\ .\ t = u - \varepsilon\ \mathrm{Sin}\ u$$

wenn u mit t verschwindet.

Die letzte Gleichung gibt u, wenn t bekannt ist, und daraus die Grösse r durch $r = a\ (1 - \varepsilon\ \mathrm{Cos}\ u)$ und die Grösse v durch $\mathrm{Cos}\ v = \frac{a\ (1 - \varepsilon^2) - r}{r\,\varepsilon}$

Vergleicht man endlich die beyden Ausdrücke von v,

$$r = \frac{a\ (1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\,\mathrm{Cos}\ v}\quad r = a\ (1 - \varepsilon\,\mathrm{Cos}\,u)$$

so findet man $1 - \varepsilon\ \mathrm{Cos}\ u = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon\ \mathrm{Cos}\ v}$ oder

$$\mathrm{tg}\ \tfrac{1}{2}\,v = \mathrm{tg}\ \tfrac{1}{2}\,u.\ \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}}$$

Es sey nun T die Revolution irgend eines Planeten, und a die halbe grosse Axe seiner Bahn, so wird die Gleichung $\frac{\mu}{a^{\frac{3}{2}}}\, t = u - \varepsilon \operatorname{Sin} u$ in folgende einfachere übergehen

$$T = \frac{2\,\pi.\,a^{\frac{3}{2}}}{\mu} \text{ oder } \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\,\pi^2}{\mu^2}$$

wo π das Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser des Kreises ist. Vernachlässigt man aber die Masse der Planeten gegen die viel grössere der Sonne, so drückt μ^2 eine Grösse aus, welche für alle Planeten und Cometen unseres Sonnensystems constant ist, also verhalten sich unter dieser Voraussetzung die Quadrate der Revolutionen, wie die Würfel der grossen Axen.

Nach den Beobachtungen hat man

für die Erde $T = 365.\,256384$ und $a = 1$
für Mars $T = 686.\,979579$ und $a = 1.\,523693$

Substituirt man diese Werthe der Erde oder des Mars in der letzten Gleichung, so erhält man

$\operatorname{Log} \frac{4\,\pi^2}{\mu^2} = 5.\,125195$ oder da $\operatorname{Log} 4\,\pi^2 = 1.\,596360$

$\operatorname{Log} \mu = 8.\,235582$ und $\mu = 0.\,0172021$ wie zuvor.

Es ist daher für alle Körper unsers Sonnensystems

$$T = (365.\,2564)\, a^{\frac{3}{2}}$$

II. Die diesen Betrachtungen zu Grunde gelegten beyden Gleichungen setzen voraus, dass die Bahn eine ebene krumme Linie sey. Obschon diese Voraussetzung der Natur der Sache nach immer erlaubt ist, so lange nur zwey auf einander wirkende Körper betrachtet werden, so wird es doch gut seyn, zu zeigen, wie man dieselbe Aufgabe auch unabhängig von jener Einschränkung auflösen könne. — Nimmt man nähmlich noch auf die dritte Coordinate z Rücksicht, so geben die ersten Grundgesetze der Bewegung folgende drey Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{d^2 x}{d\,t^2} + \mu^2 \frac{x}{r^3} \\ c &= \frac{d^2 y}{d\,t^2} + \mu^2 \frac{y}{r^3} \\ c &= \frac{d^2 z}{d\,t^2} + \mu^2 \frac{z}{r^3} \end{aligned}\right\} \quad .\ .\ (A)$$

Multiplicirt man die erste derselben durch y, und die zweyte durch x, so gibt ihre Differenz

$$\left.\begin{array}{l} xdy - ydx = c.\, dt \\ \text{und eben so erhält man} \\ xdz - zdx = c'.\, dt \\ ydz - zdy = c''.\, dt \end{array}\right\} \ldots (1)$$

wo c c′ c″ die beständigen Grössen der Integration sind.

Multiplicirt man die Gleichungen A resp. durch 2 dx, 2 dy, 2 dz, so gibt ihre Summe, nach der Integration, da

$$\int \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r^3} = \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r} \text{ ist,}$$

$$o = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \frac{2\mu^2}{r} + \frac{\mu^2}{a} \ldots (2)$$

wo a eine beständige Grösse ist.

Multiplicirt man aber dieselben Gleichungen nach der Ordnung durch x, y, z, addirt man die Summe dieser drey Producte zur Gleichung (2) und bemerkt, dass

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + xd^2x + yd^2y + zd^2z = d^2\frac{(r^2)}{2} = dr^2 + rd^2r \text{ ist,}$$

so hat man

$$o = \frac{d^2.(r^2).\,dx}{2\,dt^2} + \mu^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right).\, dx$$

Multiplicirt man aber die erste der Gleichungen A durch r dr, und addirt zu ihr die letzte Gleichung, so ist

$$o = \mu^2\left\{dx\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) + \frac{x\,dr}{r^2}\right\} + \tfrac{1}{2}d^2.(r^2).\frac{dx}{dt^2} + \frac{r\,dr.\,d^2x}{dt^2}$$

deren Integral

$$o = f + \mu^2 x\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) + \frac{r\,dr.\,dx}{dt^2}$$

wo f eine constante Grösse ist.

Die Gleichung (2) gibt aber $\mu^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) = \frac{\mu^2}{r} - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$

überdiess ist $r\,dr.\frac{dx}{dt^2} = (x\,dx + y\,dy + z\,dz) \ldots \frac{dx}{dt^2}$

also wird der letzte Ausdruck in folgenden übergehen,

$$\left.\begin{array}{l} o = f + x\left(\frac{\mu^2}{r} - \frac{dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) + (ydy + zdz)\frac{dx}{dt^2} \\ \text{und durch ein ähnliches Verfahren, oder analog durch} \\ \text{die blosse Verwechslung der Zeichen wird man er-} \\ \text{halten} \\ o = f' + y\left(\frac{\mu^2}{r} - \frac{dx^2 + dz^2}{dt^2}\right) + (xdx + ydz)\frac{dy}{dt^2} \\ o = f'' + z\left(\frac{\mu^2}{r} - \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}\right) + (xdx + ydy)\frac{dz}{dt^2} \end{array}\right\} \quad \ldots (3)$$

Die sieben Gleichungen 1, 2, 3 enthalten sieben constante c, c', c'', f, f', f'' und a, die sich aber, wie wir sogleich sehen werden, auf fünf zurückbringen lassen.

Multiplicirt man nähmlich die erste der Gleichungen (3) durch $\frac{zdy - ydz}{dt}$, und die zweyte durch $\frac{xdz - zdx}{dt}$, so gibt ihre Summe

$$o = \frac{f'c' - fc''}{c} + z\left(\frac{\mu^2}{r} - \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}\right) + \frac{xdx + ydy}{dt^2} \cdot dz$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der letzten der Gleichungen (3), so ist

$$o = f c'' - f' c' + f'' c$$

welches die erste Bedingungsgleichung zwischen jenen Constanten ist.

Nennt man der Kürze wegen $f^2 + f'^2 + f''^2 = F^2$ und $c^2 + c'^2 + c''^2 = C^2$, so geben die Gleichungen (3), wenn man sie quadrirt und dann addirt

$$F^2 - \mu^4 = \left(\frac{2\mu^2}{r} - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) \times$$
$$\left(\frac{r^2 dr^2}{dt^2} - \frac{r^2}{dt^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)\right) \quad \ldots (a)$$

Quadrirt man eben so die drey Gleichungen (1), so erhält man

$$r^2\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) - \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 = C^2 \quad \ldots (b)$$

also wird die Gleichung (a)

$$o = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \frac{2\mu^2}{r} + \frac{\mu^4 - F^2}{C^2}$$

und diese mit der Gleichung (2) verglichen, gibt

$$\frac{\mu^4 - F^2}{C^2} = \frac{\mu^2}{a}$$

welches die zweyte Bedingungsgleichung zwischen jenen constanten ist.

Multiplicirt man nun die Gleichungen (3) nach der Ordnung durch x, y, z, so gibt ihre Summe

$$fx + f'y + f''z = \frac{r^2}{dt^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) - \frac{r^2\,dr}{dt^2}$$

welche mit (b) verbunden, gibt

$$C^2 = fx + f'y + f''z \ldots (c)$$

Multiplicirt man endlich die Gleichungen (1) resp. durch z, — y, x, so ist ihre Summe

$$o = cz - c'y + c''x \ldots (d)$$

und der letzte Ausdruck ist die Gleichung der Ebene, in welcher sich der Körper bewegt. Heisst k der Winkel, welchen die Knotenlinie dieser Ebene in der Ebene der x y mit der Axe der x bildet, und n die Neigung dieser beyden Ebenen, so ist bekanntlich

$$\operatorname{tang} k = \frac{c''}{c'} \text{ und } \operatorname{tang} n = \sqrt{\frac{c'^2 + c''^2}{c^2}}$$

Die beyden Gleichungen c und d geben eben so

$$\frac{C^2}{\mu^2} - r = \frac{x}{\mu^2 c}[cf - c''f''] + \frac{y}{\mu^2 c}[cf' + c'f'']$$

und diess ist die allgemeine Gleichung der Linien der zweyten Ordnung. Ist nähmlich p der halbe Parameter, ε das Verhältniss der Excentricität zur halben grossen Axe, und ψ die Entfernung des Knotens von dem Puncte P der Bahn des Körpers, welcher der Sonne am nächsten ist, so hat man, wenn k, n die vorige Bezeichnung beybehalten, für die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, wie man leicht findet,

$$p - r = \varepsilon x \left\{ \operatorname{Cos} k \operatorname{Cos} \psi + \frac{\operatorname{Sin} k \operatorname{Sin} \psi}{\operatorname{Cos} n} \right\}$$
$$+ \varepsilon y \left\{ \operatorname{Sin} k \operatorname{Cos} \psi - \frac{\operatorname{Cos} k \operatorname{Sin} \psi}{\operatorname{Cos} n} \right\}$$

Vergleicht man diese beyden Ausdrücke mit einander; so erhält man

$$\text{tg}\,\psi = \frac{f\,c'' - f'\,c'}{(f\,c' + f'c'')}\,\text{Cos}\,n$$

Heisst dann φ der Winkel der Knotenlinie mit der auf die Ebene der $x\,y$ projicirten Entfernung des Punctes P von der Sonne, so ist

$$\text{tg}\,\varphi = \text{tg}\,\psi\,\text{Cos}\,n$$

und wenn π die auf die Ebene der $x\,y$ reducirte Länge des Punctes P selbst bezeichnet, so ist

$$\text{tg}\,\varphi = \text{tg}\,(k - \pi)$$

woraus folgt

$$\text{tg}\,\pi = \frac{f'}{f}$$

Verbindet man die Gleichung (b) mit der Gleichung (2), so erhält man

$$C^2 = r^2\mu^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \frac{r^2\,dr^2}{dt^2} \;\ldots\ldots\; (e)$$

Für die grössten und kleinsten Werthe von r ist $dr = o$, also der letzte Ausdruck

$$o = r^2 - 2ar + \frac{a\,C^2}{\mu^2}$$

Die beyden Werthe von r aus dieser Gleichung sind

$$r = a + \sqrt{a^2 - \frac{a\,C^2}{\mu^2}} \text{ und } r' = a - \sqrt{a^2 - \frac{a\,C^2}{\mu^2}}$$

Daher ist die halbe grosse Axe

$$\frac{r + r'}{2} = a$$

die Excentricität

$$\frac{r - r'}{2} = a\,\varepsilon = \sqrt{a^2 - \frac{a\,C^2}{\mu^2}}$$

und der halbe Parameter

$$p = \frac{C^2}{\mu^2} \text{ und } C^2 = a\,\mu^2\,(1 - \varepsilon^2)$$

also auch die Gleichung (e)

$$dt = \frac{r\,d\,r}{\mu\,.\,\sqrt{2\,r - \frac{r^2}{a} - a\,(1 - \varepsilon^2)}}$$

Nimmt man zur leichtern Integration dieser Gleichung die Hülfsgrösse u, so dass

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \operatorname{Cos} u, \text{ so ist}$$

$$dt = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\mu} (1 - \varepsilon \operatorname{Cos} u)\, du,$$ deren Integral, wenn t mit u verschwindet,

$$\frac{\mu \,.\, dt}{a^{\frac{3}{2}}} = u - \varepsilon \operatorname{Sin} u \text{ wie zuvor.}$$

§. 5.

Die andern Planeten und alle Kometen biethen uns in ihren Bewegungen um die Sonne, so wie die Satelliten in ihren Bewegungen um ihre Hauptplaneten, ähnliche Erscheinungen dar, sie werden daher wahrscheinlich ähnlichen Gesetzen folgen. Die Beobachtungen haben diese Voraussetzung auf das genaueste bestätiget.

Die Planeten und Kometen bewegen sich also ebenfalls in Ellipsen, in deren einem Brennpuncte die Sonne ist. Die Puncte, in welchen die Bahn des Planeten die Ebene der Ekliptik durchschneidet, sind die Knoten der Bahn, und zwar der aufsteigende ☊, wenn der Planet nach dem Durchgang durch denselben sich über die Ekliptik gegen Norden erhebt; der andere entgegengesetzte heisst der niedersteigende Knoten ☋, und die beyde Knoten verbindende gerade Linie, die durch den Mittelpunct der Sonne geht, heisst die Knotenlinie. Der Winkel der Ebene der Bahn mit der Ebene der Ekliptik ist die Neigung der Bahn. Die grosse Axe der Ellipse ist die Apsidenlinie, oder die doppelte mittlere Entfernung des Planeten von der Sonne, und von ihren beyden Endpuncten ist der, welcher der Sonne am nächsten liegt, die Sonnennähe oder das Perihelium, so wie der andere die Sonnenferne oder das Aphelium; beyde Puncte zusammen heissen die Apsiden. Die Entfernung des Periheliums von der Sonne Mittelpunct ist die kürzeste Distanz, und die Entfernung jedes andern Punctes der Bahn von der Sonne Mittelpunct der Radius Vector dieses Punctes. Der Winkel an der Sonne Mittelpunct zwischen dem aufsteigenden Knoten und der kürzesten Distanz ist die Distanz des Periheliums vom Knoten, die zur Länge des aufsteigenden Knotens addirt, die Länge des Periheliums gibt. Der Winkel an der Sonne Mittelpunct zwischen dem aufsteigenden Knoten und dem Radius Vector des Planeten in irgend einem Puncte seiner Bahn ist das Argument der Breite, das zur Länge des aufsteigenden Knotens addirt die *Länge des Planeten in der Bahn* gibt. Der Unterschied des Arguments der Breite und der Projection dieses Arguments auf die Ebene der Ekliptik ist die *Reduction*, die zur Länge des Planeten in der Bahn addirt, die *reducirte Länge* des Planeten in der Ekliptik gibt. Die Zeit endlich eines ganzen Umlaufs des Planeten um die Sonne ist seine *Revolution* oder *Umlaufszeit*, so wie der Ort, die Länge des Planeten in seiner Bahn für irgend eine gegebene Zeit die *Epoche* des Planeten heisst.

Denkt man sich wieder in der Ebene der Bahn um den Mittelpunct der Sonne als Centrum einen Kreis mit einem willkührlichen Halbmesser, in dessen Peripherie sich ein Punct gleichförmig so bewegt, dass seine Revolution der des Planeten gleich ist, und dass er mit dem Planeten zugleich durch das Perihelium und Aphelium geht, so heisst dieser Punct der *mittlere Planet*. Der Winkel des Radius Vectors des mittlern Planeten mit der kürzesten *Distanz* ist die Anomalie des mittlern, oder die *mittlere Anomalie* des wahren Planeten, so wie der Winkel des Radius Vectors des wahren Planeten mit der kürzesten Distanz die *wahre Anomalie* des letzten heisst. Die Differenz der wahren und mittlern Anomalie ist die *Gleichung der Bahn*, oder die *Gleichung des Mittelpunctes*.

Aus diesen Erklärungen folgt: Ist k die Länge des aufsteigenden Knotens der Planetenbahn, p die Länge des Perihels, π die Elongation des Periheliums vom Knoten, v die wahre Anomalie, und υ das Argument der Breite, l die Länge in der Bahn, l' die reducirte Länge in der Ekliptik, und ρ die Reduction, so hat man

φ = s. p. 33.

$$\begin{aligned} p - k &= \pi \\ \upsilon &= v + \pi \\ \upsilon &= v + p - k \\ l &= \upsilon + k = v + p \\ l' &= l + \rho \end{aligned}$$

Kennt man ferner die mittlere Anomalie m des Planeten, die nach dem vorhergehenden immer leicht gefunden wird, wenn man die Epoche des mittlern Planeten oder die Zeit seines Durchganges durch das Perihelium und die Revolution desselben kennt, so wird man die excentrische Anomalie u, den Radius Vector r, und die wahre Anomalie v des Planeten durch die Ausdrücke erhalten

s. p. 24.

$$m = u - \varepsilon \operatorname{Sin} u$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u$$

$$r = \frac{a\,(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \operatorname{Cos} v} \text{ oder } r = a\,(1 - \varepsilon \operatorname{Cos} u).$$

wo a die halbe grosse Axe der Bahn, und $a\,\varepsilon$ die Excentricität derselben bezeichnet.

Denkt man sich von dem Planeten ein Loth auf die grosse Axe der Bahn, so ist das Stück der grossen Axe zwischen diesem Lothe und dem Mittelpuncte der Ellipse offenbar gleich

$$x = r \operatorname{Cos} v + a\,\varepsilon$$

oder da

$$r = \frac{a\,(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \operatorname{Cos} v} \text{ ist,}$$

$$x = \frac{a - r}{\varepsilon}$$

Denkt man sich aber einen Kreis, dessen Mittelpunct der der Ellipse und dessen Durchmesser die grosse Axe der Ellipse ist, so wird jenes Loth verlängert, die Peripherie dieses Kreises in einem Puncte schneiden, dessen Entfernung vom Mittelpuncte der Ellipse mit der grossen Axe einen Winkel φ bildet, so dass $\operatorname{Cos} \varphi = \frac{x}{a}$ ist, oder wenn man den vorhergehenden Werth von x substituirt, dass $r = a\,(1 - \varepsilon \operatorname{Cos} \varphi)$ ist. Es ist also dieser Winkel $\varphi = u$ die excentrische Anomalie. Über die frühere Bedeutung dieser drey Anomalien s. m. Berl. Jahrb. 1797 p. 123.

§. 6.

Wir wollen nun zuerst sehen, wie man für jede Zeit die mittlere Länge L und die mittlere Anomalie der Planeten findet.

Ist L die mittlere Länge, und m die mittlere Anomalie, also $p = L - m$ die Länge des Periheliums für eine gegebene Zeit ϑ. Man suche die mittlere Länge L' und die mittlere Anomalie m' für irgend eine andere Zeit ϑ'.

Ist T die Umlaufszeit des Planeten in Tagen und Theilen des Tages, so ist $\frac{360°}{T} = d\,L$ die tägliche Bewegung desselben in mittlerer Länge. Nehmen wir ferner an, dass auch die grosse Axe der Bahn beweglich sey, und dass $d\,p$ die tägliche Zunahme der Länge des Periheliums bezeichne. Drückt man also die Zwischenzeit $\vartheta' - \vartheta$ in Tagen aus, so ist

$$L' = L + (\vartheta' - \vartheta)\,d\,L \text{ und}$$
$$p' = p + (\vartheta' - \vartheta)\,d\,p$$

Aber es ist

$$L = p + m \text{ und } L' = p' + m'$$

Substituirt man diese Werthe von L L′ in den zwey ersten Gleichungen, so erhält man

$$m' = m + (\vartheta' - \vartheta)\, d\,L - (\vartheta' - \vartheta)\, d\,p \text{ oder}$$
$$m' = m + (\vartheta' - \vartheta)\,(d\,L - d\,p)$$

So ist für Saturn 1808 December 31, $0^h\, 0'\, 0''$ in Pariser Zeit

$$L = 233^\circ\ 11'\ 42''4$$
$$m = 143\ \ 57\ \ 37.\,4 \text{ also}$$
$$p = \ \ 89\ \ 14\ \ \ 5.\,0$$

Sucht man L′ und m′ für 1809 März 18, $3^h\, 24'\, 58''$ so ist die Zwischenzeit 77 Tage $3^h\, 24'\, 58''$ oder $\vartheta' - \vartheta = 77.\ 142358$.

Die tägliche Bewegung Saturns in mittl. Länge ist $d\,L = 120''.\ 5917808$ und die tägliche Bewegung der Länge des Periheliums $d\,p = 0''.\ 1688$

also ist

$$L' = 233^\circ\ 11'\,42''4 + 9\ 302''7 = 235^\circ\ 46'\ 45''1$$
$$m' = 143^\circ\ 57'\,37''4 + 9\ 302''7 - 13''.\,0 = 146^\circ\ 32'\ 27''\ 1.$$

I. Diese mittlern täglichen Bewegungen d L, d p beziehen sich auf den Punct, von welchem alle Längen gerechnet werden, auf den Punct der Frühlingsnachtgleichen. Da aber dieser Punct, wegen der Präcession selbst in Bewegung ist, so drückt auch die Grösse d L nicht die eigentliche tägliche Bewegung des Planeten aus, die in Beziehung auf irgend einen festen Punct des Himmels genommen werden muss. Die Umlaufszeit eines Planeten in Beziehung auf einen solchen festen Punct, z. B. auf die Fixsterne, oder die eigentliche wahre Umlaufszeit des Planeten heisst die siderische Revolution desselben; wir wollen sie durch S bezeichnen. Die vorhin betrachtete Umlaufszeit T in Beziehung auf das Äquinoctium heisst die tropische oder die periodische Revolution desselben, und wenn von den beyden Grössen S, T eine gegeben ist, so findet man leicht die andere.

Es sey überhaupt A die Revolution eines Planeten in Beziehung auf einen Punct, also $\frac{360}{A}$ die tägliche Bewegung in Beziehung auf diesen Punct. Sey ferner m die tägliche Bewegung eines zweyten Punctes in Beziehung auf jenen ersten, so ist

$\frac{360}{A} - m$ die tägliche Bewegung des Planeten in Beziehung auf diesen zweyten Punct, also auch die Revolution B des Planeten in Beziehung auf diesen zweyten Punct $B = \dfrac{360}{\frac{360}{A} - m}$

Man hat also

$$B = \frac{360}{360 - m\,A}\,A \text{ und } A = \frac{360}{360 + m\,B}\,B \text{ oder auch}$$

$$B = \frac{360 + m\,B}{360}\,A \text{ und } A = \frac{360 - m\,A}{360}\,B\,.$$

Geht der zweyte Punct in Beziehung auf den Planeten rückwärts, so ist m negativ.

Zur bequemern Berechnung sey

$a = \frac{360}{A}$ die tägliche Bewegung des Planeten, so wie vorhin m die tägliche Bewegung des Punctes, und $b = \frac{360}{B}$ so ist

$$B = \frac{A}{1 - \frac{m}{a}} = A\left(1 + \frac{m}{a} + \frac{m^2}{a^2} + \frac{m^3}{a^3} + \right)$$

$$A = \frac{B}{1 + \frac{m}{b}} = B\left(1 - \frac{m}{b} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{m^3}{b^3} + \right)$$

So ist für Mars die sider. Rev. A = 686. 979579 Tage. Die tägliche Präcession ist aber $\frac{50''35}{(365)(3600)} = 0.0000\,38318 = -m$

also die trop. Revolution

$$\begin{array}{rl} B = & 686.\ 979579 \\ & -0.\ 050232 \\ & +0.\ 000004 \\ \hline B = & 686.\ 929351 \end{array}$$

für den Mond unserer Erde ist die sid. Rev. A = 27. 321661 die tägl. Bewegung der Aequinoctien ist m = — 0. 000038318 also

$\text{Log}\, a = \text{Log}\, \frac{360}{A} = 1.1197955$, $\text{Log}\, \frac{m}{a} = 4.4636073\,n$ also die tropische Revolution

$$B = \frac{A}{1 - \frac{m}{a}} = 27.\ 321582$$

Ist die tropische Revolution A = 27. 321582 gegeben, und sucht man die Revolution B in Beziehung auf die Knoten der Mondsbahn, so ist die tägliche tropische Bewegung dieser Knoten m = — 3′ 10″64 = — 0°. 052955, also

$$\text{Log } a = \text{Log } \frac{360}{A} = 1.\,1197966,\ \text{Log } \frac{m}{a} = 7.\,6041104\ n \text{ und}$$

$$B = \frac{A}{1 - \frac{m}{a}} = 27.\,2122189$$

Ist die trop. Rev. $A = 27.\,321582$ gegeben, und sucht man die Revolution B in Beziehung auf die Sonne, d. h. die Zeit zwischen zwey nächsten Conjunctionen oder zwischen zwey nächsten Oppositionen der mittlern Sonne und des mittlern Mondes, welche Zeit man die synodische Revolution heisst, so ist die tägliche tropische Bewegung der Sonne $m = 59'\,8''33 = 0^{\circ}.\,98565$, also $\text{Log } \frac{m}{a} = 8.\,8739261$ und $B = \frac{A}{1 - \frac{m}{a}} = 29.\,53059$

II. Um aber die mittlern Längen und Anomalien für jede gegebene Zeit bequem zu finden, hat man die mittlern Bewegungen derselben in Tafeln gebracht, deren Einrichtung auf folgendem beruht.

Die Epoche jedes Jahres ist die mittlere Länge für den mittlern Mittag des ersten Januars desselben Jahres, wenn dasselbe ein Schaltjahr ist, und für den mittlern Mittag des 31. Decembers des vorhergehenden Jahres, wenn das gegenwärtige ein gemeines Jahr ist.

Die Zurückkunft der mittlern Sonne zu denselben Nachtgleichen oder zu demselben Solstitium gibt, nach dem vorhergehenden, die tropische Revolution der Sonne, oder das bürgerliche Jahr, dessen wir uns in unsern Geschäften bedienen. Dieses Jahr ist 365. 2422542 Tage.

Wenn man die Länge des bürgerlichen Jahres der grössern Einfachheit wegen in runder Zahl gleich 365 Tagen annähme, so würde der Anfang dieses Jahres dem tropischen immer voreilen, und nach und nach alle Jahreszeiten durchlaufen, und die Feste sowohl, als die Arbeiten des Ackerbaues würden nicht mehr an bestimmte Jahreszeiten gebunden seyn. Diesem wesentlichen Nachtheil eines für das Volk eingerichteten Kalenders könnte man dadurch abhelfen, dass man den Anfang des Jahres als eine astronomische Erscheinung betrachtete, und z. B. in den nächsten Mittag vor oder nach der Nachtgleiche setzte. Allein dadurch würden die Jahre nicht leicht sich in Tage zerlegen lassen; der Anfang der Jahre würde sich bey den verschiedenen Nationen ändern, da jede derselben ihn nach dem Meridian ihrer vorzüglichsten Orte bestimmen würde, und dieser Anfang würde selbst dann ganz ungewiss seyn, wenn er dem Mittag näher fällt, als die Fehler, welchen unsere Sonnentafeln noch immer unterworfen sind. Man hat daher auf ein anderes Mittel gedacht, dem Kalender jene Vortheile ohne diese Nachtheile zu verschaffen, und dieses Mittel besteht in den Einschaltungen.

Im Jahre 1582 nach Christi hat man die noch jetzt gebräuchliche Kalender-Reform vorgenommen. Vor diesem Jahre sind ohne Ausnahme alle durch vier ohne Rest theilbaren Jahre 1580, 1576. Schaltjahre von 366, die übrigen aber gemeine Jahre von 365 Tagen. In dem Jahre 1582 selbst hat man 10 Tage weggenommen, indem man nach dem 4. October dieses Jahres unmittelbar den 15. zählte. Nach dem Jahre 1582 sind wieder alle durch vier theilbare Jahre 1584, 1588, Schaltjahre; alle Säcularjahre aber, (deren zwey letzte Ziffer 00 sind) sind gemeine Jahre, wie 1700, 1800, 1900 mit Ausnahme derjenigen Säcularjahre, die durch 400 theilbar sind, wie 2000, 2400, 2800, welche wieder Schaltjahre sind. Durch diese Einrichtung wird die Grösse eines jeden bürgerlichen Jahres nach 1582 auf $365\,\frac{97}{400} = 365.2425$ Tage gebracht, oder das bürgerliche Jahr ist nur 0.0002458 Tage grösser als das tropische Jahr. Würde man überdiess alle 4000 Jahre einen Tag unterdrücken, so würde dadurch das Jahr auf $365\,\frac{969}{4000} = 365.24225$ gebracht werden, welches nur mehr 0.0000042 Tage d. h. 0″. 36288 zu klein ist.

Nach diesen Bemerkungen wird man die Epochen aller Säcularjahre finden, wenn die Epoche eines derselben bekannt ist. Ist z. B. die Epoche von 1800 oder e^{1800} gegeben, so ist, wenn a die tägliche trop. Bewegung bezeichnet,

$$e^{1900} = e^{1800} + 36524\,a \quad \text{und rückwärts} \quad e^{1700} = e^{1800} - 36524\,a$$
$$e^{2000} = e^{1900} + 36525\,a \qquad e^{1600} = e^{1700} - 36524\,a$$
$$e^{2100} = e^{2000} + 36524\,a \qquad e^{1500} = e^{1600} - 36515\,a$$
$$e^{1400} = e^{1500} - 36525\,a$$
$$e^{1300} = e^{1400} - 36525\,a$$

u. s. w. und daraus findet man sofort die Epochen der zwischen den Säcularjahren liegenden Jahre

$$e^{1743} = e^{1700} + 43\,(365\,a) + 10\,a \text{ weil } \tfrac{43}{4} = 10 +$$
$$e^{1876} = e^{1800} + 76\,(365\,a) + 19\,a \text{ weil } \tfrac{76}{4} = 19$$

Ist dann A die Epoche eines gemeinen Jahres, so ist die Epoche des 0. Januars (31. December des vorhergehenden Jahres) $= A + 0.\,a$, und eben so ist die Epoche des

0. Feb.	(31. Januar)	$= A + 31\,a$
0. März	(28. Febr.)	$= A + 59\,a$
0. April	(31. März)	$= A + 90\,a$
0. May	(30. April)	$= A + 120\,a$
0. Juni	(31. May)	$= A + 151\,a$
0. Juli	(30. Juni)	$= A + 181\,a$
0. Aug.	(31. Juli)	$= A + 212\,a$

o. Sept. (31. August)	=	A + 243 a	
o. Oct. (30. Sept.)	=	A + 273 a	
o. Nov. (31. Oct.)	=	A + 304 a	
o. Dec. (30. Nov.)	=	A + 334 a	

und wenn jede dieser Monathsepochen B heisst, so ist die Epoche des 1, 2, 3 ... n Tages jedes Monaths gleich B + a, B + 2 a, B + 3 a ... B + n a. So sind die Epochen des 5. Januars, 13. Julius, 27. Novembers gleich B + 5 a, B + 194 a, B + 331 a u. s. f. Ist aber das Jahr ein Schaltjahr, so ist die Epoche des o. Januars = A — a oder alle Epochen der Tage der beyden ersten Monathe sind im Schaltjahre um ein a kleiner, als im gemeinen Jahre, und da zu Ende des Februars das Schaltjahr einen Tag mehr hat, so hebt sich dadurch jener Unterschied zwischen den Schalt- und gemeinen Jahren auf, oder die Epochen der Tage in den zehn letzten Monathen sind in beyden Jahren dieselben.

Nach den neuesten Sonnentafeln von Zach ist die Epoche der mittleren Länge der Sonne für 1800, mittlerer Mittag in Seeberg,

$$279^\circ\ 52'\ 36''58$$

und die Bewegung in 100 Jahren, in denen 25 Schaltjahre sind,

$$100.\ 360^\circ + 0^\circ\ 45'\ 48''00$$

also in einem Jahre	359°	45′	40″40	
zwey	359	31	20.81	
drey	359	17	1.21	
vier	360	1	49.92	etc.

und in einem Tage	0°	59′	8″33
einer Stunde	0	2	27.85
einer Minute	0	0	2.46
einer Secunde	0	0	0.041

Daraus findet man die Epoche

des Jahres 1740	...	280°	24′	16″
1795	...	280	5	6
1810	...	279	27	37

und die Epoche

des o. Febr. im Schaltjahr 29° 34′ 10″ im gemeinen Jahr 30° 33′ 18″
o. März in beyden Jahren 58° 9′ 11″
o. April . . . . . 88 42 30 u. s. w.

woraus man, wenn man das vorhergehende fortsetzt, die ganze Tafel der mittlern Bewegung der Sonne construiren wird, die also aus vier Theilen besteht, deren erster die Epoche der Jahre, der zweyte die der Monathe, der dritte die der Monathstage, der vierte endlich die Bewegung für die Stunden, Minuten und Secunden enthalten wird. Mit Hülfe dieser Tafel wird man dann sehr leicht die mittlere Länge der Sonne für jede Zeit bestimmen.

Sucht man z. B. die mittl. Länge der Sonne für 1795 den 14. April $5^h\ 48'\ 12''$ mittl. Zeit in Seeberg, so ist

I. Tafel	1795	....	280° 5′ 6″
II.	..	0 April	88 42 30
III.	..	14 April	13 47 57
IV.	..	5°	12 19
		48′	1 58
		12″	1
mittl. Länge		=	22° 49′ 51″

Eben so wird man die mittl. Länge der Sonne für 1740 den 24. Februar $14^h\ 20'\ 50''$ mittl. Zeit in Paris erhalten, wenn man mit der Meridiandifferenz $0^h\ 33'\ 35''$ von Paris und Seeberg die Zahlen der Tafeln für 1740, 24. Febr. $14^h\ 54'\ 25''$ sucht. Da diess Jahr ein Schaltjahr ist, so hat man

I. Tafel	1740	....	280° 24′ 16″
II.	..	0 Febr.	29 34 10
III.	..	24. Febr.	23 39 20
IV.	..	14^h	34 30
		54′	2 13
		25″	1
mittl. Länge		....	334° 14′ 30″

Den Gebrauch dieser und ähnlicher Tafeln wird man am besten aus der ihnen gewöhnlich beygedruckten Erklärung kennen lernen, wozu man Zachs tab. motuum solis, Gotha 1792, mit ihrer vortrefflichen Einleitung und die Tafeln wählen kann, welche der dritten Ausgabe von Lalandes Astronomie angehängt sind.

§. 7.

Die Bestimmung der mittlern Längen hat also nach dem Vorhergehenden keine Schwierigkeit. Um aber daraus die wahren Längen und die Entfernungen der Planeten von der Sonne abzuleiten, wird man die §. 5 gegebenen Ausdrücke brauchen. Man kann aber diesen Gleichungen verschiedene andere, zur Rechnung bequemere, Gestalten geben, von welchen wir hier einige der vorzüglichsten anführen. Setzt man der Kürze wegen $e = \text{Sin}\,\varphi$, so erhält man

$$1 \ldots \quad m = u - \varepsilon \operatorname{Sin} u \text{ oder eigentlich } m = u - \frac{\varepsilon}{\operatorname{Sin} 1''} \cdot \operatorname{Sin} u$$

$$2 \ldots \quad r = a(1 - \varepsilon \operatorname{Cos} u) = \frac{a \operatorname{Cos}^2 \varphi}{1 + \varepsilon \operatorname{Cos} v} = a \operatorname{Cos} \varphi \frac{\operatorname{Sin} u}{\operatorname{Sin} v}$$

$$3 \ldots \quad \operatorname{Cos} u = \frac{\varepsilon + \operatorname{Cos} v}{1 + \varepsilon \operatorname{Cos} v} = \frac{a - r}{a \varepsilon}$$

$$4 \ldots \quad \operatorname{Cos} v = \frac{\operatorname{Cos} u - \varepsilon}{1 - \varepsilon \operatorname{Cos} u} = \frac{a}{r} (\operatorname{Cos} u - \varepsilon) = \frac{a \operatorname{Cos}^2 \varphi - r}{r \varepsilon}$$

$$5 \ldots \quad \operatorname{tg} \frac{u}{2} = \operatorname{tg} \frac{v}{2} \cdot \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} = \operatorname{tg} \frac{v}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{90 - \varphi}{2}$$

$$6 \ldots \quad \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \operatorname{Cos} \frac{90 - \varphi}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \operatorname{Sin} \frac{u}{2}}{\operatorname{Sin} \frac{v}{2}} \text{ oder } \frac{\operatorname{Sin} \frac{u}{2}}{\operatorname{Sin} \frac{v}{2}} = \sqrt{\frac{r}{a(1 + \varepsilon)}}$$

$$7 \ldots \quad \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \operatorname{Sin} \frac{90 - \varphi}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \operatorname{Cos} \frac{u}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{v}{2}} \text{ oder } \frac{\operatorname{Cos} \frac{u}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{v}{2}} = \sqrt{\frac{r}{a(1 - \varepsilon)}}$$

$$8 \ldots \quad \operatorname{Sin} \frac{v - u}{2} = \operatorname{Sin} u \operatorname{Sin} \frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{r}} = \frac{\operatorname{Sin} v \operatorname{Sin} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{Cos} \varphi} \cdot \sqrt{\frac{r}{a}}$$

$$9 \ldots \quad \operatorname{Sin} \frac{v + u}{2} = \operatorname{Sin} u \operatorname{Cos} \frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{r}} = \frac{\operatorname{Sin} v \operatorname{Cos} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{Cos} \varphi} \cdot \sqrt{\frac{r}{a}}$$

Setzt man in diesen Ausdrücken die Grössen m u v r veränderlich, so hat man

$$d u = \frac{a}{r} d m = \frac{r d v}{a \operatorname{Cos} \varphi} = \frac{d r}{a \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} u}$$

$$d v = \frac{a}{r} d u . \operatorname{Cos} \varphi = \frac{a^2}{r^2} dm . \operatorname{Cos} \varphi = \frac{a\, d r . \operatorname{Cos}^2 \varphi}{r^2 \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} v}$$

$$d r = a\, d m . \operatorname{tg} \varphi \operatorname{Sin} v = a\, d u . \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} u = \frac{r^2 d v}{a \operatorname{Cos}^2 \varphi} \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} v$$

Nimmt man aber auch auf die Veränderung von ε Rücksicht, so gibt die Gleichung (5)

$$\frac{d u}{\text{Sin } u} = \frac{d v}{\text{Sin } v} - \frac{d \varphi}{\text{Cos } \varphi}$$

und eben so die Gleichung (1)

$$d m = (1 - \varepsilon \text{ Cos } u) \, d u - \text{Sin } u \text{ Cos } \varphi \, . \, d \varphi$$

Eliminirt man aus diesen beyden Ausdrücken die Grösse $d u$, so ist

$$d m = \frac{r^2 \, d v}{a^2 \text{ Cos } \varphi} - \frac{r \, (a + r - a \varepsilon^2)}{a^2 \text{ Cos}^2 \varphi} \text{ Sin } v \, . \, d \varphi \text{ und eben so}$$

$$d v = \frac{a^2}{r^2} \text{ Cos } \varphi . \, d m + \frac{(2 + \varepsilon \text{ Cos } v)}{\text{Cos } \varphi} \text{ Sin } v \, . \, d \varphi$$

$$d r = \frac{r}{a} \, d a + a \text{ tg } \varphi \text{ Sin } v \, . \, d m - a \text{ Cos } \varphi \text{ Cos } v \, . \, d \varphi$$

§. 8.

Aus den angeführten Gleichungen folgen die Auflösungen mehrerer Aufgaben.

I. Ist v und ε gegeben, so findet man u aus (5) oder (8) und m aus (1).

Sey $a = 1$, $\varepsilon = 0.01$ oder $\varphi = 0° \, 34' \, 22''7$ und $v = 8° \, 24' \, 12''4$ so geben die angezeigten Gleichungen

$u = 8° \, 19' \, 12''.4$ und $m = 8° \, 14' \, 13''.9$ so wie die Gleichung (2) $r = 0.9901052$

II. Ist ε und u gegeben, so findet man v aus (5) und r aus (2) oder r aus (2) uud v aus (8) oder (9).

III. Ist ε und m gegeben, so findet man u aus (1), r aus (2) und v aus (4) oder (5)

oder bequemer u aus (1), v aus (5) und r aus (6) oder (7)

Die letzte Aufgabe ist für uns die wichtigste, da in der That gewöhnlich die Grössen ε und m gegeben sind. Sie erfordert die Auflösung der Gleichung

$$m = u - \varepsilon \text{ Sin } u$$

in Beziehung auf die unbekannte Grösse u. Da in der Folge öfter Gleichungen dieser Art vorkommen werden, so wird es gut seyn, hier eine allgemeine Methode, sie aufzulösen, aus einander zu setzen.

Es sey also $X = 0$ irgend eine Function von x. Man suche x.

Hat man bereits $\xi = x + \lambda$ gefunden, wo λ schon klein ist, so kann man annehmen $X - m \lambda = 0$, wo m eine constante

Grösse ist. Man habe z. B. $\xi = a$ und $\xi = a'$ angenommen, und daraus in derselben Ordnung

$X = \alpha$ und $X = \alpha'$ abgeleitet, so sind also a a' die Hypothesen, und α α' die Fehler dieser Hypothesen. Sind diese Fehler klein, so kann man annehmen

$$\alpha = m (a - x)$$
$$\alpha' = m (a' - x) \text{ also hat man}$$

$$x = \frac{\alpha a' - \alpha' a}{\alpha - \alpha'} \text{ oder } x = a - \frac{\alpha (a - a')}{\alpha - \alpha'} = a' - \frac{\alpha' (a - a')}{\alpha - \alpha'}$$

und das gefundene x ist der Wahrheit um so näher, je kleiner bereits die Fehler α und α' sind. Man kann daher dasselbe Verfahren mit den gefundenen genäherten Werthen von a und a' öfter wiederhohlen, und sich so der Wahrheit immer mehr, und zwar um so schneller nähern, je besser man anfangs die Grössen a a' gewählt hat.

Sey z. B. die Gleichung $\frac{h^x - 1}{x} = 3.828$ gegeben, wo Log nat
$h = 1$ ist,

so ist auch $0.43429448\, x - \log \text{vulg} (3.828\, x + 1) = y = 0$

$$x = 2.2 \text{ gibt } y = - 0.01868 = \alpha$$
$$x = 2.3 \quad y = + 0.00744 = \alpha'$$

und aus diesen beyden Fehlern α α' findet man das verbesserte

$$x = 2.2715 \text{ und diess gibt } y = - 0.0000615 = \alpha''$$

Die Fehler α' α'' geben $x = 2.271727$ und diess gibt $y = - 0.0000018 = \alpha'''$

Die Fehler α'' α''' geben $x = 2.7177337$ und diess gibt $y = - 0.0000001$

und man wird, wenn man nur so weit geht, als es die gewöhnlichen Logarithmentafeln erlauben, den wahren Werth von x in der gegebenen Gleichung gleich 2. 2717337 annehmen können.

Dieselbe Methode lässt sich auch auf mehr als eine veränderliche Grösse anwenden. Es sey $X = 0$ eine Function von x und $Y = 0$ eine Function von y. Man habe bereits $\xi = x + \lambda$, und $\upsilon = y + \mu$ gefunden, so kann man, wenn λ und μ klein sind, annehmen

$$X - m \lambda - n\mu = 0$$
$$Y - p \lambda - q\mu = 0$$

Man habe z. B. angenommen

$$\begin{array}{lll} \xi = a & \text{und } \upsilon = & b \\ \quad\ a' & & b' \\ \quad\ a'' & & b'' \end{array}$$

und daraus in derselben Ordnung gefunden

$$\begin{array}{ll} X = \alpha & \text{und } Y = \beta \\ \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{array}$$

so sind a a' a'' und b b' b'' die Hypothesen, und $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$ und $\beta\,\beta'\,\beta''$ ihre Fehler, also ist

$$\begin{array}{ll} \alpha = m(a - x) + n(b - y) \text{ und eben so } & \beta = p(a - x) + q(b - y) \\ \alpha' = m(a' - x) + n(b' - y) & \beta' = p(a' - x) + q(b' - y) \\ \alpha'' = m(a'' - x) + n(b'' - y) & \beta'' = p(a'' - x) + q(b'' - y) \end{array}$$

woraus man erhält

$$x = a + \frac{\gamma}{\varepsilon}(a' - a) + \frac{\delta}{\varepsilon}(a'' - a)$$

$$y = b + \frac{\gamma}{\varepsilon}(b' - b) + \frac{\delta}{\varepsilon}(b'' - b)$$

vorausgesetzt, dass man hat

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha'' \beta - \alpha \beta'' \\ \delta &= \alpha \beta' - \alpha' \beta \\ \varepsilon &= \gamma + \delta + \alpha' \beta'' - \alpha'' \beta' \end{aligned}$$

Auf dieselben Ausdrücke kann man noch auf einem andern merkwürdigen Wege kommen. Ist nähmlich $y = fx$ eine Function von x, und setzt man für x die Grösse $x + \omega = a$, so geht bekanntlich y über in

$$Y = y + \omega \cdot \frac{dfy}{dy} + \frac{\omega^2}{1.2} \cdot \frac{d^2fy}{dy^2} + \frac{\omega^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3fy}{dy^3} +$$

Setzt man eben so für x die Grösse $x + \omega' = a'$, so hat man

$$Y' = y + \omega' \cdot \frac{dfy}{dy} + \frac{\omega'^2}{1.2} \cdot \frac{d^2fy}{dy^2} + .$$

Nimmt man daher bloss auf die ersten Glieder Rücksicht, so ist

$$Y - y = \omega \cdot \frac{dfy}{dy}$$

$$Y' - y = \omega' \cdot \frac{dfy}{dy}$$

Es sind aber $Y - y = \alpha$ und $Y' - y = \alpha'$ die Fehler der Hypothesen, welche durch die Annahme der Grössen a a' für x entstanden sind, also ist, wenn man die beyden letzten Gleichungen durch einander dividirt,

$$\alpha\omega' = \alpha'\omega$$

Weiter ist $\omega' - \omega = (a' - x) - (a - x)$ oder

$$\omega' - \omega = a' - a$$

und daher die vorhergehende Gleichung

$$\omega = \alpha \frac{(a' - a)}{\alpha' - \alpha}, \quad \omega' = \frac{\alpha' (a' - a)}{\alpha' - \alpha} \text{ oder auch}$$

$$x = a - \omega = ' - \omega' = \frac{a\alpha' - \alpha a'}{\alpha' - \alpha}$$

welches der vorhergehende Ausdruck ist.

Die letzte Auflösung dieser Aufgabe zeigt zugleich, warum das Verfahren, in allen Fällen, in welchen x nur die erste Potenz enthält, sogleich das gesuchte gibt, weil für solche Gleichungen die vorhergehenden Voraussetzungen $d^2 . fx = 0$, $d^3 . fx = 0$ .. genau Statt haben. Ist aber diess nicht der Fall, so wird das angezeigte Verfahren nur dann ein der Wahrheit sehr nahes Resultat geben, wenn ω, ω' schon klein sind, weil nur dann die weggelassenen Grössen $\omega^2 . d^2fy$, $\omega^3 . d^3fy$ ... sehr nahe gleich Null angenommen werden können. Sollte sich aber auch die erste Hypothese noch sehr von der Wahrheit entfernen, d. h. sollte $\omega\ \omega'$ noch beträchtliche Werthe haben, so wird doch dasselbe Verfahren und die Wiederhohlung desselben eine immer fortschreitende Annäherung zur Wahrheit darbiethen.

Um diese Methode auf unser Beyspiel anzuwenden, sey wieder $\varepsilon = 0.01$ und $m = 8° 14\ 13"9$

Da bey so kleinen Excentricitäten u immer in der Nähe von m liegt, so sey $u = 5°$, so ist

ε Sin $u = 2' 59"8$, $m = 4° 57' 0"2$ um $\alpha = 3°17' 13"$ zu klein.

Ist ferner $u = 7°$, so ist

ε Sin $u = 4' 11"4$, $m = 6° 55' 48"6$ um $\alpha' = 1° 18' 25"3$ zu klein.

Daher ist die corrigirte excentrische Anomalie $u = 8° 19' 12"5$ und man kann schon bey diesem ersten Resultate stehen bleiben, da der letzte Werth von u gibt ε Sin $u = 4' 58."0$ und $m = 8°14' 14"0$ also nur $0."1$ zu gross.

Hätte man grössere Fehler $\alpha\ \alpha'$ erhalten, so würde man das Verfahren wiederhohlen. Ist z. B.

$u = 2°$ so findet man $m = 1°58' 48"0$ um $\alpha = 6°15' 25"9$ zu klein,

$u = 20°$ . . . . . $m = 19°48' 14"5$ um $\alpha = 11°34' 0"6$ zu gross,

also erstes verbessertes $u = 8°19' 8"4$

$u = 8°19' 8"4$ gibt eben so m um $\alpha'' = 3"9$ zu klein

$u = 8\ 19\ 10.0$ . . . . $\alpha''' = 2"3$ zu klein, also

verbessertes $u = 8° 19' 12"3$ wie zuvor.

Man wird aber diese Wiederhohlung in den meisten Fällen vermeiden können, wenn man gleich anfangs den ersten genäherten Werth von u gleich $m + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Sin}\, 1''}$. Sin m setzt. Diess biethet ein anders Mittel dar, diese Gleichung aufzulösen. Substituirt man nähmlich in der Gleichung

$$u = m + \varepsilon \,\mathrm{Sin}\, u$$

statt Sin u die Grösse $m + \varepsilon$ Sin m, und wiederhohlt diese Substitution, so erhalt man

$$u = m + \varepsilon \,\mathrm{Sin}\,(m + \varepsilon \,\mathrm{Sin}\,(m + \varepsilon \,\mathrm{Sin}\,(m + \varepsilon \,\mathrm{Sin}\,(m + \varepsilon \,\mathrm{Sin}\, m \ldots))))$$

welcher Ausdruck sich auf folgende Gleichungen bringen lässt. Man suche

$$\begin{array}{lll} U & \text{aus} & U = m + \varepsilon \,\mathrm{Sin}\, m \\ U' & .. & U' = m + \varepsilon \,\mathrm{Sin}\, U \\ U'' & .. & U'' = m + \varepsilon \,\mathrm{Sin}\, U' \\ U''' & .. & U''' = m + \varepsilon \,\mathrm{Sin}\, U'' \text{ u. f.} \end{array}$$

so ist jeder der Werthe U, U', U''.. dem wahren Werthe u um so näher, je weiter man fortgeht.

In unserem Beyspiele ist

$$\varepsilon = 0.01,\ m = 8^\circ\ 14'\ 13''9 \text{ also}$$

$$\begin{array}{l} U = 8^\circ 19'\ 9''4 \\ U' = 8\ 19\ 12.3 \\ U'' = 8\ 19\ 12.37 \end{array}$$

Zur Übung mögen noch folgende Beyspiele dienen:

$$\varepsilon = 0.24531617,\ m = 329^\circ\ 44'\ 27''66,\ u = 320^\circ\ 52'\ 15.''52,$$
$$v = 310^\circ\ 55'\ 29.''64,\ \log r = 0.3307640$$

Eine andere Auflösung s. m. Theor. mot. corp. coelest. p. 11.

Alle diese Auflösungen setzen voraus, dass ε gegen die Einheit sehr klein ist. Ist aber ε nahe gleich der Einheit, so werden jene Methoden nicht nur beschwerlicher, sondern auch selbst unsicher, da ein kleiner Fehler, auch nur der unvermeidliche der Logarithmentafeln in den Resultaten v und r oft sehr beträchtliche Irrthümer zur Folge haben kann. Ist aber ε nahe gleich der Einheit, so ist die Bahn des Planeten nahe eine Parabel, und da die meisten Kometen sich in so excentrischen Ellipsen bewegen, dass man zur Vereinfachung der Rechnung ihre Bahn wenigstens in der Nähe ihrer Perihelien, wo sie uns gewöhnlich erst zu Gesichte kommen, als parabolisch annehmen kann, so wollen wir auch die Bewegung in der Parabel einer ähnlichen Untersuchung unterwerfen.

§. 9.

Ist, wie bisher, a, aε und q die halbe grosse Axe, die Excentricität und der Abstand des Periheliums vom nächsten Brennpuncte, und nimmt man die Abscissen x vom Perihelium auf der grossen Axe, und die Ordinaten y darauf senkrecht, so ist die Gleichung der Ellipse

$$y^2 = q\,(1 + \varepsilon)\,x\;.\;(2 - \frac{x}{a})$$

Die Gleichung der Parabel aber, deren Abstand des Brennpunctes vom Scheitel ebenfalls q ist, zwischen ähnlichen Coordinaten ist

$$y^2 = 4qx$$

woraus man sieht, dass die Ellipse der Parabel um so näher kömmt, je grösser die grosse Axe ist, wenn die Grösse q dieselbe bleibt, und dass diese Uebereinstimmung beyder Kurven in den dem Perihelio nächsten Puncten am grössten ist.

Nimmt man in der Parabel die Abscissen x auf der grossen Axe vom Brennpuncte, so ist ihre Gleichung

$$y^2 = 4q\,(x + q)$$

und wenn man auch hier durch r, v den Radius Vector, oder die Entfernung des Kometen vom Brennpuncte und die wahre Anomalie, oder den Winkel der r mit q heisst, so ist

$$y = r \operatorname{Sin} v,\quad x = r \operatorname{Cos} v$$

und die vorhergehende Gleichung wird

$$r = \frac{q}{\operatorname{Cos}^2 \frac{v}{2}}$$

Ist also $\frac{1}{2}$ f die Fläche des parabolischen Sectors zwischen q und r, so ist

$$\tfrac{1}{2} f = \tfrac{1}{2}\int r^2\,dv = q^2.\int (1 + \operatorname{tg}^2 \tfrac{v}{2}).\,d\operatorname{tg}\tfrac{v}{2} = q^2\,(\operatorname{tg}\tfrac{v}{2} + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{v}{2})$$

Ist aber t die Zeit (in Tagen) seit dem Durchgange des Kometen durch sein Perihelium, so ist nach dem vorhergehenden (§. 4)

$$f = \mu t\;.\sqrt{p}$$

wo $\mu = 0.017202$ und $p = 2q$ der halbe Parameter der Parabel ist. Substituirt man daher den Werth von $f = \mu\, t \operatorname{Sin} 1''.\sqrt{2q}$ in der vorhergehenden Gleichung, so erhält man

$$75 \operatorname{tg}\frac{v}{2} + 25 \operatorname{tg}^3\frac{v}{2} = \frac{75\,\mu t\;.\operatorname{Sin} 1''}{2^{\frac{1}{2}}\;.\;q^{\frac{3}{2}}} = (0.9122791)\frac{t}{q^{\frac{3}{2}}}\;\ldots\;(I)$$

und man nennt $\frac{75\,\mu\,\text{Sin}\,1}{2^{\frac{1}{2}}\,q^{\frac{3}{2}}} = \frac{0.9122791}{q^{\frac{3}{2}}}$ die mittlere tägliche Bewegung, so wie $(0.9122791)\frac{t}{q^{\frac{3}{2}}}$ die mittlere Bewegung des Kometen in der Zeit t. Ein Komet, der sich in einer Parabel bewegt, in welcher q gleich der Einheit ist, wird also täglich 0. 9122791 in seiner mittleren Bewegung beschreiben, und die wahre Anomalie $v = 90°$ in $\frac{100}{0.9122791} = 109.615528$ Tagen zurücklegen.

I. Durch die Gleichung I findet man, wenn der Abstand q und die Zeit ϑ des Durchgangs durch das Perihelium gegeben ist, für jede andere Zeit ϑ' die wahre Anomalie v, wenn man $\vartheta - \vartheta' = t$ setzt, und den Radius Vector durch die Gleichung

$$r = \frac{q}{\text{Cos}^2 \frac{v}{2}}$$

und eben so findet man die Zeit ϑ des Periheliums, wenn q und v, oder wenn q und r gegeben ist. Diese Aufgabe bequemer aufzulösen, dient die bekannte Barkersche Tafel, welche auch Olbers Abhandlung über die leichteste Methode, die Bahn eines Kometen zu berechnen, beygedruckt ist, und die die Grösse a enthält, welche man aus dem Argumente b durch die Gleichung

$$a = 75\,\text{tg}\,\tfrac{b}{2} + 25\,\text{tg}^3\tfrac{b}{2}$$

findet.

Man nehme $g = \frac{1}{2}\mu$ Sin 1″ so ist die Gleichung I

$$t = \frac{q^{\frac{3}{2}}}{g\sqrt{2}}\left(\text{tg}\,\tfrac{v}{2} + \tfrac{1}{3}\,\text{tg}^3\tfrac{v}{2}\right) \text{ wo } \tfrac{1}{g} = 116.26488$$

II. Der parabolische Sector, zu dem die wahre Anomalie v gehört, ist

$$s = \tfrac{1}{2}\int r^2\,d\,v = 2\int\frac{q^2\,d\,v}{(1 + \text{Cos}\,v)^2}$$

und der elliptische Sector, zu dem die wahre Anomalie $v + \Delta$ gehört, ist

$$s' = \tfrac{1}{2}\int r^2\,d\,(v + \Delta) = \tfrac{1}{2}\int\frac{p^2\,d\,(v + \Delta)}{(1 + \varepsilon\,\text{Cos}\,(v + \Delta))^2}$$

wo $p = q\,(1 + \varepsilon)$ der halbe Parameter ist. Da sich aber, wie wir §. 4 gesehen haben, für gleiche Zeiten die Flächen der Sectoren wie die Quadratwurzeln aus den Parametern vehalten, so ist

$$\frac{s}{s'} = \frac{\sqrt{2q}}{\sqrt{p}}$$

oder

$$\int \frac{(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}} d(v+\Delta)}{(1+\varepsilon \operatorname{Cos}(v+\Delta))^2 . \sqrt{2}} = 2 \int \frac{dv}{(1+\operatorname{Cos} v)^2}$$

wovon die Integralien sind,

$$\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} . \left[t + \tfrac{1}{3} . \frac{2-3\alpha}{2-\alpha} t^3 - \frac{\alpha}{5} . \frac{4-5\alpha}{(2-\alpha)^2} . t^5 \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha^2}{7} . \frac{6-7\alpha}{(2-\alpha)^3} . t^7 - \right] = \vartheta + \tfrac{1}{3} \vartheta^3$$

wenn man der Kürze wegen setzt

$$1 - \varepsilon = \alpha,\ t = \operatorname{tg} \frac{v+\Delta}{2},\ \vartheta = \operatorname{tg} \frac{v}{2}$$

Diese Gleichung bietet ein bequemes Mittel dar, die Grösse Δ oder die Abweichung der wahren Anomalie in einer Ellipse, die einer Parabel sehr nahe ist, von der Anomalie einer Parabel, also auch, da die wahre Anomalie der Parabel nach dem Vorhergehenden leicht gefunden wird, die wahre Anomalie der Ellipse selbst zu bestimmen, wenn sie sehr excentrisch ist. Zu diesem Zwecke ordne man die vorhergehende Gleichung nach den Potenzen von α, und nehme der Kürze wegen an

$$A = t + \tfrac{1}{3} t^3$$
$$B = \tfrac{1}{4}(t - t^3) - \tfrac{1}{5} t^5$$
$$C = \tfrac{1}{32}(3t - 7t^3) + \tfrac{3}{28} t^5$$

so erhält man

$$0 = A + B\alpha + C\alpha^2 - \vartheta - \tfrac{1}{3}\vartheta^3$$

Da A eine Function von v und Δ ist, so gehe a über in A, wenn v in $v + \Delta$ übergeht, so ist

$$A = a + \Delta \frac{da}{dv} + \frac{\Delta^2}{1.2} . \frac{d^2 a}{dv^2} +$$

und ähnliche Ausdrücke wird man für B und C haben. Ist also a, b, c resp. der Werth von A, B, C, wenn $v + \Delta$ in v, oder wenn t in ϑ übergeht, so wird die vorhergehende Gleichung

$$0 = \Delta . \frac{da}{dv} + \frac{\Delta^2}{1.2} . \frac{d^2 a}{dv^2}$$
$$+ \alpha \left(b + \Delta . \frac{db}{dv} + \frac{\Delta^2}{1.2} . \frac{d^2 b}{dv^2} + \right)$$
$$+ \alpha^2 \left(c + \Delta . \frac{dc}{dv} + \frac{\Delta^2}{1.2} . \frac{d^2 c}{dv^2} + \right)$$

Setzt man nun $\Delta = P\,\alpha + Q.\alpha^2 + R\,\alpha^3 +$ und substituirt diesen Werth von Δ in der vorhergehenden Gleichung, so erhält man, wenn man jeden Factor von α gleich Null setzt,

$$-P\left(\frac{d\,a}{d\,v}\right) = b$$

$$-Q\left(\frac{d\,a}{d\,v}\right) = \frac{P^2\,d^2\,a}{2\,d\,v^2} + P\,\frac{d\,b}{d\,v} + c$$

$$-R\left(\frac{d\,a}{d\,v}\right) = P\,Q\,\frac{d^2\,a}{d\,v^2} + \frac{P^3\,d^3\,a}{6\,d\,v^3} + Q\,\frac{d\,b}{d\,v} + \frac{P^2\,d^2\,b}{2\,d\,v^2} + P\,\frac{d\,c}{d\,v} + d$$

und wenn man diese Differentialien entwickelt, so erhält man die gesuchten Werthe von P, Q, R. Es ist dann

$$P = \frac{(-\tfrac{1}{2}\,\vartheta + \tfrac{1}{2}\,\vartheta^3 + \tfrac{2}{5}\,\vartheta^5)}{(1+\vartheta^2)^2}$$

Entwickelt man eben so Q, so erhält man

$$\Delta = \frac{\alpha}{(1+\vartheta^2)^2}\,.\,(-\tfrac{1}{2}\,\vartheta + \tfrac{1}{2}\,\vartheta^3 + \tfrac{2}{5}\,\vartheta^5)$$

$$+ \frac{\alpha^2}{(1+\vartheta^2)^4}\,.\,\Big(-\frac{1}{16}\vartheta - \frac{9}{16}\vartheta^3 + \frac{37}{80}\vartheta^5 + \frac{531}{560}\vartheta^7 + \frac{13}{35}\vartheta^9 + \frac{9}{350}\vartheta^{11}\Big)$$

welche Reihe sich weiter fortsetzen lässt, und sowohl für positive als negative Werthe von α, d. h. sowohl für Ellipsen als Hyperbeln gilt. Aber schon diese beyden Glieder werden in beynahe allen Fällen hinreichen, und zur bequemen Berechnung der Reihe kann man die beyden Factoren von α und α^2 in Tafeln bringen, deren Argument ϑ oder die wahre Anomalie der Parabel ist.

Ex. Sey Log q = 9. 0886320

Log α = 7. 3979400 und die Zeit seit dem Durchgange durch das Perihelium = 72. 99493 Tage.

Daraus folgt nach der Gleichung I die

parabolische wahre Anomalie		149° 47′ 56″ 88
Correction	I. Thl.	+ 0 12 0. 24
	II. Thl.	+ 2. 87
Elliptische wahre Anomalie		149° 59′ 59″ 99

sehr genau, da sie eigentlich 150° 0′ 0″ seyn sollte.

Man sehe Mon. Corr. 1805. September.

Andere Methoden, die wahre Anomalie und den Radius Vector für sehr excentrische Ellipsen zu finden, findet man in Gauss vortrefflichem Werke Theoria mot. Corp. Coelest. §. 30.

§. 10.

Ehe wir diesen Gegenstand verlassen, wollen wir noch einige merkwürdige Ausdrücke für die Parabel entwickeln, welche uns in der Folge nützlich seyn werden.

Sind r r' die Radii Vectores für die wahren Anomalien v, v' und v' — v = ω und k die gerade Linie, welche die Endpuncte der r r' verbindet, oder die parabolische Sehne des Winkels ω, so ist

$$q = r\,\mathrm{Cos}^2\,\frac{v}{2} = r'\,\mathrm{Cos}^2\,\frac{v+\omega}{2} \text{ also auch}$$

$$\sqrt{\frac{r}{r'}} = \mathrm{Cos}\,\frac{\omega}{2} - \mathrm{Sin}\,\frac{\omega}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{v}{2} \quad . \; . \; \text{(II)}$$

Es ist aber $\mathrm{Cos}\,\omega = \frac{r'^2 + r^2 - k^2}{2\,r'\,r}$ also die letzte Gleichung

$$\mathrm{tg}\,\frac{v}{2} = \frac{\sqrt{(r'+r)^2 - k^2} - 2\,r}{\sqrt{k^2 - (r'-r)^2}} \quad . \; . \; . \; \text{(III)}$$

Sind x y und x' y' die zu r r' gehörenden rechtwinklichten Coordinaten, so ist das Segment, welches die Sehne k abschneidet,

$$\sigma = \frac{1}{24\,q}\,(y' - y)^3$$

oder da $k^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$ und $x' - x = r' - r$ ist

$$\sigma = \frac{1}{24\,q} \cdot (k^2 - (r' - r)^2)^{\frac{3}{2}}$$

also auch der Sector s, zu welchem die Sehne k gehört,

$$s = \frac{1}{24\,q} \cdot (k^2 - (r' - r)^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{r'\,r}{2}\,\mathrm{Sin}\,\omega$$

Entwickelt man aber aus dem vorhergehenden Werthe von Cos ω den Ausdruck

$$\mathrm{Sin}\,\omega = \frac{1}{2\,r'\,r} \cdot \sqrt{(k^2 - (r' - r)^2) \cdot ((r' + r)^2 - k^2)}$$

und substituirt man diesen Werth von Sin ω in der letzten Gleichung, so hat man

$$s = \tfrac{1}{2}\,(k^2 - (r' - r)^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{k^2 - (r' - r)^2}{12\,q} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(r' + r)^2 - k^2}\right]$$

Wenn man aber aus der Gleichung III den Ausdruck

$$\text{Cos}^2 \frac{v}{2} = \frac{k^2 - (r' - r)^2}{4\left(r^2 + r'r - r\sqrt{(r'+r)^2 - k^2}\right)}$$

in der Gleichung $r = \dfrac{q}{\text{Cos}^2 \frac{v}{2}}$ substituirt, so ist

$$4\,q = \frac{k^2 - (r' - r)^2}{r' + r - \sqrt{(r'+r)^2 - k^2}}$$

also auch, wenn man diesen Ausdruck von q in dem letzten Werthe von s substituirt,

$$s = \tfrac{1}{6}\left(k^2 - (r' - r)^2\right)^{\frac{1}{2}} .\ \left[r' + r + \tfrac{1}{2}\left((r'+r)^2 - k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Setzt man also der Kürze wegen $(r'+r)^2 - k^2 = R$, so ist, da man $s = \frac{1}{2}\mu\vartheta . \sqrt{2q}$ hat, wo ϑ die Zwischenzeit der Sehne k ist,

$$\mu\vartheta = s\sqrt{\frac{2}{q}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{6}\left(r' + r + \tfrac{1}{2}\sqrt{R}\right) . \sqrt{r' + r - \sqrt{R}}$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{2}}}{6} . \left[(r'+r)\sqrt{r'+r-\sqrt{R}} + k\sqrt{r'+r+\sqrt{R}}\right]$$

oder da $\sqrt{r'+r \pm R} = \sqrt{\dfrac{r'+r+k}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{r'+r-k}{2}}$ ist,

μ = 0,0172021
s. p. 26. 35.

$$\mu\vartheta = \tfrac{1}{6}\left[(r'+r+k)^{\frac{3}{2}} - (r'+r-k)^{\frac{3}{2}}\right]$$

vgl. die [illegible] Sonn. im Berl. astr. Jahrb. 1830.

I. Ein ähnlicher Ausdruck von μt lässt sich auch für die Ellipse entwickeln. Für sie ist

$$\text{Cos } v = \frac{a}{r}(\text{Cos } u - \varepsilon)$$

$$\text{Sin } v = \frac{a}{r}(1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} .\ \text{Sin } u, \text{ also auch}$$

$$rr' \text{Cos}(v - v') = a^2(\varepsilon - \text{Cos } u)(\varepsilon - \text{Cos } u') + a^2(1 - \varepsilon^2)\,\text{Sin } u\,\text{Sin } u$$

Der allgemeine Ausdruck der Sehne k aber ist

$$k^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\,\text{Cos}(v - v') \text{ also auch}$$

$$k^2 = 4a^2\,\text{Sin}^2\frac{u'-u}{2} \cdot \left(1 - \varepsilon^2\text{Cos}^2\frac{u'+u}{2}\right) \ldots (1)$$

Es ist aber $\dfrac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}} = u - \varepsilon\,\text{Sin } u$, also auch

$$\frac{\mu(t' - t)}{a^{\frac{3}{2}}} = u' - u - 2\varepsilon\,\text{Cos}\frac{u'+u}{2}\,\text{Sin}\frac{u'-u}{2} \cdots (2)$$

Endlich ist $\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \operatorname{Cos} u$ oder

$r' + r = 2a - 2a\varepsilon \operatorname{Cos}\frac{u'+u}{2} \operatorname{Cos}\frac{u'-u}{2}$, das heisst

$$\varepsilon \operatorname{Cos}\frac{u'+u}{2} = \frac{\gamma}{2a \operatorname{Cos}\frac{u'-u}{2}} \text{ wo } \gamma = 2a - r' - r \text{ ist.}$$

Substituirt man diesen Werth von $\varepsilon \operatorname{Cos}\frac{u'+u}{2}$ in (1) und (2) so hat man

$$\left.\begin{aligned} k^2 &= 4a^2 \operatorname{tg}^2\frac{u'-u}{2} \cdot \left[\operatorname{Cos}^2\frac{u'-u}{2} - \frac{\gamma^2}{4a^2}\right] \\ \frac{\mu\vartheta}{a^{\frac{3}{2}}} &= u' - u - \frac{\gamma}{a} \operatorname{tg}\frac{u'-u}{2} \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

wo $\vartheta = t' - t$ die Zwischenzeit der Sehne k ist.

Aber $\operatorname{tg}^2\frac{u'-u}{2} = \frac{1 - \operatorname{Cos}(u'-u)}{1 + \operatorname{Cos}(u'-u)}$ und $\operatorname{Cos}^2\frac{u'-u}{2} = \frac{1 + \operatorname{Cos}(u'-u)}{2}$ also die erste der Gleichungen (3)

$$o = 1 - p^2 - q^2 - \operatorname{Cos}^2(u'-u) + 2pq \operatorname{Cos}(u'-u)$$

wo $p = \frac{\gamma+k}{2a}$, $q = \frac{\gamma-k}{2a}$ ist, also auch

$$\operatorname{Cos}(u'-u) = pq + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}$$

Setzt man aber $p = \operatorname{Cos}\alpha$, $q = \operatorname{Cos}\beta$, so ist

$\operatorname{Cos}(u'-u) = \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta$, also

$u' - u = \beta - \alpha = \operatorname{Arc}\operatorname{Cos} q - \operatorname{Arc}\operatorname{Cos} p$ und

$$\operatorname{tg}\frac{u'-u}{2} = \operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{\operatorname{Sin}\beta - \operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\alpha} = \frac{\operatorname{Sin}\operatorname{Arc}\operatorname{Cos} q - \operatorname{Sin}\operatorname{Arc}\operatorname{Cos} p}{q + p}$$

und daher die zweyte der Gleichungen (3)

$$\frac{\mu\vartheta}{a^{\frac{3}{2}}} = \beta - \alpha - \frac{\gamma}{a}\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2} \text{ oder}$$

$$\frac{\mu\vartheta}{a^{\frac{3}{2}}} = \operatorname{Arc}\operatorname{Cos}\frac{\gamma-k}{2a} - \operatorname{Arc}\operatorname{Cos}\frac{\gamma+k}{2a} - \operatorname{Sin}\operatorname{Arc}\operatorname{Cos}\frac{\gamma-k}{2a} + \operatorname{Sin}\operatorname{Arc}\operatorname{Cos}\frac{\gamma+k}{2a}.$$

Ist daher $\frac{r + r' + k}{4\,a} = \mathrm{Sin}^2 \frac{x}{2}$ und $\frac{r + r' - k}{4\,a} = \mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2}\,y$, so ist die letzte Gleichung

$$\frac{\mu\,\vartheta}{a^{\frac{3}{2}}} = (x - y) - (\mathrm{Sin}\ x - \mathrm{Sin}\ y)$$

Aus diesem allgemeinen Ausdruck für die Ellipse lässt sich der oben gefundene für die Parabel leicht ableiten. Setzt man nähmlich a unendlich gross, also $\mathrm{Cos}\ \alpha = \frac{\gamma + k}{2\,a}$, $\mathrm{Cos}\ \beta = \frac{\gamma - k}{2\,a}$ der Einheit gleich, so ist $\alpha - \mathrm{Sin}\ \alpha = \frac{1}{6}\,\mathrm{Sin}^3\ \alpha$

$$\text{Aber } \alpha = \mathrm{Arc\,Cos}\ \frac{\gamma + k}{2\,a},\ \mathrm{Sin}\ \alpha = \mathrm{Sin\,Arc\,Cos}\ \frac{\gamma + k}{2\,a} \text{ also}$$

$$\mathrm{Arc\ Cos}\ \frac{\gamma + k}{2\,a} - \mathrm{Sin\,Arc\,Cos}\ \frac{\gamma + k}{2\,a} = \frac{1}{6}\left(1 - \mathrm{Sin}^2\,\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{\gamma + k}{2\,a}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 - \left(\frac{\gamma + k}{2\,a}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\left(\frac{r' + r - k}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$$

und eben so

$$\mathrm{Arc\,Cos}\frac{\gamma - k}{2\,a} - \mathrm{Sin\,Arc\,Cos}\ \frac{\gamma - k}{2\,a} = \frac{1}{6}\left(\frac{r' + r + k}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ also}$$

$$6\,\mu\,\vartheta = (r' + r + k)^{\frac{3}{2}} - (r' + r - k)^{\frac{3}{2}} \text{ wie zuvor.}$$

μ f. p53.

§. 11.

Die Gleichungen des §. 7. sind die vorzüglichsten endlichen Ausdrücke, welche man zwischen den Grössen m u v und r hat. Dieselben Gleichungen lassen sich aber auch in oft sehr convergirende Reihen entwickeln, und da ähnliche Entwicklungen in der Folge öfters vorkommen werden, so wird es gut seyn, hier die allgemeinen Methoden zusammenzustellen, deren man sich zu diesem Zwecke bedient, und deren Beweise ich als bekannt voraussetze, oder im entgegengesetzten Falle den Lesern zur Selbstübung überlasse.

I. Ist u eine Function von x, in eine Reihe zu entwickeln, die nach den Potenzen von x fortgeht, so wird man für diese Entwicklung annehmen können

$$u = U + q_1\,x + q_2\,x^2 + q_3\,x^3 + \ldots$$

wo U, q_1, q_2 . von x unabhängige Grössen sind.

Man findet leicht, dass U der Werth von u für $x = o$, und dass der Factor des allgemeinen Gliedes $q_n x^n$ ist

$$q_n = \frac{\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)}{1.2.3\ldots n}$$

vorausgesetzt, dass man in dem Ausdrucke $\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)$ nach der Differentiation $x = o$ gesetzt hat.

Ist z. B. $u = \text{Sin}\, x$, so findet man $\text{Sin}\, x = x - \frac{x^3}{1.2.3.} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} -$ wie bekannt.

II. Ist u eine Function der beyden Grössen x und y, welche man in Beziehung auf die Potenzen und Producte von x und y entwickeln soll, so wird man für diese Entwicklung annehmen können

$$\begin{aligned} u = U &+ q_{1.0} x + q_{2.0} x^2 + \ldots \\ &+ q_{0.1} y + q_{1.1} xy + \\ &\qquad + q_{0.2} y^2 + \end{aligned}$$

und der Factor $q_{n.n'}$ des Products $x^n . y^{n'}$ wird seyn

$$\frac{\left(\frac{d^{n+n'} u}{dx^n . dy^{n'}}\right)}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots n'}$$

wo wieder nach der Differentiation die Grösse x sowohl als y gleich Null gesetzt wird.

Ein Verfahren, welches man leicht auf Functionen u von mehr als zwey veränderlichen Grössen ausdehnen wird.

III. Ist $u = f(x+a)$ irgend eine Function von $x + a$ in eine Reihe zu entwickeln, die nach den Potenzen von a fortgeht, so wird man haben

$$f(x+a) = f(x) + q_1 a + q_2 a^2 + q_3 a^3 +$$

und der Factor q_n des allgemeinen Gliedes $q_n . a^n$ wird seyn

$$q_n = \frac{d^n . f(x)}{1.2.3\ldots n.\, dx^n}$$

Ist z. B. $u = \log \text{nat}\,(x + a)$, so findet man

$$\log(x+a) = \log x + \left(\tfrac{a}{x}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{a}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{a}{x}\right)^3 -$$

und durch dieses Verfahren kann man zugleich den Werth einer

Function $u = f(x)$ von x für den Fall angeben, wo x in $x + a$ übergeht.

IV. Ist überhaupt u eine Function von $x + a$, $y + b$, $z + c \ldots$, so findet man

$$f(x+a, y+b, z+c \ldots) = f(x, y, z) + \frac{a\,d.\,f(x,y,z)}{dx} + \frac{b\,d.\,f(x,y,z)}{dy} + \frac{c\,d.\,f(x,y,z)}{dz} + ,$$

von welcher Reihe das allgemeine oder N^{te} Glied ist

$$\frac{a^n\,b^{n'}\,c^{n''}\ldots}{(1.2.3\ldots n)\,(1.2.3\ldots n')\,(1.2.3\ldots n'')\ldots} \cdot \frac{d^{n+n'+n''\ldots}(x,y,z\ldots)}{dx^n\,.\,dy^{n'}\,.\,dz^{n''}\ldots}$$

wo $n + n' + n'' + \ldots = N$ ist.

V. Es sey nun die Gleichung $o = z - y + x\varphi(y)$ gegeben, wo $\varphi(y)$ eine Function von y bezeichnet. Sucht man aus dieser Gleichung irgend eine andere Function von y, die wir durch $\psi(y)$ bezeichnen, in eine Reihe aufzulösen, die nach den Potenzen von x fortgeht, so sey der Kürze wegen $D\psi z$ oder $\psi' z$ gleich $\left(\frac{d.\psi z}{dz}\right)$, und man erhält

$$\psi(y) = \psi z + x\,.\,\varphi z\,.\,D\psi z + \frac{x^2}{1.2}\,.\,\frac{d[(\varphi z)^2\,.\,D\psi z]}{dz} + \frac{x^3}{1.2.3}\,.\,\frac{d^2[(\varphi z)^3\,.\,D\psi z]}{dz^2} + \frac{x^4}{1.2.3.4}\,.\,\frac{d^3[(\varphi z)^4\,.\,D\psi z]}{dz^3} +$$

Ist z. B. $z - y + y^n = o$ gegeben, und sucht man aus dieser Gleichung den Werth von log nat y, so ist

$$x = 1$$
$$\psi y = \log y,\ \psi z = \log z,\ \psi' z = D\psi z = \tfrac{1}{z}$$
$$\varphi y = y^n,\ \varphi z = z^n \text{ also}$$

$$\log y = \log z + z^{n-1} + \frac{2n-1}{1.2} z^{2(n-1)} + \frac{(3n-1)(3n-2)}{1.2.3} z^{3(n-1)} +$$

VI. Setzt man, um noch mehr abzukürzen,

$$\frac{d.f\alpha}{d\alpha} = D.f\alpha$$
$$\frac{d^2.f\alpha}{1.2\,d\alpha^2} = D^2.f\alpha$$
$$\frac{d^3.f\alpha}{1.2.3\,d\alpha^3} = D^3.f\alpha$$
$$\frac{d^4.f\alpha}{1.2.3.4\,d\alpha^4} = D^4.f\alpha \text{ u. s. w.}$$

so ist der vorhergehende Ausdruck

$$\psi(y) = \psi z + x \varphi z . D \psi z + \tfrac{x^2}{2} D . [(\varphi z)^2 D \psi z] + \tfrac{x^3}{3} D^2 . [(\varphi z)^3 D \psi z] + \ldots \text{ (I)}$$

Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich eine grosse Anzahl anderer verwandter Aufgaben auflösen. Ist z. B.

$y = x \varphi (a + x)$ gegeben, und daraus $\psi (A + x)$ zu suchen, wo a und A von einander unabhängige Grössen sind, so ist

$\psi (A + x) = \psi A + y (\varphi a)^{-1} . D \psi A + \frac{y^2}{2} D [(\varphi a)^{-2} . D \psi A] + \frac{y^3}{3} D^2 [(\varphi a)^{-3} D \psi A] +$ wo $D a = D A = 1$ gesetzt wird.

Ist eben so $x = (y - a) \varphi y$ gegeben, und $\psi (y)$ zu suchen, so ist

$$\psi (y) = \psi a + x (\varphi a)^{-1} D \psi a + \tfrac{x^2}{2} D [(\varphi a)^{-2} D \psi a] + \tfrac{x^3}{3} D^2 [(\varphi a)^{-3} D \psi a] + \ldots \text{ wo } D a = 1 \text{ ist.}$$

Selbst noch mehr zusammengesetzte Ausdrücke lassen sich auf die gefundene Reihe I reduciren. Ist z. B.

$$u = F (z + x \varphi u)$$

wo F und φ Functionen bezeichnen, und sucht man eine dritte Function von u, die ich durch ψ u ausdrücke, so sey

$$y = z + x \varphi u, \text{ also } u = F y \text{ oder } \varphi u = \varphi F y \text{ und daher}$$
$$y - z = x \varphi F y \text{ oder } o = z - y + x \varphi F y$$

Vergleicht man den letzten Ausdruck mit dem oben entwickelten

$$o = z - y + x \varphi y$$

so ist sofort

$\psi (u) = \psi F z + x (\varphi F z) D (\psi F z) + \frac{x^2}{2} D [(\varphi F z)^2 D (\psi F z)] + \frac{x^3}{3} D^2 [(\varphi F z)^3 D (\psi F z)] +$

Durch andere Betrachtungen findet man aber für dieselbe Grösse noch den Ausdruck

$\psi (u) = \psi F . \{z + x . \varphi F z + \frac{x^2}{2} D (\varphi F z)^2 + \frac{x^3}{3} D (\varphi F z)^3 + \ldots\}$

und beyde Ausdrücke von ψ (u) einander gleichgesetzt führen zu anderen interessanten Entwicklungen, zu denen hier nicht der Ort ist. Man wird sie und vieles andere wichtige finden in Arbogasts Calcul des dérivations, Strassburg 1800.

§. 12.

Wenden wir nun das vorhergehende auf die Gleichungen des §. 7 an. Zwey derselben sind

$$m - u + \varepsilon \operatorname{Sin} u = o$$

$$\frac{r}{a} - 1 + \varepsilon \operatorname{Cos} u = o$$

Vergleicht man die erste derselben mit dem vorhergehenden allgemeinen Ausdruck

$$z - y + x\,\varphi\,(y) = o$$

so hat man, wenn man Cos u sucht,

$z = m$, $y = u$, $x = \varepsilon$, $\varphi\, y = \operatorname{Sin} u$, $\psi\, y = \operatorname{Cos} u$, also die Gleichung (A) des vorhergehenden §.

$$\operatorname{Cos} u = \operatorname{Cos} m - \varepsilon \operatorname{Sin}^2 m - \frac{\varepsilon^2}{1.2} \frac{d. \operatorname{Sin}^3 m}{d\, m} - \frac{\varepsilon^3}{1.\,2.\,3} \cdot \frac{d^2 . \operatorname{Sin}^4 m}{d\, m^2} -$$

also ist auch die zweyte unserer Gleichungen

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \operatorname{Cos} m + \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 m + \frac{\varepsilon^3}{1.2} \frac{d . \operatorname{Sin}^3 m}{d\, m} +$$

wo das allgemeine Glied der Reihe ist,

$$\frac{\varepsilon^n}{1.\,2.\,3 \ldots n-1} \frac{d^{\,n-2} \operatorname{Sin}^n m}{d\, m^{\,n-2}}$$

Aber man hat bekanntlich

$$2^n \operatorname{Cos}^n x = \operatorname{Cos} n\, x + n \operatorname{Cos} (n-2)\, x + \frac{n \, . \, n-1}{1.2},$$

$$\operatorname{Cos} (n-4)\, x + \frac{n.\, n-1.\, n-2}{1.\,2.\,3} \operatorname{Cos} (n-6)\, x +$$

woraus folgt, wenn $n - 2$ eine ungerade Zahl ist

$$\pm\, 2^n . \frac{d^{\,n-2} . \operatorname{Cos}^n x}{d\, x^{\,n-2}} = n^{n-2} \operatorname{Sin} n\, x + \frac{n}{1} (n-2)^{n-2}$$

$$\operatorname{Sin} (n-2)\, x + \frac{n.\, n-1}{1.\,2} (n-4)^{n-2} \operatorname{Sin} (n-4)\, x +$$

das obere Zeichen, wenn $n - 2$ die Form $2\,(2\,p + 1) + 1$
untere $n - 2$ $2\,(2\,p) + 1$
hat. Ist aber $n - 2$ eine gerade Zahl, so ist

$$\pm \frac{2^n . d^{\,n-2} . \operatorname{Cos}^n x}{d\, x^{\,n-2}} = n^{n-2} \operatorname{Cos} n\, x + \frac{n}{1} (n-2)^{n-2} \operatorname{Cos} (n-2)\, x +$$

das obere Zeichen wenn $n - 2$ die Form $2\,(2\,p)$
untere $n - 2$ $2\,(2\,p + 1)$ hat.

Nimmt man also $x = 90 - m$, so hat man, wenn man irgend einen dieser vier Werthe z. B. den ersten nimmt

$$\frac{2^n . d^{n-1} Cos^n x}{d x^{n-1}} = - \frac{2^n . d^{n-1} Sin^n m}{d m^{n-1}}$$

$$= n^{n-1} Sin\, n (90 - m) + \frac{n}{1} (n-2)^{n-1} Sin (n-2)(90-m) +$$

$$\frac{n . n-1}{1 . 2} (n-4)^{n-1} Sin (n-4)(90-m) +$$

Da aber $n - 2 = 2 (2 p + 1) + 1 = 3, 7, 11, 15 \ldots$ das heisst, da $n = 5, 9, 13, 17 \ldots$ ist, so hat man

$$Sin\, n (90 - m) = Cos\, n\, m$$
$$Sin (n-2) (90-m) = - Cos (n-2) m$$
$$Sin (n-4) (90-m) = Cos (n-4) m \ldots$$

also das allgemeine Glied der Reihe

$$\frac{\varepsilon^n . d^{n-1} Sin^n m}{1. 2. 3. \ldots n-1 . d m^{n-1}} = - \frac{\varepsilon^n}{1. 2. 3. . (n-1). 2^n} .$$

$$[n^{n-1} Cos\, n\, m - \frac{n}{1} (n-2)^{n-1} Cos (n-2) m +$$

$$\frac{n. n-1}{1. 2} (n-4)^{n-1} Cos (n-4) m -]$$

so dass man z. B. für $n = 3$ hat

$$- \frac{\varepsilon^3}{2^3} (3 Cos\, 3 m - 3 Cos\, m)$$

und sofort für die andern Werthe von n, so dass endlich der Ausdruck für den Radius Vector wird,

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon Cos\, m - \frac{\varepsilon^2}{1. 2} (Cos\, 2 m - 1) - \frac{\varepsilon^3}{1. 2. 2^2} (3 Cos\, 3 m - 3 Cos\, m)$$

$$- \frac{\varepsilon^4}{1. 2. 3. 2^3} (4^2 Cos\, 4 m - 4. 2^2 Cos\, 2 m)$$

$$- \frac{\varepsilon^5}{1. 2. 3. 4. 2^4} (5^3 Cos\, 5 m - 5. 3^3 Cos\, 3 m + 10 Cos\, m) -$$

wovon das Gesetz des Fortganges deutlich ist.

§. 13.

Um v durch u oder u durch v auszudrücken, hat man nach §. 7

$$tg \frac{v}{2} = tg \frac{u}{2} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}}$$

und diese Gleichung gibt nach dem I. Cap. des ersten Buches sofort

$$\frac{u}{2} = \frac{v}{2} - b \text{ Sin } v + \frac{b^2}{2} \text{ Sin } 2\,v - \frac{b^3}{3} \text{ Sin } 3\,v + \text{ und}$$

$$\frac{v}{2} = \frac{u}{2} + b \text{ Sin } u + \frac{b^2}{2} \text{ Sin } 2\,u + \frac{b^3}{3} \text{ Sin } 3\,u +$$

wo $b = \dfrac{\epsilon}{1 + \sqrt{1 - \epsilon^2}}$

I. Aus diesem Werthe von b folgt

$$\epsilon = \frac{2\,b}{1 + b^2} \text{ also auch}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\,\epsilon \text{ Sin } v}{1 + \epsilon \text{ Cos } v} = \frac{b \text{ Sin } v}{1 + b^2 + 2\,b \text{ Cos } v}$$

Man nehme an, dass der zweyte Theil dieser Gleichung in folgende Reihe entwickelt sey

$$\frac{b \text{ Sin } v}{1 + b^2 + 2\,b \text{ Cos } v} = \alpha \text{ Sin } v - \beta \text{ Sin } 2\,v + \gamma \text{ Sin } 3\,v -$$

Um $\alpha\ \beta\ \gamma$ . . zu bestimmen, hat man, wenn man diese Reihe durch $1 + b^2 + 2\,b$ Cos v multiplicirt, und die Coefficienten von Sin v, Sin 2 v, Sin 3 v . . gleich Null setzt,

$$\alpha\,(1 + b^2) = b\,(1 + \beta)$$
$$\beta\,(1 + b^2) = b\,(\alpha + \gamma)$$
$$\gamma\,(1 + b^2) = b\,(\beta + \delta). \text{ u. f.}$$

also $\alpha = b$, $\beta = b^2$, $\gamma = b^3$ ... und daher

$$\frac{\epsilon \text{ Sin } v}{1 + \epsilon \text{ Cos } v} = 2\,b\,[\text{Sin } v - b \text{ Sin } 2\,v + b^2 \text{ Sin } 3\,v - b^3 \text{ Sin } 4\,v +]$$

Aber die Gleichung 3 des §. 7 gibt

$$\text{Cos } u = \frac{\epsilon + \text{Cos } v}{1 + \epsilon \text{ Cos } v} \text{ oder Sin } u = \frac{\text{Sin } v . \sqrt{1 - \epsilon^2}}{1 + \epsilon \text{ Cos } v} \text{ oder endlich}$$

$$\frac{\epsilon \text{ Sin } v}{1 + \epsilon \text{ Cos } v} = \frac{2\,b . \text{ Sin } u}{1 - b^2}$$

daher ist

$$\text{Sin } u = (1 - b^2)\,(\text{Sin } v - b \text{ Sin } 2\,v + b^2 \text{ Sin } 3\,v -)$$

und dieser Ausdruck gibt Sin u durch v. Verbindet man ihn mit dem vorher gefundenen Ausdruck, der u selbst durch v gab, so findet man nach der Gleichung $m = u - \epsilon$ Sin u folgenden Ausdruck, der m durch v gibt,

$$\begin{aligned} m = v - 2\,\epsilon \text{ Sin } v &+ 2\,b\,(\epsilon - \tfrac{1}{2}\,b) \text{ Sin } 2\,v \\ &- 2\,b^2\,(\epsilon - \tfrac{2}{3}\,b) \text{ Sin } 3\,v \\ &+ 2\,b^3\,(\epsilon - \tfrac{3}{4}\,b) \text{ Sin } 4\,v \ldots. \end{aligned}$$

$$\pm 2 b^{n-1} \left(\varepsilon - \frac{(n-1)}{n} b\right) \operatorname{Sin} n v$$

§. 14.

Aus der so eben gefundenen Reihe könnte man durch Reversion eine andere ableiten, welche v durch m gibt. Da es aber dann schwerer seyn wird, das Gesetz des Fortgangs der Reihe zu entdecken, so wollen wir v durch m auf einem directen Wege suchen.

Wir hatten oben

$$\frac{v}{2} = \frac{u}{2} + b \operatorname{Sin} u + \frac{b^2}{2} \operatorname{Sin} 2u + \frac{b^3}{3} \operatorname{Sin} 3u +$$

d. h.

$$v = u + 2 \,.\, \Sigma \left(\frac{b^n \operatorname{Sin} n u}{n}\right) \;\ldots\; \mathrm{I}$$

wo das Summezeichen Σ ausdrückt, dass man in den Grössen $\frac{b^n . \operatorname{Sin} n u}{n}$ nach und nach $n = 1. 2. 3\; 4 \ldots$, nehmen soll.

Die letzte Gleichung enthält die Grössen u und Sin n u, die wir also beyde durch m ausdrücken sollen.

I. Für u. Ist in §. 11 $\psi y = u$, so findet man

$$u = m + \varepsilon \operatorname{Sin} m + \frac{\varepsilon^2}{1.\,2\, d m} d . \operatorname{Sin}^2 m \ldots + \frac{\varepsilon^n\, d^{n-1} . \operatorname{Sin}^n m}{1.\,2.\,3.\,.\,n.\; d m^{n-1}}$$

Aber es war

$$\frac{d .^{n+1} \operatorname{Sin}^n m}{d m^{n+1}} = - \frac{1}{2^n} \left(n^{n+1} \operatorname{Sin} n m - \tfrac{n}{1} (n-2)^{n+1} \operatorname{Sin} (n-2) m + \right)$$

also ist nach einer doppelten Integration

$$\frac{\varepsilon^n}{1.\,2.\,3.\,.\,n} . \frac{d^{n-1} \operatorname{Sin}^n m}{d m^{n-1}} = \frac{\varepsilon^n}{1.\,2.\,3.\,.\,n\,.\,2^n} .$$

$$(n^{n-1} \operatorname{Sin} n m - \tfrac{n}{1} (n-2)^{n-1} \operatorname{Sin} (n-2) m +)$$

und so erhält man

$$u = m + \varepsilon \operatorname{Sin} m + \frac{\varepsilon^2 . 2}{1.\,2.\,2} \operatorname{Sin} 2 m + \frac{\varepsilon^3}{1.\,2.\,3.\,2^2} (3^2 \operatorname{Sin} 3 m - 3 \operatorname{Sin} m)$$

$$+ \frac{\varepsilon^4}{1.\,2.\,3.\,4.\,2^3} [4^3 \operatorname{Sin} 4 m - 4 . 2^3 \operatorname{Sin} 2 m] \;\ldots\; (\mathrm{A})$$

II. Für Sin n u. Ist in §. 11 $\psi y = \operatorname{Sin} n u$, so ist

$$\frac{1}{n} \operatorname{Sin} n u = \frac{1}{n} \operatorname{Sin} n m + \varepsilon \operatorname{Sin} n \cdot \operatorname{Cos} n m +$$

$$\frac{\varepsilon^2}{1.2 \, d m} \, d \, [\operatorname{Sin}^2 m \operatorname{Cos} n m] \ldots$$

und dieser Reihe allgemeines Glied ist

$$\frac{\varepsilon^n}{1.2.3 \ldots n . d m^{n-1}} \, . \, d^{n-1} \, [\operatorname{Sin}^n m \operatorname{Cos} n m] \cdot$$

Aber nach dem Vorhergehenden ist

$$2^\pi \operatorname{Cos}^\pi x \operatorname{Cos} n m = \operatorname{Cos} \pi x \operatorname{Cos} n m +$$

$$\frac{\pi}{1} \, . \operatorname{Cos} (\pi - 2) x \operatorname{Cos} n m + \frac{\pi . \pi - 1}{1.2} \operatorname{Cos} (\pi - 4) x \operatorname{Cos} n m +$$

Ist also $x = 90 - m$, so ist für $\pi = 5, 9, 13, 17 \ldots$

$$\operatorname{Cos} \pi x = \operatorname{Sin} \pi m$$
$$\operatorname{Cos} (\pi - 2) x = - \operatorname{Sin} (\pi - 2) m \text{ u. f.}$$

und daher die vorhergehende Reihe

$$2^\pi \operatorname{Sin}^\pi m \operatorname{Cos} n m = \operatorname{Sin} \pi m \operatorname{Cos} n m - \pi . \operatorname{Sin} (\pi - 2) m \operatorname{Cos} n m$$

$$+ \frac{\pi . \pi - 1}{1.2} \operatorname{Sin} (\pi - 4) m \operatorname{Cos} n m -$$

oder wenn man die Producte auflöst

$$2^{\pi + 1} \operatorname{Sin}^\pi m \operatorname{Cos} n m = \operatorname{Sin} (\pi + n) m + \operatorname{Sin} (\pi - n) m$$

$$- \frac{\pi}{1} [\operatorname{Sin} (\pi - 2 + n) m + \operatorname{Sin} (\pi - 2 - n) m]$$

$$+ \frac{\pi . \pi - 1}{1.2} [\operatorname{Sin} (\pi - 4 + n) m + \operatorname{Sin} (\pi - 4 - n) m] -$$

Vergleicht man dann die 4, 8, 12, 16 .... $(\pi - 1)^{\text{ten}}$ Differentialien dieses Ausdrucks, so findet man

$$\frac{\varepsilon^{\pi} . d^{\pi-1} . \operatorname{Sin}^{\pi} m \operatorname{Cos} n m}{1.2.3 \ldots \pi . dm^{\pi-1}} = \frac{\varepsilon^{\pi}}{1.2.3 \ldots \pi . 2^{\pi+1}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} [(\pi+n)^{\pi-1} \operatorname{Sin} (\pi+n) m + \\ \quad (\pi-n)^{\pi-1} \operatorname{Sin} (\pi-n) m] \\ -\pi [(\pi-2+n)^{\pi-1} \operatorname{Sin} (\pi-2+n) m \\ \quad + (\pi-2-n)^{\pi-1} \\ \quad \operatorname{Sin} (\pi-2-n) m] \\ + \frac{\pi . \pi-1}{1.2} [(\pi-4+n)^{\pi-1} \\ \operatorname{Sin} (\pi-4+n) m + (\pi-4-n)^{\pi-1} \\ \quad \operatorname{Sin} (\pi-4-n) m] \\ - \frac{\pi . \pi-1 . \pi-2}{1.2.3} [(\pi-6+n)^{\pi-1} \\ \operatorname{Sin} (\pi-6+n) m + (\pi-6-n)^{\pi-1} \\ \quad \operatorname{Sin} (\pi-6-n) m) +] \end{array} \right\}$$

Setzt man also für π nach der Reihe die Zahlen $0, 1, 2, 3 \ldots$ und nimmt man zur Abkürzung

$$A^{0} = \frac{1}{n} \operatorname{Sin} n m$$

$$A^{1} = \operatorname{Sin} (n+1) m - \operatorname{Sin} (n-1) m$$

$$A^{2} = \frac{1}{1.2} [(n+2) \operatorname{Sin} (n+2) m - 2 n \operatorname{Sin} {}^{n} m + (n-2) \operatorname{Sin} (n-2) m]$$

$$A^{3} = \frac{1}{1.2.3} [(n+3)^{2} \operatorname{Sin} (n+3) m - 3 (n+1)^{2} \operatorname{Sin} (n+1) m + 3 (n-1)^{2} \operatorname{Sin} (n-1) m - (n-3)^{2} \operatorname{Sin} (n-3) m]$$

und allgemein

$$A^{\pi} = \frac{1}{1.2.3 \ldots \pi} [(\pi+n)^{\pi-1} \operatorname{Sin} (\pi+n) m - \frac{\pi}{1} (\pi+n-2)^{\pi-1} \operatorname{Sin} (\pi+n-2) m + \frac{\pi . \pi-1}{1.2} (\pi+n-4)^{\pi-1} \operatorname{Sin} (\pi+n-4) m - \frac{\pi . \pi-1 . \pi-2}{1.2.3} (\pi+n-6)^{\pi-1} \operatorname{Sin} (\pi+n-6) m +]$$

so hat man für die Entwicklung von $\operatorname{Sin} n u$, wenn $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ ist,

$$\frac{1}{n} \operatorname{Sin} n u = A^{0} \alpha^{0} + A^{1} \alpha^{1} + A^{2} \alpha^{2} + A^{3} \alpha^{3} \ldots . \quad (B)$$

III. Noch fehlt die Entwicklung von b^{n} in der Gleichung I. Dazu bemerke man, dass von der Gleichung

$$\rho = \frac{\varepsilon^{2}}{x} + x - 2$$

eine Wurzel ist $x = 1 + \sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon}{b}$

wo b die vorhergehende Bezeichnung hat. Vergleicht man diese Gleichung mit der des §. 11, und setzt $\psi y = x^{-n}$, so ist, wenn wieder $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ gesetzt wird

$$b^n = \alpha^n \left[1 + n\alpha^2 + \frac{n.n+3}{1.2}\alpha^4 + \frac{n.n+4.n+5}{1.2.3}\alpha^6 + \frac{n.n+5.n+6.n+7}{1.2.3.4}\alpha^8 + \right] \dots (C)$$

IV. Nachdem wir so die allgemeinen Ausdrücke von u und $\frac{\text{Sin}\, n\, u}{n}$ und b^n oder die Gleichungen (A), (B), (C) gefunden haben, ist nur noch übrig, sie in der Gleichung I zu substituiren, wodurch man erhält

$$\tfrac{1}{2} v = \tfrac{1}{2} u + \Sigma \left(\frac{b^n\, \text{Sin}\, n\, u}{n}\right)$$

oder wenn man die Substitutionen ausführt,

$$\frac{v}{2} = \frac{m}{2} + \Sigma^n \frac{\frac{1}{2}\alpha^n}{1.2.3..n}\left[n^{n-1}\,\text{Sin}\, n\, m - \frac{n}{1}(n-2)^{n-1} \times \text{Sin}\,(n-2)m + \frac{n.n-1}{1.2}(n-4)^{n-1}\,\text{Sin}\,(n-4)\,m - \right]$$

$$+ \Sigma^n \left\{ \begin{array}{c} \alpha^n A^0 + \alpha^{n+1} A' + \alpha^{n+2}(A^2 + A^0 n) + \alpha^{n+3}(A^3 + A' n) \\ + \alpha^{n+4}\left(A^4 + A^2 n + A^0 . \frac{n.n+3}{1.2}\right) \\ \alpha^{n+5}\left(A^5 + A^3 n + A' . \frac{n.n+3}{1.2}\right. \\ + \alpha^{n+6}\left(A^6 + A^4 n + A^2 \frac{n.n+3}{1.2} + A^0 \frac{n.n+4.n+5}{1.2.3}\right) \\ + \alpha^{n+7}\left(A^7 + A^5 n + A^3 . \frac{n.n+3}{1.2} + A' . \frac{n.n+4.n+5}{1.2.3}\right) \\ + \alpha^{n+8}\left(A^8 + A^6 n + A^4 \frac{n.n+3}{1.2}\right. \\ \left. + A^2 . \frac{n.n+4.n+5}{1.2.3} + A^0 . \frac{n.n+5.n+6.n+7}{1.2.3.4}\right) + \end{array} \right\}$$

wo n nach der Reihe gleich 1. 2. 3. 4... gesetzt werden soll.

Durch diesen Ausdruck wird man nun ohne Mühe den Factor irgend einer Potenz von $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ entwickeln. Um diess durch ein Beyspiel deutlich zu machen, wollen wir die Factoren der fünf ersten Potenzen suchen. Bezeichnet man der grössern Deutlichkeit wegen durch $\overset{1}{A}{}^{0}\ \overset{2}{A}{}^{0}\ \overset{3}{A}{}^{0}$ . . die Werthe von A^{0} für die besondern Fälle von $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ . . . und so mit den andern, so hat man aus dem oben gegebenen allgemeinen Ausdruck von A^{π},

$$\overset{1}{A}{}^{0} = \text{Sin } m$$
$$\overset{1}{A}{}^{1} = \text{Sin } 2\,m$$
$$\overset{1}{A}{}^{2} = \tfrac{1}{2}\,(3 \text{ Sin } 3\,m - \text{Sin } m)$$
$$\overset{1}{A}{}^{3} = \tfrac{1}{3}\,(8 \text{ Sin } 4\,m - 4 \text{ Sin } 2\,m)$$
$$\overset{1}{A}{}^{4} = \tfrac{1}{24}\,(5^{3} \text{ Sin } 5\,m - 3^{4} \text{ Sin } 3\,m + 2 \text{ Sin } m)$$

$$\overset{2}{A}{}^{0} = \tfrac{1}{2} \text{ Sin } 2\,m$$
$$\overset{2}{A}{}^{1} = \text{Sin } 3\,m - \text{Sin } m$$
$$\overset{2}{A}{}^{2} = 2\,(\text{Sin } 4\,m - \text{Sin } 2\,m)$$
$$\overset{2}{A}{}^{3} = \tfrac{1}{6}\,(25 \text{ Sin } 5\,m - 27 \text{ Sin } 3\,m + 4 \text{ Sin } m)$$

$$\overset{3}{A}{}^{0} = \tfrac{1}{3} \text{ Sin } 3\,m$$
$$\overset{3}{A}{}^{1} = \text{Sin } 4\,m - \text{Sin } 2\,m$$
$$\overset{3}{A}{}^{2} = \tfrac{1}{2}\,(5 \text{ Sin } 5\,m - 6 \text{ Sin } 3\,m + \text{Sin } m)$$

$$\overset{4}{A}{}^{0} = \tfrac{1}{4} \text{ Sin } 4\,m$$
$$\overset{4}{A}{}^{1} = \text{Sin } 5\,m - \text{Sin } 3\,m$$

$$\overset{5}{A}{}^{0} = \tfrac{1}{5} \text{ Sin } 5\,m$$

Mit diesen Werthen erhält man aus dem letzten Ausdruck von $\frac{y}{2}$ für $n = 1$

$$\alpha \text{ Sin } m + \alpha\, A^{0} = 2\,\alpha \text{ Sin } m$$

für $n = 2$

$$\alpha^{2} \text{ Sin } 2\,m + \alpha^{2}\,(\overset{1}{A}{}^{1} + \overset{2}{A}{}^{0}) = \tfrac{5}{2}\,\alpha^{2} \text{ Sin } 2\,m$$

für $n = 3$

$$\frac{\alpha^{3}}{2}(3 \text{ Sin } 3\,m - \text{Sin } m) + \alpha^{3}\left(\overset{1}{A}{}^{2} + \overset{1}{A}{}^{0} + \overset{2}{A}{}^{1} + \overset{3}{A}{}^{0}\right) = \alpha^{3}\,(\tfrac{13}{3} \text{ Sin } 3\,m - \text{Sin } m)$$

für $n = 4$

$$\frac{4\,\alpha^4}{3}(2\,\mathrm{Sin}\,4\,m - \mathrm{Sin}\,2\,m) + \alpha^4\left(\overset{4}{A}_{0} + \overset{3}{A}_{1} + \overset{2}{A}_{2} + \overset{1}{A}_{3} + \overset{1}{A}_{1}\right) =$$

$$\alpha^4\left(\tfrac{103}{12}\,\mathrm{Sin}\,4\,m - \tfrac{11}{3}\,\mathrm{Sin}\,2\,m\right)$$

und für $n = 5$

$$\frac{\alpha^5}{24}\left(5^3\,\mathrm{Sin}\,5\,m - 3^4\,\mathrm{Sin}\,3\,m + 2\,\mathrm{Sin}\,m\right) +$$

$$\alpha^5\left(\overset{5}{A}_{0} + \overset{4}{A}_{1} + \overset{3}{A}_{2} + 3\,\overset{3}{A}_{0} + \overset{2}{A}_{3} + 2\,\overset{2}{A}_{1} + \overset{1}{A}_{4} + \overset{1}{A}_{2} + 2\,\overset{1}{A}_{0}\right)$$

$$= \alpha^5\left(\tfrac{5}{6}\,\mathrm{Sin}\,m - \tfrac{43}{4}\,\mathrm{Sin}\,3\,m + \frac{1097}{3.\,4.\,5}\,\mathrm{Sin}\,5\,m\right)$$

also ist auch

$$v = m + 2\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,m + \frac{5}{2^2}\,.\,\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\,2\,m +$$

$$\frac{\varepsilon^3}{2^2}\left(\tfrac{13}{3}\,\mathrm{Sin}\,3\,m - \mathrm{Sin}\,m\right)$$

$$+ \frac{\varepsilon^4}{2^3\,.\,3}\left(\frac{103}{2^2}\,\mathrm{Sin}\,4\,m - 11\,\mathrm{Sin}\,2\,m\right) +$$

$$\frac{\varepsilon^5}{2^5}\left(\frac{1097}{2.\,3.\,5}\,\mathrm{Sin}\,5\,m - \tfrac{43}{2}\,\mathrm{Sin}\,3\,m + \tfrac{5}{3}\,\mathrm{Sin}\,m\right)$$

Weiter fortgesetzt findet man diese Reihe in Delambers neuesten Sonnentafeln, in der Monatl. Corresp. Vol. XI. Im Berl. Jahrbuch für 1820 und 1821. Vergl. Berl. Jahrb. 1813. p. 194.

