Mellen W. Haskell

Göttingen, 1888.

Theorie

der

Abelschen Functionen

vom Geschlecht 3.

Von

Dr. Heinrich Weber,
Professor an der Universität zu Königsberg.

Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1876.

Inhalt.

IV. Abschnitt.

Lösung der Fundamentalprobleme.

Einleitung.

Die Arbeit, welche ich hier in unveränderter Form der Oeffentlichkeit übergebe, wurde im August 1874 der philosophischen Facultät der Universität Göttingen zur Bewerbung um den Preis der *Beneke*schen Stiftung eingesandt und wurde von der genannten Facultät durch Ertheilung des zweiten Preises geehrt.

Es konnte nicht meine Absicht sein, durch diese Untersuchung eine vollständige und erschöpfende Theorie der *Abel*schen Functionen vom Geschlecht 3 zu liefern, ein Unternehmen, welches, selbst wenn ich längere Zeit darauf hätte verwenden können, meine Kräfte überstiegen haben würde. Ich habe mich vielmehr von vorn herein auf ein abgegrenztes Gebiet beschränkt, dessen Bedeutung mir für die Theorie fundamental erschien, und habe, um den Umfang der Arbeit nicht zu sehr anwachsen zu lassen, jede Abschweifung in andere Gebiete vermieden, in denen ich nur Unvollständiges hätte bieten können.

Es sei mir gestattet, zur Uebersicht einige Bemerkungen über den Inhalt und den eingeschlagenen Weg vorauszuschicken.

Den Eingang bildet ein Abriss der Theorie der sechsfach periodischen Functionen und ϑ-Functionen dreier Variablen, welche nicht nur die Grundlage bilden müsste, wenn es dereinst gelingen sollte, von dieser Seite her in die Theorie der allgemeinen *Abel*schen Functionen einzudringen, in der Weise, wie es von *Göpel* und *Rosenhain* für die hyperelliptischen Functionen geschehen ist, sondern für jede ins Einzelne gehende Theorie unseres Gegenstandes unerlässlich scheint. Es stehen nämlich diese Untersuchungen in einem nahen Zusammenhang mit der algebraischen Seite der Frage, der besonders durch die Sätze über die von *Riemann* so genannten Charakteristiken hergestellt wird, welche den Angelpunkt der ganzen Theorie bilden. Die merkwürdigen Gruppirungen dieser Charakteristiken treten überall wieder hervor. In die Fülle der Formeln, welche aus dem Additionstheorem der ϑ-Functionen fliessen, bringen sie Ordnung und Uebersichtlichkeit. In der algebraischen Theorie, die mit der Theorie der Curven vierter Ordnung zusammenfällt, umfassen sie den grössten Theil der von *Steiner, Hesse, Aronhold,* bezüglich der Doppeltangenten aufgestellten Sätze. Aus diesen Gründen bin ich auf die Untersuchung der Charakteristiken ausführlich eingegangen, und habe versucht, die betreffenden Sätze aus ihrer wahren Quelle herzuleiten, nämlich aus dem Begriff der Charakteristiken selbst, ohne Rücksicht auf eine besondere Bedeutung derselben, auf einem Weg, der der combinatorischen Analysis angehört. Eine allgemeinere Untersuchung dieses Gegenstandes, auf die ich bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen hoffe, hat mich gelehrt, dass die Theorie der ϑ-Functionen bei drei Variablen einen merkwürdigen Abschluss erfährt, der sich namentlich beim Additionstheorem zu erkennen giebt, so dass die Theorie der allgemeinen ϑ-Functionen bei weitem nicht die einfache Gestalt erhält, die noch bei drei Variablen möglich und zum Theil noch für die allgemeinen hyperelliptischen ϑ-Functionen erreichbar ist.

Der folgende Abschnitt enthält zunächst die Grundsätze der *Riemann*schen Theorie, für den vorliegenden Fall specialisirt. Obwohl hierin wesentlich neue Resultate nicht enthalten sind, schien mir eine kurze Darstellung des Zusammenhanges und leichteren Verständnisses halber nothwendig. Ich hebe noch hervor, dass hier, wie in allen folgenden Untersuchungen mein Streben war, so weit als irgend thunlich, nur solche Functionen zu benutzen, die man als invariant bezeichnen kann (in einem allgemeineren Sinn als dem gewöhnlichen), d. h. mit Functionen, deren charakteristische Eigenschaften bei jeder rationalen Transformation erhalten bleiben. Dadurch gewinnen die Untersuchungen nicht nur an Allgemeinheit, sondern auch an Einfachheit und Eleganz.

Der aus dem *Abel*schen Theorem erkannte Zusammenhang der algebraischen Integrale mit den periodischen Functionen führt zur Aufstellung zweier verschiedener Hauptprobleme, von denen freilich das zweite als ein Specialfall des ersten betrachtet werden kann. Das erste dieser Probleme welches ich das *Riemann*sche Problem genannt habe, (welches, beiläufig bemerkt, wesentlich verschieden ist von dem, was *C. Neumann* das *Riemann*sche Problem nennt) kann kurz bezeichnet werden als die Aufgabe der algebraischen Darstellung gegebener sechsfach periodischer Functionen, während das zweite das *Jacobi*sche Umkehrproblem ist. Dass in den bisherigen Untersuchungen diese beiden Probleme noch nicht so scharf gesondert hervorgetreten sind, hat wohl darin seinen Grund, dass bei den hyperelliptischen Functionen die Lösung des einfachsten Falles des ersten Problems die Lösung des zweiten ganz von selbst liefert, während im allgemeinen Falle dies nicht mehr eintritt. Man kann diesen Unterschied so charakterisiren, dass in der Theorie der hyperelliptischen Functionen die Zweitheilung der Perioden zur Lösung des Umkehrproblems ausreicht, während man bei den allgemeinen *Abel*schen Functionen bis zur Viertheilung der Perioden vorgehen muss. Neue Schwierigkeiten entstehen dadurch allerdings insofern nicht, als keine neue algebraische Gleichung höheren Grades zu lösen ist, allein begreiflicher Weise wird die Einfachheit der Formeln beeinträchtigt.

Ich habe einige Bemerkungen beizufügen über den Gebrauch der *Riemann*schen Fläche und ihrer Zerschneidung, welche in letzter Instanz das anschaulichste Bild von dem Verlauf der betrachteten Functionen liefert. Die Bedeutung, welche dieser Fläche für die hier betrachteten Functionen zukommt, scheint aber doch eine etwas andere zu sein als z. B. in der Theorie der hyperelliptischen Functionen. Nichts an dieser Fläche trägt den Charakter der Invarianz für rationale Transformationen als die Zahl, welche die Ordnung des Zusammenhanges angiebt, und daher muss eine Theorie, die sich an eine besondere Form dieser Fläche anlehnt, einen weit specielleren Charakter haben als der, welchen die vorliegende Arbeit erstrebt. Um Eines hervorzuheben, so werden die Verzweigungspunkte für die hyperelliptischen Functionen durch eine algebraische Gleichung bestimmt, welche für die Theorie dieser Functionen eine fundamentale Bedeutung hat. Bei den allgemeinen *Abel*schen Functionen tritt an Stelle dieser Gleichung eine andere, in unserem Falle z. B. die, welche die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung bestimmt; die Verzweigungspunkte hängen von einer algebraischen Gleichung ab, welche dem Wesen der Aufgabe fremd ist; und daher dürfen jedenfalls die Verzweigungspunkte in den Endresultaten der Theorie nicht vorkommen, wenn nicht eine nicht in der Natur der Aufgabe begründete Schwierigkeit eingeführt werden soll. Unter diesen Umständen schien es mir am zweckmässigsten, die an die *Riemann*sche

Fläche sich anlehnenden Vorstellungen zwar als ein unschätzbares Hülfsmittel der Beweisführung anzusehen, im übrigen aber nach Kräften darnach zu streben, aus den Endresultaten jede Spur dieser Vorstellungen wieder zu eliminiren. Auf diesem Standpunkt erscheint es dann auch nicht nothwendig, eine bestimmte geometrische Anschauung dieser Fläche ins Einzelne auszubilden.

Es ist damit nicht ausgeschlossen, dass es ausser den hyperelliptischen Functionen noch andere besondere Fälle giebt, in denen die Verzweigungspunkte eine wichtigere Rolle spielen. Es würde dies z. B. eintreten bei den Functionen, welche von der Gleichung $x^4 + y^4 + z^4 = 0$ abhängen, welche überhaupt, obwohl (oder vielleicht gerade weil) sie durch elliptische Functionen vollständig dargestellt werden können, ein interessantes Beispiel für unsere Theorie liefern würden.

Zürich, den 1. Mai 1875.

Die vorstehenden Seiten waren bereits im Druck, als ich die Nachricht erhielt, dass die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften den Beschluss gefasst hat, die Veröffentlichung dieser Arbeit durch ihre thätige Unterstützung zu fördern. Ich freue mich, noch an dieser Stelle für dies ehrende Zeichen der Anerkennung der hohen Akademie meinen Dank aussprechen zu können.

I. Abschnitt.

Die sechsfach periodischen Functionen.

§. 1. Analytische Darstellung sechsfach periodischer Functionen.

Eine Function von drei unabhängigen Veränderlichen heisst periodisch, wenn sie ihren Werth nicht ändert bei gleichzeitiger Aenderung aller Argumente um ein gewisses constantes Grössensystem, welches ein *System zusammengehöriger Perioden* genannt wird. Sind mehrere solcher Systeme vorhanden, etwa A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; ... so ist jede lineare Combination derselben wie $mA_1+nB_1+\ldots$, $mA_2+nB_2+\ldots$, $mA_3+nB_3+\ldots$ mit ganzzahligen Coëfficienten $m, n, \ldots$ wieder ein zusammengehöriges Periodensystem. Mehrere Periodensysteme heissen *von einander unabhängig*, wenn sie nicht aus einer geringeren Zahl in der angegebenen Weise zusammengesetzt werden können. Nach einem bekannten Satz kann eine Function von drei Veränderlichen, welche eindeutig und im Allgemeinen stetig ist, nicht mehr als sechs von einander unabhängige Periodensysteme haben, wenn sie nicht von weniger als drei linearen Combinationen der Veränderlichen abhängt*). Es stellt sich uns also die Aufgabe, nach solchen Functionen dreier Variablen zu suchen, die sechs von einander unabhängige Periodensysteme haben. Functionen von weniger Perioden kann man aus diesen erhalten, wenn man die Perioden zum Theil unendlich gross werden lässt.

---

*) Ueber den von *Riemann* gegebenen Beweis dieses Satzes vgl. *Borchardt*s Journal Bd. 71, pag. 197. Unter einer eindeutigen und im Allgemeinen stetigen Function dreier complexer Argumente verstehen wir eine solche, die durch stetige Fortsetzung mittels Potenzreihen für alle endlichen Werthe der Variablen, mit Ausnahme gewisser Werthgebiete von weniger als sechs Dimensionen, in denen die Function unendlich wird, auf eine einzige und bestimmte Weise berechnet werden kann. Analoges soll gelten für Functionen von mehr oder weniger Argumenten.

Man kann nun zunächst zur Vereinfachung der Aufgabe einige specielle Voraussetzungen eintreten lassen, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beeinträchtigen.

Es seien die Veränderlichen mit u_1, u_2, u_3 bezeichnet und die denselben entsprechenden Perioden wie folgt:

$$\begin{array}{ll}
\text{für } u_1: & A_1^{(1)},\ A_1^{(2)},\ A_1^{(3)},\ A_1^{(4)},\ A_1^{(5)},\ A_1^{(6)}, \\
\text{- } u_2: & A_2^{(1)},\ A_2^{(2)},\ A_2^{(3)},\ A_2^{(4)},\ A_2^{(5)},\ A_2^{(6)}, \\
\text{- } u_3: & A_3^{(1)},\ A_3^{(2)},\ A_3^{(3)},\ A_3^{(4)},\ A_3^{(5)},\ A_3^{(6)}.
\end{array}$$

Wir dürfen annehmen, dass nicht die aus den reellen und imaginären Theilen der Perioden gebildete Determinante verschwindet, denn es lässt sich in ganz ähnlicher Weise wie die Unstatthaftigkeit einer siebenten Periode durch *Riemann* nachgewiesen ist, zeigen, dass, wenn die erwähnte Determinante verschwindet, entweder die Perioden nicht von einander unabhängig sind, oder die Function durch weniger als drei lineare Combinationen der Veränderlichen ausgedrückt werden kann.

Eine Folge dieser unserer Voraussetzung ist, dass nicht alle aus je drei zusammengehörigen Periodensystemen gebildeten Determinanten verschwinden können, und es sei demnach:

$$\Sigma \pm A_1^{(1)} A_2^{(2)} A_3^{(3)}$$

von Null verschieden.

Durch Einführung neuer Variablen mittelst der Gleichungen:

$$\begin{aligned}
u_1 \pi i &= A_1^{(1)} v_1 + A_1^{(2)} v_2 + A_1^{(3)} v_3, \\
u_2 \pi i &= A_2^{(1)} v_1 + A_2^{(2)} v_2 + A_2^{(3)} v_3, \\
u_3 \pi i &= A_3^{(1)} v_1 + A_3^{(2)} v_2 + A_3^{(3)} v_3
\end{aligned}$$

geht die zu untersuchende Function in eine Function der Variablen v_1, v_2, v_3 über, welche in Bezug auf jede derselben einzeln die Periode πi hat, und ausserdem noch drei unabhängige Periodensysteme besitzt. Wir können demnach immer voraussetzen, die sechs Systeme zusammengehöriger Perioden seien:

$$\begin{array}{ll}
\text{für } v_1: & \pi i,\ 0,\ 0,\ a_{11},\ a_{12},\ a_{13}, \\
\text{- } v_2: & 0,\ \pi i,\ 0,\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23}, \\
\text{- } v_3: & 0,\ 0,\ \pi i,\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33}.
\end{array}$$

Eine solche Function kann nicht für alle endlichen Werthe der Argumente endlich und stetig sein, denn wir können folgenden Satz beweisen:

Eine für alle endlichen Werthe der Argumente v_1, v_2, v_3 endliche und stetige Function, welche in Bezug auf jedes derselben einzeln die Periode πi hat, kann kein weiteres von diesen unabhängiges Periodensystem besitzen.

Um dies zu zeigen sei $F(v_1, v_2, v_3)$ eine für alle endlichen Werthe der Argumente endliche, stetige und für jedes einzelne derselben um πi periodische Function, die sich daher nach einem bekannten Satz, durch eine Reihe von folgender Form darstellen lässt:

$$(1.)\qquad F(v_1, v_2, v_3) = \sum_{h_1,h_2,h_3} C_{h_1,h_2,h_3} e^{2(h_1v_1+h_2v_2+h_3v_3)},$$

worin sich die Summation auf alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe von h_1, h_2, h_3 erstreckt.

Existirt nun ein weiteres Periodensystem a_1, a_2, a_3, so muss die Gleichung bestehen:

$$\sum_{h_1,h_2,h_3} C_{h_1,h_2,h_3} e^{2(h_1v_1+h_2v_2+h_3v_3)} = \sum_{h_1,h_2,h_3} C_{h_1,h_2,h_3} e^{2(h_1a_1+h_2a_2+h_3a_3)} e^{2(h_1v_1+h_2v_2+h_3v_3)},$$

eine Gleichung die nur dann identisch erfüllt sein kann, wenn $h_1a_1+h_2a_2+h_3a_3$ ein ganzes Vielfaches von πi ist für alle in der Reihe (1.) vorkommenden Werthcombinationen von h_1, h_2, h_3.

Soll sich also F nicht auf eine Constante reduciren, so müssen eine, zwei oder drei Relationen von der Form bestehen:

$$(2.)\qquad k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3 = l\pi i,$$

worin k_1, k_2, k_3, l ganze Zahlen sind. Bestehen drei solcher Relationen, von denen keine aus den andern folgt, so sind a_1, a_2, a_3 rationale Vielfache von πi und die wahren Perioden unserer Function sind nicht πi selber, sondern gewisse Bruchtheile von πi, aus denen auch das Periodensystem a_1, a_2, a_3 zusammengesetzt werden kann. Bestehen aber nur eine oder zwei solcher Relationen, so ist die Function F ausdrückbar durch eine oder durch zwei lineare Combinationen der Veränderlichen (nämlich durch $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3$) ein Fall, den wir ausschliessen.

Auf ähnliche Weise ergiebt sich, dass die Function F nicht die Eigenschaft haben kann, bei gleichzeitiger Aenderung der Argumente um ein Grössensystem a_1, a_2, a_3 einen constanten Factor anzunehmen, wenn sie nicht durch Multiplication mit einer Exponentialfunction auf eine solche reducirt werden kann, die nur von einer oder von zwei linearen Combinationen der Argumente abhängt. Genügt nämlich F der Bedingung:

$$F(v_1+a_1, v_2+a_2, v_3+a_3) = CF(v_1, v_2, v_3),$$

so muss C die Form haben:

$$C = e^{2(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3)},$$

worin μ_1, μ_2, μ_3 ganze Zahlen bedeuten, und die Function:

$$e^{-2(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3)} F(v_1, v_2, v_3)$$

würde das Periodensystem a_1, a_2, a_3 haben, wäre also, wenn diese Grössen nicht rationale Vielfache von πi sind, von weniger als drei linearen Combinationen der Veränderlichen abhängig.

Aus diesen Erörterungen folgt nun, dass wir allgemein gültige Darstellungen von Functionen mit mehr als drei unabhängigen Periodensystemen unter der Form von Brüchen suchen müssen.

Wir setzen demnach:

$$F(v_1, v_2, v_3) = \frac{\Phi(v_1, v_2, v_3)}{\Phi_1(v_1, v_2, v_3)}$$

und nehmen an, die beiden Functionen Φ, Φ_1 seien durch immer convergente Reihen von der Form (1.) darstellbar, so dass F für jedes der Argumente die Periode πi hat. Wir suchen die Bedingung auf, unter der F noch drei weitere Periodensysteme besitzt, nämlich:

$$\begin{array}{lll} \text{für } v_1: & a_{11}, & a_{12}, \; a_{13}, \\ \text{-} \quad v_2: & a_{21}, & a_{22}, \; a_{23}, \\ \text{-} \quad v_3: & a_{31}, & a_{32}, \; a_{33}. \end{array}$$

Als nothwendige und hinreichende Bedingung für diese Eigenschaft der Function F ergiebt sich:

$$(3.) \qquad \frac{\Phi(v_1 + a_{1i}, v_2 + a_{2i}, v_3 + a_{3i})}{\Phi(v_1, v_2, v_3)} = \frac{\Phi_1(v_1 + a_{1i}, v_2 + a_{2i}, v_3 + a_{3i})}{\Phi_1(v_1, v_2, v_3)} = \Psi_i(v_1, v_2, v_3)$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Die drei Functionen Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 können irgend welche sein mit der Periode πi für jedes der Argumente, jedoch kann keine derselben sich auf eine Constante reduciren, wenn nicht F durch weniger als drei lineare Combinationen der Argumente darstellbar ist, was wir ausschliessen.

