3

Astro.
3 vols.
$2.00

3 vols

Georg von [illegible]
1841.

Theoretische
und
practische
Astronomie.

Von

J. J. Littrow,
Director der Sternwarte, und Professor der Astronomie
an der k. k. Universität in Wien.

Erster Theil.

Mit zwey Kupfertafeln.

Wien.
Gedruckt und im Verlage bey J. B. Wallishäusser.
1821.

Seiner

Hochwohlgeborn,

dem Herrn

And. Jos. Freyherrn v. Stifft,

Ritter des k. ung. St. Stephansordens, Inhaber des Civil-Ehrenkreuzes, Grofsband des k. franz. St. Michael-, Commandeur des k. portug. Christus-, des k. sicil. Ferdinands- und Verdienst-, und des k. sächs. Civil-Verdienst-Ordens; Sr. k. k. apostolischen Majestät wirklichem Staats- und Conferenzrath, Doctor der Arzneykunde, erstem Leib- und Protomedicus, Indigenat des Königreichs Ungarn, Landstand von Tyrol und Steyermark; der medicinischen Studien und Facultät Director und Präses, der k. k. Universität in Wien Rector; Mitglied der medicinischen Gesellschaften zu London, Venedig und Padua, der k. k. medic. chirurgischen Josephs-Academie und der Academie der bildenden Künste zu Wien, der k. böhm. ökon. patriotischen Gesellschaft zu Prag, der Mährisch-Schlesischen der Landescultur zu Brünn, der russisch kais. med. chirurgischen Academie zu Petersburg etc. etc.

mit inniger Verehrung gewidmet

vom Verfasser.

VORREDE.

Die mathematischen, und unter ihnen besonders die astronomischen Wissenschaften scheinen bey uns einer neuen, schönen Epoche entgegen zu gehen. Unser allverehrte Monarch, der diese Wissenschaften nicht nur beschützt, sondern was seltner ist, sie selbst innig kennt, und dessen Wille, sie in seinen Staaten in Aufnahme gebracht zu sehen, bestimmt ausgesprochen wurde, hat bereits alle Mittel zu dieser Aufnahme mit wahrhaft kaiserlicher Freygebigkeit dargeboten, und der Herr Staats- und Conferenzrath, Freyherr v. Stifft, hat durch die eifrigste Ausführung des kaiserlichen Willens um diese, wie bereits um so viele andere Wissenschaften in unserem Vaterlande, sich auch in der Zukunft bleibende und grofse Verdienste erworben. Schon ist mit grofsen Kosten die Bildung künftiger Astronomen geregelt, die Bibliothek der Sternwarte bereichert und deren Wohlstand für die Folgezeit gesichert, die Anzahl der Instrumente vermehrt, neue, gröfsere, und kostbarere bestellt, und bald wird sich eine andere, dem gegenwärtigen Zustande der Astronomie völlig angemessene Sternwarte erheben, ein Denkmal der Grofsmuth ihres erlauchten Stifters, und seiner Liebe für die erhabenste der Wissenschaften, ein neuer Tempel Uraniens, der unsere späten Enkel an die Wohlthaten erinneren wird, welche wir unserem gütigen Monarchen verdanken.

An uns ist es nun, die dargebotenen Mittel gehörig zu benützen, den Zweck der Stiftung zu erreichen, und dem neuen, aufblühenden Institute die Früchte zu sichern, die es jetzt und in der Folge zu tragen bestimmt ist.

Was zu dieser Absicht in den verschiedenen Theilen des Instituts geschehen ist und wird, soll an seinem Orte gesagt werden. Das erste aber, und das dringendste war die Bildung künftiger Astronomen, an welcher es hier gänzlich fehlte.

Der Zweck des vorliegenden Werkes ist, den mit den nothwendigen mathematischen Kenntnissen versehenen Leser in den Stand zu setzen, die wichtigsten Geschäfte des Astronomen, sowohl in Beziehung auf die Beobachtungen, als besonders auf die Berechnung derselben gehörig zu besorgen. Die erste Auffoderung dazu gab die Ueberzeugung, daſs es unserer Sprache noch an einem solchen Werke fehle, obschon viel Vortreffliches bereits vorgearbeitet wurde; die unmittelbare Veranlassung zur Ausführung endlich gaben die öffentlichen Vorlesungen, welche der Verfasser über diesen Gegenstand hält.

Aus diesem doppelten Gesichtspunkte wird man die Einrichtung und Ausführung des Ganzen beurtheilen. Zur näheren Bestimmung wird Folgendes dienen.

Als Mittel bey Vorlesungen setzt das Werk Leser oder Zuhörer voraus, welche, wie es bey uns der Fall ist, mit der sogenannten höheren Mathematik bereits bekannt sind. Wer zu Ende kommen will, darf nicht, wie es sonst wohl geschieht, nur immer wieder von vorne anfangen. Die häufigen Beziehungen dieses Werkes auf jene Kenntnisse, besonders auf die der analytischen Geometrie, welche bey uns noch nicht so bekannt ist, wie sie es wohl verdiente, werden eben so viele Aufforderungen seyn, jene Theorien theils zurück zu rufen, theils nachzuholen.

Treffende Kürze und Bestimmtheit im Ausdrucke schienen bessere Mittel zur Deutlichkeit, als alle redselige Geschwätzigkeit. Weitläufige, oft unfruchtbare Theorien werden in Werken solcher Art besser vermieden: dafür soll mehr auf Brauchbarkeit in der Anwendung gesehen werden. Andere Gegenstände, wie Refraction, Präcession u. f. können ihrer Nothwendigkeit wegen nicht ausgeschlossen werden, obschon sie ihre vollständige theoretische Entwicklung erst in der eigentlichen physichen Astronomie erwarten. Endlich, alles zu sagen, was Jeder wünscht, ist schwer, ist unmöglich: genug, wenn das Vorzüglichste, wenn das gesagt wird, worauf es ankömmt, und mit dessen Hilfe sich das andere selbst suchen läſst. — Dieses Selbstsuchen, dem das Vergnügen des Selbstfindens zu folgen pflegt, ist bey dem Studium aller, besonders der mathematischen Werke, eigentlich die Hauptsache, und dazu aufzufodern, wird es hier an Gelegenheit nicht fehlen. Ein Buch, welches alles sagt, und dem Leser nichts mehr hinzuzusetzen übrig läſst, ist vielleicht zum stillen Selbstunterrichte sehr bequem, aber zu einem Lehrbuche bey Vorlesungen nicht geeignet. Diese Selbstthätigkeit des Lesers ist dem bloſsen passiven Erlernen weit vorzuziehen, vorzüglich in einer Wissenschaft, wo es mehr auf Bestimmtheit, als auf Reichthum der Begriffe, oder auf eine weit verbreitete Gelehrsamkeit ankömmt, und in welcher man gewöhnlich nur das als wahres Eigenthum besitzt, nur das gut weiſs, was man von und durch sich selbst weiſs, und dazu sollen Bücher nur Mittel, nicht Zwecke seyn.

Da es hier nur um die eigentlich wissenschaftliche Belehrung für die Beobachtungen sowohl als für die Berechnung derselben zu thun ist, so werden alle bloſs populären, alle bloſs angenehmen ästhetischen oder historischen Darstellungen, so wie die Entdeckungen über die physische Beschaffenheit der Weltkörper, über den Bau und die Organisation des Himmels u. f. mit welchen besonders Herschel und Schröter unsere Kenntnisse vermehrten, gröſstentheils auſser dem Zwecke dieses Werkes liegen.

Daſs die Vorgänger benützt wurden, darf wohl nicht erst gesagt werden, so wie das Eigene der mit dem Gegenstande vertraute Leser leicht erkennen wird. Bey jeder Gelegenheit die Quellen zu nennen, war nicht immer möglich, da sie nur selten gegenwärtig waren, und oft nur nach früheren kurzen Auszügen, oder aus dem Gedächtnisse gearbeitet werden muſste. Auch hätten, auſser den Werken Lalandes, Schuberts, Delambres, Bohnenbergers, Santinis u. f. Namen, wie Bessel, Gauſs, Olbers, Zach, u. a zu oft wiederholt werden müssen, da diese Männer beynahe keinen interessanten Theil der theoretischen oder practischen Astronomie mit ihren Erfindungen unbereichert gelassen haben.

Ich wünsche nichts mehr, als mit diesem Werke den Nutzen in der That erreicht zu haben, welchen ich damit beabsichtigte.

Wien den 13. März 1821.

Der Verfasser.

INHALT DES ERSTEN BANDES.

ERSTES KAPITEL.

Eintheilung der Oberfläche des Himmels und Bestimmung eines Punktes auf dieser Fläche.

Seite

FÜNFTES KAPITEL.

Parallaxe.

SECHSTES KAPITEL.

Zeiten.

SIEBENTES KAPITEL.

Bestimmung der Zeit durch Beobachtungen.

ACHTES KAPITEL.

Bestimmung der Polhöhe aus Beobachtungen.

NEUNTES KAPITEL.

Bestimmung der geographischen Länge des Azimuts, der Schiefe der Ecliptik u.f.

ZEHNTES KAPITEL.

Terrestrische Messungen.

EILFTES KAPITEL.

Instrumente

ERSTER THEIL:

SPHÄRISCHE ASTRONOMIE.

ERSTES KAPITEL.

Eintheilung der Oberfläche des Himmels und Bestimmung eines Punktes auf dieser Fläche.

§. 1.

Der Himmel erscheint uns als eine hohle Kugelfläche, auf welcher wir die Gegenstände, die er uns darbietet, zu betrachten glauben. Die Richtung der Schwere auf unserer Erde in dem Orte des Beobachters trifft verlängert jene Kugelfläche in zwey Punkten, deren oberer uns sichtbarer das Zenith, und deren unterer uns unsichtbarer das Nadir des Beobachters heifst. Die Kreise, durch deren Mittelpunkte jene Richtung unter rechten Winkeln geht, sind Almicantarat, und unter diesen der, welcher durch den Punkt der Oberfläche der Erde, den der Beobachter einnimmt, geht, der scheinbare, und der, welcher durch den Mittelpunkt der Erde geht, der wahre Horizont.

] = [illegible] Kant. p. 30.

Die tägliche Bewegung der Himmelskörper geht in unter einander parallelen Kreisen vor sich, deren sämmtliche Mittelpunkte in einer geraden Linie, der Weltaxe, liegen. Die Punkte, in welchen diese Axe die Fläche des Himmels trifft, sind die Weltpole, und zwar der in unsern Gegenden sichtbare: der nördliche, und der entgegengesetzte uns unsichtbare: der südliche Pol. Unter diesen Parallelkreisen ist der von beyden Polen gleichweit abstehende der Aequator, der den Himmel in zwey gleiche Theile, die nördliche und südliche Hemisphäre, theilt.

Der Durchschnitt des Aequators mit dem wahren Horizont, auf der Seite, wo die Gestirne in ihrer täglichen Bewegung sich über dem Horizont erheben, heifst Ost, oder Morgen, und der diesem entgegengesetzte Durchschnitt beyder Kreise West, oder Abend. Auf- oder Untergang bezeichnet den Augenblick, in welchem ein Gestirn auf der Ost- oder Westseite durch den Horizont geht, und die Entfernung des auf- oder untergehenden Gestirns vom Ost- oder Westpunkte, im Horizont gezählt, heifst des Gestirns Morgen- oder Abendweite

Die gröfsten Kreise durch die Weltpole und durch das Zenith oder Nadir sind Meridiane. Der Durchschnitt der Ebene des Meridians mit dem Horizonte ist die Mittagslinie. Ihr Endpunkt in der südlichen Hemisphäre heifst Süd, oder Mittag, und der entgegengesetzte Nord, oder Mitternacht.

Gröfste Kreise durch die Weltpole und ein Gestirn sind dieses Gestirns Declinations- oder Abweichungs- oder Stundenkreise. Gröfste Kreise durch das Zenith und ein Gestirn sind dieses Gestirns Höhen- oder Scheitelkreise, Die ersten stehen also auf dem Aequator, und die andern auf dem Horizont senkrecht.

]Kreise: Höhkr. = Parallkr. mit Horiz. pll.

Der Winkel am Weltpole zwischen dem Meridian und dem Declinationskreise eines Gestirns ist des Gestirns Stundenwinkel, und der Winkel am Zenith zwischen dem Meridian und eines Gestirns Scheitelkreise ist des Gestirns Azimut.

Der Theil des Declinationskreises zwischen dem Gestirn und dem Aequator ist des Gestirns Declination oder Abweichung, und dessen Ergänzung zu 90 Graden desselben Poldistanz. Der Theil des Scheitelkreises zwischen dem Gestirn und dem Horizonte ist des Gestirns Höhe und dessen Ergänzung zu 90 Graden desselben Zenithdistanz.

Unter den Körpern des Himmels dringt sich dem Beobachter vor allem die Sonne auf. Man bemerkte sehr früh, dafs sie, nebst der täglichen Bewegung von Ost nach West, welche sie mit allen Gestirnen gemein hat, noch in einer eigenen Bewegung von West nach Ost in einem Kreise fortzurücken scheint, welcher den Aequator halbirt. Dieser gröfste Kreis, die scheinbare Bahn der Sonne, heifst die Ecliptik. Ihre Axe bezeichnet an der Fläche des Himmels in der nördlichen Hemisphäre den nördlichen, und in der entgegengesetzten den südlichen Pol der Ecliptik. Ein gröfster Kreis durch diese Pole und ein Gestirn heifst des Gestirns Breitenkreis, und der Theil desselben zwischen dem Gestirn und der Ecliptik heifst des Gestirns Breite. Die Durchschnittspunkte der Ecliptik mit dem Aequator sind die Aequinoctialpuncte, oder die Punkte der Nachtgleichen, deren jener, von welchem die Sonne sich in die nördliche Hemisphäre erhebt, der Frühlingspunkt, und der entgegengesetzte der Herbstpunkt heifst. Der Bogen des Aequators zwischen dem Frühlingspunkt und dem Declinationskreise eines Gestirns heifst des Gestirns Rectascension oder gerade Aufsteigung, und der Bogen der Ecliptik zwischen dem Frühlingspunkte und dem Breitenkreise eines Gestirns heifst des Gestirns Länge.

Der Parallelkreis durch den Nord- und Südpol der Ecliptik ist der nördliche und südliche Polarkreis. Der Parallelkreis, der in der nördlichen und südlichen Hemisphäre eben so weit vom Aequator absteht, als die Polarkreise von den Weltpolen, heifst der nördliche und südliche **Wendekreis**. Der Declinationskreis durch die Aequinoctialpunkte ist der **Colur der Nachtgleichen**, und der von diesem um 90 Grade in Rectascension oder Länge entfernte Declinationskreis ist der **Colur der Solstitien**, oder der Sonnenwenden. Endlich nennt man den Winkel des Breitenkreises eines Gestirns mit dem Declinationskreise die **Position**, den des Declinationskreises mit dem Scheitelkreise die **Variation**, und den des Scheitelkreises mit dem Breitenkreise die **Parallaxe** des Gestirns.

Länge und Rectascension wird vom Frühlingspunkte bis 360 Grade und zwar in einer der täglichen Bewegung der Gestirne entgegengesetzten Richtung, also von West gen Ost gezählt. Azimute und Stundenwinkel aber zählt man in der Richtung der täglichen Bewegung von Süden angefangen gen West bis 360 Grade, oder auch bis 180 Grade, in welchem letzten Falle man aber die auf der Ostseite des Meridians liegenden Azimute und Stundenwinkel negativ nimmt. Südliche Declinationen und Breiten sind negativ.

Das Vorgetragene wird man sich bequem durch die Betrachtung eines Globus erläutern: um es aber durch eine Zeichnung sinnlich darzustellen, sey (Fig. 1.) Z der Pol des Horizonts HR, N der Pol des Aequators AQ, L der Pol der Ecliptik EP, S ein Gestirn, und R. A. H. Süd, West, Nord, so ist HZR der Meridian, und wenn man durch S die Bogen ZSa, NSb, LSc nach der Ordnnng senkrecht auf HR, AQ, EP zieht, so ist

Sa	die Höhe des Gestirns,
SZ	die Zenithdistanz,
Sb	die Declination,
SN	die Poldistanz,
Sc	die Breite,
ONb	oder Ob die Rectascension,
OLc	oder Oc die Länge,
ENb	oder Qb der Stundenwinkel,
RZa	oder Ra das Azimut,
NSL	die Position,
NSZ	die Variation,
LSZ	die Parallaxe.

§. 2.

Almicantarat und Parallelkreise ausgenommen, sind alle bisher betrachtete Kreise **gröfste**, d. h. solche, deren Mittelpunkt zugleich der der Kugelfläche des Himmels ist. Die ungemein grofse Entfernung der meisten Gestirne, von welcher wir uns in der Folge überzeugen werden, erlaubt uns oft die ganze Erde nur für einen Punkt, d. h. das Auge des Beobachters im Mittelpunkte der Erde anzunehmen, wodurch der Unterschied des wahren und scheinbaren Horizontes, so wie überhaupt der

Unterschied der aus der Oberfläche der Erde gesehenen Erscheinungen des Himmels und der aus dem Mittelpunkte derselben beobachteten ganz verschwindet. Die in dem Vorhergehenden betrachteten gröfsten Kreise bilden also auf der Kugelfläche des Himmels, deren Mittelpunkt wir einnehmen, sphärische Dreyecke, deren Auflösung uns zuerst beschäftigen soll.

Ehe wir aber dazu übergehen, wird es gut seyn, die vorzüglichsten Lehren der sogenannten sphärischen Trigonometrie und einige verwandte Gegenstände auf eine eben so allgemeine als einfache Weise zu entwickeln.

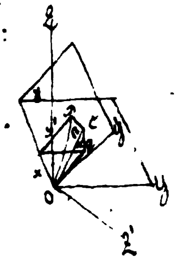
f. 84. Zwey Ebenen sollen sich unter dem Winkel γ schneiden. Die rechtwinklichten Coordinaten irgend eines Punktes C in Beziehung auf die erste Ebene sollen x y z, und in Beziehung auf die andere x′ y′ z′ heifsen. Der Anfangspunkt dieser Coordinaten, so wie die Axen des x und x′ sollen endlich in der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie beyder Ebenen liegen. Diefs vorausgesetzt, hat man sofort folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= z \operatorname{Sin} \gamma - y \operatorname{Cos} \gamma \\ z' &= z \operatorname{Cos} \gamma + y \operatorname{Sin} \gamma \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

Ist nun r die Entfernung jenes Punktes von dem Anfangspunkte der Coordinaten und überdiefs

α der Winkel des r mit der Axe des z
β ... z′ und
A der Winkel der Project. von r in der Ebene x′ y′ mit der Axe des y′ (xoy′)
B ... x y ... y (xoy)

so ist, wenn man jene Entfernung $r = 1$ setzt:



$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} B \\ y &= \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} B \\ z &= \operatorname{Cos} \alpha \end{aligned}$$

und eben so:

$$\begin{aligned} x' &= \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} A \\ y' &= \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Cos} A \\ z' &= \operatorname{Cos} \beta \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe der Coordinaten in den Gleichungen (I), so gibt die erste

$$\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} B = \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} A \ldots \text{(a)}$$

und die dritte

$$\operatorname{Cos} \beta = \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \gamma + \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \gamma \operatorname{Cos} B \ldots \text{(b)}$$

und endlich die zweyte, dividirt durch die erste,

F $$\operatorname{Cotg} A \operatorname{Sin} B = \operatorname{Cotg} \alpha \operatorname{Sin} \gamma - \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} B \ldots \text{(c)}$$

Diese drey Gleichungen, ja schon die zweyte (b), aus welcher sich die beyden andern leicht ableiten lassen, enthalten die gesammten Vorschriften der sphärischen, also auch der ebenen

F cot. a sin β = cot. A sin. C + cos. C cos β ([illegible])

Trigonometrie, welche letzte nur ein besonderer Fall von jener ist, da man alle Ausdrücke der ebenen Trigonometrie erhält, wenn man in denen der sphärischen die Seiten der Dreyecke unendlich klein annimmt. Um diess zu zeigen, beschreibe man um den Anfangspunkt der Coordinaten als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $r = 1$ eine Kugel. Die verlängerten Axen der z und z' sollen die Fläche dieser Kugel respective in den Punkten B und A schneiden. Verbindet man die Punkte ABC der Kugelfläche durch drey grösste Kreise, so hat man ein sphärisches Dreyeck ABC. Wir wollen der gewöhnlichen Bezeichnung gemäss, die Winkel dieses Dreyecks BAC, ABC, BCA resp. A, B, C, und die Seiten BC, AC, AB desselben α, β, γ nennen. Man sieht leicht, dass hier die Zeichen A, B, C und α, β, γ die vorige Bedeutung haben, also gelten die drey vorhergehenden Gleichungen (a), (b), (c) auch für sphärische Dreyecke.

ABC, d. h. [illegible] 0,2609 [illegible] 0,21492 [illegible] 0,04,03 [illegible]

Setzt man endlich in der Gleichung (c) für Sin γ die Grösse $\frac{\text{Sin } \alpha \text{ Sin C}}{\text{Sin A}}$ aus der Gleichnng (a), so hat man

$$\text{Cos A Sin B} = \text{Cos } \alpha \text{ Sin C} - \text{Cos } \gamma \text{ Cos B Sin A}$$

und durch blosse Verwandlung der Buchstaben analog,

$$\text{Cos B Sin C} = \text{Cos } \beta \text{ Sin A} - \text{Cos } \alpha \text{ Cos C Sin B}$$
$$\text{Cos C Sin A} = \text{Cos } \gamma \text{ Sin B} - \text{Cos } \beta \text{ Cos A Sin C}$$

Multiplicirt man aber die erste dieser Gleichungen durch Sin B, die zweyte durch Cos A Cos B Sin C, und die dritte durch Sin A Cos B, so gibt die Summe dieser Produkte, wenn man im Zähler alle Sinus in Cosinus verwandelt und bemerkt, dass $(1 - \text{Cos A Cos B Cos C})$ der gemeinschaftliche Factor des Zählers und Nenners ist, folgenden Ausdruck:

$$\text{Cos A} = \text{Sin B Sin C Cos } \alpha - \text{Cos B Cos C} \quad \ldots \text{(d)}$$

und die Gleichungen (a) .. (d) enthalten alle zur Auflösung sphärischer Dreyecke nöthigen Ausdrücke.

I. Durch schickliche Verwandlungen lassen sich die gegebenen Ausdrücke zur Rechnung mit Logarithmen bequemer machen. So gibt z. B. die Gleichung (b)

$$1 \pm \text{Cos B} = \frac{\text{Sin } \alpha \text{ Sin } \gamma \mp \text{Cos } \alpha \text{ Cos } \gamma \pm \text{Cos } \beta}{\text{Sin } \alpha \text{ Sin } \gamma}$$

oder

$$1 \pm \text{Cos B} = \mp \text{Cos } (\alpha \pm \gamma) \pm \text{Cos } \beta$$

woraus man leicht findet

$$\text{Sin}^2 \frac{\text{B}}{2} = \text{Sin } \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \text{ Sin } \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} : \text{Sin } \alpha \text{ Sin } \gamma$$

$$\text{Cos}^2 \frac{\text{B}}{2} = \text{Sin } \frac{\beta + \alpha + \gamma}{2} \text{ Sin } \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} : \text{Sin } \alpha \text{ Sin } \gamma$$

Oder wenn man die Grössen φ und ψ so annimmt, dass man hat

$$\text{Tang}\ \varphi = \frac{\text{Cos}\ \alpha\ \text{Cos}\ \gamma}{\text{Sin}\ \beta}\ \text{und Tang}\ \psi = \text{Cos B Tg}\ \alpha$$

so erhält man

$$\text{Cos B} = \frac{\text{Cos}\ (\beta + \varphi)}{\text{Sin}\ \alpha\ \text{Sin}\ \gamma\ \text{Cos}\ \varphi}\ \text{und Cos}\ \beta = \frac{\text{Cos}\ \alpha\ \text{Cos}\ (\gamma - \psi)}{\text{Cos}\ \psi}$$

und ähnliche Reductionen kann man für die Gleichungen (c) und (d) finden.

II. Nimmt man die Seiten des Dreyecks unendlich klein an, so erhält man aus den vorhergehenden Ausdrücken sofort

$$\alpha\ \text{Sin B} = \beta\ \text{Sin A} \ldots \text{aus (a)}$$

$$\text{Cotg A} = \frac{\gamma - \alpha\ \text{Cos B}}{\alpha\ \text{Sin B}} \ldots \text{aus (c)}$$

$$\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-\alpha^2}\ \sqrt{1-\gamma^2} + \alpha\gamma\ \text{Cos B oder}$$

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\ \text{Cos B} \ldots \text{aus (b)}$$

$$\text{Sin}^2 \frac{B}{2} = \frac{(\alpha+\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)}{4\alpha\gamma} \ldots \text{aus (I)}$$

welches die bekannten Ausdrücke der ebenen Trigonometrie sind.

III. Es ist nicht meine Absicht, alle hieher gehörenden Verwandlungen vorzutragen, die man in den Werken, welche diesen Gegenständen ausschliefsend gewidmet sind, gesammelt findet; aber die folgende minder bekannte verdient eine nähere Entwicklung, da sie uns bey vielen künftigen Untersuchungen von dem gröfsten Nutzen seyn wird.

Es sey der Kürze wegen

$$P = \text{Sin}\ \frac{A+B}{2} \qquad p = \text{Sin}\ \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$Q = \text{Cos}\ \frac{A+B}{2} \qquad q = \text{Cos}\ \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Für die negativen B und β wollen wir diese Gröfsen P p mit einem Striche bezeichnen. Da man hat

$$\frac{\text{Sin}\ (A+B)}{\text{Sin C}} = \frac{\text{Sin}\ \alpha}{\text{Sin}\ \gamma} .\ \text{Cos B} + \frac{\text{Sin}\ \beta}{\text{Sin}\ \gamma} .\ \text{Cos A}\ .$$

so ist auch, wenn man für Cos A, Cos B ihre vorhergehenden Werthe in $\alpha\ \beta\ \gamma$ setzt

$$\frac{P\ Q}{\text{Sin}\ \frac{C}{2}\ \text{Cos}\ \frac{C}{2}} = \frac{q\ q'}{\text{Cos}^2\ \frac{\gamma}{2}} \ldots (1)$$

Verfährt man eben so mit $\frac{\text{Sin}\ (A-B)}{\text{Sin C}}$, so ist

$$\frac{P' \, Q'}{\operatorname{Sin} \frac{C}{2} \operatorname{Cos} \frac{C}{2}} = \frac{p \, p'}{\operatorname{Sin}^2 \frac{\gamma}{2}} \quad \ldots (2)$$

Weiter ist $\frac{\operatorname{Sin}(\alpha + \beta)}{\operatorname{Sin} \gamma} = \frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} C} . \operatorname{Cos} \beta + \frac{\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} C} . \operatorname{Cos} \alpha$

also, wenn man für $\operatorname{Cos} \alpha$, $\operatorname{Cos} \beta$ ihre Werthe in A, B, C substituirt,

$$\frac{Q \, Q'}{\operatorname{Sin}^2 \frac{C}{2}} = \frac{p \, q}{\operatorname{Sin} \frac{\gamma}{2} \operatorname{Cos} \frac{\gamma}{2}} \quad \ldots (3)$$

und eben so aus $\frac{\operatorname{Sin}(\alpha - \beta)}{\operatorname{Sin} \gamma}$

$$\frac{P \, P'}{\operatorname{Cos}^2 \frac{C}{2}} = \frac{p' \, q'}{\operatorname{Sin} \frac{\gamma}{2} \operatorname{Cos} \frac{\gamma}{2}} \quad \ldots (4)$$

Endlich ist noch

$$\frac{\operatorname{Sin} A \pm \operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} C} = \frac{\operatorname{Sin} \alpha \pm \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Sin} \gamma}$$

und wenn man diese Summen und Differenzen auf die bekannte Art in Producte verwandelt

$$\frac{P \, Q'}{\operatorname{Sin} C} = \frac{p \, q'}{\operatorname{Sin} \gamma} \quad \ldots (5)$$

$$\frac{Q \, P'}{\operatorname{Sin} C} = \frac{q \, p'}{\operatorname{Sin} \gamma} \quad \ldots (6)$$

Deutet man aber das Product der zwey ersten Gleichungen, oder

$$\frac{P \, Q}{\operatorname{Sin}^2 \frac{C}{2}} \quad \frac{P' \, Q'}{\operatorname{Cos}^2 \frac{C}{2}} = \frac{p \, q \, . \; p' q'}{\operatorname{Sin}^2 \frac{\gamma}{2} \operatorname{Cos}^2 \frac{\gamma}{2}}$$

der Kürze wegen durch (1. 2) an, und so fort mit den übrigen, so erhält man erstens

$$\left(\tfrac{1}{5}\right) = \left(\tfrac{4}{6}\right)$$

$$\left(\tfrac{1}{6}\right) = \left(\tfrac{4}{5}\right)$$

$$\left(\tfrac{3}{5}\right) = \left(\tfrac{2}{6}\right)$$

$$\left(\tfrac{3}{6}\right) = \left(\tfrac{2}{5}\right)$$

und diese vier Gleichungeu heifsen nach ihrem Erfinder die Nepper'schen Gleichungen. Ferner ist zweytens

$$\left(\frac{1.\,3}{5}\right) = \left(\frac{1.\,6}{4}\right) = \left(\frac{3.\,6}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1.\,4}{6}\right) = \left(\frac{1.\,5}{3}\right) = \left(\frac{4.\,5}{2}\right)$$

$$\left(\frac{2.\,3}{6}\right) = \left(\frac{2.\,5}{4}\right) = \left(\frac{3.\,5}{1}\right)$$

$$\left(\frac{2.\,4}{5}\right) = \left(\frac{2.\,6}{3}\right) = \left(\frac{4.\,6}{1}\right)$$

und diese vier Ausdrücke kann man, nach ihrem Erfinder, die Gaufsischen Gleichungen nennen. Stellt man die Bedeutung der Zeichen (1), (2) .. wieder her, so sind die ersten

$$\text{Tg}\,\frac{A+B}{2}\,\text{Tg}\,\frac{C}{2} = \frac{\text{Cos}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{\text{Cos}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\text{Tg}\,\frac{A-B}{2}\,\text{Tg}\,\frac{C}{2} = \frac{\text{Sin}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{\text{Sin}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\text{Tg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,\text{Cotg}\,\frac{\gamma}{2} = \frac{\text{Cos}\,\frac{A-B}{2}}{\text{Cos}\,\frac{A+B}{2}}$$

$$\text{Tg}\,\frac{\alpha-\beta}{2}\,\text{Cotg}\,\frac{\gamma}{2} = \frac{\text{Sin}\,\frac{A-B}{2}}{\text{Sin}\,\frac{A+B}{2}}$$

und die letzten

$$\text{Cos}\,\frac{A+B}{2}\,\text{Cos}\,\frac{}{2} = \text{Cos}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,\text{Sin}\,\frac{C}{2}$$

$$\text{Sin}\,\frac{A+B}{2}\,\text{Cos}\,\frac{\gamma}{2} = \text{Cos}\,\frac{\alpha-\beta}{2}\,\text{Cos}\,\frac{C}{2}$$

$$\text{Cos}\,\frac{A-B}{2}\,\text{Sin}\,\frac{\gamma}{2} = \text{Sin}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,\text{Sin}\,\frac{C}{2}$$

$$\text{Sin}\,\frac{A-B}{2}\,\text{Sin}\,\frac{\gamma}{2} = \text{Sin}\,\frac{\alpha-\beta}{2}\,\text{Cos}\,\frac{C}{2}$$

und man sieht, dafs die ersten in den letzten allgemeinen enthalten sind.

IV. Die Nepper'schen Gleichungen können unter die allgemeine Form

$$\text{Tg}\,\frac{x}{2} = a\,\text{Tg}\,\frac{y}{2}$$

gebracht werden. Da Gleichungen dieser Art im Folgenden sehr oft vorkommen, so wird hier eine nähere Betrachtung derselben nicht überflüssig seyn.

Ist e die Basis der natürlichen Logarithmen, und der Kürze wegen

$\frac{a-1}{a+1} = b$, so läfst sich jene Gleichung auch so ausdrücken:

$$e^{x\sqrt{-1}} = e^{y\sqrt{-1}} \left\{ \frac{1 - b\, e^{-y\sqrt{-1}}}{1 - b\, e^{y\sqrt{-1}}} \right\}$$

$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos$

$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin$

oder auch wenn man die Logarithmen dieses Ausdrucks nimmt,

$$x\sqrt{-1} = y\sqrt{-1} + \log(1 - b\, e^{-y\sqrt{-1}}) - \log(1 - b\, e^{y\sqrt{-1}})$$

und wenn man diese Logarithmen nach der Reihe

$$\log(1-z) = -z - \tfrac{1}{2} z^2 - \tfrac{1}{3} z^3 -$$

entwickelt:

$$\tfrac{1}{2} x = \tfrac{1}{2} y + b \operatorname{Sin} y + \tfrac{1}{2} b^2 \operatorname{Sin} 2y + \tfrac{1}{3} b^3 \operatorname{Sin} 3y + \ldots \quad (7)$$

und diese Gleichung gibt den Werth von x in einer sehr einfachen Reihe, die nach den Sinus des Vielfachen von y fortgeht, die aber nur dann brauchbar ist, wenn b eine gegen die Einheit kleine Gröfse ist. Um daher auch für die Fälle, in denen die gegebene Reihe divergirt, einen für die Anwendung brauchbaren Ausdruck zu finden, wollen wir die gegebene Gleichung so darstellen:

$$e^{x\sqrt{-1}} = e^{-y\sqrt{-1}} \left\{ \frac{1 - \frac{1}{b}\, e^{y\sqrt{-1}}}{1 - \frac{1}{b}\, e^{-y\sqrt{-1}}} \right\}.$$

Verfährt man mit diesem Ausdrucke wie mit dem vorhergehenden, so erhält man

$$\frac{x}{2} = -\frac{y}{2} - \frac{1}{b} \operatorname{Sin} y - \frac{1}{2b^2} \operatorname{Sin} 2y - \frac{1}{3b^3} \operatorname{Sin} 3y - \ldots \quad (8)$$

und diese Reihe fängt da an brauchbar zu werden, wo die andere aufhört, so dafs eigentlich beyde zusammen als die vollständige Entwicklung der Gröfse x in eine Reihe anzusehen sind. Es wird nun nicht schwer seyn, auch für die Entwicklung der Gröfse y in eine Reihe, die nach den Sinus der Vielfachen der x fortgeht, die beyden zusammengehörenden Auflösungen zu finden. Man wird erhalten

$$\frac{y}{2} = \frac{x}{2} - b \operatorname{Sin} x + \frac{b^2}{2} \operatorname{Sin} 2x - \frac{b^3}{3} \operatorname{Sin} 3x +$$

$$\frac{y}{2} = -\frac{x}{2} + \frac{1}{b} \operatorname{Sin} x - \frac{1}{2b^2} \operatorname{Sin} 2x + \frac{1}{3b^3} \operatorname{Sin} 3x -$$

Man bemerke noch, dafs die gegebene Gleichung

$$\mathrm{Tg}\,\frac{x}{2} = a\,\mathrm{Tg}\,\frac{y}{2}$$

sich auch auf folgende bringen läſst.

$$\mathrm{Tg}\,\frac{x+y}{2} = \frac{\mathrm{Sin}\,y}{\mathrm{Cos}\,y - b} \quad \text{und} \quad \mathrm{Tg}\,\frac{x-y}{2} = \frac{b\,\mathrm{Sin}\,y}{1 - b\,\mathrm{Cos}\,y}$$

und daſs daher auch für diese Formen die oben gegebenen doppelten Entwicklungen gelten.

V. Wendet man das, was in IV. gesagt wurde, auf die oben gegebenen Nepper'schen Ausdrücke an, so wird man durch diese Reihen aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die beyden unbekannten Winkel eines sphärischen Dreyecks, oder auch aus zwey Winkeln mit der eingeschlossenen Seite die beyden unbekannten Seiten des Dreyeckes entwickeln. Zur vollständigen Auflösung dieser Dreyecke durch Reihen, fehlt daher noch im ersten Falle die dritte Seite, und im zweyten der dritte Winkel. Wir wollen sehen, wie man auch diese in Reihen entwickeln könne. Die vorhergehenden Gleichungen (b) und (d) sind

$$\mathrm{Cos}\,\gamma = \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,C + \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta$$
$$\mathrm{Cos}\,C = \mathrm{Sin}\,A\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Cos}\,\gamma - \mathrm{Cos}\,A\,\mathrm{Cos}\,B$$

Allein die erste desselben läſst sich auch so ausdrücken:

$$\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\gamma = \frac{1 - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,C - \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta}{2}$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich

$$f^2 - 2fg\,\mathrm{Cos}\,C + g^2$$

so hat man $f^2 + g^2 = \dfrac{1 - \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta}{2}$

$$fg = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta$$

oder auch

$$f^2 + g^2 = \mathrm{Sin}^2\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{Cos}^2\,\frac{\beta}{2} + \mathrm{Cos}^2\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{\beta}{2}$$

$$2fg = 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{\beta}{2}.\,\mathrm{Cos}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\beta}{2}$$

Allein die Summe der zwey letzten Gleichungen gibt auf jeder Seite des Gleichheitzeichens ein vollständiges Quadrat, also ist entweder

$$f = \mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{\beta}{2} \quad \text{und} \quad g = \mathrm{Cos}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\beta}{2}$$

oder auch, da sich offenbar f und g verwechseln läſst,

$$f = \mathrm{Cos}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\beta}{2} \quad \text{und} \quad g = \mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{\beta}{2}$$

Es ist aber auch

$$f^2 - 2fg\,\mathrm{Cos}\,C + g^2 = (f - g\,e^{C\sqrt{-1}}).\,(f - g\,e^{-C\sqrt{-1}})$$

also hat man, wenn man wie in IV. die Logarithmen nimmt,

$$\log \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \log \mathrm{Sin}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{Cos}\frac{\beta}{2} - m\,\mathrm{Cos}\,C - \tfrac{1}{2}m^2\,\mathrm{Cos}\,2C - \tfrac{1}{3}m^3\,\mathrm{Cos}\,3C -$$

$$\text{wo} \qquad m = \mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}\beta\,\mathrm{Cotg}\,\tfrac{1}{2}\alpha$$

und, wenn m gröſser als 1 ist, da man, wie gesagt, die Gröſsen f und g verwechseln kann,

$$\log \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \log \mathrm{Cos}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{Sin}\frac{\beta}{2} - \frac{1}{m}\mathrm{Cos}\,C - \frac{1}{2m^2}\,\mathrm{Cos}\,2C - \frac{1}{3m^3}\,\mathrm{Cos}\,3C -$$

Aehnliche Reihen lassen sich durch dasselbe Verfahren aus der ersten der beyden obigen Gleichungen für den Logarithmus von Cos $\tfrac{1}{2}\gamma$ ableiten. Setzt man nämlich

$$\mathrm{Cos}^2\,\frac{\gamma}{2} = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,C + \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta + 1}{2} = h^2 + 2hk\,\mathrm{Cos}C + k^2$$

so ist wieder $h = \mathrm{Cos}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{Cos}\frac{\beta}{2}$ und $k = \mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\beta}{2}$

oder umgekehrt, da sich h und k wieder verwechseln läſst. Man erhält daher wieder, wie zuvor,

$$\log \mathrm{Cos}\,\frac{\gamma}{2} = \log \mathrm{Cos}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{Cos}\frac{\beta}{2} + n\,\mathrm{Cos}\,C - \frac{n^2}{2}\mathrm{Cos}\,2\,C + \frac{n^3}{3}\mathrm{Cos}\,3\,C -$$

$$\log \mathrm{Cos}\,\frac{\gamma}{2} = \log \mathrm{Sin}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\beta}{2} + \frac{1}{n}\,\mathrm{Cos}\,C - \frac{1}{2n^2}\,\mathrm{Cos}\,2\,C + \frac{1}{3n^3}\mathrm{Cos}\,3\,C - \quad \text{wo } n = \mathrm{Tg}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{Tg}\,\frac{\beta}{2}$$

Eben so wird man endlich aus der zweyten der gegebenen Gleichungen die analogen vier Reihen für Sin $\tfrac{1}{2}$ C und Cos $\tfrac{1}{2}$ C ableiten, von deren je zweyen immer eine convergirt, wenn die andere divergirt. Da diese Entwicklungen keine weitere Schwierigkeit haben, so halte ich mich nicht länger dabey auf, und gehe zu der näheren Betrachtung einiger besondern Fälle über, die uns später nützlich seyn werden.

§ 3.

Die Gleichung (b) des vorigen §. gibt folgende

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Cos}\,\alpha &= \mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma + \mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,A \\ \mathrm{Cos}\,\beta &= \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\gamma + \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,B \\ \mathrm{Cos}\,\gamma &= \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta + \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,C \end{aligned}\right\}$$

Differentirt man die erste dieser Gleichungen, so erhält man nach einigen leichten Reductionen

$$d\,\alpha = d\,\beta \operatorname{Cos} C + d\,\gamma \operatorname{Cos} B + d\,A.\ \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} \gamma$$

und eben so geben die folgenden Gleichungen

$$d\,\beta = d\,\alpha \operatorname{Cos} C + d\,\gamma \operatorname{Cos} A + d\,B.\ \operatorname{Sin} C \operatorname{Sin} \alpha$$
$$d\,\gamma = d\,\alpha \operatorname{Cos} B + d\,\beta \operatorname{Cos} A + d\,C.\ \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} \beta$$

und durch die Verbindung dieser drey Gleichungen wird man alle bekannten Differentialformeln für sphärische Dreyecke ableiten.

Ist z. B. der Winkel A und die Seite γ constant, so gibt die erste dieser Differentialgleichungen

$$\frac{d\,\alpha}{d\,\beta} = \operatorname{Cos} C$$

und die zweyte $d\,\beta = d\,\alpha \operatorname{Cos} C + d\,B \operatorname{Sin} C \operatorname{Sin} \alpha$ also, wenn man den vorhergehenden Werth von $d\,\alpha$ substituirt,

$$\frac{d\,\beta}{d\,B} = \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Sin} C}$$

Endlich gibt eben so die dritte

$$o = d\,\alpha \operatorname{Cos} B + d\,\beta \operatorname{Cos} A + d\,C \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} \beta$$

oder wenn man in ihr die vorhergehenden Werthe von $d\,\alpha$ und $d\,\beta$ substituirt, $\frac{d\,B}{d\,C} = -\frac{1}{\operatorname{Cos} \alpha}$

Ist also A, γ constant, so hat man

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \operatorname{Cos} C,\ \frac{d\beta}{dB} = \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Sin} C},\ \frac{dC}{dB} = -\operatorname{Cos} \alpha,$$

$$\frac{d\,\alpha}{d\,B} = \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cotg} C,\ \frac{d\,C}{d\,\beta} = -\operatorname{Sin} C \operatorname{Cotg} \alpha$$

und $$\frac{d\,\alpha}{d\,C} = -\operatorname{Tg} \alpha \operatorname{Cotg} C$$

Ist β, γ constant, so ist

$$\frac{d\,B}{d\,C} = \operatorname{Tg} B \operatorname{Cotg} C,\ \frac{d\,\alpha}{d\,B} = -\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Tg} C,\ \frac{d\,\alpha}{d\,C} = -\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Tg} B,$$

$$\frac{d\,\alpha}{d\,A} = \operatorname{Sin} \gamma \operatorname{Sin} B,\ \frac{d\,A}{d\,B} = -\frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Sin} \beta \operatorname{Cos} C},\ \frac{d\,A}{d\,C} = -\frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Sin} \gamma \operatorname{Cos} B}$$

Ist B, C constant, so hat man

$$\frac{d\beta}{d\gamma} = \operatorname{Tg} \beta \operatorname{Cotg} \gamma,\ \frac{d\,A}{d\,\beta} = \operatorname{Sin} A \operatorname{Tg} \gamma,\ \frac{d\,A}{d\,\gamma} = \operatorname{Sin} A \operatorname{Tg} \beta,$$

$$\frac{d\,A}{d\,\alpha} = \operatorname{Sin} \gamma \operatorname{Sin} B,\ \frac{d\,\alpha}{d\,\beta} = \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Sin} \beta \operatorname{Cos} \gamma},\ \frac{d\,\alpha}{d\,\gamma} = \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \beta \operatorname{Sin} \gamma}$$

Ist endlich A, α constant, so ist

$$\frac{d\,\gamma}{d\,\beta} = -\frac{\operatorname{Cos} C}{\operatorname{Cos} B},\ \frac{d\,C}{d\,B} = -\frac{\operatorname{Cos} \gamma}{\operatorname{Cos} \beta},\ \frac{d\,\gamma}{d\,C} = \operatorname{Tg} \gamma \operatorname{Cotg} C,$$

$$\frac{d\,\beta}{d\,B} = \operatorname{Tg} \beta \operatorname{Cotg} B,\ \frac{d\,\gamma}{d\,B} = -\frac{\operatorname{Tg} \beta \operatorname{Cos} C}{\operatorname{Sin} B},\ \frac{d\,\beta}{d\,C} = -\frac{\operatorname{Sin} \beta \operatorname{Cotg} B}{\operatorname{Cos} \gamma}$$

I. Oefter kommt die Aufgabe vor, aus den drey gegebenen Seiten eines sphärischen Dreyeckes, deren zwey nahe gleich 90° sind, den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel zu finden. Obschon sich auch auf diesen Fall die oben gegebenen Ausdrücke unmittelbar anwenden lassen, so wird es doch bequemer seyn, folgende Auflösung anzuwenden.

Sind die Seiten α β nahe gleich 90° und sucht man den von ihnen eingeschlossenen Winkel C, so sey

$$\alpha = 90 - \alpha'$$
$$\beta = 90 - \beta'$$
$$C = \gamma + x$$

wo α' β' x nur kleine Gröſsen sind. Die Gleichung

$$\operatorname{Cos} C = \frac{\operatorname{Cos}\gamma - \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta}$$

wenn man die vierten Potenzen jener Gröſsen vernachläſsiget, geht in folgende über

$$\operatorname{Cos}\gamma - x \operatorname{Sin}\gamma = \frac{\operatorname{Cos}\gamma - \alpha'\beta'}{1 - \frac{1}{2}(\alpha'^2 + \beta'^2)}$$

woraus man leicht findet

$$x = \frac{\alpha'\beta' - \frac{1}{2}(\alpha'^2 + \beta'^2)\operatorname{Cos}\gamma}{\operatorname{Sin}\gamma}$$

Setzt man $p = \frac{\alpha' + \beta'}{2}$ und $q = \frac{\alpha' - \beta'}{2}$, so ist der letzte Ausdruck

$$x = \frac{p^2}{R} \operatorname{Tg} \tfrac{1}{2}\gamma - \frac{q^2}{R} \operatorname{Cotg} \tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\text{wo } R = \frac{1}{\operatorname{Sin} 1''} = \frac{180.60^2}{3.14159} \text{ ist.}$$

II. Wenn in einem sphärischen Dreyecke die drey Seiten gegen den Halbmesser der Kugel, zu welcher das Dreyeck gehört, sehr klein sind, so läſst sich die Auflösung des sphärischen Dreyeckes auf die der ebenen zurückführen, welche letzten zur Ausübung bequemer sind.

Es sey r der Halbmesser der Kugel, auf welchem das gegebene Dreyeck liegt. Denkt man sich ein ähnliches Dreyeck auf einer der ersten concentrischen Kugel, deren Halbmesser gleich der Einheit ist, so werden die Seiten dieses Dreyeckes

$$\frac{\alpha}{r}, \frac{\beta}{r}, \frac{\gamma}{r}$$

seyn, wenn die Seiten jenes Dreyeckes α β γ sind, so daſs man hat

$$\operatorname{Cos} A = \frac{\operatorname{Cos}\frac{\alpha}{r} - \operatorname{Cos}\frac{\beta}{r}\operatorname{Cos}\frac{\gamma}{r}}{\operatorname{Sin}\frac{\beta}{r}\operatorname{Sin}\frac{\gamma}{r}}$$

Entwickelt man die Sinus und Cosinus dieser sehr kleinen Seiten in die bekannten Reihen, und vernachlässigt man die fünften und höheren Potenzen dieser Seiten, so ist

$$\mathrm{Cos}\ A = \frac{\left(\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2r^2} + \frac{\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{24r^4} - \frac{\beta^2\gamma^2}{4r^4}\right)}{\frac{\beta\gamma}{r^2}\left(1-\frac{\beta^2}{6r^2}-\frac{\gamma^2}{6r^2}\right)}$$

oder wenn man Zähler und Nenner durch $1+\frac{\beta^2}{6r^2}+\frac{\gamma^2}{6r^2}$ multiplicirt,

$$\mathrm{Cos}\ A = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} + \frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)}{24\beta\gamma r^2}.$$

Denkt man sich ein ebenes Dreyeck, dessen Seiten ebenfalls $\alpha\ \beta\ \gamma$, und dessen diesen Seiten resp. gegenüberstehende Winkel $A'\ B'\ C'$ sind, so hat man

$$\mathrm{Cos}\ A' = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$$

woraus folgt

$$\mathrm{Sin}^2\ A' = -\left(\frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)}{4\beta^2\gamma^2}\right)$$

und wenn man diese Werthe in dem vorhergehenden Ausdruck von Cos. A substituirt, so ist

$$\mathrm{Cos}\ A = \mathrm{Cos}\ A' - \frac{\beta\gamma}{6r^2}\ \mathrm{Sin}^2\ A'$$

Ist aber $A = A' + x$ so ist sehr nahe

$$\mathrm{Cos}\ A = \mathrm{Cos}\ A' - x\ \mathrm{Sin}\ A' \text{ also } x = \frac{\beta\gamma}{6r^2}\ \mathrm{Sin}\ A'$$

also die vorhergehende Gleichung

$$A = A' + \frac{\beta\gamma}{6r^2}\ \mathrm{Sin}\ A'$$

welcher Ausdruck bis zu den vierten Potenzen von $\frac{\beta}{r}, \frac{\gamma}{r}$ richtig ist.

Es ist aber $\frac{1}{2}\beta\gamma\ \mathrm{Sin}\ A'$ die Fläche des ebenen Dreyeckes, die sehr nahe der Fläche unsers sphärischen Dreyeckes gleich ist. Setzt man also diese Fläche $\frac{1}{2}\beta\gamma\ \mathrm{Sin}\ A' = f$, so hat man

$$A' = A - \frac{\frac{1}{3}f}{r^2} \text{ und eben so}$$

$$B' = B - \frac{\frac{1}{3}f}{r^2}$$

$$C' = C - \frac{\frac{1}{3}f}{r^2}$$

also auch

$$A' + B' + C' = 180 = A + B + C - \frac{f}{r^2}$$

Man kann daher die Gröſse $g = \frac{f}{r^2}$ als den Exceſs der Summe der drey Winkel des sphärischen Dreyeckes über zwey rechte Winkel ansehen. Ein sphärisches Dreyeck also, dessen Winkel A B C sind, und dessen Seiten $\alpha\ \beta\ \gamma$ gegen den Halbmesser der Kugel sehr klein sind, läſst sich wie ein ebenes Dreyeck behandeln, welches dieselben Seiten $\alpha\ \beta\ \gamma$, und welches die Winkel $A - \frac{1}{3} g$, $B - \frac{1}{3} g$, $C - \frac{1}{3} g$ hat, wo ε gleich der Summe der drey Winkel des sphärischen Dreyeckes weniger 180° ist.

Die Gröſse $g = \frac{f}{r^2}$, die der Fläche des Dreyeckes proportional ist, kann man durch die gegebenen Seiten und Winkel des sphärischen Dreyeckes, indem man es als ein ebenes betrachtet, berechnen. Ist z. B. $\beta\ \gamma$ und die eingeschlossene Seite A gegeben, so ist

$f = \frac{1}{2} \beta\ \gamma \operatorname{Sin} A$; ist α und B C gegeben, so ist $f = \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{\operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin}(B + C)}$ u. s. w. und man hat $g = \frac{f. \operatorname{Sin} 1''}{r^2}$

§. 4.

Ehe wir diese Gegenstände verlassen, wird es gut seyn, noch die vorzüglichsten Sätze der analytischen Geometrie hier kurz zusammen zu stellen, da wir uns in der Folge öfter auf sie beziehen werden.

I. Um die Lage eines Punktes im Raume zu bestimmen, denkt man sich drey unveränderliche, gewöhnlich unter einander senkrechte Ebenen; die senkrechten Distanzen des Punktes von jeder dieser drey Ebenen heiſsen die Coordinaten dieses Punktes, so wie die Ebenen selbst die coordinirten Ebenen; der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt dieser Ebenen der Anfangspunkt der Coordinaten, so wie endlich die Durchschnittslinien jeder zwey dieser Ebenen, welchen jene Distanzen parallel sind, die Axen dieser Coordinaten. Wir wollen diese drey unter einander senkrechten Coordinaten durch x, y, z bezeichnen.

Man sieht leicht, daſs die Gleichungen eines Punktes die Form haben werden

$$x = a$$
$$y = b$$
$$z = c$$

Die zwey ersten dieser Gleichungen, allein betrachtet, sind die Gleichungen der Projection des Punktes in der coordinirten Ebene, welche die Axen der x und y enthält, d. h. in der Ebene der xy, oder auch, sie sind die Gleichungen einer geraden Linie, die mit der Axe der z parallel ist, daher auch die beyden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x = o \\ y = o \end{array}\right\}$$

die der Axe der z selbst sind.

Die erste jener Gleichungen, allein genommen, oder $x = a$ wird aber die Gleichung aller Punkte der Ebene seyn, die mit der Ebene der yz parallel ist, also ist auch $x = o$ die Gleichung der Ebene der yz selbst.

II. Die Gleichungen einer geraden Linie im Raume werden im Allgemeinen folgende Gestalt haben

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\} \mathrm{I}$$

Wir wollen sie der Kürze wegen die Linie I nennen. Liegt diese Linie in der Ebene der xy, so werden also ihre Gleichungen seyn

$$\begin{array}{l} z = o \\ y = Ax + B \end{array}$$

Eine zweyte Linie im Raume habe die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{array}\right\} \mathrm{II}$$

Wir wollen sie die Linie II nennen.

1. Soll die Linie I durch den Punkt gehen, dessen Coordinaten x' y' z' sind, so sind ihre Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \\ x' = az' + \alpha \\ y' = bz' + \beta \end{array}\right\}$$

aus welchen man zwey der vier Gröſsen a, b, α, β eliminirt. Soll die Linie überdieſs noch durch den Punkt gehen, dessen Coordinaten x'' y'' z'' sind, so wird man mit den vier letzten Gleichungen noch die zwey folgenden verbinden

$$\begin{array}{l} x'' = az'' + \alpha \\ y'' = bz'' + \beta \end{array}$$

und mittels der letzten vier Gleichungen die Werthe der Gröſsen a, b, α, β, und dadurch die Lage der Linie selbst vollständig bestimmen. Die Entfernung jener beyden Punkte aber wird seyn

$$\sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2}$$

2. Die Gleichung, welche ausdrückt, daſs die Linien I und II sich irgendwo in einem Punkte schneiden, ist

$$(\alpha' - \alpha)\ (b' - b) = (\beta' - \beta)\ (a' - a)$$

und sie folgt aus der Elimination der Gröſsen x y z aus den vier Gleichungen I und II.

3. Es sey V der Winkel der zwey Linien I, II oder wenn sich diese Linien nicht schneiden, der Winkel zweyer andern der I. II. parallelen Linien, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen. Die Gleichungen dieser parallelen Linien sind

$$\begin{aligned} x &= az \\ y &= bz \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x &= a'z \\ y &= b'z \end{aligned}$$

Nimmt man auf jeder dieser beyden Linien einen Punkt, dessen Entfernung vom Anfangspunkte die Einheit ist, so ist die Distanz dieser zwey Punkte gleich

$$2 \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} V = \sqrt{2 - 2 \operatorname{Cos} V}$$

oder auch, nach dem Vorhergehenden,

$$\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

wenn man $\begin{aligned} x &= az \\ y &= bz \end{aligned}$ und $\begin{aligned} x' &= a'z' \\ y' &= b'z' \end{aligned}$

setzt. Da aber $x^2 + y^2 + z^2 = (1 + a^2 + b^2)\, z^2 = 1$, und eben so $x'^2 + y'^2 + z'^2 = (1 + a'^2 + b'^2)\, z'^2 = 1$ ist, so ist

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \quad \text{und} \quad z' = \frac{1}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}$$

Substituirt man diese Werthe von x y z und x′ y′ z′ in dem letzten Ausdrucke der Distanz jener zwey Punkte, und setzt man ihn gleich $\sqrt{2 - 2 \operatorname{Cos} V}$, so erhält man

$$\operatorname{Cos} V = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \cdot \sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}$$

Sind daher die beyden Linien auf einander senkrecht, so ist

$$1 + aa' + bb' = 0$$

und sind sie unter einander parallel, so ist

$$a = a' \text{ und } b = b'$$

4. Daraus folgt ferner: Ist X Y Z der Winkel der Linie I mit der Axe der x, y, z, so ist

$$\operatorname{Cos} X = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \quad \operatorname{Cos} Y = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \quad \operatorname{Cos} Z = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$$

und überdieſs $\operatorname{Cos}^2 X + \operatorname{Cos}^2 Y + \operatorname{Cos}^2 Z = 1$

Ist aber $\zeta\, \upsilon\, \xi$ der Winkel der Linie I mit der Ebene der xy, xz, yz, so ist

$$\operatorname{Sin} \zeta = \operatorname{Cos} Z, \quad \operatorname{Sin} \upsilon = \operatorname{Cos} Y, \quad \operatorname{Sin} \xi = \operatorname{Cos} X$$

5. Sucht man eine Linie, die durch den Punkt x′ y′ z′ pa-

rallel mit der Linie I geht, so sind ihre Gleichungen nach dem Vorhergehenden

$$\left.\begin{aligned} x &= az + B \\ y &= bz + D \\ x' &= az' + B \\ y' &= bz' + D \end{aligned}\right\}$$

6. Sucht man eine Linie, die senkrecht auf I steht, so sind ihre Gleichungen

$$x = Az + A'$$
$$y = Bz + B'$$

und zur Bestimmung der constanten Gröfse hat man nach dem Vorhergehenden

$$1 + Aa + Bb = o \quad \text{und}$$
$$(A' - \alpha)\ (B - b) = (B' - \beta)\ (A - a)$$

soll sie noch überdiefs durch den Punkt $x'\ y'\ z'$ gehen, so wird man zu den vorhergehenden vier Gleichungen noch folgende zwey setzen

$$x' = Az' + A'$$
$$y' = Bz' + B'$$

z = ax

III. Die Gleichung der Ebene hat im Allgemeinen die Form

$$Ax + By + Cz + D = o$$

z = ax + b
z = cy + b

Wir wollen diese der Kürze wegen die Ebene I, und die Ebene, deren Gleichung

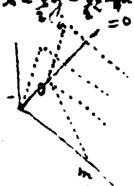
$$A'x + B'y + C'z + D' = o$$

ist, die Ebene II nennen.

z + ax + cy − b = o

Die geraden Linien, in welchen eine Ebene die coordinirten Ebenen schneidet, nennt man die Knotenlinien jener Ebene. So sind die Gleichungen der Knotenlinie der Ebene I in der Ebene x y

$$z = o$$
$$Ax + By + D = o$$



also auch $-\frac{A}{B}$ die Tangente des Winkels der Knotenlinie in x y mit der Axe der x u. s. f. für die übrigen. Die Entfernung des Anfangspunktes von dem Punkte, in welchem die Ebene I die Axe der x y z schneidet, ist resp. $-\frac{D}{A}, -\frac{D}{B}, -\frac{D}{C}$.

x = cz + d

x = by + d
(z = o)

1. Daraus folgt: $x = a$ ist die Gleichung einer Ebene, welche senkrecht auf der Axe der x steht; $x = o$ ist die Gleichung der coordinirten Ebene y z; und $x = ay + \alpha$ ist die Gleichung einer Ebene, welche durch die Linie, deren Gleichungen $x = ay + \alpha$, $y = b$ sind, geht, und auf der coordinirten Ebene x y senkrecht ist.

2. Die Gröfse einer auf die Ebene I senkrechten Linie zwischen dem Amfangspunkte der Coordinaten und der Ebene ist

$\frac{D}{M}$ wo $M = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$

und die den Coordinaten $x y z$ analogen Coordinaten $\xi\ \upsilon\ \zeta$ des Durchschnittspunktes dieser senkrechten Linie mit der Ebene I sind

$$\xi = -\frac{AD}{M^2},\ \upsilon = -\frac{BD}{M^2},\ \zeta = -\frac{DC}{M^2}.$$

Endlich sind die Gleichungen dieser senkrechten Linie selbst

$$x = \frac{A}{C} z \text{ und } y = \frac{B}{C} z$$

3. Die Linie, welche durch den Anfangspunkt parallel mit der Linie I geht, ist

$$x = az, \quad y = bz$$

und die Linie, welche durch den Anfangspunkt senkrecht auf die Ebene I geht, ist

$$x = \frac{A}{C} z, \quad y = \frac{B}{C} z$$

Ist also U der Winkel dieser beyden Linien, oder, was dasselbe ist, ist $90 - U$ der Winkel der Linie I mit der Ebene I, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\operatorname{Sin} U = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Sind also beyde parallel, so ist $Aa + Bb + C = o$, und sind sie senkrecht, so ist

$$\frac{A}{C} = a \text{ und } \frac{B}{C} = b \quad \text{Endlich sind}$$

$\frac{C}{M}, \frac{B}{M}, \frac{A}{M}$ die Cosinus der Winkel der Ebene I mit der Ebene xy, xz, yz.

4. Die Linie, welche durch den Anfang senkrecht auf die Ebene I geht, ist

$$x = \frac{A}{C} z, \quad y = \frac{B}{C} z$$

und die Linie, welche durch den Anfang senkrecht auf die Ebene II geht, ist

$$x = \frac{A'}{C'} z, \quad y = \frac{B'}{C'} z$$

Ist also W der Winkel der Ebene I mit der Ebene II, d. h. ist W der Winkel jener beyden Linien, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\operatorname{Cos} W = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

Sind beyde Ebenen parallel, so ist $\frac{A}{C} = \frac{A'}{C'}$ und $\frac{B}{C} = \frac{B'}{C'}$ und sind sie senkrecht, so ist $AA' + BB' + CC' = o$

5. Geht die Ebene I durch die Linie I, so ist die Gleichung der Ebene

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = o \\ A\alpha + B\beta + D = o \\ Aa + Bb + C = o \end{array}\right\}$$

Geht die Ebene I überdiefs noch durch den Punkt der Coordinaten $x' y' z'$, so wird man den vorhergehenden drey Gleichungen noch folgende hinzufügen

$$Ax' + By' + Cz' + D = o$$

6. Steht die Ebene I senkrecht auf der Linie I, so ist die Gleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = o$$

$$\frac{A}{C} = a$$

$$\frac{B}{C} = b$$

und geht überdiefs die Ebene I noch durch den Punkt der Coordinaten $x' y' z'$, so wird man den vorhergehenden Gleichungen noch folgende hinzusetzen

$$Ax' + By' + Cz' + D = o$$

d. h. also, die vollständig bestimmte Gleichung der Ebene wird seyn

$$a\,(x - x') + b\,(y - y') + z - z' = o$$

und die Coordinaten $\xi\ \upsilon\ \zeta$ des Durchschnittspunktes dieser Ebene mit der darauf senkrechten Linie sind

$$\begin{array}{l} \xi = \alpha + am \\ \upsilon = \beta + bm \\ \zeta = m \end{array}$$

$$\text{wo } m = \frac{z' + a\,(x' - \alpha) + b\,(y' - \beta)}{1 + a^2 + b^2}$$

Die Entfernung dieses Durchschnittspunkts von dem Punkte der Coordination $x'\ y'\ z'$ ist

$$R = \sqrt{(\xi - x')^2 + (\upsilon - y')^2 + (\zeta - z')^2}$$

und die Entfernung des Anfangspunkts von dem Durchschnittspunkte der Ebene mit der darauf senkrechten Linie ist

$$\sqrt{\xi^2 + \upsilon^2 + \zeta^2}$$

und endlich der Theil des Lothes vom Anfangspunkte auf die Ebene I, welcher zwischen dem Anfangspunkte und der Ebene enthalten ist, ist

$$\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

7. Geht eine Linie durch den Punkt, dessen Coordinaten x' y' z' sind, senkrecht auf die Ebene I, so sind die Gleichungen dieser Linie.

$$x-x' = \frac{A}{C}(z-z')$$

$$y-y' = \frac{B}{C}(z-z')$$

und wenn ξ υ ζ die Coordinaten des Punktes sind, wo sich Loth und Ebene treffen, so ist

$$\xi = x' - A.P$$
$$\upsilon = y' - B.P$$
$$\zeta = z' - C.P$$

wo $P = \frac{Ax'+By'+Cz'+D}{A^2+B^2+C^2}$.

und die Entfernung der Punkte, deren Coordinaten x' y' z' und ξ υ ζ sind, ist

$$\sqrt{(\xi-x')^2+(\upsilon-y')^2+(\zeta-z')^2} = -P.\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

8. Geht die Ebene I durch die drey Punkte, deren resp. Coordinaten $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$ sind, so ist ihre Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ Ax'+By'+Cz'+D=0 \\ Ax''+By''+Cz''+D=0 \\ Ax'''+By'''+Cz'''+D=0 \end{array}\right\}$$

Man kann daher annehmen

$$A = y'(z''-z''') - y''(z'-z''') + y'''(z'-z'')$$
$$B = z'(x''-x''') - z''(x'-x''') + z'''(x'-x'')$$
$$C = x'(y''-y''') - x''(y'-y''') + x'''(y'-y'')$$
$$D = x'(y''z'''-y'''z'') - x''(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z')$$

Ist T die Fläche des Dreyecks zwischen jenen drey Punkten und t, t', t'' die Projection dieser Fläche resp. in den Ebenen yz, xz, xy, so findet man

$$A = 2t,\quad B = 2t',\quad C = 2t'', \text{ oder}$$

$$t = \frac{AT}{\sqrt{M}},\ t' = \frac{BT}{\sqrt{M}},\ t'' = \frac{CT}{\sqrt{M}}, \text{ wo } M = A^2+B^2+C^2$$

also auch $T^2 = t^2+t'^2+t''^2$

Sind S, s, s', s'' ähnliche Dinge, so ist eben so

$S^2 = s^2+s'^2+s''^2$ und

$$TS = ts + t' s' + t'' s'', \text{ also auch}$$

$$(T + S)^2 = (t + s)^2 + (t' + s')^2 + (t'' + s'')^2$$

welches sich leicht auf mehrere Dreyecke fortsetzen läſst.

Endlich ist $\frac{D}{C} = \frac{T.\ D}{3\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

der körperliche Inhalt der Pyramide, deren Basis das Dreyeck T, und deren Spitze der Anfangspunkt der Coordinaten ist.

§. 5.

Indem wir nun zu den Anwendungen des Vorhergehenden auf die oben betrachteten sphärischen Dreyecke an der Oberfläche des Himmels übergehen, wollen wir unter den mannigfaltigen Aufgaben, welche sich uns hier darbieten, nur diejenigen näher betrachten, die sich durch ihren Nutzen in der Anwendung auszeichnen.

Der Kürze wegen wollen wir zuvor einige allgemeine Bezeichnungen einführen, die wir durch das ganze Werk, wenn nicht das Gegentheil besonders angegeben wird, beybehalten werden. Es sey also

- α die Rectascension eines Gestirns,
- λ die Länge,
- δ die Declination,
- β die Breite,
- h die Höhe,
- ω das Azimut,
- s der Stundenwinkel.

[illegible] ... Declin. [illegible] gehört

Ferner sey π ν ξ nach der Ordnung die Position, Variation und Parallaxe, φ die Höhe des Pols des Aequators oder die Polhöhe (geographische Breite) des Beobachtungsortes, und e die Neigung der Ebene der Ecliptik gegen die des Aequators, oder die Schiefe der Ecliptik.

[illegible] ... Declin. u. [illegible] gehört

Die gewöhnlichsten Instrumente der Astronomen dienen dazu, die Höhe und das Azimut eines Gestirns zu messen. Wir wollen also zuerst voraussetzen, daſs ω und h durch eine Beobachtung gegeben ist, und daſs überdieſs die Polhöhe φ bekannt sey; man suche den Stundenwinkel, die Declination und die Variation des Gestirns.

In dem Dreyecke NZS hat man mittels der Gauſsischen Gleichungen

$$\operatorname{Sin}\frac{90-\delta}{2}\operatorname{Sin}\frac{s-\nu}{2} = \operatorname{Sin}\frac{\omega}{2}\operatorname{Sin}\frac{\varphi-h}{2}$$

$$\operatorname{Sin}\frac{90-\delta}{2}\operatorname{Cos}\frac{s-\nu}{2} = \operatorname{Cos}\frac{\omega}{2}\operatorname{Cos}\frac{\varphi+h}{2}$$

$$\cos\frac{90-\delta}{2}\ \sin\frac{s+\nu}{2} = \sin\frac{\omega}{2}\ \cos\frac{\varphi-h}{2}$$

$$\cos\frac{90-\delta}{2}\ \cos\frac{s+\nu}{2} = \cos\frac{\omega}{2}\ \sin\frac{\varphi+h}{2}$$

Die beyden ersten geben durch Division die Tangente von $\frac{s-\nu}{2}$, die beyden andern aber die Tangente vor $\frac{s+\nu}{2}$, also kennt man s sowohl, als ν, und dadurch erhält man aus den obigen Gleichungen zwey Bestimmungen für $\sin\frac{90-\delta}{2}$ sowohl, als auch für $\cos\frac{90-\delta}{2}$, die mit einander verglichen, zur Prüfung der Rechnung dienen können.

Will man die Gröfse ν als entbehrlich übergehen, so hat man:

$$\text{Cotg } s = \frac{\text{Tg } h \cos\varphi + \sin\varphi \cos\omega}{\sin\omega}$$

$$\sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos h \cos\varphi \cos\omega;$$

$$\text{oder auch: } \cos\delta = -\frac{\cos h \cos\omega}{\sin s}$$

Um die vollständige Bestimmung der Lage des beobachteten Gestirns gegen den Aequator zu erhalten, mufs man, nebst der gefundenen Declination δ, auch die Rectascension α haben. Es ist aber klar, dafs die Rectascension aus ω und h, auch wenn die Polhöhe gegeben ist, sich nicht bestimmen lasse. Wäre aber z. B. noch die Rectascension t des Zeniths, d. h. der Stundenwinkel des Frühlingspunktes, zur Zeit der Beobachtung, gegeben, so hätte man $t = ZNO = ZNS + SNO$, oder $t = s + \alpha$, also die gesuchte Rectascension des Gestirns $\alpha = t - s$. Die Rectascension t des Zeniths aber ist bekannt, wenn der Stundenwinkel T der Sonne (oder die Beobachtungszeit) und überdiefs die Rectascension A der Sonne für dieselbe Zeit bekannt ist; es ist nämlich wieder $t = A + T$, und wenn man diesen Werth von t in der Gleichung $\alpha = t - s$ substituirt, so erhält man die gesuchte Rectascension des Gestirnes.

Andere ähnliche Probleme haben keine andere Schwierigkeit als die einfache Uebersetzung der allgemeinen Ausdrücke der sphärischen Trigonometrie in unsere oben gewählten Zeichen; daher ich mich im folgenden nur auf jene beschränken werde, welche einen besonderen Nutzen für die Ausübung haben.

§. 6.

Es sey die Polhöhe, die Declination und der Stundenwinkel gegeben; man suche die Höhe des Gestirnes.

Es ist: $\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos s$,
welcher Ausdruck sich durch verschiedene Transformationen zur Rechnung bequemer machen läſst.

Es ist angenehm und nützlich, die Allgemeinheit der analytischen Sprache näher zu betrachten, die oft viele Fragen durch eine einzige Gleichung beantwortet. Die gegenwärtige enthält z. B. alles, was man über die tägliche Bewegung der Gestirne sagen kann. Aus ihr folgt:

Zu gleichen Höhen gehören gleiche Stundenwinkel zu beyden Seiten des Meridians, wenn die Declination constant ist, und umgekehrt. Je näher der Stundenwinkel an Null ist, desto gröſser ist die Höhe; je näher der Stundenwinkel an 180° ist, desto kleiner ist die Höhe, wo nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche eine gröſsere Vertiefung unter dem Horizonte für eine kleinere Höhe angenommen wird. Für $s = 90° = 270°$ ist $\sin h = \sin\varphi \sin\delta$, und dann ist das Gestirn in dem sogenannten ersten Verticalkreise. Die gröſste Höhe, wenn die Declination constant ist, hat für $s = 0$ in der obern Culmination des Gestirns, d. h. in dem Durchgange desselben durch die südliche Hälfte des Meridians statt; die kleinste Höhe, die zu $s = 180°$ gehört, hat in der untern Culmination statt.

Für diese untere Culmination ist $z = 180 - \delta - \varphi$, wo $z = 90 - h$ die Zenithdistanz ist. Für die obere Culmination aber ist $z = \varphi - \delta$, wo südliche Declinationen negativ sind. Ist die nördliche Declination gröſser als φ, so ist z negativ, oder der Stern geht in seiner obern Culmination auf der Nordseite des Zeniths durch den Meridian; ist $\delta = \varphi$, so culminirt er im Zenithe selbst; ist endlich δ kleiner als φ, so culminirt er auf der Südseite des Zeniths. Ist ferner die südliche Declination gröſser als $90 - \varphi$, so geht der Stern nie auf, und ist die nördliche Declination gröſser, als $90 - \varphi$, so geht der Stern nie unter u. s. f.

$90 - h = \varphi - \delta$
$90 - \varphi = \delta + h$
(südl δ)
für $h = 0$

Ist $h = 0$, so ist der Stern im Horizont, er geht auf oder unter, und für diesen Augenblick hat man:

$$\cos s = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$$

und dieses s heiſst der halbe Tagbogen des Sterns, oder die halbe Zeit, welche er über dem Horizonte zubringt. Wird die Zeit t' berechnet, welche der Stern braucht, um diesen halben Tagbogen zu durchlaufen, indem man schlieſst

$$360 : \tfrac{1}{2}\text{ Tagbogen} = \text{Umlaufszeit des Sterns} : t'$$

und wird diese Zeit t' von der Zeit t der Culmination des Sterns subtrahirt, oder dazu addirt, so hat man die Zeit seines Auf- und Unterganges. Südliche Declinationen werden als negativ betrachtet.

Um dies auf analytische Ausdrücke zurückzuführen, sey Θ

die Zeit zwischen zwey nächsten Culminationen des Gestirnes, so ist

$$t' = \frac{s \cdot \Theta}{360}.$$

Die Zeit der Culmination des Gestirns zu finden, sey A und α die Rectascension der Sonne und des Gestirns für den Mittag des gegebenen Tages in Zeit ausgedrückt, und d A, d α die Veränderung dieser Rectascensionen zwischen zwey nächsten Culminationen, so ist, wie man leicht findet, die Zeit zwischen zwey nächsten Culminationen des Gestirns

$$\Theta = \frac{24^h \cdot 360^\circ}{24 + dA - d\alpha}$$

und die Zeit der Culmination des Gestirns

$$t = \frac{24\ (\alpha - A)}{24 + dA - d\alpha}$$

Nimmt die Rectascension des Gestirns ab, oder ist sie constant, so ist dα im ersten Falle negativ, und im zweyten Null.

Da wir übrigens, wie wir später sehen werden, die Gestirne durch unsre Atmosphäre um a scheinbar erhöht, und durch unsern Standpunkt über dem Mittelpunkt der Erde unter dem wahren Horizont um b scheinbar erniedrigt sehen, so muſs man, der gröſsern Genauigkeit wegen, nicht $h = o$, sondern $h = b - a$ nehmen. Die Gröſse a ist gleich $0° 30' 45''$, und für alle Gestirne constant; die Gröſse b aber ist für die verschiedenen Gestirne verschieden, und allein für den Mond beträchtlich, wo sie nahe 1 Grad beträgt. Man nennt a die Refraction, und b die Höhenparallaxe des Horizonts. Ist endlich die Declination des Gestirns veränderlich, so sucht man zuerst seinen Auf- oder Untergang mit irgend einer dieser Zeit nahen Declination, z. B. für den Mittag des gegebenen Tages. Für diese genäherte Zeit des Aufganges kann man dann die entsprechende Declination finden, und mit dieser einen verbesserten Werth für die Zeit des Aufganges suchen, und dieses Verfahren so oft wiederholen, als es die beabsichtigte Genauigkeit der Rechnung, die bey Aufgaben dieser Art nicht groſs zu seyn pflegt, erfordert.

Die Zeit der Culmination sowohl, als die des Auf- und Unterganges der Fixsterne findet man am bequemsten, wenn man dabey eine Uhr voraussetzt, die bey der Culmination des Frühlingspunktes Null, und zwischen zwey nächsten Culminationen dieses Punktes 24 Stunden gibt. Eine solche Uhr heiſst S t e r n u h r, und die von ihr angegebene Zeit S t e r n z e i t. Da die Sternzeit der Culmination eines jeden Sterns zugleich die Rectascension α dieses Sterns ist, so ist auch $\alpha \mp s$ die Sternzeit seines Auf- und Unterganges, wenn s wie zuvor den halben Tagbogen des Gestirns bezeichnet.

Ex. Sey die Rectascension eines Sternes $\alpha = 14^h\ 6'\ 32''.5$, die Declination $\delta = 20° \ 13' \ 48''0$, und die Polhöhe $\varphi = 45° \ 24' \ 3''$, so ist nach dem vorhergehenden der halbe Tagbogen $s = 111°$ $56' \ 20'' = 7^h \ 27' \ 45'' \ 3$.

Also ist die Sternzeit seiner Culmination $\alpha =$	14^h	$6'$	$32''\ 5$
Sternzeit des Aufgangs .	6	38	47.2
Untergangs	21	34	17.7

und wie man aus diesen Sternzeiten unsere gewöhnliche Zeit, welche sich nach der Sonne richtet, ableitet wird im VI. Capitel gezeigt werden.

§. 7.

Es sey die Rectascension und Declination eines Gestirns gegeben, man suche dessen Länge und Breite, oder umgekehrt.

Es ist klar, daſs man für jede dieser beyden Aufgaben die Schiefe der Ecliptik als bekannt voraussetzen muſs.

Da diese Aufgaben sich auf das Dreyeck NLS beziehen, so muſs man vor allen die allgemeine Bezeichnung der Winkel dieses Dreyeckes aufsuchen.

auf der Seite AB errichtet.

Wenn man durch den Punkt A eines sphärischen Dreyeckes ABC einen Bogen AO senkrecht auf die Seite AB dieses Dreyeckes zieht, und den Winkel OAC gleich n setzt, so ist offenbar der Winkel des Dreyeckes $A = 90 - n$, so lange n kleiner als $90°$ ist, oder so lange der Punkt C in dem ersten Quadranten von n liegt. Ist aber C in dem zweyten Quadranten von n, so ist $A = n - 90$, und denselben Ausdruck für A findet man, wenn C in dem dritten Quadranten von n liegt. Für den vierten endlich ist

$$A = 360 - n + 90$$

und der letzte Werth von A ist dem ersten gleich, weil beyde um $360°$ verschieden sind.

Um aber eine allgemeine Bezeichnung des Winkels A, die für alle Quadranten von n gilt, zu finden, muſs man bemerken, daſs es zwischen drey Punkten auf einer Kugelfläche immer zwey Dreyecke gibt, der anderen nicht zu erwähnen, für welche alle oben gegebenen analytischen Ausdrücke der sphärischen Trigonometrie selbst in Beziehung auf ihre Zeichen ganz identisch sind; nämlich erstens das Dreyeck, welches man gewöhnlich zu betrachten pflegt, und zweytens jenes, dessen Fläche die Fläche des ersten zur ganzen Kugelfläche ergänzt. Ich will das letzte das Ergänzungsdreyeck nennen. Beyde Dreyecke haben offenbar dieselben Seiten, aber die Winkel des einen sind die Ergänzungen der Winkel des andern zu vier rechten Winkeln. Die gegebenen Ausdrücke der sphärischen Trigonometrie sind aber durchaus dieselben, wenn man in ihnen die Seiten

$\alpha\ \beta\ \gamma$ ungeändert läſst, und für die Winkel A B C die Gröſsen 360 — A, 360 — B, 360 — C setzt.

Bemerkt man ferner, daſs die angezeigten vier Dreyecke für die vier Quadranten von n dadurch entstehen, daſs sich die Linie CA um den festen Punkt A dreht, so ist klar, daſs man, um den Winkel zu bestimmen, den CA während der Rotation mit BA bildet, immer dieselben Seiten der Linien CA, BA, mit einander vergleichen müsse. Daraus folgt, daſs, wenn man auf der Seite von BA, wo AO liegt, die Seite von CA zur Bestimmung des Winkels CAB gewählt hat, welche gegen BA gekehrt ist, man auf der andern Seite von BA die von BA abgewendete Seite der Linie CA zur Bestimmung desselben Winkels wählen müsse, weil die jetzt abgewendete Seite von CA dieselbe mit der vorhin zugewendeten Seite ist. Wenn man aber bey einem Dreyecke die Winkel betrachtet, welche die von einander abgekehrten Seiten der Bogen bilden, so betrachtet man eigentlich nicht das gewöhnliche, sondern das Ergänzungsdreyeck.

Wenn man also allgemein bey einem Dreyecke, in welchem ein Bogen fest, und die beyden andern beweglich sind, auf der einen Seite des festen Bogens das gewöhnliche Dreyeck betrachtet, so muſs man auf der andern Seite des festen Bogens das Ergänzungsdreyeck betrachten, um in der That immer dasselbe Dreyeck, wie es die Gleichförmigkeit des Verfahrens nothwendig erfordert, beyzubehalten.

Nach diesen Bemerknngen sind daher die Winkel A im ersten und vierten Quadranten von n gleich (90 — n), und im zweyten und dritten Quadranten von n gleich 360 — (n — 90) = 360 + (90 — n) = 90 — n, oder mit andern Worten, (90 — n) ist die allgemeine Bezeichnung des Winkels A für alle Quadranten von n.

Die Mechanik der Analyse, die in ihrem Verfahren eben so einfach, als in ihren Resultaten reichhaltig an mannigfaltigen, im Anfange der Untersuchung oft nicht geahnter, oder doch nicht mit Vorsatz hineingelegter Verbindungen ist, hat auch hier auf diese nothwendige Gleichförmigkeit des Verfahrens in der Messung des Winkels, gleichsam ohne unserem Dazuthun, Rücksicht genommen, und wir werden in unsern folgenden Untersuchungen noch oft Gelegenheit haben, diese vortreffliche Eigenschaft der analytischen Sprache zu beobachten.

I. Dieſs vorausgesetzt, sieht man leicht, daſs die allgemeine Bezeichnung des Dreyeckes NLS folgende ist:

LN = e die Schiefe der Ecliptik.

NS = 90 — δ

LS = 90 — β und

LNS = 90 + α

$$NLS = 90 - \lambda$$
$$NSL = \pi$$

Ist also α δ und e bekannt, so hat man

$$\mathrm{Tg}\,\lambda = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,e + \mathrm{Tg}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,e}{\mathrm{Cos}\,\alpha}$$

$$\mathrm{Sin}\,\beta = \mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,e - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,e \text{ und}$$

$$\mathrm{Tg}\,\beta = (\mathrm{Tg}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,e - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,e)\,\frac{\mathrm{Cos}\,\lambda}{\mathrm{Cos}\,\alpha}$$

Ist aber λ β und e bekannt, so ist

$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{Sin}\,\lambda\,\mathrm{Cos}\,c - \mathrm{Tg}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,e}{\mathrm{Cos}\,\lambda}$$

$$\mathrm{Sin}\,\delta = \mathrm{Sin}\,\lambda\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,e + \mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,e \text{ und}$$

$$\mathrm{Tg}\,\delta = (\mathrm{Sin}\,\lambda\,\mathrm{Sin}\,e + \mathrm{Tg}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,e)\,\frac{\mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\lambda}$$

Die Zweydeutigkeit in der Bestimmung des Winkels aus seiner Tangente wird dadurch entfernt, dafs Cos α und Cos λ immer dasselbe Zeichen haben mufs. Auch hat man dafür die Prüfungsgleichung

$$\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\delta = \mathrm{Cos}\,\lambda\,\mathrm{Cos}\,\beta.$$ (s. Nr. 505 u. 506)

II. Den vorhergehenden Ausdrücken kann man ~~zur Rechnung~~ eine bequemere Form geben. Ist nämlich

$$\mathrm{Tg}\,m = \mathrm{Cotg}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\alpha, \text{ so hat man}$$

$$\mathrm{Tg}\,\lambda = \frac{\mathrm{Tg}\,\alpha}{\mathrm{Sin}\,m}\,\mathrm{Sin}\,(m+e)$$

$$\mathrm{Sin}\,\beta = \frac{\mathrm{Sin}\,\delta}{\mathrm{Cos}\,m}\,\mathrm{Cos}\,(m+e)$$

und ist $\mathrm{Tg}\,n = \mathrm{Sin}\,\lambda\,\mathrm{Cotg}\,\beta$, so hat man

$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{Tg}\,\lambda}{\mathrm{Sin}\,n}\,\mathrm{Sin}\,(n-e)$$

$$\mathrm{Sin}\,\delta = \frac{\mathrm{Sin}\,\beta}{\mathrm{Cos}\,n}\,\mathrm{Cos}\,(n-e)$$

Endlich ist noch für die Bestimmung des Positionswinkels π,

$$\mathrm{Sin}\,\pi = \frac{\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,e}{\mathrm{Cos}\,\beta} = \frac{\mathrm{Cos}\,\lambda\,\mathrm{Sin}\,e}{\mathrm{Cos}\,\delta}$$

oder

$$\mathrm{Cotg}\,\pi = \frac{\mathrm{Cotg}\,e\,\mathrm{Cos}\,\delta + \mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\alpha} = \frac{\mathrm{Cotg}\,e\,\mathrm{Cos}\,\beta - \mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,\lambda}{\mathrm{Cos}\,\lambda}$$

Andere nicht minder bequeme Ausdrücke findet man, wenn man die oben gegebenen Gaufsischen Gleichungen auf das Dreyeck LNS anwendet.

Ist nämlich der Kürze wegen $90 - \pi = p$, $45 - \frac{1}{2}\delta = d$, $45 + \frac{1}{2}\lambda = l$, so ist

$$\mathrm{Sin}\, d\, \mathrm{Sin}\, \frac{p+\alpha}{2} = \mathrm{Sin}\, l\, \mathrm{Sin}\, (45 - \tfrac{1}{2}(e+\beta))$$

$$\mathrm{Sin}\, d\, \mathrm{Cos}\, \frac{p+\alpha}{2} = \mathrm{Cos}\, l\, \mathrm{Cos}\, (45 - \tfrac{1}{2}(e-\beta))$$

$$\mathrm{Cos}\, d\, \mathrm{Sin}\, \frac{p-\alpha}{2} = \mathrm{Cos}\, l\, \mathrm{Sin}\, (45 - \tfrac{1}{2}(e-\beta))$$

$$\mathrm{Cos}\, d\, \mathrm{Cos}\, \frac{p-\alpha}{2} = \mathrm{Sin}\, l\, \mathrm{Cos}\, (45 - \tfrac{1}{2}(e+\beta))$$

wodurch man δ α und π aus λ β und e findet, und ähnliche Ausdrücke wird man auch für die entgegengesetzte Aufgabe entwickeln, in welcher λ β π aus α δ e bestimmt werden. Um diese Ausdrücke zu erhalten, braucht man blofs in den vorhergehenden β in δ und λ in $-\alpha$ zu verwandeln.

III. Eine andere merkwürdige Auflösung dieser doppelten Aufgabe gründet sich blofs auf ebene Trigonometrie. Es seyen x y z die drey rechtwinklichten Coordinaten, welche die Lage des Gestirns gegen den Mittelpunkt der Erde bestimmen. Die Axe der x liege in der Linie der Nachtgleichen, und die Ebene der x y sey die des Aequators. Bestimmt man dieselbe Lage noch durch drey andere senkrechte Coordinaten x' y' z', von denen x' wieder in der Linie der Nachtgleichen, und die Ebene x' y' in der Ecliptik liegen, so hat man, wenn r die Entfernung des Gestirns vom Mittelpunkt der Erde bezeichnet:

$$\begin{array}{lcl} x = r\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\alpha & \text{und} & x' = r\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\lambda \\ y = r\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\alpha & & y' = r\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,\lambda \\ z = r\,\mathrm{Sin}\,\delta & & z' = r\,\mathrm{Sin}\,\beta \end{array}$$

Es sey nun R die Entfernung eines Gestirns von dem Punkte, wo die Ordinate y oder y' die Axe der x schneidet, und $90 - n$ der Winkel der R mit y', also n der Winkel der R mit z', so hat man

$$\left.\begin{array}{lcl} y = R\,\mathrm{Sin}\,(n-e) & \text{und} & y' = R\,\mathrm{Sin}\,n \\ z = R\,\mathrm{Cos}\,(n-e) & & z' = R\,\mathrm{Cos}\,n \end{array}\right\}\ \mathrm{I.}$$

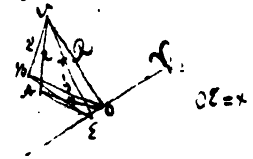
Ist eben so $(90 - m)$ der Winkel der R mit y, also m der Winkel der R mit z, so ist

$$\left.\begin{array}{lcl} y' = R\,\mathrm{Sin}\,(m+e) & \text{und} & y = R\,\mathrm{Sin}\,m \\ z' = R\,\mathrm{Cos}\,(m+e) & & z = R\,\mathrm{Cos}\,m \end{array}\right\}\ \mathrm{II.}$$

Löst man die zwey ersten der Gleichungen I. und II. auf, und substituirt für R Sin n, R Sin m ... ihre Werthe aus den zwey letzten dieser Gleichungen, so hat man aus I.

$$\left.\begin{array}{l} y = y'\,\mathrm{Cos}\,e - z'\,\mathrm{Sin}\,e \\ z = y'\,\mathrm{Sin}\,e + z'\,\mathrm{Cos}\,e \end{array}\right\}\ \mathrm{I'}$$

und aus II.



$$\left.\begin{array}{l} y' = z \text{ Sin } e + y \text{ Cos } e \\ z' = z \text{ Cos } e - y \text{ Sin } e \end{array}\right\} \text{II}'$$

Substituirt man in deu letzten vier Gleichungen die vorhergehenden Werthe der Coordinaten, so findet man, wenn man ihnen die Gleichung $x = x'$ hinzusetzt, aus I'

$$\text{Cos } \alpha \text{ Cos } \delta = \text{Cos } \lambda \text{ Cos } \beta$$
$$\text{Sin } \alpha \text{ Cos } \delta = \text{Sin } \lambda \text{ Cos } \beta \text{ Cos } e - \text{Sin } \beta \text{ Sin } e$$
$$\text{Sin } \delta = \text{Sin } \lambda \text{ Cos } \beta \text{ Sin } e + \text{Sin } \beta \text{ Cos } e$$

und aus II'

$$\text{Cos } \lambda \text{ Cos } \beta = \text{Cos } \alpha \text{ Cos } \delta$$
$$\text{Sin } \lambda \text{ Cos } \beta = \text{Sin } \alpha \text{ Cos } \delta \text{ Cos } e + \text{Sin } \delta \text{ Sin } e$$
$$\text{Sin } \beta = - \text{Sin } \alpha \text{ Cos } \delta \text{ Sin } e + \text{Sin } \delta \text{ Cos } e$$

welche Gleichungen mit der oben I auf andern Wegen gefundenen identisch sind.

Zieht man es aber vor, in der ersten der Gleichungen I. und II. die Werthe von R aus der zweyten dieser Gleichungen zu substituiren, so erhält man aus I.

$$x = x'$$
$$y = \frac{y'}{\text{Sin } n} \text{ Sin } (n - e)$$
$$z = \frac{z'}{\text{Cos } n} \text{ Cos } (n - e)$$

oder wenn man die Werthe der Coordinaten wieder einführt,

$$\text{Cos } \alpha \text{ Cos } \delta = \text{Cos } \lambda \text{ Cos } \beta$$
$$\text{Sin } \alpha \text{ Cos } \delta = \text{Sin } \lambda \text{ Cos } \beta \, \frac{\text{Sin } (n - e)}{\text{Sin } n}, \text{ oder } \text{Tg } \alpha = \text{Tg } \lambda \frac{\text{Sin } (n - e)}{\text{Sin } n}$$
$$\text{Sin } \delta = \text{Sin } \beta \, \frac{\text{Cos } (n - e)}{\text{Cos } n}$$

und eben so erhält man aus II.

$$\text{Tg } \lambda = \frac{\text{Tg } \alpha}{\text{Sin } m} \text{ Sin } (m + e)$$
$$\text{Sin } \beta = \frac{\text{Sin } \delta}{\text{Cos } m} \text{ Cos } (m + e)$$

und dieselben Gleichungen haben wir ebenfalls in II. gefunden.

Ex. I. Sey $\alpha = 355° \; 43' \; 45'' \; 30$
$\delta = - 8° \; 47' \; 25'' \; 0$
$e = 23° \; 27' \; 59'' \; 26$

so findet man

$\lambda = 352° \; 34' \; 44'' \; 55$
$b = - 6° \; 21' \; 56'' \; 28$
$\ast = 23 \; 33 \; 4. \; 67$

Ex. II. Sey $\lambda = 129°\ 38'\ 50''.9$
$\beta = -14\ \ 58\ \ 16.\ 6$
$e = 23.\ 27\ 42.\ 6$

so findet man

$\alpha = 128°\ \ 7\ \ 57''.9$
$\delta = +3\ \ 23\ \ 33''.3$
$\pi = -14°\ 44'\ 34''\ 6$

IV. Differentiirt man die gegebenen Gleichungen in Beziehung auf α, δ, λ, β und e, so findet man nach einigen einfachen Reductionen

$$d\beta = d\delta \operatorname{Cos}\pi - d\alpha \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\delta - de \operatorname{Sin}\lambda$$
$$d\lambda.\operatorname{Cos}\beta = d\delta \operatorname{Sin}\pi + d\alpha \operatorname{Cos}\pi \operatorname{Cos}\delta + de \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\lambda$$

und dann durch Reversion

$$d\delta = d\lambda \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\beta + d\beta \operatorname{Cos}\pi + de \operatorname{Sin}\alpha$$
$$d\alpha.\operatorname{Cos}\delta = d\lambda \operatorname{Cos}\pi \operatorname{Cos}\beta - d\beta \operatorname{Sin}\pi - de \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos}\alpha$$

durch welche Ausdrücke man die Fehler der Länge und Breite aus den gegebenen Fehlern der Rectascension und Declination, oder umgekehrt finden kann

V. Für ein Gestirn in der Ebene der Ecliptik, z. B. für die Sonne, ist $\beta = o$, also werden für sie die vorhergehenden Ausdrücke einfacher. Die vorzüglichsten derselben sind:

Aus e und λ

$$\operatorname{Tg}\alpha = \operatorname{Cos} e \operatorname{Tg}\lambda$$
$$\operatorname{Sin}\delta = \operatorname{Sin} e \operatorname{Sin}\lambda$$
$$\operatorname{Tg}\pi = \operatorname{Tg} e \operatorname{Cos}\lambda$$

Aus e und α

$$\operatorname{Tg}\lambda = \frac{\operatorname{Tg}\alpha}{\operatorname{Cos} e}$$
$$\operatorname{Tg}\delta = \operatorname{Tg} e \operatorname{Sin}\alpha$$
$$\operatorname{Sin}\pi = \operatorname{Sin} e \operatorname{Cos}\alpha$$

Aus e und δ

$$\operatorname{Sin}\lambda = \frac{\operatorname{Sin}\delta}{\operatorname{Sin} e}$$
$$\operatorname{Sin}\alpha = \frac{\operatorname{Tg}\delta}{\operatorname{Tg} e}$$
$$\operatorname{Cos}\pi = \frac{\operatorname{Cos} e}{\operatorname{Cos}\delta}$$

Aus α und δ

$$\text{Tg } e = \frac{\text{Tg } \delta}{\text{Sin } \alpha}$$

$$\text{Cos } \lambda = \text{Cos } \alpha \text{ Cos } \delta$$

$$\text{Tg } \pi = \frac{\text{Sin } \delta}{\text{Tg } \alpha}$$

VI. Endlich lassen sich auch auf diese Ausdrücke die oben gegebenen Entwicklungen in Reihen anwenden. Ist z. B. die Rectascension und Declination gegeben, und setzt man

$$m = \text{Tg}\frac{e}{2} \text{ Cotg } \frac{90-\delta}{2} \text{ und } n = \text{Tg } \tfrac{1}{2} e \text{ Cotg} \frac{90+\delta}{2}$$

so findet man

$$\frac{\lambda+\pi}{2} = \frac{\alpha}{2} + m \text{ Cos } \alpha - \frac{m^2}{2} \text{ Sin } 2\alpha - \frac{m^3}{3} \text{ Cos } 3\alpha + \frac{m^4}{4} \text{ Sin } 4\alpha +$$

$$\frac{\lambda-\pi}{2} = \frac{\alpha}{2} - n \text{ Cos } \alpha - \frac{n^2}{2} \text{ Sin } 2\alpha + \frac{n^3}{3} \text{ Cos } 3\alpha + \frac{n^4}{4} \text{ Sin } 4\alpha -$$

und überdieſs

$$\log \text{Sin} \frac{90-\beta}{2} = \log \left(\text{Sin } \frac{90-\delta}{2} \text{ Cos } \frac{e}{2} \right) + m \text{ Sin } \alpha + \frac{m^2}{2} \text{ Cos } 2\alpha - \frac{m^3}{3} \text{ Sin } 3\alpha -$$

$$\log \text{Cos} \frac{90-\beta}{2} = \log \left(\text{Cos } \frac{90-\delta}{2} \text{ Cos } \frac{e}{2} \right) - n \text{ Sin } \alpha + \frac{n^2}{2} \text{ Cos } 2\alpha + \frac{n^3}{3} \text{ Sin } 3\alpha -$$

und so weiter mit den übrigen, deren Entwicklung keine Schwierigkeit haben kann. Eben so wird man in dem Dreyecke ZNL die Länge λ' und Breite β' des Zeniths finden, wenn dessen Rectascension $= (\alpha + s)$ und Declination $= \varphi$ nebst der Schiefe der Ecliptik e bekannt ist. Es ist nämlich auch hier

$$\text{Sin } \beta' = \text{Cos } e \text{ Sin } \varphi - \text{Sin } e \text{ Cos } \varphi \text{ Sin } (\alpha + s)$$

$$\text{Tg } \lambda' = \frac{\text{Sin } e \text{ Tg } \varphi + \text{Cos } e \text{ Sin } (\alpha + s)}{(\text{Cos } \alpha + s)} \text{ oder}$$

$$\text{Cos } \lambda' = \frac{\text{Cos } \varphi \text{ Cos } (\alpha + s)}{\text{Cos } \beta'}$$

Andere Probleme, die sich hier darbieten, werden wir später aufzulösen suchen, wenn wir erst in den folgenden Kapiteln die zu ihrer vollständigen Auflösung nöthigen Vorkenntnisse erworben haben. Das gegenwärtige soll ein allgemeines Beyspiel zur Uebung für alle vorhergehenden Ausdrücke beschlieſsen.

Es sey $\alpha = 200° \; 0' \; 0''$

$\delta = -10°$ südlich

$s = 30°$, $\varphi = 50°$, $e = 23° \; 28' \; 0''$ o

so ist

$\lambda =$	202°	13′	27″ 8		
$\beta =$	— 1	26	29. 7		
$h =$	24	31	52. 8		
$\omega =$	32	46	10. 3		
$\pi =$	21	58	55. 9		
$\nu =$	20	41	17. 7		
$\zeta =$	1	17	38. 2		
$\lambda' =$	199	32	19. 1	Länge des Zeniths.	
$\beta' =$	63	59	48. 3	Breite des Zeniths.	

ZWEYTES KAPITEL.

Präcession und Nutation.

§. 1.

Schon Hipparch, der erste Astronom des Alterthums, der um das Jahr 140 v. Chr. zu Alexandrien lebte, bemerkte, als er seine eigenen Beobachtungen mit den 160 Jahre früheren des Timocharis verglich, daſs die Länge aller Fixsterne mit der Zeit gleichförmig zunehme, ohne daſs dabey ihre Breite geändert wird. Ptolemäus, der um das Jahr 130 n. Chr. in derselben Stadt beobachtete, nahm diese Zunahme der Länge gleich einem Grad für hundert Jahre an. Da diese Veränderung der Länge für alle Sterne gleich groſs ist, und die Breite derselben ungeändert bleibt, so kann man diese Erscheinung dadurch darstellen, daſs man annimmt, die Aequinoctialpunkte bewegen sich in der unveränderlichen Ebene der Ecliptik in hundert Jahren um einen Grad rückwärts, oder in einer der jährlichen Bewegung der Sonne entgegengesetzten Richtung. Auch die Schiefe der Ecliptik ist, wie aus den Beobachtungen der neuern Astronomen, mit denen der Alten verglichen, folgt, einer wiewohl beynahe hundertmal langsamern Abnahme unterworfen. Endlich fand Bradley, vielleicht der gröſste Beobachter der neueren Zeiten, daſs die beyden vorhergehenden gleichförmigen Veränderungen der Lage des Aequinoctialpunktes und der Schiefe der Ecliptik beträchtlichen Störungen unterworfen sind, die aber in wiederkehrende kurze Perioden von nahe ~~18 Jahren~~ eingeschlossen sind. Das erste regelmäſsig mit der Zeit fortgehende Zurückgehn der Aequinoctien nennt man die Präcession der Nachtgleichen, so wie die regelmäſsige Veränderung des Winkels der Ebene des Aequators, mit der der Ecliptik die säculäre Abnahme der Schiefe der Ecliptik, und endlich die periodischen Störungen beyder Bewegungen die Nutation.

Ohne Hülfe der höheren Analysis und der Mechanik ist es unmöglich, von diesen Erscheinungen strenge Rechenschaft zu geben. Wir werden sie indessen hier so weit auseinander zu setzen suchen, als zu ihrer Anwendung bey den Berechnungen der Beobachtungen nöthig ist.

Es ist bekannt, daſs die Geometer die Erde als einen Körper annehmen, der durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden ist. Wenn sie eine vollkommene Kugel wäre, so würde, wie man leicht zeigen kann, die Anziehung der andern Himmelskörper auf sie dieselbe seyn, als wenn die Masse der ganzen Erde in ihrem Mittelpunkte versammelt wäre. Da sie aber, nach ihrer eben angeführten Gestalt ein an ihren Polen abgeplattetes Sphäroid ist, so muſs z. B. die Wirkung der Sonne auf diese Erde in dem Aequator der Erde eine Bewegung hervorbringen, welche, indem sie den Aequator auf seiner Durchschnittslinie mit der Ecliptik in Bewegung setzt, die Ebene des Aequators jener der Ecliptik beständig nähern würde, ohne diese Durchnittslinie selbst zu verändern. Die Neigung des Aequators gegen die Ecliptik würde also durch die mittlere Wirkung der Sonne abnehmen, und beyder Durchschnittslinie würde fest seyn, w e n n d i e E r d e k e i n e U m d r e h u n g u m i h r e A x e h ä t t e. Da sie aber eine solche Umdrehung hat, so erhält, wie man leicht sieht, diese Umdrehung dem Aequator eine b e s t ä n d i g e Neigung gegen die Ecliptik, und verwandelt die Wirkung der Sonne in eine rückläufige Bewegung der Durchschnittslinie oder der Aequinoctien, sie zieht diesen Aequinoctien eine Veränderung zu, welche ohne der Umdrehung der Erde, bloſs bey der Neigung statt finden würde, und gibt dafür der Neigung die Beständigkeit, welche ohne die Rotation bey den Knoten statt finden würde. Diese rückgängige Bewegung der Aequinoctien, die P r ä c e s s i o n, hängt also von der Abplattung der Erde ab, und sie verändert die Neigung der Ecliptik gegen den Aequator n i c h t.

Was von der Wirkung der Sonne gesagt wurde, gilt auch von den Wirkungen der andern Himmelskörper, von denen aber allein der Mond, wegen seiner Nähe, einen für die Beobachtungen noch merkbaren Einfluſs hat. Auch der Mond also macht die Aequinoctien des Erdäquators in der Ebene seiner Bahn rückwärts gehen, und beyde Wirkungen zusammen heiſsen die L u n i s o l a r p r ä c e s s i o n, die nach den neuesten Bestimmungen jährlich nahe 50″34 beträgt. Da aber die Lage der Ebene der Mondsbahn und ihre Neigung gegen den Aequator, wie wir unten sehen werden, veränderlich ist, so ist auch die Wirkung des Mondes, die sonst, wie die der Sonne, constant wäre, selbst veränderlich. Der constante Theil dieser Wirkung des Mondes auf die Erde ist die oben betrachtete Lunarpräcession, der veränderliche Theil dieser Wirkung aber, der von der verschiedenen Lage der Mondesbahn gegen den Aequator abhängt, und in wiederkehrenden Perioden von nahe 18.6 Jahren sowohl auf die Bewegung der Aequinoctien, als auch auf die Veränderung der Schiefe der Ecliptik seinen Einfluſs äuſsert, heiſst, nach dem Vorhergehenden, die Nutation. Nennt man ☊ ☾ die Länge des Punktes, in welchem die Mondesbahn die Ecliptik schneidet, und von welchem sich der Mond über die Ecliptik erhebt, d. h. nennt man ☊ ☾ den aufsteigenden Knoten der Mondesbahn in der Ecliptik, so fand Bradley aus seinen Beobachtungen, dafs die Nutation ein Vorwärtsgehen der Aequinoctien bewirkt, welches dem Sinus von ☊ ☾ proportionirt ist, und eine Verminderung der Schiefe der Ecliptik hervorbringt, die dem Cosinus desselben Winkels ☊ ☾ proportionirt ist. Wir werden unten sehen, wie man diese Veränderungen der Präcession und Nutation bildlich darstellen, und ihren Einflufs auf die Lage der Gestirne gegen den Aequator und die Ecliptik berechnen könne.

Wenn also die Sonne und der Mond allein auf die Erde wirkte, so würde, wie wir gesehen haben, die mittlere (von der periodisch wiederkehrenden Nutation unabhängige) Neigung der Ecliptik gegen den Aequator beständig seyn. Allein die andern Körper unsers Sonnensystems, deren Einflufs auf die Gestalt der Erde zwar verschwindet, haben doch noch eine sehr merkliche Wirkung auf die Lage der Bahn der Erde, indem sie die Ebene der Ecliptik der des Aequators immer zu nähern suchen, und diefs ist die oben bemerkte säculare Abnahme der Schiefe der Ecliptik, die also mit der Präcession selbst nichts gemein hat. Aus dieser veränderten Lage der Erdbahn folgt aber nothwendig auch eine Aenderung in der Lage der Aequinoctien, und zwar eine rechtläufige Bewegung von nahe 0.″16 jährlich, um welche Gröfse die oben betrachtete Lunisolarpräcession, da sie mit ihr eine entgegengesetzte Richtung hat, vermindert werden mufs. Ist daher die durch die Wirkung der Sonne und des Mondes bewirkte Lunisolarpräcession nach dem oben gesagten 50″34, so ist die allgemeine oder wirklich statt habende Präcession 50.″18. Diese beyden Wirkungen des Einflusses der Planeten sind also von der Abplattung der Erde oder der Wirkung der Sonne und des Mondes auf die Erde im Allgemeinen unabhängig, aber da die Wirkung der Sonne und des Mondes bey einer durch die Wirkung der Planeten veränderten Lage der Ecliptik auch verändert werden mufs, so folgt, dafs daraus eine der Nutation ähnliche Bewegung des Erdäquators entstehen wird, deren Werth aber viel kleiner, und deren Periode unvergleichbar gröfser seyn wird, als bey der oben betrachteten Nutation des Mondes. Die Ortsveränderung der Ecliptik durch die Planeten bringt also, in Verbindung mit der Wirkung der Sonne und des Mondes auf die Erde, in ihrer Schiefe gegen den Aequator eine kleine Veränderung hervor, die aber von der oben betrachteten säculären Abnahme der Schiefe sehr verschieden ist.

§. 2.

Um sich von allen diesen Bewegungen einen deutlichen Begriff zu machen, wollen wir den Aequator und die gegenwärtige mittlere oder bewegliche Ecliptik (die Benennung der wahren Ecliptik behalten wir für die durch die periodische Nutation gestörte mittlere Ecliptik, von welcher Nutation wir hier ganz abstrahiren) auf irgend eine feste Ebene beziehen, für welche wir die Ebene der Ecliptik im Jahre 1750 annehmen. Es sey also (Fig. 2) S E diese feste Ecliptik und S A die Lage des Aequators für die Zeit 1750, so wie S''E' und S' S'' A' die Lage der mittlern Ecliptik und des Aequators für die Zeit $1750 + t$, wo t in Jahren und deren Theilen ausgedrückt ist.

Wegen der ~~blofsen Anziehung der Sonne und des Mondes~~ auf die abgeplattete Erde geht nach dem vorhergehenden der Durchschnitt der Ebene A und E in der Ebene E ~~zurück~~, wodurch die Schiefe der Ecliptik nicht geändert wird. Dieser Rückgang in der Zeit von 1750 bis $1750 + t$, oder die Lunisolarpräcession, heifse ψ, so ist $\psi = S\,S'$.

Da aber auch die ~~Planeten den~~ Mittelpunkt der Erde anziehen, so entsteht dadurch eine Bewegung der Ebene E', und aus dieser Ursache wird A von E' immer in andern Punkten und unter andern Winkeln geschnitten, als von E. Der dadurch entstehende Rückgang des Durchschnitts der Ebene A und E' in der Ebene E', die allgemeine Präcession, heifse $\psi_{,}$, so ist $\psi_{,}$ gleich der Differenz der Bogen N S'' und N S. Heifst Π die Länge des aufsteigenden Knotens der Ebene E' in E, von dem fixen Aequinoctium des Jahres 1750 gerechnet, so ist $\Pi = NS$, und $\Pi + \psi = NS'$, und $\Pi + \psi_{,} = NS''$.

Durch diese allgemeine Präcession wird auch die Schiefe der Ecliptik geändert, und diese Aenderung der Lage der Ecliptik gegen den Aequator wird allmählig auch die Anziehung ändern, ~~welche die Sonne und der Mond auf~~ die abgeplattete Erde ausüben, wodurch eine Bewegung der Ebene A entsteht, die eine Art von Nutation von sehr langer Periode erzeugt.

Es sey ferner π der Winkel der Ebene E und E', also $\pi = S'\,NS''$; ω der Winkel der Ebene A und E für die Zeit 1750, also $\omega = NS'S''$; $\omega_{,}$ der Winkel der Ebenen A und E' für die Zeit $1750 + t$, also $\omega_{,} = N\,S''\,A'$; und endlich der Bogen $S'S'' = \lambda$, also S das mittlere Aequinoctium zur Zeit 1750; S'' das mittlere Aequinoctium zur Zeit $1750 + t$; der Winkel ω endlich die mittlere Schiefe zu derselben Zeit $1750 + t$.

Aus den Beobachtungen Bradley's, verbunden mit denen von Piazzi, fand Bessel (Fundamenta astronomiae) für $\psi\,\psi_{,}$ ω und $\omega_{,}$ folgende Werthe für das Jahr $1750 + t$,

$$\psi = 50''.340499\ t - 0''.0001217945\ t^2$$

$$\psi_{,} = 50.\ 176068\ t + 0.\ 0001221483\ t^2$$
$$\omega = 23^\circ\ 28'\ 18''0 + 0.00000984233\ t^2$$
$$\omega_{,} = 23^\circ\ 28'\ 18''.0 - 0.48368\,t - 0{,}00000272295\ t^2$$

Daraus kann man die Werthe von Π π und λ ableiten. In dem Dreyecke N S′ S″ ist nämlich

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Tg}\ \frac{\pi}{2} \mathrm{Sin}\left(\Pi + \frac{\psi + \psi_{,}}{2}\right) = \mathrm{Sin}\ \frac{\psi - \psi_{,}}{2}\ \mathrm{Tg}\ \frac{\omega_{,} + \omega}{2} \\ \mathrm{Tg}\ \frac{\pi}{2} \mathrm{Cos}\left(\Pi + \frac{\psi + \psi_{,}}{2}\right) = \mathrm{Cos}\ \frac{\psi - \psi_{,}}{2}\ \mathrm{Tg}\ \frac{\omega_{,} - \omega}{2} \\ \mathrm{Tg}\ \frac{1}{2}\lambda\ \mathrm{Cos}\ \frac{\omega_{,} + \omega}{2} = \mathrm{Tg}\ \frac{\psi - \psi_{,}}{2}\ \mathrm{Cos}\ \frac{\omega_{,} - \omega}{2}\,. \end{array}\right\} (1)$$

wo Π immer so genommen wird, dafs π positiv bleibt.

Aus diesen endlichen Ausdrücken kann man leicht annähernde Werthe von Π π und λ entwickeln, die nach den Potenzen von t fortgehen. Man findet so

$$\Pi = 171^\circ\ 36'\ 10'' - 5''18\ t$$
$$\pi = 0''.\ 48892\ t - 0.\ 0000030719\ t^2$$
$$\lambda = 0''.\ 17926\ t - 0\cdot 0002660394\ t^2$$

§. 3.

Die vorhergehenden Ausdrücke werden uns ein bequemes Mittel darbieten, die Länge und Breite, oder die Rectascension und Declination eines Fixsterns von einer gegebenen Epoche auf eine andere gegebene Zeit zu übertragen. Wir wollen mit der Länge und Breite anfangen.

Sey L B die Länge und Breite eines Sterns, der seinen absoluten Ort nicht ändert, in Beziehung auf die feste Ecliptik und auf das Aequinoctium von 1750, und l b die Länge und Breite desselben Sterns in Beziehung auf die Ecliptik und das Aequinoctium von 1750 + t, so ist

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Cos}(L - \Pi) = \mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Sin}\,(l - \Pi - \psi_{,}) \\ \mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Sin}\,(L - \Pi) = \mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Sin}\,(l - \Pi - \psi_{,})\,\mathrm{Cos}\,\pi - \mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Sin}\,\pi \\ \mathrm{Sin}\quad B \quad = \mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Sin}\,(l - \Pi - \psi_{,})\ \mathrm{Sin}\ \pi + \mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Cos}\,\pi \end{array}\right\} (2)$$

Diese Gleichungen dienen, die zur Zeit 1750 + t beobachteten Längen und Breiten auf die fixe Ecliptik zur Zeit 1750 zu reduziren.

Will man umgekehrt die Länge L und Breite B für die Epoche 1750 auf die Zeit 1750 + t bringen, so hat man, wenn man die für die letzte Zeit gehörigen Gröfsen mit einem obern Striche bezeichnet:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Cos}\, b' \,\text{Cos}\,(l' - \Pi' - \psi'_{,}) & = \text{Cos}\, B\, \text{Cos}\,(L - \Pi') \\ \text{Cos}\, b' \,\text{Sin}\,(l' - \Pi' - \psi'_{,}) & = \text{Cos} B\, \text{Sin}\,(L - \Pi')\, \text{Cos}\, \pi' + \text{Sin} B \text{Sin} \pi' \\ \text{Sin}\, b' & = - \text{Cos} B\, \text{Sin}(L - \Pi')\, \text{Sin}\, \pi' + \text{Sin} B \text{Cos} \pi' \end{array}\right\} (3)$$

Vernachlässigt man die zweyten und höhern Potenzen von $\pi_{,}$, so geben die letzten Gleichungen für die Zeit $1750 + t'$

$$b' = B - \pi' \,\text{Sin}\,(L - \Pi')$$
$$l' = L + \psi'_{,} + \pi' \,\text{Tg}\, B\, \text{Cos}\,(L - \Pi')$$

und eben so für die Zeit $1750 + t$

$$b = B - \pi \,\text{Sin}\,(L - \Pi)$$
$$l = L + \psi_{,} + \pi \,\text{Tg}\, B\, \text{Cos}\,(L - \Pi)$$

also abkürzend

$$l' = l + (\psi'_{,} - \psi_{,}) + (\pi' - \pi)\, \text{Tg}\, b\, \text{Cos}\, \Delta$$
$$b' = b - (\pi' - \pi)\, \text{Sin}\, \Delta$$

wo $\Delta = L - \frac{1}{2}(\Pi + \Pi')$ ist.

Substituirt man in diesen Ausdrücken die vorhergehenden Werthe von $\psi\ \pi\ \Pi$, so erhält man

$$l' = l + (t' - t)(50''.176068 + (t' + t)\, 0''.0001221438)$$
$$+ (t' - t)(\ 0''.48892 - (t' + t)\, 0''0000030719)\, \text{Cos}\, \Delta\, \text{Tg}\, b$$
$$b' = b - (t' - t)(\ 0''\ 48892 - (t' + t)\, 0''.0000030719)\ \text{Sin}\, \Delta$$

$$\text{wo}\ \Delta = l - 171^\circ\ 36'\ 10'' - 50''.176\ t + 5''.18\left(\frac{t' + t}{2}\right)$$

und mit diesen Ausdrücken kann man die beobachtete Länge und Breite l b für eine Zeit t auf andere beobachtete Längen und Breiten l′ b′ für die Zeit t′ bringen.

§. 4.

Auf eine ähnliche Weise läſst sich auch die Lage der Gestirne gegen den Aequator behandeln.

Ist $\alpha\ \delta$ die in irgend einer Zeit beobachtete Rectascension und Declination eines Gestirns, und heiſst die Rectascension von dem Durchschnitte der Ebene A und E an gerechnet, $\alpha + \lambda$, so findet man daraus die Länge und Breite L B für die Epoche 1750 und die feste Ecliptik durch die Ausdrücke

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Cos}\, B\, \text{Cos}\,(L + \psi) & = \text{Cos}\, \delta\, \text{Cos}\,(\alpha + \lambda) \\ \text{Cos}\, B\, \text{Sin}\,(L + \psi) & = \text{Cos}\, \delta\, \text{Sin}\,(\alpha + \lambda)\, \text{Cos}\, \omega + \text{Sin}\, \delta\, \text{Sin}\, \omega \\ \text{Sin}\, B & = - \text{Cos}\, \delta\, \text{Sin}\,(\alpha + \lambda)\, \text{Sin}\, \omega + \text{Sin}\, \delta\, \text{Cos}\, \omega \end{array}\right\} (4)$$

und sucht man umgekehrt aus der Länge und Breite L B für die Epoche und für die fixe Ecliptik die Rectascension und Declination für eine andere Zeit, so ist, wenn man für die zweyte alle Gröſsen mit einem obern Strich bezeichnet

$$\left.\begin{aligned}\cos\delta \cos(\alpha'+\lambda') &= \cos B \cos(L+\psi') \\ \cos\delta' \sin(\alpha'+\lambda') &= \cos B \sin(L+\psi') \cos\omega' - \sin B' \sin\omega' \\ \sin\delta' &= \cos B \sin(L+\psi') \sin\omega' + \sin B \cos\omega'\end{aligned}\right\}(5)$$

Eliminirt man endlich aus den Gleichungen 4 und 5 die Gröſse L und B, so erhält man Ausdrücke, durch welche man die Rectascension und Declination für $1750+t'$ findet, wenn jene für $1750+t$ gegeben sind, ähnliche, aber mehr zusammen gesetzte Ausdrücke mit jenen, welche wir oben für die Längen und Breiten gegeben haben. Man kann aber auch noch bequemer diese Reduction auf folgende Weise vornehmen.

Sind ψ ψ', und ω ω' . . . die Werthe von ψ und ω . . . für die Zeiten $1750+t$ und $1750+t'$, so kennt man in dem sphärischen Dreyecke, welches durch die in der festen Ecliptik liegende Seite $\psi'-\psi$, durch den Bogen des Aequators zur ersten, und durch den Bogen des Aequators zur zweyten Epoche gebildet wird, die Seite $\psi'-\psi$ und die beyden ihr anliegenden Winkel ω' und $180-\omega$. Es sey die an ω' liegende Seite gleich $90°+z'$, die an $180-\omega$ liegende Seite gleich $90-z$, und der dritte Winkel des Dreyeckes gleich Θ, so findet man z z' und Θ aus folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Tg}\frac{z'+z}{2} &= \frac{\cos\frac{\omega'+\omega}{2}}{\cos\frac{\omega'-\omega}{2}}\operatorname{Tg}\frac{\psi'-\psi}{2} \\ \operatorname{Tg}\frac{z'-z}{2} &= \frac{\sin\frac{\omega'-\omega}{2}}{\sin\frac{\omega'+\omega}{2}}\operatorname{Cotg}\frac{\psi'-\psi}{2} \\ \operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}\Theta &= \frac{\sin\frac{z'+z}{2}}{\cos\frac{z'-z}{2}}\operatorname{Tg}\frac{\omega'+\omega}{2}\end{aligned}\right\}(6)$$

Kennt man aber z z' Θ, so findet man die Rectascension und Declination α' δ' für $1750+t'$ aus der Rectascension und Declination α δ für $1750+t$ durch folgende den vorhergehenden analogen Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}\cos\delta' \sin(\alpha'+\lambda'-z') &= \cos\delta \sin(\alpha+\lambda+z) \\ \cos\delta' \cos(\alpha'+\lambda'-z') &= \cos\delta \cos(\alpha+\lambda+z)\cos\Theta - \sin\delta \sin\Theta \\ \sin\delta' &= \cos\delta \cos(\alpha+\lambda+z)\sin\Theta + \sin\delta\cos\Theta\end{aligned}\right\}(7)$$

§. 5

Differentiirt man diese Gleichungen (4) oder (5), so erhält man nach einigen einfachen Reductionen, wenn man die zweyten und höheren Potenzen von λ und die in das Quadrat von t multiplizirten Glieder vernachlässiget,

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\left(\mathrm{Cos}\,\omega + \mathrm{Sin}\,\omega\,\mathrm{Tg}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\alpha\right) +$$

$$\left(\frac{d\psi}{dt}.\lambda\,\mathrm{Sin}\,\omega - \frac{d\omega}{dt}\right)\mathrm{Tg}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\alpha$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\psi}{dt}.\,\mathrm{Sin}\,\omega\,\mathrm{Cos}\,\alpha - \left(\frac{d\psi}{dt}.\lambda\,\mathrm{Sin}\,\omega - \frac{d\omega}{dt}\right)\mathrm{Sin}\,\alpha$$

Das letzte Glied dieser beyden Ausdrücke kann ohne Nachtheil weggelassen werden, da selbst für den Polarstern

$\frac{d\psi}{dt}.\lambda\,\mathrm{Sin}\,\omega - \frac{d\omega}{dt}$ nur gleich $0''.00000026$ t ist.

Setzt man daher

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= m + n\,\mathrm{Tg}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\alpha\\ \frac{d\delta}{dt} &= n\,\mathrm{Cos}\,\alpha\end{aligned}\right\}\ 8)$$

und entwickelt man aus den in §. 2 gegebenen Werthen von ψ ω und λ die Differentialcoefficienten

$$\frac{d\psi}{dt},\ \frac{d\omega}{dt},\ \frac{d\lambda}{dt}$$

so erhält man für 1750 + t

$$m = 45.99592 + 0.00030864 50\,t$$

$$n = 20.05039 - 0.0000970204\,t$$

und die Gleichungen (8) wird man statt den (7) für alle Fälle brauchen können, wo die Differenz der beyden Zeiten nur einige Jahre beträgt. Diese Gleichungen (8) enthalten die gewöhnlichen Ausdrücke der jährlichen Präcession in Rectascension und Declination, die also mit der Anzahl t der Jahre multiplizirt werden müssen.

Ex. Aldebaran gibt für 1800:

$\alpha = 66^\circ\,7'$, $\delta = 16^\circ\,6'$, $t = 50$

$m = 46.011$, $n = 20.045$

also $\frac{d\alpha}{dt} = 51''.30$

$\frac{d\delta}{dt} = 8''.11$

Wollte man in der Bestimmung der Präcession auch auf die Glieder Rücksicht nehmen, welche von dem Quadrate der Zeit abhängen, so sey α, δ die Rectascension und Declination für die Zeit T, und α', δ' für die Zeit T + t.

Diefs vorausgesetzt, ist

$$\alpha' = \alpha + t.\frac{d\alpha}{dt} + \frac{t^2}{1.2}.\frac{d^2\alpha}{dt^2} +$$

$$\delta' = \delta + t.\frac{d\delta}{dt} + \frac{t^2}{1.2}.\frac{d^2\delta}{dt^2} +$$

wo nach dem vorhergehenden

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n \text{ Tg } \delta \text{ Sin } \alpha \quad \text{und}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = n \text{ Cos } \alpha \text{ ist.}$$

Also ist auch, wenn man diese Ausdrücke differentiirt,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{dm}{dt} + \text{Sin } \alpha \text{ Tg } \delta. \frac{dn}{dt} + mn \text{ Cos } \alpha \text{ Tg } \delta$$
$$+ n^2 \text{ Sin } 2\alpha \text{ Tg}^2 \delta + \tfrac{1}{2} n^2 \text{ Sin } 2\alpha$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \text{Cos } \alpha. \frac{dn}{dt} - mn \text{ Sin } \alpha - n^2 \text{ Sin}^2 \alpha \text{ Tg } \delta$$

$$\text{wo} \quad \frac{dm}{dt} = \quad 0.0003686450$$

$$\frac{dn}{dt} = -0.0000970204 \text{ ist.}$$

§. 6.

Die bisher betrachteten, mit der Zeit fortgehenden, oder doch in sehr langen Perioden von mehreren Jahrtausenden eingeschlossenen Bewegungen des Aequinoctialpunktes und der Schiefe der Ecliptik sind, wie wir schon bemerkt haben, noch einer andern Störung, der **Nutation**, unterworfen, die in der Zeit von nahe 18.6 Jahren wieder zurückkehret. Da aber die Knoten der Mondesbahn in der Ecliptik auf der letzten Ebene die ganze Peripherie in derselben Periode zurücklegen, so wurde man dadurch sehr bald auf die Vermuthung geführt, dafs diese Störungen von der Lage dieser Knoten auf irgend eine Weise abhängen. Aus einer grofsen Anzahl von zu diesem Zwecke angestellten Beobachtungen fand **Bradley**, dafs durch die Nutation der Frühlingspunkt vorwärts gehe, also die Länge der Sterne abnehme, um eine Gröfse, welche dem Sinus der Länge des aufsteigenden Knotens der Mondesbahn in der Ecliptik proportionirt ist, und in seinem Maximo nahe 18″ betrage; und dafs die Schiefe der Ecliptik eine Verminderung erleide, die dem Cosinus jenes Winkels gleich ist, und in ihrem Maximo 9″65 betrage, und dafs endlich die Breite der Sterne ungeändert bleibe. Daraus folgt, dafs die Nutation ihren Grund in einer Veränderung des Aequators um die hier als ruhend angenommene Ecliptik habe, oder dafs die Erdaxe in der Periode von 18.6 Jahren eine in sich selbst wiederkehrende Linie an der Fläche des Himmels beschreibe, obschon sie, wie die Beständigkeit der Polhöhen aller Beobachtungsörter zeigt, immer denselben Punkt der Oberfläche der Erde einnimmt.

Man kann sich diese Bewegung durch ſolgende Hypothese bildlich darstellen.

Man denke sich durch die Pole des Aequators einen Kreis um die Pole der Ecliptik, dessen Entfernung also vom Pol der Ecliptik der Schiefe der Ecliptik gleich ist. In diesem Kreise bewegt sich der Pol des Aequators jährlich nahe 50″ von Morgen gegen Abend. Dadurch wird also die Länge der Sterne jährlich um eben so viel gröſser, die Breite derselben aber, oder der Ort der Pole der Ecliptik, bleibt ungeändert. Dieſs ist die Präcession, die, wie oben gesagt wurde, vorzüglich aus der Wirkung der Sonne und des Mondes auf die abgeplattete Erde entsteht.

Eine andere Ursache, die Wirkung der Planeten auf die Erdbahn, gibt dem Mittelpunkte dieses Kreises, dem Pole der Ecliptik, eine kleine Bewegung um den Pol des Aequators, wodurch dieser Kreis immer verkleinert, also vorzüglich die Breite der Sterne verändert wird, während die Declination derselben ungeändert bleibt. Diese Hypothese erklärt die oben betrachtete säculäre Abnahme der Schiefe der Ecliptik, die also aus einer Bewegung der Pole der Ecliptik um die hier als ruhend angenommenen Pole des Aequators entsteht.

Die Länge und Breite, Rectascension und Declination der Sterne, die sich auf den bloſs durch die Procession corrigirten Frühlingspunkt, und auf die bloſs durch die säculäre Abnahme der Ecliptik corrigirte Schiefe bezieht, heiſst die **mittlere**.

Da die **Nutation**, wie oben erinnert wurde, die Breite der Sterne nicht ändert, so entsteht sie aus einer Bewegung des Aequators um die hier als ruhend angenommene Ecliptik, wie die Präcession. Man denke sich den Punkt des oben betrachteten Kreises (dessen Pol der ruhende Pol der Ecliptik ist), welchen eben der Pol des Aequators einnimmt, als Mittelpunkt einer Ellipse, deren groſse Axe $2h = 19''.30$ den Breitenkreis berührt, und deren kleine Axe $2g = 14''.36$ auf diesem Breitenkreis senkrecht ist. Der Mittelpunkt der Ellipse ist der **mittlere Pol** des Aequators, und die Länge des wahren Poles, der in der Peripherie dieser Ellipse ist, wird so bestimmt. Man beschreibt in der Ebene der Ellipse einen Kreis, dessen Mittelpunkt der der Ellipse, und dessen Halbmesser die halbe groſse Axe h der Ellipse ist, und denkt sich einen Halbmesser dieses Kreises in gleichförmiger Bewegung um seinen Mittelpunkt in einer Richtung, welche der der jährlichen Bewegung der Sonne entgegen ist, so, daſs dieser Halbmesser mit der der Ecliptik am nächsten liegenden halben groſsen Axe dann zusammenfällt, wenn der aufsteigende Knoten der Mondesbahn in der Ecliptik

mit dem Frühlingspunkte zusammenfällt. Läſst man dann von dem Endpunkte dieses Halbmessers auf die groſse Axe der Ellipse ein Loth herab, so ist der Durchschnittspunkt dieses Lothes mit der Peripherie der Ellipse der Ort des wahren Poles des Aequators, und diese Bewegung des wahren Poles in seiner Ellipse um den mittlern Pol stellt die Nutation vor.