Ist $m = 146°\ 32'\ 27''1$ und $\varepsilon = 0.056069$, so ist $v = m + 23121.''0\ \mathrm{Sin}\ m + 809.''6\ \mathrm{Sin}\ 2\,m + 39.''\ 3\ \mathrm{Sin}\,3\,m + 2.''\ 2\ \mathrm{Sin}\ 4\,m + 0.''\ 1\ \mathrm{Sin}\ 5\ m = 146°\ 32'\ 27''1 + 12747''6 - 744.''8 + 38''7 - 1''6 = 149°\ 53'\ 7''0.$

Wollte man mit den ältern Astronomen die Anomalien m u v nicht vom Perihelium, sondern vom Aphelium rechnen, so darf man in den vorhergehenden Ausdrücken nur die Grösse ε negativ setzen.

§. 15.

Für den Punct der Bahn, wo die Differenz der wahren und mittlern Anomalie ein Grösstes ist, d. h. für den Ort der grössten Mittelpunctsgleichung hat man $d\,(v - m) = 0$ oder $d\,v = d\,m$. Es ist aber §. 7 $\frac{d\,v}{d\,m} = \frac{a^2}{r^2}\,\mathrm{Cos}\,\varphi$, wenn $\varepsilon = \mathrm{Sin}\,\varphi$, oder es ist $\frac{r^2}{a^2} = \mathrm{Cos}\,\varphi$. Substituirt man diesen Werth von $\frac{r}{a}$ in der Gleichung

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \operatorname{Cos} u, \text{ so ist } \operatorname{Cos} u = \frac{1 - \sqrt{\operatorname{Cos} \varphi}}{\varepsilon}$$

Aber die Gleichung (8) des §. 7 gibt

$$v - u = 2 \operatorname{Arc Sin} \frac{\operatorname{Sin} \frac{\varphi}{2} \operatorname{Sin} u}{\sqrt[4]{\operatorname{Cos} \varphi}}$$

das heisst, nach der Gleichung $m = u - \varepsilon \operatorname{Sin} u$

$$v - m = 2 \operatorname{Arc Sin} \left(\frac{\operatorname{Sin} \frac{\varphi}{2} \operatorname{Sin} u}{\sqrt[4]{\operatorname{Cos} \varphi}}\right) + \varepsilon \operatorname{Sin} u$$

und diess ist der Ausdruck der grössten Gleichung des Mittelpunctes, wenn man darin den Werth von u aus $\operatorname{Cos} u = \frac{1 - \sqrt{\operatorname{Cos} \varphi}}{2}$ substituirt.

Man könnte aus der letzten Gleichung die grösste Mittelpunctsgleichung $v - m = f$ in einer Reihe entwickeln, die nach den Potenzen von ε fortgeht. Aber man erhält diese Reihe bequemer auf folgende Art. Es war §. 7

$$d v = \frac{a^2}{r^2} (1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} d m + \frac{(2 + \varepsilon \operatorname{Cos} v)}{\operatorname{Cos} \varphi} \operatorname{Sin} v \cdot d \varphi$$

Da aber $d v = d m$, so ist

$$\frac{r}{a} = \sqrt[4]{1 - \varepsilon^2}. \text{ Aber } \frac{r}{a} = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon \operatorname{Cos} v} \text{ also auch } (1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}} = (1 + \varepsilon \operatorname{Cos} v)^2$$

und daher die erste Gleichung

$$d v - d m = d \varepsilon \operatorname{Sin} v \left\{\frac{1}{1 - \varepsilon^2} + \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{4}}}\right\}$$

Aber es ist

$$\operatorname{Cos} v = - \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - (1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{4}}\right) = - \frac{3 \varepsilon}{4} - \frac{3 \varepsilon^3}{2^5} - \frac{5 \varepsilon^5}{2^7} - \frac{5 . 9 \varepsilon^7}{2^{11}} -$$

und

$$\operatorname{Sin} v = \sqrt{1 - \operatorname{Cos}^2 v} = 1 - \frac{9}{32} \varepsilon^2 - \frac{225}{2048} \varepsilon^4 - \frac{4233}{65536} \varepsilon^6 -$$

und überdiess

$$(1 - \varepsilon^2)^{-1} = 1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^6 +$$

$$(1 - \varepsilon^2)^{-\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 + \frac{5}{32} \varepsilon^4 + \frac{15}{128} \varepsilon^6 + .$$

Daher hat man

$$\mathrm{Sin}\, v \,.\, d\varepsilon \,.\, \left[\frac{1}{1-\varepsilon^2} + \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{4}}}\right] = \left(1 - \frac{9}{32}\varepsilon^2 - \frac{225}{2048}\varepsilon^4 - \right) \,.$$

$$\left(2 + \frac{5}{4}\varepsilon^2 + \frac{37}{32}\varepsilon^4 + \frac{143}{128}\varepsilon^6\right) . \, d\varepsilon$$

Das Product dieser beyden Reihen ist

$$2 + \frac{11}{16}\varepsilon^2 + \frac{599}{1024}\varepsilon^4 +$$

Multiplicirt man also den letzten Ausdruck durch $d\varepsilon$, und integrirt, so ist die gesuchte grösste Gleichung des Mittelpunctes

$$f = 2\varepsilon + \frac{11}{48}\varepsilon^3 + \frac{599}{5120}\varepsilon^5 + \frac{17219}{229376}\varepsilon^7 + \frac{20532363}{37748736}\varepsilon^9 +$$

und wenn man diese Reihe umkehrt, so ist

$$2\varepsilon = f - \frac{11}{3.\,2^7}f^3 - \frac{5.\,87}{3.\,5.\,2^{15}}f^5 - \frac{40583}{5.\,7.\,9.\,2^{22}}f^7 -$$ 557.

welche beyden letzten Reihen f durch ε, und ε durch f geben.

M. s. Gauss Theoria mot. corp. coel. und Berl. Jahrb. 1790 p. 236 und 1804. p. 218 und 1805. p. 147.

§. 16.

Aus allem vorhergehenden sieht man also, wie man für jede Zeit die wahre Anomalie v und den Radius Vector r der Planeten oder Kometen finden könne. Addirt man dann zu v die Länge p des Periheliums, so erhält man (§. 5) die wahre Länge l des Planeten in der Bahn; oder addirt man zu v die Elongation π des Periheliums vom Knoten, so erhält man das Argument ϑ der Breite, so dass $\vartheta = v + \pi$ oder auch $\vartheta = v + p - k$ ist, wenn k die Länge des aufsteigenden Knotens bezeichnet.

Aus der Grösse ϑ und der Neigung n der Bahn gegen die Ebene der Ekliptik findet man dann leicht die auf die Ekliptik reducirte wahre Länge l' und die aus dem Mittelpuncte der Sonne gesehene Breite b des Planeten durch folgende Ausdrücke

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{tg}\,(l'-k) = \mathrm{Cos}\, n\; \mathrm{tg}\, \vartheta \\ \mathrm{tg}\, b = \mathrm{tg}\, n\; \mathrm{Sin}\,(l'-k) \text{ oder} \\ \mathrm{Sin}\, b = \mathrm{Sin}\, n\; \mathrm{Sin}\, \vartheta \\ \mathrm{Cos}\, b = \dfrac{\mathrm{Cos}\, \vartheta}{\mathrm{Cos}\,(l'-k)} \end{array}\right\} (A)$$

woraus man noch folgende ableiten kann

$$\mathrm{Sin}\,(\vartheta - l' + k) = 2\,\mathrm{Sin}^2 \tfrac{1}{2} n\; \mathrm{Sin}\, \vartheta\; \mathrm{Cos}\,(l'-k) =$$
$$\mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2} n\; \mathrm{Sin}\, b\; \mathrm{Cos}\,(l'-k) = \mathrm{tg}\, \tfrac{n}{2}\, \mathrm{tg}\, b\; \mathrm{Cos}\, \vartheta$$

$$\mathrm{Sin}\,(v + l' - k) = 2\,\mathrm{Cos}^2 \tfrac{1}{2} n\ \mathrm{Sin}\ v\ \mathrm{Cos}\,(l' - k) =$$
$$\mathrm{Cotg}\ \tfrac{1}{2} n\ \mathrm{Sin}\ b\ \mathrm{Cos}\,(l' - k) = \mathrm{Cotg}\ \tfrac{n}{2}\ \mathrm{tg}\ b\ \mathrm{Cos}\ v$$

wo $v \mp l' \pm k = \rho$ die Reduction auf die Ekliptik ist, das obere Zeichen, wenn n kleiner als 90° ist.

Diese Reduction lässt sich auch aus der ersten der vorhergehenden Gleichungen

$$\mathrm{tg}\,(l' - k) = \mathrm{Cos}\ n\ \mathrm{tg}\ v$$

nach dem I. Cap. des I. Buches in einer Reihe geben; es ist nämlich

$$v - (l' - k) = h\ \mathrm{Sin}\ 2\,v - \tfrac{1}{2} h^2\ \mathrm{Sin}\ 4\,v + \tfrac{1}{3} h^3\ \mathrm{Sin}\ 6\,v - \text{und}$$

$$v - (l' - k) = h\ \mathrm{Sin}\ 2\,(l' - k) + \tfrac{1}{2} h^2\ \mathrm{Sin}\ 4\,(l' - k) + \tfrac{1}{3} h^3\,\mathrm{Sin}\ 6\,(l' - k) +$$

wo $h = \mathrm{tg}^2 \frac{n}{2}$ ist.

Ist z. B. $v = 127^\circ\ 5'\ 55''$
$k = 112^\circ\ 1'\ 30''$
$n = 2^\circ\ 29'\ 47''$ so findet man $\rho = 94''2$ also $l' = 239^\circ\ 8'\ 59''2$
und $b = +\ 1^\circ\ 59'\ 27''2$ nördlich.

§. 17.

Zum Schlusse dieses Gegenstandes wollen wir noch die Zeitgleichung entwickeln, welche wir im ersten Buche bloss anzeigen konnten. Nach dem dort gesagten ist die Zeitgleichung der Unterschied der wahren und mittlern Zeit, oder der Unterschied der Rectascensionen der wahren und der zweyten mittlern Sonne, in Theilen der mittlern Zeit ausgedrückt.

Sey L, l, α nach der Ordnung die mittlere Länge, die wahre Länge und die wahre Rectascension der Sonne; ρ die Reduction der wahren Sonnenlänge auf den Äquator, oder die Differenz der wahren Länge und der wahren Rectascension der Sonne, endlich p die Länge des Periheliums der Erde, alle diese Längen vom mittlern Frühlingspuncte genommen. Für den wahren, von der Nutation afficirten Frühlingspunct wollen wir diese Grössen mit einem Striche bezeichnen.

Diess vorausgesetzt, hat man

$$\alpha' = l + \rho - 7''18\ \mathrm{Cotg}\ e\ \mathrm{Sin}\ ☊\,☾$$

wo e die Schiefe der Ekliptik, und ☊ ☾ die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondesbahn ist. Reducirt man die Grösse 7. 18 Cotg e Sin ☊ ☾, welche für die Ebene des Äquators gilt, auf die Ekliptik, so hat man für diese reducirte Grösse

$$-\ \frac{7''18\ \mathrm{Sin}\ ☊\,☾}{\mathrm{Sin}\ e}$$

also ist $L' = l - (l - L) - \frac{7''18 \text{ Sin} ☊ ☾}{\text{Sin } e}$,

und die Zeitgleichung ist

$$dt = \tfrac{1}{15} (\alpha' - L') \text{ oder}$$

$$dt = \tfrac{1}{15} \left[(l - L) + \rho + 7 . 18 \text{ Sin} ☊ ☾ \left(\frac{1}{\text{Sin } e} - \frac{1}{\text{tg } e}\right)\right]$$

Setzt man also $e = 23^\circ 28'$ so ist

$$dt = \tfrac{1}{15}(l - L + \rho) + 0''099 \text{ Sin} ☊ ☾ \;\ldots\; (I)$$

und zu diesem Ausdrucke muss man noch die Störungen addiren, welche die Erde in ihrer Länge von den Planeten leidet. Wir wollen die Summe dieser Störungen, auf Zeit gebracht, durch $\frac{1}{15}$ P bezeichnen.

Ist aber ε das Verhältniss der Excentricität zur halben grossen Axe der Erdbahn und $\lambda = \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}$ so ist nach §. 13

$$\begin{aligned} l - L = \; & 2 \varepsilon \text{ Sin } (l - p) \\ & - 2 \lambda \left(\varepsilon - \tfrac{1}{2} \lambda\right) \text{ Sin } 2 (l - p) \\ & + 2 \lambda^2 \left(\varepsilon - \tfrac{2}{3} \lambda\right) \text{ Sin } 3 (l - p) \\ & - 2 \lambda^3 \left(\varepsilon - \tfrac{3}{4} \lambda\right) \text{ Sin } 4 (l - p) \end{aligned}$$

Weiter ist, wenn h die Tangente der halben Schiefe der Ekliptik bezeichnet, nach §. 16

$$\rho = - h^2 \text{ Sin } 2\, l + \frac{h^4}{2} \text{ Sin } 4\, l - \frac{h^6}{3} \text{ Sin } 6\, l$$

also wird die Gleichung I

$$\begin{aligned} dt = \; & \frac{2 \varepsilon}{15} \text{ Sin } (l - p) && - \frac{h^2}{15} \text{ Sin } 2 l + 0.099 \text{ Sin} ☊ ☾ + \tfrac{1}{15} P \\ & - \frac{2 \lambda}{15} \left(\varepsilon - \tfrac{1}{2} \lambda\right) \text{ Sin } 2 (l - p) && - \frac{h^4}{30} \text{ Sin } 4 l \\ & + \frac{2 \lambda^2}{15} \left(\varepsilon - \tfrac{2}{3} \lambda\right) \text{ Sin } 3 (l - p) && - \frac{h^6}{45} \text{ Sin } 6 l \end{aligned}$$

für 1800.00 sey $\varepsilon = 0.016791$

$p = 279^\circ 29' 33''$

$e = 23\; 27\; 57$ also $\log \lambda = 7.9240772$

so ist

$$\begin{aligned} dt = \; & 461.''786 \text{ Sin } (l - p) - 593.146 \text{ Sin } 2 l \\ & \qquad + 0.099 \text{ Sin} ☊ ☾ + \tfrac{1}{15} P \\ & - 2.907 \text{ Sin } 2 (l - p) + 12.793 \text{ Sin } 4 l \\ & + 0.022 \text{ Sin } 3 (l - p) - 0.368 \text{ Sin } 6 l \end{aligned}$$

und was die Grösse l betrifft, so findet man sie aus der bekannten Grösse L durch die Gleichung §. 14

$$\begin{aligned} l = L &+ 6926''54 \text{ Sin } (L - p) \\ &+ 72.\ 68 \text{ Sin } 2\ (L - p) \\ &+ 1.\ 06 \text{ Sin } 3\ (L - p) \\ &+ 0.\ 02 \text{ Sin } 4\ (L - p) \end{aligned}$$

Man bemerkt von selbst, dass man mittels der letzten Reihe auch den gegebenen Werth von d t durch blosse Functionen von L ausdrücken kann. Nimmt man mit Piazzi an

für 1800. 00	für 1900. 00
$e = 23^\circ\ 27'\ 56''7$	$e = 23\ 27\ \ 4.\ 6$
$p = 279\ 29\ \ \ 0.\ 0$	$p = 281\ 12\ 36.\ 0$
$2\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{4} = 1^\circ\ 55'\ 26''67$	$2\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{4} = 1^\circ\ 55'\ 7''84$

so findet man für 1800

$$\begin{aligned} d\,t = &\ 79.''36 \text{ Sin } L + 435.8 \text{ Cos } L \\ &- 597.08 \text{ Sin } 2L + 1.6. \text{ Cos } 2L \\ &- 3.42 \text{ Sin } 3L - 18.8 \text{ Cos } 3L \\ &+ 13.25 \text{ Sin } 4L - 0.2 \text{ Cos } 4L \\ &+ 0.15 \text{ Sin } 5L + 0.9 \text{ Cos } 5L \\ &- 0.40 \text{ Sin } 6L + 0.1 \text{ Sin } ☊\,☾ \\ &\qquad - 0.1 \text{ Sin } (2L + ☊\,☾) \\ &\qquad + \tfrac{1}{15} P \end{aligned}$$

für 1900

$$\begin{aligned} d\,t = &\ 93''4 \text{ Sin } L + 432.3 \text{ Cos } L \\ &- 596.2 \text{ Sin } 2L + 1.8 \text{ Cos } 2L \\ &- 4.0 \text{ Sin } 3L - 18.6 \text{ Cos } 3L \\ &+ 13.2 \text{ Sin } 4L - 0.2 \text{ Cos } 4L \\ &- 0.2 \text{ Sin } 5L + 0.9 \text{ Cos } 5L \\ &- 0.4 \text{ Sin } 6L + 0.1 \text{ Sin } ☊\,☾ \\ &\qquad - 0.1 \text{ Sin } (2L + ☊\,☾) \\ &\qquad + \tfrac{1}{15} P \end{aligned}$$

Die Bestimmung dieser Störungen, deren Summe wir hier durch P bezeichnet haben, gehört der höheren Mechanik oder der physischen Astronomie an, welche der Gegenstand des dritten Buches seyn wird. Wenn die Planeten bloss der Wirkung der Sonne gehorchten, so würden sie um den Mittelpunct der Sonne, als Brennpunct, rein elliptische Bahnen beschreiben; da sie aber auch einer auf den andern und auf die Sonne selbst zurückwirken, so entstehen daraus in ihren elliptischen Bewegungen Störungen, Perturbationen, welche auch durch die Beobachtungen deutlich angezeigt werden, und die man zu bestimmen wissen muss, wenn man genaue Tafeln der Bewegungen der Planeten entwerfen will, eine Aufgabe, die die Kräfte unserer Analysis übersteigen würde, wenn nicht glücklicher Weise die geringe Masse aller Planeten gegen jene der Sonne, ihre geringen Neigungen und ihre gegen die Einheit nur wenig beträchtlichen Excentricitäten Mittel darböten, jene Schwierigkeiten zu besiegen, und jenes schwere Problem wenigstens annähernd aufzulösen. Dieser Störungen gibt es zwey verschiedene Gattungen. Die ersten ändern die Elemente der Bahnen selbst, und da diese Störungen äusserst langsam vor sich gehen, und erst nach mehrern Jahrhunderten periodisch wiederkehren, so hat man sie säculäre Störungen genannt. Die zweyten aber hängen von den gegenseitigen Stellungen der Planeten sowohl unter sich, als auch in Beziehung auf ihre Knoten und Perihelien ab, und da diese Stellungen im Allgemeinen nach kurzen Perioden wiederkehren, so hat man ihre Wirkungen vorzugsweise periodische Störungen genannt. — Unter allen Elementen der elliptischen Bahnen der Planeten ist allein die grosse Axe derselben, also auch die mittlere Bewegung der Planeten, unveränderlich, während alle übrigen, Excentricität, Neigung, Länge der Perihelien und der Knoten beständigen Änderungen unterworfen sind. Für die Erdbahn z. B. ist jetzt die jährliche Änderung der Länge des Periheliums

$$+ 11.''8$$

und die jährliche Abnahme der Neigung ihrer Bahn gegen den Äquator

$$0.''52,$$

woraus man mit Hülfe der Analysis zeigen kann, dass das Perigäum der Sonne mit dem Frühlingsnachtgleichenpunct gegen das Jahr 4090 vor Ch. G. zusammen fiel, eine Epoche, in welche die meisten unserer Chronologen die Schöpfung der Erde setzen. — Die periodischen Störungen werden sich am bequemsten durch die Sinus und Cosinus der Winkel, von welchen sie abhängen, darstellen lassen, weil diese trigonometrischen Functionen ebenfalls nach jedem ganzen Umkreise, um welche ihre Winkel vermehrt werden, periodisch wieder kommen. Für die Bewegung der Erde sind die vorzüglichsten dieser periodischen Störungen folgende, in welchen

☾ und ☉

die geocentrische Länge des Monds und der Sonne, und

♀, ♁, ♂ …

die heliocentrische Länge der Venus, der Erde, des Mars … bezeichnet.

Um nähmlich die wahre Länge der Sonne (Länge der Erde $+ 180^\circ$) zu erhalten, addirt man zur mittlern Länge derselben für die gegebene Epoche die elliptische Gleichung der Bahn $v - m$ §. 14, und überdiess die Störungen der Länge

7."5 Sin (☾ — ☉)
5. 7 Sin (♀ — ♁) — 6. 4 Sin (2 ♀ — 2 ♁) + 2. 9 Cos (2 ♀ — 3 ♁)
+ 1. 9 Cos (3 ♀ — 4 ♁)
— 2. 5 Sin (2 ♁ — 2 ♂) + 1. 5 Sin (2 ♂ — ♁)
+ 1. 5 Cos (2 ♂ — ♁)
— 7. 1 Sin (♁ — ♃) + 2. 7 Sin (2 ♁ — 2 ♃) — 2. 5 Sin ♃

und um ihre wahre Entfernung von der Erde zu erhalten, addirt man zu der elliptischen Entfernung $\frac{r}{a}$ §. 12 die Störungen

0. 000037 Cos (☾ — ☉)
— 0. 000006 Cos (♀ — ♁) + 0. 000018 Cos (2 ♀ — 2 ♁)
+ 0. 000003 Cos (3 ♀ — 3 ♁)
+ 0. 000016 Cos (♁ — ♃) — 0. 000009 Cos (2 ♁ — 2 ♃)

ZWEYTES KAPITEL.

Heliocentrischer und geocentrischer Ort der Planeten und Kometen.

§. 1.

Wir haben im Vorhergehenden gesehen, wie man für jede gegebene Zeit die wahre, aus dem Mittelpuncte der Sonne gesehene Länge und Breite, und die Entfernung des Planeten von diesem Mittelpuncte der Sonne finden könne. Es ist nun noch die Frage zu beantworten übrig, wie man aus der Lage des Planeten gegen die Sonne die Lage desselben gegen die Erde, und umgekehrt, ableiten könne; eine Untersuchung, die für uns desto wichtiger ist, da wir jene Himmelskörper nur von dem Standpuncte der Erde aus sehen, und da die eigene Bewegung der Erde sehr beträchtliche, wenn auch nur scheinbare Störungen in den Bewegungen der Planeten verursacht, welche völlig verschwinden, wenn man die aus dem Mittelpuncte der Erde beobachteten oder die geocentrischen Orte des Planeten auf die aus dem Mittelpunct der Sonne gesehenen, oder auf die heliocentrischen Orte desselben bringt.

Es sey im Folgenden

α δ und λ β die geocentrische Rectascension, Declination und die geocentrische Länge und Breite des Planeten.

ρ die Entfernung des Planeten von der Erde und $\rho' = \rho \operatorname{Cos} \beta$, die Projection von ρ auf die Ebene der Ekliptik.

Sey eben so l b r die heliocentrische Länge, die heliocentrische Breite des Planeten und dessen Entfernung von der Sonne, und $r' = r \operatorname{Cos} b$

Endlich L B R die heliocentrische Länge, die heliocentrische Breite der Erde und deren Entfernung von der Sonne, und $R' = R \operatorname{Cos} B$.

Überdiess bezeichne k die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn des Planeten in der Ekliptik, n die Neigung dieser Bahn gegen die Ekliptik; v die heliocentrische Länge des Planeten in seiner Bahn, und $u = v - k$ das Argument der Breite des Planeten; γ der Winkel der Commutation, oder der Winkel der Linie $r'R'$ an der Sonne; η die Elongation, oder der Winkel der $\rho'R'$ an der Erde, und τ die jährliche Parallaxe, oder der Winkel der $r'\rho'$ an dem Planeten.

§. 2.

Der heliocentrische Ort des Planeten sey gegeben, so wie der heliocentrische Ort der Erde, man suche die geocentrische Rectascension und Declination des Planeten.

Wird die Lage der Erde gegen die Sonne durch die drey rechtwinkligten Coordinaten $X' Y' Z'$ bestimmt, wo X' in der Linie der Nachtgleichen und $X' Y'$ in der Ebene der Ekliptik liegt, so hat man

$$\begin{aligned} X' &= R \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} L \\ Y' &= R \operatorname{Cos} B \operatorname{Sin} L \\ Z' &= R \operatorname{Sin} B \end{aligned}$$

Sind aber $X\ Y\ Z$ die analogen Coordinaten der Erde, und $X\ Y$ in der Ebene des Aequators, so hat man, wenn e die Schiefe der Ekliptik bezeichnet

$$\begin{aligned} X &= X' \\ Y &= Y' \operatorname{Cos} e - Z' \operatorname{Sin} e \\ Z &= Z' \operatorname{Cos} e + Y' \operatorname{Sin} e \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned} X &= R \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} L \\ Y &= R \operatorname{Cos} B \operatorname{Sin} L \operatorname{Cos} e - R \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} e \\ Z &= R \operatorname{Cos} B \operatorname{Sin} L \operatorname{Sin} e + R \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos} e \end{aligned}$$

wofür man, da B immer sehr klein ist, in den meisten Fällen setzen kann

$$\begin{aligned} X &= R \operatorname{Cos} L \\ Y &= R \operatorname{Sin} L \operatorname{Cos} e \\ Z &= R \operatorname{Sin} L \operatorname{Sin} e \end{aligned}$$

und diese Coordinaten $X\ Y\ Z$ gehören eigentlich für den Punkt der Oberfläche der Erde, aus welchen der Beobachter die Länge der Sonne $S = L - 180°$ gesehen hat. Sind daher $\xi\ v\ z$ die analogen Coordinaten, welche den Ort des Beobachters auf der Oberfläche der Erde gegen den Mittelpunct derselben bestimmen, und bezeichnet man durch φ die geocentrische Polhöhe des Beobachters, durch M die gerade Aufsteigung des Zeniths, und endlich durch p die Entfernung des Beobachters vom Mittelpuncte der Erde, so ist

$$\xi = p \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} M$$
$$\upsilon = p \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} M$$
$$\zeta = p \operatorname{Sin} \varphi$$

und um die Lage des Mittelpuncts der Erde gegen die Sonne durch die drey Coordinaten X Y Z zu bestimmen; wird man den vorhergehenden Werthen von XYZ noch diese Werthe von $\xi\,\upsilon\,\zeta$ hinzufügen, d. h. man wird haben

$$X = R (\operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} L) + p \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} M$$
$$Y = R (\operatorname{Cos} B \operatorname{Sin} L \operatorname{Cos} e - \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} e) + p \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} M$$
$$Z = R (\operatorname{Cos} B \operatorname{Sin} L \operatorname{Sin} e + \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos} e) + p \operatorname{Sin} \varphi$$

I. Im Vorhergehenden haben wir die Werthe der Coordinaten XYZ der Erde gegen die Sonne in Beziehung auf den Aequator gefunden. Hätte man nun auch die ähnlichen Coordinaten x y z, welche die Lage des Planeten gegen die Sonne ebenfalls in Beziehung auf den Aequator bestimmen, so würde man daraus sofort die gesuchten Grössen $\alpha\ \delta$ und ρ durch folgende Gleichungen finden

$$x - X = \rho \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} \alpha$$
$$y - Y = \rho \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Sin} \alpha$$
$$z - Z = \rho \operatorname{Sin} \delta$$

II. Um die Grössen xyz zu finden, gibt es mehrere Wege. Es werde Anfangs die Lage des Planeten gegen die Sonne durch die drey Coordinaten $x''\ y''\ z''$ bestimmt, wovon x'' in der Linie der Knoten, und $x''\ y''$ in der Ekliptik liegen, so ist offenbar

$$x'' = r \operatorname{Cos} u$$
$$y'' = r \operatorname{Sin} u \operatorname{Cos} n$$
$$z'' = r \operatorname{Sin} u \operatorname{Sin} n$$

oder auch, wenn l und b gegeben ist

$$x'' = r \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} (l - k)$$
$$y'' = r \operatorname{Cos} b \operatorname{Sin} (l - k) = r \operatorname{Sin} b \operatorname{Cotg} n$$
$$z'' = r \operatorname{Sin} b$$

Gehen aber diese Coordinaten in andere $x'\ y'\ z'$ über, wovon x' in der Linie der Nachtgleichen, und $x'\ y'$ in der Ekliptick liegen, so ist

$$x' = x'' \operatorname{Cos} k - y'' \operatorname{Sin} k$$
$$y' = x'' \operatorname{Sin} k + y'' \operatorname{Cos} k$$
$$z' = z''$$

und wenn man endlich diese Coordinaten mit den ersten x y z vergleicht, wovon x in der Linie der Nachtgleichen, und x y im Aequator liegen, so hat man

$$x = x'$$
$$y = y' \operatorname{Cos} e - z' \operatorname{Sin} e$$
$$z = y' \operatorname{Sin} e + z' \operatorname{Cos} e$$

Nimmt man alles Vorhergehende zusammen, so erhält man für die Coordinate x y z die Ausdrücke

$$x = r\,(\mathrm{Cos}\,u\,\mathrm{Cos}\,k - \mathrm{Sin}\,u\,\mathrm{Sin}\,k\,\mathrm{Cos}\,n)$$

$$y = r\,(\mathrm{Cos}\,u\,\mathrm{Sin}\,k\,\mathrm{Cos}\,e + \mathrm{Sin}\,u\,\mathrm{Cos}\,k\,\mathrm{Cos}\,n\,\mathrm{Cos}\,e - \mathrm{Sin}\,u\,\mathrm{Sin}\,n\,\mathrm{Sin}\,e)$$

$$z = r\,(\mathrm{Cos}\,u\,\mathrm{Sin}\,k\,\mathrm{Sin}\,e + \mathrm{Sin}\,u\,\mathrm{Cos}\,k\,\mathrm{Cos}\,n\,\mathrm{Sin}\,e + \mathrm{Sin}\,u\,\mathrm{Sin}\,n\,\mathrm{Cos}\,e)$$

Um aber diese Ausdrücke zur Rechnung bequemer zu machen, sey

$$\mathrm{tg}\,A = -\frac{\mathrm{Cotg}\,k}{\mathrm{Cos}\,n},\quad \mathrm{Sin}\,a = \frac{\mathrm{Cos}\,k}{\mathrm{Sin}\,a}\ \text{und}\ \mathrm{tg}\,\psi = \frac{\mathrm{tg}\,n}{\mathrm{Cos}\,k}.$$

$$\mathrm{tg}\,B = \frac{\mathrm{Sin}\,k\,\mathrm{Cos}\,e\,\mathrm{Sin}\,\psi}{\mathrm{Sin}\,n\,\mathrm{Cos}\,(\psi + e)}\qquad \mathrm{Sin}\,b = \frac{\mathrm{Cos}\,e\,\mathrm{Sin}\,k}{\mathrm{Sin}\,B}$$

$$\mathrm{tg}\,C = \frac{\mathrm{Sin}\,k\,\mathrm{Sin}\,e\,\mathrm{Sin}\,\psi}{\mathrm{Sin}\,n\,\mathrm{Sin}\,(\psi + e)}\qquad \mathrm{Sin}\,c = \frac{\mathrm{Sin}\,e\,\mathrm{Sin}\,k}{\mathrm{Sin}\,C}$$

so erhält man die sehr einfachen Ausdrücke

$$x = r\,\mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,(A + u)$$
$$y = r\,\mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Sin}\,(B + u)$$
$$z = r\,\mathrm{Sin}\,c\,\mathrm{Sin}\,(C + u)$$

und man wird sich leicht überzeugen, dass a b c resp. die Neigungen der Ebene der Bahn des Planeten gegen die coordinirte Ebene der yz, xz und xy, und dass A B C die Winkel sind, welche die Knotenlinie der Bahn in der Ekliptick mit den Knotenlinien der Bahn in denselben coordinirten Ebenen yz, xz und xy bildet, wo x y die Ebene des Aequators; xz die des Kolurs der Nachtgleichen und yz die des Kolurs der Solstitien ist.

III. Wollte man ähnliche Ausdrücke auch für die Coordinaten der Erde haben, so wäre

$$X = R\,\mathrm{Sin}\,a'\,\mathrm{Sin}\,(A' + U)$$
$$Y = R\,\mathrm{Sin}\,b'\,\mathrm{Sin}\,(B' + U)$$
$$Z = R\,\mathrm{Sin}\,c'\,\mathrm{Sin}\,(C' + U)$$

und man hätte

$$A' = a' = 90$$
$$B' = C' = 0$$
$$b' = 90 - e$$
$$c' = e$$

also auch

$$X = R\,\mathrm{Cos}\,U$$
$$Y = R\,\mathrm{Cos}\,e\,\mathrm{Sin}\,U$$
$$Z = R\,\mathrm{Sin}\,e\,\mathrm{Sin}\,U$$

IV. Zwischen den Grössen A.a.. haben mehrere merkwürdige Relationen Statt, von denen die vorzüglichsten sind:

$$\begin{aligned}
&\text{Sin}\,(A - B)\ \text{Sin a Sin b} = \text{Cos c}\\
&\text{Sin}\,(B - C)\ \text{Sin b Sin c} = \text{Cos a}\\
&\text{Sin}\,(C - A)\ \text{Sin a Sin c} = \text{Cos b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Sin}^2\text{a Sin}\,(A - B)\ \text{Sin}\,(A - C) = \text{Cos}\,(B - C)\\
&\text{Sin}^2\text{b Sin}\,(B - C)\ \text{Sin}\,(B - A) = \text{Cos}\,(A - C)\\
&\text{Sin}^2\text{c Sin}\,(C - A)\ \text{Sin}\,(C - B) = \text{Cos}\,(A - B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Cotg}\,(A - B)\ \text{Cotg}\,(C - A) = \text{Cos}^2\text{a}\\
&\text{Cotg}\,(B - C)\ \text{Cotg}\,(A - B) = \text{Cos}^2\text{b}\\
&\text{Cotg}\,(C - A)\ \text{Cotg}\,(B - C) = \text{Cos}^2\text{c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Cos}\,(A - B) + \text{Cotg a Cotg b} = 0\\
&\text{Cos}\,(B - C) + \text{Cotg b Cotg c} = 0\\
&\text{Cos}\,(C - A) + \text{Cotg c Cotg a} = 0
\end{aligned}$$

von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen wird, wenn man bemerkt, dass die in der Einleitung zum zweyten Theile gewählten Zeichen $a''\ a'\ a$, $g''\ g'\ g$; $\alpha\ A'\ B$ und S hier in derselben Ordnung a b c, A B C, e n k und Null sind. M.s. monatl. Corresp. 1804. May. Berl. Jahrb. 1813. p. 104 und 1818 p. 267.

V. Die Grössen A, a.. sind säculären Veränderungen unterworfen, weil die Grössen n k e, von welchen sie abhängen, ähnliche Änderungen leiden. Da aber diese Änderungen nur gering sind, und mit der Zeit nahe gleichförmig fortgehen, so ist es am bequemsten die mittlern Werthe von k n e für einige nicht sehr entfernte Jahre zu wählen, und daraus für dieselben Epochen die Werthe der A, a.. in Tafeln zu bringen. Man erhält so ebenfalls die mittlern Werthe von Aa.. und also auf die mittlern Rectascensionen und Declinationen, $\alpha\ \delta$, welche man dann durch die bekannten Correctionen der Nutation etc. leicht auf die wahren α und δ bringen wird.

Um das Vorhergehende durch ein Beyspiel deutlich zu machen, ist für Merkur im Anfange des Jahres 1800,

k =	45°	56′	48″	jährl. tropische Änderung	+ 43″.30
n =	7	0	8.9	. . . .	+ 0″.0178
e =	23	27	57.0	. . . .	− 0″.52

Daher ist für den Anfang des Jahres

	1800		1810		1820
A =	135° 43′ 56″.2	...	135° 51′ 9″2	...	135° 58′ 22″4
B =	48 26 19.3	...	48 33 47.4	...	48 41 15.5
C =	36 30 28.5	...	36 36 18.9	...	36 42 9.5

log Sin a = 9.9983267 ... 9.9983197 ... 9.9983129
log Sin b = 9.9450091 ... 9.9450591 ... 9.9451093
log Sin c = 9.6821782 ... 9.6820388 ... 9.6818994

Man suche also z. B. für 1808 den 8. October $11^h\ 45'\ 41''$ mittlerer Zeit Paris die wahre geocentrische Rectascension und Declination Merkurs. Für diese Zeit ist aus den Tafeln

$$\text{Arg. d. Breite } u = 212^\circ\ 13'\ 20''9$$
$$\log \text{Rad Vec.} = \log r = 9.6687470$$
$$k = 46^\circ\ 3'\ 7''7$$
$$n = 7\ \ 0\ \ 9.1$$
$$e = 23\ \ 27\ \ 52.4$$

Für dieselbe Zeit ist noch

Länge der Erde $L = 15^\circ\ 59'\ 35''9$

$\log R = 9.9990770$, also ist

$A = 135^\circ\ 50'\ 16''1$	$\log \text{Sin } a = 9.9983206$
$B = 48\ \ 32\ \ 52.4$	$\log \text{Sin } b = 9.9450529$
$C = 36\ \ 35\ \ 35.9$	$\log \text{Sin } c = 9.6820559$

Man hat also

$X = 0.9592530$	$x = -0.0961018$
$Y = 0.2522046$	$y = -0.4056417$
$Z = 0.1094761$	$z = -0.2091323$

und daraus folgt

mit: geocentrischer Rectascension ☿ $\alpha = 211^\circ\ 56'\ 13''2$
mit: Declination . . . . $\delta = -14^\circ\ 22'\ 12''1$
$\rho = 1.2837618$

§. 3.

Die vorhergehende Methode ist besonders dann sehr anwendbar, wenn man mehrere geocentrische Orte auf einmahl zu suchen hat, wie diess bey der Verfertigung der Ephemeriden der Fall ist, wo die Werthe von A, a .. durch ganze Monathe dieselben bleiben, da man die Endresultate α δ nur in Minuten fordert. Man kann selbst die Berechnung der wahren Anomalie und des Radius Vectors, und dadurch bey diesen oft zu wiederhohlenden Entwiklungen viel Zeit und Mühe ersparen.

Zu diesem Zwecke wollen wir durch f die halbe grosse Axe der Bahn, und durch v, r, $f\varepsilon$ die wahre Anomalie, den Radius Vector und die Excentricität bezeichnen, so ist, wenn e die excentrische Anomalie heisst,

$$r \text{ Sin } v = f\ (1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \text{ Sin } e$$
$$r \text{ Cos } v = f\ (\text{Cos } e - \varepsilon)$$

Ist ferner h die Elongation des Periheliums vom aufsteigenden Knoten, so ist das Argument der Breite $u = h + v$, und man hat, wenn x, a, A.. die Bezeichnung des vorhergehenden §. haben,

$$x = r \sin a \sin (A + h + v)$$
$$y = r \sin b \sin (B + h + v)$$
$$z = r \sin c \sin (C + h + v)$$

Aus den ersten dieser Gleichungen erhält man nach einigen Reductionen

$$x = f \sin a \sin (A + h) [\cos e - \varepsilon + (1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \sin e \operatorname{Cotg} (A + h)]$$

Ist daher $\operatorname{Cotg} M = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cdot \operatorname{Cotg} (A + h)$

$$m = f \frac{\sin a \sin (A + h)}{\sin M}$$

$$\mu = - m \varepsilon \sin M$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{so ist } x = m \sin (M + e) + \mu \\ \quad \text{und eben so} \\ y = n \sin (N + e) + \nu \\ z = p \sin (P + e) + \pi \end{array}\right\}$$

vorausgesetzt, dass man hat

$$\operatorname{tg} N = \frac{\operatorname{tg} (B + h)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \qquad n = f \frac{\sin b \sin (B + h)}{\sin N} \qquad \nu = - n \varepsilon \sin N$$

$$\operatorname{tg} P = \frac{\operatorname{tg} (C + h)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \qquad p = f \frac{\sin c \sin (C + h)}{\sin P} \qquad \pi = - p \varepsilon \sin P$$

und diese Ausdrücke setzen weder r noch v, sondern bloss die excentrische Anomalie e als gegeben voraus, daher sie wegen der vielen constanten Grössen, vorzüglich dann sehr anwendbar sind, wenn man eine grosse Reihe geocentrischer Rectascensionen und Declinationen, oder wenn man Ephemeriden eines Planeten oder Kometen zur Anleitung künftiger Beobachtungen berechnet, zu welchem Zwecke es hinreicht, die Grössen α, δ nur in Minuten zu erhalten.

Um diess durch ein Beyspiel zu erläutern, wollen wir folgende Elemente der Pallas voraussetzen,

Epoche. Merid. v. Göttingen 1808, . . 252° 32′ 28″5
log f = 0. 4423149
ε = 0. 2450198

Perihelium 1803 ... 121° 3′ 11″4 jährl. Änd. + 106″.2
☊ 1803 ... 172 28 56.9 . . . . . . — 7.2
Neigung d. Bahn 34° 37′ 41″0 . . . . . . + 0.8

Tropische Beweg. in 1 Tag 0°.21394844

Ist $2^h\ 37'\ 52''$ die Meridiandifferenz von Göttingen und Kasan, so ist die Reduction der Epoche auf den Meridian von Kasan

$$0^\circ.023454$$

also Epoche 1812.00 Kasan . . $205^\circ.096468$

für 1812, ist noch Schiefe der Ekliptik $23^\circ\ 27'\ 51''0$.

Neigung 34 37 44

☊ . . . 172 27 52

Also ist für den Anfang des Jahrs 1812

A = 263°	47′	16″6		log Sin a	= 9.9987906
B = 172	57	47.2		log Sin b	= 9.9920900
C = 14	53	4.5		log Sin c	= 9.3080963
M = 213°	27′	10″4		log m	= 0.4316594
N = 121	1	41.8		log n	= 0.4307508
P = 142	53	21.0		log p	= 9.7417654.

$$\mu = 0.3649303$$
$$\nu = -\ 0.5660940$$
$$\pi = 0.0815722$$

Eben so erhält man für den Anfang des Jahrs 1822

M = 213°	45′	18″2	log m	= 0.4317175
N = 121	19	17.8	log n	= 0.4306919
P = 143	14	18.4	log p	= 9.7419200.

$$\mu = 0.3678873$$
$$\nu = -\ 0.5642668$$
$$\pi = 0.0809422$$

Sucht man daraus die geocentrische Rectascension und Declination für den May des Jahres 1811, so hat man nach der Ordnung für die mittlere Mitternacht Kasans 1811 April 30, May 8, May 16, May 24 und Junius 1 folgende Werthe

mitt. Anom. ⚴ von Perih.	31°.2728	32.9837	34°.6946	36°.4055	38°.1164
excentr. Anom.	40.3646	42.4605	44.5412	46.6064	48.6556
Läng. ♁ +20″ =	219°.34	227 18	235 1	242 43	250 23
log R	0.00353	0.00435	0.00510	0.00574	0.00628
x	— 2.2298	—2.2556	—2.2778	—2.2964	—2.3114
y	0.2950	0.2009	0.1065	0.0120	—0.0826
z	0.1127	0.1327	0.1527	0.1724	0.1918
X	— 0.7772	0.6850	0.5801	0.4645	0.3406
Y	— 0.5891	0.6809	0.7603	0.8261	0.8767
Z	— 0.2557	0.2956	0.3300	0.3586	0.3805
α	148° 41′	150 41	152 57	155 25	158 3
δ +	12° 14′	13 23	14 13	14 46	15 5
ρ	1.74	1.85	1.96	2.08	2.20

Auf eine ähnliche Art könnte man auch die Coordinaten der Erde

$$X \; Y \; Z$$

durch neue Constanten ausdrücken; aber da diese Coordinaten schon durch das Vorhergehende einfach genug für die Ausübung dargestellt sind, so halte ich mich bey dieser Entwicklung nicht weiter auf.

§. 4.

Die Grössen x y z lassen sich aber noch auf eine andere merkwürdige Weise ausdrücken, die eine nähere Betrachtung verdient.

Führt man nähmlich drey neue Hülfsgrössen

$$N, K \text{ und } O$$

ein, so dass man hat

$$\begin{aligned} \operatorname{Cos} N &= \operatorname{Cos} e \operatorname{Cos} n - \operatorname{Sin} e \operatorname{Sin} n \operatorname{Cos} k \\ \operatorname{Cotg} K \operatorname{Sin} k &= \operatorname{Cotg} n \operatorname{Sin} e + \operatorname{Cos} e \operatorname{Cos} k \\ \operatorname{Cotg} O \operatorname{Sin} k &= \operatorname{Cotg} e \operatorname{Sin} n + \operatorname{Cos} n \operatorname{Cos} k \end{aligned}$$

wo e die Schiefe der Ekliptik ist, und setzt man

$$O = u - U$$

so gehen die Gleichungen §. 2. N. II. in folgende über:

$$x = r(\text{Cos } U \text{ Cos } K - \text{Sin } U \text{ Sin } K \text{ Cos } N)$$
$$y = r(\text{Cos } U \text{ Sin } K + \text{Sin } U \text{ Cos } K \text{ Cos } N)$$
$$z = r \text{ Sin } U \text{ Sin } N$$

und man sieht, dass man aus jenen diese erhält, wenn man

$$n, k, u \text{ in } N, K, U$$

verwandelt, und e Null setzt. Nimmt man also wie dort an

$$\text{tg } A = -\frac{\text{Cotg } K}{\text{Cos } N}$$

$$\text{tg } B = \frac{\text{tg } K}{\text{Cos } N}$$

$$\text{tg } C = 0$$

$$\text{Sin } a = \frac{\text{Cos } K}{\text{Sin } A}$$

$$\text{Sin } b = \frac{\text{Sin } K}{\text{Sin } B}$$

$$\text{Sin } c = \text{Sin } N$$

oder

$$\text{Cos } a = \text{Sin } N \text{ Sin } K$$
$$\text{Cos } b = -\text{Sin } N \text{ Cos } K$$
$$\text{Cos } c = \text{Cos } N$$

so ist wieder

$$x = r \text{ Sin } a \text{ Sin } (A + U)$$
$$y = r \text{ Sin } b \text{ Sin } (B + U)$$
$$z = r \text{ Sin } c \text{ Sin } (C + U)$$

I. Durch das Vorhergehende ist also die Bestimmung der Coordinaten $x\, y\, z$ auf drey Grössen $N\; K\; O$ gebracht worden, und man sieht leicht, dass N die Neigung der Bahn gegen den Aequator, K der Winkel der Knotenlinie der Bahn im Aequator mit der Linie der Nachtgleichen, oder die Rectascension des aufsteigenden Knotens der Bahn im Aequator, und endlich O der Winkel der Knotenlinie der Bahn im Aequator mit der Knotenlinie der Bahn in der Ekliptik, d. h. die Entfernung beyder Knotenlinien ist, eine Bemerkung, aus welcher man sich die §. 2 IV. gegebene Bedeutung der Grössen $a\; A \ldots$ leicht erklären wird.

Da also in dem sphärischen Dreyecke, welches von den Ebenen des Aequators, der Ekliptik und der Bahn gebildet wird, die Seiten

$$k, O, K$$

und die ihnen in derselben Ordnung gegenüberstehenden Winkel

$$180 - N, \; e \text{ und } n$$

sind, so wird man die drey ersten für

$$\text{Cos } N, \text{ Cotg } K, \text{ Cotg } O$$

im Anfange dieses §. gegebenen Ausdrücke auch durch die sphärische Trigonometrie ableiten, durch welche man auch, bequemer zur Rechnung, findet

$$\text{Sin}\frac{N}{2}\,\text{Sin}\frac{O-K}{2} = \text{Sin}\frac{k}{2}\,\text{Sin}\frac{e-n}{2}$$

$$\text{Sin}\frac{N}{2}\,\text{Cos}\frac{O-K}{2} = \text{Cos}\frac{k}{2}\,\text{Sin}\frac{e+n}{2}$$

$$\text{Cos}\frac{N}{2}\,\text{Sin}\frac{O+K}{2} = \text{Sin}\frac{k}{2}\,\text{Cos}\frac{e-n}{2}$$

$$\text{Cos}\frac{N}{2}\,\text{Cos}\frac{O+K}{2} = \text{Cos}\frac{k}{2}\,\text{Cos}\frac{e+n}{2}.$$

Da endlich die Grössen

$$e \; n \; k$$

säculären Änderungen unterworfen sind, so unterliegen auch die Grössen

$$N \; K \; O$$

ähnlichen Änderungen, die man leicht durch folgende Ausdrücke findet

$$d\,N = de \text{ Cos } K + dn \text{ Cos } O - dk \text{ Sin } O \text{ Sin } n$$

$$d\,K = - de \text{ Cotg } N \text{ Sin } K + dn\frac{\text{Sin } O}{\text{Sin } N} + dk \,.\, \frac{\text{Cos } O \text{ Sin } n}{\text{Sin } N}$$

$$d\,O = de\frac{\text{Sin } K}{\text{Sin } N} - dn \text{ Cotg } N \text{ Sin } O + dk \,.\, \frac{\text{Cos } K \text{ Sin } e}{\text{Sin } N}$$

So erhält man aus dem §. 2. V. gegebenen Werthen von

$$n \; k \; e.$$

für Merkur im Anfange der Jahre 1800, 1810, 1820

	1800		1810		1820
K =	10° 29′ 40″.6	..	10° 31′ 10″2	...	10° 32′ 39″5
O =	143 29 31.5	..	143 23 41.0	...	143 17 50.5
N =	28 45 11.4	..	28 44 35.5	...	28 43 58.7

und für das in §. 2. gegebene Beyspiel für Merkur 1808 Oct. 8 ist hier

$$K = 10° \; 30' \; 59''2$$
$$O = 143° \; 24' \; 24''1$$
$$N = 28° \; 44' \; 39''9$$

woraus man sofort erhält

$$x = -0.096102$$
$$y = -0.405642$$
$$z = -0.209133 \text{ wie zuvor.}$$

II. Die vorhergehenden Betrachtungen bahnen uns einen neuen Weg zu einer sehr bequemen Auflösung unsers Problems. Unsere Planetentafeln sind so eingerichtet, dass man aus ihnen für jede gegebene Zeit das Argument der Breite u, und den Radius Vector r finden kann. Mit der bekannten Neigung n der Bahn gegen die Ekliptik und der Länge k des aufsteigenden Knotens der Bahn in der Ekliptik findet man dann aus zwey angehängten Tafeln, deren Argument u ist, die heliocentrische Breite b, und die Reduction auf die Ekliptik c, welche Grössen man auch durch folgende Gleichungen bestimmen kann

$$\text{Sin } b = \text{Sin } n \text{ Sin } u$$
$$\text{Sin } c = \text{tg } \frac{n}{2} \text{ tg } b \text{ Cos } u$$

woraus dann die heliocentrische Länge

$$l = u + k - c$$

folgt. Kennt man aber die Grössen

$$r, l, b$$

so sind die rechtwinkl. Coordinaten, welche die Lage des Planeten gegen die Sonne geben, wenn x′ in der Linie der Nachtgleichen, und x′ y′ in der Ebene der Ekliptik sind,

$$x' = r \text{ Cos } b \text{ Cos } l$$
$$y' = r \text{ Cos } b \text{ Sin } l$$
$$z' = r \text{ Sin } b$$

und da die Grössen

$$r, l, b$$

unmittelbar aus den Tafeln genommen werden, so hat die Entwicklung der Coordinaten

$$x' \; y' \; z'$$

keine Schwierigkeit, als die weitere Reduction derselben auf den Aequator, mit welcher Reduction wir uns bisher beschäftiget haben.

Diese Reduction kann man aber gänzlich vermeiden, wenn man den Planetentafeln eine andere, nähmlich dieselbe Einrichtung gegen den Aequator gibt, welche sie bisher gegen die Ekliptik hatten. Zu diesem Zwecke wird man die Planetentafeln so einrichten, dass sie, wie vorhin r und u, jetzt r und $U = u - O$ geben, und dass sie aus zwey angehängten Tafeln, deren Argument U ist, die heliocentrische Declination d, und die Reduction c der Grösse U auf den Aequator durch die beyden Gleichungen geben

$$\mathrm{Sin}\ d = \mathrm{Sin}\ N\ \mathrm{Sin}\ u$$

$$\mathrm{Sin}\ c = \mathrm{tg}\ \frac{N}{2}\ \mathrm{tg}\ d\ \mathrm{Cos}\ u$$

woraus dann die heliocentrische Rectascension

$$a = U + K - c$$

folgt, die man auch durch die Ausdrücke

$$\mathrm{tg}\ (a - K) = \mathrm{Cos}\ N\ \mathrm{tg}\ U$$

$$\mathrm{Cos}\ (a - K) = \frac{\mathrm{Cos}\ U}{\mathrm{Cos}\ d}$$

erhalten kann. Setzt man also diese Einrichtung der Tafeln, oder die Kenntniss der Grössen

$$N,\ K,\ U$$

voraus, so erhält man aus ihnen unmittelbar die heliocentrische Rectascension a, und die Declination d des Planeten. Nennt man dann A D die heliocentrische Rectascension und Declination der Erde, so hat die Auflösung unserer Aufgabe keine weitere Schwierigkeit. Behält man nähmlich die vorige Bezeichnung der übrigen Grössen bey, so hat man für den heliocentrischen Ort des Planeten

$$x = r\ \mathrm{Cos}\ d\ \mathrm{Cos}\ a$$
$$y = r\ \mathrm{Cos}\ d\ \mathrm{Sin}\ a$$
$$z = r\ \mathrm{Sin}\ d$$

für den heliocentrischen Ort der Erde

$$X = R\ \mathrm{Cos}\ D\ \mathrm{Cos}\ A$$
$$Y = R\ \mathrm{Cos}\ D\ \mathrm{Sin}\ A$$
$$Z = R\ \mathrm{Sin}\ D$$

und für den geocentrischen Ort des Planeten

$$x - X = \rho\ \mathrm{Cos}\ \delta\ \mathrm{Cos}\ \alpha$$
$$y - Y = \rho\ \mathrm{Cos}\ \delta\ \mathrm{Sin}\ \alpha$$
$$z - Z = \rho\ \mathrm{Sin}\ \delta$$

Hat man also aus den beyden ersten Systemen die Werthe von x, X... gefunden, so gibt das letzte

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{y - Y}{x - X}$$

$$\mathrm{tg}\ \delta = \frac{z - Z}{x - X}\ \mathrm{Cos}\ \alpha = \frac{z - Z}{y - Y}\ \mathrm{Sin}\ \alpha$$

$$\rho = \frac{z - Z}{\mathrm{Sin}} = \frac{y - Y}{\mathrm{Sin}\ \alpha\ \mathrm{Cos}\ \delta} = \frac{x - X}{\mathrm{Cos}\ \alpha\ \mathrm{Cos}\ \delta}$$

Statt der angezeigten Werthen von

X Y Z

wird man bequemer folgende schon oben gefundene brauchen,

$$X = R \operatorname{Cos} L$$
$$Y = R \operatorname{Cos} e \operatorname{Sin} L$$
$$Z = R \operatorname{Sin} e \operatorname{Sin} L$$

wo L die Länge der Erde, und e die Schiefe der Ekliptik ist.

Um das Vorhergehende auf unser Beyspiel, Merkur 1808 Octob. 8 anzuwenden, hat man

$$a = 256^\circ\ 40'\ 17''6$$
$$d = -\ 26^\circ\ 38'\ 30''4 \text{ also}$$

$$x = -\ 0.096102$$
$$y = -\ 0.405641$$
$$z = -\ 0.209133 \text{ wie zuvor.}$$

Zur Übung wollen wir die Orte des schönen Kometen von 1811 für den Julius des Jahres 1812 nach dieser Methode suchen. Die Elemente dieses Kometen sind:

Durchg. durch das Perih.		1811 Sept. 12.25175 m. Z. Paris
Länge des Perih.		75° 1′ 9″2
Länge ☊ - - - - - - - -	k =	140 24 29.9
Neigung - - - - - - - -	n =	106 57 24.4
log. kleinste Distanz		0.0151120
log. halb. Paramet.		0.3151432
Excentricität	ε =	0.9954056
log. mit: tägl. Beweg.		9.9374598

Da n grösser als 90° ist, so ist der Komet rückgängig, oder seine heliocentrische Länge nimmt ab.

In dem sphärischen Dreyecke, welches von der Ekliptik, dem Aequator und der Bahn des Kometen gebildet wird, sind die zwey bekannten Winkel

$$e = 23^\circ\ 27'\ 51''$$
$$180 - n = 73^\circ\ 2'\ 35''.6$$

und die bekannte Seite

$$180 - k = 39^\circ\ 35'\ 30''1$$

daher sind die beyden andern Seiten

$$O = 14^\circ\ 42'\ 19''$$
$$180 - K = 37\ \ 34\ \ 33$$

und der dritte Winkel

$$N = 88^\circ\ 30'\ 46''0$$

und da die Neigung N kleiner als 90° ist, so ist der Komet in

Beziehung auf den Aequator rechtläufig, obschon er in Beziehung auf die Ekliptik rückwärts geht.

Ist v die wahre Anomalie für irgend eine Epoche, so ist für dieselbe Zeit das Argument der Declination

$$U = v + O + 65° 23' 21''$$
$$= v + 80° 5' 40''$$

Aber für 1812 Julius 5, 15, 25 mittl. Mittag Paris sind die seit dem Durchgange durch das Perihelium verflossenen Zeiten

296,74825 Tage
306,74825
316,74825

Daraus folgt (B. II. Cap. I.) die wahre elliptische Anomalie, und der Logarithmus des Radius Vectors

119°	51'	14"	0.61229
120	40	50	0.62309
121	27	50	0.63351

daher ist des Kometen

hel. Recsasc.				hel. Decl.		
322°	57'	50"	—	19°	56°	20
322	59	20	—	20	46	5
323	0	40	—	21	33	0

x		y		z
3.0731	—	2.3188	—	1.3966
3.1346		2.3630		1.4887
3.1948		2.4065		1.5797

Eben so ist für die Erde

hel. Länge			. . .	log. Rad. Vect.
283°	12'	30"	. .	0.007219
292	44	43	. .	0.007041
302	17	40	. .	0.006664

X		Y		Z
0.23232	—	0.90804	—	0.39414
0.39295		0.85982		0.37321
0.54253		0.78742		0.34178

und daraus folgt des Kometen

1812	geoc. Rectasc. α				geoc. Decl. δ				log ρ
5 Julius .	333°	35'	30"	—	17°	32'	20"	. .	0.52200
15	331	15	50	—	19	38	0	. .	0.52113
25	328	35	50	—	21	43	20	. .	0.52439

§. 5.

Die Auflösung des vorhergehenden §. ist ohne Zweifel die einfachste, welche man von dieser Aufgabe geben kann, aber sie setzt eine andere Einrichtung der Tafeln voraus. Will man diese auch in mancher andern Rücksicht vortheilhafte Veränderung der Tafeln nicht vornehmen, noch die oben gegebenen Constanten

$$N \quad K \quad O$$

entwickeln, so scheint es mir am bequemsten, zur Bestimmung der Werthe von

$$x \; y \; z$$

nicht von u, sondern von l, b auszugehen, welche letzten beyden Grössen in den ältern Tafeln unmittelbar angegeben sind.

Sind nähmlich

$$x' \; y' \; z'$$

die Coordinaten des Planeten in Beziehung auf die Ekliptik, so hat man

$$x' = r \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} l$$
$$y' = r \operatorname{Cos} b \operatorname{Sin} l$$
$$z' = r \operatorname{Sin} b$$

und sind

$$x \; y \; z$$

die Coordinaten des Planeten in Beziehung auf den Aequator, so ist

$$y = y' \operatorname{Cos} e - z' \operatorname{Sin} e$$
$$z = y' \operatorname{Sin} e + z' \operatorname{Cos} e$$

Setzt man also der Kürze wegen

$$\operatorname{Cos} m = -2 \operatorname{Cos} e \operatorname{Cos} b \operatorname{Sin}^2 \frac{90-l}{2}$$

$$\operatorname{Sin} n = \operatorname{Cos} m \operatorname{tg} e$$

so ist $x = r \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} l$

$$y = 2 r \operatorname{Cos} \frac{b+e+m}{2} \operatorname{Cos} \frac{b+e-m}{2}$$

$$z = 2 r \operatorname{Sin} \frac{b+e+n}{2} \operatorname{Cos} \frac{b+e-n}{2}$$

In unserem Beyspiele ist $u = 212^\circ\, 13'\, 26''9$, $k = 46^\circ\, 3'\, 7''7$

$$n = 7^\circ\, 0'\, 9''1$$

also ist nach den Ausdrücken

$$\operatorname{tg} (l - k) = \operatorname{Cos} n \operatorname{tg} u$$
$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} n \operatorname{Sin} (l - k)$$

$$l = 258^\circ\ 4'\ 59''0$$
$$b = -3^\circ\ 45'\ 38''3$$

Ist daher $e = 23^\circ\ 27'\ 52''4$ so ist

$$x = -0.0961023$$
$$y = -0.4056421$$
$$z = -0.2091320$$

woraus mit den in §. 2 gegebenen Werthen von X Y Z folgt

$$\alpha = 211^\circ\ 56'\ 13''2$$
$$\delta = -14^\circ\ 22'\ 12''0.$$

§. 6.

Um aus der heliocentrischen Länge und Breite wieder die geocentrische Länge und Breite abzuleiten, wollen wir die Lage des Gestirns und der Erde auf drey unter einander senkrechte Ebenen beziehen, deren eine die Ekliptik ist, und wovon die beyden andern ihre Pole in der Länge N und N + 90° haben, so ist, wenn man wieder

$$r' = r \operatorname{Cos} b$$
$$\rho' = \rho \operatorname{Cos} \beta$$

und $R' = R \operatorname{Cos} B$ setzt,

$$\left.\begin{array}{l} r' \operatorname{Cos}(l - N) - R' \operatorname{Cos}(L - N) = \rho' \operatorname{Cos}(\lambda - N) \\ r' \operatorname{Sin}(l - N) - R' \operatorname{Sin}(L - N) = \rho' \operatorname{Sin}(\lambda - N) \\ r' \operatorname{tg} b \qquad\qquad - R' \operatorname{tg} B \qquad\qquad = \rho' \operatorname{tg} \beta \end{array}\right\}$$

I. Da die Grösse N willkührlich ist, so sey N = L. Setzt man dann

$$P = \frac{r'}{R'} \operatorname{Sin}(l - L)$$

$$Q = \frac{r'}{R'} \operatorname{Cos}(l - L) - 1, \text{ so ist}$$

$$\operatorname{tg}(\lambda - L) = \frac{P}{Q}$$

$$\rho' = \frac{P R'}{\operatorname{Sin}(\lambda - L)} = \frac{Q R'}{\operatorname{Cos}(\lambda - L)}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r' \operatorname{tg} b - R' \operatorname{tg} B}{\rho'}$$

II. Ist N = l und

$$P = \frac{R'}{r'} \operatorname{Sin}(l - L),$$

$$Q = 1 - \frac{R'}{r'} \operatorname{Cos}(l - L) \text{ so ist}$$

$$\operatorname{tg}(\lambda - l) = \frac{P}{Q}$$

$$\rho' = \frac{P\,r'}{\mathrm{Sin}\,(\lambda - l)} = \frac{Q\,r'}{\mathrm{Cos}\,(\lambda - l)}$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{r'\,\mathrm{tg}\,b - R'\,\mathrm{tg}\,B}{\rho'}$$

III. Ist $N = \frac{1}{2}(l - L)$ so ist

$$\mathrm{tg}\,(\lambda - \tfrac{1}{2}(l + L)) = \frac{r' + R'}{r' - R'}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(l - L)$$

$$\rho' = (r' + R')\,\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(l - L)}{\mathrm{Sin}\,(\lambda - \frac{1}{2}(l + L))}$$

$$= (r' - R')\,\frac{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(l - L)}{\mathrm{Cos}\,(\lambda - \frac{1}{2}(l + L))}$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{r'\,\mathrm{tg}\,b - R'\,\mathrm{tg}\,B}{\rho'}$$

Setzt man hier $\frac{R'}{r'} = \mathrm{tg}\,p$,

so ist $\frac{r' + R'}{r' - R'} = \mathrm{tg}\,(45^\circ + p)$

Eben so kann man $N = k$, oder $N = o$ u. s. f. setzen, um andere Ausdrücke zu erhalten, so wie es nicht schwer seyn wird, statt den drey ersten Gleichungen des §. 6, die sich auf die Ekliptik beziehen, andere ähnliche einzuführen, welchen der Aequator zu Grunde liegt.

IV. Endlich lässt sich dieselbe Aufgabe noch auf folgende Weise auflösen.

Es ist $r' = r\,\mathrm{Cos}\,b$

$$\rho'^2 = r'^2 + R^2 - 2\,r'\,R\,\mathrm{Cos}\,\gamma$$

$$\mathrm{tg}\,\eta = \frac{r'\,\mathrm{Sin}\,\gamma}{R - r'\,\mathrm{Cos}\,\gamma}$$

$$\text{oder } \mathrm{tg}\,\eta = \frac{\mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Sin}\,\gamma}{\mathrm{Sin}\,(\gamma - \psi)}$$

$$\text{wo } \mathrm{tg}\,\psi = \frac{r'}{R}\,\mathrm{Sin}\,\gamma$$

oder auch durch folgende Ausdrücke

$$\mathrm{tg}\,\frac{\pi - \eta}{2} = \frac{R - r'}{R + r'}\,.\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi + \eta}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\mathrm{Sin}\,\eta\,\mathrm{tg}\,b}{\mathrm{Sin}\,\gamma}$$

$$\rho' = \frac{R\,\mathrm{Sin}\,\gamma}{\mathrm{Sin}\,\pi}$$

Für unser Beyspiel ist nach Nr. I

$$l - L = 242^\circ\ 5'\ 23''1$$
$$\log P = 9.\ 6150464\ n$$
$$\log Q = 0.\ 0857585\ n$$

$$\lambda - L = 198^\circ\ 41'\ 24''4$$
$$\lambda = 214^\circ\ 41'\ 0''3$$

$$\log \rho' = 0.\ 1083638$$
$$\beta = -\ 1^\circ\ 21'\ 11''9$$

und nach Nr. IV.

$$\psi = 22^\circ\ 23'\ 54''9$$
$$\eta = 18^\circ\ 41'\ 24''4$$
$$\beta = -\ 1^\circ\ 21'\ 11''9$$
$$\lambda = 180^\circ + \eta + L = 214^\circ\ 41'\ 0''.3$$

und aus diesen λ β findet man durch die Gleichungen B. I. Cap. I die geocentrische Rectascension und Declination. Ist nämlich

$$e = 23^\circ\ 27'\ 52.''\ 4 \text{ so ist}$$
$$\alpha = 211^\circ\ 56'\ 13''2$$
$$\delta = -\ 14^\circ\ 22'\ 11''9 \text{ wie zuvor.}$$

Um also den heliocentrischen Ort eines Planeten anzugeben, muss man nach Cap. I. die Elemente der Bahn desselben als gegeben voraussetzen, nämlich 1 die halbe grosse Axe und die daraus folgende siderische oder die zur Ausübung bequemere tropische Umlaufszeit 2, die Excentricität 3, die Länge des Perihеliums 4, die mittlere Länge des Planeten für irgend einen gegebenen Zeitpunct oder die Epoche desselben, 5 die Neigung der Bahn und 6 die Lage der Knotenlinie gegen die Ekliptik oder den Äquator. Die beyden letzten bestimmen die Lage, die andern die Grösse und Gestalt der Bahn. Wenn die 2, 3, 5 und 6 Elemente veränderlich sind, so müssen auch diese, gewöhnlich der Zeit proportionalen Veränderungen, gegeben seyn. Ist die Zeit des Durchgangs des Planeten durch sein Perihelium gegeben, so kann dieses Element die Stelle des 4ten vertreten.

Mit diesen Elementen sucht man dann für jede gegebene Zeit die mittlere Länge des Planeten nach Cap. I. §. 6. Zieht man von der mittl. Länge die für dieselbe Zeit Statt habende Länge p des Periheliums ab, so erhält man die mittlere Anomalie m, mit welcher und der Excentricität e man nach §. 7 die wahre Anomalie v und den Radius Vector r findet. Dann ist die wahre Länge des Planeten in der Bahn

$$l' = v + p$$

und das Argument der Breite

$$u = l' - k$$

wo k die Länge des aufsteigenden Knotens ist. Cap. I. §. 5, woraus man noch nach §. 16 die reducirte Länge l und die heliocentrische Breite b des Planeten ableiten kann.

Hat man in diesen Rechnungen, wie es am bequemsten ist, die tropische Umlaufszeit des Planeten gewählt, um seine mittlere Länge zu finden, so muss auch bey der Bewegung des Knotens und des Periheliums die tropische Bewegung derselben genommen werden, wodurch man also eine reducirte wahre Länge l von dem Puncte an gezählt erhält, in welchem sich der mittlere Frühlingspunct zu der gegebenen Zeit in der That befindet, und um diese Länge von dem wahren, durch die Nutation der Länge gestörten, Frühlingspunct zu erhalten, muss man zu ihr noch

$$18.''03 \text{ Sin } ☊ ☾$$

addiren.

Will man nun ferner aus dem so gefundenen heliocentrischen Ort des Planeten den geocentrischen Ort desselben ableiten, so wird man zuerst für dieselbe Zeit, nach denselben bisher für den Planeten gegebenen Vorschriften, die mittlere Länge der Sonne nach Cap. I. am Ende des §. 6, und daraus nach §. 7 die wahre Länge und den Radius Vector der Sonne suchen. Diese wahre Länge, wie sie aus den Elementen oder den Sonnentafeln folgt, muss um die nahe constante Aberration der Sonne in Länge, oder um 20"25 vergrössert werden, weil diese Tafeln die durch jene Aberration verminderte oder die scheinbare Länge der Sonne unmittelbar angeben. Endlich muss man zu dieser Länge vom mittlern Frühlingspuncte ebenfalls noch die Nutation

$$18''03 \text{ Sin } ☊ ☾$$

addiren, wenn man sie, so wie die des Planeten, vom wahren Frühlingspuncte zählt.

Wie man dann aus diesem heliocentrischen Ort des Planeten verbunden mit dem geocentrischen Ort der Sonne den geocentrischen Ort des Planeten ableitet, ist im vorhergehenden umständlich gezeigt worden.

Will man endlich den so berechneten geocentrischen Ort des Planeten mit einem beobachteten geocentrischen Ort vergleichen, so kann man diess auf eine doppelte Art, indem man nämlich entweder die scheinbaren oder die mittlern Orte derselben zur Vergleichung wählt.

Diese Beobachtungen der Planeten und Kometen werden nämlich gewöhnlich durch ihre scheinbaren Rectascensionen und Declinationen von den Astronomen angegeben, d. h. sie enthalten noch die Aberration, Nutation und Parallaxe, so dass sie bloss von der Refraction corrigirt sind.

Wählt man daher erstens die scheinbaren Orte, so wird man zu den oben gefundenen tabellarischen geocentrischen Orten des Planeten noch die Aberration und die Parallaxe setzen, und dann entweder sie mittels der scheinbaren Schiefe der Ekliptik auf Rectascension und Declination bringen, oder auch die beobachtete Rectascension und Declination mit derselben scheinbaren Schiefe auf Länge und Breite reduciren.

Wählt man aber zweytens die mittlern Orte zur Vergleichung, so wird es am bequemsten seyn, bey den vorhergehenden tabellarischen Berechnungen des geocentrischen Orts des Planeten und der Sonne die Nutation ganz wegzulassen, und sie mittels der mittlern Schiefe auf Rectascension und Declination zu bringen, dafür aber die beobachtete Rectascension und Declination von der Nutation, Aberration und Parallaxe zu befreyen, oder auch aus diesen von jenen drey Störungen befreyten beobachteten Rectascensionen und Declinationen mit der mittlern Schiefe die beobachteten Längen und Breiten zu suchen.

Sicherer ist es, in beyden Fällen das erste Verfahren beyzubehalten, d. h. die Rechnung bis zu den Rectascensionen und Declinationen fortzuführen, weil bey dem zweyten Verfahren ein Fehler der Beobachtungen, der entweder in der Rectascension oder in der Declination begangen wurde, die daraus abgeleitete beobachtete Länge und Breite zugleich entstellt.

§. 7.

Bisher haben wir uns bloss mit der Aufgabe beschäftiget, aus dem heliocentrischen Ort eines Planeten oder Kometen den geocentrischen Ort desselben abzuleiten. Da aber durch die Beobachtungen unmittelbar die geocentrische Lage dieser Körper gegeben wird, so müssen wir nun noch aus dieser den heliocentrischen Ort derselben abzuleiten suchen, wodurch die gegenwärtigen Untersuchungen vollständig gemacht werden.

Bestimmt man die Lage des Planeten gegen die Sonne durch drey rechtwinklichte Coordinaten x, y, z, von denen x in der Knotenlinie der Bahn mit dem Äquator, und xy in der Ebene des Äquators liegen, so ist, wenn die vorige Bezeichnung der Grössen a d K N U beybehalten wird

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{Cos} d \operatorname{Cos}(a - K) = r \operatorname{Cos} U \\ y &= r \operatorname{Cos} d \operatorname{Sin}(a - K) = r \operatorname{Sin} U \operatorname{Cos} N \\ z &= r \operatorname{Sin} d = r \operatorname{Sin} U \operatorname{Sin} N \end{aligned}$$

Eben so hat man für den heliocentrischen Ort der Erde

$$\begin{aligned} X &= R \operatorname{Cos} D \operatorname{Cos}(A - K) \\ Y &= R \operatorname{Cos} D \operatorname{Sin}(A - K) \\ Z &= R \operatorname{Sin} D \end{aligned}$$

und daher für den geocentrischen Ort des Planeten

$$x - X = \rho \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} (\alpha - K)$$
$$y - Y = \rho \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Sin} (\alpha - K)$$
$$z - Z = \rho \operatorname{Sin} \delta$$

Diese Ausdrücke geben sofort folgende zwey Gleichungen

$$\frac{y - Y}{z - Z} = \operatorname{Sin} (\alpha - K) \operatorname{Cotg} \delta \text{ und}$$

$$y = z \operatorname{Cotg} N$$

und daraus folgt

$$z = \frac{Z \operatorname{Sin} (\alpha - K) - Y \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{Sin} (\alpha - K) - \operatorname{Cotg} N \operatorname{tg} \delta}$$

$$y = \frac{Z \operatorname{Sin} (\alpha - K) - Y \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{Sin} (\alpha - K) - \operatorname{Cotg} N \operatorname{tg} \delta} \cdot \operatorname{Cotg} N$$

und wenn man diesen Werth von z in der Gleichung

$$\frac{x - X}{z - Z} = \operatorname{Cos} (\alpha - K) \operatorname{Cotg} \delta$$

substituirt, so hat man

$$x = X + \frac{(Z \operatorname{Cotg} N - Y) \operatorname{Cos} (\alpha - K)}{\operatorname{Sin} (\alpha - K) - \operatorname{Cotg} N \operatorname{tg} \delta}$$

Hat man aber so x y z gefunden, so findet man a d r aus

$$\operatorname{tg} (a - K) = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{tg} d = \frac{z}{y} \operatorname{Sin} (a - K) = \operatorname{tg} N \operatorname{Sin} (a - K)$$

$$r = \frac{z}{\operatorname{Sin} d}$$

oder auch $\operatorname{tg} U = \frac{y}{x \operatorname{Cos} N} = \frac{z}{x \operatorname{Sin} N}$ und

$$r = \frac{z}{\operatorname{Sin} N \operatorname{Sin} U},$$

$$\rho = \frac{z - Z}{\operatorname{Sin} \delta}$$

I. Einfacher wird die Auflösung, wenn man statt dem Äquator die Ekliptik zu Grunde legt, und die Breite B der Erde Null setzt. Man hat dann

$$x = r \operatorname{Cos} u$$
$$y = r \operatorname{Sin} u \operatorname{Cos} n$$
$$z = r \operatorname{Sin} u \operatorname{Sin} n$$

$$X = R \operatorname{Cos} (L - k)$$
$$Y = R \operatorname{Sin} (L - k)$$
$$Z = o$$

$$x - X = \rho \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} (\lambda - k)$$
$$y - Y = \rho \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Sin} (\lambda - k)$$
$$z - Z = \rho \operatorname{Sin} \beta$$

Ist also $\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{Cos} (L - k) \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{Sin} (L - \lambda)}$ wie zuvor,

so ist $\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{Sin} A \operatorname{tg} (L - k)}{\operatorname{Sin} (A + n)}$

und ist $\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{Sin} (\lambda - k)}$ so ist

$$\rho = \frac{R \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} (L - k) \operatorname{Sin} n}{\operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} (B - n)},$$

$$r = \frac{R \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} (L - k)}{\operatorname{Sin} (B - n) \operatorname{Sin} n}$$

und $r \operatorname{Sin} n \operatorname{Sin} u = \rho \operatorname{Sin} \beta$

Man sehe Mon. Corresp. 1802. Juni.

§. 8.

Dieselbe Aufgabe lässt sich noch auf einem andern Wege auflösen, der sich auf die Betrachtung gründet, dass der wahre Ort der Sonne, des Planeten und der Erde in der Ebene eines Dreyecks liegt, dessen Projection in der Sphäre des Himmels ein grösster Kreis ist, in welchem Kreise der heliocentrische Ort der Erde, der heliocentrische Ort des Planeten, und der geocentrische Ort des Planeten liegt.

Sey (Fig. 1) A der heliocentrische Ort der Erde T, B der geocentrische, und C der heliocentrische Ort des Planeten P; ♈ a der Aequator, ♈ A die Ekliptik, ☊′ ☊C die Bahn des Planeten, also ♈ ☊′ = K die Rectascension des Knotens, C ☊′ a = N die Neigung der Bahn gegen den Aequator, ☊′ C = U das Argument der Declination. Sey überdiess a C = V und ♈ a = f die Rectascension, der Ebene jenes grössten Kreises A C B, so wie B a B′ = g dessen Neigung gegen den Aequator, endlich

a B = h und a A = H

Denkt man sich von B und A auf dem Aequator senkrechte Bogen, die also gleich δ und D sind, so werden diese mit den Bogen B a, A a und dem Aequator zwey rechtwinklichte sphärische Dreyecke bilden, aus denen man f und g findet. Ist aber f und g bekannt, so kennt man in dem Dreyecke a C ☊′ eine Seite

☊'a = f — K mit den beyden anliegenden Winkeln, also kennt man auch

$$☊'C = U \text{ und } aC = V$$

und dann ist es leicht in dem Dreyecke S T P auch noch die Grössen r und ρ zu finden.

I. Um das Vorgetragene analitisch auszudrücken, hat man für f und g

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha + A}{2} - f\right) = \frac{\operatorname{Sin}(\delta + D)}{\operatorname{Sin}(\delta - D)} \operatorname{tg}\frac{\alpha - A}{2}$$

$$\operatorname{tg} g = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{Sin}(\alpha - f)} = \frac{\operatorname{tg} D}{\operatorname{Sin}(A - f)}$$

II. Eben so hat man für U und V in dem Dreyecke aC☊'

$$\operatorname{Cotg} U = \frac{\operatorname{Cos} N \operatorname{Cos}(f - K) - \operatorname{Cotg} g \operatorname{Sin} N}{\operatorname{Sin}(f - K)}$$

$$\operatorname{Cotg} V = \frac{\operatorname{Cotg} N \operatorname{Sin} g - \operatorname{Cos} g \operatorname{Cos}(f - K)}{\operatorname{Sin}(f - K)}$$

oder bequemer zur Rechnung

$$\operatorname{tg}\frac{U + V}{2} = \frac{\operatorname{Sin}\frac{g + N}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{g - N}{2}} \operatorname{tg}\frac{f - K}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{U - V}{2} = \frac{\operatorname{Cos}\frac{g + N}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{g - N}{2}} \operatorname{tg}\frac{f - K}{2}$$

und zur Prüfung $\operatorname{Sin} U \operatorname{Sin} N = \operatorname{Sin} V \operatorname{Sin} g$

III. Endlich hat man für die Grösse h

$$\operatorname{Sin} h = \frac{\operatorname{Sin}\delta}{\operatorname{Sin} g} \text{ oder}$$

$$\operatorname{Cos} h = \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}(\alpha - f) \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg} h = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - f)}{\operatorname{Cos} g}$$

und eben so für H

$$\operatorname{Sin} H = \frac{\operatorname{Sin} D}{\operatorname{Sin} G}$$

$$\operatorname{Cos} H = \operatorname{Cos} D \operatorname{Cos}(A - f)$$

$$\operatorname{tg} H = \frac{\operatorname{tg}(A - f)}{\operatorname{Cos} g}$$

also auch

$$r = R \frac{\text{Sin}(h-H)}{\text{Sin}(h-V)} \text{ und}$$

$$\rho = R \frac{\text{Sin}(V-H)}{\text{Sin}(h-V)}$$

Ex. Es sey

$$\begin{aligned} A &= 58^\circ\ 26'\ 0'' \\ D &= 17\ \ 13\ \ 45.9 \\ R &= 1' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 78^\circ\ 39'\ \ 0''.6 \\ \delta &= 29\ \ 39\ \ 43.3 \\ N &= 24^\circ\ 51\ \ 42.9 \\ K &= 3\ \ \ 4\ \ 32.1 \end{aligned}$$

so findet man

$$\begin{aligned} f &= 37^\circ\ 23'\ 12''2 \\ g &= 40\ \ 48\ \ 40.8 \\ U &= 65\ \ \ 1\ \ 28.0 \\ V &= 35\ \ 40\ \ 15.8 \\ h &= 49\ \ 13\ \ \ 4.4 \\ H &= 26\ \ 56\ \ 57.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log r &= 0.2089208 \\ \log \rho &= 9.8711553 \end{aligned}$$

IV. Auch hier wird die Auflösung einfacher, wenn man statt dem Aequator die Ekliptik zu Grunde legt. Denkt man sich (in Fig. 1) die Linie ☊′ a B′ weg, so ist

$$♈ A = L,\ ☊ C = u,\ ♈ ☊ = k$$

$$C ☊ A = n,\ AC = v,\ AB = h$$

also ist, wenn man von B auf die Ekliptik ☊ A das Loth BB″ fällt

$$♈ B' = \lambda,\ AB' = \lambda - L$$

in dem Dreyecke ABB′

$$\text{tg } g = \frac{\text{tg}\beta}{\text{Sin}(\lambda - L)}$$

Kennt man so g, so ist in dem Dreyecke ☊ AC

$$\text{tg} \frac{u+v}{2} = \frac{\text{Sin} \frac{g+n}{2}}{\text{Sin} \frac{g-n}{2}} \text{tg} \frac{L-k}{2}.$$

$$\text{tg} \frac{u-v}{2} = \frac{\text{Cos} \frac{g+n}{2}}{\text{Cos} \frac{g-n}{2}} \text{tg} \frac{L-k}{2}$$

und zur Prüfung

$$\text{Sin u Sin n} = \text{Sin v Sin g}.$$

Daraus erhält man ferner die Grösse h durch

$$\text{Sin h} = \frac{\text{Sin}\,\beta}{\text{Sin g}} \text{ oder}$$

$$\text{Cos h} = \text{Cos}\,\beta\ \text{Cos}\,(\lambda - L) \text{ oder}$$

$$\text{tg h} = \frac{\text{tg}\,(\lambda - L)}{\text{Cos g}}$$

und endlich r, ρ durch die Ausdrücke

$$r = \frac{R\ \text{Sin H}}{\text{Sin}\,(h - v)}$$

$$\rho = \frac{R\ \text{Sin v}}{\text{Sin}\,(h - v)}$$

Ex. $L = 60^\circ \qquad \lambda = 80^\circ$
$R = 1 \qquad \beta = 10$
$n = 5^\circ$
$k = 15^\circ$

gibt
$g = 27^\circ\ 16'\ 23''4$
$h = 22\ \ 16\ \ 7.5$
$u = 52\ \ 52\ \ 12.4$
$v = 8\ \ 43\ \ 19.2$

$\log r = 0.2089249$
$\log \rho = 9.8111562$

V. Endlich lässt sich auch diese Aufgabe durch sphärische Trigonometrie auf folgende Art auflösen

$$\rho = \frac{R\ \text{Sin}\,(L - k)}{\text{Sin}\,\beta\ \text{Cotg n} - \text{Cos}\,\beta\ \text{Sin}\,(\lambda - k)} \text{ und}$$

$$\rho' = \rho\ \text{Cos}\,\beta$$

$$r'^2 = \rho'^2 + R'^2 - 2\,\rho'\,R'\ \text{Cos}\,\eta$$

$$\text{tg}\,\gamma = \frac{\rho'\ \text{Sin}\,\eta}{R' - \rho'\ \text{Cos}\,\eta} \text{ oder}$$

$$\text{tg}\,\frac{\gamma - \pi}{2} = \frac{\rho' - R'}{\rho' + R'}\ \text{tg}\,\frac{\gamma + \pi}{2}$$

$$l = \lambda - \pi = \gamma + L \text{ und}$$

$$\text{tg b} = \frac{\text{Sin}\,\gamma\ \text{tg}\,\beta}{\text{Sin}\,\eta}$$

Überhaupt hat man zwischen den Grössen L l λ und R' r' ρ' folgende Gleichungen

$$
\begin{aligned}
R' \operatorname{Sin}(l - L) &= \rho' \operatorname{Sin}(\lambda - l)\\
R' \operatorname{Sin}(\lambda - L) &= r' \operatorname{Sin}(\lambda - l)\\
\rho' \operatorname{Sin}(\lambda - L) &= r' \operatorname{Sin}(l - L)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
R' \operatorname{Cos}(l - L) + \rho' \operatorname{Cos}(\lambda - l) &= r'\\
r' \operatorname{Cos}(\lambda - l) - R' \operatorname{Cos}(\lambda - L) &= \rho'\\
r' \operatorname{Cos}(l - L) - \rho' \operatorname{Cos}(\lambda - L) &= R'
\end{aligned}
$$

und endlich

$$
\begin{aligned}
\pi &= \lambda - l & \text{oder } \pi &= l - \lambda\\
\gamma &= l - L & \gamma &= L - l\\
\eta &= 180 - (\lambda - L) & \eta &= 180 - (L - \lambda)
\end{aligned}
$$

§. 9.

Wir wollen nun noch untersuchen, auf welche Weise kleine Änderungen in der geocentrischen Lage des Gestirns mit ihren Änderungen in der heliocentrischen Lage desselben, und umgekehrt, zusammen hängen. Diesen Zweck werden wir am kürzesten durch die drey ersten Gleichungen des §. 6 erreichen. Setzt man nähmlich in diesen Gleichungen $N = o$, so erhält man sofort durch ihre Differentiation

$$
\begin{aligned}
d\rho' &= dr' \operatorname{Cos}(l - \lambda) - r'dl \operatorname{Sin}(l - \lambda)\\
\rho' d\lambda &= r'dl \operatorname{Cos}(l - \lambda) + dr'. \operatorname{Sin}(l - \lambda)\\
\rho' d\beta &= dr' \operatorname{Cos}^2\beta\,[\operatorname{tg} b - \operatorname{tg}\beta \operatorname{Cos}(l - \lambda)]\\
&+ r' \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}(l - \lambda).dl + r'db. \frac{\operatorname{Cos}^2\beta}{\operatorname{Cos}^2 b}
\end{aligned}
$$

und eben so

$$
\begin{aligned}
dr' &= d\rho' \operatorname{Cos}(\lambda - l) - \rho' d\lambda \operatorname{Sin}(\lambda - l)\\
r'dl &= d\rho' \operatorname{Sin}(\lambda - l) + \rho' d\lambda \operatorname{Cos}(l - \lambda)\\
r'db &= d\rho' \operatorname{Cos}^2 b\,[\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg} b \operatorname{Cos}(\lambda - l)]\\
&+ \rho' d\lambda \operatorname{Cos} b \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin}(\lambda - l) + \rho'\, d\beta\, \frac{\operatorname{Cos}^2 b}{\operatorname{Cos}^2\beta}
\end{aligned}
$$

I. Aus diesen Gleichungen wird man leicht die geocentrische Bewegung des Planeten für einen gegebenen kleinen Zeitraum, aus der bekannten heliocentrischen Bewegung während derselben Zeit, oder umgekehrt, ableiten, wenn man diesen Gleichungen noch die Ausdrücke hinzu setzt, die aus den Differentiationen der drey ersten Gleichungen des §. 6 in Beziehung auf L und R folgen, wo

$$d\,L,\ d\,R$$

die Änderungen des heliocentrischen Orts der Erde für dieselbe Zwischenzeit ist. Zu diesen Zwecken aber eignen sich besonders die Ausdrücke der Coordinaten x y z, die bloss von der excentrischen Anomalie abhängen, und die wir in dem dritten §. gegeben haben. Diese Ausdrücke geben

$$dx = m de \operatorname{Cos}(M + e)$$
$$dy = n de \operatorname{Cos}(N + e)$$
$$dz = p de \operatorname{Cos}(P + e)$$

und wenn man, wie dort erinnert wurde, für die Erde die ähnlichen Constanten entwickelt, die wir mit m′ M′... bezeichnen wollen, so ist eben so

$$dX = m'de' \operatorname{Cos}(M' + e')$$
$$dY = n'de' \operatorname{Cos}(N' + e')$$
$$dZ = p'de' \operatorname{Cos}(P' + e')$$

Allein die Gleichungen

$$x - X = \rho \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}\alpha$$
$$y - Y = \rho \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin}\alpha$$
$$z - Z = \rho \operatorname{Sin} d$$

geben, wenn man sie differentiirt,

$$d\alpha = \frac{(dy - dY)\operatorname{Cos}\alpha - (dx - d'X)\operatorname{Sin}\alpha}{\rho \operatorname{Cos}\delta}$$

$$d\delta = (dz - dZ)\frac{\operatorname{Cos}\delta}{\rho} - (dy - dY)\frac{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\delta}{\rho}$$
$$- (dx - dX)\frac{\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\delta}{\rho}$$

Substituirt man also in den letzten beyden Gleichungen die vorhergehenden Werthe von

$dx, dX\ldots$

so erhält man einfache Gleichungen der Form

$$\left.\begin{aligned} d\alpha &= A.de + A'.de' \\ d\delta &= B.de + B'.de' \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

und diese geben unmittelbar die stündliche Bewegung in geocentrischer Rectascension und Declination aus der bekannten stündlichen Änderung der excentrischen Anomalien.

Um diess durch ein Beyspiel zu erläutern, ist nach §. 5 für die Pallas 1811 den 8. May

$e = 42° 28'$
$d e = 15.'60$ für 24 Stunden
$\alpha = 150° 41'$
$\delta = + 13° 23'$
$\log \rho = 0.2674$

und für die Erde $e' = 305° 19'$
$d e' = 59.'71$ für 24 Stunden.

Länge des Periheliums der Erde

$h' = 279° 40$

Wendet man ferner die in §. 3 für die Planeten gegebenen Ausdrücke auf die Erde an, so findet man

$$M' = 9^\circ\ 40'$$
$$N' = P' = -80^\circ\ 20'$$

und überdiess

$$\log m' = 0$$
$$\log n' = 9.96251$$
$$\log p' = 9.60012$$

Die Werthe von

M N P und m n p

für den Planeten aber sind schon oben §. 3 gegeben worden. Substituirt man diese Werthe in den Gleichungen I, so erhält man

$$A = 1.431 \qquad A' = -0.122$$
$$B = 0.375 \qquad B' = 0.039$$

also auch $d\,\alpha = 15'\ 2.''4$ und
$d\,\delta = 8''2$

und diese Werthe von $d\alpha$, $d\delta$ oder diese täglichen Änderungen der geocentrischen Rectascension und Declination stimmen nahe mit der in §. 3. gegebenen Ephemeride überein.

II. Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die geocentrische Länge der Planeten nach ihrer verschiedenen Lage gegen die Erde bald wachsen, bald abnehmen, und selbst zuweilen völlig stille stehen wird. Um den Ort des Stillstandes der Planeten zu finden, wollen wir der Kürze wegen ihre Bahnen kreisförmig, und in der Ebene der Ekliptik annehmen, so hat man

$$\frac{d\,l}{d\,L} = \frac{R \cos n}{r \cos \pi}$$

Es ist aber

$$\frac{R}{r} = \frac{\sin \pi}{\sin n},$$

und wenn t ϑ die Umlaufszeiten des Planeten und der Erde um die Sonne sind,

$$\frac{d\,l}{d\,L} = \frac{\vartheta}{t}$$

Ist aber a der Halbmesser der Bahn des Planeten, der Halbmesser der Erdbahn gleich der Einheit vorausgesetzt, so hat man nach dem Vorhergehenden

$$\vartheta^2\,a^3 = t^2$$

also ist für den Stillstand des Planeten überhaupt

$$\text{tg}\,\eta = a^{\frac{3}{2}}\,\text{tg}\,\pi$$

III. Dieselben Ausdrücke lassen sich auch aus folgenden allgemeineren Betrachtungen ableiten. Was auch N für eine Grösse bezeichnet, so ist immer

$$\text{tg}\,(\lambda - N) = \frac{a\,\text{Sin}\,(l - N) - \text{Sin}\,(L - N)}{a\,\text{Cos}\,(l - N) - \text{Cos}\,(L - N)} \quad . \; . \; \text{II.}$$

Setzt man in dieser Gleichung das Differential von $(\lambda - N)$ gleich Null, so hat man für den Stillstand

$$\frac{a\,d.(l-N)}{d.(L-N)} = - \frac{(1 - a\,\text{Cos}\,(l - L))}{a - \text{Cos}\,(l - L)}$$

Es ist aber

$$l - L = \gamma \text{ und}$$

$$\frac{d.(l-N)}{d.(L-N)} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}},$$

also ist

$$\text{Cos}\,\gamma = \frac{a^{\frac{1}{2}}\left(1 + a^{\frac{1}{2}}\right)}{1 + a^{\frac{3}{2}}}$$

Überdiess hat man

$$\text{tg}\,\eta = \frac{a\,\text{Sin}\,\gamma}{1 - a\,\text{Cos}\,\gamma} \text{ und}$$

$$\text{tg}\,\pi = \frac{\text{Sin}\,\gamma}{a - \text{Cos}\,\gamma}$$

also ist auch, wenn man in den letzten Ausdrücken den gefundenen Werth von γ substituirt,

$$\left.\begin{aligned} \text{tg}\,\eta &= \frac{a}{\sqrt{1+a}} \\ \text{tg}\,\pi &= \frac{-1}{\sqrt{a(1+a)}} \\ \text{tg}\,\gamma &= \left(1 - a^{\frac{1}{2}}\right) . \sqrt{\frac{1+a}{a}} \end{aligned}\right\} \text{III.}$$

also auch

$$\text{tg}\,\eta = - a^{\frac{3}{2}}\,\text{tg}\,\pi$$

wie zuvor.

Weiter hat man

$$\frac{l-N}{L-N} = a^{-\frac{3}{2}} \text{ und}$$

$$\text{Cos}\,[(l-N)-(L-N)] = \frac{a^{\frac{1}{2}}(1+a^{\frac{1}{2}})}{1+a^{\frac{3}{2}}}$$

und aus der Verbindung dieser beyden Ausdrücke folgt

$$\left.\begin{aligned} \text{Cos}\,[(a^{\frac{3}{2}}-1)(l-N)] &= \frac{a^{\frac{1}{2}}(1+a^{\frac{1}{2}})}{1+a^{\frac{3}{2}}} \\ \text{Cos}\,\left[\frac{(a^{\frac{3}{2}}-1)(L-N)}{a^{\frac{3}{2}}}\right] &= \frac{a^{\frac{1}{2}}(1+a^{\frac{1}{2}})}{1+a^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}\right\} \text{IV.}$$

Die Gleichungen III. geben

$$\eta,\ \pi \text{ und } \gamma$$

für den Stillstand, und die Gleichungen IV. geben die heliocentrische Bewegung

$$(l-N) \text{ und } (L-N)$$

des Planeten und der Erde in der Zeit zwischen der heliocentrischen Conjunction (für welche $l = L$) bis zum Stillstande, voraus gesetzt, dass N der Punct der Ekliptik ist, für welchen die Erde und der Planet in helioc. Conjunction sind. Substituirt man endlich die aus IV gefundenen Werthe von

$$(l-N) \text{ und } (L-N)$$

in der Gleichung II., so erhält man $(\lambda - N)$ oder die geocentrische Bewegung des Planeten in derselben Zwischenzeit.

So ist, wenn man für Uranus $a = 19.0818$ annimmt, aus den Gleichungen IV

$$\text{Cos}\,(0.9880032\,(L-N)) = \text{Cos}\,(82.35448\,(l-N))$$
$$= 0.2779917$$

also $L - N = 74°\ 45.'5$
$l - N = 0°\ 53.'8$

und die Erde legt den Bogen $(L - N)$ in 75. 85 Tagen zurück. Eben so gibt die Gleichung II.

$$\text{tg}\,(\lambda - N) = \frac{0.2987 - 0.9648}{19.0795 - 0.2629} \text{ oder}$$

$$\lambda - N = 2°\ 1.'65$$

§. 10.

Nicht minder interessant ist die Untersuchung des Flächenraumes oder der Zone des Himmels, in welcher allein ein gegebener Körper unsers Planetensystems von unserer Erde aus gesehen werden kann.

Behält man die bisher angenommenen Bezeichnungen bey, so hat man wie §. 7. I.

$$\begin{aligned} x - X &= \rho \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \lambda \\ y - Y &= \rho \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Sin} \lambda \\ z - Z &= \rho \operatorname{Sin} \beta \end{aligned}$$

und da die geocentrische Länge und Breite λ β Functionen der Argumente der Breite u und U des Planeten und der Erde sind, so kann man annehmen

$$\begin{aligned} d\lambda &= p du + P dU \\ d\beta &= q du + Q dU \end{aligned}$$

Setzt man aber in diesen beyden Gleichungen die Grösse λ constant, also $d\lambda = 0$, so ist

$$\left(\frac{d\beta}{du}\right) = \frac{Pq - pQ}{P}$$

und man sieht, dass für denselben Werth von λ die Grösse β so lange zu- oder abnehmen wird, bis endlich der Werth von β für

$$pQ - Pq = 0 \ldots \text{(I.)}$$

ein Grösstes oder Kleinstes ist, und dass derselbe Werth von β für jenes λ die Gränze jener Zone bezeichnen wird, ausser welcher der Planet von der Erde nicht mehr gesehen werden kann. Um aber die letzte Gleichung I., welche die Auflösung unserer Aufgabe enthält, zur Anwendung bequemer auszudrücken, hat man durch die Division der drey ersten

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{y - Y}{x - X} \text{ und}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{z - Z}{x - X} \operatorname{Cos} \lambda$$

Nimmt man aber von den beyden letzten Ausdrücken die partiellen Differentialien, so erhält man

$$p = \frac{dx \operatorname{Sin} \lambda - dy \operatorname{Cos} \lambda}{\rho \operatorname{Cos} \beta . du}$$

$$P = \frac{-dX \operatorname{Sin} \lambda + dY \operatorname{Cos} \lambda}{\rho \operatorname{Cos} \beta . dU}$$

$$q = \frac{dx \operatorname{Cos}\lambda \operatorname{Sin}\beta + dy \operatorname{Sin}\lambda \operatorname{Sin}\beta - dz \operatorname{Cos}\beta}{\rho\, du}$$

$$Q = \frac{-dX \operatorname{Cos}\lambda \operatorname{Sin}\beta - dY \operatorname{Sin}\lambda \operatorname{Sin}\beta + dZ \operatorname{Cos}\beta}{\rho\, dU}$$

und substituirt man diese Werthe von

$$p\,q\;P\,Q$$

in der oben gefundenen Bedingungsgleichung (I), so hat man

$$\begin{aligned} &dx\,(YdZ - ZdY) + dX\,(ydz - zdy) \\ &+ dy\,(ZdX - XdZ) + dY\,(zdx - xdz) \\ &+ dz\,(XdY - YdX) + dZ\,(xdy - ydx) = 0 \;\ldots\; \text{(II)} \end{aligned}$$

und diese Gleichung enthält allgemein die Relation zwischen den Orten der Erde und des Planeten, bey welchen der geocentrische Ort des letztern in die Gränzen jener Zone fällt, und man darf darin nur für x y z ihre Werthe durch u, und für X Y Z ihre Werthe durch U substituiren, um eine endliche Gleichung zwischen u und U zu erhalten. Man wird sich übrigens leicht überzeugen, dass die Gleichung (II) zugleich die Bedingungsgleichung ist, dass die Tangenten an den Orten der Erde und des Planeten in einer Ebene liegen.

Nehmen wir nun für x y z und X Y Z die Werthe

$$x = r \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin}(A + u) \text{ u. f.}$$
$$X = R \operatorname{Sin} a' \operatorname{Sin}(A' + U) \text{ u. f.}$$

an, welche wir schon §. 2. III. gegeben haben, und heisst man k K die halben Parameter der Bahnen, welche der Planet und die Erde beschreibt, so wie ε E die Excentricitäten, und g G die Entfernungen der Perihelien von der Knotenlinie, so hat man

$$r = \frac{k}{1 - \varepsilon \operatorname{Cos}(u - g)} \text{ und}$$

$$R = \frac{K}{1 - E \operatorname{Cos}(U - G)}$$

woraus man nach einigen Reductionen findet

$$\frac{dx}{dU} = \frac{k \operatorname{Sin} a}{(1 - \varepsilon \operatorname{Cos}(u - g))^2} \cdot [\operatorname{Cos}(A + u) - \varepsilon \operatorname{Cos}(A + g)]$$

und eben so

$$dy,\; dz$$

wenn man in dem letzten Ausdrucke a A in b B oder c C verwandelt, so wie

$$dX,\; dY,\; dZ$$

wenn man in

$$dx,\; dy,\; dz$$

statt den auf den Planeten sich beziehenden Grössen die analogen für die Erde setzt. Endlich ist noch

$$\frac{ydz - zdy}{du} = r^2 \operatorname{Cos} a$$

$$\frac{zdx - xdz}{du} = r^2 \operatorname{Cos} b$$

$$\frac{xdy - ydx}{du} = r^2 \operatorname{Cos} c$$

und ganz ähnliche Ausdrücke findet man auch für

$$\frac{YdZ - ZdY}{dU} \text{ u. f.}$$

Substituirt man endlich alle diese Ausdrücke in der obigen Bedingungsgleichung (II), so erhält man

$$\begin{aligned}
&K \operatorname{Cos} a' \operatorname{Sin} a (\operatorname{Cos}(u + A) - \varepsilon \operatorname{Cos}(g + A))\\
&+ K \operatorname{Cos} b' \operatorname{Sin} b (\operatorname{Cos}(u + B) - \varepsilon \operatorname{Cos}(g + B))\\
&+ K \operatorname{Cos} c' \operatorname{Sin} c (\operatorname{Cos}(u + C) - \varepsilon \operatorname{Cos}(g + C))\\
&+ k \operatorname{Cos} a \operatorname{Sin} a' (\operatorname{Cos}(U + A') - E \operatorname{Cos}(g' + A'))\\
&+ k \operatorname{Cos} b \operatorname{Sin} b' (\operatorname{Cos}(U + B') - E \operatorname{Cos}(g' + B'))\\
&+ k \operatorname{Cos} c \operatorname{Sin} c' (\operatorname{Cos}(U' + C') - E \operatorname{Cos}(g' + C')) = 0 \ldots \text{(III)}
\end{aligned}$$

Nimmt man aber auf die §. 2 gegebenen Werthe von

$$A' B' C', \ a', \ b', \ c'$$

Rücksicht, so erhält man aus der letzten Gleichung nach einigen Reductionen folgenden sehr einfachen Ausdruck

$$K (\operatorname{Cos} u - \varepsilon \operatorname{Cos} g) = k (\operatorname{Cos} U - E \operatorname{Cos} G)$$

Wählt man in dieser Gleichung für u irgend einen Werth, und bestimmt daraus den entsprechenden Werth von U, so wird man leicht aus diesen u und U die geocentrische Länge und Breite oder Rectascension und Declination des Punctes der Gränze jener Zone ableiten, welcher für diesen Werth von u gehört. Weitere Bemerkungen über diese Auflösung s. m. monatl. Corr. 1804 August.

§. 11.

Die Alten wussten sich die wahre Ursache dieser Erscheinungen des Stillstandes und Rückganges der Planeten so wenig, als die Ungleichheiten ihrer Bewegungen, welche von der Excentricität der Bahnen abhängig sind, zu erklären. Die damahls allgemein verbreitete Meinung, dass der Kreis unter allen krummen Linien die vollkommenste, also auch diejenige sey, welche die Natur für die Bahnen der Körper des Himmels gewählt haben müsse, eine Meinung, die selbst den unsterblichen Kepler noch lange Zeit in seinen Untersuchungen aufhielt, brachte die Griechen auf eine Hypothese, jene beyden Ungleichheiten darzustellen, welche, obschon ungegründet, doch ihrem Scharfsinn Ehre macht.