Wir verfolgen demnach nunmehr die einfachste Annahme, die uns über die Functionen Ψ_i noch übrig bleibt, indem wir setzen:

$$(4.) \qquad \Psi_i = C_i e^{2(k_1^{(i)} v_1 + k_2^{(i)} v_2 + k_3^{(i)} v_3)},$$

wenn die C_i beliebige Constanten, die $k_1^{(i)}$, $k_2^{(i)}$, $k_3^{(i)}$ ganze Zahlen bedeuten, von denen wir annehmen müssen dass ihre Determinante nicht verschwindet.

Setzen wir nämlich, indem wir mit n_1, n_2, n_3 ganze Zahlen bezeichnen:

$$a_h = n_1 a_{1h} + n_2 a_{2h} + n_3 a_{3h}; \qquad (h = 1, 2, 3),$$

so folgt aus (3.) und (4.)

$$\Phi(v_1 + a_1, v_2 + a_2, v_3 + a_3) = Ce^{2\sum\limits_i \sum\limits_h n_i k_h^{(i)} v_h} \Phi(v_1, v_2, v_3),$$

worin C eine Constante ist. Wenn nun die Determinante:

$$\delta = \Sigma \pm k_1^{(1)} k_2^{(2)} k_3^{(3)}$$

verschwindet, so lassen sich die ganzen Zahlen n_1, n_2, n_3 so bestimmen, dass $\sum\limits_i n_i k_h^{(i)} = 0$ wird, und es ergiebt sich eine Relation von der Form:

$$\Phi(v_1 + a_1, v_2 + a_2, v_3 + a_3) = C\Phi(v_1, v_2, v_3),$$

welche in gleicher Weise auch für die Function Φ_1 gilt. Dies aber widerstreitet unserer Annahme über die Function F.

Hiernach lässt sich den Bedingungen für die Functionen Φ, Φ_1 eine wesentlich einfachere Gestalt geben:

Wir führen an Stelle der Variablen v_1, v_2, v_3 neue Veränderliche w_1, w_2, w_3 ein mittels der Substitution:

$$k_1^{(i)} v_1 + k_2^{(i)} v_2 + k_3^{(i)} v_3 = -\delta w_i; \qquad (i = 1, 2, 3),$$

so dass die alten Variablen wieder linear und mit ganzzahligen Coëfficienten durch die neuen ausdrückbar sind.

Durch diese Substitution geht die Function Φ in eine Function der Argumente w_1, w_2, w_3 über, die mit $\Theta(w_1, w_2, w_3)$ bezeichnet sein soll, die gleichfalls für jedes der Argumente die Periode πi hat, und die also durch eine stets convergente Reihe von der Form:

$$(5.) \qquad \Theta(w_1, w_2, w_3) = \sum_{h_1, h_2, h_3} B_{h_1, h_2, h_3} e^{2(h_1 w_1 + h_2 w_2 + h_3 w_3)}$$

dargestellt werden kann. Setzen wir noch:

$$k_1^{(h)} a_{1i} + k_2^{(h)} a_{2i} + k_3^{(h)} a_{3i} = -\delta b_{hi}; \qquad (i = 1, 2, 3;\ h = 1, 2, 3),$$

so ergeben sich aus (3.) und (4.) für Θ die weiteren Bedingungen:

$$(6.) \qquad \Theta(w_1 + b_{1i}, w_2 + b_{2i}, w_3 + b_{3i}) = C_i e^{-2\delta w_i} \Theta(w_1, w_2, w_3); \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Einstweilen denken wir uns die Grössen b_{hi} beliebig gegeben. (Weiter unten werden wir gewisse Bedingungen finden, denen diese Grössen genügen müssen, wenn Functionen der verlangten Art existiren sollen.) Die ganze Zahl δ kann einen beliebigen Werth haben, den wir positiv voraussetzen dürfen, denn durch gleichzeitige Aenderung der Vorzeichen von w_1, w_2, w_3, b_{hi} wird der Fall eines negativen δ auf den eines positiven zurückgeführt.

Den Constanten C_1, C_2, C_3 dürfen wir beliebige Werthe beilegen, denn eine Aenderung dieser Constanten ist mit einer Aenderung der Argumente w_1, w_2, w_3 um gewisse additive Constanten gleichbedeutend. Wir behalten uns also vor, über diese Constanten in der Folge eine passende Verfügung zu treffen.

Functionen, welche den in (5.) und (6.) ausgedrückten Bedingungen genügen, sollen *Θ-Functionen der Ordnung δ* genannt werden. Die Quotienten zweier Θ-Functionen gleicher Ordnung sind sechsfach periodische Functionen mit den Periodensystemen:

$$\begin{array}{cccccc} \pi i, & 0, & 0, & b_{11}, & b_{12}, & b_{13}, \\ 0, & \pi i, & 0, & b_{21}, & b_{22}, & b_{23}, \\ 0, & 0, & \pi i, & b_{31}, & b_{32}, & b_{33} \end{array}$$

und sollen *sechsfach periodische Functionen der Ordnung δ* genannt werden.

Die definitive Darstellung der Functionen Θ geschieht nun durch die Bestimmung der Constanten B_{h_1,h_2,h_3} in der Reihe (5.) mit Hülfe der Bedingungen (6.). Es ergeben sich nämlich durch Einsetzen der Reihe (5.) in die Gleichungen (6.) die Relationen:

$$(7.)\qquad \begin{cases} B_{h_1,h_2,h_3}\, e^{2(h_1 b_{11}+h_2 b_{21}+h_3 b_{31})} = C_1 B_{h_1+\delta,h_2,h_3}, \\ B_{h_1,h_2,h_3}\, e^{2(h_1 b_{12}+h_2 b_{22}+h_3 b_{32})} = C_2 B_{h_1,h_2+\delta,h_3}, \\ B_{h_1,h_2,h_3}\, e^{2(h_1 b_{13}+h_2 b_{23}+h_3 b_{33})} = C_3 B_{h_1,h_2,h_3+\delta}. \end{cases}$$

Setzt man in der ersten dieser Gleichungen $h_2+\delta$ an Stelle von h_2 und in der zweiten $h_1+\delta$ an Stelle von h_1, benutzt wieder die Gleichungen (7.) und verfährt analog mit je zwei Gleichungen dieses Systems, so erkennt man, dass dieselben nicht anders bestehen können als unter der Bedingung:

$$b_{23} = b_{32},\ b_{31} = b_{13},\ b_{12} = b_{21}.$$

Hierin also liegt die erste Bedingung für die Existenz von Θ-Functionen, welche nunmehr als erfüllt angenommen werden soll.

Wir können nun jede beliebige ganze Zahl h_1 in die Form setzen:

$$h_1 = n_1\delta + \nu_1,$$

worin ν_1 eine der Zahlen 0, 1, 2, ... $\delta-1$, n_1 irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Stellt man daher die erste der Gleichungen (7.), indem man ν_1 festhält, für die Zahlen $n_1 = 0, 1, 2, \ldots n_1 - 1$ auf und multiplicirt alle so sich ergebenden Gleichungen, so folgt:

$$B_{h_1,h_2,h_3} = B_{\nu_1,h_2,h_3} C_1^{-n_1} e^{2n_1(h_1 b_{11} + h_2 b_{21} + h_3 b_{31})} e^{-\delta n_1(n_1+1) b_{11}}.$$

Diese Formel vereinfacht sich etwas, wenn wir, wozu wir nach der oben gemachten Bemerkung berechtigt sind, setzen:

$$C_1 = e^{-\delta b_{11}},$$

wodurch wir erhalten:

$$B_{h_1,h_2,h_3} = B_{\nu_1,h_2,h_3} e^{2n_1 \sum_i h_i b_{i1} - \delta n_1^2 b_{11}},$$

worin n_1 übrigens nicht nothwendig positiv ist.

Auf die gleiche Weise ergiebt sich:

$$B_{\nu_1,h_2,h_3} = B_{\nu_1,\nu_2,h_3} e^{2n_2 \sum_i h_i b_{i2} - \delta n_2^2 b_{22} - 2\delta b_{12} n_1 n_2};$$

$$B_{\nu_1,\nu_2,h_3} = B_{\nu_1,\nu_2,\nu_3} e^{2n_3 \sum_i h_i b_{i3} - \delta n_3^2 b_{33} - 2\delta n_3 (b_{13} n_1 + b_{23} n_2)}$$

indem man setzt:

$$h_2 = n_2 \delta + \nu_2; \quad h_3 = n_3 \delta + \nu_3$$

im gleichen Sinne wie oben $h_1 = n_1 \delta + \nu_1$, und:

$$C_2 = e^{-\delta b_{22}}; \quad C_3 = e^{-\delta b_{33}},$$

und endlich durch Multiplication dieser drei Gleichungen:

$$B_{h_1,h_2,h_3} = B_{\nu_1,\nu_2,\nu_3} e^{2 \sum_i \sum_k b_{ik} n_i h_k - \delta \sum_i \sum_k b_{ik} n_i n_k},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$B_{h_1,h_2,h_3} = B_{\nu_1,\nu_2,\nu_3} e^{\delta \sum_i \sum_k b_{ik} n_i n_k + 2 \sum_i \sum_k b_{ik} n_i \nu_k}.$$

Hieraus folgt, dass alle Θ-Functionen von der Ordnung δ linear durch δ^3 unter ihnen ausdrückbar sind, und dass die allgemeinste Function dieser Art δ^3 willkürliche Constanten linear und homogen enthält. Die speciellen Θ-Functionen, auf welche uns die Untersuchung geführt hat, erhalten folgenden Ausdruck:

$$\Theta\binom{w_1, w_2, w_3}{\nu_1, \nu_2, \nu_3} = e^{2 \sum_i \nu_i w_i} \sum_{n_1,n_2,n_3} e^{\delta \sum_i \sum_k b_{ik} n_i n_k + 2 \sum_i n_i (\delta w_i + \sum_k b_{ik} \nu_k)}.$$

Die Quotienten zweier solcher Functionen sind sechsfach periodische Functionen von der Ordnung δ.

Für $\delta = 1$ existirt nur eine Θ-Function, nämlich:

$$\vartheta(w_1, w_2, w_3; b) = \sum_{n_1,n_2,n_3} e^{\sum\limits_i \sum\limits_k b_{ik} n_i n_k + 2\sum\limits_i n_i w_i},$$

und demnach *giebt es keine sechsfach periodische Functionen erster Ordnung.* Dagegen sind durch diese Function ϑ die Functionen Θ alle ausdrückbar in der Weise:

$$\Theta\binom{w_1, w_2, w_3}{\nu_1, \nu_2, \nu_3} = e^{2\sum\limits_i \nu_i w_i} \vartheta(u_1, u_2, u_3; \delta b),$$

wenn rechts $u_i = \delta w_i + \sum\limits_k b_{ik} \nu_k$ und δb_{ik} statt b_{ik} gesetzt wird.

Es sind nun die Constanten b_{ik} ausser der bereits gefundenen einer weiteren Bedingung zu unterwerfen welche darin besteht, dass die Reihe ϑ für alle Werthe der Argumente $w_1 . w_2, w_3$ convergirt. Diese Convergenz findet bekanntlich statt, wenn die reellen Theile b'_{ik} der Grössen b_{ik} so beschaffen sind, dass die Function $\sum\limits_i \sum\limits_k b'_{ik} x_i x_k$ sich durch drei negative Quadrate darstellen lässt, so dass dieselbe für reelle Werthe von x_1, x_2, x_3 nur negative Werthe annimmt. Die Reihe kann nicht convergiren, wenn diese Function auch positive Werthe annehmen kann, denn dann kommen in der Reihe einzelne Glieder vor, die über alle Grenzen wachsen.

Nur unter besonderen Voraussetzungen über die Anordnung der Summation und nicht für alle Werthe der Argumente würde noch Convergenz stattfinden können, wenn die Function $\sum b'_{ik} x_i x_k$ durch weniger als drei negative Quadrate darstellbar wäre, wenn also die Determinante $\sum \pm b'_{11} b'_{22} b'_{33}$ verschwinden sollte. Diese Annahme schliessen wir daher ebenfalls aus.

Die hierdurch den Grössen b'_{ik} auferlegte Beschränkung lässt sich in der Form aufstellen, dass die drei Ausdrücke:

$$b'_{11}, \quad b'^2_{12} - b'_{11} b'_{22}, \quad \sum \pm b'_{11} b'_{22} b'_{33}$$

negative Werthe haben müssen.

§. 2. Die ϑ-Functionen.

Da sich bei den letzten Betrachtungen ergeben hat, dass sechsfach periodische Functionen der ersten Ordnung nicht existiren, so lenken wir jetzt unsere Aufmerksamkeit auf die einfachsten unter den sechsfach periodischen Functionen, nämlich auf die von der zweiten Ordnung. Diese sind darstellbar als Quotienten zweier Θ-Functionen zweiter Ordnung, welch letztere alle durch $2^3 = 8$ unter ihnen linear und homogen ausgedrückt werden können.

Eine dieser Θ-Functionen ist das Quadrat der Function ϑ selbst, und man kann daraus andere herleiten durch Vermehrung der Argumente um gewisse Constanten und Hinzufügung von Exponentialfactoren.

Bezeichnen wir nunmehr wieder wie zu Anfang die Variablen mit u_1, u_2, u_3 und die Perioden mit a_{ik}, so erwächst uns jetzt die Aufgabe, die Constanten f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3 so zu bestimmen, dass die Function:

$$\Psi(u_1, u_2, u_3) = C e^{2(g_1 u_1 + g_2 u_2 + g_3 u_3)} \vartheta^2(u_1 + f_1, u_2 + f_2, u_3 + f_3)$$

eine Θ-Function zweiter Ordnung werde.

Da die Function Ψ für jedes der Argumente um πi periodisch sein soll, so müssen g_1, g_2, g_3 ganze Zahlen sein. Ferner muss Ψ der Bedingung genügen:

$$\Psi(u_1 + a_{1i}, u_2 + a_{2i}, u_3 + a_{3i}) = e^{-2(2u_i + a_{ii})} \Psi(u_1, u_2, u_3); \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Nach der fundamentalen Eigenschaft der Function ϑ ergiebt sich aber:

$$\Psi(u_1 + a_{1i}, u_2 + a_{2i}, u_3 + a_{3i}) = e^{2(g_1 a_{1i} + g_2 a_{2i} + g_3 a_{3i}) - 4f_i} e^{-2(2u_i + a_{ii})} \Psi(u_1, u_2, u_3),$$

und unsere Forderung ist erfüllt, wenn wir setzen:

$$2f_i = h_i \pi i + g_1 a_{1i} + g_2 a_{2i} + g_3 a_{3i} = \varpi_i; \qquad (i = 1, 2, 3),$$

wenn h_1, h_2, h_3 irgend welche ganze Zahlen sind, d. h. wenn die Constanten f_1, f_2, f_3 die Hälften eines Systems ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 zusammengehöriger Perioden kurz ein *System zusammengehöriger halber Perioden* sind.

Die so definirte Function Ψ ändert sich nicht, wenn die ganzen Zahlen h_1, h_2, h_3 irgend wie um gerade Zahlen geändert werden, und sie nimmt einen constanten Factor an bei der gleichen Aenderung der Zahlen g_1, g_2, g_3.

Der constante Factor C in der Function Ψ war bis jetzt noch völlig unbestimmt. Er kann auch von den ganzen Zahlen g_1, g_2, g_3 abhängig angenommen werden, und es liegt nahe, diese Abhängigkeit so zu bestimmen, dass auch die Aenderung von g_1, g_2, g_3 um gerade Zahlen keine Aenderung von Ψ zur Folge hat. Ein Verfahren, welches durchaus analog ist mit dem oben (pag. 10) zur Bestimmung der Reihencoëfficienten der Function Θ angewandten, führt zu dem Ausdruck:

$$C = e^{\frac{1}{2} \sum\limits_i \sum\limits_k a_{ik} g_i g_k + \pi i (g_1 h_1 + g_2 h_2 + g_3 h_3)}.$$

Hiernach ergiebt sich für die Function Ψ:

$$\Psi(u_1, u_2, u_3) = e^{\frac{1}{2}\sum\limits_i\sum\limits_k a_{ik} g_i g_k + \pi i \sum\limits_i g_i h_i + 2\sum\limits_i g_i u_i} \vartheta^2(u_1 + \tfrac{1}{2}\varpi_1, u_2 + \tfrac{1}{2}\varpi_2, u_3 + \tfrac{1}{2}\varpi_3)$$

ein Ausdruck, der ungeändert bleibt, wenn die Zahlen g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3 beliebig um gerade Zahlen geändert werden und man erhält demnach alle von einander verschiedenen Functionen Ψ wenn man für diese sechs Zahlen alle möglichen Combinationen von 0 und 1 setzt. Demnach haben wir 64 Functionen Ψ, von denen wir wissen, dass sie alle linear, durch acht derselben ausdrückbar sind. Die Quotienten je zweier dieser Functionen liefern die sechsfach periodischen Functionen zweiter Ordnung.

Die Quadratwurzeln aus den soeben definirten Functionen Ψ sind Functionen, welche mit der Function ϑ nahe verwandt sind, und die wir daher in folgender Weise bezeichnen:

$$(1.)\ \vartheta\begin{Bmatrix} g_1 g_2 g_3 \\ h_1 h_2 h_3 \end{Bmatrix}(u_1, u_2, u_3) = e^{\frac{1}{4}\sum\limits_i\sum\limits_k a_{ik} g_i g_k + \frac{1}{2}\pi i \sum\limits_i g_i h_i + \sum\limits_i g_i u_i} \vartheta(u_1 + \tfrac{1}{2}\varpi_1, u_2 + \tfrac{1}{2}\varpi_2, u_3 + \tfrac{1}{2}\varpi_3).$$

Diese Function ändert sich nicht, wenn eine der Zahlen g um zwei vermehrt oder vermindert wird, und erhält den Factor $(-1)^{g_i}$ wenn h_i um zwei wächst. Wir erhalten also, abgesehen vom Vorzeichen, alle diese Functionen, wenn wir den Zahlencomplex

$$\begin{Bmatrix} g_1\, g_2\, g_3 \\ h_1\, h_2\, h_3 \end{Bmatrix}$$

auf alle mögliche Arten aus den Zahlen 0 und 1 bilden, also im Ganzen 64 solcher Functionen, worin die ursprüngliche ϑ-Function eingeschlossen ist, nämlich dem Complex $\begin{Bmatrix} 000 \\ 000 \end{Bmatrix}$ entsprechend.