Da nach dieser Hypothese die groſse Axe der Ellipse in dem Kolur der Solstitien liegt, so wird der Winkel, welchen der bewegliche Halbmesser mit der Knotenlinie der Mondesbahn in der Ecliptik zu der Zeit bildet, wo jener Halbmesser mit der groſsen Axe der Ellipse zusammenfällt, ein rechter Winkel seyn, und da die Bewegung des Halbmessers sowohl, als die des mittlern Mondknotens gleichförmig ist, und in derselben Richtung vor sich geht, so ist klar, daſs dieser Winkel während der ganzen Umlaufszeit des Halbmessers ein rechter Winkel bleiben, d. h. daſs der Halbmesser mit der der Ecliptik am nächsten liegenden halben groſsen Axe immer einen Winkel bilden wird, welcher gleich ☊ ☾, oder welcher gleich der Länge des aufsteigenden Knotens der Mondesbahn in der Ecliptik ist. Heiſst also z das Loth von dem Endpunkte des Halbmessers auf die groſse Axe, und y das Stück dieses Lothes zwischen der groſsen Axe und dem Bogen der Ellipse, und endlich x das Stück der groſsen Axe zwischen dem Lothe und dem Mittelpunkte der Ellipse, so hat man

$$\frac{z}{x} = \text{Tg} ☊ ☾$$

und wenn A der Winkel ist, welcher den Radius der Ellipse d. h. die Linie, welche den wahren Pol des Aequators mit dem mittlern Pol verbindet, mit der groſsen Axe bildet, so ist

$$\text{Tg } A = \frac{y}{x}, \text{ also auch } \text{Tg } A = \frac{y}{z} \text{ Tg} ☊ ☾$$

und da $\frac{y}{z} = \frac{g}{h}$ ist, so hat man $\text{Tg } A = \frac{g}{h}$ Tg ☊ ☾, also auch

$$x = h \text{ Cos } ☊ ☾ \text{ und } y = x \text{ Tg } A = g \text{ Sin } ☊ ☾$$

Verbindet man aber die beyden Endpunkte der Linie y mit dem Pole der Ecliptik, so entsteht ein sphärisches Dreyeck, in welchem zwey Seiten y und x + e sind, wenn e die mittlere Schiefe der Ekliptik bezeichnet. In diesem Dreyecke ist die Hypothenuse gleich der wahren Schiefe der Ecliptik e + d e und der an der Hypothenuse anliegende Winkel gleich der gesuchten Veränderung des Aequinoctialpunktes d λ. Man hat daher

$$\text{Cos } (e + de) = \text{Cos } y \text{ Cos } (x + e) \text{ und}$$

$$\text{Tg } d\lambda = \frac{\text{Tg } y}{\text{Sin } (x + e)}$$

Da aber x, y, de, nur geringe Werthe haben, so kann man statt den vorhergehenden Gleichungen setzen.

$$d e = x$$

$$d \lambda = \frac{y}{\text{Sin } e}$$

also ist, wenn man die obigen Werthe von x und y substituirt,

$$d e = h \text{ Cos } ☊ ☾ = 9.\ 65 \text{ Cos } ☊ ☾$$

$$d\lambda = - g \frac{\text{Sin } ☊ ☾}{\text{Sin } e} = - 18''03 \text{ Sin } ☊ ☾ \text{ wenn } e = 23° 28' \text{ ist.}$$

und diefs ist die Nutation der Schiefe der Ecliptik und der Länge der Fixsterne, das negative Zeichen bey der zweyten, weil im esten Quadrate von ☊ ☾ nach dem Vorhergehenden die Länge der Sterne durch die Nutation vermindert wird.

§. 7.

Um aus dieser Gröfse dλ, de die Nutation der Sterne n Rectascension und Declination dα, dδ zu finden, werden wir die Differentialgleichungen des §. 5. Cap. I. brauchen, in welchem $d\beta = o$ ist, und $d\lambda$, de die oben gefundenen Werthe haben. Man findet so

$$d\alpha = - g \frac{\text{Sin } ☊ ☾}{\text{Sin } e} . \frac{\text{Cos } \pi \text{ Cos } \beta}{\text{Cos } \delta} - h \text{ Cos } ☊ ☾ . \frac{\text{Sin } \delta \text{ Cos } \alpha}{\text{Cos } \delta}$$

$$d\delta = - g \frac{\text{Sin } ☊ ☾}{\text{Sin } e} . \text{ Sin } \pi \text{ Cos } \beta + h \text{ Cos } ☊ . \text{ Sin } \alpha$$

Allein nach den a. a. O. gegebenen Ausdrücken ist

$$\text{Cos } \pi \text{ Cos } \beta = \text{Cos } e \text{ Cos } \delta + \text{Sin } e \text{ Sin } \delta \text{ Sin } \alpha$$

$$\text{Sin } \pi \text{ Cos } \beta = \text{Sin } e \text{ Cos } \alpha, \text{ also ist}$$

$$d\alpha = - g \text{ Sin } ☊ ☾ \text{ Cotg } e - (h \text{ Cos } \alpha \text{ Cos } ☊ ☾ + g \text{ Sin } \alpha \text{ Sin } ☊ ☾) \text{ Tg } \delta$$

$$d\delta = - g \text{ Sin } ☊ ☾ \text{ Cos } \alpha + h \text{ Cos } ☊ ☾ \text{ Sin } \alpha$$

und die letzten Gleichungen enthalten die Nutation der Rectascension und Declination, oder die Gröfsen dα, dδ, welche man mit ihren Zeichen zu den m i t t l e r n Rectascensionen und Declinationen setzen mufs, um die w a h r e n, oder wie sie auch genannt werden, die s c h e i n b a r e n Rectascensionen und Declinationen zu erhalten. Diese Ausdrücke sind mehrerer Transformationen fähig, von welchen ich nur die zwey merkwürdigsten hier vortragen will.

I. Setzt man

$$Q = g \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Tg} \delta + g \operatorname{Cotg} e \quad \text{und} \quad Q' = - g \operatorname{Cos} \alpha$$
$$q = h \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Tg} \delta \qquad\qquad q' = h \operatorname{Sin} \alpha$$

und sucht man

$$\operatorname{Tg} B = \frac{q}{Q} \quad \text{und} \quad \operatorname{Tg} B' = \frac{q'}{Q'}$$
$$b = - \frac{Q}{\operatorname{Cos} B} \qquad b' = \frac{Q'}{\operatorname{Cos} B'}$$

so ist

$$d\alpha = b \operatorname{Sin} (B + ☊☾)$$
$$d\delta = b' \operatorname{Sin} (B' + ☊☾)$$

sehr einfache Formeln, die besonders dann sehr bequem sind, wenn man die Nutation desselben Sternes für verschiedene Zeiten oft berechnen muſs. Man hat log g = 0.85612

$$\log h = 0.98453 \text{ und } g \operatorname{Cotg} e = 16''.54$$

II. Setzt man aber

$$x = g \sqrt{1 + \left(\frac{h^2}{g^2} - 1\right) \operatorname{Cos}^2 ☊☾}$$

$$\operatorname{Tg} y = \frac{\left(1 - \frac{h}{g}\right) \operatorname{Sin} ☾☊ \operatorname{Cos} ☾☊}{1 - \left(1 - \frac{h}{g}\right) \operatorname{Cos}^2 ☊☾} \text{ und}$$

$$z = - g \operatorname{Cotg} e \operatorname{Sin} ☊☾$$

so hat man

$$d\alpha = - x \operatorname{Tg} \delta \operatorname{Cos} (☊☾ + y - \alpha) + z$$
$$d\delta = - x \operatorname{Sin} (☊☾ + y - \alpha)$$

und diese Ausdrücke sind sehr bequem, um die Nutation in einfache Tafeln zu bringen.

Exempel. Für α Ophiuchus 1818 May 1 ist

$$\alpha = 261^\circ\ 30'\ 35''\ 46$$
$$\delta = 12\ \ 42\ \ 41.\ 06$$

$$☊☾ = 232^\circ\ 9' \text{ also } y = -8^\circ\ 23',\ ☊☾ + y - \alpha = 322^\circ\ 15' = m$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{also } \log x = & 0.9137\,n \;\ldots & 0.9137\,n \\
\log \text{Cos } m = & 9.8980 \quad \log \text{Sin } m = & 9.7869\,n \\
\log \text{Tg } \delta = & 9.3533 & 0.7006 \\
 & 0.1650 & d\delta = +5''0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Zahl} = & -1''.5 \\
z = & +13.0 \\
d\alpha = & 11''.5
\end{array}
$$

wo die n am Ende der Logarithmen anzeigen, dafs diese Logarithmen zu negativen Zahlen gehören.

Für Aldebaran und das Jahr 1800 ist

$$
\begin{array}{llll}
\alpha = 66^\circ 7' & & & \\
\delta = 16^\circ 6' & \text{also ist} & & \\
B = 183^\circ 30' & & \log b = 1.2664 & \\
B' = 108^\circ 14' & & \log b' = 0.9679 &
\end{array}
$$

§. 8.

Eigentlich sind die bisher gegebenen Werthe von $d\lambda$ und de nur die vorzüglichsten Ausdrücke der Nutation der Länge der Sterne und der Schiefe der Ecliptik. Die Theorie zeigt, dafs der vollständige Ausdruck der Nutation auch von der Länge der Sonne und des Mondes abhänge, und dafs dieser Ausdruck eigentlich ist

$$d\lambda = -18''03 \text{ Sin } ☊ ☾ - 1.13 \text{ Sin } 2 ☉ - 0''22 \text{ Sin } 2 ☾$$
$$de = 9.65 \text{ Cos } ☊ ☾ + 0''49 \text{ Cos} 2 ☉ + 0''09 \text{ Cos} 2 ☾ - 0''09 \text{ Cos} 2 ☊ ☾$$

wo ☉ und ☾ die Länge der Sonne und des Mondes bezeichnet. Von diesen Gliedern sind, aufser den oben betrachteten, von dem einfachen Winkel ☊ ☾ abhängigen, blofs diejenigen für die Ausübung noch merkbar, welche von der doppelten Länge der Sonne abhangen. Die Solarnutation in Rectascension und Declination, welche aus den zwey Gliedern

$$d\lambda = -g' \text{ Sin } 2 ☉$$
$$de = h' \text{ Cos } 2 ☉,$$

wo
$$g' = 1.13,$$
$$h' = 0.49 \text{ ist},$$

entsteht, wird man finden, wenn man in den vorhergehenden Ausdrücken von $d\alpha$ und $d\delta$ für g die Gröfse g' Sin ☉, und für

D

h die Gröſse h′, endlich für ☊ ☾ den Winkel 2 ⊙ setzt. Man wird so erhalten

$$R = g' \, \mathrm{Sin}\, e.\ \mathrm{Sin}\,\alpha\ \mathrm{Tg}\,\delta + g' \, \mathrm{Cos}\, e \qquad R' = -g' \, \mathrm{Sin}\, e.\, \mathrm{Cos}\,\alpha$$

$$r = h' \, \mathrm{Cos}\,\alpha\ \mathrm{Tg}\,\delta \qquad r' = h' \, \mathrm{Sin}\,\alpha$$

$$\mathrm{Tg}\, C = \frac{r}{R} \qquad \mathrm{Tg}\, C' = \frac{r'}{R'}$$

$$c = -\frac{R}{\mathrm{Cos}\, C} \qquad c' = \frac{R'}{\mathrm{Cos}\, C'}$$

$$d\alpha = c \, \mathrm{Sin}\, (C + 2 \odot)$$

$$d\delta = c' \, \mathrm{Sin}\, (C' + 2 \odot)$$

So findet man z. B. für α Ophiuchus die Solarnutation

$$d\,\alpha = 9.968 \ \mathrm{Sin}\ (179^\circ + 2 \odot)$$
$$d\,\delta = 9.689 \ \mathrm{Sin}\ (278^\circ + 2 \odot)$$

wo die Coefficienten der Sinus schon Logarithmen sind, und für Aldebaran

$$d\,\alpha = 0.061 \ \mathrm{Sin}\ (183^\circ + 2 \odot)$$
$$d\,\delta = 9.684 \ \mathrm{Sin}\ (112^\circ + 2 \odot)$$

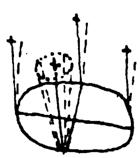
DRITTES KAPITEL.

Aberration.

§. 1.

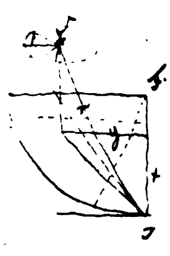
Bradley fand, als er sich mit der Untersuchung der Nutation beschäftigte, noch eine andere Bewegung, die allen Sternen gemeinschaftlich zukömmt, aber nach ganz verschiedenen Gesetzen vor sich zu gehen scheint. Die Bemerkung, daſs diese Bewegungen in eine Periode eingeschlossen sind, die genau der Umlaufszeit der Sonne um die Erde, oder die unserm Jahre gleich ist, muſste auf die Vermuthung führen, daſs diese Bewegung selbst ihre Ursache in jener Bewegung der Sonne oder der Erde habe. Nach vielen mit der gröſsten Genauigkeit angestellten Beobachtungen fand man, daſs folgende Hypothese diese Bewegungen darstelle.

Man nahm an, daſs jeder Stern jährlich einen der Ecliptik parallelen Kreis beschreibe, dessen Mittelpunkt der wahre Ort des Sterns ist, und dessen Peripherie von dem scheinbaren Orte des Sterns, in der Richtung der jährlichen Bewegung der Sonne, und zwar so zurückgelegt werde, daſs die Sonne beständig 90 Grade vor dem Stern vorausgeht. Der Durchmesser dieses Kreises, von der Erde gesehen, miſst einen Winkel von 20″ 25, oder nach den neuesten Untersuchungen von 20″.448.



Um dieser Annahme gemäſs die Veränderungen der Länge und Breite der Gestirne, welche aus dieser Bewegung entstehen, zu bestimmen, sey λ, β, r die Länge, Breite und Entfernung des Gestirns von der Erde, L die Länge der Sonne und R der Halbmesser des der Ecliptik parallelen Kreises. Bestimmt man die Lage des wahren Gestirns, oder des Mittelpunktes jenes Kreises gegen die Erde durch drey rechtwinklichte Coordinaten $x\ y\ z$, von denen x in der Linie der Nachtgleichen, und $x\ y$ in der Ebene der Ecliptik liegt, so hat man

$$x = r \cos\beta \cos\lambda$$
$$y = r \cos\beta \sin\lambda$$
$$z = r \sin\beta$$



Bezeichnet man aber dieselben Größen für den scheinbaren Ort mit x' r' ..., so ist eben so

$$x' = r' \operatorname{Cos} \beta' \operatorname{Cos} \lambda'$$
$$y' = r' \operatorname{Cos} \beta' \operatorname{Sin} \lambda'$$
$$z' = r' \operatorname{Sin} \beta'$$

Da der Kreis der Ecliptik parallel ist, so ist offenbar

$$z = z'$$

Man denke sich nun auf der Ebene des Kreises zwey Halbmesser, von denen der erste parallel mit x, und der andere parallel mit y ist. Ein dritter bilde mit dem ersten einen Winkel, gleich L, und ein vierter endlich stehe senkrecht auf dem dritten, so bezeichnet, nach dem Vorhergehenden, der dritte die Länge der Sonne, und der vierte die scheinbare Länge des Gestirns. Da aber der erste auf den zweyten, so wie der dritte auf den vierten senkrecht steht, so ist auch der Winkel des zweyten mit dem vierten gleich L, also hat man

$$x' = x + R \operatorname{Sin} L$$
$$y' = y - R \operatorname{Cos} L$$

Da aber $\operatorname{Tg} \lambda = \frac{y}{x}$ und $\operatorname{Tg} \beta = \frac{z}{x} \operatorname{Cos} \lambda$ ist, so hat man auch

$$\operatorname{Tg} \lambda = \frac{y' + R \operatorname{Cos} L}{x' - R \operatorname{Sin} L} \quad \text{und} \quad \operatorname{Tg} \beta = \frac{z' \operatorname{Cos} \lambda}{x' - R \operatorname{Sin} L}$$

und die beyden letzten Gleichungen geben, da auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens alle Größen bekannt sind, die wahre Länge und Breite aus der beobachteten scheinbaren Länge und Breite. Man hat nämlich, wenn man für x' y' z' die vorhergehenden Werthe

und $\frac{R}{r} = 20''448$ setzt,

$$\operatorname{Tg} \lambda = \frac{\operatorname{Sin} \lambda' + 20.448 \frac{\operatorname{Cos} L}{\operatorname{Cos} \beta'}}{\operatorname{Cos} \lambda' - 20.448 \frac{\operatorname{Cos} L}{\operatorname{Cos} \beta'}} \text{ und}$$

$$\operatorname{Tg} \beta = \frac{\operatorname{Sin} \beta' \operatorname{Cos} \lambda}{\operatorname{Cos} \beta' \operatorname{Cos} \lambda' - 20.448 \operatorname{Sin} L}$$

oder, da $\lambda' - \lambda$, $\beta' - \beta$ und $20''448$ nur geringe Größen sind, durch eine leichte Veränderung der vorhergehenden Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \lambda - \lambda' &= 20''.448 \frac{\operatorname{Cos}(L - \lambda')}{\operatorname{Cos} \beta'} \\ \beta - \beta' &= 20.\ 448 \operatorname{Sin} L - \lambda') \operatorname{Sin} \beta' \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

und diese beyden Gleichungen geben die gesuchte Veränderung der Sterne in Länge und Breite. Man hat gefunden, daſs sie mit den Beobachtungen sehr genau übereinstimmen.

§. 2.

Obschon sich aber diese Annahme der gemeinschaftlichen Bewegung jedes Gestirns in einem Kreise den Beobachtungen genau anschlieſst, so ist sie doch an sich selbst zu unwahrscheinlich, um ohne weitere Prüfung zugelassen zu werden. Die gemeinschaftliche Gröſse aller dieser Kreise führt auf die Vermuthung, daſs die Ursache dieser Bewegungen auſser den Gestirnen liege, und die der Ecliptik parallele Lage dieser Kreise, so wie die obenangezeigte Periode dieser Bewegung veranlaſst uns, den Grund derselben in der Bewegung der Sonne oder der Erde aufzusuchen.

Der Beobachter auf der Erde, diese als ruhend vorausgesetzt, wird, ein Gestirn, welches wir ebenfalls als ruhend annehmen wollen, zu betrachten, seinem Fernrohre offenbar die Richtung geben müssen, welche der von den Gestirnen ausgehende Strahl des Lichtes hat, damit dieser Strahl, ohne von den Wänden des Rohres aufgehalten zu werden, mit diesem parallel und frey in das Auge des Beobachters kommen könne. Dasselbe würde ohne Zweifel auch selbst dann der Fall seyn, wenn die Erde sich bewegte, aber die Geschwindigkeit l des Lichtes gegen die Geschwindigkeit t der Erde unendlich groſs wäre.

Wenn man aber das Verhältniſs $\frac{t}{l} = a$, ohne sich merklich von der Wahrheit zu entfernen, nicht für Null ansehen kann, so wird auch der Unterschied beyder Fälle, der der ruhenden und der der bewegten Erde, nicht mehr vernachlässigt werden können, oder man wird dem Rohre in dem zweyten Falle eine von der Richtung des Lichtstrahles verschiedene Richtung geben müssen.

Es bewege sich also eine Reihe von Lichtpunkten in der Richtung ECA (Fig. 3) mit der Geschwindigkeit l gegen die Ebene AB, in welcher sich von B gen A ein Rohr mit der Geschwindigkeit t sich selbst parallel bewegt. Man suche die Richtung des Rohrs, welches jene Lichtpunkte ungehindert durchläſst.

Zu diesem Zwecke nehme man AB zu AC, wie t zu l. Statt der Bewegung der Lichtpunkte in der Richtung CA, verbunden mit der Bewegung des Rohrs in der Richtung BA, kann man auch annehmen, daſs sich diese Lichtpunkte in der Richtung CB, und zwar mit der Geschwindigkeit, welche durch diese Linie CB ausgedrückt wird, bewegen, während das Mittel C, aus welchem diese Punkte kommen, von C nach D parallel mit der Richtung BA = CD sich bewegt. Diese Annahme ändert offenbar nichts in der Art, wie diese Punkte von C auf die Oberfläche BA kommen. Da aber eben durch diese Annahme das Rohr dieselbe Geschwindigkeit erhält, die das Mittel C hat, so kann man das Rohr als in diesem Mittel enthalten, betrachten, d. h. man kann die Bewegung des Mittels und des Rohres zugleich Null setzen, wenn man dafür den Lichtpuukten die Richtung und die Geschwindigkeit CB gibt, wodurch demnach der Fall des bewegten Rohres auf den einfachern des ruhenden Rohres zurückgeführt wird.

Ist also, um diefs auf unsern Gegenstand anzuwenden, EA die Richtung des Strahls, und BA die Richtung der sich bewegenden Erde, so nehme man CD : CA = t : 1 oder CD = a. CA, und CD mit BA parallel, so ist AD oder BC die gesuchte Lage des Rohres, also auch E der wahre, und E′ der scheinbare Ort des Gestirns. Die Differenz der beyden Orte, oder der Winkel EAE′ heifst die A b e r r a t i o n, welche demnach immer in der Ebene durch die Tangente der Erdbahn und durch die wahre Entfernung des Gestirns Statt hat.

Es sey nun wieder L die Länge der Sonne, λ β r die wahre Länge, Breite und Entfernung des Gestirns von der Erde, bestimmt man die Lage des wahren Ortes der Gestirnes gegen den Mittelpunkt der Erde durch drey rechtwinklichte Coordinaten, x y z, wo x in der Linie liegt, welche die Mittelpunkte der Sonne und Erde verbindet, und wo x y in der Ebene der Ecliptik liegt, so ist

$$x = r \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} (\lambda - L)$$

$$y = r \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Sin} (\lambda - L)$$

$$z = r \operatorname{Sin} \beta$$

Bezeichnet man, wie oben, dieselben Gröfsen für den scheinbaren Ort des Gestirns durch x' r' β' . . . so ist eben so

$$x' = r' \operatorname{Cos} \beta' \operatorname{Cos} (\lambda' - L)$$

$$y' = r' \operatorname{Cos} \beta' . \operatorname{Sin} (\lambda' - L)$$

$$z' = r' \operatorname{Sin} \beta'$$

Errichtet man aber nach dem vorhin gesagten, an dem wahren Orte des Gestirnes in der Ebene durch diesen wahren Ort und durch die Tangente der Erdbahn eine gerade Linie,

$$b = \frac{t}{1} . r,$$

parallel mit dieser Tangente, so wird der Endpunkt dieser geraden Linie b den scheinbaren Ort des Gestirns bezeichnen. Da aber die Tangente des Kreises auf dem Halbmesser desselben senkrecht steht, so ist die Tangente der Erdbahn auf der Axe der x senkrecht, d. h. diese Tangente, also auch die Linie b, ist mit der Axe der y parallel, also ist

$$y' = y - b$$

Die beyden andern Coordinaten x' z' sind offenbar dieselben mit x z. Es ist daher

$$\text{Tg}\ \alpha = \frac{y}{x} = \frac{y' + b}{x'} \text{ und}$$

$$\text{Tg}\ \beta = \frac{z}{x} \text{Cos}\ (\lambda - L) = \frac{z'}{x'} \text{Cos}\ (\lambda - L)$$

oder es ist

$$\text{Tg}\ (\lambda - L) = \text{Tg}\ (\lambda' - L) + \frac{a}{\text{Cos}\ \beta' \text{Cos}\ (\lambda' - L)}$$

$$\text{Tg}\ \beta = \text{Tg}\ \beta' \frac{\text{Cos}\ (\lambda - L)}{\text{Cos}\ (\lambda' - L)}$$

und diese Gleichungen geben die gesuchte wahre Länge und Breite genau. Aus ihnen wird man, nach einigen leichten Verwandlungen, folgende abgekürzte Ausdrücke ableiten, in denen $d\lambda = \lambda' - \lambda$ und $d\beta = \beta' - \beta$ ist,

$$\left.\begin{aligned} d\lambda &= -a. \frac{\text{Cos}\ (L - \lambda')}{\text{Cos}\ \beta'} \\ d\beta &= -a\ \text{Sin}\ (L - \lambda')\ \text{Sin}\ \beta' \end{aligned}\right\} \text{II.}$$

und diese zwey Gleichungen sind genau dieselben mit jenen (I), welche wir bereits oben gefunden haben, bis auf die Gröfse

$$a = \frac{t}{l},$$

welche wir noch zu bestimmen haben. Zu diesem Zwecke bemerke man, dafs man aus andern Beobachtungen, die erst unten erklärt werden, gefunden hat, dafs das Licht, um die Entfernung der Sonne von der Erde zurückzulegen, $0^{St.} 8' 17'' 91 = 497''.91$ brauche. Die Umlaufszeit der Erde um die Sonne aber, oder die Länge des Jahres ist 365.2563835 Tage, daher legt die Erde in der Zeit $497''91$ einen auf den Halbmesser gleich 1 gebrachten Bogen von

$$\frac{(360)\ (497.91)}{24\ (365.2563835)} \cdot \frac{\pi}{648000} = 0.000\ 099\ 1372$$

zurück, wo $\pi = 3.1415926\ldots$ ist.

Man hat daher

$$a = \frac{t}{l} = \frac{0.000\,099\,1372}{1}$$

oder in Bogensecunden ausgedrückt

$$a = \frac{t}{l \operatorname{Sin} 1''} = 20''.448$$

und so ist also auch die Gröfse a gleich den oben gefundenen Factoren der Gleichungen (I).

Diese Identität beyder Ausdrücke I., II. d. h. die vollkommene Uebereinstimmung der Theorie, der angenommenen Hypothese mit den Beobachtungen, gibt eines der schönsten Beyspiele, wie man zu verfahren hat, um die Gesetze, nach welchen beobachtete Phänomene in der Natur vor sich gehen, aufzufinden; so wie sie zugleich einen Beweis für die Bewegung der Erde um die Sonne gibt, da ohne dieser Bewegung der Erde jene Theorie nicht Statt haben, und doch keine andere genügende Erklärung der durch die Beobachtungen gegebenen Aberration gefunden werden kann.

§. 3.

Diese Aenderungen der Länge und Breite werden wieder Aenderungen in der Rectascension und Declination nach sich ziehen, die wir nun aufsuchen wollen. Die Gleichung für Tg α des Cap. I. §. 5 gibt, wenn man sie in Beziehung auf $\alpha\ \lambda\ \beta$ differentiirt, und für $d\lambda$, $d\beta$ ihre Werthe aus den Gleichungen I. substituirt

$$d\alpha = -a\,\frac{\operatorname{Cos} e \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos}(L-\lambda)}{\operatorname{Cos}\lambda \operatorname{Cos}\delta}$$

$$+ a \operatorname{Sin} e \operatorname{Sin}\beta \left(\frac{\operatorname{Sin}\lambda \operatorname{Cos}(L-\lambda)}{\operatorname{Cos}^2\delta} + \frac{\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}(L-\lambda)}{\operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}\beta}\right)$$

Löst man die Sinus und Cosinus von $(L-\lambda)$ auf, so wird

$$d\alpha = -a\,\frac{\operatorname{Cos} e \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos} L}{\operatorname{Cos}\delta}$$

$$-\frac{a \operatorname{Sin} L}{\operatorname{Cos}\delta}\left(\operatorname{Cos} e \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Tg}\lambda - \frac{\operatorname{Sin} e \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Cos}\delta}\right)$$

und wenn man für Tg λ und Sin β ihre Werthe in $\alpha\ \delta$ aus den Gleichungen Cap. I. §. 5 substituirt

$$d\alpha = -a\,\frac{\operatorname{Cos} e \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos} L}{\operatorname{Cos}\delta} - a\,\frac{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin} L}{\operatorname{Cos}\delta} \quad \ldots \text{(III)}$$

Behandelt man eben so die Gleichung für Sin δ des a. O., so hat man

$$d\delta = -a\,\frac{\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,e}{\mathrm{Cos}\,\delta}\,\mathrm{Sin}\,(L-\lambda)$$

$$+a\,\frac{\mathrm{Sin}^2\beta\,\mathrm{Sin}\,\lambda\,\mathrm{Sin}\,e}{\mathrm{Cos}\,\delta}\,\mathrm{Sin}\,(L-\lambda) - a\,\frac{\mathrm{Cos}\,\lambda\,\mathrm{Sin}\,e}{\mathrm{Cos}\,\delta}\,\mathrm{Cos}\,(L-\lambda)$$

Löst man die Sinus und Cosinus von $(L-\lambda)$ auf, so erhält man für $d\delta$ in derselben Ordnung sechs Glieder; davon ist die Summe des ersten, dritten und sechsten

$$-a\,\frac{\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\lambda\,\mathrm{Sin}\,L}{\mathrm{Cos}\,\delta}\,(\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,e + \mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,\lambda\,\mathrm{Sin}\,e) =$$
$$-a\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,L$$

und die Summe der drey übrigen

$$a\,\frac{\mathrm{Cos}\,L}{\mathrm{Cos}\,\delta}\Big(\mathrm{Cos}\,e\,\mathrm{Sin}\,\lambda\,\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta - \mathrm{Sin}\,e\,(\mathrm{Sin}^2\beta\,\mathrm{Sin}^2\lambda + \mathrm{Cos}^2\lambda)\Big)$$

das heifst, wenn man in diesem Ausdrucke die Werthe von Tg λ, Sin β, und Cos β Cos λ aus den Gleichungen des a. O. substituirt

$$a\,\mathrm{Cos}\,L\,(\mathrm{Cos}\,e\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\delta - \mathrm{Sin}\,e\,\mathrm{Cos}\,\delta)$$

also ist, wenn man beyde Summen addirt,

$$\left.\begin{array}{l} d\delta = -a\,\mathrm{Sin}\,e\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,L - \\ a\,\mathrm{Sin}\,\delta\,(\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,L - \mathrm{Cos}\,e\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,L) \end{array}\right\} \ldots (\mathrm{IV})$$

und die Gleichungen II., III., IV. geben die Aberration der Länge, Breite, Rectascension und Declination, und die so erhaltenen Werthe von $d\lambda$, $d\beta$, $d\alpha$, $d\delta$ werden mit ihren Zeichen zu den wahren (oder mittlern) Gröfsen geschlagen, um die scheinbaren, von der Aberration afficirten, Orte der Gestirne zu erhalten.

I. Man hat den beyden letzten Gleichungen verschiedene Gestalten gegeben, um sie znr Rechnung bequemer zu machen. Folgende Veränderung ist für sich klar

$$d\alpha = -\frac{a}{2}\,\frac{(1+\mathrm{Cos}\,e)}{\mathrm{Cos}\,\delta}\,\mathrm{Cos}\,(\alpha-L) + \frac{a}{2}\,\frac{(1-\mathrm{Cos}\,e)}{\mathrm{Cos}\,\delta}\,\mathrm{Cos}\,(\alpha+L)$$

$$d\delta = \frac{a}{2}\,(1+\mathrm{Cos}\,e)\,\mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-L) - \frac{a}{2}\,(1-\mathrm{Cos}\,e)\,\mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,(\alpha+L)$$

$$\mp\frac{a}{2}\,\mathrm{Sin}\,e\,\mathrm{Cos}\,(L-\delta) \mp \frac{a}{2}\,\mathrm{Sin}\,e\,\mathrm{Cos}\,(L+\delta)$$

das untere Zeichen für südliche Declinationen.

In diesen Ausdrücken kann man die Gröfse e, da sie sich nur sehr langsam ändert, für eine gegebene Periode als constant annehmen. Man sieht dann leicht, dafs sich $d\alpha$ und $d\delta$ in drey Tafeln bringen lassen, wenn man die Factoren

$$\frac{1}{\operatorname{Cos}\delta} \text{ und } \operatorname{Sin}\delta$$

eingens anbringt.

II. Man kann aber auch diesen Gleichungen eine mit jenen analoge Form geben, die wir bereits für die Nutation entwickelt haben. Zu diesem Zwecke darf man nur bemerken, dafs man der Gleichung

$$A\,(a \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} c + \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c)$$

immer die Gestalt

$$x \operatorname{Cos}(b - c + y)$$

geben kann, wenn man die Gröfsen x, y gehörig bestimmt. Löst man nämlich den letzten Ausdruck auf, so hat man

$$(x \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} y - x \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} y) \operatorname{Cos} c + (x \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} y + x \operatorname{Cos} b \operatorname{Sin} y). \operatorname{Sin} c$$
$$= A a \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} c + A \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c$$

und wenn man die Factoren von Cos c und Sin c auf beyden Seiten gleich setzt, so ist

$$x\,(\operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} y - \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} y) = A a \operatorname{Cos} b$$

$$x\,(\operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} y + \operatorname{Cos} b \operatorname{Sin} y) = A \operatorname{Sin} b$$

Multiplizirt man aber die erste dieser Gleichungen durch Sin b, und die zweyte durch — Cos b, so gibt ihre Summe

$$x \operatorname{Sin} y = (1 - a)\, A \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} b$$

und multiplizirt man die erste durch Cos b, und die zweyte durch Sin b, so gibt ihre Summe

$$x \operatorname{Cos} y = A - (1 - a)\, A \operatorname{Cos}^2 b$$

woraus man sofort findet

$$\operatorname{Tg} y = \frac{(1 - a) \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} b}{1 - (1 - a) \operatorname{Cos}^2 b}$$

$$x = A.\ \sqrt{1 - (1 - a^2). \operatorname{Cos}^2 b}$$

Wendet man dieses auf die vorhergehenden Gleichungen an, so ist für die erste $c = \alpha$, und für die zweyte $c = 90 + \alpha$, und für beyde $a = \operatorname{Cos} e$, $b = L$, also ist

$$\mathrm{Tg}\, y = \frac{\mathrm{Sin}^2 \frac{e}{2}\, \mathrm{Sin}\, 2\, L}{1 - 2\, \mathrm{Sin}\, \frac{e}{2} \mathrm{Cos}^2 L}$$

$$x = \frac{t}{l} \sqrt{1 - \mathrm{Sin}^2\, e\, \mathrm{Cos}^2 L}$$

also auch

$$d\alpha = -\frac{x}{\mathrm{Cos}\,\delta}\, \mathrm{Cos}\,(L + y - \alpha)$$

$$d\delta = -x\, \mathrm{Sin}\,\delta\, \mathrm{Sin}\,(L + y - \alpha) - \frac{t\, \mathrm{Sin}\, e}{2\, l}\, \mathrm{Cos}\,(L - \delta)$$
$$- \frac{t\, \mathrm{Sin}\, e}{2\, l}\, \mathrm{Cos}\,(L + \delta)$$

und dadurch ist $d\alpha$, $d\delta$ auf zwey Tafeln gebracht, deren die erste das Argument L und die Größsen x, y und die zweyte die zu wiederholenden Argumente $L + \delta$ und $L - \delta$ und die Größsen

$$-\frac{t}{2\, l}\, \mathrm{Sin}\, e\, \mathrm{Cos}\,(L - \delta),\ -\frac{t}{2\, l}\, \mathrm{Sin}\, e\, \mathrm{Cos}\,(L + \delta)$$

enthält. Südliche Declinationen werden als negativ angenommen, also wird ihre absolute Gröſse durch positive Aberration vermindert.

III. Setzt man endlich $f = 20'' 448$, so sey, wie Cap. II. §. 7.,

$$P = f\, \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\delta} \qquad P' = f\, \mathrm{Cos}\,\alpha\, \mathrm{Sin}\,\delta$$

$$p = f\, \mathrm{Cos}\, e.\, \frac{\mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\delta} \qquad p' = -f\, \mathrm{Cos}\, e.\ \mathrm{Sin}\,\alpha\, \mathrm{Sin}\,\delta + f\, \mathrm{Sin}\, e.\ \mathrm{Cos}\,\delta$$

und $\mathrm{Tg}\, A = \frac{p}{P}$ $\qquad$ $\mathrm{Tg}\, A' = \frac{p}{P'}$

$$a = -\frac{P}{\mathrm{Cos}\, A} \qquad a' = -\frac{P'}{\mathrm{Cos}\, A'}$$

so hat man

$$d\alpha = a\, \mathrm{Sin}\,(A + L)$$

$$d\delta = a'\, \mathrm{Sin}\,(A' + L)$$

§. 4.

Der Factor $\frac{1}{\operatorname{Cos}\beta'}$ in der ersten der Gleichungen II. redusirt die eigentliche Veränderung der Länge

$$-\frac{t}{l}\operatorname{Cos}(L-\lambda')$$

auf die Ecliptik. Wir wollen diese nicht reduzirte Gröſse mit Y, und die darauf senkrechte, oder

$$-\frac{t}{l}\operatorname{Sin}(L-\lambda')\operatorname{Sin}\beta'$$

mit X bezeichnen. Wegen den geringen Werthen dieser Grössen X Y kann man ihre Ausdrücke im Raume für gerade Linien annehmen, und dann stellen sie die rechtwinklichten Coordinaten der Curve vor, in welcher alle scheinbaren Orte des Gestirnes liegen. Es ist also

$$X = -\frac{t}{l}\operatorname{Sin}(L-\lambda')\operatorname{Sin}\beta$$

$$Y = -\frac{t}{l}\sqrt{1-\operatorname{Sin}^2(L-\lambda')}$$

und wenn man Sin $(L-\lambda')$ eliminirt,

$$Y = \frac{t}{l}\sqrt{1-\frac{l^2}{t^2}\cdot\frac{X^2}{\operatorname{Sin}^2\beta'}}$$

die Gleichung der gesuchten Curve, die also eine Ellipse ist, deren halbe Axen

$$\frac{t}{l} \text{ und } \frac{t}{l}\operatorname{Sin}\beta'$$

sind. Im Pole der Ecliptik wird diese Ellipse zum Kreise, und in der Ecliptik selbst zur geraden Linie. Diese Ellipse ist die Projection auf die Sphäre des Himmels von dem der Ecliptik parallelen Kreis, welchen wir oben betrachtet haben.

Ex. Den 1. May 1808 ist für α Ophiuchus, wenn man $\alpha\ \delta$ aus dem Ex. Cap. II. §. 7, und die Länge der Sonne $L = 40°52'$ nimmt,

$$y = 2°\ 28',\quad L + y - \alpha = 141°\ 49' = p$$

$$
\begin{array}{lll}
\log x = & 1.2859\,n \;\ldots\ldots & 1.2859\,n \\
\log \operatorname{Cos} p = & 9.8954\,n \quad \log \operatorname{Sin} p = & 9.7911 \\
\log \operatorname{Comp} \operatorname{Cos} \delta = & \underline{0.0108} \quad \log \operatorname{Sin} \delta = & \underline{9.3425} \\
& 1.1921 & 0.4195 = \log -2''6 \\
& & -2.4 \\
d\alpha = & 15''.6 & \underline{-3.6} \\
& & d\delta = -8''6
\end{array}
$$

Ex. II. **Aldebaran** gibt für 1800

$$\alpha = 66^\circ\ 7'$$
$$\delta = 16^\circ\ 6'$$

also

$$d\alpha = 1{,}3181 \operatorname{Sin}(202^\circ\ 6' + L)$$
$$\delta = 0.5793 \operatorname{Sin}(233^\circ\ 12' + L)$$

wo die Factoren schon Logarithmen sind.

§. 5

Die Aberration lehrte uns, wie wir im Vorhergehenden gesehen haben, dafs nicht, wie es scheint, die Sonne sich um die Erde, sondern umgekehrt, dafs die Erde sich um die Sonne bewegt. Der gröfsern Einfachheit wegen haben wir angenommen, dafs diese Bewegung der Erde in einem Kreise vor sich gehe, dessen Mittelpunkt der der Sonne ist. Allein wir werden unten sehen, dafs diese Bahn der Erde eine Ellipse ist, in deren einem Brennpunkte der Mittelpunkt der Sonne liegt, und deren Excentricität $\varepsilon = 0.01679$ Theile der halben grofsen Axe ist. Es sey r die Entfernung der Sonne von der Erde, und ω der Winkel von r mit der grofsen Axe der Ellipse, welcher Winkel von dem Endpunkte der grofsen Axe gezählt werden soll, der der Sonne am nächsten ist, so ist die Gleichung der Ellipse, deren halbe grofse Axe die Einheit ist

$$r = \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon \operatorname{Cos} \omega}$$

und man findet leicht, dafs die wahre Bewegung der Erde in $0^h\ 8'\ 17''\ 91$ gleich

$$r d\omega = 20.448. \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{r} \text{ oder}$$

$$rd\omega = 20.\,448.\,\frac{(1 + \varepsilon \,\mathrm{Cos}\, \omega)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \text{ ist.}$$

Vernachlässigt man daher die höheren Potenzen der gegen die Einheit sehr kleinen Gröfse ε, so wird man in den vorhergehenden Ausdrücken, die eine kreisförmige Bahn der Erde voraussetzen, nur $20.\,448\ (1 + \varepsilon \,\mathrm{Cos}\, \omega)$ für 20.448 setzen dürfen, um auf die Excentricität der Erdbahn Rücksicht zu nehmen. Ferner setzt die vorhergehende Methode der Bestimmung der Aberration in der kreisförmigen Erdbahn voraus, dafs der Winkel der Tangente der Erdbahn mit r gleich einem rechten Winkel sey. Ist dieser Winkel in der Ellipse gleich φ, so hat man bekanntlich

$$\mathrm{Tg}\,(90 - \varphi) = \frac{dr}{rd\omega},$$

also da $90 - \varphi$ nur sehr klein ist,

$$\varphi = 90 - \frac{dr}{rd\omega}$$

Differentiirt man aber die oben gegebene Gleichung der Ellipse, so ist

$$\frac{dr}{rd\omega} = \varepsilon \,\mathrm{Sin}\, \omega$$

woraus folgt, dafs man in den oben gegebenen Ausdrücken für die kreisförmige Erdbahn noch $(L - \varepsilon \,\mathrm{Sin}\, \omega)$ für L setzen müsse, wenn man auf die Excentricität der Erdbahn Rücksicht nehmen will. Ist aber π die Länge des Endpunktes der grofsen Axe, von welchem die Winkel ω gezählt werden, so ist $\omega = L - \pi$, und da für dieses Jahrhundert $\pi = 279^\circ\, 30'$ sehr nahe constant ist, so wird man, um die vollständigen Werthe von $d\lambda$, $d\beta$, $d\alpha$, $d\delta$ zu erhalten, zu den in den Gleichungen II., III., IV gegebenen Werthen dieser Gröfsen noch hinzusetzen

$$d\lambda' = -\frac{20.448\,\varepsilon}{\mathrm{Cos}\,\beta}\,\mathrm{Cos}\,(\pi - \lambda)$$

$$d\beta' = -\ 20.448\,\varepsilon\ \mathrm{Sin}\,\beta\ \mathrm{Sin}\,(\pi - \lambda)$$

$$d\alpha' = -\frac{20.448\,\varepsilon}{\mathrm{Cos}\,\delta}\,(\mathrm{Cos}\, e\ \mathrm{Cos}\,\alpha\ \mathrm{Cos}\,\pi + \mathrm{Sin}\,\alpha\ \mathrm{Sin}\,\pi)$$

$$d\delta' = -\ 20.448\ \varepsilon\ \mathrm{Sin}\, e\ \mathrm{Cos}\,\delta\ \mathrm{Cos}\,\pi$$
$$-\ 20.448\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,\delta\,(\mathrm{Cos}\,\alpha\ \mathrm{Sin}\,\pi - \mathrm{Cos}\, e\ \mathrm{Sin}\,\alpha\ \mathrm{Cos}\,\pi)$$

wo die vollständige Aberration der Länge, Breite... $d\lambda + d\lambda'$, $d\beta + d\beta'$... ist.

Setzt man endlich $\pi = 279^\circ\, 30'$, so ist

$$d\alpha' = 0''33 \,\text{Sin}\,\alpha - 0''05 \,\text{Cos}\,\alpha = \frac{0.33}{\text{Cos}\,\delta}(\text{Sin}\,\alpha - \text{Tg}\,8^\circ\,43' \,\text{Cos}\,\alpha)$$

oder

$$d\alpha' = \frac{0''.33}{\text{Cos}\,\delta} \,\text{Sin}\,(\alpha - 8^\circ\,43')$$

und eben so

$$d\delta' = -\,0''02 \,\text{Cos}\,\delta + 0''33 \,\text{Cos}\,(\alpha - 8^\circ\,43')$$

I. Setzt man in den gefundenen Ausdrücken für die Aberration der Länge, die Länge des Sterns gleich der Länge der Sonne und die Breite gleich Null, so erhält man die Aberration der Länge der Sonne, die also ist

$$dL = -\,20''.448 - 20.448.\, \varepsilon \,\text{Cos}\,(\pi - L) =$$
$$-\,20''.448 - 20.448\, \varepsilon \,\text{Cos}\,\omega$$

§. 6.

Die tägliche Bewegung der Erde um ihre Axe wird offenbar eine ähnliche Aberration des Lichtes zur Folge haben, wie die oben betrachtete Bewegung der Erde um die Sonne, aber die erste wird viel geringer seyn, weil die Bewegung eines Punktes des Erdäquators, die von der Rotation der Erde entspringt, viel kleiner ist, als jene, welche aus der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne folgt.

Heißt man s den Stundenwinkel des Gestirns und δ die Declination, so wie r die Entfernung desselben von der Erde, so ist, wenn man in den vorhergehenden Gleichungen α in s, und β in δ verwandelt,

$$\text{Tg}\,s = \frac{y}{x} = \frac{y' + b'}{x'} = \text{Tg}\,s' + \frac{b'}{r\,\text{Cos}\,\delta'\,\text{Cos}\,s'}$$

und

$$\text{Tg}\,\delta = \frac{z}{x}\,\text{Cos}\,s = \frac{z'}{x'}\,\text{Cos}\,s = \frac{\text{Tg}\,\delta'\,\text{Cos}\,s}{\text{Cos}\,s'}$$

wo x und x' in der Ebene des Meridians, und xy, x'y' in einer der Ebene des Aequators parallelen Ebene liegen. Daraus folgt abkürzend

$$s' - s = -\,\frac{b'}{r}.\,\frac{\text{Cos}\,s'}{\text{Cos}\,\delta'}$$

$$\delta' - \delta = +\,\frac{b'}{r}.\,\text{Sin}\,s'\,\text{Sin}\,\delta'$$

Um die Gröfse b' zu bestimmen, sey H der Halbmesser der Erdbahn, und h der des Erdparallels, in welchem sich der Beobachter befindet, so legt die Erde in einem Tage durch ihre jährliche Bewegung den Raum

$$M = \frac{2 \pi H}{365.25638}$$

und durch ihre tägliche Bewegung den Raum

$$m = 2 \pi . h$$

zurück, also ist, wenn T die Geschwindigkeit eines Punktes des Parallelkreises in der täglichen Bewegung, und l die des Lichtes bezeichnet,

$$\frac{b'}{r} = \frac{T}{l} = \frac{m}{M} . 20.448$$

Ist aber φ die Polhöhe des Beobachtungsortes, und die aus dem Mittelpunkte der Sonne beobachtete Gröfse des Halbmessers der Erde, nach den Beobachtungen, gleich $8''7$, so ist

$$h = 8''7 . H . \text{Sin } 1'' \text{ Cos } \varphi$$

also

$$\frac{b'}{r} = (365.25638)(20.448)(8\ 7) \text{ Sin } 1'' \text{Cos } \varphi = 0''31 \text{ Cos } \varphi$$

Heifst man endlich α die Rectascension des Gestirns, und A die des Zeniths, so ist $s = \alpha - A$ also

$$s' - s = \alpha' - \alpha = d\alpha \quad \text{und } \delta' - \delta = d\delta$$

und die vorhergehenden Ausdrücke gehen in folgende über

$$d\alpha = -0''31 \frac{\text{Cos }(A - \alpha) \text{ Cos } \varphi}{\text{Cos } \delta}$$

$$d\delta = -0''.31 \text{ Sin }(A - \alpha) \text{ Sin } \delta \text{ Cos } \varphi$$

Für den Polarstern ist $\delta = 88° \ 14'$, also für $\varphi = 45°$, wenn der Stern im Meridian ist,

$$d\alpha = -7''15$$

§. 7.

Bisher haben wir das Gestirn als ruhend vorausgesetzt. Es würde nicht schwer seyn, die vorhergehenden Betrachtungen auch auf bewegliche Gestirne (Planeten und Cometen) auszudehnen, da aber die hier zu entwickelnden Ausdrücke sehr umständlich werden, so wird es für die Ausübung bequemer seyn, für diesen Fall einen andern Weg einzuschlagen.

Diesem gemäfs sey t und t′ die Zeit, in welchem der Lichtstrahl von dem Gestirne in das Objectivglas C, und in das Ocularglas A des beweglichen Fernrohres CB, DA kömmt. Sey ferner E der Ort des Gestirns zur Zeit T, in welcher der Lichtstrahl von ihm ausging, und e der Ort des Gestirns zur Zeit t′, so wie b der Ort des Ocularglases des Rohres bc zur Zeit T.

Daraus folgt:

1. bE ist der wahre Ort des Gestirns zur Zeit T.

2. A ε ist der wahre Ort des Gestirns zur Zeit t oder t′, da die Differenz der Zeiten t′ — t unendlich klein ist.

3. DA oder CB ist der scheinbare Ort des Gestirns zur Zeit t, und

4. CA ist der scheinbare Ort zur Zeit t von der Aberration der unbeweglichen Gestirne, die wir bisher betrachtet haben, befreyt.

Wenn wir die Bewegung des Lichtes gleichförmig annehmen, so verhalten sich, da E, C, A in einer geraden Linie liegen, die Linien EC und CA, wie die Zeiten, die das Licht braucht, diese Linien EC, CA zu durchlaufen, das heifst, es ist

$$EC : CA = t - T : t' - t.$$

Nehmen wir eben so die Bewegung der Erde in der Tangente Ab ihrer Bahn während der immer sehr kleinen Zeit t—T, als gleichförmig und geradlinicht an, so werden auch die Punkte c, C, D in einer geraden Linie liegen, und man wird wieder haben

$$cC : CD = t - T : t' - t.$$

Daraus folgt

$$\frac{EC}{cC} = \frac{CA}{CD}$$

Da endlich der von den eben genannten Seiten eingeschlossene Winkel ECc = ACD ist, so sind die Dreyecke ECc, ACD ähnlich, oder es ist der Winkel cEC gleich dem Winkel CAD, d. h. es ist AD oder BC mit Ecb parallel, oder mit andern Worten, der scheinbare Ort (N. 3) zur Zeit t ist gleich dem wahren Orte (N. 1) zur Zeit T

Daraus entspringt folgende Methode, die Aberration der beweglichen Gestirne zu bestimmen.

Ist l die beobachtete oder die scheinbare Lage des Gestirns für die Zeit t der Beobachtung, und ist $t - T = \Theta$ die Zeit, in welcher das Licht die Entfernung des Gestirns von der Erde zurücklegt, so ist zugleich l die wahre, von der totalen Aberration des Planeten befreyte, Länge für die Zeit $t - \Theta = T$, und es ist, wie es aus der Natur dieses Beweises klar ist, gleich viel, ob l die Länge, Breite, Rectascension oder Declination des Gestirns bedeutet: immer ist der beobachtete Ort l für die Zeit t gleich dem wahren Orte für die Zeit $t - \Theta$.

Unsere Sonnentafeln geben, wie wir weiter unten sehen werden, unmittelbar nur diejenigen Längen der Erde an, welche die Aberration der Erde, die von ihrer eigenen Bewegung um die Sonne herrührt, noch in sich enthalten. Die Planetentafeln aber enthalten die von der Aberration befreyten Orte dieser Gestirne. Diese verschiedene Einrichtung der Tafeln mufs man berücksichtigen, wenn man Beobachtungen der Planeten mit denen der Sonne vergleicht. Man kann diefs auf zwey verschiedene Arten thun.

Bezeichnet nämlieh m'' die tägliche Bewegung des Planeten in Länge, Breite u. s. w. und ist Δ die Entfernung des Planeten von der Erde, so ist

$$1 : \Delta = 497''.9 : \Theta$$

und

$$86400 : \Theta = m : \omega$$

oder die Aberration der Länge, Breite u. f. in Secunden ausgedrückt ist

$$\omega = \frac{497.9}{86400} . m \Delta = 0.00576 \; m \Delta$$

Für die Erde ist im Mittel $\Delta = 1$, $m = 3548''.3$, also

$$\omega = 20'' 44$$

wie zuvor.

Ist also t die Zeit der Beobachtung,

l die beobachtete Länge, Rectasension etc. des Planeten,

L die tabellarische (von der Aberration noch nicht befreyte Länge der Erde für die Zeit t

λ die tabellarische Länge der Erde für die Zeit $t - \Theta$, so mufs man folgende wahre Längen des Planeten und der Erde mit einander vergleichen:

entweder l und $\lambda + 20''44$ für die Zeit $t - 497.9\ \triangle$

oder auch $l \pm 0.00576\ m\ \triangle$ und $L + 20.44$ für die Zeit t.

Für wachsende Längen, Breiten etc. ist die wahre Länge, Breite etc. gröfser, als die scheinbare, und umgekehrt für abnehmende ist die wahre kleiner.

VIERTES KAPITEL.

Refraction.

§. 1.

Die Erfahrung, daſs die Lichtstrahlen, wenn sie schief aus einem Mittel in ein anderes dichteres treten, gegen das Einfallsloth hingebrochen werden, führte auf die Vermuthung, daſs auch die von den Körpern des Himmels zu uns kommenden Lichtstrahlen, wenn sie aus den Räumen, welche jene Körper von uns trennen, in die Atmosphäre der Erde treten, ähnlichen Brechungen unterworfen sind, wodurch wir diese Gestirne in einer gröſsern Höhe erblicken, als wir sie ohne dieser Brechung sehen würden. Die Beobachtungen haben die Richtigkeit jener Voraussetzung bestätiget.

Diese Erscheinung der Rechnung zu unterwerfen, nimmt man, wie es sehr wahrscheinlich ist, an, daſs die Atmosphäre aus unendlich dünnen concentrischen Kugelschalen besteht, deren Mittelpunkt der der Erde ist, und deren Dichtigkeit mit ihrer Entfernung von der Erde nach irgend einem Gesetze abnimmt.

Die Luft ist, wie alle andern Körper schwer, und der Druck der Atmosphäre hält an der Oberfläche des Meeres einer Quecksilbersäule des Barometers von 28. 0754 Pariser Zollen bey der Temperatur des schmelzenden Eises das Gleichgewicht. Unter diesem Drucke und bey dieser Temperatur verhält sich die spezifische Schwere der Luft zu der des Quecksilbers, wie die Einheit zu 10485, also würde die Atmosphäre, wenn sie durchaus einerley Dichte hätte, eine Höhe von 28.0754 (10485) Zolle haben. Allein die Dichte der Luft ändert sich vermöge des bekannten Mariottischen Gesetzes sehr nahe dem Drucke oder der Barometerhöhe proportional, also müssen bey einerley Temperatur die obern Schichten weniger dicht seyn, als die von jener zusammengedrückten unteren, und wenn sie durchaus einerley Temperatur hätten, so würden ihre Dichtigkeiten, also auch die Barometerhöhen in den verschiedenen

Schichten in einer geometrischen Progression abnehmen, wenn die Höhen der Schichten über der Oberfläche der Erde in einer arithmetischen Reihe zunehmen. Aber die Luft wird, wie alle Körper, durch die Wärme ausgedehnt, und durch die Kälte zusammengezogen, so, dafs die Räume, welche sie bey der Temperatur des unter der Barometerhöhe 28 P. Z. siedenden Wassers, und der des schmelzenden Eises einnimmt, sich wie 1. 375 zu 1 verhalten. Die in den obern Theilen der Atmosphäre herrschende Kälte wird also wieder die Dichte der oberen Schichten vermehren. Endlich dehnt auch die Wärme das Quecksilber des Barometers aus, mit welcher der Druck der Luft gemessen wird.

Es sey also für einen Grad Aenderung des Thermometers Réaumur die Aenderung des Volums der atmosphärischen Luft gleich m, und die des Volums Quecksilber im Barometer gleich n. Ferner sey D die Dichte der Luft, wenn das Thermometer o Grade, und das auf o Grade der Temperatur gebrachte Barometer 28. 0754 Zolle zeigt, so ist, wenn δ die Dichte der Luft für die Höhe b Zolle des Barometers und für t Grade des Thermometers bezeichnet,

$$\delta : D = \frac{1 - n t}{1 + m t} . b : 28.0754 \text{ oder}$$

$$\delta = \frac{b}{28.0754} . \frac{(1 - n t)}{1 + m t} . D$$

und wenn die Refraction für jenen Normalzustand der Atmosphäre t = o, b = 28. 0754 durch R, jede andere Refraction aber durch ρ bezeichnet wird, so ist, da nach dem Vorhergehenden die Refraction der Dichte der Luft proportional ist

$$\frac{\delta}{D} = \frac{\rho}{R}.$$

also auch

$$\rho = \frac{b}{28.0754} . \frac{(1 - n t)}{(1 + m t)} . R$$

Nach den neuesten Beobachtungen dehnt sich für jeden Grad des Thermometers ein Volum Luft um seinen o. 0046875. und ein Volum Quecksilber um seinen o. 0002309ten Theil aus, also ist

$$\rho = \frac{b}{28.0754} . \frac{(1 - 0.0002309 t)}{1 + 0.0046875} . R$$

oder nahe

$$\rho = \frac{b.}{28.0754 (1 + 0.0049184 t)}$$

Setzt man der Kürze wegen o. 0049184 = p und

$$1 + \alpha = \frac{b}{28.0754} \qquad 1 + \beta = \frac{1}{1 + pt}$$

so ist

$$\varrho = (1 + \alpha)(1 + \beta).\ R$$

ein zur Berechnung mit Logarithmen bequemer Ausdruck, welcher also die wahre Refraction ϱ gibt, wenn die mittlere Refraction R, welche für den oben angenommenen Normalzustand der Atmosphäre Statt hat, bekannt ist.

Es ist daher nur noch der Werth dieser mittlern Refraction R zu suchen.

§. 2.

Um diese Untersuchung zuerst ganz einfach anzustellen, sey ECD (Fig. 4) ein sehr kleiner Theil der Oberfläche einer jener Schichten, und Z C darauf senkrecht, so daſs Z C verlängert durch den Mittelpunkt der Erde geht. Das Gestirn in A sendet einen Strahl AC, der bey der Ankunft von der dichteren Schichte in C gegen das Einfallsloth ZC oder nach der Richtung Cb gebrochen wird. Man verlängere b C nach B, und AC nach a, so ist der Einfallswinkel ACZ = aC P und der gebrochene Winkel bCP = BCZ = z, wenn z die scheinbare Zenithdistanz des Gestirns bezeichnet, während die wahre ACZ ist. Der Unterschied beyder Winkel, oder aCb = ACB heiſst die Refraction, die wir mit R bezeichnen wollen. Da aber bekanntlich der Sinus des Einfallswinkels zu dem Sinus des gebrochenen Winkels ein constantes Verhältniſs hat, welches wir m nennen wollen, so ist

$$m = \frac{\text{Sin a CP}}{\text{Sin b CP}}$$

Nach dem Vorhergehenden ist bCP = z, und aCP = z + R, also hat man

$$m \text{ Sin } z = \text{Sin } (z + R)$$

und aus dieser Gleichung würde man die Refraction R für jede scheinbare Zenithdistanz z ableiten, wenn m bekannt wäre. Man fand aber, daſs dieser Ausdruck noch besser mit den Beobachtungen übereinstimmt, wenn man R mit einer constanten Gröſse, die wir — n nennen wollen, multiplizirt, wodurch also jene Gleichung wird

$$m \text{ Sin } z = \text{Sin } (z + n R) \ldots \text{I.}$$

Das Vorhergehende setzt voraus, daſs die Atmosphäre sich in einer Ebene endige, und daſs ihre Dichte überall dieselbe sey. Die Atmosphäre besteht aber aus krummen Schichten, deren Dichte gegen die Erde nach einem gewissen Gesetze wächst. Allein da jene Krümmung sowohl, als diese Zunahme der Dichte nur gering ist, so sieht man im Allgemeinen, dafs dadurch die äufsere Form der Gleichung I. nicht wesentlich geändert werden wird. In der That stellt diese Gleichung, welche man, nach ihrem Erfinder, die Simpson'sche nennt, die beobachteten Refractionen wenigstens für nicht zu grofse Zenithdistanzen genügend dar.

§. 3.

Man hat dieser Gleichung verschiedene Formen gegeben, von welchen wir einige der vorzüglichsten kurz anzeigen wollen.

Sie gibt sofort

$$\text{Sin } z : \text{Sin}(z - nR) = 1 : m$$

oder

$$\text{Sin } z + \text{Sin}(z - nR) : \text{Sin } z - \text{Sin}(z - nR) = 1 + m : 1 - m$$

das heifst

$$\text{Tg } \frac{nR}{2} = \frac{1-m}{1+m} \text{ Tg } \left(z - \frac{nR}{2}\right) \ldots \text{ II.}$$

welches die Bradley'sche Gleichung ist.

Für $z = 90$ ist $m = \text{Cos } nr$, wenn r die Refraction am Horizont bezeichnet, also ist auch

$$\frac{1-m}{1+m} = \text{Tg}^2 \frac{nr}{2}$$

Setzt man endlich in der Gleichung II. den Bogen $\frac{nR}{2}$ für die Tangente, so ist

$$R = \frac{2}{n \text{ Sin } 1''} \left(\frac{1-m}{1+m}\right). \text{ Tg } \left(z - \frac{n}{2} R\right) \ldots \text{ III.}$$

welches der abgekürzte Ausdruck ist, den Laplace für die Refraction in gröfsern Höhen gegeben hat. Auch gilt die Gleichung I.

$$m = \text{Cos } nR - \text{Sin } nR. \text{ Cotg } z$$

Setzt man in diesem Ausdrucke

$$\text{Cos } nR = \frac{1 - \text{Tg}^2 \frac{nR}{2}}{1 + \text{Tg}^2 \frac{nR}{2}} \quad \text{und Sin } nR = \frac{2 \text{ Tg } \frac{nR}{2}}{1 + \text{Tg}^2 \frac{nR}{2}}$$

so erhält man für $Tg \frac{nR}{2}$ eine quadratische Gleichung. Löst man diese in eine Reihe auf, so findet man für $Tg \frac{nR}{2}$, also auch

$$\text{da } \frac{nR}{2} = Tg \frac{nR}{2} - \tfrac{1}{3} Tg^3 \frac{nR}{2} + \tfrac{1}{5} Tg^5 \frac{nR}{2} -$$

ist, für $\frac{nR}{2}$ einen Ausdruck der Form

$$A \, Tg\, z + B\, Tg^3 z + C\, Tg^5 z + \ldots$$

I. Die Gleichung I. gibt auch

$$Cos\, n\, r\, Sin\, z = Sin\, (z - nR)$$

oder

$$Cos\, n\, r = Cos\, n\, R - Sin\, n\, R\, Cotg\, z$$

woraus folgt

$$Sin\, n\, R = Sin\, z. \sqrt{1 - Cos^2\, n\, r\, Sin^2\, z} - \tfrac{1}{2} Cos\, n\, r. Sin\, 2\, z$$

Setzt man daher

$$Tg\, x = \frac{Tg\, n\, r}{Cos\, z}$$

so ist

$$Sin\, n\, R = Sin\, n\, r.\ Sin\, z.\ Tg \frac{x}{2}$$

Eben so war die Gleichung II.

$$Tg \frac{nR}{2} = Tg^2 \frac{nr}{2}.\ Tg \left(z - \frac{nR}{2}\right)$$

Löst man $Tg \left(z - \frac{nR}{2}\right)$ auf, so gibt der letzte Ausdruck

$$Tg \frac{nR}{2} = \frac{1}{2\, Cos^2 \frac{nr}{2}\, Tg\, z} \cdot \left\{ \sqrt{1 + Sin^2\, n\, r.\ Tg\, z} - 1 \right\}$$

Ist daher $Tg\, y = Sin\, n\, r.\ Tg\, z$, so ist

$$Tg \frac{nR}{2} = Tg \frac{nr}{2}.\ Tg\, \tfrac{1}{2}\, y$$

Nimmt man mit Laplace

$$n = 6.5 \quad \text{und} \quad m = 0.99809$$

so ist die Gleichnng III.

$$R = 60''68\ Tg\, (z - 3.25\, R)$$

und dieser Ausdruck stellt die Refractionen bis $z = 80°$ den Beobachtungen gemäſs dar.

Ist endlich $a = 60''68$, $b = 3.25$,

so ist dieselbe Gleichung III.

$$R = a \, Tg \, (z - bR)$$

woraus man, wenn man $Tg \, (z - bR)$ auflöst, findet

$$R = \frac{a}{p} Tg \, z - \frac{a^3 b \, Sin \, 1''}{p^3} . Tg^3 z + \frac{2 a^5 b^2}{p^5} . Tg^5 z -$$

wo $p = 1 + ab \, Sin \, 1''$ ist. Stellt man die Werthe von a b wieder her, so ist

$$R = 60''62204 \, Tg \, z - 0.05785014 \, Tg^3 z + 0.00011041 \, Tg^5 z -$$

Uebrigens lassen sich die Werthe von m und n aus zwey beobachteten Refractionen mittels der Gleichungen I. oder II. leicht bestimmen. Ist z. B.

$$R = 98''5 \text{ für } z = 60°$$

und

$$R = 1980''.0 \text{ für } z' = 90°$$

so findet man sehr nahe

$$n = 6 \quad \text{und} \quad m = 0.99834$$

§. 4.

Wir wollen nun sehen, wie man den Ausdruck der Refraction mit Hülfe der Analysis bestimmen kann. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, daſs die Atmosphäre aus unendlich dünnen, der Erde concentrischen Schichten bestehet, deren Dichte gegen den Mittelpunkt der Erde nach einem gewissen Gesetze zunimmt. Sey C (Fig. 4 a) der Mittelpunkt der Erde, AB ihre Oberfläche, A der Ort des Beobachters, Z sein Zenith, und Apqr die Curve, welche der Lichtstrahl beschreibt. Das Auge in A sieht also das Gestirn nach der Tangente AT des Endpunkts der Curve.

In irgend einem Punkte q dieser Curve sey qT die Tangente derselben, so ist der Winkel pqT die Refraction der zu q gehörigen Schichte. Wir wollen diese Refraction durch $d\varrho$ bezeichnen. Die ganze Refraction wird die Summe aller dieser Winkel $d\varrho$ von dem einen Endpunkte der Curve bis zu dem andern seyn.

Die Form der Refraction einer jeden einzelnen Schichte läſst sich leicht aus der vorhergehenden Gleichung I. ableiten, da die dort angenommene Voraussetzung einer brechenden Ebene auch hier angewendet werden kann. Es war aber

$$m \operatorname{Sin} z = \operatorname{Sin} (z - nR)$$

und da R oder die Refraction einer einzigen Schichte gewiſs sehr klein ist, so kann man annehmen

$$m \operatorname{Sin} z = \operatorname{Sin} z - nR \operatorname{Cos} z$$

woraus folgt, daſs die Refraction im Allgemeinen die Form habe

$$a \operatorname{Tg} z$$

und da nach dem Vorhergehenden die Refraction für jede Zenithdistanz der Dichte der Luft proportionirt ist, so wird man haben

$$\text{Refraction} = \lambda q. \operatorname{Tg} z$$

wo q die Dichte der Schichte, und λ irgend ein constanter Factor ist.

Es sey nun $r = CB$ der Halbmesser der Erde, $Bq = x$ und der Winkel $ACq = v$ also auch $qCr = dv$ und $qrC = z$ der Einfallswinkel in r, so ist

$$Cq\,T = Cqp + pq\,T$$

und

$$Cq\,T = qCr + qrC$$

oder

$$pq\,T - qCr = qrC - Cqp$$

das heiſst

$$d\varrho - dv = z - (z - dz)$$

oder

$$dz = d\varrho - dv.$$

Beschreibt man aber aus C mit dem Halbmesser $Cq = r + x$ einen Kreisbogen qs, so ist

$$\operatorname{Tg} z = \frac{qs}{sr} = (r + x)\frac{dv}{dx}, \text{ oder } dv = \frac{dx}{r+x}. \operatorname{Tg} z$$

Ist aber, wie vorhin, q die Dichte der Schichte bey q, so ist die Dichte der nächstfolgenden Schichte bey r gleich $q - dq$, also das Differential der Refraction, nach dem Vorhergehenden,

$$d\varrho = -\lambda dq \operatorname{Tg} z$$

Substituirt man diese Werthe von dv und $d\varrho$ in der Gleichung

$$dz = d\varrho - dv$$

so erhält man

$$\frac{dz}{\mathrm{Tg}\,z} = -\lambda\, dq - \frac{dx}{r+x}$$

Ist aber ZAV = Z die scheinbare Zenithdistanz des Gestirns, und δ die Dichte der Atmosphäre in der letzten Schichte bey A, so erhält man, wenn man die letzte Gleichung so integrirt, daſs für $x = o$ die Gröſse $z = Z$, und $q = \delta$ wird

$$\mathrm{Sin}\, z = \frac{\mathrm{Sin}\, Z}{1 + \frac{x}{r}} \cdot e^{\lambda(\delta - q)}$$

wo log nat $e = 1$ ist.

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{x}{r} = x' \text{ und } e^{\lambda(\delta - q)} = u,$$

so wird x' immer sehr klein, und u nahe der Einheit gleich seyn, da nach den Beobachtungen λ eine gegen die Einheit sehr kleine Gröſse ist. Man wird daher haben

$$\mathrm{Sin}\, z = \frac{u}{1+x'}\, \mathrm{Sin}\, Z \text{ und } dq = -\frac{du}{\lambda u}$$

und wenn man diesen Werth von z und dq in der obigen Gleichung

$$d\varrho = -\lambda\, dq\, \mathrm{Tg}\, z$$

substituirt, so wird man erhalten

$$d\varrho = \frac{\mathrm{Sin}\, Z\, du}{\sqrt{(1+x')^2 - u^2\, \mathrm{Sin}^2 Z}}$$

und das Integral dieser Gleichung wird die gesuchte Refraction ϱ geben. Man kann noch bemerken, daſs dieser Ausdruck mit jenem übereinkömmt, den Laplace im IV. B. der Mec. celeste p. 244 gegeben hat. M. s. Mémoires de Berlin f. d. J. 1772.

Allein diese Gleichung läſst sich nicht integriren, wenn nicht x' in einer Function von u oder von q gegeben ist, d. h. wenn nicht das Gesetz gegeben ist, nach welchem die Dichte der Luftschichten von ihrer Höhe über der Erde abhängt, und dieſs Gesetz ist unbekannt.

Wenn aber die Zenithdistanzen nicht gröſser als 80 oder 82 Grade sind, so braucht man, glücklicher Weise, jenes Gesetz nicht zu kennen. Entwickelt man nämlich die letzte Gleichung in eine Reihe, die nach den Potenzen von x' fortgeht, und setzt man in den Gliedern, welche schon den kleinen Factor x', x'^2 . . haben, den Werth von u gleich der Einheit, so erhält man, wenn man bloſs die zwey ersten Glieder dieser Reihe berücksichtiget,

$$d\varrho = \frac{\mathrm{Sin}\, Z.\, du}{\sqrt{1 - u^2 \mathrm{Sin}^2 Z}} + \frac{\mathrm{Tg}\, Z}{\mathrm{Cos}^2 Z} \cdot \frac{\lambda}{r}\, x dq$$

Das Integral des ersten Gliedes, zwischen den Gränzen $q = o$ und $q = \delta$ genommen, welche Werthe von q für die zwey äuſsersten Punkte der Curve gehören, findet man leicht, wenn man abkürzend $u = 1 + \lambda(\delta - q)$ setzt, gleich

$$\lambda\, \delta.\, \mathrm{Tg}\, Z$$

Im zweyten Gliede aber hängt das Integral $\int x dq$ von der Dichte der Luft, d. h. von der Höhe des Barometers in dem Endpunkte A ab Ist nämlich y die Höhe des Quecksilbers im Barometer für die Erhöhung x über die Oberfläche der Erde, wo die Dichte der Luft gleich q war, so hat man, wenn man die Dichte des Quecksilbers gleich der Einheit annimmt,

$$q dx = - dy$$

also

$$\int x dq = qx - \int q dx + C$$

oder

$$\int x dq = qx + y + C$$

Um diese Constante zu bestimmen, sey b die Höhe des Barometers im Punkte A, so ist jenes Integral vom ersten Punkt der Curve, wo $y = b$, $x = o$, $q = \delta$ ist, bis zu dem letzten, wo $y = q = o$ ist, gleich

$$\int x dq = - b$$

Nimmt man diese beyden Glieder zusammen, so ist das vollständige Integral jener Gleichung

$$\varrho = \lambda \delta\, \mathrm{Tg}\, Z. \left(1 - \frac{b}{\delta r\, \mathrm{Cos}^2 Z}\right)$$

Hätte man endlich noch auf das dritte Glied jener Entwicklung Rücksicht genommen, so würde man gefunden haben

$$\varrho = \lambda \delta\, \mathrm{Tg}\, Z \left(1 - \frac{b}{\delta r\, \mathrm{Cos}^2 Z} + \frac{122\, b^2}{137\, \delta^2 r^2} \cdot \frac{(2 + \mathrm{Sin}^2 Z)}{\mathrm{Cos}^4 Z}\right)$$

Um diesen Ausdruck numerisch zu entwickeln, hat man, wenn man die Bezeichnung des §. 1. beybehält,

$$\delta = \frac{b}{28.0754} \cdot \frac{(1 - nt)}{1 + mt} \cdot D$$

und man kann in dem zweyten und dritten Gliede der letzten Gleichung annähernd

$$\frac{b}{\delta} = \frac{28.0754}{D}$$

setzen. Ferner ist, wie bereits oben bemerkt wurde, wenn die Dichte des Quecksilbers zur Einheit angenommen wird, die Dichte der Luft

$$D = \frac{1}{10485}$$

und der Halbmesser der Erde $r = 6366198$ Meter, also

$$\frac{b}{\delta r} = 0.001251705$$

$$\frac{122}{137} \cdot \frac{b^2}{\delta^2 r^2} = 0.0000013952$$

und die letzte Gleichung geht daher in folgende über

$$\rho = \lambda D. \frac{b}{28.0754} \cdot \frac{(1 - nt)}{1 + mt} TgZ \times$$

$$\left(1 - \frac{0.001251705}{Cos^2 Z} + 0.0000013952 \frac{(2 + Sin^2 Z)}{Cos^4 Z}\right)$$

wo bloſs noch die Constante λ D durch Beobachtungen zu bestimmen ist, eine Bestimmung, die Schwierigkeiten unterliegt, da sie unabhängig von der Polhöhe des Beobachtungsortes vorgenommen werden soll. Um einen Weg zu dieser Bestimmung zu zeigen, seyen Z, Z′ zwey beobachtete Zenithdistanzen eines dem Pole nahen Sterns in der obern und untern Culmination, ρ, ρ' die diesen Zenithdistanzen zugehörigen Refractionen, und endlich M, M′ die Factoren von λ D in der letzten Gleichung. Ist dann p die Poldistanz des Sterns, und ψ die unbekannte Höhe des Aequators, so ist

$$\psi = \tfrac{1}{2} (Z + Z') + \tfrac{1}{2} (\rho + \rho')$$

oder

$$\psi = \tfrac{1}{2} (Z + Z') + \tfrac{1}{2} (\lambda D) (M + M')$$

Eine zweyte doppelte Beobachtung eines andern Circumpolarsterns, welcher in seiner untern Culmination nahe zu dem Horizonte kömmt, wird eine der vorigen ähnliche Gleichung geben, und aus beyden wird man die zwey unbekannten Gröſsen ψ und (λD) durch Elimination finden.

Man fand so für $t = 0°$ Réaumur, und $b = 28.0754$ Pariser Zolle

$$(\lambda D) = 58'' 206$$

und hernach die mittlere Refraction

$$R = 58''.133.\ Tg\ Z - 0''.0724\ Tg^3 Z + 0''000244\ Tg^5 Z$$

welche mittlere Refraction R, nach §. 1., noch durch

$$\frac{b}{28.0754} \quad \frac{(1-nt)}{1+mt}$$

multiplizirt werden muſs, um die wahre Refraction ϱ zu erhalten.

Noch kann man bemerken, daſs die Schwere, die Anziehung der Erde, mit der Höhe über der Oberfläche der Erde und mit der Polhöhe sich ändert, und daſs daher bey derselben Temperatur gleiche Barometerhöhen nicht genau eine gleiche Dichte der Luft anzeigen, da diese Dichte in jenen Gegenden kleiner seyn wird, wo die Schwere geringer ist. Der Factor (λD) der eigentlich für den Parallelkreis von 45 Graden gilt, muſs also auf der Oberfläche der Erde mit der Schwere sich ändern, und man muſs von diesem Factor noch die Gröſse $0''.17 \text{ Cos } 2\varphi$ subtrahiren, wo φ die Polhöhe des Beobachtungsortes ist.

§. 5.

Die vorhergehenden Entwicklungen gelten aber nur, wie bereits erinnert wurde, für Zenithdistanzen, die nicht über 80 oder 82 Grade betragen. Für gröſsere Zenithdistanzen hat Laplace, im IV. Bande der Mec. celeste, folgenden allgemeinen Ausdruck gegeben.

$$R = 1624''\ \text{Sin Z.}\ \left((2 - a - 2a\Theta^2)\,\psi + a\Theta\right)$$

$$\text{wo } a = 0.7175935$$

$$\Theta = 28 \text{ Cos Z}$$

$$\psi = \varepsilon^{\Theta^2}. \int \varepsilon^{-t^2} dt$$

Dieses Integral von $t=\Theta$ bis $t=\infty$ genommen, vorausgesetzt, daſs log nat $\varepsilon = 1$ ist.

Ist endlich $Z > 78°$, so muſs zu jenem Ausdrucke von R noch hinzugesetzt werden

$$\left(-14''.093 \text{ Sin Z } \left((1+2\Theta^2)\,\psi - \Theta\right)\right).\ (t'-10)$$

wo t' die Höhe des Thermometers Réaumur bezeichnet.

Um diesen Ausdruck zu entwickeln, muſs man für jeden Werth von Θ die Gröſse ψ kennen. Es ist aber (a. a. O. p. 253)

$$\psi = \frac{1}{2\Theta}\left(1 - \frac{1}{2\Theta^2} + \frac{1.3}{2^2.\Theta^4} - \frac{1.3.5}{2^3.\Theta^6} + \frac{1.3.5.7}{3^4\,\Theta^8} - \right)$$

oder auch

$$\psi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\, e^{\Theta^2} - \Theta\left(1 + \frac{2\,\Theta^2}{1.3} + \frac{2^2\,\Theta^4}{1.3.5} + \frac{2^3\,\Theta^6}{1.3.5.7} + \right)$$

$$\text{wo } e^{\Theta^2} = 1 + \Theta^2 + \frac{\Theta^4}{1.2} + \frac{\Theta^6}{1.2.3} +$$

und wo $\pi = 3.14159\ldots$ ist.

Ist Θ gleich oder kleiner, als die Einheit, so muſs man den zweyten Ausdruck von ψ brauchen. Es ist aber nahe $\Theta = 1$ für $Z = 84^\circ$. Ist $\Theta > 1$, so kann man den ersten Werth von ψ sofort in den allgemeinen Ausdruck von R substituiren, wodurch man eine einfache Reihe erhält. Setzt man nämlich der Kürze wegen

$$\psi = \frac{1}{2\,\Theta}.\varphi$$

so ist der vorhergehende Ausdruck von R, da

$$\frac{1624}{28} = 58 \text{ ist,}$$

$$R = 58 \text{ Tg } Z \left(\left(1 - \frac{a}{2} - a\,\Theta^2\right)\varphi + a\,\Theta^2\right)$$

oder

$$R = 58 \text{ Tg } Z.\,\varphi - 58\,a \text{ Tg } Z.\left(\frac{\varphi}{2} + \Theta^2\,(\varphi - 1)\right)$$

oder auch, wenn man die Gröſse

$$58 \text{ Tg } Z \left(\frac{\varphi}{2} + \Theta^2\,(\varphi - 1)\right)$$

addirt und subtrahirt

$$R = 58 \text{ Tg} Z. \left(\frac{3}{2}\varphi + \Theta^2\,(\varphi - 1)\right) - (1 + a)\,58 \text{ Tg } Z.\left(\frac{\varphi}{2} + \Theta^2(\varphi - 1)\right)$$

Entwickelt man aber die Gröſsen

$$\frac{3}{2}\,\varphi + \Theta^2\,(\varphi - 1)$$

und

$$\frac{\varphi}{2} + \Theta^2\,(\varphi - 1)$$

so erhält man zwey Reihen, und wenn man die erste durch 58 Tg Z, und die zweyte durch $(1 + a)$ 58 Tg Z multiplizirt, so gibt die Differenz beyder Produkte

$$R = 58 \text{ Tg} Z. \left(1 - \frac{(1+a)}{2\Theta^2} + \frac{3\,(1+2a)}{2^2\,\Theta^4} - \frac{3.5\,(1+3a)}{2^3\,\Theta^6} + \frac{3.5.7(1+4a)}{2^4\,\Theta^8} - \right)$$

und dieser Ausdruck ist bis $Z = 84^\circ$ brauchbar. Für gröſsere

Zenithdistanzen wird man den zweyten Ausdruck von ψ nehmen, für welchen sich keine so einfache Reihe angeben läſst.

Ex. Sey $Z = 80$ so ist $\log \Theta = 0.6868282$

also der erste Ausdruck von

$$\psi = \frac{1}{2\Theta}(0.980050)$$

$$\log \psi = 9.0033900$$

$$2 - a - 2a\Theta^2 = -32.646110$$

$$\text{dessen Log} = 1.5138314\,n$$

$$\log 1624 \operatorname{Sin} Z = 3.2039375$$

$$3.7211589 = \log - 5262''.1$$

Ferner ist $\log a\Theta = 0.5427067$

$$3.2039375$$

$$3.7466442 = \log + 5580.1$$

$$-5262.1$$

$$R = 318''.0$$

Nach der zuletzt gegebenen Reihe aber hat man sofort

$$R = 328.93 - 11.95 + 1.07 - 0.15 + 0.03 = 317''.93$$

wie zuvor.

Ex. II. Es sey $Z = 89°\ 30'$

so ist

$$\log \Theta = 9.3879999$$

$$\log(2 - a - 2a\Theta^2) = 0.0779928$$

$$\psi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1.061521) - \Theta(1.040768) = 0.68645$$

Es ist daher

$$\log 1624 \operatorname{Sin} Z = 3.2105695 \qquad\qquad 3.2105695$$

$$0.0779928.\ \log a\Theta = 9.8438784$$

$$\log \psi = 9.8366089 \qquad\qquad 2.4544479$$

$$3.1251712 \qquad\qquad \text{Zahl} = 284.7$$

$$\text{Zahl} = 1334.0$$

$$284.7$$

$$R = 1618''.7$$

Endlich gibt $Z = 90$, $\theta = 0$, $\psi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

also

$$R = 1624 \text{ Sin } Z. \ (2 - a) \ \psi = 1845''.7$$

die Horizontalrefraction. Die Refractionstafeln am Ende dieses Theiles sind nach diesen Ausdrücken berechnet worden.

I. Es ist nicht unwahrscheinlich, dafs sich die vorhergehenden verwickelten und unbequemen Ausdrücke durch andere einfachere werden ersetzen lassen. Ein solcher ist folgender.

Ist nämlich, wie so eben gefunden wurde,

$$r = 1845''7$$

die Horizontalrefraction, und

$$A = 0.06265 - 0.00002 \text{ Tg } Z$$

so läfst sich die durch die vorhergehenden Reihen gegebene Refraction R bis $Z = 87$ Grade incl. durch folgenden Ausdruck darstellen

$$R = \frac{A \, r. \text{ Sin } Z}{\text{Cos } Z + \sqrt{A^2 + \text{Cos}^2 Z}}$$

Man könnte die Uebereinstimmung vielleicht noch weiter treiben, wenn man für A eine Gröfse der Form

$$a - b \text{ Tg } Z + c \text{ Tg}^3 Z -$$

annimmt, allein es ist vielleicht vortheilhafter, die Refraction der letzten zwey oder drey Grade, wegen den grofsen Anomalien, denen sie unterworfen sind, mehr auf einem empirischen, obschon immer durch die Theorie geleiteten Weg zu bestimmen. Uebrigens kann man dem letzten Ausdrucke eine zur Rechnung sehr bequeme Form geben. Ist nämlich

$$\text{Tg } x = \frac{A}{\text{Cos } Z}$$

so hat man

$$R = r \text{ Sin } Z. \text{ Tg } \frac{x}{2}$$

Um zu sehen, wie nahe die Resultate der letzten Gleichung mit den vorhergehenden Reihen von Laplace übereinstimmen, findet man

Für z . . .	Laplace . .	letzte Gleichung
20°	21″1 . .	21″1
40	48.6	48.5
60	100.0	99.8
80	317.9	317.4
84	506.7	506.6
85	590.2	590.5
86	702.6	703.0
87	858.8	858.6

Am besten findet man die Theorie der Refraction entwickelt in Bessels Fundam. astronomiae.

§. 6.

Um die Refraction für irgend eine Zenithdistanz unmittelbar aus Beobachtungen zu bestimmen, kann man, wie oben, die Polhöhe des Beobachtungsortes aus der gröfsten und kleinsten Höhe eines Circumpolarsterns ableiten, indem man die halbe Summe der beobachteten Höhen sucht, welche um die halbe Summe der den zwey Höhen entsprechenden Refractionen zu grofs seyn wird. Geht der Stern in seiner obern Culmination nahe durch das Zenith, so ist seine Refraction nahe Null, während sie in der untern Culmination beträchtlich seyn wird.

Ist H die Summe der gröfsten und kleinsten Höhe eines Circum-Polarsterns, und R die Summe der diesen Höhen entsprechenden Refractionen, so ist die scheinbare Polhöhe $\frac{1}{2}$ H, und die wahre $\frac{1}{2}$ (H — R). Für einen andern, weiter vom Pole abstehenden Stern seyen diese Summen H′ und R′, so werden wieder die beyden Polhöhen $\frac{1}{2}$ H′ und $\frac{1}{2}$ (H′ — R′) seyn, also ist

$$H' - R' = H - R$$

und da aus den Beobachtungen die Differenz H′ — H der scheinbaren Polhöhen gegeben ist, so kennt man die Differenz R′ — R der Summen der zwey letzten Refractionen über die Summen der zwey ersten, nämlich

$$R' - R = H' - H.$$

Hätte man z. B. beobachtet

Von dem Polarstern . . . gröfste Höhe 50° 14′ 18″ = h
kleinste - - 46 49 45 = h.

Von α Persei . . . gröfste Höhe $89\ 20\ 40 = h'$
kleinste - - $7\ 48\ 28 = h'_{,}$

so ist aus dem ersten

$$H = 97^\circ\ 4'\ 3''$$

aus dem zweyten

$$H' = 97\ \ 9\ \ 8$$

also auch

$$R' - R = 5'\ 5''.0 = 305''.0$$

Wäre das Verhältnifs dieser Refractionen zu einander bekannt, so könnte man die Refractionen selbst finden. Es verhalten sich aber in nicht zu kleinen Höhen die Refractionen wie die Tangenten der scheinbaren Zenithdistanzen, also ist

$$(\text{Cotg } h' + \text{Cotg } h'_{,}) - (\text{Cotg } h + \text{Cotg } h_{,}) : \text{Cotg } h$$
$$= 305'' : 48''6 \text{ Refraction für } 50^\circ\ 14' \text{ sch. Höhe}$$
$$(\text{Cotg } h' + \text{Cotg } h'_{,}) - (\text{Cotg } h + \text{Cotg } h_{,}) : \text{Cotg } h_{,}$$
$$= 305'' : 54''8 \text{ für } 46^\circ\ 50'$$

und eben so findet man

$0''6$ Refraction für $89^\circ\ 21'$ scheinbare Höhe
und $6'\ 47''8$ - - - - $7^\circ\ 48'$

also ist auch

$$R = 1'\ 43''4$$
$$R' = 6\ \ 48.\ 4$$

und

$$H - R = 97^\circ\ 2'\ 19''6$$
$$H' - R' = 97\ \ 2\ \ 19.\ 6$$

und deren Hälfte gibt

die gesuchte Polhöhe $= 48^\circ\ 31'\ 9''8$

Aber wahre Höhe des α Persei

$$= h' - 0''6 = 89\ \ 20\ \ 39.4$$

Polardistanz des α Persei $= 40^\circ\ 49'\ 29''6$

Fällt eine dieser Höhen auf die Südseite vom Zenith, so ist ihre Cotangente negativ.

Kennt man aber die Polhöhe des Beobachtungsorts, und die

Declination des beobachteten Sterns, so läſst sich aus jeder beobachteten Höhe des Sterns, wenn man sie mit der berechneten vergleicht, die dieser Höhe entsprechende Refraction ableiten. Wiederholungen und allmählige Correctionen sind hier unvermeidlich, da die Bestimmung der Polhöhe schon die Kenntniſs der Refraction voraussetzt. Eine treffliche Methode, die Refraction durch Beobachtungen zu bestimmen, s. m. in Mayländer Ephemeriden 1816. p. 3.

§. 7.

Die Refraction beschleunigt den Aufgang, und verspätet den Untergang der Gestirne: der wahre halbe Tagbogen s ist, nach Cap. I. §. 4.

$$\mathrm{Cos}\; s = -\,\mathrm{Tg}\;\varphi\;\mathrm{Tg}\;\delta$$

der scheinbare aber

$$\mathrm{Cos}\; s' = -\frac{\mathrm{Sin}\;(r+d)}{\mathrm{Cos}\;\delta\;\mathrm{Cos}\;\varphi} - \mathrm{Tg}\;\varphi\;\mathrm{Tg}\;\delta$$

wo r die Horizontalrefraction, und d der Halbmesser des Gestirns ist. Für den Auf- oder Untergang des Mittelpunkts des Gestirns ist $d = o$, für den Auf- oder Untergang des untern Randes der Gestirne ist d negativ. Daraus findet man annähernd

$$s' - s = \frac{(r+d)}{\mathrm{Cos}\;\delta\;\mathrm{Cos}\;\varphi\;\mathrm{Sin}\;s}$$

Auch das Azimut ω des Gestirns wird bey dem Auf- oder Untergange desselben verändert. Man findet leicht

$$\omega - \omega' = \frac{\mathrm{Sin}\;(r+d)\;\mathrm{Sin}\;\varphi + 2\;\mathrm{Sin}^2\;\frac{r+d}{2}\;\mathrm{Sin}\;\delta}{\mathrm{Cos}\;(r+d)\;\mathrm{Cos}\;\varphi\;\mathrm{Sin}\;\omega.\;\mathrm{Sin}\;1''}$$

Kennt man so ω und ω', so lieſse sich daraus die Horizontalrefraction r mittels des letztern Ausdrucks finden: eine wenig verläſsliche Methode.

Ueber dem Horizonte aber ändert die Refraction, die immer nur in einer verticalen Ebene wirkt, das Azimut nicht, aber wohl den Stundenwinkel und die Declination. Ist v der Winkel des Verticalkreises mit dem Declinationskreise, und s der Stundenwinkel, R die Refraction, so findet man leicht

$$d\,s = \frac{R \operatorname{Sin} v}{\operatorname{Cos} (\delta + R \operatorname{Cos} v)}$$

und

$$d\delta = - R \operatorname{Cos} v$$

Nennt man a die Tiefe der Sonne nnter dem Horizonte für den Augenblick, wo die höchsten Schichten der Atmosphäre, die noch merklich Licht zurückwerfen, von der Sonne zuerst oder zuletzt beschienen werden, d. h. für den Anfang oder das Ende der Dämmerung, so gibt der vorhergehende Ausdruck von $s' - s$ die ganze Dauer dieser Dämmerung, wenn man in ihm $r + d = a$ setzt.

FÜNFTES KAPITEL.

Parallaxe.

§. 1.

Bey den bisherigen Untersuchungen wurde auf den Ort des Beobachters in der Oberfläche der Erde keine Rücksicht genommen, oder dieser Ort wurde als der Mittelpunkt der Erde vorausgesetzt, weil in der That die Entfernung der meisten Gestirne von der Erde so groſs ist, daſs der Durchmesser der Erde gegen jene Entfernung völlig verschwindet. Da es aber auch mehrere Himmelskörper gibt, die uns so nahe sind, daſs der aus ihnen beobachtete Durchmesser der Erde nicht mehr als eine verschwindende Gröſse angenommen werden kann, daſs also auch die aus der Oberfläche der Erde beobachteten oder scheinbaren Orte dieser Himmelskörper mit dem aus dem Mittelpunkte der Erde gesehenen, den wahren oder geocentrischen Orten der Gestirne, nicht mehr dieselben sind, so wird es nothwendig, den Unterschied beyder Orte, welchen man die **tägliche Parallaxe** nennt, für jede Entfernung und Lage dieser Körper angeben zu können, wodurch man dann alle Beobachtungen, die in verschiedenen Punkten der Oberfläche der Erde gemacht worden sind, auf einen gemeinschaftlichen Ort, den Mittelpunkt der Erde, zurückführt, ein Verfahren, welches einer Vergleichung dieser Beobachtungen vorausgehen muſs.

Wir wollen zu diesem Zwecke die Erde als einen Körper annehmen, der durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden ist. Sey A die halbe groſse, B die halbe kleine Axe des Erdsphäroids, R die Entfernung des Himmelskörpers vom Mittelpunkte der Erde, R' desselben Entfernung von irgend einem Punkte der Oberfläche der Erde, welcher von dem Mittelpunkte der Erde um die Gröſse r absteht.

Ist der Beobachter in dem Aequator, und das Gestirn im Horizont des Beobachters, und p die aus dem Gestirne gesehene scheinbare Gröſse von A, so ist

$$\text{Sin } p = \frac{A}{R}$$

und p heifst die Horizontalparallaxe des ~~Aequators~~.

Ist aber π ~~die~~ aus dem Gestirne gesehene scheinbare Gröfse von r, so ist eben so

$$\text{Sin } \pi = \frac{r}{R}$$

also auch

$$\text{Sin } \pi = \frac{r}{A} \cdot \text{Sin } p$$

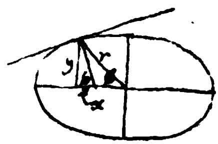
und π heifst die Horizontalparallaxe des ~~Beobachtungsortes~~.

§. 2.

Sey φ' der Winkel, den r mit A bildet, und φ der Winkel, den die Normale in dem Orte des Beobachters mit A macht. Man fälle ein Loth y von dem Beobachtungsorte senkrecht auf A, und nenne x das Stück der grofsen Axe zwischen dem Mittelpunkte und dem Lothe y, und endlich z das Stück der grofsen Axe zwischen der Normale und dem Lothe, so ist offenbar

$$z = \frac{B^2}{A^2} \cdot x$$

$$\text{Tg } \varphi' = \frac{y}{x}$$



und

$$\text{Tg } \varphi = \frac{y}{z} = \frac{A^2 y}{B^2 x}$$

also auch

$$\text{Tg } \varphi' = \frac{B^2}{A^2} \cdot \text{Tg } \varphi \quad \ldots (I)$$

Die Gleichung der Ellipse aber ist

$$A^2 B^2 = A^2 y^2 + B^2 x^2$$

und da man hat

$$y = \frac{B^2}{A^2} x \text{ Tg } \varphi,$$

so ist

$$x = \frac{A^2}{\sqrt{A^2 + B^2 \text{Tg}^2 \varphi}}$$

also auch

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{1 + Tg^2 \varphi'}{1 + Tg\,\varphi\, Tg\varphi'} \cdot A^2$$

oder endlich

$$r = A. \sqrt{\frac{Cos\ \varphi}{Cos\,\varphi'\ Cos\,(\varphi - \varphi')}} \quad \ldots \quad (II)$$

Die Gleichung I. gibt φ' aus φ, und die Gleichung II. gibt die Gröſse r.

Es ist aber φ die aus den Beobachtungen gegebene Polhöhe des Beobachtungsortes, weil dieser Winkel die Neigung der Normale, d. h. der Verticale gegen den Aequator bezeichnet. Den Winkel φ' aber nennt man die geocentrische Polhöhe.

Nach Laplace Expos. du syst. du monde, IV. Ausgabe, p. 64, ist $A = 6376606$, $B = 6356215$ Meter, und ein Meter $= 443.2959$ Pariser Linien, also die Abplattung der Erde

$$\frac{A - B}{B} = \frac{1}{311.72}$$

Ex. $\varphi = 40°$ gibt $\varphi - \varphi' = 10'\ 50''$

$$\log \frac{r}{A} = 9.999429$$

$\varphi = 50°$ gibt $\varphi - \varphi' = 10'\ 51''$

$$\log \frac{r}{A} = 9.999188.$$

§. 4.

Es sey die wahre oder geocentrische Länge λ und Breite β eines Gestirns nebst dessen Horizontalparallaxe π für den Beobachtungsort gegeben. Man suche die scheinbare, von der Parallaxe afficirte, Rectascension α' und Declination δ' des Gestirns.

Wird die Lage des Gestirns gegen den Mittelpunkt der Erde durch drey rechtwinklichte Coordinaten X′ Y′ Z′ gegeben, von denen X′ in der Linie der Nachtgleichen, X′ Y′ in der Ebene der Ecliptik liegt, so hat man

$$X' = R\ Cos\ \beta\ Cos\ \lambda$$
$$Y' = R\ Cos\ \beta\ Sin\ \lambda$$
$$Z' = R\ Sin\ \beta$$

Wird aber die Lage desselben Gestirns gegen den Mittelpunkt der Erde durch drey andere senkrechte Coordinaten X Y Z gegeben, von denen X wieder in der Linie der Nachtgleichen, und X Y in der Ebene des Aequators liegen, so wird die Abhängigkeit dieser zweyten Coordinaten von den vorhergehenden durch folgende Gleichungen gegeben

$$X = X'$$

$$Y = Y' \operatorname{Cos} e - Z' \operatorname{Sin} e$$

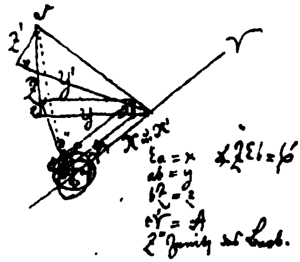
$$Z = Z' \operatorname{Cos} e + Y' \operatorname{Sin} e$$

$v = \frac{\operatorname{Sin} e\, Z'}{\operatorname{Cos} e}$

$y' - v : 1 = y : \operatorname{Cos} e$

wo e die scheinbare Schiefe der Ecliptik bezeichnet.

Wird ferner der Ort des Beobachters auf der Oberfläche der Erde gegen den Mittelpunkt derselben durch die drey, den letzten parallelen, Coordinaten x y z gegeben, so ist, wenn φ' die geocentrische Polhöhe, und A die Rectascension des Zeniths bezeichnet,



$$x = r \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Cos} A$$

$$y = r \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Sin} A$$

$$z = r \operatorname{Sin} \varphi'$$

Daraus folgt, daſs

$$X - x,\ Y - y,\ Z - z$$

die den letzten parallelen Coordinaten seyn werden, welche die Lage des Gestirns gegen den Beobachtungsort auf der Oberfläche der Erde, oder welche den scheinbaren Ort des Gestirns in Beziehung auf den Aequator bestimmen. Man wird also haben

$$X - x = R' \operatorname{Cos} \delta' \operatorname{Cos} \alpha'$$

$$Y - y = R' \operatorname{Cos} \delta' \operatorname{Sin} \alpha'$$

$$Z - z = R' \operatorname{Sin} \delta'$$

Substituirt man in den letzten Gleichungen die vorhergehenden Werthe von X, x . . . , so erhält man die gesuchten scheinbaren Orte des Gestirnes, nämlich

$$\operatorname{Tg} \alpha' = \frac{Y - y}{X - x}$$

$$\operatorname{Tg} \delta' = \frac{Z - z}{X - x} \operatorname{Cos} \alpha' = \frac{Z - z}{Y - y} \operatorname{Sin} \alpha'$$

$$\frac{R}{R'} = \frac{R \operatorname{Cos} \delta' \operatorname{Cos} \alpha'}{X - x} = \frac{R \operatorname{Cos} \delta' \operatorname{Sin} \alpha'}{Y - y} = \frac{R \operatorname{Sin} \delta'}{Z - z}$$

Wächst die Höhe des Gestirns über dem Horizont, so nimmt die Entfernung desselben von dem Beobachter ab, vorausgesetzt, dafs das Gestirn dieselbe Entfernung vom Mittelpunkte der Erde behält. Nennt man also $\triangle$ den scheinbaren Halbmesser des Gestirns im Horizonte, oder den geocentrischen Halbmesser, weil der horizontale mit dem aus dem Mittelpunkte gesehenen Halbmesser derselbe ist, und nennt man $\triangle'$ den wegen seiner Höhe (wegen seiner Annäherung zur Erde) vergröfserten Halbmesser, so ist

$$\frac{\mathrm{Sin}\,\triangle'}{\mathrm{Sin}\,\triangle} = \frac{R}{R'}$$

Substituirt man also in den drey letzten Gleichungen die oben für X, x ... gefundenen Werthe, und setzt der Kürze wegen

$$\frac{1}{H} = \mathrm{Cos}\,\lambda\;\mathrm{Cos}\,\beta - \mathrm{Sin}\,\pi\;\mathrm{Cos}\,\varphi'\;\mathrm{Cos}\,A$$

so erhält man

$$\mathrm{Tg}\,\alpha' = H\,(\mathrm{Sin}\,\lambda\;\mathrm{Cos}\,\beta\;\mathrm{Cos}\,e)$$
$$- H\,(\mathrm{Sin}\,\beta\;\mathrm{Sin}\,e - \mathrm{Sin}\,\pi\;\mathrm{Cos}\,\varphi'\;\mathrm{Sin}\,A)$$
$$\mathrm{Tg}\,\delta' = H\;\mathrm{Cos}\,\alpha'.\,(\mathrm{Sin}\,\beta\;\mathrm{Cos}\,e)$$
$$+ H\;\mathrm{Cos}\,\alpha'\,(\mathrm{Cos}\,\beta\;\mathrm{Sin}\,e\;\mathrm{Sin}\,\lambda - \mathrm{Sin}\,\pi\;\mathrm{Sin}\,\varphi')$$
$$\mathrm{Sin}\,\triangle' = H\;\mathrm{Cos}\,\alpha'\;\mathrm{Cos}\,\delta'.\;\mathrm{Sin}\,\triangle$$

Zur bequemeren Berechnung sey

$$\mathrm{Tg}\,\psi = \mathrm{Cotg}\,\beta\;\mathrm{Sin}\,\lambda,$$

so ist

$$\mathrm{Tg}\,\alpha' = H\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\beta\;\mathrm{Sin}\,(\psi - e)}{\mathrm{Cos}\,\psi} - \mathrm{Sin}\,\pi\;\mathrm{Cos}\,\varphi'\;\mathrm{Sin}\,A\right)$$

$$\mathrm{Tg}\,\delta' = H\;\mathrm{Cos}\,\alpha'.\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\beta\;\mathrm{Cos}\,(\psi - e)}{\mathrm{Cos}\,\psi} - \mathrm{Sin}\,\pi\;\mathrm{Sin}\,\varphi'\right)$$

Ex. Es sey

$$\lambda = 93^\circ\;37'\;26'',$$
$$\beta = 1^\circ\;0'\;29'',$$
$$\pi = 1^\circ\;0'\;43'',$$
$$e = 23^\circ\;27'\;59'',$$
$$\triangle = 0^\circ\;33'\;12'',$$
$$A = 183^\circ\;17'\;51'' \text{ und}$$
$$\varphi' = 49^\circ\;53'\;44'',$$

so findet man

$$\alpha' = 93^\circ \; 15' \; 51''$$
$$\delta' = 23 \;\; 43 \;\; 6$$
$$\Delta' = 0 \;\; 33 \;\; 24$$

§. 4.

Aus der vorhergehenden allgemeinen Auflösung lassen sich mehrere besondere Fälle sehr leicht ableiten.

I. Sucht man z. B. aus der wahren Länge und Breite $\lambda\ \beta$ diese scheinbaren Gröſsen $\lambda'\ \beta'$, so darf man nur in den vorhergehenden Ausdrücken

$$e = 0$$

und $\alpha' = \lambda',\ \delta' = \beta',$

endlich $A = L,\ \varphi' = B$

setzen, wo L die Länge, und B die Breite des Zeniths ist. Man hat dann

$$\frac{1}{H} = \text{Cos}\ \beta\ \text{Cos}\ \lambda - \text{Sin}\ \pi\ \text{Cos B Cos L}$$
$$\text{Tg}\ \lambda' = \text{H}\ (\text{Sin}\ \lambda\ \text{Cos}\ \beta - \text{Sin}\ \pi\ \text{Sin L Cos B})$$
$$\text{Tg}\ \beta' = \text{H Cos}\ \lambda'\ (\text{Sin}\ \beta - \text{Sin}\ \pi\ \text{Sin B})$$
$$\text{Sin}\ \Delta' = \text{H Cos}\ \lambda'\ \text{Cos}\ \beta'.\ \text{Sin}\ \Delta$$

Die Gröſse L B aber findet man aus A, φ' eben so, wie man im I. Cap. §. 5. aus der Rectascension und Declination eines Gestirns die Länge und Breite desselben findet. Zieht man es aber vor, diese Werthe von L und B sogleich in den vorhergehenden Gleichungen zu substituiren, so erhält man

$$\frac{1}{H} = \text{Cos}\ \lambda\ \text{Cos}\ \beta - \text{Sin}\ \pi\ \text{Cos}\ \varphi'\ \text{Cos A}$$
$$\text{Tg}\ \lambda' = \text{H}\ (\text{Sin}\ \lambda\ \text{Cos}\ \beta - \text{Sin}\ \pi\ (\text{Sin}\ \varphi'\ \text{Sin e} + \text{Cos}\ \varphi'\ \text{Cos e Sin A}))$$
$$\text{Tg}\ \beta' = \text{H Cos}\ \lambda'\ (\text{Sin}\ \beta - \text{Sin}\ \pi\ (\text{Sin}\ \varphi\ \text{Cos e} - \text{Cos}\ \varphi'\ \text{Sin e Sin A}))$$
$$\text{Sin}\ \Delta' = \text{H Cos}\ \lambda'\ \text{Cos}\ \beta'.\ \text{Sin}\ \Delta$$

II. Sucht man aus der wahren Rectascension und Declination $\alpha\ \delta$ diese scheinbaren Gröſsen $\alpha'\ \delta'$, so wird man

in I. die Gröſsen $\lambda\,\beta$ in $\alpha\,\delta$ verwandeln,

und $e = 0$ setzen,

wodurch man erhält

$$\frac{1}{H} = \text{Cos } \alpha \text{ Cos } \delta - \text{Sin } \pi \text{ Cos A Cos } \varphi'$$

$$\text{Tg } \alpha' = \text{H (Sin } \alpha \text{ Cos } \delta - \text{Sin } \pi \text{ Sin A Cos } \varphi')$$

$$\text{Tg } \delta' = \text{H Cos } \alpha' \text{ (Sin } \delta - \text{Sin } \pi \text{ Sin } \varphi')$$

$$\text{Sin } \triangle' = \text{H Cos } \alpha' \text{ Cos } \delta'. \text{ Sin } \triangle$$

III. Sucht man endlich aus der wahren Höhe h, und dem wahren Azimute ω, diese scheinbaren Gröſsen h', ω', so wird man in II. für α, δ die Gröſsen ω, h, für φ' die Gröſse $90 - (\varphi - \varphi')$ und endlich $A = 0$ setzen, wodurch man erhält

$$\frac{1}{H} = \text{Cos } \omega \text{ Cos h} - \text{Sin } \pi \text{ Sin } (\varphi - \varphi')$$

$$\text{Tg } \omega' = \text{H. Sin } \omega \text{ Cos h}$$

$$\text{Tg h}' = \text{H Cos } \omega' \text{ (Sin h} - \text{Sin } \pi \text{ Cos } (\varphi - \varphi'))$$

$$\text{Sin } \triangle' = \text{H Cos } \omega' \text{ Cos h}'. \text{ Sin } \triangle$$

Nimmt man die Erde als eine vollkommene Kugel an, so ist

$$\varphi' = \varphi,$$

also geben die letzten Ausdrücke

$$\omega' = \omega, \quad \text{und}$$

$$\text{Tg h}' = \text{Tg h} - \frac{\text{Sin } \pi}{\text{Cos h}}$$

oder abkürzend

$$\text{h} - \text{h}' = \frac{\pi \text{ Cos h}}{1 - \text{Sin } \pi \text{ Sin h}} = \pi \text{ Cos h}'$$

und

$$\triangle' = \triangle \frac{\text{Cos h}'}{\text{Cos h}}$$

und $h - h'$ ist die Parallaxe der Höhe. Für das Sphäroid aber findet man aus dem letzten Ausdrucke für Tg ω' die genäherten

$$\omega' - \omega = \pi \frac{\text{Sin } \omega \text{ Sin } (\varphi - \varphi')}{\text{Cos h}}$$

welches die Parallaxe des Azimuts ist.

Ex. zu I.

$$\text{Sey } \lambda = 181° \ 46' \ 22'' \ 5,$$
$$\beta = 2° \ 17' \ 26'' \ 2,$$
$$\pi = 0° \ 59' \ 27'' \ 7,$$

$$e = 23^\circ\ 28'\ 0''\ 8,$$
$$\Delta = 0^\circ\ 16'\ 15''\ 5,$$
$$A = 209^\circ\ 46'\ 7''\ 9,$$
$$\varphi' = 49^\circ\ 53'\ 43''\ 9,$$

so erhält man

$$\lambda' = 181^\circ\ 48'\ 5''.\ 4$$
$$\beta' = 1\ \ 29'\ \ 1.\ 3$$
$$\Delta' = 0\ \ 16\ \ 25.\ 5$$

§. 5.

Endlich lassen sich aus den gegebenen Ausdrücken durch einige leichte Verwandlungen andere genäherte finden, welche dann vorzüglich brauchbar seyn werden, wenn π nur geringe Werthe hat, oder die scheinbaren Gröſsen von den wahren nur wenig verschieden sind. So geben die Gleichungen §. 4. I. wenn man

$$\text{Tg}\ \psi = \frac{\text{Tg B}}{\text{Cos}\ (\lambda - \text{L})}$$

setzt,

$$\lambda' - \lambda = \frac{\pi\ \text{Cos B}}{\text{Cos}\ \beta}\ \text{Sin}\ (\lambda - \text{L})$$

$$\beta' - \beta = \frac{\pi\ \text{Sin B}}{\text{Sin}\ \psi}\ \text{Sin}\ (\beta - \psi)$$

$$\Delta' - \Delta = \frac{\pi\ \Delta\ \text{Cos B}}{\text{Cos}\ \beta}\ \text{Cos}\ (\lambda - \text{L})$$

und diese Ausdrücke werden auch sehr nahe die wahren Gröſsen aus den scheinbaren geben, wenn man bloſs die Zeichen der Buchstaben versetzt, so daſs man hat

$$\text{Tg}\ \psi = \frac{\text{Tg B}}{\text{Cos}\ (\lambda' - \text{L})}$$

$$\lambda' - \lambda = \pi\ \frac{\text{Cos B}}{\text{Cos}\ \beta'}\ \text{Sin}\ (\lambda' - \text{L})$$

$$\beta' - \beta = \pi\ \frac{\text{Sin B}}{\text{Sin}\ \psi}\ \text{Sin}\ (\beta' - \psi)$$

$$\Delta' - \Delta = \pi\ \Delta'\ \frac{\text{Cos B}}{\text{Cos}\ \beta'}\ \text{Cos}\ (\lambda' - \text{L})$$

und diese oder die vorhergehenden Gleichungen geben wieder die Parallaxe der Länge und Breite, wenn λ λ' L die wahre und scheinbare Länge des Gestirns und des Zeniths, und β β' B die wahre und scheinbare Breite des Gestirns und des Zeniths ist; sie geben ferner die Parallaxe der Rectascension und Declination, wenn λL und βB die Rectascension und Declination des Gestirns und des Zeniths ist. Sie geben endlich die Parallaxe des Azimuts und der Höhe, wenn

λ das Azimut,

β die Höhe, und

$B = 90 - (\varphi - \varphi')$ und

$L = 0$ ist.

SECHSTES KAPITEL.

Zeiten.

§. 1.

Die Astronomen messen die Zeit im Allgemeinen durch den Winkel, den ein gleichförmig bewegter Punkt um einen unveränderlichen Mittelpunkt beschreibt. Nach der Theorie und den Beobachtungen ist die tägliche scheinbare Rotation des Himmels um die Erde, oder eigentlich die Rotation der Erde selbst um ihre Axe, eine solche äufserst gleichförmige Bewegung, daher man auch diese Bewegung vorzugsweise zur Bestimmung der Zeit gewählt hat.

Der ganze Umlauf eines jeden Punktes des Himmels wird in 24 Stunden, oder auch in 360 Grade eingetheilt. Die Verwandlung der Winkel in Zeit (der Grade in Stunden), oder umgekehrt, der Zeit in Winkel, ist also nur eine Aenderung der Art einzutheilen, und welche gleichförmige Bewegung irgend eines Gestirns man auch zur Darstellung der Zeit annehmen mag, so sind immer 24 Stunden dieses Gestirns gleich 360 Graden, also auch jede Stunde gleich 15 Graden, jede Zeitminute gleich 15 Raumminuten u. s. w.

Man unterscheidet aber im Allgemeinen drey verschiedene Zeiten.

§. 2.

Wahre Zeit ist der in Zeit verwandelte Stundenwinkel der Sonne. Der Stundenwinkel wird durch einen Bogen des Aequators gemessen; die Sonne bewegt sich aber nicht im Aequator, sondern in der Ecliptik, und zwar in der letzten Ebene, wie wir unten sehen werden, mit einer ungleichförmigen Bewegung. Aus diesen beyden Ursachen ist die wahre Zeit selbst etwas Ungleichförmiges, und daher zu einem allgemeinen Mafse nicht unmittelbar anwendbar.

Um aber doch durch die Sonne, welche sich zu diesem Zwecke besonders darbietet, ein gleichförmiges Zeitmafs zu erhalten, denkt man sich eine andere, mittlere Sonne, S, die sich mit gleichförmiger Bewegung in der Ecliptik, und zwar so bewegt, dafs sie mit der wahren Sonne zugleich durch die zwey Punkte geht, wo die wahre Sonne ihre gröfste und kleinste Geschwindigkeit hat. Diese mittlere Sonne, deren Umlauf um die Erde also derselbe mit dem der wahren Sonne ist, dient zur Verbesserung der in der That Statt habenden Ungleichheiten der Bewegung der wahren Sonne. Um aber auch noch die blofs scheinbaren Ungleichheiten dieser mittlern Sonne, die von der Neigung ihrer Bahn gegen den Aequator entsteht, wegzuschaffen, denkt man sich eine zweyte mittlere Sonne, S′, die sich mit gleichförmiger Bewegung in dem Aequator, und zwar so bewegt, dafs sie mit der ersten mittlern Sonne S zugleich durch die beyden Punkte der Nachtgleichen geht. Die Umlaufszeiten dieser drey Sonnen sind also gleich, aber die erste bewegt sich in der Ecliptik mit ungleichförmiger, die zweyte S in derselben Ebene mit gleichförmiger, und die dritte S′ im Aequator ebenfalls mit gleichförmiger Bewegung.

Mittlere Zeit heifst der in Zeit verwandelte Stundenwinkel der zweyten mittlern, im Aequator sich bewegenden Sonne S′; Sternzeit endlich ist der in Zeit verwandelte Stundenwinkel des mittlern (von der Nutation befreyten) Frühlingspunktes. Der wahre, mittlere und der Sterntag fängt an, wenn die wahre, die zweyte mittlere Sonne, und der mittlere Frühlingspunkt durch den Meridian geht. Die Dauer des wahren, mittlern, oder des Sterntages ist die Zeit zwischen zwey nächsten Durchgängen dieser drey Punkte durch den Meridian.

§. 3

Sey m der mittlere Sonnentag, und s der Sterntag. Legt die mittlere Sonne in irgend einem Zeitraume den Bogen μ, und der Frühlingspunkt in derselben Zeit den Bogen σ zurück, so hat man, da für gleiche Zeiten sich die Bogen wie verkehrt die Umlaufszeiten verhalten,

$$\frac{\mu}{\sigma} = \frac{s}{m} \; . \; . \; . \; (I)$$

Wenn man daher das Verhältnifs $\frac{s}{m}$ kennt, so wird man mittels dieser Gleichung jeden Zeitraum, der in mittlerer Zeit ausgedrückt ist, durch Sternzeit ausdrücken können, und umgekehrt.

I. Sey VBA (Fig. 5) der Aequator, AC der Meridian, B die mittlere Sonne, V der mittlere Frühlingspunkt.

Nennt man $S = VA$ die absolute Sternzeit für irgend einen gegebenen Augenblick, $M = BA$ die entsprechende mittlere Zeit, und endlich $a = VB$ die Rectascension der zweyten mittlern, oder, was dasselbe ist, die Länge der ersten mittlern Sonne, beyde vom scheinbaren Aequinoctium gerechnet, so ist

$$S = a + M$$

Ist also a für irgend eiuen Augenblick bekannt, so wird man durch die letzte Gleichung für diesen Augenblick die Sternzeit finden, wenn die mittlere Zeit gegeben ist, und umgekehrt.

Es sey A die Länge der ersten mittlern Sonne für den mittlern Mittag des gegebenen Tages, vom scheinbaren Frühlingspunkte gezählt, und durch 15 dividirt, oder in Zeit ausgedrückt, und b die constante Zunahme dieser Länge in 24 Stunden mittlerer Zeit, so ist ihre Zunahme in M Stunden mittlerer Zeit gleich

$$\frac{b}{24} M,$$

also ist

$$a = A + \frac{b}{24} . M$$

wodurch die letzte Gleichung wird

$$M = \frac{24}{24 + b} (S - A)$$

oder

$$S = A + \frac{24 + b}{24} M$$

welchen Gleichungen man auch folgende Gestalt geben kann:

$$\left.\begin{aligned} M &= S - A - \frac{b}{24+b} (S - A) \\ S &= A + M + \frac{b}{24} M \end{aligned}\right\} (II)$$

da aber A durch die Tafeln oder durch die Ephemeriden als gegeben angesehen werden kann, so findet man mittels der Gleichungen II. für jede bekannte absolute Sternzeit die entsprechende mittlere Zeit und umgekehrt, wenn b bekannt ist. Es ist aber die Bewegung der ersten mittlern Sonne in 24 Stunden mittlerer Zeit

$$0^{\circ}\ 59'\ 8''\ 33$$

also ist

$$b = \frac{0^{\circ}\ 59'\ 8''\ 33}{15} = 0.06571$$

und da man offenbar hat

$$s : m = 24^h : 24^h + b$$

so ist

$$\frac{s}{m} = \frac{24}{24+b} = 0.9972695$$

$$\frac{m-s}{m} = \frac{b}{24+b} = 0.0027305$$

$$\frac{m-s}{s} = \frac{b}{24} = 0.002738$$

Die Gleichung I. ist daher auch

$$\mu = \sigma - \frac{(m-s)}{m}\sigma$$

oder

$$\sigma = \mu + \frac{(m-s)}{s}\mu$$

das heifst

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \sigma - (0.0027305)\,\sigma \\ \sigma &= \mu + (0.002738)\,\mu \end{aligned}\right\} \text{I}'$$

und eben so die Gleichungen II.

$$\left.\begin{aligned} M &= S - A - (0.0027305)\,(S - A) \\ S &= A + M + (0.002738)\,M \end{aligned}\right\} \text{II}'$$

§. 4.

Hat man eine Tafel, welche für jede Stunde $0^h\,0027305 = 9''8298$, für jede Minute $0''.1638$, für jede Secunde $0''.0027$ gibt, so wird man damit die beyden ersten der Gleichungen I′ und II′ sehr bequem entwickeln. Für die beyden andern dieser Gleichungen könnte man eine andere Tafel entwerfen, die für jede Stunde

$$0^h.002738 = 9''8568$$

gäbe. Allein man wird mit einiger Abänderung auch die erste Tafel anwenden können. Ist nämlich

$$\frac{m-s}{m} = 0\;0027305 = c,$$

so ist

$$\frac{m-s}{s} = \frac{1}{1-c} - 1 = c + c^2 + c^3 + c^4 +$$

Die Gleichung

$$\sigma = \mu + \mu \frac{(m-s)}{s}$$

kann man daher auch so darstellen,

$$\sigma = \mu + c\,\mu + c^2\,\mu + c^3\,\mu +$$

Man wird daher aus der ersten Tafel wie zuvor suchen

die erste Correction $c\,\mu$ mit μ,

dann die zweyte Correction $c.\,c\mu$ oder $c^2\,\mu$

mit der ersten Correction $c\,\mu$,

dann die dritte — — $c.\,c^2\,\mu$ oder $c^3\,\mu$

mit der zweyten — — $c^2\,\mu$ u. s. w.,

und die Summe aller dieser Correctionen zu μ addirt, gibt σ.

Exempel. Für die Gleichungen (I′)

sey die Sternzeit $\sigma = 14^h\ 3'\ 32$ gegeben.

Man drücke dasselbe Intervall in mittlerer Zeit aus.

14^h . . .	$2'$	17″613	
3′ . . .		0.491	
32″ . . .		0.087	
	2	18.191	Acceleration der Fixterne
$\sigma = 14$	3	32.000	Sternzeit
$\mu = 14$	1	13.809	mittlere Zeit.

Sey umgekehrt

$$\mu = 100^h\ 24'\ 0''\ 415$$

gegeben; man suche σ.

$4.\ 24^h$ gibt	15′ 43″632
4^h . .	39. 318
24′ 0″ 415	3. 933
$c\,\mu =$	16′ 26″883

16′ gibt	2″621
26″.883 . .	0. 074
$c^2\,\mu =$	2. 695

$$2'' \text{ gibt } 0''.005$$
$$0''.695 \;..\; 0.002$$
$$c^3 \mu = 0.007$$
$$c\mu + c^2\mu + c^3\mu = 16'\ 29''\ 585$$
$$\mu = 100^h\ 24'\ 0.415$$
$$\sigma = 100\ 40\ 30.000$$

Für die Gleichungen (II')

1811 der 13. September in Kasan ist für den mittlern Mittag

$$A = 11^h\ 25'\ 45''\ 696$$

Es sey für diesen Tag die Sternzeit

$$S = 3^h\ 2'\ 30''\ 426$$

gegeben, so ist

$$S = 3^h\ 2'\ 30''\ 426$$
$$A = 11\ 25\ 45.696$$
$$15\ 36\ 44.730$$
$$-2\ 33.461$$
$$M = 15\ 34\ 11.269 \text{ mittl. Zeit.}$$

Um die Länge A von dem durch die Nutation afficirten Frühlingspunkte zu erhalten, mufs man zu der mittlern Länge der Sonne vom mittlern Frühlingspunkte, wie sie die Sonnentafeln gewöhnlich geben, noch die Nutation in Rectascension (Cap. III. §. 6.), oder

$$-7''18 \text{ Cotg Schiefe d. Ecl. Sin aufst. Knot. } ☾$$

addiren. Wollte man es mit einigen Astronomen vorziehen, für A das Supplement dieser Gröfse zu

$$360 \text{ oder } \alpha = 24 - A$$

zu brauchen, wo α die Aequinoctialdistanz der mittlern Sonne genannt wird, so sind die Gleichungen II'

$$\left.\begin{array}{l} M = (S + \alpha) - 0.0027305\ (S + \alpha) \\ S' = M + 0.002738\ M - \alpha \end{array}\right\}$$

§. 5.

Das Vorhergehende reicht hin, für jede gegebene mittlere Zeit die Sternzeit, und umgekehrt, zu finden. Wie man aber aus der mittlern Zeit die wahre finden soll, setzt Kenntnisse voraus, welche erst im zweyten Buche gegeben werden.

Ist L, l, α die mittlere Länge, die wahre Länge und die wahre Rectascension der Sonne für irgend eine Zeit, r die Differenz der wahren Länge und der wahren Rectascension, alle diese Gröfsen vom mittlern Frühlingspunkte genommen, und bezeichnet man dieselben Gröfsen für den wahren (durch die Nutation veränderten) Frühlingspunkt durch

$$L' \; l' \; \alpha',$$

so hat man nach Cap. III. §. 6.

$$\alpha' = l + r - 7''.2 \text{ Cotg } e \text{ Sin } \Omega \text{☾}$$

und

$$L' = L - 7''.2 \frac{\text{Sin } \Omega \text{☾}}{\text{Sin } e}$$

wo e die Schiefe der Ecliptik, und ☊☾ die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondesbahn in der Ecliptik ist.

Zeitgleichung nennt man den Unterschied der wahren und mittlern Zeit, oder den Unterschied der Rectascensionen der wahren und der zweyten mittlern Sonne S', in Theilen der mittlern Zeit ausgedrückt. Ist dt diese Zeitgleichung, so ist

$$dt = \frac{1}{15} (\alpha' - L')$$

das heifst

$$dt = \frac{1}{15} \left(l - L + r + 7''.2 \text{ Sin } \Omega \text{☾} \left(\frac{1}{\text{Sin } e} - \frac{1}{\text{Tg } e} \right) \right)$$

oder wenn man

$$e = 23^\circ \; 28' \text{ setzt,}$$

$$dt = \frac{1}{15} (l - L + r) + 0''.10 \text{ Sin } \Omega \text{☽}$$

Von diesem Ausdrucke wird man den Werth der Gröfse r leicht finden, wenn man bemerkt, dafs

$$\text{Tg } \alpha = \text{Cos } e \text{ Tg } l$$

ist, und dafs man hat

$$r = \alpha - l.$$

Man findet so nach Cap. I.

$$r = -Tg^2 \frac{e}{2} \sin 2l + \tfrac{1}{2} Tg^4 \frac{e}{2} \sin 4l - \tfrac{1}{3} Tg^6 \frac{e}{2} \sin 6l + \ldots \quad (A)$$

Nicht so leicht findet man den Werth der Gröſse $l - L$. Wir werden im zweyten Buche sehen, daſs man hat

$$\begin{aligned} l - L = & \left(2a - \frac{a^3}{4}\right) \sin (L - \pi) \\ & + \left(\frac{5}{4} a^2 - \frac{11}{24} a^4\right) \sin 2 (L - \pi) \\ & + \frac{13}{12} a^3 \sin 3 (L - \pi) \\ & + \frac{103}{96} a^4 \sin 4 (L - \pi) \ldots \quad (B) \end{aligned}$$

wo für das Jahr 1800

$$a = 0.01679$$

$$\pi = 279^\circ \; 29' \; 30''$$

und

$$e = 23^\circ \; 27' \; 57''$$

Substituirt man diese Werthe in dem vorhergehenden Ausdruck, so erhält man, wenn man bloſs auf die vorzüglichsten Glieder Rücksicht nimmt, und in der Gleichung (A) den Werth von l durch L aus der Gleichung (B) substituirt,

$$\begin{aligned} dt = & \; 79'' \sin L + 436'' \cos L \\ & - 597 \sin 2L + 2 \cos 2L \\ & - 3 \sin 3L - 19 \cos 3L \\ & + 13 \sin 4L - 0''1 \sin \Omega \,☾ \end{aligned}$$

und durch diesen Ausdruck kann man die Werthe von dt in eine Tafel bringen, deren Argument die mittlere Länge L der Sonne ist. Wir werden später auf diesen Gegenstand zurückkommen. Hier wird es hinreichen, zu bemerken, daſs man diese Zeitgleichung immer aus den astronomischen Ephemeriden erhalten kann, wo sie für den Mittag eines jeden Tages angegeben wird. Der Gebrauch dieser Ephemeriden, die in den Händen jedes Astronomen sind, ist zu einfach, um hier einer umständlichen Erklärung zu bedürfen; auch ist ihnen diese Erklärung gewöhnlich beygelegt. Obschon diese Ephemeriden für den Meridian ihres Ortes entworfen sind, so ist es doch leicht, daraus die Zahlen derselben für den Mittag (also auch für jede andere Stunde), eines andern Ortes, dessen Längendifferenz mit dem Orte der Ephemeriden bekannt ist, abzuleiten. So liegt z. B. Wien $0^h\ 12'\ 0'' = 0.^h2$ östlicher, als Berlin. Nimmt man daher, wie es meistens erlaubt ist, die Zahlen der Berliner Ephemeriden von einem Tage zum andern gleichförmig zu- oder abnehmend an, und ist a die Differenz der zwey nächsten Zahlen der Berliner Ephemeriden für zwey nächstfolgende Tage, so ist

$$x = \frac{0.2}{24}\, a = 0.00833\ a$$

und diese Gröſse x wird von den Berliner Zahlen subtrahirt, wenn diese Zahlen wachsen, und umgekehrt, um die entsprechenden Zahlen für den Meridian von Wien zu erhalten. Bloſs für den Mond, der seine Lage am Himmel sehr schnell ändert, darf man die aufeinanderfolgenden Zahlen der einzelnen Tage nicht mehr als gleichförmig zu- oder abnehmend annehmen, daher man, um den Ort des Mondes für andere Zeiten zu finden, die bekannten Methoden der [redacted] anwenden muſs. Da uns diese Methoden auch in der Folge sehr nützlich seyn werden, so wollen wir einige der vorzüglichsten hier kurz anzeigen.

I. Hat man eine Reihe von Zahlen

$$y,\ y',\ y'',\ y''' \ldots$$

die zu den analogen Werthen von

$$x,\ x + \Delta x,\ x + 2\Delta x,\ x + 3\Delta x \ldots$$

gehören, so ist der Werth von y, welcher zu

$$(x + n\Delta x)$$

gehört, oder so ist

$$y^{n} = y + n\Delta y + \frac{n.\, n-1}{1.\, 2}\Delta^2 y$$

$$+ \frac{n.\, n-1.\, n-2}{1.\, 2.\, 3.}\Delta^3 y + \frac{n.\, n-1.\, n-2.\, n-3}{1.\, 2.\, 3.\, 4.}\Delta^4 y + $$

vorausgesetzt daſs man hat

$$\Delta\ y = y' - y$$
$$\Delta^2 y = y'' - 2y' + y$$
$$\Delta^3 y = y''' - 3y'' + 3y' - y$$

und überhaupt

$$\Delta^m y = y^m - m y^{m-1} + \frac{m.\, m-1}{1.\, 2} y^{m-2}$$

$$- \frac{m.\, m-1.\, m-2}{1.\, 2.\, 3.} y^{m-3} + \frac{m.\, m-1.\, m-2.\, m-3}{1.\, 2.\, 3.\, 4.} y^{m-4} - \ldots$$

Eine bequeme Tafel, welche die Werthe von

$$n, \quad \frac{n.\, n-1}{1.\, 2}, \quad \frac{n.\, n-1.\, n-2}{1.\, 2.\, 3.}$$

enthält, s. m. in Berl. Ephem. 1779. p. 141.

Ex. Man suche die Länge des Mondes für 1810. Juni 24. um 6 Uhr Abends, Berliner Zeit. Aus den Berliner Ephemeriden hat man

	x	. . . . y	= Länge des Mondes
Juni	24	y	$= 15° \; 5' \; 21''.0$
Mittag	25	y'	$= 27 \; 57 \; 22$
	26	y''	$= 40 \; 33 \; 11$
	27	y'''	$= 52 \; 56 \; 13$
	18	y''''	$= 65 \; \; 9 \; 19$

Daraus folgt

$$\Delta \; y = + \; 12° \; 52' \; \; 1''$$
$$\Delta^2 \; y = - \qquad 16' \; 12''$$
$$\Delta^3 \; y = + \qquad 3' \; 25''$$
$$\Delta^4 \; y = - \qquad \quad 34''$$

Da die gleichen Intervalle

$$\Delta \; x = 24^h,$$

so ist

$$n = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

also

$$
\begin{array}{lrrrl}
y \; . \; . \; . \; . & : \; . & 15° & 5' & 21''.\,0 \\
n\Delta y = \frac{1}{4}(12° \, 52' \, 1'') & . \; + & 3 & 13 & 0.\, 25 \\
\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{8}\right)\left(-16' \, 12''\right) & . \; . \; + & & 1 & 31.\, 13 \\
-\frac{3}{4.\,8}\left(-\frac{7}{3.\,4}\right)\left(3' \, 25''\right) & . \; + & & 0 & 11.\, 21 \\
\frac{3.\,7.}{4.\,8.\,3.\,4}\left(-\frac{11}{4.\,4}\right)\left(-34''\right) & . \; . \; + & & & 1.\, 28 \\
\hline
y^n = & & 18° & 20 & 4''.\,9
\end{array}
$$

gesuchte Länge des Mondes.