Sie nahmen an, dass die Erde ausser dem Mittelpuncte eines Kreises ruhe, und dass in der Peripherie dieses Kreises sich der Mittelpunct eines zweyten Kreises bewege. Der erste hiess der excentrische Kreis, der zweyte der Epicykel. In der Peripherie des Epicykels endlich bewegte sich der Planet, und zwar so, dass für die untern Planeten (Merkur und Venus) die Umlaufszeit des Mittelpuncts des Epicykels um die Erde gleich der Revolution der Sonne um die Erde, und die Umlaufszeit des Planeten in dem Epicykel gleich der Revolution des Planeten um die Sonne — für die obern Planeten aber die Umlaufszeit des Mittelpuncts des Epicykels gleich der Revolution des Planeten, und die Umlaufszeit des Planeten in seinem Epicykel gleich der Revolution der Sonne ist. Die oberen Planeten waren also immer in Conjunction mit der Sonne, und die untern in Opposition, in jenem Puncte ihrer Epicykel, welcher der Erde am nächsten war. Es ist aber klar, dass die Erscheinungen dieselben seyn werden, wenn man statt dem ersten excentrischen Kreis einen andern substituirt, in dessen Mittelpuncte die Erde ruht, und auf dessen Peripherie sich ein Epicykel bewegt, dessen Halbmesser gleich der Entfernung ist, um welche in dem excentrischen Kreise der Mittelpunct desselben von der Erde abstand.

Es sey (Fig. 9) A a = a der Halbmesser des ersten, a a' = a' der des zweyten Epicykels, und für eine gegebene Zeit B A a = b der Winkel des ersten Halbmessers mit einer ihrer Lage nach gegebenen geraden Linie A B und b' der Winkel des verlängerten Halbmessers a' mit derselben Geraden A B; r die Entfernung des äussersten Punctes des Halbmessers a' von A', und endlich φ der Winkel, welchen r mit der Geraden A B bildet. Diess vorausgesetzt, findet man leicht

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a \operatorname{Sin} b + a' \operatorname{Sin} b'}{a \operatorname{Cos} b + a' \operatorname{Cos} b'} \text{ und}$$

$$r^2 = a^2 + a'^2 + 2\, a\, a' \operatorname{Cos}(b - b')$$

Heisst aber Δ der Winkel, den a und r an A bilden, so ist

$$\Delta = b - \varphi$$

also auch

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{a' \operatorname{Sin}(b - b')}{a + a' \operatorname{Cos}(b - b')}$$

Aus den beyden letzten Gleichungen wird man leicht folgende ableiten

$$\Delta = \alpha \operatorname{Sin}\beta - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \operatorname{Sin} 2\beta + \tfrac{1}{3}\alpha^3 \operatorname{Sin} 3\beta - $$

$$\log \text{nat} \frac{r}{a} = \alpha \operatorname{Cos} \beta - \tfrac{1}{2} \alpha^2 \operatorname{Cos} 2\beta + \tfrac{1}{3} \alpha^3 \operatorname{Cos} 3\beta - \text{oder}$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \alpha \operatorname{Cos} \beta + \tfrac{1}{4} \alpha^2 (1 - \operatorname{Cos} 2\beta) + \tfrac{1}{8} \alpha^3 (\operatorname{Cos} 3\beta - \operatorname{Cos} \beta) +$$

$$\text{wo } \alpha = \frac{a'}{a} \text{ und}$$

$$\beta = b - b' \text{ ist.}$$

I. Ist aber a die halbe grosse Axe, a ε die Excentricität einer Ellipse, und m v die mittlere und wahre Anomalie vom Aphelium, so ist nach dem Vorhergehenden für die elliptische Bewegung die Gleichung des Mittelpuncts

$$\Delta = m - v \left(2\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{4}\right) \operatorname{Sin} m$$

$$- \frac{5}{4} \varepsilon^2 \operatorname{Sin} 2m + \frac{13}{12} \varepsilon^3 \operatorname{Sin} 3m -$$

und der Radius Vector

$$\frac{r}{a} = 1 + \varepsilon \operatorname{Cos} m - \frac{\varepsilon^2}{2} (\operatorname{Cos} 2m - 1)$$

$$+ \frac{3\varepsilon^3}{8} (\operatorname{Cos} 3m - \operatorname{Cos} m)$$

Daraus folgt, dass ein Epicykel die Winkelbewegung in der Ellipse darstellt, wenn man auf die zweyten und höheren Potenzen von ε keine Rücksicht nimmt, und $\frac{a'}{a} = 2\varepsilon$ setzt, dass aber unter derselben Voraussetzung die Entfernungen des Planeten vom Brennpunct in der Ellipse nicht dargestellt werden können, weil für die letzten $\frac{a'}{a} = \varepsilon$ seyn müsste. Dieser Widerspruch hätte die Alten leicht von dem Fehler ihrer Hypothese überzeugen können. Sind nämlich R, R' die scheinbaren Durchmesser des Planeten in zwey Puncten seiner Bahn, zu denen die Entfernungen r, r' gehören, so ist

$$r \,.\, R = r' \,.\, R',$$

also ist für die elliptische Bewegung

$$\frac{dv}{dm} = 1 - 2\varepsilon \operatorname{Cos} m = \frac{1}{r^2} = h \,.\, R^2$$

wo h eine beständige Grösse, also

$$\frac{dv}{dv'} = \frac{R^2}{R'^2}$$

für den Epicykel aber ist, wenn $\frac{a'}{a} = 2\varepsilon$ gesetzt wird,

$$\frac{dv}{dm} = 1 - 2\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,m = \frac{a}{r} = h'.R\text{, also}$$

$$\frac{dv}{dv'} = \frac{R}{R'}$$

Die Veränderung des scheinbaren Durchmessers des Monds aber ist so gross, dass sie auch den Beobachtungen der Alten nicht entgehen konnte, da die Werthe desselben im Perigäum und Apogäum

$$R = 33.'518\text{, } R' = 29.'366 \text{ sind.}$$

Die stündliche Bewegung aber in denselben Puncten der Bahn ist

$$dv = 38.'366 \text{ und } dv' = 29.'447\text{, also}$$

$$\frac{dv}{dv'} = 1.3028$$

$$\frac{R^2}{R'^2} = 1.3027 \text{ und}$$

$$\frac{R}{R'} = 1.1414$$

von welchen drey Grössen die beyden ersten genau mit einander übereinstimmen.

II. Bezeichnet man durch l L die heliocentrische Länge des Planeten und der Erde, und durch r R ihre auf die Ekliptik projicirten Entfernungen von der Sonne, so wie endlich durch λ die geocentrische Länge des Planeten, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\mathrm{tg}\,(\lambda - l) = \frac{\frac{R}{r}\,\mathrm{Sin}\,(l - L)}{1 - \frac{R}{r}\,\mathrm{Cos}\,(l - L)} \text{ und}$$

$$\mathrm{tg}\,(\lambda - L) = \frac{\frac{r}{R}\,\mathrm{Sin}\,(l - L)}{\frac{r}{R}\,\mathrm{Cos}\,(l - L) - 1}$$

Da diese Ausdrücke dieselbe Form mit dem oben für tg Δ gegebenen Werth haben, so ist

$$\lambda - l = \left(\frac{R}{r}\right)\mathrm{Sin}\,(l - L) + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\mathrm{Sin}\,2\,(l - L)$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{R}{r}\right)^3\mathrm{Sin}\,3\,(l - L) + \text{ und}$$

$$\lambda - L = \left(\frac{r}{R}\right) \text{Sin}\,(L-l) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \text{Sin}\,2\,(L-l)$$

$$+ \tfrac{1}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^3 \text{Sin}\,3\,(L-l) + \ldots$$

Daraus folgt, dass sich die zweyte Ungleichheit der Planeten, welche von der Bewegung der Erde kömmt, in Beziehung auf ihre Winkel-Bewegung, vollkommen genau durch einen Epicykel darstellen lässt, dessen Halbmesser $\frac{R}{r}$ für die obern, und $\frac{r}{R}$ für die untern Planeten ist. Wenn man daher nur die ersten Potenzen der Excentricität berücksichtiget, so reichen zwey Epicykel, oder was dasselbe ist, ein excentrischer Kreis mit einem Epicykel hin. Beyde Ungleichheiten der Planeten, in Beziehung auf ihre Winkelbewegung, nicht aber in Beziehung auf ihre Distanz, darzustellen. Wollte man aber auch die höheren Potenzen der Excentricität berücksichtigen, so müsste man, wie die Alten diess in der That bey dem Monde gethan haben, die Anzahl der Epicykel vermehren.

III. Sey $A\,a = a$ der Halbmesser des ersten, $a\,a' = a'$ des zweyten, $a'\,a'' = a''$ des dritten Epicykels u. f. und die Winkel, welche diese Halbmesser unter einander bilden, seyen

$$A\,a\,a' = b',\quad a\,a'\,a'' = b'',\quad a'\,a''\,a''' = b''' \text{ u. f.}$$

Eine ihrer Lage nach willkührliche Linie A B bilde mit dem ersten Halbmesser A a den Winkel b. Endlich sey r die Entfernung des Mittelpunctes A des ersten Epicykels von dem Mittelpuncte des letzten Epicykels, und φ der Winkel von r mit A B, so wie Δ der Winkel von r mit dem ersten Halbmesser a, also $b = \varphi + \Delta$.

Sind

$$a\,c = y,\quad a'\,c' = y',\quad a''\,c'' = y'' \ldots$$

senkrecht auf A B und

$$A\,c = x,\quad A\,c' = x',\quad A\,c'' = x'' \ldots, \text{ so ist,}$$

wie man leicht sieht

$$\begin{aligned} x &= a \text{ Cos } b \\ y &= a \text{ Sin } b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= x + a' \text{ Cos } (b + b' - 2.90) \\ y' &= y + a' \text{ Sin } (b + b' - 2.90) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'' &= x' + a'' \text{ Cos } (b + b' + b'' - 4.90) \\ y'' &= y' + a'' \text{ Sin } (b + b' + b'' - 4.90) \text{ u. f.} \end{aligned}$$

so dass überhaupt die rechtwinklichten Coordinaten irgend eines der Mittelpuncte a, a', a'', a'''... sind

$$X = a \operatorname{Cos} b - a' \operatorname{Cos}(b+b') + a'' \operatorname{Cos}(b+b'+b'') - a''' \operatorname{Cos}(b+b'+b''+b''') + $$

$$Y = a \operatorname{Sin} b - a' \operatorname{Sin}(b+b') + a'' \operatorname{Sin}(b+b'+b'') - a''' \operatorname{Sin}(b+b'+b''+b''') + $$

Ist aber X und Y bekannt, so findet man φ, Δ und r aus folgenden Gleichungen

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Y}{X}$$

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{Xy - Yx}{Xx + Yy}$$

$$r^2 = X^2 + Y^2$$

Setzt man aber der Kürze wegen

$$\frac{a'}{a} = \alpha, \ \frac{a''}{a} = \beta, \ \frac{a'''}{a} = \gamma \ldots$$

so wird man aus der zweyten dieser Gleichungen, d. h. aus

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} \varphi}$$

wenn man in ihr den Werth von tg φ aus der ersten substituirt, leicht finden

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{\alpha \operatorname{Sin} b' - \beta \operatorname{Sin}(b'+b'') + \gamma \operatorname{Sin}(b'+b''+b''') - }{1 - \alpha \operatorname{Cos} b' + \beta \operatorname{Cos}(b'+b'') - \gamma \operatorname{Cos}(b'+b''+b''') + }$$

IV. Um aber Δ in eine Reihe zu entwickeln, die nach den Potenzen und Producten von $\alpha\ \beta\ \gamma$ . . fortgeht, wollen wir

$$a = 2.90 - b'$$
$$b = 4.90 - b' - b''$$
$$c = 6.90 - b' - b'' - b'''$$
$$d = 8.90 - b' - b'' - b''' - b''''$$ u. f. setzen,

wodurch der letzte Ausdruck von tg Δ in folgenden übergeht,

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{\alpha \operatorname{Sin} a + \beta \operatorname{Sin} b + \gamma \operatorname{Sin} c + \delta \operatorname{Sin} d + }{1 + \alpha \operatorname{Cos} a + \beta \operatorname{Cos} b + \gamma \operatorname{Cos} c + \delta \operatorname{Cos} d + }$$

Ist e die Basis der natürlichen Logarithmen und der Kürze wegen

$$\varphi^a = e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}} \quad \text{und}$$

$$\psi^a = e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}$$

so wird der letzte Ausdruck

$$\frac{e^{2\;\sqrt{-1}} - 1}{e^{2\;\sqrt{-1}} + 1} = \frac{\alpha\psi^a + \beta\psi^b + \gamma\psi^c + }{2 + \alpha\varphi^a + \beta\varphi^b + \gamma\varphi^c + } \text{ oder}$$

$$e^{2\Delta\sqrt{-1}} = \frac{2+\alpha(\varphi^a+\psi^a)+\beta(\varphi^b+\psi^b)+\gamma(\varphi^c+\psi^c)+}{2+\alpha(\varphi^a-\psi^a)+\beta(\varphi^b-\psi^b)+\gamma(\varphi^c-\psi^c)+}$$

Stellt man in den letzten Ausdrücken die Werthe von φ und ψ wieder her, und nimmt auf beyden Seiten die Logarithmen, so erhält man

$$2\,\Delta\sqrt{-1} = \log(1+\alpha\, e^{a\sqrt{-1}}+\beta\, e^{b\sqrt{-1}})$$
$$-\log(1+\alpha\, e^{-a\sqrt{-1}}+\beta\, e^{-b\sqrt{-1}}+)$$

Allein in der Gleichung

$$\log(1+p+q+r+s+)$$
$$=A-\frac{B}{2}+\frac{C}{3}-\frac{D}{4}+\frac{E}{5}-$$

hängen bekanntlich die Grössen $p\,q\,r\ldots$ von den Grössen $ABC\ldots$ so ab, dass man hat

$$A-p=0$$
$$B-Ap+2q=0$$
$$C-Bp+Aq-3r=0$$
$$D-Cp+Bq-Ar+4s=0$$
$$E-Dp+Cq-Br+As-5t=0$$

Substituirt man also für $pqr\ldots$ unsere vorhergehenden Grössen

$$\alpha e^{a\sqrt{-1}},\ \beta e^{b\sqrt{-1}}\ldots$$

und entwickelt die Werthe von $A, B, C\ldots$ so sey

$$A-\frac{B}{2}+\frac{C}{3}-\frac{D}{4}+=S$$

Substituirt man eben so für $p\,q\,r\ldots$ die Grössen

$$\alpha e^{-a\sqrt{-1}},\ \beta e^{-b\sqrt{-1}}\ldots$$

und setzt

$$A-\frac{B}{2}+\frac{C}{3}-=S',$$

so ist

$$\Delta=\frac{S-S'}{2\sqrt{-1}}$$

und so erhält man nach einigen Entwicklungen die gesuchte Reihe von Δ

$$\Delta = [\alpha \operatorname{Sin} a]$$
$$+[\beta \operatorname{Sin} b-\tfrac{1}{2}\alpha^2 \operatorname{Sin} 2a]$$
$$+[\gamma \operatorname{Sin} c-\tfrac{1}{2}.2\,\alpha\beta \operatorname{Sin}(a+b)+\tfrac{1}{3}\alpha^3 \operatorname{Sin} 3a$$

$$+ [\delta \operatorname{Sin} d - \tfrac{1}{2}(2\,\alpha\gamma \operatorname{Sin}(a+c) + \beta^2 \operatorname{Sin} 2\,b)$$
$$+ \tfrac{1}{3}.3\,\alpha^2\beta \operatorname{Sin}(2\,a+b) - \tfrac{1}{4}\,\alpha^4 \operatorname{Sin} 4\,a]$$
$$+ [\varepsilon \operatorname{Sin} e - \tfrac{1}{2}(2\,\alpha\delta \operatorname{Sin}(a+d) + 2\,\beta\gamma \operatorname{Sin}(b+c))$$
$$+ \tfrac{1}{3}(3\,\alpha^2\gamma \operatorname{Sin}(2\,a+c) + 3\,\alpha\beta^2 \operatorname{Sin}(a+2\,b))$$
$$- \tfrac{1}{4}.4\,\alpha^3\beta \operatorname{Sin}(3\,a+b) + \tfrac{1}{5}\,\alpha^5 \operatorname{Sin} 5\,a + \text{etc.}]$$

von welcher Reihe das Gesetz des Fortganges deutlich ist.

V. Mit Hülfe des letzten Ausdruckes wird man nun leicht die Bewegung der Planeten in der Ellipse, so genau als man will, darstellen können. Nehmen wir der Kürze wegen an, dass die Umlaufszeiten der Mittelpuncte aller Epicykeln unter einander gleich, und jede derselben der anomalistischen Revolution des Planeten gleich sey, so dass nur die Bestimmung der verschiedenen Halbmesser der Epicykeln noch übrig bleibt. Diess vorausgesetzt, hat man für die in III gebrauchten Werthe

$$b' = b'' = b''' \ldots = 2.90 - m$$

und für die in IV angenommenen

$$a = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{b}{4} \ldots = m,$$

wo m die mittlere Anomalie bezeichnet. Substituirt man diese Werthe in den vorhergehenden Ausdrücken von tg Δ und Δ, so erhält man

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{\alpha \operatorname{Sin} m + \beta \operatorname{Sin} 2m + \gamma \operatorname{Sin} 3\,m + \delta \operatorname{Sin} 4\,m +}{1 + \alpha \operatorname{Cos} m + \beta \operatorname{Cos} 2\,m + \gamma \operatorname{Cos} 3\,m +}$$

und

$$\Delta = A \operatorname{Sin} m - \tfrac{1}{2} B \operatorname{Sin} 2\,m +$$
$$+ \tfrac{1}{3} C \operatorname{Sin} 3\,m - \tfrac{1}{4} D \operatorname{Sin} 4\,m +$$

vorausgesetzt, dass man zur Bestimmung der Grössen A, B, C... hat

$$\begin{aligned} &A - \alpha = 0 \\ &B - A\alpha + 2\beta = 0 \\ &C - B\alpha + A\beta - 3\gamma = 0 \\ &D - C\alpha + B\beta - A\gamma + 4\delta = 0 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Die elliptische Gleichung des Mittelpuncts aber ist

$$\Delta = m - v = (2\,\varepsilon - \tfrac{1}{4}\,\varepsilon^3 + \tfrac{5}{96}\,\varepsilon^5 +) \operatorname{Sin} m$$
$$- (\tfrac{5}{4}\,\varepsilon^2 - \tfrac{11}{24}\,\varepsilon^4) \operatorname{Sin} 2\,m + \ldots$$

Setzt man daher die Factoren von Sin m, Sin 2 m, Sin 3 m... von beyden Ausdrücken von Δ einander gleich, und geht z. B. bis zur vierten Potenz von ε, so findet man den Halbmesser des ersten Epicykels $= 1$

$$\text{zweyten } \alpha = 2\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{4}$$

$$\text{dritten } \beta = \tfrac{3}{4}\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^4}{24}$$

$$\text{vierten } \gamma = - \frac{\varepsilon^3}{12}$$

$$\text{fünften } \delta = \frac{\varepsilon^4}{24}$$

§. 12.

Zum Schlusse dieses Gegenstandes wollen wir uns noch ein mit den unmittelbar vorhergehenden Betrachtungen verwandtes Problem geben, und die Gleichung der Oberfläche suchen, die entsteht, wenn der Mittelpunct einer Ellipse, deren halbe grosse und kleine Axe a und b ist, sich auf der Peripherie eines Kreises bewegt, dessen Halbmesser c ist. — Diese Oberfläche kann man zuerst, als durch Rotation entstanden, betrachten. Sind nähmlich

$$x = Az \text{ und } y = Bz$$

die Gleichungen der geraden Linie, welche durch den Anfangspunct der Coordinaten geht, und mit der Axe der Rotation parallel ist, so ist die Gleichung einer Ebene, die senkrecht auf diese Axe ist,

$$Ax + By + z = \alpha$$

wo α eine willkührliche Grösse bezeichnet. Verbindet man damit die Gleichung der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi\alpha$$

deren Mittelpunct der Anfangspunct der Coordinaten, und deren Halbmesser φ (α) eine Function von α ist, so drücken beyde Gleichungen zusammen die eines Kreises aus, welchen jeder Punct der Ellipse während der Rotation beschreibt.

Nehmen wir aber an, dass die Ellipse anfänglich in der Ebene der xz sey, so sind ihre Gleichungen

$$y = 0$$
$$a^2 b^2 = b^2 z^2 + a^2 (x - c)^2$$

und da alle vier vorhergehenden Ausdrücke zugleich Statt haben müssen, so wird man, wenn man aus ihnen die drey Grössen x y z eliminirt, eine Gleichung zwischen α und $\varphi\ \alpha$ erhalten, wodurch man die unbekannte Form der Function $\varphi\alpha$, der Aufgabe gemäss, bestimmen wird. Setzt man der Kürze wegen

$$A = B = 0$$

d. h. die Rotationsaxe gleich der Axe der z, so erhält man durch jene Elimination

$$a^2 b^2 = \alpha^2 b^2 + a^2 (\sqrt{\varphi\alpha - \alpha^2} - c)^2$$

Substituirt man also in dem letzten Ausdrucke für α die Grösse z, und für $\varphi\alpha$ die Grösse $x^2 + y^2 + z^2$, so erhält man für die Gleichung der gesuchten Oberfläche

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - c)^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} z^2 \ldots . (1)$$

I. Überhaupt, sind die Gleichungen der Rotationsaxe

$$x = Az + a, \; y = Bz + b,$$

so ist die allgemeine Gleichung aller durch Rotation entstandenen Oberflächen, wenn φ eine willkührliche Function bezeichnet,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = \varphi(Ax + By + z) \ldots (I)$$

oder auch mit partieller Differentiation,

$$(b - y + Bz)\left(\frac{dz}{dx}\right) - (a - x + Az)\left(\frac{dz}{dy}\right)$$
$$+ A(b-y) - B(a-x) = 0 \ldots (II)$$

wo der erste Ausdruck das Integral des zweyten ist.

Sind daher die beyden Gleichungen

$$F = 0, \; f = 0$$

einer Kurve gegeben (F und f sind Gleichungen zwischen x y z und Constanten, und die Kurve kann auch von doppelter Krümmung seyn), und sucht man die Oberfläche, welche entsteht, wenn jene Kurve sich um eine Axe dreht, deren Gleichungen

$$x = Az + a, \; y = Bz + b$$

sind, so wird man nur aus den beyden gegebenen Gleichungen der Kurve, und aus den beyden folgenden

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + z = \alpha \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = \varphi\alpha \end{array}\right\} (III)$$

die drey Grössen x y z eliminiren, wodurch man eine Gleichung erhält, die $\varphi\alpha$ durch α und andere Constanten gibt, also die Form von der Function φ bestimmt. Substituirt man dann in dieser letzten Gleichung für α und $\varphi\alpha$ die vorhergehenden Werthe in x y z, so erhält man die Gleichung der gesuchten Fläche.

Ist aber die einzige Gleichung F = 0 einer Fläche gegeben, die sich um die Axe

$$x = Az + a, \; y = Bz + b$$

dreht, und sucht man die Gleichung einer andern Fläche, welche jene erste bewegliche Fläche in allen ihren Puncten berührt und einschliesst, so suche man aus der gegebenen Gleichung $F = o$ die partiellen Differentialien

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

uud substituire sie in der Gleichung (II), wodurch man eine Gleichung erhält, die ich durch $f = o$ bezeichnen will. Verbindet man diese beyden Gleichungen

$$F = o, \ f = o$$

mit den beyden Gleichungen (III), und behandelt man alle vier wie zuvor, so wird man daraus die Form von $\varphi\alpha$, also auch die Gleichung der gesuchten einschliessenden Fläche erhalten.

II. Man kann aber auch noch die Gleichung der oben betrachteten Oberfläche auf eine andere merkwürdige Art erhalten.

Die Gleichung der Fläche, welche durch die Rotation der Ellipse um die Axe der z entsteht, ist

$$a^2 (x^2 + y^2) + b^2 z^2 = a^2 b^2$$

Bewegt sich der Mittelpunct dieser Ellipse in einer krummen Linie, die ganz in der Ebene der xy liegt, und deren Gleichungen sind

$$x = u \text{ und } y = f(u)$$

so ist für jede Lage jenes Mittelpunctes die Gleichung der gesuchten Fläche, welche durch die Rotation des Ellipsoids entstéht,

$$(x - u)^2 + (y - fu)^2 + \frac{b^2 z^2}{a^2} = b^2 \ \ldots \ (A)$$

Geht aber der Mittelpunct des Ellipsoids in der gegebenen krummen Linie um den Bogen

$$\sqrt{du^2 + (d.fu)^2}$$

fort, so wird man für den einen Ort des Mittelpunctes haben, wenn man die Gleichung (A) in Beziehung auf u differenziirt,

$$x - u + (y - fu) \cdot \frac{d.fu}{du} = o \ \ldots \ (B)$$

und beyde Gleichungen A, B gehören offenbar der gesuchten Fläche an. Eliminirt man daher aus ihnen die Grösse u, so erhält man eine Gleichung, welche nicht anders, als die Gleichung der gesuchten Fläche selbst ist. Ist daher, wie vorhin, die Kurve in der Ebene der x y ein Kreis, dessen Halbmesser c ist, so hat man

$$x^2 + y^2 = c^2 \text{ oder}$$
$$u^2 + (fu)^2 = c^2$$

also auch

$$\frac{d.fu}{du} = \frac{-u}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

Diess vorausgesetzt, werden die Gleichungen A und B in folgende übergehen

$$(x-u)^2 + (y - \sqrt{c^2-u^2})^2 + \frac{b^2 z^2}{a^2} = b^2$$

$$x - u - (y - \sqrt{c^2-u^2}) \cdot \frac{u}{\sqrt{c^2-u^2}} = 0$$

Eliminirt man aus ihnen die Grösse u, so erhält man für die gesuchte Fläche

$$(1) \ldots\ldots \left(\sqrt{x^2+y^2} - c\right)^2 = b^2 - \frac{b^2 z^2}{a^2}$$

wie zuvor.

III. Überhaupt, wenn $F = 0$ die Gleichung einer Oberfläche zwischen $x y z$ und einer Constanten α ist, so kann man der Grösse α nach und nach alle möglichen Werthe von

$$\alpha = -\infty \text{ bis } \alpha = +\infty$$

geben, wodurch man eine Reihe von Flächen erhält, die alle nur durch die verschiedenen Werthe von α von einander verschieden sind. Die Reihe aller dieser auf einander folgenden Oberflächen wird durch eine andere Oberfläche begränzt seyn, welche jene alle umschliesst und berührt, und die wir die **Einschliessende** der Oberfläche $F = 0$ nennen wollen.

Gibt man in der allgemeinen Gleichung $F = 0$ der eingeschlossenen Fläche, nachdem α einen bestimmten Werth hatte, dieser Grösse einen andern sehr wenig veränderten Werth

$$\alpha + d\alpha,$$

so hat man die Gleichung einer neuen eingeschlossenen Fläche, die durch ihre Gestalt und Lage nur sehr wenig von der unmittelbar vorhergehenden verschieden seyn wird, und beyde Flächen werden sich in einer gewissen Linie schneiden, welche wir die **Karakteristik** nennen wollen. Diese Karakteristik ist aber offenbar die gemeinschaftliche Berührungslinie beyder auf einander folgenden eingeschlossenen Flächen mit ihrer Einschliessenden, und ihre Puncte sind die der ersten Eingeschlossenen, für welche $x y z$ sich nicht ändert, während in ihr

$$\alpha \text{ in } \alpha + d\alpha$$

übergeht, d. h. also: differentiirt man die Gleichung $F = o$ bloss in Beziehung auf α, so gehört die resultirende Gleichung für die Karakteristik, und da diese Kurve auch auf der ersten eingeschlossenen Fläche liegt, so sind die beyden Gleichungen der Karakteristik

$$F = o \ldots (A)$$

$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = o \ldots (B)$$

Gibt man also in den Gleichungen

(A), (B)

der Grösse α nach und nach alle möglichen Werthe, so erhält man alle auf einander folgende Karakteristiken, die sich alle auf der einschliessenden Fläche befinden, und aus denen, so zu sagen, die Einschliessende zusammengesetzt ist. Eliminirt man daher die Grösse α aus den Gleichungen

(A), (B)

so erhält man in xyz eine Gleichung, und diese ist die Gleichung der einschliessenden Fläche selbst.

Wenn man aber in jenen beyden Gleichungen

(A), (B),

nachdem man der Grösse α einen bestimmten Werth gegeben hat, (wodurch die Lage der Karakteristik im Raume für einen besondern Fall bestimmt wird) die Grösse

$$\alpha \text{ in } \alpha + d\alpha$$

übergehen lässt, so werden die zwey neuen Gleichungen

(A), (B)

für die nächstfolgende Karakteristik gehören, welche die vorige Karakteristik im Allgemeinen irgendwo in einem oder in mehreren Puncten schneiden wird. Diese Durchschnittspuncte sind aber offenbar jene Puncte der ersten Karakteristik, für welche die Werthe von xyz sich nicht ändern, wenn sich in den Gleichungen

(A), (B))

der Werth von α allein ändert. Daraus folgt: wenn man die beyden Gleichungen

(A), (B)

bloss in Beziehung auf α differentiirt, so gehören die beyden neuen Gleichungen für die Durchschnittspuncte beyder Karakteristiken, und weil diese Puncte sich auch auf der ersten Karakteristik befinden, weil überdiess die Differentiation von (A) die Gleichung (B) hervorbringt, so hat man für jeden dieser Durchschnittpuncte die drey Gleichungen

$$F = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

$$\left(\frac{d^2F}{d\alpha^2}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

wo α diejenige aller Karakteristiken bestimmt, auf welcher man die Puncte betrachtet, die von ihrer nächsten Karakteristik geschnitten werden sollen. Gibt man also in den letzten drey Gleichungen der Grösse α nach und nach alle ihre verschiedenen Werthe, so hat man in xyz drey Gleichungen, aus welchen man die Werthe von x, y, z finden kann, welche Werthe die Puncte der Durchschnitte zweyer nächsten Karakteristiken angeben werden, welches auch der Werth von α seyn mag. Eliminirt man daher α aus diesen drey Gleichungen, so erhält man zwey Gleichungen in xyz ohne α, und diese zwey Gleichungen werden für die Linie gehören, welche von den auf einander folgenden Durchschnittspuncten aller Karakteristiken gebildet wird, und diese Linie wird von allen Karakteristiken eben so berührt, wie die einschliessende Fläche von allen eingeschlossenen berührt wird.

IV. Übrigens, wie der Bogen der Cycloide, die durch die Bewegung eines Kreises entsteht, rectificabel ist, d. h. durch eine gerade Linie ausgedrückt werden kann, so ist auch die oben betrachtete Fläche, welche durch die Bewegung einer Kugel oder eines Ellipsoids entsteht, developpabel, d. h. diese Fläche kann, wenn sie biegsam und unausdehnbar angenommen wird, mittels einer einfachen Biegung auf einer Ebene ohne Bruch und ohne Verdopplung ausgebreitet werden. Denn die allgemeine Gleichung der developpablen Flächen zwischen den partiellen Differentialien der rechtwinklichten Coordinaten xyz ist bekanntlich

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) \cdot \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2$$

welchem Ausdrucke die Gleichung (1) in II. Genüge thut. Die endlichen Integrale dieser Differentialgleichung sind

$$\left.\begin{aligned} y - \varphi\alpha &= (x-\alpha)\frac{d.\varphi\alpha}{d\alpha} \\ z - \psi\alpha &= (x-\alpha)\frac{d.\psi\alpha}{d\alpha} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (a)$$

wo $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ willkührliche Functionen einer Grösse α bezeichnen, oder auch

$$\left.\begin{array}{l} z - \alpha = x\varphi\alpha + y\,\psi\alpha \\ 0 = 1 + x\dfrac{d.\varphi\alpha}{d\alpha} + y\dfrac{d.\psi\alpha}{d\alpha} \end{array}\right\} \ldots (b)$$

oder endlich

$$\left.\begin{array}{l} 0 = x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\dfrac{d.\varphi\alpha}{d\alpha} + (z - \psi\alpha)\dfrac{d.\psi\alpha}{d\alpha} \\ 0 = 1 + \left(\dfrac{d.\varphi\alpha}{d\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{d.\psi\alpha}{d\alpha}\right)^2 \\ -(y - \varphi\alpha)\dfrac{d^2.\varphi\alpha}{d\alpha^2} - (z - \psi\alpha)\dfrac{d^2.\psi\alpha}{d\alpha^2} \end{array}\right\} \ldots (c)$$

daher ist auch die Gleichung, die man durch die Elimination der Grösse α aus den Gleichungen a, oder b oder c erhält, die Gleichung der developpablen Fläche zwischen endlichen Ausdrücken, so wie jedes dieser Paare von Gleichungen, ohne α zu eliminiren, für die Karacteristik der developpablen Fläche gehört, die, wie man sieht, eine gerade Linie ist. Verbindet man endlich noch mit den beyden Gleichungen (b) das Differential der zweyten, oder

$$x\frac{d^2.\varphi\alpha}{d\alpha^2} + y\frac{d^2.\psi\alpha}{d\alpha^2} = 0,$$

oder auch, verbindet man mit den beyden Gleichungen (c) das Differential der zweyten, oder

$$0 = 3\frac{d.\varphi\alpha}{d\alpha}\cdot\frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha^2} + 3\frac{d.\psi\alpha}{d\alpha}\cdot\frac{d^2\psi\alpha}{d\alpha^2}$$
$$-(y - \varphi\alpha)\frac{d^3.\varphi\alpha}{d\alpha^3} - (z - \psi\alpha)\frac{d^3.\psi\alpha}{d\alpha^3}$$

so gehören nach III. die zwey Gleichungen, welche man durch die Elimination von α aus je dreyen dieser Gleichungen erhält, für die krumme Linie, welche von den auf einander folgenden Durchschnittspuncten aller Karakteristiken gebildet wird. Weiter ausgedehnt findet man diese und ähnliche interessante Untersuchungen in Monge's Application de l'Analyse à la Géometrie. Paris 1809.

Lambert Insigniores orbitae cometarum proprietates. p.

Olbers Methode Berl. astr. Jahrb. 1833.

DRITTES KAPITEL.

Bestimmung der Elemente der Planeten und Kometen aus geocentrischen Beobachtungen.

§. 1.

Der wesentlichen Eigenschaften der Bahnen der Himmelskörper, wodurch man sie von einander unterscheiden kann, oder der Elemente dieser Bahnen sind überhaupt sieben: die Grösse und Lage der grossen Axe, die Excentricität, die Neigung der Bahn und der Ort ihres Knotens, die Epoche des Planeten oder sein Ort in der Bahn für eine gegebene Zeit, und endlich die Masse desselben. Die letzte nehmen wir in den Untersuchungen dieses Abschnittes, wo wir die Planeten und Kometen nur als Puncte betrachten, oder auf ihre Grösse und Gestalt keine Rücksicht nehmen, als unendlich klein gegen die Masse der Sonne an. Um daher die ersten sechs Elemente zu bestimmen, werden überhaupt drey vollständige Beobachtungen (z. B. drey geocentrische Längen und eben so viele Breiten) hinreichen, sechs Gleichungen zu bilden, aus welchen man jene sechs Elemente, als eben soviel unbekannte Grössen, zu bestimmen hat. Nimmt man an, dass die Bahn eine Parabel sey, so fällt das erste Element oder die Grösse der Axe weg; und nimmt man die Bahn kreisförmig an, so fällt das zweyte und dritte Element, oder die Lage der Axe und die Excentricität weg, woraus folgt, dass für die Parabel die Aufgabe aus drey vollständigen Beobachtungen die Elemente zu finden, eine mehr als bestimmte Aufgabe sey, und dass für den Kreis schon zwey vollständige Beobachtungen hinreichen.

Im Folgenden wollen wir die Bezeichnungen des vorhergehenden Kapitels beybehalten, uud die zu dem heliocentrischen Ort des Planeten gehörigen Grössen mit den kleinen, die zu dem heliocentrischen Ort der Erde gehörigen Grössen mit den grossen römischen Buchstaben, endlich die zu dem geocentrischen Ort des Planeten gehörigen Grössen mit den kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen. Die rechtwinklichten Coordinaten, welche die Lage des Planeten gegen die Sonne bestimmen, sollen daher xyz, seine heliocentrische Länge und Breite l und b, und seine Entfernung von der Sonne r, so wie d die Projection dieser Entfernung auf die Ekliptik seyn. Für den heliocentrischen Ort der Erde werden also diese Grössen

X Y Z L B R D

seyn, wo wir der Kürze wegen $B = 0$, also $R = D$ setzen. Für den geocentrischen Ort des Planeten endlich werden diese Grossen seyn

$\xi\, v\, \zeta\, \lambda\, \beta\, \rho\, \delta$,

so dass man hat

v. Seq. p. 126.

$$\xi = x - X$$
$$v = y - Y$$
$$\zeta = z - Z\ ,$$

Dieselbe Grösse für eine zweyte und dritte Beobachtung wollen wir mit einem und zwey Strichen bezeichnen, und

$\vartheta\ \vartheta'\ \vartheta''$

nach der Ordnung die Zeiten zwischen der 2. und 3., zwischen der 1. und 3., und zwischen der 1. und 2. Beobachtung nennen.

§. 2.

Wenn uns die Umstände der ursprünglichen Bewegung der Himmelskörper bekannt wären, so könnten wir daraus sehr leicht die Elemente ihrer Bahnen nach den allgemeinen Gesetzen der Bewegung ableiten.

Ist a die halbe grosse Axe der Bahn, $a\varepsilon$ ihre Excentricität, c die beobachtende Geschwindigkeit für den Radius Vector, r und t die Zeit seit dem Durchgange des Planeten durch sein Perihelium, so ist, wie wir Cap. I. §. 4. N. I. gesehen haben

$$c^2 = \mu^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \text{ und}$$

$$\frac{r^2dr^2}{dt^2} = \mu^2\left(2r - \frac{r^2}{a} - a(1 - \varepsilon^2)\right).$$

Ist aber C die Geschwindigkeit des Planeten im Anfange seiner Bewegung, wo $r = a = 1$, so ist $C^2 = \mu^2$ also

$$c = C \cdot \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}$$

Kennt man also die anfängliche Geschwindigkeit, so erhält man die halbe grosse Axe aus der Gleichung

$$a = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{c^2}{C^2}}$$

und da a in der Ellipse positiv, in der Hyperbel negativ, und in der Parabel unendlich ist, so ist die Bahn eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, wenn c kleiner oder grösser, oder eben so gross als $C \cdot \sqrt{\frac{2}{r}}$ ist.

Sey φ der Winkel der Tangente mit dem Radius Vector, und ds das Element des Bogens der Bahn, so ist

$$dr = ds \operatorname{Cos} \varphi$$

Aber nach den allgemeinen Gesetzen der Bewegung ist

$$c = \frac{ds}{dt} \text{ also } c = \frac{dr}{dt \cdot \operatorname{Cos}\varphi} \text{ oder}$$

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \mu^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \operatorname{Cos.}^2 \varphi$$

Verbindet man diesen Ausdruck mit der zweyten Gleichung dieses §. so ist

$$a(1 - \varepsilon^2) = \left(2r - \frac{r^2}{a}\right) \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

woraus man die Excentricität findet.

Die Gleichung der Linien der zweyten Ordnung ist

$$\operatorname{Cos} v = \frac{a(1 - \varepsilon^2) - r}{\varepsilon r}$$

woraus man die wahre Anomalie v, und da die wahre Länge des Planeten durch die Beobachtung gegeben ist, auch die wahre Länge des Periheliums oder die Länge von a findet u. s. w.

§. 3.

Allein da uns diese Umstände der ursprünglichen Bewegung völlig unbekannt sind, so müssen wir die Elemente der Bahnen aus geocentrischen Beobachtungen auf ganz andern Wegen abzuleiten suchen.

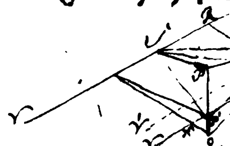
Für die Voraussetzung einer geradlinigen oder einer kreisförmigen Bahn ist diese Bestimmung der Elemente aus geocentrischen Beobachtungen sehr leicht, wie wir unten sehen werden. Aber schon für die Parabel, und noch mehr für die Ellipse werden die zu entwickelnden Gleichungen so zusammengesetzt, dass bey dem gegenwärtigen Zustande der Analysis eine directe Auflösung so gut als unmöglich ist. Um diess kurz für die Parabel zu zeigen, so wird uns eine erste Gleichung die Bedingung geben, dass die Bahn des Gestirns in einer Ebene liegt, die durch den Mittelpunct der Sonne geht. Ist dieser Mittelpunct zugleich der Anfangspunct der drey Coordinaten x y z, so wird die Gleichung dieser Ebene in den drey Beobachtungen seyn

$$\begin{aligned} z &= ax + by \\ z' &= ax' + by' \\ z'' &= ax'' + by'' \end{aligned}$$

Eliminirt man daraus die Grössen a, b, so ist

$$o = x(y''z' - y'z'') - x'(y''z - yz'') + x''(y'z - yz') \;.\,.\; \mathrm{I}.$$

und da



$SP'^2 = R^2 + \rho^2 \cos\beta^2 + 2R\rho\cos(L-\lambda)$

$SP'^2 = PP'^2 + r^2 = r^2 - \rho^2 \sin\beta^2$

$$\begin{aligned} x &= \xi + X \\ y &= v + Y \\ z &= z + Z \end{aligned}$$

$PTP' = \beta$

$\Upsilon TP' = \lambda$ [$STP'\Upsilon$ in Ebene]

$ST\Upsilon = 180 - L$

$STP' = 180 - (L - \lambda)$

und diese Ausdrücke von x y z nur die unbekannte Grösse $\rho\ \rho'\ \rho''$ enthalten, so ist die Gleichung I. eine Function von $\rho\ \rho'\ \rho''$. Da aber

$$r^2 = R^2 + \rho^2 + 2R\rho \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}(L - \lambda)$$

so ist ρ eine Function von r, und eben so

$$\rho' \text{ von } r' \text{ und } \rho'' \text{ von } r''$$

so dass also die Gleichung I als eine Function von den drey Grössen r r' r'' zu betrachten ist.

Die zweyte Gleichung wird von der Bedingung gegeben, dass die Bahn eine Parabel ist, deren Brennpunct der Mittelpunct der Sonne ist. Sind k k' k'' die geradlinigten Sehnen zwischen den Orten des Planeten in der 2. 3., in der 1. 3., und in der 1. 2. Beobachtung, und ist p der Parameter der Bahn, so ist Cap. II. §. 16.

$$p = \frac{k''^2 - (r' - r)^2}{r' + r - \sqrt{(r' + r)^2 - k''^2}}$$

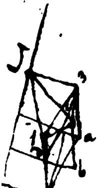
und

$$p = \frac{k'^2 - (r'' - r)^2}{r'' + r - \sqrt{(r'' + r) - k'^2}}$$

und beyde Ausdrücke einander gleich gesetzt, geben die zweyte gesuchte Gleichung, die ebenfalls eine Function von r r' r'' ist, weil

$$k''^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$$

so wie k' eine solche Function von r r' r'' ist.



$x = 3a$

$1d = (z' - z'')$

$ca^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2$

Die Bedingung endlich, dass die von dem Radius Vector beschriebenen Räume den Zeiten proportional sind, gibt (a. a. O.)

$$h \,.\, \vartheta'' = \tfrac{1}{6}\left[(r' + r + k'')^{\frac{3}{2}} - (r' + r - k'')^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$h \,.\, \vartheta' = \tfrac{1}{6}\left[(r'' + r + k')^{\frac{3}{2}} - (r'' + r - k')^{\frac{3}{2}}\right]$$

wo h eine constante Grösse ist. Auf diese Art erhält man vier Gleichungen zwischen den drey unbekannten Grössen $r\ r'\ r''$, allein man sieht, dass die directe Auflösung dieser Gleichungen die Kräfte der Analysis, oder doch die Langmuth des geduldigsten Rechners übersteigt. Wie man aber aus den Grössen $r\ r'\ r''$ die Elemente findet, wird unten gezeigt werden.

§. 4.

Es bleibt also nichts übrig, als unsere Aufgabe auf einem indirecten Wege aufzulösen.

Diese Aufgabe zerfällt in zwey wesentlich von einander verschiedene Theile, in deren erstem man aus den geocentrischen Beobachtungen die Entfernungen $r\ r'\ r''$ oder $\rho\ \rho'\ \rho''$, und in deren zweyten man aus diesen Entfernungen die Elemente der Bahn ableitet. Wir wollen uns zuerst mit den Methoden beschäftigen, welche die Geometer für die Auflösung des ersten Theiles gegeben haben.

Wir hatten zuvor die Gleichung

$$o = x(y''z' - y'z'') - x'(y''z - yz'') + x''(y'z - yz')$$

welche man auch so ausdrücken kann

$$o = y(x'z'' - x''z') - y'(xz'' - x''z) + y''(xz' - x'z)$$

oder

$$o = z(x''y' - x'y'') - z'(x''y - xy'') + z''(x'y - xy')$$

Es seyen $f''\ f'\ f$ die Flächen der ebenen Dreyecke, zwischen dem Anfangspuncte der Coordinaten, den Radien $r\ r'\ r''$, und den geradlinigen Sehnen in der 1. 2., 1. 3. und 2. 3. Beobachtung, und a b c die Neigung der Ebene der Bahn gegen die drey coordinirten Ebenen der

yz, xz und xy;

so ist

f'' Cos a;
f'' Cos b,
f' Cos c

die Projection des Dreyecks f in denselben drey Ebenen, und dieselben Projectionen sind bekanntlich auch

$\tfrac{1}{2}(y'z - yz')$
$\tfrac{1}{2}(xz' - x'z)$
$\tfrac{1}{2}(x'y - xy')$

Entwickelt man dieselben Ausdrücke für

$$f' \operatorname{Cos} a,\ f' \operatorname{Cos} b,\ f' \operatorname{Cos} c$$

und für

$$f \operatorname{Cos} a,\ f \operatorname{Cos} b,\ f \operatorname{Cos} c$$

und substituirt sie in den drey vorhergehenden Gleichungen, so erhält man

$$\begin{aligned} o &= fx - f'x' + f''x'' \\ o &= fy - f'y' + f''y'' \\ o &= fz - f'z' + f''z'' \end{aligned}$$

und wenn man eben so

$$F''\ F'\ F$$

die Flächen der geradlinigen Dreyecke zwischen dem Mittelpuncte der Sonne, und den Orten der Erde in der 1. 2., in der 1. 3., und in der 2. 3. Beobachtung nennt, so ist eben so

$$\begin{aligned} o &= FX - F'X' + F''X'' \\ o &= FY - F'Y' + F''Y'' \\ o &= FZ - F'Z' + F''Z'' \end{aligned}$$

Diese zwey Systeme lassen sich sofort auch auf folgende Art ausdrücken, für den Planeten

$$\left.\begin{aligned} o &= f\,(\delta \operatorname{Cos}\lambda + D \operatorname{Cos} L) \\ &\quad - f'\,(\delta' \operatorname{Cos}\lambda' + D' \operatorname{Cos} L') \\ &\quad + f''\,(\delta'' \operatorname{Cos}\lambda'' + D'' \operatorname{Cos} L'') \\ o &= f\,(\delta \operatorname{Sin}\lambda + D \operatorname{Sin} L) \\ &\quad - f'\,(\delta' \operatorname{Sin}\lambda' + D' \operatorname{Sin} L') \\ &\quad + f''\,(\delta'' \operatorname{Sin}\lambda'' + D'' \operatorname{Sin} L'') \\ o &= f\ \delta\ \operatorname{tg}\beta \\ &\quad - f'\ \delta'\ \operatorname{tg}\beta' \\ &\quad + f''\ \delta''\ \operatorname{tg}\beta'' \end{aligned}\right\}\ \text{I.}$$

f. Fig. p. 126:
hN = cos. λ. δ,
JR = −D. cos. L
hN − JR = x

und für die Erde

$$\left.\begin{aligned} o &= F\ D\ \operatorname{Cos} L \\ &\quad - F'\ D'\ \operatorname{Cos} L' \\ &\quad + F''\ D''\ \operatorname{Cos} L'' \\ o &= F\ D\ \operatorname{Sin} L \\ &\quad - F'\ D'\ \operatorname{Sin} L' \\ &\quad + F''\ D''\ \operatorname{Sin} L'' \end{aligned}\right\}\ \text{II.}$$

Der Kürze wegen wollen wir folgende Bezeichnungen einführen

$$\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{tg}\beta \operatorname{Sin}(\lambda'' - \lambda') \\ &\quad - \operatorname{tg}\beta' \operatorname{Sin}(\lambda'' - \lambda) \\ &\quad + \operatorname{tg}\beta'' \operatorname{Sin}(\lambda' - \lambda) \end{aligned}$$

$$A = tg\beta' \operatorname{Sin}(L - \lambda'') - tg\beta'' \operatorname{Sin}(L - \lambda')$$
$$B = tg\beta'' \operatorname{Sin}(L - \lambda) - tg\beta \operatorname{Sin}(L - \lambda')$$
$$C = tg\beta \operatorname{Sin}(L - \lambda') - tg\beta' \operatorname{Sin}(L - \lambda)$$

und geht in den drey letzten Ausdrücken

L über in L′, so soll A B C übergehen in A′ B′ C′
L ...... L″ .... A B C ...... A″ B″ C″

Multiplicirt man die

erste der Gleichungen I. durch $(\operatorname{Sin}\lambda' \, tg\beta'' - \operatorname{Sin}\lambda'' \, tg\beta')$
zweyte $(\operatorname{Cos}\lambda'' \, tg\beta' - \operatorname{Cos}\lambda' \, tg\beta'')$
dritte $(\operatorname{Cos}\lambda' \operatorname{Sin}\lambda'' - \operatorname{Cos}\lambda'' \operatorname{Sin}\lambda')$

so gibt die Summe dieser drey Producte

$$o = f(\alpha\delta + AD) - f' A' D' + f'' A'' D''$$

und eben so

$$o = f B D - f'(\alpha\delta' + B' D') + f'' B'' D''$$
$$o = f C D - f' C' D' + f''(\alpha\delta'' + C'' D'')$$

III.

Sucht man aus den beyden ersten der Gleichungen III. die Werthe von δ und δ', so erhält man

$$\frac{\delta}{\delta'} = - \frac{A' f'}{B' f} + \text{einem Reste},$$

und dieser Rest ist von der Ordnung

$$(AB' - A'B)$$

also bey kleinen und einander nahe gleichen Zwischenzeiten $\vartheta\ \vartheta''$ gegen den Quotienten $\frac{A' . f'}{B' f}$ in einer ersten Annäherung ohne Nachtheil zu vernachlässigen. Es ist daher

$$\frac{\delta}{\delta'} = - \frac{A' f'}{B' f}$$

und eben so

$$\frac{\delta'}{\delta''} = - \frac{B' f''}{C' f'}$$

$$\frac{\delta''}{\delta} = + \frac{C' f}{A' f''}$$

IV.

Ist endlich t die Zeit zwischen einer willkührlich gewählten Epoche und dem Augenblick der zweyten Beobachtung, so ist bekanntlich, wenn x y z die vorhergehende Bezeichnung hat,

$$x = x' - \vartheta'' . \frac{dx'}{dt} + \frac{\vartheta''^2}{1 . 2} . \frac{d^2x'}{dt^2} -$$

$$x'' = x' + \vartheta . \frac{dx'}{dt} + \frac{\vartheta^2}{1 . 2} . \frac{d^2x'}{dt^2} +$$

und ähnliche Ausdrücke wird man auch für yy'' und zz'' haben.

Ist aber (I. Cap. §. 4.) $\log \mu^2 = 6.4711628$, so ist (a. O. N. I.)

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = - \frac{\mu^2 x'}{r'^3}$$

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} = - \frac{\mu^2 y'}{r'^3}$$

Ist also, wie zuvor, c die Neigung der Ebene der Bahn gegen die Ebene der xy, so ist

$$2\,f\;\mathrm{Cos}\,c = x''y' - x'y'' = \frac{p\vartheta}{dt}\left(1 - \frac{\mu^2\vartheta^2}{6r'^3}\right)$$

und eben so

$$2\,f'\;\mathrm{Cos}\,c = x''y - x\,y'' = \frac{p\vartheta'}{dt}\left(1 - \frac{\mu^2\vartheta'^2}{6r'^3}\right)$$

$$2\,f''\,\mathrm{Cos}\,c = x'y - xy' = \frac{p\vartheta''}{dt}\left(1 - \frac{\mu^2\vartheta''^2}{6r'^3}\right) \quad \Bigg\}\ \mathrm{V.}$$

wo $p = y'\,dy' - x'\,dy'$ ist.

Das Vorhergehende reicht hin die vorzüglichsten der bisher gegebenen Auflösungen unsers Problems aus einer Quelle abzuleiten.

I. Setzt man in den Gleichungen III. für

$$\frac{f''}{f},\ \frac{f'}{f}$$

annähernd die Werthe

$$\frac{\vartheta''}{\vartheta},\ \frac{\vartheta'}{\vartheta}$$

so erhält man daraus die Werthe von

$$\delta\ \delta'\ \delta''.$$

Die bekannte Gleichung

$$r'^2 = D'^2 + \delta'^2\ \mathrm{Sec}^2\beta' + 2\,D'\delta'\,\mathrm{Cos}(L' - \lambda')\ .\ .\ \mathrm{VI.}$$

gibt dann den Werth von r', und mit diesem Werthe von r' erhält man aus den Gleichungen V richtigere Werthe der Grössen $f\ f'\ f''$, mit welchen man wieder aus III. richtigere Werthe von δ.. sucht u. s. w., ein Verfahren, welches sich fortsetzen lässt. Diese erste Auflösung ist von Lagrange und von Dusejour weiter ausgeführt.

Der Nachtheil dieser Auflösung besteht darin, dass der Fehler den man begeht, indem man

$$\frac{\vartheta''}{\vartheta} \text{ für } \frac{f''}{f}$$

setzt, für kleine und beynahe gleiche Zwischenzeiten, die hier vorausgesetzt werden, in dem durch die Gleichungen III. abgeleiteten Werthe von δ... vergrössert wird, wie man sich leicht überzeugen kann.

II. Substituirt man in der zweyten der Gleichungen III. die Werthe von

$$\frac{f''}{f'} \text{ und } \frac{f}{f'} \text{ aus V.,}$$

so erhält man

$$\alpha\delta' = -B'D' + \frac{B''D''\vartheta'' + BD\vartheta}{\vartheta'}\left(1 + \frac{\mu^2\,\vartheta\vartheta''}{2r'^3}\right) \ldots \text{VII.}$$

und diese Gleichung mit der VI. verbunden, gibt die Grössen r' und δ', und die Gleichungen IV. mit V. geben dann δ und δ''. Diese zweyte Auflösung, auf welche wir unten wieder zurückkommen werden, ist von Gauss in der Mon. Corr. bekannt gemacht worden.

III. Die zweyte der Gleichungen III. ist

$$\alpha f'\delta' = BfD - B'f'D' + B''f''D''$$

Aber es ist noch, wie man leicht findet, analog mit diesem Ausdrucke

$$o = BFD - B'F'D' + B''F''D''$$

Substituirt man für $f f' f''$ ihre Werthe aus V., und substituirt man in dem ersten Gliede der ersten Gleichung, da es schon in die sehr kleine Grösse α multiplicirt ist, ϑ' statt f', so gibt die Differenz beyder Gleichungen

$$\alpha\delta' =$$

$$\frac{\mu^2}{6\,\vartheta'}(BD\vartheta^3 - B'D'\vartheta'^3 + B''D''\vartheta''^3)\left(\frac{1}{D'^3} - \frac{1}{r'^3}\right)$$

und diese Gleichung mit VI. verbunden gibt nach der Elimination von δ' folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned}&D'^6 . r'^6 (r'^3 - D'^3)\\ &- 2TD'^4 r'^3 \operatorname{Cos}(L' - \lambda')(r'^3 - D'^3)\\ &- T^2 \operatorname{Sec}^2\beta' (r'^3 - D'^3)^2 = o\end{aligned}$$

wo der Kürze wegen

$$T = \frac{\mu^2}{6\,\alpha\vartheta}(BD\vartheta^3 - B'D'\vartheta'^3 + B''D''\vartheta''^3) \text{ ist.}$$

Da diese Gleichung sich durch $(r' - D')$ dividiren lässt, so ist sie für r' des siebenten Grades, und sie enthält die dritte Auflösung, die Lagrange bekannt gemacht, und in seiner neuen Ausgabe der Mécanique analytique wieder aufgenommen hat. Eine andere, minder vorzügliche, gab er in den Berl. Ephem. für 1783, womit man Berl. Jahrbuch für 1789 pag. 197 vergleichen kann.

IV. Setzt man

$$m = \frac{C'\vartheta}{A'\vartheta''}$$

also

$$\delta'' = m\delta$$

so hat man analog mit VI.

$$r^2 = D^2 + \delta^2 \operatorname{Sec}^2\beta + 2\, D\, \delta \operatorname{Cos}(L - \lambda) \qquad [Z = 0]$$

$$r''^2 = D''^2 + m^2\, \delta^2 \operatorname{Sec}^2\beta'' + 2\, m\, D''\, \delta \operatorname{Cos}(L'' - \lambda'')$$

und für die Sehne k zwischen den beyden äussersten Beobachtungen

$$k^2 = (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2$$

oder

$$\begin{aligned} k^2 &= r^2 + r''^2 \\ &- 2\, m\, \delta^2 [\operatorname{Cos}(\lambda - \lambda'') + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\beta''] \\ &- 2\, m\, D\, \delta \operatorname{Cos}(\lambda'' - L) \\ &- 2\, D''\, \delta \operatorname{Cos}(\lambda - L'') \\ &- 2\, D\, D'' \operatorname{Cos}(L - L'') \end{aligned}$$

und diese drey Gleichungen, verbunden mit dem bekannten Ausdruck für die Parabel

$$6\,\mu\,\vartheta' = (r'' + r + k)^{\frac{3}{2}} - (r'' + r - k)^{\frac{3}{2}}$$

wo $\mu = 0.017202$

geben die vier unbekannten Grössen

$r\; r''\; \delta$ und k,

und diess ist die vierte Auflösung unsers Problems, die also eine parabolische Bahn voraussetzt; dieselbe, welche Olbers bekannt gemacht hat.

V. Die zweyte der Gleichungen III ist auch

$$\alpha\delta' = -B'D' + \frac{B''\, f''\, D'' + B\, f\, D}{f + f''} \left(\frac{f + f''}{f'}\right)$$

Setzt man

$$P = \frac{f}{f''}$$

und

$$Q = 2r'^3 \left(\frac{f + f''}{f'} - 1\right)$$

so hat man

$$a\delta' =$$

$$-B'D' + \frac{B''D'' + BDP}{1+P}\left(1 + \frac{Q}{2r'^3}\right) \;\ldots\; \text{VIII.}$$

Ist aber ϑ' die Elongation in der zweyten Beobachtung, und z' die jährliche Parallaxe, so ist

$$\text{Cos}\,\vartheta' = \text{Cos}\,\beta'\,\text{Cos}\,(\lambda' - L')$$

$$r' = D'\,\frac{\text{Sin}\,\vartheta'}{\text{Sin}\,z'}$$

$$\delta' = D'\,\frac{\text{Cos}\,\beta'\,\text{Sin}\,(\vartheta' + z')}{\text{Sin}\,z'}$$

Substituirt man diese Werthe von $r'\delta'$ in der Gleichung VIII. und setzt man der Kürze wegen

$$\text{tg}\,\sigma = \frac{-\frac{a}{B'}\,\text{Cos}\,\beta'\,\text{Sin}\,\vartheta'}{1 + \frac{a}{B'}\,\text{Cos}\,\beta'\,\text{Cos}\,\vartheta'}$$

und

$$\varepsilon = \frac{B'\,D'}{B\,D\,\text{Cos}\,\sigma}\left(1 + \frac{a}{B'}\,\text{Cos}\,\beta'\,\text{Cos}\,\vartheta'\right)$$

so erhält man

$$\frac{Q\,\text{Sin}^4 z'}{2D'^3\,\text{Sin}^3\,\vartheta'} = \frac{\varepsilon.(P+1)\,\text{Sin}\,(z'-\sigma)}{P + \frac{B''\,D''}{B\,D}} - \text{Sin}\,z$$

Setzt man aber, um noch mehr abzukürzen,

$$\text{tg}\,\omega = \frac{\text{Sin}\,\sigma}{\frac{\varepsilon\,(P+1)}{P + \frac{B''\,D''}{B\,D}} - \text{Cos}\,\sigma}$$

$$c = \frac{1}{2\,D'^3\,\text{Sin}^3\,\vartheta'\,\text{Sin}\,\sigma}$$

so wird die letzte Gleichung

$$c.\,Q.\,\text{Sin}\,\omega\,\text{Sin}^4 z' = \text{Sin}\,(z' - \omega - \sigma) \;\ldots\; (\text{IX.})$$

und auf dieser Gleichung beruht die fünfte Auflösung unseres Problems, die Gauss in seinem Werke, Theoria mot. corp. coelestium bekannt gemacht hat. Übrigens sieht man leicht, dass

$$A\,\text{Cos}\,\beta'\,\text{Cos}\,\beta''$$

gleich dem sechsfachen Volum der Pyramide ist, deren Scheitel in der Sonne, und deren Basis das Dreyeck ist, welches von der

Erde in der ersten, und von dem Planeten in der zweyten und dritten Beobachtung an der Fläche des Himmels gebildet wird, und so für die übrigen

$$B \text{ Cos } \beta \text{ Cos } \beta'', \; C \text{ Cos } \beta \text{ Cos } \beta' \ldots$$

vorausgesetzt, dass der Halbmesser der Kugel gleich der Einheit ist.

§. 5.

Wir wollen zuerst die vierte dieser Auflösungen näher betrachten. Hat man aus den in IV. gegebenen vier Gleichungen die Grössen

$$r \; r'' \; \delta \; k$$

durch irgend eine der bekannten Methoden (II. Cap. I. §. 8.) also auch $\delta' = m\delta$ gefunden, so findet man die parabolischen Elemente des Kometen auf folgende Art.

Die heliocentrische Länge und Breite l b und l'' b'' in der ersten und letzten Beobachtung findet man aus

$$\left.\begin{array}{l} +r \text{ Cos b Cos } (L - l) = \delta \text{ Cos } (L - \lambda) + D \\ r \text{ Cos b Sin } (L - l) = \delta \text{ Sin } (L - \lambda) \\ r \text{ Sin b} = \delta \text{ tg } \beta \\ \text{und} \\ r'' \text{ Cos b'' Cos } (L'' - l'') = \delta'' \text{ Cos } (L'' - \lambda'') + D'' \\ r'' \text{ Cos b'' Sin } (L'' - l'') = \delta'' \text{ Sin } (L'' - \lambda'') \\ r'' \text{ Sin b''} = \delta'' \text{ tg } \beta'' \end{array}\right\} \text{(a)}$$

und die Übereinstimmung der Werthe von r r'' aus diesen Gleichungen mit den schon früher erhaltenen wird zur Prüfung der Rechnung dienen.

Ist nun ☊ die Länge des aufsteigenden Knotens, und n die Neigung der Bahn, so ist

$$\left.\begin{array}{l} \pm \text{ tg b} = \text{tg n Sin } (l - ☊) \\ \pm \text{ tg b''} = \text{tg n Sin } (l'' - ☊) \end{array}\right\}$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} \pm \text{ tg b} = \text{tg n Sin } (l - ☊) \\ \dfrac{\pm \text{ tg b''} - \text{tg b Cos } (l'' - l)}{\text{Sin } (l'' - l)} = \text{tg n Cos } (l - ☊) \end{array}\right\} \text{(b)}$$

aus welchen beyden letzten Gleichungen man l — ☊ oder ☊ und n findet, das obere Zeichen, wenn die Bewegung des Kometen direct, das untere, wenn sie rückgängig ist. Sind dann v v'' die Längen in der Bahn, so ist

$$\left.\begin{aligned} tg(v - \Omega) &= \frac{tg(l - \Omega)}{Cos\, n} \\ tg(v'' - \Omega) &= \frac{tg(l'' - \Omega)}{Cos\, n} \end{aligned}\right\} (c)$$

wo man

$$v - \Omega, v'' - \Omega$$

in denselben Quadranten nehmen muss, in welchen

$$l - \Omega, l'' - \Omega$$

liegen.

Ist dann ω die Länge des Periheliums, und q die Distanz des Periheliums vom Brennpuncte, so ist (Cap. II. §. 10)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{q}} Cos \frac{v - \omega}{2} = \frac{1}{\sqrt{r}} \\ &\frac{1}{\sqrt{q}} . Sin \frac{v - \omega}{2} = \frac{Cotg \frac{v'' - v}{2}}{\sqrt{r}} - \frac{1}{Sin \frac{v'' - v}{2} . \sqrt{r''}} \end{aligned}\right\} (d)$$

Endlich sucht man aus Barkers Tafel II. Cap. §. 9. die mittlere Bewegung M und M'', die der wahren Anomalie $v - \omega$, $v'' - \omega$ oder $\omega - v$, $\omega - v''$ entspricht (durch die Gleichung I. §. 9.), so ist, wenn T die Zeit des Durchgangs durch das Perihelium bezeichnet,

$$\begin{aligned} T &= \text{Zeit der ersten Beob.} \mp M\, nq^{\frac{3}{2}} \\ &= \text{Zeit d. dritten Beob.} \mp M''\, nq^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

wo

$$\log n = 0.0498723$$

und die obern Zeichen gelten, wenn bey directer Bewegung $v > \omega$, $v'' > \omega$, oder wenn bey retrograder Bewegung $v < \omega$, $v'' < \omega$ ist. Die Übereinstimmung beyder Werthe von T gibt die zweyte Prüfung der ganzen Rechnung.

I. Ex. Für den Kometen von 1799 hat man folgende drey Beobachtungen, die an einem Mittagsrohre und an einem Multiplicationskreise angestellt wurden.

	mit. Z. Paris		
1799 Aug. 30.	... 11h 9′ 42″	$\lambda = 125° 48' 39''3$	$\beta = 41° 53' 52''2$
Sept. 2.	... 10 36 8	$\lambda' = 132\ 53\ 48.5$	$\beta' = 45\ 54\ 48.1$
Sept. 4.	... 10 7 51	$\lambda'' = 138\ 56\ 31.2$	$\beta'' = 48\ 32\ 27.8$

$L = 337° 29' 8''.7$	$R = 1.0087218$
$L' = 340\ 22\ 26.9$	$R' = 1.0079991$
$L'' = 342\ 17\ 47.8$	$R'' = 1.0074854$

also

$$\vartheta = 1.980350 \text{ Tage},$$
$$\vartheta' = 4.957049$$
$$\vartheta'' = 2.976690$$

also nach §. 4. IV.

$$m = \frac{\delta''}{\delta} = 0.787752$$

und jene vier Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= 1.01752 - 1.71693\,\delta + 1.80493\,\delta^2 \\ r''^2 &= 1.01503 - 1.45724\,\delta + 1.41564\,\delta^2 \\ k^2 &= 0.00716 - 0.04739\,\delta + 0.08627\,\delta^2 \\ 135.84219 &= \left(\frac{r''+r+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r''+r-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}\right\}$$

Diesen Gleichungen thut sehr nahe genug

$$\delta = 0.71469$$

woraus

$$r = 0.84[illegible], \quad r'' = 0.8346$$
$$k = 0.1317, \quad \delta'' = m\delta = 0.562998$$

also

$$l = 20^\circ\ 37'\ 40''8$$
$$b = 49\ \ 26\ \ 23.1$$
$$l'' = 6^\circ\ 45'\ 39''7$$
$$b'' = 49\ \ 46\ \ 46.9$$

also der Komet rückgängig.

Daraus folgt

$$☊ = 100^\circ\ 51'\ 53''4$$
$$n = 49^\circ\ 51'\ 7''9$$

und die Argumente der Breite

$$v - ☊ = 83^\circ\ 40'\ 9''6$$
$$v'' - ☊ = 92^\circ\ 38'\ 55''0$$

und daraus Länge des Periheliums

$$\omega = 4^\circ\ 32'\ 8''2$$

kürzeste Distanz

$$q = 0.833741$$

wahre Anomalie in der ersten Beobachtung

$$v = 12^\circ\ 39'\ 35''6$$

also wenn T die Zeit zwischen der ersten Beobachtung und dem Durchgang durch das Perihelium ist

$$T = \frac{(2q)^{\frac{3}{2}}}{2\mu}\left(\operatorname{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{^3v}{2}\right)$$

$$= 6.97118 = 6^{\text{T}}\ 23^{\text{h}}\ 18'\ 30''$$
$$30.\ \text{August}\ 11^{\text{h}}\ 9'\ 42''$$

Zeit d. Durchgangs durch d. Perihel. 10″ 28′ 12″ d. 6. Sept.

Ex. II. Für den zweyten Kometen von 1813 hat man folgende Beobachtungen in Göttingen gemacht

1813	mit. Zeit Göttingen	scheinb. AR.	scheinb. Decl.
April 7.	$13^{\text{h}}\ 12'\ 2''$	$271°\ 7'\ 19''3$	$+\ 5°\ 34'\ 36''7$
14.	13 7 36	266 44 5.5	$-$ 0 33 0.8
21.	14 23 0	256 39 19.3	$-$ 12 57 56.0

woraus folgt

Zeiten		
7.55002	$\lambda = 271°\ 16'\ 38$	$\beta = 29\ \ 2\ \ 0$
14.54694	$\lambda' = 266\ \ 27\ \ 22$	$\beta' = 22\ \ 52\ \ 18$
21.59931	$\lambda'' = 256\ \ 48\ \ \ 8$	$\beta'' = 9\ \ 53\ \ 12$

und für dieselbe Zeit hat man

$L = 197\ 47\ 41 \quad \log D = 0.00091$
$L' = 204\ 38\ 45 \quad \log D' = 0.00175$
$L'' = 211\ 31\ 25 \quad \log D'' = 0.00260$

Damit findet man aus §. 4. N. IV.

$\log m' = 9.75799$

und damit aus den vier Gleichungen

$\log \delta = 9.80364 \quad \log r = 0.13900$
$\log \delta'' = 9.56163 \quad \log r'' = 0.11070$

Dann geben die Gleichungen des §. 5 nach der Ordnung

$l = 225°\ 4'\ 22''$
$l'' = 223\ \ 6\ \ 55$
$\log r = 0.13896$

$b = 14\ \ 51\ \ 39$
$b'' = \ 2\ \ 49\ \ 28$
$\log r'' = 0.11068$

$☊ = 42°\ 40'\ 8''$
$n = 81\ \ 1\ \ 3$
$v = 237\ \ 43\ \ 7$
$v'' = 225\ \ 31\ \ 32$
$\omega = 197°\ 37'\ 51''$
$\log q = 0.08469$

und

$T = 49.518 = 49.517$

also Zeit des Durchgangs des Kometen durch das Perihelium

May 19.5175

Sucht man mit diesen Elementen den geocentrischen Ort (nach Cap. II. §. 6) für die Zeit der mittleren Beobachtung, so findet man

$\lambda' = 266° \; 27' \; 15''$ also $7''$ zu klein
$\beta' = \;\; 22 \;\; 52 \;\; 18$ genau.

Ueber die vortheilhafteste Art, Kometen aufzusuchen, sehe Berl. Jahrb. 1809 p. 240. Ein treffliches Muster ihrer Berechnung aber ibid. 1810. p. 88.

§. 6.

In §. 4. N. II. hatte man

$$\alpha = -\frac{B' D'}{\delta'} + \frac{B'' D'' \vartheta'' + B D \vartheta}{\vartheta' \delta'} \left(1 + \frac{\mu^2 \vartheta \vartheta''}{2 r'^3}\right)$$

und eben dort N. III. war

$$o = B F D - B' F' D' + B'' F'' D''$$

Substituirt man in der letzten Gleichung aus §. 4. Gleichung V. den Werth von

$$F = \frac{p \vartheta}{2 dt \operatorname{Cos} c} \left(1 - \frac{\mu^2 \vartheta^2}{6 R'^3}\right) \text{ u. s. w.}$$

so kann man dieselbe nahe gleich

$$o = B D \vartheta - B' D' \vartheta' + B'' D'' \vartheta'' - B' D' \vartheta' . \frac{\mu^2 \vartheta \vartheta''}{2 R'^3}$$

setzen. Substituirt man also den Werth von

$$B D \vartheta + B'' D'' \vartheta''$$

aus der letzten Gleichung in dem vorhergehenden Werthe von α, so erhält man, wenn man die höheren Potenzen von μ^2 weglässt,

$$\frac{\alpha}{B'} . \frac{2}{\mu^2 . \vartheta \vartheta''} = -\left(\frac{1}{D'^3} - \frac{1}{r'^3}\right) \frac{D'}{\delta'} \quad . \; . \; (A)$$

und verbindet man diese Gleichung mit der folgenden

$$r'^2 = D'^2 + \delta'^2 \operatorname{Sec}^2 \beta' + 2 D' \delta' \operatorname{Cos} (L' - \lambda') \quad . \; . \; (B)$$

so kann man aus diesen beyden Gleichungen die Werthe der zwey unbekannten Grössen r' δ' finden, und dann ist

$$\delta = -\frac{A'}{B'} . \frac{\vartheta'}{\vartheta} \delta'$$

und

$$\delta'' = -\frac{C'}{B'} . \frac{\vartheta'}{\vartheta''} \delta'$$

Ex. Wir wollen folgende drey Beobachtungen der Vesta zu Grunde legen:

1807.	mittl. Zeit Paris,		
24 April	$9^h\ 5'\ 16''5$	$\lambda' = 174°\ 7'\ 33''2$	$\beta = +\ 11° 37' 24''.1$
29 April	$8\ \ 43\ \ 42.2$	$\lambda' = 173\ \ 44\ \ 21.3$	$\beta' = \ \ 11\ \ 19\ \ 42.6$
4 May	$8\ \ 22\ \ 51.2$	$\lambda'' = 173\ \ 33\ \ 33.0$	$\beta'' = \ \ 11\ \ 0\ \ 39.2$

$$
\begin{array}{llll}
L & = 213°\ 42'\ 55''5 & \log D & = 0.0028540 \\
L' & = 218\ \ 33\ \ 22.4 & \log D' & = 0.0034240 \\
L'' & = 223\ \ 23\ \ 15.5 & \log D'' & = 0.0039670
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{also } \vartheta & = 4.9855208 \text{ Tage} \\
\vartheta' & = 9.9705405 \\
\vartheta'' & = 4.9850197
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\log \alpha & = 5.3424727 \\
\log A & = 7.6214048 \\
\log A' & = 7.6537430 \\
\log A'' & = 7.6808882 \\
\log B & = 7.9368504_n \\
\log B' & = 7.9651452_n \\
\log B'' & = 7.9887417_n \\
\log C & = 7.6514234 \\
\log C' & = 7.6756959 \\
\log C'' & = 7.6956918
\end{array}
$$

Daher geben die beyden letzten Gleichungen (A) und (B)

$$r'' = 1.0158930 + \overline{0.1553219}\ \delta' + \overline{0.0170896}\ \delta'^2$$

$$\frac{1}{D'^2\,\delta'} - \frac{D'}{r'^3\,\delta'} = 0.6483616$$

wo die überstrichenen Zahlen schon Logarithmen sind.

Aus diesen beyden Gleichungen folgt

$$
\begin{array}{ll}
\log r' & = 0.3477013 \\
\log \delta' & = 0.1390755
\end{array}
$$

und daraus

$$
\begin{array}{ll}
\log \delta & = 0.1286815 \\
\log \delta'' & = 0.1506780
\end{array}
$$

Man sieht das ähnliche Verfahren mit dem des vorigen §. Auch hier erhält man nähmlich die ersten genäherten Werthe von

$$r'\ \ \delta\ \ \delta'\ \ \delta''$$

aber ohne die Voraussetzung einer parabolischen Bahn, daher die gegenwärtige Bestimmung dieser Grössen zur Auffindung der ersten genäherten e l l i p t i s c h e n Elemente der Bahn dienen kann.

Aus δ und δ'' der ersten und letzten Beobachtung findet man nämlich durch die Gleichungen (a) des §. 9. die heliocentrische Lage des Planeten

oder l b r und l'' b'' r''

und daraus die Länge ☊ des Knotens, und die Neigung n der Bahn aus den Gleichungen b, welche man auch so ausdrücken kann:

$$tg\left(\frac{l''+l}{2} - ☊\right) = \frac{Sin\,(b''+b)}{Sin\,(b''-b)}\,tg\,\frac{l''-l}{2}$$

$$tg\,n = \frac{tg\,b''}{Sin\,(l''-☊)} = \frac{tg\,b}{Sin\,(l-☊)}$$

wo tang n positiv oder negativ ist, wenn die auf die Ekliptik reducirte heliocentrische Bewegung direct oder retrograd ist. Ist so n und ☊ bekannt, so erhält man das Argument der Breite u u'' durch folgende Ausdrücke

$$tg\,u = \frac{tg\,(l-☊)}{Cos\,n}$$

$$Sin\,u = \frac{Sin\,b}{Sin\,n}$$

$$Cos\,u = Cos\,b\;Cos\,(l-☊)$$

$$tg\,u'' = \frac{tg\,(l''-☊)}{Cos\,n.}$$

$$Sin\,u'' = \frac{Sin\,b''}{Sin\,n}$$

$$Cos\,u'' = Cos\,b''\;Cos\,(l''-☊)$$

$$Sin\,(u''+u) = \frac{Sin\,(l''+l-2☊)\;Cos\,b''\;Cos\,b}{Cos\,n}$$

$$Sin\,(u''-u) = \frac{Sin\,(l''-l)\;Cos\,b''\;Cos\,b}{Cos\,n}$$

und nun ist man in den Stand gesetzt, die elliptischen Elemente zu bestimmen, denn die beyden schon gefundenen n und ☊ beziehen sich bloss auf die Lage, nicht aber auf die Gestalt der Bahn. Ehe wir aber zu der Bestimmung dieser Elemente übergehen, wollen wir zuerst noch eine Methode geben, die Werthe von

n, ☊, und u'' — u

unmittelbar zu finden.

Sind x' y' z'

die Coordinaten des heliocentrischen Orts des Planeten, und x' in der Knotenlinie, so ist

$$x' = r \operatorname{Cos} u$$
$$y' = r \operatorname{Sin} u \operatorname{Cos} n$$
$$z' = r \operatorname{Sin} u \operatorname{Sin} n$$

Wählt man aber andere Coordinaten

$$x \; y \; z$$

wo die Axe der x in der Länge N, und die der y in der Länge N + 90 liegt, und z endlich senkrecht auf der Ebene der xy steht, wofür wir die Ebene der Ekliptik annehmen, so ist

$$x = y' \operatorname{Sin} (N - ☊) + x' \operatorname{Cos} (N - ☊)$$
$$y = y' \operatorname{Cos} (N - ☊) - x' \operatorname{Sin} (N - ☊)$$

Substituirt man in diesen Gleichungen die vorigen Werthe von $x' y'$, und entwickelt man die ähnlichen Ausdrücke für $x'' y'' z''$ der dritten Beobachtung, so erhält man

$$y''z - yz'' = rr'' \operatorname{Sin} (u'' - u) \operatorname{Sin} n \operatorname{Sin} (N - ☊)$$
$$xz'' - x''z = rr'' \operatorname{Sin} (u'' - u) \operatorname{Sin} n \operatorname{Cos} (N - ☊)$$
$$xy'' - x''y = rr'' \operatorname{Sin} (u'' - u) \operatorname{Cos} n$$

und da, wenn $\delta\ \delta''$ bekannt ist, auch $x\ x'' \ldots$ bekannt sind, so geben die zwey ersten dieser Gleichungen

$$(N - ☊) \text{ und } rr'' \operatorname{Sin} (u'' - u) \operatorname{Sin} n$$

und die dritte

$$n \text{ und } rr'' \operatorname{Sin} (u'' - u)$$

Liegt $x\ x''$ in der Linie der Nachtgleichen, so ist $N = o$ also

$$xz'' - y''z = rr'' \operatorname{Sin} (u'' - u) \operatorname{Sin} n \operatorname{Sin} ☊$$
$$xz'' - x''z = rr'' \operatorname{Sin} (u'' - u) \operatorname{Sin} n \operatorname{Cos} ☊$$
$$xy'' - x''y = rr'' \operatorname{Sin} (u'' - u) \operatorname{Cos} n$$

Ist die zweyte Beobachtung, zu der $x'' y'' z''$ und u'' gehört, nach der ersten angestellt, so ist $u'' > u$. Weiss man also, dass $u'' - u < 180°$ ist, so ist die Grösse

$$rr'' \operatorname{Sin} (u'' - u) \operatorname{Sin} n$$

positiv, also kann man auch die Grösse $(N - ☊)$ ohne Zweydeutigkeit in Beziehung auf ihr Zeichen bestimmen. Ist dann

$$xy'' - x''y$$

positiv oder negativ, so ist die Bewegung des Planeten recht- oder rückläufig. Ist aber unbekannt, ob $u'' - u$ kleiner oder grösser als 180°. ist, so kann man aus diesen Ausdrücken nur überhaupt die Länge der Knotenlinie finden, ohne den auf- oder absteigenden Knoten zu unterscheiden. Der Werth von n endlich ist immer positiv, und nie grösser, als 180. Ist aber n grösser als 90, so ist die Bewegung des Planeten rückgängig. Übrigens kann man noch bemerken, dass so, wie Cos n der Cosinus der Neigung der Bahn gegen die dritte Ebene der x y ist, dass eben so

$$\text{Sin } n \text{ Sin } (N - \Omega)$$

und

$$\text{Sin } n \text{ Cos } (N - \Omega)$$

die Cosinus der Neigungen der Bahn gegen die beyden andern coordinirten Ebenen sind, so wie

$$rr'' \text{ Sin } (u'' - u)$$

die doppelte Fläche des ebenen Dreyecks ausdrückt, welches zwischen den beyden Radien r r'' enthalten ist, so wie endlich

$$\begin{array}{l} zy'' - yz'' \\ xz'' - x''z \\ xy'' - x''y \end{array}$$

die doppelten Flächen der Projectionen jenes Dreyecks auf die drey coordinirten Ebenen bezeichnen.

§. 7.

Aus den gefundenen Grössen r r' r'', den Differenzen der Argumente der Breite, oder den wahren Anomalien und der gegebenen Zwischenzeiten lassen sich die elliptischen Elemente auf verschiedene Art bestimmen. Man findet diese Methode in dem vortrefflichen Werke: Theor. mot. corp. coelest. von Gauss Lib. I. Sect. III. Unsere Absicht kann es nicht seyn, den ganzen Reichthum dieses Werkes hier zu erschöpfen, wir beschränken uns daher nur auf einige der vorzüglichsten Auflösungen dieser Aufgabe.

I. Wir wollen sehen, wie man aus der Differenz der wahren Anomalie $v' - v = 2h$, den beyden Radien r' r und der Zwischenzeit die elliptischen Elemente der Bahn finden könne.

Sey

$$e' - e = 2g$$

die Differenz der beyden excentrischen Anomalien, so ist, wenn a die halbe grosse Axe, und $a\varepsilon$ die Excentricität bezeichnet,

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \text{ Cos } e,$$

also auch

$$r' + r = 2a - 2a\varepsilon \text{ Cos } \frac{e' + e}{2} \text{ Cos } g$$

Aber man hat

$$\text{Sin } \frac{v}{2} = \text{Sin } \frac{e}{2} \sqrt{\frac{a(1+\varepsilon)}{r}}$$

und

$$\text{Cos}\,\frac{v}{2} = \text{Cos}\,\frac{e}{2}\sqrt{\frac{a\,(1-\varepsilon)}{r}},$$

also ist

$$\text{Cos}\,h = \text{Cos}\,\frac{v'}{2}\,\text{Sin}\,\frac{v}{2} + \text{Sin}\,\frac{v'}{2}\,\text{Sin}\,\frac{v}{2}$$

oder

$$\frac{(rr')^{\frac{1}{2}}}{a}\,.\,\text{Cos}\,h = \text{Cos}\,g - \varepsilon\,\text{Cos}\,\frac{e'+e}{2}\;..\;\text{I.}$$

Substituirt man diesen Werth von

$$\varepsilon\,\text{Cos}\,\frac{e'+e}{2}$$

in der vorhergehenden Gleichung, so ist

$$\text{Cos}\,g = \frac{(r\,r')^{\frac{1}{2}}\,\text{Cos}\,h \pm \sqrt{r\,r'\,\text{Cos}^2 h + 2a\,(2a - r - r')}}{2\,a}$$

oder

$$a = \frac{r + r' - 2\,\text{Cos}\,h\,\text{Cos}\,g\,\sqrt{r\,r'}}{2\,\text{Sin}^2 g}\;\ldots\;\text{II.}$$

Ist ferner t die Zwischenzeit, und $\mu = 0.0172021$, so ist

$$\frac{\mu\,t}{a^{\frac{3}{2}}} = e' - e - \varepsilon\,(\text{Sin}\,e' - \text{Sin}\,e)$$

$$= 2\,g - 2\,\varepsilon\,\text{Sin}\,g\,\text{Cos}\,\frac{e'+e}{2}$$

und wenn man in dieser Gleichung den Werth von

$$\varepsilon\,\text{Cos}\,\frac{e'+e}{2}\ \text{aus I.}$$

substituirt,

$$\frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}} = 2\,g - \text{Sin}\,2\,g + 2\,\text{Cos}\,h.\,\text{Sin}\,g\,\sqrt{\frac{r\,r'}{a^2}}$$

oder endlich, wenn man für a den Werth dieser Grösse aus II. substituirt, und der Kürze wegen

$$\frac{\sqrt{\frac{r'}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r'}}}{2\,\text{Cos}\,h} = 1 + 2\,l$$

und

$$\frac{\mu\,t}{(2\,\text{Cos}\,h\,.\sqrt{r\,r'})^{\frac{3}{2}}} = m\ \text{setzt,}$$

$$\pm m = (1 + \mathrm{Sin}^2 \tfrac{g}{2})^{\frac{1}{2}}$$

$$+ (1 + \mathrm{Sin}^2 \tfrac{g}{2})^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{2g - \mathrm{Sin}\, 2g}{\mathrm{Sin}^3 g}\right) \ldots \text{III.}$$

wo m das obere oder untere Zeichen hat, wenn Sin g positiv oder negativ ist.

Die Gleichung III enthält bloss die unbekannte Grösse

$$g = \frac{e' - e}{2},$$

man kann daher aus ihr diese Grösse bestimmen.

Um diess bequemer thun zu können, sey

$$x = \mathrm{Sin}^2 \tfrac{1}{2} g$$

so ist die letzte Gleichung

$$\pm m = (1 + x)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ (1 + x)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2g - \mathrm{Sin}\, 2g}{\mathrm{Sin}^3 g}\right)$$

Sey $X = \dfrac{2g - \mathrm{Sin}\, 2g}{\mathrm{Sin}^3 g}$

so ist, wenn man diesen Ausdruck differentiirt,

$$2(x - x^2) \cdot \frac{dX}{dx} = 4 - (3 - 6x) X$$

Setzt man also

$$X = \tfrac{4}{3} (1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 +)$$

so erhält man, wenn man diesen Werth von X und sein Differential in der letzten Gleichung substituirt, und die Factoren der gleichen Potenzen von x gleich setzt,

$$\alpha = \frac{6}{5}, \beta = \frac{8}{7} \alpha, \gamma = \frac{10}{9} \beta, \delta = \frac{12}{11} \gamma \ldots$$

also

$$X = \frac{4}{3} + \frac{4.6}{3.5} x + \frac{4.6.8}{3.5.7} x^2 + \frac{4.6.8.10}{3.5.7.9} x^3 +$$

Setzt man also

$$X = \frac{1}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x - \xi)} \text{ so ist}$$

$$\xi = x - \frac{5}{6} + \frac{10}{9X}$$

Aus dem letzten Ausdrucke wird man für jeden kleinen Werth von x die Grösse ξ leicht finden. Substituirt man nämlich in ihm den vorhergehenden Werth von X, so erhält man, wenn man die fünften und höhern Potenzen von x weglässt,

$$\begin{aligned}\xi &= 0.0571429\, x^2 \\ &+ 0.0330158\, x^3 \\ &+ 0.0205417\, x^4 \ldots \text{(A)}\end{aligned}$$

Ist aber x beträchtlich grösser, so wird man zur Berechnung von ξ folgendes Verfahren vorziehen. Es war

$$\xi = \frac{xX - \frac{5X}{6} + \frac{10}{9}}{X}$$

und der Zähler dieses Bruches wird, wenn man den oben gefundenen Werth von X substituirt, gleich

$$\frac{8}{105}\, x^2 . A$$

wo

$$A = 1 + \frac{2.8}{9}\, x + \frac{3.8.10}{9.11}\, x^2 + \frac{4.8.10.12}{9.11.13}\, x^3 +$$

also ist auch jener Zähler

$$xX - \frac{5}{6} X + \frac{10}{9} = \frac{8}{105}\, x^2 . A$$

oder

$$X = \frac{\frac{4}{3}\left(1 - \frac{12}{175}\, A x^2\right)}{1 - \frac{6}{5}\, x} \text{ und daher}$$

$$\xi = \frac{\frac{2}{35}\, A x^2 . \left(1 - \frac{6}{5}\, x\right)}{1 - \frac{12}{175}\, A x^2}$$

Eine andere Bestimmung von ξ s. m. Theor. mot. pag. 97.

Unsere vorhergehende Gleichung ist aber

$$m = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \frac{+ (1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x - \xi)}$$

Setzt man daher

$$\frac{m}{y} = \sqrt{1+x}$$

und

$$h' = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l + \xi}$$

so wird jene Gleichung

$$h' = \frac{(y-1) \cdot y^2}{\frac{1}{9} + y} \quad \ldots \text{(IV)}$$

Da nun ξ immer nur einen gegen die Einheit sehr geringen Werth hat, so wird die Auflösung unserer Gleichung folgende seyn: Man vernachlässige in einer ersten Näherung diese Grösse ξ gänzlich, und setze

$$h' = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l},$$

dann suche man y aus (IV),

und

$$x = \frac{m^2}{y^2} - 1.$$

Mit diesem Werthe von x suche man ξ aus (A), und damit h' aus

$$h' = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l + \xi}$$

und y aus IV, und wieder x aus

$$x = \frac{m^2}{y^2} - 1$$

und mit diesem neuen Werthe von x kann man wieder ξ aus (A) suchen, und das Verfahren so lange fortsetzen, bis der neue Werth von x von dem unmittelbar vorhergehenden nicht mehr verschieden ist. Hat man so x, so ist auch g aus der Gleichung

$$x = \mathrm{Sin}^2 \tfrac{1}{2} g$$

bekannt. Bequemer wird diese Auflösung, wenn man eine Tafel hat, die für jeden Werth von x den entsprechenden Werth von ξ gibt, und dieser kann man noch eine zweyte Tafel hinzufügen, die für jeden Werth von h' den Werth von y aus der Gleichung IV gibt.

Ex. Sey $h = 31° \; 27' \; 38''32$
$\log r = 0.4282792$
$\log r' = 0.4062033$
$t = 259.88477$ Tage,

so ist

$$\log m^2 = 9.3530651$$

und

$$l = 0.0863565\text{9}$$

und der erste Werth von

$$h' = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l} = 0.2451451 \; .$$

also

$$\log y^2 = 0.1722683$$
$$x = 0.06527749$$

und daraus

$$\xi = 0.0002531$$

also der verbesserte Werth von

$$h' = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l + \xi} = 0.2450779$$

und daraus

$$\log y^2 = 0.1722303$$
$$x = 0.06529078$$

und wieder

$$\xi = 0.0002532$$

wobey man stehen bleiben kann, da dieser Werth von ξ von dem vorhergehenden nur sehr wenig verschieden ist.

Hat man einen ersten genäherten Werth von y, so kann man aus der Gleichung IV. für zwey angenommene Gränzen von y den Werth von h′ suchen, zwischen welche dann der wahre Werth von y fallen wird. So ist für dieses Beyspiel

h'	$\log y^2$
0.245	0.1721887
0.246	0.1727218

und eben so

x	ξ
0.065	0.0002509
0.066	0.0002588

II. Nachdem nun so

$$g = \frac{e' - e}{2}$$

gefunden ist, hat die Bestimmung der elliptischen Elemente keine weitere Schwierigkeit. Man findet nämlich die halbe grosse Axe a aus der Gleichung II., d. h. aus der Gleichung

$$a = \frac{2(1 + \text{Sin}^2 \tfrac{1}{2} g) \text{Cos}\, h . \sqrt{rr'}}{\text{Sin}^2\, g}$$

oder auch aus

$$a = \frac{2 m^2 \text{Cos}\, h . \sqrt{rr'}}{y^2\ \text{Sin}^2\, g}$$

$$= \frac{\mu^2\ t^2}{4 y^2\ rr'\ \text{Cos}^2 h\ \text{Sin}^2 g}$$

die kleine halbe Axe $b = \sqrt{ap}$ findet man aus

$$b\ \text{Sin}\ g = \text{Sin}\ f . \sqrt{rr'}$$

oder

$$\sqrt{p} = \frac{y\, rr'\, \text{Sin}\, 2\, h}{\mu t}$$

Ist

$$\epsilon = \text{Sin}\ \varphi$$

also

$$b = a\ \text{Cos}\ \varphi$$

so ist

$$\text{Cos}\ \varphi = \frac{\text{Sin}\, g\ \text{tg}\, h}{2(1 + \text{Sin}^2 \tfrac{1}{2} g)}$$

Verbindet man ferner die Gleichung I mit der bekannten

$$r' - r = 2\, a\, \epsilon\ \text{Sin}\ g\ \text{Sin}\ \frac{e' + e}{2}$$

und mit der oben angeführten

$$r' + r = 2\, a - 2\, a\, \epsilon\ \text{Cos}\ \frac{e' + e}{2}\ \text{Cos}\ g$$

so erhält man

$$\text{tg}\ \frac{e' + e}{2} = \frac{(r' - r)\ \text{Sin}\, g}{(r' + r)\ \text{Cos}\, g - 2\ \text{Cos}\, h . \sqrt{rr'}}$$

und eben so findet man

$$\text{tg}\ \frac{v' + v}{2} = \frac{(r' - r)\ \text{Sin}\, h}{2\ \text{Cos}\, g \sqrt{rr'} - (r' + r)\ \text{Cos}\, h}$$

Da wir früher schon

$$\frac{v' - v}{2} = h$$

und jetzt

$$\frac{v' + v}{2}$$

kennen, so haben wir auch die Werthe von v und v', woraus man sofort die Lage des Periheliums findet. Endlich ist die mittlere Bewegung während der Zeit t, aus dem Vorhergehenden, gleich

$$\frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - 2\varepsilon \operatorname{Cos} \frac{e'+e}{2} \operatorname{Sin} g$$

und die Gleichheit beyder Ausdrücke wird als Prüfung der Rechnung dienen. Endlich ist die Epoche der mittlern Anomalie, die zu der Mitte zwischen beyden Beobachtungszeiten gehört

$$\frac{e'+e}{2} - \varepsilon \operatorname{Sin} \frac{e'+e}{2} \operatorname{Cos} g$$

und die mittlern Anomalien selbst, die für die beyden Zeiten gehören, sind

$$M = e - \varepsilon \operatorname{Sin} e$$

und

$$M' = e' - \varepsilon \operatorname{Sin} e'$$

deren Differenz daher gleich

$$\frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}} \text{ seyn muss.}$$

III. Man bemerke noch, dass der elliptische Sector zwischen r, r' und dem elliptischen Bogen gleich

$$\tfrac{1}{2}\mu t \,.\, \sqrt{p}$$

und das Dreyeck zwischen r' r und der Sehne gleich

$$\tfrac{1}{2}\, r r' \operatorname{Sin} 2h$$

ist, dass man also hat

$$\frac{\text{Sector}}{\text{Dreyeck}} = \frac{\mu t \sqrt{p}}{r r' \operatorname{Sin} 2h} = y$$

Ist daher y'' dieses Verhältniss des Sectors zum Dreyecke in der 1. und 2., und y in der 2. und 3. Beobachtung, so ist,

da $r r' \operatorname{Sin}(v' - v) = r r' \operatorname{Sin} 2h'' = f''$ ist,

$$\sqrt{p} = \frac{y'' f''}{\mu \vartheta''}$$

und

$$\sqrt{p} = \frac{y f}{\mu \vartheta}$$

also auch

$$\frac{f''}{f} = \frac{\vartheta'' . y}{\vartheta . y''}$$

Weiter ist die Gleichung der Linien der zweyten Ordnung

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \operatorname{Cos} v$$

$$\frac{p}{r'} = 1 + \varepsilon \operatorname{Cos} v'$$

$$\frac{p}{r''} = 1 + \varepsilon \operatorname{Cos} v''$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Ordnung durch

$$\operatorname{Sin}(v'' - v'), \; - \operatorname{Sin}(v'' - v), \; \operatorname{Sin}(v' - v)$$

so gibt die Summe dieser Producte

$$p = \frac{\operatorname{Sin}(v'' - v') - \operatorname{Sin}(v'' - v) + \operatorname{Sin}(v' - v)}{\frac{1}{r}\operatorname{Sin}(v'' - v') - \frac{1}{r'}\operatorname{Sin}(v'' - v) + \frac{1}{r''}\operatorname{Sin}(v' - v)}$$

Der Zähler dieses Bruches ist

$$2 \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(v'' - v') \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(v'' - v') - 2 \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(v'' - v') \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\left(\frac{v'' + v'}{2} - v\right)$$

$$= 4 \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(v'' - v') \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(v'' - v) \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(v' - v)$$

also ist

$$p = \frac{4 \,.\, r r' r'' \,.\, \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(v'' - v') \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(v'' - v) \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(v' - v)}{f - f' + f''}$$

oder

$$p = \frac{4 \,.\, r r' r'' \operatorname{Sin} h \operatorname{Sin} h' \operatorname{Sin} h''}{f - f' + f''},$$

und es ist

$$f - f' + f''$$

offenbar die Fläche des ebenen Dreyecks zwischen den Endpuncten der drey Radien $r\, r'\, r''$.

Da aber, wie man leicht sieht, der Nenner des letzten Ausdruckes der dritten Ordnung ist, wenn h, h', h'' Grössen der ersten Ordnung sind, so kann dieser Ausdruck zur Bestimmung des Werthes von p in der Anwendung unmittelbar nicht mit Sicherheit gebraucht werden.

Für das Beyspiel des N. I findet man durch die vorhergehenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} \log a &= 0.4424661 \\ \varphi &= 4^\circ\, 37'\, 57''78 \\ \log p &= \log(a \operatorname{Cos}^2 \varphi) = 0.4396255 \\ v &= 289^\circ\, 7'\, 39''75 \end{aligned}$$

Länge des Periheliums

$$= 146^\circ\, 0'\, 53''6.$$

$$v' = 352\;\, 2\;\, 56.39$$

$$M = 297^\circ\ 41'\ 35''65$$
$$M' = 355^\circ\ 15'\ 22''49$$

mittl. tägl. sider. Bewegung

$$769''.\ 6755$$

IV. Es gibt aber noch eine andere merkwürdige Methode, aus zwey gegebenen Radien r r' und der Differenz der wahren und excentrischen Anomalien

$$v' - v = 2\ h,\ e' - e = 2\ g$$

und der Zwischenzeit t die Elemente der Bahn zu finden.

Man hat nämlich, nach Cap. I, wenn a die halbe grosse Axe und a ε die Excentricität bezeichnet,

$$\text{Sin}\ \frac{v}{2} \cdot \sqrt{\frac{r}{a}} = \text{Sin}\ \frac{e}{2} \cdot \sqrt{1 + \varepsilon} \ldots (1)$$

$$\text{Cos}\ \frac{v}{2} \cdot \sqrt{\frac{r}{a}} = \text{Cos}\ \frac{e}{2} \cdot \sqrt{1 - \varepsilon} \ldots (2)$$

$$\text{Sin}\ \frac{v'}{2} \cdot \sqrt{\frac{r'}{a}} = \text{Sin}\ \frac{e'}{2} \cdot \sqrt{1 + \varepsilon} \ldots (3)$$

$$\text{Cos}\ \frac{v'}{2} \cdot \sqrt{\frac{r'}{a}} = \text{Cos}\ \frac{e'}{2} \cdot \sqrt{1 - \varepsilon} \ldots (4)$$

Es sey nun $2\ x = v' + v$ und

$$2\ y = e' + e$$

Man multiplicire (1) mit Sin $\frac{x+g}{2}$ und (2) mit Cos $\frac{x+g}{2}$ und addire die Producte; man multiplicire eben so (3) mit Sin $\frac{x-g}{2}$ und (4) mit Cos $\frac{x-g}{2}$ und addire die Producte, so gibt beyder Summe Differenz

$$\text{Cos}\frac{h+g}{2}\left\{\sqrt{\frac{r'}{a}} - \sqrt{\frac{r}{a}}\right\} = 2\ \text{Cos}\frac{\varphi}{2}\ \text{Sin}\ g\ \text{Sin}\ \frac{x-y}{2} \ldots (1')$$

wo $\varepsilon = \text{Sin}\ \varphi$ gesetzt wurde.

Eben so gibt

$$(1)\ \text{Sin}\ \frac{x-g}{2} + (2)\ \text{Cos}\frac{x-g}{2} - (3)\ \text{Sin}\frac{x+g}{2} - (4)\ \text{Cos}\ \frac{x+g}{2}$$

$$(1)\ \text{Cos}\ \frac{x+g}{2} - (2)\ \text{Sin}\ \frac{x+g}{2} + (3)\ \text{Cos}\frac{x-g}{2} - (4)\ \text{Sin}\ \frac{x-g}{2}$$

$$(1)\ \text{Cos}\ \frac{x-g}{2} - (2)\ \text{Sin}\ \frac{x-g}{2} + (3)\ \text{Cos}\frac{x+g}{2} - (4)\ \text{Sin}\ \frac{x+g}{2}$$

nach der Ordnung die Gleichungen

$$\text{Cos}\ \frac{h-g}{2}\left\{\sqrt{\frac{r'}{a}}-\sqrt{\frac{r}{a}}\right\}=2\ \text{Sin}\ \frac{\varphi}{2}\ \text{Sin}\, g\ \text{Sin}\ \frac{x+y}{2}\ldots(2')$$

$$\text{Sin}\ \frac{h+g}{2}\left\{\sqrt{\frac{r'}{a}}+\sqrt{\frac{r}{a}}\right\}=2\ \text{Cos}\ \frac{\varphi}{2}\ \text{Sin}\, g\ \text{Cos}\ \frac{x-y}{2}\ldots(3')$$

$$\text{Sin}\ \frac{h-g}{2}\left\{\sqrt{\frac{r'}{a}}+\sqrt{\frac{r}{a}}\right\}=2\ \text{Sin}\ \frac{\varphi}{2}\ \text{Sin}\, g\ \text{Cos}\ \frac{x+y}{2}\ldots(4')$$

Ist aber

$$\text{tg}\ (45+w)=\sqrt[4]{\frac{r'}{r}}$$

so ist

$$\text{tg}\ 2\,w=\frac{\sqrt{\frac{r'}{a}}-\sqrt{\frac{r}{a}}}{2\sqrt[4]{\frac{rr'}{aa}}}$$

$$\text{Cos}\ 2\,w=\frac{2\sqrt[4]{\frac{rr'}{aa}}}{\sqrt{\frac{r'}{a}}+\sqrt{\frac{r}{a}}}$$

und setzt man überdiess

$$X=\text{Sin}\ g\ \text{Cos}\ \frac{\varphi}{2}\ \sqrt[4]{\frac{a^2}{rr'}}$$

und

$$Y=\text{Sin}\ g\ \text{Sin}\ \frac{\varphi}{2}\ .\ \sqrt[4]{\frac{a^2}{rr'}}$$

so sind die Gleichungen (1') . . . (4')

$$\left.\begin{aligned}
\text{Cos}\ \frac{h+g}{2}\ \text{tg}\ 2\,w &= X\ .\ \text{Sin}\ \frac{x-y}{2}\\
\text{Cos}\ \frac{h-g}{2}\ \text{tg}\ 2\,w &= Y\ .\ \text{Sin}\ \frac{x+y}{2}\\
\text{Sin}\ \frac{h+g}{2}\ \text{Secant}\ 2\,w &= X\ .\ \text{Cos}\ \frac{x-y}{2}\\
\text{Sin}\ \frac{h-g}{2}\ \text{Secant}\ 2\,w &= Y\ .\ \text{Cos}\ \frac{x+y}{2}
\end{aligned}\right\}$$

und da in diesen vier Gleichungen h, g, w bekannt ist, so findet man daraus xy und XY. Hat man aber diese Werthe gefunden, so ist

$$\text{tg}\ \frac{\varphi'}{2}=\frac{Y}{X}$$

$$a = \frac{X^2 . \sqrt{rr'}}{\text{Cos}^2 \frac{\varphi}{2} \text{Sin}^2 g}$$

$$= \frac{Y^2 . \sqrt{rr'}}{\text{Sin}^2 \frac{\varphi}{2} . \text{Sin}^2 g}$$

und wenn p der halbe Parameter ist,

$$\sqrt{p} = \frac{\text{Sin h Cos} \frac{\varphi}{2}}{X} . \sqrt[4]{rr'}$$

$$= \frac{\text{Sin h Sin} \frac{\varphi}{2} . \sqrt[4]{rr'}}{Y}$$

und zur Prüfung der Rechnung die halbe kleine Axe

$$b = a \text{ Cos } \varphi = \frac{p}{\text{Cos } \varphi}$$

$$= \frac{\text{Sin h}}{\text{Sin g}} . \sqrt{rr'}$$

Ist ferner x und y bekannt, so ist auch

$$v = x - h \text{ und } v' = x + h$$

bekannt, woraus die Länge des Periheliums gefunden wird. Eben so erhält man

$$e = y - g \text{ und } e' = y + g.$$

Ferner ist die mittlere Bewegung in der Zeit t gleich

$$\frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$2 \ (g - \varepsilon \text{ Cos y Sin g})$$

Endlich ist die Epoche der mittlern Anomalie, welche zur Zeit der Mitte zwischen beyden Beobachtungen gehört

$$y - \varepsilon \text{ Sin y Cos g}$$

und zur Prüfung der Rechnung ist die Differenz der mittlern Anomalien

$$\frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}} = e - e' - (\varepsilon \text{ Sin e} - \varepsilon \text{ Sin e}')$$

V. Es gibt endlich noch eine andere Art, aus zwey gegebenen Halbmessern r r', der Differenz der wahren Anomalien

also

$$y = \frac{Ab\,(3a-b)}{6a} + \frac{Bb^3}{6a\,(b-a)} + \frac{Cb\,(3a-2b)}{6(a+b)} \text{ u. s. w.}$$

Einen andern Beweis derselben Ausdrücke wird man aus der im ersten Buche Cap. 10. §. 16. gegebenen Gleichung einer krummen Linie finden, welche für die Abscissen

$$x = 0,\ a,\ b,\ c\ ..$$

in derselben Ordnung die Ordinaten

$$y = A,\ B,\ C,\ D\ ...$$

gibt. Multiplicirt man nämlich den dort gefundenen Werth von y durch dx, und integrirt, so ist

$$y = \int \varphi(x)\,dx = \frac{A}{a.b.c.d.}\,.\int dx\,.\,a-x\,.\,b-x\,.\,c-x\,.\,d-x\,..$$

$$\frac{+B}{a.b-a.c-a.d-a.}\,.\int x dx\,.\,b-x\,.\,c-x\,.\,d-x\,..$$

$$\frac{+C}{b.a-b.c-b.d-b.}\,.\int x dx\,.\,a-x\,.\,c-x\,.\,d-x\,..$$

$$\frac{+D}{c.a-c.b-c.d-c.}\,.\int x dx\,.\,a-x\,.\,b-x\,.\,d-x\,.. \text{ u. f.}$$

Hat man also nur zwey Werthe von

$$y = A,\ B \text{ für } x = 0,\ a$$

so ist

$$\int \varphi(x)\,dx = \frac{A}{a}\int dx\,(a-x) + \frac{B}{a}\int x\,dx$$

und daher, wenn man nach der Integration $x = a$ setzt,

$$\int \varphi(x)\,dx = \frac{a}{2}\,(A+B)$$

wie zuvor.