Der Zahlencomplex $\begin{pmatrix} g_1\, g_2\, g_3 \\ h_1\, h_2\, h_3 \end{pmatrix}$ heisst die *Charakteristik* der ϑ-Function und es werde die Festsetzung getroffen, dass zwei Charakteristiken nicht von einander verschieden sind, wenn die sie zusammensetzenden Zahlen, Elemente genannt, sich um gerade Zahlen von einander unterscheiden. Für die meisten Untersuchungen nämlich, die weiterhin mit den Charakteristiken noch geführt werden, ist eine Aenderung der Elemente um gerade Zahlen gleichgültig; nur bei der Bestimmung des Vorzeichens der ϑ-Functionen ist nach der eben gegebenen Regel eine kleine Vorsicht nothwendig. Nach dieser Festsetzung giebt es im Ganzen 64 Charakteristiken, welche, wo es ohne Unklarheit geschehen kann, auch durch einen einfachen Buchstaben, in Klammern gesetzt, wie (ε) bezeichnet werden sollen.

Die Charakteristiken stehen auch in einer bestimmten Beziehung zu den Systemen zusammengehöriger halber Perioden. Ist nämlich:

$$\begin{aligned}\varpi_1 &= h_1\pi i + g_1 a_{11} + g_2 a_{21} + g_3 a_{31},\\ \varpi_2 &= h_2\pi i + g_1 a_{12} + g_2 a_{22} + g_3 a_{32},\\ \varpi_3 &= h_3\pi i + g_1 a_{13} + g_2 a_{23} + g_3 a_{33},\end{aligned}$$

so soll die Charakteristik $\binom{g_1\,g_2\,g_3}{h_1\,h_2\,h_3}$ die Charakteristik des Systems $\frac{1}{2}\varpi_1$, $\frac{1}{2}\varpi_2$, $\frac{1}{2}\varpi_3$ genannt und als solche mit (ϖ) bezeichnet werden.

Unter der Summe zweier Charakteristiken verstehen wir die Charakteristik, welche entsteht, wenn die entsprechenden Elemente addirt werden. Ist also:

$$(\varepsilon) = \binom{g_1\,g_2\,g_3}{h_1\,h_2\,h_3}; \quad (\varepsilon') = \binom{g'_1\,g'_2\,g'_3}{h'_1\,h'_2\,h'_3},$$

so ist:

$$(\varepsilon)+(\varepsilon') = (\varepsilon+\varepsilon') = \binom{g_1+g'_1,\, g_2+g'_2,\, g_3+g'_3}{h_1+h'_1,\, h_2+h'_2,\, h_3+h'_3}.$$

Nach unserer Festsetzung ist also die Summe zweier Charakteristiken nicht verschieden von ihrer Differenz.

Wir stellen hiernach zunächst einige der fundamentalen Eigenschaften der 64 ϑ-Functionen zusammen, auf die wir hier geführt worden sind.

Zunächst erhält man elegante Reihenentwickelungen für diese Functionen, wenn man für die ϑ-Function auf der rechten Seite von 1 die Entwickelung (aus §. 1) einsetzt. Es folgt auf diese Weise:

$$(2.)\quad \vartheta\begin{Bmatrix}g_1 g_2 g_3\\ h_1 h_2 h_3\end{Bmatrix}(u_1, u_2, u_3) = \sum_{n_1,n_2,n_3} e^{\sum\limits_i\sum\limits_k a_{ik}\left(n_i+\frac{g_i}{2}\right)\left(n_k+\frac{g_k}{2}\right)+2\sum\limits_i\left(n_i+\frac{g_i}{2}\right)\left(u_i+\frac{h_i\pi i}{2}\right)}.$$

Setzen wir $(\varepsilon) = \binom{g_1\,g_2\,g_3}{h_1\,h_2\,h_3}$ so ergeben sich sowohl aus dieser Entwickelung als auch aus der Gleichung (1.) die nachstehenden Formeln:

$$(3.)\quad \begin{cases}\vartheta\{\varepsilon\}(u_1+\pi i, u_2, u_3) = (-1)^{g_1}\vartheta\{\varepsilon\}(u_1, u_2, u_3),\\ \vartheta\{\varepsilon\}(u_1, u+\pi i, u_3) = (-1)^{g_2}\vartheta\{\varepsilon\}(u_1, u_2, u_3),\\ \vartheta\{\varepsilon\}(u_1, u_2, u_3+\pi i) = (-1)^{g_3}\vartheta\{\varepsilon\}(u_1, u_2, u_3),\end{cases}$$

$$\vartheta\{\varepsilon\}(u_1+a_{1i}, u_2+a_{2i}, u_3+a_{3i}) = (-1)^{h_i} e^{-2u_i-a_{ii}}\vartheta\{\varepsilon\}(u_1, u_2, u_3); \qquad (i=1,2,3).$$

Diese Gleichungen können ihrerseits wieder dazu dienen, um in Verbindung mit der Voraussetzung der Stetigkeit die Reihe (2.) herzuleiten, genau nach derselben Methode, nach der oben die Entwickelung der Θ-Functionen abgeleitet wurde, und demnach genügen diese Bedingungen um die 64 Functionen $\vartheta\{\varepsilon\}(u_1, u_2, u_3)$ bis auf constante Factoren völlig zu definiren.

Man ersieht ferner hieraus, dass zwar das Quadrat des Quotienten zweier Functionen $\vartheta\{\varepsilon\}(u_1, u_2, u_3)$ die verlangte Periodicität besitzt, nicht aber ein solcher Quotient selbst. Gleichwohl haben auch diese Quotienten eine sechsfache Periodicität, jedoch so, dass gewisse unter den zusammengehörigen Periodensystemen das doppelte der ursprünglich gegebenen sind.

Die Gleichungen (3.) lassen sich in eine allgemeinere zusammenfassen, wie folgt: Es bedeute p_1, p_2, p_3 ein beliebiges System zusammmengehöriger Perioden:

$$\begin{aligned} p_1 &= \mu_1 \pi i + \nu_1 a_{11} + \nu_2 a_{12} + \nu_3 a_{13}, \\ p_2 &= \mu_2 \pi i + \nu_1 a_{21} + \nu_2 a_{22} + \nu_3 a_{23}, \\ p_3 &= \mu_3 \pi i + \nu_1 a_{31} + \nu_2 a_{32} + \nu_3 a_{33}. \end{aligned}$$

Durch die wiederholte Anwendung der Formeln (3.) ergiebt sich dann:

$$(4.)\qquad \vartheta\{\varepsilon\}(u_h + p_h) = (-1)^{\sum\limits_i (g_i\mu_i + h_i\nu_i)}\, e^{-2\sum\limits_i \nu_i u_i - \sum\limits_i\sum\limits_k a_{ik}\nu_i\nu_k}\, \vartheta\{\varepsilon\}(u_h)$$

oder indem man $u_h - \frac{1}{2}p_h$ an Stelle von u_h setzt:

$$\vartheta\{\varepsilon\}(u_h + \tfrac{1}{2}p_h) = (-1)^{\sum\limits_i (g_i\mu_i + h_i\nu_i + \mu_i\nu_i)}\, e^{-2\sum\limits_i \nu_i u_i}\, \vartheta\{\varepsilon\}(u_h - \tfrac{1}{2}p_h),$$

woraus man für $\{\varepsilon\} = \{0\}$ mit Hülfe von (1.) noch die Formel herleitet:

$$(5.)\qquad \vartheta(u_h + \tfrac{1}{2}p_h)\,\vartheta(u_h - \tfrac{1}{2}p_h) = e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_i\sum\limits_k a_{ik}\nu_i\nu_k}\, \vartheta^2\{p\}(u_h).$$

In diesen Formeln ist zur Abkürzung in den ϑ-Functionen nur je ein Argument mit dem allgemeinen Index h geschrieben, was von nun an öfter geschehen soll. Diese Abkürzung ist zwar nicht so correct wie die von *Riemann* eingeführte, sie ist jedoch einfacher und kann hier ohne Nachtheil angewandt werden, da wir durchweg nur von ϑ-Functionen mit drei Argumenten zu handeln haben, ein Irrthum also nicht zu besorgen ist.

Ebenso wie in der Formel (1.) die Function $\vartheta(u_h)$ zur Darstellung aller Functionen $\vartheta\{\varepsilon\}(u_h)$ angewandt ist, kann man auch von jeder beliebigen unter diesen letzteren ausgehen und durch dieselbe alle anderen ausdrücken. Dies geschieht mittelst der Formel:

$$(6.)\qquad \vartheta\{\varpi\}(u_h + \tfrac{1}{2}\varpi'_h) = e^{-\frac{1}{4}\sum\limits_i\sum\limits_k a_{ik}g'_i g'_k - \frac{1}{2}\pi i \sum\limits_i g'_i(h_i + h') - \sum\limits_i g'_i u_i}\, \vartheta\{\varpi + \varpi'\}(u_h),$$

wenn $\frac{1}{2}\varpi_h$, $\frac{1}{2}\varpi'_h$ zwei Systeme zusammengehöriger halber Perioden sind mit den Charakteristiken:

$$(\varpi) = \binom{g_1 g_2 g_3}{h_1 h_2 h_3}, \quad (\varpi') = \binom{g'_1 g'_2 g'_3}{h'_1 h'_2 h'_3},$$

woraus man noch ableitet:

$$(7.) \quad \vartheta\{\varpi + \varpi'\}(u_h) = (-1)^{\sum\limits_i h'_i(g_i - g'_i)} \vartheta\{\varpi - \varpi'\}(u_h).$$

Es soll noch die Aenderung untersucht werden, welche die ϑ-Functionen bei gleichzeitiger Aenderung der Vorzeichen aller Argumente erleiden. Diese ergiebt sich am Einfachsten aus der Reihenentwickelung (2.). Setzen wir nämlich in dieser $-u_h$ an Stelle von u_h und gleichzeitig, was gestattet ist, $-n_h - g_h$ an Stelle von n_h, so folgt:

$$(8.) \quad \vartheta\begin{Bmatrix} g_1 g_2 g_3 \\ h_1 h_2 h_3 \end{Bmatrix}(u_1, u_2, u_3) = (-1)^{\sum\limits_i g_i h_i} \vartheta\begin{Bmatrix} g_1 g_2 g_3 \\ h_1 h_2 h_3 \end{Bmatrix}(-u_1, -u_2, -u_3).$$

Nennen wir daher die Charakteristik $\binom{g_1 g_2 g_3}{h_1 h_2 h_3}$ gerade oder ungerade, je nachdem die Summe

$$g_1 h_1 + g_2 h_2 + g_3 h_3$$

gerade oder ungerade ist, so folgt hieraus:

Die ϑ-Functionen mit geraden Charakteristiken sind gerade Functionen, die mit ungeraden Charakteristiken ungerade Functionen ihrer Argumente.

Die Anzahl der geraden Charakteristiken beträgt, wie bekannt, 36, die der ungeraden 28.

Da die ϑ-Functionen stetige Functionen sind, so folgt, dass die ungeraden ϑ-Functionen für die Werthe 0 der Argumente sämmtlich verschwinden, oder was dasselbe ist: die ursprüngliche ϑ-Function verschwindet für diejenigen Systeme zusammengehöriger halber Perioden als Argumente, welche eine ungerade Charakteristik haben. Allgemein schliessen wir hieraus nach der Formel (6.), dass eine beliebige ϑ-Function für diejenigen Systeme zusammengehöriger halber Perioden als Argumente verschwindet, deren Charakteristik mit der der ϑ-Function eine ungerade Charakteristik zur Summe hat.

§. 3. Gruppirung der Charakteristiken.

Nach dem zuletzt gefundenen Ergebniss hat man, um die halben Periodensysteme zu ermitteln, für welche eine ϑ-Function von gegebener Charakteristik verschwindet, solche Charakteristiken aufzusuchen, welche mit der gegebenen zusammen eine ungerade Charakteristik zur Summe haben, oder, mit anderen Worten, man hat die gegebene Charakteristik auf alle mögliche Arten in zwei andere zu zerlegen, von denen wenigstens eine ungerade ist.

Ueber diese Zerlegungen existirt eine Reihe von Sätzen, die für das Folgende von der grössten Wichtigkeit sind, welche ihrer Natur nach der combinatorischen Analysis angehören, und hier auch aus diesem Gesichtspunkte bewiesen werden sollen. Wir lösen daher für die nächsten Betrachtungen den Begriff der Charakteristik ganz ab von seiner Bedeutung für die ϑ-Functionen oder irgend welche andere Grössenbegriffe und betrachten den Zahlencomplex $\begin{pmatrix} g_1 g_2 g_3 \\ h_1 h_2 h_3 \end{pmatrix}$ als rein combinatorisches Gebilde, behalten übrigens die Bezeichnung *gerade* und *ungerade Charakteristik* bei.

Zunächst ist klar, dass man jede Charakteristik (ε) auf 32 Arten in zwei andere zerlegen kann; denn man kann zu (ε) jede Charakteristik hinzufügen, und erhält auf diese Weise jede mögliche Zerlegung zweimal. Ausgenommen hiervon ist nur die Charakteristik $\begin{pmatrix} 000 \\ 000 \end{pmatrix}$, welche sich nur in zwei gleiche Charakteristiken zerlegen lässt. Von diesen Zerlegungen sind die wichtigsten die in zwei ungerade Charakteristiken, welche desshalb in der beigefügten Tafel I. vollständig zusammengestellt sind.

Bei der Anlegung der vollständigen Tafel verfährt man am besten so, dass man sämmtliche Combinationen der 28 ungeraden Charakteristiken zu Paaren bildet, und jedes Paar in diejenige Reihe schreibt, die mit der Summe desselben bezeichnet ist. Man ist dadurch vor jedem überflüssigen Schritt gesichert. Handelt es sich um die Zerlegung einer bestimmten gegebenen Charakteristik, so kann man sich auch einfacherer Mittel bedienen.

Es lässt sich leicht aus einem viel allgemeineren Gesichtspunkt beweisen, dass die Anzahl der Zerlegungen einer gegebenen Charakteristik in zwei ungerade immer sechs beträgt $\left(\begin{pmatrix} 000 \\ 000 \end{pmatrix}\right.$ ausgenommen$\left.\right)$; hier möge die wirkliche Aufstellung aller Zerlegungen als Beweis dienen*). Es folgt hieraus sofort, dass jede Charakteristik auf 16 Arten in eine gerade und

*) Dehnt man diese Zerlegungen aus auf Charakteristiken von $2p$ Elementen, so lässt sich leicht durch den Schluss von p auf $p+1$ nachweisen, dass die Anzahl der Zerlegungen einer gegebenen Charakteristik in zwei ungerade immer $2^{p-2}(2^{p-1}-1)$ beträgt, was für $p=3$ unsere Zahl sechs giebt.

eine ungerade und auf zehn Arten in zwei gerade Charakteristiken zerlegt werden kann.

Nach diesen Erörterungen ordnen sich also die sämmtlichen 6.63 Paare von ungeraden Charakteristiken in Gruppen von je sechs Paaren in der Weise, dass die sämmtlichen Paare einer Gruppe die nämliche Summe ergeben, welche *Gruppencharakteristik* genannt wird. Als Gruppencharakteristiken treten alle von $\binom{000}{000}$ verschiedenen Charakteristiken auf. In der Tafel I. findet man sämmtliche Gruppen vollständig angegeben; jede ist in derselben durch die betreffende Gruppencharakteristik bezeichnet.

Wir entwickeln im Folgenden eine Reihe von Sätzen über diese Gruppen.