II. Es sey y irgend eine Function von x. Ohne diese Function selbst zu kennen, seyen doch einzelne Werthe derselben gegeben, so daſs z. B.

$$y = A, B, C, D \ldots$$

für

$$x = \omega, a, b, c \ldots$$

bekannt ist. Man suche für jeden andern Werth von x den ihm entsprechenden Werth von y.

Man kann den gesuchten Ausdruck zwischen y und x als die Gleichung einer Curve ansehen, welche für die Abscissen

$$\omega, a, b, c \ldots$$

die Ordinaten

$$A, B, C \ldots$$

gibt. Die Gleichung dieser Curve wird im Allgemeinen die Form haben

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$$

Um aber den gegebenen Bedingungen Genüge zu thun, wird man haben

$$A = \alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 +$$
$$B = \alpha + \beta a + \gamma a^2 +$$
$$C = \alpha + \beta b + \gamma b^2 +$$

Da nun y durch x so ausgedrückt werden soll, dafs

$$y \text{ gleich } A, B, C \ldots$$

werde, wenn

$$x \text{ gleich } \omega, a, b \ldots$$

wird, so kann man annehmen

$$y = A X + B X' + C X'' +$$

wo aber

$$X \quad X' \quad X'' \ldots$$

so gewählt werden müssen, dafs für $x = \omega$ sey

$$X = 1, \quad X' = 0, \quad X'' = 0 \ldots$$

dafs ferner für $x = a$ sey

$$X = 0, \quad X' = 1, \quad X'' = 0 \ldots$$

und dafs für $x = b$ sey

$$X = 0, \quad X' = 0, X'' = 1 \text{ u. s. w.}$$

Diesen Bedingungen geschieht aber genug, wenn man annimmt

$$X = \frac{(x-a)\ (x-b)\ (x-c)\ (x-d)\ldots}{(\omega-a)\ (\omega-b)\ (\omega-c)\ (\omega-d)\ldots}$$

$$X' = \frac{(x-\omega)\ (x-b)\ (x-c)\ (x-d)}{(a-\omega)\ (a-b)\ (a-c)\ (a-d)}\ldots$$

$$X'' = \frac{(x-\omega)\ (x-a)\ (x-c)\ (x-d)}{(b-\omega)\ (b-a)\ (b-c)\ (b-d)}\ldots$$

Substituirt man diese Werthe von X, X' . . in dem letzten Ausdruck von y, so erhält man

$$y = \frac{x-a.\ x-b.\ x-c.\ x-d\ldots}{\omega-a.\ \omega-b.\ \omega-c.\ \omega-d\ldots}.\ A$$

$$+ \frac{x-\omega.\ x-b.\ x-c.\ x-d\ldots}{a-\omega.\ a-b.\ a-c.\ a-d\ldots}.\ B$$

$$+ \frac{x-\omega.\ x-a.\ x-c.\ x-d\ldots}{b-\omega.\ b-a.\ b-c.\ b-d\ldots}.\ C \text{ u. s. w.}$$

Andere Methoden der Interpolation findet man im Berl. Jahrb. für d. J. 1783. Hieher gehört auch die treffliche Abhandlung Lagranges, Recherches sur la manière de former des tables des planetes d'après les seules observations, in Histoire de l'Acad. roy. des scienc. p. l. 1772 Vol. I.

SIEBENTES KAPITEL.

Bestimmung der Zeit durch Beobachtungen.

§. 1.

Wir nehmen hier die Probleme wieder auf, deren Reihe zu Ende des 1. Capitels aus den dort angezeigten Gründen unterbrochen wurde. Da die Körper des Himmels in einer immerwährenden Bewegung gegen die Ebene des Horizonts, des Meridians u. s. w. sind, auf welche wir ihre Lage zu beziehen pflegen, so muſs der Astronom bey jeder Beobachtung nicht nur diese ihre Lage, sondern auch die Zeit genau angeben, für welche diese Lage Statt hat. Diese Zeitbestimmung aus Beobachtungen gehört zu den wichtigsten und interessantesten der practischen Astronomie, und sie soll der Inhalt dieses Capitels seyn.

Das einfachste und sicherste Mittel zur Zeitbestimmung ist die Methode der correspondirenden, d. h. der auf beyden Zeiten des Meridians gleichen Höhen eines Gestirnes. Ohne diese Höhe selbst, ohne die Lage des Gestirns am Himmel, oder die des Beobachters auf der Erde zu kennen, wird man, wenn man nur von der genauen Gleichheit der Höhen und von dem gleichförmigen Gang der Uhr versichert ist, die Mitte der Uhrzeiten zwischen beyden Beobachtungen auch für die Uhrzeit der Culmination des beobachteten Gestirns selbst annehmen können, da nach dem Vorhergehenden zu gleichen Höhen auch gleiche bloſs in ihren Zeichen entgegengesetzte Stundenwinkel gehören, wenn die Declination des Gestirns unveränderlich ist.

Diese Uhrzeit der Culmination mit der durch die Berechnung des bekannten Gestirns gegebenen Zeit der Culmination wird den Stand der Uhr gegen die gebrauchte wahre, mittlere oder Sternzeit, für den Augenblick der Culmination geben. Dieselbe Untersuchung des Standes der Uhr zu irgend einer andern, einen oder mehrere Tage entfernten Zeit, wiederhohlt, gibt einen zweyten Stand der Uhr, und aus beyden wird man den täglichen oder stündlichen Gang der Uhr gegen die gebrauchte Zeit ableiten. Aus dem so bekannten Stand und Gang der Uhr aber findet man dann sofort durch eine einfache Proportion die wahre Zeit jeder anderen Beobachtung, deren Uhrzeit gegeben ist.

Gesetzt man habe, um diefs durch ein Beyspiel deutlich zu machen, gefunden, dafs die Uhr im wahren Mittag gegeben habe

$$\text{den 4. May } 0^h\ 2'\ 27''$$
$$5. \ -\ \ 0\ \ 2\ \ 57$$

so folgt daraus, dafs der Stand der Uhr gegen wahre Zeit den 4. May Mittags $2'\ 27''$, ihr täglicher Gang aber $30''$ accelerirend sey. Wurde aber den 4. May Abends eine Beobachtung um die Uhrzeit $10^h\ 14'\ 32''$ gemacht, so hat man

$$24^h : 10^h\ 12'\ 5'' = 30'' : x$$

oder

$$x = 12''\,75$$

also ist

$$10^h\ 14'\ 32''.0 - 2'\ 27''.0 - 12''\,75 = 10^h\ 11'\ 52''\,25$$

die wahre Zeit dieser Beobachtung.

§. 2.

Ist aber die Declination des Gestirns, von welchem man die correspondirenden Höhen genommen hat, ~~veränderlich~~, wie diefs z. B. bey der Sonne Statt hat, so sind die zu gleichen Höhen gehörenden Stundenwinkel nicht mehr gleich. Sind nämlich $s\ s'$ diese Stundenwinkel und $t\ t'$ die Uhrzeiten der gleichen Höhen, so ist die Zeit der Culmination nicht mehr gleich

$$T = \frac{t + t'}{2}$$

sondern gleich

$$T \pm \frac{s - s'}{15}$$

Um diese Correction zu finden, sey

$$s\ \delta \text{ und } s'\ \delta'$$

der Stundenwinkel und die Declination für die beobachteten gleichen Höhen h vor und nach der Culmination, so ist

$$\mathrm{Sin}\ h = \mathrm{Sin}\ \varphi\ \mathrm{Sin}\ \delta + \mathrm{Cos}\ \varphi\ \mathrm{Cos}\ \delta\ \mathrm{Cos}\ s$$
$$\mathrm{Sin}\ h = \mathrm{Sin}\ \varphi\ \mathrm{Sin}\ \delta' + \mathrm{Cos}\ \varphi\ \mathrm{Cos}\ \delta'\ \mathrm{Cos}\ s'$$

(AM = BM, AZ = BZ = bZ [illegible]
in b [illegible] bZ = AZ [illegible] [illegible]].
[illegible] δ [illegible] $ds = \frac{d\delta}{\sin s}(\mathrm{tg}.\varphi - \mathrm{tg}\,\delta \cos s)$
[illegible] $d\delta$ $(\mathrm{tg}\,\delta \cos s - \mathrm{tg}.\varphi)$

Uhr: $\cot s \cos\delta - \cot s' \cos\delta' + \mathrm{tg}\,\varphi(\sin\delta - \sin\delta') = 0$

$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(s'-s) = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\delta'-\delta)}{\sin\frac{1}{2}(s'-s)}\left(\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\cos\frac{1}{2}(s'-s)} - \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)\cos\tfrac{1}{2}(s'+s)\right)$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen durch Cos δ' und die zweyte durch — Cos δ, so gibt ihre Summe

$$\text{Sin h}\,(\text{Cos}\,\delta - \text{Cos}\,\delta') + \text{Sin}\,\varphi\,\text{Sin}\,(\delta - \delta')$$
$$- \text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}\,\delta\,\text{Cos}\,\delta'\,(\text{Cos}\,s' - \text{Cos}\,s) = 0$$

$\frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\delta'-\delta)}{\sin\frac{1}{2}(s'+s)}$ [illegible] $+\ \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta)$ [illegible]

oder

$$\text{Sin}\,\frac{s - s'}{2}$$
$$= \frac{\text{Sin}\,\varphi\,\text{Sin}\,(\delta - \delta') - 2\,\text{Sin h Sin}\,\frac{\delta + \delta'}{2}\,\text{Sin}\,\frac{\delta - \delta'}{2}}{2\,\text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}\,\delta\,\text{Cos}\,\delta'\,\text{Sin}\,\frac{s + s'}{2}}$$

oder kurz $\tfrac{1}{2}(s'-s) = \frac{\frac{1}{2}(\delta'-\delta)}{\sin\frac{1}{2}(s'+s)}$ [illegible] [in Zeit verwandelt $\div 15$ die Corr.]

und dieser Werth von $\frac{s - s'}{2}$ ist die gesuchte Correction. Bequemer und immer genau genug ist folgender Ausdruck, den man leicht aus dem vorhergehenden ableiten wird

$$s - s' = (\delta - \delta')\left(\frac{\text{Tg}\,\varphi}{\text{Sin}\,s} - \frac{\text{Tg}\,\delta\,\text{Cos}\,s}{\text{Sin}\,s}\right)$$

Ist also x die gesuchte Correction in Zeit, und $d\delta'$ die Veränderung der Declination in der h a l b e n Zwischenzeit Θ der Beobachtungen, so ist

$$x = \frac{d\delta}{15}\left(\frac{\text{Tg}\,\varphi}{\text{Sin}\,15\,\Theta} - \text{Tg}\,\delta\ \text{Cotg}\,15\,\Theta\right)$$

Auf dieselbe Art kann man, wenn man eine Höhe Abends und die andere correspondirende des andern Tags Morgens nimmt, die Zeit der untern Culmination der Sonne oder die Zeit der wahren Mitternacht finden. Ist nämlich wieder Θ die halbe Zwischenzeit der Beobachtung, so ist, wenn für den Mittag $s = 15\,\Theta$ war, für die Mitternacht

$$s = 180 + 15\,\Theta$$

also die Correction der Mitternacht

$$x = -\frac{d\delta}{15}\left(\frac{\text{Tg}\,\varphi}{\text{Sin}\,15\,\Theta} + \text{Tg}\,\delta\ \text{Cotg}\,15\,\Theta\right)$$

In beyden Ausdrücken ist für südliche Declinationen Tg δ negativ, und wenn die Länge der Sonne im ersten oder vierten Quadranten ist, ist $d\delta$ negativ, dessen Werth man aus den Ephemeriden nehmen kann.

Geht die Uhr in einer Stunde gegen die gebrauchte Zeit um α^h voraus oder zurück, so mus der vorhergehende Werth von x im ersten Falle durch $(1 + \alpha^h)$ und im zweyten durch $(1 - \alpha^h)$ multiplicirt werden. — Eine andere kleine Correction dieser Zeitbestimmung wird durch die Betrachtung erhalten, dafs die Refraction nach Mittag, wegen der gröfseren Erwärmung der Atmosphäre, gewöhnlich kleiner ist, als vor Mittag, daher die Sonne nach Mittag etwas früher zu derselben' Höhe kommt, als sie ohne dieser Verminderung der Refraction gekommen seyn würde, und der aus den Beobachtungen geschlossene Mittag fällt etwas vor dem wahren Mittag. Diese Verbesserung, die meistens unbeträchtlich ist, läfst sich, wie man leicht finden wird, so ausdrücken

$$+\frac{d\,r\ \mathrm{Cos}\ h}{30\ \mathrm{Cos}\ \varphi\ \mathrm{Cos}\ \delta\ \mathrm{Sin}\ s}$$

wo dr die Differenz der Refractionen für die vor- und nachmittäglichen Höhen ist, Die vorhergehende Verbesserung wegen der Aenderung der Declination, kann man in sehr bequeme Tafeln bringen, die bereits in vielen astronomischen Schriften enthalten und allgemein bekannt sind.

Ex. In Göttingen wurden den 27. März 1794 folgende correspondirende Beobachtungen des obern Sonnenrandes genommen

Beob. Höhen	Zeit der Uhr	
	Vormittag	Nachmittag
22° 55'. 5	20^h 46' 9''	4^h 16' 4''
23 20. 5	49 9	13 3
23 25. 5	49 45	12 28
23 30. 5	50 20	11 51

Die halbe Summe der ersten und letzten Uhrzeit gibt

$$0^h\ 31'\ 6''\ 5$$

für die Uhrzeit des unverbesserten Mittags. Die halbe Zwischenzeit dieser Beobachtungen aber ist

$$3^h\ 44'\ 57''\ 5$$

oder in Bogen

$$(15° = 1^h)\ 56°\ 14'\ 22''\ 5.$$

Die Polhöhe ist

$$\varphi = 51°\ 31'\ 54''$$

Die Declination der Sonne im Mittag (aus den Ephemeriden) ist 2° 47' und die Aenderung derselben 23' 26'' also ihre Aenderung in 3^h 45' gleich

$$d\delta = -219''\ 6$$

negativ, da die Sonne im ersten Quadranten der Länge ist. Es ist also

$$\frac{d\delta}{15} \cdot \frac{\mathrm{Tg}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,s} = -\,22''\,17$$

$$\frac{d\delta}{15} \cdot \mathrm{Tg}\,\delta\;\mathrm{Cotg}\,s = -\,0.\,48$$

und die gesuchte Correction ist

$$x = -\,21''\,69$$

also die Uhrzeit des wahren Mittags

$$0^h\;31\;6''\,5 - 21''\,69 = 0^h\;30'\,44''\,8$$

Eben so lassen sich die drey folgenden correspondirenden Höhen behandeln, doch wird es bequemer und in der Ausübung immer erlaubt seyn, den unverbesserten Mittag sofort im Mittel aus allen Beobachtungen zu suchen, und die Correction nur einmal für die mittlere der vor- und nachmittägigen Beobachtungen zu berechnen, weil für kleine Zwischenzeiten diese Correctionen beynahe der Zeit proportional sind.

Wenn die Uhr zwischen zwey nächsten Culminationen der Sonne nicht nahe 24^h, sondern z. B. $24^h\,4'$ gäbe, so müſste man die vorige Correction x noch durch

$$\frac{24^h\;4'}{24^h} = 1.003$$

multipliziren, wodurch sie gleich $-\,21''\,75$ würde. Ueber eine Methode, aus gleichen, aber nicht correspondirenden Sonnenhöhen die Zeit zu bestimmen, s. m. Monat. Corr. 1806. Juli. Aus gleichen Höhen zweyer verschiedener Sterne die Zeit zu finden s. m. Berl. Jahrb. 1789 p. 130. Endlich aus nahe am Meridian genommenen Höhen. Berl. Jahrb. 1802. p. 225.

§. 3.

Probl. Aus einer einzigen beobachteten Höhe die Zeit finden.

Die Auflöſung dieser für die practische Astronomie wichtigen Aufgabe ist in folgenden Ausdrücken enthalten

$$\mathrm{Cos}\,s = \frac{\mathrm{Sin}\,h - \mathrm{Sin}\,\varphi\;\mathrm{Sin}\,\delta}{\mathrm{Cos}\,\varphi\;\mathrm{Cos}\,\delta}$$

oder wenn man

$$h = 90 - z$$

setzt,

$$\operatorname{Sin}^2 \frac{s}{2} = \frac{\operatorname{Sin} \frac{z-\varphi+\delta}{2} \operatorname{Sin} \frac{z+\varphi-\delta}{2}}{\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\delta}$$

oder endlich

$$\operatorname{Cos}^2 \frac{s}{2} = \frac{\operatorname{Cos} \frac{\varphi+\delta+z}{2} \operatorname{Cos} \frac{\varphi+\delta-z}{2}}{\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\delta}$$

Die letzte ist der andern vorzuziehen, wenn $\frac{s}{2}$ nahe an 90 oder 270 ist.

Ist das beobachtete Gestirn die Sonne, so ist

$$\frac{1}{15} s$$

sofort die gesuchte wahre Zeit; für alle andern Gestirne aber muſs man überdieſs die scheinbare Rectascension α des beobachteten Gestirns, und die Rectascension A der wahren Sonne für die Zeit der Beobachtung kennen, und diese letzte kann man offenbar nur auf Umwegen finden, da die wahre Zeit der Beobachtung erst gesucht wird. Man nimmt nämlich zuerst eine genäherte Rectascension der Sonne, z. B. für den Mittag des Beobahtungstages, sucht damit eine genäherte wahre Zeit, und dann für diese wahre Zeit die entsprechende Rectascension der Sonne, mit welcher man die verbesserte wahre Zeit sucht, ein Verfahren, das sich so lange wiederholen läſst, als man es zu seinem Zwecke nöthig findet.

Hat man so

$$s, \alpha \text{ und } A,$$

so ist die gesuchte wahre Zeit

$$= \frac{\alpha - A + s}{15}$$

Die Gröſse h muſs, ehe sie zur Rechnung gebraucht wird, durch Refraction und Parallaxe verbessert, so wie δ durch Präcession, Aberration und Nutation auf die scheinbare Declination gebracht werden.

Ex. Den 17. Junius 18.0 beobachtete ich in Kasan

Uhrzeit	Höhe des obern Rands der Sonne
$4^h\ 41'\ 44''$	$30°\ 15'\ 19''$
4 51 24	28 53 49

Da die Declination der Sonne in der Nähe des Solstitiums sich nur sehr langsam ändert, so kann man diesen Beobachtungen der Declination $\delta = 23°\ 23'\ 24''$ für $4^h\ 46'$ wahre Zeit, Kasan zu Grunde legen. Die Polhöhe des Beobachtungsortes war

$$\varphi = 55^\circ\ 47'\ 39''$$

also gibt die erste Beobachtung

Zenithdistanz	59°	44′	41″
Refraction	+	1	37
Halbmesser ☉	+	15	47
Parallaxe		—	7
z =	60°	1′	58″

und eben so die zweyte

$$z = 61^\circ\ 23'\ 34''$$

woraus der Stundenwinkel

$$70^\circ\ 37'\ 20''$$
$$73\quad 2\quad 32$$

in Zeit $4^h\ 42'\ 29'' =$ wahre Zeit

$$4\quad 52\quad 10$$

also gibt die Uhr 45″ 5 zu viel gegen wahre Zeit. Für diesen Augenblick ist die mittlere Zeit 17″ gröſser als die wahre, also gibt die Uhr 62″ 5 zu viel gegen mittlere Zeit.

Ex. II. Den 31. März 1790 wurde in Wien beobachtet die Höhe des Regulus

	54°	41′	8″	um $9^h\ 2'\ 20''$ Uhrzeit,
Refraction	—	0	47	
90 — z =	54	40	21	

Es ist aber

$$\delta = 12^\circ\ 59'\ 28''$$
$$\varphi = 48\quad 12\quad 36$$

also

$$s = -\ 3^\circ\ 19'\ 38''$$

negativ, weil die Beobachtung auf der Ostseite des Meridians gemacht wurde.

Da die Uhr schon sehr nahe wahre Sonnenzeit gab, so ist für

$$9^h\ 2'\ 20''$$

die Rectascension der wahren Sonne (aus den Ephemeriden)

$$A = 0^h\ 41'\ 29''\ 5$$

und überdieſs die Rectascension des Sterns

$$\alpha = 9^h\ 57'\ 11''\ 0$$

also ist die wahre Zeit der Beobachtung

$$\alpha - A + \frac{s}{15} = 9^h\ 2'\ 23''0$$

oder die Uhr gab 3″ zu wenig gegen wahre Zeit.

I. Für Fixsterne verfährt man am bequemsten, wenn man nicht die wahre Sonnenzeit, sondern die Sternzeit der Beobachtung sucht. Ist nämlich s der nach dem Vorhergehenden berechnete Stundenwinkel, α die scheinbare Rectascension des Sterns, so ist die Sternzeit der Beobachtung sofort gleich

$$\alpha + s$$

und aus ihr wird man dann nach Cap. VI. die mittlere oder wahre Sonnenzeit der Beobachtung ableiten können.

Ex. 1819 May 11 war die beobachtete, von Refraction befreyte Zenithdistanz des α Orions

$$73^\circ\ 4'\ 46''\ 7$$

als die Uhr $10^h\ 39'\ 55''\ 5$ gab.

Von diesem Gestirn ist die scheinbare Rectascension

$$\alpha = 86^\circ\ 20'\ 30''\ 0,$$

die scheinbare Declination

$$\delta = 7^\circ\ 21'\ 56''\ 2$$

die Breite des Beobachtungsortes

$$\varphi = 45^\circ\ 24'\ 2''\ 5$$

also findet man

$$\begin{array}{rrrrl}
s = 73^\circ & 19' & 46''6 & & \\
\alpha = 86 & 20 & 30\ \ 0 & & \\
\hline
159 & 40 & 16''6 & = 10^h\ 38'\ 41''11 & \text{Sternzeit} \\
 & & & 10\ \ 39\ \ 55.\ 50 & \text{Uhrzeit} \\
\hline
 & & & -\ \ 1\ \ 14.\ 39 & \text{Corr. der Uhr.}
\end{array}$$

§. 4.

Auf dieselbe Weise kann man auch unmittelbar die ~~mittlere~~ Zeit der Beobachtung finden. Ist nämlich α, wie zuvor, die scheinbare Rectascension des beobachteten Sterns, und M die Rectascension der **mittlern** Sonne für den Mittag des Beobachtungstages (aus den Ephemeriden) beyde auf Zeit

$$(15^\circ = 1^h)$$

gebracht, und hat man, wie oben, den Stundenwinkel s gesucht, so ist die erste genäherte mittlere Zeit der Beobachtung

$$T = \alpha - M + \frac{s}{15}$$

und dieser Ausdruck würde vollkommen richtig seyn, wenn die mittlere Sonne seit dem Mittage des Beobachtungstages ihre Rectascension nicht geändert hätte, oder wenn während dem Mittag und der Beobachtung die mittlere Zeit gleich der Sternzeit gewesen wäre. Da diefs aber nicht der Fall ist, so mufs man die vorhergehende Gröfse T, die in Sternzeit ausgedrückt ist, auf mittlere Zeit bringen. Man hat daher die verbesserte mittlere Zeit der Beobachtung, nach dem Vorhergehenden,

$$T - 0.0027304\ T$$

wo T in Stunden und deren Theilen ausgedrückt ist.

Ex. **Karsten Niebuhr** beobachtete in Alexandrien, den 11. October 1761, um $10^h\ 56'\ 25''$ Uhrzeit die

Zenithdistanz Aldebarans

$$61^\circ\ 27'\ 30''$$

Der Fehler des Instruments war

$$-\ 3'\ 0''$$

die scheinbare Rectascension des Sterns

$$\alpha = 4^h\ 22'\ 16''\ 35$$

die scheinbare Declination

$$\delta = 16^\circ\ 0'\ 39''\ 65$$

Die Polhöhe

$$\varphi = 31^\circ\ 12'\ 13''$$

Die Refraction

$$1'\ 44''\ 2$$

und

$$M = 13^h\ 20'\ 43''926,$$

also ist

$$z = 61° \; 26' \; 14'' \, 2$$

und daraus folgt

$s = 65° \; 56' \; 13'' \, 93 =$		19^h	$36'$	$15''$	074
		4	22	16	350
Rectascension des Zeniths	=	23	58	31.	424
M	=	13	20	43.	926
T	=	10	37	47.	498
		—	1	44.	485
mittlere Zeit der Beobachtung		10^h	$36'$	$3''$	013

oder die Uhr gibt

$$20' \; 21'' \, 987$$

zu viel gegen mittlere Zeit.

Zwey Tage darauf, den 13. October,

$$12^h \; 23' \; 34'' \text{ Uhrzeit,}$$

beobachtete er die Zenithdistanz desselben Sterns

$$= 41° \; 34' \; 50'' \, 5.$$

Hier ist $\alpha = 4^h \; 22' \; 16'' \, 436$

$\delta = 16° \; 0 \; 39. \; 72$

$M = 13 \; 28 \; 36. \; 047$

also $s = 42° \; 36' \; 22'' \, 378$

und daher

$$\alpha - M + s = 12^h \; 3' \; 14'' \, 895$$

$$- \; 1 \; 58 \; 486$$

mittlere Zeit $= 12 \; 1 \; 16. \; 409$

und die Uhr gab

$$22' \; 17'' \, 591$$

zu viel gegen mittlere Zeit.

§. 5.

Diese Methode bequem öfters zu wiederholen, kann man für mehrere willkührlich gewählte Stundenwinkel die scheinbare (durch Refraction u. f. corrigirte) Höhe h′ des Gestirns suchen, das Instrument auf diese Höhe stellen, und die Uhrzeit der Beobachtung mit dem Anfangs angenommenen Stundenwinkel vergleichen, woraus man sofort den Stand der Uhr erhält. Ist z. B. für die Sonne h die wahre Höhe des Mittelpunktes, h′ die scheinbare Höhe des obern Randes, δ die Abweichung des Mittelpunktes und φ die Polhöhe, so ist für jeden Stundenwinkel s

$$\mathrm{Tg}\ a = \mathrm{Cos}\ s\ \mathrm{Cotg}\ \varphi$$

$$\mathrm{Sin}\ h = \frac{\mathrm{Sin}\ \varphi}{\mathrm{Cos}\ a}\ \mathrm{Sin}\ (a + \delta)$$

$$h' = (h + \text{Halbmesser } \odot) + \text{Refr.} - \text{Parallaxe},$$

wo die Refraction für die wahre Höhe

$$(h + \text{Halbmesser } \odot)$$

nicht, wie gewöhnlich für die scheinbare Höhe gesucht wird. Berechnet man für seinen Beobachtungsort in einer Tabelle die Werthe von

$$a \text{ und } \log \frac{\mathrm{Sin}\ \varphi}{\mathrm{Cos}\ a}$$

etwa von 5 zu 5 Zeitminuten, durch mehrere Stunden vor und nach der Culmination, so wird dadurch die Anwendung dieser Methode sehr abgekürzt.

§. 6.

Um sich die Mühe der einzelnen Berechnungen zu ersparen, oder auch, wenn man mit Multiplicationskreisen beobachtet, dividirt man die Summe der beobachteten Zenithdistanzen sowohl, als die der Beobachtungszeiten durch die Anzahl der Beobachtungen. Der Quotient der Zenithdistanzen wird für die Zenithdistanz angesehen, die zu der Zeit gehört, welche dem Quotienten der Beobachtnngszeiten gleich ist. Allein diefs Verfahren setzt voraus, dafs sich die Zenithdistanzen, wie die Zeiten, also gleichförmig ändern, was nicht genau richtig ist. Wir wollen daher annehmen, dafs man die zwey Zenithdistanzen z und z′ für die Zeiten t und t′ aus den Beobachtungen kenne. Man suche die Zeit t″, für welche die Zenithdistanz

$$z'' = \frac{z + z'}{2}$$

gehört.

Nach dem gewöhnlichen, so eben angezeigten Verfahren wäre

$$t'' = \frac{t + t'}{2}$$

Es ist aber allgemein $t = fz$ eine Function von z. Geht z über in $z + \omega$, so geht t über in

$$t + \frac{\omega\, dt}{dz} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{d^2 t}{dz^2} +$$

Setzt man also

$$\omega = z' - z,$$

so ist

$$t' = t + (z' - z) \frac{dt}{dz} + \tfrac{1}{2} (z' - z)^2 \frac{d^2 t}{dz^2} + \ldots \text{ (I)}$$

und setzt man

$$\omega = \frac{z' - z}{2}$$

so ist

$$t'' = t + \tfrac{1}{2} (z' - z) \frac{dt}{dz} + \tfrac{1}{8} (z' - z)^2 \frac{d^2 t}{dz^2} \ldots \text{ (II)}$$

Multiplizirt man die Reihe II. durch 2, und subtrahirt sie von I., so hat man

$$t'' = \frac{t + t'}{2} + \tfrac{1}{8} (z - z)^2 \frac{d^2 t}{dz^2}$$

und da aus I. folgt

$$(t' - t) \frac{dz}{dt} = z' - z$$

so ist auch

$$t'' = \frac{t + t'}{2} + \tfrac{1}{8} (t' - t)^2 \frac{d^2 t}{dt^2} \ldots \text{ (III)}$$

und III. gibt die gesuchte Zeit t''.

Ist aber ψ die Höhe des Aequators, p die Poldistanz, und z die Zenithdistanz des Gestirns, und s der Stundenwinkel, so ist

$$\text{Cos } z = \text{Cos } s \text{ Sin } \psi \text{ Sin } p + \text{Cos } \psi \text{ Cos } p$$

also auch

$$\frac{d^2 s}{ds^2} = \frac{d^2 t}{dt^2} = \text{Cotg } s \left(\frac{\text{Sin}^2 s \text{ Cos } z}{\text{Sin}^2 z \text{ Cos } s} \text{ Sin } p \text{ Sin } \psi - 1 \right)$$

welche Gröfse wir M nennen wollen. Man hat daher

$$t'' = \frac{t + t'}{2} + \tfrac{1}{8} (t' - t)^2 \text{ M}$$

Man wird also so verfahren:

Sey Θ', Θ'', Θ''' die Zwischenzeit zwischen der ersten und letzten, zweyten und vorletzten, dritten und vorvorletzten Beobachtung u. f., und T die Summe aller Beobachtungszeiten, Z die Summe aller Zenithdistanzen, und endlich $2n$ die Anzahl der Beobachtungen. Man suche

$$A = \tfrac{1}{2}\,(\Theta'^2 + \Theta''^2 + \Theta'''^2 +)\ \mathrm{Sin}\ 1''$$

so ist die Zeit t, zu welcher die Zenithdistanz $\frac{Z}{2n}$ gehört, gleich

$$t = \frac{T}{2n} + \frac{A}{4n}\,M \ldots \text{(IV)}$$

Vergl. Berl. Jahrb. 1818. p. 123.

Die Gröſse A kann man sehr bequem aus einer Tafel nehmen, die mit dem Argumente Θ die Gröſse

$$\frac{2\ \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}\Theta}{\mathrm{Sin}\ 1''} = \tfrac{1}{2}\,\Theta^2\ \mathrm{Sin}\ 1''$$

gibt. Vor der Culmination oder auf der Ostseite des Meridians ist der zweyte Theil der Gleichung IV. negativ. Da ferner

$$\mathrm{Sin}\ \omega = \frac{\mathrm{Sin}\ p\ \mathrm{Sin}\ s}{\mathrm{Sin}\ z}$$

wenn ω das Azimut, so ist auch

$$M = \mathrm{Cotg}\ \omega\ (\mathrm{Cos}\ \psi - \mathrm{Sin}\ \psi\ \mathrm{Cos}\ \omega\ \mathrm{Cotg}\ z)$$

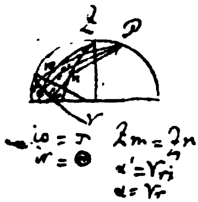
Damit also M oder die Correction

$$\frac{MA}{4n}$$

nicht zu groſs werde, wird man ω sehr nahe an 90° oder 270° nehmen, ein Vortheil dieser Methode, weil Beobachtungen in der Nähe des ersten Vertikalkreises, wie wir bald sehen werden, überhaupt zur Zeitbestimmung am besten sind.

I. Endlich läſst sich noch auf eine für die Ausübung bequemere Weise der Stand der Uhr aus den zwey Uhrzeiten bestimmen, in welchen ~~zwey~~ bekannte ~~Sterne eine~~ obwohl unbekannte Höhe erreichen.

Ist $\alpha\,\delta$ die Rectascension und Declination des in der täglichen Bewegung vorangehenden Sterns, $\alpha'\delta'$ dasselbe für den folgenden, τ der vom Frühlingspunkte in der Zwischenzeit beschriebene Bogen oder die in Grade verwandelte Sternzeit der Zwischenzeit der Beobachtungen, und Θ der Winkel beyder Stundenkreise, in welchen die Sterne beobachtet wurden, so ist, wenn der Stern im östlichern Stundenkreise zuerst beobachtet worden ist,



$$\Theta = \alpha' - \alpha + \tau$$

und im entgegengesetzten Fall

$$\Theta = \alpha' - \alpha - \tau,$$

Ist aber s der Stundenwinkel des Sterns im westlichern Stundenkreise, so ist der des andern Sterns $= \Theta - s$, und wenn h die beyden gemeinschaftliche Höhe ist, so hat man

$$\text{Sin } h = \text{Sin } \varphi \text{ Sin } \delta + \text{Cos } \varphi \text{ Cos } \delta \text{ Cos } s$$
$$= \text{Sin } \varphi \text{ Sin } \delta' + \text{Cos } \varphi \text{ Cos } \delta' \text{ Cos } (\Theta - s)$$

woraus folgt

$$(\text{Cos } \delta - \text{Cos } \delta' \text{ Cos } \Theta) \text{ Cos } s - \text{Cos } \delta' \text{ Sin } \Theta \text{ Sin } s$$
$$= (\text{Sin } \delta' - \text{Sin } \delta) \text{ Tg } \varphi$$

Sey also

$$\frac{\text{Cos } \delta - \text{Cos } \delta' \text{ Cos } \Theta}{\text{Cos } \delta' \text{ Sin } \Theta} = \text{Tg } (\tfrac{1}{2} \Theta + \gamma),$$

so ist

$$\text{Cos } \delta' \text{ Sin } \Theta \left(\text{Tg } (\tfrac{1}{2} \Theta + \gamma) \text{ Cos } s - \text{Sin } s\right)$$
$$= (\text{Sin } \delta' - \text{Sin } \delta) \text{ Tg } \varphi$$

und

$$\text{Sin } (\tfrac{1}{2} \Theta + \gamma - s) = \frac{(\text{Sin } \delta' - \text{Sin } \delta) \text{ Tg } \varphi \text{ Cos } (\tfrac{1}{2} \Theta + \gamma)}{\text{Cos } \delta' \text{ Sin } \Theta}$$

woraus man leicht folgende Endausdrücke ableitet

$$\text{Tg } \gamma = \text{Tg } \frac{\delta' + \delta}{2} \text{ Tg } \frac{\delta' - \delta}{2} \text{ Cotg } \tfrac{1}{2} \Theta$$

$$\text{Sin } (\tfrac{1}{2} \Theta + \gamma - s) = \frac{\text{Tg } \varphi \text{ Sin } \gamma \text{ Cotg } \tfrac{1}{2} (\delta' + \delta)}{\text{Cos } \frac{\Theta}{2}}$$

$$= \frac{\text{Tg } \varphi \text{ Cos } \gamma \text{ Tg } \tfrac{1}{2} (\delta' - \delta)}{\text{Sin } \frac{\Theta}{2}}$$

Ex. Für 1815 den 13. März

α Andromedae $21^h\ 33'\ 26''$ Zeit der Sternuhr

α Lyrae $22\ \ 5\ \ 21$

Die scheinbaren Orte dieser Sterne sind

$$\alpha = 18^h\ 30'\ 28''\ 96$$
$$\delta = 38^\circ\ 37'\ 6''\ 6$$

$$\alpha' = 23^h\ 58'\ 33''\ 33$$
$$\delta' = 28^\circ\ \ 2'\ 14''.\ 8$$

also ist

$$\Theta = 89^\circ\ 59'\ 50''\ 55$$

Ist aber

$$\varphi = 51^\circ\ 31'\ 54''$$

so ist

$$\gamma = -\ \ 3^\circ\ 29'\ \ 4''\ 93$$
$$s - \tfrac{1}{2}\Theta - \gamma = \ \ 9^\circ\ 28'\ \ 9''\ 93$$
$$\tfrac{1}{2}\Theta + \gamma = \ \ 41\ \ 30\ \ 50.\ 34$$
$$s = \ \ 50^\circ\ 59'\ \ 0''\ 27 = 3^h\ 23'\ 56''\ 02$$
$$\alpha = 18\ \ 30\ \ 28.\ 96$$

Sternzeit der Beob. von α Lyrae . . .	$21^h\ 54\ \ 24''\ 98$
Uhrzeit	22 5 21. 00
Corr. d. Uhr =	— 10 56. 02

Eine andere Auflösung dieser Aufgabe s. m. im Berl. Jahrb. 1796 p. 132. Koch's Tafeln zur Bestimmung der Zeit. Berl. 1797. Wie man die Zeit aus der Beobachtung zweyer Sterne in demselben Verticalkreise findet, s. m. Berl. Jahrb. 1789. p. 213.

§. 7.

Bey allen Aufgaben der practischen Astronomie, ist es nicht genug, das Problem theoretisch richtig aufgelöst zu haben, man mufs auch noch die Fehler angeben können, welchen die Anwendung dieser Auflösungen unterworfen ist, und die günstigsten Umstände aufsuchen, unter welchen diese Beobachtungen gemacht werden können. Denn alle unsere Beobachtungen sind kleinen Fehlern unterworfen, die von den Unvollkommenheit der Instrumente, oder von der unserer Sinne, oder endlich von andern äufsern oder innern Ursachen entspringen, und da sich diese Fehler nie gänzlich vermeiden lassen, so ist es von Wichtigkeit, zu wissen, unter welchen Umständen jene Fehler den kleinsten nachtheiligen Einflufs auf die Resultate der Beobachtungen haben werden. So wird man z. B. zur Zeitbestimmung durch einzelne Höhen alle jene Gestirne vermeiden, die wegen den Dünsten des Horizonts, und der Ungewifsheit der Refraction kleiner Höhen, die wegen ihrer Lichtschwäche, wie die kleineren Fixsterne, oder wegen ihrer unbestimmten Begränzung, wie die Cometen, oder wegen kleiner noch übrig bleibenden Unrichtigkeiten in der Kenntnifs ihres Ortes, und den vorläufigen zeitraubenden Rechnungen, wie der Mond u. f. unsicher sind. So wichtig diese Wahl des Gestirnes ist, eben so wichtig ist auch die Wahl des Ortes am Himmel, in welchem man dasselbe beobachten soll, und es entsteht daher die Frage, welches der Ort eines gegebenen Gestirns sey, für welchen kleinere Fehler der Beobachtungen den wenigst nachtheiligen Einflufs auf die Zeitbestimmung haben.

Dieser Ort wird offenbar derjenige seyn, in welchem sich die Höhe des Gestirns am schnellsten ändert. Die Geschwindigkeit der Höhenänderung eines Gestirns aber ist desto gröfser, je gröfser der parallactische Winkel π desselben ist, d. h. je mehr die Richtung der täglichen Bewegung senkrecht auf den Horizont ist. — Behält man die oben gebrauchten Bezeichnungen bey, so ist

$$\text{Sin } h = \text{Sin } \varphi \text{ Sin } \delta + \text{Cos } \varphi \text{ Cos } \delta \text{ Cos } s$$

Diese Gleichung gibt

$$d h \text{ Cos } h = - d s \text{ Sin } s \text{ Cos } \varphi \text{ Cos } \delta \ldots (1)$$

Da aber

$$\text{Sin } \pi = \frac{\text{Sin } s \text{ Cos } \varphi}{\text{Cos } h},$$

so ist auch

$$dh = - ds \text{ Cos } \delta \text{ Sin } \pi = - ds \text{ Cos } \varphi \text{ Sin } \omega$$

wenn ω das Azimut bezeichnet. Diese Gleichung zeigt deutlich, dafs die Höhenänderung am gröfsten ist, wenn π am gröfsten ist.

Es ist ferner

$$\text{Cos } \pi = \frac{\text{Sin } \varphi - \text{Sin } \delta \text{ Sin } h}{\text{Cos } \delta \text{ Cos } h},$$

also ist

$$d \pi = \frac{d h (\text{Sin } \delta - \text{Sin } h \text{ Sin } \varphi)}{\text{Cos } \delta \text{ Cos}^2 h \text{ Sin } \pi}$$

Setzt man daher für das Maximum von π die Gröfse

$$d \pi = 0$$

so ist

$$\text{Sin } h = \frac{\text{Sin } \delta}{\text{Sin } \varphi} \ldots (a)$$

und daraus folgt

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cos } s = \text{Tg } \delta \text{ Cotg } \varphi \\ \text{Cos } \omega = 0 \end{array}\right\} (b)$$

Die Gleichung (a) setzt voraus, dafs $\delta < \varphi$ ist. Differentiirt man aber die Gleichung

$$\text{Sin}\ \pi\ \text{Cos}\ h = \text{Sin}\ s\ \text{Cos}\ \varphi$$

so hat man

$$d\ \pi = \frac{d\,h\ \text{Sin}\,h\ \text{Sin}\,s\ \text{Cos}\,\varphi}{\text{Cos}^2\,h\ \text{Cos}\,\pi}$$

$$= \frac{d\,h\ \text{Tg}\,h\ \text{Sin}\,s\ \text{Cos}\,\varphi\ \text{Sin}\,\delta}{\text{Sin}\,\varphi - \text{Sin}\,\delta\ \text{Sin}\,h}$$

Ist also wieder $d\ \pi = \frac{1}{0}$

so hat man

$$\text{Sin}\ h = \frac{\text{Sin}\ \varphi}{\text{Sin}\ \delta}\ \ldots\ (a')$$

und daraus folgt

$$\left.\begin{aligned} \text{Cos}\ s &= \text{Tg}\ \varphi\ \text{Cotg}\ \delta \\ \text{Sin}\ \omega &= \frac{\text{Cos}\ \delta}{\text{Cos}\ \varphi} \end{aligned}\right\}\ (b')$$

und die drey letzten Gleichungen setzen $\delta > \varphi$ voraus. Daraus folgen im Allgemeinen folgende Bemerkungen. Südliche Declinationen soll man so viel möglich vermeiden, da sie die vortheilhafteste Höhe negativ geben, oder da man sie in dem vortheihaftesten Augenblicke gar nicht sehen kann.

Immer aber mufs man die Gestirne zur Zeitbestimmung so nahe als möglich bey dem ersten Vertikalkreis,

$$(\text{wo}\ \omega = 90° = 270°)$$

nehmen, wie schon aus der Gleichung (1) folgt, die man auch so ausdrücken kann:

$$d\,s = -\frac{d\ h}{\text{Sin}\ \omega\ \text{Cos}\ \varphi}$$

und in dieser Form zeigt sie zugleich, dafs ein Fehler in d h einen desto kleineren Einflufs auf die Zeitbestimmung habe, je näher ω an 90°, und je weiter φ von 90° ist. Nahe an den Polen der Erde wird daher die Zeitbestimmung aus den beobachteten Höhen immer weniger verläfslich, bis sie endlich unter dem Pol selbst ganz unbrauchbar wird, weil dort keine Höhenänderung der Gestirne mehr statt hat.

§. 8.

Da also in grofsen geographischen Breiten die Sonne, die zur Zeitbestimmung durch correspondirende sowohl, als durch einfache Höhen sonst vorzugsweise gebraucht wird, sich nicht mehr zu Höhen-Beobachtungen eignet, so kann man dafür die Distanz der Sonne von irgend einem seiner Lage nach bekannten terrestrischen Gegenstand beobachten, und daraus ebenfalls die Zeit bestimmen. M. s. Mon. Corresp. III. Band.

Es sey ψ die Höhe des Aequators, A, Z das Azimut und die Zenithdistanz des terrestrischen Objectes, welche beyde aus den Beobachtungen als bekannt vorausgesetzt werden, so findet man den Stundenwinkel S und die Poldistanz P des terrestrischen Objectes durch folgende Ausdrücke

$$\operatorname{Tg} x = \frac{\operatorname{Sin} \frac{\psi - Z}{2}}{\operatorname{Sin} \frac{\psi + Z}{2}} \operatorname{Tg} \frac{A}{2}$$

$$\operatorname{Sin} \frac{P}{2} = \frac{\operatorname{Sin} \frac{\psi + Z}{2}}{\operatorname{Cos} x} \operatorname{Cos} \frac{A}{2}$$

$$\operatorname{Sin} S = \frac{\operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} Z}{\operatorname{Sin} P}.$$

Hat man nun die Distanz Δ eines bekannten Gestirns, dessen Poldistanz p und Stundenwinkel s ist, beobachtet, so findet man s durch die Gleichung

$$\operatorname{Sin} \frac{s - S}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} \frac{\Delta + P - p}{2} \operatorname{Sin} \frac{\Delta + p - P}{2}}{\operatorname{Sin} P \operatorname{Sin} p}} \quad \ldots \text{(I)}$$

Ist $\frac{s - S}{2}$ nahe an 90°, so wird man besser den bekannten ähnlichen Ausdruck für

$$\operatorname{Cos} \frac{s - S}{2}$$

brauchen. Berl. Jahrb. 1814. p. 99. und 1819. p. 129.

Noch ist es nöthig, auf die Refraction des irdischen Objectes sowohl, als des beobachteten Gestirns Rücksicht zu nehmen. Die erste macht, daſs die Gröſsen S, P eigentlich nicht genau constant sind. Allein die irdische Strahlenbrechung ist viel zu ungewiſs, und ihre Variation, besonders wenn das Object in einer nicht zu groſsen Entfernung vom Beobachter ist, viel zu gering, als daſs man sie nicht in den meisten Fällen vernachlässigen könnte. Die Refraction des Gestirns aber kann auf eine zweyfache Art berücksichtiget werden. — Man kann e r s t e n s die Correction an der Poldistanz p und dem Stundenwinkel s. anbringen. Sind p′ s′ diese scheinbaren (von der Refraction afficirten) Gröſsen, und π der parallactische Winkel endlich

$$dz = \text{Refraction} - \text{Parallaxe der Höhe}$$

$$\text{so ist} \quad p' - p = dz \operatorname{Cos} \pi$$

$$s' - s = dz \frac{\operatorname{Sin} \pi}{\operatorname{Sin} p}$$

wo
$$\operatorname{Sin} \pi = \frac{\operatorname{Sin} s \operatorname{Sin} \psi}{\operatorname{Sin} z}$$

Man kann aber auch zweytens diese Correction an der scheinbaren Distanz Δ anbringen, um sie in die wahre Distanz Δ' zu verwandeln. Man findet so leicht

$$\Delta' - \Delta = dz \frac{\operatorname{Sin}(z + Z + \frac{1}{2} dz)}{\operatorname{Sin} \Delta}$$

$$- 2 \frac{\operatorname{Cos} \frac{B+\Delta}{2} \operatorname{Cos} \frac{B-\Delta}{2}}{\operatorname{Sin} \Delta} (dz \operatorname{Cotg} z - \tfrac{1}{2} dz^2 \operatorname{Sin} 1'')$$

wo
$$B = 180 - z - Z \text{ ist,}$$

und wenn z nicht über 80° ist, kann man für den vorhergehenden Ausdruck immer folgenden sehr einfachen brauchen:

$$\Delta' - \Delta = - dz \operatorname{Cotg} z \operatorname{Cotg} \Delta$$

Ex. Es sey

$$\psi = 39° \; 3' \; 43'' \text{ für Seeberg}$$
$$A = 35° \; 47' \; 4''$$
$$Z = 90 \; 24 \; 28$$

so findet man daraus mittels der vorhergehenden Gleichungen

$$S = 43° \; 4' \; 31''.5$$
$$P = 121 \; 6 \; 43.2.$$

B. Zach beobachtete den 11. Februar 1801 in Seeberg von diesem Objecte folgende Distanzen der Sonne (Mon. Corr. Bd. III. p. 326)

78°	9′	38″	um die Uhrzeit	21ʰ	15′	40″. 0
77	39	38			18	3. 0
77	29	38			18	51. 5

Die Correctionen dieser Distanzen sind

wahre Höhe ⊙	d △
15° 34′ 8	— 11″.4
15 49. 5	— 11. 6
15 54. 5	— 11. 8

also die wahren Distanzen der Sonne vom terrestrischen Objecte

$$\triangle = 78^\circ\ 9'\ 26''\ 6$$
$$77\ 39\ 26.\ 4$$
$$77\ 29\ 26.\ 2$$

und die wahren Distanzen der Sonne vom Pol des Aequators

$$p = 104^\circ\ 7'\ 14''7$$
$$7\ 13.\ 3$$
$$7\ 12.\ 6$$

woraus sofort der Werth von

$$\frac{s - S}{2}$$

in der I. Beobachtung	— 42°	15′	51″	90
II. - - - - -	— 41	58	6.	05
III. . - - - -	— 41	52	10.	90

und da

$$\frac{S}{2} = 21^\circ\ 32'\ 15''\ 75$$

so ist s, oder der Stundenwinkel, in Zeit

in der I. Beobachtung — 2ʰ 45′ 48″ 82 =	21ʰ	14′	11″	18
II. - - - -	21	16	33.	30
III. - - - -	21	17	20.	64

also die Voreilung der Uhr

$$1'\ 28''\ 82$$
$$1\ 29\ 70$$
$$1\ 30\ 86$$

Im Mittel 1′ 29″ 79

Nach den Beobachtungen desselben Tages am Mittagsrohre, sollte die Voreilung der Uhr nur $0''17$ kleiner seyn. Die minder gute Uebereinstimmung der einzelnen Resultate kommt von dem Azimute A, welches nach B. Zachs Aeufserung noch auf eine halbe Minute zweifelhaft ist.

Die ganze Auflösung des Problems reduzirt sich demnach auf die Entwicklung der Gleichung (I.), und man kann ohne merklichen Fehler die Gröfse

$$\frac{1}{\operatorname{Sin} P \operatorname{Sin} p}$$

für eine Reihe von Beobachtungen durch etwa eine Viertelstunde als constant ansehen, so dafs man also eigentlich für jede Beobachtung nur die Logarithmen von

$$\operatorname{Sin} \frac{\Delta + D}{2}, \operatorname{Sin} \frac{\Delta - D}{2}$$

und die Zahl von

$$\log \operatorname{Sin} \frac{s - S}{2}$$

aufzusuchen hat, wo $D = P - p$ ist. Diese Gleichung (I.) ist dieselbe mit der für die einzelnen Höhen, daher auch alles, was über die Zeitbestimmung aus einzelnen Höhen oben gesagt wurde, auch hier wieder gilt.

I. Um die practische Brauchbarkeit dieser Methode zu untersuchen, hat man

$$\operatorname{Cos}(s - S) = \frac{\operatorname{Cos} \Delta - \operatorname{Cos} P \operatorname{Cos} p}{\operatorname{Sin} P \operatorname{Sin} p}$$

Setzt man in ihr alles veränderlich, so erhält man nach einigen zweckmäfsigen Verwandlungen

$$ds = \frac{\operatorname{Sin} \Delta}{\operatorname{Sin} P \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin}(s-S)} \left(d\Delta - dp \operatorname{Cos} B - dZ \operatorname{Cos} C + dA \operatorname{Sin} C \operatorname{Sin} Z \right)$$

wo B der Winkel am Gestirn zwischen dem terrestrischen Objecte und dem Pol des Aequators, und wo C der Winkel am terrestrischen Objecte zwischen dem Gestirne und dem Zenith des Beobachters ist.

Daraus folgt also, dafs man überhaupt alle Beobachtungen vermeiden müsse, in denen die Sinus der Winkel

$$P, p, \text{ oder } s - S$$

nahe gleich Null sind.

Auch hat man

$$ds = dS + \frac{d\Delta - dp \operatorname{Cos} B - dP \operatorname{Cos} D}{\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} B}$$

wo D der Winkel am terrestrischen Objecte zwischen dem Gestirne und dem Pole ist.

Dafs man endlich auch dieselbe Art auf correspondirende Distanzen der Sonne vom terrestrischen Gegenstande zur Zeitbestimmung nehmen kann, ist für sich klar.

§. 9.

Das Vorhergehende setzt das Azimut des irdischen Gegenstandes als bekannt voraus. Wir werden unten sehen, wie man dasselbe aus den Beobachtungen bestimmen könne. Hier aber mufs bemerkt werden, dafs man die Gröfsen

$$S, P$$

eines terrestrischen Objectes, auch ohne sein Azimut zu kennen, aus zwey beobachteten Distanzen dieses Objectes von einem bekannten Gestirne und aus der Zwischenzeit der Beobachtungen finden kann. Die directe Auflösung dieser Aufgabe ist umständlich und für die Ausübung beschwerlich, folgende indirecte ist viel bequemer

Mit einem genäherten Werth von P suche man die Gröfsen x und x′ aus den Gleichungen

$$\operatorname{Cos} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} \frac{D+\Delta}{2} \operatorname{Sin} \frac{D-\Delta}{2}}{\operatorname{Sin} P \operatorname{Sin} p}}$$

$$\operatorname{Cos} \frac{x'}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} \frac{D'+\Delta'}{2} \operatorname{Sin} \frac{D'-\Delta'}{2}}{\operatorname{Sin} P \operatorname{Sin} p'}}$$

wo Δ Δ' die beobachteten Distanzen des Gestirns, p p′ die Poldistanzen desselben, und wo

$$D = P + p, \; D' = P + p'$$

ist.

Man suche ferner, blofs in Minuten die Gröfse ω, A aus

$$\operatorname{Sin} \omega = \frac{\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Sin} \Delta} \qquad \operatorname{Sin} \omega' = \frac{\operatorname{Sin} p' \operatorname{Sin} x'}{\operatorname{Sin} \Delta'}$$

$$A = \frac{\operatorname{Cotg} \omega}{\operatorname{Sin} P} \qquad A' = \frac{\operatorname{Cotg} \omega'}{\operatorname{Sin} P}$$

so ist

$$d\,P = \frac{x - x' - t}{A - A'}$$

wo t die Zwischenzeit der Beobachtungen in Graden, und der wahren Poldistanz

$$P' = P + d\,P$$

und endlich die wahre Gröfse $s - S = x - A\,d\,P$

$$s' - S = x' - A'd\,P$$

Ex.	Uhrzeit	. . .	wahre Distanz
	$2^h\ 2'\ 10$	. . .	$52°\ 14'\ 19''\ 52$
	$18\ \ 2\ \ 10$	. . .	$90\ \ 0.\ \ 0.\ 00$

wo $p = 45°$ und

P beynahe $= 89°\ 56'$.

Da aus andern Beobachtungen bekannt war, dafs die Uhr in beyden Beobachtungen 1′ 40″ accelerirt, so sind die Stundenwinkel

$$s' = 2^h\ 0'\ 30'' = 30°\ 7'\ 30'' \text{ westlich}$$

$$s' = 18\ \ 0\ \ 30 = -\ 89\ \ 52\ \ 30 \text{ östlich}$$

Die vorhergehenden Ausdrücke geben daher

$$\tfrac{1}{2}x = 15°\ \ 3'\ 59''\ 47$$

$$\omega = 26°\ 40'\ 50''$$

$$A = 1.98996$$

$$\tfrac{1}{2}x' = -\ 45°\ \ 2'\ \ 0''\ 00$$

$$\omega' = -\ 45\ \ 0\ \ 0$$

$$A' = -\ 1$$

also

$$d\,P = \frac{718.94}{2.98996} = 240''.4514$$

also wahres

$$P = 89°\ 56' + d\,P = 90°\ 0'\ 0''\ 45$$

$$A\,d\,P = 7'\ 58''\ 49$$

$$A'd\,P = 4'\ \ 0''\ 45$$

$$s - S = 30°\ \ 0'\ \ 0''\ 45$$

$$s' - S = -\ 89\ 59\ 59''\ 55$$

also wahres $S = 0°\ 7'\ 29''\ 55$

Man hätte aber in diesem blofs fingirten Beyspiele

$$P = 90^\circ\ 0'\ 0''$$

und

$$S = 0^\circ\ 7'\ 30''$$

finden sollen, also ist P nur $0'' 4$ zu grofs, und S eben so viel zu klein, obschon das anfangs angenommene P um $240''$ zu grofs war, also der neue Fehler noch nicht

$$\frac{2}{1000}$$

des alten. In der That ist allgemein

$$dP = \frac{d\triangle \operatorname{Sin} \omega' - d\triangle' \operatorname{Sin} \omega}{\operatorname{Sin} (\omega' - \omega)}.$$

$$dS = \frac{d\triangle \operatorname{Cos} \omega' - d\triangle' \operatorname{Cos} \omega}{\operatorname{Sin} P \operatorname{Sin} (\omega' - \omega)}$$

also die Bestimmung von P und S desto sicherer, je näher

$$(\alpha' - \omega)$$

an 90° oder 270° und je näher P an 90° ist. Um endlich zu sehen, welchen Einflufs ein Fehler in der Zeitbestimmung auf P und S hat, so findet man nach einigen leichten Verwandlungen

$$dP = (ds - ds') \frac{\operatorname{Sin} \omega \operatorname{Sin} \omega' \operatorname{Sin} P}{\operatorname{Sin} (\omega - \omega')}$$

$$dS = \frac{ds \operatorname{Sin} \omega \operatorname{Cos} \omega' - ds' \operatorname{Sin} \omega' \operatorname{Cos} \omega}{\operatorname{Sin} (\omega - \omega')}$$

Hat man so P und S gefunden, so wird man daraus ohne Mühe die Höhe und das Azimut des terrestrischen Objectes ableiten. Berl. Jahrb. 1819. p. 139.

§. 10.

Die einfachste und sicherste Methode der Zeitbestimmung ist die durch das Mittagsrohr, d. h. durch ein Fernrohr, welches sich auf einer horizontalen Axe genau in der Ebene des Meridians bewegt. Man beobachtet nämlich die Durchgänge der Sterne an den vertikalen Fäden, welche in dem Brennpunkte beyder Gläser des Rohres befestigt sind, und indem man so die Uhrzeit der Culmination erhält, darf man nur diese Uhrzeit mit der berechneten mittlern oder Sternzeit der Culmination vergleichen, um den Fehler der Uhr zu erhalten. Zusammengesetzter wird das Verfahren, wenn das Mittagsrohr selbst Fehlern unterworfen ist, wenn z. B. die horizontale Axe des Rohrs eine Neigung gegen den Horizont, oder die optische Axe des Rohres selbst eine Neigung gegen den Meridian hat, und wir werden unten, wenn wir von diesem wichtigsten Instrumente der Astronomie sprechen werden, diesen Gegenstand umständlich betrachten. Hier wollen wir das Rohr selbst fehlerfrey voraussetzen, und durch Beyspiele zeigen, wie man aus den Beobachtungen an demselben den Stand der Uhr bestimmen könne.

1787 den 11 Julius beobachtete man in Greenwich die Culmination des Procyons um $7^h\ 27'\ 15''\ 58$ Zeit der Sternuhr

Pollux ... 7 31 22 83

Man suche den Stand der Uhr für diese Uhrzeiten.

Aus den Sterncatalogen findet man für

	Procyon	Pollux
1787. 00 die mittl. AR ..	$7^h\ 28'\ 8''\ 32$ ..	$7^h\ 32'\ 15''\ 25$
Präcession und Aberration	+ 0. 37	+ 0. 49
Nutation	+ 1. 12	+ 1. 33
scheinbare AR	$7^h\ 28'\ 9.\ 81$ ..	7 32 17. 07
Uhrzeit	7 27 15. 58	7 31 22. 83
Correction der Uhr	+ 54'' 23	+ 54. 24

also die Correction der Uhr gegen Sternzeit

+ 54'' 235 um $7^h\ 29'$ Uhrzeit.

Ex. II. 1786 den 31. December beobachtete man in Marseille die Culmination von

α Andromedae $4^h\ 56'\ 37''\ 85$ Zeit der mitt. Uhr
γ Pegasi 5 1 29 73

Für den Beobachtungstag ist

	α Andromedae	γ Pegasi
scheinbare AR	$23^h\ 57'\ 25''\ 20$ ..	$0^h\ 2'\ 17''\ 81$
mittl. AR ☉ im Mittag des 31. Decembers	18 40 10. 47 ..	18 40 10. 47
genäherte mittl. Zeit	5 17 14. 73	5 22 7. 34
Acceleration d. Fixsterne	51. 97	52. 77
corrig mittl. Zeit	5 16 22. 76 ..	5 21 14. 57
Uhrzeit	4 56 37. 85	5 1 29. 73
Correction der Uhr	+ 19 44. 91	+ 19 44. 84

also Correction der Uhr gegen mittl. Zeit

$+ 19' 44'' 875$ zu $4^{h.} 59'$ Uhrzeit

Man sieht aus diesen Beyspielen, wie viel bequemer die Sternuhr ist, als die mittlere, daher auch die neuern Astronomen immer die erste brauchen, die noch den Vortheil hat, daſs die Culminationen der Fixsterne durch das ganze Jahr auf nahe dieselben Zeiten fallen, da sie im Gegentheile täglich um nahe 4 Minuten mittlerer Zeit früher culminiren.

§. 11.

Wenn man aber mit keinem Mittagsrohre versehen ist, so muſs man gestehen, daſs alle vorhergehenden Methoden, da sie so oft wiederholt angewendet werden müssen, nicht wenig beschwerlich und zeitraubend sind. D. Olbers hat, um dieser Beschwerde abzuhelfen, einen Vorschlag gemacht, der wegen der Leichtigkeit und der Präcision seiner Anwendung, allgemeinen Eingang verdient. Hat man nämlich in der Nähe seines Beobachtungsortes eine beträchtlich hohe senkrechte Mauer, oder sonst ein vertikales terrestrisches Object, z. B. einen Blitzableiter, so kann man an ihm die Verschwindung der Fixsterne beobachten, nnd wenn man das Fernrohr bey diesen Beobachtungen immer genau in dieselbe Lage bringt (indem man es freyhaltend immer an dieselbe Stelle, z. B. die Fenstermauer anlegt, oder indem man den Ort der Füſse seines Gestelles auf dem Boden bezeichnet) so ist klar, daſs, so lange die Rectascension und Declination des Sterns dieselbe ist, sie alle Tage zu derselben Sternzeit verschwinden werden. Hat man also an einem dieser Beobachtungstage die Correction der Uhr z. B. durch correspondirende Sonnenhöhen gefunden, so kennt man die Sternzeit oder die mittlere Zeit dieser Verschwindungen, für diesen Beobachtungstag, und daraus wird man leicht die mittlere Zeit für die anderen Tage ableiten können. So fand z. B. Olbers die Verschwindung von δ Coronae

den 6. September 1800 um $11^h\ 14'\ 20''\ 7$

und aus correspondirenden Höhen ergab sich, daſs die Correction der Uhr gegen mittlere Zeit für diese Beobachtung

$+ 8'\ 57''\ 6$ ist,

also ist den 6. September 1800 die mittlere Zeit der Verschwindung von δ Coronae

$11^h\ 23'\ 18''\ 3$

und daraus fand sich die Sternzeit der Verschwindung desselben Sterns

$$22^h \; 26' \; 21'' \; 78$$

und um diese Sternzeit wird er jeden andern Tag ebenfalls verschwinden. Braucht man aber eine mittlere Uhr, so wird er jeden Tag um

$$3' \; 55'' \; 9$$

früher verschwinden. So verschwand er den 12. September um

$$10^h \; 49' \; 21''$$

Uhrzeit. Die Acceleration der Fixsterne für 6 Tage ist

$$23' \; 55'' \; 4$$

also war es den 12. September bey seinem Verschwinden mittlere Zeit

$$11^h \; 23' \; 18'' \; 3 - 23' \; 55'' \; 4 = 10^h \; 59' \; 42'' \; 9$$

oder die Correction der Uhr gen mittl. Zeit war

$$+ \; 10' \; 21'' \; 9,$$

Um nicht immer von demselben Stern abzuhängen, kann man noch eine Anzahl anderer zu allen Stunden der Nacht beobachten, und aus der bekannten Sternzeit des δ Coronae und dem Unterschiede der Beobachtungszeiten die Sternzeiten der andern Sterne finden.

So vertritt also ein kleines Fernrohr, was die Zeitbestimmung betrifft, fast die Stelle eines Mittagsrohres. Wenn man nur einigermaſsen den Gang der Uhr kennt, so weiſs man im voraus die Minute, da jeder Stern verschwindet, was die Beobachtungen sehr erleichtert, besonders wenn man sich einer Sternuhr bedient.

Auch kann man durch diese Beobachtungen den Stundenwinkel und das Azimut des Sterns zur Zeit seiner Verschwindung finden. So ist für den 6. Sept. 1800 und δ Coronae

die scheinbare AR $= 235° \; 18' \; 23'' \; 7 = \alpha$

scheinbare Declination $26° \; 41' \; 31'' \; 0 = \delta$

Aber die Sternzeit der Beobachtung

$$22^h \; 26' \; 21'' \; 78$$

durch 15 multiplizirt, gibt

$$336° \; 35' \; 26'' \; 8 = A$$

für die Rectascension des Zeniths, also ist der Stundenwinkel des Sterns zur Zeit seiner Verschwindung gleich

$$A - \alpha = 101° \; 17'' \; 3'' \; 1$$

Aus diesem Stundenwinkel, der scheinbaren Declination δ und der Polhöhe Bremens

$$\varphi = 53^\circ\ 4'\ 38''$$

findet sich das Azimut des Sterns

$$64^\circ\ 56'\ 21''\ 4$$

und der parallactische Winkel

$$\pi = 37^\circ\ 31'$$

Aendert nun mit der Zeit der Stern seine Restascension um $d\alpha$, so ändert sich die Gröſse A genau um eben so viel, und da beyde Aenderungen entgegengesetzte Zeichen haben, so bleibt für jedes Verschwinden der Stundenwinkel unverändert, aber die Sternzeit der Verschwindung wird um $d\,\alpha$ gröſser, wenn $d\,\alpha$ positiv ist. Aendert sich aber die Declination um $d\,\delta$, so wird dadurch der Stundenwinkel s um

$$d\,s = -d\,\delta.\ \frac{\mathrm{Tg}\,\pi}{\mathrm{Cos}\,\delta}$$

geändert, d. h. in dem obigen Beyspiele um

$$d\,s = -\ 0''86\ (d\,\delta)$$

Um also z. B. die Sternzeit des Verschwindens für δ Coronae den 6. September 1801 zu erhalten, hat man für diese Zeit

scheinbare AR	= 235° 19 5.7 = α'			
scheinb. Declination	26 41 17.8 = δ'			
also $\alpha' - \alpha$ =	42'' 0		$\delta' - \delta$ =	— 13'' 2
	11 35			— 0. 86
Summa	53. 35		d s =	11.35
in Zeit	3''56			
22 26	21. 78	Sternzeit 6. September 1810		
22 26	25. 34	Sternzeit 6. September 1811.		

§. 12.

Alle übrigen Methoden der Zeitbestimmung sind meistens für die Anwendung von geringem Nutzen, daher ich sie hier übergehe, und diesen Gegenstand mit folgender Aufgabe beschlieſse, die zuweilen vortheilhaft angewendet werden kann. Behält man die obigen Bezeichnungen bey, so ist

$$\text{Sin } h = \text{Sin } \varphi \text{ Sin } \delta + \text{Cos } \varphi \text{ Cos } \delta \text{ Cos } s$$

und für eine zweyte Beobachtung eines andern Sterns

$$\text{Sin } h' = \text{Sin } \varphi \text{ Sin } \delta' + \text{Cos } \varphi \text{ Cos } \delta' \text{ Cos } s'$$

Multiplizirt man die erste dieser Gleichungen durch Cos δ', und die zweyte durch Cos δ, so ist ihre Summe

$$\text{Sin } h \text{ Cos } \delta' + \text{Sin } h' \text{ Cos } \delta - \text{Sin } \varphi \text{ Sin } (\delta + \delta')$$
$$= \text{Cos } \varphi \text{ Cos } \delta \text{ Cos } \delta' (\text{Cos } s + \text{Cos } s') \ldots (1)$$

und ihre Differenz

$$\text{Sin } h' \text{ Cos } \delta - \text{Sin } h \text{ Cos } \delta' + \text{Sin } \varphi \text{ Sin } (\delta - \delta')$$
$$= \text{Cos } \varphi \text{ Cos } \delta \text{ Cos } \delta' (\text{Cos } s' - \text{Cos } s) \ldots (2)$$

Dividirt man 2 durch 1, so erhält man

$$\text{Tg } \frac{s + s'}{2} \text{ Tg } \frac{s - s'}{2}$$
$$= \frac{\text{Sin } h' \text{ Cos } \delta - \text{Sin } h \text{ Cos } \delta' + \text{Sin } \varphi \text{ Sin } (\delta - \delta')}{\text{Sin } h \text{ Cos } \delta' + \text{Sin } h' \text{ Cos } \delta - \text{Sin } \varphi \text{ Sin } (\delta + \delta')}$$

Die Gleichung 2 gibt auch, wenn $\delta' - \delta$ klein ist

$$\text{Sin } \frac{s' + s}{2} \text{ Sin } \frac{s' - s}{2} = \frac{2 \text{ Cos } \delta \text{ Cos } \frac{h + h'}{2} \text{ Sin } \frac{h - h'}{2}}{2 \text{ Cos } \varphi \text{ Cos } \delta \text{ Cos } \delta'}$$

$$+ \frac{(\delta' - \delta) \left(\text{Sin } \varphi - \text{Sin } h \text{ Sin } \frac{\delta' + \delta}{2}\right)}{2 \text{ Cos } \varphi \text{ Cos } \delta \text{ Cos } \delta'} \ldots (4)$$

Sind die Beobachtungen auf derselben, oder sind sie auf verschiedenen Seiten des Meridians angestellt, so ist im ersten Falle $s' - s$, und im zweyten $s + s'$ gegeben. wenn man die Uhrzeiten der Beobachtungen kennt, also findet man in beyden Fällen durch die Gleichungen 3 oder 4 die einzelnen Stundenwinkel s und s' oder die Zeiten der Beobachtungen.

Ist $\delta = \delta'$ bey demselben Fixsterne, so wird die letzte Gleichung

$$\text{Sin } \frac{s' + s}{2} \text{ Sin } \frac{s' - s}{2} = \frac{\text{Sin } \frac{h - h'}{2} \text{ Cos } \frac{h + h'}{2}}{\text{Cos } \varphi \text{ Cos } \delta}$$

und dadurch findet man die Zeit aus zwey Höhen desselben Sterns und aus der Zwischenzeit der Beobachtung.

Sind endlich in (2) die Höhen gleich, so ist

$$\operatorname{Sin}\frac{s-s'}{2} = \frac{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}(\delta-\delta') + 2\operatorname{Sin}h \operatorname{Sin}\frac{\delta+\delta'}{2}\operatorname{Sin}\frac{\delta-\delta'}{2}}{2\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Cos}\delta'\operatorname{Sin}\frac{s+s'}{2}}$$

woraus man wie oben §. 2. die Correction der correspondirenden Höhen findet.

Ex. zur Gleichung (4)

1794. März 27. in Göttingen wurden folgende

Höhen des Mittelpunkts der Sonne genommen, die von Refraction, Höhenparallaxe etc. schon corrigirt sind

h = 23°	12′	23″	3	Uhrzeit	20^h	50′	20″	Vormittag
h′ = 24	37	31	5		4	1	29	Nachmittag

Die Declination der Sonne ist für die

erste Beobachtung $\delta = 2° \; 44' \; 3'' \; 3$

zweyte $\delta' = 2 \; 50 \; 44 \; 0$

Die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen ist

$3^h \; 35' \; 34'' \; 5.$

Da die Uhr in 24 wahren Sonnenstunden zeigte

$24^h \; 3' \; 39'' \; 9$

so ist

$$24^h \; 3' \; 39'' \; 9 : 3^h \; 35' \; 34'' \; 5 = 360° : x$$

also

$$x = \frac{s' + s}{2} = 53° \; 45' \; 25''$$

also sind die drey Theile der Gleichung (4)

$$\frac{s' - s}{2} = -4659''5 + 313''3 - 7''6 = -4353''8$$

also in Zeit

$$\frac{s' - s}{30} = -290''25$$

in wahrer Zeit, oder

$-290.25 - 0''.74 = -4'\ 50''99$ in Uhrz.

		3^h	$35'$	34.5			
	$s =$	3^h	$40'$	$25''49$:	$s' = 3^h$	$30'$	$43''51$
	Uhrzeit	20	50	20.00 :	24	1	29.00
Uhrzeit im wahren Mittag		0^h	$30'$	45.49	0	30	45.49

Man wird sich aus der Gleichung (4) leicht überzeugen, daſs zu dieser Zeitbestimmung weder die Declination, noch die Polhöhe, noch die absoluten Höhen selbst mit der äuſsersten Schärfe bekannt seyn müssen, daſs aber die Differenz der beyden Höhen und die Differenz der Declination genau bekannt seyn muſs, wenn der Stundenwinkel nicht zu unrichtig werden soll.

ACHTES KAPITEL.

Bestimmung der Polhöhe aus Beobachtungen.

§. 1.

Die Polhöhe läfst sich erstens aus jeder willkührlichen Höhe eines bekannten Sternes finden, wenn man die Zeit der Beobachtung, d. h. den Stundenwinkel des Sterns kennt. Ist nämlich in der Gleichung

$$\text{Sin } h = \text{Sin } \varphi \text{ Sin } \delta + \text{Cos } \varphi \text{ Cos } \delta \text{ Cos } s$$

nur die Gröfse φ unbekannt, so sey

$$\text{Tg } x = \text{Cos } s \text{ Cotg } \delta$$

und man hat

$$\text{Sin } (\varphi + x) = \frac{\text{Cos } x \text{ Sin } h}{\text{Sin } \delta}$$

Hat man correspondirende Höhen genommen, so geben diese die Zeit der Culmination des Sterns und die Stundenwinkel, welche zu jeder Höhe gehören, also die zu der Auflösung dieser Aufgabe nothwendigen Stücke.

Differentiirt man die erste Gleichung in Beziehung auf $h\ s\ \varphi$, so erhält man

$$d\ \varphi = \frac{-d h - d s \text{ Cos } \varphi \text{ Sin } \omega}{\text{Cos } \omega}$$

wo ω das Azimut ist, woraus folgt, dafs man die Höhenbeobachtung so nahe als möglich bey dem Meridian nehmen mufs.

§. 2.

Hat man also die Höhe des Gestirns in dem günstigsten Augenblicke, im Meridian selbst, beobachtet, so ist, wenn z die von dem Fehler des Instruments, von Refraction und Parallaxe corrigirte Zenithdistanz, und δ die scheinbare (von Präcession, Aberration und Nutation afficirte) Declination des Gestirns ist,

auf der Südseite des Zeniths

$$\varphi = z + \delta,$$

wo südliche δ negativ sind,

und auf der Nordseite des Zeniths

in der obern Culmination $\varphi = \delta - z$

untern $\varphi = 180 - \delta - z$

Bey der Sonne und andern Gestirnen von einem beträchtlichen Halbmesser beobachtet man die Höhe des obern oder untern Randes, weil der Mittelpunkt derselben nicht mit Verläßlichkeit genommen werden kann.

Ex. 1809, Febr. 8. in Krakau:

Beobachtete Zenithdistanz des obern Sonnenrandes

			64°	50′	54″28
	Collim. Fehler	—	3	13.	4
			64	47	40. 88
Bar. 27 $^{\mathrm{z}}$ 6$^{\mathrm{L}}$ 5 Par.	corrig Refraction	+	2		9. 00
Therm Réaum. — 4° o.	Halbm. (Ephem.)	+	16		15. 36
	Höhenparallaxe	—			7. 78
	$z =$		65°	5′	57″ 46
	$\delta =$	—	15	2	16. 70 südl.
	$\varphi =$		50	3	40″76

§. 3.

Ist nebst der Polhöhe φ auch der Collimationsfehler a des Instrumentes unbekannt, so braucht man zwey Beobachtungen auf verschiedenen Seiten des Zeniths, um beyde Größen zu bestimmen.

Ist z δ die Zenithdistanz und die Declination des auf der Südseite des Zeniths beobachteten Gestirns, und z' δ' für das auf der Nordseite, so hätte man, nach dem Vorhergehenden, wenn der Collimationsfehler Null ist,

$$\varphi = z + \delta.$$
$$\varphi' = \delta' - z'$$

die letzte Gleichung für obere Culminationen; für untere mufs man

$$180 - \delta' \text{ statt } \delta'$$

setzen.

Gibt aber z. B. das Instrument alle Zenithdistanzen um die constante Gröfse a zu klein, wo also a der Collimationsfehler ist, so ist, wenn Φ die corrigirte Polhöhe ist,

$$\Phi = z + a + \delta$$
$$\Phi = \delta' - (z' + a)$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen a, so ist

$$\Phi = \frac{\varphi' + \varphi}{2}$$

$\Phi = \varphi + a$
$\Phi = \varphi' - a$
$2\Phi = \varphi + \varphi'$

und eliminirt man Φ, so ist

$$a = \frac{\varphi' - \varphi}{2}$$

oder die wahre Polhöhe ist die halbe Summe, und der Collimationsfehler die halbe Differenz der oben gefundenen unverbesserten Polhöhen.

Zur Erläuterung dieser in der Anwendung sehr brauchbaren Methode mag folgendes Beyspiel dienen.

1808. Sept. 30. in Krakau, im südl. Theil des Meridians

	Beob. Z. D.		scheinb. Decl. δ.
30 δ Adler	47 20 52.1	. .	2° 44′ 57″3
38 μ Adler	43 6 31.7		6 59 23. 3
γ Adler	39 56 6.2		10 9 47. 9

Barometer 27$^{\text{Z}}$ 1$^{\text{L}}$. 6 Paris

Thermometer + 8° o Réaumur

October 2. desselben Jahres, im nördlichen Theil des Meridians

δ kleiner Bär	36 33 24.9	. .	86° 34′ 38″1
50 Drache	25 11 43.0		75 12 31. 7
52 υ Drache	21 1 58.5		71 2 51. 1

Barometer 27^{z} 5^{L}.6

Thermometer + 4°.8

Die erste Beobachtung gibt

	47°	20′	52″	1
corrig. Refraction		1	0.	4
	2	44	57.	3
Polhöhe	50°	6′	49″	8 u. f.

also hat man aus den drey ersten

Polhöhe	50°	6′	49″	8
			47.	0
			40.	6
Mittel φ =	50°	6′	45″	8

und eben so aus den drey letzten

Polhöhe	50°	0′	30″	6
			21.	7
			30.	5
Mittel φ' =	50°	0′	27″	6

also ist wahre Polhöhe

$$\Phi = \frac{\varphi' + \varphi}{2} = 50° \; 3' \; 36''\,7$$

$$\text{Collimationsfehler } a = \frac{\varphi' - \varphi}{2} = -\,3' \; 9''.1$$

und die Gröfse a mufs von allen Z. D. subtrahirt werden.

Die Anwendung dieser Methode ist am einfachsten und sichersten, wenn die südlichen und nördlichen Höhen gleich grofs sind, weil dann auch die Unsicherheit in der gebrauchten Refraction verschwindet; sie läfst sich aber auch, wie man aus dem gewählten Exempel sieht, für ungleiche Höhen, besonders wenn diese nicht zu klein sind, anwenden.

§. 4.

Beobachtet man denselben Stern zweymal mit umgewendetem Instrumente, so dafs der eingetheilte Rand desselben, im der ersten Beobachtung z. B. gen Ost, und in der zweyten gen West steht, so hat in beyden Beobachtungen der Collimationsfehler offenbar denselben Werth, aber entgegengesetzte Zeichen, daher zwey solche Beobachtungen hinreichen, diesen Fehler, aber noch nicht die wahre Polhöhe zu bestimmen, welche letzte auch die Kenntnifs der Declination voraussetzt.

Es seyen z. B. h h' die beobachteten Höhen des Sterns bey entgegengesetzten Lagen des Instruments, beyde in der untern Culmination genommen, so ist die wahre Polhöhe, wenn a der Collimationsfehler ist,

$$\varphi = h - a + (90 - \delta)$$
$$\varphi' = h' + a + (90 - \delta)$$

woraus man den Collimationsfehler

$$\frac{h - h'}{2}$$

und die wahre Polhöhe

$$\frac{\varphi + \varphi'}{2} = \frac{h + h'}{2} + 90 - \delta \ldots \mathrm{I.}$$

erhält, vorausgesetzt, dafs δ in beyden Beobachtungen denselben Werth hat.

Um nun auch die Polhöhe unabhängig von der Declination zu erhalten, seyen H H' zwey andere Höhen desselben Sterns in entgegengesetzten Lagen des Instruments, und beyde in der obern Culmination genommen, so ist wieder

$$\Phi = H - a - (90 - \delta)$$
$$\Phi' = H' + a - (90 - \delta)$$

also der Collimationsfehler

$$\frac{H - H'}{2}$$

und die Polhöhe

$$\frac{\Phi + \Phi'}{2} = \frac{H + H'}{2} - (90 - \delta) \;.\;.\; \mathrm{II.}$$

Verbindet man diese Resultate mit den vorhergehenden, so ist im Mittel aus allen vier Beobachtungen

der Collimationsfehler

$$a = \frac{(H - H') + (h - h')}{4}$$

und die wahre Polhöhe

$$A = \frac{(H+H') + (h+h')}{4}$$

Culminirt das Gestirn über dem Pole auf der südlichen Seite des Zeniths, so wird man statt den beobachteten Höhen ihre Complemente zu 180° nehmen, und diese mit H, H′ bezeichnen. Auf eine Aenderung der Declination in der Zwischenzeit der Beobachtungen wird gehörig Rücksicht genommen.

Ex. Auf der Sternwarte des Grafen Brühl (Doverstreet in London) wurden folgende Höhen der Capella beobachtet

1794. Junius 27.	unter dem Pol	7°	29′	30″	25	
	über	84	9	29.	00	
28	unter	7	28	29.	25	
	über	84	10	17.	00	
Barom. 30. 9	Therm. Fahrenheit			60.	0	
engl. 31. 2				69.	5	
29. 75				60.	5	
30. 00				68.	0	

Bey den beyden ersten Beobachtungen war der eingetheilte Rand des Instruments gen Ost, bey der andern aber gegen West gekehrt.

Die wahren Refractionen für diese Höhen sind

7′ 0″ 90
5. 85
6 45. 90
5. 79

und da die Ziege über dem Pole auf der Südseite des Zeniths culminirt, so ist

$h = 7° 22′ 29″ 35$ unt. Ost
$h′ = 7 \; 21′ 43. 35$ unt. West
$H = 95° 50′ 36″ 85$ ober Ost
$H′ = 95 \; 49 \; 48. 79$ ober West.

Die scheinbare Abweichung des Sterns ist

$\delta = 45° 45″ 58″ 09$,

also

$$A = \frac{(H+H')+(h+h')}{4} = 51^\circ\ 36'\ 9''585 \text{ wahre Polhöhe}$$

$$a = \frac{(H-H')+(h-h')}{4} = 23''515 \text{ wahrer Collimationsfehler.}$$

Daraus folgt ferner die scheinbare Declination des Sterns (aus Gleichung I. oder II.)

$$\delta = 45^\circ\ 45'\ 56''.765$$

Daraus läfst sich endlich auch die Richtigkeit der oben angenommenen Refraction untersuchen. Es ist nämlich die wahre Höhe unter dem Pol

$$A - (90-\delta) = 7^\circ\ 22'\ 6.\ 350$$

Aber man hat

Beob. Höhe unter dem Pol	7° 29′ 30″ 25	. .	7° 28′ 29″ 25
Collimationsfehler	— 23. 51	. .	23. 51
wahre beobachtete Höhe	7 29. 6. 74		7 28 52. 76
	7 22. 6. 35		7 22 6. 35
wahre Refraction	7′ 0″. 39	. .	6′ 46″.41
oben angenommen	7 0. 90		6′ 45 90
	0. 51		0. 51

oder die angenommene Refraction für die Höhe 7° 29′ ist um 0″ 51 fehlerhaft.

Die Circumpolarsterne sind die vortheilhaftesten zur Bestimmung der Polhöhe, weil man, wie man aus dem Vorhergehenden sieht, von der Declination des Sterns unabhängig ist, wenn man ihn in seinen beyden Culminationen beobachtet, und selbst von dem Collimationsfehler, wenn man ihn in den entgegengesetzten Lagen des Instruments beobachtet. Besonders ist der Polarstern (α des kleinen Bären) unter den gröfsern Sternen der nächste am Pol, und also zur Bestimmung der Polhöhe am vortheilhaftesten zu brauchen, weil seine Höhenänderung in der Nähe des Meridians so äufserst gering, und die Differenz der Refractionen in beyden Culminationen nur wenig beträchtlich ist, so dafs ein kleiner Fehler in dem gewählten Augenblick der Culmination nur einen geringen Einflufs auf die gesuchte Polhöhe hat. Sind die Beobachtungen der obern und untern Culmination mehrere Tage von einander entfernt, so dafs die Declination des Sterns nicht mehr für beyde Beobachtungen als constant angesehen werden kann, so mufs man auf diese Aenderung der Declination Rücksicht nehmen. Am besten ist es, jede der einzelnen Beobachtungen mit der ihr entsprechenden scheinbaren Declination zu berechnen, wodurch man so viele Resultate für die Polhöhe erhält, als Beobachtungen sind, so dafs man mit einem Blicke die Uebereinstimmung der einzelnen Resultate übersehen kann. Der Fehler, der dabey durch eine unrichtig vorausgesetzte Declination entsteht, und der dey dem Polarstern, dessen Declination man bereits sehr wohl kennt, nur sehr gering seyn kann, hat auf das Endresultat, oder auf die halbe Summe der aus der obern und untern Culmination abgeleiteten Polhöhe keinen Einflufs, da er in dieser halben Summe, seiner entgegen gesetzten Zeichen wegen verschwindet.

Hat man nur eine, z. B. die obere Culmination eines Circumpolarsterns mit verkehrtem Instrumente beobachtet, so ist, wenn z die beobachtete Zenithdistanz, und r die Refraction bezeichnet,

Das Instrument gen West . . $z + a + r = \delta - \varphi$

Ost $z' - a + r = \delta - \varphi$

also

$$\varphi = \delta - \left(\frac{z' + z}{2} + r\right)$$

und

$$a = \frac{z' - z}{2}$$

Eben so ist für die untere Culmination

Das Instrument gen West . . $Z + a + R = 180 - D - \varphi$

Ost $Z' - a + R = 180 - D - \varphi$

also

$$\varphi = 180 - D - \left(\frac{Z' + Z}{2} + R\right)$$

und

$$a = \frac{Z' - Z}{2}$$

und obschon jedes dieser φ von der Declination abhängt, so ist doch das Mittel aus beyden nur von der Differenz der Declination in der Zwischenzeit abhängig, da man hat

$$\varphi = 90 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{Z + Z' + z + z'}{2} + R + r\right) + \tfrac{1}{2}(\delta - D)$$

Wenn man aber dieselbe Culmination in den beyden entgegengesetzten Lagen des Instruments beobachten will, so kann man das Gestirn nicht mehr in der Ebene des Meridians beobachten. Wir werden aber unten sehen, wie man eine nahe an dem Meridian beobachtete Zenithdistanz auf die Meridian-Zenithdistanz durch eine einfache Rechnung bringen kann.

Den 12. Januar 1821 wurde in Wien mit einem sechszehnzolligen Kreis die obere und untere Culmination des Polarsterns beobachtet.

Die obere gab

Der Kreis westlich $z = 40^\circ\ 8'\ 41''\ 25$ beob. Z. D.
östlich $z' = 40\ \ 7\ \ 50\ \ 55$

Barometer $27^z\ 10^L\ 10^P$ Wien. Maſs
Thermometer Réaumur $+ 7.0$

Die untere aber gab

Der Kreis westlich $Z = 43^\circ\ 25'\ 13''\ 8$
östlich $Z' = 43\ \ 24\ \ 28.\ 30$

Barometer $= 27\ \ 11\ \ 5$
Thermometer $= + \ 6.0$

Daraus folgt für die ersten Beobachtungen die wahre Refraction

$$r = 48''\ 05,$$

für die zweyte

$$R = 54''.\ 20$$

und für alle, da sich die scheinbare Declination in der Zwischenzeit nicht änderte,

$$\delta = D = 88^\circ\ 21'\ 38'',\ 29.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in den vorhergehenden Ausdrücken, so ist für die obere Culmination

$$\varphi = 48^\circ\ 12'\ 35''.\ 3$$
$$a = -\ \ 25''.\ 3$$

und für die untere

$$\varphi = 48^\circ\ 12'\ 36''.\ 5$$
$$a = -\ \ 22''.\ 8$$

Bessel beobachtete 1814 in Königsberg folgende Zenithdistanzen des Polarsterns in der obern Culmination

16. April	=	33°	34′	56″ 6	das Instr. gen Ost
		33	35	47. 3	- - - - West
		33	35	21.95	
Refraction				37.30	
z	=	33	35	59.25	
scheinb. Poldistanz p	=	1	41	9.30	
90 — φ	=	35	17	8. 5	
Den 18. April		33	34	56. 2	Ost
		33	35	53. 9	West
		33	35	25.05	
R	=			37.40	
p	=	1	41	9.65	
90 — φ	=	35	17	12. 1	
Den 19. April		33	34	56. 3	Ost
		33	35	48. 2	West
		33	35	22.25	
R	=			36. 8	
p	=	1	41	10.15	
90 — φ	=	35	17	9. 2	

An demselben Tage wurden auch folgende Zenithdistanzen der untern Culmination genommen:

16. April		36°	57	9. 1	Ost
		36	58	0. 9	West
		36	57	35. 0	
R	=			43. 4	
p	= —	1	41	9. 3	
90 — φ	=	35	17	9. 1	

18. April		36° 57 12. 55	Ost		
		36 58 2. 1	West		
		36 57 37. 32			
	R =	43. 40			
	p =	1 41 9. 65			
	90 — φ =	35 17 11. 07			
19. April.		36 57 22. 6	Ost		
		36 57 50. 35	West		
		36 57 36, 47			
	R =	43. 4			
	p = —	1 41 10. 15			
	90 — φ =	35° 17′ 9″72			

Man hat daher folgende Werthe von Aequatorhöhen:

aus der obern Culmination

$$
\begin{array}{lr}
 & 35^\circ\ 17'\ 8''\ 5 \\
 & 12.\ 1 \\
 & 9.\ 2 \\
\hline
\text{Mittel} & 35\ \ 17\ \ 9.93 = 90 - \varphi
\end{array}
$$

aus der untern

$$
\begin{array}{r}
35^\circ\ 17'\ 9''\ 1 \\
11.\ 07 \\
9.\ 72 \\
\hline
35\ \ 17\ \ 9.\ 96 = 90 - \varphi'
\end{array}
$$

und die Uebereinstimmung der beyden Mittel zeigt, dafs die gewählte Declination des Sterns richtig ist. Wäre die Declination ganz unbekannt, so würde jedes Paar von Beobachtungen geben

in der obern Culmination $\varphi = \delta - z$

untern $\varphi = 180 - \delta\ z'$

also d: wahre Aequatorhöhe

$$\frac{z + z'}{2}$$

und die wahre Poldistanz

$$\frac{z - z'}{2}$$

So geben die Beobachtungen des 16. Aprils

$$z = 33\ 35\ 59.\ 25$$
$$z' = 36\ 58\ 18.\ 40$$

also $\frac{z+z'}{2} = 35° \ 17' \ 8'' \ 82$ Aequatorhöhe des Beobachtungsortes,

$\frac{z-z'}{2} = 1° \ 41' \ 9'' \ 57$ Poldistanz des Sterns

Auf einen andern sehr ausgedehnten Gebrauch des Polarsterns zur Bestimmung der Polhöhe werden wir unten zurückkommen.

§. 5.

Besonders vortheilhaft zur Bestimmung der Polhöhe ist die Methode der sogenannten Circummeridianhöhen, das heifst, der nahe am Meridian beobachteten Höhen, deren man eine grofse Anzahl vor und nach der Culmination an einem Tage beobachten kann. Reduzirt man diese beobachteten Höhen auf diejenige, welche im Augenblicke der Culmination selbst statt hat, so erhält man dadurch eben so viele mittägliche Höhen, d. h. eben so viele Bestimmungen der Polhöhe, als man Höhenbeobachtungen hat. Diese Reduction auf den Meridian kann auf verschiedne Weise vorgenommen werden: wir wollen die vorzüglichsten derselben angeben.

Es sey

$$\frac{\operatorname{Sin} a - \operatorname{Sin} b}{\operatorname{Cos} a} = z,$$

so ist auch

$$z = \frac{\operatorname{Sin} a + \operatorname{Sin} (a-b) \operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} (a-b) \operatorname{Sin} a}{\operatorname{Cos} a}.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke für

$$\operatorname{Sin} (a - b) \text{ und } \operatorname{Cos} (a - b)$$

ihre Werthe durch die Potenzen von $(a - b)$, so erhält man

$$z = (a-b) + \frac{(a-b)^2}{1.2} \operatorname{Tg} a$$

$$- \frac{(a-b)^3}{1.2.3} - \frac{(a-b)^4}{1.2.3.4.} \operatorname{Tg} a$$

$$+ \frac{(a-b)^5}{1.2..5} + \frac{(a-b)^6}{1.2...6} \operatorname{Tg} a +$$

und wenn man diese Reihe umkehrt, so ist

$$a - b = z - \frac{z^2}{1.2} \operatorname{Tg} a + \frac{z^3}{1.2.3}(1 + 3 \operatorname{Tg}^2 a)$$

$$- \frac{z^4}{1.2.3.4} (9 \operatorname{Tg} a + 15 \operatorname{Tg}^3 a)$$

$$+ \frac{z^5}{1.2..5} (105 \operatorname{Tg}^4 a + 90 \operatorname{Tg}^2 a + 9)$$

$$- \frac{z^6}{1.2...6} (945 \operatorname{Tg}^5 a + 1050 \operatorname{Tg}^3 a + 225 \operatorname{Tg} a) +$$

Die Höhe h eines Gestirns, zu welchem der Stundenwinkel s, die Polhöhe φ und die Declination δ gehört, wird bekanntlich durch folgende Gleichung gegeben

$$\operatorname{Sin} h = \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} \delta + \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} s$$

Ist aber h' δ' die mittägliche Höhe und die mittägliche Declination dieses Gestirns, und

$$h' - h = d h$$

so ist

$$h = h' - d h = 90 - \varphi + \delta' - d h$$

also die vorhergehende Gleichung

$$\operatorname{Cos} (\varphi - \delta' + dh) = \operatorname{Cos} (\varphi - \delta) - 2 \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Sin}^2 \frac{s}{2}$$

oder auch

$$\frac{\operatorname{Cos} (\varphi - \delta) - \operatorname{Cos} (\varphi - \delta' + dh)}{\operatorname{Sin} (\varphi - \delta)} = \frac{2 \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Sin}^2 \frac{s}{2}}{\operatorname{Sin} (\varphi - \delta)}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem vorhergehenden

$$\frac{\operatorname{Sin} a - \operatorname{Sin} b}{\operatorname{Cos} a} = z$$

so ist

$$a = 90 - \varphi + \delta$$

$$b = 90 - \varphi + \delta' - d\,h$$

$$z = 2\,m\,\mathrm{Sin}^2\frac{s}{2}$$

$$\text{wo } m = \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\delta}{\mathrm{Sin}\,(\varphi - \delta)}$$

also hat man auch

$$d\,h\,\mathrm{Sin}\,1'' = (\delta' - \delta)\,\mathrm{Sin}\,1'' + 2\,m\,\mathrm{Sin}^2\frac{s}{2}$$

$$- 2\,m^2\,\mathrm{Sin}^4\frac{s}{2}\;\mathrm{Cotg}\,(\varphi - \delta)$$

$$+ 4\,m^3\,\mathrm{Sin}^6\frac{s}{2}\;(\tfrac{1}{3} + \mathrm{Cotg}^2\,(\varphi - \delta))$$

$$- 2\,m^4\,\mathrm{Sin}^8\frac{s}{2}\;(3\,\mathrm{Cotg}\,(\varphi - \delta) + 5\,\mathrm{Cotg}^3\,(\varphi - \delta))$$

$$+ m^5\,\mathrm{Sin}^{10}\frac{s}{2}\;\left(28\,\mathrm{Cotg}^4\,(\varphi - \delta) + 24\,\mathrm{Cotg}^2\,(\varphi - \delta) + \frac{12}{5}\right)$$

$$- m^6\,\mathrm{Sin}^{12}\frac{s}{2}(84\,\mathrm{Cotg}^5\,(\varphi - \delta) + \frac{280}{3}\mathrm{Cotg}^3(\varphi - \delta) - 20\,\mathrm{Cotg}(\varphi - \delta)) + \ldots \text{I.}$$

und diefs ist der gesuchte Werth der Reduction $d\,h$ der aufser dem Meridian beobachteten Höhe auf die mittägliche Höhe. Er gilt unverändert, wenn das Gestirn auf der Südseite des Zeniths culminirt.

Culminirt es zwischen Pol und Zenith, so ist

$$h' = 90 + \varphi - \delta$$

$$m = \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\delta}{\mathrm{Sin}\,(\varphi - \delta)}$$

also für $\delta' = \delta$

$$d\,h\,\mathrm{Sin}\,1'' = 2\,m\,\mathrm{Sin}^2\frac{s}{2} - 2\,m^2\,\mathrm{Sin}^4\frac{s}{2}\;\mathrm{Cotg}\,(\delta - \varphi)$$

$$+ 4\,m^3\,\mathrm{Sin}^6\frac{s}{2}\;(\tfrac{1}{3} + \mathrm{Cotg}^2\,(\delta - \varphi))\;\ldots \text{II.}$$

Culminirt es endlich unter dem Pol, so ist

$$h' = \varphi + \delta - 90$$

$$m = \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\delta}{\mathrm{Sin}\,(\varphi + \delta)}$$

also für $\delta' = \delta$

$$d\,h\,\mathrm{Sin}\,1'' = 2\,m\,\mathrm{Sin}^2\frac{s}{2} - 2\,m^2\,\mathrm{Sin}^4\frac{s}{2}\;\mathrm{Cotg}\,(\varphi + \delta)$$

$$+ 4\,m^3\,\mathrm{Sin}^6\frac{s}{2}\;(\tfrac{1}{3} + \mathrm{Cotg}^2\,(\varphi + \delta)) + \ldots \text{III.}$$

und dieser Werth von dh wird in (I.) und (II.) zu h addirt, im (III.) aber von h subtrahirt, um die mittägliche Höhe h' zu erhalten.

Die Gröfse

$$(\delta' - \delta) \text{ in (I.)}$$

aber ist vor Mittag negativ und nach Mittag positiv, wenn die Poldistanz des Gestirns wächst, und umgekehrt vor Mittag positiv, und nach Mittag negativ, wenn die Poldistanz des Gestirns abnimmt.

Sind die Höhen nahe am Mittag genommen, so reichen gewöhnlich die zwey ersten Glieder von dh und meistens schon das erste allein hin.

Man wird aber das erste Glied dieser Gleichung

$$2\, m \operatorname{Sin}^2 \frac{s}{2}$$

sehr bequem berechnen, wenn man sich eine Tafel entwirft, die mit dem Argumente ϑ die Gröfse

$$\left\{\frac{2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{Sin} 1''}\right\}$$

gibt, so wie das zweyte Glied, wo es nöthig ist, durch eine andere kleine Tafel, die mit demselben Argumente die Gröfse

$$\left\{\frac{2 \operatorname{Sin}^4 \frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{Sin} 1}\right\}$$

gibt. Statt endlich jede dieser Reductionen dh an ihre entsprechende Höhe h anzubringen, wird man kürzer die Summe aller dh an die Summe aller h anbringen, und diese letzte Summe durch die Anzahl der Beobachtungen dividiren, wie wir unten durch ein Beyspiel zeigen werden. Man wird nämlich mit dem Argumente

$$\vartheta = t = \frac{s}{2} \text{ (Stundenwinkel in Zeit)}$$

die jeder Beobachtung entsprechende Zahl der ersten Tafel suchen, und ihre Summe durch $\frac{m}{n}$ multipliziren, wo

$$m = \frac{\operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} \delta}{\operatorname{Sin} (\varphi - \delta)}$$

und n die Anzahl der Beobachtungen ist, das so erhaltene Produkt wird das erste Glied der Gleichung I. seyn. Eben so wird man mit demselben Argumente die Summe der Zahlen der zweyten Tafel suchen, und diese Summe durch

$$\frac{m^2}{n} \operatorname{Cotg}(\varphi - \delta)$$

multipliziren, und das so erhaltene Produkt wird das zweyte Glied der Gleichung I. seyn. In den meisten Fällen wird es hinreichen, den Werth dieses zweyten Gliedes nur für einige Beobachtungen zu berechnen, und aus ihnen ihre Werthe für die zwischenliegenden Beobachtungen durch eine einfache Interpolation herzuleiten.

Bey Fixsternen fällt der Theil ($\delta' - \delta$) weg, so wie die Parallaxe und der Halbmesser; für sie wird man am bequemsten Sternuhren brauchen, und die Zeit zwischen der Uhrzeit der Beobachtung und der Uhrzeit der Culmination als den Stundenwinkel nehmen. Braucht man eine mittlere Uhr, so wird man diese Zwischenzeit für Fixsterne durch 1.00274 multipliziren. Auch kann man diese Correction bequemer noch an dem Factor dh anbringen. Ist nämlich a die tägliche Acceleration der Uhr in Secunden gegen die Zeit des Gestirns (für Retardationen ist a negativ) so muſs dh noch durch

$$1 - \frac{2a}{24 \cdot 60^2} = 1 - (0.0000231)\, a$$

multiplizirt werden. Beobachtet man z. B. die Sonne an einer Sternuhr, so ist nahe

$$a = 236''.$$

also jener Factor von dh gleich 0 99 45. Beobachtet man aber Fixsterne an einer mittlern Uhr, so ist jener Factor 1. 0055

Erhält man endlich auf diese Art von einem Circumpolarstern in der Nähe der obern Culmination die mittägliche Höhe H, und in der Nähe der untern die mittägliche Höhe H′, so ist

$$\tfrac{1}{2}(H + H')$$

die Polhöhe des Beobachtungsortes, und

$$\tfrac{1}{2}(H - H')$$

die Poldistanz des Gestirns, wenn auf Refraction gehörig Rücksicht genommen wird.

Ohne einer solchen Tafel endlich ist folgender Ausdruck von d h zur nummerischen Entwickelung der bequemste. Es ist nämlich

$$\operatorname{Sin}\frac{s}{2} = \left(\frac{s}{2}\right)\operatorname{Sin}1'' - \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^3\operatorname{Sin}^3 1''}{1.2.3.} + \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^5\operatorname{Sin}^5 1''}{1.2.3.4.5} -$$

also erhält man, wenn man diese Reihe bis

$$\left(\frac{s}{2}\right)^9$$

fortsetzt, statt der Gleichung I.

$$\begin{aligned}
dh &= (\delta' - \delta) + (0.2930294)\ mt^2 \\
&- (0.9706047 - 6)\ m^2 t^4 \operatorname{Cotg}(\varphi - \delta) \\
&- (0.4934834 - 6)\ mt^4 \\
&+ (0.9492095 - 11)\ m^3 t^6 (\tfrac{1}{3} + \operatorname{Cotg}^2(\varphi - \delta)) \\
&+ (0.4720883 - 11)\ m^2 t^6 \operatorname{Cotg}(\varphi - \delta) \\
&+ (0.2959970 - 12)\ mt^6
\end{aligned}$$

wo t in Minuten der Zeit, dh in Sekunden des Bogens, und wo die numerischen Coefficienten schon Logarithmen sind.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir auf das bisher vorgetragene ein Beyspiel anwenden.

1794. Göttingen den 11. März. Uhrzeit des wahren Mittags aus correspondirenden Sonnenhöhen

$$0^h\ 1'\ 19''\ 2$$

Abweichung der Sonne im wahren Mittag

$$\delta' = -3^\circ\ 30'\ 38''$$

Aenderung der Abweichung in einer Zeitminute

$$d\,\delta = 0''.\ 9792$$

abnehmend. Vorläufige Polhöhe

$$\varphi = 51^\circ\ 32'\ 4''$$

$$\log m = \log\frac{\operatorname{Cos}\varphi\ \operatorname{Cos}\delta'}{\operatorname{Sin}(\varphi - \delta')} = 9.8794023$$

Die Beobachtungen waren folgende:

Uhrzeit der Beobachtung		Höhe ob. Rand ☉ v.Coll.Fehl.befreyt		Stundenwinkel in Zeit
23h 51′ 38	- - - -	35° 12′ 8″	- - -	9′ 687
53 0		35 12 48		8. 320
54 40		35 13 30		6. 653
56 3		35 13 53		5. 270
57 30		35 14 15		3. 820
58 32		35 14 28		2. 787
59 25		35 14 40		1. 903
0 1 0		35 14 40		0. 320
3 25		35 14 33		2. 087
4 28		35 14 25		3. 147
5 55		35 14 10		4. 597
7 28		35 13 48		6. 140

Für diese Beobachtungen ist nach der Ordnung:

Refract.	- - - -	δ′—δ	- - -	Reduction d h	Mittägl. Höhe d. obern Randes
— 80″6		+ 9″5		+ 139″6	35° 13′ 16″ 5
80. 5		8. 1		103. 0	18. 6
80. 5		6. 5		65. 8	21. 8
80. 5		5. 2		41. 3	19. 0
80. 5		3. 7		21. 7	19. 9
80. 5		2. 7		11. 5	21. 7
80. 4		1. 9		5. 4	26. 9
80. 4		+ 0. 3		0. 1	20. 0
80. 4		— 2. 0		6. 5	17. 1
80. 5		— 3. 1		14. 7	16. 1
80. 5		— 4. 5		31. 4	16. 4
80. 5		— 6, 0		56. 1	17. 6

Schliefst man die siebente Beobachtung aus, so ist das Mittel der 11 Zahlen der zweyten Columne, durch 11 dividirt, oder

	beob. Höhe des obern Randes	35° 13′ 52″ 5
Mittel der vierten Columne	Refraction	— 80. 5
fünften - - -	$\delta' - \delta$	+ 1. 8
sechsten - -	dh	+ 44. 7
siebenten	mitt. Höhe d. ob. Randes	35° 13′ 18″ 6

Man hat daher	35° 13′ 18″ 6
Halbmesser	— 16′ 8. 1
Höhenparallaxe	6. 8
Abweichung im Mittag	+ 3 30 38. 0
Aequatorhöhe	38 27 55. 3
Polhöhe	51 32 4. 7

Bey diesem Verfahren, wo jede mittägliche Höhe besonders berechnet wird, hat man den Vortheil, die Uebereinstimmung der einzelnen Resultate zu übersehen. Bequemer aber wird man das Mittel der Reductionen zu dem Mittel der beobachteten Höhe (zweyte Columne) setzen, und so verfahren:

Stundenwinkel - - -	$\left\{\dfrac{2\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{s}{2}}{\mathrm{Sin}\,1''}\right\}$
9′ 41″	184″. 1
8 19	135. 8
6 39	86. 8
5 16	54. 5
3 49	28. 6
2 47	15. 2
0 19	0. 2
2 5	8. 5
3 9	19. 3
4 36	41. 5
6 8	73. 9
Mittel	58″. 9454

$$\begin{array}{rcl} \text{Dessen Logar.} & = & 1.7704499 \\ \log m & = & 9.8794023 \\ \hline & & 1.6498522 = \log 44''\,7 \end{array}$$

Diefs vorausgesetzt, ist

$\frac{1}{11}$ der beob. Höhen - -	35° 13′ 52″ 5	dafür Refract.	— 1′ 20″ 5
Reduction - -	44. 7	Halbmesser	— 16 8. 1
Höhenparallaxe	6. 8		17′ 28″. 6
$\delta' - \delta$	1. 8		
Abweichung im Mittag	3 30 38. 0		
	38 45 23. 8		
	— 17 28. 6		
Aequatorhöhe	38 27 55. 2	wie zuvor.	

Eben so wird man die Correction der beobachteten Zenithdistanz wegen der Aenderung der Declination auf folgende Art bequemer finden.

Ist A die Summe der Stundenwinkel vor, und B nach dem Mittage, beyde in Zeitminuten ausgedrückt; dp die Zunahme der Poldistanz der Sonne in einer Zeitminute (dp negativ, wenn die Poldistanz abnimmt); endlich N die Anzahl der Beobachtungen, so ist

$$\text{Corrigirtes } z = z + (A - B).\ \frac{dp}{N}\ .$$

Die Höhenparallaxe der Sonne kann man gleich $8.''7 \operatorname{Sin} z$ annehmen.

§. 6.

Wir wollen nun noch einige andere merkwürdige Ausdrücke für die Reduction dh suchen. Ist

$$\pi = 90 - \delta,\ \psi = 90 - \varphi,$$

und z die mittägliche Zenithdistanz des Gestirns, x endlich die Reduction der beobachteten Zenithdistanz auf die mittägliche, so ist

$$\operatorname{Cos}(z + x) = \operatorname{Cos}\pi \operatorname{Cos}\psi + \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos} s$$

Aus dieser Gleichung läfst sich x auf verschiedene Weise finden, und da Ausdrücke dieser Art bey astronomischen Untersuchungen so oft vorkommen, so wird es nützlich seyn, hier einige der vorzüglichtsen kurz anzuzeigen.

I. Ist erstens die Gröfse x so klein, dafs sie ohne merklichen Fehler mit ihrem Sinus oder ihrer Tangente verwechselt werden kann, ein Fall, der bey Circummeredianhöhen so oft eintritt, so sey der Kürze wegen

$$\vartheta = \operatorname{Sin} \frac{s}{2},$$

$$a = \frac{2 \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Sin} \psi}{\operatorname{Sin} z \operatorname{Sin} 1''},$$

$$b = \tfrac{1}{2} \operatorname{Cotg} z. \operatorname{Sin} 1''$$

Dies vorausgesetzt, findet man ohne Mühe folgende Ausdrücke

$$x = a\vartheta^2 - a^2 b \vartheta^4 + \frac{4}{1.\,2} a^3 b^2 \vartheta^6$$
$$- \frac{5.\,6}{1.\,2.\,3} a^4 b^3 \vartheta^8 + \frac{6.\,7.\,8}{1.\,2.\,3.\,4} a^5 b^4 \vartheta^{10} -$$

oder auch allgemein, wenn n was immer für eine Zahl ist,

$$x^n = a^n \vartheta^{2n} - \frac{n}{1} a^{n+1} b \vartheta^{2(n+1)}$$
$$+ \frac{n.\, n+3}{1.\,2} a^{n+2} b^2 \vartheta^{2(n+2)}$$
$$- \frac{n.\, n+4.\, n+5}{1.\,2.\,3.} a^{n+3} b^3 \vartheta^{2(n+3)}$$
$$+ \frac{n.\, n+5.\, n+6.\, n+7}{1.\,2.\,3.\,4} a^{n+4} b^4 \vartheta^{2(n+4)} -$$

Zieht man der bequemeren Rechnung wegen die Logarithmen dieser Gröfse vor, so ist

$$\log x = \log (a\vartheta^2) - a b \vartheta^2$$
$$+ \frac{3}{2} a^2 b^2 \vartheta^4 - \frac{4.\,5}{2.\,3} a^3 b^3 \vartheta^6 + \frac{5.\,6.\,7}{2.\,3.\,4} a^4 b^4 \vartheta^8 -$$

oder endlich

$$x = \cfrac{a\vartheta^2}{1 - \cfrac{ab\vartheta^2}{-1 - \cfrac{ab\vartheta^2}{1 - \cfrac{ab\vartheta^2}{-1 \text{ etc.}}}}}$$

II. Alle vorhergehenden Ausdrücke setzen aber, wie gesagt,

$$x = \frac{\mathrm{Sin}\, x}{\mathrm{Sin}\, 1}$$

voraus. Folgende Ausdrücke sind von dieser Voraussetzung frey, und gelten für jeden Werth von x.

Heiſst man

$$p = \mathrm{Sin}\, \pi\ \mathrm{Sin}\, \psi\ \mathrm{Cosec}\, z \text{ und}$$
$$q = \mathrm{Cotg}\, z, \quad \text{so ist}$$

$$\mathrm{Tg}\, \frac{x}{2} = p\, \vartheta^2 - p^2\, \vartheta^4$$
$$+ \left(1 + \frac{4}{2}\, q^2\right) p^3\, \vartheta^6 - \left(\frac{4}{2}.2 + \frac{5.\ 6}{2.\ 3}\, q^2\right) p^4\, q\, \vartheta^8$$
$$+ \left(\frac{4}{2} + \frac{5.\ 6}{2.\ 3}.\ 3\, q^2 + \frac{6,\ 7.\ 8}{2.\ 3.\ 4}\, q^4\right) p^5\, \vartheta^{10} -$$

welche Reihe sich leicht fortsetzen läſst.

Allgemeiner, wenn n was immer für eine Zahl ist,

$$\mathrm{Tg}^n\, \frac{x}{2} = (p\,\vartheta^2)^n + n\,(p\,\vartheta^2)^{n+1}\,(p\,\vartheta^2 - q)$$
$$+ \frac{n.\ n+3}{1.\ 2}\,(p\,\vartheta^2)^{n+2}\,(p\,\vartheta^2 - q)^2$$
$$+ \frac{n.\ n+4.\ n+5}{1.\ 2.\ 3.}\,(p\,\vartheta^2)^{n+3}\,(p\,\vartheta^2 - q)^3 +$$

Setzt man in den letzten Ausdrücken für n nach der Ordnung 1, 3, 5, 7... und substituirt man die so erhaltenen Ausdrücke in der Gleichung

$$\frac{x}{2} = \mathrm{Tg}\, \frac{x}{2} - \tfrac{1}{3}\, \mathrm{Tg}^5\, \frac{x}{2} + \tfrac{1}{5}\, \mathrm{Tg}^7\, \frac{x}{2} -$$

so erhält man

$$\frac{x}{2} = p\, \vartheta^2 - q\, p^2\, \vartheta^4$$
$$+ \left(\tfrac{2}{3} + 2\, q^2\right) p^3\, \vartheta^6$$
$$- \left(3\, q + 5\, q^3\right) p^4\, \vartheta^8$$
$$+ \left(\tfrac{6}{5} + 12\, q^2 + 14\, q^4\right) p^5\, \vartheta^{10} -$$

und dies ist der im vorigen §. gefundene Ausdruck.

Hat man so

$$\mathrm{Tg}^n\, \frac{x}{2}$$

$$\text{für } n = 1, 2, 3 \ldots$$

entwickelt, so kann auch die Reihe für

$$\left.\begin{matrix}\text{Sin}\\ \text{Cos}\end{matrix}\right) \frac{x}{2} \text{ oder für } \left.\begin{matrix}\text{Sin}\\ \text{Cos}\end{matrix}\right) x \text{ u.s.w.}$$

darstellen, denn es ist

$$\text{Sin } \frac{x}{2} = t - \tfrac{1}{2} t^3 + \frac{1.\,3}{1.\,2.\,2^2} t^5 - \frac{1.\,3.\,5}{1.\,2.\,3.\,2^3} t^7 +$$

$$\text{wo } t = \text{Tg} \frac{x}{2}$$

und eben so

$$\text{Cos } \frac{x}{2} = 1 - \tfrac{1}{2} t^2 + \frac{1.\,3}{1.\,2.\,2^2} t^4 - \frac{1.\,3.\,5}{1.\,2.\,3.\,2^3} t^6 +$$

$$\text{Sin } x = 2\, t\, (1 - t^2 + t^4 - t^6 +)$$

$$\text{Cos } x = 1 - 2\, t^2 + 2\, t^4 - 2\, t^6 +$$

$$\text{Tg } x = t\, (1 + t^2 + t^4 + t^6 +)$$

bey deren Entwicklung ich mich nicht weiter aufhalte. Sucht man auch hier zur bequemeren Berechnung die Logarithmen, so ist

$$\log \text{Tg} \frac{x}{2} = \log (p\,\vartheta^2) - p\,q\,\vartheta^2 + (1 + \tfrac{1}{2} q^2) p^2\, \vartheta^4$$

$$- (\tfrac{1}{3}.\, 2 + \frac{4.\,5}{2.\,3} q^2)\, p^3\, q\, \vartheta^6$$

$$(\tfrac{1}{4} + \frac{4.\,5}{2.\,3}.\, 3\, q^2 + \frac{5.\,6.\,7}{2.\,3.\,4} q^4)\, p^4\, \vartheta^8$$

$$- \left(\frac{4.\,5}{2.\,3}.\, 3 + \frac{5.\,6.\,7}{2.\,3.\,4} 4\, q^2 + \frac{6.\,7.\,8.\,9}{2.\,3.\,4.\,5} q^4\right) p^5\, q\, \vartheta^{10} +$$

wovon das Gesetz des Fortganges deutlich ist.

Endlich ist noch

$$\text{Tg } \frac{x}{2} = \cfrac{p\,\vartheta^2}{1 + \cfrac{(p\,\vartheta^2 - q)\, p\,\vartheta^2}{-1 + \cfrac{(q\,\vartheta^2 - q)\, p\,\vartheta^2}{1 + \cfrac{(p\,\vartheta^2 - q)\, p\,\vartheta^2}{-1 + \text{etc.}}}}}$$

III. Merkwürdiger sind die Auflösungen der oben angeführten Gleichung, die sich, wie es bey den Circummeneridianhöhen der Fall ist, auf eine Anzahl mehrerer aufeinander folgenden Beobachtungen beziehen. Behält man nämlich die vorhergehenden Bezeichnungen bey, und setzt

$$m = \mathrm{Tg}\,\frac{\pi}{2}\,\mathrm{Tg}\,\frac{\psi}{2},$$

so ist, wenn z die beodachtete Zenithdistanz ist, (nach Capitel I.)

$$\log\,\mathrm{Cos}\,\frac{z}{2} = \log\,\mathrm{Cos}\,\frac{\pi}{2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{\psi}{2} + m\,\mathrm{Cos}\,s$$
$$- \frac{m^2}{2}\,\mathrm{Cos}\,2s + \frac{m^3}{3}\,\mathrm{Cos}\,3s - \frac{m^4}{4}\,\mathrm{Cos}\,4s +$$

Ist aber ζ die mittägliche Zenithdistanz, für welche im allgemeinen $s = o$ ist, so folgt aus dem vorhergehenden Ausdrucke

$$\log\,\mathrm{Cos}\,\frac{\zeta}{2} = \log\,\mathrm{Cos}\,\frac{\pi}{2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{\psi}{2}$$
$$+ m - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} - \frac{m^4}{4} +$$

und beyder Reihen Differenz ist

$$\log\,\mathrm{Cos}\,\frac{\zeta}{2} = \log\,\mathrm{Cos}\,\frac{z}{2}$$
$$+ 2\left(m\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{s}{2} - \frac{m^2}{2}\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{2s}{2} + \frac{m^3}{3}\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{3s}{2} - \right)$$

Für eine zweyte, dritte Beobachtung u. f. bezeichnet man in dem letzten Ausdrucke z, s mit einem, zwey Strichen u. f.

Diese Reihen sind aber erstens sehr unbequem zu berechnen, und zweytens schliessen sie die einzelnen Gröfsen z z' z'' . . ein, die bey Beobachtungen mit Multiplicationskreisen, wenn man nicht bey jeder Beobachtung abliest, unbekannt sind.

Man kann aber diesen Ausdruck auch so darstellen:

$$\log\,\mathrm{Cos}\,\frac{\zeta}{2} = \log\,\mathrm{Cos}\,\frac{z}{2}$$
$$+ 2\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{s}{2}\left\{m - \tfrac{1}{2}.\frac{m^2\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{2s}{2}}{\mathrm{Sin}^2\,\frac{s}{2}} + \tfrac{1}{3}\,m^3\,\frac{\mathrm{Sin}^2\,\frac{3}{2}\,s}{\mathrm{Sin}^2\,\frac{s}{2}} - \right\}$$

L J.

und da im allgemeinen $\frac{\zeta}{2}$ nur ein kleiner Winkel ist, so kann man im zweyten Gliede dieser Reihe, welches schon in die sehr kleinen Factoren

$$\mathrm{Sin}^2 \frac{s}{2} \text{ und } m^2$$

multiplizirt ist, die Größe

$$\frac{\mathrm{Sin}^2 \frac{2s}{2}}{\mathrm{Sin}^2 \frac{s}{2}}$$

ohne merklichen Fehler gleich 2^2 setzen. Dasselbe gilt für die höheren Glieder, in welche zwar

$$\frac{3s}{2}, \frac{4s}{2} \ldots$$

immer größer, aber dagegen

$$m^3, m^4, \ldots$$

in einem viel stärkern Verhältnisse immer kleiner werden, wenn man, wie man es zu Breitenbestimmungen immer thun wird, Sterne nahe am Pol wählt, für welche

$$\mathrm{Tg} \frac{\pi}{2}$$

und daher auch m sehr klein ist. Nach dieser Bemerkung wird also die vorhergehende Reihe in folgende übergehen

$$\log \mathrm{Cos} \frac{\zeta}{2} = \log \mathrm{Cos} \frac{s}{2}$$

$$+ 2 \mathrm{Sin}^2 \frac{s}{2} (m - 2m^2 + 3m^3 - 4m^4 +)$$

Da aber

$$m - 2m^2 + 3m^3 - = \frac{m}{(1+m)^2}$$

und

$$m = \mathrm{Tg} \frac{\pi}{2} \mathrm{Tg} \frac{\phi}{2} \text{ ist,}$$

so hat man

$$\log \mathrm{Cos} \frac{\zeta}{2} = \log \mathrm{Cos} \frac{s}{2} + 2 \mathrm{Sin}^2 \frac{s}{2} \cdot \frac{\mathrm{Sin}\, \pi \, \mathrm{Sin}\, \phi}{4 \mathrm{Cos}^2 \frac{\pi - \phi}{2}}$$

oder bequemer zur Berechnung mit Logarithmen, wenn $\mu = 0.4342945$ ist

$$\log \text{vulg} \operatorname{Cos} \frac{\zeta}{2} = \log \text{vulg} \operatorname{Cos} \frac{z}{2}$$

$$+ \mu \operatorname{Sin} 1'' \left\{ \frac{2 \operatorname{Sin}^2 \frac{s}{2}}{\operatorname{Sin} 1''} \right\} \frac{\operatorname{Sin} \pi \operatorname{Sin} \psi}{4 \operatorname{Cos}^2 \frac{\pi - \psi}{2}}$$

Eben so hat man für eine zweyte Beobachtung

$$\log \operatorname{Cos} \frac{\zeta}{2} = \log \operatorname{Cos} \frac{z'}{2}$$

$$+ \mu \operatorname{Sin} 1'' \left\{ \frac{2 \operatorname{Sin}^2 \frac{s'}{2}}{\operatorname{Sin} 1''} \right\} \frac{\operatorname{Sin} \pi \operatorname{Sin} \psi}{4 \operatorname{Cos}^2 \frac{\pi - \psi}{2}} \text{ u. s. w.}$$

Sucht man nun aus der in dem vorigen §. erwähnten Tafel, für jeden Stundenwinkel die entsprechende Zahl

$$\frac{2 \operatorname{Sin}^2 \frac{s}{4}}{\operatorname{Sin} 1''}$$

und nennt A die Summe aller dieser Zahlen, dividirt durch die Anzahl n der Beobachtungen, so hat man, wenn man alle vorhergehenden Ausdrücke addirt, für die ganze Reihe aller Beobachtungen

$$\log \operatorname{Cos} \frac{\zeta}{2} = \frac{\log \left(\operatorname{Cos} \frac{z}{2} \operatorname{Cos} \frac{z'}{2} \operatorname{Cos} \frac{z''}{2} \dots \right)}{n}$$

$$+ A \mu \operatorname{Sin} 1''. \frac{\operatorname{Sin} \pi \operatorname{Sin} \psi}{4 \operatorname{Cos}^2 \frac{\pi - \psi}{2}}$$

Es ist daher nur noch übrig, das Glied

$$\frac{\log \left(\operatorname{Cos} \frac{z}{2} \operatorname{Cos} \frac{z'}{2} \operatorname{Cos} \frac{z''}{2} \dots \right)}{n}$$

zum Gebrauche bequemer zu machen. Zu diesem Zwecke sey Z die Summe aller Zenithdistanzen, oder

$$Z = z + z' + z'' + \dots$$

und der Kürze wegen

$$z^0 = \frac{1}{n}. Z.$$

Sey ferner

$$\log \operatorname{Cos} \frac{z}{2} = \log \operatorname{Cos} \frac{z^\circ}{2} + a$$

$$\log \operatorname{Cos} \frac{z'}{2} = \log \operatorname{Cos} \frac{z^\circ}{2} + a'$$

$$\log \operatorname{Cos} \frac{z''}{2} = \log \operatorname{Cos} \frac{z^\circ}{2} + a'' \quad \text{u. s. w.},$$

so ist

$$a = \log \operatorname{Cos} \frac{z}{2} - \log \operatorname{Cos} \frac{z^\circ}{2}$$

$$= \triangle \log \operatorname{Cos} \frac{z^\circ}{2}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \triangle z \operatorname{Tg} \frac{z^\circ}{2}$$

$$\text{wo } \triangle z = z - z^\circ$$

Ist eben so

$$\triangle z' = z' - z^\circ,$$

$$\triangle z'' = z'' - z^\circ \text{ u. s. w.},$$

so ist auch

$$a' = -\tfrac{1}{2} \triangle z' \operatorname{Tg} \frac{z^\circ}{2},$$

$$a'' = -\tfrac{1}{2} \triangle z'' \operatorname{Tg} \frac{z^\circ}{2} \text{ u. s. w., also}$$

$$\frac{\log \left(\operatorname{Cos} \frac{z}{2} \operatorname{Cos} \frac{z'}{2} \operatorname{Cos} \frac{z''}{2} \ldots\right)}{n} = \log \operatorname{Cos} \frac{z^\circ}{2} + \frac{1}{n}(a + a' + a'' +)$$

$$= \log \operatorname{Cos} \frac{z^\circ}{2} - \frac{1}{2n} \operatorname{Tg} \frac{z^\circ}{2} (\triangle z + \triangle z' + \triangle z'' +)$$

$$= \log \operatorname{Cos} \frac{z^\circ}{2}$$

$$\text{weil } \triangle z + \triangle z' + \triangle z'' +$$

$$= (z - z^\circ) + (z' - z^\circ) + (z'' - z^\circ) +$$

$$= Z - n z^\circ$$

das heiſst $= Z - Z = 0$ ist, so lange man bloſs auf die ersten Differenzen Rücksicht nimmt.

Nach dieser Bemerkung wird daher der vorhergehende Ausdruck

$$\log \mathrm{Cos}\frac{\zeta}{2} = \log \mathrm{Cos}\frac{z^\circ}{2} + A\,\mu\,\mathrm{Sin}\,1''\,\frac{\mathrm{Sin}\,\pi\;\mathrm{Sin}\,\psi}{4\,\mathrm{Cos}^2\,\frac{\pi-\psi}{2}} \,..\,(1)$$

und auf eine ähnliche Art findet man

$$\log \mathrm{Sin}\frac{\zeta}{2} = \log \mathrm{Sin}\frac{z^\circ}{2} - A\,\mu\,\mathrm{Sin}\,1''.\frac{\mathrm{Sin}\,\pi\;\mathrm{Sin}\,\psi}{4\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{\pi-\psi}{2}} \,..\,(2)$$

woraus endlich

$$\log \mathrm{Tg}\frac{\zeta}{2} = \log \mathrm{Tg}\frac{z^\circ}{2} - A\,\mu\,\mathrm{Sin}\,1''.\frac{\mathrm{Sin}\,\pi\;\mathrm{Sin}\,\psi}{\mathrm{Sin}^2\;\pi-\psi}\,\mathrm{Cos}\,\pi-\psi \,..\,(3)$$

und in allen diesen Ausdrücken hat man

$$\mathrm{Log}\,(\mu\;\mathrm{Sin}\;1'') = 4.3233592$$

Der erste derselben ist dem zweyten vorzuziehen, wenn

$$\mathrm{Tg}\;\frac{\pi}{2}$$

sehr klein, der zweyte, wenn

$$\mathrm{Tg}\;\frac{\pi}{2}$$

sehr grofs ist. M. s. Berl. Jahrb. 1817. p. 138.

Wendet man darauf das vorhergehende Beyspiel an, so ist

$$\begin{aligned} \pi &= 93^\circ\;30'\;38''\;0 \\ z^\circ &= 54\quad 46\quad 7.455 \\ \psi &= 38\quad 27\quad 56,\;\;0 \\ A &= 58.9454 \end{aligned}$$

und daher (Gleichung I.)

$$\log\frac{\mathrm{Sin}\,\pi\;\mathrm{Sin}\,\psi}{4\,\mathrm{Cos}^2\,\frac{\pi-\psi}{2}} = 9.2952651$$

$$\begin{aligned} \log A\,\mu\,\mathrm{Sin}\,1 &= \underline{6.0938091} \\ & 5.3890742 = \log 0.0000245 \\ \log \mathrm{Cos}\frac{z^\circ}{2} &= \quad 9.9483843 \\ \log \mathrm{Cos}\frac{\zeta}{2} &= \quad 9.9484083,\ \text{woraus} \end{aligned}$$

$$\zeta = 54^\circ\ 45'\ 22''\ 57$$

Refr.	1	20.	4
Halbmess.	16	8.	1
Parall.	—	6.	8
$d\delta$	—	1.	8
	55°	2′	42″ 47
	93	30	38. 0

Aequatorhöhe $38^\circ\ 27'\ 55''\ 53 = \psi$;

eben so findet man nach der Gleichung (2.)

$$\text{Log Sin}\ \tfrac{\zeta}{2} = 9.\ 6627178 - 0.\ 0000\ 902$$
$$= 9.\ 6626276$$

also $\zeta = 54^\circ\ 45'\ 23''\ 1$,

$\psi = 38^\circ\ 27'\ 55''\ 1$

und nach der Gleichung (3.)

$$\text{Log Tg}\ \tfrac{\zeta}{2} = 9,\ 7143337 - 0.\ 000\ 1147$$
$$= 9.\ 7142190$$

also $\zeta = 54^\circ\ 45'\ 22''\ 94$,

$\varphi = 38^\circ\ 27'\ 55''\ 2$

Folgendes Beyspiel der Beobachtung eines Fixsterns ist aus der Base du Systeme métrique. II. p. 275. Delambre beobachtete in Dünkirchen 1796 den 20. Januar, die vierundzwanzigfache Zenithdistanz des Polarsterns in der Nähe seiner obern Culmination gleich

$$892^\circ\ 1826$$

also dessen vierundzwanzigster Theil

$$37^\circ\ 174275 = 37^\circ\ 10'\ 27''\ 39 = z$$

Die Stundenwinkel der Beobachtungen waren nach der Ordnung

$0^h\ 16'\ 53''$	$0^h\ 5'\ 41''$	$0^h\ 5'\ 46''$
14 52	4 7	7 43
13 35	2 53	9 19
12 6	1 25	11 57

11 3	0 8	13 9
9 52	0 57	14 51
8 31	2 18	15 57
6 49	4 16	17 50

Zu diesen Stundenwinkeln gehören die Zahlen

$$\frac{2\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{s}{2}}{\mathrm{Sin}\,1''}$$

aus der ersten der oben erwähnten Tafel

559″4	63″4	65″3
433. 8	33. 3	116. 9
362. 2	16. 3	170. 4
287. 4	3. 9	280. 4
239. 7	0. 0	339. 4
191. 1	1. 8	432. 8
142. 4	10. 4	499. 2
91. 2	35. 7	624. 1

Die Summe aller letzten Zahlen ist

$$5000''\,4,$$

also deren vierundzwanzigster Theil

$$A = 208''\,35$$

Mit der vorläufigen Polhöhe

$$\varphi = 51°\,2'$$

und der Declination

$$\delta = 88°\,13'\,20''\,3 \text{ ist}$$

$$Am = A\,\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi\;\mathrm{Cos}\,\delta}{\mathrm{Sin}\,(\delta-\varphi)} = 6''\,72$$

Barom. 27z 4L. 5 franz.