Für drey Werthe aber ist

$$\int \varphi(x)\,dx = \frac{A}{ab}\int dx\,(a-x)\,(b-x)$$

$$\frac{+B}{a\,(b-a)}\int x\,dx\,(b-x)$$

$$\frac{+C}{b\,(a-b)}\int x\,dx\,(a-x)$$

wo man, wenn man nach der Integration $x = b$ setzt, wieder denselben Ausdruck wie zuvor erhält.

Einfacher werden diese Ausdrücke, wenn man

$$b - a = c - b = d - c \ldots$$

d. h. wenn man die auf einander folgenden Werthe von x gleich gross annimmt. So findet man für das Integral zwischen

$$x = a \text{ und } x = a + m$$

nach der Ordnung

$$\left.\begin{array}{l} \int \varphi\,(x)\,dx = \frac{m}{2}\,(\varphi\,a + \varphi\,(a+m)) \\ \text{oder} \\ \frac{m}{6}\,(\varphi\,a + 4\,\varphi\,(a + \frac{1}{2}m) + \varphi\,(a+m)) \\ \text{oder} \\ \frac{m}{8}\,(\varphi\,a + 3\,\varphi\,(a + \frac{1}{3}m) + 3\,\varphi\,(a + \frac{2}{3}m) \\ \qquad + \varphi\,(a+m)) \\ \text{oder} \\ \frac{m}{90}\,(7\,\varphi\,a + 32\,\varphi\,(a + \frac{1}{4}m) + 12\,\varphi\,(a + \frac{2}{4}m) \\ \qquad + 32\,\varphi\,(a + \frac{3}{4}m) + 7\,\varphi\,(a+m)) \text{ u. s. w.} \end{array}\right\} \text{III.}$$

VI. Um das Vorhergehende auf unsere Aufgabe anzuwenden, sey ρ der elliptische Halbmesser, welcher der wahren Anomalie V gehört, so ist die Fläche des elliptischen Sectors, welcher in der Zeit t beschrieben wird, gleich

$$\tfrac{1}{2} \int \rho^2\, dV$$

diess Integral von

$$V = v \text{ bis } V = v'$$

genommen. Bezeichnet daher p den halben Parameter der Bahn, so ist

$$\mu\, t.\, \sqrt{p} = \int \rho^2\, dV$$

Heisst also der Kürze wegen

$$v' - v = 2\,h,$$

so ist nach der ersten der Gleichungen III.

$$\int \rho^2\, dv = h\,(r^2 + r'^2) = \frac{2\,h\,r\,r'}{\mathrm{Cos}\;2\,\omega}$$

$$\text{wenn } \mathrm{tg}\,(45 + \omega) = \frac{r'}{r}$$

gesetzt wird, und der erste genäherte Werth von $\sqrt{p}$ ist

$$\sqrt{p} = \frac{2\,h\,r\,r'}{\mu\,t\,\mathrm{Cos}\;2\,\omega}$$

wir wollen diesen Werth gleich $3\,\alpha$ setzen.

Eben so ist nach der zweyten der Gleichungen III. genauer

$$\int \rho^2\, d\, v = \tfrac{1}{3} h\, (r^2 + r'^2 + 4\, R^2)$$

wo R der Halbmesser der wahren Anomalie $\frac{v + v'}{2}$ bezeichnet. Setzt man aber in dem Ausdrucke von p, welchen wir in N. III. gegeben haben,

$$r' = R,\ V' = v + h,\ v'' = v + 2\, h,$$

so ist

$$p = \frac{4\, \text{Sin}^2 \tfrac{1}{2} h\, \text{Sin}\, h}{\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \text{Sin}\, h - \frac{1}{R}\, \text{Sin}\, 2\, h},$$

oder

$$\frac{\text{Cos}\, h}{R} = \frac{\text{Cos}\, \omega}{\sqrt{r\, r'\, \text{Cos}\, 2\, \omega}} - \frac{2\, \text{Sin}^2 \tfrac{1}{2} h}{p}$$

Setzt man aber der Kürze wegen

$$\delta = \frac{2\, \text{Sin}^2 \tfrac{1}{2} h \sqrt{r r'\, \text{Cos}\, 2\, \omega}}{\text{Cos}\, \omega},$$

so ist

$$R = \frac{\text{Cos}\, h \sqrt{r r'\, \text{Cos}\, 2\, \omega}}{\text{Cos}\, \omega\, \left(1 - \frac{\delta}{p}\right)}$$

also der zweyte genäherte Werth von

$$\sqrt{p} = \alpha + \frac{\varepsilon}{\left(1 - \frac{\delta}{p}\right)^2} \;\ldots\; (A)$$

wo $\varepsilon = 2\, \alpha \left(\frac{\text{Cos}\, h\, \text{Cos}\, 2\, \omega}{\text{Cos}\, \omega}\right)^2$ ist.

Setzt man überdiess

$$\sqrt{p} = q + u,$$

wo q der genäherten Werth von $\sqrt{p}$, also u eine sehr kleine Grösse bezeichnet, deren höhere Potenzen man vernachlässigen kann, so findet man, wenn man die Gleichung (A) entwickelt,

$$\sqrt{p} = \frac{\varepsilon\, q^5 + (q^2 - \delta)\, (\alpha\, q^2 + 4 \delta q - 5 \alpha \delta)\, q}{(q^2 - \delta)\, (q^3 + 3 \delta q - 4 \alpha \delta)}$$

und in diesem Ausdrucke kann man für q den oben gefundenen ersten Werth oder 3 α substituiren. Setzt man dann der Kürze wegen

$$\beta = \frac{\delta}{27\, \alpha^2}$$

und

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{(1-3\beta)\,\alpha},$$

so erhält man

$$\sqrt{p} = \frac{\alpha(1+\gamma+21\beta)}{1+5\beta} \;\ldots\; (I)$$

und diess ist der gesuchte Ausdruck von $\sqrt{p}$. Wollte man ihn weniger genau, aber für die Ausübung bequemer, so könnte man

$$\text{Cos}\,\omega = \text{Cos}\,2\omega = 1$$

setzen, und den erhaltenen Ausdruck in eine Reihe entwickeln, die nach den Potenzen von h fortgeht, wodurch man erhält

$$p = p'\left(1 - \tfrac{4}{3}h^2 + \tfrac{4}{3}\frac{h^2\sqrt{rr'}}{p'}\right) \;\ldots\; (II)$$

wo

$$\sqrt{p'} = \frac{2\,h\,rr'}{\mu t} \text{ ist.}$$

Entwickelt man eben so den in I gegebenen Werth von $\sqrt{p}$ in eine Reihe, die nach den Potenzen von Sin 2 h fortgeht, und setzt

$$\sqrt{p''} = \frac{rr'\,\text{Sin}\,2\,h}{\mu t}$$

so ist

$$\sqrt{p} = \left(1 + \frac{\text{Sin}^2\,2h.\sqrt{rr'}}{6\,p''}\right)\sqrt{p''} \;..\; \text{III.}$$

oder kürzer

$$p = p'' + \tfrac{1}{3}\,\text{Sin}^2\,2h\,.\,\sqrt{rr''} \;..\; \text{IV.}$$

In dem vorhergehenden Beyspiele war

$$\log r = 0.4282792$$
$$\log r' = 0.4062033$$
$$h = 31^\circ\,27'\,38''32$$
$$t = 259.88477$$

Daraus folgt

$$\omega = -1^\circ\,27'\,20''14$$
$$\log \alpha = 9.7182348$$
$$\beta = 0.04535216$$
$$\gamma = 1.681127$$

also nach der Gleichung (I)

$$\log p = 0.4396054,$$

welcher Werth nach N. III. um

0.0000181

zu klein ist. Die minder genaue Gleichung II. gibt

$$0.4368730$$

die III. gibt

$$0.41598$$

und die IV. endlich gibt

$$0.40511$$

§. 8.

Die beyden vorhergehenden Bestimmungen der Elemente setzen aber eine bloss genäherte Kenntniss der Grössen

$$\delta\ \delta'' \text{ oder } r r'',\ v''-v$$

voraus, und sie geben, wie man sieht, kein Mittel diese Näherung der Wahrheit näher zu führen. Beyde Auflösungen gründen sich überdiess auf die zweyte der Gleichungen III. des §. 4., nämlich auf

$$\alpha\delta' = -B'D' + BD\,\frac{f}{f'} + B''\,D''\,\frac{f''}{f'}$$

und man hat in der ersten Annäherung

$$\frac{f}{f'} = \frac{\vartheta}{\vartheta'},\ \text{und}\ \frac{f''}{f'} = \frac{\vartheta''}{\vartheta'}$$

vorausgesetzt.

Betrachtet man aber

$$f\ f'\ f''$$

als Grössen der ersten Ordnung, so sind auch

$$B\ B'\ B''$$

Grössen der ersten Ordnung, die Grösse α aber ist wenigstens der dritten Ordnung, also lässt sich bey dieser Voraussetzung von $\frac{f}{f'}$ und $\frac{f''}{f'}$ aus der obigen Gleichung der Werth von δ' nie genau bestimmen, da ein Fehler der zweyten Ordnung, den man in $\frac{f}{f'}$ und $\frac{f''}{f'}$ begangen hat, in dem Werthe von δ' schon einen Fehler der Ordnung Null hervorbringt.

I. Gibt man aber jener Gleichung die Form, welche wir §. 4 N. V angenommen haben, nämlich

$$\alpha\delta' = -B'D' + \frac{BDf + B''D''f''}{f + f''}\cdot\left(\frac{f+f''}{f'}\right)$$

so lässt sich leicht zeigen, dass der Werth von

$$\frac{B D f + B'' D'' f''}{f + f''},$$

der aus der nicht völlig richtigen Voraussetzung

$$\frac{f}{f''} = \frac{\vartheta}{\vartheta''}$$

folgt, nur einen Fehler der vierten, ja selbst, wenn die Zeiten

$$\vartheta \text{ und } \vartheta''$$

gleich sind, nur einen Fehler der fünften Ordnung haben wird, woraus folgt, dass die oben angezeigte Unbestimmtheit von δ' nicht daher kömmt, dass man

$$\frac{f''}{f} = \frac{\vartheta''}{\vartheta}$$

gesetzt hat, sondern daher, dass man noch überdiess auch die Grössen

$$f' \text{ und } \vartheta'$$

einander proportionirt angenommen hat, denn durch diese letzte Annahme wird statt

$$\frac{f + f''}{f'}$$

der minder genaue Werth

$$\frac{\vartheta + \vartheta''}{\vartheta'} = 1$$

eingeführt, von dem der wahre Werth um eine Grösse der zweyten Ordnung verschieden ist. Denn es war §. 7. III.

$$f - f' + f'' = \frac{4\, r\, r'\, r'' \operatorname{Sin} h \operatorname{Sin} h' \operatorname{Sin} h''}{p}$$

Dividirt man diesen Ausdruck durch f', und bemerkt, dass

$$f = r'\, r'' \operatorname{Sin} 2\, h = 2\, r'\, r'' \operatorname{Sin} h \operatorname{Cos} h$$

und eben so

$$f' = 2\, r\, r'' \operatorname{Sin} h' \operatorname{Cos} h',\; f'' = 2\, r\, r' \operatorname{Sin} h'' \operatorname{Cos} h''$$

ist, so erhält man

$$\frac{f + f''}{f'} = 1 + \frac{f\, f''}{2\, p \cdot r\, r'\, r'' \operatorname{Cos} h \operatorname{Cos} h' \operatorname{Cos} h''}$$

$$= 1 + \frac{\mu^2\, \vartheta\, \vartheta''}{2\, \eta\, \eta''\, r\, r'\, r'' \operatorname{Cos} h \operatorname{Cos} h' \operatorname{Cos} h''}$$

Da nun die Cosinus der Winkel h h' h'' so wie die Grössen

$\eta\,\eta''$ von der Einheit nur um Grössen der zweyten Ordnung verschieden sind, so begeht man, wenn man für

$$\frac{f+f''}{f'}$$

den genäherten Werth

$$1+\frac{\mu^2\,\vartheta\,\vartheta''}{2\,r\,r'\,r''}$$

annimmt, einen Fehler der vierten Ordnung, und wenn man daher die vorhergehende Gleichung so annimmt

$$\alpha\,\delta' = -\,B'\,D' + \frac{B\,D\,\vartheta + B''\,D''\,\vartheta''}{\vartheta'}\left(1+\frac{\mu^2\,\vartheta\,\vartheta''}{2\,r\,r'\,r''}\right)$$

so folgt daraus für δ' ein Fehler, der bloss der zweyten Ordnung ist, wenn die Zwischenzeiten $\vartheta\,\vartheta''$ sehr nahe gleich sind, und man sieht leicht, dass dieser Fehler nicht beträchtlich vergrössert werden kann, wenn man auch in der letzten Gleichung r'^3 statt $r\,r'\,r''$ setzt, woraus man von selbst sieht, dass die Form, welche unsere Gleichung (in §. 4. N. V. Gleichung VIII) erhalten hat, zur Bestimmung von δ' sehr vortheilhaft ist.

II. Setzt man nämlich, wie dort,

$$P=\frac{f}{f''}$$

und

$$Q = 2\,r'^3\left(\frac{f+f''}{f'}-1\right)$$

so hat man

$$\alpha\,\delta' = -\,B'\,D' + \frac{B''\,D''+B\,D\,.\,P}{1+P}\,.\left(1+\frac{Q}{2\,r'^3}\right)$$

und man wird für die genauen Werthe von P und Q haben

$$P=\frac{\vartheta''\,\eta}{\vartheta\,\eta''}$$

und

$$Q=\frac{\mu^2\,r'^3\,\vartheta\,\vartheta''}{r\,r''\,\eta\,\eta''\,\mathrm{Cos}\,h\,\mathrm{Cos}\,h'\,\mathrm{Cos}\,h''}\;\ldots\;(\mathrm{I})$$

wofür man also in einer ersten Annäherung setzen kann

$$P=\frac{\vartheta''}{\vartheta}$$

und

$$Q=\mu^2\,\vartheta\,\vartheta''\;\ldots\;(\mathrm{II})$$

Durch welche Voraussetzung nach dem Vorhergehenden in dem Werthe von δ', also auch in dem von δ und δ'' nur Fehler der zweyten Ordnung begangen werden, wenn die Zeiten $\vartheta\,\vartheta''$

einander sehr nahe gleich sind. Hat man nun mit diesen genäherten Werthen von P Q (in II) auf irgend eine Art die Grössen r r′ r″ und h h′ h″ erhalten, so kann man nach §. 7. I. aus der 1. u. 2. Beobachtung die Grösse y, die hier η'' und aus der 2. u. 3. Beobachtung die Grösse y, die hier η heissen soll, finden, wodurch man aus (I) die genäherten Werthe von P und Q erhält, mit welchen man wieder in §. 7. I die verbesserten Werthe von η'' und η sucht, und das Verfahren so lange fortsetzt, bis die neuen Werthe dieser Grössen von den unmittelbar vorhergehenden nicht mehr verschieden sind.

Das Vorhergehende wird hinreichen, den Weg zu bezeichnen, welchen Gauss in seinem vortrefflichen Werke gewählt hat, dieses schwere Problem aufzulösen. Es ist nun noch übrig, sein Verfahren umständlich anzugeben.

§. 9.

Es seyen (Fig. 2) A A′ A″ die drey heliocentrischen Orte der Erde, B B′ B″ die geocentrischen, und C C′ C″ die heliocentrischen Orte des Planeten. Man ziehe die grössten Kreise A B, A′ B′, A″ B″, und nenne $\gamma\,\gamma'\,\gamma''$ die Neigungen dieser Kreise gegen die Ekliptik A A″, und $\delta\,\delta'\,\delta''$ die Bogen A B, A′ B′, A″ B″, die drey ersten von 0 bis 360, die drey letzten von 0 bis 180 gezählt. Sind wie bisher $\lambda\,\lambda'\,\lambda''$ und $\beta\,\beta'\,\beta''$ die geocentrischen Längen und Breiten des Planeten, und L L′ L″ die heliocentrischen Längen der Erde, so hat man

$$\text{I.} \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{Sin}(\lambda - L)}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\operatorname{tg}(\lambda - L)}{\operatorname{Cos}\gamma}$$

und zur Prüfung

$$\operatorname{Sin}\delta = \frac{\operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}\gamma}$$

$$\operatorname{Cos}\delta = \operatorname{Cos}\beta\operatorname{Cos}(\lambda - L)$$

Ähnliche Ausdrücke hat man für $\gamma'\,\delta'$ und $\gamma''\,\delta''$.

II. Wir wollen nun auch die Lagen dieser drey Kreise unter einander suchen. Schneiden sich der 1. u. 2. in D″, der 2. u. 3. in D, und der 1. u. 3. in D′, so sey

$$A'\,D\,A'' = \varepsilon,$$
$$A\,D'\,A'' = \varepsilon',$$
$$A\,D''\,A' = \varepsilon'',$$

so hat man in dem Dreyecke A′ D A″

$$\mathrm{Sin}\,\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,(A'D + A''D) = \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,(L'' - L')\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,(\gamma'' + \gamma')$$

$$\mathrm{Sin}\,\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,(A'D + A''D) = \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,(L'' - L')\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,(\gamma'' - \gamma')$$

$$\mathrm{Cos}\,\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,(A'D - A''D) = \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,(L'' - L')\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,(\gamma'' + \gamma')$$

$$\mathrm{Cos}\,\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,(A'D - A''D) = \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,(L'' - L')\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,(\gamma'' - \gamma')$$

wo $\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon$ und $\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon$ immer positiv ist.

Die übrigen sechs Grössen $A\,D'$, $A''\,D'$, ε' und $A\,D''$, $A'\,D''$, ε'' folgen aus ähnlichen Gleichungen, wenn man in den vorhergehenden

$$A'\,D \quad A''\,D \quad \varepsilon \quad L'' - L' \quad \gamma'' \quad \gamma'$$

verwandelt in

$$A\,D' \quad A''D' \quad \varepsilon' \quad L'' - L \quad \gamma'' \quad \gamma$$

oder in

$$A\,D'' \quad A'D'' \quad \varepsilon'' \quad L' - L \quad \gamma' \quad \gamma$$

Zur Prüfung der Rechnung hat man

$$\frac{\mathrm{Sin}\,(A\,D' - A\,D'')}{\mathrm{Sin}\,\varepsilon} = \frac{\mathrm{Sin}\,(A'\,D - A'\,D'')}{\mathrm{Sin}\,\varepsilon'} = \frac{\mathrm{Sin}\,(A''\,D - A''\,D')}{\mathrm{Sin}\,\varepsilon''}$$

III. Man verbinde nun die zwey äussersten geocentrischen Orte des Planeten $B\ B''$ durch einen grössten Kreis, und suche dessen Durchschnitt B^* mit dem Kreise $A'\,B'$. Ist λ^* β^* die Länge und Breite dieses Punctes B^*, und $\delta' - \sigma$ dessen Entfernung von dem Puncte A', also $B^*\,B' = \sigma$, so hat man, da $B\ B^*\ B''$ in denselben grössten Kreisen liegen,

$$0 = \mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,(\lambda'' - \lambda^*) - \mathrm{tg}\,\beta^*\,\mathrm{Sin}\,(\lambda'' - \lambda) + \mathrm{tg}\,\beta''\,\mathrm{Sin}\,(\lambda^* - \lambda)$$

Ist nämlich x die Neigung des Kreises $B\ B^*\ B''$ gegen die Ekliptik, und y der Bogen der Ekliptik, der zwischen diesem (verlängerten) Kreise und dem Lothe von B auf die Ekliptik enthalten ist, so ist

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{Sin}\,y} = \frac{\mathrm{tg}\,\beta^*}{\mathrm{Sin}\,(y + \lambda^* - \lambda)} = \frac{\mathrm{tg}\,\beta''}{\mathrm{Sin}\,(y + \lambda'' - \lambda)}$$

und man eliminirt y aus diesen Gleichungen, um den vorhergehenden Ausdruck zu erhalten.

Substituirt man in diesem Ausdruck für $\mathrm{tg}\,\beta^*$ die Grösse

$$\mathrm{tg}\,\beta^* = \mathrm{tg}\,\gamma'\,\mathrm{Sin}\,(\lambda^* - L')$$

und setzt man

$$\mathrm{Sin}\,(\lambda'' - \lambda^*) = \mathrm{Sin}\,(\lambda'' - L')\,\mathrm{Cos}\,(\lambda^* - L)$$
$$- \mathrm{Cos}\,(\lambda'' - L')\,\mathrm{Sin}\,(\lambda^* - L')$$

$$\mathrm{Sin}\,(\lambda^* - \lambda) = \mathrm{Sin}\,(\lambda^* - L')\,\mathrm{Cos}\,(\lambda - L')$$
$$- \mathrm{Cos}\,(\lambda^* - L')\,\mathrm{Sin}\,(\lambda - L')$$

und bemerkt dann, dass

$$\mathrm{tg}\,(\delta' - \sigma) = \frac{\mathrm{tg}\,(\lambda^* - L')}{\mathrm{Cos}\,\gamma'},$$

ist, so hat man

$$\mathrm{tg}\,(\delta' - \sigma) = \frac{\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,(\lambda'' - L') - \mathrm{tg}\,\beta''\,\mathrm{Sin}\,(\lambda - L')}{\mathrm{Cos}\,\gamma'\,(\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,(\lambda'' - L') - \mathrm{tg}\,\beta''\,\mathrm{Cos}\,(\lambda - L')) + \mathrm{Sin}\,\gamma'\,\mathrm{Sin}\,(\lambda'' - \lambda)}$$

und man kann σ immer zwischen $-90°$ und $+90°$ annehmen. Übrigens sieht man, dass die Grösse σ, die von der Krümmung des geocentrischen Bogens abhängt, immer nur eine geringe Grösse seyn wird.

IV. Indem wir nun zu den heliocentrischen Orten C C′ C″ des Planeten übergehen, wollen wir, wie zuvor, r r′ r″ die Radii Vectores desselben, so wie R R′ R″ oder D D′ D″ die Radii Vectores der Erde, und ρ ρ' ρ'' die Entfernungen des Planeten von der Erde nennen. Die Differenzen der heliocentrischen Längen in der Bahn seyen wieder

$$C'\,C'' = 2\,h$$
$$C\,C'' = 2\,h'$$
$$C\,C' = 2\,h''$$

und die doppelten geradlinichten Dreyecke,

$$r'\,r''\,\mathrm{Sin}\,2\,h = f$$
$$r\,r''\,\mathrm{Sin}\,2\,h' = f'$$
$$r\,r'\,\mathrm{Sin}\,2\,h'' = f''$$

Diess vorausgesetzt, ist

$$h' = h + h''.$$
$$A\,C + C\,B = \delta,$$
$$A'\,C' + C'\,B' = \delta',$$
$$A''\,C'' + C''\,B'' = \delta''$$

und

$$\frac{\mathrm{Sin}\,\delta}{r} = \frac{\mathrm{Sin}\,A\,C}{\rho} = \frac{\mathrm{Sin}\,C\,B}{R}$$
$$\frac{\mathrm{Sin}\,\delta'}{r'} = \frac{\mathrm{Sin}\,A'\,C'}{\rho'} = \frac{\mathrm{Sin}\,C'\,B'}{R'}$$
$$\frac{\mathrm{Sin}\,\delta''}{r''} = \frac{\mathrm{Sin}\,A''C''}{\rho''} = \frac{\mathrm{Sin}\,C''\,B''}{B''}$$

und aus diesen Gleichungen folgt, dass man die Grössen $r\ r'\ r''$ und $\rho\ \rho'\ \rho''$ hat, so bald man die Lage der Puncte $C\ C'\ C''$ kennt.

V. Es ist also noch zu zeigen, wie man diese Lage der Puncte $C\,C'\,C''$ erhält, wenn man die Grössen

$$P = \frac{f''}{f}$$

und

$$Q = 2r'^3 \left(\frac{f+f''}{f'} - 1\right)$$

aus §. 8. II. als bekannt voraussetzt.

Schneiden sich die grössten Kreise $B''B^*B$ und $C''\,C'\,C$ in dem Puncte N, so ist

$$\begin{aligned} NC'' - NC' &= 2\,h \\ NC'' - NC &= 2\,h' \\ NC' - NC &= 2h'' \end{aligned}$$

und man hat

$$\begin{aligned} o = &\ \text{Sin}\ 2\ h\ \text{Sin}\ NC \\ - &\ \text{Sin}\ 2\ h'\ \text{Sin}\ NC' \\ + &\ \text{Sin}\ 2\ h''\ \text{Sin}\ NC'' \end{aligned}$$

Es seyen nun $c\ c'\ c''$ die senkrechten Entfernungen der Puncte $C\ C'\ C''$ von dem Kreise $B\ B^*\ B''$ und eben so $d\ d'\ d''$ die Entfernungen der Puncte $D\ D'\ D''$ von demselben Kreise $B\,B^*\,B''$. Da die

$$\text{Sin}\ c,\ \text{Sin}\ c',\ \text{Sin}\ c''$$

in derselben Ordnung den

$$\text{Sin}\ NC,\ \text{Sin}\ NC',\ \text{Sin}\ NC''$$

proportionirt sind, so hat man nach der vorhergehenden Gleichung

$$\begin{aligned} o = &\ \text{Sin}\ 2\ h\ \text{Sin}\ c \\ - &\ \text{Sin}\ 2\ h'\ \text{Sin}\ c' \\ + &\ \text{Sin}\ 2\ h''\ \text{Sin}\ c'' \end{aligned}$$

oder wenn man durch $r\ r'\ r''$ multiplicirt

$$\begin{aligned} o = &\ f\ r\ \text{Sin}\ c \\ - &\ f'\ r'\ \text{Sin}\ c' \\ + &\ f''\ r''\ \text{Sin}\ c'' \end{aligned}$$

Weiter findet man leicht, da rechtwinklichte Dreyecke, die einen schiefen Winkel gemeinschaftlich haben, ähnlich sind

$$-\operatorname{Sin} c = \frac{\operatorname{Sin} d' \operatorname{Sin} CB}{\operatorname{Sin}(A\,D' - \delta)}.$$

$$-\operatorname{Sin} c' = \frac{\operatorname{Sin} d \operatorname{Sin} C'B^*}{\operatorname{Sin}(A'\,D - \delta' + \sigma)}$$

$$-\operatorname{Sin} c'' = \frac{\operatorname{Sin} d' \operatorname{Sin} C''B''}{\operatorname{Sin}(A''D' - \delta'')}$$

$$= \frac{\operatorname{Sin} d \operatorname{Sin} C''B''}{\operatorname{Sin}(A''\,D - \delta'')}$$

Dividirt man also die vorhergehende Gleichung durch r'' Sin c'', und substituirt die vorhergehenden Werthe von

Sin c, Sin c', Sin c''

so hat man

$$o = \frac{fr}{r''} \cdot \frac{\operatorname{Sin} C\,B \operatorname{Sin}(A''\,D' - \delta'')}{\operatorname{Sin} C''B'' \operatorname{Sin}(A\,D' - \delta)}$$

$$- \frac{f'r'}{r''} \cdot \frac{\operatorname{Sin} C'B^* \operatorname{Sin}(A''\,D - \delta'')}{\operatorname{Sin} C''B'' \operatorname{Sin}(A'\,D - \delta' + \sigma)} + f''$$

Setzt man also

$$\frac{R \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Sin}(A''D' - \delta'')}{R'' \operatorname{Sin} \delta'' \operatorname{Sin}(A\,D' - \delta)} = a$$

$$\frac{R' \operatorname{Sin} \delta' \operatorname{Sin}(A''\,D - \delta'')}{R'' \operatorname{Sin} \delta'' \operatorname{Sin}(A'D - \delta' + \sigma)} = b$$

und bezeichnet man den Bogen $C'\,B'$ durch z, so gibt die letzte Gleichung

$$o = a\,f - b\,f' \cdot \frac{\operatorname{Sin}(z - \sigma)}{\operatorname{Sin} z} + f'' \;..\; (a)$$

Aus dieser Gleichung und

$$P = \frac{f''}{f}$$

folgt

$$(f + f'')\,\frac{P + a}{P + 1} = bf'\,\frac{\operatorname{Sin}(z - \sigma)}{\operatorname{Sin} z}$$

Da aber

$$Q = 2r'' \left(\frac{f + f''}{f'} - 1\right)$$

und

$$r' = \frac{R' \operatorname{Sin} \delta'}{\operatorname{Sin} z}$$

so ist die letzte Gleichung

$$\text{Sin } z + \frac{Q \text{ Sin}^4 z}{2 R'^3 \text{ Sin}^3 \delta'} = b . \frac{P+1}{P+a} \text{ Sin } (z-\sigma)$$

oder

$$\frac{Q \text{ Sin}^4 z}{2 R'^3 \text{ Sin}^3 \delta'}$$
$$= \left(b . \frac{P+1}{P+a} - \text{Cos } \sigma\right) \text{Sin } (z-\sigma)$$
$$- \text{Sin } \sigma \text{ Cos } (z-\sigma)$$

Ist also der Kürze wegen

$$c = \frac{1}{2 R'^3 \text{ Sin}^3 \delta' \text{ Sin } \sigma}$$

und

$$\text{tg } \omega = \frac{\text{Sin } \sigma}{b . \frac{P+1}{P+a} - \text{Cos } \sigma}$$

so hat man

$$c \, Q \text{ Sin } \omega \text{ Sin}^4 z = \text{Sin } (z - \omega - \sigma) \, . \, . \, (A)$$

und aus dieser Gleichung, in welcher alles ausser z bekannt ist, wird man diese Grösse durch eine der bekannten Methoden leicht bestimmen. Diese Gleichung haben wir schon oben §. 4. N. V. auf analytischem Wege erhalten.

VI. Ist z bekannt, so hat man auch r' aus

$$r' = \frac{R' \text{ Sin } \delta'}{\text{Sin } z}$$

und aus der Gleichung (A)

$$\frac{r' f'}{f} = \frac{(P+a) R' \text{ Sin } \delta'}{b \text{ Sin } (z-\sigma)}$$

und

$$\frac{r' f'}{f''} = \frac{1}{P} . \frac{r' f'}{f}$$

Um nun noch r r'' und $C D' = \varepsilon$, $C'' D' = \varepsilon''$ zu finden, hat man offenbar

$$\text{Sin Distanz des Punctes } C' \text{ von dem Kreise } CB$$
$$= - \text{Sin } \varepsilon'' \text{ Sin } C' D''$$
$$= - \text{Sin } \varepsilon'' \text{ Sin } (z + A' D' - \delta')$$

und eben so

$$\text{Sin Distanz des Punctes } C'' \text{ von demselben Kreise } CB$$
$$= - \text{Sin } \varepsilon' \text{ Sin } C'' D'$$

Aber dieselben Sinus verhalten sich auch, wie

Sin CC', Sin CC''

d. h. wie

$$\frac{f''}{rr'}, \frac{f'}{rr''}$$

oder endlich wie

$$f'' r'', f' r'$$

daher erhält man, wenn man diese beyden Sinus durch einander dividirt,

$$\left.\begin{array}{l} r'' \operatorname{Sin} z'' = \frac{r' f'}{f''} \cdot \frac{\operatorname{Sin} \varepsilon''}{\operatorname{Sin} \varepsilon'} \operatorname{Sin} (z + A' D'' - \delta') \\ \text{und auf dieselbe Art} \\ r \operatorname{Sin} z = \frac{r' f'}{f} \cdot \frac{\operatorname{Sin} \varepsilon}{\operatorname{Sin} \varepsilon'} \operatorname{Sin} (z + A' D - \delta') \end{array}\right\}$$

Weiter war in IV.

$$r \operatorname{Sin} C B = R \operatorname{Sin} \delta$$

und

$$r'' \operatorname{Sin} C'' B'' = R'' \operatorname{Sin} \delta''$$

Aber

$$C B = z - A D' + \delta$$

und

$$C'' B'' = z'' - A'' D' + \delta''$$

also

$$r \operatorname{Sin} (z - A D' + \delta) = R \operatorname{Sin} \delta$$
$$r'' \operatorname{Sin} (z'' - A'' D' + \delta'') = R'' \operatorname{Sin} \delta''$$

VII. Um aus diesen vier Gleichungen

$$r \; r'' \; z \; z''$$

zu finden sey

$$p = \frac{r' f'}{f} \cdot \frac{\operatorname{Sin} \varepsilon}{\operatorname{Sin} \varepsilon'} \operatorname{Sin} (z + A' D - \delta')$$

und

$$p'' = \frac{r' f'}{f''} \cdot \frac{\operatorname{Sin} \varepsilon''}{\operatorname{Sin} \varepsilon'} \operatorname{Sin} (z + A' D' - \delta')$$

$$b = A D' - \delta$$
$$c = R \operatorname{Sin} \delta$$

$$b'' = A'' D' - \delta''$$
$$c'' = R'' \operatorname{Sin} \delta''$$

so ist

$$\operatorname{tg} z = \frac{p \operatorname{Sin} b}{p \operatorname{Cos} b - c}$$

$$r = \frac{p}{\operatorname{Sin} \zeta}$$

und

$$\text{tg } z'' = \frac{p'' \text{ Sin } b''}{p'' \text{ Cos } b'' - c''}$$

$$r'' = \frac{p''}{\text{Sin } \zeta''},$$

wo z z'' immer so genommen wird, dass r und r'' positiv ist.

VIII. Ist so z z'' und ε' gefunden, so kann man $CC'' = 2 h'$ und die Neigungen

$$x = C'' C D' \text{ und } x'' = 180 - CC'' D'$$

der grössten Kreise A B, A'' B'' gegen den grössten Kreis CC'' durch folgende Ausdrücke finden.

$$\text{Sin } h' \text{ Sin } \frac{x'' + x}{2} = \text{Sin } \frac{\varepsilon'}{2} \text{ Sin } \frac{\zeta + \zeta''}{2}$$

$$\text{Sin } h' \text{ Cos } \frac{x'' + x}{2} = \text{Cos } \frac{\varepsilon'}{2} \text{ Sin } \frac{\zeta - \zeta''}{2}$$

$$\text{Cos } h' \text{ Sin } \frac{x'' - x}{2} = \text{Sin } \frac{\varepsilon'}{2} \text{ Cos } \frac{\zeta + \zeta''}{2}$$

$$\text{Cos } h' \text{ Cos } \frac{x'' - x}{2} = \text{Cos } \frac{\varepsilon'}{2} \text{ Cos } \frac{\zeta - \zeta''}{2}$$

und für

$$2 h, 2 h''$$

hätte man ähnliche Ausdrücke, oder bequemer die folgenden

$$\text{Sin } 2 h = \frac{r \ f}{r' \ f'} \cdot \text{Sin } 2 h'$$

$$\text{Sin } 2 h'' = \frac{r'' \ f''}{r' \ f'} \cdot \text{Sin } 2 h'$$

und zur Prüfung der Rechnung

$$h + h'' = h'$$

Wollte man nun noch die Distanzen ρ ρ' ρ'' des Planeten von der Erde, so hätte man

$$\rho = \frac{R \text{ Sin } (A D' - \zeta)}{\text{Sin } (\zeta - A D' + \delta)} = \frac{r \text{ Sin } (A D' - \zeta)}{\text{Sin } \delta}$$

$$\rho' = \frac{R' \text{ Sin } (\delta' - z)}{\text{Sin } z} = \frac{r' \text{ Sin } (\delta' - z)}{\text{Sin } \delta'}$$

$$\rho'' = \frac{R'' \text{ Sin } (A'' D' - \zeta'')}{\text{Sin } (\zeta'' - A'' D' + \delta'')} = \frac{r'' \text{ Sin } (A'' D' - \zeta')}{\text{Sin } \delta''}$$

IX. Nach diesen Vorbereitungen wird man nun leicht in den Stand gesetzt, die Elemente der Bahn mit aller der Schärfe zu bestimmen, welche die zu Grunde gelegten Beobachtungen nur immer gewähren können. Um das ganze Verfahren besser zu übersehen, wollen wir es hier kurz anzeigen.

Zuerst sucht man die Grössen $\gamma\,\delta$ aus I.

dann $A'D$, $A''D$, ε aus II.

und σ aus III.

a, b, c aus V.

Mit diesen Grössen geht man nun zur ersten Hypothese über. Mit

$$P = \frac{\vartheta''}{\vartheta}$$

und

$$Q = \mu^2\,\vartheta\vartheta''$$

sucht man die Grösse ω und den Werth der Grösse z aus der zu Ende der N. V. gegebenen Gleichung (A)

dann r', $\frac{r'f'}{f}$

und

$\frac{r'f'}{f''}$ aus VI.

und mit den beyden letzten Factoren findet man

$p\,p''$ und $\varepsilon\,r$, $\varepsilon''\,r''$ aus VII.

und h' so wie h und h'' aus VIII.

Kennt man so für die beyden ersten Beobachtungen die Grössen

$r\,r'\,\vartheta''$ und h''

so sucht man nun nach §. 7. (Gleichung IV.) den Werth von y, der η'' heissen soll, und eben so für die beyden letzten Beobachtungen aus $r'\,r''\,\vartheta$ und h die Grösse y, die η heissen soll.

Kennt man so η'' und η, so sind die verbesserten Werthe von P, Q folgende (§. 8. II.)

$$P' = \frac{\vartheta''}{\vartheta}\cdot\frac{\eta}{\eta''}$$

$$Q' = \frac{\mu^2\,r'^2\,\vartheta\vartheta''}{rr''\,.\,\eta\eta''\,.\,\mathrm{Cos}\,h\,\mathrm{Cos}\,h'\,\mathrm{Cos}\,h''}$$

und sind diese neuen Werthe von den vorhin angenommenen

$$P = \frac{\vartheta''}{\vartheta}$$

$$Q = \mu^2\,\vartheta\vartheta''$$

noch beträchtlich verschieden, so sucht man in einer zweyten

Hypothese mit diesen neuen $P' Q'$, wie vorhin mit P, Q, wieder ω und z aus V.

$$r', \frac{r' f'}{f}, \frac{r' f'}{f''} \text{ aus VI,}$$

$$\vartheta\, r \text{ und } \vartheta''\, r'' \text{ aus VII.}$$

$$\text{und } h\, h'\, h'' \text{ aus VIII.}$$

und dann wie zuvor aus $r r'\, \vartheta''\, h''$ die Grösse η''

und aus $r' r''\, \vartheta\, h$ die Grösse η aus §. 7.,

womit man wieder neue, der Wahrheit nach nähere Werthe von P, Q erhält, mit denen man, wenn sie von den unmittelbar vorhergehenden noch beträchtlich verschieden seyn sollte, eine dritte Hypothese berechnen, und überhaupt das Verfahren so lange fortsetzen kann, bis die neuen Werthe $P\, Q$ von den unmittelbar vorhergehenden nicht mehr verschieden sind. Gewöhnlich wird man aber, wenn die Zwischenräume $\vartheta\, \vartheta''$ nicht zu gross, und wenn sie überdiess nahe einander gleich sind, selten mehr als die zweyte Hypothese nöthig haben, und oft schon mit der ersten hinlänglich genäherte Resultate erhalten. Sollte aber der Fall eintreten, dass man mehr als drey Hypothesen berechnen muss, so wird es vortheilhafter seyn, bey der vierten Hypothese nicht, wie zuvor, die in der dritten Hypothese gefundenen Werthe von $P\, Q$ zu Grunde zu legen, sondern diejenigen, welche man nach der im II. Buch Cap. 1. §. 8. vorgetragenen Methode aus allen drey vorhergehenden Hypothesen zusammen ableiten kann.

X. Hat man so die genauen Werthe von $r\, r'\, r''\, h\, h'\, h''$, so kann man aus $r\, r'\, h''$ oder aus $r' r''\, h$ die Elemente der Bahn nach den Vorschriften des §. 7. N. II. bestimmen. Thut man beydes, so erhält man eine Prüfung der ganzen vorhergehenden Rechnung. Vortheilhafter aber wird es seyn, die Elemente bloss aus den beyden äussersten Beobachtungen, aus $r\, r''$ und h' zu bestimmen, und dann mit diesen Elementen den heliocentrischen Ort der mittlern Beobachtung zu suchen, und mit den vorhergehenden für diesen Ort gefundenen Grössen zu vergleichen.

Was endlich die Neigung n der Bahn, die Länge ☊ des aufsteigenden Knotens derselben in der Ekliptik, und das Argument u der Breite in der ersten Beobachtung betrifft, so sey $L -$ ☊ $= h$ und man hat (Fig. 2) in dem Dreyecke ☊ $A\, C$, dessen Seiten $A\, D' - \zeta$, u, h und die ihnen in derselben Ordnung gegenüberstehende Winkel n, $180 - \gamma$ und $\varkappa$ (N. VIII.) sind, folgende Gleichungen

$$\operatorname{Sin} \frac{n}{2} \operatorname{Sin} \frac{u+h}{2} = \operatorname{Sin} \frac{AD' - \zeta}{2} \operatorname{Sin} \frac{\gamma + \varkappa}{2}$$

$$\operatorname{Sin} \frac{n}{2} \operatorname{Cos} \frac{u+h}{2} = \operatorname{Cos} \frac{AD' - \zeta}{2} \operatorname{Sin} \frac{\gamma - \varkappa}{2}$$

$$\text{Cos}\,\frac{n}{2}\,\text{Sin}\,\frac{u-h}{2} = \text{Sin}\,\frac{AD'-\zeta}{2}\,\text{Cos}\,\frac{\gamma+x}{2}$$

$$\text{Cos}\,\frac{n}{2}\,\text{Cos}\,\frac{u-h}{2} = \text{Cos}\,\frac{AD'-\zeta}{2}\,\text{Cos}\,\frac{\gamma-x}{2}$$

und die Grösse u gibt zugleich die Lage des Periheliums gegen den aufsteigenden Knoten, so wie h die Lage des Knotens selbst in der Ekliptik. Dieselben Grössen lassen sich auch durch ähnliche Gleichungen aus dem Dreyecke ☊ A″ C″ finden, wenn man

$u\ h\ \zeta\ \gamma\ x$ in
$u''\ h''\ \zeta''\ \gamma''\ x''$

verwandelt.

Wenden wir das Vorhergehende auf die drey Beobachtungen der Vesta an, die wir §. 6 mitgetheilt haben, so findet man aus I. und II.

$\gamma\ \gamma'\ \gamma''$ . . .	162° 6′ 41″45
	164° 7′ 59″97
	165° 42′ 49″00
$\delta\ \delta'\ \delta''$ . . .	40 59 23.20
	45 55 46.59
	50 42 47.46
A′ D, A″ D, ε . . .	36 10 58.89
	40 50 35.57
	2 1 4.02
A D′, A″ D′, ε′	32 4 18.47
	41 22 17.47
	4 28 41.94
A D″, A′ D″, ε″ . . .	32 30 18.17
	37 8 17.87
	2 27 38.46

und aus III.

$\sigma\ \lambda^*\ \beta^*$	0° 5′ 46″54
	173° 50′ 8″01
	11° 18′ 35″33

und aus V

log a, log b, log c, ...	9.9469946
	9.9765739
	2.8941157

und alle vorhergehenden Grössen sind unveränderlich, da sie von P und Q nicht abhängen.

I. Hypothese.

$$P = \frac{\vartheta''}{\vartheta}\ ,\ Q = \mu^2\,\vartheta\,\vartheta''$$

oder

$$\log P = 9.9999564$$
$$\log Q = 7.8665402$$

also in V.

$$\omega = 17^\circ\ 46\ 21''51$$

und die Gleichung (A)

$$\mathrm{Sin}\,(z - 17^\circ\ 52'\ 8''05) = 1.7591289\ \mathrm{Sin}^4 z$$

woraus

$$z = 19^\circ\ 0'\ 6''.28$$

und aus VI.

$$\log r' = 0.3471619$$

$$\log \frac{r'\,f'}{f} = 0.6480249$$

$$\log \frac{r'f'}{f''} = 0.6480685$$

aus VII.

$$z = 8^\circ\ 18'\ 53''69$$
$$z'' = 11\ \ 15\ \ 27.51$$

$$\log r = 0.3480400$$
$$\log r'' = 0.3463668$$

aus VIII.

$$h' = 1^\circ\ 31'\ \ 7''32$$
$$h = 0^\circ\ 45'\ 39.28$$
$$h'' = 0\ \ 45\ \ 28.47$$

$$\varkappa = 167^\circ\ 41'\ 45''31$$
$$\varkappa'' = 163\ \ 16\ \ 52.51$$

Die Differenz zwischen h' und h + h'' ist 0''43. Wir nehmen daher, indem wir diesen kleinen Fehler vertheilen, an,

$$h' = 1^\circ\ 31'\ \ 7''.32$$
$$h = 0\ \ 45\ \ 39.07$$
$$h'' = 0\ \ 45\ \ 28.25$$

Mit diesen Werthen von r r' r'' und h h' h'' gibt die zweyte und dritte Beobachtung nach §. 7

$$l = 0.0000443$$

$$\log m^2 = 5.9233158$$
$$h' = 0.00010057 13$$

$$\log \eta = 0.0000485$$
$$x = 0.000039495$$
$$\xi = 0.000\,000\,000\,089$$

also ist das corrigirte

$$\log \eta = 0.0000485 \text{ wie zuvor.}$$

Die erste und zweyte Beobachtung gibt eben so

$$l = 0.0000439$$

$$\log m' = 5.9207179$$
$$h' = 0.0000999715$$

$$\log \eta'' = 0.0000482$$

also die verbesserten Werthe von P, Q nach §. 8 Gleichung (I)

$$\log P' = 9.9999567$$
$$\log Q' = 7.8665894$$

also

$$x = \log P' - \log P = 0.0000003$$
$$y = \log Q' - \log Q = 0.0000492$$

Mit diesen neuen Werthen von

$$\log P = 9.9999567$$
$$\log Q = 7.8665894$$

berechnet man nun die

II. Hypothese,

in welcher man findet,

$$\omega = 17^\circ\ 46'\ 21''75$$

$$\text{Sin}\,(z - 17^\circ\ 52'\ 8''29) = 1.7593344\ \text{Sin}^4 z$$

$$z = 19^\circ\ 0'\ 7''22$$

$$\log r' = 0.3471561$$

$$\log \frac{r'f'}{f} = 0.6480192$$

$$\log \frac{r'f'}{f''} = 0.6480625$$

$$2 = 8^\circ\ 18'\ 54''54$$
$$2'' = 11\ \ 15\ \ 28.51$$

$$\log r = 0.3480342$$
$$\log r'' = 0.3463612$$

$$h' = 1^\circ\ 31'\ 7''40$$
$$h = 0\ \ 45\ \ 39.32$$
$$h'' = 0\ \ 45\ \ 28.51$$

$$\varkappa = 167^\circ\ 41'\ 44''69$$
$$\varkappa'' = 163\ \ 16\ \ 51.89$$

Die Differenz von h' und h + h'' ist wieder 0''43, daher wir annehmen

$$h' = 1^\circ\ 31'\ 7''40$$
$$h = 0\ 45'\ 39''.11$$
$$h'' = 0\ 45\ 28.29$$

Damit gibt die zweyte und dritte Beobachtung

$$l = 0.0000442$$
$$\log m^2 = 5.9233329$$
$$h' = 0.00001005752$$
$$\log \eta = 0.0000485$$

und die erste und zweyte

$$l = 0.0000439$$
$$\log m^2 = 5.9207353$$
$$h' = 0.0000999755$$
$$\log \eta'' = 0.0000482$$

also die neuen verbesserten Werthe von

$$\log P'' = 9.9999567$$
$$\log Q'' = 7.8665892$$

und da diese von den unmittelbar vorhergehenden

$$\log P', \log Q'$$

beynahe nicht mehr verschieden sind, so ist es unnöthig, eine dritte Hypothese zu berechnen.

Bleibt man also dabey stehen, so ist

$2h$, $2h'$, $2h''$ . .	$1^\circ\ 31'\ 18''22$
	$3^\circ\ 2'\ 14''80$
	$1^\circ\ 30'\ 56''58$
$\log r$, $\log r'$, $\log r''$	0.3480342
	0.3471561
	0.3463612

woraus man noch nach N. VIII. erhält

$\log \rho$, $\log \rho'$, $\log \rho''$ . .	0.1363270
	0.2477060
	0.2580862

und diese curtirten Distanzen

$\log \rho \operatorname{Cos} \beta$, $\log \rho' \operatorname{Cos} \beta'$, $\log \rho'' \operatorname{Cos} \beta''$ . .	0.1273284
	0.1381612
	0.1500167

Um aus den ersten und dritten Beobachtungen die Elemente (nach §. 7. N. I. und II.) zu finden, hat man

$$\log r = 0.3480342$$
$$\log r' = 0.3463612$$
$$2\,h' = v' - v = 1^\circ\ 31'\ 7''40$$
$$t = 9.9705405\ (\S.\ 6)$$

also

$$l = 0.0001766$$
$$\log m^2 = 6.5243749$$
$$\log x = 0.1975011$$

$\frac{e'-e}{2} = 1^\circ\ 26'\ 18''66$ halbe Differenz der excentrischen Anomalien, also nach §. 7. II.

$$\log a = 0.3726028$$
$$\log p = 0.3689094$$
$$\varepsilon = 0.0920261$$
$$\frac{e'+e}{2} = 308^\circ\ 8'\ 27''13$$
$$e = 306^\circ\ 42'\ 8''47$$
$$e' = 309\ 34\ 45.79$$
$$\frac{v'+v}{2} = 303^\circ\ 52'\ 0''23$$
$$v = 302\ 20\ 52.83$$
$$v' = 305\ 23\ 7.63$$

wo a, p, a ε die halbe grosse Axe, der halbe Parameter und die Excentricität, und v e die wahre und excentrische Anomalie ist.

Daher ist auch die mittlere Bewegung in der Zeit t

$$\frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}} = 2\left(g - \varepsilon \operatorname{Sin} g \operatorname{Cos} \frac{e'+e}{2}\right) = 9768''\,7232$$

und die mittlere Anomalie in der ersten Beobachtung

$$M = e - \varepsilon \operatorname{Sin} e = 310^\circ\ 55'\ 47''105$$

und in der letzten

$$M' = e' - \varepsilon \operatorname{Sin} e' = 313\ 38\ 35.827$$

Differenz $2^\circ\ 42'\ 48''722 = 9768''\,722$

wie zuvor.

Sucht man aber aus r r′ g h und t die elliptischen Elemente nach §. 7. IV., so findet man

$$\omega = -\ 0^\circ\ 1'\ 39''34$$
$$x = -\ 56\ \ 7\ 59.77$$
$$y = -\ 51\ 51\ 32.87$$

$$\log X = 8.4119879$$
$$\log Y = 7.0757912$$

$$v = 302^\circ\ 20'\ 52''83$$
$$v' = 305\ \ 23\ \ \ 7.63$$
$$\varphi = \ \ \ 5\ \ 16\ \ 48.64$$

$$e = 306^\circ\ 42'\ \ 8''47$$
$$e' = 309\ \ 34\ \ 45.79$$

$\varepsilon = 0.0920261$

$\log a = 0.3726028$ u. s. w. wie zuvor.

Weiter war

$$AD' = \ \ 32^\circ\ \ 4'\ 18''47$$
$$\gamma = 162\ \ \ 6\ \ 41.45$$
$$\delta = \ \ \ 8\ \ 18\ \ 54.54$$
$$x = 163\ \ 16\ \ 51.89$$

also nach den letzten Gleichungen in X.

$$h = 110^\circ\ 37'\ 15''74$$
$$u = \ \ 87\ \ 54\ \ 35.50$$
$$n = \ \ \ 7\ \ \ 6\ \ 46.42 \text{ Neigung}$$

$☊ = L - h = 103^\circ\ 5'\ 39''76$ Länge des Knotens,

also auch Elongation des Periheliums vom Knoten

$$u - v = 145^\circ\ 33'\ 42''67$$

also Länge des Periheliums

$$= u - v + ☊ = 248^\circ\ 39'\ 22''43$$

Addirt man diese Länge des Periheliums zur mittlern Anomalie der ersten Beobachtung, so hat man für die Zeit der ersten Beobachtung die mittlere Länge in der Bahn

für 1807 April 24. 3786631.

Da aber die tägliche tropische Bewegung

979″8963

ist, so wird man von dieser Länge

6′ 11″050

subtrahiren, um die mittlere Länge

199° 28′ 58″485 für 1807 April 24. 00

zu erhalten. Subtrahirt man davon noch

31° 18′ 8″042,

so erhält man

168° 10′ 50″443

für die mittlere Länge 1806 December 31. mittl. Mittag Paris.

Um zu sehen, wie genau die Beobachtungen durch diese Elemente dargestellt werden, hat man mit den eben gefundenen Werthen von n und ☊

	für die erste		für die dritte Beobachtung
Argument der Breite	87° 54′ 35″50	......	90° 56′ 50″30
L ...	213 42 55.5	......	223 23 15.5
log R ...	0.0028540	......	0.0039670
log r ...	0.3480342	......	0.3465612
helioc. Länge ...	190° 59′ 16″95	......	194 2 56.51
... Breite ...	7 6 29.29	......	7 6 42.90
geocent. Länge ...	174 7 33.18	......	173 33 32.95
Beobachtung ...	174 7 33.2	......	173 33 33.0
	Fehler + 0″02		Fehler + 0.″05
geocent. Breite ...	11° 37′ 24″07	......	11 0 39.19
Beobachtung ...	11 37 24.1	......	11 0 39.20
	Fehler + 0.03		Fehler + 0″01

§. 10.

Um die vorhergehenden Ausdrücke in allen Fällen gehörig anzuwenden, müssen noch folgende Bemerkungen nachgetragen werden.

Zu I. Ist zugleich β und $\lambda - L$ gleich Null, so lässt sich γ nicht bestimmen. Solche Fälle müssen also gänzlich vermieden werden.

Zu III. Wenn die Kreise B B″ und A′ B″ zusammen fallen, also die Puncte A′, B, B′, B″ in denselben grössten Kreisen liegen, so kann B* nicht bestimmt werden. Also muss auch dieser Fall, und daher auch alle jene Fälle, in welchen diess wenigstens schon nahe Statt hat, vermieden werden, weil dann der Punct B* nicht mit Schärfe bestimmt werden kann, und die kleinsten Beobachtungsfehler schon bedeutende Fehler in der Bestimmung dieses Punctes hervorbringen können. Eben so wird B* unbestimmt bleiben, wenn die Puncte B, B″ zusammenfallen.

Zu V. Die Gleichung (A) hat für Sin z entweder zwey oder vier reelle Werthe. Im ersten Fall ist ein Werth von Sin z positiv, und der andere negativ: man wählt immer den ersten, da nach der Natur der Aufgabe r′ immer posisiv seyn muss. Im zweyten Fall ist entweder ein Werth von Sin z positiv, und die drey andern negativ, wo man also wieder den ersten wählt — oder man hat drey positive und einen negativen Werth, und dann verwirft man von den positiven alle jene, wo z grösser als δ' ist, da offenbar ρ', also auch Sin $(\delta' - z)$ positiv seyn muss. M. s. Gauss Mot. Corp. Coelest.

I. Übrigens, wenn die Ebene der Bahn mit der Ekliptik zusammenfällt, so reichen drey Beobachtungen, d. h. drey geocentrische Längen nicht mehr hin, die vier Elemente, a, ε, Länge des Periheliums und die Epoche, zu bestimmen, sondern man braucht nothwendig vier geocentrische Längen. Daraus folgt, dass auch bey einer Bahn, deren Neigung gegen die Ekliptik sehr klein ist, die oben vorgetragene Methode nicht mehr sicher anwendbar ist, weil die kleinsten Beobachtungsfehler, die immer unvermeidlich sind, auf die Endresultate sehr nachtheilig einwirken. Aus dieser Ursache hat Gauss in seinem oben angeführten Werke diesen Fall eigens behandelt.

II. Endlich müssen auch die geocentrischen Beobachtungen, ehe man sie zur Bestimmung der Elemente anwendet, zuerst wegen der Nutation, Präcession u. f. verbessert werden. Diese Beobachtungen werden nämlich gewöhnlich Cap. II. §. 6 durch die scheinbare Rectascension und Declination gegeben. Da aber die Ekliptik zu diesen Rechnungen bequemer ist, so sucht man aus jenen scheinbaren Rectascensionen und Declinationen, mit der scheinbaren Schiefe der Ekliptik, durch die bekannten Ausdrücke (Lib. I. Cap. I) die scheinbaren Längen und Breiten, und befreyt dann diese letzten von der Nutation, Präcession, Parallaxe und Aberration.

Die Nutation der Länge ist

$$18''9 \text{ Sin } ☊ \, ☾,$$

und durch die Präcession werden alle drey Längen des Planeten auf einen gemeinschaftlichen Frühlingspunct gebracht, der z. B. für die Epoche der mittlern Beobachtung Statt hatte. Die Breite wird durch Nutation und Präcession nicht geändert. Zur Berechnung der Parallaxe der Länge und Breite, so wie zur Bestimmung der Aberration muss man bereits eine vorläufige Kenntniss der Entfernung ρ des Planeten von der Erde haben: ist dann $d\,\lambda$, $d\,\beta$ die tägliche geocentrische Bewegung des Planeten in Länge und Breite, so ist die corrigirte Länge und Breite

$$\lambda + (0.00571)\,\rho\, d\,\lambda,$$
$$\beta + (0.00571)\,\rho\, d\,\beta$$

Sucht man dann aus den Sonnentafeln die Länge $\odot$ der Sonne, ohne Nutation, reducirt sie durch die Präcession auf die oben für den Planeten gewählte Epoche, so ist die Länge L der Erde, welche mit der zuvor gefundenen Länge des Planeten den Bestimmungen der Elemente zu Grunde gelegt wird,

$$L = \odot + 180^\circ + 20''25$$

wo 20″25 die nahe constante Aberration der Erde ist.

Kennt man aber die Entfernung ρ noch gar nicht, so ist es am bequemsten, diese und die andern kleinen Correctionen bey einer ersten Bahnbestimmung gänzlich zu vernachlässigen, um so mehr, da, wie wir bald sehen werden, eine genaue Bestimmung der Elemente auf mehr als drey Beobachtungen gegründet, und also das Vorhergehende nur als eine vorläufige Bestimmung betrachtet werden muss, die zwar, wenn man die Rechnung mit Sorgfalt durchführt, den drey zu Grunde gelegten Beobachtungen vollkommen, aber, da diese, wie alle unsere Beobachtungen, nicht gänzlich fehlerfrey sind, nicht den übrigen Beobachtungen entsprechen werden.

III. Die vorhergehende Methode setzt noch voraus, dass die Zwischenzeiten ϑ ϑ' nicht zu gross und einander beynahe gleich sind. Indessen gibt sie auch dann noch befriedigende Resultate, wenn man sich an diese Voraussetzungen nicht strenge hält; so wählte Gauss in seinem oben angeführten classischen Werke für die Ceres Beobachtungen, für die

$$\vartheta = 126 \text{ und } \vartheta'' = 134 \text{ Tage und } 2\,h = 31.^\circ 3,\ 2\,h' = 31.^\circ 6.$$

Wollte man aber besonders auf die zweyte Bedingung, der Gleichheit der Zwischenzeiten, Rücksicht nehmen, so wird, da solche Beobachtungen nur selten gegeben sind, ein Mittel nothwendig, Beobachtungen von ungleichen Zwischenzeiten auf solche zu bringen, deren Zeiten gleich weit von einander abstehen. Folgendes Verfahren ist um so genauer, je mehr gute Beobachtungen man dazu anwendet.

Es sey λ irgend eine Function von m, welche in l l' l'' .. übergeht, wenn m in m + n, m + n', m + n'' ... übergeht, wo z. B. λ l l'' .. die beobachteten Rectascensionen oder Längen ... für die Zeiten m, m + n, m + n' .. sind. Diess vorausgesetzt, ist bekanntlich

$$l = \lambda + n \cdot \frac{d\lambda}{dm} + \frac{n^2}{1.2} \cdot \frac{d^2\lambda}{dm^2} + $$

Sey der Kürze wegen,

$$a = \frac{d\lambda}{dm},\ b = \frac{d^2\lambda}{1.2.dm^2},\ c = \frac{d^3\lambda}{1.2.3.dm^3} \ \ldots$$

so ist

$$l = \lambda + an + bn^2 + cn^3 + \ldots \text{(I)}$$

und eben so

$$l' = \lambda + an' + bn'^2 + cn'^3 + \ldots \text{(I')}$$
$$l'' = \lambda + an'' + bn''^2 + cn''^3 + \ldots \text{(I'')} \text{ . u. s. w.}$$

Subtrahirt man je zwey nächste dieser Gleichungen von einander, und setzt

$$dl = \frac{l' - l}{n' - n}$$

$$dl' = \frac{l'' - l'}{n'' - n'}$$

$$dl'' = \frac{l''' - l''}{n''' - n''}$$

so ist

$$dl = a + b(n' + n) + c(n'^2 + n'n + n^2) + d(n'^3 + n'^2 n + n'n^2 + n^3) + \ldots \text{ (II)}$$

$$dl' = a + b(n'' + n') + c(n''^2 + n''n' + n'^2) +$$

$$dl'' = a + b(n''' + n'') + c(n'''^2 + n'''n'' + n''^2) +$$

Verfährt man mit den letzten Gleichungen eben so, und setzt

$$d^2l = \frac{dl' - dl}{n'' - n}$$

$$d^2l' = \frac{dl'' - dl'}{n''' - n'}$$

$$d^2l'' = \frac{dl''' - dl''}{n'''' - n''}$$

so ist

$$d^2l = b + c(n'' + n' + n) + d(n''^2 + n''n' + n''n + n'^2 + n'n + n^2) + \ldots \text{ (III)}$$

$$d^2l' = b + c(n''' + n'' + n') + d(n'''^2 + n'''n'' + n'''n' + n''^2 + n''n' + n'^2) +$$

und ist wieder

$$d^3l = \frac{d^2l' - d^2l}{n''' - n}$$

so ist

$$d^3l = c + d(n''' + n'' + n' + n) + \ldots \text{ (IV) u. s. f.}$$

Substituirt man in I, für a die Grösse

$$a = dl - b(n' + n) - \ldots \text{ aus II.}$$

und für b die Grösse

$$b = d^2l - c(n'' + n' + n) - \ldots \text{ aus III. u. s. w.}$$

so erhält man

$$\lambda = l - ndl + nn'd^2l - nn'n''d^3l + nn'n''n'''d^4l - \ldots \text{ (A)}$$

Substituirt man eben so in II. für b und c .. die Grössen

$$b = d^2l - c(n'' + n' + n) - \text{aus III.}$$

und

$$c = d^3l - d(n''' + n'' + n' + n) - \text{aus IV. u. s. w.}$$

so erhält man

$$a = dl - (n' + n)\,d^2l + (nn' + nn'' + n'n'')\,d^3l$$
$$- (n\,n'\,n'' + n\,n'\,n''' + n\,n''\,n''' + n'\,n''\,n''')\,d^4l \,..\, (B)$$

und eben so

$$b = d^2l - (n + n' + n'')\,d^3l$$
$$+ (nn' + nn'' + nn''' + n'\,n'' + n'\,n''' + n''\,n''')\,d^4l - (C)$$

Das Gesetz der Factoren der Reihe (A) ist für sich klar. In der zweyten Reihe (B) ist der Factor von $d^x\,l$ die Summe der durch die $(x - 1)$ fachen Verbindungen der ersten x Grössen $n, n'\,n'' \ldots$ entstehenden Producte. In der dritten Reihe (C) ist der Factor von $d^x l$ die Summe der durch die $(n - 2)$ fachen Verbindungen der ersten x Grössen $n, n', n'' \ldots$ entstehenden Producte u. s. f.

Substituirt man diese Werthe von $\lambda, a, b, c \ldots$, welche wir in den Gleichungen A B C . . gefunden haben, in den Gleichungen I, I′ I″. . . so gibt

I den Werth von l
I′ den von l′
I″ den von l″ u. s. w.

wie es seyn soll.

Nimmt man also an, dass λ die Länge, Breite . . . für irgend eine Epoche ist, und dass λ' die Länge, Breite . . . für eine Zeit, die von der Epoche um die Zeit m entfernt ist, bezeichnet, so ist

$$\lambda' = \lambda + m\left(\frac{d\lambda}{dm}\right) + \frac{m^2}{1.2}\left(\frac{d^2\lambda}{dm^2}\right) +$$

wo m negativ ist, wenn die Epoche nach der Zeit m folgt.

Substituirt man in dieser Reihe für

$$\lambda, \left(\frac{d\lambda}{dm}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\lambda}{dm^2}\right) \ldots$$

das heisst für

$$\lambda, a, b, c \ldots$$

die oben gefundenen Werthe, so erhält man

$$\lambda' = l + (m - n)\,dl + (m - n)(m - n')\,d^2l$$
$$+ (m - n)(m - n')(m - n'')\,d^3l + \,..\, (D)$$

Sind daher l l′ l″ . . die beobachteten Orte des Planeten für die Zeiten n n′ n″ . . so wird man durch die Gleichung (D) den Werth jeder andern Beobachtung λ für die Zeit m finden, und da man m willkührlich wählen kann, so wird man auch die beobachteten Orte $\lambda'\ \lambda', \lambda'_{,,}$ . . für die gleichweit von einander entfernten Zeiten $m\ m_{,}\ m_{,,}$ angeben können.

Um diess durch ein Beyspiel deutlich zn machen, legen wir folgende Beobachtungen des Kometen von 1781 zu Grunde,

		mit. Z. Paris.	geoc. Länge	Poldistanz
1781 Nov.	14 ...	$8^h 29' 44''$ ...	$307° 14' 45''$ ...	$34° 42' 51''$
	17 ...	8 29 44 ...	306 57 32 ...	45 42 48
	19 ...	8 29 44 ...	306 51 26 ...	50 45 12
	22 ...	8 29 44 ...	306 44 53 ...	56 10 59
	25 ...	8 29 44 ...	306 41 37 ...	60 1 17

Sucht man daraus die geocentrischen Orte des Kometen für den 14. 16. 18. November $8^h 29' 44''$, und drückt man alle λ in Secunden, und alle n in Minuten aus, so ist für die Poldistanzen

$$l = 34° 42' 51''$$
$$l' = 45\ \ 42\ \ 48$$

$$l' - l = 39597''$$
$$l'' - l' = 18144$$

$$dl = 9''1659720$$
$$dl' = 6.3000000$$

$$d^2l = -\ 0''.0003980$$
$$d^2l' = -\ 0.0002466$$

$$d^3l = 0.000\,000\,01315$$
$$d^4l = -\ 0.000\,000\,000\,00032$$

Für die Längen aber ist

$$l = 307° 14' 45'' \quad l' - l = -\ 1033''$$
$$l' = 306\ \ 57\ \ 32 \quad l'' - l' = -\ 366$$

$$dl = -\ 0.2391204 \quad d^2l = 0.0000156$$
$$dl' = -\ 0.1270833 \quad d^2l' = 0.0000050$$

$$d^3l = -\ 0.000\,000\,000915$$

und überdiess

$$n' - n = 4320'$$
$$n'' - n' = 2880$$
$$n''' - n'' = 4320$$

$$n'' - n = 7200$$
$$n''' - n' = 7200$$
$$n''' - n = 11520 \text{ u. s. w.}$$

Man hat daher für die Poldistanzen

$$\lambda' = 34° 42' 51''$$
$$+ 9''.1659720\,(m - n)$$
$$- 0.0003980\,(m - n)\,(m - n')$$
$$+ 0.000\,000\,01315\,(m - n)\,(m - n')\,(m - n'')$$
$$- 0.000\,000\,000\,000\,32\,(m - n)\,(m - n')\,(m - n'')\,(m - n''')$$

und für die Längen

$$\lambda' = 307^\circ\ 14'\ 45''$$
$$- 0.''2391204\ (m-n)$$
$$+ 0.0000\bar{1}56\ (m-n)\ (m-n')$$
$$- 0.000\,000\,000915\ (m-n)\ (m-n')\ (m-n'')$$

für den 18. November ist

$$m - n = 5760,$$
$$m - n' = 1440$$
$$m - n'' = -1440$$
$$m - n''' = -5760$$

also die gesuchte Poldistanz

$$34^\circ\ 42'\ 51'' + 52796'' - 3302'' - 157'' - 2''$$
$$= 48^\circ\ 25'\ 6''$$

und die gesuchte Länge

$$307^\circ\ 14'\ 45'' - 1377'' + 129'' + 11''$$
$$= 306^\circ\ 54'\ 8''$$

und eben so wird man erhalten

16. November Länge 307° 1′ 55″
Poldistanz 42° 34′ 14″

14. November Länge 307 14 45
Poldistanz 34 42 51 wie zuvor.

§. 11.

Die vorhergehenden Betrachtungen benützte Laplace zu einer andern Auflösung dieses Problems, die wir hier noch kurz anzeigen wollen. — Es schien ihm vortheilhafter, statt die Beobachtungen unmittelbar zur Auflösung anzuwenden, aus ihnen zuerst Resultate abzuleiten, die sich auf eine willkührliche Anzahl von Beobachtungen gründen. Zu diesem Resultate wählte er: die geocentrische Länge und Breite für irgend eine Epoche, und ihre ersten und zweyten Differentialien durch die entsprechende Potenz des Differentials der Zeit dividirt. Man sieht, wie man diese drey Stücke durch die so eben vorgetragene Methode finden kann. Ist nähmlich λ die gesuchte geocentrische Länge für die Epoche m, und sind $l\,l'\,l''$ die beobachteten Längen für di Zeiten

$$m+n,\ m+n',\ m+n''\ldots$$

so hat man, wenn man die vorige Bezeichnung der Grössen

$$d\,l,\ d\,l',\ d\,l''\ldots\ d^2\,l,\ d^2\,l'\ \text{u. s. w.}$$

beybehält,

$$\lambda = l - n\,dl + n\,n'\,d^2 l - n\,n'\,n''\,d^3 l +$$

$$\left(\frac{d\lambda}{dm}\right) = dl - (n + n')\, d^2 l + (n n' + n n'' + n' n'')\, d^3 l +$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\lambda}{dm^2}\right) = d^2 l - (n + n' + n'')\, d^3 l +$$

und ähnliche Ausdrücke wird man auch für die geocentrischen Breiten haben, wenn man

$$\lambda,\, l,\, l' \ldots \text{ in } \beta,\, b,\, b' \ldots$$

verwandelt. Diese Ausdrücke werden offenbar desto genauer seyn, je mehr Beobachtungen man anwendet, und je kleiner die Zwischenzeiten sind. Am vortheilhaftesten wird es seyn, die Epoche in der Mitte der Beobachtungszeiten, und so viel möglich auf beyden Seiten der Epoche gleich viel und gleich weit entfernte Beobachtungen zu wählen. Noch muss bemerkt werden, dass man, wenn man als Einheit der Zeiten t die mittlere Bewegung der Erde um die Sonne annimmt, hat

$$dt = \frac{360 \cdot 60^2 \cdot dm}{T}$$

wo T das siderische Jahr der Erde bezeichnet. Es ist aber

$$\frac{360 \cdot 60^2}{T} = h = 3548.''1866,$$

also ist

$$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{d\lambda}{dm}\right)$$

$$\left(\frac{d^2\lambda}{dt^2}\right) = \frac{1}{h^2}\left(\frac{d^2\lambda}{dm^2}\right) \text{ u. s. w.}$$

I. Behält man nun die im Anfange dieses Kapitels angenommenen Bezeichnungen bey, so sind die bekannten Gleichungen der Bewegung des Planeten oder Kometen, wenn man seine Masse gegen die der Sonne vernachlässigt, und die letzte gleich der Einheit setzt

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{y}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{z}{r^3} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{I}$$

und eben so für die Erde, wenn die coordinirte Ebene der xy in der Ekliptik liegt

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2 X}{d t^2} + \frac{X}{R^3} = 0 \\ \frac{d^2 Y}{d t^2} + \frac{Y}{R^3} = 0\end{array}\right\} \text{II}$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen I. durch Sin λ, und die zweyte durch Cos λ, so ist ihre Differenz

$$0 = \frac{d^2 x \operatorname{Sin} \lambda - d^2 y \operatorname{Cos} \lambda}{dt^2} + \frac{x \operatorname{Sin} \lambda - y \operatorname{Cos} \lambda}{r^3}$$

und eben so . . (III)

$$0 = \frac{d^2 X \operatorname{Sin} \lambda - d^2 Y \operatorname{Cos} \lambda}{dt^2} + \frac{X \operatorname{Sin} \lambda - Y \operatorname{Cos} \lambda}{R^3}$$

Es ist aber, wenn δ die auf die Ekliptik projicirte Distanz des Planeten von der Erde, und L die Länge der Sonne bezeichnet,

$$\begin{aligned} x &= X + \delta \operatorname{Cos} \lambda \\ y &= Y + \delta \operatorname{Sin} \lambda \\ z &= \delta \operatorname{tg} \beta \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X &= R \operatorname{Cos} L \\ Y &= R \operatorname{Sin} L \end{aligned}$$

Sucht man daraus die Werthe von d^2x und d^2y, und substituirt sie in der ersten der Gleichungen III.; so erhält man

$$0 = \frac{d^2 X \operatorname{Sin} \lambda - d^2 Y \operatorname{Cos} \lambda}{dt^2} + \frac{X \operatorname{Sin} \lambda - Y \operatorname{Cos} \lambda}{r^3}$$

$$- 2 \left(\frac{d\delta}{dt}\right) \left(\frac{d\lambda}{dt}\right) - \delta \left(\frac{d^2\lambda}{dt^2}\right)$$

oder da $Y \operatorname{Cos} \lambda - X \operatorname{Sin} \lambda = R \operatorname{Sin} (L - \lambda)$ ist,

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right) = \frac{R \operatorname{Sin} (L - \lambda)}{2 \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) - \tfrac{1}{2} \delta \cdot \frac{\left(\frac{d^2\lambda}{dt^2}\right)}{\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)} \quad . (\text{IV})$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen I. durch tang β, Cos λ, und die zweyte durch tg β Sin λ, und subtrahirt von der Summe dieser Producte die dritte Gleichung, so ist

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \operatorname{Cos} \lambda + \frac{d^2 y}{dt^2} \operatorname{Sin} \lambda + \frac{x \operatorname{Cos} \lambda + y \operatorname{Sin} \lambda}{r^3}$$

$$= \left(\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{z}{r^3}\right) . \operatorname{Cotg} \beta$$

oder wenn man für

$$x\ y\ z,\ d^2x,\ d^2y,\ d^2z$$

ihre Werthe substituirt

$$\left(\frac{d^2X}{dt^2}+\frac{X}{r^3}\right)\text{Cos}\,\lambda\ \text{tg}\,\beta+\left(\frac{d^2Y}{dt^2}+\frac{Y}{r^3}\right)\text{Sin}\,\lambda\ \text{tg}\,\beta$$

$$=\frac{2\left(\frac{d\beta}{dt}\right)\left(\frac{d\delta}{dt}\right)+\delta\left(\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)+2\,\delta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\text{tg}\,\beta}{\text{Cos}^2\beta}$$

$$+\,\delta\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\text{tg}\,\beta.$$

Multiplicirt man aber die erste der Gleichungen II. durch Cos λ, und die zweyte durch Sin λ, so gibt ihre Summe

$$\frac{d^2X\,\text{Cos}\,\lambda+d^2Y\,\text{Sin}\,\lambda}{dt^2}=-\left(\frac{X\,\text{Cos}\,\lambda+Y\,\text{Sin}\,\lambda}{R^3}\right)$$

oder

$$\left(\frac{d^2X}{dt^2}+\frac{X}{r^3}\right)\text{Cos}\,\lambda+\left(\frac{d^2Y}{dt^2}+\frac{Y}{r^3}\right)\text{Sin}\,\lambda$$

$$=(X\,\text{Cos}\,\lambda+Y\,\text{Sin}\,\lambda)\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)$$

$$=R\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)\text{Cos}\,(L-\lambda)$$

Also ist die vorhergehende Gleichung

$$R\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)\text{Cos}\,(L-\lambda)\,\text{tg}\,\beta$$

$$=\frac{2\left(\frac{d\delta}{dt}\right)\left(\frac{d\beta}{dt}\right)+\delta\left(\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)+2\,\delta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\text{tg}\,\beta}{\text{Cos}^2\beta}$$

$$+\,\delta\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\text{tg}\,\beta$$

oder, wenn man den Werth von

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)\ \text{aus (IV)}$$

substituirt, und der Kürze wegen A =

$$\frac{\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)\left(\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)+2\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\text{tg}\,\beta+\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^3\text{Sin}\,\beta\,\text{Cos}\,\beta-\left(\frac{d\beta}{dt}\right)\left(\frac{d^2\lambda}{dt^2}\right)}{\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)\text{Sin}\,\beta\,\text{Cos}\,\beta\,\text{Cos}\,(L-\lambda)+\left(\frac{d\beta}{dt}\right)\text{Sin}\,(L-\lambda)}$$

setzt,

$$R^3 = r^3 (1 + AR^3\delta) \; . \; . \; . \; (V.)$$

Da man aber hat

$$r^2 = \delta^2 \, Sec^2\beta + 2\, R\,\delta\, Cos\,(L-\lambda) + R^2$$

so erhält man, wenn man die Gleichung V. quadrirt, und für r^6 seinen Werth aus der letzten Gleichung substituirt,

$$(1 + A R^3 \delta)^2 . (\delta^2 \, Sec^2\beta + 2\, R\,\delta\, Cos\,(L-\lambda) + R^2) = R^6 \; . \; . (VI.)$$

welches eine Gleichung des siebenten Grades in Beziehung auf die einzige unbekannte Grösse δ ist, die in ihr vorkömmt, denn die ganze Gleichung kann durch δ dividirt werden, da das völlig bekannte Glied des ersten Theiles derselben gleich R^2 ist.

Hat man aus der Gleichung VI. den Werth von δ gefunden, so erhält man die Werthe von x y z aus den oben nach den Gleichungen III. gegebenen Ausdrücken, und den Werth von

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)$$

aus

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right) = -\frac{\frac{1}{2}\delta}{\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)} \cdot \left\{ \left(\frac{d^2\lambda}{dt^2}\right) + A\, Sin\,(L-\lambda) \right\},$$

so wie endlich die Differentialien von x y z in Beziehung auf t durch die Ausdrücke

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{dR}{dt}\right) Cos\, L - R \left(\frac{dL}{dt}\right) Sin\, L + \left(\frac{d\delta}{dt}\right) Cos\,\lambda$$
$$- \delta \left(\frac{d\lambda}{dt}\right) Sin\,\lambda$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{dR}{dt}\right) Sin\, L + R \left(\frac{dL}{dt}\right) Cos\, L + \left(\frac{d\delta}{dt}\right) Sin\,\lambda$$
$$+ \delta \left(\frac{d\lambda}{dt}\right) Cos\,\lambda$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{d\delta}{dt}\right) tg\,\beta + \delta \left(\frac{d\beta}{dt}\right) Sec^2\beta$$

wo man die Werthe von

$$\left(\frac{dL}{dt}\right), \left(\frac{dR}{dt}\right)$$

leicht aus dem Cap. I. bestimmen wird. Ist nähmlich E die Excentricität der Erdbahn, und V die wahre Anomalie der Erde vom Perihelio gerechnet, so ist

$$\left(\frac{dL}{dt}\right) = \frac{\sqrt{1-E^2}}{R^2}$$

und

$$\left(\frac{dR}{dt}\right) = \frac{E \text{ Sin } V}{\sqrt{1-E^2}}$$

Es ist nun noch übrig, aus diesen letzten Grössen die Elemente der Bahn abzuleiten.

Der elliptische Sector, welchen der auf die Ekliptik projicirte Radius Vector während der Zeit dt beschreibt, ist bekanntlich

$$\frac{xdy - ydx}{2}$$

und dieser Ausdruck, oder auch folgender

$$x\left(\frac{dy}{dt}\right) - y\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

ist bejaht oder verneint, wenn die Bewegung des Kometen recht- oder rückläufig ist.

Ist ferner n die Neigung der Bahn, und k die Länge des Knotens, und

$$o = z - py + qx$$

die Gleichung der Ebene der Bahn, so ist

$$p = \text{tg } n \text{ Cos } k$$
$$q = \text{tg } n \text{ Sin } k$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = p\left(\frac{dy}{di}\right) - q\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

also auch

$$y\left(\frac{dz}{dt}\right) - z\left(\frac{dy}{dt}\right) = q \cdot \left\{x\left(\frac{dy}{dt}\right) - y\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}$$
$$x\left(\frac{dz}{dt}\right) - z\left(\frac{dx}{dt}\right) = p \cdot \left\{x\left(\frac{dy}{dt}\right) - y\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}$$

Dividirt man die erste dieser Gleichungen durch die zweyte, so erhält man $\frac{q}{p}$ oder tg k, und wenn so k bekannt ist, so gibt jede dieser beyden letzten Gleichungen auch tg n. Man wird aber k aus seiner Tangente so bestimmen, dass $n < 90°$ ist.

Aus den §. 4. Cap. I. sieht man, dass die Geschwindigkeit des Kometen für die Entfernung r von der Sonne gleich

$$\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}$$

ist, wo a die halbe grosse Axe der Bahn bezeichnet, und dass der allgemeine Ausdruck dieser Geschwindigkeit

$$\sqrt{\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt}}$$

ist. Man erhält daher die grosse Axe durch die Gleichung

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{1}{dt^2}(dx^2+dy^2+dz^2)$$

Ist ferner $a\varepsilon$ die Excentricität, und φ der Winkel, welchen die Tangente der Bahn mit dem Radius Vector bildet, so ist

$$a(1-\varepsilon^2) = \left(2r - \frac{r^2}{a}\right)\operatorname{Sin}^2\varphi$$

und

$$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{dr}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

Setzt man in der letzten Gleichung für

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

seinen vorhergehenden Werth

$$dt.\sqrt{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}},$$

so erhält man

$$a(1-\varepsilon^2) = 2r - \frac{r^2}{a} - \frac{dr^2}{dt^2}$$

oder, da $r^2 = x^2+y^2+z^2$ ist,

$$a(1-\varepsilon^2) = 2r - \frac{r^2}{a} - \frac{1}{dt^2}(xdx+ydy+zdz)^2$$

und aus dieser Gleichung wird man den Werth von ε bestimmen können.

Das Zeichen des Ausdrucks

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{dt}$$

wird negativ seyn, wenn der Komet seiner Sonnennähe zugeht, und umgekehrt.

Ist endlich u, v die excentrische und wahre Anomalie, und t die Zeit zwischen der Epoche und dem Durchgange des Planeten durch sein Perihelium, so ist

$$\operatorname{Cos} u = \frac{a-r}{a\varepsilon}$$

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \operatorname{tg}\frac{u}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

$$t = a^{\frac{3}{2}}(u - \varepsilon \operatorname{Sin} u)$$

wodurch man die Grössen u, v und t findet. Addirt oder subtrahirt man diese Zeit von der Epoche, so erhält man die Zeit des Durchgangs des Kometen durch sein Perihelium. Ist ferner ψ der Winkel der Axe der x mit dem auf die Ekliptik projicirten Radius Vector, so ist

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{y}{x}$$

und da man den Winkel k kennt, welchen die Axe der x mit der Knotenlinie macht, so wird $\psi - k$ der Winkel der Knotenlinie mit der Projection von r seyn. Ist dann ψ' der Winkel der Knotenlinie mit dem Radius Vector selbst, so ist

$$\operatorname{tg}\psi' = \frac{\operatorname{tg}(\psi - k)}{\operatorname{Cos} n}$$

und da die wahre Anomalie v, oder der Winkel, welchen der Radius Vector mit der grossen Axe macht, aus dem vorhergehenden ebenfalls gegeben ist, so wird

$$\psi' - v$$

der zwischen der Knotenlinie und der Apsidenlinie enthaltene Winkel, oder die Elongation des Periheliums vom Knoten seyn, wodurch die Länge des Periheliums

$$\psi' - v + k,$$

und sonach alle Elemente der Bahn bestimmt seyn werden.

§. 12.

Viel einfacher werden die vorhergehenden Auflösungen, wenn man die Bahn des Planeten entweder kreisförmig oder geradlinig annimmt, Voraussetzungen, deren die erste bey nicht sehr excentrischen Bahnen, und die letzte überhaupt für eine erste rohe Näherung aus zwey- oder dreytägigen Beobachtungen nach der ersten Erscheinung, öfters von Nutzen seyn können, daher wir sie kürzlich betrachten wollen.

Setzt man die Bahn des Planeten kreisförmig voraus, so lässt sich erstens die Aufgabe, die Elemente dieser Bahn zu finden, als eine rein geometrische betrachten. Bestimmt man nämlich die Lage des Planeten gegen die Sonne durch drey rechtwinkligte Coordinaten

$$x \quad y \quad z$$

so gilt die Bedingung, dass die Bahn in einer Ebene liegt, die durch den Mittelpunct der Sonne geht,

$$z + py + qx = c$$

und die Bedingung, dass die Bahn ein Kreis ist, dessen Halbmesser durch a bezeichnet werden soll, gibt

$$z^2 + y^2 + x^2 = a^2$$

Die Verbindung beyder Gleichungen gibt die Bahn des Planeten der Grösse und Lage nach. Behält man nähmlich die vorhergehende Bezeichnung der Grössen

$$\rho,\ \lambda,\ \beta,\ R,\ L$$

bey, so ist

$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \lambda + R \operatorname{Cos} L \\ y &= \rho \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Sin} \lambda + R \operatorname{Sin} L \\ z &= \rho \operatorname{Sin} \beta \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe von x y z in den beyden vorhergehenden Gleichungen, und setzt der Kürze wegen

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{Cotg} \beta \operatorname{Sin} \lambda \\ B &= \operatorname{Cotg} \beta \operatorname{Cos} \lambda \\ C &= \frac{R \operatorname{Sin} L}{\operatorname{Sin} \beta} \\ D &= \frac{R \operatorname{Cos} L}{\operatorname{Sin} \beta} \end{aligned}$$

und

$$E = R \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} (L - \lambda)$$

so hat man

$$\left.\begin{aligned} \rho^2 + 2 E\rho + R^2 &= a^2 \\ \rho + \frac{(pC + qD)}{1 + pA + qB} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Eine zweyte Beobachtung gibt zwey ähnliche Gleichungen zwischen

$$\rho'\ p\ q\ a$$

und eine dritte eben so zwischen

$$\rho''\ p\ q\ a$$

so dass man aus diesen sechs Gleichungen, d. h. also, aus drey vollständigen geocentrischen Beobachtungen, die sechs unbekannten Grössen

$$a\ p\ q \text{ und } \rho\ \rho'\ \rho''$$

auf die gewöhnliche Weise bestimmen kann.

I. Nimmt man aber bey der Auflösung dieses Problems auch auf die bekannten Gesetze der Bewegung Rücksicht, so reichen zwey Beobachtungen zur vollkommenen Bestimmung der Elemente hin.

Substituirt man nähmlich die vorhin gegebenen Werthe von x y z in der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

und setzt man der Kürze wegen

$$A = R \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} (L - \lambda)$$

so hat man

$$\rho = \sqrt{a^2 - (R^2 - A^2)} - A \ldots (I.)$$

Für eine zweyte Beobachtung ist eben so

$$A' = R' \operatorname{Cos} \beta' \operatorname{Cos} (L' - \lambda')$$

$$\rho' = \sqrt{a^2 - (R'^2 - A'^2)} - A' \ldots (II.)$$

Ist aber $\varkappa$ die Sehne, welche die Endpuncte der Halbmesser a in den beyden Beobachtungen verbindet, so ist

$$\varkappa^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$$

oder

$$\begin{aligned} \varkappa^2 = 2a^2 & - 2\rho\rho' (\operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\beta' \operatorname{Cos}(\lambda - \lambda') + \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\beta') \\ & - 2\rho R' \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}(L' - \lambda) \\ & - 2\rho' R \operatorname{Cos}\beta' \operatorname{Cos}(L - \lambda') \\ & - 2 RR' \operatorname{Cos}(L - L') \quad \ldots \quad (III.) \end{aligned}$$

Es ist ferner die Fläche des Kreissectors zwischen den beyden Beobachtungen,

$$s = a^2 . \operatorname{Arc} \operatorname{Sin} \frac{\varkappa}{2a}$$

und wenn

$$\mu = 3548''.1866$$

und t die Zwischenzeit ist, so hat man auch

$$s = \frac{\mu t . \sqrt{a}}{2}$$

also ist, wenn man beyde Ausdrücke von s einander gleich setzt,

$$\frac{\mu t}{2a^{\frac{3}{2}}} = \operatorname{Arc} \operatorname{Sin} \frac{\varkappa}{2a} \ldots (IV.)$$

und die Gleichungen

I. II. III. IV.

enthalten nur die unbekannten Grössen

$a \; \rho \; \rho'$,

sie reichen daher mehr als hin, die Werthe dieser Grössen zu bestimmen.

Sammelt man das Vorhergehende, so ist

$$A = R \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}(L - \lambda)$$
$$B = 2 R' \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}(L - \lambda)$$
$$A' = R' \operatorname{Cos}\beta' \operatorname{Cos}(L' - \lambda')$$
$$B' = 2 R \operatorname{Cos}\beta' \operatorname{Cos}(L - \lambda')$$
$$\operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{Cos}(\lambda - \lambda')}{\operatorname{tg}\beta}$$

Hat man diese beständigen Hilfsgrössen berechnet, so ist

$$\operatorname{Sin} m = \frac{\sqrt{R^2 - A^2}}{a}$$
$$\rho = a \operatorname{Cos} m - A$$
$$\operatorname{Sin} m' = \frac{\sqrt{R'^2 - A'^2}}{a}$$
$$\rho' = a \operatorname{Cos} m' - A'$$
$$\varkappa^2 = 2 a^2 - 2 \rho \rho' \operatorname{Sin}\beta \frac{\operatorname{Sin}(C + \beta')}{\operatorname{Cos} C}$$
$$- B\rho - B'\rho' - 2 R R' \operatorname{Cos}(L - L')$$
$$\frac{\varkappa}{2a} - \operatorname{Sin} \frac{\mu t}{2a^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Man nimmt daher einen willkührlichen Werth von a an, und sucht damit

$$m \; m' \; \rho \; \rho' \; \varkappa^2$$

Wird für den gefundenen Werth von $\varkappa$ der letzte Ausdruck gleich Null, so ist a richtig. Im entgegen gesetzten Falle wird man dasselbe Verfahren mit einem andern Werthe von a wiederholen, und so durch die bekannte Methode den wahren Werth von a finden.

Hat man so

$$a \; \rho \; \rho'$$

gefunden, so wird man daraus, nach dem vorhergehenden, die Neigung der Bahn und die Knotenlinie bestimmen; die Differenz der Argumente der Breite wird seyn

$$2 h = \frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}}$$

und die tägliche Bewegung in Sekunden

$$\frac{\mu}{a^{\frac{3}{2}}}$$

Wendet man das Vorhergehende auf die zwey Beobachtungen der Vesta vom 24. und 29. April 1807 an, welche wir §. 6. gegeben haben, so ist

$$t = 4.9850197$$

$$\log A = 9.8807012$$
$$\log B = 0.1492157$$

$$\log A' = 9.8457471$$
$$\log B' = 0.1797447$$

$$C = 78^\circ\ 22'\ 34''97$$

$$\log \sqrt{R^2 - A^2} = 9.8197078$$
$$\log \sqrt{R'^2 - A'^2} = 9.8598422$$

$$\log 2\,\frac{\operatorname{Sin}\beta\ \operatorname{Sin}(C+\beta')}{\operatorname{Cos} C} = 0.3010147$$

$$2\,R\,R'\,\operatorname{Cos}(L-L') = 2.0218832$$

I. Hypothese:

$$a = 2$$

$$m = 19^\circ\ 16'\ 34''8$$
$$m' = 21\ \ 13\ \ 42.2$$

$$\log \rho = 0.0523367$$
$$\log \rho' = 0.0656700$$

$$\varkappa^2 = 0.0035973$$

$$\log \frac{\varkappa}{2a} = 8.1759283$$

$$\log \operatorname{Sin} \frac{\mu t}{2a^{\frac{3}{2}}} = 8.1806569$$

$$\text{Fehler} = 0.0047286$$

II. Hypothese:

$$a = 2.2$$

$$m = 17^\circ\ 27'\ 51''85$$
$$m' = 19\ \ 13\ \ 6.14$$

$$\log \rho = 0.1267106$$
$$\log \rho' = 0.1387286$$

$$\varkappa^2 = 0.0033423$$

$$\log \frac{\kappa}{2a} = 8.1185700$$

$$\log \operatorname{Sin} \frac{\mu t}{2a^{\frac{3}{2}}} = 8.1185717$$

$$\text{Fehler} = 0.0000017$$

also corrigirtes

$$a = 2.2000755$$

oder

$$\log a = 0.3424376$$

und corrigirtes

$$\log \rho = 0.1267373$$
$$\log \rho' = 0.1387549$$

Daraus folgen die heliocentrischen Längen und Breiten

$$\operatorname{Sin} b = \frac{\rho}{a} \operatorname{Sin} \beta, \operatorname{Sin}(L-l) = \frac{\rho \operatorname{Cos} \beta}{a \operatorname{Cos} b} \operatorname{Sin}(L-\lambda)$$

$$l = 191^\circ\ 12'\ 59''1$$
$$l' = 192\ \ 43\ \ 38.9$$

$$b = 7^\circ\ 2'\ 33''9$$
$$b' = 7\ \ 3\ \ 33.1$$

und daraus Neigung der Bahn

$$7^\circ\ 4'\ 45''$$

Länge des aufsteig. Knotens

$$107^\circ\ 3'\ 17''8$$

Vergleicht man diess mit §. 9., so ist das hier gefundene log a zu klein um 0.0056, und die Neigung zu klein um 0° 2'. Beträchtlicher weicht die Bestimmung des Knotens von der Wahrheit ab, weil sich die Breiten so wenig ändern, oder weil das Argument der Breite in der ersten Beobachtung 87° 54', also zu nahe an 90° ist. Aus derselben Ursache ist die Neigung den Bahn desto genauer.

§. 13.

Setzt man aber voraus, dass die Bahn eine gerade Linie ist, so sey

$$x = Py - p \ldots (\mathrm{I.})$$

die Gleichung der Projection dieser Linie in der Ebene der Ekliptik, wo der Anfangspunct der Coordinaten die Erde in der ersten Beobachtung, und wo die Axe der x in der Linie liegt, welche die Erde, und den auf die Ekliptik projicirten Planeten in der ersten Beobachtung verbindet. Die Linie, welche die Erde und den auf die Ekliptik projicirten Planeten in der zweyten, dritten und vierten Beobachtung verbindet, schneide die Axe der x, oder die Linie, welche die Erde und den projicirten Planeten in der ersten Beobachtung verbindet, in Puncten, deren Entfernung vom Anfangspuncte der x in derselben Ordnung gleich a, b, c ist, so wird man für die Werthe dieser Entfernungen haben

$$a = \frac{R \sin(\lambda' - L) - R' \sin(\lambda' - L')}{\sin(\lambda' - \lambda)}$$

$$b = \frac{R \sin(\lambda'' - L) - R'' \sin(\lambda'' - L'')}{\sin(\lambda'' - \lambda)},$$

$$c = \frac{R \sin(\lambda''' - L) - R''' \sin(\lambda''' - L''')}{\sin(\lambda''' - \lambda)}$$

Setzt man überdiess der Kürze wegen

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{Cotg}(\lambda' - \lambda) \\ B &= \operatorname{Cotg}(\lambda'' - \lambda) \\ C &= \operatorname{Cotg}(\lambda''' - \lambda) \end{aligned}$$

so wird die Gleichung der Linie, welche die Erde mit dem auf die Ekliptik projicirten Planeten verbindet, d. h. so wird die Gleichung der Grössen $\delta\ \delta'\ \delta''\ \delta'''$ seyn

in der ersten Beobachtung		$y = o$
zweyten	....	$x = Ay - a$
dritten	....	$x = By - b$
vierten	....	$x = Cy - c$

also sind auch die Coordinaten des Punctes, in welchem die Linie δ die projicirte Bahn schneidet,

in der ersten Beobacht. $\xi = -p$ und $v = o$

zweyten .... $\xi' = \dfrac{aP - Ap}{A - P}$ $\quad v' = \dfrac{a - p}{A - P}$

dritten .... $\xi'' = \dfrac{bP - Bp}{B - P}$ $\quad v'' = \dfrac{b - p}{B - P}$

vierten .... $\xi''' = \dfrac{cP - Cp}{C - P}$ $\quad v''' = \dfrac{c - p}{C - P}$

Heisst man nun (1.2) die Zeit zwischen der ersten und zweyten Beobachtung, und eben so mit den übrigen Zwischenzeiten, so ist

$$\frac{v' - v}{v'' - v} \quad \frac{(1.2)}{(1.3)}$$

und

$$\frac{v' - v}{v''' - v} = \frac{(1.2)}{(1.4)}$$

Substituirt man daher in diesen beyden Gleichungen die vorhergehenden Werthe von

$$v \; v' \; v'' \; v'''$$

so kann man daraus die beyden Grössen P und p bestimmen. Man findet so die schönen Ausdrücke

$$P = \frac{(12)(c-b)A-(13)(c-a)B+(14)(b-a)C}{(12)(c-b)-(13)(c-a)+(14)(b-a)},$$

und

$$p = \frac{(13)(14)(C-B)a-(12)(14)(C-A)b+(12)(13)(B-A)c}{(13)(14)(C-B)-(12)(14)(C-A)+(12)(13)(B-A)}$$

Ist aber P und p gefunden, so ist die Gleichung (I) der projicirten Bahn gegeben, und die weitere Bestimmung der Elemente hat keine Schwierigkeit. Nennt man noch M den Winkel, welchen die projicirte Bahn mit der Axe der x bildet, so findet man leicht

$$\text{Sin } M = \frac{(12)(b-c)-(13)(a-c)+(14)(a-b)}{(13)(14)(C-B)-(12)(14)(C-A)+(12)(13)(B-A)}$$

I. Da aber die Voraussetzung einer geraden Linie auch bey sehr nahen Beobachtungen nur annähernd wahr ist, so wird es erlaubt, ja vortheilhaft seyn, auch in den Rechnungen die Abkürzungen anzubringen, welche dem Endresultate keinen merklichen Eintrag thun. Man wird daher für eine erste genäherte Bestimmung einer Kometenbahn, wo es nur darum zu thun ist, dass man aus den ersten Beobachtungen, die man gemacht hat, den Kometen nach einigen trüben Tagen wieder ohne viel Mühe, der Rechnung sowohl als der Beobachtung selbst, auffinden könne, folgende Methode, die sich auf die Ausdrücke des §. 4. Cap. II. gründet, nicht ohne Nutzen finden.

Wenn man nähmlich die Bahn des Planeten als eine gerade Linie annimmt, so sind die in §. 4. gebrauchten Grössen

$$f \; f' \; f''$$

die Flächen der geradlinichten Dreyecke, welche zwischen der Bahn und den Radien der drey Beobachtungen enthalten sind, und da diese Dreyecke alle eine gemeinschaftliche Höhe haben, weil ihr gemeinschaftlicher Scheitel im Mittelpuncte der Sonne steht, so verhalten sich die Flächen dieser Dreyecke, wie die Grundlinien derselben. Da aber die Bewegung in einer geraden Linie während einer kurzen Zwischenzeit als gleichförmig vorausgesetzt werden kann, so verhalten sich diese Grundlinien, also auch jene Flächen, wie die Zwischenzeiten der Beobachtungen. Behält man daher die in §. 4. gebrauchten Bezeichnungen bey, so gibt die erste der Gleichungen IV.

$$\delta = \frac{\vartheta'}{\vartheta} \cdot \frac{A'D'}{a} - \frac{\vartheta''}{\vartheta} \cdot \frac{A''D''}{a} - \frac{AD}{a}$$

und die dritte der Gleichungen IV.

$$\delta'' = \delta \cdot \frac{\vartheta}{\vartheta''} \cdot \frac{C'}{A'}$$

Wenden wir diess auf die Beobachtungen der Vesta an, die wir in §. 6. gegeben haben, wo auch schon die Werthe der Constanten

$$A\ A'\ A''\ C' \text{ und } \vartheta\ \vartheta'\ \vartheta''$$

gegeben wurden, so findet man sofort

$$\log \delta = 0.1690281$$
$$\log \delta'' = 0.1910246$$

Es ist aber

$$x = \delta \operatorname{Cos} \lambda + D \operatorname{Cos} L$$
$$y = \delta \operatorname{Sin} \lambda + D \operatorname{Sin} L$$
$$z = \delta \operatorname{tg} \beta$$

also für die erste Beobachtung

$$x = -2.3053417$$
$$y = -0.4076899$$
$$\log z = 9.4822528$$

und eben so für die letzte Beobachtung

$$x'' = -2.2760672$$
$$y'' = -0.5190821$$
$$\log z'' = 9.4801173$$

Man hat daher

$$zy'' - yz'' = -0.0344219$$
$$xz'' - x''z = -0.0054542$$
$$xy'' - x''y = +0.2687321$$

also findet man nach §. 6. Neigung der Bahn

$$n = 7^\circ\ 23'\ 21''6$$

Länge des aufsteigenden Knotens

$$\Omega = 99^\circ\ 0'\ 13''5$$

Andere Auflösungen ähnlicher Aufgaben s. m. Berl. Ephemeriden 1785 p. 193, und 1786 p. 224 und 238.

VIERTES KAPITEL.

Verbesserung der schon nahe bekannten Elemente.

§. 1.

Wenn die Beobachtungen und die Grössen, welche wir den Rechnungen der vorhergehenden Abtheilung zu Grunde legten, vollkommen genau wären, so müssten auch die aus drey Beobachtungen abgeleiteten Elemente völlig richtig seyn, die kleinen Abweichungen etwa ausgenommen, die von der Unvollkommenheit unserer bloss approximirten Logarithmen, und von den im Vorhergehenden vernachlässigten Massen und Störungen anderer Körper entspringen. Da aber alle unsere Beobachtungen, so wie unsere Rechnungen, nur blosse Annäherungen zur Wahrheit sind, so werden wir, weil wir diese Wahrheit selbst doch nie erreichen können, uns ihr wenigstens so viel möglich zu nähern suchen.

Aus der Natur des Gegenstandes, welchen wir hier behandeln, folgt schon, dass die unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf die daraus abgeleiteten Resultate einen um so grössern nachtheiligen Einfluss haben werden, je kleiner die Zwischenzeiten dieser Beobachtungen, oder vielmehr, je kleiner die heliocentrischen Bewegungen des Planeten in diesen Zwischenzeiten sind. Da aber allen vorhergehenden Methoden diese Voraussetzung zu Grunde liegt und liegen muss, weil es uns sonst an allen Mitteln fehlen würde, vorläufige Werthe für die Grössen

$$f \; f' \; f''$$

zu bestimmen, mit welchen man die erste Methode anfangen kann — so ist klar, dass die durch die vorhergehenden Methoden abgeleiteten Elemente oft noch beträchtlicher Verbesserungen bedürfen werden. Wenn wir uns also in der vorhergehenden Abtheilung damit beschäftigten, aus drey ersten einander nahen Beobachtungen die n o c h v ö l l i g u n b e k a n n t e n Elemente, welche diesen drey Beobachtungen genug thun, zu finden, so wollen wir nur sehen, wie man mit schon bekannten genäherten Elementen diejenige finden könne, welche drey von einander sehr entfernten Beobachtungen vollkommen oder auch mehreren gesammelten Beobachtungen so nahe als möglich entsprechen.

Vor allem wird man aber diese neuen Beobachtungen, welche man der genauen Bahnbestimmung zu Grunde legen will, nicht auf Gerathewohl aus der vorhandenen Anzahl der Beobachtungen herausnehmen, sondern mit Vorsicht nur solche wählen, von deren Güte man überzeugt ist. Zu diesem Zwecke wird man aus mehreren einzelnen Beobachtungen, die nahe an einander liegen, eine einzige andere ableiten, die von allen vorhergehenden gleichsam das Mittel ist, und daher eine viel grössere Genauigkeit gewährt, als jede der vorhergehenden einzelnen Beobachtungen.