1. Es seien

$$(g) = \binom{g_1\, g_2\, g_3}{g'_1\, g'_2\, g'_3}, \qquad (h) = \binom{h_1\, h_2\, h_3}{h'_1\, h'_2\, h'_3}, \qquad (k) = \binom{k_1\, k_2\, k_3}{k'_1\, k'_2\, k'_3}$$

irgend drei Charakteristiken, die in der Beziehung zu einander stehen:

$$(g)+(h)+(k) = \binom{000}{000},$$

also:

$$(k) = (g)+(h),$$

ferner seien

$$(\alpha) = \binom{\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3}{\alpha'_1\, \alpha'_2\, \alpha'_3}, \qquad (\beta) = \binom{\beta_1\, \beta_2\, \beta_3}{\beta'_1\, \beta'_2\, \beta'_3}$$

zwei ungerade Charakteristiken, welche der Bedingung genügen:

$$(k) = (\alpha)+(\beta),$$

so dass das Paar (α), (β) in die Gruppe (k) gehört. (g) und (h) können beliebig gegeben sein. (k) ist durch dieselben bestimmt. Man hat unter diesen Voraussetzungen:

$$(g+h) = (\alpha+\beta),$$

also auch:

$$(g+\alpha) = (h+\beta); \qquad (g+\beta) = (h+\alpha).$$

Es soll untersucht werden, ob diese beiden letzteren Charakteristiken ungerade oder gerade sind, wovon es abhängig ist, ob die Charakteristiken (α), (β) in den Gruppen (g), (h) vorkommen oder nicht. Zu dem Ende betrachten wir die Summe:

$$\sum_1^3 (g_i+\alpha_i)(g'_i+\alpha'_i) + \sum_1^3 (g_i+\beta_i)(g'_i+\beta'_i),$$

welche (modulo 2) congruent ist mit:

$$\sum_1^3 g_i(\alpha_i'+\beta_i')+\sum_1^3 g_i'(\alpha_i+\beta_i)\equiv\sum_1^3 g_i k_i'+\sum_1^3 g_i' k_i\equiv\sum_1^3 g_i g_i'+\sum_1^3 h_i h_i'+\sum_1^3 k_i k_i',$$

woraus sich sofort der Satz ergiebt:

Ist $\Sigma g_i g_i'+\Sigma h_i h_i'+\Sigma k_i k_i'\equiv 1$ (mod. 2), *sind also von den drei Charakteristiken* (g), (h), (k) *entweder zwei oder keine gerade, so ist von den beiden Charakteristiken* $(g+\alpha)$, $(g+\beta)$ *immer eine gerade und eine ungerade. Ist dagegen* $\Sigma g_i g_i'+\Sigma h_i h_i'+\Sigma k_i k_i'\equiv 0$ (mod. 2), *sind also von den Charakteristiken* (g), (h), (k) *entweder zwei oder keine ungerade, so sind die Charakteristiken* $(g+\alpha)$, $(g+\beta)$ *entweder beide gerade oder beide ungerade.*

2. Betrachten wir zunächst den ersten Fall und nehmen an, die sechs Paare der Gruppe (k) seien:

$$(\alpha_1)(\beta_1);\quad (\alpha_2)(\beta_2);\quad (\alpha_3)(\beta_3);\quad (\alpha_4)(\beta_4);\quad (\alpha_5)(\beta_5);\quad (\alpha_6)(\beta_6),$$

so können wir annehmen:

$$(g+\alpha_1),\quad (g+\alpha_2),\quad (g+\alpha_3),\quad (g+\alpha_4),\quad (g+\alpha_5),\quad (g+\alpha_6)$$

seien ungerade:

$$(g+\beta_1),\quad (g+\beta_2),\quad (g+\beta_3),\quad (g+\beta_4),\quad (g+\beta_5),\quad (g+\beta_6)$$

seien gerade, und darauf gestützt erhalten wir die vollständigen Gruppen (g), (h), (k), nämlich:

$$(g):\ (g+\alpha_1)(\alpha_1);\ (g+\alpha_2)(\alpha_2);\ (g+\alpha_3)(\alpha_3);\ (g+\alpha_4)(\alpha_4);\ (g+\alpha_5)(\alpha_5);\ (g+\alpha_6)(\alpha_6),$$

$$(h):\ (g+\alpha_1)(\beta_1);\ (g+\alpha_2)(\beta_2);\ (g+\alpha_3)(\beta_3);\ (g+\alpha_4)(\beta_4);\ (g+\alpha_5)(\beta_5);\ (g+\alpha_6)(\beta_6),$$

$$(k):\quad (\alpha_1)(\beta_1);\quad (\alpha_2)(\beta_2);\quad (\alpha_3)(\beta_3);\quad (\alpha_4)(\beta_4);\quad (\alpha_5)(\beta_5);\quad (\alpha_6)(\beta_6).$$

Dass diese Paare alle von einander verschieden sind, ergiebt sich leicht, denn wäre etwa

$$(g+\alpha_1)=(\alpha_2),$$

so würde daraus folgen:

$$(g+\beta_1)=(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1)=(k+\alpha_2)=(\beta_2),$$

und $(g+\beta_1)$ wäre also, dem obigen Satze entgegen, gleichfalls ungerade. Auf den gleichen Widerspruch führt die Annahme $(g+\alpha_1)=(\beta_2)$.

Drei Gruppen von der hier vorausgesetzten Eigenschaft stehen also in der Beziehung zu einander, dass je zwei derselben sechs Charakteristiken gemein haben, von denen keine zwei ein Paar bilden.

Im Ganzen kommen in drei solchen Gruppen nur 18 von den 28 ungeraden Charakteristiken vor.

3. Haben ferner die drei Gruppencharakteristiken (g), (h), (k) die Eigenschaft, dass

$$\Sigma g_i g_i' + \Sigma h_i h_i' + \Sigma k_i k_i' \equiv 0 \pmod{2},$$

so lässt sich zunächst nachweisen, dass die drei Gruppen zusammengenommen alle 28 ungerade Charakteristiken enthalten müssen. Ist nämlich $(\alpha) = \binom{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1' \alpha_2' \alpha_3'}$ eine beliebige ungerade Charakteristik, so ist unter der hier gemachten Voraussetzung:

$$\Sigma(g+\alpha_i)(g'+\alpha_i') + \Sigma(h_i+\alpha_i)(h_i'+\alpha_i') + \Sigma(k_i+\alpha_i)(k_i'+\alpha_i') \equiv \Sigma \alpha_i \alpha_i' \equiv 1 \pmod{2}.$$

Von den drei Charakteristiken $(g+\alpha)$, $(h+\alpha)$, $(k+\alpha)$ ist daher entweder eine oder es sind alle drei ungerade; demnach kommt (α) entweder in einer oder in allen dreien Gruppen (g), (h), (k) vor.

Da nun die Anzahl aller in drei Gruppen zusammengenommen enthaltenen Charakteristiken 36 ist, die Anzahl der von einander verschiedenen aber nur 28, so müssen vier Charakteristiken in allen dreien Gruppen, je acht nur in einer Gruppe enthalten sein.

Ist nun wieder die vollständige Gruppe (k)

$$(\alpha_1)(\beta_1);\quad (\alpha_2)(\beta_2);\quad (\alpha_3)(\beta_3);\quad (\alpha_4)(\beta_4);\quad (\alpha_5)(\beta_5);\quad (\alpha_6)(\beta_6),$$

so müssen demnach von den zwölf Charakteristiken $(g+\alpha_i)$, $(g+\beta_i)$ vier ungerade und acht gerade sein. Da wir überdies aus (1.) wissen, dass die beiden Charakteristiken $(g+\alpha_i)$, $(g+\beta_i)$ gleichzeitig gerade und ungerade sind, so können wir annehmen, dass

$$(g+\alpha_1),\ (g+\beta_1);\quad (g+\alpha_2),\ (g+\beta_2)$$

die vier ungeraden unter jenen Charakteristiken seien. Nun ist aber

$$(g+\alpha_1)+(g+\beta_1) = (g+\alpha_2)+(g+\beta_2) = (k)$$

und wir würden zwei weitere Zerlegungen der Gruppe (k) haben, wenn dieselben nicht schon unter den obigen $(k) = (\alpha_i)+(\beta_i)$ enthalten wären.

Nun kann aber nicht etwa $(g+\alpha_1) = (\alpha_3)$ sein, weil sonst gegen die Voraussetzung $(g+\alpha_3) = (\alpha_1)$ ungerade wäre und demnach dürfen wir, unbeschadet der Allgemeinheit annehmen:

$$(g+\alpha_1) = (\alpha_2), \qquad (g+\beta_1) = (\beta_2).$$

Demnach kommen in den drei Gruppen (g), (h), (k) folgende Paare vor:

$$\begin{array}{lll} (g): & (\alpha_1)(\alpha_2); & (\beta_1)(\beta_2), \\ (h): & (\alpha_1)(\beta_2); & (\alpha_2)(\beta_1), \\ (k): & (\alpha_1)(\beta_1); & (\alpha_2)(\beta_2), \end{array}$$

während ausserdem in den drei Gruppen die 24 übrigen ungeraden Charakteristiken je nur einmal vorkommen.

Drei Gruppen von der hier angenommenen Eigenschaft haben also vier Charakteristiken gemein, welche in jeder der Gruppen gepaart sind.

Wir ziehen aus diesen Ergebnissen folgenden Satz:

I. *Irgend zwei Gruppen haben entweder sechs Charakteristiken gemein, von denen keine zwei ein Paar bilden, oder sie haben vier Charakteristiken gemein, von denen in jeder der beiden Gruppen zweimal je zwei zu einem Paar verbunden sind.*

4. Es folgt hieraus leicht der weitere Satz:

II. *Die Summen dreier ungerader Charakteristiken einer Gruppe, von denen keine zwei ein Paar bilden, ist immer eine gerade Charakteristik.*

Es sei nämlich (g) eine beliebige Gruppencharakteristik und unter den Paaren dieser Gruppe mögen folgende vorkommen:

$$(g) = (a) + (\alpha) = (b) + (\beta) = (c) + (\gamma),$$

wir können hieraus drei Gruppen ableiten von der Eigenschaft wie sie in (3.) vorausgesetzt ist:

$$\begin{aligned}(g) &= (a) + (\alpha) = (b) + (\beta),\\ (h) &= (a) + (\beta) = (b) + (\alpha),\\ (k) &= (a) + (b) = (\alpha) + (\beta).\end{aligned}$$

Wäre nun $(a)+(b)+(c)$ ungerade, so würde (c) ausser in (g) auch in (k) vorkommen, und diese beiden Gruppen würden fünf Charakteristiken gemein haben, was nach (3.) unmöglich ist. Also ist $(a)+(b)+(c)$ gerade, w. z. b. w.

5. Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

III. *Irgend drei ungerade Charakteristiken $(a), (b), (c)$, deren Summe $(a+b+c)$ gerade ist, kommen immer in mehreren Gruppen vor, in denen keine zwei derselben ein Paar bilden.*

Setzen wir nämlich:

$$(g) = (a) + (b) = (\alpha) + (\beta)$$

so dass (α) (β) ein weiteres Paar der Gruppe (g) ist, so kommt nach der Voraussetzung in dieser Gruppe (c) nicht vor und kann daher auch weder mit (α) noch mit (β) übereinstimmen. Bilden wir nun die drei Gruppen:

$$\begin{aligned}(g) &= (a) + (b) = (\alpha) + (\beta),\\ (h) &= (a) + (\alpha) = (b) + (\beta),\\ (k) &= (a) + (\beta) = (b) + (\alpha),\end{aligned}$$

welche den Bedingungen von (3.) genügen, so müssen diese zusammen alle ungeraden Charakteristiken, also auch (c) enthalten. Da aber (c) nicht in (g) vorkommt, so muss es in (h) oder in (k) enthalten sein, womit unser Satz bewiesen ist.

6. Hieran schliessen sich zwei Sätze über die Zerlegung gegebener Charakteristiken in drei ungerade, welche so lauten:

IV. *Jede gerade Charakteristik,* $\binom{000}{000}$ *eingeschlossen, lässt sich auf 56 Arten in drei von einander verschiedene ungerade Charakteristiken zerlegen.*

Ist nämlich (g) eine gegebene gerade, (α) eine beliebige ungerade Charakteristik, so lässt sich $(g+\alpha)$ auf sechs verschiedene Arten in zwei ungerade Charakteristiken $(\beta+\gamma)$ zerlegen und man erhält so für jedes (α) sechs verschiedene Zerlegungen:

$$(g) = (\alpha+\beta+\gamma).$$

Es würden sich aber dieselben Zerlegungen ergeben haben aus den Gruppen $(g+\beta)$, $(g+\gamma)$ so dass die Zahl der von einander verschiedenen Zerlegungen $\frac{6.28}{3} = 56$ ist.

V. *Jede ungerade Charakteristik lässt sich auf 45 Arten in drei verschiedene und auf 73 Arten überhaupt in drei ungerade Charakteristiken zerlegen.*

Denn ist wieder (g) eine gegebene, (α) eine beliebige davon verschiedene ungerade Charakteristik, so kann man $(g+\alpha)$ auf fünf Arten in zwei von (g) und (α) verschiedene ungerade Charakteristiken $(\beta+\gamma)$ zerlegen, woraus man wie oben schliesst, dass die Anzahl der so erhaltenen Zerlegungen $\frac{5.27}{3} = 45$ beträgt. Dazu kommen noch 28 solche Zerlegungen, bei denen eine Charakteristik $= (g)$, die beiden anderen einander gleich sind, was im Ganzen 73 giebt.

7. Wir kehren zu unseren Gruppen zurück um noch einen Satz zu beweisen, der sich auf die dreien Gruppen gemeinsamen Charakteristiken bezieht.

Drei Gruppen, von denen je zwei sechs Charakteristiken gemein haben, können nicht alle drei die nämlichen sechs enthalten. Wäre nämlich:

$$(g) = (\alpha_1+\beta_1) = (\alpha_2+\beta_2) = (\alpha_3+\beta_3) = (\alpha_4+\beta_4) = (\alpha_5+\beta_5) = (\alpha_6+\beta_6),$$
$$(g') = (\alpha_1+\beta_1') = (\alpha_2+\beta_2') = (\alpha_3+\beta_3') = (\alpha_4+\beta_4') = (\alpha_5+\beta_5') = (\alpha_6+\beta_6'),$$
$$(g'') = (\alpha_1+\beta_1'') = (\alpha_2+\beta_2'') = (\alpha_3+\beta_3'') = (\alpha_4+\beta_4'') = (\alpha_5+\beta_5'') = (\alpha_6+\beta_6''),$$

so müsste nach dem Satz I. die Gruppe:

$$(g+g') = (\beta_1+\beta_1') = (\beta_2+\beta_2') = (\beta_3+\beta_3') = (\beta_4+\beta_4') = (\beta_5+\beta_5') = (\beta_6+\beta_6')$$

mit der Gruppe (g'') irgend Charakteristiken gemein haben, es müssten also unter den Charakteristiken (α), (β), (β'), (β'') einander gleiche vorkommen was nicht möglich ist.

Betrachten wir daher jetzt die beiden Gruppen (g), (g') und suchen eine dritte Gruppe (g'') auf, welche mit jeder derselben sechs Charakteristiken gemeinschaftlich haben soll. Nach dem soeben Bewiesenen können in dieser Gruppe (g'') nicht alle (α) vorkommen und es möge daher etwa (α_1) in derselben fehlen. Nach der Voraussetzung muss dann (β_1) und (β_1') in (g'') vorkommen. Sind diese in (g'') gepaart, so ergiebt sich:

$$(g'') = (g)+(g') = (\beta_1)+(\beta_1').$$

Die drei Gruppen stehen in der Beziehung zu einander, wie die in (2.) betrachteten und enthalten gar keine allen dreien gemeinschaftliche Charakteristik.

Sind dagegen (β_1) und (β_1') in (g'') nicht gepaart, ist also etwa:

$$(g'') = (\beta_1+\gamma_1) = (\beta_1'+\gamma_1'),$$

so muss nach unseren Voraussetzungen (γ_1') in der Gruppe (g), (γ_1) in (g') vor kommen, also etwa (γ_1') in $(\alpha_2+\beta_2)$. Wäre nun $(\gamma_1') = (\alpha_2)$, so würde folgen:

$$(g'') = (\beta_1'+\alpha_2) = (\beta_2'+\alpha_1)$$

gegen die Voraussetzung dass (α_1) in (g'') nicht vorkommt. Daraus folgt, dass $(\gamma_1') = (\beta_2)$ sein muss, und weiter $(\gamma_1) = (\beta_2')$. Wir haben daher in (g'') die beiden Paare:

$$(g'') = (\beta_1+\beta_2') = (\beta_2+\beta_1')$$

und diese Gruppe enthält auch nicht (α_2). Wenn nun auch (α_3) in (g'') nicht vorkäme, so würde man auf gleiche Weise schliessen:

$$(g'') = (\beta_3+\beta_4') = (\beta_4+\beta_3')$$

und die beiden Gruppen (g'') und $(g+g')$ würden acht Charakteristiken gemein haben, was nach I. nicht möglich ist. Hieraus folgt der Satz:

VI. *Drei Gruppen, von denen je zwei sechs Charakteristiken gemein haben, enthalten entweder gar keine allen dreien gemeinschaftliche Charakteristik, (wenn die Summe der Gruppencharakteristiken $= (0)$ ist) oder es kommen vier Charakteristiken in allen dreien Gruppen vor, so dass die Zerlegung sich folgendermassen gestaltet:*

$$\begin{aligned}
(g) &= (\alpha_1+\beta_1) = (\alpha_2+\beta_2) = (\alpha_3+\beta_3) = (\alpha_4+\beta_4) = (\alpha_5+\beta_5) = (\alpha_6+\beta_6),\\
(g') &= (\alpha_1+\beta_1') = (\alpha_2+\beta_2') = (\alpha_3+\beta_3') = (\alpha_4+\beta_4') = (\alpha_5+\beta_5') = (\alpha_6+\beta_6'),\\
(g'') &= (\beta_1+\beta_2') = (\beta_2+\beta_1') = (\alpha_3+\beta_3'') = (\alpha_4+\beta_4'') = (\alpha_5+\beta_5'') = (\alpha_6+\beta_6'').
\end{aligned}$$

§. 4. Die vollständigen Systeme ungerader Charakteristiken.

VII. *Bedeutet (p) eine beliebig gegebene gerade Charakteristik, so lassen sich auf acht verschiedene Arten sieben ungerade Charakteristiken (β_1), (β_2), (β_3), (β_4), (β_5), (β_6), (β_7) finden, welche die Eigenschaft haben, dass die Charakteristiken*

$$(p+\beta_i+\beta_k)$$

alle ungerade sind, falls i von k verschieden ist.

Wir beweisen diesen Satz, indem wir zeigen, wie die verlangten Systeme wirklich gefunden werden können. Man nehme eine der Charakteristiken (β), etwa (β_1) beliebig an und entnehme aus der Gruppentafel die Gruppe $(p+\beta_1)$, welche (β_1) nicht enthält, dagegen die übrigen (β), falls sie existiren, enthalten muss. Sei demnach:

$$(p+\beta_1)=(\beta_2+\gamma_2)=(\beta_3+\gamma_3)=(\beta_4+\gamma_4)=(\beta_5+\gamma_5)=(\beta_6+\gamma_6)=(\beta_7+\gamma_7).$$

Aus einem beliebigen dieser Paare, etwa dem ersten, entnehme man (β_2) nach Willkür und bilde die Gruppe $(p+\beta_2)$, welche das Paar $(\beta_1+\gamma_2)$ enthält, nicht aber (β_2). Auch diese Gruppe muss (β_3), (β_4), (β_5), (β_6), (β_7) enthalten, wenn solche Charakteristiken existiren.

Nach I. §. 3 aber haben die beiden Gruppen $(p+\beta_1)$, $(p+\beta_2)$, da die erstere nicht (β_1), die letztere nicht (β_2) enthält, sechs nicht gepaarte Charakteristiken gemein, und wir können demnach setzen:

$$(p+\beta_2)=(\beta_1+\gamma_2)=(\beta_3+\gamma_3')=(\beta_4+\gamma_4')=(\beta_5+\gamma_5')=(\beta_6+\gamma_6')=(\beta_7+\gamma_7'),$$

und man erhält demnach auf eine bestimmte Weise die Charakteristiken (β_3), (β_4), (β_5), (β_6), (β_7), wenn man die den beiden Gruppen ausser (γ_2) noch gemeinschaftlichen Charakteristiken aufsucht.