Therm. + 3°. 7 Réaum.

Man hat daher nach §. 5.

$$z = 37^\circ\ 10'\ 27''\ 39.$$

Corr. Refraction		44	21	nach Carlini
Am $=$		$-$ 6	72	
scheinb. Poldistanz	1	46 39	70	
Aequatorhöhe ψ =	38°	57′ 44″	58	
Polhöhe φ =	51°	2′ 15″	42	

Nach §. 6. Gleichung (1) ist aber

$$Z = 892.1826$$

$$\frac{Z}{24} = z^\circ = 37.174275$$

$$A = 208.35$$

$$\pi = 1^\circ\ 46'\ 39''\ 7$$

$$\text{Vorläufiges } \psi = 38^\circ\ 57'\ 44''$$

$$\log \frac{A\mu \operatorname{Sin} 1'' \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Sin} \psi}{4 \operatorname{Cos}^2 \frac{\pi - \psi}{2}} = 4.3815855 = \log 0.0000024$$

$$\log \operatorname{Cos} \frac{z^\circ}{2} = 9.9767350$$

$$\log \operatorname{Cos} \frac{\zeta}{2} = 9.9767374$$

$$\zeta = 37^\circ\ 10'\ 20''\ 6$$

$$\text{Refraction für } z^\circ \quad 43.\ 4$$

$$\text{scheinb. Poldistanz} \quad 1 \quad 46\ 39.\ 7$$

$$\psi = 38^\circ\ 57'\ 43''\ 7 \text{ wie zuvor,}$$

IV. Um überhaupt die Brauchbarkeit der Methode der Circummeridianhöhen und die Gränzen derselben in der Anwendung zu untersuchen, wollen wir bloſs die Fehler des ersten, als des beträchtlichsten Gliedes der Reihe §. 5. suchen, die aus irgend einem Fehler in den drey Gröſsen

$$s,\ \delta,\ \varphi$$

entstehen, denn die Fehler der folgenden Glieder jener Reihe werden ungleich geringer seyn.

Setzt man also

$$dh = \frac{2 \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Sin}^2 \frac{s}{2}}{\operatorname{Sin} (\varphi - \delta) \operatorname{Sin} 1''}$$

so erhält man für einen fehlerhaften Stundenwinkel

$$d^2 h = dh.\ ds.\ \mathrm{Cotg}\ \tfrac{1}{2} s$$

für eine fehlerhafte Declination

$$d^2 h' = \pm \frac{dh^2.\ d\delta\ \mathrm{Sin}\ 1}{2\ \mathrm{Cos}^2\ \delta\ \mathrm{Sin}^2 \frac{s}{2}}$$

und für eine fehlerhaft vorausgesetzte Polhöhe

$$d^2 h'' = \mp \frac{dh^2.\ d\varphi\ \mathrm{Sin}\ 1''}{2\ \mathrm{Cos}^2\ \varphi\ \mathrm{Sin}^2 \frac{s}{2}}$$

das obere Zeichen der beyden letzten Ausdrücke für die Reihe I. §. 5., die untern für II. und III.

Daraus sieht man, dafs man nebst der genauesten Sorge für die Zeitbestimmung noch auf beyden Seiten des Meridians eine so viel möglich gleich grofse Anzahl von Höhen beobachten mufs, weil nach der Culmination

$$\mathrm{Cotg}\ \tfrac{s}{2}\ \text{also auch}\ d^2 h$$

in der ersten der drey vorhergehenden Gleichungen ihr Zeichen ändert, wodurch demnach jedes positive $d^2 h$ durch ein ihm nahe gleiches negatives aufgehoben wird.

Da übrigens der gemeinschaftliche Factor jedes der drey Fehler die Gröfse dh, bey den beyden letzten sogar dh^2 ist, so ist es rathsam, zu grofse Stundenwinkel, wo sie schaden können, wegzulassen. Will man z. B. die Reihe der Beobachtungen so weit fortsetzen, bis eine Zeitsecunde die Reduction dh um eine Bogensecunde ändert, so hätte man für den gröfsten Stundenwinkel

$$\mathrm{Sin}\ s = \frac{1}{15.\ m}$$

Ist also z. B. φ nahe 50°, so folgt daraus, dafs man desto gröfsere Stundenwinkel brauchen darf, je gröfser die südliche oder die nördliche Declination des Sterns ist, besonders die letzte, da die dem Pole nächsten Sterne zur Bestimmung der Polhöhe die vortheilhaftesten sind. Je näher aber die nördliche Declination an der Polhöhe ist, desto kürzer wird auch der brauchbare Stundenwinkel, so dafs man Gestirne, für welche $\delta = \varphi$ ist, am besten gänzlich vermeidet.

§. 7.

Die Gleichung

$$\text{Sin } h = \text{Sin } \varphi \text{ Sin } \delta + \text{Cos } \varphi \text{ Cos } \delta \text{ Cos } s$$

gibt überhaupt: wenn man alles in ihr veränderlich setzt

$$d\varphi = -\frac{dh}{\text{Cos } \omega} - ds \frac{\text{Cos } \varphi \text{ Sin } \omega}{\text{Cos } \omega} + d\delta \frac{\text{Cos } \pi}{\text{Cos } \omega}$$

wo π der Winkel des Declinationskreises mit dem Vertikalkreise ist, woraus folgt: dafs die Polhöhe am sichersten aus Beobachtungen in der Nähe des Meridians bestimmt wird, wie bereits oben bemerkt wurde.

Setzt man in der vorhergehenden Gleichung das Differential von Sin h, in Beziehung auf s und δ genommen, gleich Null, so hat man

$$\text{Sin } s = \frac{d\delta}{ds} (\text{Tg } \varphi - \text{Tg } \delta \text{ Cos } s)$$

Ist d s eine Secunde, so ist

$$\frac{d\delta}{ds}$$

die Aenderung der Declination in einer Secunde. Da aber die Gröfse

$$\frac{d\delta}{ds}$$

so wie der Stundenwinkel s der gröfsten Höhe nur sehr klein seyn kann, so ist, wenn D s der Stundenwinkel der gröfsten Höhe ist

$$D\,s = \frac{d\delta}{ds} (\text{Tg } \varphi - \text{Tg } \delta)$$

$$= \frac{d\delta}{ds} \cdot \frac{\text{Sin } (\varphi - \delta)}{\text{Cos } \varphi \text{ Cos } \delta}$$

Diejenigen Gestirne also, deren Declination veränderlich ist, erreichen eigentlich ihre gröfste Höhe nicht in, sondern aufser dem Meridian, für den Stundenwinkel D s. Für die Sonne kann dieser Stundenwinkel mehrere Secunden betragen, aber der daraus folgende Unterschied der mittäglichen und der gröfsten Höhe der Sonne ist, wie man leicht sieht, immer unbeträchtlich. Für den Mond aber kann dieser Stundenwinkel auch vier bis fünf Zeitminuten, und die daraus folgende Differenz der Höhen bis dreifsig Raumsecunden betragen.

Die oben vorgetragene Mittagsverbesserung der correspondirenden Höhen der Sonne, die Δ s seyn soll, ist

$$\Delta s = \frac{d\delta}{\text{Sin } s} (\text{Tg } \varphi - \text{Tg } \delta \text{ Cos } s)$$

Sind also diese correspondirenden Höhen selbst nahe am Mittag genommen worden, so ist s sehr klein, und gleich ds, also

$$\Delta s = \frac{d\delta}{ds} \cdot \frac{\text{Sin}\,(\varphi - \delta)}{\text{Cos}\,\varphi\ \text{Cos}\,\delta}$$

Man hat also

$$\Delta s = D s$$

oder die Zeit der gröfsten Höhe der Sonne ist gleich der Zeit des unverbesserten Mittags aus correspondirenden Höhen, wenn diese letzten nahe am Meridian genommen würden.

§. 8.

Aus §. 5. folgt, dafs für kleine Stundenwinkel, für welche

$$\frac{\text{Cos}\,\varphi\ \text{Cos}\,\delta}{\text{Sin}\,(\varphi - \delta)}$$

constant ist, das Quadrat des Stundenwinkels sich wie die Differenz der beobachteten und der mittäglichen Höhe verhält. Sind also

H, h, h′ drey Höhen, und

T, t′, t″ ihre Zeiten

so ist, wenn H die Höhe des Mittags T ist,

$$(T - t')^2 . (H - h) = (T - t)^2 . (H - h')$$

also

$$H = \frac{h\,(T - t')^2 - h'\,(T - t)^2}{(T - t')^2 - (T - t)^2}$$

und so findet man durch die blofse Uhrzeit des Mittags, und durch die Uhrzeiten zweyer beobachteten Höhen und durch diese beobachteten Höhen selbst, die mittägliche Höhe oder die Polhöhe, ohne diese Polhöhe, oder die Abweichung vorher beyläufig zu kennen.

I. Diefs Verfahren läfst sich noch beträchtlich vereinfachen.

Sind die drey beobachteten Höhen mit ihren Uhrzeiten

$$\begin{array}{lll} h & h + \alpha & h + \alpha' \\ T & T + \beta & T + \beta' \end{array}$$

und ist H die mittägliche Höhe, und T + t die Uhrzeit des Mittags, so ist

$$H - h = B t^2$$

$$H - (h + \alpha_{,}) = B\,(t - \beta')^2$$
$$H - (h + \alpha) = B\,(t - \beta')^2$$

wo B eine constante Gröſse ist.

Eliminirt man daraus diese Gröſse B, so ist

$$\alpha\, t^2 = (H - h)\,(2\,t\,\beta - \beta^2)$$
$$\alpha' t^2 = (H - h)\,(2\,t\,\beta' - \beta'^2)$$

und wenn man aus diesen beyden Gleichungen H eliminirt, so ist

$$t = \frac{\alpha\beta'^2 - \alpha'\beta^2}{2\,(\alpha\beta' - \alpha'\beta)} \quad \ldots \quad (A)$$

und dieser Werth von t in einer der zwey vorletzten Gleichungen substituirt, gibt

$$H = h + \frac{(\alpha\beta'^2 - \alpha'\beta^2)^2}{4\,\beta\,\beta'\,(\beta' - \beta)\,(\alpha\beta' - \alpha'\beta)} \quad \ldots \quad (B)$$

Die Gleichung (B) gibt die mittägliche Höhe, und (A) den Stundenwinkel t, also die Uhrzeit des Mittags

$$T + t.$$

Die Gleichung (B) hat den Vortheil, daſs man durch sie die Mittagshöhe aus einer Höhe h und die Differenzen

$$\alpha'\ \alpha,$$

von zwey andern Höhen, und den Differenzen

$$\beta,\ \beta'$$

ihrer Uhrzeiten findet. Man braucht dazu weder die Abweichung, noch die Polhöhe, noch die Uhrzeit des Mittags, die gewöhnlich durch die correspondirenden Höhen gesucht wird, welche eben so beschwerlich als wegen der Witterung ungewiſs sind, noch selbst die absoluten Uhrzeiten der Beobachtungen, sondern nur ihre Differenzen zu kennen, wozu man also auch eine Uhr anwenden kann, die bloſs einige Minuten richtig geht, wenn man nicht eine groſse Genauigkeit in den Resultaten verlangt. M. s. Berl. Jahrb. 1799. p. 148.

§. 9.

Es ist bereits oben erinnert worden: daſs die dem Pole nahen Sterne sich besonders zu Breitenbestimmungen eignen, und daſs unter diesen vorzüglich der Polarstern, α Ursae minoris, zu diesem Zwecke gebraucht werde. Obschon nun im allgemeinen die Beobachtungen dieser Gestirne im Meridian die vortheilhaftesten zur Bestimmung der Polhöhe sind, so lassen sich doch auch die Höhenbeobachtungen der Circumpolarsterne in allen andern Punkten ihres Parallelkreises mit Nutzen anwenden. Ist nämlich δ nahe gleich $90°$ oder Cos δ nahe gleich Null, so wird die im Anfange des §. 7. gegebene Differentialgleichung sehr nahe folgende seyn,

$$d\varphi = dh.\frac{\text{Cos}\,h}{\text{Cos}\,\varphi\ \text{Sin}\,\delta} + ds.\,\text{Sin}\,s\,\text{Cotg}\,\delta + d\delta.\,\text{Cos}\,s$$

und man sieht daraus, daſs ein Fehler in der beobachteten Höhe sehr nahe denselben Fehler in der Polhöhe hervorbringen wird, wie bey den Beobachtungen im Meridian selbst. Dasselbe hat, bey Culminationen auch für einen Fehler in der Declination statt, nicht so hier, wo dieser Fehler in gröſsern Entfernungen vom Meridian, in seiner Wirkung auf die Polhöhe immer beträchtlich vermindert, und in keinem Falle vergröſsert wird. Was endlich den Fehler der Zeit betrifft, so wollen wir annehmen, daſs dieser Fehler eine ganze Zeitsecunde betrage, und daſs für den Polarstern

$$\delta = 88°\ 20'$$

ist. Daraus folgen für die Stundenwinkel

$$0^h,\ 2^h,\ 4^h,\ 6^h$$

die Fehler der Polhöhe

$$0''\,0,\quad 0'',2,\quad 0''\,4,\quad 0''\,5.$$

Allein auch diese geringen Fehler lassen sich noch beynahe ganz wegschaffen, wenn man eine zweyte ähnliche Beobachtung auf der andern Seite des Meridians in beynahe gleicher Entfernung von ihm anstellt, wo dieselben Fehler entgegengesetzte Zeichen erhalten. Dieses Verfahren hat noch den wesentlichen Vortheil, daſs dessen Anwendung nicht wie die Beobachtung der Culminationen, von einem bestimmten Zeitmomente abhängt, und daher oft von Wolken für den ganzen Tag vereitelt wird, daſs es vielmehr zu jeder willkührlichen Stunde der Nacht, und bey stärkern Fernröhren, auch des Tages vorgenommen werden kann. Auch den reisenden Astronomen muſs es willkommen seyn, eine Methode zu besitzen, durch welche er in irgend einer der bequemen Abend- oder Morgenstunden durch einige wenige Beobachtungen die Polhöhe seines Ortes genauer bestimmen kann, als durch selbst mehrere Tage fortgesetzte Circummeridianhöhen der Sonne. Was endlich die groſse Anzahl der Multiplicationen mit wiederholenden Kreisen betrifft, durch welche manche Beobachter gerade den Zweck, den sie dadurch erreichen wollen, gröſsere Güte und Verläſslichkeit der Resultate zu verfehlen pflegen, so läſst sich dieses nicht geringe Hinderniſs bey dieser Methode völlig vermeiden, ohne dadurch der gewünschten gröſsern Zahl der Beobachtungen, die immer wünschenswerth bleibt, einen Eintrag zu thun. Man braucht nämlich nur nach jedem vierten oder fünften Paare von Beobachtungen abzulesen, und gleich darauf ein neues Set von Beobachtungen anzufangen, wodurch man in einer einzigen Nacht ohne Mühe sehr viele Beobachtungen machen, und sich so von seiner Polhöhe völlig versichern kann.

Ich will daher hier kurz zeigen, wie man diesen Vorschlag am besten auf Beobachtungen mit Multiplicationskreisen anwenden kann. Ist

$$p = 90 - \delta, \ \psi = 90 - \varphi,$$

und z das arithmetische Mittel des durchlaufenen Bogens, und endlich t der Stundenwinkel, der für die Mitte der Beobachtungszeiten gehört, so setze man der Kürze wegen

$$t = \tfrac{1}{15} s \text{ und}$$

$$m = \frac{\text{Sin } p \text{ Sin } \psi}{\text{Sin } z}. \text{ Sin } t$$

$$n = \frac{\text{Sin } p \text{ Sin } \psi}{\text{Sin } z}. \text{ Cos } t = m \text{ Cotg } t$$

wo t für östliche Stundenwinkel negativ ist.

Wenn man annehmen könnte, daſs die Veränderung der Zenithsdistanzen der Zeit proportionirt sind, eine Annahme, die immer sehr nahe wahr seyn wird, wenn man nur nicht die Beobachtungen zu unmäſsig ausdehnt, so würde die Auflösung unserer Aufgabe sich darauf reduziren, daſs man den Werth von ψ aus der Gleichung

$$\text{Cos } z = \text{Cos } \psi \text{ Cos } p + \text{Sin } \psi \text{ Sin } p \text{ Cos } t$$

suchte, was sich auf mehr als eine Art bequem thun läſst. Da aber streng genommen jene Voraussetzung unrichtig ist, so wollen wir annehmen, daſs nicht z, sondern z — dz die Zenithdistanz ist, die zu dem Stundenwinkel t der Mitte der Zeiten gehört. Diese Gröſse dz läſst sich auf eben so verschiedene Weise finden wie die §. 5 und 6 gegebene Reduction auf den Meridian. Wählt man die Methode des §. 5, so ist

$$dz = m.\ 2 \text{ Sin } \frac{\vartheta}{2} + A.\ 2 \text{ Sin } \frac{\vartheta}{2} - B.\ 2 \text{ Sin}^3 \frac{\vartheta}{2} + C.\ 2 \text{ Sin}^4 \frac{\vartheta}{2} - $$

wo ϑ die Differenz der Beobachtungszeit und die Mitte aller Beobachtungszeiten ist, und wo man hat

$$A = n - m^2 \text{ Cotg } z$$

$$B = \frac{m}{2} + 2mn\,\mathrm{Cotg}\,z - \frac{2}{3}m^3 - 2m^3\,\mathrm{Cotg}^2 z$$

$$C = 2m^2 n - (n^2 - m^2 + 3m^4)\,\mathrm{Cotg}\,z$$

$$+ 6m^2 n\,\mathrm{Cotg}^2 z - 5m^4\,\mathrm{Cotg}^3 z$$

Die Entwicklung dieser Ausdrücke für jede einzelne Beobachtung würde aber das ganze Verfahren sehr unbequem und zum täglichen Gebrauche ungeschickt machen. Folgende Betrachtungen werden es abkürzen.

Sind

$$\vartheta, \vartheta', \vartheta'',$$

jene Differenzen der Zeiten vor, und

$$\vartheta_{,}, \vartheta_{,}', \vartheta_{,}'' \ldots$$

nach dem Mittel der Beobachtungszeiten, so ist das erste Glied von dz gleich

$$\frac{2m}{N}\left(\mathrm{Sin}\,\frac{\vartheta}{2} + \mathrm{Sin}\,\frac{\vartheta'}{2} + \ldots - \mathrm{Sin}\,\frac{\vartheta_{,}}{2} - \mathrm{Sin}\,\frac{\vartheta_{,}'}{2} - \ldots\right)$$

wo N die Zahl der Beobachtungen bezeichnet. Da aber, wenn die ganze Beobachtungszeit nicht groſs ist, und ihre Ausdehnung steht immer in der Willkühr des Beobachters, die Gröſsen

$$\frac{\vartheta}{2}, \frac{\vartheta_{,}}{2} \ldots$$

nur klein seyn können, so wird man in den vorhergehenden Ausdrücken für die Sinus die Bogen derselben substituiren können, um so mehr, da der gemeinschaftliche Factor m derselben immer sehr klein ist, selbst in den ungünstigsten Orten des Sterns, in seinen gröſsten Digressionen vom Meridian, wo er sehr nahe dem Sinus der Poldistanz des Gestirns gleich wird. Man wird also für dieses erste Glied haben

$$\frac{m}{N}\left(\vartheta + \vartheta' + \vartheta'' \ldots - \vartheta_{,} - \vartheta_{,}' - \vartheta_{,}'' \ldots\right)$$

ein Ausdruck, der gleich Null ist, weil sein positiver Theil seinem negativen gleich ist. Eine ähnliche Bemerkung gilt auch für den dritten Theil des Ausdrucks, für dz, dessen Coefficient B, besonders wenn der Stundenwinkel nicht zu groſs ist, noch kleiner wird. Was endlich das letzte Glied betrifft, so ist es in allen Fällen so klein, daſs es immer ohne alle merklichen Folgen, gänzlich vernachlässigt werden kann. Es bleibt daher bloſs das zweyte Glied übrig, und das ganze Verfahren reduzirt sich auf folgende einfache Ausdrücke:

Man suche dz und x aus den Gleichungen

$$dz = (n - m^2 \operatorname{Cotg} z) . \frac{1}{N} . \Sigma \frac{2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{Sin} 1''}$$

$$\operatorname{Tg} x = \operatorname{Tg} p \operatorname{Cos} t$$

so findet man die wahre Aequatorhöhe ψ aus der Gleichung

$$\operatorname{Cos} (\psi - x) = \frac{\operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} (z - dz)}{\operatorname{Cos} p}$$

In diesem Ausdrucke ist Σ das bekannte Summenzeichen, und die Gröfse

$$\frac{2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{Sin} 1''}$$

findet man aus der Tafel, deren in §. 5. u. f. schon Erwähnung gethan wurde.

Ex. 1816 den 23. September war

scheinb. AR Polarstern 0^h 56′ 40″ 73

scheinb. Poldistanz $p = 1°$ 40 19. 65

Für drey aufeinanderfolgende Aggregate von zehnfachen Zenithdistanzen in Ofen war

	I.	II.	III.
Uhrzeit der Mitte ..	1^h 32′ 58″7 ..	1 46 52. 8 ..	2 25 29. 7
Uhrz. d. Culmination	0 55 3. 5		
$t =$	0^h 37′ 55″2	0^h 51′ 49″3	1^h 30′ 26″2
Mittel des durchlaufenen Bogens ..	40° 51′ 3″9 ..	40° 52′ 17″9 ..	40° 57′ 34. 0
wahre Refraction	49. 1	49. 1	49. 3
dz	— 0. 4	— 0. 3	— 0. 3
$z - dz =$	40° 51′ 52″6	40° 53′ 6. 7	40° 58′ 23. 0

woraus sofort die Aequatorhöhe

$\psi = 42° 30′ 47″ 2$ .. 42° 30′ 48″ 0 .. 42° 30′ 47″ 0

§. 10.

Wir wollen jetzt noch zu denjenigen Methoden übergehen, in welchen man zugleich die Zeit und die Polhöhe bestimmt. Die vorzüglichsten dieser Methoden lassen sich auf folgende zwey Probleme zurückführen.

1. Aus der beobachteten Höhe zweyer Sterne und der Zwischenzeit, die Zeiten der Beobachtungen und die Polhöhe finden. Diese Aufgabe wird einfacher, wenn a die beyden Höhenbeobachtungen an demselben Stern (Douwes Methode) oder wenn b die beyden Beobachtungen an verschiedenen Sternen, aber gleichzeitig, gemacht worden sind.

2. Aus drey Sternen und den Zwischenzeiten die Zeit, die Polhöhe und noch ein unbekanntes Element z. B. den Collimationsfehler des Instruments, oder die Declination des Sterns etc. finden.

Für mehr als drey Sterne, oder mehr als drey Beobachtungen an einem Sterne werden die analytischen Ausdrücke zu verwickelt und auch überflüssig, da man mit zwey oder drey Beobachtungen, wie man sehen wird, alle hierhergehörigen wahrhaft nützlichen Aufgaben vollständig auflösen kann.

§. 11.

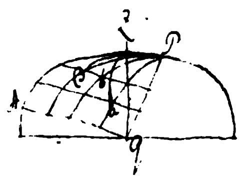
Aus zwey Höhen zweyer Sterne und der Zwischenzeit der Beobachtungen die Zeit und die Polhöhe finden.

Es seyen α α' die scheinbaren Rectascensionen, δ δ' die Declinationen, h h′ die beobachteten (von Refraction etc.) gereinigten Höhen beyder Sterne, und t die Zwischenzeit in Graden. Sey (in einer leicht zu entwerfenden Figur) Z das Zenith, P der Pol des Aequators, a und β der Ort der beyden Sterne.

1. Man stelle sich vor, dafs bey der ersten Beobachtung das erste Gestirn in a, und ein anderes zu gleicher Zeit in b ist. In der Zwischenzeit t beyder Beobachtungen soll das zweyte Gestirn von b nach β gehen, so ist bekannt

$$b\,P\,\beta = t, \quad \text{und}$$

$$b\,P\,a = \alpha' - \alpha,$$



also ist auch bekannt

$$\beta\,P\,a = t + \alpha' - \alpha,$$

$$P\,a = 90 - \delta,$$

$$P\,\beta = 90 - \delta',$$

und daher findet man aus dem Dreyecke a P β die dritte Seite $\beta\,a = x$ und einen der anliegenden Winkel P β a $= y$.

In dem Dreyecke Z β a kennt man alle drey Seiten

$$\beta\,a = x,\ a\,Z = 90 - h,\ \beta\,Z = 90 - h'$$

also findet man den Winkel

$$Z\beta a = z$$

und daher auch den Winkel

$$Z\beta P = y + z.$$

In dem Dreyecke Z P β endlich kennt man

$$Z\beta P = y + z, \; Z\beta = 90 - h', \; P\beta = 90 - \delta',$$

also findet man den Winkel Z P β oder die Zeit der Beobachtung und die Seite P Z oder die Polhöhe.

Dies ist die geometrische Auflösung unserer Aufgabe. Wir wollen nun sehen, wie sich diese Betrachtungen etwa einfacher analytisch ausdrücken lassen, da sich die gegebene Auflösung auf die vollständige Entwicklung dreyer sphärischer Dreyecke gründet, und also für die Ausübung beschwerlich ist.

II. Sind γ γ' die in Grade verwandelten Sternzeiten der Beobachtungen, also

$$\gamma - \alpha = t,$$

$$\gamma' - \alpha' = t - \vartheta$$

die Stundenwinkel, wo

$$\vartheta = (\alpha' - \alpha) - (\gamma' - \gamma)$$

bekannt ist, weil $\gamma' - \gamma$, die in Grade verwandelte Sternzeit der Zwischenzeit ist.

Bezeichnet φ die Polhöhe, so hat man

$$\text{Sin } h = \text{Sin } \delta \text{ Sin } \varphi + \text{Cos } \delta \text{ Cos } \varphi \text{ Cos } t \quad \ldots (1)$$

$$\text{Sin } h' = \text{Sin } \delta' \text{ Sin } \varphi + \text{Cos } \delta' \text{ Cos } \varphi \text{ Cos } (t - \vartheta) \;.\; (2)$$

Es ist aber

$$(\text{Sin } \delta \text{ Sin } \varphi + \text{Cos } \delta \text{ Cos } \varphi \text{ Cos } t)^2$$

$$+ (\text{Cos } \delta \text{ Sin } \varphi - \text{Sin } \delta \text{ Cos } \varphi \text{ Cos } t)^2$$

$$= \text{Sin}^2 \varphi + \text{Cos}^2 \varphi \text{ Cos}^2 t,$$

also wird die Gleichung (1)

$$(\text{Cos } \delta \text{ Sin } \varphi - \text{Sin } \delta \text{ Cos } \varphi \text{ Cos } t)^2$$

$$+ \text{Cos}^2 \varphi \text{ Sin}^2 t - \text{Cos}^2 h = 0$$

Ist also

$$\text{Cos } c = \frac{\text{Cos } \delta \text{ Sin } \varphi - \text{Sin } \delta \text{ Cos } \varphi \text{ Cos } t}{\text{Cos } h}$$

so ist

$$\text{Sin } t \text{ Cos } \varphi = \text{Cos } h \text{ Sin } c$$

und wenn man in der vorletzten Gleichung den Werth

$$\frac{\text{Sin h} - \text{Sin}\,\delta\ \text{Sin}\,\varphi}{\text{Cos}\,\delta\ \text{Cos t}}$$

für Cos φ aus (1) substituirt, oder auch, wenn man in derselben Gleichung den Werth

$$\frac{\text{Sin h} - \text{Cos}\,\delta\ \text{Cos}\,\varphi\ \text{Cos t}}{\text{Sin}\,\delta}$$

für Sin φ substituirt, so erhält man

$$\text{Sin}\,\varphi = \text{Sin}\,\delta\ \text{Sin h} + \text{Cos}\,\delta\ \text{Cos h Cos c},$$

oder

$$\text{Cos}\,\varphi\ \text{Cos t} = \text{Cos}\,\delta\ \text{Sin h} - \text{Sin}\,\delta\ \text{Cos h Cos c}$$

Die Gleichung (2) gibt ferner

$$\text{Sin h}' = \text{Sin}\,\delta'\ \text{Sin}\,\varphi$$
$$+ \text{Cos}\,\vartheta\ \text{Cos}\,\delta'\ \text{Cos}\,\varphi\ \text{Cos t} + \text{Sin}\,\vartheta\ \text{Cos}\,\delta'\ \text{Cos}\,\varphi\ \text{Sin t},$$

und wenn man in dieser Gleichung die vorhergehenden Werthe von

$$\text{Sin}\,\varphi,\ \text{Cos}\,\varphi\ \text{Cos t},\ \text{Cos}\,\varphi\ \text{Sin t}$$

substituirt, und

$$\text{Tg a} = \frac{\text{Sin}\,\vartheta\ \text{Cos}\,\delta'}{\text{Cos}\,\delta\ \text{Sin}\,\delta' - \text{Sin}\,\delta\ \text{Cos}\,\delta'\ \text{Cos}\,\vartheta} \quad .. (3)$$

setzt, so erhält man

$$\text{Sin h}' - \text{Sin h Sin}\,\delta\ \text{Sin}\,\delta' - \text{Sin h Cos}\,\vartheta\ \text{Cos}\,\delta\ \text{Cos}\,\delta'$$
$$= \text{Cos h Sin}\,\vartheta\ \text{Cos}\,\delta'\ (\text{Cos c Cotg a} + \text{Sin c})$$

Setzt man also

$$a - c = b,$$

so ist

$$\text{Cos b} =$$
$$\frac{\text{Sin a}\,(\text{Sin h}' - \text{Sin h Sin}\,\delta\ \text{Sin}\,\delta' - \text{Sin h Cos}\,\vartheta\ \text{Cos}\,\delta\ \text{Cos}\,\delta')}{\text{Cos h Sin}\,\vartheta\ \text{Cos}\,\delta'} \quad .. (4)$$

Hat man aber so die Werthe von a und b gefunden, so kennt man auch c = a — b und sonach t durch die Gleichung

$$\text{Tg t} = \frac{\text{Cos h Sin c}}{\text{Cos}\,\delta\ \text{Sin h} - \text{Sin}\,\delta\ \text{Cos h Cos c}} \quad .. (5)$$

woraus man

$$\gamma = \alpha + t$$

oder die Sternzeit der Beobachtung, und endlich die Polhöhe φ durch die Gleichung findet

$$\text{Tg}\,\varphi = \frac{\text{Sin t}}{\text{Cos h Sin c}}\,(\text{Sin}\,\delta\ \text{Sin h} + \text{Cos}\,\delta\ \text{Cos h Cos c}) \quad .. (6)$$

Die Gleichungen (3) bis (6) enthalten die Auflösung unserer Aufgabe. Mann kann sie durch Einführung zweyer Hülfswinkel A und B zur Rechnung bequemer machen. Ist nämlich

$$\mathrm{Tg}\ A = \frac{\mathrm{Tg}\ \delta'}{\mathrm{Cos}\ \vartheta}$$

$$\mathrm{Tg}\ a = \frac{\mathrm{Cos}\ A\ \mathrm{Tg}\ \vartheta}{\mathrm{Sin}\ (A-\delta)}$$

$$\mathrm{Cos}\ b = \frac{\mathrm{Cos}\ a\ \mathrm{Tg}\ h}{\mathrm{Tg}\ (A-\delta)} \cdot \left(\frac{\mathrm{Sin}\ A\ \ \mathrm{Sin}\ h'}{\mathrm{Sin}\ h\ \mathrm{Sin}\ \delta'\ \mathrm{Cos}\ (A-\delta)} - 1\right)$$

und

$$\mathrm{Tg}\ B = \frac{\mathrm{Tg}\ h}{\mathrm{Cos}\ (a-b)}$$

so hat man

$$\mathrm{Tg}\ t = \frac{\mathrm{Cos}\ B\ \mathrm{Tg}\ (a-b)}{\mathrm{Sin}\ (B-\delta)}$$

$$\mathrm{Tg}\ \varphi = \mathrm{Cos}\ t.\ \mathrm{Cotg}\ (B-\delta)$$

Man bemerke noch, daſs Sin t dasselbe Zeichen mit Sin $(a-b)$ haben, und daſs

$$\mathrm{Sin}\ a,\ \mathrm{Sin}\ b$$

dieselben, oder entgegengesetzte Zeichen haben muſs, nachdem der Vertikalkreis des ersten Sterns dem des zweyten rechts oder links liegt.

Die Verläſslichkeit dieser Methode zu prüfen, wollen wir die Fehler aufsuchen, die in der Bestimmung der Zeit sowohl, als der Polhöhe, durch die Fehler in den beobachteten Höhen entstehen. Nimmt man zu diesem Zwecke in der Gleichung (1) die Gröſsen

$$h,\ \varphi,\ t$$

als veränderlich an, so ist, wenn ω das Azimut des ersten Sterns ist,

$$d\,h = -\,d\,\varphi\ \mathrm{Cos}\ \omega - d\,t\ \mathrm{Sin}\ \omega\ \mathrm{Cos}\ \varphi$$

und eben so

$$d\,h' = -\,d\,\varphi\ \mathrm{Cos}\ \omega' - d\,t\ \mathrm{Sin}\ \omega'\ \mathrm{Cos}\ \varphi$$

und aus diesen beyden Gleichungen erhält man

$$d\varphi = \frac{d\,h\ \mathrm{Sin}\ \omega'}{\mathrm{Sin}\ (\omega-\omega')} - \frac{d\,h'\ \mathrm{Sin}\ \omega}{\mathrm{Sin}\ (\omega-\omega')}$$

$$d\,t = \frac{d\,h\ \mathrm{Cos}\ \omega'}{\mathrm{Cos}\ \varphi\ \mathrm{Sin}\ (\omega'-\omega)} - \frac{d\,h'\ \mathrm{Cos}\ \omega}{\mathrm{Cos}\ \varphi\ \mathrm{Sin}\ (\omega'-\omega)}$$

Man wird also solche Sterne vermeiden, bey denen $(\omega' - \omega)$ nahe an 0 oder 180° ist, oder deren Vertikalkreise einander sehr nahe oder beynahe gegenüber liegen. Berl. Jahrb. 1812 p. 129.

III. Die vorhergehende Auflösung ist allerdings bequemer, als die in I. gegebene, sie ist aber noch immer für die Ausübung etwas umständlich. — Da aber die Polhöhe des Beobachtungsortes in beynahe allen Fällen schon als nahe bekannt vorausgesetzt werden kann, so werden wir dieser Voraussetzung gemäss, noch eine indirecte Auflösung dieser Aufgabe geben, welche für die Ausübung viel bequemer ist.

Sey

$$p = 90 - \delta$$

die Poldistanz,

$$a = 90 - h$$

die von dem Collimationsfehler, der Refraction etc. gereinigte Zenithdistanz,

$$y \text{ und } \omega$$

der Stundenwinkel und das Azimut (beyde negativ auf der Ostseite des Meridians); für einen zweyten Stern seyen diese Grössen p', a' ... Endlich seyen wie vorhin γ, γ' die Rectascensionen des Zeniths zur Zeit beyder Beobachtungen.

Nennt man

$$y' = y - \vartheta$$

so ist

$$\gamma - \alpha = y,\ \gamma' - \alpha' = y' \text{ also } y - y'$$

oder

$$\vartheta = (\alpha' - \alpha) - (\gamma' - \gamma)$$

so dass also, wie zuvor, ϑ bekannt ist.

Es sey nun die beynahe bekannte Höhe des Aequators x, so ist

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} y = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} \frac{p + x + a}{2} \operatorname{Sin} \frac{p + x - a}{2}}{\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} x}}$$

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} y' = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} \frac{p' + x + a'}{2} \operatorname{Sin} \frac{p' + x - a'}{2}}{\operatorname{Sin} p' \operatorname{Sin} x}}$$

Ist x gut gewählt, so ist

$$\gamma = \alpha + y = \alpha + y' + \vartheta \text{ und}$$

$$\gamma' = \alpha' + y' = \alpha' + y - \vartheta$$

Ist aber x fehlerhaft, so werden auch die beyden für γ und γ' gegebenen Ausdrücke nicht gleich seyn.

Wir wollen annehmen, daſs d x der unbekannte Fehler von x sey, so hat man

$$dy = dx \frac{\mathrm{Cotg}\,\omega}{\mathrm{Sin}\,x} = A\,dx,$$

$$dy' = dx \frac{\mathrm{Cotg}\,\omega'}{\mathrm{Sin}\,x} = A'\,dx$$

und die Rectascension des Zeniths wird seyn

$$\gamma = \alpha + y + A\,dx = \alpha + y' + \vartheta + A'\,dx$$
$$\gamma' = \alpha' + y' + A'\,dx = \alpha' + y - \vartheta + A\,dx$$

und aus beyden folgt

$$dx = \frac{y' - y + \vartheta}{A - A'}$$

Daraus entspringt also folgende Auflösung:

Man suche zuerst y und y' aus den beyden obigen Gleichungen, und dann bloſs in Minuten die Werthe von ω, ω' durch die Ausdrücke

$$\mathrm{Sin}\,\omega = \frac{\mathrm{Sin}\,p\,\mathrm{Sin}\,y}{\mathrm{Sin}\,a},\quad \mathrm{Sin}\,\omega' = \frac{\mathrm{Sin}\,p'\ \mathrm{Sin}\,y'}{\mathrm{Sin}\,a'}$$

so ist

$$A = \frac{\mathrm{Cotg}\,\omega}{\mathrm{Sin}\,x},\quad A' = \frac{\mathrm{Cotg}\,\omega'}{\mathrm{Sin}\,x}$$

und

$$dx = \frac{y' - y + \vartheta}{A - A'}$$

also die wahre Aequatorhöhe gleich

$$x + dx$$

und die wahre Rectascension des Zeniths

$$\gamma = \alpha + y + A\,dx = \alpha + y' + \vartheta + A'\,dx$$
$$\gamma' = \alpha' + y' + A'\,dx = \alpha' + y - \vartheta + A\,dx$$

Verwandelt man dann γ, γ' in Sternzeit, so geben sie unmittelbar die wahren Sternzeiten der Beobachtungen, also auch die mittlern oder wahren Zeiten, d. h. die Correction der Uhr. Berl. Jahrb. 1817. p. 136.

Ex. 1809 May 17. in Göttingen

	Uhrzeit	Höhe	Fehl. des Instr.
α Bootis	$16^h\ 8'\ 25''$ . .	$50°\ 5'\ 0''$ West. .	$+32''.5$
α Aquilae	16 37 49 . .	33 35 0 Ost	

$$h = 50°\ 3'\ 38''\ 7$$
$$h' = 33\ \ 33\ \ 0.\ 0$$

Die scheinbaren Rectascensionen und Declinationen sind

$$\alpha = 211°\ 44'\ 54''\ 88$$
$$\alpha' = 295\ \ 22\ \ 17.\ 50$$
$$\delta = 20°\ 10'\ 56''\ 02$$
$$\delta' = 8\ \ 22\ \ 35\ \ 45$$
$$\gamma' - \gamma = 0^h\ 29'\ 24'' = 7°\ 21'\ 0''$$
$$\vartheta = 76°\ 16'\ 22''.\ 62$$

Daraus folgt, nach N. II.

$$A = 31°\ 49'\ 14''\ 13$$
$$a = 86\ \ 40\ \ 51.\ 11$$
$$b = 56\ \ 2\ \ 46.\ 29$$
$$B = 54\ \ 13\ \ 46.\ 73$$
$$t = 31\ \ 43\ \ 42.\ 45,\ t + \gamma = 16^h\ 13'\ 54''\ 49 = \gamma$$
$$16\ \ 8\ \ 25.\ 00$$

$90 - \varphi = 38°\ 27'\ 54''\ 47$ $\qquad 0^h.\ 5'\ 29''\ 49$ Verspät. d. Uhr gegen Sternzeit

und eben so

$$\gamma' = \alpha' - \alpha - \vartheta + \gamma = 16^h\ 43'\ 18''\ 49$$
$$16\ \ 37\ \ 49$$
$$0^h\ \ 5'\ 29\ \ 49$$

Dasselbe Beyspiel gibt nach N. III.

$$a = 39°\ 56'\ 21''\ 3$$
$$a' = 56\ \ 27\ \ 0.\ 0$$
$$p = 69°\ 49'\ 3''\ 98$$
$$p' = 81\ \ 37\ \ 24.\ 55$$

Sey $x = 38°\ 28'\ 10''$ so ist

$$y = 31^{\circ}\ 44'\ \ 3''\ 34$$

$$\omega = 50^{\circ}\ 15.'\ \ 9.$$

$$A = 1.\ 3362$$

$$y' = -\ 44^{\circ}\ 32'\ 57''\ 02$$

$$\omega' = -\ 56^{\circ}\ 23'.\ 09$$

$$A' = -\ 1.\ 0686$$

$$d\ x = -\ \frac{37.74}{2.4048} = -\ 15''\ 69352,$$

also wahre Aequatorhöhe

$$x - 15''\ 69 = 38^{\circ}\ 27'\ 54''\ 31$$

$$\gamma = 243^{\circ}\ 28\ 37''\ 25$$

in Zeit $16^{h}\ 13'\ 54''\ 48$

$16\ \ 8\ \ 25$

Corr. der Uhr $+\ \ 5'\ 29''\ 48$

$$\gamma' = 250^{\circ}\ 49'\ \ 37''\ 25$$

$16^{h}\ \ 43'\ \ 18''\ 48$

$16\ \ 37\ \ 49$

$+\ \ 5'\ 29''\ 48$ wie zuvor.

IV. Wollte man voraussetzen, dafs beyde Höhen in demselben Augenblicke genommen wurden, so wird man damit für die Ausübung nichts gewinnen, da zwey Beobachter, zwey Instrumente und zugleich die genaueste Uebereinstimmung in den Beobachtungen gefordert wird, und da die Auflösung nur wenig einfacher wird. Die Ausdrücke des N. II. gelten nämlich auch hier unverändert, wenn man

$$\gamma = \gamma' \text{ oder } \vartheta = \alpha' - \alpha$$

setzt, und dasselbe gilt von N. III. Für die Voraussetzung gleicher Höhen zweyer Sterne sehe man Berl. Ephem. 1787. Für die gleicher Stundenkreise endlich ibid. 1797.

V. Setzt man aber voraus, dafs beyde Höhen an einem und demselben Stern genommen wurden, so wird die Auflösung in der That einfacher, aber, wie wir unten sehen werden, man mufs in den meisten Fällen eine beträchtliche Zwischenzeit zwischen den Beobachtungen annehmen, oder sich auf den Gang der Uhr durch mehrere Stunden genau verlassen können.

§. 12.

Aus zwey Höhen eines Sternes und der Zwischenzeit der Beobachtungen die Zeit und die Polhöhe finden.

I. Der Stern sey in den beyden Beobachtungen in a und in b (vorige Figur). Man suche wieder in dem Dreyecke P b a, wo P a = P b ist, die Seite ab und den Winkel P b a, so kennt man in dem Dreyecke Z a b alle Seiten, also auch den Winkel Z b a und daher auch

$$ZbP = Zba - Pba.$$

In dem Dreyecke ZbP endlich kennt man

$$ZbP,\ Zb,\ Pb$$

also findet man ZPb oder die Zeit, und PZ oder die Polhöhe.

II. Setzt man in §. 11. II.

$$\alpha = \alpha' \text{ und } \delta = \delta'$$

so erhält man für die gegenwärtige Aufgabe, wenn man die Bezeichnungen des angeführten Orts beybehält.

$$\operatorname{Tg} a = \frac{\operatorname{Cotg} \frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{Sin} \delta}$$

wo ϑ die in Grade verwandelte Zwischenzeit ist.

$$\operatorname{Cos} b = \operatorname{Cos} a \left\{ \frac{2 \operatorname{Cos} \frac{h'+h}{2} \operatorname{Sin} \frac{h'-h}{2}}{\operatorname{Cos} h \operatorname{Sin} 2\delta \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}\vartheta} + \operatorname{Tg} h \operatorname{Cotg} \delta \right\}$$

$$\operatorname{Tg} t = \frac{\operatorname{Sin} (a-b)}{\operatorname{Tg} h \operatorname{Cos} \delta - \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Cos} (a-b)}$$

$$\operatorname{Tg} \varphi = \frac{\operatorname{Cos} h \operatorname{Sin} (a-b)}{\operatorname{Sin} t}.$$

III. Auch lassen sich die Vorschriften des N. I. am kürzesten in folgende analytische Ausdrücke bringen, wo

$$ab = A,\ abZ = B,\ Pba = C$$

und ϑ die in Grade verwandelte Zwischenzeit ist

$$\operatorname{Sin} \frac{A}{2} = \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} \vartheta$$

$$\operatorname{Sin}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{Cos}\frac{h+h'+A}{2}\operatorname{Sin}\frac{h-h'+A}{2}}{\operatorname{Cos}h\operatorname{Sin}A}}$$

$$\operatorname{Cotg}C=\operatorname{Sin}\delta\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}\vartheta,$$

$$\operatorname{Tg}D=(C\mp B)\operatorname{Cotg}\vartheta$$

$$\operatorname{Sin}\varphi=\frac{\operatorname{Sin}\delta\operatorname{Sin}(h+D)}{\operatorname{Cos}D}$$

Ist $\varphi > \delta$, so ist $C - B$,

und ist $\varphi < \delta$ so ist $C + B$

in der vorletzten Gleichung zu nehmen.

Endlich kann man auch so verfahren

$$A=\operatorname{Cos}\frac{h+h'}{2}\operatorname{Sin}\frac{h-h'}{2}$$

$$B=-\operatorname{Sin}\frac{h+h'}{2}\operatorname{Cos}\frac{h-h'}{2}.$$

$$\operatorname{Sin}m=\frac{A}{\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Sin}\frac{\vartheta}{2}}$$

$$\operatorname{Tg}\beta=\frac{\operatorname{Tg}\delta}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\vartheta}$$

$$\operatorname{Tg}\gamma=\frac{B\operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Cos}m\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\vartheta}$$

Dies vorausgesetzt, hat man

$$\operatorname{Sin}\varphi=\operatorname{Cos}m\operatorname{Cos}(\beta-\gamma)$$

oder

$$\operatorname{Sin}\varphi=-\operatorname{Cos}m\operatorname{Cos}(\beta+\gamma)$$

und man erhält hier sowohl, als in allen vorhergehenden Auflösungen eine doppelte Polhöhe, deren jede der Aufgabe Genüge thut, und aus denen man die wahre für seinen Beobachtungsort immer leicht finden wird. Endlich ist

$$\operatorname{Sin}(t+\tfrac{1}{2}\vartheta)=\frac{\operatorname{Sin}m}{\operatorname{Cos}\varphi}$$

woraus man den Stundenwinkel beyder Beobachtungen, also die Correction der Uhr findet.

Aber alle diese Auflösungen unserer Aufgabe sind, wie man sieht, nur wenig bequemer, als die Auflösung der allgemeinen

Aufgabe des §. 11., und stehen daher jener um so mehr nach, da man bey der allgemeinen die Zwischenzeit so kurz als möglich wählen kann, welches bey mittelmäſsigen Uhren ein groſser Vortheil ist. — Wir wollen nun auch sehen, ob die indirecten Auflösungen der gegenwärtigen Aufgabe bequemer sind.

IV. Sind wieder h, h′ die Höhen, t, t′ die Stundenwinkel, δ die scheinbare Abweichung, und φ die vorläufig angenommene Polhöhe, so ist, wie man leicht findet,

$$\operatorname{Sin}\frac{t'+t}{2}\operatorname{Sin}\frac{t'-t}{2} = \frac{\operatorname{Cos}\frac{h+h'}{2}\operatorname{Sin}\frac{h-h'}{2}}{\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\delta}$$

Liegen die beyden Höhen auf entgegengesetzten oder auf denselben Seiten des Meridians, so ist im ersten Falle

$$\frac{t+t'}{2}$$

und im zweyten

$$\frac{t'-t}{2}$$

als die halbe Zwischenzeit, bekannt, also kann man in beyden Fällen mittels der vorhergehenden Gleichung die Gröſse t und t′ finden, und es ist klar, daſs im allgemeinen ein Fehler der vorläufig angenommenen Polhöhe auf die Bestimmung der Zeit t, t′ nur einen sehr verminderten Einfluſs äuſsern wird, wenn die eine Höhe nahe am Meridian, und die andere sehr weit vom Meridian beobachtet worden ist. Hat man also auf diese Art t und t′ gefunden, so findet man die wahre Polhöhe φ' aus

$$\begin{aligned}\operatorname{Cos}(\varphi'-\delta) &= \operatorname{Sin} h' + 2\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}t'\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\delta\\ &= \operatorname{Sin} h + 2\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}t\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\delta\end{aligned}$$

oder aus

$$\begin{aligned}\operatorname{Cos}(\varphi'+\delta) &= 2\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}t'\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\delta - \operatorname{Sin} h'\\ &= 2\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}t\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\delta - \operatorname{Sin} h\end{aligned}$$

wo man den letzten Gleichungen zur Rechnung folgende bequemere Gestalt geben kann

$$\operatorname{Sin} h' = \operatorname{Tg} A$$

$$2\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}t'\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\delta = \operatorname{Tg} B$$

$$\operatorname{Cos}(\varphi'-\delta) = \frac{\operatorname{Sin}(A+B)}{\operatorname{Cos} A\operatorname{Cos} B}$$

oder $\operatorname{Sin} h = \operatorname{Tg} A'$

$$2\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}\,t\;\mathrm{Cos}\,\varphi\;\mathrm{Cos}\,\delta = \mathrm{Tg}\;B'$$

$$\mathrm{Cos}\,(\varphi + \delta) = \frac{\mathrm{Sin}\,(B' - A')}{\mathrm{Cos}\,B'\;\mathrm{Cos}\,A'}$$

Ex. 1793. 28. September, in der Nähe von Gotha

Uhrzeit	corrig. Höh. d. Sonne
$21^h\ 1'\ 19''.\ 2$	$36^\circ 41\ 11.\ 8 = h'$
$23\ 37\ \ 4.\ 0$	$26\ 33\ 21.\ 0$

Die Zwischenzeit der Beobachtungen ist

$$2^h\ 36'\ 44''.\ 8$$

wozu 1″ 7 addirt werden mufs, weil die Uhr in 24 Stunden um 15″ 59 gegen wahre Zeit zurück blieb. Da beyde Höhen auf derselben Seite des Meridians genommen wurden, so ist

$$\frac{t - t'}{2} = 19^\circ\ 28'\ 18''\ 7$$

Die Abweichung der Sonne in der Mitte beyder Beobachtungen ist

$$\delta = -\ 2^\circ\ 14'\ 9''$$

und die vorläufige Breite sey

$$\varphi = 51^\circ\ 10'\ 50''$$

Daraus folgt also

$$\frac{t + t'}{2} = 21^\circ\ 6'\ 16''\ 2$$

$$\frac{t - t'}{2} = 19\ 28\ 18.\ 7$$

$$t' = 1\ 37\ 57''\,5$$

und daraus folgt

$$\varphi' = 51^\circ\ 0'\ 50''$$

Diese Methode, die Zeit und die Polhöhe zu finden, wurde von Douwes vorgeschlagen. M. s. Bodes astr. Jahrb. erster Supplementband S. 42. und Bohnenbergers Anleitung zur Ortsbestimmung p. 283. Berl. Jahrb. 1798. p 176. Eine vorzüglich für Schiffer brauchbare Auflösung dieses Problems s. m. in B. Zachs Correspond. astronomique. 1820. März.

I. Nach der ersten Differentialgleichung des §. 7. hat man für die erste Beobachtung, wenn man die h, h′ als richtig voraussetzt

$$d\,t = -\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi\,\operatorname{Tg}\omega}$$

und für die zweyte

$$d\,\varphi' = -\,d\,t'\,\operatorname{Cos}\,\varphi\,\operatorname{Tg}\,\omega'$$

Setzt man also für einen gleichförmigen Gang der Uhr beyde Werthe von dt, dt' einander gleich, so ist

$$\frac{d\,\varphi'}{d\,\varphi} = \frac{\operatorname{Tg}\omega'}{\operatorname{Tg}\omega}$$

Ist daher

$$\operatorname{Tg}\,\omega' = \operatorname{Tg}\,\omega$$

wenn beyde Beobachtungen in gleichen Entfernungen vom Meridian genommen wurden, so ist auch

$$d\,\varphi' = d\,\varphi$$

und man erhält immer wieder die alte hypothetische Polhöhe

$$\varphi' = \varphi$$

Ist aber

$$\operatorname{Tg}\,\omega' < \operatorname{Tg}\,\omega$$

so wird

$$d\,\varphi' < d\,\varphi$$

seyn, und ist endlich

$$\operatorname{Tg}\,\omega' > \operatorname{Tg}\,\omega$$

so wird auch

$$d\,\varphi' > d\,\varphi$$

seyn, oder jede neue Hypothese wird sich immer mehr und mehr von der Wahrheit entfernen.

§. 13.

Wir wollen nun noch sehen, wie man aus drey Beobachtungen von drey Sternen die Gröfse φ, t und noch irgend ein willkührliches Element bestimmen kann.

Es seyen $\alpha\ \alpha'\ \alpha''$ die scheinbaren Rectascensionen, $\delta\ \delta'\ \delta''$ die Declinationen dieser Sterne, die man in derselben Höhe h zu den Uhrzeiten $\vartheta\ \vartheta'\ \vartheta''$ beobachtet hat.

Geht die Uhr nach Sternzeit, und ist k die Voreilung derselben vor Sternzeit, so sind

$$s = k + \vartheta - \alpha$$

$$s' = k + \vartheta' - \alpha'$$
$$s'' = k + \vartheta'' - \alpha''$$

in Bogen verwandelt ($15^\circ = 1^h$) die Stundenwinkel der Sterne; also ist, wenn

$$\vartheta - \alpha = p,\ \vartheta' - \alpha' = p',\ \vartheta'' - \alpha'' = p'' \text{ ist,}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sin } h = \text{Sin } \varphi \text{ Sin } \delta + \text{Cos } \varphi \text{ Cos } \delta \text{ Cos } (p - k) \\ \text{Sin } h = \text{Sin } \varphi \text{ Sin } \delta' + \text{Cos } \varphi \text{ Cos } \delta' \text{ Cos } (p' - k) \\ \text{Sin } h = \text{Sin } \varphi \text{ Sin } \delta'' + \text{Cos } \varphi \text{ Cos } \delta'' \text{ Cos } (p'' - k) \end{array}\right\}$$

Zieht man die erste dieser Gleichungen von der zweyten ab, so ist

$$\text{Tg } \varphi = \text{Cos } \frac{p' - p}{2} \text{ Tg } \frac{\delta' + \delta}{2} \text{ Cos } \left(\frac{p' + p}{2} - k\right)$$
$$+ \text{Sin } \frac{p' - p}{2} \text{ Cotg } \frac{\delta' - \delta}{2} \text{ Sin } \left(\frac{p' + p}{2} - k\right)$$

Es sey daher

$$A \text{ Sin } B = \text{Sin } \frac{p' - p}{2} \text{ Cotg } \frac{\delta' - \delta}{2}$$

$$A \text{ Cos } B = \text{Cos } \frac{p' - p}{2} \text{ Tg } \frac{\delta' + \delta}{2} \text{ und}$$

$$C = \frac{p' + p}{2} - B$$

so ist die letzte Gleichung

$$\text{T g } \varphi = A \text{ Cos } (C - k) \ldots (1).$$

Auf dieselbe Art erhält man

$$A' \text{ Sin } B' = \text{Sin } \frac{p'' - p}{2} \text{ Cotg } \frac{\delta'' - \delta}{2}$$

$$A' \text{ Cos } B' = \text{Cos } \frac{p'' - p}{2} \text{ Tg } \frac{\delta'' + \delta}{2}$$

$$C' = \frac{p'' + p}{2} - B'$$

$$\text{T g } \varphi = A' \text{ Cos } (C' - k) \ldots (2)$$

Beyde Werthe von T g φ geben

$$o = A \text{ Cos } (C - k) - A' \text{ Cos } (C' - k) \text{ oder}$$
$$o = ((A' - A) - (A' + A)) \text{ Cos } (C - k)$$
$$+ ((A' - A) + (A' + A)) \text{ Cos } (C' - k))$$

oder

$$o = (A' - A)\,(\mathrm{Cos}\,(C - k) + \mathrm{Cos}\,(C' - k))$$
$$-\,(A' + A)\,(\mathrm{Cos}\,(C - k) - \mathrm{Cos}\,(C' - k))$$

oder endlich

$$o = (A' - A)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{C + C'}{2} - k\right)\mathrm{Cos}\left(\frac{C' - C}{2}\right)$$
$$-\,(A' + A)\,\mathrm{Sin}\left(\frac{C + C'}{2} - k\right)\mathrm{Sin}\,\frac{C' - C}{2}$$

Setzt man also

$$\frac{A}{A'} = \mathrm{Tg}\,x, \quad \text{so ist}$$

$$\frac{A' - A}{A' + A} = \mathrm{Tg}\,(45^\circ - x)$$

und setzt man

$$\mathrm{Tg}\,y = \mathrm{Tg}\,(45^\circ - k)\;\mathrm{Cotg}\,\frac{C' - C}{2}$$

so ist $\quad k = \frac{1}{2}\,(C' + C) - y \;.\;.\;.\; (3)$

Die Gleichung (1) oder (2) gibt die Polhöhe, und (3) die Voreilung der Uhr.

Mit φ und k kann man aus einer der drey ersten Gleichungen die wahre Höhe h berechnen, und dann ist

$$h + \text{Refraction}$$

die scheinbare Höhe der Rechnung, die mit der durch den Collimations-Fehler verbesserten beobachteten Höhe verglichen den Theilungs-Fehler des Instrumentes gibt.

Bey der Wahl der Sterne hat man vorzüglich darauf zu sehen, dafs die Azimute derselben so viel als möglich verschieden sind, oder dafs ihre Vertikalkreise am Zenith nicht zu kleine Winkel bilden.

I. Eine andere vorzügliche Auflösung dieser Aufgabe ist in folgenden Ausdrücken enthalten.

Sind wieder $\vartheta\ \vartheta'\ \vartheta''$ die Uhrzeiten der gemeinschaftlichen Höhe h, und k die Voreilung der Uhr vor Sternzeit, die ich für alle drey Beobachtungen als constant annehme. (Ist das nicht der Fall, geht z. B. die Uhr nach mittlerer Zeit, so kann k die Voreilung der Uhr bey der ersten Beobachtung seyn, und dann mufs man die Zeiten $\vartheta'\ \vartheta''$ gehörig verändern, also z. B. vermindern, wenn die Uhr schneller als Sternzeit geht). Sind ferner wieder

$$s = \vartheta - k - \alpha$$

$$s' = \vartheta' - k - \alpha'$$
$$s'' = \vartheta'' - k - \alpha''$$

die Stundenwinkel, und

$$\vartheta - \alpha = p,$$
$$\vartheta' - \alpha' = p'$$
$$\vartheta'' - \alpha'' = p'',$$

so sey in einer leicht zu entwerfenden Zeichnung Z das Zenith, P der Pol des Aequators und A A′ A″ die drey Orte des Sterns.

Ferner seyen die parallactischen Winkel

$$Z A P = a$$
$$Z A' P = a',$$
$$Z A'' P = a''$$

so ist

$$- P A A' + P A' A$$
$$= - (P A A' - Z A A') + (P A' A - Z A A')$$
$$= a + a'$$

weil

$$Z A A' = Z A' A \text{ ist};$$

also ist nach den Nepperschen Ausdrücken (Cap. I.)

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{Tg}\,\frac{a'+a}{2} = \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\delta'-\delta}{2}}{\mathrm{Cos}\,\frac{\delta'+\delta}{2}}\,\mathrm{Cotg}\,\frac{p'-p}{2} \\
&\text{und eben so} \\
&\mathrm{Tg}\,\frac{a''+a}{2} = \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\delta''-\delta}{2}}{\mathrm{Cos}\,\frac{\delta''+\delta}{2}}\,\mathrm{Cotg}\,\frac{p''-p}{2} \\
&\mathrm{Tg}\,\frac{a''+a'}{2} = \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\delta''-\delta'}{2}}{\mathrm{Cos}\,\frac{\delta''+\delta'}{2}}\,\mathrm{Cotg}\,\frac{p''-p'}{2}
\end{aligned}\right\}\ \text{I.}$$

Weiter ist,

da Z P und Z A = Z A′ = Z A″ beständig sind,

$$\frac{\mathrm{Sin}\,s}{\mathrm{Sin}\,a} = \frac{\mathrm{Sin}\,s'}{\mathrm{Sin}\,a'} = \frac{\mathrm{Sin}\,s''}{\mathrm{Sin}\,a''}$$

also aus den beyden ersten

$$\frac{\text{Sin } s' + \text{Sin } s}{\text{Sin } s' - \text{Sin } s} = \frac{\text{Sin } a' + \text{Sin } a}{\text{Sin } a' - \text{Sin } a}$$

oder

$$\text{Tg } \frac{s' + s}{2} \text{ Cotg } \frac{s' - s}{2} = \text{Tg } \frac{a' + a}{2} \text{ Cotg } \frac{a' - a}{2}.$$

Substituirt man in dem letzten Ausdrucke für

$$\text{Tg } \frac{a' + a}{2}$$

aus I. seinen Werth, und bemerkt man, daſs

$$\frac{p' - p}{2} = \frac{s' - s}{2}$$

ist, so erhält man, wenn man

$$A'' = \frac{s' + s}{2}$$

$$A' = \frac{s'' + s}{2}$$

$$A = \frac{s'' + s'}{2}$$

setzt, folgende Ausdrücke

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Tg } A'' = \dfrac{\text{Sin } \frac{\delta' - \delta}{2}}{\text{Cos } \frac{\delta' + \delta}{2}} \text{ Cotg } \dfrac{a' - a}{2} \text{ und} \\[2ex]
k = - A'' + \dfrac{p'' + p}{2} \\[2ex]
\text{und eben so} \\[2ex]
\text{Tg } A' = \dfrac{\text{Sin } \frac{\delta'' - \delta}{2}}{\text{Cos } \frac{\delta'' + \delta}{2}} \text{ Cotg } \dfrac{a'' - a}{2} \text{ und} \\[2ex]
k = - A' + \dfrac{p'' + p}{2} \\[2ex]
\text{und eben so} \\[2ex]
\text{Tg } A = \dfrac{\text{Sin } \frac{\delta'' - \delta'}{2}}{\text{Cos } \frac{\delta'' + \delta'}{2}} \text{ Cotg } \dfrac{a'' - a}{2} \text{ und} \\[2ex]
k = - A + \dfrac{p'' + p'}{2}
\end{array}\right\} \text{II.}$$

Endlich ist in dem Dreyecke ZAP nach denselben Nepperschen Sätzen,

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Tg}\ B &= \frac{\mathrm{Cos}\ \frac{p-k+a}{2}}{\mathrm{Cos}\ \frac{p-k-a}{2}}\ \mathrm{Cotg}\ \frac{90-\delta}{2} \\
\mathrm{Tg}\ C &= \frac{\mathrm{Sin}\ \frac{p-k-a}{2}}{\mathrm{Sin}\ \frac{p-k+a}{2}}\ \mathrm{Tg}\ \frac{90-\delta}{2}
\end{aligned}\right\}\ \text{III.}$$

wo $\quad B = \frac{\varphi + h}{2}; \qquad C = \frac{\varphi - h}{2}$

also $\quad \varphi = B + C$

$\qquad\quad h = B - C$

Eben so erhält man in dem Dreyecke $ZA'P$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Tg}\ B' &= \frac{\mathrm{Cos}\ \frac{p'-k+a'}{2}}{\mathrm{Cos}\ \frac{p'-k-a'}{2}}\ \mathrm{Cotg}\ \frac{90-\delta}{2} \\
\mathrm{Tg}\ C' &= \frac{\mathrm{Sin}\ \frac{p'-k-a'}{2}}{\mathrm{Cos}\ \frac{p'-k+a'}{2}}\ \mathrm{Tg}\ \frac{90-\delta}{2}
\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}\varphi &= B' + C' \\ h &= B' - C'\end{aligned}$$

und endlich in dem Dreyecke $ZA''P$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Tg}\ B'' &= \frac{\mathrm{Cos}\ \frac{p''-k+a''}{2}}{\mathrm{Cos}\ \frac{p''-k-a''}{2}}\ \mathrm{Cotg}\ \frac{90-\delta''}{2} \\
\mathrm{Tg}\ C'' &= \frac{\mathrm{Sin}\ \frac{p''-k-a''}{2}}{\mathrm{Sin}\ \frac{p''-k+a''}{2}}\ \mathrm{Tg}\ \frac{90-\delta''}{2}
\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}\varphi &= B'' + C'' \\ h &= B'' - C''\end{aligned}$$

Die vorhergehenden Ausdrücke enthalten alle Auflösuugen der Aufgabe. Wir wolleu sie nun auf ein Beyspiel anwenden.

1808 August 27. in Göttingen wurde der Sextant auf die Höhe

$52^\circ\ 39'\ 27''\ 5$

gestellt, und die Zeiten der Sternuhr für den Durchgang folgender Sterne beobachtet

α Andromedae . . $21^h\ 33'\ 26''$

α kleiner Bär	21	47	30
α Leyer	22	5	21

für diese Zeit der Beobachtung ist

	scheinb. AR				sch. Declination			
α Andromedae	23^h	58′	33″	33	28°	2′	14″	8
α kl. Bär	0	55	4.	7	88	17	5.	7
α Leyer	18	30	28.	96	38	37	6.	6

also ist $p = 21^h\ 34'\ 52''\ 67 = 323°\ 43'\ 10''\ 05$

$p' = 20\ \ 52\ \ 25.\ 30 = 313.\ 6\ \ 19\ \ 50$

$p'' = 3\ \ 34\ \ 52.\ 04 = 53\ \ 43\ \ 0.\ 60$

Log $A = 0.\ 2072029$ Log $A' = 0.\ 8836657$

$B = 354°\ 19'\ 22''\ 04$ $B' = 266°\ 30'\ 55''\ 07$

$C = -35°\ 54'\ 37''\ 27$ $C' = -77\ \ 47\ \ 49.\ \ 75$

$x = 11°\ 53'\ 41''\ 28$ . . $y = -59°\ 35'\ 14''\ 71$

$k = +2°\ 44'\ 1''\ 20 = 0^h\ 10'\ 56''\ 08$ Voreilung der Uhr

$C - k = -38°\ 38'\ 38''\ 47$

$C' - k = -80°\ 31'\ 50''\ 95$ also

$\varphi = 51°\ 31'\ 51''\ 51$

Mit diesem Werthe von φ und K findet man aus den drey ersten Gleichungen

wahre Höhe h =	52°	37′	21″	3
Refr.			42.	7.
	52	38	4.	0
Höhe des Instr.	52	39	27.	5
Collimationsfehler		1	45.	9.
schein. beob. Höhe	52°	37′	42″	5
also Fehl. d. Einth. —		0′	21″	5

Nach Nr. I. ist dieses Beyspiel

$$\frac{a' + a''}{2} = 142°\ 2'\ 50''\ 70$$

$$\frac{a + a''}{2} = 6°\ 17'\ 51''\ 34$$

$$\frac{a + a'}{2} = 95\ 34\ 36\ 24$$

woraus $a = -\ 40°\ 10'\ 23''\ 13$

$a' = 231\ \ 19\ \ 35.60$

$a'' = 52\ \ 46\ \ 5.80$

also $A'' = 315°\ 40'\ 43''\ 55$

$K = 2°\ 44'\ 1''\ 23$

$\varphi = 51\ \ 31\ \ 51.33$

$h = 52\ \ 37\ \ 21.37$

M. s. Monatl. Corresp. Octob. 1808. und Jan. 1809, und Mayl. Ephem. f. d. J. 1810. Wie man aus drey verschiedenen Höhen eines Sterns die Polhöhe bestimmt, s. m Berl. Jahrb. 1790. Vergleiche Berl. Jahrb. 1803. p.. 117.

NEUNTES KAPITEL.

Bestimmung der geographischen Länge, des Azimuts, der Schiefe der Ecliptik u. w., aus Beobachtungen.

§. 1.

Da die Sonne in 24 Stunden wahrer Zeit (der Stern in 24 Stunden Sternzeit etc.) von Ost nach West durch alle Meridiane der Erde geht, und man an jedem Orte Mittag oder 0^h zählt, wenn die Sonne durch den Meridian dieses Ortes geht, so wird ein Ort um 1, 2, 3, Stunden eher Mittag haben, als ein anderer, wenn er um 15, 30, 45 Grade östlicher liegt, und derselbe Unterschied wird bey allen andern Zeiten des Tages an beyden Orten statt haben. Der Unterschied der geographischen Länge zweyer Orte, d. h. der Winkel ihrer Meridiane, wird also dem Unterschiede der wahren, oder der mittleren, oder der Sternzeiten proportionirt seyn, die man an beyden Orten in demselben Augenblicke zählt. Diese Zeiten findet man an jedem dieser Orte durch die Berichtigung der Uhr. (Cap. 7) Es kömmt also nur noch darauf an, zu erfahren, welche Zeit es zugleich an beyden Orten ist. Dies findet man, wenn man an beyden Orten eine Begebenheit beobachtet, die für beyde in demselben Augenblick statt hat, wie Mondsfinsternisse, Ein- und Austritte der Jupiters-Trabanten in den Schatten ihres Hauptplaneten, Feuersignale u. f., oder zweytens, wenn man an beyden Orten eine Begebenheit beobachtet, die zwar für beyde nicht genau in demselben Augenblicke statt hat, aus welcher sich aber eine solche tautochrone Erscheinung mit Verläſslichkeit durch Rechnungen ableiten läſst, wie Sonnenfinsternisse, Sternbedeckungen vom Monde, Durchgänge des Mondes durch den Meridian, Entfernung des Mondes von bekannten Fixsternen u. a., oder endlich, wenn man eine Uhr, deren Gang man vollkommen kennt, an dem einen dieser Orte nach der Zeit dieses Ortes regulirt, und dann, ohne ihren Gang zu stören, auf den andern Ort bringt, und sie hier mit der Zeit dieses zweyten Ortes unmittelbar vergleicht. Wir wollen hier einige dieser Methoden, und unter diesen besonders jene erläutern, welchen solche tautochrone Erscheinungen zu Grunde liegen, indem wir die andern, die höhere Vorkenntnisse erfodern, im zweyten Buche nachtragen werden.

§. 2.

Man habe eine solche tautochrone Erscheinung an dem ersten Orte um die Uhrzeit T, und in dem andern um die Uhrzeit T′ beobachtet, vorausgesetzt; daſs beyde Uhren gleichförmig und mit derselben Geschwindigkeit gehen. Wären diese Uhrzeiten beyder Orte wahre, oder mittlere Sonnenzeiten, Sternzeiten, (und auf diese kann man jene Uhrzeiten bringen, wenn man die Correction der Uhr nach Cap. 7 sucht) so wäre der Längenunterschied beyder Orte

$$15\,(T' - T)$$

und der zweyte liegt östlich vom ersten, wenn T′ gröſser als T ist.

Diese Correction der Uhren, oder diese Verwandlung der Uhrzeiten in wahre u. f., kann man umgehen, wenn man an beyden Orten die Culmination eines Fixsterns beobachtet. Ist nämlich t die Uhrzeit der Culmination des Fixsterns an dem ersten Orte, und t′ an dem zweyten, so sind von dem Augenblicke jener tautochronen Erscheinung bis zur Culmination des Sterns an dem ersten Orte t — T, und an dem zweyten t′ — T′ Stunden verflossen, also ging der Stern früher durch den Meridian des ersten Orts, als durch den zweyten, um

$$((t - T) - (t' - T'))$$

Stunden, und wenn t′ — T′ gröſser ist, als t — T, so liegt der zweyte Ort östlich vom ersten. Verflieſsen nun von einer Culmination des Sterns bis zur nächstfolgenden an beyden Orten 24 Stunden Uhrzeit, so hat man die Längendifferenz beyder Orte

$$\frac{360}{24}\,((t - T) - (t' - T'))$$

Verflieſsen aber von einer Culmination der wahren oder mittleren Sonne bis zur nächstfolgenden an beyden Orten 24 Stunden Uhrzeit, so hat sich die Erde in dieser Zwischenzeit in Beziehung auf die wahre oder mittlere Sonne ebenfalls einmal um ihre Axe gedreht, und es ist auch hier die Längendifferenz

$$15\,((t - T) - (t' - T'))$$

Die gewöhnlichsten Erscheinungen, die sich zu diesem Zwecke darbieten, sind die Mondsfinsternisse. Da nähmlich der Mond, wenn er in den Schatten der Erde tritt, seines Lichtes für alle Erdbewohner, denen er sichtbar ist, in der That und in demselben

Augenblicken beraubt wird, so wird die Differenz der wahren, mittlern, oder Sternzeit dieser Erscheinungen für zwey Orte sogleich die Differenz der Länge dieser beyden Orte geben.

Da der Mondschatten nur sehr unvollkommen begränzt ist, so sind die Augenblicke des Ein- und Austritts des Mondes in den Schatten nicht mit Schärfe zu beobachten, daher auch die daraus geschlossene Längendifferenz oft sehr fehlerhaft ist. Etwas genauer sind die Beobachtungen der Ein- und Austritte der verschiedenen Flecken des Mondes. Auch die Güte der Fernröhre beyder Beobachter, ihre Gesichtsschärfe, die Reinheit ihrer Atmosphäre u. s., können auf die Resultate ungünstige Einflüsse haben.

Ex. Die totale Mondsfinsternifs des 22. Octobers 1790 wurde beobachtet in

	Paris		Gotha		Längendifferenz
Anfang	11ʰ 7′ 33″	- -	11ʰ 41′ 44″	wah. Zeit	0ʰ 34′ 11″
Copernik. I. Rand	11 29 58	- -	12 3 21	- - -	33 23
II. - -	11 32 13	- -	12 6 3	- - -	33 50
Tycho	11 30 23	- -	12 4 5	- - -	33 32
Totale Verfinst.	12 14 25	- -	12 48 4	- - -	33 39
Anf. d. Austritts	13 55 23	- -	14 28 36	- - -	33 13
Copernikus I.	14 15 23	- -	14 49 9	- - -	33 46
II.	14 18 48	- -	14 52 23	- - -	33 35

und man sieht aus diesem Beyspiele, wie wenig verläfslich diese Art von Beobachtung ist.

Besser sind die Beobachtungen der Ein- und Austritte der Jupiterssatelliten, aber auch sie gewähren nicht alle die Uebereinstimmung, die man wünschen mufs. Um durch sie die Längendifferenz mit einiger Schärfe zu erhalten, mufs man auf folgende Vorschriften Rücksicht nehmen.

Man mufs an beyden Orten so viel möglich gleich starke Fernröhre brauchen; man mufs e b e n s o v i e l e Eintritte, als Austritte unter einander vergleichen, und die zwey von Jupiter entferntesten Satelliten gänzlich, so wie alle Beobachtungen ausschliefsen, die zu nahe bey der Opposition Jupiters mit der Sonne gemacht wurden.

Ex. 1809. October:

Beobachteter Eintr. des I. Satelliten.		Austritt.	
Paris mittl. Zeit 1ʰ 47′ 5″,	20ʰ 15′ 30″ --	18ʰ 47′ 32″,	20ʰ 42′ 37″
Krakau mittl. Z. 2 57 38,	21 25 54 --	19 58 1,	21 52 51
Längendifferenz 1ʰ 10′ 33″,	1ʰ 10′ 24″ --	1ʰ 10′ 29″	1ʰ 10′ 14″

§. 3.

Da die vorhergehenden tautochronen Erscheinungen des Himmels keiner grofsen Schärfe in der Beobachtung fähig sind, so hat man andere ähnliche Erscheinungen auf der Erde, welche dieser Vorwurf nicht trifft, zu demselben Zwecke zu benützen gesucht: hieher gehören Signale, Blendungen von Flammen durch Fallthüren, das Zerplatzen geworfener Raketen u. d. gl. Das einfachste und beste sind die sogenannten Pulversignale. Drey bis vier Lothe gemeines Schiefspulver geben, wenn es angezündet wird, eine augenblickliche Flamme, die man mit Fernröhren von etwa zwanzigmaliger Vergröfserung selbst am hellen Tage auf fünf bis sechs deutsche Meilen sehen kann. Bey Nachtsignalen mufs den Tag vorher das Rohr auf den bezeichneten Ort gestellt werden. Nach Zachs Versuchen kann man Nachtsignale von 10 bis 15 Loth Pulver bis auf dreyfsig Meilen in die Runde sehen, wenn der Ort, an welchen sie gegeben werden, hoch genug liegt.

Das Wesentlichste dabey ist eine scharfe Bestimmung des Stands und Gangs der Uhr, die man sich gewöhnlich durch correspondirende Höhen des Mittags und der Mitternacht an den verschiedenen Beobachtungsorten verschafft. Da die Geschwindigkeit des Lichts für Beobachtungen dieser Art als unendlich grofs angesehen werden kann, so kann man diese Erscheinungen als tautochron betrachten.

Folgende Beobachtungen wurden im Jahre 1803, den 24 Julius, angestellt.

Mittl. Zeit auf d. Ettersberg bey Weimar.	M. Z. auf d. Sternwarte Seeberg	Meridiandifferenz Seeberg westlich.
5ʰ 26′ 2″ 2 -----	5ʰ 23′ 57″ 1 -----	0ʰ 2′ 5″ 1
5 30 59. 3	5 28 54. 8	0 2 4. 5
5 35 59. 6	5 33 55. 0	0 2 4. 6
9 11 8. 5	9 9 3. 8	0 2 4. 7
9 16 2. 6	9 13 58. 2	0 2 4. 4
9 21 2. 0	9 18 57. 3	0 2 4. 7

9 26 3. 2	9 23 58. 8	0 2 4. 4
9 31 4. 4	9 28 59. 7	0 2 4. 7
9 36 2. 7	9 33 58. 4	0 2 4. 3

§. 4.

Die grofse Vollkommenheit, mit welcher jetzt tragbare Uhren verfertiget werden, setzt uns in den Stand, die Zeit eines Ortes durch diese Uhren unmittelbar mit der Zeit eines andern Ortes zu vergleichen, und so die Längendifferenz beyder Orte zu bestimmen. Ein Beyspiel wird das Verfahren, welches man zu beobachten hat, deutlich machen.

1786 den 29. May fand Zach auf der Sternwarte des Grafen Brühl (London, Dowerstreet), dafs sein Chronometer im Mittag dieses Tages 2″ 1 zu wenig gegen die mittlere Zeit dieses Ortes gab, und aus vielen andern Tagen fand er, dafs der Chronometer täglich 0″, 1715 gegen mittlere Zeil zurückblieb. Den 27. Jnnius, also 29 Tage später, kam er mit dieser Uhr auf seiner Sternwarte Seeberg an. Die mittlere Zeit im wahren Mittag Londons für den 27. Junius ist (aus den Ephemeriden)

$$0^h\ 2'\ 34''\ 3$$

Zieht man davon ab die erste Verspätung des 29. May's, oder 2″ 1, und die Verspätung in 29 Tagen oder 29 (0. 1715) = 4″ 97, so erhält man die Uhrzeit des Chronometers den 27. Juni im wahren Mittag Londons

$$t = 0^h\ 2'\ 27''\ 23$$

Allein an demselben Tage beobachtete er in Seeberg correspondirende Höhen der Sonne, und fand daraus die Uhrzeit des Chronometers den 27. Juni im wahren Mittag Seebergs

$$t' = 11^h\ 19'\ 3''\ 40$$

Daher ist die Längendifferenz beyder Orte

$$t - t' = 0^h\ 43'\ 23''\ 83 \text{ Seeberg östlich.}$$

M. s. Berl. Jahrb. 1806. p. 210.

§. 5.

Wenn man an zwey Orten, die nicht in demselben Meridian liegen, die Differenz der Culmination des Mondes und eines Fixsterns beobachtet, so werden diese Differenzen nicht gleich seyn, weil die gerade Aufsteigung des Mondes sich sehr schnell, oft bis 15 Grade in einem Tage ändert. Daraus folgt, daſs man aus jenen Differenzen, wenn man die tägliche Aenderung der Rectascension des Mondes kennt, auch rückwärts auf die Längendifferenz der beyden Beobachtungsorte schlieſsen kann. Ein Beyspiel wird dieſs deutlich machen.

Man beobachtete	Sternzeit		Sternzeit
die Culm. d. ☾ in Gotha	13ʰ 47′ 32″ 45	in Mannh.	13ʰ 47′ 53′ 0
der Spica - - - - - - - -	13 14 17. 87		13 14 17. 2
	33 14. 58		33 35. 8
			33 14. 58
			21″ 22

ie = gc [illegible]

oder $0^\circ\ 5'\ 18''\ 3 = a$

Aus den Beobachtungen der vorhergehenden und nächstfolgenden Tage (oder aus den Ephemeriden durch Interpolation) fand sich die Aenderung der Rectascension des Mondes in einer Stunde Sternzeit

$$0^\circ\ 34'\ 44''\ 998 = 0^\circ\ 579166 = b$$

Ist also x die Meridiandifferenz beyder Orte, so ist

$$b : a = 1 : x \text{ oder}$$

$$x = \frac{a}{b} = 0^h .\ 15266 = 0^h\ 9'\ 9''\ 6$$

M. s. Monatl. Corresp. 1803 September. Ueber ähnliche Längenbestimmungen durch beobachtete Höhen des Mondes s. m. Mon. Corr. 1805 December. Berl. Jahrb. 1799. p. 92.

§. 6.

Da besonders zur See die Gelegenheit, die geographische Länge zu bestimmen, nicht oft genug gegeben werden kann, so hat man zu diesem Zwecke die Beobachtungen der Entfernung des Mondes von andern Gestirnen vorgeschlagen. Der Unterschied der Zeiten von zwey Beobachtungen, jede in der Zeit ihres Ortes ausgedrückt, für welche dieselbe geocentrische Entfernung der Mittelpunkte des Mondes von einem Gestirne statt hat, ist zugleich der Unterschied der Meridiane der Beobachter, oder ihre Längendifferenz. Die Stelle einer dieser beyden Beobachtungen kann auch die Berechnung dieser ihrer Entfernung aus den Tafeln des Mondes vertreten, da diese Tafeln nach den neuesten Berichtigungen genau genug zu diesem Zwecke sind. Daſs aber hiezu allein der Mond angewendet werden könne, ist daraus klar, weil die Bewegungen aller andern Himmelskörper viel zu langsam sind, und daher bey dem letzten kleine Fehler der Beobachtung oder der Berechnung aus den Tafeln sehr grofse in den gesuchten Resultaten zur Folge haben würden. So würden ähnliche Beobachtungen an der Sonne dreyzehnmal weniger genau seyn, weil die Bewegung der Sonne nahe dreyzehnmal geringer ist, als die des Mondes.

Es seyen h H die wahre, von Refraction und Parallaxe befreyte, Höhe des Mittelpunkts der Sonne und des Mondes; h' H' ihre scheinbaren oder beobachteten Höhen, δ die wahre, und δ' die scheinbare oder beobachtete Entfernung dieser Mittelpunkte.

Da die wahren und scheinbaren Orte eines jeden Gestirns in demselben Vertikalkreise liegen, so ist, wenn die gemeinschaftliche Differenz des Azimuts der beyden Gestirne ω heifst,

$$\text{Cos}\,\delta = \text{Sin}\,H\ \text{Sin}\,h + \text{Cos}\,H\ \text{Cos}\,h\ \text{Cos}\,\omega$$

$$\text{Cos}\,\delta' = \text{Sin}\,H'\,\text{Sin}\,h' + \text{Cos}\,H'\,\text{Cos}\,h'\,\text{Cos}\,\omega$$

woraus sofort folgt

$$\text{Sin}^2\frac{\omega}{2} = \frac{\text{Sin}\,\frac{\delta'+H'-h'}{2}\ \text{Sin}\,\frac{\delta'-H'-h'}{2}}{\text{Cos}\,H'\ \text{Cos}\,h'}$$

und

$$\text{Cos}^2\frac{\omega}{2} = \frac{\text{Cos}\,\frac{H'+h'+\delta'}{2}\ \text{Cos}\,\frac{H'+h'-\delta'}{2}}{\text{Cos}\,H'\ \text{Cos}\,h'}$$

und eben so gibt die erste der vorhergehenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\text{Cos}\,\delta &= \text{Cos}\,(H-h) - 2\,\text{Cos}\,H\,\text{Cos}\,h\,\text{Sin}^2\frac{\omega}{2}\\ \text{Cos}\,\delta &= 2\,\text{Cos}H\,\text{Cos}\,h\,\text{Cos}^2\frac{\omega}{2} - \text{Cos}(H-h)\\ \text{Cos}\,\delta &= \text{Cos}(H-h)\text{Cos}^2\frac{\omega}{2} - \text{Cos}(H+h)\text{Sin}^2\frac{\omega}{2}\end{aligned}\right\}\ \text{I.}$$

Aus der zweyten der Gleichungen I. folgt

$$\text{Cos}\,\delta = 2\,\frac{\text{Cos}\,H\ \text{Cos}\,h}{\text{Cos}H'\ \text{Cos}\,h'}\cdot\text{Cos}\,\frac{H'+h'+\delta'}{2}\,\text{Cos}\,\frac{H'+h'-\delta'}{2} - \text{Cos}\,(H+h)$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned}\text{Sin}^2\frac{\delta}{2} &= \text{Cos}^2\,\frac{H+h}{2} - m\,\text{Cos}\,\frac{H'+h'+\delta'}{2}\ \text{Cos}\,\frac{H'+h'-\delta'}{2}\\ \text{Cos}^2\frac{\delta}{2} &= \text{Sin}^2\,\frac{H+h}{2} + m\,\text{Cos}\,\frac{H'+h'+\delta'}{2}\ \text{Cos}\,\frac{H'+h'-\delta'}{2}\end{aligned}\right\}\text{II.}$$

$$\text{wo } m = \frac{\text{Cos } H \text{ Cos } h}{\text{Cos } H' \text{ Cos } h'} \text{ ist.}$$

Setzt man also der bequemern Rechnung wegen

$$\text{Sin } A = \frac{1}{\text{Cos } \frac{H+h}{2}} \sqrt{m \text{ Cos } \frac{H'+h'+\delta'}{2} \text{ Cos } \frac{H'+h'-\delta'}{2}}$$

so folgt aus den ersten der Gleichungen II.

$$\text{Sin } \frac{\delta}{2} = \text{Cos } \frac{H+h}{2} \text{ Cos } A$$

und ist eben so

$$\text{Tg } B = \frac{1}{\text{Sin } \frac{H+h}{2}} \sqrt{m \text{ Cos } \frac{H'+h'+\delta'}{2} \text{ Cos } \frac{H'+h'-\delta'}{2}}$$

so folgt aus der zweyten der Gleichungen II.

$$\text{Cos } \frac{\delta}{2} = \text{Sin } \frac{H+h}{2} \cdot \frac{1}{\text{Cos } B}$$

Sucht man eben so aus der ersten der Gleichungen I. und auf ähnliche Art die Werthe von

$$\text{Sin}^2 \frac{\delta}{2} \text{ und } \text{Cos}^2 \frac{\delta}{2},$$

so findet man noch zwey andere analoge Ausdrücke, nämlich

$$\text{Sin } C = \frac{1}{\text{Cos } \frac{H-h}{2}} \sqrt{m \text{ Sin } \frac{\delta'+H'-h'}{2} \text{ Sin } \frac{\delta'-H'+h'}{2}}$$

und

$$\text{Cos } \frac{\delta}{2} = \text{Cos } \frac{H-h}{2} \cdot \text{Cos } C$$

und eben so

$$\text{Tg } D = \frac{1}{\text{Sin } \frac{H-h}{2}} \sqrt{m \text{ Sin } \frac{\delta'+H'-h'}{2} \text{ Sin } \frac{\delta'-H'+h'}{2}}$$

$$\text{Sin } \frac{\delta}{2} = \text{Sin } \frac{H-h}{2} \cdot \frac{1}{\text{Cos } D}$$

Ueberdiefs gibt die erste der Gleichungen I.

$$\text{Cos } \delta = \text{Cos}(H-h) - 2m \text{ Sin } \frac{\delta'+H'-h'}{2} \text{ Sin } \frac{\delta'-H'+h'}{2}$$

Ist aber

$$\text{Cos } E = \frac{m}{2},$$

so ist das letzte Glied dieser Gleichung

$$2 \text{ Cos} E \, (\text{Cos } (H' - h') - \text{Cos } \delta)$$

$$= \text{Cos} (E - H' + h') + \text{Cos} (E + H' - h')$$

$$- \text{Cos} (E - \delta') - \text{Cos } (E + \delta')$$

also auch die vorhergehende Gleichung selbst

$$\text{Sin vers } \delta = \text{Sin vers } (H - h) + \text{Sin vers } (\delta' + E)$$

$$+ \text{Sin vers } (\delta' - E) - \text{Sin vers } (H' - h' + E)$$

$$- \text{Sin vers } (H' - h' - E)$$

und die fünf vorhergehenden Ausdrücke für δ sind die vorzüglichsten, die man aus den Gleichungen I. ableiten kann. Die letzte derselben, welche, wenn man eine eigene Tafel der Sinus versus hat, nur Additionen und Subtractionen erfordert, ist besonders bequem für Seeleute, welche sich mit logarithmischen Rechnungen entweder nicht abgeben wollen oder können. M. s. Berl. Ephemeriden f. d. J. 1783

Nebst den vorhergehenden directen Auflösungen, welche immer die sichersten sind, hat man noch andere blofs genäherte gesucht, um die Berechnung der Gröfse δ so bequem als möglich zu machen. Ich werde zwey der vorzüglichsten hier mittheilen.

§. 7.

Sieht man die Dreyecke zwischen dem Zenith und dem wahren und scheinbaren Ort der Gestirne als geradlinicht an, und fällt man von δ auf δ' an der einen Seite, und von δ' auf δ an der andern Seite des Durchschnitts beyder Distanzen δ und δ' senkrechte Linien, so schneiden diese senkrechten Linien von δ und δ' auf der Seite des nächsten Gestirns Stücke ab, die als die Cosinus der Winkel an den Gestirnen selbst betrachtet werden können. Heifst also p der Winkel am Mond und q der Winkel an dem Stern oder der Sonne, der zwischen dem Vertikalkreise und der Distanz der Gestirne enthalten ist, so ist

$$\delta' - \delta = (H - H') \text{ Cos } p - (h' - h) \text{ Cos } q$$

und man hat

$$\text{Cos } p = \frac{\text{Sin } H'}{\text{Cos } h' \text{ Sin } \delta'} - \text{Tg } h' \text{ Cotg } \delta'$$

$$\text{Cos } q = \frac{\text{Sin } h'}{\text{Cos } H' \text{ Sin } \delta'} - \text{Tg } H' \text{ Cotg } \delta'$$

§. 8.

Setzt man der Kürze wegen

$$h' - h = d\,h$$

$$H - H' = d\,H \text{ und}$$

$$\delta - \delta' = d\,\delta$$

so ist

$$2\,\mathrm{Sin}^2\frac{\delta}{2} = 1 + \mathrm{Sin}\,\delta'\,\mathrm{Sin}\,d\delta - \mathrm{Cos}\,\delta + 2\,\mathrm{Cos}\,\delta'\,\mathrm{Sin}^2\frac{d\,\delta}{2}$$

Substituirt man diesen Ausdruck in der ersten der Gleichungen II., oder in

$$\mathrm{Sin}^2\frac{\delta}{2} = \mathrm{Cos}^2\frac{H+h}{2} - m\,\mathrm{Cos}\frac{h'+H'+\delta'}{2}\,\mathrm{Cos}\frac{h'+H'-\delta'}{2}$$

so erhält man

$$d\delta = \frac{2\,\mathrm{Cos}^2\frac{H+h}{2}}{\mathrm{Sin}\,\delta\;\mathrm{Sin}\,1''} - \frac{2\,m}{\mathrm{Sin}\delta'\,\mathrm{Sin}\,1''}.\,\mathrm{Cos}\frac{h'+H'+\delta'}{2}\,\mathrm{Cos}\frac{h'+H'-\delta'}{2}$$

$$- \frac{(1-\mathrm{Cos}\,\delta)}{\mathrm{Sin}\delta\,\mathrm{Sin}\,1''} - \tfrac{1}{2}(d\,\delta)^2\,\mathrm{Sin}\,1''.\,\mathrm{Cotg}\,\delta'$$

Es ist aber

$$m = \frac{\mathrm{Cos}\,(H'+dH)\;\mathrm{Cos}\,(h'-dh)}{\mathrm{Cos}\,H'\;\mathrm{Cos}\,h'} =$$

$$1-(d\,H\,\mathrm{Tg}\,H' - d\,h\,\mathrm{Tg}\,h' + \tfrac{1}{2}(dH)^2\,\mathrm{Sin}\,1'' + \tfrac{1}{2}(dh)^2\,\mathrm{Sin}\,1'')\,\mathrm{Sin}\,1''$$

ferner ist

$$2\,\mathrm{Cos}^2\frac{H+h}{2} - 2\,\mathrm{Cos}\frac{h'+H'+\delta'}{2}\,\mathrm{Cos}\frac{h'+H'-\delta'}{2} - (1-\mathrm{Cos}\,\delta')$$

$$= 2\,\mathrm{Cos}^2\frac{H'+h'+d\,H-dh}{2} - 1 - \mathrm{Cos}\,(h'+H')$$

$$= 2\,\mathrm{Sin}\,(d\,h - d\,H).\,\mathrm{Sin}\left(H'+h'+\frac{dH-dh}{2}\right)$$

also ist auch die vorhergehende Gleichung

$$d\,\delta = \frac{(d\,h - d\,H)}{\mathrm{Sin}\,\delta'}\,\mathrm{Sin}\left(h'+H'+\frac{d\,H-d\,h}{2}\right)$$

$$+ 2\,\frac{\mathrm{Cos}\,M\,\mathrm{Cos}\,N}{\mathrm{Sin}\,\delta'}(dH\,\mathrm{Tg}H' - dh\,\mathrm{Tg}h' + (dH)^2\,\mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}'' + (dh)^2\,\mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}'')$$

$$- (d\,\delta)^2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}''.\,\mathrm{Cotg}\,\delta'$$

wo der Kürze wegen

$$M = \frac{h' + H' + \delta'}{2} \text{ und}$$

$$N = \frac{h' + H' - \delta'}{2}$$

gesetzt worden ist.

Um die letzte Gleichung noch weiter zu reduziren, sey p die Horizontalparallaxe und r die Refraction des Mondes, so ist

$$d\,H = p \operatorname{Cos}(H' - r) - r$$

Ferner ist nahe genug

$$r = 57'' \operatorname{Cotg}(H' + 3\,r)$$

$$= 57'' \operatorname{Cotg}(H' + 3\,(57) \operatorname{Cotg} H')$$

also ist auch, wenn man

$$\operatorname{Cos}(H' - r) = \operatorname{Cos} H' + r \operatorname{Sin} H' = \operatorname{Cos} H' + 57'' \operatorname{Cos} H'$$

setzt,

$$d\,H = p \operatorname{Cos} H' + 57 \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} H'$$

$$- 57 \frac{(\operatorname{Cotg} H' - \operatorname{Tg} 171'' \operatorname{Cotg} H')}{1 + \operatorname{Tg} 171''. \operatorname{Cotg}^2 H'}$$

woraus man erhält

$$d\,H. \operatorname{Tg} H' = p. (1 + \operatorname{Sin} 57'') \operatorname{Sin} H'$$

$$+ \frac{0''047253}{\operatorname{Sin}^2 H'} - 57''$$

und eben so, wenn π die Horizontalparallaxe des andern Gestirns ist,

$$d\,h \operatorname{Tg} h' = \pi\,(1 + \operatorname{Sin} 57'') \operatorname{Sin} h'$$

$$+ \frac{0.\,047253}{\operatorname{Sin}^2 h'} - 57''$$

Da aber die kleinste und gröſste Horizontalparallaxe des Mondes nahe 54 und 61 Minuten beträgt, so ist

$$54 \operatorname{Sin} 57 \text{ oder } 61 \operatorname{Sin} 57$$

nahe gleich 1″, und $\pi \operatorname{Sin} 57''$ noch viel kleiner, daher die obere gefundene Gleichung in folgende übergeht

$$d\,\delta = - \frac{(dH - dh)}{\operatorname{Sin} \delta'} \operatorname{Sin}(H' + h' + \tfrac{1}{2}(dH - dh))$$

$$+ \frac{2 \operatorname{Cos} M \operatorname{Cos} N}{\operatorname{Sin} \delta'} \Big((p + 1'') \operatorname{Sin} H' + \pi \operatorname{Sin} h' - 114''\Big)$$

$$+\frac{2\,\mathrm{Cos}\,M\,\mathrm{Cos}\,N}{\mathrm{Sin}\,\delta'}\left(dH^2\,\mathrm{Tg}\tfrac{1}{2}''+dh^2\,\mathrm{Tg}\tfrac{1}{2}''+0.047273\left(\frac{1}{\mathrm{Sin}^2 H'}+\frac{1}{\mathrm{Sin}^2 h'}\right)\right)$$

$$-(d\,\delta)^2\ \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}''\ \mathrm{Cotg}\,\delta'$$

wo man in dem letzten Gliede für $d\,\delta$ den aus dem vorhergehenden Gliedern schon beynahe bekannten Werth dieser Gröſse setzen kann.

Ist endlich H' und h' nicht zu klein, oder wenigstens gröſser als 10 Grade, so kann man statt der letzten Gleichung in den meisten Fällen abkürzend folgende setzen

$$d\,\delta = -\frac{(dH-dh)}{\mathrm{Sin}\,\delta'}\ \mathrm{Sin}\,(H'+h'+\tfrac{1}{2}(dH-dh))$$

$$+2\,\frac{\mathrm{Cos}\,M\,\mathrm{Cos}\,N}{\mathrm{Sin}\,\delta'}\ (p\,\mathrm{Sin}\,H'+dH^2\,\mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}''-114'')$$

Zwey kleine Tafeln, deren die erste mit dem Argumente $d\,H$ und $d\,h$ die Gröſsen $d\,H^2\ \mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}''$ und $d\,h^2\ \mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}''$, und deren die zweyte mit dem Argumente H' und h' die Gröſsen

$$\frac{0.047253}{\mathrm{Sin}^2 H'}\ \text{und}\ \frac{0.047253}{\mathrm{Sin}^2 h'}$$

gibt, werden die Berechnung ungemein erleichtern.

Ex. 1792 den 9. September war in Seeberg um $20^h\,3'\,29''.\,2$ wahre Zeit (Morgens)

beob. Entfernung der Ränder der ☉ und d. ☾ $= a = 67°\ 36'\ 50''$

beob. Höhe des obern Randes der ☉ - - - - - $b = 22\ \ 58\ 34.\ 4$

- - - - - - - - - - - - - - - - des ☾ - - - - - $c = 55\ \ 58\ 54.\ 0$

Für diese Zeit der Beobachtung ist

Horiz. Parallaxe des Mondes für Seeberg $p = 54'\ 10''\ 6$

der Sonne $\pi = 7''\ 8$

Horiz. Halbmesser ☾ - - $R = 14'\ 38''\ 0$

Horiz. Halbmesser ☉ - - $r = 15\ 57.\ 4$

also Höhenparallaxe des ☾ $= p' = p\ \mathrm{Cos}\ c = 30'\ 30''\ 3$

vergröſs. Halbm. ☾ $= R' = R\,(1+p\,\mathrm{Sin}\,c+p^2\,\mathrm{Sin}^2\,c) = 15'\ 0''\ 0$

daher ist

$$\delta = a + r + R' = 68°\ 7'\ 47''\ 4$$

$$h' = b - r = \quad 22\ 42\ 37.\ 0$$

$$h = h' - \text{Refr.} + \text{Parall.} = 22\ \ 40\ \ 29.\ 2$$

$$H' = c - R' = 55^\circ\ 43'\ 54''.\ 0$$

$$H = H' - \text{Refr.} + p' = 56\ 13\ 45.\ 4$$

Mit diesen fünf Gröfsen findet man aus den ersten der in §. 6. gegebenen fünf Auflösungen

$$\log m = 9.\ 9955246$$

$$\log \text{Cos}\ \frac{H' + h' + \delta'}{2}\ \text{Cos}\ \frac{H' + h' - \delta'}{2} = 9.4570226$$

$$A = 43^\circ\ 31'\ 55''\ 3$$

$$\delta = 68^\circ\ 5'\ 11''\ 0$$

Berechnet man dasselbe Beyspiel nach der letzten in diesem §. gegebenen Auflösung, so ist

$$d\,H = p' - \text{Refr.} = 29'\ 51''\ 4$$

$$d\,h = \text{Refr.} - \pi = 2'\ 7''\ 8$$

$(p + 1)$ Sin $H' = (54'\ 11''\ 6)$ Sin $55^\circ\ 43'\ 54'' = 44'\ 47''\ 1$

π Sin H' - - - - - - - - - - -	6. 5
Arg d H'	7. 8
Arg d H	0. 1
Arg H'	0. 1
Arg h'	0. 3
$45'\ 1''\ 9 =$	$2701''\ 9$
	114. 0
$f =$	$2587''.\ 9$

$\log 2f = 3.7139775$

$\log \text{Cos}\,M\ \text{Cos}\,N = 9.4570226$ $\quad$ $\log(dH - dh) = 3.2210489$

$\log \text{Cos}\,p\ \text{Sin}\,\delta' = 0.0324378$ $\quad$ $\log \text{Sin}\frac{(H' + h' + dH - dh)}{2} = 9.9907411$

3.2034379 $\quad$ 0.0324378

$\quad$ 3.2442278

Zahl $= 1597''\ 5$ $\quad$ Zahl $= 1754.\ 8$

$\quad$ $1597.\ 5$

$$d\,\delta = -157''\ 3 = -2'\ 37''\ 3$$

$$\delta = 68\ 7\ 47.\ 4$$

$$\delta = 68^\circ 5'\ 10''\ 1$$

Aus den Ephemeriden oder aus den Sonnen- und Mondstafeln findet man aber

wahre Zeit Paris	wahre Entfg. der Mittelpunkte der ☉ und des ☾
$18^h\ 0'$	$68°\ 45'\ 50''$
$21\ \ 0$	$67\ \ 24\ \ 28$
3	$1\ \ 21\ \ 22$

Daher ist

$$x = \frac{(0°\ 40'\ 39'')\ 3^h}{1°\ 21'\ 22''} = 1^h\ 29'\ 55''\ 6$$

$$\begin{array}{l} 18 \\ \hline 19\ \ 29\ \ 55.\ 6 \\ 20\ \ 3\ \ 29.\ 2 \text{ wah. Seeb. Zeit} \\ \hline 0^h\ 33'\ 33''\ 6 \end{array}$$

Meridiandifferenz zwischen Paris und Seeberg.

Um endlich die wahre Entfernung $\triangle$ der Mittelpunkte zweyer Gestirne für eine gegebene Zeit aus den Tafeln zu finden, sey l, p die Länge und Entfernung von dem Pol der Ekliptik für das eine, und l′, p′ für das andere Gestirn, so ist

$$\text{Cos}\ \triangle = \text{Cos}\ (l - l')\ \text{Sin}\ p\ \text{Sin}\ p' + \text{Cos}\ p\ \text{Cos}\ p'$$

oder

$$\text{Sin}^2\ \tfrac{1}{2}\triangle = \text{Sin}^2 \frac{p-p'}{2} - \text{Cos}^2 \frac{l-l'}{2}\ \text{Sin}\ p\ \text{Sin}\ p'$$

Setzt man also

$$\text{Sin}\ A = \text{Sin}\ \frac{p+p'}{2}$$

$$\text{Sin}\ B = \text{Cos}\ \frac{l-l'}{2}\cdot \sqrt{\text{Sin}\ p\ \text{Sin}\ p'}$$

so ist

$$\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\triangle = \sqrt{\text{Sin}(A+B)\ \text{Sin}\ (A-B)}$$

Diese Methode fordert also eigentlich drey Beobachter, deren einer die Distanz, und die beyden andern die Höhen beyder Gestirne zu gleicher Zeit messen. Da dies beschwerlich, und wegen den gleichzeitigen Beobachtungen auch nicht gut ausführbar ist, so pflegt man zuerst einige Höhen beyder Gestirne, dann einige Distanzen, und endlich wieder einige Höhen der beyden Gestirne zu messen: und wenn alle Beobachtungen in einer kleinen Zwischenzeit statt hatten, so kann man annehmen, dafs die Höhen sowohl, als die Distanzen sich den Zeiten proportional ändern, und man wird durch eine einfache Proportion aus den dreyerley Gattungen Beobachtungen drey gleichzeitige ableiten. Auch kann man blofs die Distanzen beobachten, und die Höhen beyder Gestirne, für die Beobachtungszeit der Distanzen durch eine leichte Rechnung finden. Ist nämlich φ die Polhöhe, s δ h der Stundenwinkel, die Declination und die wahre Höhe des Mittelpunkts, so ist

$$\text{Tg } A = \text{Cos } s \text{ Tg } \varphi$$

$$\text{Sin } h = \frac{\text{Sin } \varphi}{\text{Cos } A} \text{ Sin } (A + \delta)$$

In dem vorhergehenden Beyspiele ist für

$8^h\ 3'\ 29''\ 2$ wahre Zeit Seeberg

die AR ☉ = 169° 9′ 15″ Decl. + 4° 40′ 15″
AR ☾ = 100 40 30 - - + 17 59 50

68 28 45

wahre Zeit ($12^h - 8^h\ 3'\ 29''\ 2$) in Graden 59° 7′ 42″
68 28 45

Stundenwinkel des Mondes 9° 21′ 3″ = s

$\varphi = 50^\circ\ 56'\ 17''$

also ist für die Sonne

$$A = 22^\circ\ 36'\ 30''$$
$$h = 22^\circ\ 40'\ 29''$$
$$h' = h - \text{Parall.} + \text{Refr.} = 22^\circ\ 42'\ 37''$$

und eben so für den Mond

$$A = 38^\circ\ 41'\ 15'',$$
$$H = 56^\circ\ 13'\ 46''$$
$$H' = H - \text{Parall.} + \text{Refr.} = 55^\circ\ 43'\ 54''$$

wo die Höhenparallaxe des Mondes

$$p' = \frac{p \text{ Cos } H}{1 - p \text{ Sin } H} = 30'\ 31''$$

vorausgesetzt ist.

Wie man bey diesen Berechnungen auf die Erhöhung des Beobachters über dem Meere Rücksicht nimmt, s. m. Berl. Jahrb. 1813. p. 200.

Einige Astronomen haben bey diesen Rechnungen auch auf die abgeplattete Gestalt der Erde Rücksicht genommen, was wohl für die Ausübung keinen Nutzen haben kann, da diese Methode ohnehin nicht die gröſste Schärfe gewährt, und die Fehler der Beobachtung sowohl, als die der Mondstafeln noch zu beträchtlich sind, als daſs dagegen die Verbesserungen wegen der Abplattung der Erde noch in Betrachtung gezogen werden können. Über den Grad der Sicherheit dieser Methode vid. Monatl. Corresp. 1805 September. Wie man auf Reisen mit Hilfe eines Sextanten am kürzesten Zeit, Breite und Länge bestimmen kann, sehe man Mon. Corr. 1806 Januar.

§. 9.

Wir wenden uns jetzt zu andern Beobachtungen, und wählen unter diesen zuerst die Bestimmung des Azimuts eines terrestrischen Gegenstandes. Schon im vorhergehenden Kapitel wurde gezeigt, wie man aus zwey beobachteten Distanzen eines irdischen Gegenstandes von einem bekannten Gestirne die Stundenwinkel sowohl, als die Declination des ersteren finden kann, und daraus wird man dann leicht durch die bekannten Ausdrücke der sphärischen Trigonometrie auch die Höhe und das Azimut des terrestrischen Gegenstandes ableiten. Es gibt aber noch eine andere einfachere Methode, das Azimut eines solchen Objectes durch Beobachtungen unmittelbar zu finden.

Ist φ die Polhöhe, δ die Declination und t der bekannte Stundenwinkel der Sonne; so findet man die Höhe h und das Azimut ω der Sonne durch folgende Gleichungen.

$$\mathrm{Tg}\, M = \mathrm{Cos}\, t.\ \mathrm{Cotg}\, \varphi$$

$$\mathrm{Sin}\, h = \frac{\mathrm{Sin}\, \varphi}{\mathrm{Cos}\, M}.\ \mathrm{Sin}\, (M + \delta)$$

$$\mathrm{Sin}\, \omega = \frac{\mathrm{Sin}\, t.\ \mathrm{Cos}\, \delta}{\mathrm{Cos}\, h}$$

oder

$$\mathrm{Tg}\, N = \frac{\mathrm{Tg}\, \delta}{\mathrm{Cos}\, t}$$

$$\mathrm{Tg}\, \omega = \frac{\mathrm{Cos}\, N \cdot \mathrm{Tg}\, t}{\mathrm{Sin}\, (\varphi - N)}$$

$$\mathrm{Cos}\, h = \frac{\mathrm{Cos}\, \delta\ \mathrm{Sin}\, t}{\mathrm{Sin}\, \omega}$$

Aus dieser berechneten wahren Sonnenhöhe h findet man die scheinbare

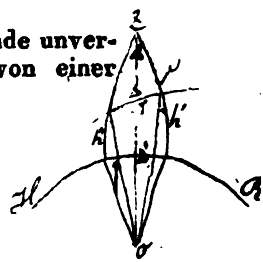
$$h' = h + \text{Refr.} - \text{Höhenparallaxe},$$

wo die Refr. für die anfangs gesuchte genäherte Höhe h' (nicht für h) genommen werden muſs.

Heiſst dann h'' die beobachtete Höhe des terrestrischen Objectes (steht dieses unter dem Horizont, so ist h'' negativ) und Δ die beobachtete Distanz der Sonne von dem Objecte, so findet man die auf den Horizont reduzirte Distanz Δ' der Sonne von dem Objecte durch folgenden Ausdruck

$$\text{Sin}^2 \frac{\Delta'}{2} = \frac{\text{Sin}\,\frac{\Delta + h' - h''}{2}\,\text{Sin}\,\frac{\Delta - h' + h''}{2}}{\text{Cos}\,h'\,\text{Cos}\,h''}$$

Ist $\frac{\Delta'}{2}$ nahe an 90, so wird man besser den ähnlichen Ausdruck für $\text{Cos}^2 \frac{\Delta'}{2}$ wählen; und dann ist das gesuchte Azimut ω' des irdischen Objectes gleich der Summe oder Differenz der Gröſsen ω und Δ'



Ex. Auf der Sternwarte von Hyeres wurden folgende unverbesserte Abstände des entfernteren Sonnenrandes von einer Thurmspitze genommen.

Uhrzeit 5^h 36'	48'' 0	- - Distanz	78°	49'	40''
37	30. 5		78	56	50''
38	11. 5		79	3	50''

Die Correction der Uhr gegen wahre Zeit ist — 19' 21'' 4, der Collimationsfehler des Instruments — 5' 30'', der Halbmesser der Sonne 16' 7'' und die Höhe der Thurmspitze h'' = 1° 14' 0''.

Man hat daher

wahre Zeit 5^h 15'	26'' 6	- - Δ =	78°	28'	3''
18	9. 1			35	12
18	50. 1			42	12

Für die erste Beobachtung ist

$\delta = -3°\ 17'\ 16'$ — also hat man M = 11° 9' 11'' 9
$t = 79\ \ 21\ \ 42$ — Parallaxe 8'', Refraction 8' 57''. 5
$\varphi = 43\ \ 7\ \ 2$ — scheinb. Höhe $\odot$ = h' = 5° 37' 3'' 8.
$\Delta = 78\ \ 28\ \ 3$ — ω = 80° 17' 36'' 4
Δ' = 78° 33' 3'' 4

ω' = 1° 44' 33'' 0 Azimut des terrestrischen Objectes.

I. Die Bestimmung des Azimuts ω' hängt vorzüglich von der Zeitbestimmung ab, und da, wie man leicht sieht, in unsrer Breite ein Fehler von einer Zeitsecunde in der Uhr schon einen Fehler von nahe 10 Raumsecunden im Azimut hervorbringt, so muſs man für die Zeitbestimmung eine vorzügliche Sorge tragen. — Wenn man das Azimut eines Objectes mit der gröſsten Schärfe verlangt, so wird man, statt den Sextanten, die zu dieser Absicht genaueren Theodoliten und die Multiplicationskreise wählen, wenn diese letzten einen gröſseren Horizantalkreis haben, und mit diesen Instrumenten unmittelbar die Azimutaldistanz Δ' des Objectes von der Sonne messen, und aus der gegebenen Beobachtungszeit das Azimut ω der Sonne durch Rechnung ableiten, wo dann, wie zuvor, die Summe oder Differenz der Gröſsen Δ', ω das gesuchte Azimut des Objectes ist. Hat man mehr solcher Distanzen Δ' nach einander gemessen, oder multiplicirt der Theodolit, so kann man mit ihnen auf eine ähnliche Art verfahren, wie oben bey den Circummeridianhöhen gezeigt worden ist.

Sey t der Stundenwinkel, der zu dem Azimut ω gehört, so gehört für den Stundenwinkel $t + \vartheta$ das Azimut $\omega + \Delta\omega$, wo man hat

$$\Delta\omega = \vartheta . \frac{d\omega}{dt} + \frac{\vartheta^2}{1.2} . \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{\vartheta^3}{1.2.3} . \frac{d^3\omega}{dt^3} + \ldots$$

Ist n die Anzahl der Beobachtungen, so ist das Mittel aller Azimute, welche zu den Stundenwinkeln

$$t + \vartheta,\ t + \vartheta',\ t + \vartheta'' \ldots$$

gehört, gleich

$$\omega = \frac{\vartheta + \vartheta' + \vartheta'' + }{n} . \frac{d\omega}{dt} + \frac{\vartheta^2 + \vartheta'^2 + \vartheta''^2 +}{1.\ 2.\ n} . \frac{d^2\omega}{dt^2} + \ldots$$

Nimmt man aber auch für t den Stundenwinkel, der für die Mitte der Beobachtungszeiten gehört, so ist

$$\vartheta + \vartheta' + \vartheta'' + = 0,$$

also hat man, wenn man das vierte und die folgenden Glieder der letzten Reihe wegläſst

$$\Delta\omega = \frac{d^2\omega}{ndt^2} . \Sigma \frac{\vartheta^2}{2}$$

Behält man die vorigen Bezeichnungen bey, so ist

$$\text{Cotg}\ \omega = \frac{\text{Sin}\ \varphi\ \text{Cos}\ t - \text{Cos}\ \varphi\ \text{Tg}\ \delta}{\text{Sin}\ t}$$

also auch

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\text{Sin}\ \varphi - \text{Sin}\ \delta\ \text{Sin}\ h}{\text{Cos}^2\ h} \text{ und}$$

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \left(\frac{2\,\mathrm{Sin}\,h\,(\mathrm{Sin}\,\varphi - \mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,h)}{\mathrm{Cos}^3\,h} - \frac{\mathrm{Sin}\,\delta}{\mathrm{Cos}\,h}\right)\frac{dh}{dt}$$

Aber es ist

$$\mathrm{Sin}\,h = \mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\delta + \mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,t,$$

also auch

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,t}{\mathrm{Cosh}}$$

und daher

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} =$$

$$\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,t}{2\,\mathrm{Cos}^2\,h}\left((\mathrm{Sin}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,\delta)\,\mathrm{Tg}^2\,\tfrac{1}{2}z - (\mathrm{Sin}\varphi - \mathrm{Sin}\,\delta)\,\mathrm{Cotg}^2\,\tfrac{1}{2}z\right)$$

wo $z = 90 - h$

Nennt man also diese Gröſse

$\frac{d^2\omega}{dt^2} = M$, so ist

$$\Delta\,\omega = \frac{M}{n}\,\Sigma\,\frac{2\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\vartheta}{\mathrm{Sin}\,1''}$$

und man wird die Gröſsen

$$\frac{2\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\vartheta}{\mathrm{Sin}\,1''},\ \frac{2\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\vartheta'}{\mathrm{Sin}\,1''}\ \ldots$$

aus derselben Tafel nehmen, die wir schon oben für die Circummeridianhöhen gebraucht haben. Auf diese Weise wird die Berechnung des Azimutes eben so sicher, als einfach, da hier die Reduction der beobachteten Distanz auf den Horizont, so wie alle Rücksicht auf Refraction etc. gänzlich wegfällt. Ein Beyspiel wird den Gebrauch der vorhergehenden Ausdrücke deutlich machen.

Den 22. Junius 1816 Abends wurde die Alhidade des Horizontalkreises des Instruments nach und nach auf verschiedene Grade dieses Kreises gestellt: und die Zeit der Uhr bemerkt, in welcher der Rand der Sonne den vertikalen Faden des Fernrohres berührte. Man fand so

Uhrzeit.	Horiz. Kreis
$12^h\,40'\,31''\,4$ - - - - - -	180°. 00
43 16. 2	108. 45
46 0. 5	108. 90

Uhrzeit.	Horiz. Kreis
48′ 43″ 7	109° 35
51 27. 7	109. 25
54 8. 6	110. 25
56 51. 3	110. 70
59 33. 3	111. 15
13ʰ 2 15. 2	111. 60
4 55. 5	112. 0.5
Mittel 12ʰ 52′ 46″ 3	110. 025

Vor und nach diesen Beobachtungen wurde auch der vertikale Faden auf die Spitze eines Thurms gebracht, wobey der Horizontalkreis 115°. 7292 zeigte, also ist der horizontale Abstand des Thurms von der Sonne im Mittel aus allen 10 Beobachtungen

$$5^\circ\ 7040 = 5^\circ\ 42'\ 15''\ 1 = \Delta'$$

um die Uhrzeit

$$12^h\ 52'\ 46''.\ 3 = T.$$

Die Uhr, welche nahe nach Sternzeit ging, gab im wahren Mittag

den 22. Juni $6^h\ 7'\ 0''\ 4$

und den 23. Juni $6^h\ 11'\ 12''\ 4$

also ist $T - 6^h\ 7'\ 0''\ 4 = 6^h\ 45'\ 45''.\ 9$

die genäherte wahre Zeit der Beobachtung, und da die Uhr in einem Tag $24^h\ 4'\ 12''\ 0 = 24^h\ 07$ gab, so ist die corrigirte wahre Zeit der Beobachtung

$$\frac{24}{24.07}\,(6^h\ 45'\ 45''\ 9)$$

$$= 6^h\ 44'\ 35''\ 1$$

$$= 101^\circ\ 8'\ 46''\ 5 = t$$

für diese Zeit ist $\delta = 23^\circ\ 27'\ 35''\ 9$

und endlich die Polhöhe $\varphi = 45^\circ\ 28'\ 0''\ 7$

Halbmesser der Sonne $r = 15'\ 45''.\ 75$

Die Differenz der Beobachtungszeiten von T gibt die Winkel $\vartheta\ 3'\ 3''$ in Sternzeit, aus welchen man mittels der oben erwähnten Tafel die Werthe von

$$\frac{2\ \mathrm{Sin}^2\ \frac{1}{2}\vartheta}{\mathrm{Sin}\ 1''}\ \text{findet},$$

ϑ' Sternzeit	ϑ mittl. Zeit	$\dfrac{2\,\mathrm{Sin}^2\frac{\vartheta}{2}}{\mathrm{Sin}\,1''}$
— 12′ 14″9	— 12′ 12″9	292″.9
— 9 30. 1	— 9 28. 5	176. 2
— 6 45. 8	— 6 44. 7	89. 3
— 4 2. 6	— 4 1. 9	31. 9
— 1 18. 6	— 1 18. 4	3. 3
1 22. 3	1 22. 1	3. 7
4 5. 0	4 4. 3	32. 6
6 47. 0	6 45. 9	89. 9
9 28. 9	9 27. 3	175. 5
12 9. 2	12 7. 2	288. 3

$$\Sigma\,\frac{2\,\mathrm{Sin}^2\frac{\vartheta}{2}}{\mathrm{Sin}\,1''} = 1183.\ 6$$

$$\log \frac{M}{10} = 8.08012$$

$$\log \Sigma\,\frac{2\,\mathrm{Sin}^2\frac{\vartheta}{2}}{\mathrm{Sin}\,1''} = 3.07320$$

$$\mathrm{Log}\ \Delta\,\omega = 1.15332$$

Aus δ, t, φ findet man nach den oben gegebenen Ausdrücken

$$N = -\ 65^\circ\ 59'\ 22''.\ 4$$

$$\omega = 114^\circ\ 15'\ 34''\ 2, \text{ und}$$

$$\log \mathrm{Cos}\ h = 9.\ 99441$$

Da der nächste Sonnenrand, nicht der Mittelpunkt der Sonne, beobachtet wurde, so wird man zu ω noch addiren

$$\frac{r}{\mathrm{Cos}\,h} = 15'\ 58''\ 0$$

Es ist daher

$$\begin{aligned} \omega &= 114^\circ\ 15'\ 34''\ 2 \\ \Delta' &= 5\ 42\ 15.\ 1 \\ \Delta\omega &= 14.\ 2 \\ \frac{r}{\mathrm{Cos}\,h} &= 15\ 58.\ 0 \end{aligned}$$

Azimut des Thurms $=$ 120 14 1. 5

II. Statt der Sonne kann man auch vortheilhaft den Polarstern oder einen andern dem Pole nahen Stern brauchen, wenn das terrestrische Object bey Nacht beleuchtet wird, daher man zu dem letzten gewöhnlich eine Argandische Lampe mit einem parabolischen Reverber wählt, welche auch auf grofse Distanzen noch gut sichtbar ist. Wählt man die Zeiten um die gröfste Digression des Polarsterns, und heifst t, ω der Stundenwinkel und das Azimut des Sterns im Augenblicke dieser gröfsten Digression, so ist in dem rechtwinklichten Dreyecke zwischen Stern, Pol und Zenith

$$\text{Sin}\,\varphi = \text{Sin}\,\delta\ \text{Sin}\,h,$$

$$\text{Sin}\,\omega = \frac{\text{Cos}\,\delta}{\text{Cos}\,\varphi},$$

$$\text{Sin}\,t = \frac{\text{Cos}\,h}{\text{Cos}\,\varphi}$$

Substituirt man diese Werthe in I. so findet man

$$\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

$$\frac{dh}{dt} = -\text{Cos}\,\delta, \text{ also}$$

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = -\frac{\text{Sin}\,\omega\ \text{Sin}\,\delta}{\text{Sin}\,t}$$

wenn man das Azimut von der Nordseite des Meridians zählt, also wieder

$$\Delta\omega = -\frac{\text{Sin}\,\omega\,\text{Sin}\,\delta}{n.\ \text{Sin}\,t} . \Sigma \frac{2\ \text{Sin}^2 \frac{1}{2} \vartheta}{\text{Sin}\,1''}$$

wo man ω und t aus den Gleichungen findet

$$\text{Sin}\,\omega = \frac{\text{Cos}\,\delta}{\text{Cos}\,\varphi},$$

$$\text{Cos}\,t = \text{Tg}\,\varphi\ \text{Cotg}\,\delta.$$

Den 1. Aprill 1817 in Mayland war in der Nähe der gröfsten westlichen Digression des Polarsterns

	Uhrzeit - - - - -	Horiz. Kreis
	$6^h\ 45'\ 28''$	$173^\circ\ 1033$
	50 48	173. 1042
	54 48	173. 1051
Mittel	$6^h\ 50'\ 21''7$	$173^\circ\ 1042$

und als der senkrechte Faden des Fernrohrs auf denselben Thurm (N I.) gerichtet wurde, zeigte der Horizontalkreis 115° 7147. Beyder Differenz ist daher $\Delta' = 57°. 3894$

Es ist aber scheinbare Rectascension des Polarsterns

$$\alpha = 0^h\ 55'\ 21''\ 1$$

$$\text{sch. Decl.}\ \delta = 88°\ 19'\ 56''\ 4$$

$$\text{und}\ \varphi = 45°\ 28'\ 0''\ 7,\ \text{also}$$

$$\omega = 2°\ 22'\ 41''\ 6$$

$$t = 88°\ 18'\ 15''\ 1 = 5^h\ 53'\ 13''\ 0$$

$$\alpha \pm t = 6^h\ 48'\ 34''\ 1 = \text{Sternz. d. gröfst. Digress. d. ob. Zeich. f. westl. Digression.}$$

$$-\ 2\ 27.\ 0 \quad \text{Correction der Uhr}$$

$$T = 6\ 51\ 1.\ 1 \quad \text{Uhrzeit der gröfst. Digression}$$

Die Differenz der beobachteten Uhrzeiten von T gibt die Werthe von $\vartheta\ \vartheta'\ \vartheta''$, also

ϑ	$\frac{2\,\text{Sin}^2 \frac{1}{2}\vartheta}{\text{Sin}\,1''}$
$-\ 5'\ 32''$	60. 1
$-\ 0\ \ 13$	0. 1
$+\ 3\ \ 47$	28. 1

$$\tfrac{1}{3}\,\Sigma\,\frac{2\,\text{Sin}^2\frac{\vartheta}{2}}{\text{Sin}\,1''} = 29.43,\ \log = 1.46879$$

$$\log\frac{\text{Sin}\,\omega\ \text{Sin}\,\delta}{\text{Sin}\,t} = 8.61801$$

$$\log\Delta\omega = 0.08680\ n$$

Man hat daher

$$\omega = 2°\ 22'\ 41''\ 6$$

$$\Delta = 57\ \ 23\ \ 21.\ 8$$

$$\Delta\omega = \quad -\ 1.\ 2$$

$$59\ \ 46\ \ 2.\ 2$$

$$180$$

$$120°\ 13'\ 57''8\ \text{Azimut des Thurms.}$$

III. Man kann über diesen Gegenstand nachsehen: Mon. Corresp. 1812 Juni, Götting. Comment. XI. Band, und Soldners neue Methode beobachtete Azimute zu reduziren. München 1813 und Berl. Jahrb. 1818. p. 123. Ueber den vortheilhaftesten Ort des gewählten Gestirns zur Bestimmung des Azimuts s. m. Zeitschrift f. Astronomie III. B. Seite 82 u. f.

Ist das Azimnt eines Objects genau bekannt, so ist auch dadurch die Richtung der Mittagslinie für den Beobachtungsort gegeben Man kann diese Richtung auch unmittelbar durch einen Theodoliten finden, wenn man vor und nach der Culmination der Sonne oder eines Sterns gleiche Höhen desselben beobachtet, wo die Mitte zwischen beyden Beobachtungen, oder die Mitte des von dem Fernrohr auf dem Horizontalkreis durchlaufenen Bogens diese Richtung der Mittagslinie gibt. Bey der Sonne muſs auf die Aenderung der Declination Rücksicht genommen werden. Das sicherste und bequemste Mittel zu diesem Zwecke gibt das Mittagsrohr unmittelbar. Aber auch mit bloſsen Sextanten kann man die Richtung der Mittagslinie auf viele Meilen sehr genau durch eine Methode bestimmen, welche Zach im III. Bande der monat. Corresp. bekannt gemacht hat. Da dieses Verfahren für die Ausübung sehr nützlich ist, so wollen wir es hier kurz anzeigen.

In einer willkührlichen Entfernung vom Beobachtungsort stelle man in der nur beynahe bekannten Richtung des Meridians einige Signale auf, und beobachte an jedem derselben vor und nach Mittag einige correspondirende Distanzen der Sonne von den Signalen. Die Mitte je zweyer zusammengehörenden Uhrzeiten gibt den unverbesserten Mittag, welcher wegen der Aenderung der Declination der Sonne, wie die correspondirenden Sonnenhöhen, verbessert werden muſs. Ist φ die Polhöhe, δ die Declination, t die halbe Zwischenzeit, und $d\delta$ die Aenderung der Declination in der Zeit t, endlich h die Höhe des Signals, so ist die Verbesserung des Mittags (Cap. VII. §. 2.)

$$\frac{d\delta}{15}\left(\frac{\operatorname{Cotg}(\varphi+h)}{\operatorname{Sin} t} - \operatorname{Tg}\delta \operatorname{Cotg} t\right)$$

An demselben Tage beobachte man auch correspondirende Höhen der Sonne, woraus man den verbesserten wahren Mittag erhält. Es ist klar, daſs der Mittag des Signals nur dann mit diesem wahren Mittage der correspondirenden Höhen übereinstimmen wird, wenn das Signal im Meridian steht, und daſs jener Mittag des Signals früher fallen wird, wenn das Signal östlich vom Meridian liegt und umgekehrt. Aus diesen Unterschieden der Mittage und den bekannten Entfernungen der Signale unter einander wird man dann leicht den Punkt bestimmen, in welchem diese Signale aufgestellt werden sollen, damit sie in der Ebene des Meridians stehen. So fand Zach den 7. April 1801 in Seeberg

	unverb. Mittag	Correction	verb. Mittag
I. Signal	$11^h\ 55'\ 34''\ 92$	+ 17. 39	$11^h\ 55'\ 52''\ 31$
II. - - -	11 56 1. 25	+ 17. 39	11 56 18. 64
III. - - -	11 56 31. 18	+ 17. 39	11 56 48. 57

Aus correspondirenden Sonnenhöhen aber fand sich der verbesserte wahre Mittag

$11^h\ 56'\ 52''\ 20$

also das dritte Signal am wenigsten, 3''. 63 vom Meridian auf der Ostseite desselben entfernt. Es war aber das erste Signal von dem dritten um 68. 6 Zolle, und das zweyte von dem dritten 36. 5 Zolle entfernt, die Mittage des ersten und dritten Signals aber sind 56. 26 und die des zweyten und dritten 29''. 93 untereinander verschieden. Ist also x die Entfernung des dritten Signals vom Meridian, so ist aus dem ersten und dritten

$$x = 3.63\ \frac{(68.\ 6)}{56.\ 26} = 4.426$$

und aus dem zweyten und dritten

$$x = 3.63\ \frac{(36.\ 5)}{29.\ 93} = 4.427$$

Im Mittel aus beyden Bestimmungen ist daher das dritte Signal

4. 4265 Zolle

östlich vom Meridian, und um so viel muſs es westlich gerückt werden, um in die Mittaglinie des Beobachtungsorts zu kommen. M. s. Monatl. Corresp. 1801. Aprill, May und August und 1803 Juni.