Wenn man nähmlich mit den schon beynahe bekannten Elementen die geocentrischen Orte der einzelnen Beobachtungen berechnet, so werden die Unterschiede dieser berechneten und der wahren beobachteten Orte in dem Laufe mehrerer Tage constant, oder wenigstens der Zeit proportional seyn. Sind z. B.

$$\alpha\ \alpha'\ \alpha''\,..$$

die zu den Zeiten

$$t\ t'\ t''\,..$$

beobachteten Rectascensionen oder Declinationen, und

$$\alpha + \delta,\ \alpha' + \delta',\ \alpha'' + \delta''\,..$$

dieselben aus den Elementen berechneten Grössen, so werden

$$\delta\ \delta'\ \delta''\,..$$

wenn die Beobachtungen selbst als richtig vorausgesetzt werden, die Fehler der Elemente bezeichnen, und es wird, wenn man die Grösse

$$\delta\ \delta'\ \delta''\,..$$

als constant betrachten kann, der wahrscheinlichste Fehler jeder dieser aus den Elementen berechneten Orte gleich (Buch I. Cap. X.)

$$\Delta = \frac{\delta + \delta' + \delta'' + ..}{n}$$

seyn, wo n die Anzahl der Beobachtungen ist. Sind aber die Beobachtungen selbst unter einander nicht von gleichem Werthe, und drückt z. B.

$$a\ a'\ a''$$

den Grad der Güte der ersten, zweyten und dritten Beobachtung aus, so ist der mittlere wahrscheinlichste Werth des Fehlers der Elemente nicht mehr wie zuvor, das arithmetische Mittel aus allen einzelnen Fehlern, sondern es ist (a. a. O.)

$$\Delta = \frac{a^2 \delta + a'^2 \delta' + a''^2 \delta'' + }{a^2 + a'^2 + a''^2 + }$$

und wenn man die Grösse Δ kennt, so wird man für die wahren Rectascensionen, Declinationen etc. annehmen

in der ersten Beobachtung $\alpha + \delta - \Delta$
zweyten $\alpha' + \delta' - \Delta$
dritten $\alpha'' + \delta'' - \Delta$ u. s. w.

und es wird dann gleichviel seyn, welche von diesen Beobachtungen man den künftigen Untersuchungen zu Grunde legt.

§. 2.

Wir wollen also voraussetzen, dass man drey so verbesserte, von einander beträchtlich entfernte Beobachtungen habe, und sehen, wie man durch sie die bereits bekannten genäherten Elemente verbessern könne.

Zur Auflösung dieser Aufgabe bieten sich mehrere Wege dar, von welchen wir nur einige der vorzüglichsten näher anzeigen wollen.

Für die zwey äussersten Beobachtungen suche man aus den Elementen die Logarithmen der curtirten Distanzen des Planeten von der Erde

$$x = \log \delta,\ x'' = \log \delta''$$

und suche daraus (nach Cap. II.) die heliocentischen Orte und die Radii Vectores des Planeten, und daraus (nach Cap. III. §. 6.) die Lage der Bahn und die heliocentrische Länge in der Bahn, und daraus (nach Cap. III. §. 7.) alle übrigen Elemente, welche Elemente also jene zwey äussersten Beobachtungen genau darstellen werden, wenn auch die anfangs angenommenen

$$x\ x''$$

fehlerhaft sind. Mit diesen neuen Elementen berechne man nun den geocentrischen Ort für die dritte Beobachtung, so erhält man die Differenz X der beobachteten und berechneten Länge, und die Differenz Y der beyden Breiten, und wenn

$$X, Y$$

nicht etwa gleich Null sind, so wird man mit zwey andern Voraussetzungen für

$$x\ x''$$

noch zwey andere Fehler

$$X', Y'$$

und

$$X'', Y''$$

erhalten, aus welchen man (nach Cap. I. §. 8.) die wahren Werthe von

$$x\ x''$$

finden, und daraus auch die wahren, allen drey Beobachtungen entsprechenden Elemente bestimmen wird. Es ist klar, dass man für die beyden äussersten Beobachtungen keine solchen wählen darf, die in heliocentrischer Länge um zwey, vier, sechs rechte Winkel u. f. oder nahe um diese Grösse von einander entfernt sind, weil sich aus solchen Beobachtungen die Lage der Bahn nicht bestimmen lässt.

I. Eine andere noch vortheilhaftere Methode ist folgende:

Aus den beynahe bekannten Elementen suche man für die zwey äussersten Beobachtungen die curtirten Distanzen des Planeten von der Erde, und daraus die Längen in der Bahn und die Radii Vectores

$$r\ r''.$$

Mit Hilfe der Lage der Bahn, welche zugleich durch diese Rechnung gefunden wird, suche man auch für die mittlere Beobachtung die Länge in der Bahn, und den Radius Vector r'. Auf diese Weise erhält man für alle drey Beobachtungen die Grössen

$$r\ r'\ r''$$

und

$$2\,h,\ 2\,h',\ 2\,h''$$

so dass man hat

$$h' = h + h''$$

und

$$\begin{aligned} f &= r' r'' \operatorname{Sin} 2\,h \\ f' &= r r'' \operatorname{Sin} 2\,h' \\ f'' &= r r' \operatorname{Sin} 2\,h'' \end{aligned}$$

Dann fange man eine doppelte Berechnung der Elemente aus

$$r\ r'\ h''\ \vartheta''$$

und

$$r'\ r''\ h\ \vartheta$$

an, nach Cap. III. §. 7., gehe aber in beyden nur bis zu der Gleichung (IV.) die y gibt, welches y in der ersten Berechnung η'', und in der zweyten η heissen soll.

Nun hatten wir §. 7. III. drey Ausdrücke für p, nähmlich

$$\sqrt{p} = \frac{\eta''\ f''}{\mu\,\vartheta''}$$

$$\sqrt{p} = \frac{\eta f}{\mu \vartheta}$$

und

$$p = \frac{4 r r' r'' \operatorname{Sin} h \operatorname{Sin} h' \operatorname{Sin} h''}{f - f' + f''}$$

und diese drey Werthe müssen identisch seyn, wenn die ersten genäherten Elemente richtig sind, d. h. man müsste in diesem Falle haben

$$X = \eta f \vartheta'' - \eta'' f'' \vartheta = 0$$

und

$$Y = f - f' + f'' - \frac{4 r r' r'' \mu^2 \vartheta \vartheta'' \operatorname{Sin} h \operatorname{Sin} h' \operatorname{Sin} h''}{\eta \eta'' f f''} = 0$$

Ist nun X und Y nicht Null, so wiederhole man die ganze Berechnung noch zweymahl mit zwey andern curtirten Distanzen für die beyden äussersten Beobachtungen, woraus man dann, nach Cap. I. §. 8. die wahren curtirten Distanzen, und daraus die wahren Elemente der Bahn erhält, welche diesen drey zu Grunde gelegten Beobachtungen genug thun.

II. Diese Rechnungen abzukürzen, kann man in der zweyten und dritten Hypothese nur e i n e von den beyden zuerst angenommene curtirte Distanz verändern, und so verfahren:

Aus den schon bekannten genäherten Elementen berechne man für die beyden äussersten Beobachtungen die curtirten Distanzen

$$\delta \text{ und } \delta''$$

und berechne daraus die Elemente und daraus den geocentrischen Ort M (nähmlich dessen Länge und Breite oder dessen Rectascension und Declination) in der dritten Beobachtung. In einer zweyten Hypothese, für die man

$$\delta + m \text{ und } \delta''$$

annimmt, suche man eben so die Elemente und daraus für die dritte Beobachtung den grocentrischen Ort

$$M + \alpha.$$

In einer dritten Hypothese endlich, für die man

$$\delta \text{ und } \delta'' + m''$$

annimmt, suche man wieder die Elemente, und daraus für die dritte Beobachtung den geocentrischen Ort

$$M + \beta.$$

Da nun die Grössen

$$m\, m''\, \alpha\, \beta$$

nur klein sind, so kann man annehmen, dass in einer vierten Hypothese, für die man

$$\delta + x\,m \text{ und } \delta'' + y\,m''$$

annehmen wollte, der berechnete geocentrische Ort der dritten Beobachtung seyn wird

$$M + \alpha x + \beta y$$

Ist daher N der wirklich beobachtete geocentrische Ort, so hat man

$$M + \alpha x + \beta y = N$$

und da sowohl die geocentrische Länge, als die geocentrische Breite eine solche Gleichung gibt, so wird man aus diesen beyden Gleichungen die Werthe von x und y d. h. die wahren curtirten Distanzen der zwey äussersten Beobachtungen finden, aus welchen man dann die wahren Elemente berechnen kann, welche diesen drey Beobachtungen vollkommen Genüge thun.

Man kann diese Methode selbst auf mehr als drey Beobachtungen ausdehnen. Sucht man nähmlich in der ersten Hypothese durch die aus

$$\delta\ \delta''$$

abgeleiteten Elemente die geocentrischen Orte einer dritten, vierten und fünften Beobachtung, die

$$M\, M'\, M'' \ldots$$

heissen sollen, und sind eben so die berechneten geocentrischen Orte in der zweyten Hypothese

$$M + \alpha,\ M' + \alpha',\ M'' + \alpha'' \ldots$$

und in der dritten Hypothese

$$M + \beta,\ M' + \beta',\ M'' + \beta'' \ldots$$

so hat man, wenn

$$N\, N'\, N'' \ldots$$

die wirklich beobachteten Orte sind, folgende, eigentlich doppelte Gleichungen:

$$\begin{aligned} M + \alpha\, x + \beta\, y &= N \\ M' + \alpha' x + \beta' y &= N' \\ M'' + \alpha'' x + \beta'' y &= N'' \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

aus welchen man dann die wahrscheinlichsten Werthe der Grösse

$$x\ y$$

nach der im ersten Buche gegebenen Methode finden, und aus diesen diejenigen Elemente bestimmen wird, welche sich an alle zu Grunde gelegten Beobachtungen am besten anschliessen.

III. Diese letzte Methode lässt sich, wie man sieht, auch auf parabolische Elemente unmittelbar anwenden, doch ist es bequemer, für diese auf folgende Art zu verfahren.

Aus den genäherten Elementen suche man für die zwey äussersten Beobachtungen die curtirten Radii Vectores

$$r\ r''.$$

In einer zweyten Hypothese seyen diese Radien

$$r + m,\ r''$$

und in einer dritten

$$r,\ r'' + m''.$$

Aus diesen angenommenen Entfernungen von der Sonne und der beobachteten geocentrischen Länge und Breite berechne man für jede der drey Hypothesen die parabolischen Elemente, so findet man in jeder dieser drey Hypothesen die Zeit,

$$T,\ T + t,\ T + t''$$

welche zwischen den zwey äussersten Beobachtungen hätte verstreichen sollen, und diese mit der wirklich beobachteten Zwischenzeit ϑ verglichen, gibt die erste Gleichung zur Bestimmung von x und y,

$$\frac{tx}{m} + \frac{ty''}{m''} = \vartheta - T$$

Um eine zweyte Gleichung zu erhalten, berechne man für die dritte oder mittlere Beobachtung in jeder der drey Hypothesen die geocentrische Länge, oder wenn sich die Breiten stärker ändern, die geocentrische Breite, die in den drey Hypothesen nach der Ordnung

$$M,\ M + \alpha,\ M + \beta$$

heissen soll. Ist dann N die wirklich beobachtete Länge oder Breite, so ist die zweyte Gleichung

$$\frac{\alpha x}{m} + \frac{\beta y}{m''} = N - M$$

Hat man so x und y gefunden, so sind die wahren curtirten Distanzen von der Sonne in den zwey ersten Beobachtungen

$$r + x \text{ und } r'' + y$$

woraus man dann auch die wahren Elemente finden kann, welche diese drey Beobachtungen genau darstellen. Man bemerkt von selbst, dass sich dieselbe Methode, wie die in III. gegebene, auch auf mehrere Beobachtungen fortsetzen lässt. Wie man sie zur Berechnung der elliptischen Bahn benützen kann, s. m. Berl. Jahrb. 1820, p. 220.

§. 3.

Hieher gehören auch die Untersuchungen, welchen Einfluss kleine Fehler des geocentrischen Orts eines Planeten auf dessen heliocentrische Lage und umgekehrt haben.

Zu diesem Zwecke wollen wir die vier Gleichungen Cap. II. §. 7. I. wieder vornehmen, die

$$\text{tg}\, u, \ \rho, \ r \text{ und Sin } u$$

geben.

Der erste dieser Ausdrücke gibt sofort

$$du = \frac{\rho \operatorname{Sin} u}{r \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}(L-k)} \left\{ d\lambda \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}(L-\lambda) + d\beta \operatorname{Sin}(L-\lambda) \right\}$$

und wenn man eben so aus der zweyten Gleichung $d\rho$ sucht, und diese Werthe von du und $d\rho$ in dem Differential der vierten Gleichung

$$\begin{aligned} & dr \operatorname{Sin} n \operatorname{Sin} u + r\, du \operatorname{Sin} n \operatorname{Cos} u \\ & = d\rho \operatorname{Sin}\beta + \rho\, d\beta \operatorname{Cos}\beta \end{aligned}$$

substituirt, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{dr}{\rho^2} = & \frac{d\lambda \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Sin} n \operatorname{Sin} u \operatorname{Sin}(L-k)} \left(\frac{\operatorname{Cos}(\lambda-k)}{R} - \frac{\operatorname{Cos} u \operatorname{Cos}(L-\lambda)}{r} \right) \\ & \frac{-d\beta}{\operatorname{Sin} n \operatorname{Sin} u \operatorname{Sin}(L-k)} \left(\frac{\operatorname{Sin}(\lambda-k)}{R} + \frac{\operatorname{Cos} u \operatorname{Sin}(L-\lambda)}{r} \right) \end{aligned}$$

I. Allein nicht bloss die unmittelbaren Fehler

$$d\lambda, \ d\beta$$

der Beobachtung, sondern auch fehlerhafte Voraussetzungen in der Lage des Knotens und der Neigung der Bahn können auf den aus den Beobachtungen abgeleiteten heliocentrischen Ort nach den verschiedenen Umständen mehr oder weniger nachtheiligen Einfluss haben.

Um diess näher zu untersuchen, biethen sich die Gleichungen Cap. II. §. 8. IV. als bequem dar, durch welche man findet

$$du = \frac{dn \operatorname{Sin}^2 u\, (\operatorname{Sin} n \operatorname{Cos}(L-k) + \operatorname{Cos} n \operatorname{Cotg} g) - dk \operatorname{Sin} u \operatorname{Cos} v}{\operatorname{Sin}(L-k)}$$

$$dr = \frac{r \operatorname{Cotg}(h-v)}{\operatorname{Sin}(L-k)} \left\{ dn \frac{\operatorname{Sin}^2 u}{\operatorname{Sin} g} - dk \operatorname{Cos} u \operatorname{Sin} v \right\}$$

wo v g h . . die dort angezeigte Bedeutung haben.

II. Endlich hat auch eine fehlerhafte Voraussetzung des Sonnenorts einen verschiedenen Einfluss auf den heliocentrischen Ort des Planeten, den man aus dem beobachteten geocentrischen ableitet.

Legt man aus Cap. II. §. 7. I. die Gleichungen

$$\mathrm{tg}\,(\lambda - k) = \frac{y - Y}{x - X}$$

und

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{z - Z}{x - X}\,\mathrm{Cos}\,(\lambda - k)$$

zu Grunde, so erhält man durch Differentiation

$$(dx - dX)\,(y - Y) = (dy - dY)\,(x - X)$$
$$(dx - dX)\,(z - Z) = (dz - dZ)\,(x - X)$$

Aber man hat

$$dx = \frac{x\,dr}{r} - r\,du\,\mathrm{Sin}\,u$$

$$dy = \frac{y\,dr}{r} + r\,du\,\mathrm{Cos}\,u\,\mathrm{Cos}\,n$$

$$dz = \frac{z\,dr}{r} + r\,du\,\mathrm{Cos}\,u\,\mathrm{Sin}\,n$$

und eben so

$$dX = \frac{X\,dR}{R} - Y\,dL$$

$$dY = \frac{Y\,dR}{R} + X\,dL$$

$$Z = dZ = 0$$

Substituirt man diese Werthe in den zwey vorhergehenden Gleichungen, so findet man daraus durch Elimination die Werthe von

$$du \text{ und } dr,$$

nähmlich

$$du = \frac{R\,\mathrm{Sin}\,u}{r\,\mathrm{Sin}\,(L - k)}\,.\,dL$$

$$dr = \left\{\frac{r\,\mathrm{Cos}\,(L - k) - R\,\mathrm{Cos}\,u}{\mathrm{Sin}\,(L - k)}\right\}.\,dL + \frac{r\,dR}{R}$$

Man könnte von diesen drey Fällen auch die umgekehrten entwickeln, die oft ihren Nutzen haben werden. So findet man für den letzten Fall

$$d\lambda = \frac{dR\,\mathrm{Sin}\,(\lambda - L) + R\,dL\,\mathrm{Cos}\,(\lambda - L)}{\rho\,\mathrm{Cos}\,\beta}$$

$$d\beta = \frac{\mathrm{Sin}\,\beta}{\rho}\left\{dR\,\mathrm{Cos}(\lambda - L) + R\,dL\,\mathrm{Sin}\,(\lambda - L)\right\}$$

und diess sind die Fehler der geocentrischen Lage, die man begeht, wenn man aus dem gegebenen heliocentrischen Ort und den um

$$d\,L,\ d\,R$$

fehlerhaften Ort der Sonne die geocentrische Länge und Breite ableitet. Da die andern Fälle keine besondern Schwierigkeiten darbiethen, so halte ich mich nicht weiter dabey auf.

§. 4.

Interessanter noch ist die Untersuchung, auf welche Art kleine Veränderungen der Elemente der Bahn mit den daraus entspringenden Veränderungen der heliocentrischen Länge l und Breite b zusammenhängen. Um hier alle Elemente auf einmahl zu berücksichtigen, hat man Cap. I. §. 16 aus der ersten und dritten der Gleichungen (A)

$$dl = dk - dn\ \mathrm{tg}\, b\ \mathrm{Cos}\ (l-k) + du\ .\ \frac{\mathrm{Cos}\, n}{\mathrm{Cos}^2\ b}$$

$$db = dn\ \mathrm{Sin}\,(l-k) + du\ \mathrm{Sin}\, n\ \mathrm{Cos}\ (l-k)$$

wo u das Argument der Breite, und l die reduzirte heliocentrische Länge des Planeten ist. Bezeichnet man aber durch v, m die wahre und mittlere Anomalie vom Perihelio durch

$$a,\ a\,\varepsilon,\ \pi$$

die halbe grosse Axe, die Excentricität und die Länge des Perihels, und nennt t die Anzahl der Tage, die seit der Epoche, zu welcher die mittlere Länge L′ des Planeten gehört, verflossen sind, und f endlich die mittlere tägliche Bewegung, so ist

$$u = v + \pi - k$$

und

$$m = L' + tf - \pi$$

Aber

$$dv = \alpha . dm + \beta . d\varepsilon$$

wo (nach Cap. I. §. 7)

$$\alpha = \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

und

$$\beta = \frac{(2 + \varepsilon\ \mathrm{Cos}\, v)\ \mathrm{Sin}\, v}{1 - \varepsilon^2}$$

also auch

$$du = \alpha\ (d\,L' + tdf - d\,\pi)$$
$$+ \beta d\varepsilon + d\,\pi - dk$$

Ist daher

$$A = \frac{\mathrm{Cos}\, n}{\mathrm{Cos}^2\ b}$$

und

$$B = \tfrac{1}{2} \text{Sin } 2 b \text{ Cotg } (l - k) \; .$$

so ist

$$\left.\begin{array}{l} dl = A(\alpha dL' + \alpha t df + (1-\alpha) d\pi + \dfrac{\beta d\varepsilon}{\text{Sin} 1''} \\ + (1 - A) dk - tg\, b \text{ Cos } (l-k) dn \\ db = AB(\alpha d L' + \alpha t df + (1-\alpha) d\pi + \dfrac{\beta \delta \varepsilon}{\text{Sin } 1''}) \\ - AB \,.\, dk + \text{Sin } (l-k) dn \end{array}\right\} \text{I.}$$

Für die Sonne gehen beyde Gleichungen in folgende einzelne über

$$dl = \alpha d L' + (1-\alpha) d\pi + \frac{\beta d\varepsilon}{\text{Sin} 1''} + \alpha t df$$

wo l die wahre Länge der Sonne bezeichnet. Ist m die mittlere Anomalie, so ist auch sehr nahe

$$\alpha = 1 + 2 \varepsilon \text{ Cos } m$$
$$\beta = 2 \text{ Sin } m + \tfrac{5}{2} \varepsilon \text{ Sin } 2 m$$

§. 5.

Noch wichtiger endlich ist es, den Einfluss kleiner Veränderungen der Elemente auf die geocentrische Lage des Planeten zu kennen. Bezeichnet

$$\lambda \; \beta$$

die geocentrische Länge und Breite des Planeten;

$$L \; R$$

Die Länge und Entfernung der Erde, und setzt man anfangs voraus, dass der Planet mit der Sonne in Opposition ist, d. h. dass

$$l = L$$

ist, so hat man überhaupt

$$tg\,(\lambda - L) = \frac{r \text{ Cos } b \text{ Sin } (l-L)}{r \text{ Cos } b \text{ Cos } (l-L) - R}$$

also für

$$l = L$$
$$d\lambda = d\,l.\; \frac{tg\, \beta}{tg\, b}$$

woraus folgt, dass man nur die ersten der Gleichungen I. durch

$$\frac{tg\, \beta}{tg\, b}$$

zu multipliciren hat, um den gesuchten Ausdruck für $d\lambda$ zu erhalten.

Weiter ist allgemein

$$\rho' \operatorname{Sin} \beta = r \operatorname{Sin} b$$

und für die Opposition

$$R + \rho \operatorname{Cos} \beta = r \operatorname{Cos} b$$

wo ρ die Distanz des Planeten von der Erde bezeichnet. Differenziirt man beyde Gleichungen, indem man R als constant betrachtet, und eliminirt die Grösse d ρ aus den beyden Differentialgleichungen, so ist

$$d\beta = \frac{dr \operatorname{Sin}(b-\beta) + r db \operatorname{Cos}(b-\beta)}{\rho}$$

Es ist aber

$$dr = -\frac{2\, rdf}{3f}$$

$$+ \frac{a\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} . \operatorname{Sin} v (dL' + tdf - d\pi) - a \operatorname{Cos} v . d\varepsilon$$

Substituirt man diesen Werth von d r und den von d b aus der zweyten der Gleichungen I. in dem letzten Ausdrucke von d β, so erhält man

$$d\beta = E . dL' + (Et - \frac{2r}{3f} C) df$$

$$+ (D - E) d\pi + (D\beta - C\delta) d\varepsilon$$

$$+ D \frac{\operatorname{tg}(l-k)}{\operatorname{Sin} n} . dn - D . dk$$

wo man hat

$$C = \frac{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}(b-\beta)}{r \operatorname{Sin} b}$$

$$D = \frac{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos} n \operatorname{Cotg}(l-k) \operatorname{Cos}(b-\beta)}{\operatorname{Cos} b}$$

$$E = \alpha . D + C . \frac{a\varepsilon \operatorname{Sin} v}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

und

$$\alpha = \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

$$\delta = a \operatorname{Cos} v$$

und diese Gleichung ist es, die man der zweyten der Gleichungen I substituiren muss, um d β für die Opposition zu erhalten.

Dieselben beyden Gleichungen geben auch durch eine einfache Verwandlung die vollständigen Bedingungsgleichungen der Sonnenbeobachtungen. Bezeichnet man nähmlich durch A D die

Rectascension und Declination der Sonne, durch e die Schiefe der Ekliptik, und setzt

$$P = \frac{1}{r^2} . \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

$$Q = \frac{(2+\varepsilon \operatorname{Cos} v)}{1-\varepsilon^2} . \operatorname{Sin} v$$

so hat man nur in den vorhergehenden Ausdrücken

$$\begin{array}{ll} & l \text{ in } A \\ b = \beta & \text{ in } D \\ & n \text{ in } e \text{ und} \\ & k \text{ in Null} \end{array}$$

zu verwandeln, wodurch man erhält

$$dA = \frac{\operatorname{Cos} e}{\operatorname{Cos}^2 D}[P\,dL' + Pt\,df + (1-P)\,d\pi + Q\,d\varepsilon]$$

$$- \operatorname{tg} D \operatorname{Cos} A . de$$

$$dD = \operatorname{Cos} A \operatorname{Sin} e[P\,dL' + P\,t.df + (1-P)\,d\pi + Q\,d\varepsilon]$$

$$+ \operatorname{Sin} A . de$$

Vergleicht man aber bloss die Längen L der Sonne, so ist folgende Gleichung der beyden vorhergehenden gleichgeltend

$$dL = P\,dL' + Pt\,df + (1-P)\,d\pi + Q\,d\varepsilon$$

welche mit der in §. 4 gefundnen übereinstimmt.

I. Das Vorhergehende gab die Werthe von

$$d\lambda, d\beta$$

durch die Grössen

$$d\varepsilon, d\pi, dk\,..$$

unter der Voraussetzung, dass der Planet mit der Sonne in Opposition sey. Es ist aber nicht schwer, die Abhängigkeit dieser Grössen ganz allgemein ohne irgend einer beschränkenden Voraussetzung zu erhalten. Behält man die früher gebrauchten Bezeichnungen bey, so ist

$$\begin{aligned} x - X &= \rho \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}(\lambda - k) = r \operatorname{Cos} u - R \operatorname{Cos}(L-k) \\ y - Y &= \rho \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}(\lambda - k) = r \operatorname{Cos} n \operatorname{Sin} u - R \operatorname{Sin}(L-k) \\ z - Z &= \rho \operatorname{Sin}\beta \qquad\qquad\qquad = r \operatorname{Sin} n \operatorname{Sin} u \end{aligned}$$

Differenziirt man die ersten Ausdrücke von

$$x - X, y - Y, z - Z$$

in Beziehung auf

$$\rho, \beta, (\lambda - k)$$

so erhält man, wenn man $d\rho$ eliminirt,

$$d(\lambda-k) = \frac{dy \operatorname{Cos}(\lambda-k) - dx \operatorname{Sin}(\lambda-k)}{\rho \operatorname{Cos}\beta}$$

$$d\beta = \frac{dz}{\rho} \operatorname{Cos}\beta - \frac{dy}{\rho} \operatorname{Sin}(\lambda-k) \operatorname{Sin}\beta$$

$$- \frac{dx}{\rho} \operatorname{Cos}(\lambda-k) \operatorname{Sin}\beta$$

Nehmen wir also die Lage der Erde und ihre Entfernung von der Sonne für fehlerfrey an, so hängt

$$x\ y\ z$$

nur von den Grössen

$$u,\ r,\ n,\ k$$

ab. Daher sind die partiellen Differentialien dieser Coordinaten in Beziehung auf diese vier Grössen zu nehmen. Setzt man der Kürze wegen

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}(\lambda-k)}{\operatorname{Cos} n}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{Sin}(\lambda-k) \operatorname{tg} n$$

so ist

$$\left(\frac{d\lambda}{dr}\right) = \frac{\left(\frac{dy}{dr}\right) \operatorname{Cos}(\lambda-k) - \left(\frac{dx}{dr}\right) \operatorname{Sin}(\lambda-k)}{\rho \operatorname{Cos}\beta}$$

$$= \frac{\operatorname{Cos} n \operatorname{Sin} u \operatorname{Cos}(\lambda-k) - \operatorname{Cos} u \operatorname{Sin}(\lambda-k)}{\rho \operatorname{Cos}\beta}$$

das heisst

$$\left(\frac{d\lambda}{dr}\right) = -\frac{\operatorname{Sin}(\lambda-k) \operatorname{Sin}(\varphi-u)}{\rho \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\beta} = a'$$

Eben so erhält man

$$\left(\frac{d\lambda}{du}\right) = \frac{r \operatorname{Sin}(\lambda-k) \operatorname{Cos}(\varphi-u)}{\rho \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\beta} = b'$$

$$\left(\frac{d\lambda}{dn}\right) = -\frac{r \operatorname{Sin} n \operatorname{Sin} u \operatorname{Cos}(\lambda-k)}{\rho \operatorname{Cos}\beta} = F$$

$$\left(\frac{d\lambda}{dk}\right) = 1 + \frac{R \operatorname{Cos}(L-\lambda)}{\rho \operatorname{Cos}\beta} = d'$$

Eben so ist ferner

$$\left(\frac{d\beta}{dr}\right) = -\frac{R \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}(L-\lambda)}{r\rho} = a''$$

$$\left(\frac{d\beta}{du}\right) = \frac{r}{\rho} \text{Sin n Cos} (\lambda - k) \text{Cos} (\varphi - u) \text{Cos} (\psi - \beta)$$

$$+ \frac{r}{\rho} \text{Sin} (\varphi - u) \text{ Sin} (\psi - \beta) = b''$$

$$\left(\frac{d\beta}{dn}\right) = \frac{r \text{ Cos n Sin u Cos} (\psi - \beta)}{\rho \text{ Cos} \psi} = F'$$

$$\left(\frac{d\beta}{dk}\right) = \frac{R}{\rho} \text{ Sin} \beta \text{ Sin} (L - \lambda) = d''$$

woraus also folgt

$$d\lambda = a'.dr + b'.du + F.dn + d'.dk$$
$$d\beta = a''.dr + b''.du + F'.dn + d''.dk$$

Ist aber π die Länge des Periheliums, v, m die wahre und mittlere Anomalie, a, a ε die halbe grosse Axe und Excentricität, so ist

$$u = v + \pi - k$$

also auch

$$du = dv + d\pi - dk$$

Weiter hat man Cap. I. §. 7

$$dv = \frac{a^2}{r^2} (1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} dm + \frac{(2 + \varepsilon \text{ Cos v})}{1 - \varepsilon^2} \text{ Sin v.} d\varepsilon$$

und

$$dr = \frac{r}{a} da + \frac{a \varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} . \text{ Sin v . dm} - a \text{ Cos v . } d\varepsilon$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{a^2}{r^2} (1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} = f$$

$$\frac{(2 + \varepsilon \text{ Cos v}) \text{ Sin v}}{1 - \varepsilon^2} = g$$

$$\frac{a \varepsilon \text{ Sin v}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = f'$$

$$- a \text{ Cos v} = g'$$

so ist

$$dv = f\,dm + g\,d\varepsilon$$

$$dr = f'\,dm + g'\,d\varepsilon + \frac{r}{a} da$$

Ist ferner ϑ die tägliche Bewegung in mittlerer Länge, M diese mittlere Länge selbst für irgend eine Epoche, die t Tage vor der gegenwärtigen Beobachtung vorausgeht (folgt die Epoche der Beobachtung nach, so ist t negativ) so hat man

$$m = M + t\vartheta - \pi$$

also auch

$$dm = dM + td\vartheta - d\pi$$

Endlich ist

$$\vartheta \cdot a^{\frac{3}{2}} = \mu$$

wo

$$\mu = 0.017202$$

also

$$da = -\frac{2ad\vartheta}{3\vartheta}$$

Sammelt man alles Vorhergehende, und setzt der Kürze wegen

$$\begin{aligned}
A &= (a'f + b'f)\,t - \frac{2a'r}{3\vartheta} \\
B &= a'f + b'f \\
C &= b' - (a'f' + b'f) \\
D &= b'g + a'g' \\
E &= d' - b'
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
A' &= (a''f' + b''f)\,t - \frac{2a''.r}{3\vartheta} \\
B' &= a''f' + b''f \\
C' &= b'' - (a''f' + b''f) \\
D' &= b''g + a''g' \\
E' &= d'' - b''
\end{aligned}$$

so hat man folgende Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}
d\lambda &= A d\vartheta + B dM + C d\pi \\
&\quad + D d\varepsilon + E dK + F dn \\
d\beta &= A' d\vartheta + B' dM + C' d\pi \\
&\quad + D' d\varepsilon + E' dk + F' dn
\end{aligned}\right\} \quad \text{II.}$$

Aus diesen allgemeinen Gleichungen wird man auch die früher für die Opposition gegebenen Werthe von $d\lambda$, $d\beta$ ableiten, wenn man in den gegenwärtigen Ausdrücken die heliocentrische Länge gleich der geocentrischen setzt, wodurch von den beyden oben angeführten Hilfswinkeln φ, ψ einer das Argument der Breite, und der andere die heliocentrische Breite wird, und wenn man

$$\frac{r}{\rho} = \frac{\text{Sin}\,\beta}{\text{Sin}\,b}$$

und, wie es aus der Voraussetzung der Opposition folgt,

$$\frac{R}{\rho} = \frac{\text{Sin}\,(\beta - b)}{\text{Sin}\,b}$$

setzt, und endlich die erste der Gleichungen II. durch

$$tg\ b \cdot Cotg\ \beta$$

multiplicirt.

Hat man also schon genäherte Werthe für die Elemente

$$n\ k\ \varepsilon\ \pi \ldots$$

so wird man für jede einzelne Beobachtung aus diesen Elementen die geocentrische Länge und Breite berechnen, die mit dieser beobachteten Länge und Breite die Grösse

$$d\lambda,\ d\beta$$

und dadurch so viele Paare von Gleichungen II. geben, als Beobachtungen zu Grunde gelegt werden, und aus allen diesen Gleichungen wird man nach der im ersten Buche vorgetragenen Methode die wahrscheinlichsten Werthe der Correctionen

$$dn,\ dk,\ d\varepsilon,\ d\pi \ldots$$

und daher auch diejenigen verbesserten Elemente

$$n + dn,\ k + dk,\ \varepsilon + d\varepsilon \ldots$$

finden, welche allen diesen Beobachtungen am besten entsprechen.

II. Vortheilhafter noch ist es, statt der Correctionen der geocentrischen Längen und Breiten

$$d\lambda,\ d\beta$$

die Correctionen der geocentrischen Rectascensionen und Declinationen

$$d\alpha,\ d\delta$$

unmittelbar zu brauchen, und um die hieher gehörenden Ausdrücke zu erhalten, wird man am besten die Cap. II. § 2. N. III. gegebenen Ausdrücke anwenden. Um das Verfahren im Allgemeinen anzuzeigen, wollen wir bloss den Factor von $d\pi$ entwickeln, wo π die Länge des Periheliums ist. Behält man die dort angenommenen Bezeichnungen von

$$A\ B\ C,\ a\ b\ c$$

bey, und nennt a' die halbe grosse Axe, so ist

$$x = \frac{a'(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \operatorname{Cos} v} \cdot \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin}(A + v + \pi - k)$$

$$y = \frac{a'(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \operatorname{Cos} v} \cdot \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin}(B + v + \pi - k)$$

$$z = \frac{a'(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \operatorname{Cos} v} \cdot \operatorname{Sin} c \operatorname{Sin}(C + v + \pi - k)$$

Setzt man nun der Kürze wegen

$$A + v + \pi - k = A'$$
$$B + v + \pi - k = B'$$
$$C + v + \pi - k = C'$$

so findet man

$$\left(\frac{dx}{d\pi}\right) = x \operatorname{Cotg} A'$$
$$\left(\frac{dy}{d\pi}\right) = y \operatorname{Cotg} B'$$
$$\left(\frac{dz}{d\pi}\right) = z \operatorname{Cotg} C'$$

und eben so

$$\left(\frac{dx}{dv}\right) = x\,(h + \operatorname{Cotg} A')$$
$$\left(\frac{dy}{dv}\right) = y\,(h + \operatorname{Cotg} B')$$
$$\left(\frac{dz}{dv}\right) = z\,(h + \operatorname{Cotg} C')$$

wo

$$h = \frac{\varepsilon \operatorname{Sin} v}{1 + \varepsilon \operatorname{Cos} v}$$

Setzt man also, wie zuvor

$$\frac{a'^2}{r^2}\,(1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} = f$$

so findet man

$$dx = \left\{\left(\frac{dx}{d\pi}\right) - f\left(\frac{dx}{dv}\right)\right\} d\pi$$
$$dy = \left\{\left(\frac{dy}{d\pi}\right) - f\left(\frac{dy}{dv}\right)\right\} d\pi$$
$$dz = \left\{\left(\frac{dz}{d\pi}\right) - f\left(\frac{dz}{dv}\right)\right\} d\pi$$

und um die vollständigen Werthe von

$$dx,\ dy,\ dz$$

zu erhalten, wird man ihnen noch die Glieder hinzusetzen, welche in

$$dM,\ d\vartheta,\ d\varepsilon,\ dk \text{ und } dn$$

multiplicirt sind. Hat man so die vollständigen Werthe der Grössen

$$dx,\ dy,\ dz$$

erhalten, so ist sofort

$$d\alpha = \frac{dy \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha - dx \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha}{\rho\ \mathrm{Cos}\,\delta}$$

$$d\delta = \frac{dz}{\rho}\,\mathrm{Cos}\,\delta - \frac{dy}{\rho}\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\delta - \frac{dx}{\rho}\,\mathrm{Cos}\,\alpha\ \mathrm{Sin}\,\delta$$

und dieses Verfahren hat vor dem in I. gegebenen den Vorzug, dass man auch unvollständige Beobachtungen, z. B. blosse Rectascensionen zur Correction der Elemente mit aufnehmen kann, und dass ein Beobachtungsfehler in α oder δ leichter entdeckt wird, da er im Gegentheile in den aus α und δ abgeleiteten λ β sich unter diese beyden letzten Grössen vertheilt, und beyde unbrauchbar macht. M. s. Berl. Jahrb. 1810. p. 117.

Ein schönes Muster, aus einer gegebenen Anzahl von Beobachtungen die elliptischen Elemente eines Planeten oder Kometen zu finden, kann man in Zachs Monathl. Correspondenz März 1813 nachsehen.

III. Um noch durch ein Beyspiel zu zeigen, auf welche Art man am besten die um die Zeit der Opposition gemachten Beobachtungen berechnet, die immer von grossem Werthe sind, weil die geocentrische Länge des Planeten in der Opposition dieselbe ist, die man aus dem Mittelpunkte der Sonne, oder aus dem Mittelpunkte der Bewegung des Planeten beobachten würde, so wollen wir dazu folgende Beobachtungen der Pallas wählen, die Oriani von der Mayländer Sternwarte uns mitgetheilt hat.

1804	mit. Z. Mayland	scheinb. R.	sch. Decl.
August 27	11ʰ 50′ 59″	333° 42′ 44″3	+ 5° 33′ 39″1
28	11 46 17	333 31 20.6	5 22 10.4
29	11 41 35	333 19 58.1	5 10 29.9
30	11 36 54	333 8 35.9	4 58 42.7
31	11 32 13	332 57 17.7	4 46 45.7

Diese Beobachtungen werden nun auf geocentrische Längen und Breiten gebracht, und diese letzten mit den Tafeln oder mit den aus gegebenen Elementen hergeleiteten geocentrischen Längen und Breiten verglichen, um die Verbesserung dieser Elemente für die Zeit der Beobachtungen zu erhalten. Diese Elemente sind

Epoche 1803 - - - - - - - - -	221° 29′ 32″0 Meridian v. Seeberg.
log. halbe grosse Axe - - - -	0.4423790
Länge des aufst. Knotens 1803	172° 28′ 13″7
Neigung der Bahn - - - - -	34° 38′ 1″.1
Excentricität - - - - - - - - -	0.2457396
Länge des Perihel. 1803 - -	121° 17′ 34″4
Tägl. trop. Bewegung - - - -	770″0446

Sucht man also aus jenen beobachteten Orten sowohl, als aus diesen Elementen die geocentrische Länge und Breite, so erhält man

wahre beob. Länge	wahre beob. Breite
$11^s\ 7^\circ\ 42'\ 29''3$	$+\ 15^\circ\ 19'\ 50''0$
11 7 27 9.7	15 13 21.8
11 7 11 47.6	15 6 41.3
11 6 56 23.8	14 59 54.1
11 6 40 59.7	14 52 54.3

Verbesserung der Elemente

in Länge	in Breite
$+\ 7'\ 24''2$	$-\ 2'\ 16''3$
+ 7 27.7	− 2 11.8
+ 7 29.1	− 2 13.5
+ 7 29.9	− 2 13.9
+ 7 30.1	− 2 18.1
Im Mittel $+\ 7'\ 28''3 = d\lambda$	$-\ 2'\ 14''.7 = d\beta$
die Elem. zu wenig	die Elem. zu viel.

Da man nun schon nahe weiss, dass die Opposition den 30. August gegen 5^h fällt, so verbessere man die aus den Elementen berechnete wahre Länge und Breite des 29. und 30. Augusts durch die mittlern Correctionen

$$d\lambda,\ d\beta$$

wodurch man erhält

	mit. Z. Mayland	verb. Länge Pallas	verbes. Breite
August	$29\ldots 11^h\ 41'\ 35'' = t$	$11^s\ 7^\circ\ 11'\ 46''8 = \lambda$	$15^\circ\ 6'\ 40''1 = \beta$
	$30\ldots 11\ \ 36\ \ 54 = t_{,}$	$11\ \ 6\ \ 56\ \ 22.2 = \lambda_{,}$	$14\ \ 59\ \ 53.3 = \beta_{,}$
Differenz	$23^h\ 55'\ 19'' = a$	$-\ 15'\ 24''.6 = \Delta\lambda$	$-\ 6\ \ 46.8 = \Delta\beta$

$$\text{Länge} \odot + 180^\circ + 20''5$$
$$11^s\ 6^\circ\ 18'\ 54''1 = L$$
$$11\ \ 7\ \ 16\ \ 49.3 = L_{,}$$
$$+\ 57'\ 55''.2 = \Delta L$$
$$-\ 15\ \ 24.6 = \Delta\lambda$$
$$\Delta L - \Delta\lambda = b = 73'\ 19''8$$

Nähmlich den 29. August war

$$\text{Länge des Planeten aus den Elementen}\ \ 11^s\ 7^\circ\ \ 4'\ 18''5$$
$$d\lambda = +7\ \ 28.3$$
$$\lambda = 11\ \ 7\ \ 11\ \ 46.8$$

$$\text{Breite des Planeten aus den Elementen}\ \ 15^\circ\ 8'\ 54''8$$
$$d\beta = -\ 2'\ 14''.7$$
$$\beta = 15^\circ\ \ 6'\ 40''1$$

und eben so für den 30. August.

Um daraus die Zeit der Opposition T abzuleiten, ist

$$b : a = \lambda - L : x, \; x = 17^h\ 15'\ 1''$$
$$t = 11\ 41\ 35$$
$$T = 30.\ \text{Aug.}\ 4^h\ 56'\ 36''$$

oder auch

$$b : a = L_{,} - \lambda : y, \; y = 6^h\ 40'\ 18''$$
$$t_{,} = 11\ 36\ 54$$
$$T = 30.\ \text{Aug.}\ 4^h\ 56'\ 36''$$

und für diese Zeit T sucht man die geocentrische oder heliocentrische Länge $l' = \lambda'$ und die geocentrische Breite β' auf folgende Art

Länge $a : \Delta L = T - t : x, x + L = 11^s\ 7^\circ\ 0'\ 40''0 = l'$
$a : \Delta L = t_{,} - T : x', L_{,} - x' = 11\ 7\ 0\ 40.0 = l'$
oder $a : \Delta \lambda = T - t : x'', \lambda - x'' = 11^s\ 7^\circ\ 0'\ 40''0 = l'$
$a : \Delta \lambda = t_{,} - T : x''', \lambda_{,} + x''' = 11^s\ 7^\circ\ 0'\ 40''0 = l'$

Breite $a : \Delta \beta = T - t : y, \beta - x = 15^\circ\ 1'\ 46'8 = \beta'$
$a : \Delta \beta = t_{,} - T : y', \beta_{,} + y' = 15\ 1\ 46.8 = \beta'$

Man hat daher als Endresultat aller Beobachtungen Zeit der Opposition

30. August $4^h\ 56'\ 36''$

mit Zeit. Mayland

hel. oder geoc. Länge der Pallas

$= 11^s\ 7^\circ\ 0'\ 40''0$

geoc. Breite der Pallas

$= + 15^\circ\ 1'\ 46''8$

und um andere in den Stand zu setzen, die Berechnung dieser Beobachtungen mit andern Elementen zu wiederhohlen, pflegt man gewöhnlich noch die Elemente der vorhergehenden Rechnung beyzufügen. Diese waren

scheinb. Schiefe der Ekliptik	=	$23^\circ 27'\ 55''.5$
Höhenparallaxe der Pallas - - -	=	$2''4$
Aberration der Länge - - -	= —	$12''4$
Aberration der Breite - - -	= —	$5''2$
Nutation der Länge - - - -	= —	$13''7$

Einige Astronomen pflegen bey den Resultaten ihrer beobachteten Oppositionen auch noch die heliocentrische Breite b und die Correctionen der Tafeln in heliocentrischer Länge und Breite oder

d l und d b

anzugeben, allein diese Grössen

b, d b

setzen die Entfernung ρ des Planeten von der Sonne als bekannt voraus, und da diess nicht genau Statt hat, so ist es besser, die Grösse

$$b, d b$$

wegzulassen. Man hat nähmlich

$$\text{Sin}\, b = \frac{\rho}{r} \text{Sin}\, \beta$$

wo man für β die verbesserte geocentrische Breite setzt, und überdiess

$$db = \frac{\rho}{r} \text{Cos}\, (\beta - b)\, d\beta + \frac{d\rho}{r} \text{Sin}\, (\beta - b)$$

wo ρ und $d\rho$ unbekannt ist.

Die Correctionen

$$d\,\lambda, d\,\beta$$

aber sind, wie man aus dem vorhergehenden sieht, durch die Beobachtungen unmittelbar gegeben, daher man die zwey in §. 5 gegebenen Bedingungsgleichungen für

$$d\,\lambda \text{ und } d\,\beta$$

entwickeln, und sie den Resultaten der Beobachtungen beyfügen kann.

Endlich wird man noch bemerken, dass die §. 5. I. und II. gegebenen Ausdrücke auch sehr bequeme Mittel geben, einzelne Elemente

$$\vartheta, \pi, \varepsilon \ldots$$

durch Vergleichung mit den Beobachtungen zu verbessern, wenn sie noch als vorzüglich fehlerhaft erkannt werden, oder wenn die übrigen Elemente schon der Wahrheit nahe genug bekannt sind; ein Verfahren, welches die früheren Astronomen besonders bey den alten Planeten häufig anwendeten, und wovon man umständliche Belehrung in Lalandes und Schuberts Astronomie Th. II. finden wird.

Fünftes Kapitel.

Von dem Monde der Erde, und denen der übrigen Planeten.

§. 1.

Die Bewegung des Mondes um unsere Erde biethet im Allgemeinen dieselben Erscheinungen dar, wie jene der Sonne. Wenn man die täglich beobachtete Rectascension und Declination desselben auf Länge und Breite bringt, so findet man, dass er sich in einer Ebene bewegt, die durch den Mittelpunct der Erde geht, und deren mittlere Neigung gegen die Ekliptik

$$5^\circ\ 8'\ 47''$$

ist. Aber die Bewegung des Mondes in dieser Bahn ist viel verwickelter, als die der Sonne oder der Erde, so dass die Beobachtungen allein, wenn sie nicht von der Theorie unterstützt worden wären, uns wohl nie zu der genauen Kenntniss derselben geführt haben würden, die wir durch die Bemühungen eines Newton, Euler, Mayer, Lagrange und Laplace erworben haben.

Die Neigung seiner Bahn wird man aus Beobachtungen in der Nähe seiner grössten Breite (so, wie lib. I. Cap. IX. die Schiefe der Ekliptik) und die Lage seiner Knoten wird man aus mehreren Beobachtungen in der Nähe seiner kleinsten Breiten bestimmen. Vergleicht man zwey solche durch eine grosse Zwischenzeit getrennten Bestimmungen unter einander, so sieht man, dass die Knoten sich stets und zwar ungleichförmig gegen die Ordnung der Zeichen bewegen. Man hat so gefunden, dass die mittlere siderische Bewegung der Mondsknoten in 365 Tagen gleich

$$19^\circ\ 20'\ 33''\ 46$$

also die tropische

$$19^\circ\ 19'\ 43''\ 36$$

ist, und dass den 1. Jänner 1801 um Mitternacht in Paris die mittlere Länge des aufsteigenden Knotens

$$13^\circ\ 54'\ 21''\ 2$$

war. Diese mittlere Bewegung der Knoten ist mehreren Ungleichheiten unterworfen, wovon die grösste

$$1^\circ\, 30'\, 26''\, \text{Sin}\, 2\, (☉ - ☊)$$

ist, wo ☉ und ☊ die Länge der Sonne und des aufsteigenden Mondknotens bedeuten.

Auch die Neigung ist einer ähnlichen periodischen Änderung unterworfen, die gleich

$$8'\, 47''\, \text{Cos}\, 2\, (☉ - ☊)$$

ist; die mittlere Neigung gegen die Ekliptik aber ist constant, ungeachtet der Änderung, die die Folge der Jahrhunderte in der Lage der Ekliptik hervorbringt.

Kennt man so für jede Zeit die Lage der Mondsbahn gegen die Ekliptik, so kann man aus jeder beobachteten Länge und Breite, wie bey den Planeten, das Argument der Breite finden, welches zu ☊ addirt, die Länge des Mondes in der Bahn gibt.

Vergleicht man mehrere auf einander folgende Längen in der Bahn, so wird man finden, dass die grösste und kleinste Winkelgeschwindigkeit des Mondes in diejenigen Puncte seiner Bahn fällt, wo sein scheinbarer Halbmesser am grössten und kleinsten, also seine Entfernung von der Erde am kleinsten und grössten ist, welche Puncte Perigäum und Apogäum oder Erdnähe und Erdferne heissen, und man wird diese Puncte nach der Cap. I. gegebenen Methode viel genauer als bey der Sonne bestimmen, da die Differenz des grössten und kleinsten Durchmessers des Mondes mehr als volle 4′ beträgt. Vergleicht man eben so die zwischenliegenden Puncte, so wird man sich sehr bald überzeugen, dass die Bahn des Mondes eine Ellipse ist, in deren einem Brennpuncte der Mittelpunct der Erde liegt, und man wird aus den in Cap. III. vorgetragenen Lehren aus drey oder mehr beobachteten Längen in der Bahn und ihren Zwischenzeiten die Elemente dieser Ellipse ableiten können.

Wiederholt man nach einiger Zeit diese Beobachtungen, so wird man finden, dass die grosse Axe der Bahn eine rechtläufige Bewegung hat, die in 365 Tagen

$$40^\circ\, 39'\, 45''\, 79$$

in Beziehung auf den Frühlingspunct beträgt. Auch diese Bewegung ist nicht ganz gleichförmig, sondern einer Ungleichheit unterworfen, die gleich

$$22'\, 17''\, \text{Sin}\, m$$

ist, wo m die mittlere Anomalie der Sonne bezeichnet. Die Länge des Perigäums den 1. Jänner 1801, um Mitternacht in Paris, war

$$266^\circ\, 6'\, 46''\, 4$$

und für dieselbe Epoche ist die mittlere Länge des Mondes selbst

$$= 111^\circ\ 36'\ 48''$$

das Verhältniss endlich der Excentricität der Mondsbahn zur halben grossen Axe derselben ist

$$0{,}05485$$

Mittels dieser Angaben kann man aus zwey in der Zeit sehr entfernten beobachteten wahren Längen in der Bahn nach den Formeln des Cap. I. §. 7. die mittleren Längen des Mondes, und daraus, verbunden mit der Zwischenzeit, die Revolution desselben ableiten. Bequemer noch wird man zwey beobachtete, mehrere Jahrhunderte von einander entfernte Conjunctionen oder Oppositionen des Mondes mit der Sonne vergleichen, und dadurch die synodische Revolution des Mondes d. h. seine Umlaufszeit in Beziehung auf die Sonne erhalten, da die kleinen Ungleichheiten, die von den Anomalien der Bewegung der Sonne sowohl als jenen des Mondes herrühren, wenn man von ihnen keine Rechnung tragen will, durch die grosse Zwischenzeit sehr vermindert werden. Man fand so die synodische Revolution des Mondes

$$S = 29^t\ 12^h\ 44'\ 2''82$$

Ist dann

$$\vartheta = 365^t\ 5^h\ 48'\ 51''6$$

das tropische Sonnenjahr, so ist die tropische Revolution des Mondes

$$T = \frac{\vartheta\, S}{\vartheta + S}.$$

Derselbe Ausdruck wird die siderische Revolution des Mondes geben, wenn ϑ das Sternjahr der Erde bezeichnet.

Daraus folgt, dass 12 synodische Revolutionen um 10 Tage 21^h kürzer sind als das tropische Sonnenjahr. Wenn daher ein Jahr mit einer Conjunction beyder Gestirne d. h. mit einem Neumonde anfängt, so sind im Anfange des nächstfolgenden Jahres nahe 11 Tage von dem nächstvorhergehenden Neumonde an verflossen, und nach 19 tropischen Sonnenjahren fallen die Neu- und Vollmonde wieder nahe auf dieselben Tage des Jahres.

Aus dem vorhergehenden folgt noch, das die Umlaufszeit des Mondes in Beziehung auf sein Perigäum oder dass die anomalistische Revolution desselben nahe

$$27^T\ 13^h\ 19'$$

und dass seine Umlaufszeit in Beziehung auf seine Knoten

$$27^t\ 5^h\ 6'$$ ist.

§. 2.

Vergleicht man aber mit Hilfe der vorhergehenden Angabe die beobachteten Längen des Mondes in der Bahn mit der Theorie der elliptischen Bewegung, so findet man, dass die Voraussetzung einer reinen Ellipse keineswegs die Beobachtungen vollkommen darstelle. Indem man den Gang dieser beobachteten Ungleichheiten verfolgte, und ihre Gesetze aufsuchte, fand man, dass die erste und grösste derselben, die Evection gleich

$$1^\circ\, 20'\, 30'' \text{ Sin } [2\,(☾ - \odot) - M]$$

die zweyte, die Variation gleich

$$35'\, 42'' \text{ Sin } 2\,(☾ - \odot)$$

und die dritte die jährliche Gleichung gleich

$$11'\, 12'' \text{ Sin } m$$

sey, wo ☾ und ⊙ die mittlere Länge des Mondes und die wahre Länge der Sonne, M und m die mittlere Anomalie des Mondes und der Sonne bezeichnen. Die Evection wurde schon von Ptolomäus, die zwey andern Gleichungen aber von Tycho Brahe gefunden. Allein nebst diesen Ungleichheiten gibt es noch eine grosse Anzahl anderer minder beträchtlicher, deren Daseyn durch die Theorie angezeigt, und deren Grösse durch die Beobachtungen bestimmt wurde.

Die Evection vermischt sich in den Conjunctionen und Oppositionen mit der Gleichung des Mittelpuncts, und aus dieser Ursache mussten die Alten, welche die Theorie des Mondes bloss auf die Beobachtungen seiner Finsternisse gründeten, die Gleichung des Mittelpuncts um die ganze Grösse der Evection fehlerhaft finden. Die Variation verschwindet zur Zeit der Finsternisse eben so wie in den Quadraturen, in welchen letzten

$$\odot - ☾ = 90 = 270 \text{ ist,}$$

also musste sie den Alten gänzlich entgehen. Die jährliche Gleichung endlich beschleunigt die Bewegung des Mondes, wenn die der Sonne sich verzögert, und umgekehrt, und da sie in den Finsternissen sich mit der Mittelpunctsgleichung der Sonne vermischt, so haben die Alten diese Mittelpunctsgleichung der Sonne um jene jährliche Gleichung des Mondes fehlerhaft gefunden.

Endlich zeigte die Vergleichung der von einander in der Zeit sehr entfernten Beobachtungen eine Beschleunigung in der mittleren Bewegung des Mondes, welche, wie wir später sehen werden, ihren Grund in der Wirkung der Sonne auf den Mond, verbunden mit der veränderlichen Excentricität der Erdbahn hat. Wenn diese Excentricität abnimmt, was seit den ältesten auf uns gekommenen Beobachtungen der Fall ist, so wird die mittlere Bewegung des Mondes beschleunigt, und diese Beschleunigung wird sich in eine Verzögerung verwandeln, wenn jene Excentricität wieder zu wachsen anfängt, was erst nach vielen Jahrtausenden geschehen wird. Ähnlichen Säkulargleichungen sind auch die mittleren Bewegungen der Knoten und der Apsidenlinie unterworfen, deren Bewegungen sich verzögern, wenn jene des Mondes sich beschleunigt. Ist t die Anzahl der seit 1800 verflossenen Jahrhunderte, so ist die Säkulargleichung für die mittlere Länge des Mondes

$$10''\,207\, t^2 + 0.''00185\, t^3,$$

welcher Ausdruck zwar nur eine Annäherung, aber für 2000 Jahre vor und nach jener Epoche hinreichend genau ist. Die Säkulargleichung der mittleren Länge des Mondes, seines Knotens und seiner Apsidenlinie verhalten sich wie die Zahlen

$$1 ; 0{,}74 \text{ und } 3,$$

also sind die zwey letzten durch die erste gegeben. Es ist merkwürdig, dass die Abnahme der Excentricität der Erdbahn in der Bewegung des Mondes viel merklicher ist, als für sich selbst. Diese Verminderung, welche seit der ältesten Finsterniss, deren Beobachtung auf uns gekommen ist, die Gleichung des Mittelpuncts der Sonne noch nicht um 8′ geändert hat, hat in der Länge des Mondes eine Veränderung von 1° 48′, und in seiner mittleren Anomalie eine Veränderung von 7° 12′ hervorgebracht.

Nach dem Vorhergehenden wird man also für eine gegebene Zeit den geocentrischen Ort des Mondes auf folgende Art finden: Ist ☉ und m die wahre Länge und die mittlere Anomalie der Sonne, ☾ und M die mittlere Länge und die mittlere Anomalie des Mondes unter der Voraussetzung einer gleichförmigen Bewegung der Apsidenlinie und

$$☾ - ☉ = D$$

so ist die wegen der Evection und der jährlichen Gleichung verbesserte Länge des Mondes

$$☾' = ☾ + (1^\circ\, 20'\, 30'') \operatorname{Sin} (2D - M) - (11'\, 12'') \operatorname{Sin} m$$

Verbessert man die mittlere Anomalie des Mondes durch eben diese zwey Gleichungen, und zieht von ihr die Ungleichheit der Apsidenlinie §. 1. ab, so ist die verbesserte mittlere Anomalie des Mondes

$$M' = M + (1^\circ\, 20'\, 30'') \operatorname{Sin} (2D - M) - (11'\, 12'') \operatorname{Sin} m$$
$$- (22'\, 17'') \operatorname{Sin} M$$

Aus dieser mittleren Anomalie M′ und der Excentricität

$$0{,}05485$$

suche man nach Cap. I. die Gleichung der Bahn, oder die wahre Länge ☾″ des Mondes, und verbessere sie noch durch die Variation, so erhält man die corrigirte wahre Länge des Mondes in seiner Bahn

$$☾''' = ☾'' + (35' 42'') \text{ Sin } 2 (☾'' - ⊙)$$

Ist dann ☊ die unter der Voraussetzung einer gleichförmigen Bewegung berechnete mittlere Länge des Knotens, so ist die verbesserte Länge (§. 1.)

$$☊' = ☊ + (1° 30' 26'') \text{ Sin } 2 (⊙ - ☊)$$

und die verbesserte Neigung der Bahn (§. 1.)

$$n' = 5° 8' 47'' + (8' 47'') \text{ Cos } 2 (⊙ - ☊)$$

und aus

$$☾''', ☊' \text{ und } n'$$

wird man nach Cap. I. §. 16. die Länge des Mondes in der Ekliptik und seine Breite ableiten; doch sind, wie schon erinnert wurde, die angeführten Correctionen noch lange nicht hinreichend, die Rechnung mit den Beobachtungen in Übereinstimmung zu bringen.

Diese andern Störungsgleichungen des Mondes sind zu klein, um so, wie die vorhergehenden, durch blosse Beobachtungen bestimmt zu werden: ihr Daseyn konnte nur durch die Theorie (Problem der drey Körper) entdeckt werden, und Newton war der erste, der auf diesem Wege mehrere jener Gleichungen entwickelte, deren Form durch die Theorie, und deren Grösse durch Vergleichung mit den Beobachtungen bestimmt wurde. Diese Vergleichung und darauf gegründete Tafeln unternahmen Horrebow, Robert, Wright, Flamstead, le Monnier, Halley u. a. Die darauf folgenden bessern Instrumente und damit angestellten genaueren Beobachtungen zeigten, dass die theoretischen Entwicklungen Newtons nicht vollständig waren, und dass er mehrere Gleichungen übersehen hatte, die auf die Beobachtungen einen sehr merklichen Einfluss äusserten. Diese Vervollkommnung der Theorie, die wichtigste und schwerste Bedingung der Verbesserung der Mondstafeln, unternahmen beynahe zu gleicher Zeit um die Mitte des vorigen Jahrhunderts, der unsterbliche L. Euler, T. Mayer, Clairaut und d'Alembert, und in unsern Tagen, Lagrange und Laplace. Mayer, einer der grössten Astronomen aller Zeiten, der theoretischen Scharfsinn mit praktischer Geschicklichkeit in einem sehr seltenen Grad in sich zu vereinigen wusste, verglich seine Theorie selbst mit den Beobachtungen, und seine Mondstafeln wurden als die besten von allen anerkannt. Durch weitere Vergleichungen mit zahlreichen Beobachtungen verbesserten Bradley, Mason, Bürg und Burckhardt noch mehr die Coefficienten der von Mayer gegebenen Gleichungen, und die daraus entstandenen Mondstafeln verdanken ihre Genauigkeit vorzüglich einigen neuen Störungsgleichungen, welche Laplace, der Newton unserer Zeiten, durch die weitere Ausbildung der Theorie der Mondsbewegung gefunden hatte. Erst in unseren Tagen hat man es endlich gewagt, die Bildung neuer

Mondstafeln allein auf die Theorie der allgemeinen Schwere zu gründen, indem man von den Beobachtungen nichts, als die durch sie allein gegebenen Elemente der Mondsbewegung voraussetzte; ein Verfahren, welches bereits seit langem bey allen Planeten unseres Sonnensystems mit Vortheil befolgt worden ist. Bisher konnte man, durch die Theorie belehrt von der Form der Argumente der verschiedenen Mondsungleichheiten, indem man diese den Beobachtungen anzupassen suchte, bloss die Schwierigkeiten umgehen, welche die auf einander folgenden Integrationen und Approximationen dieser verwickelten Theorie darbothen; es war daher noch zu wünschen, diese Schwierigkeiten nicht bloss zu vermeiden, sondern zu besiegen, und so auf geradem Wege dem gegebenen Ziele entgegen zu gehen; ein Unternehmen, welches Damoiseau in Frankreich, und Plana und Carlini in Italien glücklich zu Ende geführt haben.

§. 3.

Eine der merkwürdigsten Erscheinungen, die uns der Mond darbiethet, geben uns seine verschiedenen Lichtgestalten oder Phasen. Die von der Sonne beleuchtete Hälfte des hier als kugelförmig angenommenen Mondes bildet an ihrer Gränze einen Kreis, dessen Ebene auf der Linie senkrecht steht, welche die Mittelpuncte der Sonne und des Mondes verbindet; die von der Erde sichtbare Hälfte des Mondes aber wird durch einen andern Kreis begränzt, dessen Ebene auf der Linie senkrecht steht, welche die Mittelpuncte der Erde und des Mondes verbindet, und diese letzte gerade Linie ist gegen die Ekliptik um einen Winkel geneigt, welcher der Breite des Mondes gleich ist, da im Gegentheile jene erste gerade Linie sehr nahe als in der Ekliptik selbst liegend angesehen werden kann. Ist also ☉, ☾, die Länge der Sonne und des Mondes, und T der Winkel, welchen beyde Gestirne für den Mittelpunct der Erde bilden, β die Breite des Mondes, so ist

$$\text{Cos}\, T = \text{Cos}\,(☾ - ☉)\,\text{Cos}\,\beta.$$

Die kreisförmige Gränze des Lichtes aber wird als eine Ellipse gesehen, deren grosse Axe 2a der Durchmesser des Mondes ist, und deren kleine Axe 2b durch die Gleichung bestimmt wird

$$\frac{b}{a} = \text{Cos}\,(T + S)$$

wo S der Winkel ist, welchen Erde und Mond im Mittelpunct der Sonne bilden. Da aber die Entfernung der Erde von der Sonne zu der Entfernung der Erde vom Monde sich nahe verhält, wie

$$389 : 1$$

so ist

$$\frac{S}{T} = \frac{1}{389}$$

oder sehr nahe

$$\frac{b}{a} = \text{Cos}\,[T + 8'\,51''\ \text{Sin}\ (☾ - ☉)]$$

woraus folgt, dass die Breite des beleuchteten Theils sehr nahe dem Sin. vers. von T proportional ist.

Ist (☾ — ☉) gleich einem oder drey rechten Winkeln, so ist

$$\frac{b}{a} = \text{Sin}\ 8'\,51''$$

oder die Lichtgränze ist nahe eine gerade Linie. Ist aber jener Winkel 0 oder 180, so ist

$$\frac{b}{a} = \text{Cos}\ \beta$$

oder die Lichtgränze hat selbst im Neumonde noch eine, obschon sehr kleine Breite. Wenn der Mond genau halb beleuchtet erscheint, so ist der Winkel am Monde ein rechter. Beobachtet man also in diesem Augenblicke den Winkel T an der Erde, so findet man in dem rechtwinklichten Dreyecke, welches diese drey Gestirne vereinigt, die Entfernung der Sonne von der Erde in Theilen der Entfernung der Erde vom Monde, d. h. die Parallaxe der Sonne aus der bekannten Parallaxe des Mondes, denn die Mondparallaxe kann ihrer Grösse wegen leicht durch die bekannten Methoden gefunden werden, welche sich auf die Parallaxe der Sonne nicht mehr sicher anwenden lassen, da jene im Mittel 3454″, diese aber noch nicht 9″ beträgt. Aber die Schwierigkeit den Augenblick genau anzugeben, wann die Hälfte des Mondes beleuchtet ist, macht jenes Verfahren minder genau.

§. 4.

Da die Lage der Flecken, welche man auf der Oberfläche des Mondes bemerkt, gegen den scheinbaren Mittelpunct desselben immer nahe dieselbe bleibt, so dreht er sich in Beziehung auf die Fixsterne in derselben Zeit um seine Axe, in welcher er seinen syderischen Umlauf um die Erde vollendet, und die Dauer eines Tages auf dem Monde ist der synodischen Revolution dieses Satelliten gleich. Übrigens bemerkt man kleine periodische Veränderungen in der Lage dieser Flecken, die unter den Nahmen der Librationen bekannt sind. Die Libration der Länge entspringt aus der ungleichförmigen Bewegung des Mondes in seiner Bahn, verbunden mit der gleichförmigen Rotation derselben. Die Libration der Breite kömmt von der verschiedenen Breite des Mondes, dessen Rotationsaxe auf der Ekliptik nahe senkrecht steht. Jene macht die an dem östlichen und westlichen, diese aber die an dem südlichen und nördlichen Rande des Mondes stehende Flecken bald erscheinen, bald verschwinden. Die Libration der Parallaxe endlich rührt von den verschiedenen Standpuncten des Beobachters gegen den Mittelpunct der Erde, während einer täglichen Umwälzung dieser letzten um ihre Axe her. Zur Bestimmung der Lage dieser Flecken kann man dieselbe Methode anwenden, welche oben für die Sonnenflecken gegeben wurde, wenn man nur bey der Berechnung der selenocentrischen Länge und Breite des Fleckens auch auf die Breite des Mondmittelpuncts Rücksicht nimmt. Alle diese Librationen sind also nur scheinbar, und haben keinen Einfluss auf die wirkliche Rotation des Mondes.

Mit den Veränderungen der Ebene des Mondäquators verhält es sich nicht so. Denkt man sich durch des Mondes Mittelpunct die Ebene dieses Äquators, und eine zweyte Ebene mit der Ekliptik parallel, und endlich eine dritte, welche die mittlere Ebene der Mondsbahn vorstellt, so haben diese 3 Ebenen beständig einen gemeinschaftlichen Durchschnitt; die zweyte zwischen den beyden andern liegende Ebene macht mit der ersten einen Winkel von $1^\circ 30'$, und mit der dritten einen von $5^\circ 9'$. Die Durchschnitte des Mondäquators mit der Ekliptik fallen beständig mit dem mittleren Knoten der Mondsbahn zusammen, und haben, wie diese eine rückläufige siderische Bewegung, die eine Periode von nahe 6793 Tagen umfasst. In dieser Zeit beschreiben die beyden Pole des Mondäquators und der Mondsbahn kleine Kreise mit der Ekliptik parallel, zwischen welche sie den Pol der Ekliptik so einschliessen, dass diese drey Pole beständig in einem grössten Kreise des Himmels liegen.

Folgende Elemente des Mondes sind aus der Expos. du syst. du monde IV Edit. genommen.

Für den Anfang des 19. Jahrhunderts ist

sider. Revolution des Mondes $= 27^{T}.32166089$
synodische . . . . $= 29.53058795$

Für die mittl. Mitternacht Paris zwischen dem 31. Dec. 1800 und 1. Jän. 1801 ist mittlere Länge des Mondes

$111^\circ.613302$

des Perigäums seiner Bahn

$266^\circ.10795$

des aufsteigenden Knotens

$13^\circ.918392$

mittlere Neigung

$5^\circ.14395$

$$\frac{\text{Excentricität}}{\text{halbe grosse Axe}} = 0.0548553$$

Ferner ist der scheinbare grösste und kleinste Durchmesser des Monds

$0°.55863$

und

$0°.48942$

und die mittlere Horizontalparallaxe

$0°.95949.$

Endlich ist die siderische Revolution des Perigäums

$3232.^{T}575614$

und die sider. Revolution des Knotens

$6793^{T}.39081$

§. 5.

Man beobachtet um den Jupiter vier kleine Sterne, die sich zu beyden Seiten von ihm bis auf gewisse Gränzen entfernen. Man sieht sie zuweilen über die Scheibe Jupiters weggehen, und ihren Schatten darauf werfen, und oft sieht man sie, ungeachtet sie noch weit vom Jupiter entfernt sind, verschwinden und wieder erscheinen, was sich nur aus ihrem Gang durch den Schattenkegel erklären lässt, den Jupiter auf der von der Sonne abgewendeten Seite von sich wirft. Diese Erscheinungen und die sie begleitenden Umstände führten auf den Schluss, dass diese Gestirne unserem Monde ähnliche Satelliten sind, welche sich von Morgen gegen Abend um Jupiter bewegen.

Die Beobachtung dieser ihrer Durchgänge durch den Schatten ihres Hauptplaneten oder ihre Verfinsterungen geben das genaueste Hilfsmittel zur Bestimmung ihrer Bewegungen. Vergleicht man weit von einander entfernte in der Nähe der Opposition Jupiters beobachtete Mittel der Finsternisse mit einander, so wird die Zwischenzeit mit der Anzahl der schon beynahe bekannten synodischen Umlaufe dividirt die synodische Umlaufszeit S sehr genau geben, und daraus wird man die siderische

$$\frac{♃\, S}{♃ + S}$$

oder die periodische Revolution

$$\frac{♃'\, S}{♃' + S}$$

finden, wenn

$♃\ ♃'$

die siderische und periodische Umlaufszeit Jupiters um die Sonne ist.

§. 6.

Beobachtet man in dem Augenblicke, der der Mitte einer Finsterniss oder eines Vorübergangs des Satelliten entspricht, die geocentrische Länge Jupiters, so wird diese der jovicentrischen Länge des Satelliten gleich, oder um 180° davon verschieden seyn, und da so die Epoche seiner Länge und seine mittlere Bewegung bekannt ist, so kann man für jede andere Zeit die Länge des Satelliten in seiner Bahn berechnen, vorausgesetzt, dass er sich in einem Kreise oder gleichförmig um Jupiter bewege, was den Beobachtungen ihrer Finsternisse sehr nahe genug thut. Diess gibt ein einfaches Mittel, die Entfernungen Jupiters von der Sonne und Erde unter einander zu vergleichen. Zur Zeit der Mitte der Finsterniss ist nähmlich der Satellit aus Jupiters Mittelpunct gesehen, sehr nahe in Opposition mit der Sonne. Nach dem Vorhergehenden kann man für denselben Augenblick die jovicentrische Länge l des Satelliten berechnen, also ist in dem Dreyecke, welches Sonne, Erde und Jupiter verbindet, der Winkel am Jupiter

$$\lambda - l$$

und der Winkel an der Erde gleich

$$\odot - \lambda$$

wo $\odot$, λ die Länge der Sonne und die geocentrische Länge Jupiters bezeichnet, also kann man die Entfernung Jupiters von der Erde und von der Sonne in Theilen der Entfernung der Erde von der Sonne angeben.

§. 7.

Beobachtet man in der Nähe der Opposition Jupiters mit der Sonne die Verfinsterung eines seiner Trabanten, und berechnet daraus mit der (aus 5) bekannten synodischen Revolution die Zeiten der folgenden Finsternisse, so findet man, dass die Finsternisse immer später, als nach der Berechnung eintreffen, so wie Jupiter von seiner Opposition vorrückt, oder seine Distanz von der Erde grösser wird. In der Nähe der Conjunction Jupiters mit der Sonne ist dieser Unterschied am grössten, und nahe gleich

$$0^h\ 16'\ 26''$$

Diese Bemerkung führte gegen das Ende des 17. Jahrhunderts Olaus Römer auf die Vermuthung, dass das Licht von den Körpern des Himmels sich nicht augenblicklich fortpflanze, sondern dass es

$$8'\ 13''$$

Zeit brauche, von der Sonne bis zur Erde zu kommen, eine Erklärung, welche die Beobachtung der Finsternisse der Satelliten Jupiters mit den Berechnungen in Übereinstimmung brachte, und später Bradley Gelegenheit zur Entdeckung der Aberration gab.

§. 8.

Kennt man diese Lichtgleichung und die Entfernung r Jupiters von der Sonne, so wird man die jovicentrische Länge l der Satelliten durch Beobachtung ihrer Finsternisse auf folgende Art genauer bestimmen. Ist nähmlich für die Zeit der Mitte einer Finsterniss ☉ die Länge der Sonne, und λ die geocentrische Länge Jupiters, R die Entfernung der Sonne von der Erde, so kennt man in dem Dreyecke, welches Sonne, Erde und Jupiter verbindet, die Seiten

$$r, R$$

und den Winkel an der Erde

$$= \odot - \lambda$$

also kann man den Winkel I an Jupiter oder seine jährliche Parallaxe finden, und dann ist die jovicentrische Länge des Satelliten

$$l = \lambda - I$$

Da man aber Anfang und Ende der Finsterniss so viel zu spät sieht, als das Licht Zeit braucht, die Entfernung ρ des Jupiters von der Erde zu durchlaufen, so muss man von dem beobachteten Mittel der Finsterniss die Zeit

$$\frac{\rho}{R}\,(8'\ 13'')$$

subtrahiren, um den Augenblick zu erhalten, in welchem der Satellit die beobachtete jovicentrische Länge l hatte.

§. 9.

Aus den gemessenen grössten Entfernungen der Satelliten von dem Mittelpuncte Jupiters findet man diese Entfernungen in Theilen des Halbmessers des Jupitersäquators ausgedrückt. So fand man für den vierten Satelliten zur Zeit der mittleren Entfernung Jupiters von der Erde jene grösste Entfernung

$$0^\circ\ 8'\ 16''$$

und der scheinbare Halbmesser des Äquators $19''1$ also ist der Satellit

$$\frac{496}{19.1} \text{ oder } 25.9686$$

Halbmesser des Äquators von dem Mittelpuncte Jupiters entfernt, und diese Entfernung kann, wenn man die geringe Grösse der

Excentricität der Bahn vernachlässigt, als die halbe grosse Axe dieser Bahn betrachtet werden. Vergleicht man diese Entfernungen der Satelliten mit ihren siderischen Umlaufszeiten, so findet man auch hier das Gesetz bestätigt, dass sich die Quadrate der Umlaufszeiten, wie die Würfel der grossen Axen verhalten. Da sie sich wechselweise an Helligkeit übertreffen, so hat man aus der Vergleichung ihres grössten und kleinsten Glanzes mit ihren gegenseitigen Stellungen gefunden, dass sie sich so wie unser Mond in derselben Zeit um sich selbst drehen, in welcher sie einen Umlauf um ihren Hauptplaneten machen. Wegen den nur kleinen Entfernungen der drey ersten oder nächsten Satelliten, verbunden mit der geringen Neigung ihrer Bahnen, werden sie bey jeder Opposition mit der Sonne verfinstert, aber der vierte geht seiner grössern Neigung und Entfernung wegen oft hinter den Planeten vorbey, ohne verfinstert zu werden.

§. 10.

Ist

$$l, l', l''$$

die mittlere tägliche siderische Bewegung des ersten, zweyten und dritten Satelliten, so findet man, dass immer

$$l - 3l' + 2l''$$

sehr nahe gleich Null ist. Dasselbe merkwürdige Verhältniss muss also auch zwischen den synodischen Bewegungen Statt haben. Bezeichnen dieselben Grössen die mittlere jovicentrische Länge dieser drey Satelliten, so ist ebenfalls

$$l - 3l' + 2l''$$

sehr nahe gleich 180°. Beyde Gleichungen treffen so nahe zu, dass man sie für völlig genau halten, und ihre bemerkten kleinen Abweichungen blossen Beobachtungsfehlern zuschreiben kann. Aus der letzten folgt, dass die drey ersten Satelliten nie zugleich verfinstert werden können; denn hat der erste und dritte gleiche Länge, so beträgt ihre Entfernung von dem zweyten 60°, hat der erste und zweyte gleiche Länge, so ist ihre Entfernung von dem dritten 90°, und hat der zweyte und dritte gleiche Länge, so ist ihre Entfernung vom ersten 180°. M. s. Exposition du syst. du monde. IV Edit p. 138.

Übrigens haben die Beobachtungen mehrere Ungleichheiten in den Bewegungen dieser Satelliten entdeckt. Eine derselben hängt von der Veränderung der jährlichen Parallaxe Jupiters ab, die in den mittleren Entfernungen Jupiters und der Erde von der Sonne 11° 5′ beträgt. Eine andere hängt von der ungleichförmigen Bewegung Jupiters in seiner elliptischen Bahn um die Sonne ab. Die synodischen Umlaufszeiten der Satelliten und die Zeiten der Verfinsterungen werden durch die erste Ungleichheit nicht, aber wohl durch die zweyte verändert. Eine dritte endlich hängt von der Geschwindigkeit des Lichts ab, und von ihr ist schon §. 7. gesprochen worden. Alle diese Ungleichheiten sind also nur scheinbar, und verändern nicht die wahren Bewegungen der Satelliten. Man hat aber auch noch andere Störungen der mittleren Bewegungen bemerkt, welche grössten Theils von den verschiedenen Stellungen der Planeten unter einander abhängen. Die beyden innersten Satelliten bewegen sich nahe in kreisförmigen Bahnen. Die Neigung der Bahn des ersten gegen die Bahn des Jupiters ist 4°, und die Neigung des zweyten, so wie ihre Knoten sind veränderlich; die Bahn des dritten zeigt eine kleine Excentricität, und zwar eine veränderliche. Die grösste Gleichung des Mittelpuncts hatte 1682 ihren grössten Werth

$$13'\ 16''$$

und 1777 ihren kleinsten

$$5'\ 7''$$

Auch die Knoten dieser Bahn und ihre Neigung gegen die Bahn des Jupiters ist veränderlich. Die Bahn des vierten endlich ist sehr merklich elliptisch, da ihre grösste Mittelpunctsgleichung 50′ beträgt, und ihre Neigung gegen die Jupitersbahn ist

$$2°\ 24'.$$

§. 11.

Wenn die Dauer der Finsterniss am grössten ist, so liegt die Axe des Schattenkegels in der Ebene der Bahn des Satelliten, also in der Knotenlinie dieser Bahn mit der Bahn des Jupiters. Für die Zeit der Mitte einer solchen Finsterniss ist die jovicentrische Länge des Satelliten gleich der heliocentrischen Länge Jupiters, welche man für diese Zeit berechnen kann, und diese Länge ist zugleich die Länge des Knotens der Satellitenbahn mit der des Hauptplaneten. Auf diese Art findet man die L ä n g e d i e s e r K n o t e n, aber nur bey den zwey letzten Satelliten, denn von den zwey ersten oder nächsten kann man, wenn sie in der Nähe ihrer Knoten sind, nie die Ein- und Austritte zugleich beobachten, und man ist daher genöthigt, die einige Tage vor der Opposition Jupiters beobachteten Eintritte dieser Satelliten in den Schatten des Hauptplaneten mit den einige Tage nach der Opposition beobachteten Austritten zu vergleichen.

§. 12.

Die N e i g u n g der Bahnen der beyden ersten Satelliten findet man aus der k l e i n s t e n Dauer ihrer Finsternisse. Eine auf der Axe des Schattenkegels senkrechte durch den Satelliten gehende Ebene wird den Umfang des Schattens in einem Kreise schneiden, dessen Mittelpunct A (Fig 3) der Mittelpunct des Schattens ist. Ein Loth aus A auf die Bahn NCD des Satelliten, die zwischen C und D nahe als geradlinig betrachtet werden kann, wird die Linie CD in B halbiren. Ist nun ϑ die synodische Revolution des Satelliten, T die halbe grösste, und t die halbe kleinste Dauer seiner Finsterniss, so ist

$$\frac{BC}{AC} = \frac{t}{T}$$

und überdiess

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$$

das heisst

$$AB = AC \, . \sqrt{1 - \frac{t^2}{T^2}}$$

aber es ist auch

$$\vartheta : T = 360^\circ : AC$$

also ist

$$AB = \frac{360\, T}{\vartheta} \, . \sqrt{1 - \frac{t^2}{T^2}}$$

und A B, welche Linie bey der kleinsten Verfinsterung auf N A und D C senkrecht steht, ist die grösste jovicentrische Breite des Satelliten d. h. die Neigung seiner Bahn gegen die des Hauptplaneten. Da aber Jupiter an seinen Polen stark abgeplattet ist, und die Umdrehungsaxe desselben, die nahe senkrecht auf der Ekliptik steht, sich zu dem Durchmesser seines Äquators verhält, wie 13 : 14, so wird man genauer die unter der Voraussetzung eines kreisförmigen Umfanges des Schattens gefundenen Neigungen der Bahnen, noch mit $\frac{13}{14}$ multipliciren, um die verbesserten Neigungen zu erhalten.

Diese Methode ist auf die zwey äussersten Satelliten nicht anwendbar, da sie in ihrer grössten Breite nicht verfinstert werden. Beobachtet man aber die Dauer irgend einer der kürzesten Verfinsterungen, und bestimmt daraus, wie zuvor, die Grösse des Lothes A B, so kennt man in dem bey B rechtwinklichten sphärischen Dreyeck ABN nebst AB auch die Grösse AN, welche dem Unterschiede der schon beynahe bekannten Länge des Knotens, und der heliocentrischen Länge Jupiters gleich ist, also kann man daraus den Winkel N oder die Neigung finden, da man hat

$$\text{Sin N} = \frac{\text{Sin AB}}{\text{Sin AN}}$$

Will man aber die Länge des Knotens nicht als bekannt voraussetzen, so sey zu einer andern Zeit der Satellit im Mittel der

Finsterniss in b, so findet man wieder, wie zuvor, das Loth a b auf N D, und da man so kennt A B, a b und A a gleich Differenz der heliocentrischen Länge Jupiters in beyden Beobachtungen, so kann man a N, A N und den Winkel N oder die Länge des Knotens und zugleich die Neigung der Bahn gegen die Bahn des Jupiters finden, woraus man dann durch die Auflösung eines sphärischen Dreyeckes auch die Länge des Knotens und die Neigung der Bahn des Satelliten in Beziehung auf die Ekliptik ableiten wird.

I. Sey M C D der Schnitt des Schattenkegels in der Nähe des Satelliten, dessen halbe grosse Axe M A, die eigentlich in der Ebene des Aequators Jupiters liegt, wegen der geringen Neigung desselben gegen die Bahn dieses Planeten, hier ohne merklichen Fehler in der Ebene der Bahn Jupiters selbst angenommen werden kann. Sey ferner N C D ein Theil der Bahn des Satelliten, der in C und D Anfang und Ende seiner Verfinsterung hat. Die Breite des Satelliten im Augenblick der Conjunction ist das Loth $AB = p$, die Länge desselben für dieselbe Zeit auf der Bahn Jupiters gezählt, sey α, und der Winkel, welchen der Satellit von dem Augenblicke der Immersion in C bis zur Conjunction in B zurücklegt, sey m. Endlich sey n und k die Neigung und die Länge des Knotens der Satellitenbahn, so hat man

$$\text{tang}\, p = \text{tg}\, n \,\text{Sin}\, (\alpha - k)$$

wo tg p eine sehr kleine Grösse ist, die mit ihrem Bogen verwechselt werden kann. Daraus folgt, dass die Breite des Satelliten im Augenblicke der Immersion seyn wird

$$p - m \,.\, \frac{dp}{d\alpha}$$

Ist aber A der Winkel, unter welchem aus dem Mittelpuncte Jupiters die halbe grosse Axe A M des elliptischen Schattenschnitts M C D gesehen wird, und ist

$$\varepsilon = \frac{13}{14}$$

die Abplattung Jupiters, so sey

$$AM = \mu\, A$$

und

$$AB' = \mu\, A\, (1 - \varepsilon)$$

und man hat für die Coordinaten des Punctes C

$$AP = \mu \,.\, m$$

und

$$PC = \mu \left(p - m \,.\, \frac{dp}{d\alpha}\right)$$

und daher die Gleichung der Ellipse M C D

$$(A^2 - m^2)(1-\varepsilon)^2 = \left(p - m \frac{dp}{d\alpha}\right)$$

woraus man annähernd erhält

$$m = \frac{p\,dp}{d\alpha} \pm \frac{\sqrt{A^2(1-\varepsilon)^2 - p^2}}{1-\varepsilon}$$

das untere Zeichen für die Emersion in D.

Der ganze Winkel, welchen der Satellit um Jupiters Mittelpunct während der ganzen Dauer der Finsterniss zurücklegt, ist

$$\frac{2\sqrt{A^2(1-\varepsilon)^2 - p^2}}{1-\varepsilon}$$

Ist daher v die sinodische Bewegung des Satelliten in der Einheit der Zeit A ausgedrückt, und T die halbe Dauer der Finsterniss, so ist

$$T = \frac{\sqrt{A^2(1-\varepsilon)^2 - p^2}}{(1-\varepsilon).v}$$

oder auch

$$p = (1-\varepsilon)\sqrt{A^2 - .T^2 v^2}$$

und die erste dieser zwey Gleichungen gibt die Dauer der Finsterniss, wenn die Breite; die andere die Breite des Satelliten in der Conjunction, wenn die Dauer der Finsterniss bekannt ist. Aus dem Vorhergehenden folgt noch, dass die Länge des Satelliten für die Zeit der Immersion ist

$$\alpha - \frac{p\,dp}{d\alpha} \pm \frac{\sqrt{A^2(1-\varepsilon)^2 - p^2}}{1-\varepsilon}$$

das untere Zeichen für die Emersion, und dass daher diese Länge zur Zeit der Mitte der Finsterniss ist

$$\alpha - \frac{p\,dp}{d\alpha}$$

das heisst, nach dem Vorhergehenden

$$\alpha - \tfrac{1}{2}\,tg^2\,n\ \mathrm{Sin}\ 2\,(\alpha - k)$$

oder die Länge des Satelliten zur Zeit der Mitte der Finsterniss ist, da n sehr klein ist, immer sehr nahe gleich der Länge des Satelliten zur Zeit seiner Conjunction, d. h. die jovicentrische Länge des Satelliten zur ersten Zeit ist der heliocentrischen Länge des Jupiters zur zweyten Zeit immer sehr nahe gleich, und zwar um so mehr, je näher der Satellit bey einem seiner Knoten ist.

§. 13.

Von der Erde gesehen, erscheint die Bahn des Satelliten als eine Ellipse, deren halbe grosse und kleine Axe a und b seyn soll. Um ihre Gestalt und Lage für jede Zeit zu bestimmen, denke man sich eine mit dem Mittelpuncte Jupiters concentrische Kugel, welche von der Ebene der Ekliptik in dem grössten Kreise VNR (Fig. 4) wo V der Frühlingspunct ist, und von der Ebene der Bahn des Satelliten in dem grössten Kreise NA, geschnitten wird. Die gerade Linie, welche die Mittelpuncte Jupiters und der Erde verbindet, schneidet die Oberfläche dieser Kugel in T, und es sey TR auf NR, so wie TA auf NA senkrecht.

Ist λ β die geocentrische Länge und Breite Jupiters, ☊ die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn des Satelliten in der Ekliptik, und n die Neigung dieser Bahn gegen die Ekliptik, so ist

$$VN = ☊,\ n = ANR$$

die jovicentrische Länge der Erde

$$VR = \lambda + 180°$$

und endlich die jovicentrische Breite der Erde

$$TR = -\beta.$$

Da der Bogen TA auf der Bahn NA senkrecht steht, so misst er die Neigung der von der Erde nach dem Mittelpuncte Jupiters gezogenen Linie gegen die Ebene der Bahn des Satelliten, und daher ist

$$\frac{b}{a} = \text{Sin } TA.$$

Der Winkel ATR aber ist dem Winkel gleich, welchen b mit dem durch den Jupiter gehenden Breitenkreis macht, so dass demnach durch TA und ATR die Gestalt und Lage der Ellipse bestimmt wird. Endlich misst der Bogen NA den jovicentrischen Abstand des Satelliten, wenn er sich in dem gegen die Erde gekehrten Endpunct der kleinen Axe der Ellipse befindet, von seinem auf die Ekliptik bezogenen Knoten N, so dass man dadurch den Ort des Trabanten in der Ellipse wird bestimmen können.

Die Grössen

$$AT,\ NA,\ \text{und } ATR$$

aber findet man aus

$$NR,\ RT,$$

eben so, wie man lib. I. cap. I. die Rectascension aus Länge und Breite findet. Es ist nähmlich

$$\text{Sin } AT = \text{Sin } n \text{ Cos } \beta \text{ Sin } (☊ - \lambda) + \text{Sin } \beta \text{ Cos } n$$

$$\mathrm{Tg\,NA} = \frac{\mathrm{Sin\,n\,tg}\,\beta - \mathrm{Cos\,n\,Sin}\,(\Omega - \lambda)}{\mathrm{Cos}\,(\Omega - \lambda)}$$

und endlich

$$\mathrm{Sin\,ATR} = \frac{\mathrm{Sin\,n\,Cos}\,(\Omega - \lambda)}{\mathrm{Cos\,AT}}$$

Um daher die scheinbare Bahn des Satelliten zu entwerfen, beschreibe man aus C (Fig. 5) einen willkührlichen Kreis, dessen Durchmesser AB der Breitenkreis Jupiters ist, nehme den Winkel ACa = dem vorhingefundenen ATR, und DE auf ab senkrecht. Auf aCb nehme man von C an, die Linie

$$Cn = Cm$$

gleich dem vorhingefundenen Sin von AT, so ist

$$nm = 2b \text{ und } DE = 2a$$

und man wird die Ellipse

$$DmEn$$

verzeichnen können. Um dann noch die scheinbare Lage des Satelliten in dieser Ellipse zu bestimmen, nehme man von a den Bogen aP = jovicentrische Länge des Satelliten — Knoten (☊) — dem vorhin gefundenen NA, und ziehe durch P die Parallele PQ mit ab, so ist der Durchschnitt t dieser parallelen Linie mit der Ellipse der Ort des Satelliten in seiner scheinbaren Bahn.

Nimmt man endlich den Halbmesser des Jupiteräquators, welcher in seiner mittleren Entfernung von der Sonne

18″.371

beträgt, zur Einheit an, so sind die mittleren Entfernungen der vier Satelliten vom Mittelpuncte Jupiters

6.0485
9.6235
15.3502
26.9983

und ihre siderischen Revolutionen in derselben Ordnung

1 T.769138
3.551181
7.154553
16.688770

§. 14.

Wie um Jupiter vier, so hat man um Saturn sieben Satelliten entdeckt, die so wie jene von West gen Ost in beynahe kreisförmigen Bahnen sich um ihren Hauptplaneten bewegen. Die sechs ersten bewegen sich beynahe in derselben Ebene, der siebente aber, der sich von dieser Ebene beträchtlich entfernt, zeigt nach seinen verschiedenen Stellungen gegen Saturn regelmässige Lichtwechsel, aus welchen man schloss, das er sich in derselben Zeit um sich selbst drehe, in welcher er sich um Saturn bewegt, so dass die Gleichheit der Rotation und Revolution bey den Satelliten ein allgemeines Gesetz der Natur zu seyn scheint. Ihre grosse Entfernung von der Erde macht es schwer, ihre Elongationen von Saturn zu messen, oder die Ellipticität ihrer Bahnen und die Unregelmässigkeiten ihrer Bewegungen zu beobachten.

Nimmt man den Halbmesser des Saturnäquators in seiner mittleren Distanz von der Sonne, der 8″.1 ist, zur Einheit an, so sind die mittleren Entfernungen der Satelliten vom Mittelpuncte Saturns und ihre siderische Revolutionen

3.35	0.^{T}943
4.30	1. 370
5.28	1. 888
6.82	2. 739
9.52	4. 517
22.08	15. 945
64.36	79. 330

und auch hier bemerkt man das Verhältniss der Quadrate der Revolutionen zu den Würfeln der grossen Axen, welches wir oben bey den andern Körpern unseres Planetensystems gefunden haben. Bey den sechs ersten hat man für die Neigung ihrer Bahnen und für die Länge ihres aufsteigenden Knotens in Beziehung auf die Ekliptik

$$n = 30^\circ\,20'$$

und

$$k = 167^\circ\,19'$$

also da die Lage der Saturnusbahn gegen die Ekliptik bekannt ist, in Beziehung auf die Bahn des Saturns

$$n' = 29^\circ\,59'$$

und

$$k' = 170^\circ\,51'$$

für den siebenten Satelliten für 1800

$$n = 24^\circ\,45' \qquad k = 144^\circ\,57'$$
$$n' = 22^\circ\,42' \qquad k' = 148^\circ\,12'$$

Es scheint aber die Knotenlinie des letzten eine merkliche rückgängige Bewegung zu haben.

Die von der Erde gesehene Gestalt und Lage der Bahnen der Satelliten Saturns wird nach den im §. 13. gegebenen Methoden gefunden.

§. 15.

Saturn biethet uns aber noch eine andere merkwürdige Erscheinung dar, einen dünnen und breiten Ring, der den Saturn ringsum frey umgibt. Da die Neigung der Ebene der Ekliptik gegen die Ebene dieses Ringes nahe

$$28^\circ \; 40'$$

so zeigt er sich den Bewohnern der Erde in einer schiefen Lage oder unter der Gestalt einer Ellipse. Ist a die halbe grosse, b die halbe kleine Axe dieser Ellipse, ☊ und n die Länge des aufsteigenden Knotens des Ringes, und die Neigung desselben in Beziehung auf die Ekliptik, endlich

$$\lambda \; \beta$$

die geocentrische Länge und Breite Saturns, so hat man nach §. 13 für die Gestalt des Ringes

$$\frac{b}{a} = \operatorname{Sin} n \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Sin} (☊ - \lambda) + \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Cos} n$$

Ist $\frac{b}{a}$ negativ, so ist die Nordseite des Ringes gegen die Erde gekehrt.

Ist aber l b die heliocentrische Länge und Breite des Ringes, so ist eben so für die aus der Sonne gesehene Gestalt des Rings

$$\frac{b'}{a'} = \operatorname{Sin} n \operatorname{Cos} b \operatorname{Sin} (☊ - l) + \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} n$$

und $\frac{b'}{a'}$ negativ, wenn die Nordseite des Ringes von der Sonne beleuchtet ist.

Der Ring verschwindet also, oder er zeigt sich wenigstens durch sehr starke Teleskope nur mehr als eine gerade Linie,

erstens, wenn

$$b = o \text{ weil } \operatorname{Sin} (\lambda - ☊) = \operatorname{tg} \beta \operatorname{Cotg} n$$

und diese Gleichung zeigt, dass in diesem Falle die erweiterte Ebene des Ringes durch den Mittelpunct der Erde geht. Der Ring verschwindet aber auch

zweytens, wenn wieder

$$b' = o \text{ weil } \operatorname{Sin} (l - ☊) = \operatorname{tg} b \operatorname{Cotg} n$$

oder wenn seine erweiterte Ebene durch die Sonne geht. Endlich verschwindet der Ring noch, wenn b und b' entgegengesetzte Zeichen haben, weil dann die von der Sonne beleuchtete Seite des Ringes von der Erde abgekehrt ist. Ist

$$☊ - \lambda = 90° \text{ oder } 270°$$

so ist

$$\frac{b}{a} = \text{Sin}\,(n + \beta)$$

oder

$$= - \text{Sin}\,(n - \beta)$$

Es ist aber nach den Beobachtungen

$$☊ = 167° \, 19'$$

also im ersten Falle

$$\lambda = 77° \, 19'$$

und im zweyten

$$\lambda = 257° \, 19'$$

oder da die Länge des aufsteigenden Knotens des Saturns mit der Ekliptik nahe 112° ist, im ersten Falle die Breite Saturns südlich und im zweyten nördlich, also wird in beyden Fällen die grösste Breite des Ringes durch die Breite des Saturns vermindert. Um daher die Neigung n des Ringes gen die Ekliptik zu finden, messe man seine beyden Axen a b, wenn die letzte am grössten erscheinet, so ist

$$\frac{a}{b} = \text{Sin}\,x$$

und

$$n = x + \beta$$

Die Länge des aufsteigenden Knotens des Ringes in der Ekliptik aber findet man aus der beobachteten geocentrischen Länge und Breite λ β Saturns zur Zeit, wenn die Ringebene durch die Erde geht, denn dann ist nach der vorhergehenden

$$\text{Sin}\,(\lambda - ☊) = \text{tg}\,\beta\;\text{Cotg}\,n.$$

wo n bekannt ist. (M. s. die Petersburg. Commentarien für d. J. 1777 Theil I.)

Nach den neuesten Bestimmungen sind die scheinbare grosse und kleine Axe des Ringes in der mittleren Entfernung Saturns von der Sonne

$$38''42 \text{ und } 5''79.$$

Ein, vielleicht mehrere dunkle concentrische Streife, die man auf denselben bemerkt, lassen vermuthen, das er aus mehreren abgesonderten, einander concentrischen Ringen besteht, und die Beobachtung einiger glänzender Puncte desselben haben Herschel veranlasst, seine Rotation um eine auf seiner Ebene senkrechte Axe auf

$$10^h \, 30'$$

anzunehmen, nur wenig von der Rotation Saturns verschieden, die er gleich

$$10^h\ 16'$$

bestimmt hat. (Monathl. Corresp. 1811 und Berl. Ephemeriden f. d. J. 1786, 1796 und 1814. pag. 173.

I. Um überhaupt, wenn ein Körper gegeben ist, die Figur zu bestimmen, unter welcher er in einer gegebenen Lage dem Auge erscheinen wird, denke man sich von dem als unendlich entfernt angenommenen Auge des Beobachters nach dem Mittelpuncte des Körpers eine Gesichtslinie gezogen, so wird die gesehene Figur des Körpers seine orthographische Projection auf eine dieser Gesichtslinie senkrechte Ebene seyn. Die Radien des Körpers nenne man r, ihre Projection r′, ferner den Winkel, welchen die Radien mit der Polaraxe machen, ϑ, und diese Winkel in der Projection ϑ'; endlich die Neigung der Gesichtslinie gegen die Polaraxe $90 - \mu$, und die Winkel zwischen den Radien und der Gesichtslinie h, so ist

$$r' = r \operatorname{Sin} h \ldots \mathrm{I}$$

und die Bedingung, dass man nur den Umfang der Projection bestimmen soll, oder dass r′ für jedes ϑ' ein Maximum ist, gibt

$$dr' = 0$$

oder

$$\left(\frac{dr}{dh}\right) = - r \operatorname{Cotg} h$$

und die letzte Gleichung mit der ersten

$$r' = r \operatorname{Sin} h$$

verbunden, enthält die Auflösung unserer Aufgabe.

Man findet nähmlich leicht aus der Betrachtung eines sphärischen Dreyeckes

$$\operatorname{Cos} \vartheta = \operatorname{Cos} \vartheta' \operatorname{Cos} \mu \operatorname{Sin} h + \operatorname{Sin} \mu \operatorname{Cos} h \ldots \mathrm{II.}$$

Sucht man daher aus der gegebenen Gleichung der Oberfläche des Körpers zwischen r und ϑ den Werth von

$$\frac{dr}{d\vartheta}$$

so findet man daraus, da

$$\left(\frac{d\vartheta}{dh}\right) = \frac{\operatorname{Sin} h \operatorname{Sin} \mu - \operatorname{Cos} h \operatorname{Cos} \mu \operatorname{Cos} \vartheta'}{\operatorname{Sin} \vartheta}$$

ist, auch den Werth von

$$\left(\frac{dr}{dh}\right)$$

und dieser letzte Werth gleich

$- r \text{ Cotg } h$

gesetzt, gibt einen Ausdruck, aus welchem man die Grösse ϑ mittels der Gleichung II. eliminiren kann.

Einen ähnlichen Ausdruck gibt die Gleichung I., wenn man in ihr für r seinen Werth durch ϑ, und für ϑ seinen Werth aus II. setzt. Eliminirt man dann aus beyden Ausdrücken die Grösse h, so erhält man die gesuchte Gleichung zwischen r' und ϑ' für die gesehene Figur.

II. Herschel hat auch um Uranus sechs Satelliten entdeckt, die sich in kreisförmigen und auf die Ekliptik nahe senkrechten Bahnen um ihren Hauptplaneten bewegen. Ihre Entfernungen vom Uranus im Halbmesser des letztern ausgedrückt und ihre siderischen Revolutionen sind

13.12	5.89
17.02	8.71
19.84	10.96
22.75	13.46
45.51	38.07
91.01	107.69

Wenn aber schon die Theorie der Satelliten Saturns ihrer grossen Entfernung wegen sehr unvollkommen ist, so gilt diess noch in einem grösseren Grade von denen des Uranus, die wegen ihrer ungemeinen Entfernungen von der Erde, und wegen ihrem kleinen und schwach beleuchteten Durchmesser, unter welchem sie uns erscheinen, sich wahrscheinlich noch lange einer genaueren Untersuchung entziehen werden. (M. s. Transact. Philos. 1788 et 1797.)

§. 16.

Hier wird der Ort seyn, mehrere wichtige Erscheinungen und Eigenschaften unsers Planetensystemes zusammen zu stellen.

Die grössten Digressionen Merkurs oder seine grössten Entfernungen von der Sonne sind sehr verschieden; sie variiren von 16 bis 24 Graden. Eben so ist die Dauer seiner ganzen Oscillationen um die Sonne, oder die seiner Zurückkunft zu derselben Entfernung von der Sonne zwischen 106 und 130 Tagen. Der mittlere Bogen seiner Retrogradation ist nahe 13.5 Grade, und die Dauer derselben 23 Tage.

Die grössten Digressionen der Venus sind von 45 bis 47.7 Graden, und die mittlere Dauer ihrer ganzen Oscillation ist 584 Tage. Der Bogen ihrer Retrogradation ist nahe 16 Grade, und die Dauer derselben 42 Tage. Schröter fand durch die Beobachtungen ihrer Phasen und der einigen lichten Puncte auf der nicht beleuchteten Seite der Venus die Rotation um ihre Axe gleich 0.973 Tage, so wie er auch sehr hohe Berge und die Existenz einer Atmosphäre der Venus entdeckt hat, deren das Licht brechende Kraft nur wenig von der unserer Atmosphäre verschieden ist. Mehrere Beobachter wollen einen Satelliten der Venus gesehen haben, eine Behauptung, welche durch neuere Beobachtungen noch nicht bestätigt, aber auch vielleicht noch nicht völlig widerlegt worden ist.

Dieser Planet erscheint zuweilen in einem sehr blendenden Lichte, so dass er auch um Mittag deutlich sichtbar wird. Da er wie der Mond Phasen hat, und in seiner obern Conjunction, wo er uns ganz beleuchtet erscheint, durch seine zu grosse Entfernung von der Erde wieder beträchtlich an Beleuchtung verliert, so ist es ein interessantes Problem, den Punct seiner Bahn zu bestimmen, wo seine Beleuchtung für uns am grössten ist.

Ist R r die Entfernung der Erde und der Venus von der Sonne, ρ die Entfernung der Venus von der Erde, und π η die jährliche Parallaxe und die Elongation dieses Planeten, endlich D die ganze Oberfläche desselben, und P der von der Sonne beleuchtete Theil dieser Oberfläche, so ist nach §. 3. dieses Cap.

$$\frac{P}{D} = \mathrm{Cos}^2 \frac{\pi}{2}$$

und da die Oberfläche sich wie verkehrt das Quadrat der Entfernung sich verhält

$$D = \frac{1}{\rho^2}$$

oder

$$P \rho^2 = \mathrm{Cos}^2 \frac{\pi}{2}$$

Nimmt man aber der grössern Einfachheit wegen an, dass die Bahn der Venus ein Kreis in der Ebene der Ekliptik ist, so hat man

$$\mathrm{Cos}^2 \frac{\pi}{2} = \frac{(r + \rho + R)(r + \rho - R)}{4 r \rho}$$

also die vorhergehende Gleichung

$$4 P . r \rho^3 = (r + \rho + R)(r + \rho - R)$$

Differentiirt man diesen Ausdruck in Beziehung auf P und ρ, und setzt

$$d P = 0,$$

so erhält man

$$\rho^2 . P \text{ oder } \mathrm{Cos}^2 \frac{\pi}{2} = \frac{r+\rho}{6.r}$$

oder wenn man den vorhergehenden Werth von

$$\mathrm{Cos}^2 \frac{\pi}{2}$$

substituirt,

$$\rho^2 + 4r\rho + 3r^2 = 3R^2$$

das heisst

$$\rho = -2r + \sqrt{3R^2 + r^2}$$

und diess ist die Entfernung der Venus von der Erde, in welcher ihre Beleuchtung uns am grössten erscheint. Man wird daraus leicht den Werth der Elongation η für die grösste Beleuchtung ableiten. Es ist nähmlich

$$\mathrm{Cos}^2 \frac{\eta}{2} = \frac{(\rho+R+r).(\rho+R-r)}{2R\rho}$$

also auch

$$\mathrm{Cos}\,\eta = 2\,\mathrm{Cos}^2 \frac{\eta}{2} - 1 = \frac{\rho^2+R^2-r^2}{2R\rho}$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke den oben gefundenen Werth von ρ, so erhält man

$$\mathrm{Cos}\,\eta = -\frac{2r}{3R} + \frac{2r}{3R} . \sqrt{\frac{3R^2}{r^2} + 1}$$

Ist

$$R = 1 \text{ und } r = 0.723$$

für die mittleren Entfernungen der Erde und der Venus von der Sonne, so findet man aus den vorhergehenden Ausdrücken

$$\rho = 0.43 \text{ und } \eta = 39^\circ\, 43'$$

§. 17.