Diese Charakteristiken haben, ihrer Bestimmung zufolge, die Eigenschaft, dass:

$$(p+\beta_1+\beta_2),\quad (p+\beta_1+\beta_i),\quad (p+\beta_2+\beta_i),\quad (i\;=\;3,4,5,6,7)$$

ungerade sind, und es bleibt noch zu zeigen, dass auch die übrigen $(p+\beta_i+\beta_k)$ (wenn i, k zwei verschiedene der Zahlen 3, 4, 5, 6, 7 bedeuten) die gleiche Eigenschaft haben. Zu dem Ende betrachten wir noch die Gruppe:

$$(p+\beta_i)=(\beta_1+\gamma_i)=(\beta_2+\gamma_i'),$$

welche nach Satz VI §. 3 mit den beiden Gruppen $(p+\beta_1)$, $(p+\beta_2)$ vier Charakteristiken gemein haben muss. Da dieselbe aber weder (γ_2) noch (β_i) enthält, so müssen in derselben (β_3), (β_4), (β_5), (β_6), (β_7), mit Ausnahme von (β_i) vorkommen, woraus dann hervorgeht, dass $(p+\beta_i+\beta_k)$ ungerade ist. Es enthält demnach jede der sieben Gruppen $(p+\beta_i)$ die von (β_i) verschiedenen (β) und zwar alle ungepaart.

Halten wir (β_1) fest, wählen aber statt (β_2) die andere Charakteristik des ersten Paares von $(p+\beta_1)$, also (γ_2), so muss an Stelle der Gruppe $(p+\beta_2)$ treten die Gruppe

$$(p+\gamma_2)=(\beta_1+\beta_2)=(\gamma_3+\gamma_3')=(\gamma_4+\gamma_4')=(\gamma_5+\gamma_5')=(\gamma_6+\gamma_6')=(\gamma_7+\gamma_7'),$$

so dass wir zu demselben (β_1) ein bestimmtes zweites System ungerader Charakteristiken von der verlangten Eigenschaft erhalten, nämlich:

$$(\beta_1),\ (\gamma_2),\ (\gamma_3),\ (\gamma_4),\ (\gamma_5),\ (\gamma_6),\ (\gamma_7).$$

Da wir ferner für (β_1) jede beliebige ungerade Charakteristik nehmen können, so ergeben sich auf diesem Wege 2.28 Systeme von der verlangten Eigenschaft. Dabei aber kommt jedes System sieben Mal vor, so dass nur $\frac{2.28}{7}=8$ verschiedene übrig bleiben.

Ein solches System soll ein *zu der Charakteristik (p) gehöriges vollständiges System* oder kurz ein *vollständiges System ungerader Charakteristiken genannt werden,* ein Name der sich alsbald rechtfertigen wird. Die Anzahl aller vollständigen Systeme beträgt nach dem Obigen $8.36=288$.

Wir geben für die Bestimmung eines solchen Systems zunächst ein Beispiel.

Es sei $(p)=\binom{000}{000}$, $(\beta_1)=\binom{111}{111}$. Wir entnehmen aus der Tafel die Zerlegung:

$$\begin{aligned}(p+\beta_1)=\binom{111}{111}&=\binom{001}{011}+\binom{110}{100}=\underline{\binom{011}{001}}+\binom{100}{110}=\binom{010}{011}+\underline{\binom{101}{100}}\\&=\binom{011}{010}+\underline{\binom{100}{101}}=\binom{001}{101}+\underline{\binom{110}{010}}=\underline{\binom{010}{110}}+\binom{101}{001}.\end{aligned}$$

Wählen wir $\binom{001}{011}$ für (β_2), so erhalten wir (leicht auch ohne Anwendung der Tafel):

$$\begin{aligned}(p+\beta_2)=\binom{001}{011}&=\binom{110}{100}+\binom{111}{111}=\underline{\binom{011}{001}}+\binom{010}{010}=\underline{\binom{101}{100}}+\binom{100}{111}\\&=\underline{\binom{100}{101}}+\binom{101}{110}=\underline{\binom{110}{010}}+\binom{111}{001}=\underline{\binom{010}{110}}+\binom{011}{101}.\end{aligned}$$

Wir haben demnach ein zu $(p)=(0)$ gehöriges vollständiges System:

$$\binom{111}{111},\ \binom{001}{011},\ \binom{011}{001},\ \binom{101}{100},\ \binom{100}{101},\ \binom{110}{010},\ \binom{010}{110}.$$

In der Tafel II. findet man für jedes (p) ein vollständiges System angegeben, woraus, wie wir weiter unten sehen werden, die andern leicht hergeleitet werden können.

Wir beweisen nun eine Reihe von Sätzen über die vollständigen Systeme ungerader Charakteristiken, welche zunächst den eingeführten Namen rechtfertigen werden.

VIII. *Die 28 ungeraden Charakteristiken, nämlich die sieben (β_i) und die 21 $(p+\beta_i+\beta_k)$ stellen zusammen alle überhaupt vorhandenen ungeraden Charakteristiken und jede nur einmal dar.*

Dieser Satz ist bewiesen, wenn gezeigt ist, dass unter den 28 erwähnten Charakteristiken nicht zwei einander gleich sind. Nun kann aber nicht:

$$(p+\beta_i+\beta_h) = (\beta_k)$$

sein, denn nach der eben dargelegten Bildungsweise der vollständigen Systeme kommen die beiden Charakteristiken (β_h) und (β_k) in der Gruppe $(p+\beta_i)$ nicht gepaart vor. Ebenso wenig kann

$$(p+\beta_i+\beta_k) = (p+\beta_h+\beta_l)$$

sein, da sonst

$$(\beta_i) = (\beta_h+\beta_k+\beta_l)$$

ungerade wäre, was nach dem Theorem II. §. 3. nicht möglich ist, da (β_h), (β_k), (β_l) in der Gruppe $(p+\beta_i)$ vorkommen, in der sie nicht gepaart sind.

IX. *Die Summe sämmtlicher Charakteristiken eines zu (p) gehörigen vollständigen Systems ist $=(p)$.*

Um diesen Satz zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass die Summe aller 28 ungeraden Charakteristiken $=(0)$ ist, was sich leicht durch wirkliche Ausführung der Addition ergiebt. Daher ist auch nach VIII:

$$\sum_{i,k}(p+\beta_i+\beta_k)+\sum_i(\beta_i) = (0),$$
$$i<k.$$

In der ersten dieser Summen kommt jede der Charakteristiken (β_i) sechsmal vor, (p) dagegen 21 mal, woraus sich sofort ergiebt:

$$(p)+\Sigma(\beta_i) = (0).$$

X. *Die 35 Charakteristiken $(\beta_i+\beta_k+\beta_l)$, für verschiedene i, k, l enthalten zusammen alle geraden Charakteristiken mit Ausnahme von (p) und jede nur einmal.*

Bereits unter VIII. haben wir die Bemerkung gemacht, dass die Charakteristiken $(\beta_i+\beta_k+\beta_l)$ alle gerade und von (p) verschieden sind. Es bleibt also nur zu zeigen, dass nicht zwei derselben einander gleich sind. Zunächst folgt schon aus dem unter VIII. Bemerkten, dass nicht

$$(\beta_i+\beta_k+\beta_l) = (\beta_{i'}+\beta_{k'}+\beta_{l'})$$

sein kann, wenn einer der Indices i, k, l einem der i', k', l' gleich ist. Ebenso wenig kann aber diese Gleichung bestehen, wenn die sechs Indices i, k, l, i', k', l' alle verschieden sind, denn bedeutet m den siebenten Index, so würde hiernach aus IX. folgen $(p+\beta_m) = (0)$, was nicht möglich ist.

Wir wenden diese Sätze an, um zu zeigen, wie man aus einem als bekannt vorausgesetzten vollständigen System alle übrigen herleiten kann. Ist $(\beta_1), (\beta_2), (\beta_3), (\beta_4), (\beta_5), (\beta_6), (\beta_7)$ ein zu (p) gehöriges vollständiges System, so ergiebt sich zunächst, wie schon oben gezeigt, (p. 26), ein zweites, zu demselben (p) gehöriges vollständiges System:

$$(\beta_1),\ (p+\beta_1+\beta_2),\ (p+\beta_1+\beta_3),\ (p+\beta_1+\beta_4),\ (p+\beta_1+\beta_5),\ (p+\beta_1+\beta_6),\ (p+\beta_1+\beta_7).$$

Nach der Analogie bildet man hieraus die zu demselben (p) gehörigen übrigen Systeme, die wir hier zusammenstellen:

$$\begin{array}{lllllll}
(\beta_1), & (\beta_2), & (\beta_3), & (\beta_4), & (\beta_5), & (\beta_6), & (\beta_7), \\
(\beta_1), & (p+\beta_1+\beta_2), & (p+\beta_1+\beta_3), & (p+\beta_1+\beta_4), & (p+\beta_1+\beta_5), & (p+\beta_1+\beta_6), & (p+\beta_1+\beta_7), \\
(p+\beta_2+\beta_1), & (\beta_2), & (p+\beta_2+\beta_3), & (p+\beta_2+\beta_4), & (p+\beta_2+\beta_5), & (p+\beta_2+\beta_6), & (p+\beta_2+\beta_7), \\
(p+\beta_3+\beta_1), & (p+\beta_3+\beta_2), & (\beta_3), & (p+\beta_3+\beta_4), & (p+\beta_3+\beta_5), & (p+\beta_3+\beta_6), & (p+\beta_3+\beta_7), \\
(p+\beta_4+\beta_1), & (p+\beta_4+\beta_2), & (p+\beta_4+\beta_3), & (\beta_4), & (p+\beta_4+\beta_5), & (p+\beta_4+\beta_6), & (p+\beta_4+\beta_7), \\
(p+\beta_5+\beta_1), & (p+\beta_5+\beta_2), & (p+\beta_5+\beta_3), & (p+\beta_5+\beta_4), & (\beta_5), & (p+\beta_5+\beta_6), & (p+\beta_5+\beta_7), \\
(p+\beta_6+\beta_1), & (p+\beta_6+\beta_2), & (p+\beta_6+\beta_3), & (p+\beta_6+\beta_4), & (p+\beta_6+\beta_5), & (\beta_6), & (p+\beta_6+\beta_7), \\
(p+\beta_7+\beta_1), & (p+\beta_7+\beta_2), & (p+\beta_7+\beta_3), & (p+\beta_7+\beta_4), & (p+\beta_7+\beta_5), & (p+\beta_7+\beta_6), & (\beta_7).
\end{array}$$

Um die zu einer bestimmten anderen Charakteristik (q) gehörigen Systeme zu finden, setzen wir, wozu wir nach X. berechtigt sind:

$$(q) = (\beta_1+\beta_2+\beta_3),$$

und bilden die Gruppen:

$$\begin{aligned}
(q+\beta_2) = (\beta_1+\beta_3) &= (p+\beta_2+\beta_3)+(p+\beta_2+\beta_1) = (p+\beta_1+\beta_4)+(p+\beta_3+\beta_4) = (p+\beta_1+\beta_5)+(p+\beta_3+\beta_5), \\
&= (p+\beta_1+\beta_6)+(p+\beta_3+\beta_6) = (p+\beta_1+\beta_7)+(p+\beta_3+\beta_7), \\
(q+\beta_3) = (\beta_1+\beta_2) &= (p+\beta_2+\beta_3)+(p+\beta_3+\beta_1) = (p+\beta_1+\beta_4)+(p+\beta_2+\beta_4) = (p+\beta_1+\beta_5)+(p+\beta_2+\beta_5), \\
&= (p+\beta_1+\beta_6)+(p+\beta_2+\beta_6) = (p+\beta_1+\beta_7)+(p+\beta_2+\beta_7),
\end{aligned}$$

woraus hervorgeht, dass:

(β_2); (β_3); $(p+\beta_2+\beta_3)$, $(p+\beta_1+\beta_4)$, $(p+\beta_1+\beta_5)$; $(p+\beta_1+\beta_6)$, $(p+\beta_1+\beta_7)$

ein zu (q) gehöriges vollständiges System ist. Bildet man nach der oben angegebenen Methode die übrigen zu (q) gehörigen Systeme, so ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

(β_2);	(β_3),	$(p+\beta_2+\beta_3)$,	$(p+\beta_1+\beta_4)$;	$(p+\beta_1+\beta_5)$;	$(p+\beta_1+\beta_6)$;	$(p+\beta_1+\beta_7)$,
(β_3),	(β_1);	$(p+\beta_3+\beta_1)$,	$(p+\beta_2+\beta_4)$,	$(p+\beta_2+\beta_5)$.	$(p+\beta_2+\beta_6)$,	$(p+\beta_2+\beta_7)$,
(β_1),	(β_2);	$(p+\beta_1+\beta_2)$,	$(p+\beta_3+\beta_4)$;	$(p+\beta_3+\beta_5)$;	$(p+\beta_3+\beta_6)$;	$(p+\beta_3+\beta_7)$,
$(p+\beta_2+\beta_3)$.	$(p+\beta_3+\beta_1)$;	$(p+\beta_1+\beta_2)$,	(β_4),	(β_5);	(β_6),	(β_7);
$(p+\beta_1+\beta_4)$;	$(p+\beta_2+\beta_4)$,	$(p+\beta_3+\beta_4)$,	(β_4);	$(p+\beta_6+\beta_7)$,	$(p+\beta_7+\beta_5)$,	$(p+\beta_5+\beta_6)$,
$(p+\beta_1+\beta_5)$;	$(p+\beta_2+\beta_5)$,	$(p+\beta_3+\beta_5)$,	$(p+\beta_6+\beta_7)$,	(β_5);	$(p+\beta_7+\beta_4)$;	$(p+\beta_4+\beta_6)$,
$(p+\beta_1+\beta_6)$;	$(p+\beta_2+\beta_6)$;	$(p+\beta_3+\beta_6)$;	$(p+\beta_5+\beta_7)$,	$(p+\beta_7+\beta_4)$,	(β_6);	$(p+\beta_4+\beta_5)$,
$(p+\beta_1+\beta_7)$;	$(p+\beta_2+\beta_7)$,	$(p+\beta_3+\beta_7)$;	$(p+\beta_5+\beta_6)$;	$(p+\beta_6+\beta_4)$;	$(p+\beta_4+\beta_5)$;	(β_7).

XI. *Ist (r) eine beliebige Charakteristik, die weder gleich (p) noch gleich einem der (β) ist, so sind von den acht Charakteristiken (r), $(r+p+\beta_1)$, $(r+p+\beta_2)$, $(r+p+\beta_3)$, $(r+p+\beta_4)$, $(r+p+\beta_5)$, $(r+p+\beta_6)$, $(r+p+\beta_7)$ immer fünf gerade und drei ungerade.*

Ist nämlich (r) ungerade, so kann man nach VIII. setzen:

$$(r) = (p+\beta_i+\beta_k),$$

und es sind von den obigen Charakteristiken

$$(r), \quad (r+p+\beta_i) = (\beta_k), \quad (r+p+\beta_k) = (\beta_i)$$

ungerade, die übrigen, die in der Form $(\beta_i+\beta_k+\beta_h)$ enthalten sind, gerade. Ist dagegen (r) gerade, so kann man nach X. setzen:

$$(r) = (\beta_i+\beta_h+\beta_k);$$

und es sind

$$(r+p+\beta_i) = (p+\beta_h+\beta_k), \quad (r+p+\beta_h), \quad (r+p+\beta_k)$$

ungerade, die übrigen nach IX. und X. gerade.

XII. *Ein vollständiges System ungerader Charakteristiken ist auch durch die Eigenschaft definirt, dass die Summe von je dreien derselben eine gerade Charakteristik ist.*

Dass einem vollständigen System diese Eigenschaft zukommt, haben wir bereits unter X. gesehen. Dass auch umgekehrt jedes System von sieben ungeraden Charakteristiken (β_1), (β_2), (β_3), (β_4), (β_5), (β_6), (β_7), welches die Eigenschaft hat, dass die Summe von je dreien derselben eine gerade Charakteristik ist, ein vollständiges System ist, beweisen wir wie folgt:

Nach der Voraussetzung kann die Gruppe

$$(g) = (\beta_1 + \beta_2) = (\gamma_1 + \gamma_2)$$

keine weitere von den Charakteristiken (β) enthalten. Es müssen also nach 3. §. 3. die beiden Gruppen

$$(g') = (\beta_1 + \gamma_1) = (\beta_2 + \gamma_2), \quad (g'') = (\beta_1 + \gamma_2) = (\beta_2 + \gamma_1)$$

die Charakteristiken (β_3), (β_4), (β_5), (β_6), (β_7) enthalten, aber jede derselben nur einmal und keine zwei gepaart.

Es wäre nun möglich, dass von den beiden Gruppen (g'), (g'') die eine drei, die andere zwei, oder die eine vier, die andere eine von diesen fünf Charakteristiken enthielte. Im ersteren Fall wäre etwa:

$$\begin{aligned} (g') &= (\beta_3 + \gamma_3) = (\beta_4 + \gamma_4) = (\beta_5 + \gamma_5), \\ (g'') &= (\beta_6 + \gamma_6) = (\beta_7 + \gamma_7). \end{aligned}$$

Diese Annahme ist aber unzulässig, denn es müsste dann nach I. §. 3. die Gruppe

$$(k) = (\beta_6 + \beta_7) = (\gamma_6 + \gamma_7)$$

mit (g') vier Charakteristiken gemein haben, von denen in (g') zweimal je zwei gepaart sind. Da aber fünf der sechs Paare von (g') je ein (β) enthalten, so müsste auch in (k) noch ein weiteres (β) vorkommen, was der Voraussetzung widerspricht.