§. 10.

Eine der wichtigsten Beobachtungen der practischen Astronomie ist die der Rectascension irgend eines ersten Gestirns, aus welcher man dann durch bloſse Differenzen der Rectascensionen die geraden Aufsteigungen aller anderen Gestirne leicht ableiten kann.

I. Die absolute Rectascension der Sonne könnte man so finden.

Es sey δ die beobachtete Declination der Sonne einige Zeit nach dem Frühlingsäquinoctium, und δ' die Declination einige Zeit vor dem Herbstäquinoctium. Hat man an beyden Tagen die Differenz der Rectascension der Sonne mit demselben Fixstern, dessen Rectascension selbst unbekannt ist, beobachtet, so gibt der Unterschied dieser Differenzen, wenn auf Präcession, Nutation und Aberration gehörig Rücksicht genommen wird, die Bewegung a der Sonne in Rectascension während der Zwischenzeit zwischen beyden Beobachtungen.

Nennt mann nun die unbekannte Rectascension der Sonne selbst in der ersten Beobachtung α und in der zweyten $180 - \beta$, so ist, wenn e die Schiefe der Ecliptik bezeichnet,

$\alpha + \alpha + \beta = 180^\circ$

$\alpha = 180 - (\beta + \alpha)$

$$\text{Sin}\ \alpha\ \text{Tg}\ e = \text{Tg}\ \delta$$

$$\text{Sin}\ \beta\ \text{Tg}\ e = \text{Tg}\ \delta'$$

also

$$\text{Sin}\ \alpha : \text{Sin}\ \beta = \text{Tg}\ \delta : \text{Tg}\ \delta',$$

woraus folgt

$$\text{Tg}\ \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\text{Sin}\ (\delta - \delta')}{\text{Sin}\ (\delta + \delta')}\ \text{Cotg}\ \frac{a}{2}$$

Addirt man den so gefundenen Bogen

$$\frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{zu} \quad \frac{\alpha + \beta}{2} = 90 - \frac{a}{2},$$

so hat man α oder die erste Rectascension, und addirt man

$$\frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{zu}\ 180 - \frac{(\alpha + \beta)}{2} = 90 + \frac{a}{2},$$

so hat man $180 - \beta$ oder die zweyte Rectascension der Sonne; und da man an beyden Tagen die Differenz der Sonne und jenes Fixsterns beobachtet hat, so kennt man auch die Rectascension des Fixsterns. M. s. Berl. Jahrb. 1791. p. 203.

Diese Methode hängt, wie man sieht, von der Polhöhe, und der Schiefe der Ekliptik ab, so, dafs unrichtige Annahmen dieser beyden vorauszusetzenden Gröfsen, so wie die unmittelbaren Beobachtungs-Fehler selbst, oft nachtheiligen Einflufs auf die zu findenden Resultate haben werden. Der Fehler der Schiefe der Ekliptik läfst sich gröfstentheils dadurch vermeiden, wenn man die Beobachtungen nahe bey den Nachtgleichen und in fast gleichen Entfernungen von ihnen nimmt.

II. Da die Bestimmung einer ersten absoluten Rectascension von der gröfsten Wichtigkeit ist, und gleichsam die Basis der gesammten beobachtenden Astronomie macht, so wird es nöthig seyn, hier die vorzüglichste Methode, zu diesem Zwecke zu gelangen, umständlich vorzutragen.

Das erste Geschäft wird die Bestimmung der blofsen **Differenzen** der Rectascensionen mehrerer Fixsterne seyn. Zu diesem Zwecke beobachtet man so oft als möglich ihre Culminationen am Mittagsrohr. Nimmt man nun einen dieser Sterne in seiner Rectascension (aus guten Beobachtungen anderer Astronomen) als vorläufig gegeben an, so wird dadurch auch die Rectascension aller übrigen bestimmt, aber alle diese Rectascensionen werden mit einem gemeinschaftlichen Fehler, nämlich dem jenes ersten Fundamentalsterns, behaftet seyn, ihre Ascensional-Differenzen aber werden, aus den vorhergehenden Beobachtungen am Mittagsrohr, als fehlerfrey vorausgesetzt. Wir wollen diesen gemeinschaftlichen Fehler der Rectascension unsers Sternkatalogs mit d A bezeichnen.

Jeder Tag, an welchem die Sonne und einer oder mehrere jener Sterne am Mittagsrohr beobachtet ist, gibt die Differenz der Rectascension der Sonne und des Sterns, und wenn man die Rectascension des Sterns aus jenem Cataloge nimmt, die Rectascension der Sonne, welche wir α nennen wollen, und die also ebenfalls mit jenem gemeinschaftlichen Fehler des Catalogs behaftet seyn wird. Aus dieser Rectascension α und der scheinbaren Schiefe e der Ekliptik findet man die Declination δ' der Sonne durch die Gleichung

$$\text{Tg}\,\delta' = \text{Sin}\,\alpha\,\text{Tg}\,e$$

oder genauer, wenn man auf die Breite B der Sonne Rücksicht nimmt

$$\delta = \delta' + B\,\frac{\text{Cos}\,e}{\text{Cos}\,\delta}$$

wo δ' aus der vorhergehenden Gleichung gefunden wird. Ist aber φ die Polhöhe des Beobachtungsortes, so findet man aus dem so eben bestimmten δ die wahre Zenithdistanz z der Sonne

$$z = \varphi - \delta$$

Da aber in dem Vorhergehenden α um die Gröſse d A fehlerhaft ist, und da auch die Polhöhe φ und die Schiefe e um die Gröſsen d φ, d e fehlerhaft seyn kann, so wird man statt der letzten Gleichung, wie man leicht findet, eigentlich folgende haben

$$z = \varphi - \delta + d\varphi - d\,e.\,\frac{\text{Sin}\,2\,\delta}{\text{Sin}\,2\,e} - d\,A.\,\frac{\text{Sin}\,2\,\delta}{2\,\text{Tg}\,\alpha}$$

Hat man aber an denselben Tagen auch die Zenithdistanz z' der Sonne am Kreise unmittelbar beobachtet, so muſs $z = z'$ seyn, d. h. man hat die Gleichung

$$0 = z' - (\varphi - \delta) - d\varphi + d\,e.\,\frac{\text{Sin}\,2\,\delta}{\text{Sin}\,2\,e} + d\,A.\,\frac{\text{Sin}\,2\,\delta}{2\,\text{Tg}\,\alpha}$$

Man erhält also so viele Bedingungsgleichnngen der letzten Form, als man Tage hat, an welchen man die Sonne am Kreise und Sonne und Fixsterne am Mittagsrohr beobachtet hat. Behandelt man dann alle diese Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, welche weiter unten erklärt werden wird, so wird man die wahrscheinlichsten Werthe von d φ, d e und d A erhalten, d. h. man wird erstens eine Prüfung der oben vorausgesetzten Polhöhe, zweytens eine Prüfung der vorausgesetzten Schiefe der Ekliptik, und endlich den gesuchten Fehler d A der Rectascensionen erhalten, der allen Sternen des obigen Cataloges zu Grunde liegt.

Das ganze Verfahren reduzirt sich demnach auf Folgendes. Jeden Tag, an welchem einer der Sterne jenes Cataloges, oder der gröfseren Sicherheit wegen mehrere derselben, zugleich mit der Sonne am Mittagsrohr, und überdiefs die Sonne am Kreise beobachtet wurde, leitet man zuerst aus den Beobachtungen am Mittagsrohr die Rectascension der Sonne, und daraus durch Rechnung die Zenithdistanz der Sonne ab, und diese mit der durch den Kreis erhaltenen Zenithdistanz der Sonne verglichen, gibt die gesuchte Bedingungsgleichung dieses Tages.

Man kann aber auch umgekehrt aus den Beobachtungen am Kreise die Rectascension der Sonne durch Rechnung herleiten, und mittels dieser aus den Beobachtungen am Mittagsröhre die Rectascension des Sterns finden, und dann wird man, wenn man alle Correctionen berücksichtiget, so verfahren.

Aus der am Kreise beobachteten Zenithdistanz z der Sonne suche man (mit einer hypothetischen Polhöhe φ Refraction r und Horizontalparallaxe π der Sonne) die Declination der Sonne

$$\text{Decl.} = \text{Polh.} - \text{Zenithdistanz}$$

Aus dieser Declination der Sonne, ihrer Breite, und einer hypothetischen Schiefe e der Ekliptik suche man durch Rechnung die Rectascension α der Sonne. Es ist nämlich

$$\text{Sin}\ \alpha = \frac{\text{Tg}\ \delta}{\text{Tg}\ e} = \frac{\text{Tg}\ (\varphi - z)}{\text{Tg}\ e}$$

also auch

$$d\alpha = d(\varphi - z) . \frac{2\,\text{Tg}\,\alpha}{\text{Sin}\,2\,\delta} - d\,e . \frac{2\,\text{Tg}\,\alpha}{\text{Sin}\,2\,e}$$

Aus dieser Rectascension der Sonne und der an denselben Tagen am Mittagsrohre beobachteten Rectascensionsdifferenz der Sonne und eines jener Sterne suche man die Rectascension dieses Sternes. Gesetzt man habe auf diese Art die Rectascension dieses Sternes gleich a gefunden, so ist eigentlich die wahre Rectascension dieses Sterns, wie man leicht findet

$$= a + (d\varphi + d\pi\,\text{Sin}\,z - d\,r - d\,z) . \frac{2\,\text{Tg}\,\alpha}{\text{Sin}\,2\,\delta} - d\,e . \frac{2\,\text{Tg}\,\alpha}{\text{Sin}\,2\,e}$$

wo d r der Fehler der hypothetisch vorausgesetzten Refraction, d e der Fehler der Schiefe der Ecliptik,

d φ der Fehler der Polhöhe

d π der Fehler der Horizontalparallaxe der Sonne, und

d z der Fehl. (Theil- oder Beobachtungsfehler) des Kreises ist.

Ein zweyter ähnlicher Beobachtungstag in dem entgegengesetzten Zeichen der Ecliptik unter derselben Zenithdistanz der Sonne, gibt, da jetzt die Rectascension der Sonne

$$180 - \alpha$$

ist, die wahre Rectascension jenes Fixsterns, wenn man sie durch Präcession, Aberration und Nutation) auf den ersten Beobachtungstag zurückführt.

$$a' - (d\varphi + d\pi \operatorname{Sin} z - dr' - dz') \frac{2 \operatorname{Tg} \alpha}{\operatorname{Sin} 2\delta} + de. \frac{2 \operatorname{Tg} \alpha}{\operatorname{Sin} 2e}$$

Die halbe Summe beyder ist

$$\frac{a+a'}{2} + (dr' - dr + dz' - dz) \frac{\operatorname{Tg} \alpha}{\operatorname{Sin} 2\delta}$$

und in dem letzten Ausdrucke verschwinden die Correctionen

$$d\varphi,\ d\pi,\ de.$$

Sind also an beyden Beobachtungstagen die Fehler der Refraction und die des Instruments dieselben, oder ist

$$dr' - dr + dz' - dz = 0$$

so ist die halbe Summe beyder oben gefundenen Rectascensionen

$$\frac{a + a'}{2}$$

die gesuchte wahre Rectascension des Sterns.

Dies setzt also voraus, daſs die an den beyden Tagen beobachteten Zenithdistanzen der Sonne gleich groſs, oder doch nahe gleich groſs sind, weil sonst die Voraussetzung

$$dr' = dr, \text{ und } dz' = dz$$

nicht angeht. Setzt man aber

$$dr' + dz' = dr + dz$$

voraus, so ist die Differenz der eben gegebenen beyden Ausdrücke

$$0 = (a - a') + (d\varphi + d\pi \operatorname{Sin} z - dr - dz) \frac{4 \operatorname{Tg} \alpha}{\operatorname{Sin} 2\delta} - de. \frac{4 \operatorname{Tg} \alpha}{\operatorname{Sin} 2e}$$

oder

$$d\varphi - dr - dz = -\frac{(a-a')}{2} \cdot \frac{\operatorname{Sin} 2\delta}{2 \operatorname{Tg} \alpha}$$

$$+ de. \frac{\operatorname{Sin} 2\delta}{\operatorname{Sin} 2e} - d\pi \operatorname{Sin} z.$$

und mittels dieser Gleichung, in welcher

$$\frac{a - a'}{2}$$

immer als bekannt und $d\pi = o$ angenommen werden kann, findet man aus blofsen Beobachtungen der Sonne die Fehler

$$d\varphi, de, dr \text{ und } dz,$$

III. Hat man so die Rectascension eines Gestirns gefunden, so wird man aus den leicht zu beobachtenden Rectascensionsunterschieden desselben mit den übrigen auch die absoluten geraden Aufsteigungen dieser letzten finden.

Auch kann man, wenn einmal mehrere Sterne ihrer Lage nach bekannt sind, durch blofse beobachtete Distanzen derselben von andern die Rectascension und Declination der letzten finden, eine Methode, die man, wenn man z. B. blofs mit einem Sextanten versehen ist, auf Kometen leicht anwenden wird, wenn man ihre Distanz von zwey bekannten Fixsternen beobachtet. Aus diesen Distanzen und den beyden Beobachtungszeiten die Rectascension und die Declination des Kometen zu finden, führt auf die oben Cap. VIII. §. 12 vorgetragen Auflösung der Aufgabe, in welcher wir aus zwey Zenithdistanzen eines seiner Lage nach bekannten Sterns und den Beobachtungszeiten die Polhöhe und den Stand der Uhr gesucht haben.

Die Alten haben den Ort der Kometen häufig durch Alignements angegeben, das heifst, durch zwey gröfste Kreise, deren jeder durch zwey bekannte Sterne und durch den Kometen zu gehen scheint. Es seyen a a' die Rectascensionen oder Längen der beyden ersten Sterne, mit welchen der Komet in einem gröfsten Kreise steht, und d d' ihre Declinationen oder Breiten. Dieselben Gröfsen für die beyden anderen Sterne seyen α α' und δ δ' und für den Kometen selbst endlich A und D. Dies vorausgesetzt, hat man für die Durchschnittspunkte der beyden gröfsten Kreise mit dem Aequator oder mit der Ecliptik folgende Ausdrücke

$$\operatorname{Tg}\left(\omega + \frac{a'-a}{2}\right) = \operatorname{Tg}\frac{a'-a}{2} \cdot \frac{\operatorname{Sin}(d'+d)}{\operatorname{Sin}(d'-d)}$$

$$\operatorname{Tg}\left(\omega' + \frac{\alpha'-\alpha}{2}\right) = \operatorname{Tg}\frac{\alpha'-\alpha}{2} \cdot \frac{\operatorname{Sin}(\delta'+\delta)}{\operatorname{Sin}(\delta'-\delta)}$$

und es sind die Rectascensionen oder Längen dieser Durchschnittspunkte

$$N = a - \omega, \text{ und}$$
$$N' = \alpha - \omega',$$

und die Neigungen dieser beyden Kreise gegen den Aequator oder die Ecliptik

$$\text{Tg } n = \frac{\text{Tg } d}{\text{Sin } \omega},$$

$$\text{Tg } n' = \frac{\text{Tg } \delta}{\text{Sin } \omega'}$$

Ist aber

$$N' - N = 2\,C$$

und

$$\text{Tg } x = \frac{\text{Sin } (n' + n)}{\text{Sin } (n' - n)} . \text{ Tg } C$$

so hat man sofort

$$A = N + C + x = N' - C + x \text{ und}$$
$$\text{Tg } D = \text{Tg } n \text{ Sin } (C + x) = \text{Tg } n' \text{ Sin } (C - x)$$

M. s. Berl. Jahrbuch 1821 p. 170 und 1822 p. 232

Ex. $a = 70^\circ\ 58'\ 42''$ $\quad d = 10^\circ\ 24'\ 50''$

$a' = 129\ \ 29\ \ 59$ $\quad d' = 49\ \ 40\ \ 10$

$\alpha = 82^\circ\ 53'\ 22''$ $\quad \delta = 66^\circ\ \ 3'\ 50''$

$\alpha' = 104^\circ\ 34\ \ 25$ $\quad \delta' = 10\ \ \ 4\ \ 35$

woraus folgt $\omega = 8^\circ\ 14'\ 35''.5$

$\omega' = 156^\circ\ 30'\ 51''.5$

$N = 62^\circ\ 44'\ 6''.5$

$N' = 286^\circ\ 22'\ 30''.5$

$C = 111\ \ 49\ \ 12.0$

$n = 52^\circ\ \ 2'\ 30''$

$n' = 79\ \ 58\ \ 6$

und $x = 284^\circ\ \ 9'\ 48''$

$A = 98^\circ\ 43'\ 6''.5$

$D = 36^\circ\ 59'\ 7''.0$

§. 11.

Eine andere sehr wichtige Beobachtung ist die der Schiefe der Ecliptik. Ist h die Höhe der Sonne zur Zeit des Sommer-solstitiums, δ die gröfste Declination derselben und φ die Polhöhe, so ist

$$h = 90 - \varphi + \delta$$

und eben so für das Wintersolstitium

$$h' = 90 - \varphi - \delta$$

also ist die halbe Summe

$$\frac{h + h'}{2}$$

beyder Höhen gleich der Höhe des Aequators und die halbe Differenz

$$\frac{h - h'}{2}$$

ist gleich $\delta = e$ der Schiefe der Ecliptik

Um diese Methode gehörig anzuwenden, bemerke man, dafs die Sonnenwende selten so nahe an dem Mittage eintritt, dafs man die nächste Mittagshöhe der Sonne auch zugleich als die Solstitialhöhe annehmen könnte, also mufs man die am Mittag gemachte Beobachtung auf die Zeit des Solstitiums reduziren. Ferner ändert sich diese Schiefe wegen ihrer Säcularabnahme und wegen der Nutation, daher man bey der Verbindung zweyer nächsten Solstitien auf diese Aenderungen Rücksicht nehmen mufs.

Die Reduction der beobachteten Declination auf die Declination des Solstitiums kann man aus der Gleichung

Delambre abrégé d'astron. p. 225.

$$\text{Tg}\ \delta = \text{Tg}\ e\ \text{Sin}\ \alpha$$

nehmen, wo δ die beobachtete Declination, und α die dazu gehörige Rectascension der Sonne ist. Diese Gleichung gibt (Cap. I.) für die Reduction auf das Solstitium

$$e - \delta = \vartheta^2\ \text{Sin}\ 2e - \frac{\vartheta^4}{2}\ \text{Sin}\ 4e + \frac{\vartheta^6}{3}\ \text{Sin}\ 6e -$$

oder auch

$$e - \delta = \vartheta^2\ \text{Sin}\ 2\delta + \frac{\vartheta^4}{2}\ \text{Sin}\ 4\delta + \frac{\vartheta^6}{3}\ \text{Sin}\ 6\delta +$$

$$\text{wo}\ \vartheta = \text{Tg}\ \frac{90 - \alpha}{2}$$

Der erste dieser Ausdrücke ist bequemer. Will man die Reduction $e - \delta$ von der wahren Länge λ der Sonne abhängig machen, so hat man

$$\text{Sin}\ \delta = \text{Sin}\ e\ \text{Sin}\ \lambda$$

also auch

$$\frac{\text{Sin } e - \text{Sin } \delta}{\text{Cos } e} = 2 \text{ Tg } e \text{ Sin}^2 \frac{90 - \lambda}{2}$$

Vergleicht man dies mit dem Ausdrucke

$$\frac{\text{Sin } a - \text{Sin } b}{\text{Cos } a} = z$$

des §. 5. Cap. VII. so hat man

$$e - \delta = z - \frac{z^2}{1.2} \text{ Tg } e + \frac{z^3}{1.2.3} (1 + 3 \text{ Tg}^2 e)$$

$$- \frac{z^4}{1.2.3.4} (9 \text{ Tg } e + 15 \text{ Tg}^3 e) + $$

$$\text{wo } z = 2 \text{ Tg } e \text{ Sin}^2 \frac{90 - \lambda}{2}.$$

Als Beyspiel wollen wir die Beobachtungen wählen, welche ich im Sommer des Jahres 1818 mit einem dreyfüſsigen Multiplikationskreise von Reichenbach in Ofen gemacht habe.

Die zweyte Columne enthält die beobachtete Zenithdistanz des Mittelpunkts der Sonne nahe am Meridian, die dritte die Reduction der ersten auf den Meridian, die vierte die Refraction nach Carlini und die Höhenparallaxe, die fünfte endlich die Reduction auf die Sommerwende nach der ersten der oben gegebenen Gleichungen. Ist nämlich $e = 23° 27' 54''7$, so ist diese Reduction

$$5.1780600\, \vartheta^2 - 5.0124084\, \vartheta^4 + 4.6381232\, \vartheta^6$$

wo

$$\vartheta = \text{Tg } \frac{90 - \alpha}{2}$$

und die numerischen Coefficienten schon Logarithmen sind.

Addirt man die Zahlen dieser vier Columnen mit ihren Zeichen, so erhält man die letzte Columne, oder die Solstitial-Zenithdistanz des Mittelpunkts der Sonne.

1818	Z. D.	Red. auf Merid.
Juni 19	24° 2′ 32.″ 53	— 8. 30
20	1 33. 75	— 2. 97
21	1 4. 12	— 2. 97
22	1 0. 18	— 3. 17
23	1 32. 25	— 4. 34
24	2 6. 94	— 2. 42

Ref. und Par.		Red. auf Solstit.	Solstit. Z D	
Juni 19	20″93	— 1′ 27″ 31	24°	1′ 17′ 85
20	20.68	— 0 33. 91		17. 55
21	20.47	— 0 5. 30		16. 32
22	20.28	— 0 1. 49		15. 80
23	20.20	— 0 28. 47		19. 64
24	21.02	— 1 8. 25		17. 29
	Mittel aus 6 Beob.		24°	1′ 17″ 41
	Polhöhe		47	29 12. 50
	scheinbare Schiefe		23°	27′ 55″ 09

Bringt man daran die Nutation der Schiefe (Cap. II. § 6.) oder 9″ 65 Cos ☊ ☾ mit verkehrten Zeichen an, so erhält man die mittlere Schiefe der Ecliptik. Es ist

$$☊ ☾ = 35° 58' \text{ also } 9.65 \text{ Cos } ☊ ☾ = 7.'' 81$$

und daher die mittlere Schiefe

23° 27′ 47.″ 28

§. 12.

Wir wollen uns nur mit den Methoden beschäftigen, durch welche man auch die Entfernung der himmlischen Körper von der Erde oder ihre Parallaxe finden kann.

Das einfachste Mittel, welches sich zu diesem Zwecke darbiethet, ist die Beobachtung desselben Gestirns aus zwey ihrer Lage nach bekannten sehr entfernten Orten der Erde, die beynahe in demselben Meridian liegen.

Setzt man die Erde als ein Sphäroid voraus, welches durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden ist, und nennt man für den ersten Ort die beobachtete Zenithdistanz z, die beobachtete Polhöhe φ, und die geocentrische Polhöhe $\varphi - \omega$, den Erdhalbmesser für diesen Punkt r und endlich x den Winkel der Gesichtslinie mit der Linie, welche die Mittelpunkte des Gestirns und der Erde verbindet, und bezeichnet man für den andern Ort dieselben Gröſsen mit einem Striche, so findet man leicht für die Entfernung R der Mittelpunkte des Gestirns und der Erde folgenden doppelten Ausdruck:

$$R = \frac{r \operatorname{Sin}(z-\omega)}{\operatorname{Sin} x} = \frac{r' \operatorname{Sin}(z'-\omega')}{\operatorname{Sin} x'}$$

und überdieſs

$$x + x' = (z + z') - (\varphi + \varphi') = m$$

Aus diesen beyden Gleichungen folgt

$$\operatorname{Tg} x = \frac{r' \operatorname{Sin}(z-\omega) \operatorname{Sin} m}{r' \operatorname{Sin}(z'-\omega') + r \operatorname{Sin}(z-\omega) \operatorname{Cos} m}$$

$$\operatorname{Tg} x' = \frac{r' \operatorname{Sin}(z'-\omega') \operatorname{Sin} m}{r \operatorname{Sin}(z-\omega) + r' \operatorname{Sin}(z'-\omega') \operatorname{Cos} m}$$

Ist dann π die Horizontalparallaxe des Gestirns für den Aequator der Erde, und A der Halbmesser des Aequators, so ist

$$\operatorname{Sin} \pi = \frac{A}{R}$$

oder sehr nahe

$$\pi = \frac{A.\, m}{r \operatorname{Sin}(z-\omega) + r' \operatorname{Sin}(z'-\omega')}$$

Dieser Ausdruck setzt voraus, daſs beyde Beobachter auf verschiedenen Seiten des Aequators sind. Sind sie auf derselben Seite, so ist die kleinere Polhöhe als negativ zu betrachten, so wie ihr ω. Ist das Gestirn für beyde Beobachter auf derselben Seite des Zeniths, so ist die kleinere der beyden Zenithdistanzen ebenfalls negativ. Liegen endlich beyde Beobachtungsorte nicht genau in demselben Meridian, so muſs man, da die Beobachtungen nicht mehr gleichzeitig sind, für die Aenderung der Declination in der Zwischenzeit Rechnung tragen.

Auf diese Art bestimmte Lacaille am Vorgebirge der guten Hoffnung und Lalande in Berlin die Parallaxe des Mondes, und die des Mars. Eine andere Methode, solche Beobachtungen zu berechnen, gab Dusėjour in den Mémoires de l'Acad. des sciences, Année 1782 p. 321, und 1783 p. 263.

§. 13.

Man kann aber auch, wenn das Gestirn von der Erde nicht zu sehr entfernt ist, aus Beobachtungen an einem und demselben Orte die Parallaxe desselben ableiten.

Sind α δ die wahre Rectascension und Declination des Mondes, und α' die scheinbare, von der Parallaxe afficirte Rectascension desselben, A die gerade Aufsteigung des Zeniths, φ die geocentrische Polhöhe und r die Entfernung des Beobachters vom Mittelpunkt der Erde, den Halbmesser des Aequators zur Einheit angenommen, so ist bekanntlich

$$\alpha - \alpha' = r. p. \operatorname{Sin}(A - \alpha') \frac{\operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Cos} \delta}$$

wo p die Horizontalparallaxe am Aequator ist.

Ist also

$$r \operatorname{Sin}(A - \alpha') \frac{\operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Cos} \delta} = b \text{ und}$$

$$\alpha - \alpha' = d\,\alpha, \text{ so ist}$$

$$d\,\alpha = b.\, p$$

und eben so für eine zweyte Beobachtung

$$d\alpha_{,} = b_{,}.\, p$$

also auch

$$p = \frac{d\,\alpha_{,} - d\,\alpha}{b_{,} - b} \quad \ldots \text{(I.)}$$

und in der letzten Gleichung ist

$$d\,\alpha' - d\,\alpha$$

oder der Unterschied der Parallaxen der Rectascension aus den Beobachtungen bekannt, also kann man aus ihr den Werth von p finden.

Man sucht nämlich in beyden Beobachtungen die Differenz der Rectascension des Mondes von einem ihm nahen Fixstern, woraus man die scheinbaren Rectascensionen des Mondes findet, deren Differenz m′ seyn soll. Aus den Mondstafeln aber findet man die Bewegung des Mondes in Rectascension während der Zwischenzeit, oder die Differenz m der beyden wahren Rectascensionen des Mondes, und es ist

$$d\alpha_{,} - d\,\alpha = m' - m.$$

Aus dem allgemeinen Ausdruck für b sieht man, daſs diese Methode dann am vortheilhaftesten ist, wenn δ so groſs als möglich, und wenn die beyden Beobachtungen auf entgegengesetzten Seiten des Meridians und zwar in der Nähe der ersten Vertikalkreise gemacht werden, dadurch wird nämlich $b_{,}$ und b so groſs als möglich, und eines derselben negativ.

Bey den Beobachtungen selbst muſs man den Faden des Mikrometers, welcher dem Parallelkreis entspricht, mit der Richtung des Sterns, nicht mit der des Mondes parallel nehmen, weil die Declination des Mondes sich zu schnell ändert, und die Richtung seiner Bewegung dem Aequator nicht mehr als parallel angenommen werden kann.

Um zu sehen, welcher Genauigkeit diese Methode fähig ist, wollen wir die Beobachtungen als Beyspiel nehmen, die T. Mayer 1748 den 15. August in Nürnberg gemacht hat. Er verglich an diesem Tage den Mond mit neun Sternen, und da die Differenzen der Rectascensionen dieser Sterne bekannt waren, so reduzirte er alle neun Beobachtungen auf die einzige der η Pleiaden oder Alcyone. Er fand so viermal

Beob.	wah. Zeit. d. Durchg. des Mondes	Diff. d. Uhrz. zwisch. η und d. folg. Mondsr.
1	11^h 59′ 34″	0^h 8′ 51″ 7
2	12 12 52	0 8 23. 6
3	12 28 37	0 7 50. 5
4	12 41 25	0 7 24. 0

Um 15^h 30′ 16″ wurde Taigeta vom Monde bedeckt, der Mittelpunkt des Mondes war 2′ 14″ südlicher, als der Stern, der scheinbare Halbmesser des Mondes aber war 15′ 23″, also ergibt sich daraus durch Rechnung eine fünfte Beobachtung

5	15^h 30′ 16″	0^h 16′ 36″ 0

Der Gang der Uhr war 23^h 56′ 29″ Uhrzeit auf 360° des Aequators, und der Halbmesser des Mondes in Rectascension war 16′ 38″, woraus sich daher für die vorhergehenden fünf Beobachtungen findet

scheinbare AR des Mittelpunktes des Mondes

1	50° 39′ 48″
2	50 46 49
3	50 55 6
4	51 1 45
5	52 18 39

also ist die scheinbare Bewegung des Mondes in Rectascension zwischen den Beobachtungen

1 nnd	5	1° 38′ 51″
2	5	1 31 50
3	5	1 23 33
4	5	1 16 54

Aus den Tafeln aber fand man die wahre Bewegung des Mondes in Rectascension zwischen den Beobachtungen

1	5	1° 56′ 6″
2	5	1 48 48
3	5	1 40 8
4	5	1 33 4

also die Wirkung der Parallaxe

17′ 15″
16 58
16 35
16 10

Ferner ist die wahre Declination des Mondes für die Beobachtung

1	23° 38′
2	23 39
3	23 41
4	23 43
5	24 2

Sucht man endlich die Rectascension des Zeniths und subtrahirt davon die scheinbare Rectascension des Mondes, so ist der scheinbare Stundenwinkel des Mondes

1 - - - - -	85° 6′
2	81 53
3	78 4
4	74 58
5	33 57

und daraus fand sich mit der Polhöhe

$$\varphi = 49^\circ\ 27'\ 10''$$

aus der Beobachtung 1 der Werth von $d\,\alpha$	$=$ 0. 7088 p
2	0. 7044 p
3	0. 6964 p
4	0. 6876 p
5	0. 3985 p

also gibt die Gleichung I. aus der ersten und fünften Beobachtung

$$p = \frac{17' \cdot 15''}{0.\ 3103} = 55'\ 38''$$

Eben so gibt die zweyte und letzte

$$p = 55'\ 30''$$

und die dritte und letzte

$$p = 55'\ 34'' \text{ u. s. w.}$$

Ueber die Methoden, die Parallaxe oder die Entfernung der Meteore u. dgl. aus Beobachtungeu zu bestimmen, s. m. Berl. Jahrb. 1788 p. 156, und 1806 p. 211.

§. 14.

Die Parallaxe der Sonne oder ihre Entfernung von der Erde, von welcher, wie wir sehen werden, unsere Kenntniſs der absoluten Entfernungen aller Planeten und Kometen von der Sonne und unter einander abhängen, kann ihrer zu groſsen Entfernung von der Erde wegen, durch keine der vorhergehenden Methoden bestimmt werden, sondern sie fordert eigene Betrachtungen, auf welche wir im zweyten Buche zurückkommen werden. Nicht weniger interessant ist die Parallaxe der Fixsterne, mit deren Beobachtung man sich besonders in unsern Zeiten so sehr beschäftigte, ohne bisher zu einem sicheren Resultate zu gelangen. Es ist sehr wahrscheinlich, daſs diese Parallaxe der Fixsterne nicht über 3 bis 4 Secunden beträgt, ja, daſs sie bey den meisten Sternen noch viel kleiner ist, daher zu ihrer Bestimmung die genauesten Instrumente gehören. Man sehe darüber Piazzis Abhandlung im 12. Theile della societa Italiana della Scienze. Calandrellis Opuscoli Astronom. Herschel Phil. Transact. 1782 und Schubert Berl. Jahrb. 1796.

Am vortheilhaftesten ist es, die Parallaxe der Fixsterne aus ihren in verschiedenen Jahreszeiten beobachteten Rectascensionen und Declinationen abzuleiten. Ist π die Entfernung R der Sonne von der Erde dividirt durch die Entfernung r der Sonne von dem des Sterns, ferner $\alpha\ \delta$ die wahre Rectascension und Declination des Sterns, und sind

$$\alpha + d\alpha,\ \delta + d\delta$$

dieselben scheinbaren Gröſsen, so wie AD die Rectascension und Declination der Sonne, so findet man leicht durch die Betrachtungen, welche wir schon im fünften Capitel zu Grunde gelegt haben, folgende Ausdrücke

$$\text{Tg}\,(\alpha + d\alpha) = \frac{r \text{ Sin } \alpha \text{ Cos } \delta + R \text{ Sin } A \text{ Cos } D}{r \text{ Cos } \alpha \text{ Cos } \delta + R \text{ Cos } A \text{ Cos } D} \text{ und}$$

$$\text{Tg}\,(\delta+d\delta) = \frac{r\,\text{Sin}\,\delta + R\,\text{Sin}\,D}{\sqrt{(r\text{Cos}\alpha\text{Cos}\delta + R\text{Cos}A\text{Cos}D)^2 + (r\text{Sin}\alpha\text{Cos}\delta + R\text{Sin}A\text{Cos}D)^2}}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\beta = \frac{R}{r}.\ \frac{\text{Cos}\,D}{\text{Cos}\,\delta} = \pi.\ \frac{\text{Cos}\,D}{\text{Cos}\,\delta}$$

so wird der erste dieser Ausdrücke

$$\text{Tg}\,(\alpha+d\alpha) = \frac{\text{Sin}\,\alpha + \beta\ \text{Sin}\,A}{\text{Cos}\,\alpha + \beta\ \text{Cos}\,A}$$

Es ist aber

$$\alpha+d\alpha = \frac{1}{2\sqrt{-1}}.\ \log\ \frac{1+\text{Tg}\,(\alpha+d\alpha).\ \sqrt{-1}}{1-\text{Tg}\,(\alpha+d\alpha).\ \sqrt{-1}}$$

und wenn man in der letzten Gleichung den Werth von

$$\text{Tg}\,(\alpha + d\,\alpha)$$

aus der vorletzten substituirt, so hat man

$$\alpha+d\alpha = \frac{1}{2\sqrt{-1}}.\log\frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} + \beta\,e^{A\sqrt{-1}}}{e^{-\alpha\sqrt{-1}} + \beta\,e^{-A\sqrt{-1}}}$$

wo Log nat. $e = 1$ ist,

oder auch, da

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{-1}}.\ \log\ e^{2\alpha\sqrt{-1}}\ \text{ist},$$

$$d\,\alpha = \frac{1}{2\sqrt{-1}}.\ \log\ \frac{1+\beta e^{(A-\alpha)\sqrt{-1}}}{1+\beta e^{-(A-\alpha)\sqrt{-1}}}$$

woraus man leicht findet

$$d\,\alpha = \beta\ \text{Sin}\,(A-\alpha) - \tfrac{1}{2}\,\beta^2\ \text{Sin}\ 2\,(A-\alpha)$$

$$+ \tfrac{1}{3}\,\beta^3\ \text{Sin}\ 3\,(A-\alpha) - - - - \quad (\text{I.})$$

Eben so könnte man die zweyte der vorhergehenden Gleichungen behandeln. Bleibt man bey der ersten Potenz von π stehen, so erhält man

$$d\delta = \text{Sin}\,(D-\delta) + 2\ \text{Cos}\,D\ \text{Sin}\,\delta\ \text{Sin}^2\ \frac{A-\alpha}{2}$$

$$= \pi\ (\text{Sin}\,D\ \text{Cos}\,\delta - \text{Cos}\,D\ \text{Sin}\,\delta\ \text{Cos}\,(A-\alpha)) - - - - \quad (\text{II.})$$

I. Bezeichnet man durch L, ω die Länge der Sonne und die Schiefe der Ecliptik, so ist die zweyte der vorhergehenden Gleichungen auch

$$\mathrm{Tg}\,(\delta + d\delta) = \frac{\pi \,\mathrm{Sin}\, L \,\mathrm{Sin}\, \omega + \mathrm{Sin}\, \delta}{\pi \,\mathrm{Cos}\, L + \mathrm{Cos}\, \alpha \,\mathrm{Cos}\, \delta} \cdot \mathrm{Cos}\,(\alpha + d\alpha)$$

Differentiirt man

$$\mathrm{Tg}\,(\delta + d\delta)$$

in Beziehung auf L und setzt das Differential dieser Tangente gleich Null, so ist, da π immer sehr klein ist,

$$\mathrm{Tg}\, L = - \mathrm{Cos}\, \alpha \,\mathrm{Cotg}\, \delta \,\mathrm{Sin}\, \omega$$

und diese Gleichung gibt die Länge der Sonne, also auch den Tag des Jahres, wo die Parallaxe der Declination ein Maximum oder ein Minimum ist. Die Parallaxe der Rectascension aber hat, wie aus der Gleichung I folgt, ihren gröfsten und kleinsten Werth für

$$A - \alpha = 90^\circ \text{ oder für } A - \alpha = 270^\circ$$

So gibt z. B. γ Pegasi

$$\alpha = 0^\circ\, 44', \delta = 14^\circ\, 4', \omega = 23^\circ\, 28'$$

also $$L = 10^s\ 2^\circ \text{ oder } 4^s\ 2^\circ$$

oder der gröfste und kleinste Werth der Declination fällt in den 22. Januar und den 25. Julius; der gröfste und kleinste Werth der Rectascension aber in den 22. Junius und 22. Dezember.

Aus den Gleichungen I. und II. folgt, dafs die Parallaxe der Declination immer kleiner ist, als die absolute Parallaxe π, dafs aber die Parallaxe der Rectascension oft beträchtlich gröfser als π werden kann. Es ist daher im allgemeinen vortheilhafter, Beobachtungen der Rectascensionen zur Bestimmung der Parallaxe zu wählen. Am besten wird es seyn, solche zwey Sterne zu wählen, die in Rectascension nahe 180° verschieden sind. Ist α und α' die Rectascension und $d\alpha$ die Parallaxe der Rectascension, die man für beyde Sterne gleich annimmt, so wird durch die ersten Beobachtungen die Rectascension des einen

$$\alpha + d\alpha$$

und die des andern

$$\alpha - d\alpha$$

also ihre Differenz

$$\alpha - \alpha' + 2\, d\alpha$$

seyn.

Nach einem halben Jahre wird diese Differenz

$$\alpha - \alpha' - 2\,d\alpha$$

seyn, wodurch man demnach die doppelte Summe beyder Parallaxen erhält, wenn man beyde Sterne zur Zeit ihrer gröſsten und kleinsten Rectascensionsparallaxe beobachtet. Setzt man die absolute Parallaxe gleich der Einheit, so findet man z. B. für

	Maxim. von $d\alpha$	Maxim. von $d\delta$
γ Pegasi	0″ 9	0″ 4
α Arietis	1. 0	0. 4
α Tauri	1. 0	0. 2
a Aurigae	1. 4	0. 4
α Can. maj.	1. 0	0. 6
α Cor. bor.	1. 1	0. 7
α Lyrae	1. 3	0. 9

§. 15.

Da man auſser der Präcession, Nutation und Aberration an beynahe jedem Fixstern noch eine andere geringe Bewegung bemerkt hat, deren Gesetze man nicht kennt, deren Richtungen aber nach der Meinung einiger Astronomen etwas gemeinschaftliches haben, so glaubten diese, ihre Ursache nicht in einer eigenen Bewegung dieser Sterne, sondern in einer Bewegung der Sonne und ihres ganzen Planetensystemes suchen zu müssen. M. s. Berl. Ephem. 1787 p. 224.

Wenn unser Sonnensystem, welches bey diesen Untersuchungen als ein Punkt betrachtet werden kann, während einem Jahrhundert den Bogen A A′ seiner sehr groſsen Bahn um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt vielleicht von Tausenden von Sonnensystemen beschreibt, einen Bogen, der hier als eine gerade Linie angesehen werden kann, und wenn C ein Stern ist, der in diesem Punkte als unbeweglich gedacht wird, so wird man diesen Stern in beyden Lagen unsers Systemes, von der Sonne oder der Erde aus in S und S′ sehen.

Es sey

$$A\,C\,A' = \pi$$

die säculäre Parallaxe unsers Systemes, und der Winkel

$$CA'B = m,$$

ferner $A\,A' = r$ und $A\,C = \varrho$, so ist

$$\text{Sin}\,\pi = \frac{r}{\rho}\,\text{Sin}\,m$$

wo π den gröſsten Werth hat, wenn C A′ senkrecht auf A B ist.

In dieser Gleichung sind aber r und ρ unbekannt, und werden es wohl immer bleiben. Es ist daher unmöglich, den absoluten Werth der Parallaxe π zu finden, aber die Richtung der Linie A B wird sich vielleicht doch durch Beobachtungen ausmitteln lassen.

Zu diesem Zwecke kann man zuerst suchen, ob die Richtungen der Linien

$$A\,C,\ A'C,\ A''C\ldots$$

welche die scheinbaren Gesichtslinien ausdrücken, alle von einer einzigen Linie A B geschnitten werden, oder nicht.

Ist $\alpha\,\delta\,\varsigma$ die Rectascension und Declination und die Distanz des Sterns von der Erde oder von der Sonne, und bezieht man seine Lage gegen die Sonne auf drey senkrechte Coordinaten x y z, von denen x in der Linie der Nachtgleichen, und x y in der Ebene des Aequators liegen, so ist

$$x = \varsigma\,\text{Cos}\,\delta\,\text{Cos}\,\alpha$$

$$y = \varsigma\,\text{Cos}\,\delta\,\text{Sin}\,\alpha$$

$$z = \varsigma\,\text{Sin}\,\delta$$

Beobachtet man z. B. nach hundert Jahren wieder denselben Stern, und nennt $\alpha'\ \delta'\ r'$ die dann erhaltene Rectascension, Declination und Distanz des Sterns durch Präcession auf die erste Epoche zurückgeführt, so ist wieder

$$x' = r'\,\text{Cos}\,\delta'\,\text{Cos}\,\alpha'$$

$$y' = r'\,\text{Cos}\,\delta'\,\text{Sin}\,\alpha'$$

$$z' = r'\,\text{Sin}\,\delta'$$

wobey also vorausgesetzt wird, daſs $\alpha'\ \delta'$ von $\alpha\ \delta$ bloſs wegen der Bewegung unseres Planetensystemes verschieden sind.

Sind nun X Y Z die analogen Coordinaten des Punktes des Himmels, gegen welchen die Bewegung unsers Planetensystems gerichtet ist, welchen Punkt wir der Kürze wegen den Pol nennen wollen, und legt man durch das Auge des Beobachters und durch jene zwey scheinbaren Orte des Sterns eine Ebene, so wird diese Ebene auch durch jenen Pol gehen. Ist die Gleichung dieser Ebene

$$z = M\,x + N\,y,$$

so sind die Bedingungsgleichungen, welche ausdrücken, daſs diese Ebene durch jene zwey Orte des Sterns und durch den Pol geht, folgende:

$$z = M x + N y$$

$$z' = M x' + N y'$$

$$Z = M X + N Y$$

Eliminirt man daraus die Gröſsen M und N, und setzt der Kürze wegen

$$P = \frac{X}{Z}$$

$$\text{und } Q = \frac{Y}{Z}$$

so erhält man

$$(z' y - z y') P - (z' x - z x') Q = x' y - x y' \quad \text{- - (I)}$$

Der Aufgabe gemäſs sollen alle Sterne denselben Werth von P und Q geben, und da zwey Sterne hinreichen, diese zwey Gröſsen zu bestimmen, so werden dann alle andern Sterne dazu dienen, diese Voraussetzung zu bestätigen, oder zu widerlegen. Substituirt man in der Gleichung I. für x y . . ihre vorhergehenden Werthe, und für δ δ' ihre Complemente p p' zu 90° oder die Poldistanzen der Sterne, so hat man, da

$$p' - p \text{ und } \alpha' - \alpha$$

sehr klein sind,

$$P. \left((p'-p) \sin\alpha + (\alpha'-\alpha) \sin p \cos p \cos\alpha\right)$$

$$-Q. \left((p'-p) \cos\alpha - (\alpha'-\alpha) \sin p \cos p \sin\alpha\right) - (\alpha'-\alpha) \sin^2 p \quad \text{(II.)}$$

Nennt man aber A D R die Rectascension und Declination und die Entfernung des Pols, so ist

$$X = R \cos D \cos A$$

$$Y = R \cos D \sin A$$

$$Z = R \sin D$$

also auch

$$P = \operatorname{Cotg} D \cos A,$$

$$Q = \operatorname{Cotg} D \sin A$$

und substituirt man diese Werthe in II., so ist

$$(p' - p) \operatorname{Cotg} D \sin (\alpha - A)$$

$$= (\alpha'-\alpha) \left(\sin^2 p - \sin p \cos p \operatorname{Cotg} D \cos (\alpha - A)\right) \quad \text{. . . (III.)}$$

und diese Gleichung ist sehr bequem, das Verhältniſs der Bewegungen

$$\frac{p' - p}{\alpha' - \alpha}$$

aller Sterne zu bestimmen, wenn man einmal A und D kennt. Indem man daher die letzte Gleichung für mehrere Sterne entwickelt, wird man sehen, ob die Resultate der Beobachtungen mit der vorausgesetzten Hypothese übereinstimmen, oder nicht.

Ex. Im Jahre 1760 wurde von α Aurigae beobachtet

$$\alpha = 74^\circ\ 44'\ 59''\ 5;\ p = 44^\circ\ 16'\ 27''\ 5$$

Bringt man an diesen Zahlen die Präcession für 42 Jahre, oder

$$+ 46'\ 1''\ 243 \text{ und } - 3'\ 35''\ 604$$

an, so erhält man für das Jahr 1802

$$\alpha = 75^\circ\ 31'\ 0.''\ 743$$
$$\text{und } p = 44^\circ\ 12'\ 51''\ 896$$

Aber in demselben Jahre 1802 beobachtete man

$$\alpha' = 75^\circ\ 31'\ 14''.400$$
$$\text{und } p' = 44^\circ\ 13'\ 12''\ 40$$

also ist für 42 Jahre

$$p' - p = + 20''\ 504$$
$$\text{und } \alpha' - \alpha = + 13''.\ 657$$

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung II. und setzt im Mittel

$$\alpha = 75^\circ\ 8'$$
$$\text{und } p = 44^\circ\ 15'$$

so erhält man

$$20''\ 085\ P + 1''\ 732\ Q - 6''\ 649 = 0$$

Eben so fand man aus Sirius $49.072\,P + 12.479\,Q + 16.139 = 0$

Procyon	$40.428\,P + 12.774\,Q + 28.621 = 0$
Arctur	$29.073\,P - 78.312\,Q - 43.222 = 0$
Aldebaran	$4.960\,P + 0.062\,Q - 7.250 = 0$
Wega	$12.216\,P - 6.466\,Q - 1.000 = 0$
Pollux	$6.177\,P + 12.213\,Q + 24.391 = 0$

Um P und Q mit einiger Sicherheit zu finden, mufs man die Sterne wählen, deren scheinbare Bewegung am gröfsten ist. Die Summe der Gleichungen für Sirius und Procyon gibt

$$89.500\ P + 25.253\ Q = -44.760$$

und wenn man diese Gleichung mit der für Arctur verbindet, so erhält man

$$P = \text{Cotg } D \text{ Cos } A = -\ 0.311738$$

$$Q = \text{Cotg } D \text{ Sin } A = -\ 0.667604$$

also auch $A = 244^\circ\ 58'$

$D = 53^\circ\ 37'$.

und der Werth von A ist nur einige Minuten, der von D aber um 13 Grade von denen verschieden, die Herschel für diese beyden Gröfsen angegeben hat. Allein damit harmoniren die übrigen Gleichungen für die andern Sterne so wenig, dafs sich aus dem Systeme der vorhergehenden Gleichungen keine Werthe von P und Q finden lassen, welche ihnen allen auch nur einigermafsen genug thun. Ein anderes Verfahren s. m. Berl. Jahrb. 1789. p. 214.

Es ist also wohl nichts anders übrig, als die beobachteten Ortsveränderungen der Fixsterne eigenen Bewegungen derselben zuzuschreiben, und diese selbst anhaltend zu beobachten, bis es vielleicht unsern spätern Nachkommen gelingen wird, ihre Ursache zu entdecken. Eine andere bisher noch nicht erklärte Erscheinung mancher Fixsterne ist die Veränderlichkeit ihres Lichtes, über die man Lindenaus und Bohnenbergers Zeitschrift f. Astronomie II. B. p. 181. nachsehen kann.

§. 16.

Man bemerkt häufig an der Oberfläche der Sonne dunkle Stellen, Flecken, und andere, welche mit einem helleren Lichte, als die übrige Oberfläche der Sonne glänzen, oder Fackeln. So viel Unregelmäfsigkeit man auch in ihrer Gestalt und Dauer beobachtet, so kommen doch die meisten derselben darin überein, dafs sie am östlichen Rande der Sonne erscheinen, und in nahe 14 Tagen sich bis zum westlichen Rande bewegen, wo sie verschwinden, und oft nach andern 14 Tagen auf dem vorigen östlichen Rande wieder erscheinen. Die Linien, welche diese Flecken auf der Oberfläche der Sonne zu beschreiben scheinen, sind im Junius und December nahe gerade Linien, die sich in den diesen folgenden Monaten immer mehr krümmen, bis sie in den Monaten März und September ihre gröfste Krümmung erreichen.

Diese Erscheinungen lassen sich daher durch die Voraussetzung darstellen, daſs diese Flecken mit der Oberfläche der Sonne unveränderlich verbunden sind, und daſs die Sonne selbst in nahe 28 Tagen sich um eine Axe drehe, die mit der Ebene der Ecliptik irgend einen Winkel bildet. Denkt man sich eine Ebene senkrecht auf diese Axe durch den Mittelpunkt der Sonne, welche Ebene wir den Sonnenäquator nennen wollen, so werden die Ebenen, in welchen sich die Flecken bewegen, mit diesem Sonnenäquator parallel seyn, und der letzte wird die Ecliptik in zwey Punkten schneiden, in welchen sich die Sonne im Junius und December befindet.

I. Die Differenzen $d\alpha$, $d\delta$ der geocentrischen Rectascension und Declination des Fleckens und des Mittelpunkts der Sonne findet man sehr leicht aus unmittelbaren Beobachtungen der Durchgänge beyder durch Fäden, die dem Aequator parallel und senkrecht sind. Wir werden weiter unten auf diese Beobachtungen zurückkommen.

Daraus findet man die Differenzen $d\lambda$, $d\beta$ der geocentrischen Längen und Breiten des Mittelpunkts der Sonne und des Fleckens durch folgende Ausdrücke (Cap. I.)

$$d\lambda = d\delta \operatorname{Sin}\pi + d\alpha \operatorname{Cos}\pi \operatorname{Cos} D$$

$$d\beta = d\delta \operatorname{Cos}\pi - d\alpha \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos} D$$

wo D die Declination der Sonne und π der Winkel des Breitenkreises der Sonne mit dem Declinationskreise derselben ist, wo man also hat

$$\operatorname{Tg}\pi = \operatorname{Cos}\odot \operatorname{Tg}\omega,$$

wenn $\odot$ und ω die Länge der Sonne, und die Schiefe der Ecliptik bezeichnet.

Hat man so die geocentrische Länge und Breite $\lambda\,\beta$ des Fleckens gefunden, so muſs man daraus die aus dem Mittelpunkte der Sonne gesehene, oder die heliocentrische Länge und Breite l b des Fleckens ableiten. Es sey r die Entfernung des Fleckens vom Mittelpunkte der Sonne, oder der Halbmesser der Sonne, und R die Entfernung der Erde vom Mittelpunkte der Sonne, so wie ϱ die Entfernung der Erde von dem Flecken, endlich $L = 180° + \odot$ die heliocentrische Länge der Erde.

Denkt man sich von dem Flecken F eine senkrechte Linie auf die Ebene der Eklipik, welche diese Ebene in f treffen soll, so ist offenbar

$$Ff = r \operatorname{Sin} b = \varrho \operatorname{Sin}\beta$$

und da sehr nahe

$$\varrho = R$$

ist, so hat man

$$\text{Sin } b = \frac{R}{r} \text{ Sin } \beta \ldots \text{(I)}$$

und diese Gleichung gibt die helioc. Breite des Fleckens.

Verbindet man aber in der Ebene der Ecliptik den Punkt f mit dem Orte S der Sonne, und dem T der Erde, so erhält man ein ebenes Dreyeck, dessen Seiten

$$S\,T = R$$
$$S\,f = r \text{ Cos } b = r'$$
$$T\,f = \varsigma \text{ Cos } \beta = \varsigma'$$

sind, und worin man hat

$$\text{Sin} f = \frac{R}{r'} \text{ Sin } T \qquad \text{Sin } S = \frac{\rho'}{r'} \text{ Sin } T$$

Es ist aber $f = l - \lambda$

$$S = L - l \text{ und}$$
$$T = 180 - (L - \lambda)$$

und daher, wenn man wieder $\varsigma' = R$ setzt,

$$\left.\begin{aligned} \text{Sin}(l-\lambda) &= \frac{R}{r \text{ Cos } b} \text{ Sin } (L-\lambda) \\ \text{Sin}(L-l) &= \frac{R \text{ Cos}\beta}{r \text{ Cos } b} \text{ Sin } (L-\lambda) \end{aligned}\right\} \text{II.}$$

aus welchen beyden Gleichungen man die heliocentrische Länge l des Flekens findet. Da in den Gleichungen I. und II. die Gröſse r gegen R sehr klein ist, so sieht man, daſs ein geringer Fehler in den Gröſsen λ β schon sehr beträchtliche in den Resultaten l b zur Folge haben kann.

Kürzer kann man diese Aufgabe auf folgende Weise auflösen. Ist λ' β' und l' b' die Differenz der durch die Beobachtungen bekannten geocentrischen, und der gesuchten heliocentrischen Längen und Breiten des Fleckens und des Mittelpunkts der Sonne, so sey x die geocentrische Entfernung des Fleckens vom Mittelpunkte der Sonne und y der Winkel, welchen x mit der durch den Mittelpunkt der Sonne gehenden Ebene der Ecliptik bildet. Dies vorausgesetzt hat man

$$\text{Tg } y = \frac{\beta'}{\lambda'} \quad \text{und}$$

$$x = \frac{\lambda'}{\text{Cos } y} = \frac{\beta'}{\text{Sin } y}$$

Ist aber so x und y bekannt, so ist sofort

$$\mathrm{Sin}\, b' = \mathrm{Sin}\, x\, \mathrm{Sin}\, y$$

$$\mathrm{Tg}\, l' = \mathrm{Tg}\, x\, \mathrm{Cos}\, y$$

§. 17.

Es sey also in einer ersten Beobachtung l b die heliocentrische Länge und Breite des Fleckens. Eine zweyte und dritte Beobachtung desselben Fleckens gebe eben so l′ b′ und l″ b″.

Um daraus die Lage des Sonnenäquators und die Zeit der Rotation der Sonne um ihre Axe zu finden, sey (Fig. 19.) B der Pol des Sonnenäquators, und C der der Ekliptik, A A′ A″ die drey Orte des beobachteten Fleckens.

Man nenne die Winkel

$$BAC,\ BA'C,\ BA''C$$

nach der Ordnung

$$a \quad a' \quad a'',$$

so ist

$$\begin{aligned} & -CAA' + CA'A \\ = & -(CAA' - BAA') + (CA'A - BAA') \\ = & \; a + a' \end{aligned}$$

weil $BAA' = BA'A$ ist.

Man hat daher nach den Nepper'schen Analogien

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Tg}\,\frac{a'+a}{2} &= \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{b'-b}{2}}{\mathrm{Cos}\,\frac{b'+b}{2}}\,\mathrm{Cotg}\,\frac{l'-l}{2} \\ \mathrm{Tg}\,\frac{a''+a}{2} &= \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{b''-b}{2}}{\mathrm{Cos}\,\frac{b''+b}{2}}\,\mathrm{Cotg}\,\frac{l''-l}{2} \\ \mathrm{Tg}\,\frac{a''+a'}{2} &= \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{b''-b'}{2}}{\mathrm{Cos}\,\frac{b''+b'}{2}}\,\mathrm{Cotg}\,\frac{l''-l'}{2} \end{aligned}\right\}\ \mathrm{I.}$$

Es sey ferner

$$BCA = m,\ BCA' = m',\ BCA'' = m''$$

und λ die Länge des Pols des Sonnenäquators, so ist

$$l = \lambda + m,$$
$$l' = \lambda + m',$$
$$l'' = \lambda + m''.$$

Da man aber hat

$$BA = BA' = BA'',$$

so ist auch

$$\frac{\text{Sin } m}{\text{Sin } a} = \frac{\text{Sin } m'}{\text{Sin } a'} = \frac{\text{Sin } m''}{\text{Sin } a''}$$

woraus folgt

$$\frac{\text{Sin } m' + \text{Sin } m}{\text{Sin } m' - \text{Sin } m} = \frac{\text{Sin } a' + \text{Sin } a}{\text{Sin } a' - \text{Sin } a} \text{ oder}$$

$$\text{Tg } \frac{m'+m}{2} \text{ Cotg } \frac{m'-m}{2} = \text{Tg } \frac{a'+a}{2} \text{ Cotg } \frac{a'-a}{2}$$

Substituirt man in dieser Gleichung für

$$\text{Tg } \frac{a'+a}{2}$$

seinen Werth aus der ersten der Gleichungen I., und bemerkt, dafs

$$m' - m = l' - l$$

ist, so hat man

$$\text{Tg } \frac{m'+m}{2} = \frac{\text{Sin } \frac{b'-b}{2}}{\text{Cos } \frac{b'+b}{2}} \text{ Cotg } \frac{a'-a}{2} \quad ..(\text{II.})$$

$$\lambda = \tfrac{1}{2} (l+l') - \tfrac{1}{2} (m+m')$$

nebst zwey andern ähnlichen Gleichungen für

$$\text{Tg } \frac{m''+m}{2} \text{ und Tg } \frac{m''+m'}{2}$$

Ist endlich in dem Dreyecke BAC die Seite BC $= \psi$, und AB $= \pi$, und

$$M = \frac{\pi + \psi}{2},\ N = \frac{\pi - \psi}{2}$$

so ist wieder nach den Nepperschen Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Cotg}\, M = \dfrac{\mathrm{Cos}\,\dfrac{l-\lambda+a}{2}}{\mathrm{Cos}\,\dfrac{l+\lambda-a}{2}}\,\mathrm{Cotg}\,\dfrac{90-b}{2} \\[2em] \mathrm{Tg}\;N = \dfrac{\mathrm{Sin}\,\dfrac{l-\lambda-a}{2}}{\mathrm{Sin}\,\dfrac{l-\lambda+a}{2}}\,\mathrm{Tg}\,\dfrac{90-b}{2}\end{array}\right\}\text{(III.)}$$

und daher

$$\pi = M + N$$
$$\psi = M - N$$

nebst noch zwey Paaren anderer ähnlicher Gleichungen, die aus analogen Behandlungen der Dreyecke B A′ C und B A″ C folgen.

Das ganze Verfahren reduzirt sich demnach auf Folgendes:

Sucht man

$$a\;a'\;a''$$

aus I., so erhält man

$$\frac{m'+m}{2}$$

und daher die Länge des Pols

λ aus II.

und die Neigung

$$90-\psi$$

des Sonnenäquators gegen die Ecliptik, so wie die Declination

$$90-S$$

des Fleckens aus III.

Um noch die Rotationszeit zu bestimmen, hat man nach einer der vier Gaufsischen Gleichungen (Cap. I.)

$$\mathrm{Sin}\,\frac{AA'}{2} = \frac{\mathrm{Cos}\,\dfrac{l-l''}{2}\,\mathrm{Sin}\,\dfrac{b-b''}{2}}{\mathrm{Sin}\,\dfrac{a+a''}{2}}$$

und

$$S\,\frac{ABA''}{2} = \frac{\mathrm{Sin}\,\dfrac{AA'}{2}}{\mathrm{Sin}\,\pi}$$

Ist also

$$\vartheta = ABA''$$

die Differenz der Rectascension in der ersten und letzten Beobachtung, so ist

$$\text{Sin}\,\frac{\vartheta}{2} = \frac{\text{Sin}\,\frac{b-b''}{2}\,\text{Cos}\,\frac{l-l''}{2}}{\text{Sin}\,\frac{a+a''}{2}\,\text{Sin}\,\pi}$$

und ist t die zu ϑ gehörige Zeit, oder die Zeit zwischen der ersten und letzten Beobachtung, so ist die Zeit der ganzen Revolution der Sonne um ihre Axe

$$T = 360.\,\frac{t}{\vartheta}$$

Man wird von selbst bemerken, dafs diese Aufgabe dieselbe mit der ist, wo man aus den Zeiten, in welchen drey gegebene Sterne dieselbe übrigens unbekannte Höhe erreichen, die Polhöhe den Stand der Uhr, und den Collimationsfehler des Instruments sucht, eine Aufgabe, welche wir Cap. 8. §. 13 auf eine zweyfache Art aufgelöst haben.

Dieselbe Aufgabe läfst sich noch auf folgende Art entwickeln. Man suche für die erste heliocentrische Länge und Breite die drey rechtwinklichten Coordinaten

$$x = r\,\text{Cos}\,l\,\text{Cos}\,b,$$
$$y = r\,\text{Sin}\,l\,\text{Cos}\,b,$$
$$z = r\,\text{Sin}\,b$$

wo r der Halbmesser der Sonne ist; für die zweyte und dritte Beobachtung bezeichne man diese Gröfsen mit einem und zwey Strichen. Dies vorausgesetzt, ist die Gleichung des Parallelkreises des Fleckens

$$z = A\,x + B\,y + D$$
$$z' = A\,x' + B\,y' + D$$
$$z'' = A\,x'' + B\,y'' + D$$

Sucht man aus diesen Gleichungen die Gröfsen ABD, so ist

$$\text{Tg}\,n = \sqrt{A^2 + B^2},$$

$$\text{Tg}\,k = -\frac{A}{B} \text{ und}$$

$$\text{Sin}\,d = \frac{D}{r}\,\text{Cos}\,n$$

wo n die Neigung des Sonnenäquators gegen die Ecliptik, k die Länge des aufsteigenden Knotens des Sonnenäquators und d die heliocentrische Declination des Fleckens ist. Ist endlich C die Chorde zwischen der ersten und dritten Beobachtung, oder

$$C = \sqrt{(x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2}$$

so ist, da

$$r \operatorname{Cos} d$$

der Radius des Parallelkreises ist, wenn α den Winkel bezeichnet, den der Flecken in Beziehung auf den Mittelpunkt der Sonne zwischen den zwey äufsersten Beobachtungen beschrieben hat,

$$\operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2} = \frac{C}{2\, r \operatorname{Cos} d}$$

Ist also t die beobachtete Zwischenzeit und T die der ganzen Rotation der Sonne, so ist

$$T = 360. \frac{t}{\alpha}$$

Ex. 1775 wurde aus Beobachtungen eines Sonnenfleckens gefunden

14 Junius	$l = 7^s$	8°	$33'$	$b = -$	0°	$38'$
18	$l' = 9$	5	56	$b' = -$	7	31
21	$l'' = 10$	18	58	$b'' = -$	11	35

Die Gleichungen I. geben

$$\frac{a' + a}{2} = -6^\circ\, 15'\, 31''57$$

$$\frac{a'' + a}{2} = -4\ \ 34\ \ 10.\ 55$$

$$\frac{a'' + a'}{2} = -5\ \ 12\ \ 52.\ 04$$

also

$$a = -5^\circ\ 37'\ 50''\ 08$$

$$a' = -6\ \ 55\ \ 13.\ 06$$

$$a'' = -3\ \ 30\ \ 31.\ 02$$

Daraus folgt

$$\frac{m' + m}{2} = 79^\circ\ 24'\ 25''\ 96$$

$\lambda = 167^\circ\ 50'\ 4''\ 04$ Länge des Pols des Sonnenäquators
90

$257^\circ\ 50'\ 4''\ 04$ Länge des aufsteigenden Knotens des Sonnenäquators in der Ecliptik.

$$M = 43^\circ\ 58'\ 52''\ 73$$
$$N = 51\ \ 14\ \ 0\ \ 37$$
$$\pi = 95\ \ 12\ \ 53.\ \ 10$$
$$\psi = 7\ \ 15\ \ 7.\ \ 64$$

also die südliche Declination des Fleckens

$$5^\circ\ 12'\ 53''\ 10$$

und die Neigung des Sonnenäquators gegen die Ecliptik

$$7^\circ\ 15'\ 7''\ 64$$

Man sehe hierüber Mémoires de l'Acad. des sav. etrangers, Tom. X. p. 467.

§. 18.

Da, wie bereits bemerkt wurde, geringe Fehler der Beobachtung der Sonnenflecken sehr groſse in den daraus abgeleiteten Resultaten, der Lage des Sonnenäquators und der Rotationszeit, zur Folge haben, so muſs man, die letzten Gröſsen mit mehr Sicherheit zu erhalten, eine gröſsere Anzahl von Beobachtungen jenen Bestimmungen zu Grunde legen. Drey vollständige Beobachtungen lösen zwar die Aufgaben vollkommen theoretisch auf, allein diese Auflösung wird in der Anwendung keine groſse Verläſslichkeit gewähren, wenn nicht andere Beobachtungen zu Hilfe genommen, und dadurch die wahrscheinlichen Beobachtungsfehler so viel möglich vermindert werden. So bald man aber mehr Beobachtungen zu Grunde legt, als unumgänglich nöthig sind, so erhält man mehr Gleichungen, als unbekannte Gröſsen, und die Aufgabe wird ein mehr als bestimmtes Problem. Da solche Probleme in der ausübenden Astronomie bey vielen anderen Untersuchungen öfters vorkommen, so wollen wir hier das vorzüglichste über ihre Auflösung zusammen stellen.

Um zuerst zu zeigen, auf welche Weise man in unserm besondern Fall die Beobachtungen zu behandeln habe, um zu bequemen Ausdrücken für die gesuchte Lage des Sonnenäquators zu gelangen, so kann man die Lage des Sonnenfleckens gegen den Mittelpunkt der Sonne durch drey rechtwinklichte Coordinaten x y z bestimmen. Die Ebene, in welcher der Flecken sich bewegt, wird dann die Gleichung haben

$$z = Ax + By + D$$

wo ABD die zu bestimmenden Gröſsen sind. Man sieht schon aus dieser Gleichung, daſs drey Beobachtungen eines Fleckens hinreichen, die Lage jener Ebene vollständig zu bestimmen.

Eine zweyte Beobachtung desselben Fleckens gibt eben so

$$z' = A x' + B y' + D$$

und beyder Gleichungen Differenz ist

$$z - z' = A(x - x') + B(y - y')$$

Wenn die schon aus andern Beobachtungen beynahe gefundenen Werthe von A und B vollkommen richtig wären, so müfste auch der letzten Gleichung durch jede zwey andern Beobachtungen Genüge geschehen, wenn man in ihr jene Werthe von A und B substituirt. Sind aber diese Gröfsen selbst unrichtig, oder noch nicht genau bekannt, so seyen die wahren Werthe derselben

$$A + dA \text{ und } B + dB,$$

und man hat

$$z - z' = (A + dA)(x - x') + (B + dB)(y - y')$$

oder wenn man der Kürze wegen die bekannte Gröfse

$$z - z' - A(x - x') - B(y - y') = C$$

setzt, folgende Gleichung

$$C = (x - x')\,dA + (y - y')\,dB \text{ --- (I)}$$

und die Gleichung (I) ist eine der gesuchten Bedingungsgleichungen. Jedes Paar von Beobachtungen wird eine ähnliche Bedingungsgleichung geben, und es wird dann noch darauf ankommen, aus allen diesen Gleichungen die wahrscheinlichsten Werthe der Gröfsen

$$dA \text{ und } dB$$

zu finden. Hat man diese gefunden, und setzt dann

$$A' = A + dA,\ B' = B + dB$$

so ist die Tangente der Länge des Knotens des Sonnenäquators auf der Ecliptik gleich

$$-\frac{A'}{B'}$$

und die Tangente der Neigung des Sonnenäquators gegen die Ebene der Ecliptik gleich

$$\sqrt{A'^2 + B'^2}$$

§. 19.

Das gewöhnliche Verfahren, welches die Astronomen früher angewendet haben, solche Gleichungen aufzulösen, deren Anzahl die Zahl der in ihnen enthaltenen unbekannten Gröſsen übertrifft, bestand darin, daſs man, um jede dieser unbekannten Gröſsen am vortheilhaftesten zu bestimmen, alle gegebenen Gleichungen so unter einander combinirte, daſs der Factor dieser zu bestimmenden Gröſse so groſs als möglich, und im Gegentheile die Factoren aller übrigen so klein als möglich wurden. Dann haben nämlich kleine Fehler, die etwa in der Bestimmung der andern unbekannten Gröſsen noch übrig sind, auf die Bestimmung dieser ersten nur einen sehr verminderten Einfluſs, weil erstens die andern unbekannten Gröſsen, wenn dies angeht, nur in sehr kleine Factoren multiplicirt sind, und zweytens, weil ihr gemeinschaftlicher Divisor, der Factor der ersten unbekannten Gröſse, so groſs als möglich ist. Um aber diese Combinationen zu erhalten, verändert man die sämmtlichen Zeichen aller Gleichungen so, daſs der Factor der ersten unbekannten Gröſse in allen Gleichungen dasselbe Zeichen habe, während die andern alle in ihren Zeichen abwechseln. Die Summe aller dieser so veränderten Gleichungen gibt die gesuchte Combination. Eben so wird man für die zweyte, dritte ... unbekannte Gröſse verfahren, und dadurch so viel Gleichungen als unbekannte Gröſsen erhalten, in deren jeder eine dieser Gröſsen vorzüglich begünstigt wurde, und daher die Werthe der Gröſsen selbst aus diesen Gleichungen durch Elimination bestimmen.

Es seyen z. B. die Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{array}{l} o = 3 - x + y - 2z \\ o = 6 - 3x - 2y + 5z \\ o = 21 - 4x - y - 4z \\ o = 14 + x - 3y - 3z \end{array}\right\}$$

Um die Gleichung für x zu erhalten, setzt man statt der letzten Gleichung

$$o = -14 - x + 3y + 3z$$

so gibt die Summe aller vier Gleichungen

$$o = 15 - 9x + y + 2z$$

Eben so erhält man für y

$$o = 37 - 5x - 7y$$

und endlich für z

$$o = 33 - x - y - 14z$$

und eliminirt man aus den drey letzten Gleichungen die Werthe von x y z, so erhält man nahe

$$x = 2,486$$

$$y = 3,517$$
$$z = 1,928$$

und diese Werthe nimmt man als die wahrscheinlichsten Werthe von x y z an. Diese Werthe geben aber folgende Fehler unserer vorhergehenden Gleichungen

Für die erste 0, 175 statt 0

zweyte 0. 148

dritte — 0. 173

vierte 0. 151.

§. 20.

Die vorhergehende Methode hat aber offenbar etwas zu Willkührliches, und man hat keinen hinreichenden Grund zu behaupten, daſs die so erhaltenen Werthe der unbekannten Gröſsen unter allen die wahrscheinlichsten oder diejenigen seyn werden, welche den gegebenen Gleichungen am besten entsprechen. Die Geometer haben daher eine andere weniger unbestimmte Auflösung dieser schweren Aufgabe gesucht, von welcher ich hier kurz das Nothwendigste vortragen werde.

Man habe eine Anzahl Gleichungen der Form

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = m + a x + b y + c z + \\ \Delta' = m' + a' x + b' y + c' z + \\ \Delta'' = m'' + a'' x + b'' y + c'' z + \text{u. s w,} \end{array}\right\} (A)$$

in welcher die Zahl der unbekannten Gröſsen

$$x \; y \; z \; - - -$$

kleiner ist, als die Zahl dieser Gleichungen. Man bestimme die wahrscheinlichsten Werthe dieser unbekannten Gröſsen.

So ist z. B. die Länge des Sekundenpendels für die geographische Breite φ bekanntlich gleich

$$440.\,39 - 1.\,25 \operatorname{Cos} 2\,\varphi$$

Pariser Linien. Da aber diese zwey Zahlen noch etwas unrichtig seyn können, so wollen wir annehmen

$$440.\,39 = x$$

$$1.\quad 25 = y$$

und $\quad \operatorname{Cos} 2\,\varphi = b$

so ist für jede Breite die aus dieser Gleichung berechnete Pendellänge m' gleich

$$m' = x - b\,y$$

Ist aber die an demselben Orte beobachtete Pendellänge m, so sollte wenn x und y richtig sind, $m - m' = o$ seyn, d. h. es sollte seyn

$$o = m - x + b\,y$$

Sind aber die vorausgesetzten Werthe von x, y oder ist die Beobachtung selbst fehlerhaft, so wird auch die letzte Gleichung nicht genau statt haben, sondern man wird statt ihr eine andere der Form erhalten

$$\Delta = m - x + b\,y$$

und jede andere Beobachtung an einem anderen Orte wird eine der letzten ähnliche Gleichung

$$\Delta' = m' - x + b'\,y$$

geben, aus welchen Gleichungen allen dann die wahrscheinlichsten Werthe von x und y zu finden sind

Gesetzt also, man habe für den Ausdruck der ersten unserer Gleichungen

$$m + a\,x + b\,y + c\,z + \cdots$$

durch Rechnung den Werth V gefunden, durch Beobachtung aber den Werth M, so ist

$$\Delta = V - M$$

der Fehler dieser Gleichung. Eben so erhält man für die zweyte

$$\Delta' = V' - M',$$

für die dritte

$$\Delta'' = V'' - M'' \text{ u. s.}$$

Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit, daſs der Fehler der ersten Beobachtung in der That Δ sey, durch $\varphi\,\Delta$ bezeichnen, da diese Wahrscheinlichkeit offenbar irgend eine Funktion von Δ seyn muſs. Eben so sey

$$\varphi\,\Delta',\ \varphi\,\Delta'' \cdots$$

die Wahrscheinlichkeit, daſs der Fehler der zweyten, dritten.. Beobachtung Δ', Δ'' . . . ist.

Die Wahrscheinlichkeit also, daſs aus der ersten Beobachtung für V der Werth M folge, ist

$$\varphi\,(M - V) = \varphi\,\Delta$$

die Wahrscheinlichkeit, daſs aus der zweyten Beobachtung für V′ der Werth M′ folge, ist

$$\varphi\,(M' - V') = \varphi\,\Delta' \text{ u. f.}$$

so, dafs die Wahrscheinlichkeit, dafs aus beyden Beobachtungen die Fehler Δ, Δ' folgen, gleich

$$(\varphi\,\Delta\;\varphi\,\Delta')$$

seyn wird u. s. w. Allgemein also ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die Fehler aller Beobachtungen nach der Reihe Δ, Δ', Δ'' . . . sind, gleich

$$W = \varphi\,\Delta.\,\varphi\,\Delta'.\,\varphi\,\Delta''.\;.\;.\;.$$

wo $V = \Delta + M$ also auch Δ, Δ', Δ'' . . Funktionen von $x\,y\,z$ . . sind.

Die Funktion $\varphi\,\Delta$ läfst sich zwar jetzt noch nicht bestimmen, doch ist leicht zu übersehen, dafs sie der Art seyn mufs, dafs sie ein Kleinstes und zwar Null wird, wenn Δ ein Gröfstes ist; dafs sie im Gegentheil ein Gröfstes wird, wenn Δ ein Kleinstes oder gleich Null ist, und dafs endlich diese Funktion für gleiche entgegengesetzte Werthe von Δ auch im allgemeinen gleiche Werthe erhält. Die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler der ersten Beobachtung zwischen den unendlich nahen Gränzen Δ und $d\,\Delta$ liegt, wird also gleich

$$\varphi\,\Delta.\;d\,\Delta$$

seyn, daher wird auch die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler zwischen den Gränzen D und D' liege, gleich

$$\int \varphi\,\Delta.\;d\,\Delta$$

seyn, das Integral von $\Delta = D$ bis $\Delta = D'$ genommen. Dies Integral aber, von dem gröfsten negativen Werth von Δ bis zu dem gröfsten positiven Werth von Δ', oder allgemein von $\Delta = -\infty$ bis $\Delta = +\infty$ genommen, wird gleich der Einheit seyn.

Die annehmbarsten Werthe von $x\,y\,z$ . . oder die Werthe dieser Gröfsen, welche die Fehler $\Delta\;\Delta'\;\Delta''$ . . . in der That hervorbringen, werden offenbar diejenigen seyn, für welche die Wahrscheinlichkeit, dafs dieser Fehler statt habe, ein Gröfstes, d. h. für welche die Gröfse W selbst ein Maximum ist. Da nun W eine Funktion von $x\,y\,z$ . . . ist, so werden die wahrscheinlichsten Werthe von $x\,y\,z$ . . . in den Gleichungen

$$\left(\frac{dW}{dx}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dW}{dy}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dW}{dz}\right) = 0\;.\;.$$

enthalten seyn. Um aber diese Gleichungen zu entwickeln, mufs man zuerst die Function $\varphi\,\Delta$ kennen. Es sey

$$\frac{d.\,\varphi\,\Delta}{\varphi\Delta} = \varphi'\,\Delta.\,d\,\Delta$$

Man suche $\varphi'\,\Delta$.

Ist im Allgemeinen eine Gröfse aus mehreren gleich guten Beobachtungen zu bestimmen, so wird das sogenannte arithmethische Mittel aus der Summe der Resultate jeder einzelnen Beobachtung den wahrscheinlichsten Werth für diese Gröfse geben. Aus der Annahme dieses allgemein bekannten Grundsatzes folgt, dafs man, wenn μ die Anzahl der Beobachtungen, und

$$\psi = \frac{1}{\mu}\,(M + M' + M'' +)$$

ist, haben wird

$$o = \varphi'\,(M - \psi) + \varphi'\,(M' - \psi) + \varphi'\,(M'' - \psi) +$$

Ist ferner

$$M' = M'' = M''' \ldots = M - \mu\,N,$$

so ist

$$\psi = M - (\mu - 1)\,N,$$

wodurch die vorhergehende Gleichung wird

$$\begin{aligned} o &= \varphi'\,(M - M + (\mu - 1)\,N) \\ &+ \varphi'\,(M - \mu\,N - M + (\mu - 1)\,N) \\ &+ \varphi'\,(M - \mu\,N - M + (\mu - 1)\,N) \\ &+ \varphi'\,(M - \mu\,N - M + (\mu - 1)\,N) + \end{aligned}$$

oder

$$o = \varphi'\,(\mu - 1)\,N + \varphi'\,(-N) + \varphi'\,(-N) + \varphi'\,(-N) +$$

das heifst

$$o = \varphi'\,(\mu - 1)\,N + (\mu - 1)\,\varphi'(-N)$$

Es ist daher, wie aus der letzten Gleichung folgt, die Gröfse φ' so beschaffen, dafs man hat

$$\begin{aligned} o &= \varphi'\,(\Delta) + \varphi'\,(-\Delta) \\ o &= \varphi'\,(2\Delta) + 2\,\varphi'\,(-\Delta) \\ o &= \varphi'\,(3\Delta) + 3\,\varphi'\,(-\Delta) \text{ u. f.} \end{aligned}$$

und daraus folgt, dafs $\varphi'\,(\Delta)$ gleich dem Produkte einer beständigen Gröfse $\varkappa$ in die Gröfse Δ selbst, oder dafs

$$\varphi' (\Delta) = k.\ \Delta$$

seyn mufs.

Es war aber

$$\varphi' \Delta = \frac{d.\ \varphi \Delta}{\varphi \Delta .\ d \Delta}$$

also ist auch

$$\frac{d.\ \varphi \Delta}{\varphi \Delta} = k \Delta .\ d\ \Delta \text{ oder}$$

$$\log \varphi\ \Delta = \tfrac{1}{2}\ k.\ \Delta^2 + \log \varkappa$$

wo $\varkappa$ die Constante der Integration bezeichnet.

Ist also log nat e = 1, so ist

$$\varphi\ \Delta = \varkappa .\ e^{\frac{1}{2} k \Delta^2}$$

und daher auch wenn $\frac{1}{2} k = - h^2$ ist

$$\int \varphi\ \Delta .\ d\ \Delta = \varkappa \int e^{- h^2 \Delta^2} d\ \Delta$$

Um $\varkappa$ zu bestimmen; so ist nach dem Vorhergehenden $\int \varphi \Delta d \Delta$ von $\Delta = - \infty$ bis $\Delta = + \infty$ genommen, gleich der Einheit; das Integral

$$\int e^{- h^2 \Delta^2} d\ \Delta$$

aber, ebenfalls von $\Delta = - \infty$ bis $\Delta = + \infty$ genommen, ist bekanntlich gleich

$$\frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

wo π die halbe Peripherie bezeichnet, deren Halbmesser die Einheit ist. Daraus folgt

$$\varkappa = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

also ist auch die vorhergehende Gleichung

$$\varphi\ \Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} .\ e^{- h^2 \Delta^2}$$

Der oben gegebene Ausdruck für W wird daher in folgenden übergehen

$$W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} .\ e^{- h^2 (\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 . +)}$$

d. h. die wahrscheinlichsten Werthe der Gröfsen x y z --- sind die, für welche die Summe der Quadrate der Differenzen der berechneten und der beobachteten Werthe der Functionen V V′ V″ --- ein Kleinstes ist.

Setzt man daher nach dem Vorhergehenden das Differential dieses Werthes von W in Beziehung auf x gleich Null, so hat man

$$\left(\frac{dW}{dx}\right) = 0\text{, oder}$$

$$\triangle\left(\frac{d\triangle}{dx}\right) + \triangle'\left(\frac{d\triangle'}{dx}\right) + \triangle''\left(\frac{d\triangle''}{dx}\right) + = 0$$

und da

$$\left(\frac{d\triangle}{dx}\right) = a,$$

$$\left(\frac{d\triangle'}{dx}\right) = a',$$

$$\left(\frac{d\triangle''}{dx}\right) = a'' \text{ ist,}$$

so ist diese Gleichung

$$\triangle\, a + \triangle'\, a' + \triangle''\, a'' + = 0 \;\text{---}\; (1.)$$

Eben so gibt

$$\left(\frac{dW}{dy}\right) = 0$$

die Gleichung

$$\triangle\, b + \triangle'\, b' + \triangle''\, b'' + = 0 \;\text{---}\; (2)$$

und

$$\left(\frac{dW}{dz}\right) = 0$$

gibt

$$\triangle\, c + \triangle'\, c' + \triangle''\, c'' + = 0 \text{ u. s. w. ---} (3)$$

und da dieser Gleichungen 1, 2, 3 --- so viele, als der unbekannten Gröſsen x y z --- sind, so wird man die letzten aus ihnen auf dem gewöhnlichen Weg der Elimination bestimmen, und die so erhaltenen Werthe von x y z --- werden die wahrscheinlichsten Werthe dieser Gröſsen seyn, weil sie die Summe der Quadrate der Fehler $\triangle\ \triangle'\ \triangle''$ --- ein Kleinstes geben.

Setzt man der Kürze wegen

$$\int am = am + a'm' + a''m'' +$$

$$\int aa = aa + a'a' + a''a'' +$$

$$\int ab = ab + a'b' + a''b'' + \text{u. f.}$$

so kann man den Gleichungen 1, 2, 3 --- auch folgende Gestalt geben

$$\left.\begin{array}{l} o = \int am + x\int aa' + y\int ab + z\int ac + \\ o = \int bm + x\int ba + y\int bb + z\int bc + \\ o = \int cm + x\int ca + y\int cb + z\int cc + \end{array}\right\} (B)$$

und aus ihnen wird man die gesuchten wahrscheinlichsten Werthe von x y z --- durch Elimination finden.

Für unser Beyspiel ist

$m = 3,\ a = -1,\ b = 1,\ c = -2$ u. f.

also $\int am = -88$,

$\int aa' = 27$,

$\int ab = 6$,

$\int ac = 0$ u. f.

also die Gleichungen (B)

$$o = -88 + 27x + 6y$$
$$o = -70 + 6x + 15y + z$$
$$o = -107 + y + 54z$$

und aus diesen Gleichungen folgt

$x = 2,470$

$y = 3,551$

$z = 1,916.$

§. 21.

Das Vorhergehende enthält die Grundlage der Methode der kleinsten Quadrate, von Gaufs, über deren weitere Ausführung man nachsehen wird, desselben Theor. mot. Corp. Coel. p. 205. Mon. Corresp. Vol. XXIV. Zeitschrift für Astronomie I. Vol. p. 185, und Laplace Theorie anal. des probabilités. Einige besonders für die Ausübung wichtige Folgerungen aus dem Vorhergehenden werde ich hier kürzlich ohne Beweise zusammenstellen, die man in den angeführten Werken nachsehen wird.

I. Die gegebene Methode ist eigentlich unmittelbar blofs auf solche Gleichungen anwendbar, in welcher nur die ersten Potenzen von x y z -- enthalten sind. Man wird aber das Vorgetragene leicht auch auf solche Gleichungen ausdehnen, in welchen x y z --

höhere Exponenten haben. Sind nämlich XYZ.. die schon genäherten Werthe von $x\,y\,z$ -- die man z. B. durch die Methode des §. 19 gefunden hat, so wird man statt den unbekannten Gröfsen $x\;y\;z\ldots$ in den gegebenen Gleichungen (A) die Werthe

$$x = X + \xi$$
$$y = Y + \upsilon,$$
$$z = Z + \zeta$$

substituiren, und da die Gröfsen X Y Z schon bekannt, die unbekannten Gröfsen $\xi\;\upsilon\;\zeta$ aber sehr klein sind, so wird man die Quadrate und höheren Potenzen der letzten vernachlässigen können, und dadurch die gesuchten linearen Gleichungen zwischen $\xi\,\upsilon\,\zeta$.. erhalten, auf welche sich die vorhergehende Methode unmittelbar anwenden läfst.

II. Diese Methode setzt ferner, wie man aus dem §. 20 sieht, voraus, dafs die Güte der Beobachtungen, die Wahrscheinlichkeit ihrer Richtigkeit, bey allen gleich grofs ist. Sind aber die Beobachtungen selbst unter einander von un leichem Werthe, und ist z. B. der respective Werth derselben nach der Ordnung h, h′, h″, so ist das eben so viel, als hätte man durch Beobachtungen, die alle denselben Werth unter einander haben, die Fehler

$$h\Delta,\; h'\Delta',\; h''\Delta''\ldots$$

gefunden, also wird man die Werthe der unbekannten Gröfsen aus der Voraussetzung bestimmen, dafs

$$h^2\Delta^2 + h'^2\Delta'^2 + h''^2\Delta''^2 +$$

ein Kleinstes ist. Ist z. B. in unserem Beyspiele der Werth der zweyten Beobachtung doppelt so grofs, als der der ersten, so wird man statt

$$o = 5 - 3x - 2y + 5z$$

annehmen

$$o = 10 - 6x - 4y + 10z$$

und so mit den übrigen, aus welchen Gleichungen man dann wie zuvor, die Gleichungen B sucht.

III. Ueberhaupt kann die Gröfse h des §. 20 als das Maafs der Genauigkeit jeder einzelnen Beobachtung angesehen werden. Ist nämlich die Warscheinlichkeit des Fehlers Δ in irgend einer Reihe von Beobachtungen, wie vorhin,

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2\Delta^2}$$

so wird diese Wahrscheinlichkeit in einer anderen Beobachtungsreihe

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h'^2 \Delta}$$

seyn, und die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler für irgend eine der ersten Beobachtungen zwischen $-\delta$ und $+\delta$ liege, wird

$$\int \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta$$

so wie die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler irgend einer Beobachtung der zweyten Reihe zwischen $-\delta'$ und $+\delta'$ falle,

$$\int \frac{h'}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h'^2 \Delta^2} d\Delta$$

seyn wird, das erste Integral von $\Delta = -\delta$ bis $+\delta$, und das zweyte von $\Delta = -\delta'$ bis $+\delta'$ genommen. Beyde Integralien sind aber offenbar gleich, wenn

$$h\,\delta = h'\,\delta'$$

ist. Ist also z. B.

$$h' = 2\,h,$$

so kann in der zweyten Reihe eben so leicht ein doppelter, als in der ersten ein einfacher Fehler begangen werden, oder wie man dies gewöhnlich ausdrückt, die Beobachtungen der ersten Reihe haben den doppelten Werth, das doppelte Gewicht, von den Beobachtungen der zweyten Reihe.

IV. Die auf diese Art erhaltenen Werthe der unbekannten Gröfsen x y z - - - werden selbst unter einander einen verschiedenen Grad ihrer Güte, ihrer verhältnifsmäfsigen Wahrscheinlichkeit haben, oder, nicht jede dieser Gröfsen wird mit gleicher Sicherheit bestimmt seyn. Da es oft interessant seyn kann, den Grad der Wahrscheinlichkeit jeder einzelnen dieser Bestimmungen zu kennen, so wird man aus dem Vorhergehenden, in Verbindung mit der Theorie der Eliminationen, sich leicht von dem Folgenden überzeugen.

Sucht man aus den Gleichungen (A) wie zuvor die Gröfsen

$$\left.\begin{aligned} X &= \int a\,\Delta = a\,\Delta + a'\,\Delta' + a''\,\Delta'' + \\ Y &= \int b\,\Delta = b\,\Delta + b'\,\Delta' + b''\,\Delta'' + \\ Z &= \int c\,\Delta = c\,\Delta + c'\,\Delta' + c''.\Delta'' + \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

so ist jede der Gleichungen I. eine Function von x y z - - - und da dieser Gleichungen so viele sind, als der unbekannten Gröfsen x y z - - - so kann man aus ihnen durch Elimination die Werthe von x y z - - - in X Y Z suchen, wodurch man andere Gleichungen der Form erhält:

$$\left.\begin{array}{l} x = L + AX + BY + CZ + \\ y = L' + A'X + B'Y + C'Z + \\ z = L'' + A''X + B''Y + C''Z + \end{array}\right\} \text{II.}$$

Hat man die Gleichungen II. entwickelt, so sind, wie zuvor, die wahrscheinlichsten Werthe von x y z ---

$$x = L$$
$$y = L'$$
$$z = L'' \text{ u. f.}$$

und der Grad der resp. Wahrscheinlichkeit dieser letzten Werthe von x y z --- die der Beobachtungen gleich der Einheit vorausgesetzt, ist

$$\text{für } x = \frac{1}{\sqrt{A}}$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{B'}}$$
$$z = \frac{1}{\sqrt{C''}}$$

In unserm Beyspiele hat man

$$a = 1,\ a' = 3,\ a'' = 4,$$
$$a''' = -1,\ b = -1,\ b' = 2 \text{ u. s. w. also}$$
$$a\ \triangle = -3 + x - y + 2z$$
$$a'\ \triangle' = -15 + 9x + 6y - 15z$$
$$a''\ \triangle'' = -84 + 16x + 4y + 16z$$
$$a'''\triangle''' = 14 + x - 3y - 3z$$

woraus folgt
$$\left.\begin{array}{l} X = -88 + 27x + 6y \\ Y = -70 + 6x + 15y + z \\ Z = -107 + y + 54z \end{array}\right\} \text{I.}$$

Aus diesen drey Gleichungen findet man durch Elimination

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{49154 + 809X - 324Y + 6Z}{19899} \\ y = \dfrac{2617 - 12X + 54Y - Z}{737} \\ z = \dfrac{12707 + 2X - 9Y + 123Z}{6633} \end{array}\right\} \text{II.}$$

Daher sind die wahrscheinlichsten Werthe von x y z --- wie vorhin

$$x = \frac{49154}{19899} = 2.470$$

$$y = \frac{2617}{737} = 3.551$$

$$z = \frac{12707}{6633} = 1.916$$

und der Grad der Wahrscheinlichkeit dieser Bestimmungen die der einzelnen Beobachtungen gleich 1 gesetzt,

$$\text{für } x \text{ ---} \sqrt{\frac{19899}{809}} = 4.96 = \xi$$

$$y \text{ ---} \sqrt{\frac{737}{54}} = 3.69 = \upsilon.$$

$$z \text{ ---} \sqrt{\frac{6633}{123}} = 7.34 = \zeta$$

oder z ist von allen am schärfsten, und y am wenigsten genau bestimmt, so daſs y nur halb so sicher, als z ist.

V. Es sey

$$\psi\,\Delta = \int \frac{2\,e^{-\Delta^2}\,d\,\Delta}{\sqrt{\pi}}$$

das Integral von $\Delta = 0$ angerechnet. Wenn Δ gegen die Einheit nicht groſs ist, so hat man die einfache Reihe

$$\psi\Delta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\Delta - \tfrac{1}{3}\Delta^3 + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{\Delta^5}{1.2} - \tfrac{1}{7}\cdot\frac{\Delta^7}{1.2.3} + \tfrac{1}{9}\cdot\frac{\Delta^9}{1.2.3.4} \text{ --}\right)$$

Aus diesem Ausdrucke findet man leicht, daſs

$$\psi\,\Delta = \tfrac{1}{2}$$

ist, wenn

$$\Delta = 0.476936$$

ist. Eben so findet man

$$\psi\,\Delta' = 0.8427 \text{ für } \Delta' = 1 = 2.0967\,\Delta$$

$$\psi\,\Delta'' = 0.9900 \text{ für } \Delta'' = 1.82139 = 3.81893\,\Delta'' \text{ u. f.}$$

so daſs $\psi\,\Delta$ mit Δ wächst.

Wir haben aber oben gesehen, daſs die Wahrscheinlichkeit, daſs der Fehler einer Beobachtung zwischen den Gränzen D und D′ liege, durch

$$\int\varphi\,\Delta.\,d\,\Delta = \int \frac{h}{\sqrt{\pi}}.\ e^{-h^2\Delta^2}\,d\,\Delta$$

ausgedrückt werde, das Integral von $\Delta = D$ bis $\Delta = D'$ genommen, also doppelt so grofs, als dieses Integral, wenn es von $\Delta = 0$ bis $\Delta = D'$ genommen wird, d. h. also, die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler einer Beobachtung zwischen o und Δ liege, ist gleich

$$\psi .\, h .\, \Delta$$

So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler nicht unter

$$\frac{\Delta}{h} = \frac{0.476936}{h}$$

ist, gleich $\frac{1}{2}$ oder diese Wahrscheinlichkeit ist zugleich der Wahrscheinlichkeit des Gegentheiles gleich. Wir wollen daher diese Gröfse

$$A = \frac{\Delta}{h}, \text{ oder } A = \frac{0.476936}{h}$$

den w a h r s c h e i n l i c h e n Fehler nennen.

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler über 2. 0967 Δ herausgehe, nur 0. 1573 und dafs er über 3. 81893 herausgehe, nur $\frac{1}{100}$ u. s. w.

Wir wollen nun annehmen, dafs bey N wirklich angestellten Beobachtungen die Fehler der einzelnen Beobachtungen nach der Reihe $\alpha\, \beta\, \gamma$ --- begangen wurden, und untersuchen, was sich daraus in Beziehung auf den Werth von h und A schliefsen lasse. Man findet leicht, dafs die Wahrscheinlichkeit jedes Werthes von h der Gröfse

$$z = h^N e^{-h^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 +)}$$

proportional ist, dafs also auch der wahrscheinlichste Werth von h der ist, für welchen diese Gröfse z ein Gröfstes ist. Differentiirt man diesen Ausdruck in Beziehung auf h und z und setzt dann $dz = 0$, so ist

$$N h^{N-1} - 2 h^{N+1} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 +) = 0, \text{ oder}$$

$$h = \sqrt{\frac{N}{2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 +)}}$$

also ist der wahrscheinlichste Werth von A oder der wahrscheinlichste Fehler

$$A = \frac{\Delta}{n} = \frac{\Delta \sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 +)}}{\sqrt{N}}$$

$$= 0.6744897 \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 +}{N}}$$

Daraus folgt ferner, daſs die Wahrscheinlichkeit, daſs der wahre Werth von h zwischen H — λ und H + λ liege, gleich

$$\psi\left(\frac{\lambda.}{H}\sqrt{N}\right)$$

sey, daſs also diese Wahrscheinlichkeit gleich ½ werde, wenn

$$\frac{\lambda}{H}\sqrt{N} = \Delta = 0.476936$$

ist, oder wenn

$$\lambda = \frac{H\Delta}{\sqrt{N}} \text{ ist.}$$

Es ist also 1 gegen 1 zu wetten, daſs der wahre Werth von h zwischen

$$H\left(1 - \frac{\Delta}{\sqrt{N}}\right) \text{ und } H\left(1 + \frac{\Delta}{\sqrt{N}}\right)$$

falle, also auch, daſs der wahre Werth von A zwischen

$$\frac{\Delta}{H\left(1 - \frac{\Delta}{\sqrt{N}}\right)} \text{ und } \frac{\Delta}{H\left(1 + \frac{\Delta}{\sqrt{N}}\right)}$$

oder endlich annähernd zwischen

$$A\left(1 + \frac{\Delta}{\sqrt{N}}\right) \text{ und } A\left(1 - \frac{\Delta}{\sqrt{N}}\right)$$

falle.

Setzt man daher der Kürze wegen

$$B = \frac{A\Delta}{N}$$

und

$$S = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 +$$

gleich der Summe der Quadrate der Fehler der einzelnen Beobachtungen, so ist der wahrscheinlichste Werth des Fehlers einer einzelnen Beobachtung

$$A = 0.67449 \sqrt{\frac{S}{N}} \; . \; . \; . \; \text{I.}$$

und die wahrscheinliche Gränze dieses Beobachtungsfehlers

$$A \pm B = A\left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{N}}\right) \; . \; . \; . \; \text{(II.)}$$

$$\text{wo } B = 0.47694 \frac{A}{\sqrt{N}}$$

die wahrscheinlichste Unsicherheit von A bezeichnet.

Umständlicher findet man dies ausgeführt im I. Band der Zeitschrift für Astronomie. Es versteht sich von selbst, dafs die Anwendung dieser Methode desto sicherer ist, je gröſser die Anzahl der Beobachtungen, und je gröſser ihre absolute Genauigkeit ist, und dafs andere constante Fehler des Instrumentes etc. mit aller Sorgfalt vermieden werden müssen.

Exempel. Für die Polhöhe der Ofner Sternwarte erhielt ich folgende zehn Resultate

	47° 29′ 11″. 5
	12. 2
	12. 8
	11. 2
	11. 7
	12. 3
	11. 5
	11. 9
	12. 4
	12. 5
Mittel	47° 29′ 12″. 00

Die Fehler $\alpha\,\beta\,\gamma$ jeder einzelnen Beobachtung kann man gleich der Differenz jeder Beobachtung von diesem Mittel annehmen. So ist für

die erste $\alpha = 12.\ 0 - 11.\ 5 = (0.\ 5)$

die zweyte $\beta = 12.\ 0 - 12,\ 2 = (-0.\ 2)$

also $S = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + = 2.\ 42,\ N = 10$

und daher wahrscheinlicher Fehler einer jeden Beobachtung gleich

$$A = 0.67449 \sqrt{\frac{2.\ 42}{10}} = 0''.\ 33$$

wahrscheinliche Unsicherheit von A gleich

$$B = 0.47694 \frac{A}{\sqrt{10}} = 0''.016$$

und daher der wahrscheinliche Fehler des Endresultates

47° 29′ 12″ 00

gleich

$$\frac{A}{\sqrt{N}} = \frac{0.33}{\sqrt{10}} = 0''.104$$

Ist überhaupt f der Fehler von einer, und F der Fehler des Resultats von p Beobachtungen, oder auch ist g die Präcision von einer, und G die des Resultats von p Beobachtungen so ist,

$$F = \frac{f}{\sqrt{p}} \quad \text{und}$$

$$G = g.\sqrt{p}$$

VI. Um das Vorhergehende auf Gleichungen der Form

$$o = m + a\,x$$
$$o = m' + a'\,x$$
$$o = m'' + a''\,x \text{ u. f.}$$

anzuwenden, welche nur e i n e unbekannte Gröfse enthalten, so ist in der Voraussetzung, dafs alle Beobachtungen gleichen Werth haben, der wahrscheinlichste Werth von x oder

$$X = \frac{-\int m\,a}{\int a^2} = \frac{-(m\,a + m'a' + m''\,a'' +)}{a^2 + a'^2 + a''^2 +}$$

und die Präcision ξ dieses letzten Werthes X von x ist, wenn die Präcision der unmittelbaren Beobachtung gleich der Einheit gesetzt wird,

$$\xi = \sqrt{\cdot \int a^2} = \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 +}$$

so wie der wahrscheinlichste Fehler dieses Werthes X

$$\frac{0.67449 \sqrt{\frac{S}{N}}}{\sqrt{\cdot \int a^2}}$$

wo S, N die Bedeutung der N. V. hat.

Eben so ist für Gleichungen

$$o = m + a\,x + b\,y$$
$$o = m' + a'\,x + b'y$$
$$o = m'' + a''\,x + b''y \text{ u. f.}$$

zwischen zwey veränderlichen Gröfsen der wahrscheinlichste Werth

$$\text{von } x = X = -\left(\frac{\int m\,a.\int b\,b - \int m\,b.\int b\,a}{\int a\,a.\int b\,b - \int b\,a.\int b\,a}\right)$$

$$\text{und von } y = Y = -\left(\frac{\int m\,b.\int a\,a - \int m\,a,\int b\,a}{\int a\,a.\int b\,b - \int b\,a.\int b\,a}\right)$$

und die Präcision jenes Werthes von X gleich

$$\xi = \sqrt{\frac{\int aa.\int bb - \int ba.\int ba}{\int bb}}$$

so wie die Präcision jenes Werthes Y gleich

$$v = \sqrt{\frac{\int aa.\int bb - \int ba.\int ba}{\int aa}}$$

und so für Gleichungen mehrerer unbekannten Gröfsen.

Uebrigens ist, wie bereits bemerkt wurde, für sich klar, dafs alle diese Bestimmungen der Wahrheit desto näher kommen werden, je gröfser die Anzahl N der Beobachtungen oder die der gegebenen Gleichungen ist. Ist aber diese Anzahl sehr grofs, so wird man sich die unbequeme Berechnung derselben sehr erleichtern, wenn man diese Gleichungen in Klassen eintheilt, indem man z. B. die Summe von je zehn dieser Gleichungen, als eine einzige betrachtet, der man den Werth 10 gibt. Es sey

$o = m + a\,x$ das Mittel aus p Beobachtungen

$o = m' + a'x$ - - - - - - - - - p'

$o = m'' + a''x$ - - - - - - - - - p''

so findet man aus dem Vorhergehenden leicht, dafs der wahrscheinlichste Werth von x ist

$$X = -\frac{\int m\,a\,p}{\int a\,a\,p}$$

und die Präcision dieser Bestimmung

$$\xi = \sqrt{\cdot \int a\,a\,p} = \sqrt{a^2 p + a'^2 p' + a''^2 p'' +}$$

Ist eben so

$o = m + a\,x + b\,y$ das Mittel aus p Beobachtungen

$o = m' + a'x + b'y$ - - - - - - - - - p'

$o = m'' + a''x + b''y$ - - - - - - - - - p''

so ist der wahrscheinlichste Werth von x und y

$$X = -\left(\frac{\int map.\int bbp - \int mbp.\int bap}{\int aap.\int bbp - \int bap.\int bap}\right)$$

$$Y = -\left(\frac{\int mbp.\int aap - \int map.\int bap}{\int aap.\int bbp - \int bap.\int bap}\right)$$

und die Präcision dieser Bestimmungen für X und Y

$$\xi = \sqrt{\frac{\int aap.\int bbp - \int bap.\int bap}{\int bbp}}$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\int aap.\int bbp - \int bap.\int bap}{\int aap}}$$

und so fort für ähnliche Fälle.

Endlich muſs noch bemerkt werden, daſs durch die Anwendung dieser Methode zwar die verschiedenen oft zufälligen Fehler der Beobachtung, der Theilung u. f. aber nicht andere constante Fehler, oder solche, welche allen Beobachtungen gemeinschaftlich sind, verbessert werden können.

ZEHNTES KAPITEL.

Terrestrische Messungen.

§. 1.

Wir wenden uns nun zu den Beobachtungen, die man auf der Oberfläche unserer Erde selbst vorzunehmen hat, um die Entfernungen einzelner Orte derselben und ihre gegenseitige Lage sowohl, als auch die Gröfse und Gestalt dieser Erde selbst zu bestimmen.

Das einfachste Mittel, die Distanz zweyer Orte auf der Oberfläche der Erde zu finden, ist die unmittelbare Messung mit einem bekannten Längenmafse z. B. der Toise. Allein wenn diese Distanz grofs ist, so wird jene Methode beschwerlich und oft gänzlich unausführbar. Wollte man z. B. die Länge des Bogens des Meridians A x (Fig 20) zwischen den zwey mehrere Meilen entfernten Orten A, E bestimmen, so kann man in dem ersten Orte A die Richtung des Meridians desselben durch astronomische Beobachtungen bestimmen, und wenn man den letzten Ort E aus A nicht, aber wohl andere näher liegende Orte B, C sehen kann, in dem Dreyecke ABC die drey Winkel messen, deren Summe nur wenig gröfser als 180° seyn wird. Hat man aber die Distanz von zweyen dieser Orte, z. B. die Distanz A B unmittelbar mit der Toise gemessen, so kann man mittels dieser gegebenen Dinge die beyden andern Seiten AC, BC durch Rechnung finden. Da man ferner die Winkel x A B, x AC, das heifst die Azimute von B und C für den Horizont von A kennt, so kann man auch die Linien Ba, Ca und das Stück des Meridians Aa nebst dem Winkel A a B finden. Sieht man ferner aus B und C einen dritten Ort D, so kann man die Winkel CBD, BCD und BDC messen, woraus man die Linien BD, CD und den Theil ab des Meridians erhält. Mifst man ferner noch die Winkel DBE, BDE, BED, so erhält man die Linien BE, DE und Bc, cE und bc. Fällt man endlich von E auf den Meridian eine senkrechte Linie $Ex = Ec \operatorname{Sin} Ecx$ und berechnet $cx = Ec \operatorname{Cos} Ecx$, so ist die Summe

$$Aa + ab + bc + cx = A$$

die gesuchte Länge des Meridians zwischen den beyden Orten A und E.

Hat man überdies in beyden Orten A, E die Polhöhe oder die Zenithdistanz desselben Sterns gemessen, und ist B die Differenz dieser beyden Zenithdistanzen, so findet man aus A und B durch eine einfache Proportion den Werth eines Grades des Meridians in Toisen, also auch den Werth des Umkreises, der Oberfläche, des Halbmessers der Erde in Toisen. Dies wird hinreichen, eine erste Idee von dem Verfahren zu geben, welches man bey Meridianmessungen anzuwenden hat.

Wenn die Entfernung A B zweyer Orte selbst sich nicht gut unmittelbar messen läfst, so mifst man in der Nähe eines dieser Orte A, B, C, D... in einem schicklichen Platze eine Basis MN, und verbindet diese Basis mit dem Dreyecknetze, wodurch man z. B. erhält

$$AN = MN. \frac{\text{Sin } M}{\text{Sin } A} \quad \text{und} \quad AB = AN \frac{\text{Sin } N}{\text{Sin } B}$$

Eine ähnliche zweyte Basis kann man auch an dem Ende des Dreyecknetzes messen, welche dem Ganzen zur Prüfung dienen wird.

§. 2.

Bey der vorläufigen Auswahl der Stationen mufs man darauf sehen, dafs man so viel möglich solche nimmt, die hoch genug sind, um sich am Himmel, nicht auf Berge oder Wälder zu projiziren; dafs die Dreyecke so nahe als möglich gleichseitig sind, wodurch alle zu spitzen oder stumpfen Winkel vermieden werden; dafs die Seiten so grofs als möglich sind u. s. w. Die besten künstlichen Signale sind Lampen mit parabolischen Reverberen; Thürme, Pyramiden u. dgl sind oft von der Sonne schief beleuchtet, und wenn man nach der Mitte des beleuchteten Theils visirt, entfernt man sich von ihrer Axe. Ist C (fig. 21) diese Axe, c der beleuchtete Punkt, so hat man den Winkel B A c statt dem wahren B A C gemessen. Ist

$$CAc = x, \; AC = R, \; Cc = r \text{ und } ACc = \alpha$$

so ist

$$Tg\, x = \frac{\frac{r}{R} \text{ Sin } \alpha}{1 - \frac{r}{R} \text{ Cos}},$$

oder

$$x = \frac{r}{R} \cdot \frac{\text{Sin } \alpha}{\text{Sin } 1''}$$

und x wird zu dem beobachteten Winkel B A c addirt, wenn der beleuchtete Theil c näher bey dem andern Signale B ist, als die Axe C.

Ist h die Höhe des Signalpunktes über dem Boden, und D die Distanz desselben vom Beobachtungspunkte, so mufs man

$$\frac{h}{D \text{ Sin } 1''}$$

zur beobachteten Zenithdistanz addiren, um die Zenithdistanz des Fufspunktes der Station zu erhalten. Ist h' die Höhe des Instruments auf der Station A, so mufs

$$\frac{h'}{D \text{ Sin } 1''}$$

von der beobachteten Zenithdistanz subtrahirt werden, um die zu erhalten, die man auf dem Fufspunkte selbst beobachtet hätte. Ist endlich h'' die Höhe des Signals A über dem Instumente, so mufs

$$\frac{h''}{D \text{ Sin } 1''}$$

zur beobachteten Zenithdistanz addirt werden, um jene zu erhalten, die man von der Spitze des Signals A genommen hätte.

Ist man gehindert, im Mittelpunkte C (Fig. 22) des Signals zu beobachten, mufs man z. B. das Instrument seitwärts in O stellen, so beobachtet man den Winkel AOB statt dem wahren ACB. Sey

$$AOB = O,\ BOC = y$$

also $$COA = O + y \text{ und}$$

$$OC = r,\ AC = R,\ BC = L$$

so ist, wie man leicht findet

$$C = O + \left(\frac{r}{R}\right) \frac{\text{Sin }(O+y)}{\text{Sin } 1''} - \left(\frac{r}{L}\right) \frac{\text{Sin } y}{\text{Sin } 1''}$$

wo R, L die Entfernungen des rechts und links stehenden Signals sind, und wo man die Linie r und den Winkel y immer messen kann.

§. 3.

Zur Basismessung mufs man eine Gegend wählen, die sich leicht und sicher mit dem Dreyecksnetze vereinigen läfst, eine ebene Gegend von festem Boden. Welche Vorsicht in der Auswahl und Behandlung der Mafsstäbe anzuwenden sey, kann man in Delambres Astronomie III. Band und in dessen Base du syst. métrique nachsehen. Besteht die Basis aus zwey geraden Linien b, c, welche den sehr stumpfen Winkel A unter einander bilden, so ist die Entfernung d ihrer beyden äufsersten Punkte

$$d = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A}$$

$$= (b+c)\left(1 - \frac{2.\, bc \operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2} A}{(b+c)^2}\right)$$

Eigentlich erhält man durch die aufeinander folgende Nebeneinanderlegung der Toise zur Basis ein Polygon von mehrern geraden Linien, aber man wird sich leicht überzeugen, daſs die Differenz dieses Polygons von einem Bogen des gröſsten Kreises ganz unbeträchtlich ist. Um endlich die so erhaltene Basis auf das Niveau des Meeres zu reduziren, sey R der Erdhalbmesser, H die Höhe des Bodens über dem Meere, B die gemessene Basis, so ist die reduzirte Basis

$$B' = B\left(\frac{R}{R+H}\right) = B - \frac{B}{R} .\, H - $$

§. 4.

Wären die drey Punkte des Dreyecks auf der Oberfläche derselben Kugel, so wäre das Dreyeck ein sphärisches. Da aber die drey Signale gewöhnlich ungleiche Höhen haben, so reduzirt man jeden gemessenen Winkel auf den Horizont. Sind $90 + \alpha$, $90 + \beta$ die Zenithdistanzen der beyden Signalpunkte, und A der zwischen ihnen beobachtete, und endlich $A + x$ der auf den Horizont reduzirte Winkel, so ist

$$\operatorname{Cos}(A+x) = \frac{\operatorname{Cos} A - \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta}$$

woraus man leicht ableitet

$$\frac{x}{\operatorname{Sin} 1''} = p^2 \operatorname{Tg} \tfrac{1}{2} A - q^2 \operatorname{Cotg} \tfrac{1}{2} A$$

$$\text{wenn } p = \frac{\alpha+\beta}{2},\; q = \frac{\alpha-\beta}{2} \text{ ist.}$$

Will man überdieſs diesen horizontalen Winkel, der von den beyden Bogen gebildet wird, welche den Beobachtungspunkt mit den beyden andern Signalen verbinden, auf den Winkel bringen, welchen die Chorden dieser Bogen in dem Beobachtungsorte bilden, so seyen $2\alpha'$: $2\beta'$ diese Bogen und wie zuvor $A + x = B$ der Winkel der Bogen, so wie $B + y$ der Winkel der Chorden, so hat man, da der Winkel der Chorde eines Bogens mit dessen Tangente der Hälfte dieses Bogens gleich ist,

$$\operatorname{Cos}(B + y) = \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} \alpha' \operatorname{Cos} \beta' + \operatorname{Sin} \alpha' \operatorname{Sin} \beta'$$

also wieder

$$\frac{y}{\operatorname{Sin} 1''} = q'^2 \operatorname{Cotg} \frac{B}{2} - p'^2 \operatorname{Tg} \frac{B}{2}$$

$$\text{wenn } p' = \frac{\alpha'+\beta'}{\alpha},\ q' = \frac{\alpha'-\beta'}{2} \text{ ist.}$$

Reduzirt man so alle Dreyecke auf ihre Chorden, so mufs man auch die Basis B', die ein Bogen des gröfsten Kreises ist, auf ihre Chorde bringen, und man hat

$$\text{Chorde } B' = \text{Bog } B' - \frac{(\text{Bog } B')^3}{24 R^2}$$

Will man aber das ganze Netz als ein Aggregat von sphärischen Dreyecken behandeln, so fällt die Reduction auf die Chorde weg, und man wird die Basis B', die ein Bogen des gröfsten Kreises ist, auf ihre Sinus bringen, wodurch man hat

$$\text{Sin } B' = \text{Bog } B' - \frac{(\text{Bog } B')^3}{6 R^2}$$

und dann hat man in dem Dreyecke MAN (Fig. 20)

$$\text{Sin AM} = \frac{\text{Sin N}}{\text{Sin A}} \text{ Sin } B'$$

$$\text{Sin AN} = \frac{\text{Sin M}}{\text{Sin A}} \text{ Sin } B'$$

und so für die übrigen Dreyecke. Alle so erhaltenen Seiten der Dreyecke werden Sinus seyn, aber in dem gebrauchten Längenmafse z. B. der Toise ausgedrückt, wenn der Halbmesser R der Erde eben so ausgedrückt wird.

Auch kann man sehr bequem die Cap. I. §. 3. gegebene Methode anwenden, und diese sphärischen Dreyecke wie geradlinichte behandeln. Sind ABC die Winkel, und $\alpha\,\beta\,\gamma$ die gegenüberstehenden Seiten des sphärischen Dreyeckes, so sey

$$A' = A - \tfrac{1}{6}\,\beta\,\gamma\,.\,\text{Sin } A$$

$$B' = B - \tfrac{1}{6}\,\alpha\,\gamma \text{ Sin } B$$

$$C' = C - \tfrac{1}{6}\,\alpha\,\beta \text{ Sin } C$$

so hat man

$$\beta = \alpha \frac{\text{Sin } B'}{\text{Sin } A'},$$

$$\gamma = \alpha \frac{\text{Sin } C'}{\text{Sin } A'} \text{ u. s. w.}$$

Wenn endlich alle Dreyecke berechnet sind, so mufs man die Richtung und die Länge des Meridians, der durch das ganze Netz läuft, bestimmen. Zu diesem Zwecke mufs man ein, besser mehrere, Azimute an verschiedenen Stationen beobachten: das sicherste Mittel ist ein Mittagsrohr, welches man auf eine der Stationen genau in den Meridian stellt, mit dessen Hilfe man ein künstliches Signal im Meridian selbst errichtet, und dasselbe durch Winkelmessungen mit den übrigen Dreyecken verbindet.

§. 5.

Ehe wir zu den verschiedenen Untersuchungen übergehen, welche man mit den so erhaltenen Distanzen und Winkeln anstellen kann, wird es gut seyn, einige allgemeine Betrachtungen voraus zu schicken.

Betrachtet man, wie dies gewöhnlich geschieht, die Erde als einen Körper, welcher durch die Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden ist, so sey CDB (Fig. 23) eine Ellipse, deren halbe grofse Axe BC = a und halbe kleine DC = b ist. Mit dem Halbmesser CB = Cd = a beschreibe man aus dem Mittelpunkte C der Ellipse einen Kreis dmB und ziehe mMP senkrecht auf CB, die Tangente MT in M und MN, darauf senkrecht und bis zur kleinen Axe DCN verlängert.

Sey

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

die Excentricität und

$$\alpha = \frac{a - b}{b}$$

die Abplattung der Erde, also

$$\varepsilon^2 = 2\,\alpha - 3\,\alpha^2 + 4\,\alpha^3 - 5\,\alpha^4 + \ldots$$

ferner sey

$$CP = x,\ PM = y,\ CM = r$$

und MEB = φ die beobachtete,

MCB = φ' die geocentrische Polhöhe

des Ortes M, so ist, wie man aus der bekannten Gleichung

$$a^2\,y^2 + b^2\,x^2 = a^2\,b^2$$

der Ellipse leicht findet

$$r = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi'}} = a\sqrt{\frac{1 + (1-\varepsilon^2)^2 \operatorname{Tg}^2 \varphi}{1 + (1-\varepsilon^2) \operatorname{Tg}^2 \varphi}}$$

$$x = \frac{b \operatorname{Cos} \varphi'}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi'}} = \frac{a \operatorname{Cos} \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi}}$$

$$y = \frac{b \operatorname{Sin} \varphi'}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi'}} = \frac{a\,(1-\varepsilon^2) \operatorname{Sin} \varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi}}$$

die Normale

$$MN = \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi}}$$

und endlich der Krümmungshalbmesser ϱ der Ellipse in M

$$\varrho = a\,(1-\varepsilon^2).\,(1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi)^{-}$$

I. Ist g der Meridiangrad der Breite φ, so ist

$$g = \frac{\varrho\,\pi}{180} = \frac{a\,\pi\,(1-\varepsilon^2)}{180\,(1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

wo π das Verhältnifs des Umfanges zum Durchmesser des Kreises bezeichnet. Entwickelt man eben so $g_,$ für $\varphi_,$ so ist

$$g = g_,.\left(\frac{1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi_,}{1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ und}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{g^{\frac{2}{3}} - g_,^{\frac{2}{3}}}{g^{\frac{2}{3}} \operatorname{Sin}^2 \varphi - g_,^{\frac{2}{3}} \operatorname{Sin}^2 \varphi_,}$$

Bezeichnet eben so γ den Längengrad für die Breite φ, so ist

$$\gamma = \frac{\pi\,x}{180} = \frac{a\,\pi \operatorname{Cos} \varphi}{180.\sqrt{1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi}}$$

II. Für den Bogen MB $= s$ der Ellipse vom Aequator bis zu dem Punkte, dessen Breite φ ist, hat man

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{a\,(1-\varepsilon^2)\,d\varphi}{(1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

oder was dasselbe ist

$$ds = \varrho.\,d\varphi$$

Entwickelt man diesen Ausdruck und integrirt, so erhält man, wenn man der Kürze wegen

$$\alpha = \frac{3}{\varepsilon^2},$$

$$\beta = \frac{3.5}{4^2}\,\alpha,$$

$$\gamma = \frac{5.7}{6^2}\,\beta,$$

$$\delta = \frac{7 \cdot 9}{8^2} \gamma \text{ --- setzt,}$$

$$s = \frac{b^2}{a} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (1 + \alpha \varepsilon^2 + \beta \varepsilon^4 + \gamma \varepsilon^6 + \delta \varepsilon^8 +) \frac{\pi \varphi}{180} \\ - (\alpha \varepsilon^2 + \beta \varepsilon^4 + \gamma \varepsilon^6 + \delta \varepsilon^8 +) \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} \varphi \\ - \frac{2}{3} (\beta \varepsilon^4 + \gamma \varepsilon^6 + \delta \varepsilon^8 +) \operatorname{Sin}^3 \varphi \operatorname{Cos} \varphi \\ - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} (\gamma \varepsilon^6 + \delta \varepsilon^8 +) \operatorname{Sin}^5 \varphi \operatorname{Cos} \varphi \\ - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} (\delta \varepsilon^8 +) \operatorname{Sin}^7 \varphi \operatorname{Cos} \varphi \end{array} \right\}$$

Für $\varphi = 90°$ verschwinden alle Glieder dieser Reihe aufser dem ersten, also drückt das erste Glied derselben die Länge Q eines Quadranten des Meridiaus aus, oder es ist

$$Q = \frac{b^2}{a} (1 + \alpha \varepsilon^2 + \beta \varepsilon^4 + \gamma \varepsilon^6 +) \frac{\pi}{2}$$

Ist Q und ε bekannt, so ist

$$a = \frac{2 Q}{\pi} \left(1 + \tfrac{1}{4} \varepsilon^2 + \tfrac{7}{64} \varepsilon^4 + \tfrac{15}{256} \varepsilon^6 + \right)$$

$$b = \frac{2 Q}{\pi} \left(1 - \tfrac{1}{4} \varepsilon^2 - \tfrac{9}{64} \varepsilon^4 - \tfrac{23}{256} \varepsilon^6 - \right)$$

Endlich ist die Oberfläche Z einer Zone zwischen dem Aequator und dem Parallelkreise der Breite φ gleich

$$Z = 2 \pi b^2 (\operatorname{Sin} \varphi + \tfrac{2}{3} \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^3 \varphi + \tfrac{3}{5} \varepsilon^4 \operatorname{Sin}^5 \varphi + \tfrac{4}{7} \varepsilon^6 \operatorname{Sin}^7 \varphi +)$$

§. 6.

Die unterscheidende Eigenschaft der durch geodätische Operationen gezogenen Linien auf der Oberfläche der Erde ist folgende. Man bildet, um z. B. die geodätische Linie A a b c . . fig. (29) zu beschreiben, ein erstes horizontales Dreyeck ABC, dessen ein Winkel zur Spitze den Anfangspunkt dieser Linie hat, und dessen zwey andere Winkel zur Spitze irgend zwey sichtbare Gegenstände B, C haben. Man bestimmt die Richtung der ersten Seite der krummen Linie gegen die Seiten des Dreyecks, oder die Winkel BAa, CAa und überdiefs ihre Länge A a bis zu dem Punkt, wo sie die Seite Bc schneidet. Dann bildet man ein zweytes horizontales Dreyeck BCD mit den beyden vorigen Gegenständen B, C und einem dritten D. Dieses zweyte Dreyeck ist nicht in der Ebene des ersten, es hat nur eine Seite BC mit ihm gemein. Die Verlängerung der ersten Seite A a der krummen Linie erhebt sich also über die Ebene des zweyten Dreyecks: man biegt sie aber gegen diese Ebene herab, und zwar so, dafs sie immer dieselben Winkel mit der den beyden Dreyecken gemeinschaftlichen Linie BC mache, und man sieht leicht, dafs man sie nach einer auf diese Ebene senkrechten Linie biegen mufs. So ist also die erste Seite der geodätischen Linie, deren Richtung willkürlich seyn kann, eine Tangente an der Oberfläche der Erde; ihre zweyte Seite ist die Verlängerung dieser Tangente nach einer Vertikallinie gebogen; ihre dritte Seite ist die Verlängerung der zweyten, nach einer Vertikallinie gebogen, und so fort für die übrigen.

Daraus folgt, dafs die so gezogene geodätische Linie A a .. x die kürzeste Linie ist, welche man auf der Oberfläche der Erde zwischen den zwey Punkten A und x ziehen kann. Denn ist D M B E (fig. 24) der Durchschnitt zweyer Ebenen, in deren erster der Punkt A, und in der zweyten der Punkt C liegt, so ist die kürzeste Linie zwischen A und C jene, welche mit D E zu beyden Seiten gleiche Winkel bildet. Ist nämlich $AD = a$ und $EC = c$ senkrecht auf dem Durchschnitte

$$DE = b \text{ und ist } EM = x \text{, so ist}$$

$$MC^2 = c^2 + x^2,$$

$$AM^2 = a^2 + (b - x)^2 \text{ also}$$

$$AM + MC = \sqrt{c^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + (b - x)^2}$$

Setzt man das Differential dieses Ausdrucks gleich Null, so erhält man

$$x : \sqrt{c^2 + x^2} = (b - x) : \sqrt{a^2 + (b - x)^2}$$

das heifst

$$EM : MC = DM : AM$$

und aus dieser Proportion folgt, dafs

$$AMD = EMC$$

seyn mufs, wenn AMC die kürzeste Linie ist.

I Wir wollen daher die allgemeine Gleichung der kürzesten Linie auf einer gegebenen Oberfläche suchen.

$$\text{Ist } u = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \ldots\right)$$

irgend eine Function der Gröfsen

$$x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx} \ldots,$$

welcher Gröfsen Abhängigkeit von einander durch die Gleichung

$$\omega = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots z, \frac{dz}{dx} \ldots\right.$$

gegeben seyn soll, so hat man bekanntlich für den gröfsten oder kleinsten Werth der Function u folgende Ausdrücke

$$o = \frac{d.\,f\,(y)}{d\,y} - d.\,\frac{d\,f\,(d\,y)}{d^2 y} + d^2.\,\frac{d\,f\,(d^2 y)}{d^3 y} \ldots$$

$$+ \mu.\,\frac{d\,\varphi\,(y)}{dy} - d.\,\frac{\mu\,d\,\varphi\,(dy)}{d^2 y} + d^2.\,\frac{\mu\,d\,\varphi\,(d^2 y)}{d^3 y} -$$

und

$$o = \frac{d.\,f\,(z)}{d\,z} - d.\,\frac{d\,f\,(dz)}{d^2 z} + \ldots$$

$$+ \mu.\,\frac{d\,\varphi\,(z)}{dz} - d.\,\frac{\mu\,d\,\varphi\,(dz)}{d^2 z} +$$

wo μ einen willkührlichen unbestimmten Factor, und wo

$$\frac{d\,f\,(y)}{d\,y} \quad \text{oder} \quad \frac{d\,f\,(d\,y)}{d^2 y} \ldots$$

das Differential der Function u blofs in Beziehung auf die Gröfse y oder d y . . durch d y oder d^2 y dividirt, bezeichnet.

Ist, wie in unserm Falle, die Oberfläche, auf welcher die kürzeste Linie bestimmt werden soll, durch eine endliche Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten x y z, ohne Differentialien, gegeben, so werden die vorhergehenden Ausdrücke viel einfacher. Es ist nämlich die zweyte der gegebenen Gleichungen

$$\omega = \varphi\,(x,\,y,\,z)$$

und das Element des Bogens der gesuchten Linie

$$u = \sqrt{d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2}$$

also hat man

$$d.\,\frac{d\,f\,(d\,y)}{d^2 y} = d.\,\frac{d\,y}{d\,s},$$

$$d.\,\frac{d\,f\,(d\,z)}{d^2 z} = d.\,\frac{d\,z}{d\,s},$$

$$\mu.\,\frac{d\,\varphi\,(y)}{d\,y} = \mu.\left(\frac{d\,\omega}{dy}\right),$$

$$\mu.\,\frac{d\,\varphi\,(z)}{d\,z} = \mu.\left(\frac{d\,\omega}{d\,z}\right)$$

und daraus folgt

$$\left.\begin{array}{l} \mu\left(\frac{d\,\omega}{d\,y}\right) - d.\,\frac{d\,y}{d\,s} = o \\ \text{und eben so} \\ \mu\left(\frac{d\,\omega}{d\,z}\right) - d.\,\frac{d\,z}{d\,s} = o \\ \mu\left(\frac{d\,\omega}{d\,x}\right) - d.\,\frac{d\,x}{d\,s} = o \end{array}\right\}$$

Multiplicirt man aber die erste dieser Gleichungen durch

$$\left(\frac{d\,\omega}{d\,z}\right) \text{ und}$$

die zweyte durch

$$\left(\frac{d\,\omega}{d\,y}\right),$$

so gibt ihr Unterschied

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{d\,\omega}{d\,z}\right) d.\,\frac{d\,y}{d\,s} - \left(\frac{d\,\omega}{d\,y}\right) d.\,\frac{d\,z}{d\,s} = o \\ \text{und eben so} \\ \left(\frac{d\,\omega}{d\,x}\right) d.\,\frac{d\,z}{d\,s} - \left(\frac{d\,\omega}{d\,z}\right) d.\,\frac{d\,x}{d\,s} = o \\ \left(\frac{d\,\omega}{d\,x}\right) d.\,\frac{d\,y}{d\,s} - \left(\frac{d\,\omega}{d\,y}\right) d.\,\frac{d\,x}{d\,s} = o \end{array}\right\} \text{I.}$$

In diesen Gleichungen ist kein Differential beständig angenommen worden. Nimmt man also d s constant an, so ist

$$d.\,\frac{d\,x}{d\,s} = \frac{d^2x}{d\,s},$$

$$d.\,\frac{d\,y}{d\,s} = \frac{d^2y}{d\,s},$$

$$d.\,\frac{d\,z}{d\,s} = \frac{d^2z}{d\,s},$$

und die vorhergehenden Gleichungen gehen in folgende über

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{d\,\omega}{d\,z}\right) d^2 y - \left(\frac{d\,\omega}{d\,y}\right) d^2 z = o \\ \left(\frac{d\,\omega}{d\,x}\right) d^2 z - \left(\frac{d\,\omega}{d\,z}\right) d^2 x = o \\ \left(\frac{d\,\omega}{d\,x}\right) d^2 y - \left(\frac{d\,\omega}{d\,y}\right) d^2 x = o \end{array}\right\} \text{II.}$$

welches die Gleichungen der kürzesten Linie sind, die wir suchten.

Für eine Oberfläche, die durch die Rotation irgend einer krummen Linie um die Axe der x entstanden ist, ist die Gleichung der Oberfläche

$$\omega = \varphi\,(r, x) = o$$

$$\text{wo } r^2 = y^2 + z^2 \text{ oder}$$

$$r\,dr = y\,dy + z\,dz,$$

und daraus folgt

$$\left(\frac{d\omega}{dz}\right) = \frac{z}{r}\left(\frac{d\omega}{dr}\right)$$

$$\left(\frac{d\omega}{dy}\right) = \frac{y}{r}\left(\frac{d\omega}{dr}\right)$$

also wird die erste der Gleichungen I.

$$z\,d.\,\frac{dy}{ds} - y\,d.\,\frac{dz}{ds} = o$$

deren Integral, für ds = Const.

$$z\,dy - y\,dz = A\,ds \;\text{- - -}\; (\text{III.})$$

wo A die Constante der Integration ist. Diese Gleichung III. mit der gegebenen Gleichung

$$\varphi\,(r, x) = o$$

reicht hin, die gesuchte kürzeste Linie zu bestimmen.