Während diese zwey Planeten, deren Bahnen von jener der Erde eingeschlossen werden, und die desswegen untere Planeten heissen, die Sonne gleich Satelliten in bestimmten Räumen zu begleiten scheinen, entfernen sich alle übrigen oberen Planeten, von deren Bahnen jene der Erde eingeschlossen wird, auf alle möglichen Winkel bis 180 Grade.

Die siderische Revolution des Mars ist, wie wir gesehen haben, nahe 687 Tage, woraus seine synodische Revolution von 780 Tagen folgt. Bey der Digression von 137° wird seine Bewegung in Länge stationär, und darauf retrograd durch nahe 73 Tage, während welcher Zeit er einen Bogen von 16 Grade beschreibt. Auch an ihm hat man, wie an Merkur und Venus, bereits Lichtphasen bemerkt, so wie man durch die Beobachtung seiner Flecken die Rotation desselben um seine Axe von 1.0273 Tagen, und die Neigung dieser Axe gegen die Ekliptik von 59.7 Graden beobachtet hat. Die beyden Durchmesser in der Richtung seines Äquators und in der darauf senkrechten Richtung verhalten sich wie 194 zu 189.

Jupiters siderische Revolution ist nahe 4332.6 Tage, also seine synodische 399 Tage. Bey der Digression von 115 Grade wird er stationär, dann retrograd durch 121 Tage, während welcher Zeit er den Bogen von nahe 10 Grade zurücklegt. Nebst mehreren der Ekliptik nahe parallelen breiten Streifen, bemerkt man noch auf seiner Oberfläche andere Flecken, wodurch man seine Rotation von 0.4138 Tage um eine auf die Ekliptik nahe senkrechte Axe bestimmt hat. Die Entfernung seiner beyden Pole verhält sich zu dem Durchmesser seines Äquators wie 167 zu 177. Von seinen Satelliten und den verschiedenen Erscheinungen, welche sie uns darbiethen, ist oben gesprochen worden. Die wahre Grösse der Durchmesser dieser Satelliten ist sehr gering, und schwer durch Messungen zu bestimmen. Herschel bemerkte, dass sie sich unter einander wechselweise an Licht übertreffen, und schloss daraus, dass sie sich, wie unser Mond in derselben Zeit um sich selbst bewegen, in welcher sie um ihren Hauptplaneten gehen, ein Phänomen, das wahrscheinlich allen Satelliten unsers Planetensystems gemein ist.

Saturns siderische Revolution ist 10759, also seine synodische 378 Tage. Bey der Digression von 109 Grade wird er retrograd durch 139 Tage, während welcher Zeit er einen Bogen von 6.3 Graden zurücklegt. Obschon Herschel auf seiner Oberfläche fünf der Ekliptik nahe parallele Streifen entdeckt hat, so hat man doch noch keine Flecken gesehen, durch welche sich seine Rotation bestimmen liess; da aber der Durchmesser desselben, der in der Richtung des Ringes liegt, zu den darauf senkrechten sich verhält, wie 11 zu 10, so scheint seine Rotation sehr schnell zu seyn. Herschel nimmt sie aus nicht ganz verlässlichen Beobachtungen zu 0.43 Tagen an.

Die siderische Revolution des Uranus ist 30689, also seine synodische 370 Tage. Seine Retrogradation fängt bey der Digression von 104 Graden an, und dauert 151 Tage, während welcher Zeit er nur den kleinen Bogen von 3.6 Graden zurücklegt.

Die vier neuen Planeten wurden entdeckt, Ceres den 1. Jänner 1801 von Piazzi; Pallas den 28. März 1802 von Olbers; Juno den 1. September 1804 von Harding; und Vesta den 29. März 1807 von Olbers. Sie sind es vorzüglich, welche dem Verfasser der Theoria mot. corp. coel. Gelegenheit gegeben haben, die wichtige Aufgabe, welche den Inhalt des III. Cap. bildet, auf eine weit vollkommnere Weise als seine Vorgänger aufzulösen, so wie sie wegen ihren grösseren Neigungen und Excentricitäten, und wegen ihrer Nähe bey Jupiter die besten Mittel seyn werden, die Theorie der Störungen zu vervollkommnen, um die Masse dieses Planeten genauer zu bestimmen.

§. 18.

Die Kometen endlich, deren Zahl noch lange unbekannt seyn wird, durchlaufen den Himmel nach allen Richtungen, nicht bloss wie die Planeten von Abend gegen Morgen. Man erkennt sie gewöhnlich an dem Nebel, der sie umgibt, oder an den oft sehr durchsichtigen Schweifen, welche sie nach sich ziehen. Ihre elliptischen Bahnen haben meistens eine sehr beträchtliche Excentricität, daher die Zeit ihrer Wiederkunft aus einer einzigen Erscheinung schwer zu bestimmen ist. Unter den bisher beobachteten Kometen sind vorzüglich drey, deren Umlaufszeit genau bekannt ist.

Der Komet von 1682, der den 14. September jenes Jahres durch sein Perihelium ging, und schon früher in den Jahren 1607, 1531 und 1456 gesehen wurde. Er heisst der Halley'sche Komet, da Halley ihn zuerst berechnete, seine früheren Erscheinungen auffand, und auch seine nächste Wiederkunft auf das Jahr 1759 voraussagte, in welchem Jahre er auch den 12. März wieder durch sein Perihelium ging. Da seine Umlaufszeit zwischen 75 und 76 Jahren ist, so wird man ihn im Jahre 1834 wieder sehen.

Der Komet, den Olbers 1815 den 6. März entdeckte, und der den 26. April jenes Jahrs durch seine Sonnennähe ging. Seine Umlaufszeit beträgt nahe 74 Jahre. In seiner Sonnenferne ist er nahe 34 Halbmesser der Erdbahn von der Sonne entfernt, der Halley'sche 36, und die halbe grosse Axe der Bahnen beyder Kometen ist kleiner, als die der Uranusbahn. Beyde können keinem der grösseren Planeten unsers Sonnensystems so nahe kommen, dass sie eine grosse Veränderung der Elemente ihrer Bahnen zu befürchten hätten; ein Zufall, der wahrscheinlich den räthselhaften Kometen von 1770 getroffen hat, welcher bey seiner Erscheinung eine Ellipse von noch nicht sechs Jahren Umlaufszeit beschrieb, und welcher doch weder vor noch nach diesem Jahre weiter gesehen wurde. Berl. Jahrb. 1818. p. 204 und 218.

Endlich der Komet, welchen Pons am 26. November 1819 entdeckte, und von dem Ende seine kurze Umlaufszeit von 1208 Tagen berechnete, und frühere Erscheinungen in den Jahren 1805, 1795 und 1786 auffand. Auch die Lage der Bahn dieses merkwürdigen Kometen ist so beschaffen, dass er sich nie einem der älteren oder neueren Planeten, den Merkur ausgenommen, zu sehr nähern kann. Er wird in der Mitte May's 1822 wieder zu seiner Sonnennähe zurückkehren. Berl. Jahrb. 1822. p. 180.

Der die Kometen gewöhnlich umgebende Nebel scheint von Dünsten, von Auflösungen des Kometen gebildet zu werden, die die Sonne auf der Oberfläche dieser Körper erzeugt. Der Komet von 1680, einer der grössten von allen, da die Länge seines Schweifes nahe 90 Grade betrug, war in seinem Perihelium nur den 166. Theil der mittlern Entfernung der Erde von der Sonne entfernt, daher musste die Hitze, welche die Sonne auf der Oberfläche jenes Kometen erzeugte, über sieben und zwanzig tausend Mahl grösser seyn, als jene, welche sie auf der Erde hervorbringt, wenn, wie es wahrscheinlich ist, diese Hitze der Intensität des Sonnenlichtes proportional ist. Eine solche Hitze würde die meisten der Gegenstände, welche auf unserer Erde enthalten sind, in Dämpfe verwandeln. Da aber bey jedem Übergange der festen Körper in tropfbare, und dieser in dampfförmige, Wärme gebunden wird, und umgekehrt, so ist es nicht unwahrscheinlich, dass die ungemeine Ausdehnung der Kometenmasse in der Nähe der Sonne eine Kälte erzeugt, von welcher die von der Nähe der Sonne erzeugte Hitze wieder sehr gemässigt wird, und dass die eben so grosse Zusammenziehung dieses nebelartigen Stoffes in den Aphelien der Kometen wieder die grosse Kälte mildert, welche in jenen ungemeinen Entfernungen von der Sonne Statt hat. Die Dichte dieses Stoffes scheint in der Sonnennähe äusserst gering, und nur mit der unserer Luftarten vergleichbar zu seyn, da er sich oft auf viele Millionen Meilen in den Räumen des Himmels verbreitet, und das Licht der durch sie schimmernden Fixsterne nur unmerklich schwächt. Diese geringe Masse vermindert zugleich die Besorgniss, welche man wegen des Zusammentreffens eines dieser Körper mit der Erde hegen könnte. Vielleicht ging die Erde schon öfter durch diese Nebel, ohne dass ihre Bewohner es bemerkten. Unter allen von uns beobachteten Kometen kam der oben erwähnte von 1770 der Erde am nächsten, und wenn seine Masse jener der Erde gleich gewesen wäre, so würde er die Dauer unsers Jahres um zwey Stunden 47 Minuten vergrössert haben; allein da seit 1770 den Beobachtungen gemäss das Jahr gewiss nicht um zwey Secunden sich geändert hat, so kann die Masse jenes Kometen noch nicht den fünftausendsten Theil der Erdmasse betragen, auch ging er in den Jahren 1767 und 1779 durch das System der Jupiterssatelliten, ohne unter ihnen die geringste uns merkbare Störung bewirkt zu haben. Indessen würde doch die unmittelbare Berührung eines solchen Körpers mit der Erde, wenn seine Masse gegen diese nur etwas beträchtlich ist, für uns von sehr bedeutenden Folgen begleitet seyn: Veränderung der Axe und der Rotation der Erde; Austreten der Meere aus ihren Gestaden, um sich gegen den neuen Äquator hinzustürzen, Untergang eines grossen Theils der Menschen und Thiere in der allgemeinen Überschwemmung, oder durch die der Erde beygebrachte gewaltsame Erschütterung, Vernichtung ganzer Gattungen der lebenden Wesen, und Zerstörung aller Denkmähler des menschlichen Kunstfleisses — Ereignisse, die während der kurzen Dauer eines Menschenalters zwar höchst unwahrscheinlich sind, aber in einer Folge von vielen Jahrhunderten endlich eintreffen können, und vielleicht in der Vorzeit auch schon eingetroffen sind.

SECHSTES KAPITEL.

Von den Finsternissen.

§. 1.

Da die Erde ein dunkler und nahe kugelförmiger Körper ist, so wird sie, von der Sonne beschienen, einen Schattenkegel auf der von der Sonne abgewendeten Seite hinter sich werfen, deren Axe in der Verlängerung der geraden Linie liegt, welche die Mittelpuncte der Sonne und der Erde verbindet, und der sich in dem Puncte endet, aus welchem die scheinbaren Durchmesser dieser beyden Körper gleich gross erscheinen. Diese Durchmesser, vom Mittelpuncte des Mondes gesehen, wenn er in Opposition und in seiner mittleren Entfernung von der Erde ist, betragen 1918″ für die Sonne und 6908″ für die Erde, woraus folgt, dass der Schattenkegel der Erde wenigstens drey und ein halbmahl grösser ist, als die Entfernung des Mondes von der Erde, und dass die Breite dieses Kegels in den Puncten, wo er von dem Monde durchschnitten wird, nahe acht Drittheile des Mondsdurchmessers betrage. Der Mond, der ebenfalls ein dunkler und nahe kugelförmiger Körper ist, würde daher bey jeder Opposition von dem Schatten der Erde verfinstert werden, wenn seine Bahn mit der Ebene der Ekliptik zusammen fiele; aber vermög der Neigung dieser beyden Ebenen geht der Mond in seinen Oppositionen oft über oder unter diesem Schattenkegel vorbey, und kann daher nur dann verfinstert werden, wenn er in der Opposition nahe bey seinem Knoten ist. Senkt dann sein ganzer Durchmesser sich in den Erdschatten, so heisst die Finsterniss total, geht aber nur ein Theil des Mondsdurchmessers durch den Erdschatten, so heisst die Finsterniss partial. Ehe die eigentliche Finsterniss für einen Punct des Mondes anfängt, verliert er nach und nach das Licht der verschiedenen Theile der Sonnenscheibe, seine Helle vermindert sich nach und nach, und verschwindet endlich gänzlich in dem Augenblick, wo er in den Schatten der Erde eintritt. Diess ist die Folge des Halbschattens der Erde, der von den beyden geraden Linien begränzt wird, welche die Oberfläche der

Erde und der Sonne auf entgegengesetzten Seiten berühren, während der volle Schatten von den beyden Linien eingeschlossen ist, die die Oberfläche der Erde und der Sonne auf derselben Seite berühren. Dieselben Erscheinungen haben auch bey den übrigen Satelliten unsers Planetensystemes Statt, und da sie bey dem Durchgange durch den Schatten ihres Hauptplaneten, ihres, von der Sonne geborgten Lichtes in der That beraubt werden, so nennt man diese Phönomene wahre Finsternisse.

Anders verhält es sich, wenn dieselben Körper in Conjunction mit der Sonne oder einem anderen Gestirn sind, wodurch das Licht der letzten Körper nicht ihnen selbst, aber doch uns, unserem Anblicke entzogen wird, welches man eine scheinbare Finsterniss nennt. Steht der Mittelpunct des Mondes in seiner Conjunction auf der geraden Linie, welche den Mittelpunct der Sonne mit dem Auge des Beobachters verbindet, so wird das letzte eine totale oder eine ringförmige Sonnenfinsterniss sehen, wenn der scheinbare Durchmesser des Mondes grösser oder kleiner ist, als jene der Sonne. Geht aber die Linie vom Auge des Beobachters zum Mittelpunct der Sonne nicht durch den Mittelpunct des Mondes, sondern durch einen andern Punct seines Durchmessers, so wird der Mond nur einen Theil der Sonnenscheibe bedecken, und die Finsterniss wird partial seyn Da der Mond aus verschiedenen Puncten der Oberfläche der Erde gesehen, wegen der Parallaxe an verschiedenen Orten des Himmels zu stehen scheint, so werden die scheinbaren Finsternisse nicht an allen Orten der Erde dieselben Erscheinungen darbiethen, wie diess bey den wahren Finsternissen geschieht, daher wir jede derselben besonders betrachten werden.

Die Theorie der scheinbaren Finsternisse zerfällt in zwey Theile, deren der erste sich mit den schon beobachteten Finsternissen und ihrer Anwendung zur Verbesserung der Mondstafeln und zur Bestimmung der geographischen Längen der Beobachtungsörter beschäftigt, während der zweyte die noch zu beobachtenden Finsternisse oder ihre Vorherbestimmung durch Rechnung zum Gegenstande hat. Diese Vorherbestimmung kann unter einem doppelten Gesichtspuncte betrachtet werden, indem man nähmlich die Erscheinung der Finsterniss entweder für die Erde überhaupt, oder für irgend einen gegebenen Punct der Erde untersucht. Eine eigene Betrachtung endlich verdienen ihrer Wichtigkeit wegen die scheinbaren Finsternisse, welche durch den Durchgang eines untern Planeten vor der Sonnenscheibe entstehen. Wir wollen diese verschiedenen Untersuchungen nach einander vornehmen, und mit den wahren Finsternissen den Anfang machen.

§. 2.

Wahre Finsternisse.

Zuerst wollen wir angemessene Zeichen festsetzen, deren wir uns in der Folge dieses Capitels bedienen werden.

Für den verfinsterten Körper oder den Mond sey

$$a, d$$

die wahre Rectascension und Declination,

$$r, p, m$$

die Entfernung seines Mittelpuncts von dem der Erde, die Horizontalparallaxe des Äquators, und der scheinbare Halbmesser.

Für die Sonne seyen dieselben Grössen

$$\alpha\ \delta\ \rho\ \pi\ \mu$$

Die stündlichen Veränderungen dieser Grössen sollen durch

$$da,\ d\alpha,\ dd\ \ldots$$

ausgedrückt werden. Endlich sey φ die Polhöhe, und s der Stundenwinkel der Sonne für den Beobachtungsort. Die übrigen Zeichen werden unten erklärt werden.

Denkt man sich eine Ebene senkrecht auf die Schattenaxe der Erde durch den Mittelpunct des Mondes in seiner Opposition, so wird der Durchschnitt des vollen und des Halbschattens mit dieser Ebene ein Kreis seyn, dessen Halbmesser für den vollen Schatten, wie man leicht findet

$$P = p + \pi - \mu$$

und für den Halbschatten

$$P' = p + \pi + \mu$$

ist.

Für die Zeit t der wahren Opposition, für welche also

$$a = \alpha + 180$$

ist, sey $d - \delta$ die Differenz der Declinationen, n die Neigung der relativen Bahn des Mondes gegen den Äquator, und e die kürzeste Distanz des Mittelpuncts des Schattens von der Bahn des Mondes, so ist

$$\operatorname{tg} n = \frac{dd - d\delta}{(da - d\alpha) \operatorname{Cos} \frac{d+\delta}{2}}$$

und

$$e = (d - \delta) \operatorname{Cos} n$$

Sey (Fig. 6) F A G der Äquator, A der Mittelpunct des Schattens F I G zur Zeit der Opposition, D B die relative Bahn des Mondes, A B auf F G, und A C auf D B senkrecht, also

$$AC = AB \operatorname{Cos} n$$

und C der Ort der Mitte der Finsterniss, und

$$BC = AB \operatorname{Sin} n, \quad AH = AG = P,$$

also für Anfang und Ende der partiellen Finsterniss

$$AD = P + m,$$

und für Anfang und Ende der totalen Finsterniss

$$AE = P - m,$$

endlich

$$KI = AI - AK = AI - (AC - CK) = P - e + m$$

durch welchen Werth von KI die Grösse der Finsterniss bestimmt wird.

Das Vorhergehende wird hinreichen, folgende einfache Ausdrücke zu verstehen.

Setzt man der Kürze wegen

$$h = \frac{\operatorname{Cos} n}{(da - d\alpha) \operatorname{Cos} \frac{\delta + \delta}{2}} = \frac{\operatorname{Sin} n}{dd - d\delta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(da - d\alpha)^2 \operatorname{Cos}^2 \frac{d + \delta}{2} + (dd - d\delta)^2}}$$

so hat man die Zeit der Mitte der Finsterniss

$$\vartheta = t \mp (d - \delta)\, h \operatorname{Sin} n$$

Ist dann

$$\operatorname{Cos} \alpha' = \frac{e}{P + m}$$

so ist die Zeit des Anfangs und Endes der partiellen Finsterniss

$$= \vartheta \mp he \operatorname{tg} \alpha'$$

Ist

$$\operatorname{Cos} \beta' = \frac{e}{P - m}$$

so ist die Zeit des Anfangs und Endes der totalen Finsterniss

$$= \vartheta \mp he \operatorname{tg} \beta'$$

$$\operatorname{Cos} \gamma' = \frac{e}{P + \left(1 - \frac{k}{6}\right) m},$$

so ist die Zeit der Verfinsterung von k Zollen

$$9 \mp he \operatorname{tg} \gamma'$$

wo der Halbmesser des Mondes in sechs gleiche Theile, die man Zolle nennt, vorausgesetzt wird. Endlich ist die grösste Verfinsterung selbst in Zollen und deren Theilen ausgedrückt

$$= \frac{6}{m} (P + m - e)$$

I. Wollte man bloss auf den Halbschatten Rücksicht nehmen, so würde man iu den vorhergehenden Ausdrücken P' statt P setzen.

II. Wählt man die Ekliptik statt des Äquators, was hier bequemer ist, so bleiben die vorhergehenden Ausdrücke unverändert, nur bezeichnen

$$a \; \alpha$$

die Längen, und

$$d, \delta = o$$

die Breiten des Mondes und der Sonne.

III. Die Grösse P pflegt man um ihren sechszigsten Theil zu vergrössern, um mehr Übereinstimmung der Beobachtungen mit den Rechnungen zu erhalten; man findet nähmlich die beobachtete Dauer der Finsterniss gewöhnlich etwas grösser, als nach den vorhergehenden Rechnungen, was man der Atmosphäre des Mondes zuschreibt. Berl. Jahrb. 1794. p. 142. Wegen dem Halbschatten, der je näher dem wahren Schatten, desto dichter wird, sind diese Beobachtungen selten genau.

IV. Um die Gegenden der Oberfläche der Erde zu finden, welche eine solche Finsterniss sehen, nehmen wir z. B. an, dass der Anfang der Finsterniss in Paris um 9 Uhr Abends Par. Zeit beobachtet werde. Da der Mond in Opposition ist, so ist der Beobachter, welcher den Mond im Meridian sieht,

$$3^h = 45^\circ$$

östlich von Paris entfernt. Auf diesem Meridian, der 45° östlich von Paris ist, nehme man den Punct, dessen geographische Breite gleich d ist, so sieht der Beobachter in diesem Puncte den Mond im Zenith. Um diesen Punct als Pol beschreibe man (etwa auf einem Globus) einen grössten Kreis, so schliesst dieser grösste Kreis alle Orte ein, welche den Mond im Anfange der Finsterniss sehen. Auf eine ähnliche Art wird man für das Ende verfahren. Der Theil der Erdoberfläche, der beyden grössten Kreisen gemeinschaftlich zugehört, wird die Orte in sich schliessen, welche die Finsterniss während ihrer ganzen Dauer sehen; die andern Theile, die nur einem der beyden grössten Kreise gehören, werden nur einen grösseren oder kleineren Theil der Dauer der Finsterniss sehen. Führt man den Punct, welcher den Mond im Zenith hat, unter den fixen Meridian des Globus und stellt den letzten auf die Polhöhe = d, so sehen alle Orte der Erde, die über dem Horizont des Globus sind, den Mond, während er den andern unsichtbar ist.

V. Im Vorhergehenden ist die Parallaxe des Mondes und die stündliche Bewegung desselben während einiger Stunden für constant angenommen worden, was wegen der geringen Sicherheit, welche diese Beobachtungen gewähren, wohl erlaubt ist. Wollte man sich diese Voraussetzung nicht erlauben, so könnte man für die nach der vorhergehenden Methode gefundenen approximirten Zeiten des Anfangs und Endes die Grössen

$$p, \; da, \; d\delta \; \ldots$$

genauer suchen, und damit die Rechnung wiederholen.

Exempel. 1797 December 3.

für $16^h\,19'$ mit. Z. Paris is

wahre Länge ☾ = 72° 31′ 17″8 stündl. Beweg. 35′ 13″3
☉ = 252 35 13.2 — 2 32.3

also die mit. Par. Zeit der Opposition

$16^h\,26'\,12''1$

und für diese Zeit ist

wahre Länge ☾ oder der Erde $a = 72°\,35'\,31''5$
wahre Breite ☾ $= d = -\,0°\,5'\,8''8$ südlich

$$da - d\alpha = 1961''$$
$$dd - d\delta = dd - o = +\,195.''3$$

die Breite nimmt ab.

Endlich ist
$$p = 59'\,10''0$$
$$\pi = 8''6$$
$$m = 16'\,6''2$$
$$\mu = 16\;15.0$$

$P = 43'\,3''6$ und um ihren $\frac{1}{60}$sten Theil vermehrt.
$$P = 43'\,46''7$$
$$n = 5°\,41'\,15''$$

$$\frac{1}{h} = 1969''0$$

$t = 16^h\,26'\,12''1 =$ m. Z. Paris Oppos.

$(d - \delta)\, h \,\text{Sin}\, n = 55.9$

$\vartheta = 16^h\, 27'\, 8''0$ Zeit der Mitte

$h\, e\, \text{tg}\, \alpha' = 1\; 49\;\; 4.9$

14 38 3.1 Anfang der part. Finst.
18 16 12.9 Ende

$h\, e\, \text{tg}\, \beta' = 0\; 49\; 43.4$

15 37 24.6 Anf. d. total. Finst.
17 16 51.4 Ende

$\frac{6}{m}(P + m - e) = 20.403$ Zolle = grösste Verfinsterung.

Diese Finsterniss wurde unter andern in Berlin und Lilienthal beobachtet. Reducirt man diese Beobachtungszeiten mittels der Meridiandifferenzen

$0^h\, 44'\, 10''$ und $0^h\, 26'\, 16''$

auf mit. Z. Paris, so erhält man

	Beob. Berlin	.....	Lilienthal
Anf. der part. Finst.	$14^h\, 37'\, 27''$	.....	$14^h\, 39'\, 29''$
Anf. der total.	15 37 14		15 36 35
Ende der total.	.....		17 16 50
Ende der part.	18 15 33		18 15 57

§. 3.

Allgemeine Sonnenfinsternisse.

Wenn man bloss sucht, wann eine scheinbare Finsterniss für die Erde überhaupt anfangt oder endet, ohne die Orte der Erdoberfläche anzugeben, auf welchen diese Erscheinungen Statt haben, so werden die in §. 2 gegebenen Ausdrücke mit einigen Veränderungen auch hier ihre Anwendung finden. Ist nämlich wieder für die Zeit t der wahren Conjunction in Länge oder Rectascension a d die wahre Länge und Breite, oder die wahre Rectascension und Declination des Mondes, und eben so $\alpha\, \delta$ für die Sonne; ist ferner n und e die Neigung der relativen Mondesbahn und die kürzeste Distanz, so ist, wie zuvor,

$$\text{tg}\, n = \frac{d\,d - d\,\delta}{(da - d\alpha)\, \text{Cos}\, \frac{d+\delta}{2}}$$

$$h = \frac{\text{Cos}\, n}{(d\,a - d\,\alpha)\, \text{Cos}\, \frac{d+\delta}{2}} = \frac{\text{Sin}\, n}{dd - d\delta} \text{ und}$$

$$e = (d - \delta)\, \text{Cos}\, n$$

und dann ist

$$\text{Zeit der Mitte } \vartheta = t \mp (d - \delta)\, h \operatorname{Sin} n$$

Ist dann

$$\operatorname{Cos} \alpha' = \frac{e}{p - \pi + m + \mu}$$

$$\operatorname{Cos} \beta' = \frac{e}{p - \pi}$$

$$\operatorname{Cos} \gamma' = \frac{e}{p - \pi \pm (m - \mu)}$$

$$\operatorname{Cos} \delta' = \frac{e}{p - \pi + m + \frac{6 - k}{6} \mu}$$

so ist die Zeit des Anfangs und des Endes der

$$\begin{array}{rl} \text{partiellen Finsterniss} & = \vartheta \mp h\, e \operatorname{tg} \alpha' \\ \text{centralen} & = \vartheta \mp h\, e \operatorname{tg} \beta' \\ \text{totalen und ringförmigen} & = \vartheta \mp h\, e \operatorname{tg} \gamma' \\ \text{und die Zeit der Verfinsterung von k Zollen} & = \vartheta \mp h\, e \operatorname{tg} \delta' \end{array}$$

In dem Werthe von Cos γ' wird das obere Zeichen von

$$\pm (m - \mu)$$

für totale, das untere für ringförmige Finsternisse genommen. Endlich ist die grösste Verfinsterung

$$= \frac{6}{\mu} (p - \pi + m + \mu - e)$$

Zolle, deren der Halbmesser der Sonne sechs hat.

Als Beyspiel wollen wir die Sonnenfinsterniss des 1. April 1764 wählen, die auch Lalande, Dusejour, Delambre u. a. ihren Untersuchungen zu Grunde legten. Wählt man den Äquator, so ist nach den Tafeln

für $10^h\, 31'\, 8''$ wah. Z. Paris

$$\begin{array}{ll} \text{wah. Rectasc. } ☾ = a = & 10^\circ\, 55'\, 32''7 \\ \text{wah. Decl. } ☾ = d = & +\ 5^\circ\, 25'\, 23''0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \alpha = & 11^\circ\ 11'\ 6''9 \\ \delta = + & 4\ \ 48\ \ 52.4 \end{array}$$

und die stündlichen Bewegungen

$$\begin{array}{l} d\,a = 26'\, 23''.4 \\ d\,d = 14\ \ 4.4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} d\,\alpha = 2'\, 16''4 \\ d\,\delta = 0\ \ 57.7 \end{array}$$

$$p = 54' \; 8''1$$
$$\pi = \quad 8.5$$
$$m = 14 \; 46.9$$
$$\mu = 16 \; 0.8$$

Daraus folgt, wahre Zeit der Conjunction in Rectascension

$$t = 11^h \, 9' \, 52''2$$

und für diese Zeit ist

$$a = \alpha = 11^\circ \; 12' \; 35''0$$
$$d = \; 5 \; 34 \; 28.1$$
$$\delta = \; 4 \; 49 \; 29.6$$

$$n = 28^\circ \, 37' \, 52''1$$
$$e = 39.4756$$
$$\log h = 8.56283$$

$$(d - \delta) \, h \operatorname{Sin} n = 0^h. 78757$$

also Zeit der Mitte der Finsterniss

$$\vartheta = 10^h \, 22' \, 36''9$$

$$\alpha' = 62^\circ \; 15' \; 8''5$$
$$h e \operatorname{tg} \alpha' = 2^h \; 44' \; 32''2$$

$$\beta' = 43^\circ \; 1' \; 10''7$$
$$h e \operatorname{tg} \beta' = 1^h \; 20' \; 46''.4$$

Anf. der part. Finst.	7^h	38′	5″
Ende	13	7	9
Anf. der cent. Finst.	9	1	50
Ende	11	43	23

Grösste Verfinsterung 16.97 81 Zolle.

Die vorhergehenden Ausdrücke wird man sich aus §. 2 erklären, wenn man dabey folgendes bemerkt: der Halbmesser des Halbschattens ist

$$= m + \mu,$$

der des vollen Schattens

$$= m - \mu,$$

und der des ringförmigen

$$= \mu - m.$$

Daher ist für den Anfang und das Ende der partiellen Finsterniss die geocentrische Entfernung der Mittelpuncte der Sonne und des Mondes

$$= p - \pi + m + \mu,$$

für den Anfang der totalen Finsterniss aber ist diese Entfernung

$$= p - \pi + m - \mu.$$

Ist

$$m < \mu$$

so ist die Finsterniss ringförmig (§. 1). Ist aber

$$m = \mu$$

oder

$$m > \mu,$$

so ist sie total, ohne oder mit Dauer. Für den Anfang der centralen Finsterniss endlich ist jene Entfernung offenbar

$$= p - \pi$$

§. 4.

Scheinbare Finsternisse für einen gegebenen Ort der Erde.

Da man bey der Untersuchung, wie eine Sonnenfinsterniss oder eine Sternbedeckung vom Monde auf einem gegebenen Ort der Erde erscheinen wird, auf die Veränderung der Lage des Mondes und seiner scheinbaren Distanz von dem bedeckten Gestirne, die von der Lage des Beobachters gegen den Mittelpunct der Erde kömmt, oder auf die Parallaxe Rücksicht nehmen muss (§. 1.), so fordert die Auflösung dieser Aufgabe eigene Betrachtungen, mit welchen wir uns jetzt beschäftigen wollen.

Der Mittelpunct des Mondes werde gegen den der Erde durch drey rechtwinklichte Coordinaten

$$x \; y \; z$$

bestimmt, von denen x die beyden Mittelpuncte dieser Gestirne verbindet, und y mit dem Äquator parallel ist.

Um diese Coordinaten zu finden, bestimme man zuerst die Lage des Mittelpuncts des Mondes gegen den der Erde durch drey andere senkrechte Coordinaten

$$x' \; y' \; z'$$

von denen x' in dem Durchschnitte des Declinationskreises der Sonne mit dem Äquator, und x' y' in der Ebene des Äquators liegt, so ist

$$x' = r \operatorname{Cos} d \operatorname{Cos} (a - \alpha)$$
$$y' = r \operatorname{Cos} d \operatorname{Sin} (a - \alpha)$$
$$z' = r \operatorname{Sin} d$$

Denkt man sich aber durch die Axe der y' eine andere Ebene, deren Durchschnitt mit der Axe der x' einen rechten Winkel bildet, und die gegen die Ebene des Äquators unter dem Winkel δ = Decl. der Sonne geneigt ist, so werden die Coordinaten, welche die Lage des Monds gegen die Erde in Beziehung auf diese neue Ebene bestimmen, offenbar die vorhergehenden

$$x \; y \; z$$

seyn, und man wird haben

$$\begin{aligned} x &= x' \operatorname{Cos} \delta + z' \operatorname{Sin} \delta \\ y &= y' \\ z &= z' \operatorname{Cos} \delta - x' \operatorname{Sin} \delta \end{aligned}$$

daher hat man auch

$$\begin{aligned} x &= r\,[\operatorname{Sin} d \operatorname{Sin} \delta + \operatorname{Cos} d \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} (a-\alpha)] \\ y &= r \,.\, \operatorname{Cos} d \operatorname{Sin} (a-\alpha) \\ z &= r\,[\operatorname{Sin} d \operatorname{Cos} \delta - \operatorname{Cos} d \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Cos} (a-\alpha)], \end{aligned}$$

welche Ausdrücke sich durch Einführung einer Hilfsgrösse p bequemer machen lassen, indem man annimmt

$$\operatorname{tg} p = \frac{\operatorname{tg} d}{\operatorname{Cos} (a-\alpha)}$$

Auf eine ähnliche Weise wollen wir nun auch die Lage des Beobachters gegen den Mittelpunct der Erde bestimmen. Nennt man nähmlich φ die Polhöhe, s den Stundenwinkel, wo

$$s = \text{Rectasc. des Zeniths} - \alpha$$

ist, so findet man für die den vorigen parallelen Coordinaten des Beobachters ohne Mühe folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned} X &= R\,(\operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} \delta + \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} s) \\ Y &= R \,.\, \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} s \\ Z &= R\,(\operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} \delta - \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Cos} s) \end{aligned}$$

wo R die Entfernung des Beobachters vom Mittelpunct der Erde ist, und wo man wieder annehmen kann

$$\operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{Cos} s}$$

§. 5.

Wir wollen nun durch den Mittelpunct des Mondes eine Ebene legen, die parallel mit der Axe der y, oder senkrecht auf der Axe der x steht. Den Punct dieser Ebene, in welcher der Mittelpunct des Mondes ist, wollen wir mit L, den Punct, wo die Linie der x diese Ebene trifft, mit S, und den Punct, wo eine von dem Beobachter nach der Sonne gezogene Linie diese Ebene trifft, mit s bezeichnen. Wird der Punct s gegen S durch die der vorigen analogen Coordinaten v $\mathfrak{z}$ gegeben, so ist offenbar

$$\frac{v}{Y} = \frac{\rho - x}{\rho - X}$$

und

$$\frac{\zeta}{Z} = \frac{\rho - x}{\rho - X}$$

wo

$$r = \frac{R}{\operatorname{Sin} p}$$

und

$$\rho = \frac{R}{\operatorname{Sin} \pi}$$

Man hat daher, wenn man die Entfernung der Tafel vom Mittelpuncte der Erde, oder die Grösse r gleich der Einheit setzt

$$v = \frac{Y. (\operatorname{Sin} p - x \operatorname{Sin} \pi)}{\operatorname{Sin} p - X \operatorname{Sin} \pi}$$

$$\zeta = \frac{Z. (\operatorname{Sin} p - x \operatorname{Sin} \pi)}{\operatorname{Sin} p - X \operatorname{Sin} \pi}$$

Diess vorausgesetzt, ist es nun leicht, die Distanz der beyden Puncte L und s, das heisst, die gerade Linie anzugeben, welche den Mittelpunct der Sonne mit dem aus der Erde gesehenen Mittelpuncte des Mondes verbindet. Heisst diese Distanz Δ, so ist nähmlich

$$\Delta^2 = (y - v)^2 + (z - \zeta)^2 \ldots \text{(I.)}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{y - v}{z - \zeta}$$

so ist

$$\Delta = \frac{y - v}{\operatorname{Sin} \psi} = \frac{z - \zeta}{\operatorname{Cos} \psi}$$

I. Da man die Zeit des Anfangs und Endes der Finsterniss immer schon beynahe kennt, so kann man die Grössen

$$a - \alpha,\ d - \delta$$

so wie

$$p \text{ und } \pi$$

als sehr klein annehmen, wodurch sich die vorhergehenden Ausdrücke beträchtlich abkürzen lassen. Man findet so nach einigen leichten Reductionen

$$x = 1 - \tfrac{1}{2} (d - \delta)^2 - \tfrac{1}{2} (a - \alpha)^2 \operatorname{Cos}^2 \delta$$
$$y = (a - \alpha) \operatorname{Cos} \delta$$
$$z = (d - \delta) + \tfrac{1}{4} (a - \alpha)^2 \operatorname{Sin} 2 \delta$$

$$v = (p - \pi) \cdot \frac{Y}{p}$$

$$\zeta = (p - \pi) \cdot \frac{Z}{p}$$

Setzt man also wie oben

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{(a-\alpha).\operatorname{Cos}\delta - \left(\frac{p-\pi}{p}\right) Y}{(d-\delta) + \frac{1}{4}(a-\alpha)^2 \operatorname{Sin} 2\delta - \left(\frac{p-\pi}{p}\right) Z}$$

so ist

$$\Delta = \frac{(a-\alpha) \operatorname{Cos}\delta - \left(\frac{p-\pi}{p}\right). Y}{\operatorname{Sin}\psi} \quad \ldots \text{(II.)}$$

§. 6.

Aus dem Vorhergehenden lassen sich eine grosse Anzahl hierher gehörender Aufgaben auflösen, von denen wir einige der vorzüglichsten näher betrachten wollen.

I Für eine gegebene Zeit suche die scheinbare Distanz Δ' der Mittelpuncte der Sonne und des Mondes.

Ist für diese Zeit a d die Rectascension und Declination des Mondes, und α δ die der Sonne, so findet man die geocentrische Distanz Δ unmittelbar aus der Gleichung II. Da aber diese Linie sehr nahe senkrecht auf der Gesichtslinie des Beobachters steht, und ihre Entfernung von demselben

$$x - X$$

ist, so ist der Winkel, unter welchem der Beobachter jene Linie sieht

$$\Delta' = \frac{\Delta}{x-X}$$

oder nahe

$$\Delta' = \frac{\Delta}{1-X}$$

II. Es sey die scheinbare Entfernung Δ' gegeben, und die Zeit zu suchen, für welche diese Entfernung Statt hat.

Gewöhnlich ist diese Zeit der Anfang und das Ende der partialen oder der totalen Finsterniss, also Δ' im ersten Falle

$$= r + \rho$$

und im zweyten

$$= r - \rho$$

Da nun die Distanz Δ sowohl, als der Halbmesser des Monds m, wie er dem Beobachter erscheint, gleich

$$\frac{\Delta'}{x - X} \text{ und } \frac{m}{x - X}$$

ist, so hat man

$$\frac{\Delta}{x - X} = \frac{m}{x - X} \pm \mu$$

oder sehr nahe

$$\Delta = m \pm \mu \, (1 - X)$$

Setzt man daher in den vorhergehenden Gleichungen I. oder II. die Grösse Δ gleich

$$m \pm \mu \, (1 - X)$$

so erhält man durch zwey genäherte, willkührlich angenommene Zeiten leicht diejenige, welche der Bedingungsgleichung

$$\Delta = m \pm \mu \, (1 - X)$$

genug thut.

Einfachere Mittel, denselben Zweck zu erreichen, werden wir unten vortragen.

III. Sey d δ die Declination des Mondes und der Sonne für die Zeit t der wahren Conjunction in Rectascension. Man suche die scheinbare Distanz Δ' der Mittelpuncte für die Zeit

$$t + t'$$

(wo t' in Theilen der Stunde gegeben ist).

Um diese scheinbare Distanz zu finden, darf man nur oben in der Gleichung II.

$$t' \, (da - d\alpha)$$

für

$$(a - \alpha)$$

und

$$(d - \delta) + t' \, (dd - d\delta)$$

für

$$(d - \delta)$$

setzen, wodurch man also erhält

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{t' \, (da - d\alpha) \operatorname{Cos} \delta - \left(\frac{p - \pi}{p}\right) Y}{(d - \delta) + t' \, (dd - d\delta) - \left(\frac{p - \pi}{p}\right) Z}$$

$$\Delta' = \frac{t' \, (da - d\alpha) \operatorname{Cos} \delta - \left(\frac{p - \pi}{p}\right) Y}{(1 - X) \operatorname{Sin} \psi}$$

IV. Aus der Zeit t der wahren Conjunction in Rectascension die Zeit

$$t + t''$$

der scheinbaren Conjunction in Rectascension, und die Differenz D der scheinbaren Declinationen für diese Zeit

$$t + t''$$

finden.

Da (in III.)

$$\frac{Y}{p} = \text{Cos}\,\varphi\ \text{Sin}\,s$$

und

$$\frac{Z}{p} = \text{Sin}\,\varphi\ \text{Cos}\,\delta - \text{Cos}\,\varphi\ \text{Sin}\,\delta\ \text{Cos}\,s$$

war, wo s den Stundenwinkel der Sonne für die Zeit t bezeichnete, so sey

$$\gamma = \frac{360}{\text{tägl. Revol.}\ (\odot)\ \text{in mit. Zeit}}$$

oder $\gamma\, t''$ die Zeit t'' auf Bogen gebracht, und man hat für die Zeit der scheinbaren Conjunction die Differenz der Rectascension (nach III.)

$$t''.\,(d\,a - d\,\alpha)\ \text{Cos}\,\delta - (p - \pi)\ \text{Cos}\,\varphi\ \text{Sin}\,(s + \gamma\, t'')$$

und da diese Differenz nach der Bedingung der Aufgabe verschwinden soll, so ist

$$t'' = \frac{(p - \pi)\ \text{Cos}\,\varphi\ \text{Sin}\,(s + \gamma\, t'')}{(d\,a - d\,\alpha)\ \text{Cos}\,\delta}$$

Hat man aus dieser Gleichung durch eine der bekannten Näherungsmethoden den Werth von t'' gefunden, so ist die Differenz der scheinbaren Declinationen zur Zeit $t + t''$ der scheinbaren Conjunction

$$D = d - \delta + t''\,(d\,d - d\,\delta)$$
$$- (p - \pi)\,[\text{Sin}\,\varphi\ \text{Cos}\,\delta - \text{Cos}\,\varphi\ \text{Sin}\,\delta\ \text{Cos}\,(s + \gamma\, t'')]$$

V. Aus der Zeit $t + t''$ der scheinbaren Conjunction und aus der Differenz D der scheinbaren Declinationen zu dieser Zeit suche die Neigung n der scheinbaren Bahn des Mondes gegen den Äquator, die kürzeste Distanz e, und die Zeit der Mitte der Finsterniss, so wie die Grösse derselben.

Da die Parallaxe der Rectascension

$$Y = p\ \text{Cos}\,\varphi\ \text{Sin}\,s$$

und die der Declination

$$Z = -p\,(\mathrm{Sin}\,\varphi\ \mathrm{Cos}\,\delta - \mathrm{Cos}\,\varphi\ \mathrm{Sin}\,\delta\ \mathrm{Cos}\,s)$$

ist, so sind ihre Änderungen

$$d\,Y = p ds\,.\,\mathrm{Cos}\,\varphi\ \mathrm{Cos}\,s$$
$$d\,Z = p ds\,.\,\mathrm{Cos}\,\varphi\ \mathrm{Sin}\,\delta\,.\mathrm{Sin}\,s$$

wo man

$$d\,s = \gamma\ \mathrm{Sin}\,1''$$

setzen kann. Daraus folgt die scheinbare stündliche Bewegung in Ascension

$$f = (d a - d\alpha)\ \mathrm{Cos}\,\delta - d\,Y$$

und in Declination

$$g = (d\,d - d\,\delta) - d\,Z,$$

also auch die Neigung der relativen Bahn

$$\mathrm{tg}\,n = \frac{g}{f}$$

und die kürzeste Distanz

$$e = D\,.\,\mathrm{Cos}\,n$$

Da endlich die stündliche scheinbare Bewegung in der relativen Bahn selbst

$$\sqrt{f^2 + g^2} = \frac{f}{\mathrm{Cos}\,n}$$

ist, und da das Stück der Bahn zwischen der scheinbaren Conjunction und der Mitte der Finsterniss

$$D\ \mathrm{Sin}\,n$$

ist, so ist die Zeit der Mitte der Finsterniss

$$t + t'' + \frac{D}{f}\ \mathrm{Sin}\,n\ \mathrm{Cos}\,n$$

und die Grösse derselben in Zollen (wo ein Zoll gleich $\frac{\mu}{6}$ ist)

$$\frac{6}{\mu}\left(\mu + \frac{r - g\ \mathrm{Cos}\,n}{1 - X}\right)$$

VI. Aus der Zeit $t + t''$ der scheinbaren Conjunction und der Grösse D (N. IV.) suche die Zeit

$$t + t'' + t'''$$

einer jeden gegebenen scheinbaren Distanz Δ'.

Diese Aufgabe, von welcher wir schon eine Auflösung in N. III. angezeigt haben, lässt sich zum Gebrauche bequemer auf folgende Art auflösen.

Ist $90 - \psi$ der Winkel dieser scheinbaren Distanz mit dem Äquator, so ist

$$\mathrm{Cos}\ \psi = \frac{D}{\Delta'}.$$

Kennt man aber diesen Winkel, so ist offenbar der Theil der scheinbaren Bahn, zwischen dieser Distanz und dem Puncte der Mitte der Finsterniss, gleich

$$\frac{\Delta'.\ \mathrm{Sin}\ (\psi - n)}{\mathrm{Cos}\ n}$$

also hat man

$$t''' = \Delta'\ \frac{\mathrm{Sin}\ (\psi - n)}{f}$$

und

$$t''' \text{ zu } t + t''$$

addirt, gibt die gesuchte Zeit.

Sucht man daher die Zeit t des Anfangs und Endes der Finsterniss, so ist für diese Zeit

$$\Delta' = \mu + \frac{m}{1 - X}$$

Sucht man also ψ aus

$$\mathrm{Cos}\ \psi = \frac{D}{\Delta'}$$

so ist die gesuchte Zeit

$$T = t + t'' \pm \frac{\Delta'\ \mathrm{Sin}\ (\psi - n)}{f}$$

VII. Man suche den Punct der Peripherie der Sonne, wo die Berührung beyder Ränder zur Zeit des Anfangs und Endes der Finsterniss Statt hat.

Es war

$$\frac{Z}{\mathrm{Sin}\ p} = \mathrm{Sin}\ \varphi\ \mathrm{Cos}\ \delta - \mathrm{Cos}\ \varphi\ \mathrm{Sin}\ \delta\ \mathrm{Cos}\ s$$

in welchem Ausdrucke man für s den Stundenwinkel der Sonne für die Zeit des Anfangs oder des Endes nimmt. Ist dann v der Winkel des Declinationskreises mit dem Verticalkreise der Sonne, so ist

$$\mathrm{tg}\ v = \frac{\mathrm{Cos}\ \varphi\ \mathrm{Sin}\ s}{Z}.\ \mathrm{Sin}\ p = \frac{Y}{Z}$$

Die Parallaxe der Declination aber ist gleich Z. Sind daher wieder d, δ die wahren Declinationen für die Zeit der wahren

Conjunction, so ist die Differenz der scheinbaren Declinationen für den Anfang und das Ende der Finsterniss

$$(d - \delta) + (d\,d - d\,\delta) \,.\, \vartheta - Z$$

wo ϑ die Zeit zwischen der wahren Conjunction und dem Anfang oder Ende der Finsterniss ist. Heisst daher u der Winkel des Declinationskreises der Sonne mit der Distanz der Mittelpuncte, und ist

$$\Delta' = \mu + \frac{m}{1 - X},$$

so hat man

$$\text{Cos } u = \frac{(d - \delta) + (d\,d - d\,\delta)\,\vartheta - Z}{\Delta}$$

also ist

$$(u - v)$$

der Winkel, welchen die Distanz Δ' der Mittelpuncte bey der Berührung beyder Körper mit dem Vertikalkreise der Sonne bildet.

§. 7.

Das Vorhergehende enthält die Auflösung der vorzüglichsten hierher gehörenden Aufgaben. Da sie aber aus etwas zusammen gesetzten Betrachtungen abgeleitet sind, und zur Ausübung noch nicht alle gewünschte Bequemlichkeit haben, so wollen wir noch eine andere Auflösung geben, welche von diesen Nachtheilen frey ist.

Da man immer die Zeit des Anfangs und des Endes der Finsterniss schon beynahe kennt, so sey T die genäherte Zeit des Anfangs, und $T_{,}$ die des Endes.

Für die Zeit T suche man

$a \; d \; m \; p$ für den wahren Ort des Mondes
$\alpha \; \delta \; \mu \; \pi$ für den wahren Ort der Sonne.

Für die Zeit $T_{,}$ seyen dieselben Grössen

$a_{,} \; d_{,}$ etc.
$\alpha_{,} \; \delta_{,}$

Für diese beyden Zeiten berechne man nun die von der Parallaxe afficirten oder **scheinbare** Orte des Mondes und der Sonne

$a' \; d' \; \alpha' \ldots$ für die Zeit T

und

$a'_{,} \; d'_{,} \; \alpha'_{,} \ldots$ für die Zeit $T_{,}$

Diess vorausgesetzt, suche man für die Zeit T die Grössen

$$A = (a' - \alpha') \text{ Cos } \delta$$
$$D = d' - \delta'$$

und für die Zeit $T_{,}$ die Grössen

$$A_{,} = (a'_{,} - \alpha'_{,}) \text{ Cos}_{,} \delta$$
$$D_{,} = d'_{,} - \delta'_{,}$$

Daraus folgt für die zusammengesetzte oder relative stündliche Bewegung in scheinbarer Rectascension

$$f = \frac{(A_{,} - A) \text{ Cos } \delta}{T_{,} - T}$$

und in Declination

$$g = \frac{D_{,} - D}{T_{,} - T}$$

Es sey nun die verbesserte Zeit des Anfangs

$$T + t$$

und des Endes

$$T_{,} + t_{,}$$

so findet man diese Grössen

$$t \quad t_{,}$$

aus folgenden Gleichungen

$$(m'_{,} \pm \mu')^2 = (A + ft)^2 + (D + gt)^2$$
$$(m'_{,} \pm \mu'_{,})^2 = (A_{,} + ft_{,})^2 + (D_{,} + gt_{,})^2$$

Jede dieser zwey Gleichungen gibt einen doppelten Werth von

$$t \text{ und } t_{,}$$

von denen man eigentlich den kleineren wählen soll, da nach der Voraussetzung der Zeiten

$$T \text{ und } T_{,}$$

schon nahe richtig sind.

Begnügt man sich mit einer geringern Genauigkeit, wie diess bey diesen Rechnungen gewöhnlich der Fall ist, die man bloss unternimmt, um auf die Beobachtungen zur rechten Zeit aufmerksam zu machen, so kann man auch mit einer einzigen der beyden letzten Gleichungen hinreichen. Nimmt man z. B. die erste, so gehört von dem doppelten Werthe von t der eine für den Anfang, und der andere für das Ende.

Das obere Zeichen in den ersten Gliedern dieser Gleichungen gehört für die äusseren, das untere für die inneren Berührungen.

Dieselben Ausdrücke lassen sich auch auf die Ekliptik anwenden, wenn

$$a_, \ \alpha$$

die Länge,

$$d_, \ \delta = 0$$

die Breite bezeichnet; auch gelten diese Ausdrücke für Sternbedeckungen vom Monde, für welche man

$$\mu = 0$$

setzt. Endlich kann man für die scheinbaren Orte

$$\alpha' \ \delta' \ \alpha'_, \ \delta'_,$$

der Sonne ohne Nachtheil diese wahren Grössen

$$\alpha \ \delta \ \alpha_, \ \delta_,$$

setzen, da der Werth von π nur acht Secunden beträgt. Übrigens werden die Grössen

$$A \ D \ m \ \mu$$

in gleichem Masse, z. B. in Minuten und deren Theilen angegeben, die Grösse

$T_, - T$ aber, so wie t und $t_,$

sind in Stunden und deren Theilen auszudrücken.

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichungen endlich kann durch eine der bekannten indirecten Methoden geschehen. Wählt man aber eine directe Auflösung, so sey

$$\operatorname{tg} x = \frac{g}{f}$$

und

$$P^2 = (m \pm \mu)^2 - A^2 - D^2$$

$$Q = A \operatorname{Cos} x + D \operatorname{Sin} x$$

und endlich

$$\operatorname{tg} y = \frac{P}{Q}$$

Diess vorausgesetzt, hat man für den einen Werth von t

$$t = \frac{P}{d} \operatorname{Sin} x \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} y,$$

und für den andern

$$t = \frac{P}{d} \operatorname{Sin} x \operatorname{tg} (90 + \tfrac{1}{2} y)$$

Noch ist übrig, die Grösse der Finsterniss, und den Ort der Berührung zu finden.

Die Zeit zwischen Anfang und Ende ist

$$(T_{,}+t_{,})-(T+t),$$

und da die stündliche relative scheinbare Bewegung in der Bahn

$$\sqrt{f^2+g^2}$$

ist, so ist das Stück der Bahn, welches der Mittelpunct des Mondes zwischen Anfang und Ende durchläuft,

$$\{(T_{,}+t_{,})-(T+t)\}\cdot\sqrt{f^2+g^2}.$$

Die Hälfte dieses Stückes, mit der Entfernung

$$m+\mu$$

und dem Lothe R aus dem Mittelpuncte der Sonne auf die scheinbare Bahn des Mondes, bildet ein geradlinichtes rechtwinklichtes Dreyeck, in welchem man hat

$$R^2=(m+\mu)^2-\tfrac{1}{4}\{(T_{,}+t_{,})-(T+t)\}^2\cdot(f^2+g^2)$$

Kennt man so R, so ist die Grösse der Finsterniss in Zollen

$$\frac{6}{\mu}(\mu+m'-R).$$

Ist ferner v der Winkel des Declinationskreises mit dem Scheitelkreise, so ist (§. 6. VII)

$$\text{tg } v=\frac{\text{Sin } s}{\text{tg }\varphi\text{ Cos }\delta-\text{Sin }\delta\text{ Cos } s}$$

und ist $d'-\delta'$ die Differenz der scheinbaren Declination zur Zeit des Anfangs und Endes, und u der Winkel des Declinationskreises mit der Linie, welche die scheinbaren Mittelpuncte der Sonne und des Mondes verbindet, so ist

$$\text{Cos } u=\frac{d'-\delta'}{m'+\mu'}$$

also ist der Winkel des Vertikalkreises mit der Linie, welche die scheinbaren Mittelpuncte verbindet, gleich

$$u-v$$

und der Berührungspunct ist östlich oder westlich vom Scheitelkreise, wenn

$$u-v$$

negativ oder possitiv ist.

Um das Vorhergehende auf ein Beyspiel anzuwenden, wollen wir die Sonnenfinsterniss des Jahrs 1797 wählen.

Für Krakau ist beynahe

Anfang der Finsterniss, 24. Junius 6^h $0'$ Abends m. Z. Krakau.
Ende .... 7^h $30'$
die geocentrische Polhöhe $\varphi = 49^\circ\ 53'\ 44''$
die scheinbare Schiefe der Ekliptik $23^\circ\ 27'\ 59''$

Die Elemente der Tafeln sind

		$6^h\ 0'$ m. Z. Kr.				$7^h\ 30'$		
wahre Länge ☉		93°	30′	0″		93°	33′	35″
Horiz. Parallaxe ☉	π			8″6				8.6
Halbmesser ☉	μ		15	45.5			15	45.5
wahre Länge ☾		93	37	26		94	33	.37
wahre Breite ☾		+1	0	29		1	5	32
Horiz. Parall. ☾ für Krakau	p		60	43			60	44
Horiz. Halbmesser ☾	m		16	36			16	36
Rectasc. des Zeniths		185	17	51		205	51	38
wahre Rectasc. ☾	a	93	58	48	$a_{,}$	95	0	39
wahre Decl. ☾	d	24	25	28	$d_{,}$	24	28	45
scheinb. Rectasc. ☾	a′	93	15	51	$a'_{,}$	94	20	39
scheinb. Decl. ☾	d′	23	43	6	$d'_{,}$	23	40	38
Vergrösserter Halbmesser ☾	m′		16	42	$m'_{,}$		16	42
scheinb. Rectasc. ☉	α'	93	48	53	$\alpha'_{,}$	93	52	47
scheinb. Decl. ☉	δ'	+23	25	12	$\delta'_{,}$	23	5	6

Ist daher

$$T = 6.0$$

und

$$T_{,} = 7.5$$

so ist

$$A = -\ 33'.033 \ \text{Cos}\ 23^\circ\ 30' = -\ 30'.293$$

$$D = +\ 17.900$$
$$A_{,} = 25.556$$
$$D_{,} = 15.533$$

$$f = \frac{55.849}{\frac{3}{2}} = 37.233$$

und

$$g = -\ 1.578$$

Also jene zwey Gleichungen

$$(32.450)^2 = (-30.293 + 37.233\ t)^2 + (17.900 - 1.578\ t)^2$$
$$(32.450)^2 = (25.556 + 37.233\ t_{,})^2 + (15.533 - 1.578\ t_{,})^2$$

Die erste gibt

$$t = 0^h0844 = 0^h\ 5'\ 4''$$
$$T = 6$$

verbesserten Anfang $T + t = 6^h\ 5'\ 4''$

Die zweyte gibt eben so

$$t_{,} = 0^h.0807 = 0^h\ 4'\ 50''$$
$$T_{,} = 7\ 30$$
$$\text{verbessertes Ende } T_{,} + t_{,} = 7^h\ 34'\ 50''$$

Weiter ist

$$\frac{(T_{,}+t_{,}) - (T+t)}{2} = 0.74805$$

und

$$f^2 + g^2 = 1388.786$$

also

$$R = 16.60$$

und Grösse der Verfinsterung

$$6.04$$

Zolle.

I. Ist man bereits im Besitz der Werthe von

$$A \text{ und } A_{,}$$

von

$$D \text{ und } D_{,}$$

so kann man, die Auflösung der quadratischen Gleichungen zu vermeiden, auch so verfahren. Man nehme

$$p^2 = A^2 + D^2$$
$$q^2 = A_{,}^2 + D_{,}^2$$

und

$$P^2 = (A_{,} - A)^2 + (D_{,} - D)^2$$

und endlich

$$h = \frac{P}{T_{,} - T}$$

so ist das Loth, welches wir oben R nannten,

$$R = \frac{1}{2P} \cdot \sqrt{(P+p+q)(P+p-q)(P+q-p)(p+q-P)}$$

und daraus sofort die Zeit der Mitte

$$\vartheta = T + \frac{1}{h} \cdot \sqrt{p^2 - R^2}$$
$$= T_{,} + \frac{1}{h} \cdot \sqrt{q^2 - R^2}$$

und die Zeit des Anfangs und Endes

$$= \vartheta \pm \frac{1}{h} \cdot \sqrt{(m' \pm \mu)^2 - R^2}$$

Man wird sich aber diese Ausdrücke leicht erklären, wenn (Fig. 6) D, L den Mittelpunct des Mondes im Anfang und Ende der Finsterniss, und A den Mittelpunct der Sonne bezeichnet, und man aus A die AB senkrecht auf die relative Bahn DL zieht, und

$$AD = p,\ AL = q,\ DL = P$$

und

$$AB = R$$

setzt. Für unser Beyspiel ist

$$\begin{aligned} p &= 35.186 \\ q &= 29.906 \\ P &= 55.899 \\ h &= 37.266 \end{aligned}$$

also

$$R = 16.60$$

wie zuvor. Weiter hat man

$$\frac{1}{h} \cdot \sqrt{p^2 - R^2} = \frac{31.024}{h} = 0^h\ 49'\ 57''$$

$$\frac{6 \qquad\qquad}{\text{Zeit der Mitte} = \vartheta = 6^h\ 49'\ 57''}$$

$$\frac{1}{h} \sqrt{(m' + \mu)^2 - R^2} = \frac{27.891}{h} = \begin{array}{r} 0^h\ 44'\ 54'' \\ 6\ \ 49\ \ 57 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Anfang} & 6^h\ 5'\ 3'' \\ \text{Ende} & 7\ \ 34\ \ 51 \text{ wie zuvor.} \end{array}$$

§. 8.

Die bisher vorgetragenen Methoden sind ganz genau, vorausgesetzt, dass man das Stück der Bahn zwischen Anfang und Ende als eine gerade Linie betrachten kann. Aber die doppelte Berechnung des scheinbaren Ortes macht sie zur Ausübung nicht bequem.

Da es meistens nur um genäherte Resultate zu thun ist, so wird folgende Methode, welche jener Vorwurf nicht trifft, häufig ihre Anwendung finden.

Da die Parallaxe der Ascension $= -Y$ (§. 5) und die der Declination $= -Z$ ist, so ist für die Zeit T, für welche der Stundenwinkel der Sonne s seyn soll, die Differenz der scheinbaren Rectascension

$$= a - \alpha - (p - \pi)\,\frac{\text{Cos}\,\varphi\ \text{Sin}\,s}{\text{Cos}\,\delta}$$

und die Differenz der scheinbaren Declination

$$= d - \delta - (p - \pi)\,(\text{Sin}\,\varphi\ \text{Cos}\,\delta - \text{Cos}\,\varphi\ \text{Sin}\,\delta\ \text{Cos}\,s)$$

Differentiirt man diese Ausdrücke, und bemerkt, dass für eine Stunde

$$ds = 15°$$

also

$$\mathrm{Sin}\, ds = 0.2588$$

ist, wenn die Sonne keine Bewegung in Rectascension hätte, was in den zweyten Theilen dieser Ausdrücke angenommen werden kann, da sie in die sehr kleine Grösse

$$(p' - \pi)$$

multiplicirt sind, so wird man erhalten,

stündl. Veränderung der Differenz der scheinbaren Ascensionen

$$= da - d\alpha - 0.2588\,(p - \pi)\,\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi\;\mathrm{Cos}\,s}{\mathrm{Cos}\,\delta}$$

stündl. Veränderung der Differenz der scheinbaren Declinationen

$$= dd - d\delta - 0.2588\,(p - \pi)\,\mathrm{Cos}\,\varphi\;\mathrm{Sin}\,\delta\;\mathrm{Sin}\,s$$

Setzt man also der Kürze wegen, wie vorhin

$$\begin{aligned} A &= (a - \alpha)\,\mathrm{Cos}\,\delta - (p - \pi)\,\mathrm{Cos}\,\varphi\;\mathrm{Sin}\,s \\ D &= (d - \delta) - (p - \pi)\,(\mathrm{Sin}\,\varphi\;\mathrm{Cos}\,\delta - \mathrm{Cos}\,\varphi\;\mathrm{Sin}\,\delta\;\mathrm{Cos}\,s) \\ f &= (da - d\alpha)\,\mathrm{Cos}\,\delta - 0.2588\,(p - \pi)\,\mathrm{Cos}\,\varphi\;\mathrm{Cos}\,s \\ g &= (dd - d\delta) - 0.2588\,(p - \pi)\,\mathrm{Cos}\,\varphi\;\mathrm{Sin}\,\delta\;\mathrm{Sin}\,s \end{aligned}$$

und ist die verbesserte Zeit des Anfangs oder Endes

$$= T \pm t,$$

so hat man die doppelten Werthe von t aus der Gleichung

$$(m' \pm \mu)^2 = (A + ft)^2 + (D + gt)^2$$

wo man nach den vorhergehenden

$$m' = \frac{m}{1 - X}$$

hat.

In unserm Beyspiele sey

$$T = 6^h\,45'$$

so ist für diese Zeit

$$\begin{aligned} a &= 94°\ 29'\ 44'' \\ d &= 24\ \ 27\ \ \ 6 \\ \alpha &= 93\ \ 50\ \ 50 \\ \delta &= 23°\ 25'\ \ 9'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} da &= 41'.230 \\ dd &= 2.198 \\ d\alpha &= 2.600 \\ d\delta &= -0.067 \end{aligned}$$

woraus man findet

$$
\begin{aligned}
A &= -2.873\\
D &= 16.42\\
f &= 37.144\\
g &= -1.721\\
m' &= 16.70\\
\mu &= 15.76
\end{aligned}
$$

also auch

$$
\begin{aligned}
(32.46)^2 = {} & (-2.873 + 37.144\,t)^2\\
& + (16.42 - 1.721\,t)^2.
\end{aligned}
$$

und diese Gleichung gibt

$$
\begin{array}{lll@{\qquad}lll}
t = & 0^h\ 51'.0 & \text{und} & t = - & 0^h\ 39'.5\\
 & 6\ \ 45.0 & & & 6\ \ 45.0\\
\hline
\text{Ende} & 7^h\ 36' & & \text{Anfang} & 6^h\ \ 5.5
\end{array}
$$

für eine blosse Anzeige nahe genug mit den vorhergehenden genauern Methoden übereinstimmend.

Ähnliche Ausdrücke wird man leicht finden, wenn man dem Äquator die Ekliptik substituirt, daher ich mich hier weiter nicht dabey aufhalte. M. s. Berl. Ephemeriden f. d. J. 1782. Eine andere Methode s. m. Berl. Jahrb. 1791 p. 243 et 1792. p. 193 et 1798. p. 128 et 1802. p. 93.

§. 9.

Die in dem vorhergehenden §. gegebene Auflösung unserer Aufgabe ist unter allen die einfachste und zur Ausführung bequemste. Wenn aber der Anfang und das Ende einer Finsterniss, wie diess öfters der Fall ist, für viele Orte der Erde gesucht wird, so lässt sich die oft zu wiederholende, und dadurch doch sehr zeitraubende Berechnung nach §. 8 auf folgende Weise umgehen.

Setzt man in der letzten Gleichung des vorhergehenden §. die Grösse g gleich Null, da sie in der That selten beträchtlich ist, so hat man, wenn man für eine Zeit T die Grössen

$$A\ D\ f$$

berechnet hat, für die verbesserte Zeit ϑ des Anfangs oder des Endes

$$\vartheta = \frac{T + (-A + \sqrt{(m'+\mu)^2 - D^2})}{f}$$

Für einen zweyten Ort wird dieselbe absolute Zeit T bloss durch die Meridiandifferenz beyder Orte verschieden seyn. Wir wollen sie T' nennen, und eben so die übrigen Grössen

$$A\ D\ f$$

für diesen zweyten Ort durch

$$A'\ D'\ f'$$

bezeichnen. Dann wird also die corrigirte Zeit des Anfangs oder Endes, für diesen zweyten Ort in der Zeit dieses zweyten Ortes ausgedrückt, folgende seyn

$$\vartheta' = T' + \frac{(-A' + \sqrt{(m'+\mu)^2 - D'^2})}{f'}$$

Ist nun die geographische Länge und Breite des ersten Ortes

$$\lambda\ \varphi$$

und des zweyten

$$\lambda'\ \varphi',$$

und substituirt man in den vorhergehenden Ausdrücken von

$$\vartheta \text{ und } \vartheta'$$

die in §. 8 gegebenen Werthe von

$$A\ D\ f$$

und

$$A'\ D'\ f'$$

und entwickelt die Grösse

$$\vartheta' - \vartheta = T' - T - \left(\frac{A'}{f'} - \frac{A}{f}\right)$$

$$+ \frac{\sqrt{(m'+\mu)^2 - D'^2}}{f'} - \frac{\sqrt{(m'+\mu)^2 - D^2}}{f}$$

so ist

$$T' - T = \lambda' - \lambda$$

und da

$$s' - s$$

auch nahe gleich

$$\lambda' - \lambda$$

ist, so wird auch

$$\frac{A'}{f'} - \frac{A}{f}$$

nahe gleich

$$\lambda' - \lambda$$

werden, vorausgesetzt, dass man $\varphi' = \varphi$ setzen darf, und dasselbe wird man bey den zwey letzten Gliedern dieser Gleichung finden.

Man wird also annähernd

$$\vartheta' - \vartheta = F \,.\, (\lambda' - \lambda)$$

haben, wo F eine sehr nahe constante Grösse ist. Sind aber auch beyde Orte in der Polhöhe beträchtlich verschieden, so wird man

$$\varphi' - \varphi$$

nicht mehr vernachlässigen können, und daher statt dem oben gegebenen Ausdruck von

$$\vartheta' - \vartheta$$

einen genäherten finden, der die Form hat

$$\vartheta' - \vartheta = F \, . \, (\lambda' - \lambda) + G \, (\varphi' - \varphi)$$

wo F und G nahe constante Grössen sind. Wollte man die Annäherung noch weiter treiben, so würde man auch auf die höheren Potenzen dieser Differenzen Rücksicht nehmen, wodurch man einen Ausdruck der Form

$$\begin{aligned} \vartheta' - \vartheta = F \, . \, (\lambda' - \lambda) + G \, . \, (\varphi' - \varphi) \\ + H \, (\lambda' - \lambda)^2 + I \, . \, (\varphi' - \varphi)^2 + \ldots \end{aligned}$$

erhalten würde. Wir wollen hier, wo es um blosse genäherte Angaben zu thun ist, uns mit den ersten Potenzen dieser Unterschiede begnügen.

Um daher diese Betrachtungen auf die Auflösung unserer Aufgabe anzuwenden, setze ich voraus, dass man für drey Orte, deren geographische Längen

$$\lambda \;\; \lambda' \;\; \lambda''$$

und Breiten

$$\varphi \;\; \varphi' \;\; \varphi''$$

sind, die Zeit des Anfangs oder des Endes der Finsterniss, jede in der Zeit ihres Ortes ausgedrückt berechnet habe. Diese Zeiten sollen in derselben Ordnung

$$t \;\; t' \;\; t''$$

heissen. Diess vorausgesetzt, hat man nach den vorhergehenden

$$\begin{aligned} t' - t = A \, (\lambda' - \lambda) - B \, (\varphi' - \varphi) \\ t'' - t = A \, (\lambda'' - \lambda) - B \, (\varphi'' - \varphi) \end{aligned}$$

und diese beyden Gleichungen reichen hin, die Grössen A und B zu bestimmen. Es ist nämlich

$$A = \frac{t \, (\varphi'' - \varphi') - t' \, (\varphi'' - \varphi) + t'' \, (\varphi' - \varphi)}{\lambda \, (\varphi'' - \varphi') - \lambda' \, (\varphi'' - \varphi) + \lambda'' \, (\varphi' - \varphi)}$$

$$B = \frac{t \, (\lambda'' - \lambda') - t' \, (\lambda'' - \lambda) + t'' \, (\lambda' - \lambda)}{\lambda \, (\varphi'' - \varphi') - \lambda' \, (\varphi'' - \varphi) + \lambda'' \, (\varphi' - \varphi)}$$

Es sey nun für irgend einen vierten Ort Λ die geographische Länge und Φ die Breite, und die noch unbekannte Zeit des Anfangs oder des Endes der Finsterniss gleich T, so hat man

$$T - t = A(\varDelta - \lambda) - B(\Phi - \varphi)$$

oder auch

$$T = A \cdot \varDelta - B\,\Phi + \tfrac{1}{3}[t + t' + t'' - A(\lambda + \lambda' + \lambda'') + B(\varphi + \varphi' + \varphi'')]$$

und da in dem zweyten Theile dieser Gleichung alles bekannt ist, so ist auch T gegeben.

Es wäre zu wünschen, dass diejenigen Astronomen, die sich mit der Vorausbestimmung dieser Erscheinungen in den Ephemeriden beschäftigen, jeder Finsterniss oder Sternbedeckung die letzte Gleichung hinzufügten, wodurch jeder in den Stand gesetzt wird, die Umstände dieser Erscheinungen sofort und ohne alle Mühe für seinen Beobachtungsort zu finden. Für Deutschland möchten dazu die drey Sternwarten von Königsberg, Gotha und Tübingen sehr gelegen seyn. Hat man für sie die drey Ein- oder Austritte $t\ t'\ t''$ berechnet, so sind die beyden Constanten

$$A = 2.0963\,(t'' - t) - 5.5627\,(t' - t)$$
$$B = 0.0961\,(t'' - t) - 0.6586\,(t' - t)$$

und die gesuchte Gleichung

$$T = A\,(\varDelta - 0.7397) - B\,(\Phi - 51.391) + \frac{t + t' + t''}{3}$$

Um das Vorhergehende auf die grosse Sonnenfinsterniss des 7. Septembers 1820 anzuwenden, hat man aus den Tafeln

wah. Z. Paris	wah. a☾	wah. d☾
11^h ..	164° 58′ 1″ ..	7° 22′ 42″
1^h ..	165 50 44 ..	6 55 2
3^h ..	166 43 19 ..	6 27 17
5^h ..	167 35 47 ..	5 59 26

wah. α☉	wah. δ☉
165° 53′ 33″ ..	6° 2′ 23″
165 58 4 ..	6 0 31
166 2 34 ..	5 58 38
166 7 5 ..	5 56 45

Horiz. Parallaxe des Monds am Äquator

$$p = 53'\,55''5$$
$$\pi = 8.7$$
$$m = 14\ 43.1$$
$$\mu = 15\ 54.8$$

scheinb. Schiefe $= 23°\ 27'\ 56''$

Mit diesen Elementen findet man für

	Anfang		Ende	u — v
Berlin	$1^h 31' 55''$ wah. Zeit	...	$4^h 15' 39$	... 72°
Manheim	1 12 42	....	4 1 20	... 64
Wien	1 56 39	....	4 39 14	... 79

		λ	φ
Es ist aber für	Berlin	$= 0^h 736$	$= 52°.525$
	Manheim	0.409	49.488
	Wien	0.936	48.211

also hat man in wahrer Zeit dieser Orte

$$\text{Anfang } T = 1.3040\, \Lambda - 0.03504\, \Phi + 2.412$$
$$\text{Ende } T = 1,1023\, \Lambda - 0.04000\, \Phi + 5.550$$

und eben so aus Wien und Manheim, wenn man bloss zwey Orte nimmt, oder

$$B = 0$$

setzt

$$U - V = 28.463\, \Lambda + 52°.359$$

Daraus lassen sich nun ohne Mühe für alle von jenen drey Orten nicht zu entfernten Beobachtungsorte die Zeiten des Anfangs und des Endes, so wie die Winkel U — V berechnen. So erhält man z. B.

	Λ	Φ	Anf. w. Z.	Ende	U—V
Bremen......	$0^h.431$ ..	53°.077 ..	1^h 8' ..	$3^h 54'$ ..	64°
Göttingen....	0.505 ..	51.532 ..	1 16 ..	4 2 ..	67
Königsberg...	1.211 ..	54.714 ..	2 5 ..	4 41 ..	86
Prag	0.805 ..	50.088 ..	1 43 ..	4 26 ..	75
Seeberg......	0.560 ..	50.935 ..	1 22 ..	4 8 ..	68

§. 10.

Weg des Mondschattens bey Sonnenfinsternissen.

I. Um den Weg zu bestimmen, welchen der Schatten des Mondes bey einer Sonnenfinsterniss auf der Oberfläche der Erde zurücklegt, wollen wir die Ausdrücke des §. 4 wieder vornehmen. In diesen Ausdrücken haben wir die Entfernung r der Mittelpuncte der Erde und des Monds für die Einheit angenommen, hier aber wollen wir der grösseren Bequemlichkeit wegen die Grösse

$$r.\,\text{Sin}\,1'' = \frac{r.\pi}{180.60^2}$$

für die Einheit annehmen, wo π das Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser des Kreises ist. Da durch diese Annahme

$$R = r\,\text{Sin}\,p = p$$

wird, so hat man, wenn man die Bezeichnungen des §. 4. beybehält

$$x = \frac{\operatorname{Sin} d \operatorname{Sin} \delta + \operatorname{Cos} d \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} (a - \alpha)}{\operatorname{Sin} 1''}$$

$$y = \frac{\operatorname{Cos} d \operatorname{Sin} (a - \alpha)}{\operatorname{Sin} 1''}$$

$$z = \frac{\operatorname{Sin} d \operatorname{Cos} \delta - \operatorname{Cos} d \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Cos} (a - \alpha)}{\operatorname{Sin} 1''}$$

und diese Coordinaten geben die Lage des Mittelpuncts des Mondes gegen den der Erde. Weiter ist

$$X = p\,(\operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} \delta + \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} s)$$
$$Y = p\,.\operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} s$$
$$Z = p\,(\operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} \delta - \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Cos} s)$$

und diese Coordinaten geben die Lage des Beobachters gegen den Mittelpunct der Erde.

II. Da wir im Folgenden von den drey Coordinaten

$$x \cdot y \cdot z$$

nur die beyden letzten brauchen, so setze ich voraus, dass man für die ganze Dauer der Finsterniss, etwa von Stunde zu Stunde, eine Tafel der y und z entworfen habe. Für die oben angegebene Finsterniss des 7. Septembers 1820 findet man nach den dort mitgetheilten Elementen

wahre Zeit Paris	y	z
11^h	$-3304''.3$	$+4820''.7$
12	-1870.3	$+4046.3$
1	-436.6	$+3271.5$
2	$+996.6$	$+2496.2$
3	$+2429.2$	$+1720.6$
4	$+3861.1$	$+944.6$
5	$+5292.0$	$+168.1$

III. Betrachtet man nun durch die ganze Dauer der Finsterniss die Linie, welche der Mond auf unserer Projectionstafel (§. 5.) beschreibt, als eine gerade Linie, so ist es leicht, da wir (in II.) die Coordinaten dieser Linie für verschiedene Puncte schon besitzen, auch die Lage dieser Linie gegen die Projection des Äquators auf jener Tafel anzugeben.

Ist nähmlich n der Winkel, unter welchem jene Linie gegen die Projection des Äquators geneigt ist, und ist p′ die Ordinate, welche zu der Abscisse o gehört, so hat man, wenn man zwey der vorhergehenden Coordinaten yz und y′ z′ nennt,

$$\operatorname{tg} n = \frac{z' - z}{y' - y}$$

und

$$p' = z - y \text{ tg } n$$

Für unser Beyspiel ist

$$n = - 28^\circ\ 26'$$

und

$$p' = 3034''.5$$

IV. Das Vorhergehende setzt uns schon in den Stand, die vorzüglichsten der hierher gehörenden Aufgaben aufzulösen.

Man suche den Ort der Oberfläche der Erde, dessen Polhöhe φ und Ortszeit s gegeben ist, und der für diese Zeit eine gegebene Distanz Δ der Mittelpuncte der Sonne und des Mondes sieht.

Da φ und s gegeben ist, und δ wenigstens in einer ersten Näherung als constant angenommen werden kann, so sind auch aus I. die Grössen Y und Z, oder die Coordinaten gegeben, welche den Ort des Beobachters gegen den Mittelpunct der Erde bestimmen. Daraus, und aus der gegebenen Distanz der Mittelpuncte lassen sich aber, wie wir sogleich sehen werden, auch die Coordinaten y z des Mondes gegen den Mittelpunct der Erde bestimmen, und wenn man diese Werthe von y z mit denen vergleicht, welche in der Tafel Nr. II. gegeben sind, so erhält man die wahre Pariser Zeit, also, da s oder die Zeit des Orts gegeben ist, sofort auch die geographische Länge des Ortes.

Um aber die Grössen y z zu finden, sey B (Fig. 7) die Projection des Beobachters auf der Tafel, und

$$BP = q$$

das Loth von dieser Projection auf die Bahn des Mondes, so ist

$$AC = Y,\ CB = Z,$$
$$AP = p',\ BL = \Delta$$

und

$$AD = y,\ DL = z$$

also hat man

$$q = (p' - Z) \operatorname{Cos} n + Y \operatorname{Sin} n$$

Ist aber der Winkel

$$PLB = h$$

so ist

$$\operatorname{Sin} h = \frac{q}{\Delta}$$

also auch

$$y = Y + \Delta \operatorname{Cos} (h + n)$$
$$z = Z + \Delta \operatorname{Sin} (h + n)$$

in welchen Ausdrücken also

$$\text{Sin } h = \frac{(p' - Z) \text{ Cos } n + Y \text{ Sin } n}{\Delta}$$

ist.

Es ist klar, dass auf diese Art immer zwey Orte gefunden werden, da Sin h einen doppelten Werth von h gibt. Ist Sin h positiv, so liegt h im ersten oder zweyten Quadranten, wenn Δ wächst oder abnimmt; ist Sin m negativ, so liegt h im dritten oder vierten Quadranten, wenn Δ ab- oder zunimmt.

V. Eben so leicht lassen sich aus dem Vorhergehenden noch eine grosse Anzahl anderer Probleme auflösen, von welchen ich die vorzüglichsten anzeigen will.

Man suche den Ort der Erde, dessen Polhöhe φ gegeben ist, und der zu einer gegebenen Zeit s dieses Ortes den Anfang oder das Ende der Finsterniss sieht.

Um diesen Ort zu finden, darf man nur in den Ausdrücken der Nr. IV.

$$\Delta = \mu + \frac{m'}{x - X}$$

setzen, und von dem doppelten Werthe von h gehört der eine für den Anfang, der andere für das Ende.

VI. Man suche den Ort, dessen Polhöhe φ gegeben ist, und der den Anfang und das Ende der Finsterniss bey dem Aufgang oder Untergang der Sonne sieht.

Aus der gegebenen Polhöhe φ, und der Declination δ der Sonne, folgt der grösste Stundenwinkel s, der in diesem Orte beobachtet werden kann, durch die Gleichung

$$\text{Cos } s = - \text{tg } \varphi \text{ tg } \delta$$

Aus φ und s aber hat man, wie in IV. die Grössen Y Z, und daraus y z. Da endlich hier s durch seinen Cosinus zwey zwar gleiche, aber in ihren Zeichen entgegen gesetzte Werthe erhält, uud überdiess Sin h ebenfalls einen doppelten Werth von h gibt, so werden durch diese Auflösung vier Orte auf einmahl bestimmt.

VII. Den Ort der Erde finden, dessen Polhöhe gegeben ist, der zu einer gegebenen Ortszeit s eine grösste Phase, d. h. eine kleinste Distanz der Mittelpuncte sieht.

Aus IV. folgt, dass Δ am keinsten wird, wenn

$$h = 90$$

ist. Setzt man daher

$$\Delta = (p' - Z) \text{ Cos } n + Y \text{ Sin } n$$

so ist

$$y = Y - \Delta \operatorname{Sin} n$$
$$z = Z + \Delta \operatorname{Cos} n$$

Setzt man aber in diesen Ausdrücken

$$\Delta = \mu \pm \frac{m}{x-X}$$

so erhält man alle die Orte, welche bloss einen äusseren oder inneren Contact der Ränder sehen. Nimmt man aber nur die Hälfte, das Viertel u. f. dieses Werthes von Δ, so erhält man die Orte, welche eine grösste Finsterniss von 6, 3 Zollen u. f. sehen.

VIII. Den Ort der Erde finden, dessen Polhöhe gegeben ist, und der eine kleinste Distanz der Mittelpuncte bey Auf- oder Untergang der Sonne sieht.

Aus φ und δ findet man wieder s durch

$$\operatorname{Cos} s = - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$$

und daraus Y und Z, so wie y z, wie in VII.

IX. Den Ort der Erde finden, der zu einer gegebenen Zeit eine centrale Finsterniss hat.

Für diesen Ort ist

$$\Delta = 0$$

also

$$y = Y \text{ und } z = Z$$

Um einige dieser Auflösungen auf unser Beyspiel anzuwenden, suche man, nach IX. den Ort, dessen Polhöhe

$$50^\circ\ 27'$$

ist, und der zu seiner Ortszeit

$$2^h\ 45'$$

eine centrale Finsterniss sieht.

$$\varphi = 50^\circ\ 27'$$
$$s = 15(2^h\ 45') = 41^\circ\ 15'$$
$$p = 3235$$
$$\delta = 6^\circ\ 20$$

also

$$y = Y = 1358$$
$$z = Z = 2308$$

woraus durch die Tafel der Nr. II folgt.

Zeit Paris .... $= 2^h\ 15'$
also Länge des Orts von Paris $= 0^h\ 30'$
oder von Ferro .... $27^\circ\ 33'$

Eben so findet man für

$$\varphi = 45^\circ\, 8'$$

und

$$s = 3^h\, 15' = 48^\circ\, 45'$$

$$y = Y = 1716$$

und

$$z = Z = 2113$$

also

$$\begin{array}{lcr} \text{Zeit Paris} \ldots\ldots & = & 2^h\, 30' \\ \text{Länge von Paris} & = & 0^h\, 46' \\ \ldots\ldots\ldots \text{Ferro} & = & 31^\circ\, 23' \end{array}$$

Sucht man, nach VII. den Ort der Erde, der für die Polhöhe

$$7^\circ\, 16'$$

zu seiner Ortszeit

$$1^h\, 56'$$

die äussere Berührung der Ränder sieht, so ist

$$\begin{array}{l} \varphi = 7^\circ\, 16' \\ s = 29^\circ\, 0' \\ \Delta = m + \mu = 1838 \end{array}$$

also

$$\begin{array}{rr} Y = & 1556 \\ \Delta \operatorname{Sin} n = - & 876 \\ \hline y = & 2432 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} Z = & 97 \\ \Delta \operatorname{Cos} n = & 1616 \\ \hline z = & 1713 \end{array}$$

und daraus

$$\begin{array}{lcr} \text{Zeit Paris} \ldots\ldots & = & 3^h\, 0' \\ \text{Länge von Paris} & = & -\, 1^h\, 4' \\ \ldots\ldots\ldots \text{Ferro} & = & +\, 4^\circ\, 0' \end{array}$$

§. 11.

Man sieht, wie leicht sich durch die vorhergehende Methode die Orte der Erde finden lassen, die von irgend einem gegebenen Puncte des Mondschattens zu einer gegebenen Zeit getroffen werden. Zwar haben wir die Polhöhe dieses Ortes, und die Zeit desselben als gegeben vorausgesetzt; es ist aber nicht schwer, dieselben Aufgaben auch unter der Voraussetzung aufzulösen, dass bloss die Pariser Zeit gegeben, und daraus die Grössen φ und s gesucht werden. Da diess eigentlich die natürlichste Stellung der Aufgabe ist, so wollen wir noch zeigen, wie man diese aus den im Vorhergehenden gegebenen Auflösungen ableiten kann, und dazu die Aufgabe Nr. IV. wählen.

Für eine gegebene Pariser Zeit suche man den Ort der Erde, welcher irgend eine gegebene Distanz Δ der Mittelpuncte als grösste Phase sieht.

Da die Pariser Zeit gegeben ist, so ist auch y und z gegeben, also hat man für die Coordinaten des Beobachtungsortes

$$Y = y + \Delta \text{ Sin } n$$
$$Z = z - \Delta \text{ Cos } n$$

das heisst, man hat

$$\text{Cos } \varphi \text{ Sin } s = \left(\frac{a - \alpha}{p}\right) \text{Cos } d + \frac{\Delta}{p} \text{Sin } n$$

$$\text{Sin } \varphi \text{ Cos } \delta - \text{Cos } \varphi \text{ Sin } \delta \text{ Cos } s = \frac{d - \delta}{p} - \frac{\Delta}{p} \text{Cos } n$$

und aus diesen beyden Gleichungen kann man s und φ finden. Setzt man der Kürze wegen

$$Y'' = \frac{(a - \alpha) \text{ Cos } d + \Delta \text{ Sin } n}{p}$$

$$Z'' = \frac{d - \delta + \Delta \text{ Cos } n}{p \text{ Cos } \delta}$$

und substituirt man in der zweyten jener Gleichungen für Cos s den Werth dieser Grösse aus der ersten, oder

$$\text{Cos } s = \sqrt{1 - \frac{Y''^2}{\text{Cos}^2 \varphi}}$$

so erhält man für Sin φ den Ausdruck

$$\text{Sin } \varphi = Z'' \text{Cos}^2 \delta + \text{Sin } \delta \,.\, \sqrt{1 - Y''^2 - Z''^2 \text{ Cos}^2 \delta}$$

und ist so φ bekannt, so gibt die erste Gleichung

$$\text{Sin } s = \frac{Y''}{\text{Cos } \varphi}$$

§. 12.

Um den Ort der Oberfläche der Erde zu finden, der den Anfang oder das Ende der Finsterniss unter allen zuerst oder zuletzt sieht, bemerke man, dass dieser Ort die Sonne in seinem Horizonte sieht, und dass daher in der Tafel die Entfernung des Mittelpuncts des Mondes von der Projection des Mittelpuncts der Erde gleich

$$p - \pi + \mu + m'$$

ist. Setzt man diese Grösse für Δ in N. IV. §. 10, so hat man (Fig. 7) das Loth

$$A\,M = A\,P \text{ Cos } P\,A\,M$$

oder

$$A\,M = p' \text{ Cos } n,$$

also ist

$$\text{Sin } h = \frac{p' \text{ Cos } n}{p - \pi + \mu + m'}$$

und da

$$L A D = h + n,$$

so hat man für die Coordinaten

$$A D, D L$$

des Mondes

$$y = (p - \pi + \mu + m') \text{ Cos } (h + n)$$
$$z = (p - \pi + \mu + m') \text{ Sin } (h + n)$$

und diese Werthe von y und z geben durch die Tafel N. II. §. 10 die Pariser Zeit des allgemeinen Anfangs und Endes der Finsterniss für die ganze Erde; eine Aufgabe, welche wir schon §. 3 auf einem andern Wege aufgelöst haben.

Um nun noch die Orte der Oberfläche der Erde zu finden, hat man

$$Z = p \text{ Sin } (h + n)$$

und zugleich

$$Z = p (\text{Sin } \varphi \text{ Cos } \delta - \text{Cos } \varphi \text{ Sin } \delta \text{ Cos } s)$$

und endlich, da der gesuchte Ort die Sonne in seinem Horizonte sieht,

$$\text{Cos } s = - \text{tg } \varphi \text{ tg } \delta \quad .. \quad (a)$$

Subsituirt man den letzten Werth von Cos s in der vorletzten Gleichung, und setzt beyde Werthe von Z gleich, so ist

$$\text{Sin } \varphi = \text{Sin } (h + n) \text{ Cos } \delta$$

und da so φ bekannt ist, so findet man s aus der Gleichung (a).

Setzt man aber in diesen Ausdrücken für

$$p - \pi + \mu + m'$$

bloss die Grösse

$$p - \pi,$$

so erhält man die Orte, die den Anfang und das Ende der centralen Finsterniss unter allen zuerst und zuletzt sehen.

In unserm Beyspiele war

$$p = 3235$$
$$p' = 3034.5$$
$$\mu + m' = 1838$$
$$n = - 28^\circ 26$$

also gibt

$$\text{Sin } h = \frac{p' \text{ Cos } n}{p - \pi + \rho + \pi'}$$

$$h = 148^\circ\ 16'$$

und

$$h = 31^\circ\ 44'$$

Der erste Werth gibt

Anfang der allg. Finst. $11^h\ 33'\ 21''$ wah. Zeit Paris,
in dem Orte, dessen Breite $59^\circ\ 43'\ 15''$ Nord
Länge von Ferro $286^\circ\ 14'\ 13''$

Der zweyte Werth von h gibt

Ende der allgem. Finst. $= 4^h\ 49'\ 12''$
Breite $= 3^\circ\ 24'\ 35''$ Nord
Länge von Ferro $= 37^\circ\ 55'\ 51''$

Für die centrale Finsterniss ist

$$\text{Sin } h = \frac{p'}{p - \pi} \text{ Cos } n$$

also

$$h = 124^\circ\ 26'$$

und

$$h = 55^\circ\ 34'.$$

Der erste Werth von h gibt

Anf. der allgem. centr. Finst. $1^h\ 4'\ 42''$
Breite $81^\circ\ 40'\ 30''$ N.
Länge $227^\circ\ 49\ 40$

die zweyte aber gibt

Ende der allgem. centr. Finst. $3^h\ 18'\ 16''$
Breite $27^\circ\ 13'\ 22''$ N.
Länge $63\ 31\ 8$

In allem Vorhergehenden ist die Declination δ der Sonne während der Dauer der Finsterniss constant angenommen worden, so wie man die Abplattung der Erde vernachlässigt hat. Will man sich diese Voraussetzungen nicht erlauben, so kann man, nachdem man durch die vorhergehenden Methoden die Zeit und die geographische Lage des Beobachters annähernd bestimmt hat, dieselbe Rechnung wiederholen, indem man für δ diejenige Declination wählt, die für diese genäherte Zeit Statt hat, und indem man für φ die geocentrische Polhöhe des Orts, so wie für p die Parallaxe dieses Ortes nimmt.

§. 13.

Um diesen interessanten Gegenstand noch von einer andern Seite zu untersuchen, wollen wir uns durch den Mittelpunct der Erde eine Ebene senkrecht auf den Äquator, und zugleich senkrecht auf den in dem Äquator projicirten Radius Vector der Erde denken. Wenn man die heliocentrische Rectascension und Declination des Mondes kennt, so ist es leicht, den Punct der Tafel zu finden, wo für jede gegebene Zeit der Mittelpunct oder sonst ein anderer Punct des Mondschattens liegt. Kennt man aber die Lage dieses Punctes der Tafel gegen den Mittelpunct der Erde, der ebenfalls in dieser Tafel liegt, so lässt sich daraus ohne Mühe der Punct der Oberfläche der Erde bestimmen, durch welchen jener Punct des Schattens geht.

Heisst a′ d′ die heliocentrische Rectascension und Declination des Mondes, und r′ seine Entfernung von der Sonne, und behält man die Bedeutung der übrigen Zeichen nach dem Vorhergehenden bey, so hat man, wie man leicht sieht,

$$\mathrm{tg}\,(a' - \alpha) = \frac{r \,\mathrm{Cos}\, d \;\mathrm{Sin}\,(a - \alpha)}{r \,\mathrm{Cos}\, d \;\mathrm{Cos}\,(a - \alpha) - \rho \,\mathrm{Cos}\, \delta}$$

$$\mathrm{tg}\; d' = \frac{(r \,\mathrm{Sin}\, d - \rho \,\mathrm{Sin}\, \delta) \,\mathrm{Cos}\,(a' - \alpha)}{r \,\mathrm{Cos}\, d \,\mathrm{Cos}\,(a - \alpha) - \rho \,\mathrm{Cos}\, \delta}$$

$$r = \frac{r \,\mathrm{Sin}\, d - \rho \,\mathrm{Sin}\, \delta}{\mathrm{Sin}\, d'}$$

Verlängert man die Linie r′, bis sie unsere Tafel in dem Puncte A trifft, und sind

$$Y \; Z$$

die rechtwinklichten Coordinaten, welche die Lage des Punctes A gegen den Mittelpunct der Erde bestimmen, und nennt man eben so

$$\xi \; \upsilon \; \zeta$$

die den vorigen analogen Coordinaten, welche die Lage der Sonne gegen die Erde bestimmen, so wie endlich

$$x' \; y' \; z'$$

die, welche die Lage des Mondes gegen die Sonne angeben, wo

$$\xi, \; x'$$

in der Linie liegen, welche die Mittelpuncte der Sonne und der Erde verbindet, so hat man

$$\xi = \rho \,\mathrm{Cos}\, \delta$$
$$\upsilon = 0$$
$$\zeta = \rho \,\mathrm{Sin}\, \delta$$

und

$$x' = r' \text{Cos}\, d' \,\text{Cos}\,(a' - \alpha)$$
$$y' = r' \text{Cos}\, d' \,\text{Sin}\,(a' - \alpha)$$
$$z' = r' \text{Sin}\, d'$$

und überdiess

$$\frac{Y}{y'} = - \frac{\xi}{x'}$$

und

$$\frac{Z - \zeta}{z'} = - \frac{\xi}{x'}$$

also auch

$$Y = - \rho \,\text{Cos}\, \delta \,\text{tg}\,(a' - \alpha)$$
$$Z = - \rho \left(\frac{\text{Cos}\, \delta \,\text{tg}\, d'}{\text{Cos}(a' - \alpha)} - \text{Sin}\, \delta \right)$$

Substituirt man aber in den letzten beyden Ausdrücken für

$$\text{tg}\,(a' - \alpha)$$

und

$$\frac{\text{tg}\, d'}{\text{Cos}\,(a' - \alpha)}$$

ihre Werthe aus dem Vorhergehenden, so erhält man

$$Y = - \frac{\rho\, r \,\text{Cos}\, d \,\text{Sin}\,(a - \alpha)}{r \,\text{Cos}\, d \,\text{Cos}\,(a - \alpha) - \rho \,\text{Cos}\, \delta}$$
$$Z = - \frac{\rho\, r\, (\text{Sin}\, d \,\text{Cos}\, \delta - \text{Cos}\, d \,\text{Sin}\, \delta \,\text{Cos}\,(a - \alpha))}{r \,\text{Cos}\, d \,\text{Cos}\,(a - \alpha) - \rho \,\text{Cos}\, \delta}$$

Ist aber wieder p die Horizontalparallaxe des Mondes, so ist, wenn man den Halbmesser der Erde zur Einheit annimmt,

$$r = \frac{1}{\text{Sin}\, p}$$

und da ρ viel grösser als r ist, so gehen die beyden letzten Ausdrücke in folgende über

$$Y = \frac{\text{Cos}\, d \,\text{Sin}\,(a - \alpha)}{\text{Sin}\, p}$$

$$Z = \frac{\text{Sin}\,(d - \delta) + 2 \,\text{Cos}\, d \,\text{Sin}\, \delta \,\text{Sin}^2 \frac{a - \alpha}{2}}{\text{Sin}\, p \,\text{Cos}\, \delta}$$

Nachdem so die Coordinaten Y Z des Punctes A der Tafel gefunden sind, wollen wir den Punct A′ finden, in welchem die verlängerte Linie r′ die Oberfläche der Erde trifft.

Die Ebene, welche durch die Mittelpuncte der Sonne und des Mondes senkrecht auf dem Äquator steht, schneidet die Oberfläche der Erde in einem Kreise, dessen Halbmesser h seyn soll.

In derselben Ebene liegt die Linie r', die daher verlängert gegen die Ebene der Tafel nahe unter dem Winkel δ geneigt ist. Die Höhe des Punctes A über dem Halbmesser dieses Kreises, der mit der Ebene des Äquators parallel ist, hiess oben Z. Sey eben so Z' die Höhe des Punctes A', so ist die Entfernung dieser beyden Höhen von einander

$$\sqrt{h^2 - Z'^2}$$

oder auch

$$(Z - Z') \operatorname{Cotg} \delta.$$

Setzt man also beyde Werthe gleich, so hat man

$$Z - Z' = (h^2 - Z'^2)^{\frac{1}{2}} . \operatorname{tg} \delta$$

oder auch

$$Z' = Z \operatorname{Cos}^2 \delta + \operatorname{Sin} \delta . \sqrt{h^2 - Z^2 \operatorname{Cos}^2 \delta}$$

Um nun noch den Halbmesser h dieses Kreises zu bestimmen, bemerke man, dass die Entfernung des Mittelpuncts dieses Kreises vom Mittelpuncte der Kugel gleich Y ist, woraus folgt

$$h^2 = 1 - Y^2$$

Da endlich Z' der Sinus der Polhöhe des Puncts A' ist, so hat man, wenn man diese Polhöhe φ nennt,

$$\operatorname{Sin} \varphi = Z \operatorname{Cos}^2 \delta + \operatorname{Sin} \delta . \sqrt{1 - Y^2 - Z^2 \operatorname{Cos}^2 \delta} \quad .. \text{ (I.)}$$

Denken wir uns nun durch denselben Punct A' eine Ebene parallel mit dem Äquator, so wird diese Ebene die Oberfläche der Kugel ebenfalls in einem Kreise schneiden, dessen Halbmesser H seyn soll. Heisst dann s der Winkel, welchen der Halbmesser dieses Kreises, der nach dem Puncte A' geht, mit dem Halbmesser desselben Kreises bildet, der parallel mit der Axe der ξ ist, d. h. ist s die Entfernung des Punctes A' vom Meridian, der eben Mittag hat, oder endlich, ist s der Stundenwinkel des Ortes A', so ist

$$\operatorname{Sin} s = \frac{Y}{H}$$

Da aber der Halbmesser H dieses Parallelkreises der Kugel gleich dem Cosinus der Polhöhe des gesuchten Ortes A' ist, so hat man

$$\operatorname{Sin} s = \frac{Y}{\operatorname{Cos} \varphi} \quad .. \text{ (II.)}$$

und die Gleichungen I. II. bestimmen den Ort der Oberfläche der Erde, der für eine gegebene Zeit eine centrale Finsterniss hat. Man wird von selbst bemerken, dass diess dieselben Ausdrücke sind, die wir §. 11. gefunden haben, wenn man dort $\Delta = 0$ setzt.

Wir wollen nun auch die andern Puncte des Schattens auf dieselbe Art zu bestimmen suchen.

Wäre die Tafel auf der Schattenaxe senkrecht, so wäre der Umfang des Schattens auf dieser Tafel ein Kreis, dessen Halbmesser

$$\frac{\rho \pm m}{p} = \frac{\Delta}{p}$$

ist. Wir wollen einen Punct B der Peripherie dieses Kreises dadurch bestimmen, dass sein Halbmesser mit dem Halbmesser, der in einer auf dem Äquator senkrechten Ebene steht, den gegebenen Winkel n bilde, so sind die Coordinaten dieses Punctes B

$$\frac{\Delta}{p} \operatorname{Sin} n$$

und

$$\frac{\Delta}{p} \operatorname{Cos} n$$

die erste in der Richtung des Äquators, und die andere auf der ersten senkrecht. Projicirt man aber diese Coordinaten auf unsere Tafel, und heisst man diese Projectionen v in der Richtung des Äquators, und z in einer auf der ersten senkrechten Richtung, so ist

$$v = \frac{\Delta}{p} \operatorname{Sin} n$$

$$z = \frac{\Delta}{p} \frac{\operatorname{Cos} n}{\operatorname{Cos} \delta}$$

wo v z parallel mit den vorhergehenden y z sind. Wie nun vorhin der Punct A der Tafel die Projection von dem ihm entsprechenden Puncte A′ der Oberfläche der Erde ist, so wird auch der Punct B der Tafel die Projection eines Punctes der Oberfläche der Erde seyn, welchen letzten wir B′ nennen wollen. Es ist aber offenbar, dass sich der Punct B, um daraus B′ zu finden, eben so behandeln lassen wird, wie wir oben den Punct A behandelt haben, um daraus A′ zu finden. Die beyden Gleichungen I. II. für Sin φ und Sin s werden nähmlich auch hier gelten, wenn man nur

$$Y \pm v \text{ für } Y$$

und

$$Z \pm z \text{ für } Z$$

setzt.

Gibt man dann der Grösse n nach und nach alle Werthe von 0 bis 180, so wird man alle Orte der Erde erhalten, welche in demselben Augenblick eine blosse Berührung der Ränder sehen.

Diess sind aber noch nicht die Orte, die b l o s s eine Berührung sehen, denn früher oder später können dieselben Orte tief in dem Schatten liegen, da sie nur für die gegebene Zeit in der Gränze des Schattens sich befinden.

Unter allen diesen Orten aber, die der Peripherie der ganzen Ellipse, welche die Projection jenes Kreises auf der Tafel ist, entsprechen, gibt es zwey, welche bloss eine Berührung der Ränder sehen, oder welche in der That in der Gränze des ganzen Schattenweges liegen.

Setzt man voraus, was hier ohne merklichen Fehler geschehen kann, dass überhaupt die grössten Phasen auf der Linie Statt haben, die auf der relativen Bahn des Mondes senkrecht steht, so werden jene beyden Puncte offenbar diejenigen seyn, für welche der Winkel n gleich der Neigung dieser Mondsbahn gegen die Ebene des Äquators ist, so dass man also für diese Puncte hat

$$\mathrm{tg}\, n = \frac{dd - d\delta}{(da - d\alpha) \operatorname{Cos} d}$$

$$Y = \frac{\operatorname{Cos} d \operatorname{Sin}(a - \alpha)}{\operatorname{Sin} p}$$

$$Z = \frac{\operatorname{Sin}(d - \delta) + 2 \operatorname{Cos} d \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Sin}^2 \frac{a - \alpha}{2}}{\operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} \delta}$$

$$v = \frac{\Delta}{p} \operatorname{Sin} n$$

$$z = \frac{\Delta}{p} \frac{\operatorname{Cos} n}{\operatorname{Cos} \delta}$$

Setzt man also der Kürze wegen

$$Y'' = Y \pm v$$
$$Z'' = Z \pm z$$

so hat man, wie zuvor,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin} \varphi &= Z'' \operatorname{Cos}^2 \delta + \operatorname{Sin} \delta . \sqrt{1 - Y''^2 - Z''^2 \operatorname{Cos}^2 \delta} \\ \operatorname{Sin} s &= \frac{Y''}{\operatorname{Cos} \varphi} \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

und diess sind dieselben Gleichungen, die wir in §. 11. gefunden haben. Sie geben also den Ort (d. h. die Breite φ, und die Länge λ durch den Stundenwinkel s des Ortes), der für eine gegebene Pariser Zeit eine gegebene Distanz Δ der Mittelpuncte der Sonne und des Mondes als grösste Phase sieht. Dieselben Ausdrücke lassen sich übrigens auch leicht durch eine einfache geometrische Construction finden.

Setzt man

$$\Delta = 0$$

so erhält man alle die Orte, die für eine gegebene Pariser Zeit eine centrale Finsterniss sehen.

Setzt man

$$\Delta = \mu \pm m'$$

so erhält man alle die Orte, die für eine gegebene Pariser Zeit die äussere oder innere Berührung der Ränder sehen.

Setzt man

$$\Delta = \frac{12 - k}{12} (\mu + m'),$$

so erhält man die Orte, welche für eine gegebene Pariser Zeit eine Finsterniss von k Zollen als grösste Phase sehen.

Die obern Zeichen bey v und z gehören für die nördliche, die untere für die südliche Gränze des Schattenweges.

Auf diese Art wird man alle Orte der Erde bestimmen, welche von dem Schatten getroffen werden, und sie dann in einer Karte verzeichnen. Am bequemsten ist es, dazu zuerst die Werthe von Y und Z eben so in eine Tafel zu bringen, wie wir oben §. 10. II. für y und z gethan haben.

Um diese Ausdrücke auf unsere Finsterniss des 7. Septembers 1820 anzuwenden, hat man für die centrale Finsterniss

$$\begin{aligned} n &= -\ 28^\circ\ 26 \\ p &= 3235 \\ \delta &= 6^\circ\ 20' \\ \Delta &= 0 \end{aligned}$$

Ist also die Pariser Zeit

$$t = 2^h\ 0'$$

gegeben, so ist

$$\begin{aligned} Z \cos \delta &= 0.7735 \\ Y &= 0.3090 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= +\ 56^\circ\ 5'\ \text{Nord} \\ s &= 2^h\ 14' \end{aligned}$$

Länge von Paris $\lambda = +\ 0^h\ 14'$ östlich.