Es bleibt daher nur eine Möglichkeit übrig wie:

$$\begin{aligned} (g') &= (\beta_3 + \gamma_3) = (\beta_4 + \gamma_4) = (\beta_5 + \gamma_5) = (\beta_6 + \gamma_6), \\ (g'') &= (\beta_7 + \gamma_7), \end{aligned}$$

und es wird, wenn (p) eine gerade Charakteristik bedeutet:

$$(g') = (p + \beta_7) = (\beta_1 + \gamma_1) = (\beta_2 + \gamma_2) = (\beta_3 + \gamma_3) = (\beta_4 + \gamma_4) = (\beta_5 + \gamma_5) = (\beta_6 + \gamma_6).$$

Die Gruppe $(p + \beta_6) = (\gamma_6 + \beta_7)$ hat mit dieser nach I. §. 3. sechs ungepaarte Charakteristiken gemein; unter diesen aber kann keine der (γ_1), (γ_2), (γ_3), (γ_4), (γ_5) sein, denn wäre etwa:

$$(p + \beta_6) = (\gamma_1 + \beta_1'), \quad (p + \beta_7) = (\gamma_1 + \beta_1),$$

so würde daraus folgen:

$$(\beta_1 + \beta_6 + \beta_7) = (\beta_1'),$$

gegen die Voraussetzung. Demnach haben wir die beiden Gruppen:

$$(p+\beta_7)=(\beta_6+\gamma_6)=(\beta_1+\gamma_1)=(\beta_2+\gamma_2)=(\beta_3+\gamma_3)=(\beta_4+\gamma_4)=(\beta_5+\gamma_5),$$
$$(p+\beta_6)=(\beta_7+\gamma_6)=(\beta_1+\gamma_1')=(\beta_2+\gamma_2')=(\beta_3+\gamma_3')=(\beta_4+\gamma_4')=(\beta_5+\gamma_5'),$$

wodurch mit Rücksicht auf VII. unsere Behauptung bewiesen ist.

XII. *Vier beliebig gegebene ungerade Charakteristiken, welche der Bedingung genügen, dass die Summe von je drei unter ihnen eine gerade Charakteristik ist, gehören zwei bestimmten vollständigen Systemen an.*

Sind nämlich (β_1), (β_2), (β_3), (β_4) vier ungerade Charakteristiken mit der verlangten Eigenschaft, so lassen sich (nach §. 3. 2. und 3.) folgende Gruppen aufstellen:

$$(\beta_1+\beta_2)=(\gamma_3+\gamma_3')=(\gamma_4+\gamma_4'),$$
$$(\beta_3+\beta_4)=(\gamma_3+\gamma_4)=(\gamma_3'+\gamma_4'),$$
$$(\beta_1+\beta_3)=(\gamma_2+\gamma_3')=(\gamma_4+\gamma_4''),$$
$$(\beta_2+\beta_4)=(\gamma_2+\gamma_4)=(\gamma_3'+\gamma_4''),$$
$$(\beta_1+\beta_4)=(\gamma_2+\gamma_4')=(\gamma_3+\gamma_4''),$$
$$(\beta_2+\beta_3)=(\gamma_2+\gamma_3)=(\gamma_4'+\gamma_4'').$$

Diese Zerlegungen entnimmt man unmittelbar aus der Tafel I. Es genügen drei derselben, aus denen die drei andern folgen. Dadurch sind die sechs Charakteristiken γ_2, γ_3, γ_3', γ_4, γ_4', γ_4'' bestimmt, und zwar auf zwei Arten, da man in der vorstehenden Zerlegung (γ_4), (γ_4'), (γ_2) vertauschen darf mit (γ_3'), (γ_3), (γ_4''). Setzen wir nun, nachdem die (γ) bestimmt sind:

$$(p) = (\beta_1+\beta_2+\gamma_2), \quad \text{welches gerade ist,}$$

so haben wir folgende Gruppen:

$$(p+\beta_1)=(\beta_2+\gamma_2)=(\beta_3+\gamma_3)=(\beta_4+\gamma_4),$$
$$(p+\beta_2)=(\beta_1+\gamma_2)=(\beta_3+\gamma_3')=(\beta_4+\gamma_4');$$

und die drei noch fehlenden Charakteristiken des betreffenden vollständigen Systems (β_5), (β_6), (β_7) bestimmt man in der oben erläuterten Weise durch die vollständige Aufstellung dieser beiden Gruppen.

Wir veranschaulichen dies Verfahren durch ein beliebig gewähltes Beispiel. Es sei:

$$(\beta_1)=\begin{pmatrix}1\,0\,1\\1\,0\,0\end{pmatrix},\quad (\beta_2)=\begin{pmatrix}1\,0\,1\\1\,1\,0\end{pmatrix},\quad (\beta_3)=\begin{pmatrix}1\,1\,1\\1\,0\,0\end{pmatrix};\quad (\beta_4)=\begin{pmatrix}0\,1\,1\\0\,1\,0\end{pmatrix};$$

$$(\beta_1+\beta_2)=\begin{pmatrix}0\,0\,0\\0\,1\,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,0\,1\\0\,0\,1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\,0\,1\\0\,1\,1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\,0\,1\\1\,1\,1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\,0\,1\\1\,0\,1\end{pmatrix},$$

$$(\beta_3+\beta_4)=\begin{pmatrix}1\,0\,0\\1\,1\,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,0\,1\\0\,0\,1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\,0\,1\\1\,1\,1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\,0\,1\\1\,0\,1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\,0\,1\\0\,1\,1\end{pmatrix},$$

$$(\beta_1+\beta_3)=\begin{pmatrix}0\,1\,0\\0\,0\,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,0\,1\\0\,0\,1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\,1\,1\\0\,0\,1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\,0\,1\\1\,0\,1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\,1\,1\\1\,0\,1\end{pmatrix}.$$

Wir haben daher zu setzen:

$$(\gamma_2)=\binom{111}{001},\quad (\gamma_3)=\binom{101}{011},\quad (\gamma_4)=\binom{001}{101},\quad (\gamma_4')=\binom{001}{111},\quad (\gamma_4'')=\binom{011}{101},$$

oder:

$$(\gamma_2)=\binom{011}{101},\quad (\gamma_3)=\binom{001}{111},\quad (\gamma_4)=\binom{101}{001},\quad (\gamma_4')=\binom{101}{011},\quad (\gamma_4'')=\binom{111}{001},$$

und wir erhalten: $(p)=\binom{111}{011}$, oder $(p)=\binom{011}{111}$.

Wir haben dann die beiden Gruppen:

$$\begin{aligned}(p+\beta_1)=\binom{010}{111}&=\binom{100}{100}+\underline{\binom{110}{011}}=\binom{100}{101}+\underline{\binom{110}{010}}=\binom{001}{001}+\underline{\binom{011}{110}}\\&=\binom{001}{101}+\underline{\binom{011}{010}}=\underline{\binom{111}{100}}+\binom{101}{011}=\binom{111}{001}+\overset{(\beta_2)}{\binom{101}{110}},\\(p+\beta_2)=\binom{010}{101}&=\overset{(\beta_1)}{\binom{101}{100}}+\binom{111}{001}=\binom{101}{001}+\underline{\binom{111}{100}}=\binom{100}{110}+\underline{\binom{110}{011}}\\&=\binom{100}{111}+\underline{\binom{110}{010}}=\binom{001}{011}+\binom{011}{110}=\binom{001}{111}+\underline{\binom{011}{010}},\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}(p+\beta_1)=\binom{110}{011}&=\binom{100}{100}+\underline{\binom{010}{111}}=\binom{100}{101}+\underline{\binom{010}{110}}=\binom{001}{001}+\underline{\binom{111}{010}}\\&=\binom{101}{001}+\underline{\binom{011}{010}}=\overset{(\beta_2)}{\binom{101}{110}}+\binom{011}{101}=\binom{001}{111}+\underline{\binom{111}{100}},\\(p+\beta_2)=\binom{110}{001}&=\binom{100}{110}+\underline{\binom{010}{111}}=\underline{\binom{010}{110}}+\binom{100}{111}=\overset{(\beta_1)}{\binom{101}{100}}+\binom{011}{101}\\&=\underline{\binom{111}{100}}+\binom{001}{101}=\underline{\binom{011}{010}}+\binom{101}{011}=\underline{\binom{111}{010}}+\binom{001}{011}.\end{aligned}$$

Daher haben wir folgende beiden vollständigen Systeme, denen die gegebenen vier Charakteristiken (β) angehören:

$$(p)=\binom{111}{011}:\quad \binom{101}{100},\ \binom{101}{110},\ \binom{111}{100},\ \binom{011}{010},\ \binom{011}{110},\ \binom{110}{010},\ \binom{110}{011},$$

$$(p)=\binom{011}{111}:\quad \binom{101}{100},\ \binom{101}{110},\ \binom{111}{100},\ \binom{011}{010},\ \binom{111}{010},\ \binom{010}{110},\ \binom{010}{111}.$$

XIII. *Sechs beliebige Charakteristiken eines vollständigen Systems kommen immer in einer und nur in einer Gruppe vor, in der keine zwei gepaart sind.*

Denn zunächst kommen, wie bereits oben gezeigt, (β_1), (β_2), (β_3), (β_4), (β_5), (β_6) in der Gruppe $(p+\beta_7)$ in der verlangten Weise vor, da wir die Gruppen haben:

$$(p+\beta_7)=(\beta_1+\gamma_1)=(\beta_2+\gamma_2)=(\beta_3+\gamma_3)=(\beta_4+\gamma_4)=(\beta_5+\gamma_5)=(\beta_6+\gamma_6),$$

$$(p+\beta_6)=(\beta_1+\gamma_1')=(\beta_2+\gamma_2')=(\beta_3+\gamma_3')=(\beta_4+\gamma_4')=(\beta_5+\gamma_5')=(\beta_7+\gamma_6);$$

dass nicht eine zweite Gruppe (k) bestehen kann von der Beschaffenheit:

$$(k)=(\beta_1+\gamma_1'')=(\beta_2+\gamma_2'')=(\beta_3+\gamma_3'')=(\beta_4+\gamma_4'')=(\beta_5+\gamma_5'')=(\beta_6+\gamma_6''),$$

ist hiernach eine unmittelbare Folge von VI. §. 3.

XIV. *Drei beliebige Charakteristiken eines vollständigen Systems kommen immer in einer und nur in einer Gruppe vor, welche keine der übrigen des Systems enthält.*

Wenn nämlich eine Gruppe (g) die Charakteristik (β_i) enthalten soll, so muss $(g+\beta_i)$ ungerade, also entweder $=(\beta_h)$ oder $=(p+\beta_h+\beta_k)$ sein. Im ersten Fall würde aber (g) nur (β_i) und (β_h), und zwar gepaart enthalten, also muss für unsere Voraussetzung

$$(g) = (p+\beta_i+\beta_h+\beta_k),$$

und wenn in (g) nicht mehr als drei (β) vorkommen sollen, so müssen i, h, k verschieden sein. Ist diese Bedingung erfüllt, dann kommen auch umgekehrt in (g) (β_i), (β_h), (β_k) und keines der übrigen (β) vor.

XV. *Als Corollar aus diesen Sätzen folgt noch, dass in einer beliebigen Gruppe entweder zwei gepaarte oder drei ungepaarte oder sechs ungepaarte Charakteristiken eines vollständigen Systems vorkommen.*

§. 5. Das Additionstheorem der ϑ-Functionen.

Es wurde oben in §. 1. nachgewiesen, dass alle Θ-Functionen zweiter Ordnung linear und homogen mit constanten Coëfficienten durch acht unter ihnen ausdrückbar sind, und wir können zu dieser Darstellung acht beliebige wählen, vorausgesetzt nur, dass zwischen ihnen keine lineare homogene Gleichung mit constanten Coëfficienten besteht. Ein solches System von acht Θ-Functionen zweiter Ordnung, welches für unsern Zweck ganz besonders geeignet ist, ist das folgende:

$$\vartheta^2(u_h),\quad \vartheta^2\{p+\beta_1\}(u_h),\quad \vartheta^2\{p+\beta_2\}(u_h),\quad \vartheta^2\{p+\beta_3\}(u_h),\quad \vartheta^2\{p+\beta_4\}(u_h),$$
$$\vartheta^2\{p+\beta_5\}(u_h),\quad \vartheta^2\{p+\beta_6\}(u_h),\quad \vartheta^2\{p+\beta_7\}(u_h),$$

wenn (β_1), (β_2), (β_3), (β_4), (β_5), (β_6), (β_7) ein beliebiges zu (p) gehöriges vollständiges System ungerader Charakteristiken bedeutet.

Wir weisen zunächst nach, dass zwischen diesen Functionen keine lineare homogene Gleichung mit constanten Coëfficienten stattfindet. Setzen wir der kürzeren Bezeichnung halber zu diesem Zweck

$$(p) = (\beta_0),$$

so würde eine solche Gleichung die Form haben:

$$\sum_{i=0}^{i=7} a_i \vartheta^2\{p+\beta_i\}(u_h) = 0.$$

In dieser Gleichung substituiren wir für die Argumente u_1, u_2, u_3 ein System zusammengehöriger halber Perioden mit der Charakteristik (β_k) welches wir durch $\frac{1}{2}\beta_1^{(k)}$, $\frac{1}{2}\beta_2^{(k)}$, $\frac{1}{2}\beta_3^{(k)}$ bezeichnen, worin k jeden der Indices 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 bezeichnen kann. Es verschwindet alsdann, vermöge der Fundamentaleigenschaft der vollständigen Systeme ungerader Charakteristiken, in der vorstehenden Gleichung alle Glieder bis auf eines, und dieselbe reducirt sich auf:

$$a_k \vartheta^2\{p\}(0, 0, 0) = 0.$$

Falls nun, was der allgemeine Fall ist, von den geraden ϑ-Functionen keine für die Werthe 0 der Argumente verschwindet, so folgt aus dieser Gleichung $a_k = 0$ und unsere Behauptung ist nachgewiesen.

Sonach können wir durch diese acht Functionen jede Θ-Function zweiter Ordnung linear ausdrücken. Eine solche Function ist aber auch das Product $\vartheta(u_h+v_h)\vartheta(u_h-v_h)$, und daher besteht eine Gleichung von der Form:

$$(1.) \qquad \vartheta(u_h+v_h)\,\vartheta(u_h-v_h) = \sum_{i=0}^{i=7} a_i \vartheta^2\{p+\beta_i\}(u_h),$$

worin die Coëfficienten a_i zwar von den Grössen u_1, u_2, u_3 unabhängig, aber noch von v_1, v_2, v_3 abhängig sind.

Um diese Coëfficienten zu bestimmen, setzen wir wieder:

$$(u_1, u_2, u_3) = (\tfrac{1}{2}\beta_1^{(k)}, \tfrac{1}{2}\beta_2^{(k)}, \tfrac{1}{2}\beta_3^{(k)}),$$

wodurch auf der rechten Seite von (1.) alle Glieder, mit Ausnahme von einem wegfallen, und es ergiebt sich:

$$\vartheta(\tfrac{1}{2}\beta_h^{(k)}+v_h)\,\vartheta(\tfrac{1}{2}\beta_h^{(k)}-v_h) = a_k \vartheta^2\{p+\beta_k\}(\tfrac{1}{2}\beta_h^{(k)}).$$

Setzen wir: $(p) = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$, $(\beta_k) = \begin{pmatrix} \nu_1^{(k)} & \nu_2^{(k)} & \nu_3^{(k)} \\ \mu_1^{(k)} & \mu_2^{(k)} & \mu_3^{(k)} \end{pmatrix}$, so können wir mittels der Formeln (5.), (6.) §. 2. (p. 16.) der letzten Gleichung die Gestalt geben:

$$\vartheta^2\{\beta_k\}(v_h) = (-1)^{\Sigma \nu^{(k)} m} a_k \vartheta^2\{p\},$$

wenn, was in der Folge immer geschehen soll, die Argumente der ϑ-Functionen nicht geschrieben sind, wenn sie die Werthe 0 haben, und

$$\Sigma \nu^{(k)} m = \nu_1^{(k)} m_1 + \nu_2^{(k)} m_2 + \nu_3^{(k)} m_3$$

gesetzt ist. Demnach ergiebt sich aus (1.) die fundamentale Formel:

$$\text{I.} \quad \vartheta^2\{p\}\vartheta(u_h+v_h)\vartheta(u_h-v_h) = \sum_{i=0}^{i=7}(-1)^{\Sigma\nu^{(i)}m}\vartheta^2\{\beta_i\}(v_h)\vartheta^2\{p+\beta_i\}(u_h).$$

Aus dieser Formel erhält man eine allgemeinere, wenn man für u_1, u_2, u_3 setzt $u_1+\frac{1}{2}\varpi_1$, $u_2+\frac{1}{2}\varpi_2$, $u_3+\frac{1}{2}\varpi_3$, wenn $\frac{1}{2}\varpi_1$, $\frac{1}{2}\varpi_2$, $\frac{1}{2}\varpi_3$ ein beliebiges System zusammengehöriger halber Perioden bedeutet mit der Charakteristik:

$$(\varpi) = \binom{g_1 g_2 g_3}{h_1 h_2 h_3}.$$

Man findet, wieder mit Anwendung von (6.) §. 2.

$$\text{II.} \quad \vartheta^2\{p\}\vartheta\{\varpi\}(u_h+v_h)\vartheta\{\varpi\}(u_h-v_h)$$
$$= (-1)^{\Sigma gm}\sum_{i=0}^{i=7}(-1)^{\Sigma(\nu^{(i)}m+\mu^{(i)}g)}\vartheta^2\{\beta_i\}(v_h)\vartheta^2\{p+\varpi+\beta_i\}(u_h).$$

Setzen wir hierin noch $u=0$ so ergeben sich Ausdrücke, durch welche die sämmtlichen Quadrate der ϑ-Functionen linear und homogen ausgedrückt sind durch acht derselben, nämlich:

$$\text{III.} \quad \vartheta^2\{p\}\vartheta^2\{\varpi\}(v_h) = (-1)^{\Sigma g(m+h)}\sum_{i=0}^{i=7}(-1)^{\Sigma(\nu^{(i)}m+\mu^{(i)}g)}\vartheta^2\{p+\varpi+\beta_i\}\vartheta^2\{\beta_i\}(v_h).$$

Unter XI. §. 4. ist nachgewiesen worden, dass, falls (ϖ) mit keinem der (β_i) übereinstimmt, von den acht Charakteristiken $(p+\varpi+\beta_i)$ immer fünf gerade und drei ungerade sind. Daraus folgt, dass auf der rechten Seite von III. immer nur fünf von den Functionen $\vartheta^2\{\beta_i\}(v_h)$ wirklich vorkommen, während drei ausfallen. Es lässt sich daher das Quadrat einer ϑ-Function linear und homogen durch fünf andere ausdrücken; fünf sind aber im allgemeinen Fall zu diesem Ausdruck auch immer nothwendig. *)

*) In dem besonderen Fall, wo eine der geraden ϑ-Functionen für die Werthe 0 der Argumente verschwindet, welcher auf die hyperelliptischen Functionen führt, ergeben sich aus III. lineare homogene Gleichungen zwischen fünf ϑ-Quadraten. Dieser Umstand wäre von Nutzen, wenn man die Theorie dieser Functionen von den ϑ-Functionen aus begründen wollte, in der Weise wie die Theorie der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung von *Göpel* (*Crelles* Journal Bd. 35. p. 277) und *Rosenhain* (Mémoires présentés de l'institut de France, Tome XI. p. 361) aufgestellt ist. Im allgemeinen Fall besteht erst zwischen sechs ϑ-Quadraten eine lineare homogene Gleichung. Die Verallgemeinerung der erwähnten Theorie, die principiell möglich ist, verlangt die Zuziehung von Gleichungen höherer Ordnung zwischen fünf ϑ-Functionen, ein Umstand, der die Durchführung der Untersuchung ausserordentlich erschweren dürfte. (Vgl. hierüber eine Mittheilung von *Weierstrass* in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom 21. Dez. 1869.)