II. Man könnte dieselben Gleichungen noch einfacher durch folgende Betrachtungen finden. Die geodätische Linie ist nach dem Vorhergehenden einerley mit der, welche ein auf der gegebenen Oberfläche zwischen den beyden Punkten frey gespannter Faden beschreiben würde. Der Faden ist aber dann frey gespannt, oder alle seine Punkte sind dann unter einander im Gleichgewicht, wenn der Druck, welchen die Spannung auf die Oberfläche ausübt, in allen Punkten des Fadens senkrecht auf diese Oberfläche ausgeübt wird. Dieser Druck hat aber bekanntlich immer in der Ebene des Krümmungshalbmessers statt: also ist die kürzeste Linie auf einer Fläche die, deren Krümmungshalbmesser alle auf dieser Fläche senkrecht stehen.

Ist also

$$\omega = \varphi\,(x\,y\,z) = o$$

die Gleichung der Fläche, und

$$x + Ay + Bz = o$$

die Gleichung der Ebene der Krümmungshalbmesser, so ist die Gleichung der die Fläche berührenden Ebene

$$x\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+y\left(\frac{d\omega}{dy}\right)+z\left(\frac{d\omega}{dz}\right)+C=0$$

Da aber die beyden letzten Ebenen sich unter einem rechten Winkel schneiden sollen, so ist

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+A\left(\frac{d\omega}{dy}\right)+B\left(\frac{d\omega}{dz}\right)=0\cdots(a)$$

Die Gleichungen

$$\omega=0 \text{ und } x+Ay+Bz=0$$

aber geben, wenn man sie differentiirt,

$$d\omega=\left(\frac{d\omega}{dx}\right)dx+\left(\frac{d\omega}{dy}\right)dy+\left(\frac{d\omega}{dz}\right)dz=0\cdots(b)$$

$$dx+Ady+Bdz=0$$

$$Ad^2y+Bd^2z=0$$

woraus man erhält

$$A=\frac{dx\,d^2z}{dz\,d^2y-dy\,d^2z}\quad\text{und}$$

$$B=-\frac{dx\,d^2y}{dz\,d^2y-dy\,d^2z}$$

Eliminirt man aber

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$$

aus den Gleichungen a, b, substituirt die erhaltenen Werthe von A, B und dividirt durch

$$ds^2=(dx^2+dy^2+dz^2)$$

so hat man

$$\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\frac{dx^2d^2z+dy^2d^2z-dy\,dz\,d^2y}{ds^2}$$

$$-\left(\frac{d\omega}{dz}\right)\frac{dx^2d^2y+dz^2d^2y-dy\,dz\,d^2z}{ds^2}=0$$

Es ist aber $d^2s=\frac{dy\,d^2y+dz\,d^2z}{ds}$

also auch

$$d.\frac{dz}{ds}=\frac{(ds\,d^2z-dz\,d^2s)\,ds}{ds^3}$$

und eben so

$$d.\frac{dy}{ds}=\frac{(ds\,d^2y-dy\,d^2s)\,ds}{ds^3}$$

und diese Ausdrücke sind offenbar den Factorn von

$$\left(\frac{d\omega}{dy}\right), \text{ und von } \left(\frac{d\omega}{dz}\right)$$

der letzten Gleichung gleich, also ist diese Gleichung

$$\left(\frac{d\omega}{dy}\right) d. \frac{dz}{ds} - \left(\frac{d\omega}{dz}\right) d. \frac{dy}{ds} = o$$

welcher Ausdruck mit der ersten der Gleichungen I. identisch ist.

Eine dritte merkwürdige Ableitung jener Gleichungen für die kürzeste Linie folgt endlich noch aus der Betrachtung, daſs die krumme Linie, welche ein Körper, der gezwungen ist, auf einer gegebenen Fläche zu bleiben, auf dieser Fläche beschreibt, wenn keine äuſseren Kräfte auf ihn wirken, immer die kürzeste Linie unter allen ist, welche man in dieser Fläche zwischen zwey äuſsersten gegebenen Punkten ziehen kann.

III. Eigentlich gehört diese Aufgabe in das Gebiet der Variationsrechnung, von welcher wir einen der vorzüglichsten Sätze hier kurz entwickeln wollen.

Es sey U eine Funktion von x y und z und den Differentialien dieser Gröſsen, und y sowohl als z eine Function von x, wie das bey den Gleichungen der Curven von doppelter Krümmung der Fall ist, so kann das Integral

$$\int U\,dx$$

als irgend eine Function dieser Curve, ihr Bogen, ihre Fläche u. f. zwischen zwey Endpunkten dieser Curve betrachtet werden. Man soll von allen krummen Linien, welche zwischen jenen zwey gegebenen Endpunkten gezogen werden können, diejenige finden, in welcher das Integral $\int U\,dx$ ein Gröſstes oder ein Kleinstes ist.

Es sey der Kürze wegen $dy = p\,dx, dp = q\,dx, dq = r\,dx..$ und

$$dz = p'dx, dp' = q'dx, dq' = r'dx...$$

und da, nach der Voraussetzung, U eine Function von $y\,z\,p\,p'$, $q\,q'\ldots$ ist, so kann man annehmen

$$dU = N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr +$$
$$+ N'dz + P'dp' + Q'dq' + R'dr' +$$

Bezeichnet man die willkührlichen Veränderungen, oder die Variationen von y und z durch δy und δz, so hat man für die Variation des gegebenen Integrals

$$\delta . \int U\,dx = \int \delta . (U\,dx) = \int (U . \delta dx + dx \delta U)$$
$$= U \delta x - \int \delta x . dU + \int dx \delta U$$

Betrachtet man aber Anfangs die Gröſse U bloſs als eine Function von x und y und ihren Differentialien, so ist $z = p' = q' \ldots$ Null, und wenn man den oben gegebenen Werth von

$$d\,U = N\,d\,y + P\,d\,p + \ldots$$

so wie den Werth von

$$\delta\,U = N\,\delta y + P\,\delta p + \ldots$$

in der letzten Gleichung substituirt, so erhält man

$$\delta.\int U\,d\,x = U\,\delta x + \int N\,d\,x\,(\delta y - p\,\delta x)$$

$$+ \int P\;d.\,(\delta y - p\,\delta x) + \int Q\,d.\,(\delta p - q\,\delta x) + \ldots$$

Um diesen Ausdruck abzukürzen, sey $\omega = \delta y - p\,\delta x$, so ist

$$\delta p - q\,\delta x = \frac{d\,\omega}{d\,x},$$

$$\delta q - r\,\delta x = \frac{1}{d\,x}.\;d.\;\frac{d\,\omega}{d\,x}\ \text{u. f.}$$

also

$$\delta.\int U\,d\,x = U\,\delta x + \int N\,\omega\,d\,x + \int P\,d\,\omega$$

$$+ \int Q\;d.\;\frac{d\,\omega}{d\,x} + \int R.\,d.\,\frac{1}{d\,x}.\;d.\;\frac{d\,\omega}{d\,x} +$$

Integrirt man aber diese Ausdrücke theilweise, so ist

$$\int Q\;d.\;\frac{d\,\omega}{d\,x} = Q\,\frac{d\,\omega}{d\,x} - \frac{dQ}{d\,x}.\,\omega + \int \omega.\,d.\,\frac{dQ}{d\,x}$$

$$\int R\;d.\;\frac{1}{d\,x}.\;d.\;\frac{d\,\omega}{d\,x} = \frac{R}{d\,x}\;d.\;\frac{d\,\omega}{d\,x} - \frac{d\,R}{d\,x}.\;\frac{d\,\omega}{d\,x}$$

$$+ \frac{1}{d\,x}\;d.\;\frac{d\,R}{d\,x}.\;\omega - \int \omega.\;d\;\frac{1}{d\,x}.\;d.\;\frac{d\,R}{d\,x} \ldots$$

Substituirt man diese Ausdrücke in der vorhergehenden Gleichung, und bemerkt man, daſs, wenn z nicht Null ist, man noch einer zweyten, dem vorigen ganz ähnlichen Ausdruck erhält, in welchem man bloſs $N\;P\;Q \ldots$ in $N'\;P'\;Q' \ldots$

und $\qquad \omega = \delta y - p\,\delta\,x$

in $\qquad \omega' = \delta z - p'\,\delta\;x$

verwandelt, so erhält man für die vollständige Variation des gegebenen Integrals, wenn $d\,x$ constant angenommen wird,

$$\delta.\int U\,d\,x = \int \omega\,d\,x\left(N - \frac{d\,P}{d\,x} + \frac{d^2Q}{d\,x^2} - \frac{d^3R}{d\,x^3} + \right)$$

$$+ \int \omega'\,d\,x\left(N' - \frac{dP'}{d\,x} + \frac{d^2Q'}{d\,x^2} - \frac{d^3R'}{d\,x^3} + \right)$$

$$+U\delta x+\omega\left(P-\frac{dQ}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}-\frac{d^3S}{dx^3}+\right)$$
$$+\omega'\left(P'-\frac{dQ'}{dx}+\frac{d^2R'}{dx^2}-\frac{d^3S'}{dx^3}+\right)$$
$$+\frac{d\omega}{dx}\left(Q-\frac{dR}{dx}+\frac{d^2S}{dx^2}-\right)$$
$$+\frac{d\omega'}{dx}\left(Q'-\frac{dR'}{dx}+\frac{d^2S'}{dx^2}-\right)$$
$$+\frac{d^2\omega}{dx^2}\left(R-\frac{dS}{dx}+\right)+\cdots$$

Um daher den gesuchten gröſsten oder kleinsten Werth dieses Integrals zu erhalten, darf man nur, nach den bekannten Vorschriften der Differentialrechnung, die gefundene Variation gleich Null setzen, wo dann ein Gröſstes oder ein Kleinstes statt haben wird, nach dem der Werth des Integrals

$$\int \delta^2 U.dx$$

zwischen denselben Gränzen, wie vorhin das Integral $\int U dx$ genommen, negativ oder positiv ist.

Wenn man aber die gefundene Variation gleich Null setzt, so wird man bemerken, daſs diese Variation aus zwey unter einander völlig verschiedenen Theilen besteht, deren einer das Integralzeichen vor sich hat, während der andere davon frey ist, und daſs man daher jeden dieser Theile für sich gleich Null setzen muſs.

Setzt man den ersten Theil dieser Variation gleich Null, so wird man haben

$$\left.\begin{aligned} o&=N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\\ o&=N'-\frac{dP'}{dx}+\frac{d^2Q'}{dx^2}-\end{aligned}\right\}$$

und dies werden die Gleichungen der gesuchten Linie seyn, in welcher das Integral

$$\int U dx$$

zwischen den gegebenen Gränzen genommen, ein Gröſstes oder ein Kleinstes ist. Da diese Gleichungen erste .. zweyte .. Differentialien enthalten, so wird ihre erste, zweyte... Integration auch eine, zwey... Constanten einführen, und die Bestimmung dieser Constanten wird der zweyte Theil der gegebenen Gleichung geben, welcher das Integralzeichen nicht enthält. Dieser zweyte Theil wird nämlich die Bedingungen enthalten, welche für die Endpunkte jener Curve festgesetzt werden, daſs sie sich z. B. an zwey fixen Punkten enden, oder daſs sie von zwey andern gegebenen Curven begränzt seyn, oder daſs sie diese andern Curven unter einem gegebenen Winkel schneiden soll u. f.

Man bemerke noch, daſs jene ersten Gleichungen nichts anders sind, als die Bedingungsgleichungen der Integrabilität der gegebenen Gleichung U d x. Denn wenn diese Gleichungen gleich Null sind, so enthält die Variation des Ausdruckes

$$\int U\,dx$$

kein Integralzeichen mehr, oder diese Variation hängt für alle möglichen Werthe von x y z nur von den Variationen der Endpunkte der Curve ab, was nicht möglich wäre, wenn U d x nicht für sich integrabel ist.

Nimmt man also bloſs auf das erste Glied jener Variation Rücksicht, welche das Integralzeichen enthält, so hat man, wenn man die Variation von x, oder δx gleich Null setzt, für die gesuchte Curve

$$\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \right).\,\delta y$$

$$+ \left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2}\right).\,\delta z = 0 \quad \text{- - - (1)}$$

und wenn die zwey unbekannten Gröſsen y und z von einander unabhängig sind, so werden es auch ihre Variationen seyn, daher die letzte Gleichung den zwey folgenden gleich gelten wird

$$\left.\begin{aligned} N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - &= 0 \\ N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

und diese beyden Gleichungen werden die der gesuchten Curve seyn.

Sind aber die Gröſsen y und z durch irgend eine gegebene Bedingungsgleichung von einander abhängig, soll z. B. die gesuchte Curve auf irgend einer gegebenen Fläche liegen, deren Gleichung L = o ist, so wird man für diese Bedingungsgleichung haben

$$\left(\frac{dL}{dy}\right).\,\delta y + \left(\frac{dL}{dz}\right).\,\delta z = 0$$

und wenn man aus dieser Gleichung und der gegebenen (1) eine der zwey Grössen $\delta y, \delta z$ eliminirt, wodurch auch die andere entfernt wird, so hat man

$$\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \right) \cdot \left(\frac{dL}{dz}\right) - \left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \right) \cdot \left(\frac{dL}{dy}\right) = 0 \text{ -- } (3)$$

und die Gleichung (3), verbunden mit der Gleichung $L = 0$ wird für jeden besondern Fall die gesuchten Werthe von y und z geben. Auch kann man diesen Fall auf den ersten zurückführen, wenn man statt den Gleichungen (2) folgende annimmt,

$$\left.\begin{aligned} N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} \text{ --- } + \lambda\left(\frac{dL}{dy}\right) &= 0 \\ N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} \text{ --- } + \lambda\left(\frac{dL}{dz}\right) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

wo λ ein unbestimmter Factor ist. Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Grösse λ, so erhält man wieder die Gleichung (3); sind aber die Grössen y und z von einander unabhängig, so ist $\lambda = 0$, und man erhält die Gleichungen (2).

Um das Vorhergehende durch ein Beyspiel zu erläutern, suche man die kürzeste Linie zwischen zwey gegebenen Punkten. Da der allgemeine Ausdruck der Linie

$$s = \int (dx^2 + dy^2 + dz^2) = \int dx . \sqrt{1+p^2+p'^2}$$

ist, so hat man

$$U = \sqrt{1+p^2+p'^2}, \; dU = \frac{p\,dp + p'\,dp'}{\sqrt{1+p^2+p'^2}}$$

$$P = \frac{p}{U}, \; P' = \frac{p'}{U} \text{ und}$$

$$N = N' = Q = Q' = 0.$$

Daher ist der Theil des vorhergehenden Ausdruckes unter dem Integralzeichen

$$\frac{dP}{dx} = 0, \; \frac{dP'}{dx} = 0,$$

oder wenn man integrirt,

$$\frac{dy}{dx} = A, \; \frac{dz}{dx} = B,$$

und wenn man noch einmal integrirt.

$$y = Ax + B$$

$$z = Bx + B'$$

also die gesuchte Curve eine gerade Linie. Sind die beyden äufsersten Punkte derselben fix, so verschwindet der andere Theil der Variation, welcher das Integralzeichen nicht enthält. Soll aber z. B. die gesuchte Curve an ihren Endpunkten durch zwey krumme Flächen begränzt seyn, deren Gleichungen sind

$$dz' = m' dx' + n' dy' \text{ für den Anfangspunkt}$$

$$dz'' = m'' dx'' + n'' dy'' \text{ für den Endpunkt der Curve,}$$

so ist der andere Theil der Variation

$$U \delta x + \omega P + \omega' P' = o \text{ oder}$$

$$U \delta x + (\delta y - p \delta x) P + (\delta z - p' \delta x) P' = o$$

Substituirt man aber in den beyden letzten Gleichungen für dz' und dz'' die Werthe dieser Gröfsen aus den vorletzten Gleichungen, und nimmt ihre Differenzen, und setzt endlich in den erhaltenen Ausdrücken die Factoren der unter sich unabhängigen Variationen $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta y'$, $\delta y''$; jeden für sich gleich Null, so erhält man

$$1 + m' \frac{dz'}{dx'} = o \quad \text{und} \quad 1 + m'' \frac{dz''}{dx''} = o$$

$$1 + n' \frac{dz'}{dy'} = o \qquad 1 + n'' \frac{dz''}{dy''} = o$$

und da diese Gleichungen die der Normalen auf jene beyden Flächen sind, so mufs die gesuchte kürzeste Curve, oder die gefundene gerade Linie, auf jenen beyden Flächen senkrecht stehen.

Wollte man aber die kürzeste Linie auf einer gegebenen Fläche zwischen zwey gegebenen Punkten dieser Fläche erhalten, so sey die Gleichung dieser Fläche

$$L = o = A dx + B dy + C dz$$

wo A, B, C Functionen von x y z sind. Dies vorausgesetzt hat man, wie zuvor,

$$U = \sqrt{1 + p^2 + p'^2},$$

$$P = \frac{p}{U}, \; P' = \frac{p'}{U}$$

$$N = N' = o$$

und daher die Gleichung (3)

$$\left(\frac{dL}{dz}\right) \cdot dP - \left(\frac{dL}{dy}\right) \cdot dP' = o, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{dL}{dz}\right). d. \frac{p}{U} - \left(\frac{dL}{dy}\right). d. \frac{p'}{U} = o$$

oder da

$$U\,dx = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds \text{ ist},$$

$$\left(\frac{dL}{dz}\right). d. \frac{dy}{ds} - \left(\frac{dL}{dy}\right). d. \frac{dz}{ds} = o$$

für die Gleichung der kürzesten Linie auf der gegebenen Fläche, wie wir früher schon gefunden haben. Für die Kugel z. B. ist

$$A = x, \; B = y, \; C = z$$

und

$$L = o = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$$

wenn r der Halbmesser der Kugel ist. Die letzte Gleichung wird daher für diesen besondern Fall

$$\left(\frac{dL}{dz}\right) d^2 y - \left(\frac{dL}{dy}\right) d^2 z = o,$$

und eben so

$$\left(\frac{dL}{dx}\right) d^2 y - \left(\frac{dL}{dy}\right) d^2 x = o$$

das heifst $z d^2 y - y d^2 z = o$

$$x d^2 y - y d^2 x = o$$

Die Integralien dieser beyden Gleichungen sind

$$z\,dy - y\,dz = C$$

$$x\,dy - y\,dx = C'$$

also ist, wenn C'' irgend eine Constante bezeichnet,

$$z\,dy - y\,dz = C'' (x\,dy - y\,dx)$$

Multiplizirt man aber diese Gleichung durch $\frac{1}{y^2}$, und integrirt sie, so hat man

$$z = C'' x + By$$

und dies ist die Gleichung einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten, d. h. durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Verbindet man sie mit der Gleichung $L = o$ der Kugel selbst, so erhält man die Gleichung eines gröfsten Kreises, der daher die gesuchte kürzeste Linie zwischen zwey Punkten der Kugel ist.

IV. Um endlich den Krümmungshalbmesser einer krummen Linie von doppelter Krümmung, d. h. die Gröfse des Halbmessers des Krümmungskreises und den Ort seines Mittelpunktes zu finden, dessen drey rechtwinklichte Coordinaten a, b, c seyn sollen, so sind die Gleichungen eines Kreises, der denselben Mittelpunkt und den Halbmesser ρ hat, folgende

$$\rho^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

$$o = (x-a) + m\,(y-b) + n\,(z-c)$$

wo m, n zwey willkührliche Gröfsen sind, welche die Lage dieses Kreises im Raume ausdrücken. Soll dieser Kreis der Krümmungskreis der gegebenen Curve seyn, so müssen nicht nur die Werthe der xyz aus diesen beyden Gleichungen, sondern auch noch ihre ersten und zweyten Differentialien mit jenen der gegebenen Curve identisch seyn. Diese Differentialien der vorhergehenden Gleichungen aber sind, wenn man kein erstes Differential beständig annimmt,

$$(x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz = o$$

$$dx + m\,dy + n\,dz = o$$

$$(x-a)\,d^2x + (y-b)\,d^2y + (z-c)\,d^2z + dx^2 + dy^2 + dz^2 = o$$

$$d^2x + m\,d^2y + n\,d^2z = o$$

Die vierte und sechste dieser Gleichungen geben sofort

$$m = \frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{dy\,d^2z - dz\,d^2y}$$

und

$$n = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dy\,d^2z - dz\,d^2y}.$$

Substituirt man diese Werthe von m, n in der zweyten jener Gleichungen, so gibt die zweyte, dritte und fünfte, welche drey Gleichungen blofs die drey unbekannten Gröfsen a b c enthalten, folgende Werthe derselben

$$a - x = \frac{ds^2}{A}\left((dy^2+dz^2)\,d^2x - (dy\,d^2y + dz\,d^2z)\,dx\right)$$

$$b - y = \frac{ds^2}{A}\left((dx^2+dz^2)\,d^2y - (dx\,d^2x + dz\,d^2z)\,dy\right)$$

$$c - z = \frac{ds^2}{A}\left((dx^2+dy^2)\,d^2z - (dy\,d^2y + dx\,d^2x)\,dz\right)$$

wo der Kürze wegen gesetzt wurde

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \text{ und}$$

$$A = ds^2\,(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) - (dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z)^2$$

Kennt man so die Coordinaten a, b, c des Mittelpunkts des Krümmungskreises, und die Lage der Ebene desselben durch die

Gröſsen m n, so ist aus der ersten der oben gegebenen Gleichungen der Halbmesser des Krümmungskreises

$$\varsigma = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$$

In allem Vorhergehenden wurde kein Differential als beständig angenommen. Ist also der Bogen

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

constant, so ist

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = 0 \text{ also}$$

$$A = ds^2\,(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) \text{ und daher}$$

$$a - x = \frac{ds^2\,d^2x}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2} = \varrho^2 \cdot \frac{d^2x}{ds^2}$$

$$b - y = \frac{ds^2\,d^2y}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2} = \varsigma^2\,\frac{d^2y}{ds^2}$$

$$c - z = \frac{ds^2\,d^2z}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2} = \varrho^2\,\frac{d^2z}{ds^2}$$

und endlich

$$\varsigma = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}$$

aus welchen Betrachtungen man auch zugleich leicht die allgemeine Theorie der Evoluten ableiten wird.

§. 7.

Sind $x\,y\,z$ die Coordinaten eines Punktes der Fläche, und $x'\,y'\,z'$ die der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt in dem ersten gegebenen Punkt der Fläche, und deren Halbmesser R ist, so ist die Gleichung der Kugel

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = R \quad \ldots (A)$$

und die Gleichungen der Normale der Fläche in dem gegebenen Punkt sind

$$x - x' + (z-z')p = 0 \;\text{--}\; (B)$$

$$y - y' + (z-z')q = 0 \;\text{--}\; (C)$$

wo

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right),\; q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

ist, und wo $x'\,y'\,z'$ die veränderlichen Gröſsen der Normale sind, während die Gröfsen $x\,y\,z\,p\,q$ für dieselbe Normale als constant angesehen werden. Denkt man sich also eine zweyte Normale in einem dem ersten unendlich nahen Punkt der Fläche, so wird diese zweyte Normale, wenn sie mit der ersten in einer Ebene liegt, diese irgendwo in einem Punkte schneiden, und dieser Durchschnittspunkt wird derjenige Punkt der ersten Normale seyn, für welche $x'\,y'\,z'$ sich nicht ändert, während sich $x\,y\,z$ ändert, d. h. differentiirt man die zwey Gleichungen B und C, indem man $x'\,y'\,z'$ als constant ansieht, so erhält man

$$g(z-z')^2 + h(z-z') + k^2 = o \ldots (D)$$

$$\begin{aligned} &((1+q^2)s - pqt)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ &+ ((1+q^2)r - (1+p^2)t)\left(\frac{dy}{dx}\right) \\ &- (1+p^2)s + pqr = o \ldots (E) \end{aligned}$$

wo man der Kürze wegen gesetzt hat

$$r = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),\ s = \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right),\ t = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \text{ und}$$

$$\begin{aligned} g &= rt - s^2 \\ h &= (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t, \\ k^2 &= 1 + p^2 + q^2. \end{aligned}$$

Die drey ersten Gleichungen B, C, D zusammen genommen geben die Coordinaten des Durchschnittspunktes beyder Normalen. Ist nämlich

$$m = h + \sqrt{h^2 - 4gk^2}$$

so findet man für diese Coordinaten

$$x - x' = \frac{2k^2p}{m}$$

$$y - y' = \frac{2k^2q}{m}$$

$$z - z' = -\frac{2k^2}{m}$$

Die vierte Gleichung E aber, die keine der Coordinaten enthält, ist die Bedingungsgleichung, die den Werth von

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

oder die Richtung angibt, in welcher man von dem ersten Punkte der Fläche ausgehen muſs, um zu dem zweyten zu kommen, damit beyde Normalen sich schneiden. Diese Richtung ist immer zweyfach, da die Gleichung E für

$$\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)$$

des zweyten Grades ist. Man kann immer, ohne der Allgemeinheit der Untersuchung Eintrag zu thun, annehmen, daſs die drey coordinirten Ebenen der

$$x\,y,\ x\,z \text{ und } y\,z$$

so gewählt wurden, daſs die berührende Ebene in dem gegebenen Punkt der Fläche parallel mit der Ebene der $x\,y$ ist, dann ist

$$p = q = o$$

und die Gleichung E wird

$$\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 + \left(\frac{r-t}{s}\right)\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right) - 1 = o$$

Sind daher n und n' die beyden Werthe von

$$\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)$$

aus dieser Gleichung, so hat man

$$n . n' + 1 = o$$

woraus folgt, daſs jene beyden Richtungen, in welchen sich die Normalen zweyer nächsten Punkte schneiden, aufeinander senkrecht sind.

Da auch die Gleichung D des zweyten Grades in Beziehung auf $(z - z')$ ist, so sind auch die Werthe der Coordinaten des Durchschnittspunktes der Normalen doppelt, oder die erste wird im allgemeinen von den beyden andern in zwey verschiedenen Punkten geschnitten.

Denkt man sich den Durchschnitt der ersten Normale mit der zweyten als den Mittelpunkt einer Kugel, deren Fläche durch den ersten Punkt der gegebenen Oberfläche geht, so sind die beyden ersten Normalen auch auf der Kugel normal; die Fläche der Kugel und die gegebene Fläche haben also zwey nächste gemeinschaftliche Normalen, also auch zwey nächste gemeinschaftliche tangirende Ebenen; also haben auch beyde Flächen dieselbe Krümmung in dieser Richtung, die durch den ersten Werth

$$n \text{ von } \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)$$

bestimmt wird, und der Mittelpunkt dieser Krümmung wird zugleich der Mittelpunkt der Kugel, d. h. der Durchschnitt der beyden ersten Normalen seyn.

Denkt man sich eben so den Durchschnitt der ersten Normale mit der dritten als den Mittelpunkt einer Kugel, deren Fläche durch den ersten Punkt der gegebenen Fläche geht, so haben beyde Flächen auch in dieser Richtung, die durch den zweyten Werth

$$n^{\circ} \text{ von } \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

bestimmt wird, einerley Krümmung, und der Mittelpunkt dieser Krümmung ist der der zweyten Kugel.

Jede Fläche hat also, unter unzähligen anderen, in jedem ihrer Punkte zwey Krümmungen, deren Richtungen in zwey auf einander senkrechten Normalebenen liegen, und deren Mittelpunkte der Krümmung in der Normallinie jenes Punktes sind.

Sind

$$x \; y \; z$$

die Coordinaten jenes Punktes, und

$$x' \; y' \; z'.$$

die des Mittelpunkts der Krümmung, so ist offenbar die Distanz dieser beyden Punkte, d. h. der Halbmesser der Krümmung, nichts anders, als die Gröfse R der Gleichung (A). Man wird daher diesen Halbmesser R der Krümmung finden, wenn man in der Gleichung (A) die oben gegebenen Werthe von

$$x - x', \; y - y' \text{ und } z - z'$$

substituirt, wodurch man erhält

$$R = (z - z') \sqrt{1 + p^2 + q^2} \text{ oder}$$
$$R = \mp \frac{2 k^3}{h + \sqrt{h^2 - 4 g k^3}}$$

I. Dieselben Resultate lassen sich noch auf folgende merkwürdige Art finden.

Ist $z = \varphi(x, y)$ die Gleichung einer Fläche, und geht x in $x + \xi$, und y in $y + \upsilon$ über, so geht bekanntlich z über in

$$z + \zeta = z + \left(\xi . \frac{dz}{dx} + \upsilon . \frac{dz}{dy}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\xi^2 . \frac{d^2z}{dx^2} + 2\xi\upsilon . \frac{d^2z}{dx\,dy} + \upsilon^2 . \frac{d^2z}{dy^2}\right)$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(\xi^3 . \frac{d^3z}{dx^3} + 3\xi^2\upsilon . \frac{d^3z}{dx^2\,dy} + 3\xi\upsilon^2 . \frac{d^3z}{dx\,dy^2} + \upsilon^3 . \frac{d^3z}{dy^3}\right) +$$

Ist aber $z' = f(x'\,y')$ die Gleichung einer andern Fläche, so ist eben so, wenn

$$x' \text{ in } x' + \xi \text{ und } y' \text{ in } y' + \upsilon$$

übergeht,

$$z' + \zeta = z' + \left(\xi \cdot \frac{dz'}{dx'} + \upsilon \cdot \frac{dz'}{dy'}\right) + \text{u. f.}$$

Bestimmt man in der zweyten Fläche eine ihrer Constanten so, daſs $z = z'$ wird, so werden beyde Flächen einen zu den Coordinaten $x'\,y'\,z'$ gehörenden Punkt gemeinschaftlich haben, und die Differenz der diesem gemeinschaftlichen Punkte nächsten Ordinaten

$$z + \zeta,\; z' + \zeta$$

wird seyn

$$\begin{aligned}\Delta = \xi &\left(\frac{dz'}{dx'} - \frac{dz}{dx}\right) + \upsilon\left(\frac{dz'}{dy'} - \frac{dz}{dy}\right)\\ &+ \frac{\xi^2}{2}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2} - \frac{d^2z}{dx^2}\right)\\ &+ \xi\upsilon\left(\frac{d^2z'}{dx'dy'} - \frac{d^2z}{dx\,dy}\right)\\ &+ \frac{\upsilon^2}{2}\left(\frac{d^2z'}{dy'^2} - \frac{d^2z}{dy^2}\right) + \cdots\end{aligned}$$

in welchem Ausdrucke man bekanntlich die willkührlichen Gröſsen ξ und υ so klein annehmen kann, daſs die Summe aller der Glieder, die in irgend eine Potenz von ξ, oder υ multiplicirt sind, gröſser werde, als die Summe aller nachfolgenden, in höhere Potenzen von ξ und υ multiplicirten Glieder, so lange nämlich jene erste Summe nicht schon für sich gleich Null ist. Daraus folgt, daſs in der Nähe des gemeinschaftlichen Punktes beyder Flächen die Differenz Δ der Ordinaten beyder Flächen desto kleiner seyn wird, je mehr von den ersten Gliedern der letzten Reihe verschwinden, d. h. je mehr von den Factoren

$$\left(\frac{dz'}{dx'} - \frac{dz}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{dz'}{dy'} - \frac{dz}{dy}\right) \cdots$$

gleich Null werden.

Nimmt man also in der zweyten Fläche

$$z' = f(x'\,y')$$

noch zwey Constanten so an, daſs

$$\frac{dz'}{dx'} = \frac{dz}{dx} \quad \text{und}$$

$$\frac{dz'}{dy'} = \frac{dz}{dy}$$

werde, so sind beyde Flächen bey dem gemeinschaftlichen Berührungspunkte einander so nahe, dafs keine dritte Fläche zwischen ihnen durchgehen kann, aufser wenn diese dritte Fläche denselben Bedingungen entspricht, welche durch die zwey letzten Gleichungen ausgedrückt werden, d. h. wie man sich gewöhnlich ausdrückt, die beyden ersten Flächen werden eine Berührung der ersten Ordnung mit einander haben.

Bestimmt man überdiefs in der zweyten Fläche noch drey Constanten so, dafs

$$\frac{d^2z'}{dx'^2} = \frac{d^2z}{dx^2},$$

$$\frac{d^2z'}{dx'\,dy'} = \frac{d^2z}{dx\,dy}, \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2z'}{dy'^2} = \frac{d^2z}{dy^2}$$

werde, so werden beyde Flächen sich um den gemeinschaftlichen Punkt noch mehr an einander schliefsen, oder sie werden eine Berührung der zweyten Ordnung haben, und so fort mit den Berührungen aller höhern Ordnungen.

Um dies auf Beyspiele anzuwenden, sey die erste Fläche eine Ebene und ihre Gleichung

$$z = a + bx + cy$$

Soll diese Ebene mit der andern Fläche, deren Gleichung

$$z = \varphi\,(x, y)$$

ist, einen Punkt gemein haben, der zu den Coordinaten $x'\,y'\,z'$ gehört, so hat man auch

$$z' = a + bx' + cy'$$

und eliminirt man aus diesen Gleichungen eine der Constanten, z. B. a, so ist

$$z - z' = b\,(x - x') + c\,(y - y')$$

und dies ist die Gleichung einer Ebene, „die mit der gegebenen Fläche den Punkt gemein hat, dessen Coordinaten $x'\ y'\ z'$ sind.

Soll aber die Ebene mit der Fläche in diesem gegebenen Punkt eine Berührung der ersten Ordnung haben, so ist

$$z' = a + b x' + c y'$$

$$\frac{dz'}{dx'} = \frac{dz}{dx} = b$$

$$\frac{dz'}{dy'} = \frac{dz}{dy} = c$$

also auch

$$a = z' - x' \frac{dz'}{dx'} - y' \frac{dz'}{dy'}$$

Substituirt man diese Werthe von a, b, c in der Gleichung

$$z = a + b x + c y$$

so erhält man

$$z - z' = (x - x') \left(\frac{dz'}{dx'}\right) + (y - y') \left(\frac{dz'}{dy'}\right)$$

und dies ist die Gleichung der Ebene, welche mit der Fläche in dem gegebenen Punkt eine Berührung der ersten Ordnung hat. Da die Gleichung der Ebene nur drey Constan en enthält, so kann auch eine Ebene mit einer Fläche nur eine Berührung der ersten Ordnung haben.

Es seyen a b c die Coordinaten des Mittelpunkts einer Kugel, deren Halbmesser R ist, so ist die Gleichung der Oberfläche der Kugel

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \ldots (I)$$

und da diese Gleichung nur vier Constanten enthält, so ist auch die Kugel zu einer Berührung der zweyten Ordnung nicht hinreichend. Für eine Berührung der ersten Ordnung aber hat man

$$(x' - a)^2 + (y' - b)^2 + (z' - c)^2 = R^2$$

$$\left(\frac{dz'}{dx'}\right) = - \frac{x' - a}{z' - c}$$

$$\left(\frac{dz'}{dy'}\right) = - \frac{y' - b}{z' - c}$$

Eliminirt man aus diesen drey Gleichungen die Gröſsen

a, b, c,

so hat man, wenn wieder

$$p = \frac{dz'}{dx'}, \quad q = \frac{dz'}{dy'} \text{ ist,}$$

$$a = x' + \frac{pR}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$b = y' + \frac{q\,R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$c = z' - \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

Bestimmt man also die Werthe von p, q aus der Differentialgleichung der gegebenen Fläche, und substituirt sie in den angezeigten Werthen von a, b, c, so erhält man den Mittelpunkt einer Kugel, die mit der Fläche eine Berührung der ersten Ordnung hat; der Halbmesser der Kugel ist willkührlich.

Man kann aber auch annehmen, daſs für die gesuchte Kugel noch die Summe aller Glieder der oben gegebenen Reihe verschwinden, welche in

$$\xi^2,\ \upsilon^2 \text{ und } \xi\,\upsilon$$

multiplicirt sind. Diese Bedingung gibt, wenn

$$\frac{\upsilon}{\xi} = \omega$$

gesetzt wird.

$$\left(\frac{d^2z'}{dx'^2} - \frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\omega\left(\frac{d^2z'}{dx'dy'} - \frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \omega^2\left(\frac{d^2z'}{dy'^2} - \frac{d^2z}{dy^2}\right) = 0.$$

Für die Kugel ist aber

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1+p^2}{c-z},\ \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{1+q^2}{c-z}$$

und da

$$(z - c)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (x - a) = 0$$

ist, so ist auch

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dx}{dx}\right) + (z-c)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = 0, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = \frac{pq}{c-z}$$

Läſst man also den Gröſsen r, s, t die in §. 7. gegebene Bedeutung, so ist die letzte Bedingungsgleichung

$$r + 2\omega s + \omega^2 t^2$$

$$= \frac{1 + p^2 + 2\omega.\,pq + \omega^2(1+q^2)}{c - z}$$

und da

$$c - z = - \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

ist, so hat man

$$R = - \frac{(1 + p^2 + 2pq\omega + (1 + q^2)\omega^2) . \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r + 2s\omega + t\omega^2} \; . . (\mathrm{II})$$

und dies ist der Ausdruck des Halbmessers einer Kugel, welche die Eigenschaft hat, daſs keine andere Kugel zwischen ihr und der gegebenen Fläche in dem Punkte durchgehen kann, der zu den Ordinaten $x + \xi$, $y + \upsilon$ gehört.

In diesem Ausdrucke von R ist aber die Gröſse

$$\omega = \frac{\upsilon}{\xi}$$

willkührlich. Gibt man daher dieser Gröſse ω irgend einen bestimmten Werth, so wird die genannte Eigenschaft der Kugel für alle die Punkte gelten, für welche ω denselben Werth hat, d. h. für alle Punkte der Curve, die in dem Durchschnitte einer ihrer Lage nach constanten Ebene mit der gegebenen Fläche liegen.

Da das Verhältniſs von ω willkührlich ist, so wollen wir denjenigen Werth von ω suchen, für welchen R ein Gröſstes oder ein Kleinstes wird.

Setzt man der Kürze wegen

$$A = (1 + q^2)\, s - pqt$$
$$B = (1 + q^2)\, r - (1 + p^2)\, t$$
$$C = (1 + p^2)\, s - pqr$$

so gibt die Gleichung (II.)

$$\frac{dR}{2\, d\omega} =$$

$$- (A\omega^2 + B\omega - C) . (r + 2s\omega + t\omega^2)^{-2} . \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

Setzt man also

$$dR = 0$$

so hat man

$$A\omega^2 + B\omega - C = 0 \; - - - \; \mathrm{III},$$

und dies ist offenbar dieselbe Gleichung mit der, welche wir oben E genannt haben. Sie gibt

$$\omega = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A} \ldots \text{(IV)}$$

und dies ist der gesuchte Werth von ω.

Wenn man den vorhergehenden Ausdruck dR noch einmal differentiirt, so findet man leicht, dafs in der Gleichung (IV) das obere positive Zeichen für den gröfsten, und das untere für den kleinsten Werth von R gehört.

Jede Fläche hat also in jedem ihrer Punkte nach irgend einer durch ω bestimmten Richtung eine Krümmung, wozu der Halbmesser R aus (II.) gehört, und unter allen diesen Richtungen gibt es zwey, die auf einander senkrecht sind, in welchen allein die zwey nächsten Normalen der Fläche sich schneiden, oder in einer Ebene liegen und die Krümmungen der Fläche in diesen beyden Richtungen sind zugleich die gröfste und die kleinste Krümmung, die um diesen Punkt statt haben.

II. Um diese allgemeinen Betrachtungen auf ein Beyspiel anzuwenden, hat man für die Gleichung aller Flächen, die durch die Rotation einer Curve um die Axe der z entstehen

$$z = f(x^2 + y^2)$$

Es sey

$$dz = f'.(xdx + ydy)$$

$$df' = f''.(xdx + ydy)$$

wo f', f'' Functionen von $(x^2 + y^2)$ ausdrücken.

Dies vorausgesetzt, hat man

$$p = f'.x$$

$$q = f'y$$

$$r = f' + f''.x^2$$

$$s = f''.xy$$

$$t = f' + f''.y^2$$

$$g = f'^2 + f'f''.(x^2 + y^2)$$

$$h = 2f' + f'^2(x^2 + y^2) + f''.(x^2 + y^2)$$

$$k^2 = 1 + f'^2(x^2 + y^2)$$

$$\sqrt{h^2 - 4gk^2} = (f'^2 - f'')(x^2 + y^2)$$

Substituirt man diese Werthe in dem Ausdrucke des gröfsten oder kleinsten Krümmungshalbmessers

$$R = -\frac{2\,k^3}{h \pm \sqrt{h^2 - 4\,g\,k^2}}$$

so erhält man, nachdem man das obere oder das untere Zeichen braucht,

$$\varrho' = -\frac{1}{f'}\cdot\left(1 + f'^2\cdot(x^2+y^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varrho'' = -\frac{\left(1 + f'^2\cdot(x^2+y^2)\right)^{\frac{3}{2}}}{f' + f''\cdot(x^2+y^2)}$$

Es sey in einem besondern Fall für das Ellipsoid

$$a^2 b^2 = a^2 z^2 + b^2\,(x^2 + y^2)$$

so ist

$$p = -\frac{b^2 x}{a^2 z}$$

$$q = -\frac{b^2 y}{a^2 z}$$

$$r = -\frac{b^4\,(a^2 - y^2)}{a^4 z^3}$$

$$s = -\frac{b^4\,x\,y}{a^4\,z^3}$$

$$t = -\frac{b^4\,(a^2 - x^2)}{a^4\,z^3}$$

also $\qquad f' = -\frac{b^2}{a^2 z}$ und

$$f'' = -\frac{b^4}{a^4 z^3}$$

und daher

$$\varrho' = \frac{a}{b^2}\,\left(b^4 + (a^2 - b^2)\,z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varrho'' = \frac{1}{a.\,b^4}\,\left(b^4 + (a^2 - b^2)\,z^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

für $z = 0$ ist $\varrho' = a$, $\varrho'' = \frac{b^2}{a}$

für $z = c$ ist $\varrho' = \varrho'' = \frac{a^2}{b}$

für $a = b$ ist $\varrho' = \varrho'' = a$

Man kann noch bemerken, daſs die Normale der erzeugenden Ellipse ist

$$N = \frac{z\,ds}{dx} = \frac{1}{a}\,(b^4 + (a^2 - b^2)\,z^2)^{\frac{1}{2}}$$

und da in jedem Kegelschnitt der Krümmungshalbmesser r der Curve gleich

$$\frac{N^3}{p^2}$$

ist, wo

$$p = \frac{b^2}{a}$$

der halbe Parameter ist, so ist der Krümmungshalbmesser der erzeugenden Ellipse

$$r = \frac{(b^4 + (a^2 - b^2)\,z^2)^{\frac{3}{2}}}{a.\,b^4}$$

also ist

$$\varrho'' = r \text{ und}$$

$$\varrho' = N.\,\frac{a}{b_*}$$

Will man endlich diese beyden Krümmungshalbmesser $\varrho'\,\varrho''$ durch ε und φ (§. 5. I.) ausdrücken, so ist

$$z = \frac{a\,(1 - \varepsilon^2)\,\text{Sin}\,\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\,\text{Sin}^2\,\varphi}}$$

wo φ die beobachtete Polhöhe und

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \text{ ist.}$$

Substituirt man diesen Werth von

$$z \text{ und } b^2 = a^2\,(1 - \varepsilon^2)$$

in den oben gefundenen Ausdrücken von ϱ' und ϱ'', so hat man, wenn man die höheren Potenzen von ε vernachlässiget,

$$b^4 + (a^2 - b^2)\,z^2 =$$

$$a^4.\,(1 - 2\,\varepsilon^2 + \varepsilon^2\,\text{Sin}^2\,\varphi)$$

also auch

$$\varrho' = a\,(1 + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^2\,\text{Sin}^2\,\varphi)$$

$$\varrho'' = a\,(1 - \varepsilon^2 + \tfrac{3}{2}\,\varepsilon^2\,\text{Sin}^2\,\varphi)$$

und dies sind die Werthe des gröſsten und kleinsten Krümmungshalbmessers für jeden Punkt des Ellipsoids.

§. 8.

Wir wollen nun zur Bestimmung der geographischen Lage der Signalpunkte unsers Dreyecknetzes übergehen.

Denkt man sich von dem Signalpunkte C; B, D... senkrechte Linien $C\alpha$, $B\beta$, $D\gamma$... auf den Meridian von A und nennt

$$A\alpha = x,\ C\alpha = y$$

die Coordinaten des ersten Ortes C,

$$A\beta = x',\ B\beta = y'$$

die des zweyten Ortes B u. f. so wird man aus den bereits bekannten Seiten und Winkeln der Dreyecke die Werthe dieser Coordinaten ohne Mühe ableiten.

Wenn das ganze Netz nur einen geringen Theil der Erdoberfläche einnimmt, oder wenn man, wie in §. 4. alle Dreyecke auf ebene reduzirt, so seyen nach der Ordnung die Seiten der Dreyecke

$$AC = a,\ CD = b,\ DE = c\ldots$$

und die zwischen ihnen enthaltenen Winkel

$$CA\alpha = \alpha,\ ACD = \beta,\ CDE = \gamma\ldots$$

so hat man, wenn X, Y die Coordinaten des letzten Signalpunkts bezeichnen, und R der rechte Winkel ist, wie man leicht sieht, folgende Ausdrücke,

$$X = a \operatorname{Cos} \alpha + b \operatorname{Cos} (\alpha + \beta - 2R)$$
$$+ c \operatorname{Cos} (\alpha + \beta + \gamma - 4R) + d \operatorname{Cos} (\alpha + \beta + \gamma + \delta - 6R) +$$
$$Y = a \operatorname{Sin} \alpha + b \operatorname{Sin} (\alpha + \beta - 2R)$$
$$+ c \operatorname{Sin} (\alpha + \beta + \gamma - 4R) + d \operatorname{Sin} (\alpha + \beta + \gamma + \delta - 6R) +$$

wo unter $\alpha\ \beta\ \gamma$.. immer die Winkel verstanden werden, die auf der Seite des Weges a b c liegen, auf welcher das Azimut α des ersten Ortes A liegt, so daſs also diese Winkel auch gröſser als 2 R seyn können. Man bemerkt übrigens von selbst, daſs man, indem man die Coordinaten X Y des letzten Punktes auf diese Art berechnet, man zugleich die Coordinaten aller zwischenliegenden Punkte C, D, E.. erhält. Bricht z. B. die Reihe mit c ab, so gibt für d = 0 der vorhergehende Ausdruck von X und Y die Coordinaten des Punktes E u. f. wenn auf die Zeichen gehörig Rücksicht genommen wird, wo dann negative X oder Y anzeigen, daſs der gesuchte Punkt im ersten Falle auf der Seite von A, wo M liegt, und im zweyten auf der Seite von A x, wo der Punkt B liegt, genommen werden soll.

Wie man aber aus den gegebenen Coordinaten X Y eines Ortes die geographische Position desselben gegen den ersten Ort A ableiten könne, werden wir weiter unten sehen.

§. 9.

Die geographische Lage der verschiedenen Signalpunkte des Dreyecknetzes läfst sich am einfachsten aus den bekannten Dreyecken selbst unmittelbar ableiten.

Sey P (Fig. 25.) der Nordpol der Erde, und B, A zwey Punkte der Oberfläche derselben, die wir anfangs als eine vollkommene Kugel annehmen wollen.

Für den gegebenen Ort A sey die Aequatorhöhe ψ, und das Azimut z, für den gesuchten Ort B aber die Aequatorhöhe ψ', und das Azimut z'. Die Längendifferenz beyder Orte sey u, und die bekannte Distanz BA im Horizont des Meeres, als Bogen eines gröfsten Kreises betrachtet, sey gleich δ. Dies vorausgesetzt, hat man sofort

$$\mathrm{Tg}\,\frac{z'+u}{2} = -\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\psi+\delta}{2}}{\mathrm{Sin}\,\frac{\psi-\delta}{2}}\,\mathrm{Cotg}\,\frac{z}{2}$$

$$\mathrm{Tg}\,\frac{z'-u}{2} = -\frac{\mathrm{Cos}\,\frac{\psi+\delta}{2}}{\mathrm{Cos}\,\frac{\psi-\delta}{2}}\,\mathrm{Cotg}\,\frac{z}{2}$$

$$\mathrm{Sin}\,\psi' = -\frac{\mathrm{Sin}\,z\,\mathrm{Sin}\,\delta}{\mathrm{Sin}\,u} = -\frac{\mathrm{Sin}\,z\,\mathrm{Sin}\,\psi}{\mathrm{Sin}\,z'}.$$

§. 10.

Wir wollen nun dieselbe Aufgabe unter der Voraussetzung auflösen, dafs die Erde durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden ist. Ist a, b die halbe grofse und halbe kleine Axe dieser Ellipse und

$$a\,\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}$$

so sey (Fig. 26.) P der Pol, P C die halbe kleine Axe und A, B die beyden Punkte der Oberfläche der Erde, deren Normalen A M, B O sind. Man hat also

$$PMA = \psi,\ POB = \psi'$$

Beschreibt man aber aus dem Punkte M mit dem Halbmesser MA die drey Kreisbögen

$$Ap, pb, bA,$$

so bilden diese Bogen ein sphärisches Dreyeck, dasselbe, welches wir im vorhergehenden §. betrachtet haben. In diesem Dreyecke haben wir angenommen

$$pA = pmA = \psi,$$

$$pb = pMb = \psi',$$

$$pAb = z - 180,$$

$$pbA = 180 - z'$$

$$\text{und } Apb = u$$

Dadurch ist also zuerst die Gröſse ψ' fehlerhaft angenommen worden, da ψ' eigentlich gleich pOB ist, so daſs also ψ' um den Winkel OBM zu klein angenommen wurde

Es ist aber die Normale

$$BO = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Cos}^2 \psi'}}$$

wenn a = 1 vorausgesetzt wird.

Ferner ist

$$CO = \frac{\varepsilon^2 \operatorname{Cos} \psi'}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Cos}^2 \psi'}}$$

$$CM = \frac{\varepsilon^2 \operatorname{Cos} \psi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Cos}^2 \psi}}, \text{ also}$$

$$\frac{OM}{OB} = \frac{\varepsilon^2 \operatorname{Cos} \psi \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{Cos}^2 \psi\right)}{1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{Cos}^2 \psi'} - \varepsilon^2 \operatorname{Cos} \psi'$$

Aber es ist

$$\operatorname{Cos} \psi' = \operatorname{Cos} \psi \operatorname{Cos} \delta - \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Cos} z \text{ oder}$$

$$\operatorname{Cos} \psi' = \operatorname{Cos} \psi \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) - \delta \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} z$$

Läſst man also die vierten Potenzen von ε weg, so ist

$$\frac{OM}{OB} = \varepsilon^2 (\operatorname{Cos} \psi - \operatorname{Cos} \psi')$$

$$= \varepsilon^2 \delta \left(\text{Sin}\,\psi\, \text{Cos}\, z + \frac{\delta}{2}\, \text{Cos}\,\psi\right)$$

Weiter ist

$$\text{Tg}\, OBM = \frac{\frac{OM}{OB}\, \text{Sin}\,\psi'}{1 + \frac{OM}{OB}\, \text{Cos}\,\psi'}$$

oder da

$$\text{Cos}\,\psi' = \text{Cos}\,(\psi + \delta\, \text{Cos}\, z)$$

$$\text{Sin}\,\psi' = \text{Sin}\,\psi + \delta\, \text{Cos}\,\psi\, \text{Cos}\, z \text{ ist,}$$

$$\text{Tang.}\ OBM =$$

$$\varepsilon^2 \delta \left(\text{Sin}\,\psi\, \text{Cos}\, z + \frac{\delta}{2}\, \text{Cos}\,\psi\right) (\text{Sin}\,\psi + \delta\, \text{Cos}\,\psi\, \text{Cos}\, z)$$

und daher

$$OBM = \varepsilon^2 \delta\, \text{Sin}^2\,\psi\, \text{Cos}\, z$$

$$+ \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{2}\, \text{Sin}\,\psi\, \text{Cos}\,\psi\, (1 + 2\, \text{Cos}^2\, z) \quad \text{---}\ \text{I.}$$

und diese Gröſse muſs zu dem Werthe von ψ' des vorigen §. addirt werden, um das elliptische ψ' zu erhalten.

Man ziehe aus B mit einem willkührlichen Halbmesser z. B. mit B A die Kreisbogen, $A\alpha$, $A\beta$, $\alpha\beta$. Das bisher betrachtete Azimut ist

$$A\alpha\beta = 180 - z'$$

oder der Winkel, welchen die Ebenen B A M, O B M in ihrer Durchschnittslinie M B bilden Das elliptische Azimut z'' aber ist der Winkel, den die Ebene O B A mit der verlängerten Ebene O B M in der Durchschnittslinie O B bildet d. h. es ist

$$A\beta\alpha = 180 - (180 - z'') = z''$$

Weiter ist

$$\alpha\beta = d\psi' = -\varepsilon^2 \delta\, \text{Sin}^2\,\psi\, \text{Cos}\, z$$

und $A\alpha$, welches sehr nahe gleich $A\beta$ ist, ist der Winkel der Normale O B mit der geradlinichten Chorde B A, also

$$A\alpha = A\beta = 90 - \frac{\delta}{2}$$

Das sphärische Dreyeck $A\alpha\beta$ gibt aber

$$\text{Tg}\,\beta = \frac{\text{Sin}\,\alpha}{\text{Cotg}\, A\alpha\, \text{Sin}\,\alpha\beta - \text{Cos}\,\alpha\beta\, \text{Cos}\,\alpha}$$

das heiſst

$$\operatorname{Tg} z'' = \frac{\operatorname{Sin} z'}{\operatorname{Cos} z' \operatorname{Cos} d\psi' + \operatorname{Tg} \frac{\delta}{2} \operatorname{Sin} d\psi'}$$

$$= \frac{\operatorname{Tg} z'}{1 - \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{2} \operatorname{Sin}^2 \psi}$$

also auch

$$z'' - z' = \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{2} \operatorname{Sin}^2 \psi \operatorname{Sin} z \operatorname{Cos} z \text{ - - - (II);}$$

und diese Correction mufs zu dem z' des vorigen § addirt werden, um das elliptische Azimut zu erhalten Was endlich die Gröfse u betrifft, so sieht man leicht, dafs sie keiner von der Ellipticität der Erde abhängigen Correction bedarf, wenn man die dritten, und höheren Potenzen von ε vernachlässiget.

Die Gröfse δ aber, welche den Winkel AMB bezeichnet, wird aus der gegebenen Entfernung $A b = \triangle$, wie der Winkel eines gegebenen Kreisbogens, durch die Division dieses Bogens mit seinem Halbmesser abgeleitet. Da hier dieser Halbmesser die Normale

$$AM = \frac{a}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Cos}^2 \psi}}$$

ist, so ist

$$\delta = \frac{\triangle}{a} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{Cos}^2 \psi\right)$$

oder auch

$$= \delta \frac{\triangle}{b} \left(1 - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{Sin}^2 \psi\right)$$

$$\delta = \frac{\triangle b}{a^2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{Sin}^2 \psi\right)$$

welche Ausdrücke noch mit

$$R'' = \frac{1}{\operatorname{Sin} 1''}$$

multiplicirt werden müssen, um δ in Secunden zu erhalten.

Setzt man also der Kürze wegen

$p = \varepsilon^2 \delta \operatorname{Sin}^2 \psi \operatorname{Cos} z$, so ist

$$\text{elliptisches } \psi' = \psi' + p + \frac{p\,\delta}{2R''} \cdot \frac{\operatorname{Cotg} \psi}{\operatorname{Cos} z} \left(1 + 2 \operatorname{Cos}^2 z\right)$$

$$\text{elliptisches } z' = z' + \frac{p\,\delta}{2R''} \operatorname{Sin} z$$

Exempel I.:

$$\psi = 70^\circ,$$
$$z = 45^\circ,$$
$$\Delta = 100\,000 \text{ Toisen.}$$

Nimmt man an

$$\log \varepsilon^2 = 7,7766329,$$
$$\log \frac{b}{a^2} R'' = 8.7984183$$

so ist
$$\frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{Sin} \psi = 0.0026398212,$$
$$\log \delta = 3,7995632$$

Die Gleichungen des §. 9 geben

$$\frac{z' + u}{2} = -68^\circ\ 22'\ 14''\ 28$$
$$\frac{z' - u}{2} = -67\quad 3\ \ 47.\ 56$$
$$u = -1^\circ\ 18'\ 26''72$$
$$z' = 224\quad 33\ \ 58.\ 16$$
$$\psi' = \ \ 71\quad 14\ \ 34.\ 14$$

und daraus folgt

$$\text{ellipt. } \psi' = 71^\circ\ \ 14'\ \ 58''04$$
$$\text{ellipt. } z' = 224\ \ 33\ \ 58.\ 41$$

Exempel II.

$$\psi = 50^\circ,$$
$$z = 30^\circ,$$
$$\Delta = 150\,000 \text{ Toisen}$$

gibt
$$\log \delta = 3.9750457$$

$$\log \operatorname{Tg} \frac{z' + u}{2} = 0.6266476\ n$$
$$\log \operatorname{Tg} \frac{z' - u}{2} = 0.5647105\ n$$
$$u = -1^\circ\ 56'\ 54''92$$
$$\text{ellipt. Azim} = 208^\circ\ 31'\ 56''\ 11 + 0''\ 28$$

$= 208° 31' 56'' 3 = z'$

ellip. Aequatorhöhe $= 42° 17' 17'' 4 + 20'' 20 + 0'', 40$

$= 42° 17' 38''.0 = \psi'$.

§. 11.

Wenn die Werthe von δ nicht zu grofs sind, so lassen sich die Gleichungen des §. 9 in sehr convergirende Reihen auflösen. So ist z. B.

$$\text{Cos } \psi' = \text{Cos } \psi \text{ Cos } \delta - \text{Sin } \psi \text{ Sin } \delta \text{ Cos } z,$$

also

$$\frac{\text{Cos } \psi - \text{Cos } \psi'}{\text{Sin } \psi} = 2 \text{ Cotg } \psi \text{ Sin}^2 \frac{\delta}{2} + \text{Sin } \delta \text{ Cos } z$$

Löst man diese Gleichung nach Cap. 8, §. 5 auf, und setzt

$$x = \text{Sin } \delta \text{ Cos } z + 2 \text{ Sin}^2 \frac{\delta}{2} \text{ Cotg } \psi$$

$$= \delta \text{ Cos } z + \frac{\delta^2}{2} \text{ Cotg } \psi - \frac{\delta^3}{6} \text{ Cos } z$$

so hat man

$$\psi' - \psi = x - \frac{x^2}{2} \text{ Cotg } \psi + \frac{x^3}{6} (1 + 3 \text{ Cotg}^2 \psi)$$

$$- \frac{x^4}{24} (9 \text{ Cotg } \psi + 15 \text{ Cotg}^3 \psi) + .$$

oder

$$\psi' = \psi + \delta \text{ Cos } z + \frac{\delta^2}{2 R''} \text{ Sin}^2 z \text{ Cotg } \psi$$

$$- \frac{\delta^3}{6 R''} \text{ Cos } z \text{ Sin}^2 z (1 + 3 \text{ Cotg}^2 \psi) \quad \text{-- I.}$$

Ist in diesem und den folgenden Ausdrücken $\psi' < \psi$, so ist δ negativ.

Eben so ist

$$\text{Cotg } z' = \frac{\text{Cotg } \psi \text{ Sin } \delta + \text{Cos } \delta \text{ Cos } z}{\text{Sin } z}$$

also

$$\text{Cotg } (z' - z) =$$

$$\frac{1 + \text{Cos } \delta \text{ Cotg}^2 z + \dfrac{\text{Sin } \delta \text{ Cotg } \psi \text{ Cotg } z}{\text{Sin } z}}{2 \text{ Cotg } z \text{ Sin}^2 \dfrac{\delta}{2} - \dfrac{\text{Cotg } \psi \text{ Sin } \delta}{\text{Sin } z}}$$

woraus man nach einigen leichten Veränderungen findet

$$z' = 180 + z - \delta \operatorname{Cotg} \psi \operatorname{Sin} z + \frac{\delta^2}{2 R''} \operatorname{Sin} z \operatorname{Cos} z (1 + 2 \operatorname{Cotg}^2 \psi)$$

$$- \frac{\delta^3}{3 R''^2} \operatorname{Sin} z \operatorname{Cos}^2 z \operatorname{Cotg} \psi (3 + 4 \operatorname{Cotg}^2 \psi)$$

$$+ \frac{\delta^3}{6 R''^2} \operatorname{Sin} z \operatorname{Cotg} \psi (1 + 2 \operatorname{Cotg}^2 \psi) \quad \ldots \text{(II)}$$

Substituirt man endlich diesen Ausdruck von z' in der Gleichung

$$\operatorname{Sin} u = \frac{\operatorname{Sin} \delta \operatorname{Sin} z'}{\operatorname{Sin} \psi}$$

und setzt $u = \operatorname{Sin} u + \frac{1}{6} \operatorname{Sin}^3 u$, so ist

$$u = \frac{\operatorname{Sin} z}{\operatorname{Sin} \psi} \left(\delta - \frac{\delta^2}{R''} \operatorname{Cos} z \operatorname{Cotg} \psi \right)$$

$$+ \frac{\operatorname{Sin} z}{\operatorname{Sin} \psi} \left(\frac{\delta^3}{3 R''^2} \cdot \frac{\operatorname{Cos}^2 z}{\operatorname{Sin}^2 \psi} (1 + 3 \operatorname{Cos}^2 \psi) - \frac{\delta^3}{3 R''^2} \operatorname{Cotg}^2 \psi \right) \quad \ldots \text{(III)}$$

und die Gleichungen I, II, III, geben die Werthe von ψ', z', u für die Kugel. Um sie für das Ellipsoid zu erhalten, mufs man zu der Gleichung I hinzusetzen

$$+ p + \frac{p \delta}{2 R''} \cdot \frac{\operatorname{Cotg} \psi}{\operatorname{Cos} z} (1 + 2 \operatorname{Cos}^2 z)$$

und zu der Gleichung II ..

$$+ \frac{p \delta}{2 R''} \cdot \operatorname{Sin} z.$$

Die Gleichung I endlich gibt $\psi' - \psi$ oder die einzelnen Theile des Meridians, die Differenz der Parallelen der verschiedenen Signale. Sucht man so alle diese Differenzen der Parallelen, sowohl von den Signalen, welche dem Meridian zur rechten, als auch von denen, welche ihm zur linken stehen, so erhält man, wenn man sie addirt, eine doppelte Bestimmung der Länge des ganzen Meridians.

I. Die vorhergehenden Gleichungen sind für die Ausübung beschwerlich; auch ist das Gesetz, nach welchem diese Reihen fortgehen, nicht leicht zu entwickeln. Man kann aber mit Hilfe der Cap. I. §. 2. V gegebenen Ausdrücke andere Reihen finden, welche jener doppelte Vorwurf nicht trifft. Setzt man nämlich dort nach der Ordnung

$$A B C, \alpha \beta \gamma \ldots$$

gleich

$$180 - z', \; u, \; z - 180, \; \psi, \; \delta, \; \psi'$$

so erhält man

$$\frac{z' + u}{2} = -90^\circ + \frac{z}{2} - m \operatorname{Sin} z$$

$$\frac{m^2}{2} \operatorname{Sin} 2z - \frac{m^3}{3} \operatorname{Sin} 3z + \frac{m^4}{4} \operatorname{Sin} 4z -$$

$$\frac{z' - u}{2} = -90 + \frac{z}{2} + n \operatorname{Sin} z$$

$$+ \frac{n^2}{2} \operatorname{Sin} 2z + \frac{n^3}{3} \operatorname{Sin} 3z + \frac{n^4}{4} \operatorname{Sin} 4z +$$

$$\log \operatorname{Sin} \frac{\psi'}{2} = \log \operatorname{Sin} \frac{\psi}{2} \operatorname{Cos} \frac{\delta}{2}$$

$$+ \mu (m \operatorname{Cos} z - \frac{m^2}{2} \operatorname{Cos} 2z + \frac{m^3}{3} \operatorname{Cos} 3z - \frac{m^4}{4} \operatorname{Cos} 4z +$$

oder

$$\log \operatorname{Cos} \frac{\psi'}{2} = \log \operatorname{Cos} \frac{\psi}{2} \operatorname{Cos} \frac{\delta}{2}$$

$$- \mu (n \operatorname{Cos} z + \frac{n^2}{2} \operatorname{Cos} 2z + \frac{n^3}{3} \operatorname{Cos} 3z + \frac{n^4}{4} \operatorname{Cos} 4z +)$$

$$\text{wo } m = \operatorname{Tg} \frac{\delta}{2} \operatorname{Cotg} \frac{\psi}{2},$$

$$n = \operatorname{Tg} \frac{\delta}{2} \operatorname{Tg} \frac{\psi}{2},$$

und $\mu = 0.4342945$

und diesen ψ' und z' werden wieder die vorigen elliptischen Correctionen hinzugefügt.

Ex. $\psi = 40^\circ$, $z = 30^\circ$, $\Delta = 150000$ Toisen gibt

$\log \delta = 3.9750457$

also die Gleichung I.... $\delta \operatorname{Cos} z = 8176'' 67$

	641 38	
$-$	0. 71	
$-$	3. 04	
$+$	20. 20	ell. Corr.
$+$	0. 40	

Summe $= 8257'' 90 = 2^\circ 17' 37'' 9$

40

$\psi' = 42\ 17\ 37.\ 9$

und die Gleichung III

$$\frac{\text{Sin } z}{\text{Sin } \psi}\left\{\begin{array}{rr} \delta \; . \; . \; . \; . & 7344.\ 26 \\ - & 346.\ 96 \\ + & 3.\ 85 \\ + & 21.\ 85 \\ - & 7.\ 28 \end{array}\right.$$

$$u = 7015''\ 72 = 1^\circ\ 56'\ 55''\ 72$$

Nach N. I. aber ist dieses Beyspiel

$$\log \delta = 3.\ 9750457, \text{ woraus } \delta = 2^\circ\ 37'\ 21''\ 602$$

$$\log m = 8.\ 7986005$$

$$\log n = 7.\ 9207323$$

$$\left.\begin{array}{rr} \log \text{Sin } \frac{\psi}{2} \text{ Cos } \frac{\delta}{2} = & 9.\ 5339380 \\ \mu \text{ m Cos } z = & 0.\ 0236546 \\ - & 0.\ 0004295 \\ + & 0\ 0000008 \end{array}\right\}$$

$$\log \text{Sin } \frac{\psi'}{2} = 9.\ 5571639$$

$$\psi' = 42^\circ\ 17'\ 17''\ 4$$

$$\left.\begin{array}{r} 20.\ 2 \\ 0.\ 4 \end{array}\right\} \text{ellipt.}$$

$$\text{ell. } \psi' = 42^\circ\ 17'\ 38''\ 0$$

$$\left.\begin{array}{rr} \text{m Sin } z = & 6486.\ 28 \\ \frac{m^2}{2} \text{ Sin } 2z = & 353.\ 29 \\ & 17.\ 10 \\ & 0.\ 70 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rr} \text{n Sin } z = & 859.\ 27 \\ \frac{n^2}{2} \text{ Sin } 2z = & 6.\ 20 \\ & 0.\ 04 \end{array}\right\}$$

woraus

$$\frac{z'+u}{2} = -76^\circ\ 42'\ 29''39$$

$$\frac{z'-u}{2} = -74\ \ 45\ \ 34.\ 49$$

$$z' = \quad 208^\circ\ 31'\ 56''12$$

$$u = \quad 1^\circ\ 56'\ 54''.90.$$

Umständlicher findet man diesen Gegenstand abgehandelt in den Mayl. Ephemeriden f. d. J. 1807 und 1808, und in der monatlichen Correspondenz 1804 September, und 1805 Januar und Juni.

§. 12.

Liegt der gesuchte Ort in demselben Meridian mit dem gegebenen, so ist

$$z = 0,\ \text{also}\ \delta = x$$

und die Gleichung I des §. 11., wenn die Aequatorhöhe des gesuchten Ortes $\psi_{,}$ heifst,

$$\psi_{,} = \psi + x + \epsilon^2 x \operatorname{Sin}^2 \psi + \frac{3\,\epsilon^2 x^2}{2\,R''} \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi.$$

Liegt aber der gesuchte Ort in einer Linie, die auf dem Meridian des gegebenen Ortes senkrecht durch den gegebenen Ort geht, so ist $z = 90^\circ$, also $\delta = y$ und daher dieselben Gleichungen I, II, III des §. 11, wenn die Aequatorhöhe des gegebenen Ortes $\psi_{,}$ ist

$$\psi' = \psi_{,} + \frac{y^2}{2\,R''} \operatorname{Cotg}\psi_{,} + \frac{\epsilon^2 y^2}{2\,R''} \operatorname{Sin}\psi_{,} \operatorname{Cos}\psi_{,}$$

$$u = \frac{y}{\operatorname{Sin}\psi_{,}} . (1 - \frac{y^2}{3\,R''^2} \operatorname{Cotg}^2 \psi_{,})$$

$$z' = 270 - y \operatorname{Cotg}\psi_{,} + \frac{y^3}{3\,R''^2} \operatorname{Cotg}\psi_{,} (\tfrac{1}{2} + \operatorname{Cotg}^2 \psi_{,})$$

Ist also z das Azimut, ψ die Aequatorhöhe eines gegebenen Ortes, und sind X Y die rechtwinklichten Coordinaten eines unbekannten Ortes, dessen Aequatorhöhe ψ' ist, so findet man ψ' sowohl, als das Azimut z', als die Längendifferenz u des unbekannten Ortes durch folgende Gleichungen, in welchen die Hilfsgröfse $\psi_{,}$, die Aequatorhöhe des Fufspunkts der Ordinate Y ist

$$x = \frac{R''.X}{a} (1 - \frac{\epsilon^2}{2} \operatorname{Cos}^2 \psi)$$

$$= \frac{bR''}{a^2} . X \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{Sin}^2 \psi\right)$$

$$y = \frac{R'' . Y}{a} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{Cos}^2 \psi\right)$$

$$= \frac{bR''}{a^2} . Y \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{Sin}^2 \psi\right)$$

$$\left.\begin{aligned}
\psi_{\prime} &= \psi + x\left(1 + \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \psi + \frac{3\varepsilon^2 x}{4R''} \operatorname{Sin} 2\psi\right) \\
\psi' &= \psi_{\prime} + \frac{y^2}{2R''} \operatorname{Cotg} \psi_{\prime} \left(1 + \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \psi_{\prime}\right) \\
u &= \frac{y}{\operatorname{Sin} \psi_{\prime}} . \left(1 - \frac{y^2}{3R''^2} \operatorname{Cotg}^2 \psi_{\prime}\right) \\
z' &= 270^0 - y \operatorname{Cotg} \psi_{\prime} + \frac{y^3}{3R''^2} \operatorname{Cotg} \psi_{\prime} \left(\tfrac{1}{2} + \operatorname{Cotg}^2 \psi_{\prime}\right)
\end{aligned}\right\} (A)$$

Diese Gleichungen lassen sich durch einige einfache Veränderungen zur Ausübung bequemer machen. Ist nämlich

$$\xi = \frac{bR''}{a^2} . X \quad \text{und}$$

$$\upsilon = \frac{bR''}{a^2} . Y$$

$$n = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{Sin}^2 \psi, \text{ und}$$

$$m = 1 + \frac{3\varepsilon^2}{2} \operatorname{Sin}^2 \left(\psi \pm \tfrac{1}{2} \xi\right)$$

so sind die vorhergehenden Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}
\psi_{\prime} &= \psi + m\,\xi \\
\psi' &= \psi_{\prime} + \frac{n^4 \upsilon^2}{2R''} . \operatorname{Cotg} \psi_{\prime} \\
u &= \frac{n\,\upsilon}{\operatorname{Sin} \psi_{\prime}} - \frac{\upsilon^3 \operatorname{Cos}^2 \psi_{\prime}}{3R''^2 \operatorname{Sin}^3 \psi_{\prime}} \\
z' &= 270 - n\,\upsilon \operatorname{Cotg} \psi_{\prime} + \frac{\upsilon^3}{3R''^2} \operatorname{Cotg} \psi_{\prime} \left(\tfrac{1}{2} + \operatorname{Cotg}^2 \psi_{\prime}\right)
\end{aligned}\right\} (B)$$

Bringt man die Gröſsen m, n in zwey, oder bloſs die Gröſse

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{Sin}^2 x$$

in eine kleine Tafel, in die man zweymal mit dem Argumente

$$x = \psi \text{ und } x = \psi \pm \tfrac{1}{2} \xi$$

eingeht, so wird dadurch die Entwicklung dieser Gleichungen sehr erleichtert.

Ex. $\psi = 41^\circ\, 28'\, 50''$,

$X = -3737.\ 97$ Toisen, Nord

$Y = +54647.\ 8$ Toisen, Ost

Es ist $\log \frac{b R''}{a^2} = 8.7984183$, $\log \varepsilon^2 = 7.7766329$

also $\log \xi = 2.\ 3710541$, $\xi = 235''0$, $\log n = 0.\ 0005692$.

$\log \upsilon = 3.\ 5359910$ $\qquad$ $\log m = 0.\ 0017033$

$m\,\xi = \quad 0^\circ\ 3'\,55''\,92$ $\qquad$ $\frac{n^4 \upsilon^2}{2 R''} \operatorname{Cotg} \psi_{\prime} = 32.\ 61$

$\qquad 41\ \ 28\ \ 50$

$\psi_{\prime} = 41^\circ\, 24'\, 54''\, 08$ $\qquad$ $\psi' = 41^\circ\ 25'\ 26''\ 69$

$$\frac{n\,\upsilon}{\operatorname{Sin} \psi_{\prime}} = 5200''.\ 304$$

$$\frac{\upsilon^3 \operatorname{Cotg}^2 \psi_{\prime}}{3 R''^2 \operatorname{Sin} \psi'} = \frac{0.617}{5199.687} = 1^\circ\ 26'\ 39''\ 69 = u.$$

Bohnenberger findet für dieses Beyspiel (Monatl. Corr. 1802 Julius) aus anderen Ausdrücken

$$\psi' = 41^\circ\ 25'\ 26''7$$

$$u = \ 1^\circ\ 26'\ 39.''66$$

§. 13.

Wenn, wie wir gesehen haben, die Correctionen, welche von der Ellipticität der Erde abhängen, für kleine Distanzen δ in den meisten Fällen nur klein sind, so werden ohne Zweifel die Verbesserungen noch viel geringer seyn, welche von der Abweichung der Oberfläche der Erde von der des bisher betrachteten Sphäroids abhängen. Um aber bey der Auflösung dieser interessanten Aufgabe nichts zu wünschen übrig zu lassen, wollen wir, ohne der Erde irgend eine bestimmte geometrische Gestalt zu geben, die sie vielleicht auch nicht hat, bloſs den Beobachtungen gemäſs voraussetzen, daſs ihre Gestalt von der einer Kugel nur wenig verschieden sey. Die Gleichung der Kugel, deren Halbmesser die Einheit ist, ist bekanntlich

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

daher soll die Gleichung der Oberfläche der Erde seyn

$$\omega = 0 = x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha u - 1$$

wo α eine gegen die Einheit kleine Gröſse ist, deren Quadrat wir vernachlässigen wollen, und wo u als eine Function von x und y angesehen werden kann.

Die angenommene Gleichung gibt

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = 2x - 2\alpha \left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d\omega}{dy}\right) = 2y - 2\alpha \left(\frac{du}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d\omega}{dz}\right) = 2z$$

Substituirt man diese Werthe in den Gleichungen II. des §. 6., das heiſst, in den Gleichungen der kürzesten Linie zwischen zwey gegebenen Punkten auf der Oberfläche der Erde, so hat man

$$\left.\begin{aligned} x d^2 y - y d^2 x &= \alpha \left(\frac{du}{dx}\right) d^2 y - \alpha \left(\frac{du}{dy}\right) d^2 x \\ x d^2 z - z d^2 x &= \alpha \left(\frac{du}{dx}\right) d^2 z \\ y d^2 z - z d^2 y &= \alpha \left(\frac{du}{dy}\right) d^2 z \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Es sey r der von dem Mittelpunkte der Erde an seiner Oberfläche gezogene Halbmesser, ϑ der Winkel dieses Halbmessers mit der Umdrehungsaxe der z, und λ der Winkel der Axe der x mit dem in der Ebene der xy projicirten Halbmesser, so ist

$$x = r \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} \lambda$$

$$y = r \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Sin} \lambda$$

$$z = r \operatorname{Cos} \vartheta$$

Die Differentialien dieser Ausdrücke in Beziehung auf r, ϑ, λ geben

$$x dy - y dx = r^2 d\lambda \operatorname{Sin}^2 \vartheta$$

$$x dz - z dx = r^2 (d\lambda \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Sin} \lambda - d\vartheta \operatorname{Cos} \lambda)$$

$$z dy - y dz = r^2 (d\lambda \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Cos} \lambda + d\vartheta \operatorname{Sin} \lambda)$$

also auch

$$(x dz - z dx) \operatorname{Cos} \lambda + (y dz - z dy) \operatorname{Sin} \lambda = - r^2 d\vartheta$$

und endlich

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 d\lambda^2 \operatorname{Sin}^2 \vartheta$$

I. Man suche nun zuerst das Verhältniſs von $d\vartheta$ und ds.

Man kann in allen Ausdrücken, deren Factor a ist, für r die Einheit und für ϑ die Gröſse 90 — φ setzen, wo φ die beobachtete, und 90 — ϑ die geocentrische Polhöhe ist. Unter dieser Voraussetzung ist

$$x = \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} \lambda$$
$$y = \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \lambda$$
$$z = \operatorname{Sin} \varphi$$

Da aber u eine Function von x und y ist, so hat man

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy$$

und da, nach den letzten Gleichungen, u auch eine Function von φ und λ ist, so hat man eben so

$$du = \left(\frac{du}{d\varphi}\right) d\varphi + \left(\frac{du}{d\lambda}\right) d\lambda$$

Wir werden aber unten sehen, daſs es zu unserem Zwecke hinreicht, u bloſs als eine Function von φ anzusehen, wodurch

$$\left(\frac{du}{d\lambda}\right)$$

gleich Null wird. Setzt man also die beyden vorhergehenden Ausdrücke von du gleich, so ist

$$\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy = \left(\frac{du}{d\varphi}\right) d\varphi \text{ --- } (1)$$

Die letzten Werthe von x und y aber geben

$$dx = - d\varphi \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} \lambda - d\lambda \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \lambda$$
$$dy = - d\varphi \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} \lambda + d\lambda \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} \lambda$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen durch Cos λ, und die zweyte durch Sin λ, so ist ihre Summe

$$d\varphi = - \frac{(x\,dx + y\,dy)}{\operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} \varphi}$$

und wenn man diesen Werth von $d\varphi$ in der Gleichung (1) substituirt, und die Factoren von dx und dy einzeln gleich Null setzt, so ist

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = - \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \frac{\operatorname{Cos} \lambda}{\operatorname{Sin} \varphi}$$
$$\left(\frac{du}{dy}\right) = - \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \frac{\operatorname{Sin} \lambda}{\operatorname{Sin} \varphi}$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen durch $d^2 y$, und die zweyte durch $- d^2 x$, so gibt ihre Summe

$$\left(\frac{du}{dx}\right) d^2 y - \left(\frac{du}{dy}\right) d^2 x = -\left(\frac{du}{d\varphi}\right) \cdot \frac{x d^2 y - y d^2 x}{\sin\varphi \ \cos\varphi} \quad \cdots (2)$$

Vernachlässigt man aber die Gröſsen der Ordnung α, so sind die Gleichungen (A)

$$\left.\begin{array}{l} x d^2 y - y d^2 x = 0 \\ x d^2 z - z d^2 x = 0 \\ y d^2 z - z d^2 y = 0 \end{array}\right\} (3)$$

und die erste dieser Gleichungen zeigt an, daſs das letzte Glied der Gleichung (2) gleich Null ist. Es ist daher

$$\left(\frac{du}{dx}\right) d^2 y - \left(\frac{du}{dy}\right) d^2 x = 0$$

und wenn man dies in der ersten der Gleichungen A substituirt, so ist wie zuvor

$$x d^2 y - y d^2 x = 0$$

wovon das Integral

$x dy - y dx = c.\ ds$ das heiſst

$r^2\ d\lambda\ \sin^2 \vartheta = c.\ ds$ ist.

Multiplicirt man ferner die zweyte der Gleichungen (3) durch xz, und die dritte durch yz, so ist ihre Summe

$$d^2 z = \frac{z\,(x d^2 x + y d^2 y)}{x^2 + y^2}.$$

Aber, wenn man die Gleichung der Kugel zweymal differentiirt, so erhält man

$$x d^2 x + y d^2 y = - ds^2 - z d^2 z$$

also wird die vorhergehende Gleichung

$$d^2 z = - \frac{z\,(ds^2 + z d^2 z)}{x^2 + y^2}, \text{ oder}$$

$$(1 - z^2)\ d^2 z = - z ds^2 - z^2 d^2 z \text{ oder endlich}$$

$$d^2 z = - z ds^2$$

Substituirt man diesen Werth von $d^2 z$ in den zwey letzten der Gleichungen A, so erhält man

$$x d^2 z - z d^2 x = - \alpha \left(\frac{du}{dx}\right) . \sin\varphi .\ ds^2$$

$$yd^2z - zd^2y = -\alpha\left(\frac{du}{dy}\right).\ \mathrm{Sin}\ \varphi.\ ds^2$$

Substituirt man hier für

$$\left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{du}{dy}\right)$$

ihre oben gegebenen Werthe und integrirt, so ist

$$xdz - zdx = -c'ds + \alpha ds \int ds \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \mathrm{Cos}\ \lambda$$

$$ydz - zdy = -c''ds + \alpha ds \int ds \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \mathrm{Sin}\ \lambda$$

Multiplicirt man endlich die erste dieser Gleichungen durch Cos λ, und die zweyte durch Sin λ, so ist ihre Summe nach dem Vorhergehenden gleich

$$-r^2 d\vartheta$$

das heifst, es ist

$$r^2 d\vartheta = c' ds\ \mathrm{Cos}\ \lambda + c'' ds\ \mathrm{Sin}\ \lambda$$

$$-\alpha ds\ \mathrm{Cos}\ \lambda \int ds \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \mathrm{Cos}\ \lambda - \alpha ds\ \mathrm{Sin}\ \lambda \int ds \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \mathrm{Sin}\ \lambda \; \text{---} \; (B)$$

und dieser Ausdruck gibt das gesuchte Verhältnifs der Gröfsen $d\vartheta$, ds.

II. Wir wollen nun zuerst den Fall betrachten, wo das erste Element der geodätischen Linie senkrecht auf die Ebene xz des Meridians ist.

Denkt man sich von dem Endpunkte dieses Elements ein Loth auf die Ebene der xz, und nennt p die gerade Linie in dieser Ebene, welche die beyden Punkte verbindet, in welchen das Loth und das verlängerte Element diese Ebene trifft, so ist

$$\frac{p}{ds}$$

der Cosinus des Winkels des Elements mit dieser Ebene. Da aber p in der Ebene der xz liegt, so ist

$$p = \sqrt{dx^2 + dz^2}$$

also jener Cosinus gleich

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dz^2}}{ds},$$

und da die geodätische Linie senkrecht auf der Ebene xz steht, so ist im Anfange dieser Linie jener Cosinus gleich Null, d. h. es ist

$$dx = o \text{ und } dz = o$$

also auch

$$d.(r \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} \lambda) = o \text{ und}$$

$$d.(r \operatorname{Cos} \vartheta) = o$$

Differentiirt man diese Gleichungen und eliminirt dr, so ist

$$r\, d\vartheta = r\, d\lambda. \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Tg} \lambda$$

Es war aber

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 d\lambda^2 \operatorname{Sin}^2 \vartheta$$

wofür man, da in einer auf xz senkrechten Linie die Gröſsen

$$dr,\ d\vartheta \text{ gegen } d\lambda$$

verschwinden, annehmen kann

$$ds = r\, d\lambda \operatorname{Sin} \vartheta$$

also wird die vorhergehende Gleichung

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Tg} \lambda}{r}$$

Die Constante c' der Gleichung B ist offenbar der Werth von

$$x\,dz - z\,dx$$

im Anfangspunkte der krummen Linie. Da aber, wie wir gesehen haben, für diesen Punkt dx und dz Null sind, so ist auch c' Null, oder die Gleichung B gibt für den Anfangspunkt

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{c''}{r^2}. \operatorname{Sin} \lambda$$

Vergleicht man diese beyden Ausdrücke von

$$\frac{d\vartheta}{ds}$$

und bemerkt daſs λ ein Winkel der Ordnung α, also nahe

$$\operatorname{Tg} \lambda = \operatorname{Sin} \lambda$$

ist, so hat man

$$c'' = r' \operatorname{Cos} \vartheta'$$

wo r', ϑ' die Werthe von r und ϑ am Anfangspunkte sind.

Wenn aber die Linie senkrecht auf xz ist, so ist offenbar die Gröſse $d\vartheta$ für den Anfangspunkt gleich Null, oder es ist

$$\frac{d\vartheta'}{ds'} = 0.$$

Die Gleichung B gibt ferner, da λ von der Ordnung α ist,

$$r^2 d\vartheta = c'' \lambda ds - \alpha ds \int ds \left(\frac{du}{d\varphi}\right)$$

Differentiirt man diese Gleichung, und setzt für c'' den vorhergehenden Werth, so hat man

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} = \frac{d\lambda'}{ds} \cdot \frac{\operatorname{Cos}\vartheta'}{r'} - \alpha \left(\frac{du'}{d\varphi}\right) \; \text{- - -} \; (C)$$

wo die Striche anzeigen, daſs die damit bezeichneten Gröſsen für den Anfangspunkt der Linie gehören.

III. Die krumme Linie der Erdmeridiane mag seyn, welche sie wolle, wenn sie nur eine ebene Krumme ist, und als eine solche kann man sie immer annehmen, so ist der Winkel z, welchen der Radius r und die Normale in dem Orte des Beobachers bilden, gleich

$$(90 - \vartheta - \varphi.)$$

Ferner ist die Tangente des Winkels, welchen r mit der geometrischen Tangente des Meridians bildet, gleich

$$\frac{r\,d\varphi}{dr}.$$

und da dieser Winkel gleich $90 - z$ ist, so ist

$$\operatorname{Tg} z = \frac{dr}{r\,d\varphi}$$

oder endlich, da z immer sehr klein, und r der Einheit sehr nahe ist,

$$z = \frac{dr}{d\varphi}, \text{ das heiſst}$$

$$\vartheta = 90 - \varphi - \frac{dr}{d\varphi}.$$

Wir hatten aber oben

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{r \operatorname{Sin}\vartheta}$$

und da man statt ϑ die Gröſse $90-\varphi$ und statt r die Einheit setzen kann, so wird die Gleichung C (N. II.)

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} = \operatorname{Tg}\varphi' - \alpha \left(\frac{du'}{d\varphi}\right)$$

Weiter findet man leicht

$$\left(\frac{d^2 u}{ds^2}\right) = -\left(\frac{du}{d\varphi}\right) \cdot \frac{d^2 \vartheta}{ds^2}$$

also auch

$$\alpha \left(\frac{d^2 u}{ds^2}\right) = -\alpha \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \text{Tg}\, \varphi'$$

Entwickelt man aber φ nach den Potenzen der auf die Ebene x z senkrechten Linie s, so ist

$$\varphi = \varphi' + s. \frac{d\varphi'}{ds} + \frac{s^2}{1.2} \cdot \frac{d^2\varphi'}{ds^2} +$$

$$= \varphi' - s. \frac{d\vartheta'}{ds} - \frac{s^2}{1.2} \cdot \frac{d^2\vartheta'}{ds^2} - \cdot$$

Es war

$$\frac{d\vartheta}{ds} = 0, \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} = \text{Tg}\, \varphi - \alpha \left(\frac{du}{d\varphi}\right)$$

also ist auch

$$\varphi = \varphi' - s \left(\text{Tg}\, \varphi - \alpha \left(\frac{du}{d\varphi}\right)\right) \text{ - - - (D)}$$

Eben so hat man

$$\lambda = \lambda' + s. \frac{d\lambda'}{ds} + \frac{s^2}{2} \cdot \frac{d^2\lambda'}{ds^2} +$$

Aber

$$\frac{d\lambda,}{ds} = \frac{1}{r' \text{Sin}\vartheta'},$$

also wenn man

$$r' = 1 + \alpha u', \text{ und}$$

$$\text{Sin}\, \vartheta' = \text{Cos}\left(\varphi + \frac{dr}{d\varphi}\right) \text{ setzt,}$$

$$\frac{d\lambda'}{ds} = \frac{1}{\text{Cos}\, \varphi'} \left(1 - \alpha u' + \alpha \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \text{Tg}\, \varphi'\right)$$

und daher die vorhergehende Reihe

$$\lambda = \lambda' + \frac{s}{\text{Cos}\, \varphi'} \left(1 - \alpha u' + \alpha \left(\frac{\varphi, p}{du'}\right) \text{Tg}\, \varphi'\right) \text{ - - - (a)}$$

Um endlich noch den Winkel zu erhalten, den das letzte

Element des Bogens s mit seinem Meridian bildet, so ist in dem Dreyecke, dessen Winkel der Pol, das erste und das letzte Element des Bogens s ist, der Cosinus jenes Winkels gleich

$$\text{Sin } \varphi \text{ Sin } (\lambda - \lambda')$$

Da aber jener Winkel sehr nahe ein rechter ist, so sey n das, was ihm noch zu einem rechten Winkel fehlt, also

$$\text{Sin } n = \text{Sin } \varphi \text{ Sin } (\lambda - \lambda')$$

oder

$$n = (\lambda - \lambda') \text{ Sin } \varphi.$$

Da sonach das Azimut des letzten Elements gleich $90 - n$ d. h. gleich

$$90 - (\lambda - \lambda') \text{ Sin } \varphi$$

ist, so ist nach der Gleichung (a) dieses Azimut

$$z' = 90 - s \text{ Tg } \varphi' \left(1 - \alpha u' + \alpha \left(\frac{d u'}{d \varphi}\right)' \text{Tg } \varphi'\right) \text{ --- (b)}$$

Anmerkung. Zur gröfseren Genauigkeit der Gleichungen a, b kann man ihnen noch die Glieder addiren, deren Factor s^3 ist, und die von α unabhängig sind. Man erhält diese Glieder unter der Voraussetzung einer kugelförmigen Erde, für welche man mittels der sphärischen Trigonometrie hat

$$\text{Tg } (\lambda - \lambda') = \frac{\text{Tg } s}{\text{Cos } \varphi'}, \text{ und}$$

$$\text{Tg } n = \text{Tg } \varphi' \text{ Sin } s$$

Die erste dieser Gleichungen gibt

$$(\lambda - \lambda') + \tfrac{1}{3}(\lambda - \lambda')^3 = \frac{s + \frac{1}{3} s}{\text{Cos } \varphi'},$$

woraus

$$\lambda - \lambda' = \frac{s}{\text{Cos } \varphi} - \tfrac{1}{3} s^3 \frac{\text{Tg}^2 \varphi}{\text{Cos } \varphi}$$

und die zweyte gibt

$$n + \tfrac{1}{3} n^3 = \text{Tg } \varphi' \left(s - \tfrac{1}{6} s^3\right)$$

woraus

$$n = s \text{ Tg } \varphi' - \tfrac{1}{3} s^3 \text{ Tg } \varphi' \left(\tfrac{1}{2} + \text{Tg}^2 \varphi'\right),$$

so dafs die beyden Gleichungen a und b in folgende übergehen

$$\left.\begin{array}{l}\lambda - \lambda' = \frac{s}{\mathrm{Cos}\,\varphi}\left(1 - \alpha u' + \alpha \left(\frac{d u'}{d \varphi}\right) \mathrm{Tg}\,\varphi' - \frac{1}{3} s^2\, \mathrm{Tg}^2\,\varphi\right) \\ z' = 90 - s\,\mathrm{Tg}\,\varphi' \Big(1 - \alpha u' + \alpha \left(\frac{du'}{d\varphi}\right) \mathrm{Tg}\,\varphi' \\ - \frac{1}{3} s^3 \left(\frac{1}{2} + \mathrm{Tg}^2\,\varphi'\right)\Big)\end{array}\right\} (E)$$

III. Wir wollen nun noch kürzlich eben so den Fall betrachten, wenn das erste Element der geodätischen Linie mit der Ebene der x z parallel ist. Bezeichnet $d\sigma$ das Element dieser Linie, so war

$$d\sigma^2 = d r^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 d\lambda^2 \,\mathrm{Sin}^2\vartheta$$

oder, da $d r$ und $d\lambda$ gegen $d\vartheta$ verschwinden

$$d\sigma = - r\, d\vartheta$$

vorausgesetzt, daſs σ vom Aequator gegen den Pol wächst.

Es war aber

$$\vartheta = 90 - \varphi - \left(\frac{d r}{d \varphi}\right) \text{ und}$$

$$r = 1 + \alpha u,$$

$$d r = \alpha\, d u,$$

also ist

$$d\vartheta = - d\varphi - \alpha\, d\varphi \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2}\right)$$

und daher

$$d\sigma = d\varphi \quad 1 + \alpha u + \alpha \left(\frac{u^2 d}{d\varphi^2}\right).$$

Ist der Kürze wegen

$$1 + \alpha u + \alpha \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2}\right) = f(\varphi),$$

also auch

$$d\sigma = d\varphi . f(\varphi)$$

so ist das Integral dieses Ausdrucks zwischen den Gränzen φ und $\varphi_{,}$ bekanntlich

$$\sigma = (\varphi - \varphi_{,}) f(\varphi) + \frac{(\varphi - \varphi_{,})^2}{1.2.} \frac{d f(\varphi)}{d\varphi} + \frac{(\varphi - \varphi_{,})^3}{1.2.3} . \frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2} +$$

woraus man durch Umkehrung findet

$$\varphi - \varphi_{,} = \sigma - \alpha\sigma\left(u + \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2}\right)\right) - \frac{\alpha\sigma}{2}\left(\left(\frac{d u}{d\varphi}\right) + \left(\frac{d^3 u}{d\varphi^3}\right)\right) \cdots (F)$$

und die Gleichungen D, E, F sind die gesuchten.

IV. Um die gefundenen Gleichungen mit den in den vorhergehenden gegebenen Ausdrücken zu vergleichen, ist der Krümmungshalbmesser einer krummen Linie von doppelter Krümmung Cap. X. §. 6. III.

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}$$

welcher Ausdruck $ds = \text{Const.}$ voraussetzt.

Die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 2\alpha u$$

gibt nach einer doppelten Differentiation

$$x d^2 x + y d^2 y + z d^2 z = \alpha d^2 u - ds^2$$

Addirt man aber zu dem Quadrate dieser Gleichung die Quadrate der drey Gleichungen (A), so erhält man, wenn man wieder α^2 vernachlässiget, zur Summe aller vier Quadrate

$$(x^2 + y^2 + z^2)(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2)$$
$$= ds^4 - 2\alpha ds^2 d^2 u$$

also ist

$$\varrho = \frac{ds^2 \sqrt{1 + 2\alpha u}}{\sqrt{ds^4 - 2\alpha ds^2 d^2 u}} = 1 + \alpha u + \frac{\alpha d^2 u}{ds^2}$$

Ist die geodätische Linie s senkrecht auf den Meridian, (die Ebene der xz) so ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{d^2 u}{ds} = -\left(\frac{du}{d\varphi}\right) \operatorname{Tg} \varphi'$$

also auch

$$\varrho' = 1 + \alpha u - \alpha \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \operatorname{Tg} \varphi'$$

Ist aber die geodätische Linie σ der Ebene der xz parallel, so ist (nach III)

$$d\sigma = -r d\vartheta = (1 + \alpha) u \, d\varphi \text{ also}$$

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = \frac{d^2 u}{d\varphi^2}, \text{ also auch}$$

$$\varrho'' = 1 + \alpha u + \alpha \left(\frac{d^2 u}{d\varphi}\right)$$

Setzt man in N. III.

$$\frac{\sigma}{\varrho''} = x,$$

so ist die Gleichung F, wenn

$$\alpha = \frac{\varepsilon^2}{2}$$

gesetzt wird,

$$\varphi_{,} = -x\left(1 + \frac{\varepsilon^2 x}{4}\left(\frac{du}{d\varphi}\right) + \frac{\varepsilon^2 x}{4}\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)\right)$$

und setzt man in N. II.

$$\frac{\bullet}{\rho'} = y,$$

so sind die Gleichungen D und E, wenn man $\varphi_{,}$ für jenes φ setzt,

$$\varphi' = \varphi_{,} + \tfrac{1}{2} y^2 \left(\mathrm{Tg}\,\varphi_{,} - \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)\right)$$

$$\lambda - \lambda' = \frac{y}{\mathrm{Cos}\,\varphi'}\left(1 - \tfrac{1}{3} y^2\,\mathrm{Tg}^2\,\varphi_{,}\right)$$

$$z' = 90 - y\,\mathrm{Tg}\,\varphi_{,} + \tfrac{1}{3} y^3\,\mathrm{Tg}\,\varphi_{,}\left(\tfrac{1}{2} + \mathrm{Tg}^2\,\varphi_{,}\right)$$

und aus den letzten vier Gleichungen wird man, so wie in §. 12. die Polhöhe φ', die Längendifferenz $\lambda - \lambda'$ und das Azimut z' eines Ortes finden, wenn dessen Coordinaten x y gegen einen andern Ort, dessen Polhöhe φ ist, gegeben sind.

V. Um aber die letzten Gleichungen zur Anwendung brauchbar zu machen, muſs man zuvor irgend eine Hypothese für die Gestalt der Erde, d. h. für die Gröſse u annehmen.

Die Gleichung des Körpers, der durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe b entsteht, ist

$$a^2 z^2 + b^2 (y^2 + x^2) = a^2 b^2$$

Setzt man

$$a\,\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}$$

so ist diese Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 - \varepsilon^2 (x^2 + y^2 - 1) = 0$$

wofür man auch setzen kann

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 + \varepsilon^2\,z^2 = 0$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der im Anfange dieses §. angenommenen allgemeinen Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 - \varepsilon^2\,u = 0$$

so ist

$$u = -z^2$$

das heifst

$$u. = - \sin^2 \varphi$$

also auch

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right) = - \sin 2\varphi,$$

$$\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right) = -2 \cos 2\varphi,$$

$$\left(\frac{d^3u}{d\varphi^3}\right) = 4 \sin 2\varphi,$$

und wenn man diese Werthe in den vorhergehenden Ausdrücken substituirt, so erhält man erstens

$$\varrho' = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 \varphi$$

$$\varrho'' = 1 - \varepsilon^2 + \frac{3\varepsilon}{2} \sin^2 \varphi$$

$$x = \sigma \left(1 + \varepsilon^2 - \frac{3\varepsilon^2}{2} \sin^2 \varphi\right)$$

$$y = s \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 \varphi\right)$$

und zweytens für die vier letzten Gleichungen der N. IV,

$$\varphi_{,} = \varphi - x \left(1 + \frac{3\varepsilon^2 x}{4} \sin^2 \varphi\right)$$

$$\varphi' = \varphi_{,} + \frac{y^2}{2} \operatorname{Tg} \varphi_{,} (1 + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi_{,})$$

$$\lambda - \lambda' = \frac{y}{\cos \varphi_{,}} \cdot (1 - \tfrac{1}{3} y^2 \operatorname{Tg}^2 \varphi_{,})$$

$$z' = 90 - y \operatorname{Tg} \varphi_{,} + \tfrac{1}{3} y^3 \operatorname{Tg} \varphi_{,} (\tfrac{1}{2} + \operatorname{Tg}^2 \varphi_{,})$$

und von diesen Gleichungen sind die drey letzten die Gleichungen (A) des §. 12, weil die Werthe von y in beyden Fällen identisch sind. Aber man sieht leicht, dafs auch der Werth von $\varphi_{,}$ aus der ersten dieser vier Gleichungen mit dem übereinstimmt, der aus der ersten der Gleichungen (A) folgt. Man wird noch bemerken, dafs ϱ' ϱ'' die zwey Halbmesser der Krümmung der beyden krummen Linien sind, die auf einander senkrecht stehen, und von denen die eine die gröfste, die andere die kleinste Krümmung unter allen Curven hat, die in derselben Oberfläche durch denselben Durchschnittspunkt jener beyden Curven können gezogen werden. Für das abgeplattete Sphäroid ist der Krümmungshalbmesser der erzeugenden Curve oder ϱ'' der kleinste aller Krümmungshalbmesser, für das längliche Sphäroid aber ist der der erzeugenden Curve von allen der gröfste.

§. 14.

Wir haben in dem Vorhergehenden gezeigt, wie man aus dem gegebenen Dreyecknetze die Länge und Breite der Signalpunkte ableiten könne. Zur vollständigen Bestimmung dieser Punkte fehlt noch die dritte Coordinate, oder die Höhe dieser Punkte über der Meeresfläche. Um aber aus den gegenseitig beobachteten Zenithdistanzen dieser Punkte die wahre Höhe derselben zu finden, muſs offenbar bey jeder Beobachtung der Mittelpunkt des Instruments in dem Signalpunkte des Beobachtungsortes selbst stehen, oder doch die auſser diesem Punkte beobachtete Zenithdistanz auf ihn zurückgebracht werden. Da bey diesen Zenithdistanzen es nichts schadet, wenn auch der Beobachtungspunkt den Signalen seitwärts liegt, wenn er nur in einerley Horizontallinie mit ihm ist, so sey d h der Unterschied beyder Horizontalebenen, des Beobachtungspunktes und des Signalpunktes, e die Entfernung beyder Signalpunkte, und z die aus dem Beobachtungsorte gemessene, so wie ζ die corrigirte oder die aus dem Signalpunkte zu messende Zenithdistanz, so ist, wie man leicht sieht,

$$\mathrm{Tg}\,\zeta = \frac{d\,h \operatorname{Sin} z}{e - d\,h \operatorname{Cos} z}$$

also

$$\zeta = z + \left(\frac{d\,h}{e}\right)\frac{\operatorname{Sin} z}{\operatorname{Sin} 1''}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\,h}{e}\right)^2 \frac{\operatorname{Sin} 2\,z}{\operatorname{Sin} 1''} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{d\,h}{e}\right)^3 \frac{\operatorname{Sin} 3\,z}{\operatorname{Sin} 1''}$$

In diesem Ausdrucke ist e nicht der Bogen oder die Chorde zwischen beyden Gegenständen, sondern die gerade Linie, welche die Signalpunkte vereiniget. Es ist aber klar, daſs man für e auch ohne merklichen Fehler den Bogen brauchen kann, da d h gegen e meistens sehr klein ist. Auch reicht das erste Glied dieser Correction meistens hin.

Es seyen also z und z′ die beyden so corrigirten Zenithdistanzen der Signalpunkte, die übrigens noch ihre Refractionen r und r′ enthalten. Sind A, B (Fig. 27) die beyden Signalpunkte, und ist ω der Mittelpunkt der Erde, so ist

$$Z\,A\,B = z + r$$

die wahre Zenithdistanz an dem Orte A, dessen Höhe über dem Meere bekannt seyn soll, und

$$Z'\,B\,A = Z' + r'$$

die wahre Zenithdistanz an dem Orte B, dessen Höhe gesucht wird.

Man sieht leicht, dafs

$$ZAB + Z'BA = 180^\circ + \omega \text{ ist.}$$

Ist $A\omega = b\omega$, so ist $Bb = dH$ die gesuchte Höhendifferenz beyder Signale und $Ab = \Delta$ die horizontale Entfernung oder die Chorde beyder Signale. Wir haben also die zwey Gleichungen

$$z + r + z' + r' = 180 + \omega$$
$$\frac{dH}{\Delta} = \frac{\text{Sin } BAb}{\text{Sin } ABb}$$

I. Die terrestrische Refration r, r' ist, wie man gewöhnlich annimmt, blofs eine Function des Winkels ω. Sind also beyde Beobachtungen gleichzeitig, oder unter denselben Umständen angestellt, so ist $r = r'$ und wenn man

$$n = \frac{r}{\omega}$$

setzt, so ist

$$n = \frac{90 + \frac{\omega}{2} - \frac{1}{2}(z' + z)}{\omega}$$

und man fand aus den Beobachtungen n nahe gleich 0. 08.

Man wird daher die Refraction bestimmen können, wenn man die zwey analogen Zenithdistanzen z z' aus unmittelbaren Beobachtungen kennt. Was aber den Winkel ω betrifft, so ist Δ gleich ω multiplicirt mit dem Krümmungshalbmesser, oder

$$\omega = \frac{\Delta}{a \text{ Sin } 1''} \cdot (1 - \varepsilon^2 - \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 \text{ Sin}^2 \varphi)$$

wo $\log a = 6.5147151$.

Sey der Kürze wegen

$$\frac{1}{a \text{ Sin } 1''} (1 - \varepsilon^2 - \frac{3\varepsilon^2}{2} \text{ Sin}^2 \varphi) = m$$

so dafs

$$\omega = m\Delta \text{ ist,}$$

II. Es ist

$$\omega Ab = 90 - \frac{\omega}{2},$$

$$BAb = 180 - ZAB - \omega Ab = 90 + \frac{\omega}{2} - z - r$$

und

$$ABb = z + r - \omega$$

also die zweyte der vorhergehenden beyden Gleichungen

$$dH = \frac{\Delta \operatorname{Cos}\left(z + r - \frac{\omega}{2}\right)}{\operatorname{Sin}(z + r - \omega)}$$

und dadurch findet man dH aus z, wenn r bekannt ist.

Da

$$z + r = 180 + \omega - z' - r$$

so ist auch

$$dH = -\frac{\Delta \operatorname{Cos}\left(z' + r - \frac{\omega}{2}\right)}{\operatorname{Sin}(z' + r)}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Gröfse

$$r = 90 + \frac{\omega - z' - z}{2}$$

so ist

$$dH = \frac{\Delta \operatorname{Sin} \frac{z' - z}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{z' - z + \omega}{2}}$$

und dadurch findet man dH aus den beyden Zenithdistanzen, ohne dafs man r kennt. Ist $z' < z$, so ist dH negativ, oder deren unbekannter Ort liegt unter dem bekannten.

Exempel: $\Delta = 100000$ Toisen, $\frac{z' - z}{2} = 0° \, 20' \, 0''$

$$\log m = 8.7997100$$
$$5.$$
$$\log \omega = 3.7997100$$
$$\omega = 1° \, 45' \, 5'' \, 36$$
$$\frac{z' - z + \omega}{2} = 1° \, 12' \, 32'' \, 68$$

also gibt der letzte Ausdruck für dH

$$dH = 581.9027 \text{ Toisen.}$$

III. Dieselbe Gleichung dient auch, aus z, z' und dH die horizontale Entfernung Δ zweyer Orte zu finden. Es ist nämlich

$$\Delta = dH \frac{\operatorname{Cos} \frac{z' - z + \omega}{2}}{\operatorname{Sin} \frac{z' - z}{2}}$$

wo man $(z' - z)$ aus den beobachteten Zenithdistanzen, und dH etwa durch Barometermessungen erhält. Es ist klar, dafs dieser Ausdruck für Δ in der Ausübung keiner grofsen Schärfe fähig ist. Um diese Gleichung, in welcher die Gröfse

$$\omega = m\,\Delta$$

noch unbekannt ist, aufzulösen, kann man so verfahren

$$\text{Sey } \log dH = 2.7648504, \text{ und } \frac{z'-z}{2} = 0^\circ\, 20'\, 0''$$

$$\log \operatorname{Sin} \frac{z'-z}{2} = \frac{7.7647537}{5.0000967} \qquad \log m = 8.7997100$$

$$\log \operatorname{Cos} \frac{z'-z}{2} = \underline{9.9999927}$$

$$\log \Delta = 5.0000894 \text{ --- } \log \frac{dH}{\operatorname{Sin} \frac{z'-z}{2}} = 5.0000967$$

$$\underline{8.7997100}$$

$$\log \omega = 3.7997994 \quad \log \operatorname{Cos} \frac{z'-z+\omega}{2} = \underline{9.9999033}$$

$$\omega = 6307'' \qquad \log \Delta = 5.0000000 \text{ wie zuvor.}$$

§. 15.

Wir wollen nun sehen, was sich aus den bisher gemessenen Breitengraden für die Gröfse und Gestalt der Erde ergibt. Die vorzüglichsten dieser Messungen sind

Mittlere Breite des gemessenen Bogens	Länge des Breitengrades	Ort und Beobachter.
45° 4′ 17″	57012 Toisen	Frankreich, Delambre u. Mechain.
66 20 10	57196	Lappland, Svanberg.
12 32 20	56763	Bengalen, Lambton.
1 31 0	56737	Peru, Bouguer.
52 2 20	57069	England, Mudge.
39 12 0	56888	Pensilvanien, Mason
33 18 0 Südl.	57037	Vorgeb. d. gut. Hoffnung, Lacaille.
43 1 0	56979	Italien, Boscovich.

Von diesen sind die vier ersten die verläfslichsten. Sucht man aus je zweyen derselben nach §. 5. I die Excentricität

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

und daraus die Abplattung in Beziehung auf a oder

$$= \frac{a - b}{a} = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^2 + \tfrac{1}{8}\,\varepsilon^4 + \tfrac{1}{16}\,\varepsilon^6 +$$

so findet man

$$\text{Frankreich, Peru } \alpha = \frac{1}{310.6}$$

$$\text{- - - Bengalen} = \frac{1}{311.3}$$

$$\text{- - - Lappland} = \frac{1}{315.2}$$

$$\text{Lappland, Bengalen} = \frac{1}{312.9}$$

$$\text{Aequator} = \frac{1}{312.4}$$

Im Mittel aus diesen wohl übereinstimmenden Resultaten

$$\alpha = \frac{1}{312.5} = 0.0032 \text{ und}$$

$$\varepsilon = 0.0799$$

Aus dieser Abplattung und der französischen Messung folgt der Quadrant des Erdmeridians

Q = 5131117 Toisen

Halbmesser des Aequators 3271812

und der der mittleren Breite von 45 Graden entsprechende Breitengrad

g = 57011876 Toisen

woraus die Gröfse g' jedes andern Breitengrades, zu dem die mittlere Breite φ gehört, folgt

$$g' = g\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2 - \varepsilon^2}\,\mathrm{Cos}\,2\,\varphi\right)^{-\frac{3}{2}}$$

Die andern Messungen gewähren nicht dieselbe Uebereinstimmung, woran Beobachtungsfehler, Anziehung benachbarter Gebirge auf das Bleyloth, oder Unregelmäfsigkeiten in der Oberfläche der Erde selbst, deren Gestalt sich von jener eines Ellipsoids beträchtlich entfernen kann, Schuld seyn mögen.

I. Genauer würde man verfahren, wenn man für jede der vorhergehenden Messungen ihren Breitengrad

$$g = x + y \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

setzte, wo φ die mittlere Breite des gemessenen Bogens ist; und wenn man dann aus diesen acht Bedingungsgleichungen die wahrscheinlichsten Werthe von x und y nach der Methode der kleinsten Quadrate (Cap. IX.) entwickelte. M. s. Delambres Astronomie; dessen Base du système métrique, und Laplaces Expos. du système du monde.

§. 16.

Endlich mufs hier noch folgende Methode, die Gestalt des Erdmeridians aus geodätischen Messungen zu bestimmen, ihrer Wichtigkeit wegen angezeigt werden.

Ist a der Halbmesser des Erdäquators, b die halbe kleine Axe, r die Entfernung eines Punktes der Oberfläche vom Mittelpunkte und ψ der Winkel der Linie b und r, so folgt aus den über die Gestalt flüssiger Körper angestellten Untersuchungen, denn als einen solchen setzt man auch die Erde in ihrem ursprünglichen Zustande voraus, dafs die Gestalt des Erdmeridians durch folgende Gleichung ausgedrückt werden kann

$$r = b\,(1 + m \operatorname{Sin}^2 \psi + n \operatorname{Sin}^4 \psi)$$

wo m eine sehr kleine Gröfse von der Ordnung der Abplattung, und wo n von der Ordnung m^2 ist. Heifst diese Abplattung

$$\alpha = \frac{a - b}{b}$$

so ist, da $r = a$ für

$$\psi = 90^\circ \text{ ist, } m + n = \alpha.$$

Für den Fall, wo die Gestalt der Meridiane rein elliptisch ist, hat man, wenn man die Abscisse x auf der grofsen Axe vom Mittelpunkte, und die Ordinate y darauf senkrecht nimmt,

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

Es ist aber

$$y = r \operatorname{Cos} \psi,$$
$$x = r \operatorname{Sin} \psi$$

also auch

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{Cos}^2 \psi + b^2 \operatorname{Sin}^2 \psi}$$

Setzt man in diesem Ausdrucke für a die Gröſse $b\,(1+\alpha)$ und vernachlässigt man α^3, so ist

$$r = b\,(1 + (\alpha - \tfrac{3}{2}\,\alpha^2)\,\mathrm{Sin}^2\,\psi + \tfrac{3}{2}\,\alpha^2\,\mathrm{Sin}^4\,\psi)$$

woraus folgt, daſs die oben angenommene Gleichung in die der Ellipse übergeht, wenn

$$m = \sqrt{\frac{2n}{3}}$$

ist. Es sey nun s ein Bogen des Meridians zwischen den zwey Halbmessern a und r, so ist

$$ds = -\sqrt{r^2\,d\psi^2 + dr^2}$$

also auch, da dr von der Ordnung α ist

$$ds = -r\,d\psi - \frac{dr^2}{2\,r\,d\psi}$$

oder, wenn man für r und dr ihre Werthe aus der vorhergehenden Gleichung substituirt,

$$ds = -b\,d\psi\,(1 + m\,\mathrm{Sin}^2\,\psi + n\,\mathrm{Sin}^4\,\psi + 2\,m^2\,\mathrm{Sin}^2\,\psi\,\mathrm{Cos}^2\,\psi)$$

Integrirt man diesen Ausdruck, und bestimmt die Constante der Integration so, daſs $s = 0$ für $\psi = 90$ wird, so erhält man

$$s = b\left(1 + \frac{m}{2} + \frac{3n}{8} + \frac{m^2}{4}\right)(90 - \psi)$$

$$+ \frac{b}{4}\,(m+n)\,\mathrm{Sin}\,2\,\psi + \frac{b}{32}\,(2\,m^2 - n)\,\mathrm{Sin}\,4\,\psi$$

Ist aber φ die beobachtete Polhöhe, oder der Winkel der Normale mit a, so ist bekanntlich

$$\mathrm{Tg}\,(\varphi + \psi - 90) = \frac{dr}{r\,d\psi}$$

also auch, wenn man wieder die dritten und höheren Potenzen von α vernachlässiget

$$\varphi + \psi - 90 = \frac{dr}{r\,d\psi}$$

woraus man erhält

$$\varphi = 90 - \psi + 2\,\mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi\,(m + (2\,n - m^2)\,\mathrm{Sin}^2\,\psi)$$

$$= 90 - \psi + \left(m + n - \frac{m^2}{2}\right)\mathrm{Sin}\,2\,\psi$$

$$+ \tfrac{1}{4}\,(m^2 - 2\,n)\,\mathrm{Sin}\,4\,\psi$$

und daraus durch Reversion

$$\psi = 90 - \varphi + \left(m + n - \frac{m^2}{2}\right) \text{Sin } 2\,\varphi$$

$$- \tfrac{1}{4} (5\, m^2 - 2\, n) \text{ Sin } 4\, \varphi$$

Substituirt man diesen Werth von ψ in dem vorhergehenden Ausdrucke von s, so erhält man

$$s = b \left(1 + \frac{m}{2} + \frac{3\,n}{8} + \frac{m^2}{4}\right) \varphi$$

$$- \tfrac{3}{4}\, b\, (m + n) \text{ Sin } 2\, \varphi$$

$$+ \tfrac{1}{32}\, b\, (30\, m^2 - 15\, n) \text{ Sin } 4\, \varphi$$

Ist also Q der Quadrant des Meridians, so ist, wenn man

$$\varphi = 90 = \frac{\pi}{2} \text{ setzt,}$$

$$Q = b \left(1 + \frac{m}{2} + \frac{3n}{8} + \frac{m^2}{4}\right). \frac{\pi}{2}$$

also auch

$$s = Q.\left(\frac{2\varphi}{\pi} - \frac{3}{2\pi} (m + n - \tfrac{1}{2} m^2) \text{ Sin} 2\, \varphi + \frac{15}{8\pi} (m^2 - \tfrac{1}{2} n) \text{ Sin} 4\, \varphi\right).$$

und eben so, wenn s' ein anderer Bogen des Meridians ist, zu welchem die Breite φ' gehört

$$s' - s = \frac{2\,Q}{\pi} (\varphi' - \varphi) - \frac{3\,Q}{2\,\pi} (m + n - \tfrac{1}{2}\, m^2) (\text{Sin} 2\, \varphi' - \text{Sin} 2\, \varphi)$$

$$+ \frac{15\,Q}{8\,\pi} (m^2 - \tfrac{1}{2}\, n) (\text{Sin } 4\, \varphi' - \text{Sin } 4\, \varphi)$$

und dies ist die Gleichung, welche das Verhältniſs irgend eines Bogens

$$s' - s$$

des Meridians und der Differenz

$$\varphi' - \varphi$$

der Breiten seiner Endpunkte gibt. Kennt man die Gröſsen m und n, so wird man aus dieser Gleichung auch die Länge Q des Meridianquadranten erhalten.

Sey der Kürze wegen

$$p = \frac{3}{2\,\pi} (m + n - \tfrac{1}{2}\, m^2)$$

$$q = \frac{15}{8\,\pi} (m^2 - \tfrac{1}{2}\, n)$$

so ist die vorhergehende Gleichung

$$\frac{s'-s}{Q} = \frac{2}{\pi}(\varphi'-\varphi) - p\,(\mathrm{Sin}\,2\,\varphi' - \mathrm{Sin}\,2\,\varphi)$$

$$+ q\,(\mathrm{Sin}\,4\,\varphi' - \mathrm{Sin}\,4\,\varphi)$$

in welcher p und q die unbekannten Gröfsen sind. Da aber q viel kleiner ist, als p, so kann man in einer ersten Näherung die Gröfse q vernachlässigen, und dann werden je zwey der angestellten Messungen eine Gleichung

$$\frac{s'-s}{Q} = \frac{2}{\pi}(\varphi'-\varphi) - p\,(\mathrm{Sin}\,2\,\varphi' - \mathrm{Sin}\,2\,\varphi)$$

geben, und aus allen diesen Gleichungen wird man durch die Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe von Q und p finden. Heifst man diese ersten genäherten Werthe Q° und p°, und die verbesserten

$$Q = Q^\circ.\,(1 + x)$$

$$Q\,p = Q^\circ\,p^\circ\,(1 + y)$$

und endlich

$$Q\,q = Q^\circ.\,z$$

so hat man, wenn man diese Werthe von Q, Qp, Qq in der vorhergehenden allgemeinen Gleichung substituirt,

$$\frac{s'-s}{Q^\circ} = \frac{2}{\pi}(\varphi'-x)\,(1+x)$$

$$- p^\circ\,(1 + y)\,(\mathrm{Sin}\,2\,\varphi' - \mathrm{Sin}\,2\,\varphi)$$

$$+ z\,(\mathrm{Sin.}\,4\,\varphi' - \mathrm{Sin}\,4\,\varphi)$$

und wenn man von dieser Gleichung die vorletzte abzieht,

$$o = \frac{2}{\pi}(\varphi'-x).\,x - (\mathrm{Sin}\,2\,\varphi' - \mathrm{Sin}\,2\,\varphi).\,y$$

$$+ (\mathrm{Sin}\,4\,\varphi' - \mathrm{Sin}\,4\,\varphi).\,z$$

so dafs also jedes Paar von Beobachtungen eine Gleichung der Form

$$o = A\,x - B\,y + C\,z$$

gibt, wenn man x^2 vernachlässigt. Aus diesen Gleichungen wird man dann die wahrscheinlichsten Werthe der Gröfsen

$$x \quad y \quad z$$

bestimmen können. Kennt man diese, so ist der wahre Werth von

$$Q = Q^\circ\,(1 + x)$$

$$p = \frac{p^0\,(1+y)}{1+x}, \text{ oder nahe}$$

$$p = p^0\,(1+y-x)$$

$$q = \frac{z}{1+x}, \text{ oder nahe}$$

$$q = z$$

Setzt man endlich

$$k = \pi\left(\tfrac{2}{3}\,p + \tfrac{16}{15}\,q\right)$$

so hat man

$$m = k - \tfrac{2}{3}\,k^2$$

$$n = 2\,m^2 - \tfrac{16}{15}\,q\,\pi$$

woraus die Abplattung

$$\alpha = m + n \text{ folgt.}$$

Ist dann

$$n - \tfrac{3}{2}\,m^2 = \tfrac{1}{2}\,m^2 - \tfrac{16}{15}\,q\,\pi = 0$$

so ist der Meridian eine reine Ellipse. Ist endlich

$$b = \frac{2\,Q}{\left(1 + \frac{m}{2} + \frac{3\,n}{8} + \frac{m^2}{4}\right).\,\pi}$$

so ist die Gleichung des Meridians

$$r = b\,(1 + m\,\mathrm{Sin}^2\,\psi + n\,\mathrm{Sin}^4\,\psi)$$

Eine andere Behandlung dieses Gegenstandes findet man in der Mon. Corresp. 1806. September.

§. 17.

Ein anderes Mittel, die Abplattung der Erde zu finden, gibt die Länge des einfachen Secundenpendels. Wie man diese aus Beobachtungen an zusammengesetzen Pendeln ableitet, kann man in Delambres Astronomie, oder in Biots Traité d'astronomie physique III. B. nachsehen. Hier ist es genug zu bemerken, dafs für jede Breite φ die Länge l des einfachen Secundenpendels durch die Gleichung ausgedrückt wird

$$l = A + B\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi \,..\, (\mathrm{I})$$

wo A B zwey Constanten sind, deren die erste die Länge des Secundenpendels am Aequator ausdrückt, wo $\varphi = 0$ ist, und wo

$$B = A\left(\frac{5}{578} - \alpha\right)$$

und $\alpha = \frac{a-b}{a}$ die Abplattung ist.

In Paris fand man unter der Breite $\varphi = 48^\circ\ 50'\ 14''$ in der Höhe von 80 Meter über der Meeresfläche die Länge des einfachen Pendels, welches eine Schwingung in einer Decimalsecunde vollendet, gleich

$$0.7419076, \text{ Meter}$$

also die auf die Meeresfläche reduzirte Länge

$$l = 0.7419262 \text{ Meter},$$

also gibt die Gleichung I für Paris

$$0.74192620 - A - 0.56677210\, B = 0$$

Eben so erhielt man

$0.7420865 - A - 0.6045628\, B = 0$	für	Dünkirchen.
$0.7417157 - A - 0.5136117\, B = 0$		Clermont.
$0.7416151 - A - 0.4972122\, B = 0$		Bordeaux.
$0.7416243 - A - 0.4932370\, B = 0$		Figeac
$0.74125171 - A - 0.3903417\, B = 0$		Formentera
$0.7400531 - A - 0.1001576\, B = 0$		Petitgoave
$0.7397671 - A - 0.0276208\, B = 0$		Portobello
$0.7396332 - A - 0.0000000\, B = 0$		Peru am Aequator.

Sucht man aus diesen neun Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe der Grössen A und B (Cap. IX) so findet man

$$0.74107447 - A - 0.35483510\, B = 0$$

$$0.29606599 - 0.399189492\, A - 0.20052344\, B = 0$$

$$\text{also } A = 0.739648316 \text{ Meter}$$

$$B = 0.0040109736$$

$$\alpha = \frac{5}{578} - \frac{B}{A} = \frac{1}{309.7}$$

welche Abplattung nahe genug mit der übereinstimmt, die wir §. 15 aus den gemessenen Graden gefunden haben.

Will man aus beyden Resultaten das Mittel nehmen, so hat man nahe

$$\alpha = \frac{1}{311}$$

und wenn man die allgemeine Pendellänge durch diese Abplattung und durch die mit großer Schärfe beobachtete Pendellange in Paris ausdrücken will, so ist

$$l = A + A\left(\frac{5}{771} - \alpha\right) \text{Sin}^2 \varphi$$

wo

$$l = 0.7419262 \text{ Meter, und}$$

$$\varphi = 48^\circ\ 50'\ 14''$$

ist, also ist allgemein die Länge des Decimalsecundenpendels

$$l = 0.73964376 + 0.004027648 \text{ Sin}^2 \varphi \text{ in Metern}$$

oder die Länge des Sexagesimalsecunden-Pendels

$$l = 439.2266955 + 2.39176070 \text{ Sin}^2 \varphi \text{ in Linien der Toise}$$

ausgedrückt.

Eben so geben die Pendelbeobachtungen, welche die spanischen Seefahrer Malaspina, Espinosa und Bausa in der südlichen Halbkugel angestellt haben, für die Abplattung jener Halbkugel

$$\frac{1}{311.5}$$

woraus zu folgen scheint, daſs die Erdmeridiane gleiche und ähnliche Ellipsen sind, obschon sich andere unmittelbare Gradmessungen, so wie selbst die Pendelmessung Lacailles am Vorgebirge der guten Hoffnung mit diesem Resultate nicht vereinigen lassen. Endlich gibt es noch unter den Gleichungen, welche die Störungen der elliptischen Bewegung des Mondes durch die Erde ausdrücken, zwey, deren die eine

a Sin ☊ ☾

und die zweyte

b Sin Länge ☾

ist. Die erste fand schon T. Mayer bloſs aus Beobachtungen, und er nahm a gleich vier Secunden an. Laplace zeigte zuerst, daſs nach der Theorie der allgemeinen Schwere eine solche Ungleichheit der Mondsbewegung statt finde, und daſs der Werth der Gröſse a von der Abplattung der Erde abhängt. Neuere Beobachtungen gaben

$$a = 6''\ 8$$

woraus die Abplattung

$$\frac{a-b}{b} = \frac{1}{305}$$

folgt. Wäre die Abplattung der Erde, wie mehrere Astronomen fanden, gleich $\frac{1}{280}$, so müfste a = 11″. 5 seyn. Für die zweyte Gleichung, welche die Breite des Mondes, so wie jene erste die Länge desselben ändert, fand Laplace, dafs der Werth von b ebenfalls von der Abplattung der Erde abhänge, und da aus den Beobachtungen b = — 8″. 0 gefunden wurde, so folgt daraus die Abplattung $\frac{1}{304.\ 6}$. Wäre diese Abplattung $\frac{1}{230}$, so müfste b = — 13″.5 seyn. Diese beyden Bestimmungen der Abplattung der Erde aus der Theorie des Mondes, stimmen nahe genug mit jener überein, welche wir oben aus den Gradmessungen und aus den beobachteten Pendellängen gefunden haben. Der Mond gibt uns daher durch die Beobachtungen seiner Bewegungen die Ellipticität der Erde, wie er die ersten Astronomen durch die Beobachtung seines runden Schattens bey den Mondsfinsternissen die Kugelgestalt der Erde kennen lehrte. Diese Störungsgleichungen der Länge des Mondes enthalten noch eine dritte, welche die Form

$$c.\ \mathrm{Sin}\,(☾ - ☉)$$

hat, und in welcher der Werth des Factors c von der Gröfse der Sonnenparallaxe abhängt. Schon T. Mayer hat daraus die Gröfse dieser Parallaxe gleich 7″. 8 gefunden, genauer, als man sie vor ihm kannte. Neuere Beobachtungen gaben den Werth von c gleich 122″. 1, woraus die Sonnenparallaxe 8″. 6, also nahe dieselbe folgt, welche aus dem letzten Durchgange der Venus vor der Sonne gefunden wurde.

Ist ferner T die siderische Umlaufszeit der Erde um die Sonne, l die Länge des einfachen Secundenpendels, R der Halbmesser der Erde am Aequator, M und m die Masse der Erde und des Mondes, und endlich p die Horizontalparallaxe des Mondes unter dem Aequator, so gibt die Theorie zwischen diesen Gröfsen folgende Gleichung

$$\mathrm{Sin}^3\,p = 1.\ 005\left(\frac{4\ R}{l.\ T^2}\right).\ \frac{M}{M+m}$$

und da nach dem Vorhergehenden die Parallaxe p durch Beobachtungen des Mondes selbst aus einem einzigen Beobachtungsort gefunden werden kann, so wird man durch diese Gleichung den Werth von R oder die Gröfse der Erde bestimmen. Nach den Beobachtungen ist

$p = 57'\ 0''$,

$T = 365,256383$ Tage,

$$l = 0.\ 510437 \text{ Toisen}$$

$$\frac{M}{m} = 69.\ 75$$

$$\text{also } R = 3271691 \text{ Toisen},$$

welches nahe genug mit den durch unmittelbare Messungen erhaltenen Resultaten übereinstimmt.

Endlich hängt auch, wie wir im zweyten Buche sehen werden, die mittlere Bewegung des Mondes in der Länge, so wie die mittlere Bewegung der grofsen Axe und der Knotenlinie der Mondsbahn von der Gröfse der Excentricität der Erdbahn ab, und da die Aenderungen dieser drey Bewegungen, vorzüglich die der ersten grofs genug ist, um sie schon nach einigen Jahrhunderten aus den Beobachtungen mit Sicherheit zu bestimmen, so liefs sich auch umgekehrt aus dieser Bestimmung die Aenderung der Excentricität der Erdbahn ableiten. Laplace fand diese Excentricität für den Anfang dieses Jahrhunderts gleich 0.01679435, die halbe grofse Axe der Erdbahn gleich der Einheit vorausgesetzt, und die Abnahme dieser Excentricität in hundert Jahren gleich 0. 000 041632. Diese Abnahme der Excentricität der Erdbahn, welche seit den ältesten uns bekannten Finsternissen die Mittelpunktsgleichung der Erde noch nicht um acht Minuten geändert hat, hat in der Länge des Mondes eine Aenderung von 1° 48′ und in der mittlern Anomalie desselben sogar eine Aenderung von sieben Graden hervorgebracht, so dafs die äufserst geringen Veränderungen der Gestalt unserer Erdbahn in jener des Mondes, gleichsam wie von einem Hohlspiegel reflectirt, viel gröfser erscheinen. Die Beobachtungen des Mondes, welche den ersten Astronomen die kugelförmige Gestalt der Erde zeigten, haben daher ihren Nachfolgern auch die Gröfse der Erde und ihre Abplattung, so wie die Entfernung der Erde von der Sonne, und endlich die Aenderung der Gestalt der Erdbahn kennen gelehrt, ohne dafs es nöthig gewesen wäre, diese Kenntnisse, wie jene der Sonnenparallaxe, erst durch weite und beschwerliche Reisen in entfernte Gegenden, einzusammeln.

§. 18.