Für

$$t = 3^h\ 0'$$

ist eben so

$$\begin{aligned} Z \cos \delta &= 0.5327 \\ Y &= 0.7533 \end{aligned}$$

$$\varphi = + 54^\circ\ 51'$$
$$s = 4^h\ 26'$$
$$\lambda = + 1^h\ 26'$$

Für

$$k = 0$$

ist

$$\Delta = \mu + m'$$

also für die äusserste Schattengränze, oder für die Orte, welche eine blosse äussere Berührung der Ränder sehen,

für wahre Zeit Paris $t = 1^h$

$$(Z + z) \operatorname{Cos} \delta = 0.5132$$
$$Y + v = - 0.4068$$

$$\varphi = + 36^\circ\ 30'$$
$$s = - 2^h\ 2'$$
$$\lambda = - 3^h\ 2' \text{ westl. von Paris}$$

für die Orte, die eine Verfinsterung von 6 Zollen sehen, ist

$$k = 6,\ \Delta = \frac{\mu + m'}{2}$$

also für Par. Zeit $t = 2^h$

$$(Z + z) \operatorname{Cos} \delta = 0.5231$$
$$Y = 0.1733$$

$$\varphi = + 37^\circ\ 44'$$
$$s = 0^h\ 51'$$
$$\lambda = - 1^h\ 9'$$

In den folgenden Tafeln findet man den Weg des centralen und der beyden Gränzen des vollen Schattens für die vorzüglichsten Orte Deutschlands und die angränzenden Länder.

Centraler Schatten.

wah. Zeit Paris	Polhöhe	Stundenwinkel	Länge von Paris
t	φ	s	λ
$2^h\ 0'$ ...	$56^\circ\ 5'$ ...	$2^h\ 15'$ ...	$0^h\ 15'$ östlich
2 10 ...	52 17 ...	2 35 ...	0 25
2 20 ...	48 39 ...	2 55 ...	0 35
2 30 ...	45 8 ...	3 15 ...	0 45

Nördliche Gränze des vollen Schattens

$$\Delta = \mu - m'$$

t	φ	s	λ
$2^h\ 5'$ ...	$55^\circ\ 44'$ ...	$2^h\ 36'$ ...	$0^h\ 32'$
2 15	51 52	2 57	0 42
2 25	48 15	3 17	0 52

Südliche Gränze des vollen Schattens

t		φ		s		λ
$2^h\ 0'$	...	$54^\circ\ 30'$	...	$2^h\ 4'$	...	$0^h\ 4'$
2 10		50 49		2 25		0 15
2 20		47 18		2 44		0 25

Man wird endlich leicht bemerken, dass diese letzte Methode noch die Auflösung einer grossen Anzahl anderer interessanten Aufgaben in sich schliesst. Sucht man z. B. den Ort, der die centrale Finsterniss in seinem Mittage sieht, so ist für diesen Ort

$$Y = 0, \text{ d. h. } a - \alpha = 0.$$

Aus dieser letzten Gleichung findet man die wahre Pariser Zeit, und daraus die Länge des Ortes (da $s = 0$ ist), und die Breite aus der ersten der Gleichungen A, oder aus

$$\operatorname{Sin} \varphi = Z \operatorname{Cos}^2 \delta + \operatorname{Sin} \delta \,.\, \sqrt{1 - Z^2 \operatorname{Cos}^2 \delta}$$

Eben so ist für den Ort, der die blosse Berührung in seinem Mittage sieht,

$$Y'' \text{ oder } Y + v = 0,$$

für die Orte aber, welche die äussere Berührung zuerst und zuletzt sehen, ist

$$Y''^2 + Z''^2 = 1 \text{ u. s. w.}$$

Die in §. 10 gegebenen Ausdrücke geben zugleich ein bequemes Mittel, die §. 6 u. 7 u. w. enthaltenen Probleme aufzulösen. Um diess kurz zu zeigen, wollen wir die Zeit suchen, für welche in einem gegebenen Ort der Erde irgend eine gegebene Distanz Δ der Mittelpuncte der Sonne und des Mondes gesehen wird.

Zu diesem Zwecke sucht man mit einem willkührlichen Werth des Stundenwinkels s (man wird immer leicht einen genäherten Werth von s erhalten) die Coordinaten Y und Z aus §. 10. I, und aus diesen und der gegebenen Distanz Δ die Coordinaten y und z aus §. 10. IV, und aus diesen endlich durch die Tabelle der x y §. 10. II die Pariser Zeit, also auch die geographische Länge des gegebenen Ortes, welche letzte mit der wahren, gegebenen Länge dieses Ortes verglichen, zeigt, ob man den Werth von s richtig angenommen hat. Eine leichte Wiederholung dieser Rechnung wird dann zu dem wahren Werth von s führen. Auf diese Weise wird man die Ortszeiten der äusseren oder inneren Berührungen der Ränder erhalten, wenn man für Δ die Summe oder die Differenz der scheinbaren Halbmesser des Mondes und der Sonne annimmt. Endlich ist, wie man leicht sieht, der Winkel, welchen die gerade Linie, die die Mittelpuncte der Sonne und des Mondes verbindet, mit dem durch den Mittelpunct der Sonne gezogenen Verticalkreis bildet,

$$h + n - g$$

wo h n die in §. 10 gegebene Bedeutung hat, und wo

$$tg\ g = \frac{Z}{Y}$$

angenommen wird.

§. 14.

Es ist angenehm und nützlich, die Erscheinungen einer Finsterniss sich mit Hülfe eines Globus zu versinnlichen. Zu diesem Zwecke wird folgendes Verfahren sehr bequem seyn.

Sey H der Halbmesser des Globus, und

$$H \frac{(\mu \pm m)}{p}$$

der Halbmesser eines Kreises (z. B. von Messing oder Papier); das obere Zeichen für den Halb-, das untere für den vollen Schatten.

Man lege über den Globus ein Linial in eine horizontale Lage, und auf das Linial jenen Kreis. Es sey nun A der Ort des Globus, der für eine gegebene Zeit die Sonne in seinem Zenith hat, und B der Ort, der für dieselbe Zeit die centrale Finsterniss sieht (wo man B schon aus den vorhergehenden Rechnungen kennt). Diess vorausgesetzt, stelle man den Globus so, dass A den höchsten Punct desselben einnimmt, und dann bewege man den Kreis auf seinem immer horizontalen Liniale so, dass der Mittelpunct des Kreises senkrecht über B steht. Die so von der Scheibe des Kreises bedeckten Länder sind die, welche in diesem Augenblicke im Schatten liegen.

Legt man nun das immer horizontale Linial so, dass der Mittelpunct der darauf liegenden Scheibe immer über den Puncten

$$B, B', B'' \ldots$$

senkrecht steht, die für gegebene Zeiten eine centrale Finsterniss sehen, und dreht man zugleich den Globus jedes Mahl so, dass dessen höchster Punct immer derjenige ist, welcher zu derselben Zeit die Sonne in seinem Zenith hat, so kann man auf diese Art den ganzen Weg des Schattens und alle seine Gränzen auf dem Globus verzeichnen, und sie von ihm auf eine Karte bringen.

§. 15.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass man, um die Zeit einer Finsterniss mit aller Schärfe zu finden, diese Zeit schon vorher beynahe kennen muss. Zu dieser vorläufigen Kenntniss bedient man sich gewöhnlich der E p a k t e n. Die astronomische Epakte eines Jahres ist das Alter des Mondes, vom Neumonde an gerechnet, im Anfange des gegebenen Jahres, oder sie ist die Zwischenzeit von der letzten Conjunction (des vorhergehenden Jahres) und dem Anfange des gegebenen Jahres. Man findet also die Epakte des gegebenen Jahres, wenn man die Epoche der Sonne von der Epoche des Mondes für dieses Jahr subtrahirt, und die Differenz in Mondszeit

$(12^\circ\ 1908 = 1^{Tag})$ verwandelt.

So ist für 1762

$$\begin{array}{rl} \text{Epoche } \odot = & 280^\circ\ 6'\ 6'' \\ ☾ = & 340\ \ 26\ \ 2 \\ \hline & 60^\circ\ 19'\ 56'' \end{array}$$

oder die Epakte des Jahres 1762 ist

$$4^T\ 22^h\ 46'\ 32''.$$

Hat man die Epakte eines Jahres, so wird man durch blosse Addition der synodischen Revolution des Mondes

$$29^T\ 12^h\ 44'\ 3''$$

alle Zeiten der mittlern Conjunctionen und Oppositionen dieses Jahres finden.

Da man bey den Mondsfinsternissen wegen der Schwierigkeit der Beobachtung auf den Halbschatten keine Rücksicht nimmt, so kann offenbar keine Finsterniss Statt haben, wenn die Distanz der Mittelpuncte des Mondes und des Schattenschnittes, d. h. wenn die Breite des Mondes grösser ist, als

$$p + \varkappa + m - \mu.$$

Die grössten und kleinsten Werthe dieser Grössen sind aber

$$\begin{array}{rlll} \text{von } p & .. & 61'.53 & \text{und} \quad 53'.95 \\ m & .. & 16.77 & \quad\quad 14.70 \\ \mu & .. & 16.32 & \quad\quad 15.78 \end{array}$$

wobey

$$\varkappa = 9''$$

angenommen wurde. Die grösste Breite des Mondes ist also

$$b = 62'.67$$

und die kleinste

$$\beta = 52'.48.$$

Ist aber n die Neigung der Mondsbahn gegen die Ekliptik, und u das Argument der Breite, so ist

$$\text{Sin } u = \frac{\text{Sin } \beta}{\text{Sin } n}$$

Für

$$\beta = 62.67$$
$$\beta = 52.48$$

und

$$n = 5° \; 0'05$$
$$n = 5° \; 17'.68$$

ist daher

$$u = 12° \; 4'.20$$
$$u = 9° \; 31'.35$$

Ist daher zur Zeit der Opposition u kleiner, als

$$9° \; 31'.35$$

so hat gewiss eine Finsterniss Statt, ist u grösser, als

$$12° \; 4'.20,$$

so kann keine Finsterniss mehr Statt haben. Ist endlich u zwischen diesen Gränzen, so muss man eine nähere Untersuchung anstellen.

Eben so kann eine Sonnenfinsterniss nur dann Statt haben, wenn die Breite des Mondes zur Zeit der Conjunction kleiner als

$$p - \pi + m + \mu$$

ist. Substituirt man für

$$p \; m \; \mu$$

die vorhergehenden grössten Werthe, so ist

$$\text{Sin } u = \frac{\text{Sin } 1° \; 34' \; 47}{\text{Sin } 5° \; 0'05} \text{ also } u = 18° \; 22'.4$$

und substituirt man die kleinsten Werthe, so ist

$$\text{Sin } u = \frac{\text{Sin } 1° \; 24'28}{\text{Sin } 5° \; 17'70} \text{ also } u = 15° \; 24'.4$$

Ist also in der Conjunction u kleiner als 15° 24'4, so hat gewiss eine Finsterniss Statt, ist aber u grösser als 18° 22'4, so kann keine Finsterniss Statt haben. Alle Finsternisse des 19. Jahrhunderts findet man berechnet in Hallaschka's elem. eclips. Pragae 1816, und die zu Paris sichtbaren in Mémoires de math. et de physique présentés à l'Académie. Tom V. Paris 1768.

§. 16.

Längenbestimmungen und Correction der Mondes-Tafeln.

Wir kommen nun zu dem Nutzen, welchen die Beobachtungen der Finsternisse haben. Dieser Nutzen besteht vorzüglich darin, dass sie uns die besten Mittel geben, die geographische Länge der Beobachtungsorte sowohl, als auch die Verbesserungen der für die Seefahrt so wichtigen Mondstafeln zu finden.

Da die wahren oder Mondsfinsternisse wirkliche Beraubungen des Lichtes sind, so sind ihre verschiedenen Erscheinungen für alle Puncte der Oberfläche der Erde, aus welcher sie gesehen werden, tautochron. Wenn daher ein Beobachter z. B. den Anfang einer solchen Finsterniss um a^h seiner Ortszeit, und ein anderer denselben um b^h seiner Ortszeit beobachtet hat, so ist die Längendifferenz oder der Unterschied der Meridiane beyder Orte $a - b$. Dieses sehr einfache Mittel, die geographische Länge zu bestimmen, wird aber wegen der Unsicherheit der Beobachtung nur sehr selten ganz verlässliche Resultate gewähren, da der schlecht begränzte Halbschatten, der Unterschied in der Güte der Augen, der Fernröhre, und der Reinheit der Atmosphäre meistens sehr nachtheilige Einflüsse äussern.

Anders verhält es sich mit den scheinbaren Finsternissen, mit den Sonnenfinsternissen und Sternbedeckungen vom Monde, die, besonders die letzten, mit grosser Schärfe beobachtet werden können. Die Zeiten der Ein- und Austritte sind zwar für verschiedene Orte der Erde, wegen der Parallaxe, verschieden, aber man kann aus diesen Beobachtungen durch eine sehr sichere Rechnung die Zeiten herleiten, für welche diese Ein- oder Austritte, oder die geocentrischen Conjunctionen beyder Mittelpuncte, für einen Beobachter im Mittelpuncte der Erde Statt haben werde, und dann diese letzten Erscheinungen als gleichzeitige, oder als solche ansehen, die für alle Orte der Oberfläche der Erde zu derselben Zeit Statt haben.

§. 17.

Es sey T die Ortszeit des beobachteten Ein- oder Austrittes, und t die beynahe bekannte Länge dieses Ortes östlich von Paris (für eine westliche Lage ist t negativ). Für die hypothetische Pariser Zeit

$$T - t$$

suche man

die scheinbare Rectascension und Declination des Mondes a d und den scheinb. Halbmesser m für das Gestirn seyen diese Grössen α δ μ.

Sey ferner

$$f = \frac{\text{stündl. scheinb. Änd. ☾} - \text{st. sch. Änd. ☉ in Rectascension}}{3600}$$

$$g = \frac{\text{stündl. scheinb. Änd. ☾} - \text{st. sch. Änd. ☉ in Declination}}{3600}$$

also f g die scheinbaren relativen Bewegungen in Rectascension und Declination während einer Secunde.

Hat man t und die tabellarischen Orte der beyden Gestirne der Wahrheit gemäss angenommen, so muss man haben

$$(a-\alpha)^2 \operatorname{Cos}^2 \delta + (d-\delta)^2 = (m \pm \mu)^2$$

Ist aber t unrichtig angenommen worden, so wird der letzten Gleichung auch nicht Genüge geschehen. Es sey das verbesserte t gleich

$$t + dt,$$

wo dt in Secunden ausgedrückt seyn soll. Man hätte also eigentlich die obigen Elemente für die Pariser Zeit

$$T - t - dt$$

suchen sollen. Für diese Zeit ist aber die Differenz der scheinbaren Rectascensionen

$$a - \alpha - f \,.\, dt$$

und die Differenz der scheinbaren Declinationen

$$d - \delta - g \,.\, dt$$

also hat man, wenn man der Kürze wegen

$$R = m \pm \mu$$

setzt,

$$(a - \alpha - f\,dt)^2 \operatorname{Cos}^2 \delta + (d - \delta - g\,dt)^2 = R^2$$

und in dieser Gleichung ist bis auf dt alles bekannt, also wird man auch diese Grösse aus ihr finden können.

Kann man voraussetzen, dass dt sehr klein ist, so wird man die zweyten Potenzen dieser Grössen vernachlässigen dürfen, wodurch die Rechnung einfacher wird. Setzt man nähmlich

$$\Delta^2 = (a-\alpha)^2 \operatorname{Cos}^2 \delta + (d-\delta)^2$$

oder bequemer

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{d-\delta}{(a-\alpha) \operatorname{Cos} \delta}$$

und

$$\Delta = (a-\alpha) \frac{\operatorname{Cos} \delta}{\operatorname{Cos} \omega} = \frac{d-\delta}{\operatorname{Sin} \omega}$$

so ist

$$dt = \frac{\Delta^2 - R^2}{2 \Delta (f \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} \omega + g \operatorname{Sin} \omega)}$$

Bey den Hilfsgrössen

$$\omega \text{ und } \Delta$$

muss man auf ihre Zeichen aufmerksam seyn. Die Grösse dt wird in Zeitsecunden erhalten. Dass man statt Rectascension und Declination auch Länge und Breite nehmen kann, ist für sich klar.

Exempel.

1798 August 8. wurde beobachtet:

Eintritt ε Zwillinge in Leipzig	$13^h\ 35'\ 17''5$	m. Z. Leipzig
Austritt	$14\ \ 19\ \ 31.3$	

Die schon sonst gut bekannte Meridiandifferenz von Paris ist

$0^h\ 40'\ 7''5$

daher ist aus den Tafeln

für mit. Zeit Paris........	12^h	55′	10″0 ..	13^h	39′	23″8
wahre Länge ☾	96°	16′	5.5 ..	96°	41′	55″2
wahre Breite ☾	+2	54	11.3 ..	2	56	2.4
Horiz. Par. am Äquator ...	0	58	53.2 ..	0	58	54.8
Horiz. Halbmesser	0	16	4.3 ..	0	16	4.7
wahre stündl. Bew. in Läng.	0	35	3.2 ..	0	35	4.3
.... Breite	0	2	31.1 ..	0	2	31.1
			Breite zunehmend			
Rectasc. des Zeniths	341	34	13 1 ..	352	39	29
scheinb. Länge des ☾ ...	96	51	45.2 ..	97	20	1.0
scheinb. Breite ☾ + ...	2	7	42.5 ..	2	12	32.1
scheinb. Halbmesser ☾ ..	0	16	5.8 ..	0	16	7.9

wobey vorausgesetzt wurde geocentrische Breite

$\varphi = 51°\ 10'\ 11''0$,

also auch die Horizontalparallaxe für Leipzig

$0°\ 58'\ 46.''8$

$0°\ 58'\ 48''4$

Des Sterns scheinbare Länge ist $97°\ 7'\ 5''2 = \alpha$

scheinbare Breite $+\ 2\ \ 2\ \ 48.1 = \delta$

Durchmesser $\mu = 0$

Daraus folgt

$$f = \frac{2301}{3600} = 0.63916$$

$$g = \frac{393}{3600} = 0.10916$$

Wir wollen nun die Meridiandifferenz absichtlich eine Minute zu klein annehmen, oder

$t = 0^h\ 39'\ 7''5$

setzen, so hat man für die hypothetische Pariser Zeit des Eintritts

$T - t = 12^h\ 56\ 10''0$

und für diese Zeit ist nach den vorhergehenden Elementen

$$a = 96^\circ\ 52'\ 23''5 \text{ scheinb. Länge} ☾$$
$$A = 2^\circ\ 7'\ 49''0 \text{ scheinb. Breite}$$

also

$$a - \alpha = -881.7$$
$$d - \delta = +300.9$$
$$\delta = 2^\circ\ 5'$$
$$\omega = -18^\circ\ 51'\ 18'' \quad \Delta = -931.08$$
$$\Delta = 965.8$$
$$dt = +62''2$$

also

$$t = 0\ 39\ 7.5$$
$$t + dt = 0^h\ 40'\ 9''7 \text{ verbesserte Meridiandifferenz.}$$

II. Dabey wurde vorausgesetzt, dass alle Elemente der Tafeln richtig sind, allein die Grössen

$$a\ d\ m \text{ und } \mu$$

sind gewöhnlich noch kleinen Fehlern unterworfen.

Sey a zu klein, um d a, also das wahre a gleich

$$a + da,$$

und eben so sey das wahre

$$d\ R\ t$$

gleich

$$d + dd,\ R + dR,\ t + dt$$

so hat man eigentlich folgende Gleichung zu entwickeln,

$$(a + da - \alpha - f dt)^2 \operatorname{Cos}^2 \delta + (d + dd - \delta - g dt)^2$$
$$= (R + dR)^2$$

Löst man diese Gleichung auf, vernachlässigt man die höhern Potenzen von d t, d a ... und subtrahirt davon die Gleichung

$$(a - \alpha)^2 \operatorname{Cos}^2 \delta + (d - \delta)^2 = \Delta^2$$

so erhält man

$$\frac{\Delta^2 - R^2}{2\Delta} = dt\,(f \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} \omega + g \operatorname{Sin} \omega)$$
$$- da\,.\operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} \omega - dd.\operatorname{Sin} \omega + \frac{R\,dR}{\Delta}$$

wo wieder

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{d - \delta}{(a - \alpha) \operatorname{Cos} \delta},$$

$$\Delta = \frac{(a - \alpha) \operatorname{Cos} \delta}{\operatorname{Cos} \omega}$$

ist, und diess ist die Bedingungsgleichung dieser Beobachtung. Hat man also vier Beobachtungen desselben Eintritts an verschiedenen Orten der Erde, so wird man daraus vier solche Gleichungen entwickeln, und aus ihnen die Verbesserungen

$$dt,\ da,\ dd,\ dR$$

bestimmen.

In unserm Exempel ist für die Immersion, wenn

$$t = 0^h\ 40'\ 7''5$$

ist

$$\begin{aligned} a - \alpha &= -920.0 \\ d - \delta &= +294.4 \\ \delta &= 2^\circ\ 5' \\ \omega &= -17^\circ\ 45'\ 20'' \\ \Delta &= -905.4 \\ R &= 965.8 \end{aligned}$$

also, wenn man

$$dR = 0$$

setzt,

$$0.4 = -0.95\,da + 0.30\,dd + 0.59\,dt$$

und für die Emersion ist eben so

$$\begin{aligned} a - \alpha &= 775.8 \\ d - \delta &= 584.0 \\ \delta &= 2^\circ\ 8' \\ \omega &= 36^\circ\ 59'\ 31'' \\ \Delta &= 970.6 \\ R &= 967.9 \end{aligned}$$

also

$$2.7 = -0.80\,da - 0.60\,dd + 0.57\,dt$$

Setzt man in beyden Bedingungsgleichungen

$$da = 0$$

so ist

$$\begin{aligned} 0.4 &= 0.59\,dt + 0.30\,dd \\ 2.7 &= 0.57\,dt - 0.60\,dd \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} dd &= -2''6 \\ dt &= +2.0 \end{aligned}$$

also die vorausgesetzte Breite des Mondes um 2″6 zu gross, und die vorausgesetzte Meridiandifferenz

$$t = 0^h\ 40'\ 7''5$$

um 2″.0 zu klein, nahe so wie sie in I. gefunden wurde.

§. 16.

Will man aus der Beobachtung unmittelbar die wahre geocentrische Conjunction der Mittelpuncte des Mondes und des bedeckten Gestirns ableiten, so sey (Fig. 8) ☾ der wahre, ☾' der scheinbare Mittelpunct des Mondes, S das Gestirn, also

$$L\ L'\ S$$

die Puncte der Ekliptik, welche die wahre, scheinbare Länge des Mondes, und die scheinbare Länge des Gestirns bezeichnen.

Man bringe die Zeit t des Beobachtungsortes vorläufig auf die nahe bekannte Pariser Zeit, und suche für diese Zeit die scheinbare Länge und Breite a d des Mondes, und $\alpha\ \delta$ des Gestirns, und die scheinbaren Halbmesser m des Mondes, und μ des Gestirns, so wie die wahre Länge A des Mondes in der Ekliptik.

Sey

$$F = \frac{\text{ständl. zusammengesetzte wahre Bewegung in Länge}}{3600}$$

und endlich

$$T$$

die gesuchte Ortszeit der wahren geocentrischen Conjunction.

Da man in dem Dreyecke

$$☾'\ l'\ S'$$

die zwey Seiten

$$s'\ ☾' = R = \mu \pm m$$

und

$$☾\ l' = d - \delta$$

kennt, so kennt man auch

$$S'\ l'$$

und

$$\frac{S'\ l'}{\cos\ \delta}$$

gibt

$$S\ L'.$$

Da man aber auch

$$L\ L' = a - A$$

kennt, so kennt man die ganze Linie

$$L\ S$$

und

$$\frac{L\ S}{F}$$

ist die Zeit, die zwischen der Beobachtung und der geocentrischen wahren Conjunction enthalten ist.

Man wird daher so verfahren:

Ist t die Zeit der Beobachtung, und T die Zeit der geocentrischen wahren Conjunction, beyde in der Uhrzeit des Beobachtungsortes ausgedrückt, so suche man zuerst

$$B = \frac{\sqrt{R^2 - (d - \delta)^2}}{\text{Cos } \delta}$$

und

$$\vartheta = \frac{a - A \pm B}{F}$$

das obere Zeichen für Immersionen,
das untere für Emersionen,

dann ist

$$T = t \pm \vartheta$$

das obere Zeichen, wenn

$$\alpha > A,$$

das untere, wenn

$$\alpha < A$$

ist, wo α die scheinbare Länge des Gestirns, a d die scheinbare Länge und Breite des Mondes, und A die wahre Länge des Mondes ist.

Ein Fehler der Mondslänge ist hier weniger zu befürchten, da man nur die Differenz a — A der scheinbaren und wahren Mondslänge braucht. Aber d und R können nachtheilige Folgen haben. Es war aber

$$T = t \pm \frac{(a - A \pm B)}{F}$$

also

$$dT = \pm \frac{d.B}{F}$$

Überdiess hat man

$$d.B = \frac{R\,dR - (d - \delta)\,dd}{B.\,\text{Cos}^2\,\delta},$$

also ist die verbesserte Conjunctionszeit

$$T' = T + dt$$

oder

$$T' = t \pm \vartheta \pm \frac{R\,d\,R}{B\,F\,\text{Cos}^2\,\delta} \mp \frac{(d - \delta)\,d\,d}{B\,F.\,\text{Cos}^2\,\delta}$$

und diese Gleichung ist es, die für jede Beobachtung entwickelt werden soll. Ist

$$\alpha > A,$$

so sind die obern Zeichen für die Immersion, die untern für die Emersion; ist

$$\alpha < A,$$

so sind die obern für die Emersion, die untern für die Immersion. Wird d R positiv gefunden, so muss die angenommene Grösse R um d R vermehrt werden. Eben so bezeichnet + d d eine Vergrösserung der nördlichen angenommenen Declination oder Breite, nähmlich eine Annäherung zu dem Nordpole. Ist also d d positiv, aber d südlich, so muss diese südliche Breite um d d vermindert werden.

In unserm Beyspiele ist für die Immersion

$$\begin{aligned} R &= 965.8 \\ d - \delta &= 294.4 \\ \delta &= 2^\circ\ 5' \\ B &= 920.5 \\ a - A &= 2139.7 \\ F &= 2103.6 \\ &\overline{3600} \end{aligned}$$

also $\vartheta = \frac{a - A + B}{F} = 1^h 27' 18''0$

$t = 13\ 35\ 17.5$

mit. Leip. Zeit der wahr. Conjunct. $= T = t + \vartheta = 15^h\ 2'\ 35''5$

Für die Emersion ist eben so

$$\begin{aligned} R &= 967.9 \\ d - \delta &= 584.0 \\ \delta &= 2^\circ\ 8' \\ B &= 772.3 \\ a - A &= 2285.8 \\ F &= 2104.35 \\ &\overline{3600} \end{aligned}$$

also $\vartheta = \frac{a - A - B}{F} = 0^h 43'\ 9''2$

$t = 14\ 19\ 31.3$

$T = t + \vartheta = 15\ \ 2\ 40.5$

Weiter ist für den Eintritt

$$\frac{R}{BF\ \mathrm{Cos}^2\ \delta} = 1.80, \frac{(\delta - \delta)}{B\ F\ \mathrm{Cos}^2\ \delta} = 0.55$$

und für den Austritt sind dieselben Grössen

2.15

1.29

also ist für die verbesserte Zeit der wahren Conjunction,

aus dem Eintritte $T = 15^h 2' 35''5 + 1.80\, dR - 0.55\, dd$
aus dem Austritte $T = 15\ \ 2\ 40.5 - 2.15\, dR + 1.29\, dd$

Setzt man beyde Ausdrücke gleich, und

$$dR = 0,$$

so erhält man

$$dd = -2''7$$

oder die tabellarische Breite des Mondes muss um 2".7 vermindert werden, wie wir auch vorhin durch die erste Methode gefunden haben. Mit dieser Correction

$$dd = -2.7$$

erhält man aus dem Eintritte sowohl, als aus dem Austritte die verbesserte mit. Leipz. Zeit der geocentrischen Conjunction

$$15^h 2' 37''$$

Eben so wird man mit einer zweyten Beobachtung derselben Bedeckung, die an einem andern Orte angestellt wurde, verfahren. Die Differenz beyder geocentrischen Conjunctionszeiten, jede in der Zeit ihres Ortes ausgedrückt, wird die Differenz der Meridiane beyder Orte seyn.

Dieselbe Bedeckung wurde noch an drey andern Orten beobachtet.

1798 August 8.

	Immens. mit. Zeit.			Emension.		
Leipzig	13ʰ	35′	17″5	14	19	31.3
Ofen	13	57	27.6	14	35	37.2
Danzig	14	1	39.4	14	46	45.1
Celle	13	27	42.5	14	13	29.2

Der Austritt in Celle ist zweifelhaft. Daraus findet man nach der letzten Methode folgende mit. Zeiten der wahren Conjunction

Leipzig	15ʰ	2′	37″0
Ofen	15	29	14.2
Danzig	15	27	37.9
Celle	14	53	15.0

Nimmt man also die Länge Leipzigs von Paris

$$0^h 40' 12''8$$

als bekannt an, so ist Länge von

Ofen	1ʰ	6′	50″0
Danzig	1	5	13.7
Celle	0	30	50.8

§. 17.

Ehe wir diesen Gegenstand verlassen, wollen wir noch die Auflösung des folgenden interessanten Problemes suchen.

Man bestimme die Gestalt und Lage des Schattens und des Halbschattens eines seiner Lage und Gestalt nach gegebenen dunklen Körpers, der von einem gegebenen leuchtenden Körper beschienen wird.

Die Oberfläche des Schattens sowohl, als die des Halbschattens entsteht offenbar durch die auf einander folgenden Schnitte einer Ebene mit sich selbst, welche sich so um beyde Körper dreht, dass sie in jedem Augenblicke beyde Körper berührt. Für den vollen Schatten berührt diese Ebene beyde Körper auf derselben Seite, und für den Halbschatten auf entgegen gesetzten Seiten.

Es seyen

$$X \; Y \; Z$$

die Coordinaten des leuchtenden, und

$$X' \; Y' \; Z'$$

die des dunklen Körpers, und

$$x \; y \; z$$

die der berührenden Ebene. Der Anfang dieser drey Systeme unter einander paralleler Coordinaten soll für alle derselbe seyn.

Wir wollen für die Gleichungen der Oberflächen beyder Körper annehmen

$$\begin{aligned} dZ &= p\,dX + q\,dY \\ dZ' &= p'\,dX' + q'\,dY' \end{aligned}$$

Sind also

$$X \; Y \; Z$$

die Coordinaten eines Punctes des leuchtenden Körpers, so ist bekanntlich die Gleichung der berührenden Ebene in diesem Puncte

$$z - Z = p(x - X) + q(y - Y) \;\ldots\; (A)$$

und eben so ist die Gleichung der den dunklen Körper berührenden Ebene

$$z - Z' = p'(x - X) + q'(y - Y') \;\ldots\; (A')$$

Da aber beyde Ebenen nur eine einzige ausmachen sollen, so wird man haben

$$\left.\begin{aligned} p &= p' \\ q &= q' \\ Z - Z' &= p(X - X') + q(Y - Y') \end{aligned}\right\} \;\ldots\; (B)$$

Wenn man mit Hülfe der drey letzten Gleichungen (B) aus den Gleichungen (A) drey von den vier Grössen

$X\ Y\ X'\ Y'$

z. B. die Grössen

$X'\ Y'$ und Y

eliminirt, so erhält man eine Gleichung zwischen

$x\ y\ z$ und X

von der Form

$$z = Ax + By + C \quad . . \quad (C)$$

wo

$A\ B\ C$

Functionen von X und beständigen Grössen sind. Diese letzte Gleichung ist die Ebene, welche beyde Körper berührt, und deren Lage verschieden ist, nachdem man der Grösse X verschiedene Werthe gibt. Setzt man also die Grössen

$A\ B\ C$

durch die vorhergehenden Operationen als gefunden voraus, und neigt man die Ebene der Gleichung (C) unendlich wenig gegen ihre vorige Lage, so wird die Gleichung dieser geneigten Ebene seyn

$$z = \left\{A + \left(\frac{dA}{dX}\right)\right\} x + \left\{B + \left(\frac{dB}{dX}\right)\right\} y + \left\{C + \left(\frac{dC}{dX}\right)\right\}$$

Zieht man davon die Gleichung (C) ab, so erhält man

$$o = x\left(\frac{dA}{dX}\right) + y\left(\frac{dB}{dX}\right) + \left(\frac{dC}{dX}\right) \quad . . \quad (D)$$

und wenn man aus den beyden Gleichungen

(C) und (D)

die Grösse X eliminirt, so erhält man die Gleichung des Schattens und Halbschattens zwischen den Grössen

$x\ y\ z.$

Die Gleichung (C) ist die Gleichung der berührenden Ebene auf denselben Seiten beyder Körper sowohl, als auch auf entgegengesetzten Seiten, nachdem man die positiven und negativen Werthe von

Z und Z'

verschieden unter einander vergleicht. Setzt man endlich in der Endgleichung zwischen

$x\ y\ z$

für z die Grösse Z', so erhält man eine Gleichung zwischen x y, für die Projection der Linie der Berührung mit dem dunklen Körper. Also kennt man, da die Endgleichung für den vollen sowohl, als für den Halbschatten gilt, auf dem dunklen Körper die Gränze der Oberfläche des letzten, die ganz im Schatten ist, so wie die Gränze der Oberfläche des dunklen Körpers, die nur von einem Theile des beleuchteten Körpers beschienen wird, oder man kennt die Zone zwischen beyden Schatten auf dem dunklen Körper. Setzt man eben so für z die Grösse Z, so erhält man die Projectionen der Berührungslinien der Flächen des vollen und des Halbschattens auf dem leuchtenden Körper. Noch einfacher kann man die Projectionen beyder Berührungslinien aus den drey Gleichungen (B) finden. Eliminirt man nähmlich aus ihnen die Grössen

$$X'\ Y'$$

so erhält man die Gleichung der Berührungslinie auf dem leuchtenden Körper zwischen

$$X\ Y;$$

und eliminirt man

$$X\ Y,$$

so erhält man die Gleichung der Berührungslinie auf dem dunklen Körper zwischen

$$X'\ Y'.$$

Um diess auf ein Beyspiel anzuwenden, wollen wir beyde Körper als kugelförmig annehmen. Der Anfang der Coordinaten sey der Mittelpunct der leuchtenden Kugel. Sey ferner a der Halbmesser der leuchtenden, b der der dunklen Kugel, und c die Entfernung beyder Mittelpuncte, in welcher die Axe der x liegt, so sind die Gleichungen beyder Körper

$$\left.\begin{aligned} Z^2 &= a^2 - X^2 - Y^2 \\ Z'^2 &= b^2 - (X'-c)^2 - Y'^2 \end{aligned}\right\} (1)$$

Es ist also

$$p = -\frac{X}{m},\ q = -\frac{Y}{m}$$

$$p' = -\frac{(X'-c)}{m'},\ q' = -\frac{Y'}{m'}$$

wo

$$m^2 = a^2 - X^2 - Y^2$$

und

$$m'^2 = b^2 - (X'-c)^2 - Y'^2$$

ist.

Diess vorausgesetzt, gehen die Gleichungen (A) (B) in folgende über

$$(A) \;.\; z = \frac{-X(x-X)-Y(y-Y)}{m} + m$$

$$(B) \;..\; \begin{cases} X m' = (X' - c)\, m \\ Y m' = Y' m \\ m - m' + \dfrac{X(X-X') + Y(Y-Y')}{m} = o \end{cases}$$

Eliminirt man Y' aus den drey letzten Gleichungen, so hat man

$$X = \frac{a}{c}\,(a \mp b)$$

und

$$X' = c - \frac{b}{c}\,(b \mp a)$$

woraus sofort folgt, dass die vier Berührungslinien auf der Ebene der x y senkrecht stehen, und vom Anfangspuncte um die angezeigten Werthe von X und X' entfernt sind.

Substituirt man aber diesen Werth von X in (A), so ist

$$(C) \;..\; z = \frac{a^2 c - a\, x\,(a \mp b) - c\, y\,.\, Y}{\sqrt{a^2\, c^2 - a^2\,(a \mp b)^2 - c^2\, Y^2}}$$

und differentiirt man diese Gleichung bloss in Beziehung auf Y, und setzt ihr Differential gleich Null, so ist

$$(D) \;..\; Y = \frac{a\, y}{c}\left(\frac{a\, c - x\,(a \mp b)}{y^2 + z^2}\right)$$

und wenn man diesen Werth von Y in der Gleichung (C) substituirt, so erhält man

$$(y^2 + z^2)\,.\,(c^2 - (a \mp b)^2) = (a\, c - x\,(a \mp b))^2 \;...\; (E)$$

und diese Gleichung E ist die gesuchte Gleichung der Oberfläche des vollen sowohl, als des halben Schattens. Das obere Zeichen gehört für den vollen Schatten. Die Oberfläche beyder Schatten ist also ein Kegel. Setzt man

$$y = z = o$$

so ist

$$x = \frac{c}{1 \mp \frac{b}{a}}$$

die Entfernung des Scheitels des Kegels vom Mittelpuncte des leuchtenden Körpers, also auch

$$x - c = \frac{\pm c}{\frac{a}{b} \mp 1}$$

die Entfernung des Scheitels vom Mittelpuncte des dunklen Körpers,

Ist ferner

$$x = c + r$$

so ist die Gleichung (E)

$$\sqrt{y^2 + z^2} = \frac{\pm b(c+r) - ar}{\sqrt{c^2 - (a \mp b)^2}}$$

der Halbmesser des kreisförmigen Schnittes des vollen und des Halbschattens, der von einer Ebene entsteht, die senkrecht auf xy steht, und deren Entfernung von dem dunklen Körper r ist.

Substituirt man endlich die Werthe

$$X = \frac{a}{c}(a \mp b)$$

und

$$X' - c = \frac{b}{c}(b \mp a)$$

in den Gleichungen (1), so erhält man

$$Y^2 + Z^2 = a^2 - \frac{a^2}{c^2}(a \mp b)^2$$

$$Y'^2 + Z'^2 = b^2 - \frac{b^2}{c^2}(b \mp a)^2$$

und diese Gleichungen sind die Projectionen der vier Licht- und Schattengränzen auf der Ebene der yz. Diese Projectionen sind also ebenfalls Kreise, deren Halbmesser

$$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{c^2}(a \mp b)^2}$$

und

$$\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{c^2}(b \mp a)^2}$$

sind.

Für Kugeln lassen sich diese Ausdrücke leichter finden, wenn man die Tangente zweyer ihrer Grösse und Lage nach gegebenen Kreise sucht. Sind nähmlich $a\,b$ die Halbmesser dieser Kreise, c die Entfernung ihrer Mittelpuncte, und ist x die Entfernung des Durchschnitts der Tangente mit der verlängerten c vom Mittelpuncte des ersten Kreises, so wie α der Winkel dieser Tangente mit c, so hat man

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{\sqrt{(x-c)^2 - b^2}}$$

und

$$\text{Sin}\,\alpha = \frac{a \mp b}{c}$$

das untere Zeichen, wenn die Tangente die Linie c zwischen den beyden Mittelpuncten schneidet.

Daraus findet man x und x — c wie oben. Ist ferner r die Entfernung eines Punctes der Linie c vom Mittelpunct des zweyten Kreises, so ist das Loth in diesem Puncte auf der Linie c bis zur Tangente gleich

$$(x - c - r)\ \text{tg}\ \alpha$$

also gleich

$$\frac{\pm b\,(c + r) - ar}{\sqrt{c^2 - (a \mp b)^2}}$$

wie zuvor.

Nennt man endlich dieses Loth

$$\sqrt{y^2 + z^2}$$

und

$$r = x - c$$

so gibt der letzte Ausdruck

$$(y^2 + z^2) \cdot [c^2 - (a \mp b)^2] = [ac - x(a \mp b)]^2$$

die Gleichung des Kegels, wie oben.

SIEBENTES KAPITEL.

Durchgänge der untern Planeten vor der Sonne.

§. 1.

Die Durchgänge der untern Planeten, der Venus und des Merkurs, vor der Sonne können zwar ganz nach den Vorschriften behandelt werden, welche im vorhergehenden Kap. für die scheinbaren Finsternisse gegeben wurden. Da sie aber ein sehr sicheres Mittel geben, die Sonnenparallaxe, und dadurch die wahre Grösse der Ausdehnung unsers Planetensystemes, zu bestimmen, so verdienen sie eine eigene Betrachtung.

Diese beyden Planeten, vorzüglich die in der untern Conjunction uns nähere Venus, werden nämlich von verschiedenen Puncten der Oberfläche der Erde, auch an sehr verschiedenen Puncten der Oberfläche der Sonne gesehen, wodurch die Beobachteten Ein- und Austritte sowohl, als die Dauer des Durchgangs für verschiedene Orte der Erde ebenfalls sehr verschieden wird. Diese Unterschiede hängen aber offenbar von der Differenz der Parallaxe der Sonne und der Venus ab. Die Analyse gibt diese Differenz genau durch dieselben Ausdrücke, welche wir oben für die Sonnenfinsternisse erhalten haben, und die Resultate für diese Differenz werden um so verlässlicher seyn, da die Beobachtungen der Ein- und Austritte eines völlig dunklen Körpers auf einem sehr beleuchteten Grunde der grössten Schärfe fähig sind. Während man aber durch diese Beobachtungen die Differenz der beyden Parallaxen erhält, gibt die bekannte Theorie der elliptischen Bewegung für dieselbe Epoche auch das Verhältniss der Entfernungen der Sonne sowohl, als der Venus von der Erde, also eben dadurch auch das Verhältniss der Parallaxe der Sonne und der Venus, da sich die Parallaxen verkehrt, wie die Entfernungen verhalten. Kennt man aber die Differenz und das Verhältniss zweyer Grössen

$$x - y = a$$

und

$$\frac{x}{y} = b,$$

so kennt man auch diese Grössen selbst

$$x = \frac{ab}{b-1}$$

und

$$y = \frac{a}{b-1}$$

Eine einfache Zeichnung wird hinreichen, zu zeigen, dass die Unterschiede der Dauer dieser Durchgänge, so wie der absoluten Zeiten der Ein- und Austritte, für die verschiedenen Orte der Oberfläche der Erde sehr verschieden seyn müssen. Ein Beobachter z. B. der auf der Westseite der beleuchteten Hälfte der Erde ist, wird den Eintritt der Venus in den östlichen Rand der Sonne viel später sehen, als man ihn aus dem Mittelpuncte der Erde sehen würde; und ein zweyter Beobachter, der auf der Ostseite der beleuchteten Hälfte der Erde ist, wird den Eintritt viel eher sehen, als aus dem Mittelpuncte der Erde. Für jenen ersten Beobachter hat die tägliche Bewegung der Erde eine der Bewegung der Venus, die von Ost nach West geht, entgegengesetzte Richtung, daher erscheint ihm die relative Bewegung der Venus geschwinder, oder die Dauer des Durchgangs kürzer, als für den Mittelpunct der Erde. Für den zweyten Beobachter aber, der vor Sonnenuntergang den Eintritt, und nach ihrem Aufgange den Austritt sieht, sind die Richtungen beyder Bewegungen dieselben, also die relative Bewegung der Venus langsamer, und daher die Dauer des Durchganges grösser, als für den Mittelpunct der Erde. Da aber die Unterschiede dieser Dauer des Durchganges blosse Wirkungen der Parallaxe sind, so muss sich aus diesen Wirkungen auch ihre Ursache, oder die Parallaxe selbst, bestimmen lassen. Um zu sehen, mit welcher Genauigkeit die Parallaxe durch diese Beobachtungen gefunden werden könne, bemerke man, dass den 3. Junius 1769 der grösste Unterschied der Dauer der Venusdurchgänge an den verschiedenen Orten der Oberfläche der Erde nahe 25 Minuten, oder 1500 Secunden in Zeit betrug. Ist aber die Sonnenparallaxe 8.5 Secunden, so würde jede Secunde Änderung dieser Parallaxe 176 Zeitsecunden, Änderung in dem beobachteten grössten Unterschiede der Dauer der Durchgänge hervorbringen. Nimmt man daher den grössten möglichen Fehler der Beobachtung dieser Dauer zu 4 Zeitsecunden an, so wird man doch die Parallaxe bis auf den 44sten Theil einer Secunde, oder bis auf 0″.02 genau erhalten, welche Genauigkeit keine andere Methode, die Sonnenparallaxe zu finden, gewährt. Der grösste Unterschied der wirklich angestellten Beobachtungen in jenem Jahre war aber nur 18 Minuten, und es scheint, dass die Fehler derselben bis zehn Zeitminuten betrugen, wodurch also der Fehler der Parallaxe auf dessen 13ten Theil, oder auf 0″.077 gebracht wurde.

§. 2.

Um die allgemeinen Erscheinungen dieser Durchgänge für die ganze Oberfläche der Erde zu finden, wird man dieselben Methoden anwenden, welche wir oben für die scheinbaren Finsternisse gegeben haben. Ist nämlich für die Pariser Zeit T der wahren Conjunction in geocentrischer Rectascension der Venus und der Sonne

$$a \quad d$$

die geocentrische Rectascension und Declination der Venus,

$$m \quad p$$

ihr Halbmesser und ihre Horizontalparallaxe; sind für die Sonne

$$\alpha \quad \delta \quad \mu \quad \pi$$

dieselben Grössen, und ist

$$f = \frac{\text{stündl. wah. Bew. } ♀ - \text{stündl. wah. Bew. } \odot}{3600}$$

in Rectascension, und

$$g = \frac{\text{stündl. wah. Bew. } ♀ - \text{stündl. wah. Bew. } \odot}{3600}$$

in Declination, so wird man für jede gegebene Zeit t nach der Conjunction haben

$$(f\,t \,\mathrm{Cos}\,\delta)^2 + (d - \delta + g\,t)^2 = M^2$$

wo M die Distanz der Mittelpuncte bezeichnet.

Ist daher

$$\mathrm{tg}\ n = \frac{g}{f\,\mathrm{Cos}\,\delta}$$

so ist

$$t = -(d-\delta)\frac{\mathrm{Sin}^2 n}{g} \pm \frac{\mathrm{Sin}\,n}{g}\sqrt{M^2 - (d-\delta)^2\,\mathrm{Cos}^2 n}$$

Setzt man in diesem Ausdrucke

$$M = \mu \mp m,$$

so erhält man die Zeiten der äussern und innern Berührungen, wie sie aus dem Mittelpuncte der Erde gesehen werden. Setzt man aber

$$M = \mu \pm m + (p - \pi)$$

so erhält man die äusseren und inneren Berührungen, wie sie zuerst und zuletzt von der Oberfläche der Erde gesehen werden.

Dieselben Ausdrü[illegible] [illegible]erden auch für den Durchgang Merkurs vor der Sonne gelte[illegible].

Als Beyspiel wo[illegible] wir den Durchgang der Venus von 1769 den 3. Junius wählen.

Die wahre Pariser Zeit der geocentrischen Conjunction ist gleich

$$10^h\ 15'\ 2''$$

Abends, und für diese Zeit ist

hel. Länge ♀ = hel. Länge ♁ = 253° 27′ 31″
hel. Breite ♀ = + 0° 4′ 8″.1
ständl. Bew. ♀ = 3′ 58″14 in hel. Länge
— 0′ 14″.20 in hel. Breite, abnehmend.

Ständl. Beweg. ☉ = 2′ 23″.5

$$p = 30''.25 \qquad \varkappa = 8.6$$
$$m = 28.6 \qquad \mu = 947''.2$$

Noch ist Entfernung

♀ ☉ = 0.72619
☉ ♁ = 1.01515

und Schiefe der Ekliptik

$$23°\ 28'\ 1''$$

Aus dem Vorhergehenden findet man (Lib. II. Cap. II.)

		für 10ʰ 15′ 2″				11ʰ 15′ 2″		
geoc. Länge	♀	73°	27′	31″	..	73°	25′	56.8
geoc. Breite	♀	+ 0	10	23.5	..	+ 0	9	47.7
geoc. Rectasc.	♀	72	2	10.1	..	72	0	53.6
geoc. Decl.	♀	+22	36	48.0	..	22	36	1.0
Rectasc. ☉	=	72	3	32.8	..	72	6	7.0
Decl. ☉	=	22	26	29.2	..	22	26	46.8

und daraus folgt

wahre Paris. Zeit der geoc. Conjunction in Rectascension

$$T = 9^h\ 55'\ 17''0$$

und für diese Zeit ist

$$a = \alpha = 72°\ 2'\ 41''9$$
$$d = 22\ 37\ 3.7$$
$$\delta = 22\ 26\ 23.4$$

und überdiess

$$f = -\frac{250.6}{3600}$$

$$g = -\frac{64.6}{3600}$$

und mit diesen Werthen von f g δ findet man

$$n = 15^\circ\ 35'\ 1''.5$$

$$M = \mu + m = 975.8$$

also

$$t = 2575.2 \mp 11307.1$$

oder für den Mittelpunct der Erde, äussere Berührung

Anfang $T - t = T - 2^h\ 25'\ 31''9 = 7^h\ 29'\ 45''1$
Ende $T + t = T + 3^h\ 51'\ 22''3 = 13\ 46\ 39.3$

Ist aber

$$M = \mu - m = 918.6$$

so ist

$$t = 2575.2 \mp 10191.1$$

also für den Mittelpunct der Erde, innere Berührung

Anfang $T - 2^h\ 6'\ 55''9 = 7^h\ 48'\ 21''1$
Ende $T + 3\ 32\ 46.3 = 13\ 28\ 3.3$

Ist ferner

$$M = \mu + m + (p - \pi)$$

so ist

$$t - 2575.2 \mp 11734.5,$$

also für die Oberfläche der Erde, erste und letzte äussere Berührung

Anfang $T - 2^h\ 32'\ 39''3 = 7^h\ 22'\ 37''7$
Ende $T + 3\ 58\ 29.7 = 13\ 53\ 46.7$

Ist endlich

$$M = \mu - m + (p - \pi),$$

so ist

$$t = 2575.2 \mp 10623.4$$

also für die Oberfläche der Erde, erste und letzte innere Berührung

Anfang $T - 2^h\ 14'\ 8''2 = 7^h\ 41'\ 8''8$
Ende $T + 3\ 39\ 58.6 = 13\ 35\ 15.6$

Daraus folgt zugleich

$$7^h\ 29'\ 45''1 - 7^h\ 48'\ 21''1 = 18'\ 36''0$$

für die Zeit, welche der Durchmesser der Venus braucht, in den Sonnenrand ein- oder auszutreten. Diese Zeit ist offenbar auch gleich

$$\frac{2\ \mathrm{Sin}\ n}{g}\left\{\sqrt{(\mu + m)^2 - (d' - \delta)^2\ \mathrm{Cos}^2\ n} - \sqrt{\mu^2 - (d - \delta)^2\ \mathrm{Cos}^2\ n}\right\}$$

§. 3.

Um die verschiedenen Umstände zu bestimmen, welche diese Erscheinungen für die verschiedenen Puncte der Oberfläche der Erde begleiten, kann man sich wieder der Methoden bedienen, welche wir oben bey den Sonnenfinsternissen vorgetragen haben. Da es aber hier eigentlich nur um die beste Auswahl dieser Orte zu thun ist, um aus den an ihnen angestellten Beobachtungen die Sonnenparallaxe am vortheilhaftesten abzuleiten, so können wir hier das folgende bequemere Verfahren anwenden.

Man stelle einen Globus so, dass seine Polhöhe gleich der Declination der Sonne (hier $+ 22° 30'$) werde, und führe Paris unter den fixen Meridian, und den Index des Stundenkreises auf 12^h. Dann drehe man den Globus gegen Ost, bis der Index $7^h 23'$ durchlaufen hat (also auf $4^h 37'$).

In dieser e r s t e n Lage des Globus geht allen Orten, die in dem östlichen Theil des Horizonts liegen, die Sonne eben unter, und denen in dem westlichen Horizont auf. Die unter dem fixen Meridian haben eben Mittag. Der fixe Horizont des Globus bezeichnet also alle die Orte, welche den Eintritt der Venus bey Sonnenuntergang, und alle die, welche den Eintritt bey Sonnenaufgang sehen; die ersten liegen nämlich in dem östlichen, die zweyten in dem westlichen Theile des Horizonts.

Eigentlich sehen n i c h t a l l e in dem östlichen Theil des Horizonts den Eintritt bey Sonnenuntergang, sondern nur diejenigen, welche in dem Puncte dieses Horizonts wohnen, der in der Richtung der geraden Linie liegt, welche die Mittelpuncte der Venus und Sonne verbindet, da für diesen Punct allein, die Parallaxe die Venus in der kürzesten Richtung auf die Sonne bringt, während für die andern Puncte die Parallaxe in einer schiefen Richtung wirkt, also die Venus von der Sonne noch weiter entfernt erscheint. Wir werden weiter unten diese Puncte genauer bestimmen.

Jene, in dem östlichen Horizonte, sehen also bloss den Eintritt, und sonst nichts von der ganzen Erscheinung; die in dem westlichen Horizonte aber sehen den Eintritt, und auch die darauf folgenden Phänomene. Die übrigen endlich, welche in der obern oder beleuchteten Hämisphäre wohnen, sehen entweder den ganzen Durchgang, oder doch einen Theil desselben, und zwar mehr oder weniger, je mehr oder weniger sie vom östlichen Horizonte entfernt sind.

Man drehe nun den Globus wieder zurück, so dass Paris wieder unter den fixen Meridian, oder der Index auf 12^h kömmt, und bewege ihn dann ö s t l i c h, bis der Index $13^h 54'$ gegen Ost durchläuft (also auf $10^h 6'$).

In dieser **zweyten** Lage des Globus bezeichnet wieder der Horizont alle Orte, die auf der östlichen Seite den Austritt bey Sonnenuntergang, und auf der westlichen Seite den Austritt bey Sonnenaufgang sehen.

Kennt man diese beyden grössten Kreise, so wird man daraus leicht die vortheilhaftesten Beobachtungsorte zur Bestimmung der Sonnenparallaxe ableiten können. In der ersten Lage z. B. ist die südliche Spitze von Kalifornien nahe unter dem fixen Meridian, und hat die Sonne nahe im Zenith. Dieser Ort wird also den Eintritt fast wie aus dem Mittelpuncte der Erde sehen. In der zweyten Lage ist Kalifornien noch über dem östlichen Rand, aber nahe dabey; die Sonne ist ihm also noch nicht untergegangen, es sieht also auch den Austritt, und folglich die ganze Dauer. Die Parallaxe war bey dem Eintritt Null, bey dem Austritte aber ist sie sehr gross, und die Dauer wird durch sie ebenfalls vergrössert, da die Breite der Venus nördlich ist, also nördliche Orte der Erde die Venus tiefer unten oder näher bey dem Mittelpuncte der Sonne sehen. — Die Hudsonsbay sieht ebenfalls die ganze Dauer, und auch hier wird die Dauer durch die Parallaxe vermehrt. Der Peterpaulshafen in Kamtschatka sieht den Eintritt bey seinem Morgen, und den Austritt in seinem Mittag. Überhaupt, je nördlicher der Beobachtungsort ist, desto mehr wird die Dauer des Vorüberganges vergrössert. Das nördliche Schweden und Norwegen sieht den Eintritt Abends, und den Austritt am folgenden Morgen.

In der südlichen Hämisphäre wird im Gegentheile die Dauer durch die Parallaxe vermindert. Süd-Amerika sieht den Anfang, aber nicht das Ende, und Afrika sieht weder Anfang noch Ende. London, Paris .. sieht den Anfang bey Sonnenuntergang, aber das Ende gar nicht. Petersburg sieht das Ende bey Sonnenaufgang, aber den Anfang nicht.

Wollte man diese Untersuchungen genauer anstellen, so würde man sich, wie schon erinnert wurde, der Methode bedienen, welche wir §. 10 u. f. gegeben haben. Für unsern Zweck ist besonders die Aufgabe brauchbar, welche wir §. 12 aufgelöst haben.

Sucht man nämlich die Orte, welche den Anfang und das Ende unter allen zuerst und zuletzt sehen, so ist, da diese Orte die Sonne eben auf- oder untergehen sehen, in jener Projectionstafel die Entfernung der Mittelpuncte der Venus und der Sonne

$$M = \mu \pm m' + (p - \pi)$$

für die Orte, welche den Eintritt zuerst, und den Austritt zuletzt sehen, das untere Zeichen für die inneren Berührungen; und eben so

$$M = \mu \pm m' - (p - \pi)$$

für die Orte, welche den Eintritt zuletzt, und den Austritt zuerst sehen.

Ist nun, wie dort, p' das Loth vom Mittelpuncte der Sonne auf die Venusbahn, und n die Neigung der Venusbahn gegen den Äquator, so ist

$$\text{Sin } h = \frac{p' . \text{Cos } n}{M}$$

$$y = M \text{ Cos } (h + n)$$
$$z = M \text{ Sin } (h + n)$$

und aus y oder z wird man die Pariser Zeit finden, wann diese vier Erscheinungen Statt haben. Um nun noch die Polhöhe φ und den Stundenwinkel s dieser Orte zu finden, hat man, wenn δ die Declination der Sonne bezeichnet,

$$\text{Sin } \varphi = \text{Cos } \delta \text{ Sin } (h + n)$$
$$\text{Cos } s = - \text{tg } \delta \text{ tg } \varphi$$

und aus s und der vorhin gefundenen Pariser Zeit wird man die Länge λ des Ortes ableiten.

Aus den oben gegebenen Elementen des Durchgangs von 1769 findet man

wah. Par. Z.	a ♀	d ♀
8^h ...	72° 5′ 47″3 ..	22° 38′ 34″
11^h ...	72 0 57.8 ..	22 36 13
14^h ...	71 56 8.3 ..	22 33 52

α ⊙	δ ⊙
71° 57′ 46″ ..	22° 25′ 50″
72 5 28	22 26 42
72 13 11	22 27 35

und daraus findet man die Coordinaten y z durch die einfachen Ausdrücke

$$y = (a - \alpha) \text{ Cos } d$$
$$z = d - \delta$$

Man erhält nämlich

wah. Par. Z.	y	z
8^h ...	+ 444.2	+ 764.3
11^h	− 250.0	+ 570.4
14^h	− 944.5	+ 376.4

Daraus findet man p′ und n durch

$$\text{tg } n = \frac{z' - z}{y' - y}$$

und

$$p' = z - y \text{ tg } n$$

also

$$n = 15^\circ\ 36'$$
$$p' = 640.3$$

Nun ist aber

$$\mu = 947.2,\ m' = 28.6,$$
$$\delta = 22^\circ\ 27',\ p - \pi = 21''.6$$

I. Sey daher

$$M = \mu + m' + (p - \pi)$$

so ist

$$h = 38^\circ\ 11'\ 30''$$
$$y = 589$$
$$z = 805$$

also Anfang $7^h\ 22'$ Par. Zeit.

$$\varphi = +\ 48^\circ\ 14'$$
$$s = 117^\circ\ 33' = 7^h\ 50'$$
$$\underline{\ 7\ \ 22}$$

östl. Länge von Paris $\lambda\ = 0^h\ 28'$

für den Ort A, der der Eintritt zuerst bey Sonnenuntergang sieht.

$$h = 141^\circ\ 48'\ 30''$$
$$y = -\ 920.9$$
$$z = 383.0$$

Ende $= 13^h\ 54'$

$$\varphi = 20^\circ\ 47'$$
$$s = 260^\circ\ 59'$$
$$\lambda = 3^h\ 10'$$

für den Ort B, der den Austritt zuletzt bey Sonnenaufgang sieht.

Dieselben Zeiten haben wir schon oben §. 18 auf andern Wegen gefunden.

II. Sey ferner

$$M = \mu + m' - (p - \pi) = 954.2$$

so ist

$$h = 40^\circ\ 16'$$
$$y = 535.4$$
$$z = 789.8$$

Paris. Zeit $= 7^h\ 36'$

$$h = 139^\circ\ 44'$$
$$y = -\ 867.1$$
$$z = 398.2$$

Paris. Zeit $= 13^h\ 40'$

und was die Länge und Breite dieser Orte betrifft, so sind sie den in I. gefundenen offenbar sehr nahe entgegengesetzt, also

$$\varphi = -48^\circ\ 14' \text{ südlich}$$
$$\lambda = 12^h\ 28'$$

für den Ort a, der den Eintritt zuletzt bey Sonnenaufgang sieht.

$$\varphi = -20^\circ\ 47'$$
$$\lambda = 15^h\ 30'$$

für den Ort b, der den Austritt zuerst bey Sonnenuntergang sieht.

Um dieselben Orte einfacher durch den Globus zu finden, so nehme man in seiner ersten Lage vom Äquator auf der östlichen Seite gegen Nord den Bogen

$$h + n = 53^\circ\ 48'$$

wo

$$(h = 38^\circ\ 11')$$

und man hat den Ort A, dessen Polhöhe

$$\varphi = 48^\circ\ 14'$$

uud Länge

$$\lambda = 0^h\ 28'$$

ist. Ihm gegenüber liegt der Ort a. Nimmt man eben so in der zweyten Lage des Globus auf der östlichen Seite, vom Äquator gegen Nord den Bogen

$$h + n = 157^\circ\ 25',$$

wo

$$h = 141^\circ\ 18'$$

so erhält man den Ort B, und der ihm gegenüberliegende ist der Ort b.

Die Orte A und a liegen nämlich in der Richtung der Linie, welche die Mittelpuncte der Sonne und der Venus verbindet. Da bey den Puncten A, a vom Eintritte die Rede ist, so liegt Venus östlich von der Sonne, der Punct A liegt ebenfalls östlich von der Sonne, der Punct a aber westlich. Die Parallaxe bringt also für A die Venus auf dem kürzesten Weg zur Sonne hin, und für a von der Sonne weg. Für alle anderen Orte neben A und a wirkt die Parallaxe in einer schiefen Richtung. Da nun die Puncte A und a in einem Durchmesser der Erde liegen, und von dem Eintritte in A bis zu dem Eintritte in a eine Zeit von t Minuten verflossen ist, hier ist $t = 14'$, so kann man diesen Durchmesser in eben so viel gleiche Theile theilen, als t Minuten hat. Zieht man dann durch den 1., 2., 3ten Theilungsstrich eine Sehne senkrecht auf A a, so werden alle Puncte des Kreises, zu dem die Sehne als Durchmesser gehört, gleich weit von dem Mittelpuncte der Venus entfernt seyn, und daher, wenn sie anders in der erleuchteten Hämisphäre liegen, den Eintritt

$1, 2, 3 \ldots x$

Minuten später sehen, als A, welcher letzte Punct den Eintritt unter allen Puncten der Erde zuerst, so wie a zuletzt sieht. Von allen diesen Kreisen ist A als der Pol zu betrachten, und wenn X der Bogen ist, um welchen dieser Pol A von seinem Kreise absteht, so ist, wie man leicht sieht,

$$\text{Cos } X = 1 - \frac{x}{\frac{1}{2} t}$$

Beschreibt man also aus A als Pol in der Entfernung von A, die gleich X ist, einen Kreis, so liegen in diesem Kreise alle die Orte, die den Eintritt um x Minuten später sehen, als A.

Eben so kann man für den Punct B verfahren, wo man dann einen Kreis erhält, der alle Puncte der Oberfläche der Erde begreift, die den Austritt um x Minuten früher sehen, als B.

Solcher Kreise kann man auf dem Globus so viele ziehen, als t Minuten hat, auch kann man diese Kreise von dem Globus auf ein Planisphär übertragen. Gesetzt, durch einen gegebenen Ort der Erde geht einer der ersten Kreise, zu dem $x = 8$ gehört, so sieht dieser Ort den Eintritt um 8′ später als A, oder um

$$7^h\ 22' + 8' = 7^h\ 30',$$

und wenn durch denselben Ort einer der zweyten Kreise geht, zu dem $x = 4$ gehört, so sieht er den Austritt um 4′ früher, als B, oder um

$$13^h\ 54' - 4 = 13^h\ 50.$$

Die Dauer des ganzen Durchgangs ist also für ihn

$$6^h\ 20',$$

oder 3 Minuten grösser, als für den Mittelpunct der Erde, wo er nach den vorhergehenden

$$6^h\ 16'\ 54''2$$

ist. Auf diese Art kann man leicht alle Orte finden, welche eine gegebene, oder auch eine grösste und kleinste Dauer haben. In unserm Beyspiele ist

$$t = 14'$$

also gibt

$$\begin{array}{lllll} x = 0 & 3 & 7 & 11 & \\ X = 0^\circ\ 0' & 55^\circ\ 10' & 90^\circ\ 0' & 124^\circ\ 50' & \text{u. s. w.} \end{array}$$

Vergleiche Berl. Jahrb. 1803. p. 139 und 1804. p. 133.

§. 4.

Wir wollen nun sehen, wie man aus diesen Beobachtungen die Sonnenparallaxe ableiten könne.

Sey T die Ortszeit der Beobachtung, t die Differenz der Meridiane, also T — t die Pariser Zeit der Beobachtung. Für diese Zeit suche man die wahre Rectascension und Declination a d der Venus, mit ihren stündlichen Änderungen da, dd, dem Halbmesser m, und der Horizontalparallaxe p. Für die Sonne seyen diese Grössen

$$\alpha \; \delta \; \mu \; \pi,$$

Ist nun s der Stundenwinkel der Sonne, so ist

$$\text{die scheinb. Rect. } ♀ = a - p \frac{\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} s}{\operatorname{Cos}\delta}$$

$$\text{scheinb. Decl. } ♀ = d - p (\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\delta - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} d \operatorname{Cos} s)$$

Ist also

$$B = \frac{\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} s}{\operatorname{Cos}\delta}$$

$$C = \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\delta - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos} s,$$

so ist für jene Zeit

$$T - t$$

$$\text{die Differenz der scheinb. Rectasc.} = a - \alpha - Bq$$

$$\text{....... scheinb. Declin.} = d - \delta - Cq$$

wo der Kürze wegen

$$q = p - \pi$$

ist.

Ferner ist die relat. Bewegung in einer Secunde

$$\text{in Rectascension } f = \frac{\text{stündl. Bew. } ♀ - \text{stündl. Bew. } ☉ \text{ in Rect.}}{3600}$$

$$\text{in Declination } g = \frac{\text{stündl. Bew. } ♀ - \text{stündl. Bew. } ☉ \text{ in Decl.}}{3600}$$

und man wird abkürzend diese wahren Bewegungen für die scheinbaren brauchen können. Will man daraus die scheinbaren ableiten, so wird man zu f hinzusetzen

$$- (0.0000719)\, q \,.\, \frac{\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} s}{\operatorname{Cos}\delta}$$

und zu g hinzusetzen

$$- (0.0000719)\, q . \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Sin} s.$$

Es sey nun

$$da$$

der Fehler des tabellarischen a, so dass das wahre

$$a \text{ gleich } a + da$$

ist, und eben so seyen

$$dd,\ d\mu,\ dm,\ dt$$

die Fehler der oben angenommenen Grössen

$$d \; m \; \mu \; t$$

wo alle diese Grössen zu klein sind, wenn

$$dd, dm \ldots$$

positiv ist, so hat man

$$(a-\alpha-Bq+da-fdt)^2 \operatorname{Cos}^2\delta+(d-\delta-Cq+dd-gdt)^2$$
$$=[(\mu+d\mu)\pm(m+dm)]^2$$

das obere Zeichen für die äussere Berührung der Ränder.

Setzt man der Kürze wegen

$$(a-\alpha)^2 \operatorname{Cos}^2\delta+(d-\delta)^2=\Delta^2$$

oder

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{d-\delta}{(a-\alpha)\operatorname{Cos}\delta}$$

$$\Delta=(a-\alpha)\frac{\operatorname{Cos}\delta}{\operatorname{Cos}\omega}=\frac{d-\delta}{\operatorname{Sin}\omega}$$

und entwickelt man die vorhergehende Gleichung, indem man die zweyten und höhern Potenzen von

$$da, dt, q \ldots$$

weglässt, so hat man, wenn

$$D=\mu\pm m$$

ist,

$$\frac{\Delta^2-D^2}{2\Delta}$$

$$=dt(f\operatorname{Cos}\omega\operatorname{Cos}\delta+g\operatorname{Sin}\omega)+q(B\operatorname{Cos}\omega\operatorname{Cos}\delta+C\operatorname{Sin}\omega)$$
$$-da.\operatorname{Cos}\omega\operatorname{Cos}\delta-dd.\operatorname{Sin}\omega+(d\mu\pm dm).\frac{D}{\Delta}\quad\ldots(A)$$

das obere Zeichen für die äusseren Berührungen.

Diess ist die gesuchte Bedingungsgleichung, in welcher

$$q, da, dd, d\mu, dm$$

für alle Beobachtungen constant, dt aber für jeden Beobachtungsort veränderlich ist. Man braucht also wenigstens zwey Beobachtungen desselben Ortes, um dt zu eliminiren. Besser ist es, da der Factor von dt sehr klein ist, die geographische Länge des Ortes anders woher, z. B. durch Sternbedeckungen vorher genau zu bestimmen, und dann

$$dt=0$$

zu setzen.

Aus der so gegebenen Anzahl dieser Gleichungen wird man durch die bekannten Methoden die wahrscheinlichsten Werthe von

$$da, dd \ldots$$

und von q finden.

Hat man die Ekliptik statt des Äquators gewählt, so ist a, α die Länge, d, δ die Breite der Venus und der Sonne, also $\delta = 0$, und wenn λ β die Länge und Breite des Zeniths ist,

$$B = \text{Cos}\,\beta\ \text{Sin}\,(\lambda - \alpha)$$

$$C = \text{Sin}\,\beta$$

§. 5.

Man kann aber auch die beobachteten Berührungen durch Rechnung auf diejenigen, welche man aus dem Mittelpuncte der Erde beobachtet hat, d. h. auf die geocentrischen Berührungen bringen.

Sey ϑ die Pariser Zeit der geocentrischen Erscheinung, z. B. des äussern Eintritts, wie er oben §. 18. für den Mittelpunct der Erde gefunden wurde. Sey ferner

$$\vartheta + d\vartheta$$

die Pariser Zeit desselben äussern Eintritts, wie er von einem gegebenen Orte der Oberfläche der Erde gesehen wird.

Für diese Zeit ϑ suche man $a - \alpha$ und $d - \delta$, und

$$\text{tg}\ \omega = \frac{d - \delta}{(a - \alpha)\ \text{Cos}\,\delta}$$

Um dann $d\vartheta$ zu finden, darf man, wie man leicht sieht, in der Gleichung (A) des vorhergehenden §. nur

$$D = \Delta \text{ und } dt = d\vartheta$$

setzen, so dass man hat

$$d\vartheta = \frac{-q\,(B\ \text{Cos}\,\omega\ \text{Cos}\,\delta + C\ \text{Sin}\,\omega) + da\ \text{Cos}\,\omega\ \text{Cos}\,\delta + dd\ \text{Sin}\,\omega - d\mu \mp dm}{f\ \text{Cos}\,\omega\ \text{Cos}\,\delta + g\ \text{Sin}\,\omega}$$

oder kürzer

$$d\vartheta = -q\,.\,(BP + CQ) + da\,.\,P$$
$$+ dd\,.\,Q - (d\mu \pm dm)\,.\,\frac{Q}{\text{Sin}\,\omega}\ \ldots\ (A)$$

wo

$$P = \frac{\text{Cos}\,\omega\ \text{Cos}\,\delta}{f\ \text{Cos}\,\omega\ \text{Cos}\,\delta + g\ \text{Sin}\,\omega}$$

und

$$Q = \frac{\text{Sin}\,\omega}{f\ \text{Cos}\,\omega\ \text{Cos}\,\delta + g\ \text{Sin}\,\omega}$$

und wo das obere Zeichen für die äusseren Berührungen gehört.

Ist also, wie vorhin, T die Ortszeit dieser Beobachtung, t die hypothetische Differenz der Meridiane, und endlich ϑ die Pariser Zeit für dieselbe Erscheinung, wie sie aus dem Mittelpuncte der Erde gesehen wird, so ist

$$d\vartheta = T - t - \vartheta,$$

und man hat, z. B. für die erste äussere Berührung

$$T = t - \vartheta - q(BP + CQ) + da.P$$
$$+ dd.Q - (d\mu \pm dm)\frac{Q}{\text{Sin }\omega} \;\ldots\; (1)$$

und eben so für die letzte äussere Berührung an demselben Orte, wenn man die hieher gehörenden Grössen mit einem obern Strich bezeichnet

$$T' = t - \vartheta' - q(B'P' + C'Q) + da.P'$$
$$+ dd.Q' - (d\mu \pm dm)\frac{Q'}{\text{Sin }\omega'} \;\ldots\; (2)$$

Jede dieser zwey Gleichungen ist schon eine Bedingungsgleichung, aber sie setzt nebst den Grössen

$$da,\ dd\ \ldots$$

auch die Differenz t der Meridiane als bekannt voraus. Die Differenz beyder Gleichungen aber

$$T' - T = \vartheta - \vartheta' + q\{BP + CQ - B'P' - C'Q'\} + da(P' - P)$$
$$+ dd(Q' - Q) + (d\mu \pm dm).\left(\frac{Q}{\text{Sin }\omega} - \frac{Q'}{\text{Sin }\omega'}\right) \;\ldots\; (\text{I})$$

ist von der Kenntniss der Meridiandifferenz t unabhängig.

Behandelt man aber eben so dieselben beyden Erscheinungen, wie sie aus den Beobachtungen eines andern Ortes folgen, so erhält man für die erste äussere Berührung

$$T_{,} = t_{,} - \vartheta - q(B_{,}P + C_{,}Q) + da.P$$
$$+ dd.Q - (d\mu \pm dm)\frac{Q}{\text{Sin }\omega} \;\ldots\; (3)$$

und für die letzte äussere Berührung

$$T'_{,} = t_{,} - \vartheta' - q(B'_{,}P' + C'_{,}Q') + da.P'$$
$$+ dd.Q' - (d\mu \pm dm)\frac{Q'}{\text{Sin }\omega'} \;\ldots\; (4)$$

da die Grössen P, Q für **denselben** Ein- oder Austritt an allen Orten der Erde dieselben bleiben. Die Differenz der Gleichungen (3) und (4) gibt wieder

$$T'_{,} - T_{,} = \vartheta - \vartheta' + q(B_{,}P + C_{,}Q - B'_{,}P' - C'_{,}Q') + da(P' - P)$$
$$+ dd(Q' - Q) + (d\mu \pm dm)\left(\frac{Q}{\text{Sin }\omega} - \frac{Q'}{\text{Sin }\omega'}\right) \;\ldots\; (\text{II})$$

und da die Gleichungen (I) und (II) dieselben Factoren von

$$\vartheta - \vartheta', \ d\,a, \ d\,d$$

und

$$d\,\mu \pm d\,m$$

haben, so ist ihre Differenz von allen diesen Grössen unabhängig, und daher zur Bestimmung der einzigen noch übrigen unbekannten Grösse q sehr geschickt. Diese Differenz der Gleichungen (I, II) ist aber

$$q = \frac{(T'_{,} - T_{,}) - (T' - T)}{P(B_{,} - B) + Q(C_{,} - C) + P'(B' - B'_{,}) + Q'(C' - C'_{,})} \quad \ldots \text{(III)}$$

In unserm Beyspiele war zur Zeit

$10^h \ 15' \ 2''$

der Conjunction die geocentrische Länge der Venus und der Sonne

$73^\circ \ 27' \ 31''$

und die geocentrische Breite der Venus

$+ \ 623''.5$

Überdiess hat man nach §. 2 für die relative Bewegung in Länge und Breite

$$f = \frac{-94.4 - 143.5}{3600} = \frac{-237.9}{3600}$$

$$g = \frac{-35.7}{3600}$$

Es wurde aber beobachtet

in Cajaneburg, in Schweden

Erste innere Berühr.	$T =$	$9^h\,20'\,46''$ wah. Zeit
Letzte äussere	$T' =$	15 32 26 ......
Hypoth. Länge von Paris		$1^h\,41'\,39''$ östlich

in Tahiti

$T_{,} = 21^h\,44'\,\ 4''$
$T'_{,} = 27 \ 32 \ \ 8$
Länge $10^h \ 7' \ 22''$ westlich

Nach dem Vorhergehenden ist aber die Pariser Zeit der geoc. ersten inneren Berührung

$$\vartheta = 7^h \ 48' \ 21''.1$$

und der geocentrischen letzten äusseren Berührung

$$\vartheta' = 13^h \ 46' \ 39''.3$$

Es ist daher für den Eintritt

$(a - \alpha) \operatorname{Cos} \delta = 582''$ Differenz der Länge
$d - \delta = 623''5 + 87.3 = 710.8$ Diff. der Breite

$$\omega = 50^\circ\ 41'$$
$$P = -12.79$$
$$Q = -15.62$$

und eben so für den Austritt

$$-839.4$$
$$+623.5 - 125.9 = 497.6$$
$$\omega' = -30^\circ\ 40'$$
$$P' = -16.61$$
$$Q' = +9.85$$

Weiter hat man für Cajaneburg, Polhöhe

$$\varphi = 64^\circ\ 13'$$

Eintritt

$$\lambda = 158^\circ\ 38'$$
$$\beta = 66^\circ\ 35'$$
$$B = 0.3961$$
$$C = 0.9176$$

Austritt

$$\lambda' = 7^\circ\ 0'$$
$$\beta' = 75\ \ 15$$
$$B' = -0.2337$$
$$C' = 0.9670$$

und für Tahiti

$$\varphi = -17^\circ\ 29'$$

Eintritt

$$\lambda = 29^\circ\ 9'$$
$$\beta = -30\ \ 31$$
$$B_, = -0.6007$$
$$C_, = -0.5078$$

Austritt

$$\lambda' = 132^\circ\ 44$$
$$\beta' = -35\ \ 45$$
$$B_,' = 0.6966$$
$$C_,' = -0.5843$$

Es ist daher

$$P\ (B_, - B\ ) = 12.7491$$
$$Q\ (C_, - C\ ) = 22.2647$$
$$P'\ (B' - B_,') = 15.4523$$
$$Q'\ (C' - C_,') = 15.2803$$

und

$$(T'_, - T_,) - (T' - T) = 1416''$$

Die Differenz der Gleichungen 1, 3 gibt

$$q = \frac{739}{35.0138} = 21.1$$

und die der 2, 4 gibt

$$q = \frac{677}{30 . 7326} = 22.0$$

und die Differenz dieser beyden Werthe von q zeigt, dass die geographischen Längen eines oder beyder Beobachtungsorte nicht genau richtig angenommen wurde. Unabhängig von dieser Annahme gibt die Gleichung III.

$$q = \frac{1416}{65.7464} = 21.54$$

und dieser Werth von q stimmt auch mit dem Mittel aus den beyden vorhergehenden überein.

Hat man so

$$q = p - \pi = 21.54$$

gefunden, so wird man daraus leicht den Werth von π ableiten, da man das Verhältniss der Grössen $\frac{\pi}{p}$ bereits kennt. Es ist nähmlich

$$\frac{\pi}{p} = \frac{\text{Dist. } ♀ ♁}{\text{Dist. } ☉ ♁} = a$$

also da

$$a = 0.284647$$

ist

$$\pi = \frac{a}{1 - a} \cdot q = (0.39791)\, q$$

also da

$$q = 21.54$$

war,

$$\pi = 8''.56$$

Wir haben oben gesehen, dass der Durchmesser der Venus oder 57″ eine Zeit von 19 Minuten braucht, in den Rand der Sonne einzutreten, so dass also jede Raumsecunde 20 Zeitsecunden zum Ein- oder Austritt braucht, oder dass jede Raumsecunde, die man in dem Halbmesser fehlerhaft angenommen hat, die Dauer schon in 20 Zeitsecunden verändert, daher man die Werthe von μ und m mit grosser Schärfe haben muss.

§. 6.

Das Vorhergehende zeigt zugleich, dass diese Erscheinungen ein sicheres Mittel geben, die Fehler der Tafeln in Länge und Breite, oder in Rectascension und Declination zu bestimmen. Vorzüglich geschickt sind sie zur genauen Bestimmung der Länge des Knotens der Venusbahn mit der Ekliptik. Hat man nähmlich die Werthe der Grösse d a, d d aus den vorhergehenden Bedingungsgleichungen entwickelt, so findet man für jede Zeit einer Beobachtung die wahre geocentrische Länge und Breite der Venus, und kann daher die Zeit T der Conjunction, und die Länge S der Sonne und der Venus, so wie die geocentrische Breite β der Venus in der Conjunction genau berechnen. Ist nun, wie zuvor,

$$a = \frac{\text{Dist. } ♀ ♁}{\text{Dist. } ☉ ♁}$$

und b die heliocentrische Breite der Venus in der Conjunction, so ist

$$\operatorname{tg} b = \frac{a \operatorname{tg} \beta}{1 - a}.$$

Heisst dann N die Neigung der Venusbahn gegen die Ekliptik, und x die Differenz der hel. Länge der Venus und der Länge des Knotens, so ist

$$\operatorname{Sin} x = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} N} = \frac{a \operatorname{tg} \beta}{(1 - a) \operatorname{tg} N}$$

nnd die Länge des Knotens ist

$$180 + S \pm x$$

das untere Zeichen, wenn die Conjunction nach dem Durchgange der Venus durch den Knoten Statt hatte.

ACHTES KAPITEL.

Verfertigung der Erd- und Himmelskarten, der Sonnenuhren und der Kalender.

§. 1.

Die Methoden, einzelne Theile der Oberfläche der Erde oder auch die ganze Oberfläche derselben auf einer Ebene zu verzeichnen, sind so verschieden, als die Absichten, welche man dadurch zu erreichen sucht.

Von einem gegebenen Standpunct des Auges werde nach dem Mittelpunct der kugelförmigen Oberfläche der Erde eine gerade Linie gezogen, und auf diese gerade Linie eine Ebene senkrecht gestellt, so werden alle Linien von dem Auge nach den verschiedenen Puncten der Oberfläche der Erde jene Ebene in Puncten schneiden, welche die Projectionen jener Puncte der Erde heissen. Diese Projectionen sind nach den verschiedenen Standpuncten des Auges verschieden.

Denkt man sich das Auge in einer unendlichen Entfernung von der Erde, so werden alle Linien von dem Auge nach den verschiedenen Puncten der Erde unter einander parallel seyn, und auf der Ebene der Projection senkrecht stehen. Das Bild der Oberfläche der Erde, welches dadurch auf der Projectionsebene entsteht, heisst die orthographische Projection der Erde. So ist z. B. die orthographische Projection einer geraden Linie a, welche gegen jene Ebene um den Winkel n geneigt ist, gleich a Cos n, und die Projection eines Kreises, des Halbmessers r und der Neigung n, ist eine Ellipse, deren halbe Axen r und r Cos n sind. Um eben so die orthographische Projection der Halbkugel der Erde oder des Himmels z. B. auf die Ebene des Äquators zu erhalten, wo das Auge in der Richtung der Weltaxe in einer unendlichen Entfernung gedacht wird, verzeichnet man auf irgend einer Ebene, welche die des Äquators vorstellt, einen Kreis, dessen Halbmesser jener des Äquators und gleich der Einheit seyn soll, und theilt die Peripherie desselben von fünf zu fünf, oder von zehn zu zehn Graden ein. Die Durchmesser dieses Kreises werden die Projectionen der Meridiane; der Mittelpunct des Kreises wird die Projection des Poles, und jeder mit dem Äquator concentrische Kreis wird die Projection eines der Parallelkreise der Erde seyn. Ist δ der Abstand dieses Parallelkreises vom Äquator, so wird der Halbmesser seiner Projection gleich Cos δ seyn. Die Projection der Ekliptik endlich wird eine Ellipse seyn, deren grosse Axe durch die Puncte 0° und 180° des Äquators geht, und gleich 2 und deren kleine Axe gleich

$$2 \operatorname{Cos} 23^\circ \, 28'$$

ist.

Um eben so die orthographische Projection der Halbkugel auf die Ebene des Colurs der Solstitien zu erhalten, werden, da dieser Colur durch die Pole des Äquators und der Ekliptik geht, die Projectionen des Äquators und der Ekliptik, so wie aller jener beyden parallelen Kreise, als gerade Linien erscheinen. Der Mittelpunct des die ganze Projection der Halbkugel einschliessenden Kreises, dessen Halbmesser die Einheit seyn soll, wird die Projection des Äquinoctialpunctes seyn. Jeder Declinationskreis, dessen Rectascension α, so wie jeder Breitenkreis, dessen Länge λ ist, wird endlich in der Projection als eine Ellipse dargestellt werden, von welcher die beyden halben Axen bey jenen

$$1 \text{ und } \operatorname{Sin} \alpha$$

und bey diesen

$$1 \text{ und } \operatorname{Sin} \lambda$$

sind.

In der orthographischen Projection der Hämisphäre auf die Ebene des Meridians endlich werden der Äquator und seine Parallelkreise gerade Linien, jeder Stundenkreis aber, dessen Stundenwinkel s ist, eine Ellipse seyn, deren halbe Axe

$$1 \text{ und } \operatorname{Cos} s$$

ist. Alles diess ist zu einfach, um einer weitern Erklärung zu bedürfen.

§. 2.

Nimmt man aber den Standpunct des Auges auf der Oberfläche der Erde, dem zu entwerfenden Lande gegenüber, so erhält man auf der Ebene, welche senkrecht auf der Linie vom Auge nach dem Mittelpuncte der Kugel steht, die **stereographische Projection**. Gewöhnlich lässt man jene Ebene durch den Mittelpunct der Erde gehen.

Es sey (Fig. 10) AZBO der grösste Kreis der Kugel, welcher durch den Durchschnitt der Kugel mit einer Ebene entsteht, die durch das Auge O und den Mittelpunct C der Kugel geht. Sey AB die Durchschnittslinie der Ebene dieses Kreises mit der

Ebene der Projection, und M ein gegebener Punct der Oberfläche der Kugel. Man suche den Ort der Projection dieses Punctes M.

Schneidet die Linie M O die Ebene der Projection in m, so ist m die Projection von M. Man ziehe von m auf A B die senkrechte Linie

$$m q = y$$

und nenne

$$C q = x,$$

so sind

$$x \; y$$

die gesuchten Coordinaten des Punctes m.

Sey P ein seiner Lage nach gegebener Punct jenes grössten Kreises, und

$$\begin{aligned} P Z &= \alpha \\ P M &= \beta \\ Z P M &= \gamma \end{aligned}$$

gegeben. Man suche

$$Z M = \varphi$$

und

$$P Z M = \psi.$$

In dem sphärischen Dreyecke

$$P Z P$$

ist

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma \\ \sin\varphi \sin\psi &= \sin\beta \sin\gamma \end{aligned}$$

und

$$\sin\varphi \cos\psi = \frac{\cos\beta - \cos\alpha \cos\varphi}{\sin\alpha}$$

das heisst

$$= \cos\beta \sin\alpha - \sin\beta \cos\alpha \cos\gamma$$

Ist aber der Halbmesser der Kugel die Einheit, so ist

$$C m = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi$$

und

$$B C m = P Z M = \psi,$$

also ist in dem rechtwinklichten Dreyecke C q m

$$x = - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi \cos\psi$$

und

$$y = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi \sin\psi$$

oder

$$x = -\frac{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\psi}{1 + \operatorname{Cos}\varphi}$$

und

$$y = \frac{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\psi}{1 + \operatorname{Cos}\varphi}$$

Substituirt man in diesen Ausdrücken die vorhergehenden Werthe von φ und ψ, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\gamma - \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta}{1 + \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\gamma} \\ y &= \frac{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\gamma}{1 + \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\gamma} \end{aligned}\right\} (A)$$

Auch kann man den Ort der Projection m durch Polarcoordinaten bestimmen. Ist nämlich p die Projection des Puncts P und

$$pm = r, \; qpm = v$$

so ist

$$Cp = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

also

$$r^2 = \left(x + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 + y^2$$

und

$$\operatorname{tg} v = \frac{y}{x + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Substituirt man in diesen Ausdrücken die vorhergehenden Werthe von x und y, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Cos}\beta}{1 + \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\gamma}} \\ \operatorname{tg} v &= \frac{\operatorname{Cotg}\frac{\beta}{2} \operatorname{Sin}\gamma}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{Cotg}\frac{\beta}{2} \operatorname{Cos}\gamma} \end{aligned}\right\} (B)$$

Die Gleichungen (A) oder (B) enthalten die ganze Theorie der stereographischen Projection.

I. Verändert der Punct M seine Lage gegen P so, dass β constant bleibt, während γ sich ändert, so beschreibt M einen Kreis auf der Oberfläche der Kugel, dessen Pol P ist. Um die Gleichung der Projection dieses Kreises zu finden, eliminire man die Grösse γ aus den Gleichungen (A), wodurch man erhält

$$y^2 + \left(x + \frac{\text{Sin }\alpha}{\text{Cos }\alpha + \text{Cos }\beta}\right)^2 = \left(\frac{\text{Sin }\beta}{\text{Cos }\alpha + \text{Cos }\beta}\right)^2$$

Diese Projection ist also wieder ein Kreis, dessen Halbmesser

$$R = \left(\frac{\text{Sin }\beta}{\text{Cos }\alpha + \text{Cos }\beta}\right)$$

ist, und die Coordinaten seines Mittelpuncts, welcher in der Axe AB der x liegt, sind

$$y' = 0$$

und

$$x' = CC' = \frac{\text{Sin }\alpha}{\text{Cos }\alpha + \text{Cos }\beta}$$

für

$$\beta = 0$$

ist

$$y = 0$$

und

$$x = C\,p = -\,\text{tg }\frac{\alpha}{2}.$$

die Coordinaten der Projection p des Punctes P.

Für

$$\gamma = 0$$

ist

$$y = 0$$

und

$$x = \text{tg }\frac{\beta - \alpha}{2}$$

ür die Projection des Bogens ABZ auf der Linie A B.

II. Verändert aber der Punct M seine Lage gegen P so, dass γ constant bleibt, während β sich ändert, so beschreibt der Punct M einen Kreis auf der Oberfläche der Kugel, dessen Ebene gegen die Ebene des Kreises AZB um den Winkel γ zu geneigt ist. Um die Gleichung der Projection dieses Kreises zu finden, eliminire man β aus den Gleichungen (A), wodurch man erhält

$$\left(y + \frac{\text{Cotg }\gamma}{\text{Sin }\alpha}\right) + (x - \text{Cotg }\alpha)^2 = \frac{1}{\text{Sin}^2\,\alpha\ \text{Sin}^2\,\gamma}$$

Die Projection ist also wieder ein Kreis, dessen Halbmesser

$$R = \frac{1}{\text{Sin }\alpha\ \text{Sin }\gamma}$$

ist, und dessen Mittelpunct die Coordinaten hat

$$x' = \text{Cotg }\alpha$$

und

$$y' = -\frac{\mathrm{Cotg}\, y}{\mathrm{Sin}\, \alpha}$$

III. Sey z die Distanz zweyer Orte

$$A, B$$

auf der Oberfläche der Kugel, und z′ die Distanz der Projectionen a, b jener Orte. Um zu sehen, wie z′ von z abhängt, sey die Distanz eines gegebenen Punctes P der Oberfläche der Kugel von jenen beyden Orten,

$$PA = x,$$
$$PB = y,$$

und die Distanz der Projection p des Punctes P von jenen beyden Projectionen

$$pa = x',$$
$$pb = y'.$$

Da die drey Puncte

$$P, A, B$$

ein sphärisches, die drey Puncte

$$p, a, b$$

aber ein ebenes Dreyeck bilden, und in beyden Dreyecken die Winkel an P und p einander offenbar gleich sind, so hat man, wenn dieser Winkel m heisst, in dem sphärischen Dreyecke

$$\mathrm{Cos}\, z = \mathrm{Cos}\, x\, \mathrm{Cos}\, y + \mathrm{Sin}\, x\, \mathrm{Sin}\, y\, \mathrm{Cos}\, m$$

und in dem ebenen Dreyecke

$$z'^2 = x'^2 + y'^2 - 2\, x'\, y'\, \mathrm{Cos}\, m$$

Eliminirt man Cos m aus diesen beyden Gleichungen, und bemerkt man, dass man hat

$$x' = \mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2}\, x$$

und

$$y' = \mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2}\, y$$

so erhält man nach einigen leichten Reductionen

$$z' = \frac{\mathrm{Sin}\, \frac{1}{2}\, z}{\mathrm{Cos}\, \frac{1}{2} x\; \mathrm{Cos}\, \frac{1}{2} y}$$

§. 3.

Aus der Vorhergehenden wird man sich ohne Mühe folgende Verzeichnungen erklären.

Für die stereographische Polarprojection steht das Auge im Pole des Äquators; die Projectionsebene ist der Äquator selbst. Man beschreibe einen Kreis, den Äquator, und theile die Peripherie desselben in Grade ein. Die Halbmesser dieses Kreises sind die Projectionen der Meridiane (weil §. 2. II. $\alpha = 0$, also R unendlich ist), und der Mittelpunct jenes Kreises ist die Projection des dem Auge gegenüber stehenden Poles. Die Parallelkreise des Äquators sind andere, dem ersten parallelen Kreise, deren Halbmesser tg $\frac{1}{2}\beta$ ist, wenn β der Abstand des Parallelkreises vom Pole ist (weil §. 2. I. $\alpha = 0$, also $x' = 0$ und $R = \text{tg}\,\frac{1}{2}\beta$ ist).

Für die stereographische Äquatorialprojection steht das Auge im Äquator gewöhnlich in dem Puncte desselben, dessen geographische Länge

$$90 \text{ oder } 270^\circ$$

ist. Die Projectionsebene ist dann die des ersten Meridians. Dieser erste Meridian werde durch einen Kreis vorgestellt. Zwey auf einander senkrechte Durchmesser stellen einer den Äquator, und der andere die Axe des Äquators vor; die beyden Endpuncte des letztern Durchmessers sind die Projectionen der beyden Pole. Um die Projection des Parallelkreises zu verzeichnen, dessen Abstand vom Pol β ist, nehme man auf dem zweyten verlängerten Durchmesser vom Mittelpuncte aus eine Linie

$$x' = \frac{1}{\text{Cos}\,\beta}$$

so ist der andere Endpunct dieser Linie der Mittelpunct des Kreises, der Projection jenes Parallelkreises, und der Halbmesser desselben ist

$$R = \text{tang}\,\beta$$

wie aus §. 2. I. folgt, wenn

$$\alpha = 90^\circ$$

ist. Um den Meridian zu verzeichnen, dessen Abstand vom Auge γ Grade ist, nehme man auf dem verlängerten ersten Durchmesser vom Mittelpuncte aus eine Linie

$$y' = \text{Cotg}\,\gamma$$

so ist der andere Endpunct dieser Linie der Mittelpunct des Kreises, der Projection jenes Meridians, und der Halbmesser desselben ist

$$R = \frac{1}{\text{Sin}\,\gamma}$$

wie aus §. 2. II. folgt, wenn

$$\alpha = 90^\circ$$

ist.

Andere Projectionen s. m. in J. T. Mayers Anweisung zur Verfertigung der Land-, See- und Himmelskarten. III. Ausgabe. Erlangen 1815.

§. 4.

Die vorhergehenden perspectivischen Projectionen haben den Nachtheil, dass nur derjenige Theil der Oberfläche der Erde, welcher dem Auge gegenüber liegt, in der Karte dem Originale getreu abgebildet wird, während die seitwärts liegenden Theile immer mehr und mehr von ihrem Urbilde auf der Kugel abweichen. Wir wollen daher noch einige andere Verzeichnungen geben, durch welche alle Theile eines gegebenen Stückes der Oberfläche der Erde so viel möglich mit gleicher Genauigkeit dargestellt werden, ohne dabey auf einen besondern Standpunct des Auges Rücksicht zu nehmen.

I. Das einfachste wäre, die Meridiane und Parallelkreise alle durch gerade, auf einander senkrechte und von einander gleich weit entfernte Linien vorzustellen. Da aber die Grade der Parallelen denen der Meridiane nicht gleich sind, sondern wie der Cosinus der geographischen Breite abnehmen, so ist klar, dass auf diese Weise ein auch nur kleines Stück der Oberfläche der Erde nicht mehr richtig abgebildet werden kann; die Unrichtigkeiten dieser Zeichnung werden desto grösser seyn, je näher das Land bey den Polen liegt, und je mehr es Ausdehnung in der Länge hat. Zu den Vortheilen dieser Entwerfungsart gehört die leichte Construction; der senkrechte Stand der Meridiane auf den Parallelen, wie auf der Kugel, und die Leichtigkeit, mit welcher sich die Längen und Breiten der Orte sowohl in einer solchen Karte eintragen, als auch wieder von ihr abnehmen lassen.

II. Mehr Ähnlichkeit mit dem Urbilde wird folgende Zeichnung haben. Man ziehe nahe durch die Mitte der Zeichnung einen geradlinichten Meridian, theile ihn in seine Grade g, und ziehe durch die Theilungspuncte auf diesen Meridian senkrechte Linien. Auf zweyen dieser senkrechten Linien, welche die Parallelkreise vorstellen, nehme man die einzelnen Grade γ der Länge in demselben Verhältnisse, wie oben die Breitengrade. Behält man nähmlich die Bezeichnung des X. Cap. §. 5. des ersten Buches bey, so ist der Breitengrad

$$g = \frac{a\pi(1-\epsilon^2)}{180\,(1-\epsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

und der Längengrad

$$\gamma = \frac{a\pi \operatorname{Cos}\varphi}{180\,(1-\epsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

wo man der Kürze wegen

$$\epsilon = 0$$

also

$$g = \frac{a\pi}{180}, \gamma = \frac{a\pi}{180} \operatorname{Cos}\varphi$$

setzen kann.

Zieht man endlich durch diese Theilungspuncte der Parallelen gerade Linien, so werden diese die übrigen Meridiane der Karte vorstellen. Auch eine solche Entwerfungsart ist leicht und einfach, und ihre Übereinstimmung mit dem Originale, wenigstens bey nicht grossen Ländern, hinreichend genau, aber sie hat den Nachtheil, dass bloss der mittlere Meridian auf seiner Parallele senkrecht steht, und dass die übrigen Meridiane desto mehr von der wahren Lage gegen die Parallelen abweichen, je weiter sie von dem mittlern Meridian entfernt sind; und dass nur jene zwey Parallelgrade, die unmittelbar aufgetragen wurden, ihr wahres Verhältniss gegen die Meridiangrade haben. Gehören z. B. jene zwey Parallelen zu den Breiten

$$\alpha \text{ und } \alpha'$$

und ist wie vorhin

$$g = \frac{a\pi}{180},$$

so sind die Werthe der Längengrade auf jenen Parallelen

$$\gamma = g \operatorname{Cos} \alpha, \gamma' = g \operatorname{Cos} \alpha'.$$

Eben so ist der Längengrad eines jeden andern Parallelkreises, dessen Breite α'' ist, gleich

$$\gamma'' = g \operatorname{Cos} \alpha''.$$

Allein in der Zeichnung ist, wie man leicht sieht, dieser Längengrad

$$\frac{g\,[(\alpha''-\alpha') \operatorname{Cos} \alpha - (\alpha''-\alpha) \operatorname{Cos} \alpha']}{\alpha - \alpha'}$$

und der Unterschied der beyden letzten Ausdrücke ist der Fehler der Längengrade des Parallelkreises der Breite α''. Es ist daher im Allgemeinen am vortheilhaftesten, jene beyden Parallelkreise in gleichen Abständen von einander und von den beyden Gränzen der Karte zu wählen.

III. Genauer noch wird die Zeichnung mit dem Originale übereinstimmen, wenn man statt den in II. durch die Theilungspuncte des mittlern Meridians senkrechte gerade Linien, Kreisbogen zieht, und auf zweyen derselben, die z. B. zu den Breiten

$$\alpha \text{ und } \alpha'$$

gehören, die Längengrade

$$\gamma = g \operatorname{Cos} \alpha, \gamma' = g \operatorname{Cos} \alpha'$$

nimmt, und diese Theilstriche durch gerade Linien vereinigt. Damit aber diese geraden Linien alle in einem Puncte, dem Mittelpuncte aller jener Kreise, sich schneiden, d. h. damit diese geraden Linien, die Meridiane, alle auf ihrem Bogen, der Parallele, senkrecht stehen, so muss der Mittelpunct dieser Kreise in der geraden Linie des mittlern Meridians, wie man leicht sieht, so genommen werden, dass seine Entfernung von dem Parallelkreis der Breite α gleich

$$\frac{g(\alpha - \alpha') \operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha' - \operatorname{Cos} \alpha}$$

ist.

Diese Entwerfungsart, eine der leichtesten und besten für die Ausübung, ist von de l'Isle vorgeschlagen, und von Euler (Acta Acad. Petrop. 1777) näher untersucht worden. Sie ist schon sehr geschickt, selbst grosse Theile der Oberfläche der Erde mit einer hinlänglichen Genauigkeit darzustellen, daher sie auch zu einer Generalkarte des russischen Reiches mit Vortheil angewendet wurde.

IV. Man denke sich zwey Parallelkreise einer Kugel, die zu den Breiten

$$\alpha \text{ und } \alpha'$$

gehören, und einen Kegel, welcher jene Kugel ringsum in dem Parallelkreis berührt, der zwischen jenen beyden in der Mitte liegt, oder zu den Breiten

$$\frac{\alpha + \alpha'}{2}$$

gehört, und dessen Spitze in irgend einem Puncte p der verlängerten Erdaxe liegt. Ist die Entfernung

$$\alpha' - \alpha$$

der beyden Parallelkreise nicht zu gross, so kann man die zwischen ihnen liegende Zone der Oberfläche der Erde nahe gleich dem Theile der Oberfläche des Kegels ansehen, welcher zwischen den beyden Ebenen jener Parallelkreise enthalten ist, und dann diese Kegelfläche in eine Ebene entwickeln.

Ist m einer der Puncte der Kugel, durch welchen der mittlere Parallelkreis der Breite

$$\frac{\alpha + \alpha'}{2}$$

geht, und C der Mittelpunct der Kugel, a ihr Halbmesser, und die Entfernung pm gleich R, so ist in dem rechtwinklichten Dreyecke

C p m

der Winkel an dem Mittelpuncte C gleich

$$90 - \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha'),$$

also auch

$$R = a \operatorname{Cotg} \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha').$$

Da ferner ein Längengrad des mittlern Parallels gleich

$$g \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha')$$

ist, so ist die Neigung n der zwey geraden Linien, die durch den Scheitel p des Kegels gehen, und auf dem mittlern Parallelkreise einen Längengrad begränzen,

$$n = \frac{g}{R} \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') = \frac{g}{a} \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha').$$

Aber

$$g = \frac{a\pi}{180}$$

also

$$\frac{g}{a} = \frac{\pi}{180} = \frac{1}{57.296}$$

und daher

$$n = \frac{\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha')}{57.296}$$

Stellt daher eine gerade Linie den mittlern Meridian der Karte, und in ihr der Punct m den Durchschnitt dieses Meridians mit jenem mittlern Parallelkreise vor, so nehme man in jener geraden Linie von m bis p eine Linie

$$mp = R = a \operatorname{Cotg} \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha'),$$

und beschreibe aus p als Mittelpunct mit dem Halbmesser R einen Kreis, so wird dieser Kreis die Entwicklung des mittlern Parallelkreises auf der Fläche des Kegels seyn. Trägt man dann von dem Puncte m auf- und abwärts in der Linie mp die Theilpuncte für die einzelnen Breitengrade ein, und zieht durch diese Theilpuncte aus dem Mittelpuncte p mit dem ersten concentrische Kreise, so werden diese Kreise für die Entwicklungen der übrigen Parallelkreise der Kugel auf der Kegelfläche angesehen werden können. Trägt man dann auf den mittlern durch m gehenden Parallelkreis von dem Puncte m zu beyden Seiten die Bogen

$$n = \frac{\operatorname{Sin} \frac{\alpha + \alpha'}{2}}{57.296}$$

ein, und verbindet diese Theilpuncte mit dem Puncte p durch gerade Linien, so erhält man die übrigen Meridiane der Karte.

In dieser Entwerfungsart stehen also, wie in der vorhergehenden, die Meridiane senkrecht auf ihren Parallelen, wie auf der Kugel, und obschon nur der mittlere Parallelkreis die Längengrade genau gibt, so ist doch die Abweichung der übrigen von der Wahrheit nicht zu gross, wenn die Ausdehnung des zu entwerfenden Landes nicht über zwanzig Grade in Länge und Breite beträgt.

V. Noch genauer wird die Übereinstimmung dieser Zeichnung mit dem Urbilde auf der Kugel seyn, wenn man in IV., nachdem man die verschiedenen concentrischen Parallelkreise aus dem Mittelpuncte p beschrieben hat, nicht bloss in dem mittlern durch m gehenden Parallelkreis, sondern auch in jedem andern Parallelkreise, dessen Breite α'' ist, die Längengrade

$$n = \frac{\operatorname{Sin} \alpha''}{57.296}$$

einträgt, und dann diese Theilstriche durch Linien, die andern Meridiane der Karte, verbindet, welche Linien also Curven seyn werden, die alle auf ihren Parallelkreisen nahe senkrecht stehen, und mit den letzten Vierecke bilden, welche mit den ihnen entsprechenden sphärischen Rechtecken auf der Kugel nahe übereinstimmen werden. Diese Entwerfungsart, welche zuerst Bonne vorgeschlagen hat, ist von allen vorhergehenden die vortheilhafteste, daher sie auch am meisten gebraucht wird. Man wird durch sie Theile der Oberfläche der Erde, die nicht über 100 und 120 Grade in Länge, und 60 bis 70 Grade in Breite einnehmen, noch mit hinlänglicher Genauigkeit darstellen.

Ist φ die Breite und λ die Länge eines Punctes q vom mittleren Meridian gezählt, so ist der Halbmesser des mittleren Parallelkreises

$$p\,m = R = a \operatorname{Cotg} \tfrac{1}{2} (\alpha + \alpha')$$

und eben so der Halbmesser des Parallelkreises jenes Punctes

$$r = R - g\,(\varphi - \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha')),$$

so wie der Winkel v, welchen die geraden Linien q p und m p in ihrem Durchschnittspuncte p bilden,

$$v = \frac{g\,\lambda}{r} \operatorname{Cos} \varphi$$

Eliminirt man aus den beyden letzten Gleichungen die Grösse φ, so erhält man die Gleichung zwischen den Polarcoördinaten r, v für die krumme Linie des Meridians, welcher zu der Länge λ gehört.