Die gefundenen Resultate lassen sich noch weiter verallgemeinern, und führen zu Formeln, die uns in der Folge gute Dienste leisten werden.

Setzen wir zu diesem Zweck in I. an Stelle von u_h, v_h resp. $u_h+\frac{1}{2}w_h$, $v_h+\frac{1}{2}w_h$, indem wir unter w_1, w_2, w_3 einstweilen ein ganz beliebiges Grössensystem verstehen, so ergiebt sich:

$$(2.)\qquad \vartheta^2\{p\}\,\vartheta(u_h+v_h+w_h)\,\vartheta(u_h-v_h)$$
$$= \sum_{i=0}^{i=7}(-1)^{\Sigma\nu^{(i)}m}\,\vartheta^2\{\beta_i\}(v_h+\tfrac{1}{2}w_h)\,\vartheta^2\{p+\beta_i\}(u_h+\tfrac{1}{2}w_h),$$

und wenn in dieser Formel für die Veränderlichen v_h successive acht Systeme zusammengehöriger halber Perioden gesetzt werden mit den Charakteristiken:

(0), $(p+\beta_1)$, $(p+\beta_2)$, $(p+\beta_3)$, $(p+\beta_4)$, $(p+\beta_5)$, $(p+\beta_6)$, $(p+\beta_7)$,

so folgen daraus acht lineare Gleichungen, vermöge deren man die acht Functionen

$$\vartheta^2\{p+\beta_i\}(u_h+\tfrac{1}{2}w_h)$$

linear und homogen ausdrücken kann durch die acht Producte:

$$\vartheta\{p+\beta_i\}(u_h+w_h)\,\vartheta\{p+\beta_i\}(u_h),$$

vorausgesetzt, dass zwischen diesen letzteren Functionen keine lineare homogene Gleichung mit constanten Coëfficienten besteht. Dass dies aber nicht der Fall ist, davon überzeugt man sich auf demselben Wege, der oben zu einem ähnlichen Zweck eingeschlagen wurde. (p. 34.)

Substituirt man die so gewonnenen Ausdrücke in III., nachdem in letzterer Formel v_h durch $u_h+\frac{1}{2}w_h+\frac{1}{2}\beta_h^{(0)}$ ersetzt ist, so gelangt man zu einer Gleichung von folgender Form:

$$(3.)\qquad \vartheta^2\{\varpi\}(u_h+\tfrac{1}{2}w_h) = \sum_{i=0}^{i=7}a_i\,\vartheta\{p+\beta_i\}(u_h+w_h)\,\vartheta\{p+\beta_i\}(u_h),$$

worin die Coëfficienten a_i von den u_h unabhängig, aber noch von den w_h abhängig sein werden. Um dieselben zu bestimmen, setzen wir wie oben:

$$(u_1, u_2, u_3) = (\tfrac{1}{2}\beta_1^{(k)}, \tfrac{1}{2}\beta_2^{(k)}, \tfrac{1}{2}\beta_3^{(k)}),$$

und erhalten:

$$\vartheta^2\{\varpi\}(\tfrac{1}{2}\beta_h^{(k)}+\tfrac{1}{2}w_h) = a_k\,\vartheta\{p+\beta_k\}(\tfrac{1}{2}\beta_h^{(k)}+w_h)\,\vartheta\{p+\beta_k\}(\tfrac{1}{2}\beta_h^{(k)}),$$

wofür man nach (6.) §. 2. schreiben kann:

$$a_k\,\vartheta\{p\}\,\vartheta\{p\}(w_h) = (-1)^{\Sigma\nu^{(k)}(m+h+\mu^{(k)})}\,\vartheta^2\{\varpi+\beta_k\}(\tfrac{1}{2}w_h),$$

woraus sich endlich die Formel ergiebt:

$$(4.)\qquad \vartheta\{p\}\vartheta\{p\}(w_h)\vartheta^2\{\varpi\}(u_h+\tfrac{1}{2}w_h)$$

$$=\sum_{i=0}^{i=7}(-1)^{\Sigma\nu^{(i)}(m+h+\mu^{(i)})}\vartheta^2\{\varpi+\beta_i\}(\tfrac{1}{2}w_h)\vartheta\{p+\beta_i\}(u_h+w_h)\vartheta\{p+\beta_i\}(u_h).$$

Wir specialisiren diese Formel, indem wir für w_1, w_2, w_3 ein beliebiges System zusammengehöriger halber Perioden $\frac{1}{2}q_1$, $\frac{1}{2}q_2$, $\frac{1}{2}q_3$ mit der Charakteristik

$$(q)=\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & k_3\\ l_1 & l_2 & l_3\end{pmatrix}$$

setzen, und, was stets auf mehrfache Art möglich ist, die gerade Charakteristik (p) so wählen, dass auch $(p+q)$ gerade ist; wodurch man erhält:

$$\text{IV.}\qquad \vartheta\{p\}\vartheta\{p+q\}\vartheta^2\{\varpi\}(u_h+\tfrac{1}{4}q_h)$$

$$=e^{-\sum_{i=1}^{i=3}k_iu_i}\sum_{i=0}^{i=7}(-1)^{\Sigma\nu^{(i)}(m+h+\mu^{(i)})}e^{-\frac{1}{2}\pi i\Sigma k\mu^{(i)}}\vartheta^2\{\varpi+\beta_i\}(\tfrac{1}{4}q_h)\vartheta\{p+q+\beta_i\}(u_h)\vartheta\{p+\beta_i\}(u_h).$$

Wir stellen endlich noch eine Reihe von Formeln auf, welche zu einer vollkommen entwickelten und verhältnissmässig sehr einfachen Darstellung des Additionstheorems der sechsfach periodischen Functionen führen.

Substituiren wir in (2.) für $\vartheta^2\{p+\beta_i\}(u_h+\frac{1}{2}w_h)$ die aus (4.) folgenden Ausdrücke, wenn in letzteren $(\varpi)=(p+\beta_i)$ gesetzt ist, so ergiebt sich eine Gleichung von folgender Gestalt:

$$(5.)\qquad \vartheta(u_h+v_h+w_h)\vartheta(u_h-v_h)=\sum_{i=0}^{i=7}a_i\vartheta\{p+\beta_i\}(u_h+w_h)\vartheta\{p+\beta_i\}(u_h),$$

worin die Coëfficienten a_i von u_i unabhängig sind. Wir bestimmen dieselben auf dem gleichen Wege wie oben, und erhalten:

$$\text{V.}\qquad \vartheta\{p\}\vartheta\{p\}(w_h)\vartheta(u_h+v_h+w_h)\vartheta(u_h-v_h)$$

$$=\sum_{i=0}^{i=7}(-1)^{\Sigma\nu^{(i)}m}\vartheta\{\beta_i\}(v_h+w_h)\vartheta\{\beta_i\}(v_h)\vartheta\{p+\beta_i\}(u_h+w_h)\vartheta\{p+\beta_i\}(u_h).$$

Hieraus ergiebt sich eine specielle Formel für $(p)=(0)$. Bezeichnen wir mit $(\beta_i^{(0)})$ ein zur Charakteristik $(p)=(0)$ gehöriges vollständiges System ungerader Charakteristiken, so dass $(\beta_0^{(0)})=(0)$ ist, setzen ausserdem noch $w_h=0$ und dividiren V. durch die so erhaltene specielle Formel, so folgt:

$$\frac{\vartheta\{p\}.\vartheta\{p\}(w_h)}{\vartheta^2\{0\}}\,\frac{\vartheta(u_h+v_h+w_h)}{\vartheta(u_h+v_h)}$$

$$=\frac{\sum_{i=0}^{i=7}(-1)^{\Sigma\nu^{(i)}m}\vartheta\{\beta_i\}(v_h+w_h)\vartheta\{\beta_i\}(v_h)\vartheta\{p+\beta_i\}(u_h+w_h)\vartheta\{p+\beta_i\}(u_h)}{\sum_{i=0}^{i=7}\vartheta^2\{\beta_i^{(0)}\}(u)\vartheta^2\{\beta_i^{(0)}\}(v)}.$$

Hieraus ergiebt sich das Additionstheorem der sechsfach periodischen Functionen zweiter Ordnung, d. h. eine Formel, vermöge welcher die Functionen $\frac{\vartheta\{\varepsilon\}(u_h+v_h)}{\vartheta(u_h+v_h)}$ rational ausgedrückt sind durch die gleichen Functionen, die resp. nur von den Veränderlichen u_h und v_h einzeln abhängen, wenn man für das noch willkürliche Grössensystem w_h ein beliebiges System zusammengehöriger halber Perioden mit der Charakteristik

$$(\varepsilon) = \binom{\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3}{\varepsilon_1'\ \varepsilon_2'\ \varepsilon_3'}$$

setzt, und zugleich die gerade Charakteristik (p) so wählt, dass auch $(p+\varepsilon)$ gerade ist. Man findet auf diese Weise:

$$\text{VI.}\qquad \frac{\vartheta\{p\}\,\vartheta\{p+\varepsilon\}}{\vartheta^2\{0\}}\cdot\frac{\vartheta\{\varepsilon\}(u_h+v_h)}{\vartheta(u_h+v_h)}$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=0}^{i=7}(-1)^{\Sigma(\varepsilon\mu^{(i)}+m\nu^{(i)})}\,\vartheta\{\beta_i\}(v_h)\,\vartheta\{\beta_i+\varepsilon\}(v_h)\,\vartheta\{p+\beta_i\}(u_h)\,\vartheta\{p+\varepsilon+\beta_i\}(u_h)}{\sum\limits_{i=0}^{i=7}\vartheta^2\{\beta_i^{(0)}\}(v_h)\,\vartheta^2\{\beta_i^{(0)}\}(u_h)}.\ ^{*)}$$

---

*) Es lässt sich diese Formel, ohne dass ihr allgemeiner Charakter geändert wird, leicht so verallgemeinern, dass auf der linken Seite eine beliebige andere gerade ϑ-Function im Nenner auftritt. Zu dem Ende vermehren wir die Veränderlichen u_h in der Formel V. um ein System zusammengehöriger halber Perioden mit der Charakteristik

$$(p_0) = \binom{n_1^{(0)}\ n_2^{(0)}\ n_3^{(0)}}{m_1^{(0)}\ m_2^{(0)}\ m_3^{(0)}},$$

wodurch dieselbe übergeht in:

$$\vartheta\{p\}\,\vartheta\{p\}(w_h)\,\vartheta\{p_0\}(u_h+v_h+w_h)\,\vartheta\{p_0\}(u_h-v_h)$$

$$= (-1)^{\Sigma n^{(0)}m}\sum_{i=0}^{i=7}(-1)^{\Sigma(\nu^{(i)}m+\mu^{(i)}n^{(0)})}\,\vartheta\{\beta_i\}(v_h+w_h)\,\vartheta\{\beta_i\}(v_h)\,\vartheta\{p+p_0+\beta_i\}(u_h+w_h)\,\vartheta\{p+p_0+\beta_i\}(u_h).$$

Nehmen wir nun an, es sei (p_0) eine gerade und $\beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}\ldots\beta_7^{(0)}$ ein zu dieser gehöriges vollständiges System ungerader Charakteristiken, so dass:

$$(\beta_i^{0}) = \binom{\nu_1^{i,0}\ \nu_2^{i,0}\ \nu_3^{i,0}}{\mu_1^{i,0}\ \mu_2^{i,0}\ \mu_3^{i,0}},$$

und setzen in der vorstehenden Formel $(p)=(p_0)$, $(\beta_i)=(\beta_i^{0})$, $w_h=0$, so folgt:

$$\vartheta^2\{p_0\}\,\vartheta\{p_0\}(u_h+v_h)\,\vartheta\{p_0\}(u_h-v_h) = \sum_{i=0}^{i=7}(-1)^{\Sigma(\nu^{i,0}m^{(0)}+\mu^{i,0}n^{(0)})}\,\vartheta^2\{\beta_i^{0}\}(v_h)\,\vartheta^2\{\beta_i^{0}\}(u_h).$$

Wenn man in der ersteren Formel für w_h ein System zusammengehöriger halber Perioden mit der beliebigen Charakteristik $(p_0+\varepsilon)$ setzt, (p) so wählt, dass $(p+p_0+\varepsilon)$ gerade ist, und die so gewonnene Formel durch die zuletzt gefundene dividirt, so erhält man:

$$(-1)^{\Sigma(n^{(0)}m+m^{(0)}n)}\,\frac{\vartheta\{p\}\,\vartheta\{p+p_0+\varepsilon\}}{\vartheta^2\{p_0\}}\;\frac{\vartheta\{\varepsilon\}(u_h+v_h)}{\vartheta\{p_0\}(u_h+v_h)}$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=0}^{i=7}(-1)^{\Sigma(\nu^{(i)}m^{(0)}+\nu^{(i)}m+\mu^{(i)}\varepsilon)}\,\vartheta\{\beta_i+p_0+\varepsilon\}(v_h)\,\vartheta\{\beta_i\}(v_h)\,\vartheta\{\beta_i+p+\varepsilon\}(u_h)\,\vartheta\{\beta_i+p_0+p\}(u_h)}{\sum\limits_{i=0}^{i=7}(-1)^{\Sigma(\nu^{i,0}m^{(0)}+\mu^{i,0}n^{(0)})}\,\vartheta^2\{\beta_i^{(0)}\}(v_h)\,\vartheta^2\{\beta_i^{(0)}\}(u_h)}.$$

(Nachträglicher Zusatz.)

Die Ausdrücke auf der rechten Seite dieser Gleichungen haben für alle (ε) den gleichen Nenner. Zähler und Nenner enthalten je acht Glieder, und wir haben daher das Additionstheorem in ganz analoger und verhältnissmässig nicht minder einfacher Gestalt, wie die, welche das gleiche Theorem bei den elliptischen und hyperelliptischen Functionen erster Ordnung annimmt*). Man hat übrigens in VI. für ein gegebenes (ε) eine grosse Anzahl verschiedener Darstellungen des Additionstheorems, da man (p) und das zugehörige System (β_i), ebenso das System $(\beta_i^{(\varepsilon)})$ auf mannigfaltige Art wählen kann.

§. 6. Relationen zwischen constanten Werthen der ϑ-Functionen.

Setzen wir in den Formeln des vorigen §. für die veränderlichen Grössen constante Werthe, vorzugsweise Systeme zusammengehöriger halber Perioden, so ergiebt sich ein grosser Reichthum von speciellen Formeln der mannigfaltigsten Art zwischen den Werthen, welche die geraden ϑ-Functionen für die Werthe 0 der Argumente annehmen. Wir leiten hier die einfachsten und für die Folge wichtigsten dieser Formeln ab, die wir zur besseren Uebersicht in drei Classen theilen, und erläutern jede derselben durch ein Beispiel.

1. Setzen wir in der Formel III. §. 5. für die Argumente v_1, v_2, v_3 ein System zusammengehöriger halber Perioden mit der Charakteristik $(\varpi+q)$, worin

$$(q) = \begin{pmatrix} \varkappa_1 & \varkappa_2 & \varkappa_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix};$$

so findet man:

$$\text{I.} \quad (-1)^{\Sigma(\varkappa h + m g)} \vartheta^2\{p\} \vartheta^2\{q\} = \sum_{i=0}^{i=7} (-1)^{\Sigma(\nu^{(i)} m + \mu^{(i)} \varkappa)} \vartheta^2\{p+\varpi+\beta_i\} \vartheta^2\{q+\varpi+\beta_i\}.$$

Nehmen wir zunächst $(q)=(p)$ an, so erhält man hiernach $\vartheta^4\{p\}$ ausgedrückt durch fünf andere vierte Potenzen von ϑ-Functionen für die 0 Werthe der Argumente. Nehmen wir beispielsweise an:

---

*) Ueber die letzteren Functionen vgl. die Abhandlung von *Königsberger* in *Borchardts* Journal Bd. 64. p. 17.

Es scheint, dass diese einfache Gestalt des Additionstheorems mit den ϑ-Functionen dreier Variablen abschliesst, weil bei den Functionen mit mehr als drei Variablen Systeme von Charakteristiken, wie die welche wir hier vollständige genannt haben, nicht mehr existiren.

$$(p) = (q) = (0),\quad (\beta_1) = \binom{111}{111},\quad (\beta_2) = \binom{001}{011},\quad (\beta_3) = \binom{011}{001},\quad (\beta_4) = \binom{101}{100},$$
$$(\beta_5) = \binom{100}{101},\quad (\beta_6) = \binom{110}{010},\quad (\beta_7) = \binom{010}{110},$$
$$(\varpi) = \binom{110}{100},$$

so ergiebt sich:

$$\vartheta^4\{0\} = \vartheta^4\begin{Bmatrix}101\\101\end{Bmatrix} + \vartheta^4\begin{Bmatrix}011\\000\end{Bmatrix} + \vartheta^4\begin{Bmatrix}010\\001\end{Bmatrix} + \vartheta^4\begin{Bmatrix}000\\110\end{Bmatrix} + \vartheta^4\begin{Bmatrix}100\\010\end{Bmatrix}.$$

Nehmen wir dagegen in I. (q) ungerade an, so erhält man auf der linken Seite 0 und auf der rechten Seite bleiben, wie leicht nach §. 4. zu beweisen ist, nur vier Glieder übrig. Es seien z. B. die Annahmen über (p), (β), (ϖ) dieselben wie oben, dagegen sei

$$(q) = \binom{100}{110},\quad (q+\varpi) = \binom{010}{010},$$

dann ergiebt sich:

$$\vartheta^2\begin{Bmatrix}011\\000\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}111\\110\end{Bmatrix} + \vartheta^2\begin{Bmatrix}010\\001\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}110\\111\end{Bmatrix} - \vartheta^2\begin{Bmatrix}000\\110\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}100\\000\end{Bmatrix} + \vartheta^2\begin{Bmatrix}100\\010\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}000\\100\end{Bmatrix} = 0.$$

---

2. Eine andere Classe von Formeln, welche die Differentialquotienten der ungeraden ϑ-Functionen für die Werthe 0 der Argumente enthalten, folgt aus der Formel V. §. 5. Wir setzen in derselben für die Argumente w_h ein System zusammengehöriger halber Perioden mit der Charakteristik (q) von der vorausgesetzt sei, dass $(p+q)$ ungerade ist, und für u_h ein System zusammengehöriger halber Perioden mit der gleichfalls als ungerade vorausgesetzten Charakteristik $(p+r)$. Dadurch geht aus V. §. 5. eine Gleichung hervor von der Form:

$$(1.)\qquad \sum_{i=0}^{i=7}\varepsilon_i\vartheta\{r+q+\beta_i\}\,\vartheta\{r+\beta_i\}\,\vartheta\{q+\beta_i\}(v_h)\,\vartheta\{\beta_i\}(v_h) = 0,$$

worin die Coëfficienten $\varepsilon_i = \pm 1$ sind.