Wir haben in dem Vorhergehenden (§. 14) gesehen, wie man aus den beobachteten Zenithdistanzen terrestrischer Objecte die Höhe derselben über der Meeresfläche ableiten könne. Es gibt aber noch ein anderes, sehr einfaches Mittel, diese Höhen zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke wollen wir in der die Erde umgebenden Atmosphäre eine cylindrische vertikale Luftsäule betrachten. Man setze voraus, dafs die diesen Cylinder umgebende Luft fest wird, so dafs jene Luftsäule gleichsam in die festen Wände eines Cylinders eingeschlossen sey. Wenn die ganze Masse der Atmosphäre im Gleichgewichte angenommen wird, so wird dieses Gleichgewicht durch jene Voraussetzung nicht gestört. Zu diesem Gleichgewichte der Atmosphäre wird aber erfordert, dafs, wenn man diese Atmosphäre in der Erde concentrische Schichten zerlegt, jede dieser Schichten gleiche Dichtigkeit, also auch gleichen Druck und gleiche Temperatur habe. Sey z die Entfernung einer dieser Schichten von der Oberfläche der Erde, dz die Höhe oder Dicke derselben, endlich $\triangle$, x und g′ die Dichte, die Temperatur und die Schwere dieser Schichte, wo die Richtung der Schwere senkrecht auf die Schichte, oder parallel mit dem oben betrachteten Cylinder wirkt. Diese Schichte wird von jenem Cylinder einen Theil abschneiden, von welchem der Druck an seiner untern Basis gleich p, also an seiner obern gleich p + d p seyn soll. Der Unterschied beyder, oder d p, wird daher dem Gewichte jenes Theiles gleich seyn, und da dies Gewicht

$$g'. \triangle. dz$$

ist, da überdiefs z wächst, wenn p abnimmt, so ist

$$-dp = g'. \triangle. dz$$

Da aber nach dem, was in dem Cap. von der Refraction gesagt wurde, jedes Volum der atmosphärischen Luft für einen Grad des hunderttheiligen Thermometers sich um seinen 0. 004 ten Theil ausdehnt, so dafs dieses Volum für die Temperatur x gleich

$$1 + (0.004) x$$

ist, wenn es für x = 0 der Einheit gleich ist; da überdiefs die elastische Kraft der Luft, oder der Druck, welchen sie ausübt, der Dichte $\triangle$ derselben und der Temperatur proportional ist, so hat man

$$p = a \triangle. (1 + (0.004.) x)$$

wo a das Verhältnifs des Druckes zur Dichtigkelt der Luft für die Temperatur Null bezeichnet. Substituirt man diesen Werth von $\triangle$ in der vorhergehenden Gleichuug, und setzt der Kürze wegen $\alpha = 0.004$, so hat man

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g'\,dz}{a(1 + \alpha x)}$$

Ist endlich r der Halbmesser der Erde, und g die Schwere auf der Oberfläche der Erde, so ist, da sich die Kraft der Schwere wie verkehrt das Quadrat der Entfernung verhält

$$g' = \frac{g. r^2}{(r + z)^2}$$

und daher die vorhergehende Gleichung

$$\frac{dp}{p} = \frac{-g\,r^2\,dz}{a(1+\alpha x)(r+z)^2} \quad \ldots \quad (I)$$

Diese Gleichung läſst sich nicht vollständig integriren, wenn der Werth von x in einer Function von z nicht gegeben ist, das heiſst, wenn das Gesetz der Wärmeabnahme für die verschiedenen Höhen der Luftschichten nicht bekannt ist. Obschon aber dieses Gesetz unbekannt ist, so kann man doch, da der Werth von α sehr klein ist, mit einer in den meisten Fällen hinreichenden Genauigkeit voraussetzen, daſs diese Temperatur x in jeder Schichte constant ist, wenn man nur für x in jedem gegebenen einzelnen Falle die mittlere Temperatur der zwey Schichten wählt, in welchen man die Beobachtungen anstellt. Ist daher x eine beständige Gröſse, so ist das Integral der vorhergehenden Gleichung

$$\log p = \frac{\mu\, g\, r^2}{a(1+\alpha x)} \cdot \frac{1}{r+z} + C$$

wo

$$\mu = 0.43429448$$

der Factor der natürlichen Logarithmen ist, durch welchen man sie in die gemeinen Logarithmen verwandelt, und wo C die Constante der Integration bezeichnet. Um diese letzte zu bestimmen, sey P der Werth von p für $z = 0$, so ist

$$\log P = \frac{\mu\, g\, r}{a(1+\alpha x)} + C,$$

also die vorhergehende Gleichung

$$\log \frac{P}{p} = \frac{\mu\, g\, r}{a(1+\alpha x)} \cdot \frac{z}{r+z} \quad \text{---} \quad (II)$$

Diese Gleichung, verbunden mit der vorhin gefundenen,

$$\Delta = \frac{p}{a(1+\alpha x)}$$

wird die Werthe von p und Δ in einer Function von z geben, oder diese beyden Gleichungen werden das Gesetz der Dichtigkeit und des Druckes der Luft enthalten, welches für das Gleichgewicht der Atmosphäre statt haben muſs.

§. 19.

Nehmen wir nun an, daſs man in derselben Höhe z über der Oberfläche der Erde die Höhe h′ der Quecksilbersäule eines Barometers beobachtet habe, und daſs h die Höhe des Barometers an der Oberfläche der Erde sey.

Da das Quecksilber für jeden Grad des hunderttheiligen Thermometers sich bekanntlich um seinen $\frac{1}{5412}$ten Theil ausdehnt, so wird man der gröſseren Genauigkeit wegen beyde Barometerhöhen anf einerley Temperatur bringen. Ist T′ der Thermometerstand des Barometers in der Höhe z, und T der des Barometers an der Oberfläche der Erde, so wird man, um jenen auf diesen zu bringen, die Gröſse h′ durch den Factor

$$1 + \frac{T - T'}{5412}$$

multipliciren. Wir wollen diese Multiplication in der Gröſse h′ schon als geschehen voraussetzen. Uebrigens versteht es sich von selbst, daſs hier die beyden Thermometer vorausgesetzt werden, welche mit ihren Barometern in einerley Temperatur stehen, und zu diesem Zwecke gewöhnlich an der Fassung des Barometers befestiget sind. Wir wollen sie die innern Thermometer nennen.

Ist aber, wie zuvor, g die Schwere an der Oberfläche der Erde, D die Dichte des Quecksilbers, und h die Höhe des Barometers, so ist der Druck des Theiles der Quecksilbersäule, welche in der gröſseren verschlossenen Röhre des Barometers, über dem Niveau des Quecksilbers in der kleineren offenen Röhre des Barometers steht, offenbar gleich

$$g\,D.\,h$$

und eben so ist der Druck des anderen Barometers in der Höhe z gleich

$$g'\,D.\,h'$$

und da dieser Druck des Quecksilbers in beyden Barometern dem Drucke der äuſsern Luft gleich seyn muſs, so ist

$$P = g\,D.\,h \text{ und}$$

$$p = g'\,D.\,h' = \frac{g\,r^2}{(r+z)^2}.\,D.\,h'$$

oder

$$\log\frac{P}{p} = \log\frac{h}{h'} + 2\log\left(1 + \frac{z}{r}\right)$$

Sind endlich t′ und t die äuſseren Thermometer in der Höhe z und an der Oberfläche der Erde, welche also die Temperatur der äuſsern Luft anzeigen, so wird man nach dem Vorhergehenden haben

$$x = \frac{t + t'}{2}, \text{ oder}$$

$$\alpha\,x = \frac{2\,(t + t')}{1000}$$

Substituirt man dann diese Werthe von

$$\log \frac{P}{p} \text{ und } \alpha x$$

in der Gleichung (II), so ist

$$z = \frac{a}{\mu g}\left(1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right)\left(\log \frac{h}{h'} + 2 \log\left(1 + \frac{z}{r}\right)\right)\cdot\left(1 + \frac{z}{r}\right) . \text{(III)}$$

In diesem Ausdrucke wird man den unbekannten Factor

$$\frac{a}{\mu g}$$

am sichersten durch eine aus trigonometrischen Messungen bekannte Höhe z bestimmen. Aus vielen solchen Bestimmungen fand Ramond

$$\frac{a}{\mu g} = 18336 \text{ Meter}$$

für die geographische Breite von 45 Graden. Da dieser Factor die Gröſse g enthält, und der Werth dieser Gröſse für die verschiedenen Breiten nach dem Vorhergehenden verschieden ist, so wird man für die Breite φ haben

$$\frac{a}{\mu g} = 18336\ (1 + 0.00284 \text{ Cos } 2\,\varphi)$$

Mittels der Gleichung (III) wird man also, wenn für zwey Beobachtungsorte die Barometer- und Thermometerstände bekannt sind, leicht die Höhe z des einen über den anderen ableiten. Bey der numerisehen Entwicklung derselben kann man zuerst die Gröſse $\frac{z}{r}$ vernachlässigen, da $r = 6366200$ Meter, also $\frac{z}{r}$ immer sehr klein ist, and dann bey einer zweyten Berechnung den ersten genäherten Werth von z in dem Ausdrucke $\frac{z}{r}$ substituiren. Vernachlässigt man aber die zweyten und höheren Potenzen von $\frac{z}{r}$, und setzt

$$2 \log\left(1 + \frac{z}{r}\right) = 0.868589\left(\frac{z}{r} - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{r^2}\right)$$

so wird jene Gleichung

$$z = 18336(1 + 0.00284 \text{ Cos } 2\,\varphi) \times$$
$$\left(\left(1 + \frac{z}{r}\right) \log \frac{h}{h'} + 0.868589\,\frac{z}{r}\right) \text{ - - - (IV)}$$

welcher Ausdruck mit demjenigen identisch ist, den Loplace. Mec. céleste. Livre X. Chap. IV. gegeben hat.

I. Ist also die Höhe des Barometers, des äufseren und inneren Thermometers in der untern Station h t T und in der oberen h′ t′ T′, und die Höhendifferenz beyder Stationen z, so ist

$$\alpha = 18336 + 52 \text{ Cos } 2\,\varphi$$

$$\beta = 1 + 0.\ 002\,(t + t')$$

$$\gamma = \log \frac{h}{\left(1 + \frac{T - T'}{5412}\right) h'}$$

und $z = \alpha.\ \beta.\ \gamma.$

oder genauer

$$z' = z + 0.\ 0000001364\ \alpha\ \beta\ z$$
$$+ 0.\ 0000001571\ z^2$$

wo die beyden Thermometer hunderttheilige Quecksilberthermometer, und z z′ in Metern ausgedrückt sind.

II. Sind aber die Thermometer achtzigtheilige Réaumur, und z z′ in Toisen, so ist

$$\alpha = 9407.\ 7244 + 26.6798 \text{ Cos } 2\,\varphi$$

$$\beta = 1 + 0.0025\ (t + t')$$

$$\gamma = \log \frac{h}{(1 + 0.00023\ (T - T'))\ h'}$$

und $z = \alpha.\ \beta.\ \gamma,$

oder genauer

$$z' = z + 0.\ 0000002659\ \alpha\ \beta\ z$$
$$+ 0.\ 0000003061\ z^2$$

III. Dieselben Ausdrücke geben auch, wenn man blofs an einer Station beobachtet hat, die Höhe dieser Station über der Meeresfläche, wenn man in I setzt,

$$h = 0.\ 7629 \text{ Meter}$$

$$t = 12^\circ\ 8 \text{ Centigr.}$$

$$T - T' = t - t'$$

oder wenn man in II setzt

$$h = 338.2 \text{ Par. Linien}$$
$$t = 10^\circ.24 \text{ Réaum.}$$
$$T - T' = t - t'.$$

Exempel. Für Genf ist aus einer grofsen Anzahl von Beobachtungen die mittlere Barometerhöhe $h' = 0.7266$ Meter, und die mittlere Temperatur $t' = 12.0$ Centigr.

Setzt man daher $h = 0.7629$

$$t = 12.8$$
$$T - T' = t - t' = 0.8$$
$$\text{und } \varphi = 46^\circ\ 12'$$

$$\text{so ist } \gamma = \log \frac{h}{\left(1 + \frac{0.8}{5412}\right) h'} = 0.0211124$$

$$\text{also } \log \alpha = 4.2632530$$
$$\log \beta = 0.0210238$$
$$\log \gamma = 8.3245376$$
$$\log z = 2.6088144, \; z = 406.27$$
$$1.07$$
$$0.03$$
$$z = 407.37 \text{ Meter}$$

Höhe Genfs über der Meeresfläche.

Unter der diesem Werke beygefügten Sammlung von Tafeln findet man eine, durch welche sich die vorhergehenden Rechnungen eben so sicher als bequem machen lassen.

IV. Vernachlässigt man endlich in den vorhergehenden Ausdrücken die Gröfse $\frac{z}{r}$ gänzlich, so erhält man

$$z = \frac{}{\mu g}\left(1 + \frac{2(t + t')}{1000}\right). \log \frac{h}{h'}$$

ein Ausdruck, der in allen Fällen bequem gebraucht werden kann, wo keine grofse Schärfe gefordert wird, wenn man bemerkt, dafs, nach Ramonds Versuchen, dieser Ausdruck mit den Beobachtungen am besten übereinstimmt, wenn man für den Factor $\frac{a}{\mu g}$ nicht den oben gegebenen Werth 18336, sondern

18393 Meter oder 9436. 97 Toisen setzt, und wie zuvor, die Gröſse h′ der obern Station durch $1 + \frac{T - T'}{5412}$ multiplizirt.

Man hat so in I

$$z = 18393\,(1 + 0.002\,(t + t')) \log \frac{h}{\left(1 + \frac{T - T'}{5412}\right) h'}$$

und in II.

$$z = 9436.97\,(1 + 0.0025\,(t + t')) \log \frac{h}{(1 + 0.00023\,(T - T'))\, h'}$$

EILFTES KAPITEL.

Instrumente.

§. 1.

Die Kenntnifs der Instrumente und ihres gehörigen Gebrauches bey astronomischen Beobachtungen ist zu wichtig, um in einem Werke dieser Art nicht besondere Rücksicht zu verdienen. Ich werde hier von den vorzüglichsten derselben alles das in Kürze vorzutragen suchen, was angehenden Astronomen nothwendig, und was ohne vielen und kostbaren Zeichnungen verständlich ist, welche letzteren ich nicht mit aufnehmen wollte, da sie den Preis des Werkes zu sehr erhöhen und dadurch seiner Gemeinnützigkeit Eintrag thun, und da sie ohne den Instrumenten doch meistens unzureichend, und wenn diese letzten selbst gegeben werden, überflüssig sind.

§. 2.

LOTH UND LIBELLE.

Alle Höhenbeobachtungen beziehen sich entweder auf das Zenith oder auf den Horizont des Beobachtungsortes. Das erste wird durch das Bleyloth, und der zweyte durch die Libelle, Wasserwage, unmittelbar angegeben.

Die einfachste Gestalt eines Bleylothes (Fig. 6.) C A B ist ein gleichschenkliches Dreyeck von Holz oder Metall, aus dessen Scheitel C als Mittelpunkt der Kreisbogen m n beschrieben ist. Ist die Neigung der Ebene a b, auf welcher das Instrument steht, horizontal, so zeige der Faden C D, der in dem Scheitel des Dreyecks befestigt und an seinem anderen Ende mit einem Gewichte beschwert ist, auf den Kreisbogen m n den Grad D. Ist, aber diese Ebene a b bey b um den Winkel x über dem Horizont erhoben, so wird der Faden den Grad

$$D - x$$

zeigen. Ist überdiess das Instrument A B C selbst fehlerhaft, und z. B. der Arm B C länger, als A C, so wird der Faden den Grad

$$D - x - y = a$$

anzeigen.

Man kehre nun das Dreyeck C A B um, so dass B nach A, und A nach B komme, so wird der Faden den Grad

$$D + x - y = b$$

zeigen.

Diese beyden einfachen Gleichungen, in welchen die ganze Theorie der Bleylothe enthalten ist, reichen hin, die zwey unbekannten Grössen x und y zu bestimmen. Es ist nämlich

$$x = \frac{b - a}{2}$$

$$D - y = \frac{b + a}{2},$$

oder die Neigung der Ebene, worauf das Instrument steht, gegen den Horizont, ist die halbe Differenz, and der wahre Nullpunkt, worauf der Faden schlagen muss, wenn die Ebene ab horizontal ist, wird durch die halbe Summe der zwey Zahlen b und a angezeigt, welche man in den zwey entgegengesetzten Lagen des Instruments beobachtet hat.

Dasselbe gilt auch für solche Instrumente (Fig. 7) die mit Haken A A′, B B′ an horizontale Stangen a b aufgehängt werden. Ist die Stange a b horizontal, und sind die Haken einander gleich, so zeigt der Faden C D in beyden Lagen des Instruments auf den Kreisbogen m n den Punkt D. Hebt sich die Stange bey b, so zeige der Faden

$$D - x$$

und wird der Haken B B′ kürzer, so zeige der Faden

$$D - x - y = a.$$

Kehrt man das Instrument um, B nach A, und A nach B, so zeigt der Faden

$$D + x - y = b,$$

also ist wie zuvor

$$x = \frac{b - a}{2}$$

$$D - y = \frac{b + a}{2}$$

Diese letzte Gattung von Bleylothen zog Maskelyne allen andern Lothen und Libellen vor.

§. 3.

Die Libelle oder das Niveau besteht aus einer cylindrisch ausgehöhlten Glasröhre, die aber in der Richtung ihrer Länge kreisförmig gekrümmt seyn mufs, damit die Luftblase, die entsteht, wenn die Röhre nicht ganz voll mit Wasser oder Weingeist gefüllt wird, in der Mitte der Röhre am höchsten stehe. Je genauer diese innere Röhre kalibrirt, je weniger Ungleichheiten ihre Fläche unterworfen, je gröfser der Radius des Kreises, und je empfindlicher die Blase ist, desto vollkommener ist die Libelle.

Es sey (Fig. 8.) m n die Glasröhre, die auf das Stück A′ B′ befestigt ist, und mittels der Haken A A′, B B′, an einer Stange a b aufgehängt werden kann. Diese Röhre trägt eine eingetheilte Scale, und kann mittels einer Schraube bey n gegen den Horizont mehr oder weniger geneigt werden.

Wenn die Stange a b horizontal ist, und die Blase mit ihren beyden Enden bey den Zahlen D und D steht, so dafs 2 D ihre Länge bezeichnet, (die sich bey einer höheren Temperatur verkürzt, weil diese den Weingeist ausdehnt) so wird, wenn man die Haken A B verkehrt, und wenn das Instrument richtig ist, die Blase mit ihren Endpunkten wieder bey D und D stehen müssen.

Wir wollen annehmen, dafs die Axe des Instruments, welche auf diese Weise z. B. vertikal gestellt werden soll, von der Vertikallinie gegen die linke Seite des Beobachters um den Winkel x geneigt sey, und dafs ferner die Libelle selbst auf der rechten Seite des Beobachters um den Winkel y zu hoch stehe, so wird man haben, rechts die Zahl

$$r = D + x + y$$

und links

$$l = D - x - y.$$

Dreht man nun die Libelle um 180 Grade im Horizonte, und stellt sie auf die der vorigen entgegensetzten Seite, so dafs z. B. das Gesicht des Beobachters jetzt gen Süd steht, wenn es in der ersten Lage gen Nord stand, so ist wieder

$$\text{rechts } r' = D - x + y$$

$$\text{und links } l' = D + x - y.$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort die Correction der Axe

$$x = \frac{r - r'}{2} = \frac{l' - l}{2}$$

und die Correction der Libelle

$$y = \frac{r'-l}{2} = \frac{r-l'}{2}$$

Will man daher in dieser zweyten Lage des Instruments blofs die Axe desselben verbessern, ohne die Libelle selbst zu corrigiren, so wird man die Fufsschraube des Instruments so bewegen, dafs die Blase zeigt

$$\text{rechts } R = r' + x = \frac{r'+r}{2}$$

$$\text{links } L = l' - x = \frac{l'+l}{2}$$

Will man dann noch die Libelle selbst verbessern, so wird man durch die Correctionsschraube der Libelle die Blase in die Mitte bringen, so dafs sie auf beyden Seiten bey denselben Zahlen steht.

Anders verhält es sich bey Mittagsröhren u. dgl., wo der Beobachter seine Stelle nicht wechselt, sondern z. B. immer gegen Süden sieht. Man sieht leicht, dafs man da folgende Ausdrücke hat

I$^{\text{ste}}$ Lage, rechts r, links l

II$^{\text{te}}$ Lage, rechts r′, links l′

verbesserte II$^{\text{te}}$ Lage, rechts $R = \frac{l+r'}{2}$, links $L = \frac{r+l'}{2}$

Dies Verfahren halte ich für das sicherste und bequemste. Wie man aber auf die gewöhnliche Weise Axe und Libelle zugleich corrigirt, wird unten bey dem Mittagsrohre erklärt werden.

§. 4.

VERNIER.

Der Vernier oder Nonius ist eine in gleiche Theile getheilte gerade oder krumme Linie, welche sich an einer andern in andere, aber wieder in gleiche Theile getheilten Linie auf und ab bewegen läfst. Der Zweck desselben ist, die Zwischenräume welche zwischen den Theilstrichen der letzten Linie enthalten sind, wieder in kleinere Theile zu theilen.

Wenn zwey gleiche Bogen von Kreisen, die denselben Halbmesser haben, oder wenn zwey gleich grofse gerade Linien, deren Länge gleich A seyn soll, in gleiche Theile so eingetheilt werden, dafs die Zahl dieser gleichen Theile bey der einen Linie n, und bey der andern n+1 ist, so wird ein Theil der ersten gleich

$$\frac{A}{n}$$

und ein Theil der andern gleich

$$\frac{A}{n+1}$$

also die Differenz jeder zwey Theile

$$\frac{A}{n\,(n+1)}$$

seyn.

Ein Kreis sey von 10 zu 10 Minuten eingetheilt, also enthält ein Bogen desselben vor $9^\circ\,50'$ eine Anzahl von 59 Theilstrichen, da jeder Grad desselben 6 Theilstriche hat. Ein anderer gleich groſser Bogen des Verniers sey in 60 gleiche Theilstriche getheilt, so ist $A = 590'$ und $n = 59$ also die Differenz von jedem Theil des Bogens und einem Theil des Verniers

$$\frac{A}{n\,(n+1)} = \tfrac{1}{6} \text{ Minute},$$

oder 10 Secunden.

Wenn man daher auf jenem Kreise unmittelbar nur 10 Minuten lesen konnte, so kann man jetzt auf ihm mit Hilfe des Verniers unmittelbar 10 Secunden lesen. Coincidiren also z. B. von beyden Bogen die 1., 2., 3., oder die

30., 31., 32sten

Theilstriche, so wird man in derselben Ordnung haben

$0'\,10''$, $0'\,20''$, $0'\,30''$ oder

$5'\,0''$, $5'\,10''$, $5'\,20''$ u. s. w.

Dies wird hinreichen, jeden anders getheilten Vernier gehörig zu gebrauchen, der bey den neuern Instrumenten vorzugsweise vor andern Mitteln, (Transversalen etc.) angewendet wird, um Kreisbogen sowohl als gerade Linien in sehr kleine Theile mit Verläſslichkeit einzutheilen.

§. 5.

FERNRÖHRE.

Es kann nicht meine Absicht seyn, eine vollständige Theorie dieser Instrumente zu geben, die man in den ihnen ausschlieſsend gewidmeten Werken nachsehen wird. Hier wird es genug seyn, das Vorzüglichste derselben kurz in Erinnerung zu bringen.

Ein convexes Glas (ein einfaches Microscop) vergröſsert den Durchmesser eines Objectes so oft, als seine Brennweite in der Entfernung des deutlichen Sehens (etwa acht Zoll) enthalten ist. Eine Linse von einem Zoll Brennweite vergrößsert daher die Gegenstände achtmal im Durchmesser, und 64mal in der Oberfläche. Convexe Gläser vergrößsern also die Gegenstände um so mehr, je kleiner ihre Brennweite ist, und zugleich entfernen sie die Bilder derselben vom Auge, so wie concave Gläser die Gegenstände verkleinern, aber die Bilder derselben dem Auge näher bringen.

Wenn die Vergrößserung derselben beträchtlich seyn soll, so müssen die Gläser mehr kugel- als linsenförmig seyn, sie müssen ferner dem Gegenstande sehr nahe gebracht werden, wodurch sie die gehörige Beleuchtung verhindern, sie geben endlich ein zu kleines Gesichtsfeld. Diese Unvollkommenheiten zu vermeiden, hat man die zusammengesetzten Microscope erfunden, von denen das einfachste aus zwey convexen Gläsern besteht. Das Objectivglas ist kleiner und hat eine kürzere Brennweite, als das Ocularglas. Der Gegenstand wird etwas über den Brennpunkt des Objectivglases entfernt, damit die divergirend auf das Glas fallenden Strahlen erst weit hinter demselben, also dem Ocularglase nahe ein Bild machen, welches daher schon beträchtlich größser, als der Gegenstand selbst erscheint. Der Ort dieses Bildes ist zugleich der Brennpunkt des Ocularglases, durch welches man also den Gegenstand noch mehr vergrößsert sieht.

Entfernte Gegenstände zu sehen, braucht man Fernröhre, die entweder dioptrisch, bloſs mit Gläsern oder catoptrisch, mit Spiegeln und Gläsern versehen sind. Das einfachste dioptrische Fernrohr ist das sogenannte astronomische, und besteht aus zwey biconvexen Gläsern, von welchen das Objectivglas größser ist und eine größsere Brennweite hat, als das Ocularglas. Weit entfernte Gegenstände, deren Strahlen als unter einander parallel angesehen werden können, erscheinen als Bilder in dem gemeinschaftlichen Brennpunkte beyder Gläser, und dieses Bild sieht das Auge durch das Ocular vergrößsert. Das astronomische Fernrohr ist also eigentlich nur ein zusammengesetztes Microscop, in welchem Objectiv und Ocular ihren Platz gewechselt haben.

Sey R und r die Brennweite des Objectivs und des Oculars, e die Entfernung vom Auge, in welcher das freye Aug am besten sieht, A die scheinbare Gröſse des Gegenstandes mit freyem Auge, B und C die scheinbare Gröſse des Bildes mit freyem Auge, und durch das Ocular gesehen, endlich a der Durchmesser des Bildes selbst, so ist der Winkel A der beyden äuſsersten Linien vom Objecte an dem Mittelpunkte des Objectivs gleich dem Winkel der beyden äuſsersten Linien von dem Bilde an dem Mittelpunkt des Objectivs, weil beyde Scheitelwinkel sind. Ist daher die Brennweite des Objectivs genau so grofs, als die Weite e, so ist auch die scheinbare Gröfse B des Bildes, mit freyem Auge gesehen, genau so grofs, als die scheinbare Gröfse A des Gegenstandes selbst. Ueberhaupt aber ist

$$\frac{a}{R} = \text{Tg } A, \text{ und}$$

$$\frac{a}{e} = \text{Tg } B, \text{ also}$$

$$\text{Tg } B = \frac{R}{e} \text{ Tg } A$$

oder B so viel gröfser als A, als die Brennweite R des Objectivs gröfser, als die gewöhnliche Sehweite e ist.

Dieses Bild aber wird durch das Ocular, wie durch ein einfaches Microscop angesehen, dessen Vergröfserung nach dem vorhergehenden gleich $\frac{e}{r}$ ist. Es ist nämlich, wie zuvor,

$$\frac{a}{r} = \text{Tg } C \text{ und}$$

$$\frac{a}{e} = \text{Tg } B \text{ also}$$

$$\text{Tg } C = \frac{e}{r} \text{ Tg } B$$

Substituirt man in der letzten Gleichung für B seinen vorhergehenden Werth in A, so ist

$$\text{Tg } C = \frac{R}{r} \text{ Tg } A$$

oder, wenn die Winkel A und C nur klein sind,

$$\frac{C}{A} = \frac{R}{r},$$

das heifst, die durch das Fernrohr erscheinende Gröfse des Durchmessers eines Gegenstandes verhält sich zu der mit freyem Auge gesehenen Gröfse desselben, wie die Brennweite des Objectivs zu der des Oculars, und da r gegen R gewöhnlich sehr klein ist, so sieht man durch das Fernrohr die Gegenstände viel gröfser, als mit freyem Auge.

Denselben letzten Ausdruck erhält man noch einfacher, wenn man sich das Auge, welches das Bild des Gegenstandes im Brennpunkte beyder Gläser betrachtet, zuerst an der Stelle des Objectivs, und dann an jener des Oculars denkt, so dafs das Ocular nicht eigentlich die Vergröfserung, sondern nur das

Deutlichsehen in einer Nähe bewirkt, in welcher das freye Auge die Gegenstände nicht mehr klar erkennen wird.

Unter den Methoden, die Vergröſserung eines Fernrohrs durch Versuche zu bestimmen, ist eines der einfachsten und sichersten jenes, durch welches man sich das Verhältniſs des Durchmessers eines Gegenstandes im Fernrohre, und auſser demselben auf dieselbe Entfernung bezogen, oder was dasselbe ist, die Tangenten der halben Winkel, unter welchen der unmittelbar und der durch das Rohr gesehene Gegenstand erscheint, verschafft, wozu es mehrere bequeme Mittel gibt. Das dabey gewöhnliche Verfahren, wo man denselben Gegenstand zugleich mit freyem Auge, und durch das Rohr betrachtet, scheint keiner groſsen Schärfe fähig. Genauer wird man so verfahren: Man befestige an das Ocular des horizontal gestellten Fernrohres ein vertikal gestelltes Spiegelglas, dessen beyde Seiten parallel sind, unter einem Winkel so, daſs die gewählten terrestrischen Gegenstände hinter dem Beobachter, oder auf der Seite des Oculars, im Spiegel erscheinen, während man zugleich einen Gegenstand im Rohre bemerkt, dessen Strahlen durch das Objectiv einfallen.

Am besten ist es, für diesen Gegenstand den Durchmesser d des scheinbaren Feldes des Rohres selbst zu nehmen, in dem man den Umkreis dieses Feldes mit dem anderen, durch den Spiegel gesehenen Gegenstand an den beyden Punkten des Feldes zur Berührung bringt, die unter allen am weitesten von einander entfernt sind. Miſst man dann den Winkel D jener zwey Punkte des Gegenstandes z. B. mit einem Spiegelsextanten, so hat man für die Vergröſserungszahl N

$$\mathrm{Tg}\,\frac{D}{2} : \mathrm{Tg}\,\frac{d}{2} = N$$

Mehrere das Verfahren vereinfachende Modificationen, wenn der horizontale Durchmesser des Feldes, wenn statt dem Gegenstande ein in bekannter Entfernung vorgehaltener Maſsstab gewählt wurde, oder wenn das Fernrohr nicht horizontal, und der Spiegel nicht genau vertikal ist u. s. w. wird man leicht selbst finden. Meistens wir man das Spiegelglas ohne alle Neigung bloſs an die Fassung des Oculars anlegen können, wodurch das Verfahren sehr vereinfacht wird. Obschon man übrigens wegen der ungewöhnlichen Entfernung des Auges vom Ocular den Durchmesser des Feldes nur theilweise sehen kann, so läſst sich doch die Tangirung, wenn die Spiegelgegenstände, wegen der nöthigen Lichtstärke, nicht zu entfernt sind, mit groſser Schärfe nehmen, und man wird mit einiger Umsicht die gesuchte Vergröſserung mit aller erforderlichen Genauigkeit erhalten.

Das Vorhergehende ist von H. Habel, welcher sich hier, so wie auch H. Grinzenberger, mit ausgezeichnetem Fortgange dem Studium der Mathematik und Astronomie widmet, und von welchen beyden talentvollen jungen Männern sich die Wissenschaft für die Folge schöne Früchte zu versprechen hat.

I. Diese Vergröfserung der Gegenstände ist aber nicht der einzige Vortheil der Fernröhre. Da das Objectiv beträchtlich gröfser ist, als das Ocular, so mufs, wenn alle Strahlen, welche auf das erste fallen, auf der Oberfläche des zweyten vereiniget werden, auch die Beleuchtung des Bildes viel gröfser seyn, als die des Objectes. Nimmt man die Intensität des Lichtes bey dem Eintritte in das Rohr zur Einheit an, so wird diese Intensität bey dem Austritte des Lichts aus dem Rohre

$$\left(\frac{D}{d}\right)^2$$

seyn, wo D, d der Durchmesser des Objectivs und des Oculars ist.

II. Diese Lichtstärke wird besonders durch den Ring, welcher im Innern des Rohrs in der Nähe des gemeinschaftlichen Brennpunkts beyder Gläser steht, wieder vermindert. Dieser Ring, Diaphragma, dient dazu, die von den Wänden des Rohres unregelmäfsig reflectirten, so wie die von dem äufsersten Rande des Objectivs kommenden Strahlen, welche das Bild nur undeutlich machen würden, abzuhalten, und da dieser Ring den Raum begränzt, den man durch das Fernrohr auf einmal übersehen kann, so bestimmt seine Gröfse das Feld des Fernrohrs. Ist nämlich R die Brennweite des Objectivs, und ρ der Halbmesser des Diaphragma's, so ist, wenn α den Winkel bezeichnet, welchen man mit dem Fernrohre übersehen kann

$$\alpha = \frac{2\,\rho}{R \operatorname{Sin} 1''}$$

III. Die Lichtstärke selbstleuchtender Körper verhält sich überhaupt wie das Quadrat ihrer Entfernung vom Auge des Beobachters. Ist aber für einen blofs von der Sonne beleuchteten Körper, z. B. für einen Planeten, die Entfernung desselben von der Erde gleich a, und von der Sonne gleich b, so verhält sich die Lichtstärke derselben, wie

$$\frac{A}{a^2\,b^2}$$

wo A eine von dem Durchmesser und der Gröfse der lichtzurückwerfenden Kraft, Albedo, des Planeten abhängiger Factor ist. Ein Rohr, dessen Objectiv den Durchmesser d hat, zeigt dann den Planeten mit einer Lichtstärke, die gleich

$$l = A.\ B.\ \frac{d^2}{a^2\,b^2}$$

gesetzt werden kann, wo B von dem Verluste abhängt, welchen das Licht durch die Brechung im Rohre leidet.

Für ein anderes Rohr und eine andere Lage des Planeten ist

$$l' = A.\ B.\ \frac{d'^2}{a'^2.\ b'^2}$$

Soll daher in beyden der Planet gleich hell erscheinen, so muſs $l = l'$, oder

$$\frac{d'}{d} = \frac{a'.\ b'}{a.\ b}$$

seyn.

Endlich kann man in der Ebene durch das Bild senkrecht auf die Axen der Gläser eine Vorrichtung von feinen Fäden u. dgl. anbringen, um kleine Entfernungen mit der gröſsten Schärfe zu messen, und diese Vorrichtungen, die man unter dem Namen der Micrometer begreift, sind es, welche einen der gröſsten Vorzüge der Fernröhre ausmachen, und welchen die beobachtende Astronomie der neueren Zeiten bedeutende Fortschritte verdankt.

§. 6.

MICROMETER.

Die einfachste Art der Micrometer ist das obenerwähnte Diaphragma selbst, welches in dem gemeinschaftlichen Brennpunkte beyder Gläser auf der Axe beyder Gläser senkrecht steht, und vollkommen kreisförmig ausgedreht ist. Bequemer noch für die Beobachtungen ist ein zweyter, mit jenem concentrischer, metallener Kreis, der an dem ersten durch zwey oder mehrere Metallplättchen befestiget ist. Da dieser Kreis auch an der Fläche des Himmels einen Kreis abschneidet, so ist klar, daſs die Sehnen, welche in dem unverrückten Kreise die durch ihn gehenden Sterne beschreiben, alle senkrecht auf den Stundenkreis sind, der durch den Mittelpunkt des Feldes geht, daſs man also auch aus den beobachteten Ein- und Austritten zweyer Sterne die Differenz ihrer Rectascension sowohl, als die ihrer Declination erhalten kann, wenn der Halbmesser dieses Kreismicrometers bekannt ist.

Um das Folgende besser zu übersehen, sey (Fig. 9) ACB der Aequator, und a c b ein Parallelkreis, dessen Declination $Aa = Bb = \delta$ ist. Es sey t die Zeit, die ein Stern, dessen Declination δ ist, braucht, von a nach b zu kommen, und $bCa = x$ der Winkel des gröſsten Kreises, zu dem die Sehne ba gehört, und endlich

$$BCA = bca = y,$$

also $y = 15\,t$.

Es ist aber Sin BA : Sin ba = Sin BP : Sin bP, das heifst

$$\text{Sin } y : \text{Sin } x = 1 : \text{Cos } \delta,$$

also ist auch

$$\text{Sin } x = \text{Sin } y \text{ Cos } \delta, \text{ oder}$$

$$\text{Sin } x = \text{Sin } 15\,t. \text{ Cos } \delta,$$

und daher, wenn x nur sehr klein ist,

$$x = 15\,t. \text{ Cos } \delta.$$

Es sey also bey zwey Sternen, deren vorläufig bekannte Declination $\delta\ \delta'$ ist, t und t' die halbe Zwischenzeit der Sehnen, oder die halbe Zeit zwischen ihrem Ein- und Austritte in den Micrometer, r der Halbmesser desselben, und d d' der noch unbekannte Abstand dieser Sehnen von dem Mittelpunkte des Micrometers, so ist

$$d^2 = r^2 - (15\,t \text{ Cos } \delta)^2$$

$$d'^2 = r^2 - (15\,t' \text{ Cos } \delta')^2$$

und die gesuchte Differenz der Declinationen ist

$$\delta' - \delta = d' - d.$$

Braucht man eine mittlere Uhr, so muss für Fixsterne 15.041 statt 15 gesetzt werden. Addirt man endlich bey jedem der zwey Gestirne den Eintritt zu dem Austritte, so ist die halbe Differenz dieser beyden Summen zugleich die gesuchte Differenz der Rectascensionen. Man sieht, dass man zur Bestimmung der Differenz der Declinationen noch bemerken muss, ob der Stern über oder unter dem Mittelpunkte des Feldes durchging. Zur bequemern Rechnung kann man annehmen

$$a = 15\,t \text{ Cos } \delta,$$

wodurch man erhält

$$d = \sqrt{(r + a)(r - a)}$$

oder

$$d = r \text{ Cos } \varphi,$$

$$\text{wenn Sin } \varphi = \frac{a}{r}$$

gesetzt wird. Endlich ist klar, dass sich die Rectascension am sichersten durch solche Sterne bestimmen lassen wird, die nahe durch den Mittelpunkt des Feldes gehen, so wie die Declination durch jene, welche sehr weit von diesem Mittelpunkte durchgehen.

§. 7.

Zur Bestimmung des Halmessers r des Feldes kann man die Durchgänge zweyer Sterne wählen, deren Declination δ δ' genau bekannt ist. Sind t t' die halben Durchgangszeiten, und der Kürze wegen

$$a = 15 \operatorname{Cos} \delta . t$$

$$\text{und } a' = 15 \operatorname{Cos} \delta' . t',$$

und nennt man m m' die Winkel, welche bey dem Ein- oder Austritte dieser Sterne der Halbmesser des Feldes mit der aus dem Mittelpunkte des Feldes auf die Sehne gefällten senhrechten Linie bildet, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} r \operatorname{Sin} m = a \\ r \operatorname{Sin} m' = a' \\ r (\operatorname{Cos} m + \operatorname{Cos} m') = \delta' - \delta \\ \text{also auch} \\ r (\operatorname{Sin} m' + \operatorname{Sin} m) = a' + a \\ r (\operatorname{Sin} m' - \operatorname{Sin} m) = a' - a \end{array}\right\} \text{(I)}$$

Die drey letzten Gleichungen geben durch Division

$$\frac{a' + a}{\delta' - \delta} = \operatorname{Tg} \frac{m' + m}{2} \text{ und}$$

$$\frac{a' - a}{\delta' - \delta} = \operatorname{Tg} \frac{m' - m}{2}$$

Hat man durch die beyden letzten Ausdrücke m sowohl als m' gefunden, so geben die Gleichungen I.:

$$r = \frac{a}{\operatorname{Sin} m} = \frac{a'}{\operatorname{Sin} m'} = \frac{\delta' - \delta}{2 \operatorname{Cos} \frac{m+m'}{2} \operatorname{Cos} \frac{m'-m}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(a'+a)}{\operatorname{Sin} \frac{m'+m}{2} \operatorname{Cos} \frac{m'-m}{2}} \qquad = \frac{\frac{1}{2}(a'-a)}{2 \operatorname{Cos} \frac{m'+m}{2} \operatorname{Sin} \frac{m'-m}{2}}$$

Nennt man aber

$$\frac{m'+m}{2} = n, \text{ und}$$

$$\frac{m'-m}{2} = n',$$

das heiſst

$$m = n - n', \text{ und}$$

$$m' = n + n',$$

und substituirt man diese Werthe von m und m' in den fünf Gleichungen I., so ist

$$\text{Tg } n = \frac{a'+a}{\delta'-\delta}, \text{ und}$$

$$\text{Tg } n' = \frac{a'-a}{\delta'-\delta}$$

und wenn so n, n' gefunden ist, so hat man

$$r = \frac{a}{\text{Sin}(n-n')} = \frac{a'}{\text{Sin}(n+n')} = \frac{\delta'-\delta}{2\text{Cos } n \text{ Cos } n'}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(a'+a)}{2\text{ Sin } n \text{ Cos } n'} = \frac{\frac{1}{2}(a'-a)}{2\text{ Cos } n \text{ Sin } n'}.$$

Man sieht leicht, daſs r am vortheilhaftesten zu bestimmen ist, wenn 1. $(\delta - \delta')$ sehr nahe gleich 2r ist, oder wenn beyde Sterne sehr kleine Chorden beschreiben, denn hier haben Fehler der Beobachtung den kleinsten, aber ein Fehler in den vorausgesetzten Declinationen, der bey wohlbekannten Sternen nicht zu fürchten ist, den gröſsten Einfluſs, und 2. wenn $(\delta'-\delta)$ sehr nahe gleich r ist, so daſs wenn der eine Stern eine sehr kleine Chorde beschreibt, der andere nahe bey dem Mittelpunkt vorbey geht, in welchem Falle Fehler der Declinationen den kleinsten, und Fehler der Beobachtungen den gröſsten Einfluſs haben.

I. Auch der Durchgang der Sonne, deren Halbmesser R bekannt ist, läſst sich sehr bequem zu diesem Zwecke brauchen. Sind nämlich ϑ ϑ' die wahren Sonnenzeiten zwischen den äuſsern und innern Berührungen der Sonne und des Feldes, so ist

$$d^2 - \tfrac{1}{4}\vartheta'^2(15 \text{ Cos } \delta)^2 = (r+R)^2$$

$$d^2 - \tfrac{1}{4}\vartheta^2(15 \text{ Cos } \delta)^2 = (r-R)^2$$

und wenn man aus diesen beyden Gleichungen die Gröſse d eliminirt

$$r = \left(\frac{15}{2} \text{ Cos } \delta\right)^2 \cdot \frac{(\vartheta^2 - \vartheta'^2)}{R}$$

wo δ die Declination des Mittelpunkts der Sonne ist.

Differentiirt man den letzten Ausdruck, so findet man

$$dr = \frac{2}{R} \cdot \left(\frac{15 \text{ Cos } \delta}{4}\right)^2 \cdot (\vartheta d\vartheta - \vartheta' d\vartheta') - \frac{r\,dR}{R}$$

also ist die Bestimmung von r desto sicherer, je größser R gegen r ist.

Hat man durch eine dieser Methoden r bestimmt, so muſs bey allen künftigen Beobachtungen das Ocular immer gleich weit von dem Objective entfernt seyn, weil mit dieser Entfernung sich auch der Werth von r ändert. Ein einfaches Zeichen an der Ocularröhre wird hinreichen, das Ocular immer wieder in dieselbe Lage zu bringen.

II. Mit einem solchen Micrometer lassen sich auch sehr bequem die Sonnenflecken beobachten. Ist ϑ die wahre Sonnenzeit, zwischen den äuſsern Berührungen des Randes der Sonne, d. h. zwischen dem ersten und letzten Blick derselben, und d die Distanz der Mittelpunkte der Sonne und des Kreises; ist ferner τ die Zeit zwischen dem Ein- und Austritte des Fleckens, und D die Distanz des Fleckens vom Mittelpunkte des Kreises, r R der Halbmesser des Kreises und der Sonne, und endlich δ die Declination der Sonne, so ist

$$d^2 = (R + r)^2 - \left(\frac{15 \cdot \vartheta}{2} \operatorname{Cos} \delta\right)^2$$

$$D^2 = r^2 - \left(\frac{15}{2} T \operatorname{Cos} \delta\right)^2$$

und D — d ist die Differenz der Declination des Mittelpunkts der Sonne und des Fleckens. Die Differenz der Rectascension aber ist der halbe Unterschied der Ein- und Austritte des Sonnenrandes und des Fleckens. Hat man noch die innern Berührungen der Sonne beobachtet, so hat man eine zweyte Bestimmung des Fleckens. Man sehe Zachs Monatl. Correspondenz Vol. 17 u. 24, und Berl. Jahrb. 1796. p. 164.

§. 8.

Alles Vorhergehende setzt voraus, daſs die beobachteten Gestirne in Rectascension und Declination unveränderlich sind. Es sey $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ die Bewegung des einen in Recsascension und Declination während einer Zeitsecunde, wo diese Gröſsen immer so klein seyn werden, daſs man ihre zweyten und höhern Potenzen ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann. Ist E D (Fig. 10.) der durch den Mittelpunkt des Feldes gehende Stundenkreis, so wird jenes Gestirn nicht mehr die auf diesen Stundenkreis senkrechte Sehne A B, sondern es wird die Sehne A b beschreiben, und die Mitte zwischen Ein- und Austritt wird nicht mehr zu dem Punkte f, sondern sie wird zu dem Punkt g gehören, wenn der Halbmesser des Feldes C g auf A b senkrecht ist. Beschreibt das andere unveränderliche Gestirn die auf E D senkrechte Sehne $A' B'$, so wird die Differenz der Declinationen nicht $CE + Cg$ sondern $CE + Cf$ seyn.

Um fg zu finden, bemerke man, daſs die vermöge der Rotation der Erde beobachtete Bewegung des ersten Gestirns, in einer Zeitsecunde, in seinem Parallelkreis, in Rectascension seyn wird,

$$(15 - \Delta\alpha) \operatorname{Cos} \delta$$

und daſs daher die Bewegung desselben in derselben Zeit in der Richtung der Linie Ab ist

$$\sqrt{(15 - \Delta\alpha)^2 \operatorname{Cos}^2 \delta + (\Delta \delta^2)}$$

Ist also n der Winkel $BAb = fCg$ so ist sehr nahe

$$\operatorname{Tg} n = \frac{\Delta \delta}{(15 - \Delta\alpha) \operatorname{Cos} \delta} = \frac{\Delta \delta}{15 \operatorname{Cos} \delta} \text{ und}$$

$$\operatorname{Sin} n = \frac{\Delta \delta}{15 \operatorname{Cos} \delta}$$

Ist also 2τ die beobachtete Zeit durch Ab, so ist

$$Ab = (15 - \Delta\alpha)\, 2\tau \operatorname{Cos} \delta \text{ und}$$

$$Cg = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}(Ab)^2}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$d' = \sqrt{r^2 - (15\,\tau \operatorname{Cos} \delta)^2}$$

so hat man

$$Cg = d' + 15\,\tau^2 \frac{\operatorname{Cos}^2 \delta.\, \Delta\alpha}{d'} \text{ und daher}$$

$$fg = Cg \operatorname{Tg} n$$

und die Zeit durch fg gleich

$$\frac{Cg \operatorname{Tg} n}{(15 - \Delta\alpha) \operatorname{Cos} \delta} = \frac{\delta' \Delta \delta}{(15)^2 \operatorname{Cos}^2 \delta}$$

und dies ist die Zeit, welche man zu dem Mittel g der Ein- und Austritte hinzusetzen muſs, um die Zeit durch f zu erhalten.

Ist also ϑ die Zeit des Eintritts in A, und ϑ' die Zeit des beobachteten Austritts in b, so ist die Zeit durch den Punkt f gleich

$$\tfrac{1}{2}(\vartheta + \vartheta') + \frac{d'.\, \Delta \delta}{(15 \operatorname{Cos} \delta)^2}$$

und die Distanz

$$Cf = \frac{Cg}{\operatorname{Cos} n}$$

gleich

$$d' + 15\,(\vartheta - \vartheta')^2 \,\frac{\mathrm{Cos}^2\,\delta.\,\Delta\,\alpha}{4\,d'}$$

wo d′ die ohne Rücksicht auf die eigene Bewegung des Gestirns berechnete Distanz der Sehne AB, von dem Mittelpunkte C des Feldes bezeichnet.

§. 9.

Wenn die beobachteten Gestirne nahe am Horizont sind, so mufs man nicht nur auf ihre Refraction, welche ihre Rectascension und Declination ändert, sondern selbst auf die Veränderung dieser Refraction in dem Punkte A und B Rücksicht nehmen. Wir wollen sehen, wie man dies am bequemsten thun könne.

Wenn sich diese Refraction während dem Durchgange der Sterne durch das Rohr nicht merklich ändert, so wird der Stern noch immer eine dem Aequator parallele Sehne beschreiben. Ist also, wie zuvor, ϑ ϑ' die Zeit des Ein- und Austritts des Sterns,

$$\vartheta' - \vartheta = 2\,\tau,$$

und d′ die Distanz des Sterns vom Mittelpunkte des Feldes, die man ohne Rücksicht auf Refraction nach §. 6 gefunden hat, so ist, wenn r die zu der Höhe des Sterns gehörige Refraction, und π den parallactischen Winkel des Gestirns (zwischen dem Vertikal- und Declinationskreis) bezeichnet, der von der Refraction corrigirte Durchgang des Sterns durch den Stundenkreis

$$T = \frac{\vartheta + \vartheta'}{2} - \frac{r\,\mathrm{Sin}\,\pi}{15\,\mathrm{Cos}\,\delta}$$

und seine corrigirte Entfernung vom Mittelpunkte des Feldes

$$D = d' - r\,\mathrm{Cos}\;C$$

Verändert sich aber die Refraction während dem Durchgange des Sterns um dr, so wird er nicht mehr die auf ED parallele Sehne AB, sondern die Sehne Ab beschreiben, und während dem Durchgange des Sterns wird seine Rectascension um

$$\frac{d\,r\;\mathrm{Sin}\;\pi}{\mathrm{Cos}\;\delta}$$

und seine Declination um

$$d\,r\;\mathrm{Cos}\;\pi$$

verändert werden. Ist also

$$\vartheta' - \vartheta = 2\,\tau$$

in Secunden der Sternzeit ausgedrückt, so sind die Aenderungen der Rectascension und Declination in einer Secunde

$$\frac{d\,r\ \mathrm{Sin}\ \pi}{2\,\tau\ \mathrm{Cos}\ \delta}\quad \text{und}$$

$$\frac{d\,r\ \mathrm{Cos}\ \pi}{2\,\tau}$$

und da man diese Aenderungen wie die in dem vorhergehenden §. betrachteten behandeln kann, so ist der corrigirte Durchgang des Sternes durch den Stundenkreis

$$\frac{\vartheta+\vartheta'}{2} - \frac{\mathrm{Sin}\ \pi}{15\ \mathrm{Cos}\ \delta} - \frac{d\,r.\ d'\ \mathrm{Cos}\ \pi}{(15\ \mathrm{Cos}\ \delta)^2\ 2\,\tau}$$

$$= T - \frac{d\,r.\ d'\ \mathrm{Cos}\ \pi}{(15\ \mathrm{Cos}\ \delta)^2\ 2\,\tau}$$

und seine corrigirte Entfernung vom Mittelpunkte des Feldes

$$d' - r\ \mathrm{Cos}\ \pi - d\,r\ \frac{15.\ \tau\ \mathrm{Cos}\ \delta\ \mathrm{Sin}\ \pi}{2\,d'}$$

$$= D - d\,r\ \frac{15\ \tau\ \mathrm{Cos}\ \delta\ \mathrm{Sin}\ \pi}{2\,d'}$$

Die Gröfse r findet man aus den gewöhnlichen Tafeln für die Höhe h des Gestirns. Diese Höhe h und den Winkel π aber findet man durch die Ausdrücke

$$\mathrm{Cos}\ h\ \mathrm{Sin}\ \pi = \mathrm{Cos}\ \varphi\ \mathrm{Sin}\ s$$

$$\mathrm{Cos}\ h\ \mathrm{Cos}\ \pi = \mathrm{Sin}\ \varphi\ \mathrm{Cos}\ \delta - \mathrm{Cos}\ \varphi\ \mathrm{Sin}\ \delta\ \mathrm{Cos}\ s$$

wo s φ den Stundenwinkel und die Polhöhe bezeichnet. Sucht man endlich noch die Differenz $\triangle$ h der Höhe der Punkte A und b, oder

$$\triangle\ h = -\ 15\ (2\ \tau)\ \mathrm{Cos}\ \delta\ \mathrm{Sin}\ \pi$$

so geben die Refractionstafeln auch die Refraction r' der Höhe h — $\triangle$ h und man hat d r = r' — r. Ueber die Correction der Refraction bey allen Arten von Micrometern sehe man Monatl. Corresp. 1808 März.

§. 10.

Sind endlich die beobachteten Gestirne zu nahe an dem Pole des Aequators, so werden sie nicht mehr, wie bisher vorausgesetzt wurde, während dem Durchgange durch das Feld des Micrometers gerade Linien beschreiben, und die oben §. 6. gegebenen Ausdrücke werden eine Verbesserung nöthig haben.

Betrachtet man das sphärische Dreyeck zwischen dem Punkt des Eintritts, dem Mittelpunkte des Feldes und dem Pol des Aequators, und nennt man δ, D die Declination des Sterns und des Mittelpunktes des Feldes, r den Halbmesser des letzten, und 2τ die Sternzeit durch den Bogen AB, so ist 15τ der Winkel an dem Pole, und man hat

$$\text{Cos}\, r = \text{Sin}\, \delta\, \text{Sin}\, D + \text{Cos}\, \delta\, \text{Cos}\, D\, \text{Cos}\, 15\,\tau$$

woraus man findet

$$\text{Sin}^2 \tfrac{1}{2} r = \text{Sin}^2 \frac{\delta - D}{2} + \text{Cos}\,\delta\, \text{Cos}\, D\, \text{Sin}^2 \frac{15\,\tau}{2}$$

oder abkürzend, wenn

$$15\,\tau\, \text{Cos}\, \delta = a$$

$$\text{und } \sqrt{r^2 - a^2} = d$$

gesetzt wird.

$$\delta - D = d - \frac{a^2}{2}\, \text{Tg}\, \delta$$

Für das zweyte Gestirn ist eben so

$$\delta' - D = d' - \frac{a'^2\, \text{Tg}\, \delta'}{2}$$

also ist sehr nahe die Differenz der Declinationen

$$\delta' - \delta = d' - d - \frac{(a'^2 - a^2)}{2\, \text{Sin}\, 1''}\, \text{Tg}\, \frac{\delta' + \delta}{2}$$

und

$$\frac{-(a'^2 - a^2)\, \text{Tg}\, \frac{\delta' + \delta}{2}}{2\, \text{Sin}\, 1''}$$

ist die gesuchte Correction der Differenz der Declination $d' - d$, die man ohne Rücksicht auf die Krümmung der Bogen nach den einfachen Formeln des §. 6. gefunden hat.

Die Differenz der Rectascensionen aber bedarf, wie man leicht sieht, keiner Correction, wenn man nur die ersten Potenzen der letzten berücksichtiget, da immer die halbe Summe der beobachteten Ein- und Austrittszeit den Augenblick des Durchgangs durch den Stundenwinkel des Mittelpunktes gibt.

I. Um den Gebrauch des Kreismicrometers zu erweitern, kann man durch die Mitte desselben einen Messingstreif legen, dessen beyde Seiten parallel und etwa den zehnten Theil des Durchmessers von einander entfernt sind, und dessen eine Seite durch den Mittelpunkt des Feldes geht.

Ist φ der Winkel des Halbmessers r des Feldes für den Punkt, wo der Stern austritt, mit der Seite des Streifens, die durch den Mittelpunkt geht, und $90 - n$ die Neigung des Parallelkreises gegen die Seiten des Streifens, y das Loth vom

Mittelpunkt des Feldes auf den Parallelkreis des Sterns, und x das Stück des Parallelkreises zwischen dem Punkte des Austritts und dem Fuſspunkte des Lothes y, und nennt man

2 t die Zeit durch die ganze Sehne oder die Zwischenzeit zwischen Ein- und Austritt des Sterns im Felde des Rohres,

t′ die Zeit zwischen dem Ein- und Austritt aus dem Streifen,

und t″ die Zeit zwischen dem Austritte aus dem Streifen und dem völligen Austritt aus dem Felde des Rohrs, und

endlich A die Breite des Streifens,

so findet man leicht folgende Ausdrücke

$$\mathrm{Cos}\, n = \frac{A}{15\ t'\ \mathrm{Cos}\ \delta}$$

$$\mathrm{Sin}\ \varphi = \frac{A}{r}\left(1 + \frac{t''}{t'}\right)$$

und wenn so n und φ bekannt ist,

$$x = r\ \mathrm{Sin}\ (\varphi + n)$$

$$y = r\ \mathrm{Cos}\ (\varphi + n)$$

Für einen zweyten Stern hat man eben so

$$\mathrm{Cos}\ n = \frac{A}{15\, T'\ \mathrm{Cos}\ \delta'}$$

$$\mathrm{Sin}\ \varphi' = \frac{A}{r}\left(1 + \frac{T''}{T'}\right)$$

$$x' = r\ \mathrm{Sin}\ (\varphi' + n)$$

$$y' = r\ \mathrm{Cos}\ (\varphi' + n).$$

Kennt man so x y und x′ y′, so ist

$$y - y'$$

die Differenz der Declinationen beyder Gestirne. Substituirt man aber die Zeiten

$$\frac{x}{15\ \mathrm{Cos}\ \delta} \text{ und } \frac{x'}{15\ \mathrm{Cos}\ \delta'}$$

von den beobachteten letzten Austritten beyder Sterne aus dem Felde des Rohrs, so erhält man die Zeiten, in welchen die Sterne in den Lothen y und y′ waren, oder so erhält man die Differenz der Rectascension beyder Gestirne.

Die vorhergehenden Ausdrücke sind selbst dann noch anwendbar, wenn man die Eintritte der beyden Gestirne in das

Feld des Rohrs nicht beobachtet hat, ein wesentlicher Vortheil, da man diese Eintritte öfters übersieht.

II. Geht die eine Seite des Streifens nicht durch den Mittelpunkt des Feldes, sondern ist B die senkrechte Entfernung dieser Seite vom Mittelpunkt, so ist

$$\text{Sin } \varphi = \frac{A}{r}\left(1 + \frac{t''}{t'}\right) + \frac{B}{r}$$

und alles andere wie zuvor. Es ist aber vortheilhafter, eine Seite des Streifens durch den Mittelpunkt des Feldes zu legen Man wird dies leicht durch einige Versuche dahin bringen. Zu diesem bemerke man, dafs man für diese Voraussetzung haben mufs

$$\frac{y}{y'} = \frac{t - t' - t''}{T - T' - T''} \cdot \frac{\text{Cos } \delta}{\text{Cos } \delta'} \ldots (I)$$

Hat man aber bey beyden Sternen die Ein- und Austritte aus dem Rohr beobachtet, so ist

$$\text{Sin } \psi = \frac{15 \text{ Cos } \delta}{r} \cdot t \text{ und } y = r \text{ Cos } \psi$$

$$\text{Sin } \psi' = \frac{15 \text{ Cos } \delta'}{r} \cdot T \text{ und } y' = r \text{ Cos } \psi'$$

und da so die Werthe von y und y durch die lezten Gleichungen bekannt sind, so werden diese Werthe auch der Gleichung (I) Genüge thun, wenn die eine Seite des Streifens durch den Mittelpunkt geht.

III. Um den Werth von A zu finden, suche man ψ und n aus

$$\text{Sin } \psi = \frac{15 \text{ Cos } \delta}{r} \cdot t$$

$$\text{Tg } n = \frac{15 \text{ Cos } \delta}{r \text{ Cos } \psi} (t - t' - t'')$$

so hat man

$$A = 15 \, t' \text{ Cos } \delta \text{ Cos } n$$

Man kann aber immer den Streifen nahe senkrecht auf den Weg des Sterns stellen, wodurch n sehr klein wird, und dann wird man haben

$$A = 15 \, t' \text{ Cos } \delta. \left(1 - \frac{15^2 \text{ Cos}^2 \delta}{2^2 r^2} (t - t' - t'')^2\right)$$

IV. Aus der Gleichung (I) folgt sofort

$$y - y' = y. \left(1 - \frac{(T - T' - T'') \text{ Cos } \delta'}{(t - t' - t'') \text{ Cos } \delta}\right)$$

oder auch

$$y - y' = y' \cdot \left(\frac{(t - t' - t'') \, Cos\, \delta}{(T - T' - T'') \, Cos\, \delta'} - 1 \right)$$

Hat man daher t, t' und t'' bey beyden Sternen beobachtet, so kann man die Differenz der Declinationen $y - y'$ aus einer der beyden letzten Gleichungen finden, wenn einer der beyden Sterne zu nahe am Mittelpunkte des Feldes vorbeyging, in welchem Falle die Bestimmung des y durch den bloſsen Kreis, nach dem Vorhergehenden, sehr unsicher ist, und dies ist der zweyte wesentliche Vortheil jenes Streifens. M. s. Berl. Jahrb. 1810. p. 97. und Monatl. Corresp. 1811.

§. 11.

Eine andere gewöhnliche Art der Micrometer besteht aus einem oder mehreren senkrechten und einem horizontalen Faden, deren Ebene durch den Brennpunkt beyder Gläser senkrecht auf die Axe derselben steht. Parallel mit dem festen horizontalen Faden bewegt sich ein anderer mittels einer feinen Schraube. Den Werth einer Umdrehung der Schraube und ihrer Unterabtheilungen kann man durch zwey Sterne, deren genau bekannte Differenz der Declinationen nicht gröſser als das Feld des Rohrs ist; oder durch den Durchmesser der Sonne, oder durch terrestrische Gegenstände, deren Durchmesser und Entfernung von dem Instrumente man kennt, bestimmen. Bey der Beobachtung dreht man das Fernrohr mit seinem Fadennetze so, daſs der feste horizontale Faden dem Aequator parallel wird, d. h. daſs der Stern sich in der Richtung dieses Fadens bewegt. Zu diesem Zwecke läſst man den Stern durch den Mittelpunkt oder durch den Durchschnitt des festen horizontalen und des mittleren vertikalen Fadens gehen, und wenn der Stern sich nahe bey seinem Austritte von dem horizontalen Faden entfernt, so dreht man das Rohr, bis er wieder den Faden trifft, welches Verfahren man öfter wiederholen kann. Am gewöhnlichsten braucht man diese Vorrichtung bey Instrumenten, die in der Ebene des Meridians aufgestellt sind, wo dann die vertikalen Fäden unmittelbar die Differenz der Rectascension beyder Gestirne in Zeit, und die horizontalen mittels der Schraube die Differenz der Declinationen in Bogen angeben.

Gewöhnlich hat man eine ungerade Anzahl von vertikalen Fäden, deren mittlerer in der Ebene des Meridians steht. Sind die Intervalle zwischen diesen Fäden alle gleich groſs, so ist die Summe aller beobachteten Durchgänge des Sterns, durch die Anzahl n der Fäden dividirt, gleich einer n fachen Beobachtung am mittlern Faden. Sind aber diese Zwischenräume ungleich, so könnte man zwar noch die Summe aller Beobachtungen, durch die Anzahl derselben dividirt, nehmen, wodurch man eine n fache Beobachtung an einem imaginären mittleren Faden erhält, der, wenn die Ungleichheit der Intervalle nur klein ist, immer nahe an dem mittlern Faden seyn wird. Es ist aber bequemer, alle Seitenbeobachtungen auf den wahren mittlern Faden auf folgende Art zu reduziren.

Es sey für drey Fäden und einen Stern, dessen Declination d ist,

$$\tau \quad \vartheta \quad t$$

die Zeit der Beobachtung an dem ersten, dem mittlern, und dem letzten Faden, und α das Intervall zwischen dem ersten und zweyten, a aber das Intervall zwischen dem zweyten und dritten Faden, beyde im Aequator oder für einen Stern genommen, dessen Declination Null ist, so hat man (nach §. 6)

$$\alpha = (\vartheta - \tau) \operatorname{Cos} d$$

$$a = (t - \vartheta) \operatorname{Cos} d$$

Auf diese Art wird man die Gröfse α und a durch eine grofse Anzahl von Sternen, besonders solcher, die dem Pole des Aequators sehr nahe stehen, mit der gröfsten Schärfe bestimmen.

Kennt man so α und a für den Aequator, so sind diese Intervalle für jeden Stern, dessen Declination δ ist,

$$\frac{\alpha}{\operatorname{Cos} \delta} \quad \text{und} \quad \frac{a}{\operatorname{Cos} \delta}$$

Sind daher wieder $\tau\ \vartheta\ t$ die drey Beobachtungszeiten für den letzten Stern, so wäre, wenn die Intervalle gleich sind, die verbesserte Beobachtung des mittlern Fadens

$$T = \frac{\tau + \vartheta + t}{3}$$

Sind sie aber ungleich, so geben diese drey Fäden nach der Ordnung folgende reduzirte Beobachtungen am mittleren Faden

$$\tau + \frac{\alpha}{\operatorname{Cos} \delta}$$

$$\vartheta$$

$$t - \frac{a}{\operatorname{Cos} \delta}$$

und daher das Mittel aller

$$\frac{\tau + \vartheta + t}{3} + \frac{\alpha - a}{3 \operatorname{Cos} \delta} = T + \frac{\alpha - a}{3 \operatorname{Cos} \delta}$$

Dies läfst sich leicht auf mehrere Fäden fortsetzen. Sind z. B. für fünf Fäden die äufsersten Intervalle α' und a', wo α' am nächsten an α und a' an a liegt, so ist die Correction, die man an dem arithmetischen Mittel T der fünf Beobachtungen anbringen muſs,

$$\frac{(\alpha'-a') + 2(\alpha-a)}{5 \operatorname{Cos} \delta},$$

für sieben Fäden ist diese Correction

$$\frac{(\alpha''-a'') + 2(\alpha'-a') + 3(\alpha-a)}{7 \operatorname{Cos} \delta}$$

für neun Fäden

$$\frac{(\alpha'''-a''') + 2(\alpha''-a'') + 3(\alpha'-a') + 4(\alpha-a)}{9 \operatorname{Cos} \delta} \text{ u. s. w.}$$

und diese Correction läſst sich leicht in eine Tafel bringen, deren Argument δ ist. Ist z. B. diese Correction für den Aequator $0''06$, so ist sie für

$$\delta = 30°, 60°, 70° \ldots$$

nach der Ordnung

$$0.''07, \; 0.''12, \; 0''17 \text{ u. s. w.}$$

§. 12.

Wenn die beobachteten Sterne nahe am Horizont stehen, so bedürfen die Beobachtungen eine Verbesserung wegen der Refraction. Sind a d die beobachtete Rectascension und Declination, α δ die durch Refraction verbesserten, π s h der Positions- und Stundenwinkel, und die Höhe des Sterns, zu welcher letzten die Refraction r gehört, so hat man, wie im §. 9.,

$$\alpha = a - r \frac{\operatorname{Sin} \pi}{\operatorname{Cos} \delta}$$

$$\delta = d - r \operatorname{Cos} \pi$$

und man findet die Gröſsen π und h, aus welcher letzten r folgt, durch die Ausdrücke

$$\operatorname{Cos} h \operatorname{Sin} \pi = \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} s$$

$$\operatorname{Cos} h \operatorname{Cos} \pi = \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} \delta - \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Cos} s$$

wo φ die Polhöhe des Beobachtungsortes ist.

Für den zweyten Stern hat man ähnliche Ausdrücke, wenn man die zu ihm gehörenden Gröſsen α' δ' π' r' .. mit einem Strich bezeichnet. Vernachlässigt man die kleine Gröſse $(\pi-\pi')$, so findet man aus dem Vorhergehenden leicht für die verbesserte Differenz der Rectascensionen

$$\alpha - \alpha' = a - a' + (r' - r) \frac{\operatorname{Sin} \pi}{\operatorname{Cos} \delta}$$

$$- r \operatorname{Sin}(\delta - \delta') \frac{\operatorname{Tg}\delta'}{\operatorname{Cos}\delta} \operatorname{Sin}\pi$$

und für die verbesserte Differenz der Declinationen

$$\delta - \delta' = d - d' + (r' - r) \operatorname{Cos}\pi$$

I. Wenn auch die Horizontalparallaxe p, wie bey dem Monde, beträchlich ist, so findet man aus den Ausdrücken des V^ten Capitels leicht die verbesserte Rectascension α und Declination δ aus den beobachteten a und d durch folgende Gleichungen

$$\alpha = a + p \frac{\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} s}{\operatorname{Cos}\delta}$$

$$\delta = d + p(\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\delta - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos} s)$$

§. 13.

Man kann aber auch, statt die Fäden untereinander senkrecht zu legen, sie unter verschiedenen Winkeln verbinden. Kreuzen sich vier Fäden im Brennpunkte beyder Gläser unter gleichen Winkeln von 45 Graden, so entsteht das Fadennetz von 45 Graden, welches man so zu stellen pflegt, daſs einer der Fäden parallel mit dem Wege des Sterns, oder mit dem Aequator ist, und daſs daher der darauf senkrechte den Stundenkreis vorstellt. Bemerkt man die Zeiten, in welchen zwey Sterne durch die beyden anderen Fäden gehen, so ist es sehr leicht, daraus die Differenz ihrer Rectascension und Declination abzuleiten, ja man kann diese Differenz auch für jede andere Lage des Fadennetzes finden, wenn man diese Lage gegen den Aequator zuerst durch zwey bekannte Sterne bestimmt. Dieses Netz hat den Nachtheil, daſs mehrere Stellen des Feldes zu den Beobachtungen nicht gebraucht werden können, und daſs der wichtigste Theil des Feldes, der Mittelpunkt desselben, durch den Durchschnitt so vieler Fäden, für die Beobachtungen schwer angewendet werden kann. Bradley erfand daher ein anderes Netz, welches von ihm den Namen erhielt, und jene zwey Nachtheile nicht hat. Man denke sich um das kreisförmige Feld des Fernrohres ein Quadrat beschrieben, welches jenen Kreis in vier Punkten berührt. Von dem obersten Berührungspunkte ziehe man zwey Fäden nach den beyden untern Spitzen des Quadrats, und von dem untersten Berührungspunkte zwey andere nach der oberen Spitze des Quadrates, so werden diese Fäden mit dem senkrechten Durchmesser einen Winkel bilden, dessen Tangente gleich ½, und mit dem horizontalen Durchmesser einen andern, dessen Tangente gleich 2 ist, und jede horizontale Linie zwischen den beyden ersten oder den beyden letzten Fäden wird gleich der senkrechten Entfernung dieser Linie von dem obersten oder untersten Berührungspunkte seyn, woraus sich also wieder die Differenz der Rectascension und Declination ohne Mühe bestimmen läfst. Da dieses Netz schwer mit grofser Genauigkeit zu verfertigen ist, so hat Burckhardt ein einfaches Quadrat, welches von vier Fäden gebildet wird, und in dem kreisförmigen Felde des Fernrohrs beschrieben ist, vorgeschlagen.

Man könnte leicht noch andere Netze ausdenken, allein es scheint, dafs sie sämmtlich nicht ganz vollkommen sind, da es in der That äufserst schwer ist, in einem so kleinen Raum mehrere gegebene Winkel auf das genaueste durch Fäden zu bezeichnen. Ich habe daher geglaubt, dafs es vortheilhafter seyn wird, dem Künstler die Sache zu erleichtern, und von ihm blofs die Construction zweyer geradlinichter Winkel zu fordern, ohne ihre Gröfse im allgemeinen zu bestimmen, und ohne selbst, wie bisher, zu verlangen, dafs sie einander gleich seyn sollen.

I. Es seyen AD, BD, CD drey gerade Linien, die in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte die Winkel $ADB = m$, $BDC = n$ bilden. Die Zeit eines beobachteten Sterns von A nach B durch 15 Cos δ multiplizirt, sey $= t$ und $BC = \vartheta$. Eben so für einen zweyten Stern $A'B' = t'$ und $B'C' = \vartheta'$. Endlich sey der unbekannte Winkel

$$DAB = DA'B' = x.$$

Dies vorausgesetzt hat man

$$\left.\begin{aligned} \frac{AD}{t} &= \frac{A'D}{t'} = \frac{\operatorname{Sin}(m+x)}{\operatorname{Sin} m} \\ \frac{BD}{\vartheta} &= \frac{B'D}{\vartheta'} = \frac{\operatorname{Sin}(m+n+x)}{\operatorname{Sin} n} \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

und überdiefs, wenn die auf den Weg des ersten Sterns senkrechte Linie

$$A'\alpha = B'\beta = C\gamma = d \text{ ist,}$$

$$\left.\begin{aligned} AD - A'D &= \frac{d}{\operatorname{Sin} x} \\ BD - B'D &= \frac{d}{\operatorname{Sin}(m+x)} \end{aligned}\right\} \text{II.}$$

Heifst man endlich die Linien

$$A\alpha = a,\ B\beta = b,\ C\gamma = e$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} a &= d \operatorname{Cotg} x \\ b &= d \operatorname{Cotg}(m+x) \\ e &= d \operatorname{Cotg}(m+n+x) \end{aligned}\right\} \text{III.}$$

Diese drey Systeme von Gleichungen reichen hin, die Differenz der Rectascension und Declination beyder Gestirne zu bestimmen. Substituirt man die Werthe von A, D --- aus I. in II., so erhält man

$$\left.\begin{aligned} d &= (t-t')\,\frac{\text{Sin}\,(m+x)\ \text{Sin}\ x}{\text{Sin}\ m} \\ d &= (\vartheta-\vartheta')\,\frac{\text{Sin}\,(m+n+x)\ \text{Sin}\,(m+x)}{\text{Sin}\ n} \end{aligned}\right\}\ \text{IV.}$$

und wenn man beyde Werthe von d einander gleich setzt,

$$\text{Cotg}\ x = \frac{\frac{t}{\vartheta}\cdot\frac{\text{Sin}\ n}{\text{Sin}\ m} - \text{Cos}\ (m+n)}{\text{Sin}\ (m+n)}$$

Substituirt man diesen Werth von x in den beyden vorhergehenden Gleichungen, so erhält man

$$d = \frac{\vartheta(t-t')\ (t+\vartheta)\ \text{Sin}\ m\ \text{Sin}\ n\ \text{Sin}\,(m+n)}{\vartheta^2\,\text{Sin}^2\,m - 2\,t\,\vartheta\,\text{Sin}\ m\ \text{Sin}\ n\ \text{Cos}\,(m+n) + t^2\,\text{Sin}^2 n}$$

und durch die erste der Gleichungen III.

$$a = \frac{(t-t')\ (t+\vartheta)\,\text{Sin}\ n\,(t\,\text{Sin}\ n - \vartheta\,\text{Sin}\ m\ \text{Cos}\ (m+n))}{\vartheta^2\,\text{Sin}^2\,m - 2\,t\,\vartheta\,\text{Sin}\ m\ \text{Sin}\ n\ \text{Cos}\,(m+n) + t^2\,\text{Sin}^2\,n};$$

Die Gröſse d ist die Differenz der Declination beyder Sterne. Verbessert man dann den Eintritt des zweyten Sterns in A′ durch A α = α, so gibt der Unterschied dieses verbesserten Eintritts und des beobachteten Eintritts des andern Sterns in A die Differenz der Rectascension beyder Sterne.

Am bequemsten wird man daher so verfahren: Man suche zuerst x aus

$$\text{Tg}\ x = \frac{\vartheta\,\text{Sin}\ m\ \text{Sin}\ (m+n)}{t\,\text{Sin}\ n - \vartheta\,\text{Sin}\ m\ \text{Cos}\,(m+n)},$$

so ist die Differenz der Declination

$$d = (t-t')\cdot\frac{\text{Sin}\ (m+x)\ \text{Sin}\ x}{\text{Sin}\ m}$$

und die Differenz der Rectascension findet man durch eine der drey folgenden Gleichungen

$$a = (t-t')\cdot\frac{\text{Sin}\,(m+x)\ \text{Cos}\ x}{\text{Sin}\ m}$$

$$b = \frac{\vartheta}{t}\ (t-t')\cdot\frac{\text{Sin}\ (m+n+x)\cdot\ \text{Sin}\ (m+x)}{\text{Sin}\ n}$$

$$c = \frac{\vartheta}{t}\ (t-t')\cdot\frac{\text{Cos}\ (m+n+x)\cdot\ \text{Cos}\,(m+x)}{\text{Sin}\ n}.$$

II. Einfacher werden diese Ausdrücke, wenn man in ihnen $m = n$ setzt, und bloſse gleiche Winkel zu construiren, steht in der Macht jedes Künstlers.

Aus diesen allgemeinen Ausdrücken kann man leicht alle die ableiten, welche bisher für besondere Fälle, für die einzelnen Fadennetze, vorgeschlagen worden sind.

1. So ist für das Bradley'sche Netz

$$\mathrm{Tg}\, m = \mathrm{Tg}\, n = \tfrac{1}{2},$$

also

$$\mathrm{Sin}\, m = \mathrm{Sin}\, n = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

und

$$\mathrm{Cos}\, m = \mathrm{Cos}\, n = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Man hat daher, wenn man diese Werthe in den vorhergehenden Gleichungen substituirt,

$$\mathrm{Tg}\, x = \frac{4\, \vartheta}{5\, t - 3\, \vartheta}$$

$$d = \frac{4\, \vartheta\, (t - t')\, (t + \vartheta)}{5\, (t^2 + \vartheta^2) - 6\, t\, \vartheta}$$

$$a = \frac{d\, (5\, t - 3\, \vartheta)}{4\, \vartheta}$$

$$b = \frac{2\, d\, (t - \vartheta)}{t + \vartheta}$$

$$c = \frac{d\, (3\, t - 5\, \vartheta)}{4\, t}$$

wo man bemerken kann, daſs b das Mittel von a und c ist, und daſs man immer hat

$$t\, \vartheta' = t'\, \vartheta,$$

also auch

$$t\, (\vartheta - \vartheta') = \vartheta\, (t - t')$$

2. In Burckhardt's Quadratmicrometer hat man

$$m = n = 45^\circ,$$

also auch

$$\mathrm{Tg}\, x = \frac{\vartheta}{t}$$

$$d = \frac{\vartheta\, (t - t')\, (t + \vartheta)}{t^2 + \vartheta^2}$$

$$a = \frac{d.\, t}{\vartheta}$$

$$\mathfrak{b} = \frac{d\,(t-\vartheta)}{t+\vartheta}$$

$$c = -\frac{d.\vartheta}{t},$$

3. Wäre endlich $m = n = 30^\circ$, so ist

$$Tg.\,x = \frac{\vartheta\sqrt{3}}{2t-\vartheta}$$

$$d = \frac{2\,(t-t')\,(t+\vartheta).\,\vartheta\sqrt{3}}{t^2-t\vartheta+\vartheta^2}$$

$$a = \frac{d\,(2t-\vartheta)}{\vartheta\sqrt{3}}$$

$$b = \frac{d\,(t-\vartheta)\sqrt{.}}{t+\vartheta}$$

$$c = \frac{d\,(t-2\vartheta)}{t\sqrt{3}}$$

III. Wenn man, etwa durch einen über jene drey Linien unter einen bestimmten Winkel schief gelegten Faden dem Winkel x einen bestimmten Werth geben kann, so werden dadurch die vorhergehenden Ausdrücke oft viel einfacher. Ist z. B. $x = 90$, so ist überhaupt für jedes Micrometer, wenn $m = n$ ist

$$Cos\;2\,m = \frac{t}{\vartheta}$$

also werden die Ausdrücke von d in einer der Gleichungen IV.

$$d = (t = t)\;\sqrt{\frac{\vartheta+t}{\vartheta-t}}$$

und $a = o$

$$b = -d.\;\sqrt{\frac{\vartheta-t}{\vartheta+t}}$$

$$c = -\frac{d.\;\sqrt{\vartheta^2-t^2}}{t}$$

und selbst diese Ausdrücke werden noch einfacher, wenn man für $m = n$ bestimmte Werthe annimmt, wodurch eine neue Bedingungsgleichung zwischen t und ϑ eingeführt wird. So findet man für das Bradleysche Netz, wenn $x = 90$ ist,

$$\frac{t}{\vartheta} = \tfrac{1}{2}\text{ also}$$

$$d = 2\,(t-t')$$

$$a = 0$$

$$b = -\frac{d}{2}$$

$$c = -\tfrac{1}{2}\,d$$

und wenn Tg x = 2 ist, also der mittlere Faden BD in dem Stundenkreis des Sterns liegt, so folgt aus II. N. 1.

$$\vartheta = t \text{ und daher } d = 2\,(t - t')$$

$$a = \tfrac{1}{2}\,d = (t - t')$$

$$b = 0$$

$$c = -\tfrac{1}{2}\,d = -(t - t')$$

und für das Quadratmicrometer

$$m = n = 45^{\circ},\ \vartheta = \infty$$

also

$$d = t - t'$$

$$a = 0$$

$$b = -d$$

$$c = \infty$$

IV. Alles dies setzt voraus, dafs die Winkel m, n entweder genau gegeben, oder, was sicherer ist, zuerst durch Beobachtungen bestimmt worden sind. Läfst man zwey ihrer Lage nach bekannte Sterne durch die Fäden gehen, so ist d, oder die Differenz ihrer Declinationen, und die Gröfsen a, b, c durch die bekannte Differenz der Rectascensionen gegeben. Sind z. B. diese scheinbaren Rectascensionen der Sterne α und α', und ist T T' die Zeit des Eintritts in A und A' so ist

$$a = (\alpha - T) - (\alpha' - T')$$

und eben so für die übrigen. Man hat daher

$$\frac{d}{a} = \mathrm{Tg}\ x$$

$$\frac{d}{b} = \mathrm{Tg}\ (m + x)$$

$$\frac{d}{c} = \mathrm{Tg}\ (m + n + x)$$

Die beyden ersten Gleichungen geben

$$\mathrm{Tg}\ m = \frac{(a - b)\,d}{a\,b + d^2}$$

und die beyden letzten

$$\text{Tg } n = \frac{(b-c)\,d}{bc + d^2}$$

wodurch man also m und n finden kann. Man bemerke noch, dafs man hat

$$a - b = t - t' \text{ und}$$

$$b - c = \vartheta - \vartheta'$$

Ein zweytes Mittel, m und n zu bestimmen, geben zwey schwarze Lineale, die man auf einer entfernten weifsen Wand so lange verschieben kann, bis sie genau denselben Winkel machen, welchen die Fäden bilden, welcher Winkel dann an der Wand mit aller Schärfe gemessen werden kann.

Der vorhergehende Werth von Tg m gibt auch, da

$$b = a - (t - t')$$

ist, folgenden

$$\text{Tg } m = \frac{(t-t')\,d}{a^2 - a(t-t') + d^2}, \text{ woraus}$$

$$a = \frac{t-t'}{2} \pm \sqrt{(t-t')\,d \text{ Cotg } m + \tfrac{1}{4}(t-t')^2 - d^2}$$

wo offenbar nur das obere Zeichen zu nehmen ist. Eben so ist

$$b = -\frac{(t-t')}{2} \pm \sqrt{(t-t')\,d \text{ Cotg } m + \tfrac{1}{4}(t-t')^2 - d^2}$$

$$c = -\frac{(\vartheta-\vartheta')}{2} \pm \sqrt{(\vartheta-\vartheta')\,d \text{ Cotg } n + \tfrac{1}{4}(\vartheta-\vartheta')^2 - d^2}$$

V. Da die oben erwähnten Netze, besonders das Bradleyische, zu den Beobachtungen die bequemsten sind, und man dieselben am Instrumente schon gewöhnlich angebracht findet, so wird es am besten seyn, sie zuerst nach IV. zu untersuchen, und dann nach I. zu behandeln. Gesetzt, man habe in einem Quadratmicrometer gefunden, dafs die zwey Winkel m, n nicht genau 45°, sondern dafs

$$m = 45^\circ + \alpha,\; n = 45 + \beta$$

sey, wo α β sehr kleine Gröfsen sind. Wir werden daher haben

$$\text{Sin } m = \frac{1 + \alpha \text{ Sin } 1''}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Sin } n = \frac{1 + \beta \text{ Sin } 1'}{\sqrt{2}}$$

Setzt man diese Werthe von m, n in den Ausdrücken von d und a, welche wir oben in I. gefunden haben, so findet man

$$d = D + \frac{D \sin 1''}{t^2 + \vartheta} \left(\alpha\,(t^2 - \vartheta^2 - 2t\vartheta) - \beta\,(2t\vartheta + t^2 - \vartheta^2)\right)$$

$$a = A + \frac{D \sin 1''}{t^2 + \vartheta^2} \left(\alpha\,(\vartheta^2 - t^2 - 2\vartheta t) + \beta\,(\vartheta^2 - t^2 + 2\vartheta t)\right)$$

$$\text{wo } D = \frac{\vartheta\,(t - t')\,(t + \vartheta)}{t^2 + \vartheta^2} \text{ und}$$

$$A = \frac{D\,t}{\vartheta}$$

die Werthe von d a aus II. für das vollkommene Quadratmicrometer sind.

VI. Man sieht, dafs auch schon zwey Fäden A D, B D hinreichen, wenn man drey Beobachtungen zwischen zwey ihrer Lage nach gegebenen und einem unbekannten Gestirn hat, wo die zwey ersten die Lage der Fäden gegen den Aequator bestimmen werden. Auch läfst sich ein einziger Faden sehr vortheilhaft mit einem Kreismicrometer verbinden, besonders wenn er durch den Mittelpunkt des letzten geht §.10. Ueber diese und andere Gattungen von Micrometern, wohin auch die verschiedenen Heliometer gehören, kann man nachsehen: Delambres Astronomie I. B. p. 97.; Lalandes Astronomie II. Band, und Vinces practical Astronomy p. 60 und p. 124.

§. 14.

HADLEY's SEXTANT.

Dieses Instrument ist eines der nützlichsten zu Lande, und unentbehrlich zur See. Seinen Namen hat es von seinem Erfinder, John Hadley, obschon man im Jahre 1742, etwa zehn Jahre nach der Bekanntmachung dieser wichtigen Erfindung, in Hadleys Papieren eine Schrift von Newtons eigener Hand fand, in welcher der letzte dasselbe Instrument, als von ihm erfunden, beschreibt.

Es ist bestimmt, die Winkel zweyer Gegenstände in jeder Richtung desselben gegen den Horizont selbst dann zu messen, wenn der Beobachter keinen festen Stand hat.

Es besteht im allgemeinen aus einem Kreissector ACB (Fig 12), um dessen Mittelpunkt C sich eine Alhidade C A bewegt, welche einen Spiegel C trägt, der durch den Mittelpunkt des Kreises senkrecht auf der Ebene desselben steht. Ein anderer kleinerer Spiegel C′ steht auf der Ebene des Sextanten senkrecht und parallel mit der Linie C A, die den Mittelpunkt C mit dem ersten oder dem Mittelpunkt A des eingetheilten Randes A B verbindet, daher beyde Spiegel parallel sind, wenn die Alhidade auf dem Nullpunkt A steht. Die obere Hälfte des kleinen Spiegels C′ ist durchbrochen, so dafs der Strahl von dem einen Gegenstande E durch diesen durchbrochenen Theil des Spiegels unmittelbar in das Auge, oder in das auf dem Sextanten befestigte Fernrohr R kommen kann. Wird nun die Alhidade mit dem daran befestigten grofsen Spiegel so lange gedreht, bis der Strahl eines zweyten Objectes D in der Richtung D C auf den grofsen Spiegel, von da in der Richtung C C′ auf den kleinen Spiegel, und endlich von da in der Richtung C′ R ebenfalls in das Fernrohr fällt, während welcher Drehung der Alhidade das über dem kleinen Spiegel unmittelbar (ohne Reflexion) gesehene Object immer in der Mitte des Fernrohres erhalten wird, so decken sich die beyden Bilder von E und D im Fernrohre, und der Winkel, welchen in diesem Zustande beyde Spiegel mit einander bilden, d. h. der Theil des Gradbogens, um welchen sich von dem Anfangspunkte A an die Alhidade auf A B gedreht hat, ist gleich der Hälfte des Winkels, welchen die beyden Objecte E, D im Auge des Beobachters bilden.

Denn sind beyde Spiegel parallel, so decken sich die zwey Bilder eines und desselben Gegenstandes, wovon das eine unmittelbar in der Richtung F E, und das andere durch Reflexion von den beyden Spiegeln gesehen wird. Es ist nämlich erstens $a = a'$ und $b = b'$, weil der Einfallswinkel dem Reflexionswinkel gleich ist, und es ist zweytens $b = a'$, weil die beyden Spiegel parallel sind, also ist auch

$$D\,C\,C' = C\,C'\,F$$

das heifst, es ist D C parallel mit E F oder die beyden Bilder decken sich.

Bewegt man nun die Alhidade, bis das reflectirte Bild eines anderen Gegenstandes G (fig 13) das unmittelbar gesehene Object E deckt, so sey y der Winkel beyder Objecte, und x der Winkel beyder Spiegel oder der Bogen, den die Alhidade von dem Punkte A aus beschrieben hat.

Da der kleine Spiegel mit C A parallel ist, so ist

$$b = a + x,$$

und überdiefs

$$p = a - x.$$

Aber in dem Dreyecke C C′ F ist

$$2\,b = (a + x + p) + y,$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke für b und p ihre vorigen Werthe, so hat man

$$x = \tfrac{1}{2}\,y.$$

Der Bogen A B ist der gröfsern Bequemlichkeit wegen so eingetheilt, dafs jeder halbe Grad für einen ganzen gilt, daher ist der gelesene Bogen A a unmittelbar gleich der gesuchten Distanz y beyder Objecte. Nimmt man die Höhe eines Objectes, indem man z. B. das Bild desselben auf der Wasserfläche oder einem andern künstlichen Horizont von dem in dem grofsen Spiegel durch Reflexion gesehenen Bilde des Objectes sich denken läfst, so erhält man offenbar die doppelte Höhe des Objectes über dem Horizonte. Uebrigens wird, wie man leicht sieht, die Deckung beyder Bilder nicht merklich gestört, wenn man auch den Sextanten etwas um sich selbst bewegt, und eben dies macht dieses Instrument zur See so wichtig, wo man es, so wie auf dem Lande, während der Beobachtung, mittels einer Handhabe, in freyer Hand zu halten pflegt.

§. 15.

Ehe man mit diesem Instrumente gehörig beobachten kann, mufs es zuerst in allen seinen Theilen gehörig rectificirt werden. Man sieht aus dem Vorhergehenden, dafs der kleine Spiegel senkrecht auf der Ebene des Sextanten stehen, und dafs er, wenn der Index der Alhidade auf Null steht, mit dem grofsen Spiegel parallel seyn soll. Der grofse Spiegel aber wird gewöhnlich schon von dem Künstler unveränderlich senkrecht auf der Ebene des Instrumentes befestigt, und bedarf dann keiner Correction; der kleine hingegen ist absichtlich beweglich eingerichtet, um eine durch Zufall entstandene Störung desselben immer leicht verbessern zu können. Man kann nämlich diesem kleinen Spiegel durch zweyerley Schrauben eine doppelte Bewegung geben. Die eine derselben ist auf der Rückseite des Spiegels angebracht, und durch sie kann man den Spiegel um eine auf die Fläche des Sextanten senkrechte Axe drehen; die andere aber dient dazu, den Spiegel senkrecht auf die Ebene des Instruments zu bringen. Diese zwey Correctionen kann man so finden:

Man stelle den Nullpunkt der Alhidade auf den Nullpunkt des eingetheilten Randes. Decken sich in dieser Lage die beyden Bilder desselben sehr entfernten Gegenstandes, so hat keiner der beyden Fehler statt. Decken sie sich nicht, so bewege man die Schraube an der Rückseite des kleinen Spiegels so lange, bis sie sich decken. Kann man aber durch diese Schraube eine genaue Deckung der Bilder nicht hervorbringen, sondern gehen die Bilder, statt sich zu decken, neben einander vorbey, so steht der kleine Spiegel nicht senkrecht, und man mufs nun noch die andern Schrauben in Bewegung setzen, bis man die Deckung scharf darstellt.

Man kann aber auch noch vortheilhafter so verfahren:

Man drehe die Alhidade, bis die beyden Bilder desselben sehr entfernten Gegenstandes sich decken, oder, wenn dies nicht möglich ist, wenigstens senkrecht über einander stehen. Dann bringe man mit der zweyten Art von Schrauben die Verticalität des kleinen Spiegels oder die völlige Deckung der beyden Bilder hervor. Steht in diesem Zustande der Nullpunkt der Alhidade z. B. auf a (Fig. 13) so dafs $Aa = 0° 30'$ ist, so mufs von allen beobachteten Winkeln $0° 30'$ subtrahirt werden, um den wahren Winkel zu erhalten. Diese Gröfse wird im Gegentheile zu allen beobachteten Winkeln addirt, wenn a auf der entgegengesetzten Seite von A liegt. Diese Gröfse heifst gewöhnlich der Collimationsfehler des Instruments, und er soll vor jeder Reihe von Beobachtungen auf die angezeigte Art gesucht werden. Am vortheilhaftesten wird man dazu sehr lichtstarke Gegenstände, z. B. die Sonne, wählen, indem man die Ränder beyder Bilder auf beyden Seiten zur Berührung bringt, denn diese Berührung der Ränder läfst sich viel schärfer beobachten, als die völlige Bedeckung der ganzen Bilder. Dann ist die halbe Differenz der beyden Zahlen der Collimationsfehler, und die halbe Summe der Durchmesser der Sonne.

I. Die Axe des Fernrohrs, d. h. die Linie, welche den Mittelpunkt des Objectivglases mit der Mitte des Sehfeldes verbindet, mufs ferner mit der Ebene des Sextanten parallel seyn. Um sich davon zu überzeugen, bringe man z. B. die nächsten Ränder der Sonne und des Mondes, wenn der Winkel dieser beyden Gestirne von einander sehr grofs ist, zur Berührung am Rande des Sehfeldes, stelle die Alhidade durch ihre Druckschraube fest, und führe den Berührungspunkt an das entgegengesetzte Ende des Feldes. Schneiden sich hier die Ränder, so steht das Objectivende des Rohrs zu weit vom Sextanten ab und umgekehrt. Auch läfst sich durch eine eigene Schraube der Ring, welcher das Fernrohr trägt, über der Ebene des Sextanten erhöhen und erniedrigen. Sieht man den unmittelbar, ohne Reflexion gesehenen Gegenstand durch den obern durchbrochenen Theil des kleinen Spiegels nicht deutlich genug, so mufs das Fernrohr erhöht werden.

Um zu untersuchen, ob die Spiegel auf beyden Seiten parallel sind, suche man in dem Spiegel das Bild eines sehr entfernten, wohl begränzten Gegenstandes in einer gegen den Spiegel sehr schiefen Lage auf. Sieht man ein doppeltes Bild des Gegenstandes, so sind die beyden Seiten des Spiegels nicht parallel. Je dunkler die Farbe des Spiegels ist, desto besser ist er polirt, desto besser wird man also durch ihn sehen.

Zur Beobachtung der Sonne hat man, um die Augen zu schonen, eigene Blendgläser. Um zu sehen, ob ihre beyden Seiten parallel sind, lasse man die zwey Bilder der Sonne sich scharf berühren, und ändere die Gläser, oder drehe sie in ihren Fassungen. Bleibt die Berührung ungestört, so sind die Blendungen gut. Uebrigens, wenn man bey den Beobachtungen dieselben Blendungen braucht, die man bey der Bestimmung des Collimationsfehlers gebraucht hat, so hat ein Fehler in den Parallelismns keine nachtheiligen Folgen auf die Beobachtungen selbst.

II. Zur Beobachtung der Höhe irdischer und himmlischer Gegenstände, braucht man natürliche oder künstliehe Horizonte, Zu den ersten gehören Wasser in einer Schale, über welches man Oehl giefsen kann, damit nicht jeder leise Windhauch es wellenförmig bewegt; oder Tinte, Buchdruckerschwärze, und am besten Quecksilber. Alle diese Gegenstände werden gewöhnlich mit einem Glasdache bedeckt, sie vor dem Winde zu sichern. Statt dem Glase wird man vortheilhafter d'e unter dem Namen Miroir d'ane oder Frauenglas bekannte Glimmergattung wählen, da diese von der Natur schon in vollkommene parallele Blätter gespalten wird. Auf dem Meere endlich bedient man sich zu diesem Zwecke des Horizonts der See. Künstliche Horizonte bestehen aus Spiegeln, die mit Hilfe von Libellen horizontal gestellt werden.

III. Während der Beobachtung hält man den Sextanten bey seiner Handhabe in der rechten Hand, so dafs das unmittelbar gesehene Object links, das reflectirte aber rechts vom Beobachter steht. Wollte oder müfste man das unmittelbar gesehene Object rechts lassen, so wird der Sextant umgekehrt, oder seine eingetheilte Fläche gegen die Erde gehalten. In der Ordnung nimmt man immer das schwächer beleuchtete Object zu dem unmittelbar gesehenen, also bey Sonne und Mond den letzten, bey Mond und Sternen die letzten u. f.

Um den Winkel zwischen zwey Gegenständen zu messen, sehe man auf den einen derselben unmittelbar durch das Rohr, bringe die Ebeue des Sextanten in die Ebene beyder Objecte und bewege die Alhidade, bis das Bild des zweyten Objectes das erste beynahe deckt. Dann schliefst man die Alhidade, und bringt durch die feine Micrometerschraube die völlig scharfe Deckung hervor.

Um die Höhe eines Gegenstandes zu messen, sehe man auf das Bild desselben im Horizont unmittelbar durch das Rohr, bringe die Ebene des Sextanten in eine vertikale Lage, und bewege die Alhidade, bis das reflectirte Bild desselben Gegenstandes jenes erste beynahe deckt. Die völlig scharfe Deckung erhält man wie zuvor durch die Micrometerschraube. Bey der Sonne wird man auch hier die Berührung der Ränder der Deckung der Bilder vorziehen. Steht bey der Berührung der Ränder das bewegliche oder durch Reflexion der Spiegel gesehene Bild über dem andern, so erhält man die doppelte Höhe des obern Randes der Sonne. Zu dem Winkel, welchen die Alhidade anzeigt, schlägt man den Collimationsfehler, halbirt das

Resultat, subtrahirt davon den Halbmesser der Sonne und die Refraction; und addirt die Höhenparallaxe, das Endresultat ist die wahre Höhe des Mittelpunkts der Sonne. Bey Sternen fällt die Rücksicht auf Halbmesser und Parallaxe weg.

Das Vorhergehende wird hinreichen, den Sextanten gehörig zu gebrauchen. Umständlichere Belehrungen darüber findet man in Bohnenbergers Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung, und Monatl. Correspondenz 1800 December. u. a. Berl. Jahrb. 1811 p. 177 und 1812 p. 245.

§. 16.

MITTAGSROHR.

Das Mittagsrohr, oder das Passageninstrument, besteht aus einem Fernrohr, welches sich auf einer horizontalen Axe in der Ebene des Meridians bewegt. Es ist bestimmt, die Rectascensionen der Gestirne und den Gang der Uhr zu geben; die große Wichtigkeit desselben ist also für sich klar. Seinem gehörigen Gebrauche müssen folgende Rectificationen vorhergehen.

I. In dem Brennpunkte beyder Gläser senkrecht auf ihre Axe ist ein Netz von einem horizontalen, und drey, fünf oder sieben vertikalen Fäden gespannt.

Um zu untersuchen, ob das Bild eines entfernten Objectes, welchen das Objectivglas in seinem Brennpunkte macht, genau in der Ebene des Fadennetzes ist, bewege man, nachdem man einen Faden genau an einen wohl begränzten Theil des Objectes gebracht hat, das Auge rechts und links, auf und ab, so weit es möglich ist. Bleibt der Faden während dieser Bewegung des Auges immer fest auf dem Objecte, so ist er im Brennpunkte des Objectivs; geht aber Aug und Faden auf dieselbe Seite, so ist das Objectiv zu weit von dem Fadennetze und umgekehrt.

Da bey der gehörigen Lage des Netzes der Stern sowohl als der Faden zugleich am deutlichsten gesehen werden soll, so kann man zuerst das Ocular so stellen, daſs man einen wohlbegränzten Stern, besonders eignen sich dazu Doppelsterne, wie Castor, γ Widder, γ Jungfrau u. a., am besten sieht. Sieht man in dieser Lage die Fäden nicht ganz rein und schwarz, so steht das Objectiv nicht an seinem gehörigen Orte, und dieses oder das Fadennetz muſs daher so lange verschoben werden, bis Stern und Faden zugleich am deutlichsten erscheint. Dies Verfahren ist für Weit- und Kurzsichtige dasselbe, denn wenn auf diese Art das Objectiv gehörig gestellt, oder wenn die Fäden genau in den Brennpunkt des Objectivs gebracht worden sind, so wird der Weitsichtige sowohl als der Kurzsichtige nur das

Ocular seinem Auge gemäfs verändern, um wieder beyde, Stern und Faden, zugleich am deutlichsten zu sehen.

Ist diese erste Correction geendet, so mufs man darauf achten, dafs das Objectivglas diese Lage immer unverändert beybehalte, denn wenn dieses Glas, wie es meistens der Fall ist, nicht genau centrirt ist, wenn seine Axe nicht dieselbe mit der Axe der metallenen Fassung des Objectivs ist, so wird jede Bewegung dieser Fassung, indem man sie weiter hinein oder heraus schraubt, nicht blofs den Brennpunkt des Objectivs, in welchem das Fadennetz stehen soll, sondern selbst die Collimationslinie verändern. Man kann daher auf der Fassung und dem Rohre, in welches die Fassung geschraubt ist, ein Zeichen machen, damit man, wenn man ja später das Objectiv, um es zu reinigen, herausnimmt, es immer wieder genau auf seinen vorigen Platz zurück bringen kann.

II. Die Verticalität des mittlern Fadens kann man durch ein Loth prüfen, welches man in einiger Entfernung aufhängt; auch kann man, nachdem man die Axe des Instruments mittels der Libelle (IV) horizontal gestellt hat, den Faden an irgend einem wohl bestimmten Objecte auf- und ablaufen lassen, wo er, wenn er während der Bewegung des Rohrs immer genau denselben Punkt des Objectes deckt, vertical seyn wird. Eine eigene Schraube ist dazu bestimmt, das Fadennetz um seinen Mittelpunkt zu drehen.

Ob die andern verticalen Fäden mit dem mittleren parallel sind, findet man, wenn man ihre Verticalität eben so untersucht, wie die des mittleren Fadens, oder wenn man Sterne von gleicher Declination so weit als möglich über und unter dem Mittelpunkte des Feldes durch die vertikalen Fäden gehen läfst. Sind die Intervalle für beyde Sterne bey denselben Fäden gleich grofs, so sind die Fäden parallel.

Die Horizontalität des zweyten mittleren Fadens kann man durch Sterne prüfen, die dem Aequator sehr nahe sind. Bleibt der Stern während seinem ganzen Durchgang auf dem mittlern Faden, so ist er horizontal.

III. Die Collimationslinie, d. h. die Linie, welche die Mittelpunkte beyder Gläser mit dem Mittelpunkte des Fadennetzes verbindet, mufs auf der horizontalen Rotationsaxe des Instruments normal seyn. Zu diesem Zwecke richte man den mittlern Faden auf ein wohl bestimmtes, sehr entferntes Object. Dann kehre man die Axe um, so dafs der östliche Zapfen der westliche u. f. werde. Trifft in dieser Lage der Faden nicht wieder dasselbe Object, so verbessere man die Hälfte des Fehlers an der Schraube, welche das Fadennetz horizontal bewegt, und allenfalls die andere Hälfte durch die Schraube, welche das Fernrohr selbst horizontal bewegt, und dies Verfahren wiederhole man so lange, bis in beyden Lagen des Instruments der Faden immer genau dasselbe Object trifft. Ist dann die Rotationsaxe des ganzen Instruments horizontal, so wird die Collimationslinie des Mittagsrohres einen gröfsten Kreis beschreiben, der senkrecht auf dem Horizont ist, also durch das Zenith geht.

IV. Diese Horizontalität der Rotationsaxe aber kann man so erhalten.

Erstens, durch die Libelle. Man hänge sie mit ihrem Arme an die Zapfen der Axe. Ist die Blase nicht in der Mitte, so ist entweder die Axe nicht horizontal, oder die Oberfläche der Libelle jener Axe nicht parallel, d. h. die Libelle nicht rectificirt. Man verbessere daher die Hälfte des Fehlers durch die Schraube, welche die Axe vertical auf und ab bewegt, und die andere Hälfte durch die Schraube der Libelle. Hat man so die Blase in die Mitte gebracht, so kehre man die Libelle um, so dafs ihr östlicher Arm westlich werde. Ist in dieser Lage der Libelle die Blase nicht in der Mitte, so verbessere man, wie zuvor, die eine Hälfte des Fehlers durch die eine, und die andere Hälfte durch die andere Schraube. Dann kehre man die Libelle wieder um, und wiederhole dieses Verfahren so lange, bis in beyden Lagen der Libelle die Blase genau einspielt.

Dies setzt voraus, dafs die Zapfen der Axe gleiche Durchmesser haben. Sind diese Durchmesser ungleich, so wird auf diese Art nicht die Horizontalität der wahren Axe, sondern nur die der obern Oberfläche der Zapfen erhalten, und das Instrument beschreibt dann nicht einen gröfsten Kreis, sondern in einer conischen Bewegung einen kleineren. Um aber auch die untere Oberfläche der Zapfen zu prüfen, kann man das Fernrohr umkehren, so dafs sein Objectiv nach Norden stehe, wenn es zuvor nach Süden stand, und dann dasselbe Verfahren wiederholen.

Zweytens, durch das Loth. Man stelle das Rohr senkrecht, das Objectiv oben, und lasse das in der Nähe des Objetivs befestigte Loth so herab, dafs es genau den neben dem Ocular von dem Künstler bezeichneten Punkt trifft (welcher Punkt jetzt z. B. gegen Süden gekehrt ist.) Man kehre dann das Rohr um, so dafs seine östliche Axe westlich werde, und sehe, ob der Faden wieder jenen, jetzt gen Norden gelegenen, Punkt trifft. Thut er dies nicht; so verbessere man die Hälfte des Fehlers durch die Schraube, welche die Axe senkrecht bewegt, und die andere Hälfte durch die Bewegung jenes Punktes selbst, welcher sich in seiner Fassung excentrisch herum bewegen läfst. Dann kehre man die Axe wieder um (in die erste Lage), verbessere die zwey Hälften des Fehlers wie zuvor, und setze das Verfahren so lange fort, bis in beyden Lagen der Axe der Faden immer genau den Punkt trifft. — Auf diese Weise wird offenbar wieder nur die eine Oberfläche der Zapfen geprüft. Um nun auch die andere zu prüfen, kann man das Fernrohr umkehren, so dafs das Objectiv gegen die Erde sieht, und dasselbe Verfahren wiederholen, indem man den Faden über dem excentrischen Punkte fest macht, auf welchem er in der ersten Lage des Rohrs gefallen ist. Sind beyde Punkte so eingerichtet, dafs man an ihnen den Faden befestigen kann, so kann man den Faden an dem Objectivpunkte befestigen, und das Rohr dahin bringen, dafs der Faden auf dem Ocularpunkt schlage und dann das Rohr umkehren (so dafs jetzt das Objectivglas gegen die Erde steht, ohne die horizontale Axe des Instruments zu verkehren) und den Faden in dem Ocularpunkte befestigen, und, wenn er in dieser Lage nicht genau den Objectivpunkt trifft, die Hälfte des Fehlers, wie oben so lange verbessern, bis in beyden Lagen des Fernrohrs immer die entgegengesetzten Punkte von dem Faden genau getroffen werden.

§. 17.

Wenn diese vorläufigen Correctionen geendigt sind, so kömmt es nun noch darauf an, die Verticalebene, welche die Collimationslinie des Fernrohrs beschreibt, genau in die Ebene des Meridians zu bringen.

Wenn man versichert ist, dafs die im III. und IV. des vorigen §. corrigirten Fehler nicht mehr da sind, d. h. wenn die Rotationsaxe des Instruments genau horizontal, und die Collimationslinie auf diese Axe genau senkrecht ist, so ist es nicht schwer, die Ebene, welche die Collimationslinie beschreibt, und die bereits durch das Zenith geht, auch durch den Pol des Aequators zu führen, d. h. die Verticalebene des Fernrohrs in den Meridian zu bringen.

Es sey (Fig. 14) A B der Horizont, A Z B der Meridian, Z das Zenith, P der Pol des Aequators, Z s a der Vertikalkreis, welchen das Mittagsrohr beschreibt. Der Stern S, dessen Declination δ ist, ist also nicht im Meridian, sondern in dem Punkte s beobachtet worden. Sey für diese Zeit der Beobachtung P der Stundenwinkel A P s, und ω das Azimut A Z s des Sterns, das letzte positiv genommen, wenn das Rohr auf der Südseite des Zeniths gegen Osten von dem Meridian liegt. Dies vorausgesetzt hat man

$$\frac{\mathrm{Sin}\ P}{\mathrm{Sin}\ Z\,s} = \frac{\mathrm{Sin}\ \omega}{\mathrm{Sin}\ P\,s}$$

Ist also, wie man hier annehmen kann, die Ebene des Rohrs schon nahe die Ebene des Meridians, so hat man

$$P = \frac{\omega\ \mathrm{Sin}\ Z\,s}{\mathrm{Sin}\ P\,s}$$

Es ist aber sehr nahe $Z\,s = Z\,S = P\,S - P\,Z = \varphi - \delta$ und

$P\,s = P\,S = 90 - \delta$ wo φ die Polhöhe bezeichnet, also ist auch

$$P = \omega \frac{\operatorname{Sin}(\varphi - \delta)}{\operatorname{Cos} \delta}$$

und derselbe Ausdruck gilt auch für Culminationen zwischen dem Zenith und dem Pol. Für untere Culminationen endlich wird man für δ das Complement der Declination zu 180 nehmen, oder man wird haben

$$P = \omega \frac{\operatorname{Sin}(\varphi + \delta)}{\operatorname{Cos} \delta}$$

Wir wollen der Kürze wegen diesen Factor von ω gleich m setzen, so dafs man hat

$$P = m. \omega$$

Es sey nun α die scheinbare Rectascension des beobachteten Sterns, und t die Uhrzeit der Beobachtung, so ist

$$t + P \text{ oder}$$

$$t + m. \omega$$

die durch den Fehler des Rohrs verbesserte Uhrzeit der Beobachtung, oder

$$t + m. \omega$$

ist die Uhrzeit, welche man erhalten würde, wenn die Ebene des Rohres im Meridian läge, also ist auch

$$x = \alpha - (t + m. \omega) \ldots \text{I.}$$

die Correction der Uhr gegen Sternzeit, wo x positiv vorausgesetzt wird, wenn die Uhr zu wenig gegen Sternzeit gibt.

Für einen zweyten Stern hat man, wenn man für ihn die Gröfsen α t δ m mit einem Striche bezeichnet, ebenfalls

$$x = \alpha' - (t' + m'. \omega) \ldots \text{II.}$$

Aus den beyden Gleichungen I, II findet man die Gröfse ω

$$\omega = \frac{(\alpha' - t') - (\alpha - t)}{m' - m} \ldots \text{III.}$$

und wenn dadurch die Gröfse ω gegeben ist, so findet man aus jeder der Gleichungen I, II die gesuchte Correction der Uhr. Man sieht, dafs man zur scharfen Bestimmung von ω solche Sterne wählen müsse, deren Rectascensionsunterschiede genau bekannt, und deren Declinationen sehr von einander verschieden sind. Um auf das letzte Rücksicht zu nehmen, wird man also nicht, wie es gewöhnlich heifst, zwey Sterne wählen, deren einer so nahe und der andere so weit als möglich vom Zenith durch den Meridian geht, sondern solche, deren einer sehr nahe bey dem Pole und der andere sehr nahe bey dem Aequator ist. Der Nenner (m′ — m) ist nämlich, wenn beyde Sterne auf der Südseite des Pols culminiren,

$$\mathrm{Cos}\,\varphi\ (\mathrm{Tg}\,\delta - \mathrm{Tg}\,\delta')$$

und wenn einer derselben auf der Nordseite des Pols culminirt,

$$\mathrm{Cos}\,\varphi\ (\mathrm{Tg}\,\delta + \mathrm{Tg}\,\delta')$$

Eine Tafel, welche die Werthe von m für alle Declinationen gibt, wird diese Rechnungen sehr abkürzen.

Exempel. Den 28. Februar 1820 wurde an dem Mittagsrohre in Wien beobachtet:

	I. Faden	II. Faden	III. Faden
α Ursae minoris, ob. Cul.	$0^h\ 42'\ 38''5$ ..	$0^h\ 55'\ 41''5$ ..	$1^h\ 10'\ 1''0$
α Aurigae	5 1 28. 4	5 2 1. 1	5 2 36. 2
β Orionis	5 4 5. 0	5 4 28. 0	5 4 53. 0
α Can maj	6 35 23. 6	6 35 47. 3	6 36 13. 1
α Can min	7 28 5. 0	7 28 28. 0	7 28 52. 5

arithmetisches Mittel:

$1^h\ 56'\ 7''00$
5 2 1. 90
5 4 28. 66
6 35 48. 00
7 28 28. 50.

Aus vielen andern Beobachtungen des Polarsterns fand man das Intervall zwischen den zwey ersten Fäden im Aequator 22″. 557, und zwischen den zwey letzten 24″. 633, also ist die Correction, welche an dem arithmetischen Mittel der drey Fäden angebracht werden muſs, gleich

$$-\frac{0.692}{\mathrm{Cos}\,\delta}.$$

Man hat daher

	δ	Correction
α Urs min	- - 88° 21′ - - -	— 24″ 03
α Aurigae	45 49	— 1. 00
β Orionis	— 8 25	— 0. 70

α Can maj	— 16 28	— 0. 70
α Can min	— 5 41	— 0. 70

und in derselben Ordnung

scheinb. A R.	Uhrzeit d. Beob.
$0^h\ 56'\ 7''\ 13$ - - - - -	$0^h\ 55'\ 42''\ 97$
5 3 25. 10	5 2 0. 90
5 5 53. 95	5 4 27. 96
6 37 13. 70	6 35 47. 30
7 29 53. 64	7 28 27. 80

Zieht man die Zahlen der zwey letzten Reihen von einander ab, so erhält man

	α — t	m
α Urs min	$0^h\ 0'\ 24''\ 16$ - - - - - -	— 23. 4
α Aurigae	1 24. 20	+ 0. 1
β Orionis	1 25. 99	+ 0. 8
α Can maj	1 26. 40	+ 0. 9
α Can min	1 25. 84	+ 0. 7

Aus α Urs. min. und α Can. minoris folgt:

$$(\alpha' - t') - (\alpha - t) = 61.\ 68$$

$$m' - m = 23.\ 10$$

$$\text{also } \omega = \frac{61.\ 68}{23.\ 10} = +\ 2''.\ 670 \text{ östl. Azimut},$$

und mit diesem Azimute folgt die Correction der Uhr, oder x.

	α — t	m. ω	x
α Ursae min	= 0 24″ 16 - -	— 59. 80	= + 1′ 23″ 96
α Aurigae	1 24. 20	+ 0. 27	= + 1 23. 93
β Orionis	1 25. 99	+ 2. 14	= + 1 23. 85
α Can maj	1 26. 40	+ 2. 40	= + 1 24. 00
α Can min	1 25. 84	+ 1. 87	= + 1 23. 97

Wenn die Uhr nicht schon nahe nach Sternzeit geht, so muſs man das Intervall t—t′ in der Gleichung III. auf Sternzeit bringen.

I. Ein Nachtheil dieser Methode ist, daſs sie von der Differenz der Rectascensionen der beobachteten Sterne abhängt, die man also auf das genaueste kennen muſs. Man kann sich aber davon unabhängig machen, wenn man einen dem Pole nahen Stern in seinen beyden nächstfolgenden obern und untern Culminationen beobachtet. Ist t die Uhrzeit der obern, t' der untern Culmination, so ist die Gleichung III.

$$\omega = \frac{(\alpha' - \alpha) - (t' - t)}{m' - m}$$

$$\text{aber } \alpha' - \alpha = 12^h \text{, und}$$

$$m' = \frac{\text{Sin}\,(\varphi + \delta)}{\text{Cos}\,\delta}$$

$$m = \frac{\text{Sin}\,(\varphi - \delta)}{\text{Cos}\,\delta}$$

also

$$\omega = \frac{12 - (t' - t)}{2\,\text{Cos}\,\varphi\,\text{Tg}\,\delta}$$

oder wenn zuerst die untere Culmination beobachtet wurde,

$$\omega = \frac{(t - t') - 12}{2\,\text{Cos}\,\varphi\,\text{Tg}\,\delta}$$

und durch diese Gleichung wird man ω unabhängig von der Rectascension und zwar desto genauer finden, je näher der Stern an dem Pole steht. Zu diesem Zwecke eignet sich besonders der Polarstern, der zu allen Zeiten der Nacht und des Tages mit den neueren lichtstarken Mittagsröhren gesehen werden kann, und dessen beyde Culminationen daher so oft als möglich beobachtet werden sollen.

Kennt man so den Stand der Uhr gegen Sternzeit für einen gegebenen Augenblick, und aus ähnlichen Beobachtungen anderer Tage den täglichen Gang der Uhr gegen Sternzeit, so kann man für jede Uhrzeit t, in welcher ein Gestirn beobachtet worden ist, die für diese Zeit gehörende Correction x der Uhr durch eine einfache Proportion finden, und dann ist die scheinbare Rectascension dieses Gestirnes

$$\alpha = t + x + m \, . \, \omega$$

Auch kann man das so bestimmte Azimut ω durch die Schraube, welche das Fernrohr horizontal bewegt, verkleinern und nach und nach ganz wegschaffen. Zu diesem Zwecke wird es vortheilhaft seyn, den Werth einer Umdrehung dieser Schraube durch ein bekanntes terrestrisches Object zu bestimmen. Endlich wird man die Stelle, die den mittlern Faden des Rohrs trifft, wenn er im Meridian ist, durch ein fixes Meridianzeichen im Süden und Norden bestimmen, auf welche dieser Faden, wenn er zufällig sich davon entfernt hat, immer wieder leicht zurückgebracht werden kann. M. s. Connoiss. des tems 1792. p. 251, und Berl. Jahrb. 1798. p. 204.

§. 18.

Da es aber nicht so leicht ist, die beyden Fehler, von welchen wir in N. III. IV. des §. 16 gesprochen haben, völlig wegzubringen, und da sie durch Temperatur u. dgl. sich täglich ändern können, so fodert eine vollständige Correction des Mittagsrohres die Rücksicht auf alle drey Fehler.

Es sey also die Ebene, welche die Collimationslinie beschreibt, weder der Meridian noch ein Vertikalkreis, sondern irgend eine willkührlich gegen den Meridian oder den Aequator geneigte Ebene, deren Gleichung ist

$$Z = MX - NY + P \ldots (I)$$

Wir wollen voraussetzen, daſs von diesen rechtwinklichten Coordinaten XY in der Ebene des Aequators, und XZ in der des Meridians liegen.

Bezeichnet man den Ort des ersten Sterns, welchen man in dieser Ebene beobachtet hat, durch drey analoge Coordinaten $x\,y\,z$, so hat man folgende Bedingungsgleichung

$$z = Mx - Ny + P$$

und zwey folgende Sterne, für welche wir die Coordinaten mit einem und zwey Strichen bezeichnen wollen, geben eben so

$$z' = Mx' - Ny' + P$$

$$z'' = Mx'' - Ny'' + P$$

Um daraus die Gröſsen M, N, P, welche die Lage unserer Ebene bestimmen, auf eine zur Ausübung bequeme Art abzuleiten, sey $s\ \delta$ der Stundenwinkel und die Declination des ersten Sterns, so hat man, wenn man seine Entfernung von dem Beobachter der Einheit gleich annimmt,

$$x = \text{Cos}\,\delta\ \text{Cos}\,s$$

$$y = \text{Cos}\,\delta\ \text{Sin}\,s$$

$$z = \text{Sin}\,\delta$$

und ähnliche Ausdrücke hat man für die beyden andern Sterne. Substituirt man dann diese Werthe der Coordinaten in den vorhergehenden drey Gleichungen, und setzt der Kürze wegen

$$\Delta = \text{Sin}\,\delta' - \text{Sin}\,\delta''$$

$$\Delta' = \text{Sin}\,\delta - \text{Sin}\,\delta''$$

$$\Delta'' = \text{Sin}\,\delta - \text{Sin}\,\delta'$$

und $\nabla = \text{Sin}\,(s' - s'')\ \text{Sec}\,\delta$

$$V' = \text{Sin}\,(s - s'') \text{ Sec } \delta'$$

$$V'' = \text{Sin}\,(s - s') \text{ Sec } \delta''$$

so erhält man durch Elimination folgende Werthe von P, M, N

$$M = \frac{\triangle \text{Sin } s \text{ Cos } \delta - \triangle' \text{Sin } s' \text{ Cos } \delta' + \triangle'' \text{ Sin } s'' \text{ Cos } \delta''}{(V - V' + V'') \text{ Cos } \delta \text{ Cos } \delta' \text{ Cos } \delta''}$$

$$N = \frac{\triangle \text{Cos } s \text{ Cos } \delta - \triangle' \text{Cos } s' \text{ Cos } \delta' + \triangle'' \text{ Cos } s'' \text{ Cos } \delta''}{(V - V' + V'') \text{ Cos } \delta \text{ Cos } \delta' \text{ Cos } \delta''}$$

und

$$P = \frac{V \text{ Sin } \delta + V' \text{ Sin } \delta' + V'' \text{ Sin } \delta''}{V - V' + V''}$$

Ist so die Lage der Ebene durch die Gröſsen M N P bestimmt, so gibt die Gleichung I, wenn man der Kürze wegen

$$R = \frac{\text{Sin } \delta - P}{\text{Cos } \delta}$$

setzt

$$\text{Sin } s = \frac{-NR + M.\sqrt{M^2 + N^2 - R^2}}{M^2 + N^2}$$

und s ist der gesuchte Stundenwinkel der ersten Beobachtung.

I. Wollte man aus dieser Lage der Rohrebene gegen den Aequator die Lage derselben gegen den Horizont ableiten, so sey E die Neigung der Rohrebene gegen die Ebene x z des Meridians, und F der Winkel ihrer Knotenlinie in x z mit der Axe der x, so ist

$$\text{Tang } F = M \text{ und}$$

$$\text{Tg } E = \frac{\sqrt{1 + M^2}}{N} = \frac{1}{N \text{ Cos } F}$$

oder ist endlich G das Azimut der Rohrebene, und H die Neigung derselben gegen den Horizont, so hat man, wenn φ die Polhöhe des Beobachtungsortes bezeichnet,

$$\text{Tg } G = \text{Tg } E \text{ Cos } (\varphi - F)$$

$$\text{Cos } H = \text{Sin } E \text{ Sin } (\varphi - F)$$

II. Ist

$$P = 0$$

also auch

$$s'' = \delta'' = 0$$

so geben die vorhergehenden Ausdrücke

$$M = \frac{Tg\,\delta\,Sin\,s' - Tg\,\delta'\,Sin\,s}{Sin\,(s'-s)} = Tg\,F$$

$$N = \frac{Tg\,\delta\,Cos\,s' - Tg\,\delta'\,Cos\,s}{Sin\,(s'-s)}$$

also auch

$$Tg\,E = \frac{1}{N\,Cos\,F} = \frac{Sin\,(s'-s)}{(Tg\,\delta\,Cos\,s' - Tg\,\delta'\,Cos\,s)\,Cos\,F}$$

und endlich, da für, $P = o$ auch $R = Tg\,\delta$ ist,

$$Sin\,s = \frac{-N\,Tg\,\delta + M.\sqrt{M^2 + N^2 - Tg^2\,\delta}}{M^2 - N^2}$$

III. Alle diese Ausdrücke sind ohne alle Abkürzungen. Da man aber für die Ausübung mit Recht voraussetzen darf, daſs die Ebene des Rohrs schon nahe der Meridian ist, so lassen sich die oben gegebenen Gleichungen sehr abkürzen. Für diesen Fall ist nämlich N eine Gröſse, welche gegen die Einheit sehr groſs ist, und die letzte Gleichung

$$Sin\,s = \frac{-\frac{R}{N} + \frac{M}{N}.\sqrt{1 + \frac{M^2 - R^2}{N^2}}}{1 + \frac{M^2}{N^2}}$$

geht, wenn man die dritten und höheren Potenzen von $\frac{1}{N}$ wegläſst, in folgende einfachere über

$$s = \frac{M - R}{N}$$

Es sey nun (Fig. 14) K a die Ebene des Rohrs, und A K a = a ihr Winkel mit dem Meridian A K Z: ferner sey 90 — K a A = b das Complement ihres Winkels mit dem Horizonte, so wie $Tg\,c = \frac{P}{N}$ der Werth der Ordinate y für den Punkt der Rohrebene, für welche x und z gleich Null ist.

Setzt man noch K Z = b' die Entfernung der Knotenlinie der Rohrebene in der Ebene des Meridians vom Zenith Z, so ist

$$F = \varphi + b' \text{ und } E = a$$

also auch

$$M = Tg\,F = Tg\,(\varphi + b')$$

$$\frac{1}{N} = Tg\,E\,Cos\,F = Tg\,a\,Cos\,(\varphi + b')$$

und endlich

$$\frac{R}{N} = \frac{Tg\,\delta}{N} - \frac{c}{Cos\,\delta}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in dem letzten Werthe von s, und bemerkt man, daſs $s = \alpha - t - x$ ist, wo α die scheinbare Rectascension des Sterns, t die beobachtete Uhrzeit und x, wie §. 17 die Correction der Uhr ist, so hat man

$$\alpha - t - x = a\,Sin\,(\varphi + b') - a\,Cos\,(\varphi + b')\,Tg\,\delta + \frac{c}{Cos\,\delta}$$

oder, da b′ sehr klein ist,

$$\alpha - t - x = a\,\frac{Sin\,(\varphi - \delta)}{Cos\,\delta}$$

$$+ a\,b'\,\frac{Cos\,(\varphi - \delta)}{Cos\,\delta} + \frac{c}{Cos\,\delta}$$

Noch kann man bemerken, daſs man in dem Dreyecke Z K a, in welchem

$$Z\,a = 90$$

ist, oder in dem Dreyecke K A a, in welchem der Winkel

$$A = 90^\circ$$

ist, hat

$$a\,b' = b$$

daher die vorhergehende Gleichung auch so ausgedrückt werden kann,

$$\alpha - t - x = a\,\frac{Sin\,(\varphi - \delta)}{Cos\,\delta}$$

$$+ b\,\frac{Cos\,(\varphi - \delta)}{Cos\,\delta} + \frac{c}{Cos\,\delta} \;\ldots\; (A)$$

Setzt man endlich

$$A = a\,Sin\,\varphi + b\,Cos\,\varphi$$

$$B = b\,Sin\,\varphi - a\,Cos\,\varphi$$

$$C = c$$

so ist die letzte Gleichung

$$\alpha - t - x = A + B\,Tg\,\delta + C\,Sec\,\delta \;\ldots\; (B)$$

Denkt man sich eine auf die wahre Axe des Instruments senkrechte Ebene, so ist in der Gleichung (A) die Distanz dieser Ebene vom Meridian im südlichen Horizont = 15 a, und im Scheitel = 15 b, so wie 15 c der östlich positive Winkel der Richtung des Rohrs mit jener Ebene; d. h. 15 a ist das Azimut des Instruments, 15 b die Erhöhung der Axe von West, und 15 c der Collimationsfehler. In der Gleichung (B) aber bezeichnet 15 A und 15 B die östliche Abweichung jener Ebene vom Meridian im Aequator und im Pole. Für untere Culminationen ist δ das Complement der Declination zu 180, so wie südliche Declinationen negativ sind. M. s. Berl. Jahrb. 1820 p. 155

§. 19.

Diese interessante Aufgabe verdient es, noch auf eine andere Art aufgelöst zu werden. (Zeitschrift für Astronomie IV. Band p. 355).

Ist H Z R (Fig. 15) der Meridian, Z, P, O das Zenith, der Pol des Aequators, und der Ostpunkt des Horizonts H R; ferner p der Punkt, in welchem die Verlängerung der Rotationsaxe des Mittagsrohrs die Sphäre trifft, und S ein Stern im Augenblicke seines Durchgangs durch das Mittagsrohr, so ziehe man die gröfsten Kreise P O, P p, P S und p S und nenne

$$OPp = A,\ Pp = 90 - B \text{ und}$$

$$pS = 90 + C$$

wo also A, B, C die vorige Bedeutung haben. In dem sphärischen Dreyecke p P S hat man, wenn δ die Declination und s der Stundenwinkel des Sterns heifst,

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Sin}(s - A) = \dfrac{\mathrm{Sin}\,C}{\mathrm{Cos}\,B\ \mathrm{Cos}\,\delta} + \mathrm{Tg}\,B\ \mathrm{Cos}\,\delta \\ \text{und eben so für die beyden andern Sterne} \\ \mathrm{Sin}(s' - A) = \dfrac{\mathrm{Sin}\,C}{\mathrm{Cos}\,B\ \mathrm{Cos}\,\delta'} + \mathrm{Tg}\,B\ \mathrm{Cos}\,\delta' \\ \mathrm{Sin}(s'' - A) = \dfrac{\mathrm{Sin}\,C}{\mathrm{Cos}\,B\ \mathrm{Cos}\,\delta''} + \mathrm{Tg}\,B\ \mathrm{Cos}\,\delta'' \end{array}\right\} (1)$$

Haben nun die Gröfsen α t x die vorige Bezeichnung, so ist

$$s = \alpha - t - x$$

$$s' = \alpha' - t' - x$$

$$s'' = \alpha'' - t'' - x$$

also auch

$$t' - t = \alpha' - \alpha - (s' - s)$$

Wäre demnach B und C gegeben, so könnte man aus den zwey ersten dieser Gleichungen die Gröfsen

$$s - A \text{ und } s' - A$$

$$\text{also auch } s' - s$$

finden, welches auch der Werth von A wäre, und man hätte

$$\alpha' - \alpha = (t' - t) + (s' - s)$$

Es kommt daher nur darauf an, die Gröſsen B und C zu bestimmen.

Die Differenz der ersten und zweyten der obigen Gleichungen gibt

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sin}\,(s'-A)\ \text{Cos}\,\delta' - \text{Sin}\,(s-A)\ \text{Cos}\,\delta \\ = \text{Tg}\,B\,(\text{Sin}\,\delta' - \text{Sin}\,\delta) \\ \text{und eben so gibt die erste und dritte} \\ \text{Sin}\,(s''-A)\ \text{Cos}\,\delta'' - \text{Sin}\,(s-A)\ \text{Cos}\,\delta \\ = \text{Tg}\,B\,(\text{Sin}\,\delta'' - \text{Sin}\,\delta) \end{array}\right\}\ (2)$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Gröſse Tg B, und setzt der Kürze wegen

$$M = \text{Cos}\,\delta\ \text{Sin}\,\frac{\delta''-\delta'}{2}\ \text{Cos}\,\frac{\delta''+\delta'}{2}$$

$$M' = \text{Cos}\,\delta'\ \text{Sin}\,\frac{\delta''-\delta}{2}\ \text{Cos}\,\frac{\delta''+\delta}{2}$$

$$M'' = \text{Cos}\,\delta''\ \text{Sin}\,\frac{\delta'-\delta}{2}\ \text{Cos}\,\frac{\delta'+\delta}{2}$$

so findet man

$$\text{Tg}\,(s-A) = \frac{M'\ \text{Sin}\,(s'-s) - M''\ \text{Sin}\,(s''-s)}{M - M'\ \text{Cos}\,(s'-s) + M''\ \text{Cos}\,(s''-s)}$$

und da $s'-s$ und $s''-s$ gegeben sind, so ist durch die letzte Gleichung auch $s-A$, also auch $s'-A$, $s''-A$ gegeben, und man findet B durch die Gleichungen (2) und endlich Sin C durch die Gleichungen (1).