Nennt man endlich $d^2 S$ ein Element der Fläche zwischen zwey Meridianen und zwey Parallelkreisen, von welchen die ersten zu den Längen

$$\lambda \text{ und } \lambda + d\lambda,$$

die zweyten zu den Breiten

$$\varphi \text{ und } \varphi + d\varphi$$

gehören, so ist die Basis dieses Viereckes

$$r \left(\frac{dr}{d\lambda}\right) d\lambda = g \operatorname{Cos} \varphi \,.\, d\lambda$$

und die Höhe desselben

$$-\left(\frac{dr}{d\varphi}\right) d\varphi = g\, d\varphi,$$

also auch

$$d^2 S = g^2 \operatorname{Cos} \varphi \,.\, d\varphi\, d\lambda$$

welcher Ausdruck von

$$\varphi = \varphi'$$

bis

$$\varphi = \varphi''$$

integrirt, gibt

$$S = g^2 \lambda (\operatorname{Sin} \varphi'' - \operatorname{Sin} \varphi)$$

wo λ die Ausdehnung der Zone in Länge bezeichnet, und da dieser Ausdruck mit dem im X. Cap. §. 5 des ersten Theiles gegebenen für

$$\varepsilon = 0$$

identisch ist, so folgt, dass durch diese Entwerfungsart der Flächeninhalt der zu zeichnenden Theile der Oberfläche der Kugel genau dargestellt wird.

VI. Wenn man aber in der Verzeichnung V die Parallelen als gerade, auf dem mittlern Meridian senkrechte Linien annimmt, und dann auf jeden dieser geradlinichten Parallelen die ihm entsprechenden Werthe der verschiedenen Längengrade einträgt, und diese Puncte durch krumme Linien, die Meridiane, verbindet, so entsteht die bekannte Flamsteedische Verzeichnung, welche man besonders zu Himmelskarten anzuwenden pflegte. Wenn sie gleich nicht der in V vorgetragenen an Genauigkeit gleich kömmt, so kann man doch noch beträchtliche Theile der Oberfläche der Erde mit hinlänglicher Genauigkeit durch sie darstellen, und sie vereinigt mit der Leichtigkeit der Zeichnung noch den Vortheil, welchen sie mit der vorhergehenden gemein hat, dass der Flächeninhalt der Karte mit jenem der Kugel übereinstimmt. Ist nämlich wieder λ φ die Länge und Breite eines Punctes der Karte, und sind x y die senkrechten Coordinaten des Punctes, wo man x auf dem mittlern Meridian vom Äquator an nimmt, so hat man

$$x = g\varphi$$

und

$$y = g \lambda \operatorname{Cos} \varphi$$

und daher das Element der Fläche der Karte

$$dS = y\,dx = g^2 \lambda \operatorname{Cos} \varphi \,.\, d\varphi$$

welcher Ausdruck von

$$\varphi = \varphi'$$

bis

$$\varphi = \varphi''$$

integrirt, gibt

$$S = g^2 \lambda (\operatorname{Sin} \varphi'' - \operatorname{Sin} \varphi).$$

Eliminirt man endlich aus den gegebenen Werthen von x und y die Grösse φ, so erhält man

$$y = g \lambda \operatorname{Cos} \frac{x}{g}$$

die Gleichung der Meridiane der Karte.

Über andere Verzeichnungen s. m. nebst dem oben angezeigten Werke Mayers die monatl. Corresp. Vol. 11. 13 und 14.

§. 5.

Wir wollen nun sehen, wie man auf einer gegen den Horizont und gegen den Meridian willkührlich geneigten Ebene eine Sonnenuhr verzeichnet. Es sey

E A B

(Fig. 11) diese Uhrebene,

H M R

die Ebene des Meridians, und

E T H R B

die Ebene des Horizonts, also

T M

der Durchschnitt der Uhrebene mit dem Meridian. Ich will diesen Durchschnitt

T M

die Mittagslinie der Uhrebene nennen.

Über der Durchschnittslinie

E T B

der Uhrebene mit dem Horizonte errichte man ein Loth

T A

in der Uhrebene, welches Loth die **Basis** der Uhr heisst, und bestimme den Winkel

$$ATM = a$$

der Basis mit der Mittagslinie der Uhr. Zu diesem Zwecke wollen wir eine Verticalebene

$$ZTA,$$

wo Z das Zenith ist, senkrecht auf die Uhrebene stellen. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der Uhrebene wird die Basis

$$TA$$

seyn. In dem so entstehenden bey A rechtwinklichten Dreyecke ist

$$AZM = 90 - ETH.$$

Sey

$$ETH = \delta$$

die **Declination** der Uhrebene, oder der Winkel, welchen die Durchschnitte der Uhrebene und des Meridians im Horizonte bilden, und sey

$$90 - \Delta$$

die Neigung der Uhrebene gegen die Ebene des Horizontes, also

$$ZA = ZTA = \Delta,$$

so hat man, da man die Grössen

$$\delta \text{ und } \Delta$$

leicht aus Beobachtungen bestimmen kann, den Winkel a durch folgende Gleichung

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{Sin} \Delta \operatorname{Cotg} \delta.$$

Für

$$\Delta = 0$$

ist

$$a = 0$$

oder die Mittagslinie und Basis fällt zusammen, wenn die Uhrebene vertical ist.

Ist überdiess in demselben Dreyecke

$$ZM = b, \; AMZ = c,$$

so ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Cotg} b &= \operatorname{Cotg} \Delta \operatorname{Sin} \delta \\ \operatorname{Cos} c &= \operatorname{Cos} \Delta \operatorname{Cos} \delta \end{aligned}$$

I. Es sey nun P der Pol des Äquators, und man lege durch die Axe TP des Äquators eine Ebene PTS, welche auf der Uhrebene senkrecht steht, so ist die Durchschnittslinie TS beyder Ebenen die **Substilarlinie**. Man suche den Winkel

$$MTS = f$$

der Substilarlinie mit der Mittagslinie, und den Winkel

$$PTS = g$$

der Substilarlinie mit der Weltaxe, oder die Neigung der Weltaxe gegen die Uhrebene.

In dem bey S rechtwinklichten Dreyecke MPS ist, wenn φ die Polhöhe des Ortes bezeichnet

$$PM = 90 - \varphi - b.$$

Es sey noch

$$MPS = h$$

so ist

$$\tang f = \operatorname{Cotg} (\varphi + b) \operatorname{Cos} c$$

$$\operatorname{Sin} g = \operatorname{Cos} (\varphi + b) \operatorname{Sin} c$$

$$\operatorname{tg} h = \frac{\operatorname{Cotg} c}{\operatorname{Sin} (\varphi + b)}.$$

Da man die Lage von TM kennt, so kennt man auch, durch den Winkel f, die Lage der Substilarlinie TS. Legt man durch TS ein auf die Uhrebene senkrechtes Dreyeck, dessen Hypothenuse TP mit der Cathete TS den Winkel g bildet, so ist diese Hypothenuse TP die Linie des S t i l e s, dessen Schatten die Stunden anzeigen wird. Diesen Stil wird man also in der Richtung jeder Hypothenuse befestigen.

II. Diess vorausgesetzt, ist es leicht, die Schattenlinie des Stiles oder den Winkel ω dieser Schattenlinie mit der Mittagslinie TM für jeden einzelnen Stundenwinkel s zu finden. Sey PTn ein Abweichungskreis oder ein Stundenkreis. Man suche den Durchschnitt Tn dieses Stundenkreises mit der Uhrebene, oder man suche den Winkel

$$MTn = \omega.$$

In dem Dreyecke MnP ist

$$P = s$$
$$PM = 90 - \varphi - b,$$
$$PMn = c$$

also

$$\operatorname{Cotg} \omega = \frac{\operatorname{Cotg} s \operatorname{Sin} c + \operatorname{Cos} c \operatorname{Sin} (\varphi + b)}{\operatorname{Cos} (\varphi + b)}.$$

oder auch, wenn

$$STn = \omega'$$

ist,

$$\tang\ 'n\ S,$$

das heisst,

$$\tan \omega' = \operatorname{Sin} g \ \operatorname{tg}\cdot(h - s)$$

wo man also für die Stundenwinkel

$$1^h \ 2^h \ 3^h \ \ldots$$

setzt

$$s = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ \ldots,$$

und wo ω von TM, und ω' von TS gezählt wird.

III. Das Vorhergehende enthält die vollständige Theorie der Sonnenuhren auf geneigten Ebenen. Man sucht also zuerst die Mittagslinie (durch a), und die Substilarlinie (durch f).

Auf der Substilarlinie errichtet man eine auf die Uhrebene senkrechte Ebene, und in dieser Ebene befestigt man in der Uhrebene den Stil so, dass er mit der Substilarlinie den Winkel g macht, und dann bestimmt man die Schattenlinien für die einzelnen Stunden durch ω oder ω'.

IV. Für vertikale Uhrebenen werden die vorhergehenden Ausdrücke einfacher. Für sie ist Δ, also auch a und b Null, also bleiben nur folgende Gleichungen

$$\operatorname{tg} f = \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cotg} \varphi$$

$$\operatorname{Sin} g = \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \delta$$

$$\operatorname{Cotg} \omega = \frac{\operatorname{Cotg} s \operatorname{Sin} \delta}{\operatorname{Cos} \varphi} + \operatorname{Cos} \delta \operatorname{tg} \varphi$$

Die Basis TA ist daher hier zugleich die Mittagslinie. Durch die erste dieser Gleichungen erhält man den Winkel f der Basis mit der Substilarlinie; durch die zweyte erhält man den Winkel g der Substilarlinie mit der Weltaxe in der durch die Substilarlinie auf die Uhrebene senkrechten Ebene; durch die dritte endlich erhält man die Winkel der Schattenlinien mit der Basis, und da in der letzten Gleichung für

$$s = 0$$

auch

$$\omega = 0$$

ist, so ist der Mittagsschatten immer in der lothrechten Linie, oder in der Basis T A.

V. Für Mittagsuhren steht die Uhrebene senkrecht auf dem Horizont und auf dem Meridian, also ist

$$\Delta = 0$$

und

$$\delta = 90$$

also auch

$$a = b = f = 0$$

und

$$c = 90$$

Man hat daher

$$g = 90 - \varphi.$$

und

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} s \operatorname{Cos} \varphi$$

für diese Uhren ist also die Basis zugleich die Mittagslinie und die Substilarlinie.

VI. Für Horizontaluhren ist die Uhrebene im Horizonte, also

$$\Delta = b = c = 90$$

und

$$g = \varphi.$$

Man hat daher

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} s \operatorname{Sin} \varphi.$$

VII. Für Äquinoctialuhren ist die Uhrebene im Äquator, also

$$\Delta = b = -\varphi,$$

$$c = 90$$

und daher

$$\omega = s$$

Die einfachste von allen Sonnenuhren ist also die Äquinoctialuhr. Sie ist ein Kreis, dessen Neigung gegen den Horizont gleich

$$90 - \varphi,$$

und durch dessen Mittelpunct senkrecht auf seine Ebene der Stil geht, dessen Schatten auf der in 24 gleiche Theile eingetheilten Peripherie die Stunden anzeigt.

Die einfachste nach dieser ist die Horizontaluhr VI, deren Neigung gegen den Horizont Null ist, und deren Stil gegen die Mittagslinie um den Winkel

$$g = \varphi$$

geneigt ist. Eine andere Kreisebene senkrecht auf diesen Stil und in 24 gleiche Theile getheilt, wird zugleich die Äquinoctialuhr geben. Verlängert man die Schattenlinien dieser Äquinoctialuhr, bis sie die Ebene der Horizontaluhr treffen, so bezeichnen diese Durchschnitte die Schattenlinien der Horizontaluhr. Eben so kann man die Mittagsuhr V, und jede andere mittels der Äquinoctialuhr verzeichnen.

In der Ausübung wird man am bequemsten so verfahren: Vor der Mauer, auf welcher die Uhr verzeichnet werden soll, stellt man einen Tisch horizontal, und über ihm eine parallel mit dem Horizonte bewegliche Stange, von welcher zwey Fäden mit unten spitzen Gewichten bis nahe an den Tisch herabhängen. Auf dem Tische wird eine Mittagslinie gezogen, und die beyden Fäden werden in die Ebene dieser Mittagslinie gebracht. Stellt man das Auge hinter beyden Fäden so, dass sie sich decken, so geben sie auf der Mauer die Projection der Ebene, in welcher der Stift (Stil) in der Mauer befestigt werden muss. Um diesen Stil, der immer durch die beyden Weltpole gehen muss, gehörig zu befestigen, verfertigt man ein rechtwinklichtes Dreyeck, dessen ein Winkel φ, also der andere $90 - \varphi$ ist. Die Cathete bey φ wird über die Hypothenuse hinaus in eine Spitze verlängert, um damit dieses Dreyeck in der Mauer, und zwar in irgend einem Puncte jener Projectionslinie zu befestigen. Während dieser Befestigung sieht man zu, dass die Cathete an φ immer genau horizontal, und die Ebene des Dreyeckes immer in der Ebene jener beyden Fäden liege. Diess vorausgesetzt, wird der Styl parallel mit der Hypothenuse des Dreyeckes in der Mauer befestiget, und dann jenes Hülfsdreyeck wieder weggenommen. So ist der *Stil* der Weltaxe parallel, und man kann die Schattenlinien entweder nach den oben gegebenen Formeln, oder nach einer richtigen Äquinoctial- oder Horizontaluhr, oder endlich auch nach einer berichtigten astronomischen Uhr der wahren Sonnenzeit gemäss auftragen. Bey den beyden letzten Verfahren kann die Mauer selbst eine gekrümmte Fläche seyn.

§. 6.

Es ist nur noch übrig, das Vorzüglichste, welches man bey der Verfertigung der Kalender zu beobachten hat, hier kurz zusammen zu stellen. Die jetzt gebräuchliche Methode der Einschaltungen wurde schon im ersten Capitel des zweyten Buches vorgetragen. Die dort angezeigte Veränderung, welche im Jahre 1582 Gregor XIII. einführte, bildet den Gregorianischen Kalender, welchen jetzt beynahe alle Völker Europa's angenommen haben; die früher gewöhnliche, nach welcher jedes durch vier ohne Rest theilbare Jahr ein Schaltjahr von 366 Tagen, und jedes andere ein gemeines Jahr von 365 Tagen ist, bildet den von Julius Cäsar eingeführten Julianischen Kalender, welchen jetzt noch die Russen brauchen. Die Gründe, welche Gregor XIII. bewogen, jene Reform vorzunehmen, waren 1) die Frühlingsnachtgleiche, nach welcher sich die kirchliche Berechnung des Osterfestes und aller andern beweglichen Festtage richtete, wieder auf den 21. März zurückzuführen, an welchem Tage dieselbe sich im Jahre 325 zur Zeit der nicäischen Kirchenversammlung ereignet hatte, aus welcher Ursache im Jahre 1582 zehn Tage aus dem Monat October weggenommen wurden, wodurch in diesem Jahre die Frühlingsnachtgleiche, welche ohne dieser Änderung auf den 11. März gefallen wäre, auf den 21. März gebracht wurde, und 2) die Frühlingsnachtgleiche für alle Folgezeiten immer sehr nahe auf dem 21. März zu erhalten, aus welcher Ursache immer drey auf einander folgende Säcularjahre gemeine Jahre seyn sollten, wie am a. O. bemerkt wurde.

§. 7.

Man bezeichnet die Tage des Jahres, von dem ersten Januar anzufangen, mit den sieben Buchstaben

$$A, B, C, D, E, F, G,$$

so dass wieder der 8., 15., 22. den Buchstaben A erhält. Derjenige unter diesen Buchstaben, welcher mit dem Sonntage übereinstimmt, heisst der Sonntagsbuchstabe. Da

$$365 = 52.7 + 1$$

ist, so endigt sich jedes gemeine Jahr mit demselben Wochentage, mit welchem es anfängt, woraus folgt, dass die Sonntagsbuchstaben alle Jahre um eine Stelle rückwärts fortrücken, oder dass, wenn G der Sonntagsbuchstabe eines Jahres ist, der des folgenden F, des dritten E, u. s. w. seyn wird. Wenn aber das Jahr ein Schaltjahr von

$$366 = 52.7 + 2$$

Tagen ist, so rückt im folgenden Jahre der Sonntagsbuchstabe um zwey Stellen in verkehrter Ordnung fort. Da ferner der Schalttag nach dem 23. Februar eingerückt wird, so erhalten in einem Schaltjahre der 23. und 24. Februar denselben Buchstaben, nämlich E, woraus folgt, dass jedes Schaltjahr zwey Sonntagsbuchstaben hat, einen z. B. D vom 1. Januar bis 23. Februar, und vom 24. Februar bis 31. December den nächst vorhergehenden C.

Im Julianischen Kalender, wo jedes vierte Jahr ein Schaltjahr ist, werden daher die Sonntagsbuchstaben nach einer Periode von

$$4.7 = 28$$

Jahren wieder zurückkehren, welche Periode der Sonnenzirkel heisst. Man setzte den Anfang dieser Periode neun Jahre vor Christi Geburt, so dass das Jahr der Geburt Christi das zehnte des Sonnenzirkels ist, und da die Sonntagsbuchstaben rückwärts aus ihren Stellen rücken, so hat man dem 28. Jahre oder dem Ende des Sonnenzirkels den Sonntagsbuchstaben A beygelegt.

Aus dem Vorhergehenden wird man leicht für jedes gegebene Jahr A nach Christo den Sonnenzirkel sowohl als den Sonntagsbuchstaben für den Julianischen Kalender finden. Der Sonnenzirkel ist nähmlich der Rest der Division von

$$A + 9 \text{ durch } 28,$$

und damit findet man den Sonntagsbuchstaben nach folgender Tafel

Sonnenzirkel.	Sonntagsbuchstabe.
1	G F
2	E
3	D
4	C
5	B A
6	G
7	F
8	E
9	D C
10	B
11	A
12	G
13	F E
14	D
15	C
16	B
17	A G
18	F
19	E
20	D
21	C B
22	A
23	G
24	F
25	E D
26	C
27	B
28	A

Für das Jahr A = 1820 ist der Sonnenzirkel 9, und der Sonntagsbuchstabe D und C.

I. Für den Gregorianischen Kalender ist der Sonnenzirkel derselbe, wie im Julianischen; der Sonntagsbuchstabe aber wird so gefunden. Da im Jahre 1582 zehn Tage ausgelassen wurden, so rückte dadurch der Julianische Sonntagsbuchstabe um 10, d. h. um 3 Stellen vor, und da das Säcularjahr 1600 auch im Gregorianischen Kalender ein Schaltjahr blieb, so sind von 1582 bis 1700 die Gregorianischen Sonntagsbuchstaben um drey Stellen vor den Julianischen voraus, von 1700 — 1800 um vier Stellen, von 1800 — 1900 um fünf, von 1900 — 2100 um sechs, von 2100 — 2200 um sieben, d. h. um keine Stelle u. s. f.

Für 1820 war der Julianische Buchstabe D, C, also der Gregorianische B, A.

II. Im neunzehnten Jahrhundert dividirt man die seit 1800 verflossene, und um ihren vierten Theil vermehrte Zahl der Jahre durch 7, und subtrahirt den Rest von 5 oder 12, so erhält man die Zahl des Sonntagsbuchstabens im Gregorianischen Kalender, wenn

$$A = 1, B = 2, C = 3 \ldots$$

ist.

So gibt das Jahr 1823, den Sonntagsbuchstaben E.

Ähnliche Vorschriften kann man sich für jedes andere Jahrhundert entwerfen.

Ist der Gregorianische Sonntagsbuchstabe bekannt, so zeigt folgende Tafel, auf welchen Wochentag jeder Monatstag fällt.

April July	Sept. Dec.	Juny	Febr. März Nov.	August	May	Jänner Octob.
1 8 15 22 29	2 9 16 23 30	3 10 17 24 31	4 11 18 25	5 12 19 26	6 13 20 27	7 14 21 28
G	F	E	D	C	B	A
Sonntag	Montag	Dienst.	Mittw.	Donner.	Freytag	Sonnab.

wo der 31. Juny für den 1. July gilt.

So ist für 1823 der Gregorianische Sonntagsbuchstabe E, also alle Tage der Tafel Dienstage, als der 1. 8. July, 2. 9. Dec.; und wenn man sucht, was der 20. März für ein Wochentag ist, so gibt die Tafel den 18. März als Dienstag, also den 20. als Donnerstag.

§. 8.

Ein wichtiger Gegenstand für den Kalender, und besonders für die Festrechnung sind die Neumonde. Schon Meton fand, dass die Neumonde nach 19 Sonnenjahren wieder nahe auf dieselben Monathstage fallen. Fängt man diese Periode, den Mondszirkel, mit einem solchen Jahre an, in welchem der Neumond auf den 1. Januar fiel, so heisst die Zahl, welche anzeigt, das wie vielte ein gegebenes Jahr in dieser Periode ist, die goldene Zahl. Ein solches erste Jahr der Periode war das Jahr, welches unmittelbar vor Christi Geburt herging. Addirt man daher 1 zu dem gegebenen Jahre, und dividirt die Summe durch 19, so gibt der Rest die goldene Zahl, welche, so wie der Sonnenzirkel, für beyde Kalender dieselbe ist.

1820 hat die goldne Zahl 16, und 1823 hat 19.

Wenn man aber die oben gegebene Länge der Revolution der Erde um die Sonne und des Mondes um die Erde unter einander vergleicht, so sieht man, dass diese Methode des Mondszirkels die Neumonde bis auf 1 Stunde 28 Minuten früher, als im vorhergehenden Mondszirkel angibt, ein Fehler, der in 300 Jahren schon einen ganzen Tag beträgt.

§. 9.

Epakte eines Jahres heisst die Anzahl der Tage, welche den 0. Januar dieses Jahres, d. h. den 31. December des vorhergehenden Jahres seit dem letzten Neumonde verflossen sind, oder Epakte ist die Anzahl der Tage, um welche die Neumonde von Jahr zu Jahr früher einfallen; sie sind also der Unterschied einer Anzahl von Sonnenjahren über eine gleiche Anzahl von Mondjahren, in ganzen Tagen ausgedrückt. Da nun das Sonnenjahr

$$365^T\ 5^h\ 49'$$

und der Monat

$$29^T\ 12^h\ 44'$$

beträgt, also das Sonnenjahr um nahe

$$10^T\ 21^h\ 11'$$

länger, als 12 Monate ist, so nahm man in der kirchlichen Rechnung in ganzen Zahlen für den Monat 30 Tage, und für diesen Unterschied 11 Tage an, und setzte folgende Vorschrift fest: Jedes Jahr des Mondszirkels, oder jede goldene Zahl wird durch 11 multiplicirt, und von dem Producte 30 so oft als möglich abgezogen, der Rest ist die Julianische Epakte.

1820 hat die goldene Zahl 16, also die Julianische Epakte 26.

I. Man sieht leicht, dass durch diese Methode die Epakte alle 300 Jahre nahe um einen Tag zu spät fällt. Da ferner im Jahre 1582 zehn Tage weggenommen wurden, so wurde die Gregorianische Epakte um 10 kleiner, als die Julianische, und dieser Unterschied dauerte bis 1700. In diesem Jahre, welches nach dem Gregorianischen Kalender ein gemeines Jahr ist, während es in dem Julianischen ein Schaltjahr blieb, wurde jener Unterschied um 1 Tag vermehrt, und die Gregorianische Epakte ist von 1700 bis 1800 um 11 Tage kleiner. Im Jahre 1800 trat derselbe Fall ein, und jene Differenz hätte für das 19. Jahrhundert in 12 übergehen sollen; da aber nun seit der Gregorianischen Verbesserung beynahe 300 Jahre verflossen waren, folglich die Correction der Julianischen Epakte nach dem vorhergehenden beynahe einen Tag betrug, so behielt man im 19. Jahrhundert die Differenz 11 bey. Dieser Unterschied wird von 1900 bis 2200 gleich 12 seyn.

Man findet daher in dem gegenwärtigen 19. Jahrhundert die Gregorianische Epakte, wenn man von der Julianischen Epakte 11 subtrahirt, und zuerst, wenn es nöthig ist, die Julianische Epakte um 30 vermehrt. So ist für 1820 die Gregorianische Epakte 15.

II. Die Indiction endlich, welche man auch in den Kalendern anzugeben pflegt, ist eine Periode von 15 Jahren (die drey Jahre vor Chr. Geburt anfängt, und), die zu Kaiser Constantins Zeiten bey öffentlichen Verhandlungen eingeführt wurde. Um daher für ein gegebenes Jahr Christi die Indiction zu finden, addirt man 3 zu der Jahrszahl, und dividirt die Summe durch 15, der Rest ist die Indiction, oder Römerzinszahl in beyden Kalendern. So ist 11 die Indiction für 1823.

§. 10.

Nach dem Beschlusse der nicäischen Kirchenversammlung im vierten Jahrhundert „soll Ostern an dem Sonntage gefeyert werden, der zunächst auf den Vollmond nach der Frühlingsnachtgleiche folgt, und wenn dieser Vollmond selbst ein Sonntag ist, „so soll Ostern auf den nächstfolgenden Sonntag verlegt werden." Die kirchliche Frühlingsnachtgleiche aber soll immer auf den 21. März fallen, für den Vollmond aber wird immer der 14. Tag vom Neumonde gerechnet, der Tag des Neumondes selbst für den ersten gezählt.

Auf diese Vorschriften gründet sich folgende Berechnung des Ostersonntages in beyden Kalendern, die Gauss Mon. Corr. 1800 August gegeben, und von der Delambre, Corr. des tems 1817 p. 307 einen Beweis mitgetheilt hat.

Man dividire

das gegebene Jahr durch	19	und nenne den Rest	a
	4		b
	7		c

Man dividire ferner

$(m + 19\,a)$ durch 30 und nenne den Rest d
$n + 2b + 4c + 6d$ durch 7 .... e

So ist immer der Ostersonntag den $(22 + d + e)^{ten}$ März
oder den $(d + e - 9)^{ten}$ April

für den Julianischen Kalender, den auch die Russen brauchen, ist diese Vorschrift ohne Ausnahme, und immer

$$m = 15,\ n = 6$$

für den Gregorianischen Kalender aber muss man folgendes bemerken: Wenn die Rechnung für den Ostersonntag den 26. April gibt, so muss man immer den 19. April nehmen. Wenn die Rechnung für den Ostersonntag den 25. April gibt, und wenn zugleich $d = 18$ und $a > 10$ ist, so muss man immer den 18. April nehmen. Ferner ist im Gregorianischen Kalender

von 1582 bis 1699	...	m = 22	... n = 2
1700 — 1799	....	23	 3
1800 — 1899	....	23	 4
1900 — 2099	....	24	 5

Das Jahr 1818 gibt für den Julianischen Kalender

$a = 13,\ b = 2,\ c = 5$
$d = 22,\ e = 1$

also

Ostersonntag den 14. April,

und für den Gregorianischen Kalender

a, b, c wie zuvor,

$d = 0,\ e = 0$

also

Ostersonntag den 22. März.

I. Nach dem Ostersonntage richten sich dann in beyden Kalendern die beweglichen Feste auf folgende Art: Der Sonntag 9 Wochen vor Ostern heisst Septuagesima, dann folgen bis Ostern die Sonntage Sexagesima, Quinquagesima (den Dinstag darauf ist Fastnacht, und den Mittwoch Aschermittwoch), die Fastensonntage Invocavit, Reminiscere, Oculi, Lätare, Judica und Palmsonntag. Zwischen dem letzten und dem Ostersonntag ist der grüne Donnerstag und der Charfreytag. Vierzig Tage nach Ostern ist an einem Donnerstage der Himmelfahrtstag, und zehn Tage nachher der Pfingstsonntag. Der nächste Sonntag nach Pfingsten ist Trinitatis, und nach diesem werden alle übrigen Sonntage bis zum ersten Adventssonntag, der immer zwischen den 27. November und den 3. December fällt, gezählt. Die vier Quatember sind am Mittwoch nach Invocavit, nach Pfingsten, nach Kreutzerhöhung (den 14. Sept.) und nach Lucia (den 13. Dec.)

§. 11.

Der russische Kalender ist im Allgemeinen derselbe mit dem Julianschen. Doch haben folgende Verschiedenheiten Statt.

I. Beyde Kalender haben zwar dieselben Perioden der Sonnen-, Monds- und Indictionszirkel von 28, 19 und 15 Jahren, aber alle drey haben im russischen Kalender einen gemeinschaftlichen Anfang, die Epoche der Schöpfung, welche sie auf das Jahr 5508 vor Christi setzen. Man findet daher den russischen Sonnen-, Monds- und Indictionszirkel, wenn man 5508 zur Jahreszahl der christlichen Zeitrechnung addirt, und diese Summe durch 28, 19 und 15 dividirt. Daraus folgt, dass die Indiction für beyde Kalender dieselbe ist, und dass man aus dem Julianischen Sonnen- und Mondszirkel den russischen findet, wenn man zum ersten 11 addirt, und vom letzten 3 subtrahirt.

II. Die Sonntagsbuchstaben sind ebenfalls die sieben ersten ihres Alphabets.

1 As oder .. A
2 Wiedi .... B
3 Glagol.... G
4 Dobro .... D
5 Jest ...... E
6 Selo ...... S
7 Semla: weich. S

und man erhält den Sonntagsbuchstaben, wenn man den russischen Sonnenzirkel (I) durch 4 dividirt, und den Quotienten zu dem Sonnenzirkel addirt. So hat das Jahr 1812 den russischen Sonnenzirkel 12, also

$$\frac{12}{4} = 3$$

und

$$12 + 3 = 15.$$

Der Sonntagsbuchstabe ist daher

$$15 \text{ oder } 15 - 2 \cdot 7 = 1 = A.$$

III. Die Epakte (O s n o w a n i e) jedes Jahres der Russen ist mit der Julianischen Epakte einerley. Man findet sie daher, wenn man die Julianische goldene Zahl (oder nach I. die um 3 vermehrte goldene Zahl des russischen Kalenders) durch 11 multiplicirt, und das Product durch 30 dividirt. Was endlich im russischen Kalender Epakta heisst, ist nichts anderes, als das, was man zur Osnowanie addiren muss, um die Zahl 21 oder 51 zu erhalten; so gibt die Osnowanie 14, 25 die Epakta 7, 26.

IV. Die russischen Ostern kommen immer mit den Julianischen überein. Ist der Ostersonntag bekannt, so heisst die Zahl, welche anzeigt, um wie viel Tage der Ostersonntag nach dem 21. März alten Styls fällt, der Kalender-Schlüssel (Klutsch-Granitz). Fällt also z. B. Ostern den 22. 27. März, oder den 4. 15. April, so ist der Schlüssel 1. 6., oder 14. 25.

Die vorzüglichsten beweglichen Festtage sind:

Die Wasserweihe fällt immer auf den 4. Mittwoch, oder den 24. Tag nach Ostern; Himmelfahrt auf den 6. Donnerstag, oder den 39. Tag nach Ostern; Pfingsten auf den 7. Sonntag, oder den 49. Tag nach Ostern; Allerheiligen heisst der Sonntag nach Pfingsten, oder der 56. Tag nach Ostern, und dieser Sonntag ist zugleich der Anfang von Petri Fasten, welche bis zum 27. Juny inclusive dauert. Der Anfang des Triods fällt 70 Tage vor Ostern; Mässopust ist der Sonntag 56 Tage vor Ostern; Süropust ist der folgende Sonntag 49 Tage vor Ostern. Das Fleischessen dauert vom 25. Dec. incl. bis Mässopust incl. Mit dem Sonntage Süropust endigt die Butterwoche, und den darauf folgenden Montag fängt die erste Fastenwoche an, der nächstfolgende Sonntag heisst der Sonntag der ersten Fastenwoche u. f. Der Sonntag Waji (Palmsonntag) schliesst die 6. Fastenwoche, und die 7. Fastenwoche heisst Strastnaja (Leidenswoche).

§. 12.

Die Türken, welche ihren Kalender bloss nach dem Monde einrichten, haben eine Periode von 30 Jahren, deren jedes 354 Tage hat, mit Ausnahme des 2, 5, 7, 10, 13, 16, 18, 21, 24, 26 und 29. Jahres, welche Schaltjahre von 355 Tagen sind. Der Schalttag ist immer der letzte Tag des Jahres. Ihre Äre heisst Hedjschrah, und fängt den 16. Juli des Jahres 622 n. Ch. an, welches der Tag der Flucht Mahommeds von Mecca nach Medina war.

Da jede Periode von 30 Jahren 19 gemeine Jahre von 354 Tagen, und 11 Schaltjahre von 355 Tagen hat, so haben dreyssig Jahre 10631 Tage, oder ein türkisches Jahr ist $354\frac{11}{30}$ Tage, also ist

$$\frac{\text{türk. Jahr}}{\text{julian. Jahr}} = \frac{354\frac{11}{30}}{365\frac{1}{4}} = \frac{1}{1.030712}$$

Ist daher ein Jahr Christi A gegeben, und sucht man das ihm entsprechende türkische Jahr x und den Anfang des letzten, so ist A — 622 die seit dem 16. Juli 622 bis 16. Juli des gegebenen Jahres A verflossene Zahl der Julianischen Jahre, und um diese in türkische Jahre zu verwandeln, hat man

$$x = 1.030712\,(A - 622)$$

Diese Zahl x besteht aus einer ganzen Zahl und einem Bruche. Die ganze Zahl gibt das gesuchte türkische Jahr. Den Bruch bringt man, durch die Multiplication mit $354\frac{11}{30}$ auf Tage, und die so gefundenen Tage werden von 196 Tagen (d. h. vom 1. Januar bis 16. Juli) subtrahirt; der Rest zeigt die vom 1. Januar bis zum Anfange des türkischen Jahres verflossenen Tage nach dem Julianischen Kalender. Der darauf folgende Tag ist daher der gesuchte Neujahrstag der Türken.

Ist die gefundene Zahl der Tage grösser als 196, so wird jene Zahl von

$$196 + 365 = 561$$

abgezogen.

Ex. Man suche den Anfang des türkischen Jahres für das Jahr Christi 1797

$$\begin{array}{r} 1797 \\ 622 \\ \hline \end{array}$$

$$(1175)\,(1.030712) = 1211.0866$$

$$(0.0866)\,(354\tfrac{11}{30}) = 30.69 \text{ oder } \begin{array}{r} 196 \\ 31 \\ \hline 165 \end{array}$$

Das 1797. Jahr Christi ist also das 1211. der Hedjschrah, und der Anfang des 1212. Jahres fällt auf den 165. Tag nach dem ersten Januar, also auf den 15. Juni, Julian. Kal.
26. Juni, Gregor. Kal.

Hat man so ein Jahr, so ist es leicht, durch blosse Addition die nächstfolgenden zu finden, wenn man bemerkt, dass alle Jahr der Hedjschrah Schaltjahre von 355 Tagen sind, die durch 30 getheilt, die Reste 2, 5, 7, 10 ... geben.

So ist

1797 Juni 26 + 354 = 1798 Juni 15	Anfang des	ersten folg. Jahres
1798 Juni 15 + 355 = 1799 Juni 5	.....	zweyten
1799 Juni 5 + 354 = 1800 May 25	.....	dritten
1800 May 25 + 354 = 1801 May 14	.....	vierten u. s. w.

Die Anzahl der Monate jedes Jahres ist zwölf, deren Nahmen vom Anfange des Jahres an sind:

Muharram	hat	30	Tage ..	30
Safor	..	29	....	59
I. Rabia	..	30	....	89
II. Rabia	..	29	....	118
I. Jomada	..	30	....	148
II Jomada	..	29	....	177
Rajab	..	30	....	207
Schaban	..	29	....	236
Ramadan	..	30	....	266
Schwall	..	29	....	295
Dulkada	..	30	....	325
Dulheggia	..	29	....	354

Im Schaltjahre hat Dulheggia 30 Tage.

Ihre Festtage sind alle unbeweglich. Die vorzüglichsten derselben sind

Muharram	1 Neujahr
	10. Ashur
I. Rabia,	12. Mahommeds Geburt
I. Jomada,	20. Eroberung Konstantinopels
Rajab,	15. Siegestag
	27. Mahommeds Erhebung.
Schaban,	15. Barah-Nacht
Ramadan,	der Fasten-Monath
Schwall,	1, 2, 3, Grosser Beiram
Dulheggia	8. Offenbarung
	10. Kleiner Beiram.

Das Vorhergehende wird hinreichen, für jedes Jahr unserer Zeitrechnung das Vorzüglichste des türk. Kalenders anzugeben.

§. 13.

Die Juden haben, wie die Türken, Mondjahre, die sie vom 7. julianischen October des Jahres 3761 vor Christo, als ihrer Epoche der Schöpfung, zählen. Addirt man daher zu einem gegebenen Jahr Christi die Zahl 3761, so erhält man das gesuchte Jahr der jüdischen Periode.

Verschiedenen kirchlichen Einrichtungen zu genügen, haben sie sechs Gattungen von Jahren angenommen. Die drey Gattungen von gemeinen Jahren haben, das kurze 353, das mittlere 354, das lange 355 Tage; und die drey Gattungen der Schaltjahre haben das kurze 383, das mittlere 384, und das lange 385 Tage. Die drey gemeinen Jahre haben 12, die drey Schaltjahre aber 13 Monate, deren Namen und Zahlen der Tage folgende sind.

Monate	Gemeine Jahre			Schaltjahre		
	kurz	mitt.	lang	kurz	mitt.	lang
Tischri	30	30	30	30	30	30
Marcheschwan	29	29	30	29	29	30
Kislev	29	30	30	29	30	30
Thebeth	29	29	29	29	29	29
Schebat	30	30	30	30	30	30
Adar	29	29	29	30	30	30
Veadar	—	—	—	29	29	29
Nisan	30	30	30	30	30	30
Ijar	29	29	29	29	29	29
Sivan	30	30	30	30	30	30
Tamuss	29	29	29	29	29	29
Ab	30	30	30	30	30	30
Elul	29	29	29	29	29	29
Summe ...	353	354	355	383	384	385

I. Bey der Entwerfung eines jüdischen Kalenders für ein gegebenes Jahr der christlichen Zeitrechnung muss man zuerst den Tag des Julianischen Kalenders finden, auf welchen der Ostertag der Juden fällt.

Diese Aufgabe hat Gauss, Mon. Corr. 1802 May, aufgelöst, und Cresy, Corresp. ast. I. Vol. p. 556 den Beweis derselben mitgetheilt.

Ist A das gegebene Jahr der christlichen Zeitrechnung, also

$$B = A + 3760$$

das Jahr der Juden, so dividire man

$$12\ A + 12$$

oder, was hier einerley ist,

$$12\ B + 17$$

durch 19, und nenne den Rest a.

Ferner dividire man A oder B durch 4, und nenne den Rest b.

Man suche ferner

$$\begin{gathered} 20.0955877 + 1.5542418\ a \\ + 0.25\ b - 0.003177794\ A \end{gathered}$$

oder auch

$$32{,}0440932 + 1.5542418\,a + 0.25\,b - 0.003177794\,B$$

und setze diesen Ausdruck =

$$M + m,$$

so dass M die ganze Zahl, und m den Decimalbruch desselben bezeichnet.

Endlich dividire man noch

$$M + 3\,A + 5\,b + 1$$

oder auch

$$M + 3\,B + 5\,b + 5$$

durch 7, und nenne den Rest c.

Diess vorausgesetzt, hat man die vier folgenden Fälle zu unterscheiden.

1) Ist

$$c = 2$$

oder 4 oder 6, so fällt Ostern den

$$(M + 1)^{\text{ten}} \text{ März}$$

alten Styls, wofür man den

$$(M - 30)^{\text{ten}} \text{ April}$$

nimmt, wenn M grösser als 30 ist.

2) Ist

$$c = 1$$

und

$$a > 6$$

und überdiess m gleich oder grösser als

$$0.63287037,$$

so fällt Ostern den

$$(M + 2)^{\text{ten}} \text{ März}$$

alten Styls.

3) Ist

$$c = 0$$

und

$$a > 11$$

und überdiess m gleich oder grösser als

$$0.89772376,$$

so fällt Ostern den

$(M + 1)^{\text{ten}}$ März

alten Styls.

4) In allen übrigen Fällen ist Ostern den M^{ten} März alten Styls.

Ex. Sey

$$A = 1801$$

so ist

$$a = 2$$
$$b = 1$$
$$M = 17$$
$$m = 0.731$$
$$c = 5$$

also Ostern den 17. März alten Styls, oder den 29. März n. St.

Ist

$$A = 1802$$

so ist

$$a = 14$$
$$b = 2$$
$$M = 36$$
$$m = 0.62859$$
$$c = 0$$

also Ostern den 36. März alten Styls, oder den 48. März, d. h. den 17. April neuen Styls.

II. Hat man so Ostern für ein Jahr gefunden, so erhält man auch zugleich den Neujahrstag des darauf folgenden Jahres, wenn man zu dem Ostertag 163 Tage addirt.

Man findet so für die beyden angezeigten und die nächstfolgenden Jahre

	Ostern	Neujahrstag	
1801 ...	29. März ...	8. Sept. des	5562ten jüd. Jahres
1802 ...	17. April ...	27. Sept. ..	5563
1803 ...	7. April ...	17. Sept. ..	5564
1804 ...	27. März ...	6. Sept. ..	5565

Entwickelt man so zwey nächstfolgende Jahre, so gibt die Differenz der beyden Neujahrstage zugleich die Anzahl der Tage, welche in dem zwischenliegenden Jahre enthalten sind, woraus man erkennt, zu welcher der sechs oben gegebenen Klassen das Jahr gehört. So hat das Jahr 5563 und 5564 eine Anzahl von 355 Tagen, daher sind beyde gemeine lange Jahre; das Jahr 5565 aber hat 383 Tage, ist also ein kurzes Schaltjahr.

Kennt man so die Klasse des Jahres und den jüdischen

Neujahrstag im Gregorianischen Kalender, so wird man nach der vorhergehenden Tafel die einzelnen Monate mit ihrer Anzahl von Tagen nach der Reihe neben den Gregorianischen Kalender tragen, und ihnen endlich die folgenden merkwürdigsten Festtage, die alle unbeweglich sind, beyfügen.

Tischri	1.	Neujahr *
	3.	Fasten Gedalia
	10.	Versöhnungsfest oder langer Tag *
	15.	Lauberhüttenfest *
	23.	Gesetzfreude *
Kislev	25.	Altarfest
Tebeth	10.	Belagerung Jerusalems
Schebat	15.	Freudentag
Adar	13.	Fasten Ester. Fällt dieser Fasttag auf den 6. oder 7. Wochentag, d. h. auf Freytag oder Sonnabend, so wird er auf den vorhergehenden 5. verlegt.
	14.	Kleines Purim *
	15.	Grosses Purim *

In Schaltjahren wird nur das kleine Purim in Adar, das grosse aber in Veadar gefeyert.

Nisan,	15.	Osterfest *
Ijar,	18.	Schülerfest
Sivan,	6.	Pfingsten *
Tamuss,	17.	Eroberung des Tempels
Ab,	9.	Zerstörung Jerusalems *
	15.	Freudentag

Die mit * bezeichneten werden streng gefeyert.

Das Vorhergehende reicht hin, das Vorzüglichste des Kalenders der Juden für jedes gegebene Jahr zu entwerfen.

§. 14.

Die vorzüglichsten Perioden, welche die verschiedenen Nationen in ihrer Zeitrechnung brauchten, sind die constantinopolitanische der griechischen Christen, deren Anfang die willkührlich vorausgesetzte Epoche der Erschaffung der Erde ist.

Die Nabonnassarische, deren sich die Astronomen Hyparch und Ptolomeus bedienten, von dem Regierungsantritte des ersten babylonischen Königs Nabonnassar.

Die Olympiaden, der alten Griechen, ein Zeitraum von vier Jahren, deren Anfang in dem Monat Julius des Jahres 775 vor Christo fällt.

Von Erbauung Roms, der republikanischen Römer, deren Anfang nach Varro 753 Jahre v. Ch. fällt.

Römische Kaiserjahre, der Römer unter ihren Kaisern, deren Anfang 27 J. v. Ch. fällt.

Die diocletianische Periode oder die martyrräre, der alexandrinischen Christen, mit dem ersten Jahre der Regierung des K. Diocletian, 284 v. Ch. anfängt.

Die jüdische, türkische und christliche, die bereits oben erklärt wurden, und endlich

Die julianische Periode, die Joseph Scaliger einführte, und die ein wiederkehrender Zeitraum von 7980 julianischen Jahren ist, welche Zahl das Product aus dem Sonnenzirkel 28, dem Mondzirkel 19, und der Indiction 15 ist.

Ist daher x das Jahr der julianischen Periode, in welchem der Sonnenzirkel S, der Mondszirkel M, und die Indiction I ist, so hat man, wenn s m r resp. die Zahlen der ganzen, seit dem Anfang der Periode verflossenen drey Zirkel sind

$$x = 28\,s + S$$
$$x = 19\,m + M$$
$$x = 15\,r + R$$

Soll diesen drey Gleichungen, in denen x eine ganze Zahl bezeichnet, Genüge geschehen, so findet man, wenn A eine ganze positive Zahl bezeichnet,

$$x = 7980\,A + 4845\,S$$
$$- 3780\,M - 1064\,R$$

Durch diese Gleichung kann man leicht jedes Jahr der christlichen Zeitrechnung in das entsprechende Jahr der julianischen Periode verwandeln. Für das Jahr Christi 1816 ist z. B.

$$S = s,\ M = 12,\ R = 4$$

also jene Gleichung

$$x = 7980\,A - 25391$$

Der kleinste Werth von A, der für x eine ganze positive Zahl gibt, ist

$$A = 4$$

also ist

$$x = 6529.$$

Das Jahr 1816 unserer Zeitrechnung ist also das 6529te der julianischen Periode, welche letzte daher im Jahre 6529 vor Ch. anfing, und da

$$6529 - 1816 = 4713,$$

so ist das erste Jahr unserer Zeitrechnung das 4713te Jahr der julianischen Periode, oder ist A das Jahr der julianischen Periode, B das entsprechende Jahr Christi, so ist

$$A = 4713 + B$$

für B Jahre nach, und

$$A = 4714 - B$$

für B Jahre vor Christi Geburt. So ist 1799 nach Ch. das 6512te der julianischen Periode, und das Jahr 776 vor Ch. das 3938te der julianischen Periode.

§. 15.

Um diese verschiedenen Perioden bequem unter einander zu vergleichen, wollen wir sie alle auf die älteste, die constantinopolitanische, zurückführen, von der man annimmt, dass sie 5508.334 Jahre vor Ch. Geburt ihren Anfang genommen habe. Wir wollen ferner die Zeit, welche zwischen dem Anfang einer jeden andern Periode und dem Anfange der constantinopolitanischen Periode verflossen ist, die **Wurzel** dieser andern Periode nennen. So fängt nach dem Vorhergehenden die Hedjschrah, oder die türkische Periode an den 16. Juli des Jahres 621 nach Christo, also ist 6129.872 die Wurzel der türkischen Periode, in julianischen Jahren ausgedrückt. Multiplicirt man diese letzte Zahl durch $365\frac{1}{4}$, der Länge des julianischen Jahres, so erhält man 2238936 für die Wurzel der türkischen Periode, in Tagen ausgedrückt. Die folgende Tafel gibt diese Wurzeln für die vorhergehenden Perioden, in welcher die letzte Columne die Länge der in jeder Periode gebräuchlichen Jahre enthält, in mittlern Sonnentagen ausgedrückt. M. s. Zeitschrift f. Astronomie und verwandte Wiss. Vol. II. p. 251.

Periode	Wurzeln		Länge des Jahres
	in Jahren	in Tagen	
Constantinopol.	0	0	365.25
Julianische	795.334	290495.75	365.25
Jüdische	1747.100	638127.75	365.2468222
Olympische	4732.830	1728668.25	365.25
Roms Erbauung nach Varro	4755.334	1736885.75	365.25
Nabonassarische	4761.488	1739133.50	365.00
Römisch-kaiserliche	5481.334	2002057.25	365.25
Christliche	5508.334	2011919.00	365.25
Diocletianische	5791.994	2115525.75	365.25
Türkische	6129.872	2238936.00	354.36666

In einer Periode P sey das Jahr a, und in dieser der Tag δ gegeben, d. h. zwischen dem gegebenen Tage und dem Anfang der Epoche seyen

$$(a - 1)$$

ganze Jahre, und

$$(\delta - 1)$$

ganze Tage verflossen. Man suche das diesem Datum der Periode P entsprechende Datum einer andern Periode P'.

Ist α die Wurzel, und l die Länge des Jahrs der Periode P, und α' l' dasselbe für die Periode P'; ist ferner N die Anzahl der Jahre, die von dem Anfange der Periode P' bis zu dem gegebenen Tage verflossen sind, und immer

$$\lambda = 365.25$$

so hat man sofort

$$\alpha\lambda + (a - 1)\, l + \delta - 1 = \alpha'\lambda + N \,.\, l'$$

also

$$N = \frac{(\alpha - \alpha')\,\lambda \pm [(a - 1)\, l + \delta - 1]}{l'}$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, wenn das gesuchte Datum vor oder nach dem Anfang der Periode P' fällt.

Ex. Sey der 12. April 1818 neuen Styls, d. h. der 31. März 1818 alten Styls gegeben. Man suche das entsprechende Datum der türkischen Periode.

Es ist

$$\begin{aligned} a &= 1818 \\ \delta &= 90 \\ l &= \lambda = 365.25 \\ \alpha &= 5508.334 \\ l' &= 354.36666 \\ \alpha' &= 6129.872 \end{aligned}$$

also

$$\alpha - \alpha' = -621.538$$

und

$$[(\alpha - \alpha') + a - 1]\,\lambda + \delta - 1 = 436732^{\text{T}}.495$$

und diese Zahl durch l' dividirt, gibt

$$N = 1232^{\text{Jahre}}\ 153^{\text{Tage}}$$

Seit dem Anfange der türkischen Periode bis zu dem gegebenen Tage sind also 1232 Jahre und 153 Tage verflossen, daher ist der gegebene Tag der 154[te] des 1233. Jahres der türkischen Periode. Nach §. 11. ist aber der erste Tag des Monats Jomada I. der 148[te] Tag des Jahres, also ist der gegebene Tag der 7. des

Jomada I. des Jahres 1253, nur einen Tag fehlerhaft, da es der 6. des Jomada I. seyn soll, und diess ist zugleich der grösste Fehler, welchen man bey der türkischen Periode begehen kann; bey der jüdischen kann wegen der verwickelten Einrichtung des jüdischen Kalenders der Fehler bis auf 20 Tage steigen, bey allen übrigen Perioden endlich erhält man durch das Vorhergehende in ganzen Tagen genaue Resultate.

Tafeln

des

zweyten Bandes.

Erklärung der Tafeln.

Tafel XIV.

Enthält die mittlern Rectascensionen und Declinationen der vorzüglichsten Fixsterne für den Anfang des Jahres 1755 nach Bradleys Beobachtungen, und Bessels Berechnungen derselben. (Fundam. astron.) Die beyden ersten Columnen nach der Rectascension und Declination geben die jährliche Präcession in Rectascension und Declination oder p, für das Jahr 1755, und p′ für das Jahr 1800. Die folgenden Columnen geben unter dem Zeichen μ die Differenz dieses Bradley'schen Catalogs von dem neuen Catalog Piazzis für 1800 in AR und Decl, von dem Catalog Maskelynes bloss in AR für 1805, und von dem Catalog Orianis für 1811, und Ponds für 1813 bloss in Decl. Durch diese Grössen μ kann man aus Bradleys in der Tafel gegebenen Orten dieser Sterne für 1755 die Orte derselben nach Piazzi für 1800 in AR und Decl. nach Maskelyne in AR, für 1805, und nach Oriani und Pond in Decl. für 1811 und 1813 finden. Ist z. B. l die Rectascension oder Declination nach Bradley für 1755, so ist dieselbe l′ nach Piazzis neuem Catalog für 1800

$$l' = l + \tfrac{45}{2}(p + p') + \mu$$

nach Maskelyne für 1805

$$l' = l + 50\left(p' - \tfrac{4}{9}(p' - p)\right) + \mu'$$

nach Pond für 1813

$$l' = l + 58\left(p' - \tfrac{16}{45}(p' - p)\right) + \mu''' \text{ u. s. w.}$$

Endlich ist die eigene Bewegung des Sterns in Rectascension oder Declination

$\frac{\mu}{45}$ nach Piazzi

$\frac{\mu'}{50}$ nach Maskelyne

$\frac{\mu'''}{58}$ nach Pond u. f.

Ex. Man suche den Ort l' von α Bootis für 1800, 00 nach Piazzi.

$$
\begin{array}{rl}
\text{Bradleys AR} \ldots \; l = & 211^\circ \; 7' \; 25''.2 \\
\tfrac{45}{2}(p + p') = & 995''.985 \\
\mu = & -54.6 \\
\hline
l' = & 211^\circ \; 38' \; 6''.585 \text{ mitt. AR. nach Piazzi für 1800}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Bradleys Decl.} \ldots \; l = & +20^\circ \; 28' \; 5''.6 \\
\tfrac{45}{2}(p + p') = & -770''.197 \\
\mu = & -87.1 \\
\hline
l' = & 20^\circ \; 13' \; 48''.303 \text{ mit. Decl. nach Piazzi für 1800}
\end{array}
$$

Eben só hat man für die mittlere Declination von α Lyrae für 1813 nach Pond

$$
\begin{array}{rl}
\text{Bradl. Decl.} \ldots \; l = & +38^\circ \; 34' \; 11''.4 \\
58\left(p' - \tfrac{16}{45}(p' - p)\right) = & +149''.89 \\
\mu''' = & +17.5 \\
\hline
l = & 38^\circ \; 36' \; 58''.8
\end{array}
$$

Überhaupt ist die Präcession von $1800 + T$ bis $1800 + T'$ gleich

$$\left\{p' + (p' - p)\frac{T' + T}{90}\right\} . (T' - T)$$

und daher aus den in der Tafel gegebenen Orten l Bradleys für 1755 mit den Werthen von μ nach Piazzi, der Ort l' für das Jahr $1800 + t$

$$l' = l + (45 + t) \cdot \left(p + \frac{45 + t}{90}(p' - p)\right) + \frac{45 + t}{45} . \mu$$

also für

$$
\begin{array}{lll}
1800 & \ldots & l' = l + \tfrac{45}{2}(p' + p) + \mu \\
1805 & \ldots & l' = l + 50\left(p' - \tfrac{4}{9}(p' - p)\right) + \tfrac{10}{9}\mu \\
1811 & \ldots & l' = l + 56\left(p' - \tfrac{17}{45}(p' - p)\right) + \tfrac{56}{45}\mu \\
1813 & \ldots & l' = l + 58\left(p' - \tfrac{16}{45}(p' - p)\right) + \tfrac{58}{45}\mu \\
1820 & \ldots & l' = l + 65\left(p' - \tfrac{5}{18}(p' - p)\right) + \tfrac{13}{9}\mu \\
1830 & \ldots & l' = l + 75\left(p' - \tfrac{1}{6}(p' - p)\right) + \tfrac{5}{3}\mu \text{ u. f.}
\end{array}
$$

Ist endlich L der mittlere Ort des Sterns aus einem Catalog für das Jahr $1800 + T$, und L' der mittlere Ort desselben aus einem andern Catalog für das Jahr $1800 + T'$, so ist dessen mittlerer Ort für das Jahr $1800 + t$ gleich

$$L + (L' - L)\frac{t - T}{T' - T} + (p' - p)\frac{(t - T)(t - T')}{90}$$

und die eigene Bewegung des Sterns in der Zwischenzeit $T' - T$ gleich

$$L' - L - (T' - T)\left(p' + (p' - p)\,\frac{T' + T}{90}\right)$$

Der Polarstern fodert, wegen seiner grossen Nähe bey dem Pole, eine eigene Behandlung, um seinen mittlern Ort von einer Epoche zur andern zu übertragen.

Nach Bradley ist für 1755 dieses Sterns

Rectascension $\alpha = 10^\circ\, 55'\, 34''38$ aus 254 Beobachtungen
Declination $\delta = 87\ 59\ 41.12$ aus 217 ....

für das Jahr 1815 aber ist dessen mittlerer Ort

$\alpha' = 13^\circ\, 57'\, 11''.21$ aus 150 Beob. in Königsberg
$\delta' = 88\ 19\ 17.30$ aus 294 Beob. in Greenwich.

Legt man diese beyden Bestimmungen zu Grunde, um daraus den mittlern Ort für irgend eine andere Epoche zu finden, so ist (Thl. I. Cap. II. §. 2)

	für 1755		für 1815
$t =$	$+5$	....	$+65$
$\omega =$	$23^\circ\, 28'\, 18''.000$	....	$23^\circ\, 28'\, 18''.042$
$\lambda =$	$+0.890$	....	$+10.528$
$\psi =$	$+4\ 11.699$	....	$+54\ 31.618$
$\alpha + \lambda =$	$10\ 55\ 35.270$	....	$13\ 57\ 21.738$

also nach §. 4, Gleichung (4) des angezeigten Ortes

$L + \psi =$	$85^\circ\, 8'\, 26''.935$	....	$85^\circ\, 58'\, 51''.886$
$L =$	$85\ 4\ 15.236$	....	$85\ 4\ 20.268$
$B =$	$66\ 4\ 18.128$	....	$66\ 4\ 16.082$

Sucht man dann den mittlern Ort des Polarsterns für die Mitte zwischen diesen beyden Epochen, oder für 1785, so ist

$t = +35$

und die Mittel der vorhergehenden L, B sind

$B = 66^\circ\, 4'\, 17''.105$
$L = 85^\circ\, 4'\, 17''752$

$\left.\begin{array}{l} \psi' = 0\ 29\ 21.769 \\ \lambda' = 5.948 \end{array}\right\}$ nach §. 2

also

$L + \psi' = 85^\circ\, 33'\, 39''.521$

und daraus findet man, nach §. 4, Gleichung (5)

$\alpha' + \lambda' = 12^\circ\, 19'\, 26''898$

oder

$\alpha' = 12\ 19\ 20.950$

und

$\delta' = 88\ 9\ 30.963$

für die mittl. Rectasc. und Declination des Polarsterns für 1785.

Tafel XV.

Enthält die Constanten der Aberration und der beyden Nutationen in Rectascension und Declination für die Sterne der I. Tafel, und für das Jahr 1825, die auch 15 Jahre vor und nach dieser Epoche gebraucht werden können. I. Theil II. Cap. 7 §. I. und 8 §., so wie III. Cap. 3 § III. Allgemeine Tafeln der Aberration und Nutation wurden am Ende des I. Theils gegeben.

Tafel XVI.

Enthält die Elemente der Planeten, aus Expos. du syst. du monde, III. Edit. Die Elemente der vier neuen Planeten, so wie die Massen, Dichtigkeiten u. f. aller, erwarten noch von künftigen Beobachtungen ihre Verbesserung. Aus den in dieser Tafel gegebenen siderischen Bewegungen erhält man die tropischen, wenn man die ihnen entsprechende Präcession zu denselben addirt, die nach Cap. I. des I. Theils in 100 Julianischen Jahren nahe

$$1^\circ\, 23'\, 30'',$$

also in einem Tage

$$0''.137166$$

ist. Ist für einen Planeten r der Halbmesser, m die Masse, d die Dichte, und g der Raum, welchen frey fallende Körper auf der Oberfläche des Planeten in der ersten Secunde zurück legen, und bezeichnet man für einen andern Planeten dieselben Grössen durch

$$r'\ m'\ d'\ g',$$

so ist

$$\frac{d}{d'} = \frac{m \cdot r'^3}{m' \cdot r^3}$$

und

$$\frac{g}{g'} = \frac{m \cdot r'^2}{m' \cdot r^2}$$

wo die Oberfläche der Erde $g' = 15.113$ Par. Fuss ist. Gehört z. B. r d .. für die Sonne, r′ d′ .. für die Erde, so ist

$$\frac{d}{d'} = 0.25$$

und

$$\frac{g}{g'} = 27.89$$

oder die Dichte der Sonne ist nur ein Viertheil der Dichte der Erde, und auf der Oberfläche der Sonne fallen die Körper in der ersten Secunde durch

$$(15.113)\ (27.89) = 421 \text{ Par. Fuss.}$$

Tafel XVII.

Enthält die Reduction der Gleichung des Mittelpuncts in der Parabel auf jene in der Ellipse. Ist ε das Verhältniss der Excentricität zur halben grossen Axe, und $\alpha = 1 - \varepsilon$; ferner v die wahre Anomalie in der Parabel, und $v + \Delta$ in der Ellipse, endlich $\vartheta = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v$, so gibt der erste Theil dieser Tafel den Werth von a, und der zweyte den Werth von b, so dass man hat

$$v + \Delta = v + a + b$$

Man sehe II. B. I. Cap. §. 9.

Ex. Sey $\log \alpha = 8.50993$ und Parab. wah. Anom.

$$\begin{array}{rrrr} v = & 99^\circ & 36' & 56'' \\ a = & + & 22 & 31 \\ b = & + & & 32 \\ \hline \text{Ellipt. wah. Anom. } v + \Delta = & 99^\circ & 59' & 59'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{I}^{\text{te}} \text{ Theil.} = & 4.62048 \\ \log \alpha = & 8.50993 \\ \hline \log a = & 3.13041 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{II}^{\text{te}} \text{ Theil.} = & 4.49239 \\ \log \alpha^2 = & 7.01986 \\ \hline \log b = & 1.51225 \end{array}$$

Tafel XVIII. und XIX.

erleichtert die im II. B. III. Cap. vorgetragene Bestimmuug der Elemente einer Planetenbahn aus geocentrischen Beobachtungen. Die erste gibt den Werth von $\log y^2$ aus h durch die Gleichung

$$h = \frac{(y-1)\,y^2}{y + \frac{1}{9}}$$

und die letzte gibt den Werth der Grösse ξ aus x, durch die Gleichungen

$$A = 1 + \frac{2.8}{9}x + \frac{3.8.10}{9.11}x^2 + \frac{4.8.10.12}{9.11.13}x^3 + $$

$$\xi = \frac{\frac{2}{35} A x^2 \left(1 - \frac{6x}{5}\right)}{1 - \frac{12}{175} A x^2}$$

Tafel XIV.

Namen	Grösse	Mittl. AR. für 1755 nach Bradley			p 1755	p′ 1800	μ Piazzi 1800	μ′ Maskel 1805
γ Pegasi	2	0°	9′	41.5	46.″011	46.076	+ 2″4	+ 1″4
α Arietis	3	28	21	17.3	49.901	50.036	+ 8.1	+ 9.8
α Ceti	2	42	22	30.4	46.733	46.798	− 0.5	− 2.7
α Tauri	1	65	28	21.7	51.226	51.299	+ 1.9	+ 3.8
α Aurigae	1	74	39	30.0	65.826	65.951	+ 5.9	+ 7.6
β Orionis	1	75	41	36.6	43.092	43.121	+ 1.0	0.0
β Tauri	2	77	42	20.2	56.579	56.642	+ 4.5	+ 4.7
α Orionis	1	85	28	43.0	48.572	48.594	+ 3.3	+ 1.9
α Canis maj.	1	98	35	14.6	40.163	40.166	−22.8	−26.8
α Gem. seq.	3	109	43	53.0	57.974	57.892	− 9.9	− 9.1
α Can. min.	2	111	36	56.6	47.902	47.873	−29.8	−34.4
β Gemin.	2	112	34	20.9	56.089	56.005	−33.4	−36.4
α Hydrae	2	138	53	12.0	44.236	44.226	− 2.2	− 2.5
α Leonis	1	148	49	29.3	48.423	48.354	−13.4	−14.7
β Leonis	2	174	8	10.8	46.583	46.530	−23.8	−26.6
β Virginis	3	174	29	0.3	46.103	46.098	+33.0	+34.5
α Virginis	1	198	4	47.7	47.081	47.156	− 1.7	− 2.3
α Bootis	1	211	7	25.2	42.129	42.137	−54.6	−59.3
2 α Librae	3	219	20	29.7	49.405	49.510	− 1.3	− 2.7
α Coron. bo.	2	231	4	50.0	37.859	37.875	+ 3.7	+ 6.3
α Serpentis	2	233	3	14.4	43.969	44.012	+ 8.2	+ 8.1
α Scorpii	1	243	36	23.8	54.704	54.810	+ 4.3	− 0.3
α Herculis	3	255	52	18.5	40.901	40.926	− 2.5	− 0.7
α Ophiuchi	2	260	53	37.6	41.515	41.538	+ 2.3	+ 2.8
α Lyrae	1	277	9	41.6	30.134	30.145	+11.5	+14.0
γ Aquilae	3	293	39	7.6	42.748	42.742	+ 3.3	+ 3.2
α Aquilae	1	294	42	24.0	43.360	43.350	+25.5	+26.8
β Aquilae	3	295	49	7.2	44.160	44.150	+ 3.8	+ 4.1
2 α Capricor.	3	301	6	37.4	50.050	49.995	+ 3.6	+ 2.8
α Cygni	1	308	16	18.9	30.574	30.589	− 2.8	− 3.3
α Aquarii	3	328	17	54.2	46.273	46.244	+ 0.2	− 1.7
α Pisc. aust.	1	341	0	52.0	49.904	49.757	+17.7	+17.1
α Pegasi	2	343	8	36.3	44.560	44.595	+ 3.1	+ 2.7
α Androm.	1	358	56	37.6	45.803	45.922	+ 5.2	+ 6.7

Tafel XIV.

Mittl. Declin. für 1755 nach Bradley	p 1755	p′ 1800	μ Piazzi 1800	μ″ Oriani 1811	μ‴ Pond 1813
+ 13° 49′ 14″1	+20″050	+20″044	+ 0.4	—	+ 1″0
+ 22 17 29.5	17.644	17.536	— 4.6	—	— 6.0
+ 3 6 49.1	14.812	14.670	— 3.6	—	— 5.5
+ 15 59 36.8	8.323	8.117	— 4.7	— 6.6	— 8.1
+ 45 53 4.8	5.305	5.025	—19.7	— 23.6	— 23.1
— 8 30 15.9	4.955	4.770	+ 0.7	+ 1.3	+ 1.0
+ 28 22 27.7	4.269	4.026	— 8.8	— 10.8	— 10.7
+ 7 20 18.3	1.581	1.368	+ 0.3	+ 2.4	+ 1.1
— 16 23 53.8	— 2.994	— 3.165	—53.8	— 64.2	— 70.4
+ 32 23 57.3	— 6.769	— 7.006	— 2.4	—	— 3.3
+ 5 49 59.3	7.386	7.576	—44.2	— 57.2	— 59.7
+ 28 35 40.8	7.696	7.917	— 2.6	—	— 3.4
— 7 36 34.7	15.106	15.229	+ 2.7	—	+ 2.4
+ 13 9 13.8	17.154	—17.259	+ 2.5	+ 2.4	+ 1.2
+ 15 56 24.7	19.945	19.961	— 2.1	—	— 5.8
+ 3 8 40.9	19.957	19.972	—12.5	—	—
— 9 52 27.7	19.060	18.991	— 0.2	— 0.7	— 3.5
+ 20 28 5.6	17.164	17.067	—87.1	—109.8	—113.5
— 15 0 29.1	15.506	15.365	— 0.3	—	— 3.0
+ 27 33 12.1	12.596	12.463	— 0.3	— 2.3	— 2.7
+ 7 12 48.6	12.051	11.894	+ 3.9	+ 4.0	+ 3.9
— 25 51 50.6	8.913	8.695	+ 0.8	— 0.2	— 2.8
+ 14 41 18.5	4.894	4.720	+ 5.5	+ 3.9	+ 3.7
+ 12 45 27.2	3.173	2.995	— 5.5	— 9.4	— 10.2
+ 38 34 11.4	+ 2.500	+ 2.631	+14.0	+ 16.6	+ 17.5
+ 10 2 3.3	8.044	8.213	+ 2.3	—	+ 2.7
+ 8 14 23.7	8.380	8.553	+20.5	+ 23.0	+ 23.8
+ 5 48 46.9	8.732	8.898	—18.4	—	— 25.4
— 13 17 4.4	10.360	10.545	+ 3.8	+ 2.7	+ 1.1
+ 44 24 56.7	12.419	12.521	+ 1.9	+ 0.7	+ 1.5
— 1 29 58.4	17.058	17.160	+ 2.4	—	+ 1.4
— 30 54 49.9	18.959	19.026	— 6.1	— 8.6	—
+ 13 53 29.7	19.188	19.240	+ 2.8	+ 2.2	+ 2.6
+ 27 44 12.6	20.047	20.045	— 5.7	—	— 5.6

Tafel XV.

	Aberration in { A. R. / Decl.
γ Pegasi . . .	1. 2825 Sin (268° 51′ + $\odot$)
— — —	0. 9636 Sin (257° 16′ + $\odot$)
α Arietis . . .	1. 3134 Sin (238° 31′ + $\odot$)
— — —	0. 8952 Sin (210° 7′ + $\odot$)
α Ceti	1. 2882 Sin (224° 14′ + $\odot$)
— — —	0. 8662 Sin (263° 10′ + $\odot$)
α Tauri	1. 3184 Sin (201° 46′ + $\odot$)
— — —	0. 5748 Sin (233° 13′ + $\odot$)
α Aurigae . .	1. 4612 Sin (192° 56′ + $\odot$)
— — —	0. 9089 Sin (115° 47′ + $\odot$)
β Orionis . .	1. 3093 Sin (192° 23′ + $\odot$)
— — —	1. 0275 Sin (93° 43′ + $\odot$)
β Tauri . . .	1. 3611 Sin (190° 17′ + $\odot$)
— — —	0. 3907 Sin (139° 37′ + $\odot$)
α Orionis . .	1. 3100 Sin (183° 16′ + $\odot$)
— — —	0. 7500 Sin (268° 21′ + $\odot$)
α Can. maj.	1. 3038 Sin (171° 25′ + $\odot$)
— — —	1. 1129 Sin (85° 52′ + $\odot$)
α Gemin . . .	1. 3749 Sin (160° 44′ + $\odot$)
— — —	0. 6591 Sin (32° 27′ + $\odot$)
α Can. min.	1. 3035 Sin (159° 9′ + $\odot$)
— — —	0. 8047 Sin (276° 54′ + $\odot$)
β Gemin . . .	1. 3568 Sin (158° 6′ + $\odot$)
— — —	0. 6020 Sin (24° 40′ + $\odot$)
α Hydrae . .	1. 2896 Sin (132° 42′ + $\odot$)
— — —	0. 9944 Sin (77° 34′ + $\odot$)
α Leonis . . .	1. 2901 Sin (122° 26′ + $\odot$)
— — —	0. 8432 Sin (303° 51′ + $\odot$)
β Leonis . . .	1. 2855 Sin (95° 25′ + $\odot$)
— — —	0. 9598 Sin (306° 24′ + $\odot$)
β Virginis . .	1. 2698 Sin (95° 1′ + $\odot$)
— — —	0. 9054 Sin (276° 55′ + $\odot$)
α Virginis . .	1. 2803 Sin (69° 26′ + $\odot$)
— — —	0. 8843 Sin (63° 36′ + $\odot$)
α Bootis . . .	1. 3075 Sin (55° 49′ + $\odot$)
— — —	1. 0948 Sin (298° 21′ + $\odot$)

Tafel XV.

Nutat. ☾ in {A. R. / Decl.	Nutat. ⊙ in {A. R. / Decl.
1.2241 Sin (188° 23′ + ☊)	0.017 Sin (187° + 2 ⊙)
0.8563 Sin (178° 34′ + ☊)	9.653 Sin (179° + 2 ⊙)
1.2636 Sin (191° 1′ + ☊)	0.054 Sin (189° + 2 ⊙)
0.8945 Sin (142° 57′ + ☊)	9.662 Sin (149° + 2 ⊙)
1.2264 Sin (181° 25′ + ☊)	0.020 Sin (181° + 2 ⊙)
0.9259 Sin (128° 19′ + ☊)	9.671 Sin (135° + 2 ⊙)
1.2668 Sin (183° 27′ + ☊)	0.061 Sin (183° + 2 ⊙)
0.9684 Sin (107° 57′ + ☊)	9.684 Sin (112° + 2 ⊙)
1.3771 Sin (185° 48′ + ☊)	0.172 Sin (185° + 2 ⊙)
0.9786 Sin (100° 33′ + ☊)	9.688 Sin (103° + 2 ⊙)
1.1899 Sin (178° 46′ + ☊)	9.985 Sin (179° + 2 ⊙)
0.9791 Sin (280° 6′ + ☊)	9.688 Sin (283° + 2 ⊙)
1.3093 Sin (182° 51′ + ☊)	0.103 Sin (182° + 2 ⊙)
0.9807 Sin (98° 23′ + ☊)	9.689 Sin (101° + 2 ⊙)
1.2418 Sin (180° 15′ + ☊)	0.036 Sin (180° + 2 ⊙)
0.9840 Sin (92° 40′ + ☊)	9.690 Sin (94° + 2 ⊙)
1.1600 Sin (181° 50′ + ☊)	9.954 Sin (181° + 2 ⊙)
0.9818 Sin (263° 0′ + ☊)	9.690 Sin (262° + 2 ⊙)
1.3200 Sin (174° 2′ + ☊)	0.115 Sin (175° + 2 ⊙)
0.9718 Sin (74° 15′ + ☊)	9.686 Sin (71° + 2 ⊙)
1.2357 Sin (178° 46′ + ☊)	0.030 Sin (179° + 2 ⊙)
0.9695 Sin (72° 55′ + ☊)	9.686 Sin (70° + 2 ⊙)
1.3057 Sin (174° 3′ + ☊)	0.102 Sin (175° + 2 ⊙)
0.9683 Sin (71° 56′ + ☊)	9.685 Sin (68° + 2 ⊙)
1.2023 Sin (183° 41′ + ☊)	9.997 Sin (183° + 2 ⊙)
0.9191 Sin (228° 40′ + ☊)	9.670 Sin (223° + 2 ⊙)
1.2422 Sin (173° 46′ + ☊)	0.035 Sin (175° + 2 ⊙)
0.8965 Sin (38° 4′ + ☊)	9.664 Sin (33° + 2 ⊙)
1.2286 Sin (170° 54′ + ☊)	0.022 Sin (173° + 2 ⊙)
0.8575 Sin (13° 19′ + ☊)	9.653 Sin (6° + 2 ⊙)
1.2195 Sin (178° 24′ + ☊)	0.014 Sin (179° + 2 ⊙)
0.8573 Sin (6° 10′ + ☊)	9.653 Sin (5° + 2 ⊙)
1.2315 Sin (185° 33′ + ☊)	0.026 Sin (184° + 2 ⊙)
0.8740 Sin (155° 10′ + ☊)	9.658 Sin (160° + 2 ⊙)
1.1889 Sin (168° 49′ + ☊)	9.981 Sin (171° + 2 ⊙)
0.9003 Sin (320° 4′ + ☊)	9.664 Sin (326° + 2 ⊙)

Tafel XV.

	Aberration in {A. R. / Decl.
α^2 Librae . .	1. 3012 Sin (47° 14′ + ⊙)
— — —	0. 7890 Sin (48° 29′ + ⊙)
α Cor. bor.	1. 3443 Sin (35° 48′ + ⊙)
— — —	1. 1764 Sin (292° 30′ + ⊙)
α Serpent. .	1 2975 Sin (33° 46′ + ⊙)
— — —	0. 9973 Sin (278° 23′ + ⊙)
α Scorpii . .	1. 3466 Sin (23° 28′ + ⊙)
— — —	0. 5804 Sin (358° 8′ + ⊙)
α Hercul. . .	1. 3189 Sin (12° 16′ + ⊙)
— — —	1. 0940 Sin (275° 26′ + ⊙)
α Ophiuchi.	1. 3166 Sin (7° 37′ + ⊙)
— — —	1. 0764 Sin (273° 5′ + ⊙)
α Lyrae. . . .	1. 4130 Sin (352° 53′ + ⊙)
— — —	1. 2522 Sin (264° 31′ + ⊙)
γ Aquilae . .	1. 3074 Sin (337° 20′ + ⊙)
— — —	1. 0426 Sin (262° 15′ + ⊙)
α Aquilae . .	1. 3047 Sin (336° 18′ + ⊙)
— — —	1. 0215 Sin (263° 0′ + ⊙)
β Aquilae . .	1. 3018 Sin (335° 15′ + ⊙)
— — —	0. 9910 Sin (264° 27′ + ⊙)
α^2 Capric . .	1. 3080 Sin (330° 6′ + ⊙)
— — —	0. 1934 Sin (119° 32′ + ⊙)
α Cygni . . .	1. 4405 Sin (323° 31′ + ⊙)
— — —	1. 2610 Sin (240° 41′ + ⊙)
α Aquarii . .	1. 2796 Sin (303° 1′ + ⊙)
— — —	0. 8964 Sin (92° 34′ + ⊙)
α Pisc. aust.	1. 3333 Sin (289° 43′ + ⊙)
— — —	1. 0247 Sin (157° 38′ + ⊙)
α Pegasi . . .	1. 2850 Sin (287° 21′ + ⊙)
— — —	1. 0115 Sin (242° 8′ + ⊙)
α Androm. .	1. 3236 Sin (270° 0′ + ⊙)
— — —	1. 0763 Sin (216° 47′ + ⊙)

Tafel XV.

Nutat. ☾ in A. R. / Decl.	Nutat. ⊙ in { A. R. / Decl.
1.2535 Sin (186° 26′ + ☊)	0.047 Sin (185° + 2 ⊙)
0.9192 Sin (131° 16′ + ☊)	9.670 Sin (138° + 2 ⊙)
1.1453 Sin (167° 16′ + ☊)	9.935 Sin (169° + 2 ⊙)
0.9439 Sin (300° 21′ + ☊)	9.677 Sin (306° + 2 ⊙)
1.2000 Sin (177° 29′ + ☊)	9.994 Sin (178° + 2 ⊙)
0.9479 Sin (298° 29′ + ☊)	9.678 Sin (304° + 2 ⊙)
1.2970 Sin (185° 50′ + ☊)	0.091 Sin (185° + 2 ⊙)
0.9659 Sin (109° 24′ + ☊)	9.686 Sin (114° + 2 ⊙)
1.1687 Sin (177° 45′ + ☊)	9.962 Sin (178° + 2 ⊙)
0.9792 Sin (280° 0′ + ☊)	9.689 Sin (283° + 2 ⊙)
1.1745 Sin (178° 47′ + ☊)	9.968 Sin (179° + 2 ⊙)
0.9824 Sin (276° 12′ + ☊)	9.689 Sin (278° + 2 ⊙)
1.0377 Sin (185° 28′ + ☊)	9.830 Sin (184° + 2 ⊙)
0.9827 Sin (264° 12′ + ☊)	9.689 Sin (263° + 2 ⊙)
1.1871 Sin (182° 41′ + ☊)	9.981 Sin (182° + 2 ⊙)
0.9671 Sin (251° 16′ + ☊)	9.684 Sin (248° + 2 ⊙)
1.1931 Sin (182° 15′ + ☊)	9.987 Sin (182° + 2 ⊙)
0.9656 Sin (250° 24′ + ☊)	9.683 Sin (247° + 2 ⊙)
1.2008 Sin (181° 38′ + ☊)	9.995 Sin (181° + 2 ⊙)
0.9639 Sin (249° 29′ + ☊)	9.683 Sin (246° + 2 ⊙)
1.2552 Sin (176° 12′ + ☊)	0.050 Sin (177° + 2 ⊙)
0.9552 Sin (64° 59′ + ☊)	9.681 Sin (60° + 2 ⊙)
1.0982 Sin (208° 30′ + ☊)	9.874 Sin (204° + 2 ⊙)
0.9425 Sin (239° 2′ + ☊)	9.677 Sin (234° + 2 ⊙)
1.2206 Sin (179° 25′ + ☊)	0.015 Sin (179° + 2 ⊙)
0.8978 Sin (38° 55′ + ☊)	9.664 Sin (33° + 2 ⊙)
1.2704 Sin (163° 6′ + ☊)	0.060 Sin (166° + 2 ⊙)
0.8723 Sin (23° 35′ + ☊)	9.657 Sin (20° + 2 ⊙)
1.2098 Sin (188° 21′ + ☊)	0.002 Sin (187° + 2 ⊙)
0.8697 Sin (201° 16′ + ☊)	9.656 Sin (198° + 2 ⊙)
1.2385 Sin (197° 19′ + ☊)	0.026 Sin (194° + 2 ⊙)
0.8563 Sin (180° 13′ + ☊)	9.653 Sin (181° + 2 ⊙)

Tafel XVI.

Elemente der Planeten.

	Siderische Umlaufszeiten	Mittlere tägliche siderische Bewegung
Merkur ...	87.9692580	14732″. 419357
Venus	224. 7008240	5767. 669103
Erde......	365. 2563835	3548. 192608
Mars	686. 9796186	1886. 518850
Jupiter....	4332. 5963076	299. 127800
Saturn....	10758. 9698400	120. 457629
Uranus ...	30688. 7126872	42. 230510

	Mittlere Länge für die Epoche der Mitternacht zwischen 31. Dec. 1800 und 1. Jänner 1801 mittl. Zeit von Paris			Länge des Perihelіums für dieselbe Epoche		
Merkur ...	163°	56′	27″	74°	21′	47″
Venus	10	44	35	128	37	1
Erde......	100	9	13	99	30	5
Mars	64	7	2	332	24	24
Jupiter ...	112	12	36	11	8	35
Saturn....	135	20	22	89	8	58
Uranus ...	177	47	18	167	21	42

	Säcular-Aenderung der Excentricität	Säcul. sider. Aenderung des Periheliums
Merkur ...	+ 0. 000003867	+ 643″56
Venus	— 0. 000062711	— 267. 60
Erde......	— 0. 000041632	+ 1177. 81
Mars	+ 0. 000090176	+ 1582. 43
Jupiter....	+ 0. 000159350	+ 663. 86
Saturn....	— 0. 000312402	+ 1943. 07
Uranus ...	— 0. 000025072	+ 238. 62

Tafel XVI.

Elemente der Planeten.

Halbe grosse Axen der Bahnen	Verhältniss der Excentricität zur halben grossen Axe 1801. 00
0. 3870981	0. 20551494
0. 7233323	0. 00685298
1. 0000000	0. 01677976
1. 5236935	0. 09313400
5. 2027911	0. 04817840
9. 5387705	0. 05616830
19. 1833050	0. 04667030

Länge des aufsteigenden Knotens für dieselbe Epoche			Neigung der Bahn gegen die Ekliptik für dieselbe Epoche		
45°	57′	31″	7°	0′	0″
74	52	40	3	23	35
—	—	—	—	—	—
48	1	28	1	51	0
98	25	54	1	18	52
111	35	47	2	29	38
72	51	14	0	46	25

Säc. sid. Aenderung der Neigung	Säc. Aenderung des Knotens
+ 18″183	— 782″27
— 4. 552	— 1869. 80
— — —	— — —
— 0. 152	— 2328. 44
— 22. 609	— 1577. 57
— 15. 512	— 2266. 46
+ 3. 133	— 3597. 96

Tafel XVI.

Elemente der Planeten.

	Scheinbarer Durchmesser für die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde	Massen gegen die Masse der Erde
Merkur . . .	6″6	0. 1627
Venus	16. 5	0. 9243
Erde	17. 2	1. 0000
Mars	8. 9	0. 1294
Jupiter. . . .	186. 8	308. 940
Saturn	171. 7	93. 271
Uranus. . . .	74. 5	1. 690
Sonne	1922.″0	329630. 000

	Grösster und kleinster von der Erde gesehener Durchmesser		Rotation
Merkur . . .	11″3	5″0	1 Tag
Venus	59. 8	9. 6	0. 97
Erde	—	—	0. 997
Mars	17. 1	3. 6	1. 027
Jupiter. . . .	44. 5	30. 1	0. 414
Saturn	20. 1	16. 3	0. 428
Uranus. . . .	4. 1	3. 7	— —
Sonne	32′ 36″	31′ 31″	25. 50

	Mittlere Distanz von der Erde in Million Toisen	Grösste Distanz von der Erde in Million Toisen
Merkur . . .	78458	116387
Venus	78458	136914
Erde	— —	— —
Mars	119546	210454
Jupiter. . . .	408201	507641
Saturn	748393	870203
Uranus. . . .	1505080	1653752

Tafel XVI.

Elemente der Planeten.

Volum	Wahrer Durchmesser
0. 0565	0. 384
0. 8828	0. 959
1. 0000	1. 000
0. 1386	0. 517
1280. 90	10. 860
974. 78	9. 982
81. 26	4. 331
1395324. 40	111. 74

Halbe grosse Axe in Millionen Toisen	Excentricität in Mill. Toisen
30371	9242
56751	389
78458	1516
119546	11135
408201	19666
758393	42036
1505080	70243

Kleinste Distanz von der Erde in Mill. Tois.	Durchmesser in Toisen
40529	2510000
20001	6276000
— —	6542000
28638	3386000
308760	71054000
626542	65310000
1356409	28338000

Neue Planeten.

Ceres.

Epoche der mittl. Länge 1801 Göttingen . .	77° 18′ 36″5
Länge des Periheliums f. dieselbe Zeit . . .	146 26 0 . 1
Jährliche Bewegung desselben	+ 2 1 . 3
Tägliche mittl. trop. Bewegung	770″9230
Logar. der halben grossen Axe	0 . 4420486
Excentricität 1806	0 . 0785028
Jährliche Abnahme	0 . 00000583
Länge des ☊ 1806	80 53 41 . 3
Jährl. Bewegung	+ 1 . 48
Neigung der Bahn 1806	10 37 31 . 2
Jährl. Abnahme	0″.44

Pallas.

Epoche der mit. Länge 1813, August 18ʰ. 0 Göttingen	331° 41′ 18″4
Länge des Periheliums für diese Zeit	121 4 46 . 5
Länge des ☊	172 33 0 . 4
Neigung der Bahn	34 35 8 . 3
Excentricitätswinkel, $e = \text{Sin}\ \varphi$	$\varphi =$ 13 58 31 . 7
Tägl. mit. trop. Bewegung	768″3934
Logar. halbe grosse Axe	0 . 4430003

Juno.

Epoche der mitt. Länge 1813 Dec. 31, 0ʰ Göttingen	230° 11′ 34″2
Länge des Periheliums für dieselbe Zeit	53 14 53 . 8
Länge des ☊	171 9 58 . 9
Neigung	13 4 0 . 1
Excentricitätswinkel	14 43 28 . 8
Tägliche mit. trop. Bewegung	812″.9304
Logar. halbe grosse Axe	0 . 4266844

Vesta.

Epoche der mitt. Länge 1814 Febr. 13, 12ʰ Götting	154° 55′ 27″8
Länge des Periheliums für dieselbe Zeit	249 38 6 . 7
Länge ☊	103 11 30 . 5
Neigung	7 8 16 . 0
Excentricitätswinkel	5 8 30 . 7
Tägl. mit. trop. Bewegung	977″95156
Logar. halbe grosse Axe	0 . 3731261

Tafel XVII.

Erster Theil.

Arg. wahre Anomalie in der Parabel.

	Log. —		Log —		Log +
0°	. . . . . .	34	4.37514	68	4.09583
1	2.95425	35	4.38049	69	4.05·52
2	3.25492	36	4.38519	70	4.01359
3	3.43057	37	4.38921	71	3.96291
4	3.55489	38	4.39266	72	3.90307
5	3.65100	39	4.39545	73	3.83091
6	3.72941	40	4.39760	74	3.74095
7	3.79501	41	4.39912	75	3.62203
8	3.85166	42	4.40001	76	3.45382
9	3.90130	43	4.40026	77	3.16758
10	3.94536	44	4.39988	78	0.87018
11	3.98488	45	4.39881		+
12	4.02060	46	4.39709	79	3.16902
13	4.05312	47	4.39468	80	3.47717
14	4.08286	48	4.39158	81	3.65979
15	4.11020	49	4.38775	82	3.79099
16	4.13541	50	4.38317	83	3.89400
17	4.15872	51	4.37781	84	3.97918
18	4.18033	52	4.37164	85	4.05202
19	4.20040	53	4.36462	86	4.11582
20	4.21906	54	4.35670	87	4.17271
21	4.23642	55	4.34783	88	4.22412
22	4.25259	56	4.33795	89	4.27112
23	4.26765	57	4.32699	90	4.31442
24	4.28166	58	4.31486	91	4.35466
25	4.29470	59	4.30147	92	4.39225
26	4.30682	60	4.28672	93	4.42757
27	4.31807	61	4.27046	94	4.46091
28	4.32847	62	4.25253	95	4.49250
29	4.33809	63	4.23275	96	4.52255
30	4.34693	64	4.21090	97	4.55121
31	4.35504	65	4.18668	98	4.57863
32	4.36243	66	4.15975	99	4.60493
33	4.36912	67	4.12966		

Tafel XVII.

Erster Theil.

Arg. wahre Anomalie in der Parabel.

	Log +		Log +		Log +
100°	4.63021	127	5.11705	154	5.53458
101	4.65456	128	5.13165	155	5.55371
102	4.67807	129	5.14619	156	5.57344
103	4.70081	130	5.16067	157	5.59382
104	4.72283	131	5.17511	158	5.61492
105	4.74420	132	5.18952	159	5.63683
106	4.76496	133	5.20392	160	5.65962
107	4.78515	134	5.21832	161	5.68342
108	4.80483	135	5.23275	162	5.70833
109	4.82403	136	5.24720	163	5.73449
110	4.84278	137	5.26170	164	5.76208
111	4.86111	138	5.27627	165	5.79128
112	4.87905	139	5.29091	166	5.82233
113	4.89664	140	5.30566	167	5.85552
114	4.91389	141	5.32052	168	5.89121
115	4.93083	142	5.33551	169	5.92985
116	4.94749	143	5.35066	170	5.97201
117	4.96387	144	5.36599	171	6.01847
118	4.98001	145	5.38151	172	6.07024
119	4.99592	146	5.39725	173	6.12877
120	4.01162	147	5.41324	174	6.19619
121	5.02713	148	5.42950	175	6.27577
122	5.04246	149	5.44606	176	6.37300
123	5.05764	150	5.46296	177	6.49819
124	5.07267	151	5.48022	178	6.67546
125	5.08757	152	5.49788	179	6.97560
126	5.10236	153	5.51599	180	

Tafel XVII.

Zweyter Theil.

Arg. wahre Anomalie in der Parabel.

	Log −		Log −		Log +
0°	∞	34	3.6868	68	3.5601
1	2.0519	35	3.7011	69	3.5047
2	2.3533	36	3.7147	70	3.4358
3	2.5301	37	3.7276	71	3.3470
4	2.6561	38	3.7397	72	3.2261
5	2.7545	39	3.7511	73	3.0435
6	2.8356	40	3.7617	74	2.6895
7	2.9047	41	3.7716		+
8	2.9651	42	3.7808	75	2.2186
9	3.0190	43	3.7892	76	2.9342
10	3.0678	44	3.7968	77	3.2026
11	3.1124	45	3.8036	78	3.3749
12	3.1536	46	3.8095	79	3.5038
13	3.1920	47	3.8146	80	3.6077
14	3.2280	48	3.8187	81	3.6953
15	3.2620	49	3.8219	82	3.7715
16	3.2941	50	3.8242	83	3.8393
17	3.3246	51	3.8254	84	3.9004
18	3.3536	52	3.8255	85	3.9563
19	3.3814	53	3.8244	86	4.0078
20	3.4080	54	3.8222	87	4.0558
21	3.4335	55	3.8186	88	4.1008
22	3.4579	56	3.8136	89	4.1431
23	3.4815	57	3.8071	90	4.1832
24	3.5041	58	3.7990	91	4.2215
25	3.5258	59	3.7890	92	4.2575
26	3.5467	60	3.7769	93	4.2924
27	3.5668	61	3.7627	94	4.3258
28	3.5862	62	3.7458	95	4.3580
29	3.6048	63	3.7260	96	4.3889
30	3.6226	64	3.7028	97	4.4189
31	3.6398	65	3.6766	98	4.4479
32	3.6562	66	3.6435	99	4.4760
33	3.6719	67	3.6055		

Tafel XVII.

Zweyter Theil.

Arg. wahre Anomalie in der Parabel.

	Log +		Log +		Log +
100	4.5033	127	5.0945	154	5.8178
101	4.5299	128	5.1150	155	5.8595
102	4.5558	129	5.1356	156	5.9033
103	4.5812	130	5.1563	157	5.9495
104	4.6059	131	5.1773	158	5.9982
105	4.6301	132	5.1985	159	6.0496
106	4.6538	133	5.2200	160	6.1043
107	4.6771	134	5.2418	161	6.1625
108	4.7000	135	5.2639	162	6.2241
109	4.7225	136	5.2865	163	6.2902
110	4.7436	137	5.3094	164	6.3811
111	4.7665	138	5.3328	165	6.4377
112	4.7880	139	5.3566	166	6.5198
113	4.8093	140	5.3811	167	6.6091
114	4.8304	141	5.4061	168	6.7067
115	4.8512	142	5.4318	169	6.8136
116	4.8719	143	5.4582	170	6.9319
117	4.8924	144	5.4854	171	7.0637
118	4.9128	145	5.5134	172	7.2122
119	4.9331	146	5.5424	173	7.3817
120	4.9533	147	5.5723	174	7.5787
121	4.9734	148	5.6033	175	7.8129
122	4.9935	149	5.6355	176	8.1008
123	5.0137	150	5.6689	177	8.4735
124	5.0338	151	5.7037	178	9.0002
125	5.0539	152	5.7401	179	
126	5.0742	153	5.7781	180	

Tafel XVIII.

h	log y²	h	log y²	h	log y²
0. 0000	0. 0000900	0. 0043	0. 0041186	0. 0086	0. 0081758
01	0965	44	2136	87	2694
02	1930	45	3086	88	3650
03	2894	46	4036	89	4566
04	3858	47	4985	90	5502
05	4821	48	5934	91	6437
06	5784	49	6883	92	7372
07	6747	50	7832	93	8366
08	7710	51	8780	94	0. 0089240
09	8672	52	0. 0049728	95	0. 0090174
10	0. 0009634	53	0. 0050675	96	1108
11	0. 0010595	54	1622	97	2041
12	1557	55	2569	98	2974
13	2517	56	3516	0. 0099	3906
14	3478	57	4462	0. 0100	4839
15	4438	58	5407	01	5770
16	5398	59	6353	02	6702
17	6357	60	7298	03	7633
18	7316	61	8243	04	8564
19	8275	62	0. 0059187	05	0. 0099495
20	0. 0019234	63	0. 0060131	06	0. 0100425
21	0. 0020192	64	1075	07	1356
22	1150	65	2019	08	2285
23	2107	66	2962	09	3215
24	3064	67	3905	10	4144
25	4021	68	4847	11	5073
26	4977	69	5790	12	6001
27	5933	70	6732	13	6929
28	6889	71	7673	14	7857
29	7845	72	8614	15	8785
30	8800	73	0. 0069555	16	0. 0109712
31	0. 0029755	74	0. 0070496	17	0. 0110639
32	0. 0030709	75	1436	18	1565
33	1663	76	2376	19	2491
34	2617	77	3316	20	3417
35	3570	78	4255	21	4343
36	4523	79	5194	22	5268
37	5476	80	6133	23	6193
38	6428	81	7071	24	7118
39	7381	82	8009	25	8013
40	8332	83	8947	26	8967
41	0. 0039284	84	0. 0079884	27	0. 0119890
42	0. 0040235	85	0. 0080821	28	0. 0120814

Tafel XVIII.

h	log y²	h	log y²	h	log y²
0.0129	0.0121737	0.0172	0.0161142	0.0215	0.0199992
30	2660	73	2052	16	0.0200889
31	3582	74	2981	17	1785
32	4505	75	3870	18	2682
33	5427	76	4779	19	3578
34	6348	77	5688	20	4474
35	7269	78	6596	21	5369
36	8190	79	7504	22	6264
37	0.0129111	80	8412	23	7159
38	0.0130032	81	0.0169319	24	8054
39	0952	82	0.0170226	25	8948
40	1871	83	1133	26	0.0209843
41	2791	84	2039	27	0.0210736
42	3710	85	2945	28	1630
43	4629	86	3851	29	2523
44	5547	87	4757	30	3416
45	6466	88	5662	31	4309
46	7383	89	6567	32	5201
47	8301	90	7471	33	6093
48	0.0139218	91	8376	34	6985
49	0.0140135	92	0.0179280	35	7876
50	1052	93	0.0180183	36	8768
51	1968	94	1087	37	0.0219659
52	2885	95	1990	38	0.0220549
53	3800	96	2893	39	1440
54	4716	97	3796	40	2330
55	5631	98	4698	41	3220
56	6546	0.0199	5600	42	4109
57	7460	0.0200	6501	43	4998
58	8375	01	7403	44	5887
59	0.0149288	02	8304	45	6776
60	0.0150202	03	0.0189205	46	7664
61	1115	04	0.0190105	47	8552
62	2028	05	1005	48	0.0229440
63	2941	06	1905	49	0.0230328
64	3854	07	2805	50	1215
65	4766	08	3704	51	2102
66	5678	09	4603	52	2988
67	6589	10	5502	53	3875
68	7500	11	6401	54	4761
69	8411	12	7299	55	5647
70	0.0159322	13	8197	56	6532
71	0.0160232	14	9094	57	7417

Tafel XVIII.

h	log y^2	h	log y^2	h	log y^2
0. 0258	0. 0238302	0. 0300	0. 0275218	0. 0342	0. 0311650
59	0. 0239187	301	6091	43	2512
60	0. 0240071	02	6964	44	3373
61	0956	03	7836	45	4234
62	1839	04	8708	46	5095
63	2723	05	9580	47	5956
64	3606	06	0. 0280452	48	6816
65	4489	07	1323	49	7676
66	5372	08	2194	50	8536
67	6254	09	3065	51	0. 0319396
68	7136	10	3936	52	0. 0320255
69	8018	11	4806	53	1114
70	8900	12	5676	54	1973
71	0. 0249781	13	6546	55	2831
72	0. 0250662	14	7415	56	3689
73	1543	15	8284	57	4547
74	2423	16	0. 0289153	58	5405
75	3304	17	0. 0290022	59	6262
76	4183	18	0890	60	7120
77	5063	19	1758	61	7976
78	5942	20	2626	62	8833
79	6822	21	3494	63	0. 0329689
80	7700	22	4361	64	0. 0330546
81	8579	23	5228	65	1401
82	0. 0259457	24	6095	66	2257
83	0. 0260335	25	6961	67	3112
84	1213	26	7827	68	3967
85	2090	27	8693	69	4822
86	2967	28	0. 0299559	70	5677
87	3844	29	0. 0300424	71	6531
88	4721	30	1290	72	7385
89	5597	31	2154	73	8239
90	6473	32	3019	74	9092
91	7349	33	3883	75	0. 0339946
92	8224	34	4747	76	0. 0340799
93	9099	35	5611	77	1651
94	0. 0269974	36	6475	78	2504
95	0. 0270849	37	7338	79	3356
96	1723	38	8201	80	4208
97	2597	39	9064	81	5059
98	3471	40	0. 0309926	82	5911
0. 0299	4345	41	0. 0310788	83	6762

Tafel XVIII.

h	log y²	h	log y²	h	log y²
0.0384	0.0347613	0.067	0.0580994	0.110	0.0899523
85	8464	0.068	88817	0.111	0.0906530
86	0.0349314	0.069	0.0596618	0.112	13520
87	0.0350164	0.070	0.0604398	0.113	20494
88.	1014	0.071	12157	0.114	27451
89	1864	0.072	19895	0.115	34391
90	2713	0.073	26712	0.116	41315
91	3562	0.074	35308	0.117	48223
92	4411	0.075	42984	0.118	55114
93	5259	0.076	50639	0.119	61990
94	6108	0.077	58274	0.120	68849
95	6956	0.078	65888	0.121	75692
96	7804	0.079	73483	0.122	82520
97	8651	0.080	81057	0.123	89331
98	0.0359499	0.081	88612	0.124	0.0996127
0.0399	0.0360346	0.082	0.0696146	0.125	0.1002907
0.0400	0.0361192	0.083	0.0703661	0.126	09672
0.041	0.0369646	0.084	11157	0.127	16421
0.042	0.0378075	0.085	18633	0.128	23154
0.043	0.0386478	0.086	26090	0.129	29873
0.044	0.0394856	0.087	33527	0.130	36576
0.045	0.0403209	0.088	40945	0.131	43262
0.046	11537	0.089	48345	0.132	49936
0.047	19841	0.090	55725	0.133	56594
0.048	28121	0.091	63087	0.134	63237
0.049	36376	0.092	70430	0.135	69865
0.050	44607	0.093	77754	0.136	76478
0.051	52814	0.094	85060	0.137	83076
0.052	60998	0.095	92348	0.138	89660
0.053	69157	0.096	0.0799617	0.139	0.1096229
0.054	77294	0.097	0.0806868	0.140	0.1102783
0.055	85407	0.098	14101	0.141	09323
0.056	0.0493496	0.099	21316	0.142	15840
0.057	0.0501563	0.100	28513	0.143	22360
0.058	09607	0.101	35693	0.144	28857
0.059	17628	0.102	42854	0.145	35340
0.060	25626	0.103	49999	0.146	41899
0.061	33602	0.104	57125	0.147	48264
0.062	41556	0.105	64235	0.148	54704
0.063	49488	0.106	71327	0.149	61131
0.064	57397	0.107	78401	0.150	67544
0.065	65285	0.108	85459		
0.066	73150	0.109	92500		

Tafel XIX.

x	ξ	x	ξ	x	ξ
0.000	0.0000.000	0.042	0.0001035	0.084	0.0004239
0.001	001	0.043	1084	0.085	4343
0.002	002	0.044	1135	0.086	4448
0.003	005	0.045	1188	0.087	4555
0.004	009	0.046	1242	0.088	4663
0.005	014	0.047	1298	0.089	4773
0.006	021	0.048	1354	0.090	4884
0.007	028	0.049	1412	0.091	4996
0.008	037	0.050	1471	0.092	5109
0.009	047	0.051	1532	0.093	5224
0.010	057	0.052	1593	0.094	5341
0.011	070	0.053	1656	0.095	5458
0.012	083	0.064	1720	0.096	5577
0.013	097	0.055	1785	0.097	5697
0.014	113	0.056	1852	0.098	5819
0.015	130	0.057	1920	0.099	5942
0.016	148	0.058	1989	0.100	6066
0.017	167	0.059	2060	0.101	6192
0.018	187	0.060	2131	0.102	6319
0.019	209	0.061	2204	0.103	6448
0.020	231	0.062	2278	0.104	6578
0.021	255	0.063	2354	0.105	6709
0.022	280	0.064	2431	0.106	6842
0.023	306	0.065	2509	0.107	6976
0.024	334	0.066	2588	0.108	7111
0.025	0.0000362	0.067	2669	0.109	7248
0.026	0.000 0392	0.068	2751	0.110	7386
0.027	0423	0.069	2834	0.111	7526
0.028	0455	0.070	2918	0.112	7667
0.029	0489	0.071	3004	0.113	7809
0.030	0523	0.072	3091	0.114	7953
0.031	0559	0.073	3180	0.115	8098
0.032	0596	0.074	3269	0.116	8245
0.033	0634	0.075	3360	0.117	8393
0.034	0674	0.076	3453	0.118	8542
0.035	0714	0.077	3546	0.119	8693
0.036	0756	0.078	3641	0.120	8845
0.037	0799	0.079	3738	0.121	8999
0.038	0844	0.080	3835	0.122	9151
0.039	0889	0.081	3934	0.123	9311
0.040	0936	0.082	4034	0.124	9469
0.041	0984	0.083	4136	0.125	9628

Tafel XIX.

x	ξ	x	ξ	x	ξ
0. 126	0. 0009789	0. 168	0. 0017878	0. 210	0. 0028722
0. 127	0. 0009951	0. 169	8103	0. 211	9015
0. 128	0. 0010115	0. 170	8330	0. 212	9311
0. 129	0280	0. 171	8558	0. 213	9608
0. 130	0447	0. 172	8788	0. 214	0. 0029907
0. 131	0615	0. 173	9020	0. 215	0. 0030207
0. 132	0784	0. 174	9253	0. 216	0509
0. 133	0955	0. 175	9487	0. 217	0814
0. 134	1128	0. 176	9724	0. 218	1119
0. 135	1301	0. 177	0. 0019961	0. 219	1427
0. 136	1477	0. 178	0. 0020201	0. 220	1736
0. 137	1654	0. 179	0442	0. 221	2047
0. 138	1832	0. 180	0685	0. 222	2359
0. 139	2012	0. 181	0929	0. 223	2674
0. 140	2193	0. 182	1175	0. 224	2990
0. 141	2376	0. 183	1422	0. 225	3308
0. 142	2560	0. 184	1671	0. 226	3627
0. 143	2745	0. 185	1922	0. 227	3949
0. 144	2933	0. 186	2174	0. 228	4272
0. 145	3121	0. 187	2428	0. 229	4597
0. 146	3311	0. 188	2683	0. 230	4924
0. 147	3503	0. 189	2941	0. 231	5252
0. 144	3696	0. 190	3199	0. 232	5582
0. 149	3791	0. 191	3460	0. 233	5914
0. 150	4087	0. 192	3722	0. 234	6248
0. 151	4285	0. 193	3985	0. 235	6584
0. 152	4484	0. 194	4251	0. 236	6921
0. 153	4684	0. 195	4518	0. 237	7260
0. 154	4886	0. 196	4789	0. 238	7601
0. 155	5090	0. 197	5056	0. 239	7944
0. 156	5295	0. 198	5328	0. 240	8289
0. 157	5502	0. 199	6602	0. 241	8635
0. 258	5710	0. 200	5877	0. 242	8983
0. 159	5920	0. 201	6154	0. 243	9333
0. 160	6131	0. 202	6433	0. 244	0. 0039685
0. 161	6344	0. 203	6713	0. 245	0. 0040039
0. 162	6559	0. 204	6995	0. 246	0394
0. 163	6775	0. 205	7278	0. 247	0752
0. 164	6992	0. 206	7564	0. 248	1111
0. 165	7211	0. 207	7851	0. 248	1472
0. 166	7432	0. 208	8139	0. 250	1835
9. 167	7654	0. 209	8429		