Nimmt man dann

$$s'-s,\ s-A,\ B,\ C\ \ldots$$

als sehr klein an, so findet man sofort

$$\left.\begin{array}{l} s-A = \dfrac{M'\,(s'-s) - M''\,(s''-s)}{M - M' + M''} \\[2ex] B = \dfrac{(s'-A)\ \text{Cos}\,\delta' - (s-A)\ \text{Cos}\,\delta}{\text{Sin}\,\delta' - \text{Sin}\,\delta} \\[2ex] C = (s-A)\ \text{Cos}\,\delta - B\ \text{Sin}\,\delta \end{array}\right\}\ (3)$$

und wenn diese Gröſsen bekannt sind, so gibt die erste der Gleichungen (1)

$$s = A + B\ \text{Tg}\,\delta + C\ \text{Sec}\,\delta\ \ldots\ (4)$$

welches die Gleichung (B) des vorhergehenden §. ist.

Setzt man aber

$$a\,O = a,\ \text{und}\ a\,p = b,$$

so gibt das sphärische Dreyeck P Z p folgende Gleichungen:

$$P\,p = 90 - B,$$
$$Z\,p = 90 - b,$$
$$P = 90 - A,$$
$$Z = 90 + a,$$
$$P\,Z = 90 - \varphi,$$

$$\text{Sin}\,B = \text{Sin}\,b\ \text{Sin}\,\varphi - \text{Cos}\,b\ \text{Cos}\,\varphi\ \text{Sin}\,a$$

$$\text{Tg}\,A = \frac{\text{Tg}\,b\ \text{Cos}\,\varphi}{\text{Cos}\,a} + \text{Sin}\,\varphi\ \text{Tg}\,a\ \text{und}$$

$$\text{Sin}\,b = \text{Sin}\,B\ \text{Sin}\,\varphi + \text{Cos}\,B\ \text{Cos}\,\varphi\ \text{Sin}\,A$$

$$\text{Tg}\,a = -\frac{\text{Tg}\,B\ \text{Cos}\,\varphi}{\text{Cos}\,A} + \text{Sin}\,\varphi\ \text{Tg}\,A$$

also abkürzend

$$B = b\ \text{Sin}\,\varphi - a\ \text{Cos}\,\varphi$$
$$A = b\ \text{Cos}\,\varphi + a\ \text{Sin}\,\varphi$$
$$b = B\ \text{Sin}\,\varphi + A\ \text{Cos}\,\varphi$$
$$a = -B\ \text{Cos}\,\varphi + A\ \text{Sin}\,\varphi$$

und die Gleichung (4) wird

$$s = a\,\frac{\text{Sin}\,(\varphi - \delta)}{\text{Cos}\,\delta} + b\,\frac{\text{Cos}\,(\varphi - \delta)}{\text{Cos}\,\delta} + \frac{c}{\text{Cos}\,\delta}\ \cdots\ (5)$$

welches die Gleichung (A) des vorhergehenden §. ist.

I. Aus den Gleichungen (3) sieht man, dass man durch bloſse Durchgänge der Sterne nur $s - A$, oder $s' - A$, $s'' - A$, aber nicht die Gröſsen s, s', s'' selbst, oder nicht die absolute Zeit der Beobachtungen, oder endlich, da

$$s = \alpha' - t - x$$

ist, nicht die Correction der Uhr bestimmen kann. Dasselbe folgt aus der Gleichung (B) oder (4), denn da in dieser Gleichung

$$\alpha - t = x + A + B\ \text{Tg}\,\delta + C\ \text{Sec}\,\delta$$

die unbekannten Gröſsen x, A, B, C sind, und da die Coefficienten der beyden ersten x und A gleich sind, so wird man, selbst durch mehr als drey Sterne, immer nur die Summe der Gröſsen $(x + A)$, aber nie diese Gröſsen selbst getrennt erhalten.

Eben so wenig wird man x, a und b durch bloſse Durchgänge der Sterne bestimmen können, selbst wenn $C = o$ ist. Ist aber a

gleich Null oder bekannt, so wird man x, b und c, und ist b = o, oder bekannt, so wird man x, a und c finden können. Endlich wird man durch zwey Durchgänge, wie wir §. 17 gesehen haben, x und a bestimmen können, wenn die andern Fehler b und c Null oder bekannt sind, so wie x und b oder x und c etc. wenn die übrigen beyden Fehler Null oder bekannt sind. Die drey Gröſsen

x, a und b

aber lassen sich nie zugleich durch bloſse Durchgänge finden, also muſs wenigstens eine derselben anderswoher bekannt seyn, z. B. x durch correspondirende Höhen, a durch ein schon früher genau errichtetes Meridianzeichen, b durch die Libelle, mit welcher man die Rotationsaxe horizontal stellen, oder doch ihre Neigung gegen den Horizont finden kann. Die Gröſse c endlich wird, wie aus dem vorhergehenden bekannt ist, am sichersten durch Umkehrung des Fernrohres gefunden.

Am bequemsten für die Ausübung wird es immer seyn, den Fehler b durch die Libelle, und den Fehler c durch das Umkehren des Fernrohres genau wegzuschaffen, und dann a und x aus zwey in ihrer Declination sehr entfernten Sternen, oder besser aus der Beobachtung der obern und untern Culmination eines Circumpolarsterns nach §. 17 zu bestimmen.

Will man aber auf alle vier Correctionen Rücksicht nehmen, so könnte man x durch correspondirende Höhen bestimmen. Da aber diese nur selten die hier geforderte Schärfe gewähren, und die genaue Bestimmung dieser vier Fehler durch das Mittagsrohr selbst erhalten werden kann, so kann man so verfahren.

Die Gröſse c kann durch Umkehrung des Fernrohrs, durch Schätzung am Meridianzeichen gefunden werden. Die Gröſse B aber wird man durch die Beobachtungen der obern und untern Culmination eines Circumpolarsterns finden. Die obere Culmination gibt

$$\alpha - t - x = A + B \operatorname{Tg} \delta + \frac{C}{\operatorname{Cos} \delta}$$

und die untere

$$12 + \alpha - t' - x = A - B \operatorname{Tg} \delta - \frac{C}{\operatorname{Cos} \delta}.$$

also beyder Differenz

$$B = \frac{(t' - t) - 12^h}{2 \operatorname{Tg} \delta} - \frac{C}{\operatorname{Sin} \delta}$$

Ist so B und C bekannt, so kann man a durch Schätzung am Meridianzeichen oder auch b mit der Beobachtung der Libelle finden, und dann hat man die Gröſse A durch die Gleichung

$$A = B \operatorname{Cotg} \varphi + \frac{a}{\operatorname{Sin} \varphi} \text{ oder durch}$$

$$A = -B \operatorname{Tg} \varphi + \frac{b}{\operatorname{Cos} \varphi}$$

Uebrigens hat die Gröfse A, wie wir gesehen haben, nur auf die absolute Zeit, nicht auf die Differenz der Zeiten oder auf die beobachteten Rectascensionen, Einflufs, und alles, was man zur Reduction der letztern gebraucht, geben die astronomischen Beobachtungen allein, ohne Einmischung der Libelle oder des Meridianzeichens, deren Fehler, in dieser Beziehung, ganz willkührlich bleiben.

II. Zieht man es vor, die Fehler b und c durch die Libelle und durch das Umkehren des Lothes wegzuschaffen, und a nach §. 17 durch die beyden Culminationen eines Circumpolarsterns zu bestimmen, so wird man dabey allerdings den Vortheil haben, von der Rectascension des Sterns unabhängig zu seyn, allein man wird dafür von dem zwölfstündigen Gang der Uhr abhängen, deren Gang man also in dieser Zwischenzeit genau kennen mufs. Diese Schwierigkeit kann man vermeiden, ohne den Vortheil der Methode zu verlieren, wenn man zwey Circumpolarsterne, deren Rectascensionen nahe um 180° verschieden sind, in beyden Culminationen beobachtet Ist bey der ersten die Uhrzeit der obern Culmination t, und die der untern t′, seine Declination δ und die Polhöhe φ, so ist nach §. 17. I. wenn die obere Culmination zuerst beobachtet wurde,

$$2 \omega \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Tg} \delta = 12 - (t' - t)$$

Bezeichnet man dieselben Gröfsen für den zweyten Stern mit einem untern Striche, ist also $t_{,}$ und $t'_{,}$ die Uhrzeit seiner obern und untern Culmination, so ist, wenn die untere Culmination zuerst beobachtet wurde

$$2 \omega \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Tg} \delta_{,} = (t_{,} - t'_{,}) - 12$$

Addirt man beyde Gleichungen, so hat man

$$\omega = ((t - t'_{,}) - (t' - t_{,})) \frac{\operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} \delta_{,}}{2 \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} (\delta + \delta_{,})}$$

und denselben Ausdruck erhält man auch, wenn man bey dem ersten Stern zuerst die untere, und bey dem zweyten zuerst die obere Culmination beobachtet hat. Da in diesem Ausdrucke die Gröfsen

$$(t - t'_{,}) \text{ und } (t' - t_{,})$$

sehr klein sind, so hat ein zufälliger Fehler in der Reduction des Ganges der Uhr auf Sternzeit nur wenig Einflufs auf das Resultat, so wie man von der Rectascension beyder Sterne ganz unabhängig ist. Setzt man $\delta_{,} = \delta$ oder beobachtet man denselben Stern zweymal in der obern und zweymal in der untern Culmination, so ist

$$\omega = ((t - t'_{,}) - (t' - t_{,})) \cdot \frac{1}{4 \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Tg} \delta}$$

Solche Paare von Circumpolarsternen, die in der Rectascension sehr nahe um zwey rechte Winkel verschieden sind, liefert Bode im Berl. Jahrb. für 1816. pag 242.

III. Ist endlich in der Gleichung (5) des §. 19:

$$\operatorname{Tg} \varphi = \frac{a}{b} \text{ und } c = C = 0, \text{ so ist}$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ und } B = 0, \text{ also}$$

$$\alpha - t - x = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a}{\operatorname{Sin} \varphi} = \frac{b}{\operatorname{Cos} \varphi}$$

oder in diesem Falle geben alle Sterne dieselbe Correction der Uhr, obschon das Rohr sich nicht im Meridian, sondern bloſs in einem Stundenkreise bewegt.

Eine treffliche Behandlung dieses Instruments vid. Mayl. Ephem. f. d. J. 1819. Zachs tab. mot. solis. Gothae 1792.

Uebrigens kann jeder beobachtete Antritt eines Sterns an den Faden des Instruments aus zwey Ursachen fehlerhaft seyn: wenn das Ohr die Schläge der Uhr nicht richtig theilt, und wenn das Auge den Antritt oder den Durchgang durch den Faden nicht scharf sieht. Der erste Fehler, den wir α nennen wollen, ist offenbar für alle Sterne constant, der zweyte β aber wird sich verkehrt, wie die scheinbare Geschwindigkeit des Sterns verhalten. Wird also der erste in Zeit- der zweyte in Raumsecunden ausgedrückt, so ist der vollständige Fehler jeder Beobachtung

$$\alpha + \tfrac{1}{15} \beta \operatorname{Sec} \delta,$$

und daraus folgt der Fehler in dem Orte des Sterns

$$15\, \alpha \operatorname{Cos} \delta + \beta,$$

und dieser ist desto kleiner, je näher der Stern am Pole ist.

§. 20.

KREISE.

Unter allen Instrumenten, die zu Beobachtungen der Höhe der Gestirne bestimmt sind, ist der ganze Kreis das vorzüglichste. Man hat mehrere Gattungen derselben; wir wollen hier die zwey vorzüglichsten näher anzeigen, wodurch man auch den Gebrauch der anderen, sobald man sie zu Gesichte bekömmt, leicht übersehen wird.

Multiplications-Kreise.

Er besteht gewöhnlich aus zwey concentrischen Kreisen, die sich in einer Verticalfläche um ihre horizontalen Axen drehen, welche letzteren an einer verticalen Säule befestigt sind. Der äufsere Kreis trägt die Eintheilung, und der innere, mit welchem das Fernrohr unveränderlich verbunden ist, trägt die Verniere, die neben der Eintheilung des äufseren Kreises hingleiten. Die verticale Säule des ganzen Instruments ist an ihrem obern und unteren Ende mit stählernen conischen Axen versehen, welche in metallenen Pfannen rotiren. Ueber der untern Pfanne ist noch ein kleiner horizontaler Kreis senkrecht auf die verticale Säule befestigt, mit welchem man die Fläche der beyden obern Kreise wenigstens beynahe auf irgend einen Punkt des Horizonts stellen kann.

Die wesentliche Einrichtung der beyden Vertikalkreise besteht darin: Man kann mittels eigener Schrauben den innern Kreis, der das Fernrohr trägt, an den äufsern Kreis festschrauben, und dann beyde Kreise und das Fernrohr zugleich in einer senkrechten Ebene auf und ab bewegen. Man kann aber auch mittels anderer Schrauben blofs den äufsern Kreis an seinen Kreishalter feststellen, und indem man die vorigen Schrauben lüftet, blofs den innern Kreis mit dem Fernrohre innerhalb dem äufsern Kreis in einer verticalen Richtung auf und ab bewegen. Diese Einrichtung setzt den Beobachter in den Stand, denselben Winkel öfter nach einander zu messen, und sich so von einem Fehler der Theilung u. s. w. gröfstentheils unabhängig zu machen. Man verfährt aber bey den Beobachtungen auf folgende Weise:

Man stelle den ersten Vernier des innern Kreises auf irgend einen Theilstrich des äufsern, z. B. beynahe auf 0°, wodurch die drey andern sehr nahe auf 90°, 180° und 270° kommen werden. Man befestige dann durch die ersten Schrauben den innern Kreis an den äufsern, und bringt durch die Micrometerschraube des innern Kreises den ersten Vernier genau auf 0 des äufsern Kreises. Dann lüfte man den äufsern Kreis, und drehe beyde Kreise zugleich in horizontaler Bewegung, bis ihre Ebene durch das Gestirn geht, dessen Höhe man beobachten will. In dieser Ebene drehe man dann beyde Kreise zugleich um ihre horizontale Axe in senkrechter Bewegung bis das Gestirn im Felde des Fernrohres erscheint. Dann schliefse man den äufsern Kreis, so wie den untern Azimutalkreis, und bringe das Gestirn durch die Micrometerschrauben des äufsern Kreises genau auf den horizontalen Faden des Fernrohrs nahe in der Mitte des Feldes, und bemerke für diesen Augenblick die Zeit der Uhr.

So ist die *erste* Beobachtung vollendet. Da diese aber, weil der innere Kreis mit seinem Fernrohre noch immer auf o des äufsern Kreises steht, für sich allein keinen Werth hat, so geht man sofort zur zweyten Beobachtung über.

Man löst nämlich den Azimutalkreis, und dreht die Säule sammt den beyden Vertikalkreisen nahe 180° im Azimut herum, bis die Ebene beyder Kreise wieder durch das Gestirn geht. Dann öffne man die zweyten Schrauben, welche den innern Kreis an den äufsern befestigten, und drehe den innern Kreis, während der äufsere fest steht, so lange in verticaler Bewegung herum, bis das Fernrohr wieder auf dem Stern steht. In dieser Lage schliefst man diese letzten Schrauben des innern Kreises wieder, so wie die des Azimutalkreises, und bringt durch die Micrometerschrauben des innern Kreises den Stern wieder genau auf den horizontalen Faden des Fernrohrs und beynahe in die Mitte des Feldes, und bemerke für diesen Augenblick wieder die Zeit der Uhr.

Jetzt ist auch die zweyte Beobachtung vollendet, und die Verniere, welche von ihrem anfänglichen Standpunkte sämmtlich um einen Bogen des äufsern Kreises fortgerückt sind, welcher der doppelten Zenithdistanz des Gestirns gleich ist, können abgelesen werden.

Will man diese Zenithdistanz durch ein zweytes, drittes etc. Paar von Beobachtungen genauer bestimmen, so wiederholt man das so eben angezeigte Verfahren bey jedem folgenden Paare, nur mit dem Unterschiede, dafs der Vernier des innern Kreises, nicht, wie anfangs, auf Null zurückgeführt wird, sondern bey jeder ungeraden Beobachtnng da, wo er beym Schlusse jeder geraden fixirt wurde, stehen bleibt. Auf diese Art erhält man, wenn alle Verniere abgelesen werden, die einfache Zenithdistanz nach der zweyten Beobachtung achtmal, nach der vierten sechszehnmal, nach der sechsten vier und zwanzigmal u. s. w. Dafs übrigens das Ablesen der Verniere nicht nach jeder geraden Beobachtung, sondern erst am Schlusse der ganzen Beobachtungsreihe nöthig ist, und dafs man auf die Höhenänderung des Gestirns in der Zwischenzeit der einzelnen Beobachtungen durch Rechnung Rücksicht nehmen müsse, ist für sich klar.

Diese Beobachtungsart setzt, wie man sieht, voraus, dafs die verticale Säule des ganzen Instruments in der That senkrecht sey, dafs die Ebene der beyden verticalen Kreise mit jener Säule parallel, und dafs die Collimationslinie des Fernrohrs mit der Ebene dieser Kreise parallel sey.

I. Die Verticalität der grofsen Säule erhält man durch eine Libelle, die an ihrer Rückseite senkrecht auf diese Säule befestigt ist, oder durch ein Bleyloth, welches in der ausgehöhlten Säule befestigt ist, und an seinem untern Punkte durch zwey

Kreuzmicroscope beobachtet wird. Bemerkt man während den Beobachtungen eine Verstellung der Libelle, so kann man so verfahren: Man lese nach jeder einzelnen Beobachtung die Zahlen der beyden Endpunkte der Luftblase ab. Heifst in jeder Lage des Instruments die Zahl bey dem Beobachter a und die auf der Seite des Gestirns b, für die folgenden Beobachtungen a' a''.. und b' b''.. so sey M der Werth eines Theilstrichs der Libelle und N die Anzahl der Beobachtungen, und man hat für die Correction der Beobachtungen

$$\frac{M}{2N}\left((a+a'+a''\ldots)-(b+b'+b''\ldots)\right)=\frac{M}{2N}\Sigma(a-b)$$

wo Σ das bekannte Summenzeichen ist, und diese Correction mufs an der halben Summe des von dem Vernier durchlaufenen Bogens mit ihrem Zeichen angebracht werden.

II. Den Parallelismus der Ebene der Kreise mit der verticalen Säule kann man durch eine Libelle herstellen, die wie bey dem Mittagsróhre an den beyden Enden der zu diesem Zwecke hervorstehenden horizontalen Axe dieser Kreise angehängt, und wodurch diese Axe horizontal, also die von dem Künstler darauf senkrecht gesetzte Ebene der Kreise vertical gemacht wird. Wäre I. die Neigung der Ebene der Kreise gegen die verticale Säule, so ist die durch das Instrument gefundene Zenithdistanz z' des Sterns von der wahren Zenithdistanz z verschieden, und man hat, wie man leicht sieht

$$\mathrm{Cos}\, z = \mathrm{Cos}\, I\, \mathrm{Cos}\, z' \text{ oder}$$

$$\mathrm{Sin}\,\frac{z-z'}{2}=\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}I\,\mathrm{Cotg}\,z'$$

Dieser Fehler kann also für kleine Zenithdistanzen sehr nachtheilige Folgen haben.

III. Den Parallelismus der optischen Axe des Fernrohrs mit der Ebene der Kreise prüft man, wie bey dem Mittagsrohr. Man stellt nämlich den verticalen Faden des Rohrs auf einen scharf begränzten und sehr entfernten irdischen Gegenstand, dann bewege man die Säule genau um 180 im Horizonte, und indem man das Fernrohr wieder auf den irdischen Gegenstand bringt, bemerke man, ob der Faden denselben wieder genau trifft; im entgegengesetzten Fall verbessere man die Hälfte des Fehlers durch die Schraube, welche das Fadennetz in horizontaler Richtung bewegt. Wäre I die Neigung der optischen Axe gegen die Ebene der Kreise, z' und z die beobachtete und die wahre Zenithdistanz, so hätte man wieder, wie zuvor.

$$\mathrm{Cos}\, z = \mathrm{Cos}\, I\, \mathrm{Cos}\, z'$$

Die andern Correctionen des Fadennetzes sind wie bey dem Mittagsrohre.

IV. Bey der Sonne, dem Monde und den meisten Planeten ist es vortheilhafter, immer abwechselnd den obern und untern Rand derselben, bey den einzelnen Beobachtungen, zur Berührung an den horizontalen Faden des Rohrs zu bringen, wodurch man den Halbmesser derselben eliminirt. Obschon man ferner nicht genau im Durchschnitte der beyden Fäden, oder in der Mitte des Sehfeldes, beobachten kann, so wird es doch vortheilhaft seyn, immer in der Nähe dieses Durchschnitts, und zwar in demselben physischen Punkt des Sehfeldes zu beobachten. Hat man also z. B. bey den ungeraden Beobachtungen den Stern rechts vom Durchschnitt der Fäden beobachtet, so muſs man bey den geraden den Stern eben so weit links vom Durchschnitte beobachten, wodurch man den Fehler eliminirt, der aus einer Neigung des horizontalen Fadens entstehen könnte. Eine umständlichere Beschreibung des Multiplicationskreises und seines Gebrauchs s. m. in Monatl. Corresp. 1807, und Berl. Jahrb. 1812, p. 194 und 234, und ebendas. 1813 p. 147. 1814. p. 204.

Das Vorhergehende wird hinreichen, den Beobachter auch mit andern, den beschriebenen mehr oder weniger ähnlichen Multiplicationskreisen, wenn er sie selbst vor sich hat, bald bekannt zu machen. Mit dieser Vorkenntniſs, und mit einiger natürlicher Dexterität ist ein aufmerksames Betrachten des Instrumentes selbst allen todten Beschreibungen vorzuziehen. Man kann über diesen Gegenstand nachsehen Delambres Astronomie Vol. I. Berl. Jahrb. 1812 und 13 u. f. Monatl. Corresp. Vol. 10 etc., und besonders The Edinburgh Encyclopedie by David Brewster Vol. VI. Part II. Art. Circle. Borda's Description et usage du cercle de reflexion. Paris 1802.

§. 21.

Einfache Kreise.

Diese Instrumente bestehen gewöhnlich aus einem einfachen Verticalkreise, mit welchem das Fernrohr unveränderlich verbunden ist, und dessen horizontale Axe auf zwey oder mehr verticalen Säulen ruht, welche Säulen zugleich die auf die eingetheilte Fläche des Kreises senkrecht gestellten Microscope mit ihrem Fadenmicrometer tragen. Kennt man den Punkt des Kreises, welcher dem Horizont oder dem Zenith entspricht, so stellt man den verticalen Faden des Fernrohrs auf ein Gestirn, und der Bogen des Kreises zwischen jenem Punkte und demjenigen, welcher jetzt unter dem Microscope steht, wird die Höhe oder die Zenithdistanz des beobachteten Gestirnes seyn.

Zur näheren Erklärung des Gebrauches dieser Instrumente wähle ich die bekannten Kreise, welche Troughton, Carry u. a.

unter der Benennung eines Altitude and Azimut Circle gegeben haben, deren Beschreibung man im I. Theile der Königsberger astronomischen Beobachtungen nachsehen kann.

I. Vor allem muſs man die Rotationsaxe des ganzen Instruments vertical stellen. Man kann dies durch das Bleyloth, indem man die Fläche des Kreises parallel zu zwey von den drey Fuſsschrauben stellt, auf welchen das ganze Instrument ruht. Während man durch das Microscop des Bleylothes sieht, dessen Richtung senkrecht auf die Fläche des Kreises ist, bringe man den Faden auf den hinter ihm bezeichneten Punkt, indem man nämlich die Hälfte des Fehlers an einem jener zwey Fuſsschrauben, und die andere Hälfte an dem Aufhängpunkte des Lothes selbst verbessert. Dann drehe man den Kreis um 180 im Azimut, zu welchem Zwecke man sich des gewöhnlich beygefügten Azimutalkreises bedienen kann, und während man wieder durch dasselbe Microscop sieht, verbessert man die beyden Hälften des Fehlers wie zuvor. Dieses Verfahren setzt man so lange fort, bis in beyden Lagen des Kreises das Loth denselben Punkt deckt. Dann drehe man den Kreis um 90 im Azimut, oder so, daſs seine Lage auf die vorhergehenden senkrecht werde, und während man wieder durch dasselbe Microscop sieht, verbessere man den g a n z e n Fehler bloſs durch die dritte, bisher nicht berührte Fuſsschraube. Zur Prüfung des Ganzen führe man endlich den Kreis in verschiedene andere Punkte des Horizonts, und sehe zu, ob der Faden, durch dasselbe Microscop gesehen, immer genau denselben Punkt trifft. Ist dies alles geschehen, so sehe man nun auch durch das zweyte Microscop des Bleylothes, welches auf dem ersten senkrecht steht, und verbessere hier den Fehler des Lothes bloſs durch das Loth selbst, indem man das Loth mehr oder weniger von der Fläche des Kreises entfernt, wobey man aber immer darauf Rücksicht zu nehmen hat, ob das Loth in Beziehung auf den durch das erste Microscop gesehenen Punkt nicht verrückt werde.

Denselben Zweck erreicht man noch einfacher durch die Libelle, welche an den Säulen angehängt wird, die den Kreis tragen, und mit ihm rotiren. Stellt man den Kreis so, daſs er zweyen seiner Fuſsschrauben parallel ist, verbessert man den Fehler der Blase halb durch eine dieser Fuſsschrauben, und halb durch die Correctionsschraube der Libelle selbst, kehrt man dann den Kreis um 180 im Azimut um, und verbessert die beyden Hälften der Blase wie zuvor, und setzt dies Verfahren fort, bis in beyden Lagen des Kreises die Libelle einspielt; stellt man dann den Kreis in eine auf seine vorige senkrechte Lage und verbessert jetzt den Fehler der Libelle bloſs durch die dritte Fuſsschraube, so ist die Rotationsaxe des ganzen Instruments vertical.

II. Um die horizontale Axe des Kreises horizontal zu stellen, bedient man sich einer Libelle, die entweder an die Zapfen dieser Axen angehängt, oder auf dieselben aufgestellt wird, und verfährt dabey, wie bey dem Mittagsrohre.

III. Um die Collimationslinie des Fernrohres senkrecht auf die horizontale Axe des Kreises zu stellen, verfährt man wie §. 20, N. III.

IV. Um es dahin zu bringen, dafs die beyden entgegengesetzten Microscope des Kreises, wenn ihre Fadenmicrometer auf Null gestellt sind, genau in dem Durchmesser des Kreises liegen, erhebt man durch eigene Schrauben die beyden Lagen der Zapfen der horizontalen Kreisaxe so lange, bis beyde Microscope die um 180° entgegengesetzten Punkte des Kreises zeigen, wobey man Rücksicht nimmt, dafs durch diese Schrauben die Horizontalität (II) der Axe nicht gestört wird.

V. Diese Microscope des Kreises enthalten zwey horizontale Fäden, von denen der eine fest, und der andere mittels einer Schraube beweglich ist. Der Kopf dieser Schraube trägt einen Zeiger, der mit ihr auf einer in 60 gleiche Theile eingetheilten Scheibe herumgeführt wird. Durch eine eigene Einrichtung dieser Microscope kann man es dahin bringen, dafs eine Revolution der Schraube auf dem Kreise genau eine Minute oder 60 Secunden betrage. Man kann nämlich diese Microscope verlängern oder verkürzen, um dadurch das Bild einer Minute des Kreises genau mit einer Revolution der Schraube in Uebereinstimmung zu bringen. Beträgt die Revolution mehr als eine Minute, so mufs man das Microscop verkürzen, indem man das Objectiv desselben näher zum Ocular bringt, und da durch dieses Verfahren die Deutlichkeit des Sehens gestört wird, so mufs man das ganze Microscop wieder dem Kreise gehörig nähern. — Statt dem beweglichen horizontalen Faden hat man gewöhnlich zwey andere Fäden, welche sich unter einem sehr kleinen Winkel schneiden, einen Winkel, welchen man durch die Theilstriche des Kreises mit der gröfsten Schärfe halbiren lassen kann.

VI. Um nun den Collimationsfehler des Kreises zu finden, richte man den horizontalen Faden des Fernrohres auf irgend ein wohlbestimmtes unbewegliches Object und lese die Zenithdistanz z, kehre den Kreis um 180 in Azimut, und lese wieder die Zenithdistanz z', so ist $Z = \frac{1}{2}(z' + z)$ die wahre Zenithdistanz des Gegenstandes, also $dZ = \frac{1}{2}(z' - z)$ der Collimationsfehler, der an alle anderen beobachteten Zenithdistanzen angebracht werden mufs.

Will man diesen Fehler wegbringen, so berichtige man, während der horizontale Faden des Fernrohrs genau das Object deckt, die Micrometerfäden so, dafs sie beyde genau die wahre Zenithdistanz $Z = \frac{1}{2}(z' + z)$ geben. Es ist aber besser, jenen

Fehler auf diese Art blofs zu vermindern, wenn er zufällig zu grofs ist, und den übrig bleibenden auf das genaueste durch astronomische Beobachtungen zu finden. Zu diesem Zwecke beobachtet man eine Reihe von Sternen, und an einem der folgenden Tage mit 180 im Azimut verkehrten Kreise wieder dieselbe Reihe. Gibt jeder dieser Sterne, wenn der eingetheilte Rand des Kreises gegen West stand, durch die Refration verbessert, die Zenithdistanz z, und wenn er gegen Ost stand, die Zenithdistanz z', so ist der Collimationsfehler

$$dz = \frac{z' - z}{2}$$

und die corrigirte Zenithdistanz

$$z + dz = z' - dz.$$

VII. Endlich lassen sich auch die Microscope des Azimutalkreises durch correspondirende oder gleich grofse Höhen eines Sterns zu beyden Seiten des Meridians verbessern. Sind nämlich die beyden Azimute nicht gleich, so corrigirt man die Hälfte des Fehlers an dem einen Microscope, und bringt das andere mit dem vorhergehenden in Uebereinstimmung.

Andere Kreise dieser Art wird man leicht behandeln, wenn man das Vorhergehende wohl verstanden hat, und nach den Umständen gehörig zu ändern weifs. Den Kreis, welchen Ramsden für Piazzi verfertigt hat, findet man umständlich beschrieben in des letzten Specula di Palermo. Hier will ich nur noch bemerken, dafs man mit einer einfachen Abänderung des in §. 20 gezeigten Verfahrens auch den Multiplicationskreis sehr vortheilhaft wie einen einfachen Kreis brauchen könne. Nachdem man nämlich den ersten Vernier des innern Kreises z. B. auf Null, und durch die Bewegung beyder Kreise das Fernrohr nahe vertical gestellt hat, befestigt man den äufsern Kreis an seinen Kreishalter, bringt die Fläche der Kreise durch eine horizontale Bewegung um die Säulen in die Ebene des Meridians, und beobachtet so bey immer geschlossenem Kreise, durch die Bewegung des gelüfteten innern, eine Reihe von Zenithdistanzen verschiedener Sterne. Den folgenden Tag verkehrt man die Kreise 180 im Azimut, und beobachtet, ohne den äufsern Kreis zu lösen, wieder die Zenithdistanzen derselben Sterne, oder eigentlich ihre Supplemente zu 360 Graden. Verbindet man je zwey Zenithdistanzen desselben Sterns in entgegengesetzten Lagen des Instrumentes, wie in VI., so erhält man den Collimationsfehler des Kreises, und dadurch die absoluten Zenithdistanzen. Nach einigen Tagen kann man den innern Kreis auf einem andern Orte des äufsern feststellen, so dafs z. B. der erste Vernier, der früher auf 0 stand, jetzt auf 10 oder 20° befestigt werde, und dann in dieser Lage des Kreises dasselbe Verfahren wiederholen, wodurch man sich von Theilungsfehlern des Instruments unabhängig macht. Da bey dieser Methode alles auf die Verticalität der grofsen Säule ankömmt, so muſs sie oft und sorgfältig, mittels ihrer Libelle, berichtiget werden, was selbst während den Beobachtungen ohne Mühe geschehen kann. Endlich kann man auch statt den Zenithdistanzen die Poldistanzen der Gestirne unmittelbar auf diese Art beobachten, wenn man jeden Tag durch die Beobachtung eines Circumpolarsterns in seinen beyden Culminationen den Punkt des Kreises bestimmt, welcher dem Pole des Aequators entspricht. Durch diese Behandlung scheint mir der Multiplicationskreis wesentliche Vortheile selbst über fixe einfache Kreise, über Meridian- oder Mauerkreise zu erhalten.

§. 22.

QUADRANTEN.

Der Quadrant ist der vierte Theil eines Kreises, der zur Beobachtung der Höhen der Gestirne dient. Ist er an einer Wand in der Ebene des Meridians befestigt, so heifst er Mauerquadrant. Gewöhnlich ist er aber um eine verticale Axe im Azimut, und selbst um seine horizontale Drehungsaxe in einer Verticalebene beweglich, in welchem Falle das Fernrohr unveränderlich mit ihm verbunden ist, und die Höhe durch ein Bleyloth angegeben wird, welches in dem Mittelpunkte des Quadranten befestigt ist. Da diese doppelte Bewegung des ganzen Instruments unbequem und für die Beobachtungen selbst nachtheilig ist, so zog man es vor, dem Quadranten nur die eine Bewegung im Azimut zu lassen, und dafür das Fernrohr um den Mittelpunkt des Quadranten parallel mit der Ebene des letzten zu bewegen, wodurch der mit dem Fernrohre verbundene Vernier unmittelbar die Höhe der Gestirne auf dem eingetheilten Rande des Quadranten anzeigt. Des letzten Einrichtung uud Gebrauch wollen wir hier kurz anzeigen.

Der Quadrant ist in seinem Schwerpunkte an eine verticale Säule, mit dieser Säule parallel, befestiget, die auf drey horizontalen Füſsen ruht, welche letztern mit Fuſsschrauben versehen sind. Das Fernrohr ist an eine metallene Platte befestigt, die sich um den Mittelpunkt des Quadranten dreht. Auf der Rückseite trägt der Quadrant eine horizontale Stange, an welcher die Libelle, wie bey dem Mittagsrohre, aufgehängt wird, um dadurch den obersten Halbmesser des Quadranten, der von dem Mittelpunkte nach dem Nullpunkte der Eintheilung geht, horizontal zu stellen. Das eine Ende dieser Stange sowohl, als das eine Ende der Libelle hat seine eigenen Correctionsschrauben, um beyde zu rectificiren. Um den Mittelpunkt des Quadranten ist eine metallene Platte befestigt, in welche eine kleinere durch eigene Correctionsschrauben bewegliche Platte eingelassen ist, welche letzte einen feinen Punkt in ihrer Mitte trägt. Ein ähnlicher Punkt ist an dem untersten Rand der eingetheilten Fläche des Quadranten gegeben, und durch jene Correctionsschraube kann man die Linie durch beyde Punkte parallel mit dem letzten Halbmesser des Quadranten machen, der durch den Mittelpunkt und durch den Grad 90° der Eintheilung geht. An dem obern Rande der gröfsern Platte ist ein horizontal bewegliches Stück, welches einen Einschnitt trägt, in welchem Einschnitt der Faden des Bleylothes hängen mufs, der den eben erwähnten untern Punkt der eingetheilten Fläche des Quadranten genau decken soll, wenn der erste Radius horizontal, oder der letzte vertical steht. Uebrigens hat das Instrument auch eine Vorrichtung, durch die es, während die Ebene des Quadranten immer vertical steht, im Azimut bewegt werden kann, und eine zweyte, durch die der Quadrant selbst auf seinem Gestelle umgekehrt werden kann, wodurch der erste Halbmesser derselben, der in der frühern Lage der höchste war, der niedrigste wird, während der letzte Halbmesser immer vertical bleibt.

Die Rectificationen dieses Instruments sind folgende:

I. Die verticale Säule des Fufsgestelles mufs senkrecht gestellt werden, wodurch der letzte Halbmesser ebenfalls senkrecht, und der erste horizontal wird.

Durch die Libelle. Man stelle die Fläche der Quadranten parallel zu zwey Fufsschrauben, und corrigire die eine Hälfte des Fehlers der Blase durch eine von diesen beyden Fufsschrauben, und die andere durch die Correctionsschraube der Libelle. Dann kehre man, ohne den Quadranten zu berühren, die Libelle mit ihren Haken um, und verbessere die Hälfte der Fehler wie zuvor. Hat man dieses Verfahren so oft wiederholt, bis in beyden Lagen der Libelle die Blase genau in der Mitte ist, so ist dann die Libelle parallel mit der hintern Stange, an welcher sie hängt, und diese Stange selbst ist horizontal.

Jetzt kehre den Quadranten um 180 im Azimut um, und verbessere die Fehler der Blase halb durch eine der beyden Fufsschrauben, halb durch die oben erwähnten Correctionsschrauben der Stange. Bringe den Quadranten wieder in seine vorige Lage, und verbessere die Hälfte der Fehler, wie zuvor und wiederhole das Verfahren so lange, bis in beyden Lagen des Quadranten die Blase in der Mitte steht. Endlich bringe man den Quadranten in eine auf die vorigen senkrechte Lage, und verbessere den ganzen Fehler der Blase blofs durch die dritte

Fussschraube, so ist die Säule des Instruments senkrecht, also auch der letzte Radius senkrecht, und der erste horizontal.

Durch das Bleyloth. Man stelle den Quadranten parallel zu zwey Fussschrauben, und bringe durch die Bewegung einer dieser Fussschrauben den Faden genau auf den untern der zwey oben erwähnten Punkte. Dann bewege man den Quadranten um 180 im Azimut, und verbessere den Fehler des Fadens halb durch eine jener Fussschrauben, und halb durch das oben erwähnte Stück, in dessen Einschnitt der Faden hängt. Dieses Verfahren wiederholt man so oft, bis in beyden Lagen des Quadranten der Faden den untern Punkt deckt. Dann bewegt man den Quadranten in eine auf die vorigen senkrechte Lage, und verbessert den ganzen Fehler des Fadens blofs durch die dritte Fussschraube, und die Säule des Instruments steht senkrecht. Dann kann man auch die kleine Platte, welche den obern Punkt trägt, mittels ihrer Correctionsschraube so bewegen, dafs der obere Punkt ebenfalls unter dem Faden liegt, und dann ist auch die Linie senkrecht, welche jene zwey Punkte verbindet, so dafs man später den Quadranten immer wieder in seine erste Lage zurückführen kann, wenn man die beyden Punkte unter den Faden zurückbringt.

II. Die Linie, welche durch den Mittelpunkt des Quadranten und durch den Nullpunkt des Verniers geht, mufs mit der Collimationslinie des Fernrohres parallel seyn, denn nur dann wird der Vernier auf dem eingetheilten Rande die wahre Höhe der beobachteten Gestirne anzeigen.

Man beobachte die Höhe eines sehr entfernten Gegenstandes, kehre den Quadranten um, dafs sein erster horizontaler Halbmesser, der früher der höchste war, jetzt der niedrigste wird, und beobachte in dieser Lage des Quadranten wieder die Höhe desselben Gegenstandes. Sind beyde Höhen gleich, so ist der Collimationsfehler Null, sind sie ungleich, so ist ihre halbe Differenz gleich dem Collimationsfehler, die man entweder verbessern, oder was sicherer ist, bey allen folgenden Beobachtungen gehörig berücksichtigen kann.

Denselben Fehler kann man bequemer und sicherer so erhalten:

Man beobachte die Höhe eines dem Zenith nahen Sterns, kehre den Quadranten um 180 im Azimut um, und beobachte in dieser Lage die Höhe desselben Sterns. Die halbe Differenz beyder Höhen ist der gesuchte Collimationsfehler, der daher zu allen Höhen addirt werden mufs, die in der Lage des Quadranten beobachtet werden, welche vorhin die kleinste der beyden Höhen gab. Sind die beyden Beobachtungen desselben dem Zenith nahen Sterns mehrere Tage von einander entfernt, so mufs auf die Aenderung der Präcession, Aberration und Nutation gehörig Rücksicht genommen werden.

Ist dieser Fehler einmal genau bestimmt, so darf man das Objectivglas des Fernrohrs nicht mehr herausnehmen, weil dadurch der Collimationsfehler leicht verändert werden kann.

III. Die Fäden im Brennpunkte beyder Gläser werden wie bey dem Mittagsrohre corrigirt.

Die Verticalität der Fläche des Quadranten wird durch das oben erwähnte Bleyloth erhalten, welches dieser Fläche parallel und so nahe als möglich hängen soll, ohne doch diese Fläche selbst zu berühren.

Der Parallelismus der Collimationslinie mit der Fläche des Quadranten endlich wird wie bey den Multiplicationskreisen §. 20. III. erhalten.

In den neuern Zeiten hat man die Quadranten gänzlich verlassen, da die ganzen Kreise entschiedene Vortheile vor jenen haben; denn die Kreise können genauer eingetheilt werden, jede excentrische Bewegung des Fernrohrs hat bey dem Kreise weniger Einflufs, diese und Fehler der Theilung verschwinden durch entgegengesetzte Verniere, der Kreis kann durch Umdrehung in allen seinen Theilen gleichförmig von der Sonne erwärmt werden, so wie er, wenn er aus einem Stück gegossen ist, seine Gestalt nicht leicht unregelmäfsig ändern kann u. s. w. Ueber die Correctionen dieser Instrumente s. m. Kästners astr. Abhandlungen und Berl. Jahrb. 1793. Ein Vorschlag zur Erweiterung des Gebrauchs des Mauerquadranten, Berliner Jahrb. 1812. p. 138.

§. 23.

Parallactische Instrumente.

Das in B (Fig. 16) rechtwinklichte Dreyeck, dessen Winkel CAB der Polhöhe des Ortes gleich ist, stehe in der Ebene des Meridians. Die um ihre Endpunkte A, C bewegliche Axe AC führe einen mit ihr in D verbundenen Kreis EM herum, um dessen Mittelpunkt D sich parallel mit der Fläche des Kreises ein Fernrohr EF bewegt, und diese Axe gehe frey durch den Mittelpunkt d eines andern auf ihr senkrechten Kreises em, der in m mit der Seite AB verbunden ist, und über welchem sie einen Zeiger de mit sich herumführt. Da sonach die Axe AC parallel mit der Weltaxe, und die Ebene des Kreises em parallel mit dem Aequator ist, so wird, wenn das Fernrohr auf einen Stern gestellt und die Axe AC um ihre Endpunkte gedreht wird, das Fernrohr den Parallelkreis dieses Sterns beschreiben, und man wird dem ganzen die Einrichtung geben können, daſs der Kreis E M die Declinationen, der Kreis e m aber die Stundenwinkel jedes Sterns für eine gegebene Zeit angibt, wodurch also auch jeder derselben leicht selbst bey Tage aufgefunden, und so lang man will im Felde des Fernrohrs erhalten werden kann. Man sieht, daſs die Ebene des Kreises E M, mit welcher der Zeiger e d parallel seyn soll, am Himmel den Stundenkreis des beobachteten Gestirns bezeichnet. Ein solches Instrument, deren es wieder verschiedene Arten gibt, heiſst eine parallactische Maschine, ein Aequatorial u. ſ.

Da man in der Ordnung solche Instrumente nicht braucht, um unmittelbare Rectascensionen und Declinationen der Gestirne damit zu beobachten, sondern da man mittels eines Micrometers in ihrem Fernrohre nur die Differenzen der Rectascension und Declination derjenigen Gestirne zu bestimmen pflegt, die in ihrer Declination weniger als der Durchmesser des Sehfeldes verschieden sind, so fordert die Rectification dieser Instrumente, keine groſse Schärfe. Man wird daher nur vorzüglich darauf Rücksicht nehmen, daſs die Linie A B nahe in der Mittagslinie stehe und daſs der Winkel B A C nahe der Polhöhe des Beobachtungsortes gleich sey, und in der Ebene des Meridians liege. Zu diesem Zwecke stellt man die Linie A B nahe in die vorläufig bekannte Richtung des Meridians, und die Ebene des Dreyecks A B C mittels des Lothes oder der Libelle vertical, und beobachtet in dieser Lage die obere und untere Culmination eines Circumpolarsterns. Ist die Zwischenzeit der Beobachtungen genau 12^h Sternzeit, so ist die Ebene A B C des Instruments in dem Meridian. Zeigt ferner der Vernier des Fernrohrs auf dem Kreise in beyden Beobachtungen dieselbe Poldistanz des Gestirns, so ist auch der Winkel B A C richtig, oder A C ist mit der Weltaxe parallel. Hat aber beydes nicht statt, so sey M n N (Fig. 17) der Parallelkreis des Gestirns, und A dessen Mittelpunkt, nach welchem also die Axe A C (Fig. 16) gerichtet seyn sollte, und M N sey der Durchschnitt des Meridians mit dem Parallelkreise. Ist die Axe A C, statt nach A, nach dem Punkt b gerichtet, so wird die mit M N parallele Sehne m n die Punkte m und n anzeigen, in welchem man den Stern in der Nähe seiner beyden Culminationen beobachtet hat.

Ist auch B b parallel mit A a, so ist

$$Aa = a$$

die Gröſse, um welche die Axe A C vom Meridian entfernt ist, und

$$AB = b$$

die Gröſse, um welche die Axe A C erhöht werden muſs.

Es seyen nun t t′ die Zeiten der beyden Beobachtungen, p p′ die an dem Instrumente abgelesenen Poldistanzen, und δ die Declination des Gestirns, so ist

$$a = AM \,\mathrm{Sin}\, Mm$$

Aber $mCn = t' - t$ und

$$MCN = 12^h$$

also beyder halbe Differenz

$$Mm = \frac{(t' - t) - 12}{2} \text{ und}$$

$$AM = \mathrm{Cos}\,\delta \text{ also}$$

$$a = -\,\mathrm{Cos}\,\delta\, \mathrm{Cos}\, \tfrac{15}{2}\,(t' - t) \;\ldots\; (I)$$

Ferner ist die beobachtete Poldistanz in der obern Culmination

$$MB = p = 90 - \delta + b$$

und in der untern

$$BN = p' = 90 - \delta - b \text{ also}$$

$$b = \frac{p - p'}{2} \;\ldots\; (II)$$

Ist so a und b gefunden, so wird man, während der Punkt C (Fig. 17.) der Axe unbeweglich bleibt, das andere Ende A der Axe um den Bogen a, also um die Linie a AC verändern, wodurch die Ebene ABC in den Meridian gebracht wird, und dann wird man den Winkel BAC um b, oder die Axe AC in ihrer Lage gegen AB um AC. Sin b verändern, um sie mit der Weltaxe parallel zu machen.

I. Diese zwey vorzüglichsten Correctionen kann man auch auf folgende Art finden.

Um erstens die Axen AC in die Ebene des Meridians zu bringen, richtet man das Rohr auf ein östliches weit vom Meridian entferntes Gestirn, z. B. sechs Stunden vor seiner Culmination. In derselben Zeit nach der Culmination bewegt man das Rohr wieder zu dem Gestirn auf die Westseite, ohne an der Axe oder an der Declination des Rohres etwas zu ändern. Ist der Stern in dieser Lage des Rohrs nicht genau wieder in dem Faden, so bewegt man die ganze Ebene ABC um die Linie BC um die Hälfte des Fehlers. Diese Correction ist, wie man sieht, gröſstentheils unabhängig von der Refraction und selbst, wenn man groſse Stundenwinkel genommen hat, von einer unrichtigen Neigung der Axe AC.

Um zweytens dieser Axe die wahre Neigung zu geben, richte man wieder das Rohr auf einen östlichen Stern etwa 6 Stunden vor seiner Culmination. Wenn dann der Stern in den Meridian kömmt, so bewege man das Rohr wieder zu ihm, ohne in der Declination desselben etwas zu ändern: erscheint hier der Stern über dem Faden, d. h. ist er in der That unter dem

Faden, so muſs man den Winkel B A C der Axe mit der Mittagslinie AB vergröſsern, und zwar um den ganzen Fehler, bis der Stern wieder, wie 6 Stunden vorher, in dem Faden steht.

Hat man so beyde Fehler berichtiget, so kann man durch Linien, auf dem Tische, auf welchem das Instrument steht, oder durch äuſsere terrestrische Objecte seine Lage fixiren, und nach jeder zufälligen Verrückung dieselbe leicht wieder verbessern.

Endlich kann man auch die Fehler der Alhidaden beyder Kreise em und EM berichtigen. Zu diesem Zwecke kann man das Rohr auf einen bekannten Stern zur Zeit seiner Culmination richten, und dann bey unverrückter Lage des Instruments den Zeiger de auf 0^h oder 12^h, und den Index des Verniers am Fernrohre EF auf die Declination des Gestirns stellen, oder auch diese Fehler unverbessert lassen, und bey allen folgenden Beobachtungen gehörig berücksichtigen. Eine dritte Methode, diese Instrumente zu rectificiren, s. m. in den Mayländer Ephemeriden f. d. J. 1809.

§. 24.

THEODOLITEN.

Diese Instrumente bestehen aus zwey concentrischen horizontalen Kreisen, deren innerer zwey senkrechte Säulen trägt, an deren obersten Enden ein kleines Passageninstrument mit seinen horizontalen Axen aufruht.

Man befestigt den Vernier des innern Kreises auf einem willkührlichen Theilstrich des äuſsern, und bewegt beyde Kreise sammt dem Fernrohre, bis das irdische oder himmlische Object im Fernrohr erscheint. Dann schlieſst man den äuſsern Kreis an sein Gestelle, und rotirt den gelösten innern, bis das auf die gehörige Höhe gestellte Fernrohr den zweyten zu messenden Gegenstand trifft. Man schlieſst endlich wieder den innern Kreis an den äuſsern, und bringt durch seine Micrometerschraube den Gegenstand genau auf den Faden des Fernrohrs. Der Winkel, welchen der Vernier des innern Kreises an dem äuſsern durchläuft, ist der Winkel, welchen beyde Gegenstände im Auge des Beobachters bilden.

Es ist für sich klar, daſs man nach geendigter zweyter Beobachtung wieder beyde Kreise drehen kann, bis das Rohr an dem unverrückten innern Kreis wieder den ersten Gegenstand trifft, und daſs man so die Beobachtungen so oft man will wiederholen kann. Um sich während der Bewegung des innern Kreises von der unverrückten Lage des ganzen Instruments zu überzeugen, dient ein unter den Kreisen angebrachtes Versicherungsrohr.

Die Rectificationen dieses Instruments, mit welchen man nicht bloſs Distanzen, sondern auch Azimute und Höhen beobachten kann, sind kürzlich folgende.

Man stellt das Fernrohr parallel mit zwey Fuſsschrauben, und corrigirt bey der jedesmaligen Umdrehung der Kreise um 180° die Hälfte des Fehlers der angehängten Libelle durch die eine Fuſsschraube, und die andere Hälfte durch die Correctionsschraube der Libelle, bis die Blase in beyden Lagen einspielt. Mit der so corrigirten Libelle wird das Fernrohr in eine auf die vorige senkrechte Lage gebracht, und der Fehler der Libelle bloſs durch die dritte Fuſsschraube verbessert. Durch dieses Verfahren wird die verticale Hauptdrehungsaxe des ganzen Instruments auf den Horizont genau senkrecht gestellt.

Um nun auch die horizontale Drehungsaxe des Fernrohres genau horizontal zu machen, wird die Hänglibelle des Fernrohrs wechselweise eingehängt, daſs ihre Haken an die entgegengesetzten Zapfen der Axe kommen, und die Hälfte des Fehlers theils durch die Correctionsschraube dieser Libelle, theils durch Erhöhung oder Erniedrigung der einen Pfanne, in welcher die Zapfen ruhen, verbessert, bis die Blase beym Umhängen der Libelle immer dieselbe Stelle einnimmt.

Um die optische Axe des Fernrohrs vertical auf die horizontale Drehungsaxe desselben zu setzen, richte man das Fernrohr auf ein entferntes Object, kehre dann die Axe des Rohrs in ihren Pfannen um, und wenn der verticale Faden in dieser Lage nicht wieder genau dasselbe Object trifft, so wird der halbe Fehler durch die horizontale Bewegung des Fadennetzes verbessert werden. Die andern Correctionen der Fäden sind wie bey dem Mittagsrohre.

Um endlich auch den Vernier des Verticalkreises zu untersuchen, bringe man den horizontalen Faden des Fernrohres auf ein entferntes Object, und lese am Verticalkreise ab. Dann kehre man das Fernrohr um, so daſs der Höhenkreis an der vorigen Seite bleibt, oder daſs das Objectiv des Rohrs nun gegen den Beobachter sieht, (zu welchem Zweck man das Fernrohr aus seinen Pfannen nehmen, und in verkehrter Lage wieder sanft in dieselbe zurücklegen muſs), dreht dann den Kreis um 180 im Azimut, visirt nach dem Object, und liest wieder an dem Verticalkreise ab. Der so auf dem Verticalkreise zurückgelegte Bogen ist die doppelte Zenithdistanz des Objectes, also ihre Hälfte die wahre Zenithdistanz desselben, die mit den vorhingelesenen Zahlen verglichen, den Collimationsfehler, oder den wahren ersten Punkt der Theilung gibt, von welchem aus man alle Zenithdistanzen zählen soll.

Weitere Nachrichten über ältere und neuere Instrumente und ihren Gebrauch findet man in Lalandes Astronomie, dritte Ausgabe. II. Band, in Delambres Astronomie I. Band, in Vinces practical astronomie u. f.

Tafeln

des

ersten Bandes.

Erklärung der Tafeln.

Tafel I.

Enthält die geographische Länge und Breite der vorzüglichsten Sternwarten, die ersten in Beziehung auf den Meridian der k. Pariser Sternwarte. Die von Paris östlich liegenden Orte haben das Zeichen +.

Tafel II.

Dient zur Verwandlung der Monatstage in Theile des Jahres. Die erste Tafel gibt den Theil des Jahres beynahe, die zweyte genau.

Ex. Der 24. Juni des Jahrs 1820 gibt nach der ersten Tafel 1820, 48, und nach der zweyten.

o. Juni ... 151
24. 24
(175) 0.00274 = 0.4795

Tafel III. und IV.

Dient zur Verwandlung der Bogen in Sternzeit und umgekehrt.

Ex. Um 275° 15′ 40″ in Sternzeit auszudrücken, ist

Tafel III.

270° ... 18h
5° 0 20
15′ 1 0
40″ 2.666
18h 21′ 2″.666

und umgekehrt

Tafel IV.

18h ... 270°
21′ ... 5 15″
2″ .... 30″
0.6 .... 9.0
0.066 .... 0.99
275° 15′ 40″.0

Tafel V.

Dient zur Verwandlung der Minuten und Secunden in Theile des Grades oder der Stunde.

So gibt

		24° 13′ 42″78
24°	...	24°
13′	...	0.216 666
42″	...	0.011 666
0.7	...	0.000 194
0.08	...	0.000 022
		24°.228548

Tafel VI.

Dient zur Verwandlung der Stunden, Minuten und Secunden in Theile des Tages. So ist 1820, Juni 24, 8ʰ 3′ 20″

nach Taf. II.	...	175 Tage
8ʰ	...	0.333333
3′	...	0.002083
20″	...	0.000231
1820 + Tage		175.335647

Tafel VII.

Enthält die gerade Aufsteigung A der mittlern Sonne für den mittlern Mittag in Paris, und die Nutation in Rectascension, beyde in Zeit. Ihr Gebrauch folgt aus dem VI. Cap.

Man suche A für 1811 den 13. September im mittlern Mittag Wiens, d. h. für 1811.70

1811	18ʰ 36′ 58″68
0. Sept.	15 58 2.95
13. Sept.	0 51 15.22
Reduct.	— 9.22
Nutat. (0.70) (— 0.35)	— 0.24
A =	11ʰ 26′ 7″39

für denselben Tag sey die Sternzeit

3ʰ 2′ 35″

gegeben.

Man suche die mittlere Zeit

15^h ...	$2'\ 27''49$	Sternzeit	$3^h\ 2'\ 35''$
$36'$ ...	5.89	$A = -$	$11\ 26\ \ 7.39$
$27''6$ ...	0.08		$15\ 36\ 27.61$
	$2\ 33.41$		$-\ 2\ 33.41$
		Mittl. Zeit ..	$15\ 33\ 54.20$

Ist aber diese mittlere Zeit gegeben, und sucht man die Sternzeit, so ist

15^h ...	$2'\ 27.''43$	Mittl. Zeit ..	$15^h\ 33'\ 54''.20$
$33'$ ...	5.41		$+\ 2\ 33.41$
$54''2$ ...	0.15		$15\ 36\ 27.61$
	$2\ 32.99$	$A = +$	$11\ 26\ \ 7.39$
$2'$ ...	0.33	Sternzeit $=$	$3^h\ \ 2'\ 35''.00$
32.99 ...	0.09		
	$2\ 33.41$		

Der letzte Theil dieser Tafel dient auch, ein in Sternzeit gegebenes Intervall in mittlerer Zeit, oder umgekehrt, auszudrücken. So gibt

Sternzeit	$8^h\ 40'\ 30''1$
	$-\ 1\ 25.27$
Mit. Zeit	$8^h\ 39'\ \ 4''83$
Mit. Zeit ...	$8^h\ 39\ \ 4''83$
	$+\ 1\ 25.04$
	$+\ 0.23$
Sternzeit $=$	$8^h\ 40'\ 30''.10$

Tafel VIII.

Enthält die Aberration. Cap. III.

Die Constante der Aberration wurde nach Delambers Untersuchungen der Finsternisse des ersten Jupiterstrabanten gleich

$20''.255$

vorausgesetzt. Lindenau fand

$20''.448$

aus den Beobachtungen des Polarsterns, und es ist jetzt noch schwer, zu entscheiden, welche von beyden Angaben der Wahrheit am nächsten liegt.

Die Tafel gibt

$$d\,\alpha \text{ und } d\,\delta$$

nach den in §. 3 II. gegebenen Ausdrücken, welche sich auf die Gleichungen III und IV des §. 3 gründen. Auf die Excentricität der Erdbahn (§. 5) und auf die Rotation der Erde um ihre Axe (§. 6) wird man nur selten Rücksicht zu nehmen brauchen. Doch lässt sich die Theorie der Aberration in dieser dreyfachen Rücksicht sehr einfach nach folgender, von Bessel gegebenen Methode entwickeln, die sich auf die im Anfange des §. 2 betrachtete Lage gründet, welche das Rohr haben muss, um die Lichtstrahlen ungehindert durchgehen zu lassen.

Bezeichnet man durch die rechtwinklichten Coordinaten

$$x,\ y,\ z$$

den Ort des Mittelpunctes des Fadennetzes gegen den der Sonne, wo x in der Linie der Nachtgleichen, und x y in der Ebene des Äquators liegen, und durch die analogen Coordinaten

$$x'\ y'\ z'$$

den Ort des Mittelpunctes des Objectivglases des Fernrohres, so ist das Fernrohr, unter der Voraussetzung der ruhenden Erde, nach einem Punct des Himmels gerichtet, dessen Rectascension α und Declination δ aus den Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} x' - x &= \lambda \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \delta \\ y' - y &= \lambda . \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \delta \\ z' - z &= \lambda \operatorname{Sin} \delta \end{aligned}$$

wo λ die Länge des Fernrohrs bezeichnet. Ist k die Zeit, die das Licht braucht, die halbe grosse Axe der Erdbahn zu durchlaufen, also λk die Zeit, während welcher das Licht von dem Objectivglase zu dem Fadennetz gelangt, so verändern sich in dem letzten Zeittheilchen die Coordinaten x y z um

$$\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right) \lambda\, k$$

$$\left(\frac{d\,y}{d\,t}\right) \lambda\, k$$

$$\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right) \lambda\, k$$

Soll daher der durch α und δ bezeichnete Punct des Himmels am Fadennetze erscheinen, so müssen x′ y′ z′ in

$$x' + \left(\frac{d\,x}{d\,t}\right) \lambda\, k$$

$$y' + \left(\frac{dy}{dt}\right) \lambda k$$

$$z' + \left(\frac{dz}{dt}\right) \lambda k$$

verändert werden, und man hat die Richtung, welcher das Fernrohr nun entspricht, durch α' δ' aus den drey folgenden Gleichungen

$$\lambda \operatorname{Cos} \alpha' \operatorname{Cos} \delta' = x' - x + \left(\frac{dx}{dt}\right) \lambda k$$

$$= \lambda \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \delta + \left(\frac{dx}{dt}\right) \lambda k$$

$$\lambda \operatorname{Sin} \alpha' \operatorname{Cos} \delta' = y' - y + \left(\frac{dy}{dt}\right) \lambda k$$

$$= \lambda \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \delta + \left(\frac{dy}{dt}\right) \lambda k$$

$$\lambda \operatorname{Sin} \delta' = z' - z + \left(\frac{dz}{dt}\right) \lambda k$$

$$= \lambda \operatorname{Sin} \delta + \left(\frac{dz}{dt}\right) \lambda k$$

woraus man leicht findet, wenn man die Glieder der zweyten und der höhern Ordnungen vernachlässiget,

$$\left.\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -\frac{k}{\operatorname{Cos} \delta}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right) \operatorname{Sin} \alpha - \left(\frac{dy}{dt}\right) \operatorname{Cos} \alpha\right\} \\ \delta' - \delta &= -k \left\{\left(\frac{dx}{dt}\right) \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Cos} \alpha \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{dy}{dt}\right) \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Sin} \alpha - \left(\frac{dz}{dt}\right) \operatorname{Cos} \delta\right\} \end{aligned}\right\} \mathrm{I}$$

Bezeichnet aber L die wahre Länge der Sonne, r ihre Entfernung von der Erde, ρ die Entfernung des Beobachters von dem Mittelpuncte der Erde, φ die Polhöhe und ϑ die Sternzeit der Beobachtung, und e die Schiefe der Ekliptik, so findet man leicht,

$$\begin{aligned} x &= -r \operatorname{Cos} L &&+ \rho \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} \vartheta \\ y &= -r \operatorname{Sin} L \operatorname{Cos} e &&+ \rho \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \vartheta \\ z &= -r \operatorname{Sin} L \operatorname{Sin} e &&+ \rho \operatorname{Sin} \varphi \end{aligned}$$

Differentiirt man diese Ausdrücke, so findet man (nach Cap. I. des II. Buches) wenn ε die Excentricität der Erdbahn, π die Länge des Periheliums, und m die **mittlere** Länge der Sonne bezeichnet

$$k\left(\frac{dx}{dt}\right) = a\,(\text{Sin}\,L + \varepsilon\,\text{Sin}\,\pi) - b\,\text{Cos}\,\varphi\,\text{Sin}\,\vartheta$$

$$k\left(\frac{dy}{dt}\right) = -a\,\text{Cos}\,e\,(\text{Cos}\,L + \varepsilon\,\text{Cos}\,\pi) + b\,\text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}\,\vartheta$$

$$k\left(\frac{dz}{dt}\right) = -a\,\text{Sin}\,e\,(\text{Cos}\,L + \varepsilon\,\text{Cos}\,\pi)$$

wo

$$a = \frac{k\,dm}{dt\,.\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

und

$$b = k\,\rho\,.\,\frac{d\vartheta}{dt}$$

ist.

Substituirt man diese Werthe in den Gleichungen I, so erhält man aus den von L abhängigen Gliedern die Gleichungen III. und IV. des §. 3; aus den von π abhängigen Gliedern die Gleichungen für

$$d\,\alpha' \text{ und } d\,\delta'$$

des §. 5, und endlich aus den von

$$\varphi \text{ und } \vartheta$$

abhängigen Gliedern die Gleichungen für

$$d\,\alpha \text{ und } d\,\delta,$$

der täglichen Aberration, welche wir in §. 6 gegeben haben, wo

$$a = 20''.25$$

und

$$b = k\,\rho\,\frac{d\vartheta}{dt} = k\,\rho\,.\,(T+1)\,\frac{dm}{dt}$$

ist, und

$$T = 365.25638$$

Tage, die siderische Umlaufszeit der Erde bezeichnet, also

$$b = a\,\rho\,(T+1)\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

und da

$$\varepsilon = 0.01679$$

und

$$\rho = \text{Sin}\,8''.7$$

ist,

$$b = 0''.31,$$

also auch

$$\alpha' - \alpha = +0''.31\,\frac{\text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}\,(\vartheta-\alpha)}{\text{Cos}\,\delta}$$

$$\delta' - \delta = +0''.31\,\text{Cos}\,\varphi\,\text{Sin}\,(\vartheta-\alpha)\,\text{Sin}\,\delta \text{ wie §. 6.}$$

Tafel IX.

Enthält die Nutation in Rectascension und Declination, die von der Wirkung des Mondes abhängt. Die angehängte kleine Tafel gibt die Solarnutation. Nach Lindenau's neuesten, und sehr verlässlichen Untersuchungen sind die Constanten der Nutation II. Cap. §. 6 u. f.

$$g = 6''.682 \quad , \quad h = 8''977$$

also

$$g \, \mathrm{Cotg}\, e = 15''.396 \quad , \quad \frac{g}{\mathrm{Sin}\, e} = 16''.783$$

und daraus die vollständigen Nutationen der Länge und Schiefe der Ekliptik (§. 8)

$$\begin{aligned} d\lambda = & - 16''.783 \,\mathrm{Sin}\, ☊ ☾ \\ & - 1.246 \,\mathrm{Sin}\, 2 ⊙ \\ & - 0.201 \,\mathrm{Sin}\, 2 ☾ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\,e = & + 8''977 \,\mathrm{Cos}\, ☊ ☾ \\ & + 0.580 \,\mathrm{Cos}\, 2 ⊙ \\ & + 0.087 \,\mathrm{Cos}\, 2 ☾ \\ & - 0.088 \,\mathrm{Cos}\, 2 ☊ ☾ \end{aligned}$$

Nimmt man in den in §. 7 gegebenen Entwicklungen auf alle diese Glieder von $d\lambda$ und $d\,e$ Rücksicht, so findet man

$$\begin{aligned} d\alpha = & - 15''.40 \,\mathrm{Sin}\, ☊ ☾ \\ & - (8.98 \,\mathrm{Cos}\, ☊ ☾ \,\mathrm{Cos}\,\alpha + 6''68 \,\mathrm{Sin}\, ☊ ☾ \,\mathrm{Sin}\,\alpha)\,\mathrm{tg}\,\delta \\ & + 0''09 \,\mathrm{Cos}\, 2 ☊ \,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta - 1.14 \,\mathrm{Sin}\, 2 ⊙ \\ & - (0.58 \,\mathrm{Cos}\, 2 ⊙ \,\mathrm{Cos}\,\alpha + 0''.50 \,\mathrm{Sin}\, 2 ⊙ \,\mathrm{Sin}\,\alpha)\,\mathrm{tg}\,\delta \\ & - 0''18 \,\mathrm{Sin}\, 2 ☾ \\ & - (0.09 \,\mathrm{Cos}\, 2 ☾ \,\mathrm{Cos}\,\alpha + 0.08 \,\mathrm{Sin}\, 2 ☾ \,\mathrm{Sin}\,\alpha)\,\mathrm{tg}\,\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\delta = & - 6\,68 \,\mathrm{Sin}\, ☊ ☾ \,\mathrm{Cos}\,\alpha + 8''.98 \,\mathrm{Cos}\, ☊ ☾ \,\mathrm{Sin}\,\alpha \\ & - 0''.09 \,\mathrm{Cos}\, 2 ☊ ☾ \,\mathrm{Sin}\,\alpha \\ & - 0.50 \,\mathrm{Sin}\, 2 ⊙ \,\mathrm{Cos}\,\alpha + 0.58 \,\mathrm{Cos}\, 2 ⊙ \,\mathrm{Sin}\,\alpha \\ & - 0.08 \,\mathrm{Sin}\, 2 ☾ \,\mathrm{Cos}\,\alpha + 0.09 \,\mathrm{Cos}\, 2 ☾ \,\mathrm{Sin}\,\alpha \end{aligned}$$

Auf die Glieder der zweyten Ordnung bey diesen Entwicklungen der Nutation sowohl, als der Aberration, Rücksicht zu nehmen, ist bey dem gegenwärtigen Zustande der practischen Astronomie in den meisten Fällen überflüssig, da diese Glieder nur selten den Werth von $0''.01$ erreichen.

Die Tafel IX. enthält die ersten drey Glieder von $d\alpha$, und die ersten zwey von $d\delta$, oder die Lunarnutation. Die angehängte Tafel gibt die Solarnutation, oder die Glieder von

$$d\alpha \text{ und } d\delta,$$

welche von 2 ⊙ abhängen, wobey nur in $d\alpha$ das Glied

$$0''.04 \,\mathrm{Cos}\,(2 ⊙ + \alpha)\,\mathrm{tg}\,\delta,$$

und in d δ das Glied

$$0''.04 \,\mathrm{Cos}\,(2 \odot + \alpha)$$

vernachlässiget wurde. Die übrigen von

$$2 ☾ \text{ und } 2 ☊ ☾$$

abhängigen Glieder können in den meisten Fällen ohne Nachtheil übergangen werden.

Man suche den scheinbaren Ort von α Cygni für den 17. December 1807

Mittl. Rectascension $\alpha = 308° \, 43' \, 15''.7$
.... Declination $\delta = + \, 44 \; 35 \; 58.5$
Länge der Sonne $\odot = 8^s \, 25° \, 9'$
Länge des aufst. Mondsknotens ☊ ☾ $= 7^s \, 29° \, 18'$

Mit diesen Grössen hat man für die Aberration

$$A = + 24'$$
$$p = \odot + A - \alpha = 316° \, 50'$$
$$\odot + \delta = 10^s \; 9° \, 45'$$
$$\odot - \delta = 7 \; 10 \; 33$$

$$\begin{aligned} \log a &= 1.3063 \, n \\ \log \mathrm{Cos}\, p &= 9.8629 \\ \text{Comp. } \log \mathrm{Cos}\, \delta &= \underline{0.1475} \\ & \quad 1.3167 \end{aligned}$$

$d\,\alpha = - 20''.7 =$ Aberr. in A R im Bogen

$$\begin{aligned} & 1.3063 \, n \\ \log \mathrm{Sin}\, p &= 9.8353 \, n \\ \log \mathrm{Sin}\, \delta &= \underline{9.8464} \\ & 0.9880 \ldots \; z = + \;\; 9''.7 \\ & \odot + \delta \ldots \quad - \;\; 2.6 \\ & \odot - \delta \ldots \quad \underline{+ \;\; 3.1} \end{aligned}$$

$d\,\delta = + 10''2$ Aberr. in Decl.

und für die Nutation

$$B = - 7^s \, 53'$$
$$q = ☊ ☾ + B - \alpha = 282^s \, 42'$$

$$\begin{aligned} \log - b &= 0.8663 \, n \\ \log \mathrm{Cos}\, q &= 9.3421 \\ \log \mathrm{tg}\, \delta &= \underline{9.9939} \\ & \quad 0.2023 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= - \;\; 1.59 \\ c &= \underline{+ \; 13.23} \end{aligned}$$

$d\,\alpha = + 11.64 =$ Nut. in A R im Bogen

$$\log \mathrm{Sin}\, q = \frac{\begin{array}{r}0.8663\ n\\ 9.9892\ n\end{array}}{0.8555}$$

$$d\,\delta = +7''.17 = \text{Nut. in Decl.}$$

Man hat daher

$$\begin{array}{r} 308^\circ\ 43'\ 15''7 \\ -\ 20.7 \\ +\ 11.6 \\ \hline 308^\circ\ 43'\ 6''6 \end{array} = \text{scheinb. AR}$$

$$\begin{array}{r} +\ 44^\circ\ 35'\ 58''5 \\ +\ 10.2 \\ +\ 7.2 \\ \hline +\ 44^\circ\ 36'\ 15''9 \end{array} = \text{scheinb. Decl.}$$

wo südliche Declinationen als negativ betrachtet, also durch positive Aberration oder Nutation vermindert werden.

Tafel X. und XI.

Enthält die mittlere Refraction nach den Ausdrücken des Cap. IV. §. 5 (Mayländ. Ephemeriden) für 28 Pariser Zolle des Barometers, und + 10° Therm. Reaum.

Es sey die scheinb. Zenithdistanz = 60° 35′ 0″
Barometer 27′ 3ᴸ = b
Therm. Reaum. = + 20° = t

so ist

$$\begin{array}{rcl} \log R &=& 2.0132 \\ \log A &=& 9.9882 \\ \log B &=& 9.9800 \\ \hline \log R' &=& 1.9814 \\ \text{corr. Refr.} = R' &=& 95''.82 \end{array}$$

Für Zenithdistanzen über 80° muss noch auf die letzte Columne Rücksicht genommen werden. Ist z. B. die Zenithdistanz 86° 30′ und b, t wie zuvor, so ist

$$\begin{array}{rl} \log R = & 2.8887 \\ & 9.9882 \\ & 9.9800 \\ \hline \log R' = & 2.8569\ ,\ R' = 719''4 \end{array}$$

$$\text{letzte Columne} = (0.73)\,(10-t) = \underline{-7.3}$$

corr. Refr. 712.1

Tafel XII.

Enthält für jeden Werth von ϑ den von

$$\frac{2\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{\vartheta}{2}}{\mathrm{Sin}\,1''}$$

von

$$\vartheta = 0^h\,0'$$

bis

$$\vartheta = 0^h\,16'.$$

Der Gebrauch dieser Tafel ist Cap. VIII. u. f. erklärt worden.

Tafel XIII.

Dient zur Berechnung der Berghöhen durch das Barometer nach der Gleichung IV. Cap. X. §. 19. Sind nämlich t T die äussern und innern Thermometer, nach Reaumur, h die Höhe des Barometers, im willkührlichen Maasse, für die untere Station, und eben so t′ T′ h′ für die obere Station, so vermindere man log h und log h′ resp. um 0.0001 T und 0.0001 T′, und nenne x die Differenz der so verminderten Logarithmen. Zu dem Logarithmus von x addire man P aus Tab. (A) und wenn man es für nöthig hält, auch noch die Correction von P aus Taf. (B). Die Summe dieser drey Grössen sey log z. Diese Grösse erhält noch eine kleine Correction d . log z aus Taf. (C). von der z selbst das Argument ist. Dann ist

$$\log z + d\,.\log z = \log z'$$

der Logarithmus des Höhenunterschiedes z′ in Metern. Addirt man zu diesem Logarithmus 0.48833 oder 0.50017 oder 0.51604 oder endlich 0.49693, so erhält man in derselben Ordnung den Logarithmus des Höhenunterschiedes z′ in Pariser, oder Wiener, oder in englischen oder endlich in rheinländischen Fussen ausgedrückt.

$$\begin{aligned} \text{Ex.}\quad t &= 18^\circ.5 \\ t' &= 7^\circ.5 \\ T &= 17^\circ.5 \\ T' &= 7^\circ\,6 \\ h &= 784.23 \text{ Millimeter.} \\ h' &= 523.65 \end{aligned} \qquad \text{Polhöhe} = 30^\circ$$

$$\begin{aligned} \log h &= 2.89444 - 0.0001\ T = 2.89269 \\ \log h' &= 2.71904 - 0.0001\ T' = 2.71828 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad x = 0.17441 \end{aligned}$$

$$\log x = 9.24157$$
$$t + t' = 26,\ \text{Tab. (A)} \ldots P = 4.29181$$
$$\text{Tab. (B), Correct. von } P = \underline{0.00062}$$
$$\log z = 3.53400$$
$$\text{Tab. (C)} \ldots d . \log z = \underline{0.00022}$$
$$\log z' = 3.53422$$

$z' = 3421.5$ Meter. Höhenunterschied der beyden Stationen.

Tafel I.

	Länge			Breite		
Amsterdam	0^h	10′	11″	52°	22′	25″
Basel	0	21	1	47	33	34
Berlin	0	44	10	52	31	40
Bologna	0	36	1	44	29	36
Bremen	0	25	51	53	4	45
Cadix, Obs.	— 0	34	30	36	32	0
Cambridge	— 0	9	3	52	12	36
Constantinopel, St. Sophie	1	46	20	41	1	27
Copenhagen	0	41	2	55	41	4
Cracau	1	10	23	50	3	52
Cremsmünster	0	47	12	48	3	40
Danzig	1	5	15	54	21	5
Dresden	0	45	4	51	2	54
Dublin	— 0	34	36	53	21	11
Florenz	0	34	54	43	46	30
Genua	0	26	32	44	25	0
Gotha, Seeberg	0	33	35	50	56	17
Göttingen	0	30	12	51	32	5
Greenwich	— 0	9	21	51	28	40
Königsberg	1	12	37	54	42	50
Leipzig	0	40	8	51	20	16
Lilienthal	0	26	16	53	8	25
Lissabon, Obs.	— 0	45	47	38	42	20
London, St. Paul	— 0	9	43	51	30	49
Madrid, gr. Platz	— 0	24	9	40	25	18
Manheim, Obs.	0	24	32	49	29	18
Marseille, Obs.	0	12	8	43	17	49
Mayland, Obs.	0	27	25	45	28	5
Ofen, Obs.	1	6	51	47	29	12
Oxfort, Obs.	— 0	14	23	51	45	40
Padua, Obs.	0	38	10	45	23	40
Palermo, Obs.	0	44	6	38	6	45
Paris, k. Obs.	0	0	0	48	50	14
Petersburg	1	51	56	59	56	23
Prag	0	48	19	50	5	19
Rom, St. Peter	0	40	30	41	53	54
Stockholm	1	2	55	59	20	31
Strassburg	0	21	38	48	34	56
Wien, Univ.	0	56	10	48	12	35
Wilna	1	31	45	54	41	2

Tafel II.

Jan.	10 20 30	0. 03 0. 05 0. 08	May	10 20 30	0. 36 0. 38 0. 41	Sept.	7 17 27	0. 68 0. 71 0. 74
Febr. May	9 19 1	0. 11 0. 14 0. 16	Juny	9 19 29	0. 44 0. 47 0. 49	Oct.	7 17 27	0. 77 0. 79 0. 82
May	11 21 31	0. 19 0. 22 0. 25	July	9 19 29	0. 52 0. 55 0. 58	Nov.	6 16 26	0. 85 0. 88 0. 90
April	10 20 30	0. 27 0. 30 0. 33	August	8 18 28	0. 60 0. 63 0. 66	Dec.	6 16 26	0. 93 0. 96 0. 98

	Gemeinj.	Schaltj.
o Januar o Februar	0 31	— 1 30
o März o April	59 90	
o May o Juny	120 151	
o July o August	181 212	
o Septemb. o October	243 273	
o Novemb. o Decemb.	304 334	

Constanter Factor . 0. 00274

Dessen Logar. . . 7. 43772

Tafel III.

Bogen- und Sternzeit.

S.	o.	Gr,	h '	Gr.	h '	M	' "	M	' "
1s	30°	1°	0h 4'	31°	2h 4	1'	0' 4"	31'	2' 4"
2	60	2	0 8	32	2 8	2	0 8	32	2 8
3	90	3	0 12	33	2 12	3	0 12	33	2 12
4	120	4	0 16	34	2 16	4	0 16	34	2 16
5	150	5	0 20	35	2 20	5	0 20	35	2 20
6	180	6	0 24	36	2 24	6	0 24	30	2 24
7	210	7	0 28	37	2 28	7	0 28	37	2 28
8	240	8	0 32	38	2 32	8	0 32	38	2 32
9	270	9	0 36	39	2 36	9	0 36	39	2 36
10	300	10	0 40	40	2 40	10	0 40	40	2 40
11	330	11	0 44	41	2 44	11	0 44	41	2 44
12	360	12	0 48	42	2 48	12	0 48	42	2 48
S	H	13	0 52	43	2 52	13	0 52	43	2 52
		14	0 56	44	2 56	14	0 56	44	2 56
1s	2h	15	1 0	45	3 0	15	1 0	45	3 0
2	4	16	1 4	46	3 4	16	1 4	46	3 4
3	6	17	1 8	47	3 8	17	1 8	47	3 8
4	8	18	1 12	48	3 12	18	1 12	48	3 12
5	10	19	1 16	49	3 16	19	1 16	49	3 16
6	12	20	1 20	50	3 20	20	1 20	50	3 20
7	14	21	1 24	51	3 24	21	1 24	51	3 24
8	16	22	1 28	52	3 28	22	1 28	52	3 28
9	18	23	1 32	53	3 32	23	1 32	53	3 32
10	20	24	1 36	54	3 36	24	1 36	54	3 36
11	22	25	1 40	55	3 40	25	1 40	55	3 40
12	24	26	1 44	56	3 44	26	1 44	53	3 44
		27	1 48	57	3 48	27	1 48	57	3 48
		28	1 52	58	3 52	28	1 52	58	3 52
		29	1 56	59	3 56	29	1 56	59	3 56
		30°	2h 0'	60°	4h 0'	30'	2' 0"	60	4' 0"

Tafel III.

Bogen- und Sternzeit.

Sec.	″	Sec.	″	Sec.	″
1″	0″.066	31″	2″.066	0.″1	0.006
2	0.133	32	2.133	0.2	0.013
3	0.199	33	2.199	0.3	0.019
4	0.266	34	2.266	0.4	0.026
5	0.333	35	2.333	0.5	0.033
6	0.399	36	2.399	0.6	0.039
7	0.466	37	2.466	0.7	0.046
8	0.533	38	2.533	0.8	0.053
9	0.599	39	2.599	0.9	0.059
10	0.666	40	2.666	0.01	0.000
11	0.733	41	2.733	0.02	0.001
12	0.799	42	2.799	0.03	0.001
13	0.866	43	2.866	0.04	0.002
14	0.933	44	2.933	0.05	0.003
15	1.000	45	3.000	0.06	0.003
16	1.066	46	3.066	0.07	0.004
17	1.133	47	3.133	0.08	0.005
18	1.199	48	3.199	0.09	0.006
19	1.266	49	3.266		
20	1.333	50	3.333		
21	1.399	51	3.399		
22	1.466	52	3.466		
23	1.533	53	3.533		
24	1.599	54	3.599		
25	1.666	55	3.666		
26	1.733	56	3.733		
27	1.799	57	3.799		
28	1.866	58	3.866		
29	1.933	59	3.933		
30″	2″.000	60″	4″.000		

Tafel IV.

Sternzeit und Bogen.

Zeit Stund.	°	Zeit Min.	°	'	Zeit Min.	°	'
1h	15°	1'	0°	15'	31'	7°	45
2	30	2	0	30	32	8	0
3	45	3	0	45	33	8	15
4	60	4	1	0	34	8	30
5	75	5	1	15	35	8	45
6	90	6	1	30	36	9	0
7	105	7	1	45	37	9	15
8	120	8	2	0	38	9	30
9	135	9	2	15	39	9	45
10	150	10	2	30	40	10	0
11	165	11	2	45	41	10	15
12	180	12	3	0	42	10	30
13	195	13	3	15	43	10	45
14	210	14	3	30	44	11	0
15	225	15	3	45	45	11	15
16	240	16	4	0	46	11	30
17	255	17	4	15	47	11	45
18	270	18	4	30	48	12	0
19	285	19	4	45	49	12	15
20	300	20	5	0	50	12	30
21	315	21	5	15	51	12	45
22	330	22	5	30	62	13	0
23	345	23	5	45	53	13	15
24	360	24	6	0	54	13	30
		25	6	15	55	13	45
		26	6	30	56	14	0
		27	6	45	67	14	15
		28	7	0	58	14	30
		29	7	15	59	14	45
		30'	7	30	60	15°	0'

Tafel IV.

Sternzeit und Bogen.

Zeit Sec.	′	″	Zeit Sec.	′	″	Zeit Sec.	′ ″
1″	0′	15″	31″	7′	45″	0.″1	1.″5
2	0	30	32	8	0	0. 2	3. 0
3	0	45	33	8	15	0. 3	4. 5
4	1	0	34	8	30	0. 4	6. 0
5	1	15	35	8	45	0. 5	7. 5
6	1	30	36	9	0	0. 6	9. 0
						0. 7	10. 5
						0. 8	12. 0
						0. 9	13. 5
7	1	45	37	9	15		
8	2	0	38	9	30		
9	2	15	39	9	45		
10	2	30	40	10	0	0.″01	0.″15
11	2	45	41	10	15	0. 02	0.″30
12	3	0	42	10	30	0. 03	0.″45
						0. 04	0. 60
						0. 05	0. 75
13	3	15	43	10	45	0. 06	0. 90
14	3	30	44	11	0	0. 07	1. 05
15	3	45	45	11	15	0. 08	1. 20
16	4	0	46	11	30	0. 09	1. 35
17	4	15	47	11	45		
18	4	30	48	12	0		
19	4	45	49	12	15		
20	5	0	50	12	30		
21	5	15	51	12	45		
22	5	30	52	13	0		
23	5	45	53	13	15		
24	6	0	54	13	30		
25	6	15	55	13	45		
26	6	30	56	14	0		
27	6	45	57	14	15		
28	7	0	58	14	30		
29	7	15	59	14	45		
30″	7′	30″	60″	15′	0″		

Tafel V.

Min.	Grade oder Stunden.	Min.	Grade oder Stunden.
1	0. 016666	31	0. 516666
2	0. 033333	32	0. 533333
3	0. 050000	33	0. 550000
4	0. 066666	34	0. 566666
5	0. 083333	35	0. 583333
6	0. 100000	36	0. 600000
7	0. 116666	37	0. 616666
8	0. 133333	38	0. 633333
9	0. 150000	39	0. 650000
10	0. 166666	40	0. 666666
11	0. 183333	41	0. 683333
12	0. 200000	42	0. 700000
13	0. 216666	43	0. 716666
14	0. 233333	44	0. 733333
15	0. 250000	45	0. 750000
16	0. 266666	46	0. 766666
17	0. 283333	47	0. 783333
18	0. 300000	48	0. 800000
19	0. 316666	49	0. 816666
20	0. 333333	50	0. 833333
21	0. 350000	51	0. 850000
22	0. 366666	52	0. 866666
23	0. 383333	53	0. 883333
24	0. 400000	54	0. 900000
25	0. 416666	55	0. 916666
26	0. 433333	56	0. 933333
27	0. 450000	57	0. 950000
28	0. 466666	58	0. 966666
29	0. 483333	59	0. 983333
30	0. 500000	60	1. 000000

Tafel V.

Sec.	Grade oder Stunden.	Sec.	Grade oder Stunden.	Sec.	Grade oder Stunden.
1	0. 000277	31	0. 008611	0."1	0. 000027
2	0. 000555	32	0. 008888	0. 2	0. 000055
3	0. 000833	33	0. 009166	0. 3	0. 000083
4	0. 001111	34	0. 009444	0. 4	0. 000111
5	0. 001388	35	0. 009722	0. 5	0. 000138
6	0. 001666	36	0. 010000	0. 6	0. 000166
				0. 7	0. 000194
				0. 8	0. 000222
				0. 9	0. 000250
7	0. 001944	37	0. 010277		
8	0. 002222	38	0. 010555		
9	0. 002500	39	0. 010833		
10	0. 002777	40	0. 011111	0. 01	0. 000002
11	0. 003055	41	0. 011388	0. 02	0. 000005
12	0. 003333	42	0. 011666	0. 03	0. 000008
				0. 04	0. 000 11
				0. 05	0. 000013
13	0. 003611	43	0. 011944	0. 06	0. 000016
14	0. 003888	44	0. 012222	0. 07	0. 000019
15	0. 004166	45	0. 012500	0. 08	0. 000022
16	0. 004444	46	0. 012777	0. 09	0. 000025
17	0. 004722	47	0. 013055		
18	0. 005000	48	0. 013333		
19	0. 005277	49	0. 013611		
20	0. 005555	50	0. 013888		
21	0. 005833	51	0. 014166		
22	0. 006111	52	0. 014444		
23	0. 006388	53	0. 014722		
24	0. 006666	54	0. 015000		
25	0. 006944	55	0. 015277		
26	0. 007222	56	0. 015555		
27	0. 067500	57	0. 015833		
28	0. 007777	58	0. 016111		
29	0. 008055	59	0. 016388		
30	0. 008333	60	0. 016666		

Tafel VI.

Stund.	Tage	Min.	Tage	Min.	Tage
1	0.041666	1	0.000694	31	0.021528
2	0.083333	2	0.001389	32	0.022222
3	0.125000	3	0.002083	33	0.022917
4	0.166666	4	0.002778	34	0.023611
5	0.208333	5	0.003472	35	0.024305
6	0.250000	6	0.004167	36	0.024999
7	0.291667	7	0.004861	37	0.025694
8	0.333333	8	0.005555	38	0.026389
9	0.375000	9	0.006250	39	0.027083
10	0.416667	10	0.006944	40	0.027778
11	0.458333	11	0.007639	41	0.028472
12	0.500000	12	0.008333	42	0.029167
13	0.541667	13	0.009028	43	0.029861
14	0.583333	14	0.009722	44	0.030555
15	0.625000	15	0.010417	45	0.031250
16	0.666660	16	0.011111	46	0.031944
17	0.708333	17	0.011805	47	0.032639
18	0.750000	18	0.012500	48	0.033333
19	0.791667	19	0.013194	49	0.034028
20	0.833333	20	0.013889	50	0.034722
21	0.875000	21	0.014583	51	0.035417
22	0.916667	22	0.015278	52	0.036111
23	0.958333	23	0.015972	53	0.036805
24	1.000000	24	0.016667	54	0.037500
0.″1	0.0000 011	25	0.017361	55	0.038194
0.″2	023	26	0.018055	56	0.038889
0.″3	035	27	0.018750	57	0.039583
0.″4	046	28	0.019444	58	0.040278
0.″5	058	29	0.020139	59	0.040972
0.″6	069	30	0.020833	60	0.041667
0.″7	081				
0.″8	092				
0.″9	105				

Tafel VI.

Sec.	Tage	Sec.	Tage
1	0.000012	31	0.000359
2	023	32	370
3	035	33	382
4	046	34	393
5	058	35	405
6	069	36	417
7	081	37	428
8	093	38	440
9	104	39	451
10	116	40	463
11	127	41	474
12	139	42	486
13	150	43	498
14	162	44	509
15	174	45	521
16	185	46	532
17	197	47	544
18	208	48	555
19	220	49	567
20	231	50	579
21	243	51	590
22	255	52	602
23	266	53	613
24	278	54	625
25	289	55	637
26	301	56	648
27	312	57	660
28	324	58	671
29	336	59	683
30	0.000347	60	0.000694

Tafel VII.

	M. R. ⊙ Mittag Paris	Nut.		M. R. ⊙ Mittag Paris	Nut.
1800	18ʰ 39′ 35.″95	— 0.″59	1826	18ʰ 38′ 25.″31	1.03
1801	38 38.65	— 0.27	1827	37 28.01	0.85
1802	37 41.34	0.10	1828 B	40 27.25	0.57
1803	36 44.03	0.46	1829	39 30.01	0.23
1804 B	39 43.28	0.77	1830	38 32.64	— 0.13
1805	38 45.97	0.97	1831	37 35.33	— 0.48
1806	37 48.66	1.08	1832 B	40 34.58	— 0.70
1807	36 51.35	1.06	1833	39 37.27	— 0.99
1808 B	39 50.61	0.92	1834	38 39.97	— 1.08
1809	38 53.29	0.69	1835	37 42.66	— 1.06
1810	37 55.98	0.37	1836 B	40 41.91	— 0.91
1811	36 58.68	0.00	1837	39 44.60	— 0.66
1812 B	39 57.93	— 0.35	1838	38 47.30	— 0.34
1813	39 0.62	— 0.67	1839	37 49.99	0.01
1814	38 3.31	— 0.92	1840 B	40 49.23	0.38
1815	37 6.00	— 1.06	1841	39 51.93	0.70
1816 B	40 5.25	— 1.08	1842	38 54.62	0.94
1817	39 7.94	— 0.98	1843	37 57.32	1.08
1818	38 10.63	— 0.77	1844 B	40 56.56	1.09
1819	37 13.32	— 0.48	1845	39 59.26	0.98
1820 B	40 12.59	— 0.12	1846	39 1.95	0.75
1821	39 15.29	0.24	1847	38 4.65	0.45
1822	38 17.98	0.58	1848 B	41 3.89	0.09
1823	37 20.68	0.85	1849	40 6.59	— 0.27
1824 B	40 19.92	1.03	1850	39 9.28	— 0.62
1825	39 22.62	1.09			

Reduction	Berlin	Bremen	Göttingen	Greenwich	Paris	Petersburg	Seeberg	Wien
	—7.″25	—4. 24	—4. 95	+1. 54	0. 00	—18. 38	—5. 51	—9. 22

Tafel VII.

Mittlere Bewegung der Sonne in Monaten und Tagen.

Monate	Mittl. Beweg. ☉ in AR. u. in Zeit		
0 Februar	2^h	2′	13.″21
0 März	3	52	36. 76
0 April	5	54	49. 98
0 May	7	53	6. 64
0 Juny	9	55	19. 86
0 July	11	53	36. 52
0 August	13	55	49. 73
0 Sept.	15	58	2. 95
0 October	17	56	19. 61
0 Novemb.	19	58	32. 82
0 Decemb.	21	56	49. 48

Jänner u. Feb.	gem. Jahr	Monate		
1	0	0	0	0. 00
2	1	0	3	56. 55
3	2	0	7	53. 11
4	3	0	11	49. 67
5	4	0	15	46. 22
6	5	0	19	42. 78
7	6	0	23	39. 33
8	7	0	27	35. 89
9	8	0	31	32. 44
10	9	0	35	29. 00
11	10	0	39	25. 55
12	11	0	43	22. 11
13	12	0	47	18. 66
14	13	0	51	15. 22
15	14	0	55	11. 77
16	15	0	59	8. 33
17	16	1	3	4. 88
18	17	1	7	1. 44
19	18	1	10	58. 00
20	19	1	14	54. 55
21	20	1	18	51. 11
22	21	1	22	47. 66
23	22	1	26	44. 22
24	23	1	30	40. 77
25	24	1	34	37. 33
26	25	1	38	33. 88
27	26	1	42	30. 44
28	27	1	46	26. 99
29	28	1	50	23. 55
30	29	1	54	20. 10
31	30	1	58	16. 66
1. Feb.	31	2	2	13. 21

Tafel VII.

Acceleration der Fixsterne in mittlerer Sonnenzeit.

Stunden			Minuten				Secunden			
1	0'	9."83	1	0."16	31	5."08	1	0."00	31	0."08
2	0	19.66	2	0.33	32	5.24	2	0.00	32	0.09
3	0	29.49	3	0.49	33	5.41	3	0.01	33	0.09
4	0	39.32	4	0.65	34	5.57	4	0.01	34	0.09
5	0	49.15	5	0.82	35	5.73	5	0.01	35	0.10
6	0	58.98	6	0.98	36	5.89	6	0.02	36	0.10
7	1	8.81	7	1.15	37	6.06	7	0.02	37	0.10
8	1	18.64	8	1.31	38	6.22	8	0.02	38	0.10
9	1	28.46	9	1.47	39	6.39	9	0.02	39	0.11
10	1	38.29	10	1.64	40	6.55	10	0.03	40	0.11
11	1	48.12	11	1.80	41	6.72	11	0.03	41	0.11
12	1	57.95	12	1.97	42	6.88	12	0.03	42	0.11
13	2	7.78	13	2.13	43	7.04	13	0.04	43	0.12
14	2	17.61	14	2.29	44	7.21	14	0.04	44	0.12
15	2	27.44	15	2.46	45	7.37	15	0.04	45	0.12
16	2	37.27	16	2.62	46	7.54	16	0.04	46	0.13
17	2	47.10	17	2.78	47	7.70	17	0.05	47	0.13
18	2	56.93	18	2.95	48	7.86	18	0.05	48	0.13
19	3	6.76	19	3.11	49	8.03	19	0.05	49	0.13
20	3	16.59	20	3.28	50	8.19	20	0.05	50	0.14
21	3	26.42	21	3.44	51	8.35	21	0.06	51	0.14
22	3	36.25	22	3.60	52	8.52	22	0.06	52	0.14
23	3	46.08	23	3.77	53	8.68	23	0.06	53	0.14
24	3	55.91	24	3.93	54	8.85	24	0.07	54	0.15
			25	4.10	55	9.01	25	0.07	55	0.15
			26	4.26	56	9.17	26	0.07	56	0.15
			27	4.42	57	9.34	27	0.07	57	0.16
			28	4.59	58	9.50	28	0.08	58	0.16
			29	4.75	59	9.67	29	0.08	59	0.16
			30	4.91	60	9.83	30	0.08	60	0.16

Tafel VIII.

Aberration.

Länge der Sonne.

	0	VI.	I.	VII.	II		VIII
	log a	A +	log a	A +	log a	A +	
0°	1.2690	0° 0′	1.2790	2° 11	1.2977	2° 6	30
1	1.2690	0 5	1.2796	2 14	1.2983	2 3	29
2	1.2691	0 11	1.2802	2 16	1.2988	2 0	28
3	1.2692	0 16	1.2808	2 18	1.2993	1 57	27
4	1.2692	0 22	1.2815	2 20	1.2998	1 54	26
5	1.2693	0 27	1.2821	2 21	1.3003	1 51	25
6	1.2695	0 32	1.2827	2 23	1.3008	1 47	24
7	1.2696	0 37	1.2854	2 24	1.3012	1 44	23
8	1.2698	0 43	1.2840	2 25	1-3017	1 40	22
9	1.2700	0 48	1.2847	2 26	1.3021	1 36	21
10	1.2703	0 53	1.2853	2 27	1.3025	1 32	20
11	1.2705	0 58	1.2860	2 28	1.3028	1 28	19
12	1.2708	1 3	1.2866	2 28	1.3032	1 24	18
13	1.2711	1 8	1.2873	2 28	1.3036	1 20	17
14	1.2714	1 12	1.2879	2 28	1.3039	1 16	16
15	1.2718	1 17	1.2886	2 28	1.3042	1 11	15
16	1.2721	1 22	1.2892	2 28	1.3045	1 7	14
17	1.2725	1 26	1.2899	2 27	1.3048	1 3	13
18	1.2729	1 30	1.2905	2 27	1.3050	0 58	12
19	1.2733	1 34	1.2912	2 26	1.3053	0 53	11
20	1.2738	1 39	1.2918	2 25	1.3055	0 49	10
21	1.2742	1 42	1.2924	2 24	1.3057	0 44	9
22	1.2747	1 46	1.2931	2 22	1.3059	0 39	8
23	1.2752	1 50	1.2938	2 21	1.3060	0 34	7
24	1.2757	1 53	1.2944	2 19	1.3061	0 30	6
25	1.2762	1 57	1.2949	2 17	1.3063	0 25	5
26	1.2768	2 0	1.2956	2 15	1.3064	0 20	4
27	1.2773	2 3	1.2961	2 13	1.3064	0 15	3
28	1.2779	2 6	1.2966	2 11	1.3065	0 10	2
29	1.2785	2 9	1.2972	2 8	1.3065	0 5	1
30	1.2790	2 11	1.2977	2 6	1.3065	0° 0′	0
	log a	$\overline{A}$	log a	$\overline{A}$	log a	$\overline{A}$	
	V	XI	IV	X	III		IX

Tafel VIII.

Aberration.

Länge der Sonne ± δ.

	0 VI	I VII	II VIII	
	— +	— +	— +	
0	4.″0	3.″5	2.″0	30
1	4.0	3.5	2.0	29
2	4.0	3.4	1.9	28
3	4.0	3.4	1.8	27
4	4.0	3.3	1.8	26
5	4.0	3.3	1.7	25
6	4.0	3.3	1.6	24
7	4.0	3.3	1.6	23
8	4.0	3.2	1.5	22
9	4.0	3.2	1.4	21
10	4.0	3.1	1.4	20
11	4.0	3.1	1.3	19
12	3.9	3.0	1.2	18
13	3.9	2.9	1.2	17
14	3.9	2.9	1.1	16
15	3.9	2.8	1.0	15
16	3.9	2.8	1.0	14
17	3.9	2.7	0.9	13
18	3.8	2.7	0.8	12
19	3.8	2.6	0.8	11
20	3.8	2.6	0.7	10
21	3.8	2.5	0.6	9
22	3.7	2.5	0.6	8
23	3.7	2.4	0.5	7
24	3.7	2.4	0.4	6
25	3.7	2.3	0.3	5
26	3.6	2.3	0.3	4
27	3.6	2.2	0.2	3
28	3.6	2.1	0.1	2
29	3.5	2.1	0.1	1
30	3.5	2.″0	0.″0	0
	+ —	+ —	+ —	
	V XI	IV X	III IX	

Tafel IX.

Algemeine Tafel

Argument. Länge des aufsteigenden

	☊	☾				
	O^z		VI^z	I^z		VII
	Log b	B −	c − +	Log b	B −	c − +
0°	0. 9531	0° 0′	0.″00	0. 9275	6° 45′	7.″70
1	0. 9531	0 15	0. 27	0. 9258	6 54	7. 93
2	0. 9530	0 31	0. 54	0. 9241	7 3	8. 16
3	0. 9529	0 46	0. 80	0. 9223	7 12	8. 39
4	0. 9527	1 1	1. 07	0. 9205	7 20	8. 61
5	0. 9524	1 16	1. 34	0. 9187	7 28	8. 83
6	0. 9521	1 32	1. 61	0. 9168	7 36	9. 05
7	0. 9517	1 47	1. 88	0. 9149	7 43	9. 26
8	0. 9513	2 2	2. 14	0. 9129	7 49	9. 48
9	0. 9508	2 17	2. 41	0. 9109	7 56	9. 69
10	0. 9502	2 31	2. 67	0. 9089	8 1	9. 90
11	0. 9496	2 46	2. 94	0. 9069	8 6	10. 10
12	0. 9489	3 1	3. 20	0. 9048	8 10	10. 30
13	0. 9483	3 15	3. 46	0. 9027	8 14	10. 50
14	0. 9474	3 29	3. 72	0. 9005	8 17	10. 70
15	0. 9465	3 43	3. 98	0. 8984	8 20	10. 89
16	0. 9456	3 57	4. 24	0. 8962	8 23	11. 08
17	0. 9447	4 12	4. 50	0. 8940	8 24	11. 26
18	0. 9437	4 24	4. 76	0. 8917	8 25	11. 44
19	0. 9426	4 37	5. 01	0. 8895	8 25	11. 62
20	0. 9415	4 50	5. 27	0. 8873	8 25	11. 79
21	0. 9403	5 3	5. 52	0. 8850	8 24	11. 96
22	0. 9391	5 16	5. 77	0. 8827	8 23	12. 13
23	0. 9378	5 28	6. 02	0. 8805	8 21	12. 28
24	0. 9365	5 40	6. 26	0. 8782	8 18	12. 45
25	0. 9351	5 51	6. 51	0. 8759	8 15	12. 61
26	0. 9337	6 3	6. 75	0. 8737	8 11	12. 76
27	0. 9322	6 14	6. 99	0. 8714	8 6	12. 91
28	0. 9307	6 24	7. 23	0. 8691	8 1	13. 06
29	0. 9291	6 35	7. 46	0. 8670	7 55	13. 20
30	0. 9275	6 45	7. 70	0. 8647	7 48	13 33
	Log b	+ B	− c +	Log b	+ B	− c +
	V		XI	IV		X

Tafel IX.
für die Nutation.
Knotens der Mondbahn = ☊

	☊	☾	
II		VIII	
Log b	B −	c − +	
o. 8647	7° 48′	13″33	30°
o. 8625	7 40	13. 46	29
o. 8604	7 32	13. 59	28
o. 8583	7 23	13. 72	27
o. 8562	7 14	13. 84	26
o. 8541	7 4	13. 95	25
o. 8521	6 53	14. 06	24
o. 8501	6 42	14. 17	23
o. 8482	6 29	14. 27	22
o. 8463	6 17	14. 37	21
o. 8445	6 3	14. 47	20
o. 8427	5 49	14. 56	19
o. 8410	5 35	14. 64	18
o. 8394	5 20	14. 72	17
o. 8378	5 4	14. 80	16
o. 8363	4 48	14. 87	15
o. 8349	4 31	14. 94	14
o. 8336	4 14	15. 00	13
o. 8324	3 56	15. 06	12
o. 8312	3 38	15. 11	11
o. 8302	3 20	15. 16	10
o. 8292	3 1	15. 21	9
o. 8283	2 41	15. 25	8
o. 8275	2 22	15. 28	7
o. 8268	2 2	15. 31	6
o. 8263	1 42	15. 34	5
o. 8258	1 22	15. 36	4
o. 8254	1 2	15. 37	3
o. 8252	0 41	15. 39	2
o. 8250	0 21	15. 39	1
o. 8249	0 0	15. 40	0
Log b	+ B	− + c	
III		IX	

Tafel IX.

Solar - Nutation.

Grade	Rectascension I. Theil Arg. 2 ⊙	Rectascension II. Theil Arg. 2 ⊙ — α	Declination Arg. 2 ⊙ — α	Grade
0°	— 0″00 +	— 0″54 —	— 0″00 +	360°
10	0. 20	0. 53	0. 09	350
20	0. 39	0. 51	0. 18	340
30	0. 57	0. 47	0. 27	330
40	0. 73	0. 41	0. 35	320
50	0. 88	0. 35	0. 41	310
60	0. 99	0. 27	0. 47	300
70	1. 07	0. 18	0. 51	290
80	1. 13	— 0. 09 —	0. 53	280
90	1. 14	0. 00	0. 54	270
100	1. 13	+ 0. 09 +	0. 53	260
110	1. 07	0. 18	0. 51	250
120	0. 99	0. 27	0. 47	240
130	0. 88	0. 36	0. 41	230
140	0. 73	0. 41	0. 35	220
150	0. 57	0. 47	0. 27	210
160	0. 39	0. 51	0. 18	200
170	0. 20	0. 53	0. 09	190
180	— 0. 00 +	+ 0. 54 +	— 0. 00 +	180

Der zweyte Theil der Nut. in A. R. wird mit tg δ multiplicirt.

I. F

Tafel X.

Mittlere Refraction.

Z.D.	log R	Diff. für 1 Min.	Z. D.	log R	Diff. für 1 Min.
1°		0.000	40°	1.6866	0.000
2	0.3010		41	1.7015	25
3	0.4771		42	1.7168	26
4	0.6128		43	1.7324	25
5	0.7076		44	1.7474	25
6	0.7853		45	1.7627	25
7	0.8513		46	1.7774	26
8	0.9085	95	47	1.7931	25
9	0.9638	92	48	1.8082	25
10	1.0086	75	49	1.8235	25
11	1.0492	68	50	1.8382	26
12	1.0899	68	51	1.8537	26
13	1.1271	62	52	1.8692	26
14	1.1584	52	53	1.8848	27
15	1.1903	53	54	1.9009	27
16	1.2201	50	55	1.9170	27
17	1.2480	46	56	1.9330	27
18	1.2742	44	57	1.9494	28
19	1.2988	41	58	1.9661	28
20	1.3243	42	59	1.9827	28
21	1.3463	37	60	2.0000	29
22	1.3692	38	30′	2.0088	29
23	1.3909	36	61	2.0176	28
24	1.4116	34	30′	2.0266	30
25	1.4314	33	62	2.0356	30
26	1.4518	34	30′	2.0447	30
27	1.4698	30	63	2.0539	31
28	1.4885	31	30′	2.0633	31
29	1.5065	31	64	2.0728	32
30	1.5237	29	30′	2.0824	32
31	1.5416	30	65	2.0921	32
32	1.5587	28	30′	2.1019	32
33	1.5752	27	66	2.1120	33
34	1.5922	28	30′	2.1221	34
35	1.6085	27	67	2.1324	34
36	1.6243	26	30′	2.1429	35
37	1.6395	25	68	2.1536	36
38	1.6551	26	30′	2.1645	36
39	1.6712	27	69	2.1755	37
40	1.6866	26	30′	2.1868	38

Tafel X.

Mittlere Refraction.

Z. D.	log R	Diff. für 1 Min.
69 30′	2.1868	0.000
70	2.1983	39
30	2.2100	39
71	2.2219	40
30	2.2342	40
72	2.2466	41
30	2.2594	42
73	2.2725	44
		44
30	2.2859	
74	2.2996	46
30	2.3137	46
75	2.3282	48
20	2.3384	51
40	2.3485	50
76	2.3588	51
20	2.3693	52
		53
40	2.3800	
77	2.3910	55
20	2.4022	56
40	2.4137	57
78	2.4254	59
20	2.4374	60
40	2.4497	61
79	2.4624	63
		65
20	2.4754	
40	2.4887	66
80	2.5023	68
20	2.5164	70
40	2.5308	72
81	2.5457	74
20	2.5611	77
40	2.5769	79
		82
82	2.5935	
20	2.6102	84
40	2.6278	88
83	2.6460	91
20	2.6648	94
40	2.6844	98
84	2.7047	0.00
20	2.7259	101
		106

Z. D.	log R	Diff. für 1 Min.
84° 20′	2.7259	0.00
40	2.7480	110
85	2.7711	115
10	2.7830	119
20	2.7951	121
30	2.8076	125
40	2.8203	127
50	2.8334	131
		133
86	2.8467	
10	2.8604	137
20	2.8744	140
30	2.8887	143
40	2.9034	147
50	2.9185	151
87	2.9339	154
10	2.9497	159
		162
20	2.9659	
30	2.9825	166
40	2.9995	170
50	3.0169	174
88	3.0347	178
10	3.0529	182
20	3.0715	186
30	3.0904	189
		193
40	3.1097	
50	3.1293	196
89	3.1492	199
10	3.1692	200
20	3.1892	200
30	3.2092	200
40	3.2289	197
50	3.2480	191
90	3.2662	182

Tafel XI.

Barom. Paris		Therm. Reaum.					
b	log A	t +	log B	t −	log B	Z.D.	d. R.
26^{z} 0^{L}	9.9678	0°	0.0209	0°	0.0209	80°	0.″05
1	9.9692	1	0.0188	1	0.0231	81	0.07
2	9.9706	2	0.0167	2	0.0253	82	0.10
3	9.9720	3	0.0145	3	0.0274	83	0.14
4	9.9733	4	0.0124	4	0.0296	84	0.21
5	9.9747	5	0.0103	5	0.0318	85	0.33
6	9.9761	6	0.0083	6	0.0340	86	0.55
7	9.9775	7	0.0062	7	0.0362	10	0.60
8	9.9788	8	0.0041	8	0.0385	20	0.66
9	9.9802	9	0.0020	9	0.0407	30	0.73
10	9.9815	10	0.0000	10	0.0439	40	0.83
11	9.9829	11	9.9980			50	0.90
27 0	9.9842	12	9.9956			87	0.99
1	9.9855	13	9.9939			10	1.10
2	9.9869	14	9.9919			20	1.23
3	9.9882	15	9.9899			30	1.39
4	9.9895	16	9.9879			40	1.57
5	9.9909	17	9.9859			50	1.77
6	9.9922	18	9.9839			88	2.00
7	9.9935	19	9.9820			10	2.27
8	9.9948	20	9.9800			20	2.59
9	9.9961	21	9.9781			30	2.97
10	9.9974	22	9.9761			40	3.42
11	9.9987	23	9.9742			50	3.95
		24	9.9723				
		25	9.9704				
28 0	0.0000					89	4.58
1	0.0013					10	5.35
2	0.0026					20	6.27
3	0.0039					30	7.39
4	0.0051					40	8.75
5	0.0064					50	10.44
6	0.0077					90	12.49

Tafel XII.

$$\frac{2\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{\vartheta}{2}}{\mathrm{Sin}\;1''}$$

ϑ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′
0	0″0	2″0	7″8	17″7	31″4	49.1	70″7	96″2
1	0.0	2.0	8.0	17.9	31.7	49.4	71.1	96.9
2	0.0	2.1	8.1	18.1	31.9	49.7	71.5	97.1
3	0.0	2.2	8.2	18.3	32.2	50.1	71.9	97.6
4	0.0	2.2	8.4	18.5	32.5	50.4	72.3	98.1
5	0.0	2.3	8.5	18.7	32.7	50.7	72.7	98.5
6	0.0	2.4	8.7	18.9	33.0	51.1	73.1	99.0
7	0.0	2.4	8.8	19.1	33.3	51.5	73.5	99.4
8	0.0	2.5	8.9	19.3	33.5	51.7	73.9	99.9
9	0.0	2.6	9.1	19.5	33.8	52.1	74.3	100.4
10	0.1	2.7	9.2	19.7	34.1	52.4	74.7	100.8
11	0.1	2.7	9.4	19.9	34.4	52.7	75.1	101.3
12	0.1	2.8	9.5	20.1	34.6	53.1	75.5	101.8
13	0.1	2.9	9.6	20.3	34.9	53.4	75.9	102.3
14	0.1	3.0	9.8	20.5	35.2	53.8	76.3	102.7
15	0.1	3.1	9.9	20.7	35.5	54.1	76.7	103.2
16	0.1	3.1	10.1	20.9	35.7	54.5	77.1	103.7
17	0.2	3.2	10.2	21.2	36.0	54.8	77.5	104.2
18	0.2	3.3	10.4	21.4	36.3	55.1	77.9	104.6
19	0.2	3.4	10.5	21.6	36.6	55.5	78.3	105.1
20	0.2	3.5	10.7	21.8	36.9	55.8	78.8	105.6
21	0.3	3.6	10.8	22.0	37.2	56.2	79.2	106.1
22	0.3	3.7	11.0	22.3	37.4	56.5	79.6	106.6
23	0.3	3.8	11.1	22.5	37.7	56.9	80.0	107.0
24	0.3	3.8	11.3	22.7	38.0	57.3	80.4	107.5
25	0.3	3.9	11.5	22.9	38.3	57.6	80.8	108.0
26	0.4	4.0	11.6	23.1	38.6	58.0	81.3	108.5
27	0.4	4.1	11.8	23.4	38.9	58.3	81.7	109.0
28	0.4	4.2	11.9	23.6	39.2	58.7	82.1	109.5
29	0.5	4.3	12.1	23.8	39.5	59.0	82.5	110.0
30	0.5	4.4	12.3	24.0	39.8	59.4	83.0	110.4

Tafel XII.

$$\frac{2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{Sin} 1''}$$

ϑ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′
30	0″5	4″4	12″3	24″0	39″8	59″4	83″0	110″4
31	0.5	4.5	12.4	24.3	40.1	59.8	83.4	110.9
32	0.6	4.6	12.6	24.5	40.3	60.1	83.8	111.4
33	0.6	4.7	12.8	24.7	40.6	60.5	84.2	111.9
34	0.6	4.8	12.9	25.0	40.9	60.8	84.7	112.4
35	0.7	4.9	13.1	25.2	41.2	61.2	85.1	112.9
36	0.7	5.0	13.3	25.4	41.5	61.6	85.5	113.4
37	0.7	5.1	13.4	25.7	41.8	61.9	86.0	113.9
38	0.8	5.2	13.6	25.9	42.1	62.3	86.4	114.4
39	0.8	5.3	13.8	26.2	42.5	62.7	86.8	114.9
40	0.9	5.4	14.0	26.4	42.8	63.0	87.3	115.4
41	0.9	5.6	14.1	26.6	43.1	63.4	87.7	115.9
42	1.0	5.7	14.3	26.9	43.4	63.8	88.1	116.4
43	1.0	5.8	14.5	27.1	43.7	64.2	88.6	116.9
44	1.1	5.9	14.7	27.4	44.0	64.5	89.0	117.4
45	1.1	6.0	14.8	27.6	44.3	64.9	89.5	117.9
46	1.2	6.1	15.0	27.9	44.6	65.3	89.9	118.4
47	1.2	6.2	15.2	28.1	44.9	65.7	90.3	118.9
48	1.3	6.4	15.4	28.3	45.2	66.0	90.8	119.5
49	1.3	6.5	15.6	28.6	45.5	66.4	91.2	120.0
50	1.4	6.6	15.8	28.8	45.9	66.8	91.7	120.5
51	1.4	6.7	15.9	29.1	46.2	67.2	92.1	121.0
52	1.5	6.8	16.1	29.4	46.5	67.6	92.6	121.5
53	1.5	7.0	16.3	29.6	46.8	68.0	93.0	122.0
54	1.6	7.1	16.5	29.9	47.1	68.3	93.5	122.5
55	1.6	7.2	16.7	30.1	47.5	68.7	93.9	123.1
56	1.7	7.3	16.9	30.4	47.8	69.1	94.4	123.6
57	1.8	7.5	17.2	30.6	48.1	69.5	94.8	124.1
58	1.8	7.6	17.3	30.9	48.4	69.8	95.3	124.6
59	1.9	7.7	17.5	31.1	48.8	70.3	95.7	125.1
60	2.0	7.8	17.7	31.4	49.1	70.7	96.2	125.7

Tafel XII.

$$\frac{2\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{\vartheta}{2}}{\mathrm{Sin}\;1''}$$

ϑ	8′	9′	10′	11′	12′	13′	14′	15′
0	125″7	159″0	196″3	237″5	282″7	331″8	384″7	441″6
1	126.2	159.6	197.0	238.3	283.5	332.6	385.6	442.6
2	126.7	160.2	197.6	239.0	284.2	333.4	386.5	443.6
3	127.2	160.8	198.3	239.7	285.0	334.3	387.5	444.6
4	127.8	161.4	198.9	240.4	285.8	335.2	388.4	445.6
5	128.3	162.0	199.6	241.2	286.6	336.0	389.3	446.6
6	128.8	162.6	200.3	241.9	287.4	336.9	390.2	447.5
7	129.4	163.2	200.9	242.6	288.2	337.7	391.1	448.5
8	129.9	163.8	201.6	243.3	289.0	338.6	392.1	449.5
9	130.4	164.4	202.2	244.1	289.8	339.4	393.0	450.5
10	131.0	165.0	202.9	244.8	290.6	340.3	393.9	451.5
11	131.5	165.6	203.6	245.5	291.4	341.2	394.8	452.5
12	132.0	166.2	204.2	246.2	292.2	342.0	395.8	453.5
13	132.6	166.8	204.9	247.0	293.0	342.9	396.7	454.5
14	133.1	167.4	205.6	247.7	293.8	343.7	397.6	455.5
15	133.6	168.0	206.3	248.5	294.6	344.6	398.6	456.5
16	134.2	168.6	206.9	249.2	295.4	345.5	399.5	457.5
17	134.7	169.2	207.6	249.9	296.2	346.3	400.5	458.5
18	135.3	169.8	208.3	250.7	297.0	347.2	401.4	459.5
19	135.8	170.4	208.9	251.4	297.8	348.1	402.3	460.5
20	136.4	171.0	209.6	252.2	298.6	349.0	403.3	461.5
21	136.9	171.6	210.3	252.9	299.4	349.8	404.2	462.5
22	137.4	172.2	211.0	253.6	300.2	350.7	405.1	463.5
23	138.0	172.9	211.6	254.4	501.0	351.6	406.0	464.5
24	138.5	173.5	212.3	255.1	301.8	352.5	407.0	465.5
25	139.1	174.1	213.0	255.9	302.6	353.3	408.0	466.5
26	139.6	174.7	213.7	256.6	303.5	354.2	408.9	467.5
27	140.2	175.3	214.4	257.4	304.3	355.1	409.9	468.5
28	140.7	175.9	215.1	258.1	305.1	356.0	410.8	469.5
29	141.3	176.6	215.8	258.9	305.9	356.9	411.7	470.5
30	141.8	177.2	216.4	259.6	306.7	357.7	412.7	471.5

Tafel XII.

$$\frac{2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sin 1''}$$

ϑ	8′	9′	10′	11′	12′	13′	14′	15′
30	141″8	177″2	216″4	259″6	306″7	357″7	412″7	471″5
31	142.4	177.8	217.1	260.4	307.5	358.6	413.6	472.6
32	143.0	178.4	217.8	261.1	308.4	359.5	414.6	473.6
33	143.5	179.0	218.5	261.9	309.2	360.3	415.6	474.6
34	144.1	179.7	219.2	262.6	310.0	361.2	416.6	475.6
35	144.6	180.3	219.9	263.4	310.8	362.1	417.5	476.6
36	145.2	180.9	220.6	264.1	311.6	363.0	418.4	477.6
37	145.8	181.6	221.3	264.9	312.5	363.9	419.4	478.7
38	146.3	182.2	222.0	265.7	313.3	364.8	420.3	479.7
39	146.9	182.8	222.7	266.4	314.2	365.7	421.3	480.7
40	147.5	183.4	223.4	267.2	315.0	366.5	422.2	481.7
41	148.0	184.1	224.1	267.9	315.8	367.5	423.2	482.8
42	148.6	184.7	224.8	268.7	316.6	368.4	424.2	483.8
43	149.2	185.4	225.3	269.5	317.4	369.3	425.1	484.8
44	149.7	186.0	226.2	270.2	318.3	370.2	426.1	485.8
45	150.3	186.5	226.9	271.0	319.1	371.1	427.0	486.9
46	150.9	187.3	227.6	271.8	319.9	372.0	428.0	487.9
47	151.5	187.9	228.3	272.6	320.8	372.9	429.0	488.9
48	152.0	188.5	229.0	273.3	321.6	373.8	430.0	490.0
49	152.6	189.2	229.7	274.1	322.4	374.7	430.9	491.0
50	153.2	189.8	230.4	274.9	323.3	375.6	431.9	492.0
51	153.8	190.5	231.1	275.6	324.1	376.5	432.8	493.1
52	154.4	191.1	231.8	276.4	325.0	377.4	433.8	494.1
53	154.9	191.8	232.5	277.2	325.8	378.3	434.8	495.2
54	155.5	192.4	233.3	278.0	326.7	379.2	435.7	496.2
55	156.1	193.1	234.0	278.9	327.5	380.2	436.7	497.2
56	156.7	193.7	234.7	279.5	328.4	381.1	437.7	498.2
57	157.3	194.4	235.4	280.4	329.2	382.0	438.7	499.2
58	157.8	195.0	236.1	281.1	330.0	382.9	439.6	500.3
59	158.4	195.7	236.8	281.9	330.9	383.8	440.6	501.4
60	159.0	196.3	237.5	282.7	331.8	384.7	441.6	502.5

Tafel XIII.

a) Höhenmessungen durch Barometer.

t + t'	P	t + t'	P
— 10°	4.25337	+ 21	4.28667
— 9	448	22	770
— 8	560	23	874
— 7	671	24	4.28976
— 6	781	25	4.29079
— 5	4.25892	26	181
— 4	4.26002	27	283
— 3	112	28	385
— 2	220	29	487
— 1	330	30	588
0	439	31	689
+ 1	548	32	790
2	658	33	891
3	765	34	4.29991
4	872	35	4.30092
5	4.26980	36	192
6	4.27087	37	291
7	195	38	391
8	301	39	490
9	408	40	589
10	514	41	688
11	620	42	787
12	726	43	885
13	832	44	4.30984
14	4.27937	45	4.31082
15	4.28042	46	179
16	147	47	277
17	251	48	374
18	356	49	471
19	460	50	4.31568
20	564		

Tafel XIII.

b) Correction von P.

Polhöhe		Corr. von P.	Polhöhe		Corr. von P.	Polhöhe		Corr. von P
0°	90°	0. 00124						
1	89	123	16°	74	0. 00105	31°	59°	0. 0059
2	88	123	17	73	102	32	58	054
3	87	123	18	72	100	33	57	050
4	86	122	19	71	097	34	56	046
5	85	122	20	70	095	35	55	042
6	84	121	21	69	092	36	54	038
7	83	120	22	68	089	37	53	034
8	82	119	23	67	086	38	52	030
9	81	118	24	66	083	39	51	026
10	80	116	25	65	079	40	50	021
11	79	115	26	64	076	41	49	017
12	78	113	27	63	073	42	48	013
13	77	111	28	62	069	43	47	009
14	76	109	29	61	065	44	46	004
15	75	107	30	60	062	45	45	000

c) Correction von log z

log z	d. log z +	log z	d. log z +	log z	d. log z +
1. 9	0. 00001	3. 0	0. 00007	3. 7	0. 00034
2. 3	01	3. 1	09	3. 8	43
2. 4	02	3. 2	11	3. 9	54
2. 5	02	3. 3	14		
2. 6	03	3. 4	17		
2. 7	03	3. 5	22		
2. 8	04	3. 6	27		
2. 9	05				

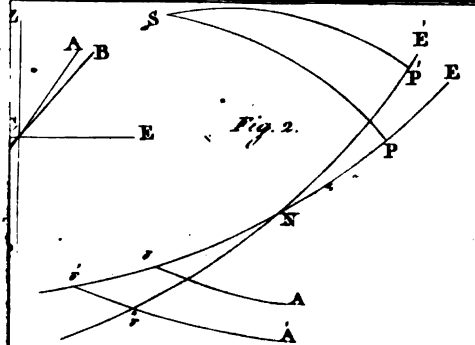


Fig. 2.

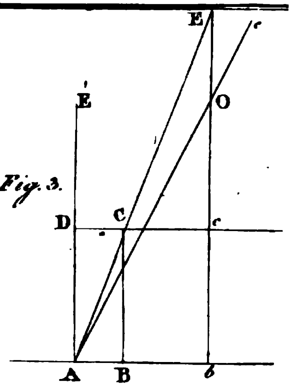


Fig. 3.

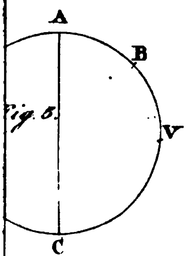


Fig. 5.

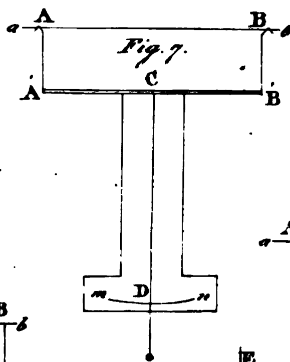


Fig. 7.

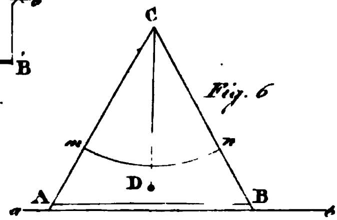


Fig. 6

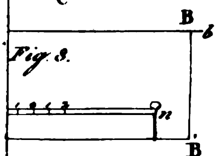


Fig. 8.

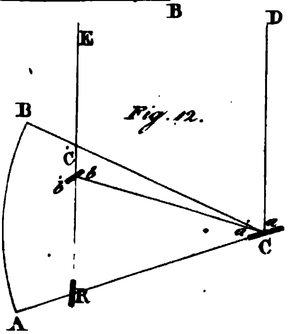


Fig. 12.

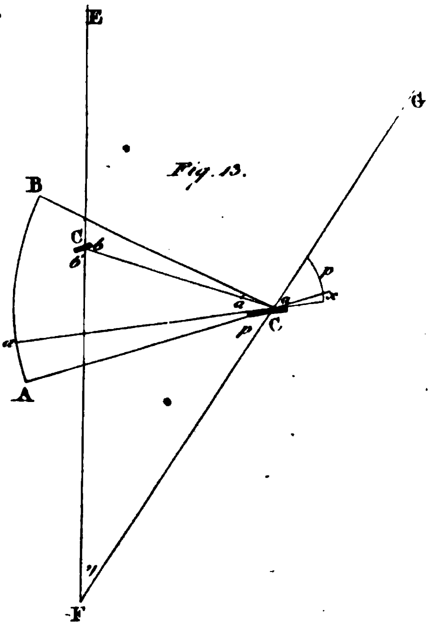


Fig. 13.

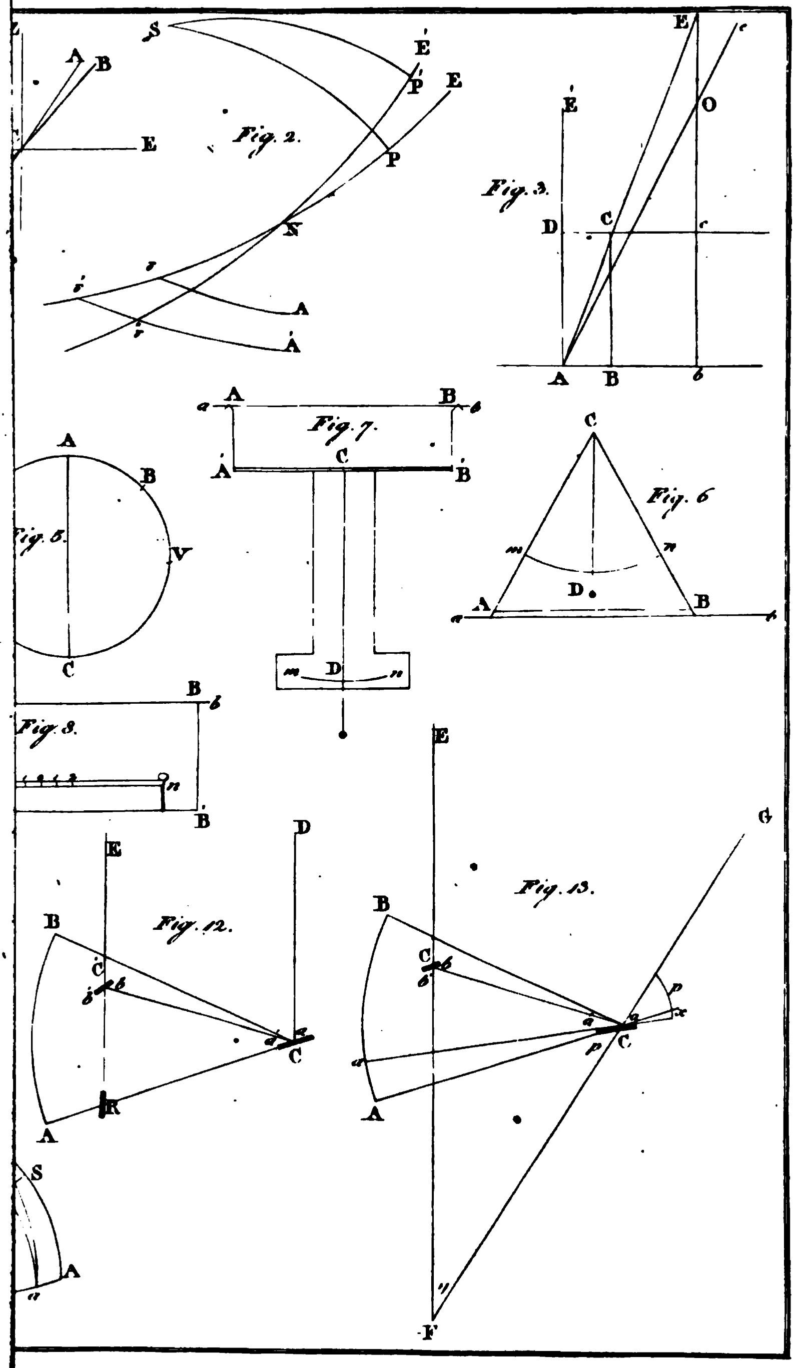


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 12.
Fig. 13.