Um diese Formel etwas genauer zu untersuchen, bemerken wir zunächst, dass nach unserer Voraussetzung sowohl (q) als (r) dargestellt werden können durch die Summe von zwei Charakteristiken (β). Ist nun $(p+q+r)$ gerade, so haben diese beiden Darstellungen kein (β) mit einander gemein, und wir setzen:

$$(r) = (\beta_4+\beta_5),\quad (q) = (\beta_6+\beta_7),\quad (p+q+r) = (\beta_1+\beta_2+\beta_3).$$

Daher sind die Charakteristiken

$$(r+p); \quad (r+\beta_4), \quad (r+\beta_5),$$
$$(r+q+\beta_1), \quad (r+q+\beta_2), \quad (r+q+\beta_3)$$

ungerade, und es bleiben in der Gleichung (1.) nur zwei Glieder übrig, welche gleich und entgegengesetzt sind, so dass dieselbe identisch wird.

Ist dagegen $(p+q+r)$ ungerade, so können wir setzen:

$$r=(\beta_5+\beta\ ), \quad q=(\beta_6+\beta_7), \quad (r+q)=(\beta_5+\beta_7).$$

Daraus ergiebt sich, dass folgende Charakteristiken ungerade sind:

$$(r+p), \quad (r+\beta_5), \quad (r+\beta_6),$$
$$(r+p+q), \quad (r+q+\beta_5), \quad (r+q+\beta_7)$$

und folgende gerade:

$$(r+\beta_1), \quad (r+\beta_2), \quad (r+\beta_3), \quad (r+\beta_4),$$
$$(q+r+\beta_1), \quad (q+r+\beta_2), \quad (q+r+\beta_3), \quad (q+r+\beta_4),$$
$$(q+\beta_1), \quad (q+\beta_2), \quad (q+\beta_3), \quad (q+\beta_4).$$

Es bleiben daher in der Gleichung (1.) nur vier Glieder übrig und dieselbe erhält die Form:

$$(2.) \quad \begin{cases} A_1\vartheta|\beta_1|(v_h)\vartheta|\beta_1+q|(v_h)+A_2\vartheta|\beta_2|(v_h)\vartheta|\beta_2+q|(v_h) \\ \quad +A_3\vartheta|\beta_3|(v_h)\vartheta|\beta_3+q|(v_h)+A_4\vartheta|\beta_4|(v_h)\vartheta|\beta_4+q|(v_h) = 0 \end{cases}$$

wo die Ausdrücke für die Coefficienten A_1, A_2, A_3, A_4 zwar aus (1.) hergeleitet werden können, leichter aber, wie alsbald gezeigt werden wird, direct gefunden werden. Zunächst aber bemerken wir, dass nach XII. §. 4. in der Formel (2.) die vier ungeraden Charakteristiken (β_1), (β_2), (β_3), (β_4) ganz beliebige sein können, vorausgesetzt nur, dass die Summe von je dreien derselben gerade ist. Wir bestimmen dann, nach XII. §. 4. eines der beiden vollständigen Systeme, zu welchen diese gehören, und setzen $(q)=(\beta\ +\beta_7)$.

Um nun die Coefficienten A zu bestimmen, setzen wir in (2.) für die Veränderlichen v_h der Reihe nach die Systeme zusammengehöriger halber Perioden mit den Charakteristiken:

$$(\beta_1+\beta_2+\beta_5+\beta_6),$$
$$(\beta_1+\beta_3+\beta_5+\beta_6),$$
$$(\beta_1+\beta_4+\beta_5+\beta_6).$$

Dadurch ergeben sich aus (2.) drei Gleichungen, von denen jede, wie man sofort übersieht nur zwei der Coefficienten A enthält, und aus denen man die Verhältnisse derselben, auf die es allein ankommt, bestimmt. Man findet leicht, wenn man die frühere Bezeichnung

$$(\beta_i) = \begin{pmatrix} \nu_1^{(i)} \nu_2^{(i)} \nu_3^{(i)} \\ \mu_1^{(i)} \mu_2^{(i)} \mu_3^{(i)} \end{pmatrix}$$

festhält, die nachstehenden Ausdrücke:

$$(3.)\quad \begin{cases} A_1 = (-1)^{\Sigma\mu^{(1)}(\nu^{(5)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})}\vartheta\{\beta_1+\beta_5+\beta_6\}\vartheta\{\beta_1+\beta_5+\beta_7\}, \\ A_2 = (-1)^{\Sigma\mu^{(2)}(\nu^{(5)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})}\vartheta\{\beta_2+\beta_5+\beta_6\}\vartheta\{\beta_2+\beta_5+\beta_7\}, \\ A_3 = (-1)^{\Sigma\mu^{(3)}(\nu^{(5)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})}\vartheta\{\beta_3+\beta_5+\beta_6\}\vartheta\{\beta_3+\beta_5+\beta_7\}, \\ A_4 = (-1)^{\Sigma\mu^{(4)}(\nu^{(5)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})}\vartheta\{\beta_4+\beta_5+\beta_6\}\vartheta\{\beta_4+\beta_5+\beta_7\}. \end{cases}$$

Differentiirt man nun die Gleichung (2.) nach jeder der darin vorkommenden Veränderlichen v_1, v_2, v_3 und setzt nach der Differentiation $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, so erhält man drei Gleichungen, welche sich mit Benutzung der Bezeichnung:

$$\left|\frac{\partial\vartheta\{\beta\}(v_1,v_2,v_3)}{\partial v_i}\right|_{v_1=v_2=v_3=0} = \vartheta_i'\{\beta\}$$

folgendermassen schreiben lassen.

$$(4.)\quad \begin{cases} B_1\vartheta_1'\{\beta_1\}+B_2\vartheta_1'\{\beta_2\}+B_3\vartheta_1'\{\beta_3\}+B_4\vartheta_1'\{\beta_4\} = 0, \\ B_1\vartheta_2'\{\beta_1\}+B_2\vartheta_2'\{\beta_2\}+B_3\vartheta_2'\{\beta_3\}+B_4\vartheta_2'\{\beta_4\} = 0, \\ B_1\vartheta_3'\{\beta_1\}+B_2\vartheta_2'\{\beta_2\}+B_3\vartheta_3'\{\beta_3\}+B_4\vartheta_3'\{\beta_4\} = 0, \end{cases}$$

worin die Coefficienten B folgende Bedeutung haben:

$$(5.)\quad \begin{cases} B_1 = (-1)^{\Sigma\mu^{(1)}(\nu^{(5)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})}\vartheta\{\beta_1+\beta_6+\beta_7\}\vartheta\{\beta_1+\beta_7+\beta\ \}\vartheta\{\beta_1+\beta_5+\beta_6\}, \\ B_2 = (-1)^{\Sigma\mu^{(2)}(\nu^{(5)}+\ ^{(6)}+\nu^{(7)})}\vartheta\{\beta_2+\beta_6+\beta_7\}\vartheta\{\beta_2+\beta_7+\beta_5\}\vartheta\{\beta_2+\beta_5+\beta_6\}, \\ B_3 = (-1)^{\Sigma\mu^{(3)}(\nu^{(5)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})}\vartheta\{\beta_3+\beta_6+\beta_7\}\vartheta\{\beta_3+\beta_7+\beta\ \}\vartheta\{\beta_3+\beta_5+\beta_6\}, \\ B_4 = (-1)^{\Sigma\mu^{(4)}(\nu^{(5)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})}\vartheta\{\beta_4+\beta_6+\beta_7\}\vartheta\{\beta_4+\beta_7+\beta_5\}\vartheta\{\beta_4+\beta_5+\beta_6\}. \end{cases}$$

Durch Auflösung des Systems (4.) nach den als unbekannt betrachteten B_1, B_2, B_3, B_4 leiten wir folgendes wichtige Formelsystem her:

$$\text{III.}\quad B_1 : B_2 : B_3 : B_4 = [\beta_2\beta_3\beta_4] : -[\beta_1\beta_3\beta_4] : [\beta_1\beta_2\beta_4] : -[\beta_1\beta_2\beta_3]$$

wenn wir uns zur Abkürzung des Zeichens bedienen:

$$\begin{vmatrix} \vartheta_1'\{\beta\ \}, & \vartheta_1'\{\beta_3\}, & \vartheta_1'\{\beta_4\} \\ \vartheta'\{\beta_2\}, & \vartheta_2'\{\beta_3\}, & \vartheta_2'\{\beta_4\} \\ \vartheta_3'\{\beta_2\}, & \vartheta_3'\{\beta_3\}, & \vartheta_3'\{\beta_4\} \end{vmatrix} = [\beta_2\beta\ \beta_4].$$

Wir wählen als Beispiel das schon öfter benutzte:

$$(\beta_1) = \begin{pmatrix}111\\111\end{pmatrix},\quad (\beta_2) = \begin{pmatrix}001\\011\end{pmatrix},\quad (\beta_3) = \begin{pmatrix}011\\001\end{pmatrix},\quad (\beta_4) = \begin{pmatrix}101\\100\end{pmatrix},\quad (\beta_5) = \begin{pmatrix}100\\101\end{pmatrix},$$

$$(\beta_6) = \begin{pmatrix}110\\010\end{pmatrix},\quad (\beta_7) = \begin{pmatrix}010\\110\end{pmatrix}$$

wodurch wir zunächst erhalten:

$$B_1 = \vartheta\begin{Bmatrix}231\\231\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}221\\322\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}321\\222\end{Bmatrix},\quad B_2 = \vartheta\begin{Bmatrix}121\\131\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}111\\222\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}211\\122\end{Bmatrix},$$

$$B_3 = \vartheta\begin{Bmatrix}131\\121\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}121\\212\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}221\\112\end{Bmatrix},\quad B_4 = \vartheta\begin{Bmatrix}221\\220\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}211\\311\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}311\\211\end{Bmatrix}.$$

Hier dürfen nun nicht ohne Weiteres die Elemente der Charakteristiken auf ihre kleinsten Reste (modulo 2) reducirt werden, sondern es muss bei dieser Reduction auf die Aenderung der Vorzeichen der ϑ-Functionen Rücksicht genommen werden nach der p. 14 gegebenen Vorschrift. Darnach darf die Reduction in der ersten Reihe der Elemente einer Charakteristik ohne Weiteres vollzogen werden. Wird dagegen ein Element der zweiten Reihe um zwei vermindert so muss das Zeichen der ϑ-Function geändert werden oder nicht, je nachdem über diesem Element in der ersten Reihe 1 oder 0 steht. Demnach können wir setzen:

$$B_1 = \vartheta\begin{Bmatrix}011\\011\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}001\\100\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}101\\000\end{Bmatrix},\quad B_2 = -\vartheta\begin{Bmatrix}101\\111\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}111\\000\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}011\\100\end{Bmatrix},$$

$$B_3 = \vartheta\begin{Bmatrix}111\\101\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}101\\010\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}001\\110\end{Bmatrix},\quad B_4 = -\vartheta\begin{Bmatrix}001\\000\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}011\\111\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}111\\011\end{Bmatrix}.$$

---

3. Eine dritte Classe von Formeln, die wir gleichfalls später anwenden werden, ergiebt sich aus der Formel (2.), wenn wir für die Argumente v_h ein System zusammengehöriger halber Perioden setzen, dessen Charakteristik (ϖ) wir so wählen, dass in dieser Formel nur drei Glieder übrig bleiben, während das vierte fortfällt. Sollen die drei ersten Glieder stehen bleiben, so muss (ϖ) der Bedingung genügen, dass:

$$(\beta_1+\beta_6+\beta_7+\varpi),\quad (\beta_2+\beta_6+\beta_7+\varpi),\quad (\beta_3+\beta_6+\beta_7+\varpi),$$

$$(\beta_1+\varpi),\qquad (\beta_2+\varpi),\qquad (\beta_3+\varpi)$$

gerade Charakteristiken sind, während von den beiden

$$(\beta_4+\beta_6+\beta_7+\varpi),\quad (\beta_4+\varpi)$$

wenigstens eine ungerade ist. Man sieht leicht, dass diese Bedingungen nur durch die Annahme befriedigt werden können:

$$(\varpi) = (\beta_4+\beta_6) \quad \text{oder} \quad (\varpi) = (\beta_4+\beta_7).$$

Bei allen anderen Annahmen über (ϖ) (die hieraus nicht durch Vertauschung von $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ hervorgehen) wird die Gleichung (2.) identisch, nur für $(\varpi) = (\beta_5+\beta_6)$ oder $(\varpi) = (\beta_5+\beta_7)$ ergiebt sich aus (2.) eine Relation mit vier Gliedern.

Setzen wir daher $\varpi = (\beta_4+\beta_6)$, so folgt aus (2.):

$$\text{III.}\quad \begin{cases} (-1)^{\Sigma\mu^{(1)}(\nu^{(2)}+\nu^{(3)})+\Sigma\nu^{(1)}m}\vartheta\{\beta_1+\beta_4+\beta_6\}\vartheta\{\beta_1+\beta_4+\beta_7\}\vartheta\{\beta_1+\beta_5+\beta_6\}\vartheta\{\beta_1+\beta_5+\beta_7\} \\ +(-1)^{\Sigma\mu^{(2)}(\nu^{(3)}+\nu^{(1)})+\Sigma\nu^{(2)}m}\vartheta\{\beta_2+\beta_4+\beta_6\}\vartheta\{\beta_2+\beta_4+\beta_7\}\vartheta\{\beta_2+\beta_5+\beta_6\}\vartheta\{\beta_2+\beta_5+\beta_7\} \\ +(-1)^{\Sigma\mu^{(3)}(\nu^{(1)}+\nu^{(2)})+\Sigma\nu^{(3)}m}\vartheta\{\beta_3+\beta_4+\beta_6\}\vartheta\{\beta_3+\beta_4+\beta_7\}\vartheta\{\beta_3+\beta_5+\beta_6\}\vartheta\{\beta_3+\beta_5+\beta_7\}, \end{cases}$$

wenn $(p) = \binom{n_1\, n_2\, n_3}{m_1\, m_2\, m_3}$ gesetzt ist.

Nach unserer speciellen Annahme ergiebt diese Formel:

$$\vartheta\begin{Bmatrix}100\\001\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}000\\101\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}101\\000\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}001\\100\end{Bmatrix}$$
$$= \vartheta\begin{Bmatrix}010\\101\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}110\\001\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}011\\100\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}111\\000\end{Bmatrix} + \vartheta\begin{Bmatrix}000\\111\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}100\\011\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}001\\110\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}101\\010\end{Bmatrix}.$$

Beim Gebrauch dieser Formel kann ein beliebiges System der (β) zu Grunde gelegt werden; behält man aber auch ein und dasselbe System der (β) bei, so erhält man aus III. eine grosse Zahl von besonderen Formeln, wenn man die Ordnung der (β) permutirt. Man gelangt aber auf diese Weise nicht zu allen Formeln, die überhaupt in III. enthalten sind, wie schon aus dem Umstand erhellt, dass in III. nicht die Function $\vartheta\{p\}$ vorkommen kann.

Man ersetze daher, um eine neue Formel zu erhalten, in III.

$$(p),\quad (\beta_1),\quad (\beta_2),\quad (\beta_3),\quad (\beta_4),\quad (\beta_5),\quad (\beta_6),\quad (\beta_7)$$

durch:

$$(\beta_2+\beta_3+\beta_5),\ (p+\beta_1+\beta_5),\ (\beta_2),\ (\beta_3),\ (p+\beta_4+\beta_5),\ (p+\beta_2+\beta_3),\ (p+\beta_5+\beta_6),\ (p+\beta_5+\beta_7)$$

welche ein vollständiges System bilden, und man findet:

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} (-1)^{\Sigma\mu^{(2)}(\nu^{(4)}+\nu^{(5)})}\vartheta\{\beta_2+\beta_4+\beta_6\}\vartheta\{\beta_2+\beta_4+\beta_7\}\vartheta\{\beta_3+\beta_5+\beta_6\}\vartheta\{\beta_3+\beta_5+\beta_7\} \\ -(-1)^{\Sigma\mu^{(3)}(\nu^{(4)}+\nu^{(5)})}\vartheta\{\beta_2+\beta_5+\beta_6\}\vartheta\{\beta_2+\beta_5+\beta_7\}\vartheta\{\beta_3+\beta_4+\beta_6\}\vartheta\{\beta_3+\beta_4+\beta_7\} \\ =(-1)^{\Sigma\mu^{(5)}\nu^{(4)}+\Sigma(\nu^{(5)}+\nu^{(2)})(\mu^{(5)}+\mu^{(3)})}\vartheta\{\beta_2+\beta_3+\beta_6\}\vartheta\{\beta_2+\beta_3+\beta_7\}\vartheta\{\beta_4+\beta_5+\beta_6\}\vartheta\{\beta_4+\beta_5+\beta_7\}. \end{cases}$$

Auf ähnliche Weise kann man leicht noch andere Formeln ableiten, auf die wir hier nicht näher eingehen, weil wir in der Folge von ihnen keinen Gebrauch zu machen haben, und ihnen, als in der Formel III. schon enthalten, ein selbständiges Interesse nicht zukommt.

II. Abschnitt.

Die algebraischen Functionen vom Geschlecht 3 und ihre Integrale.

§. 7. Grundbegriffe.

Wir verlassen jetzt die sechsfach periodischen Functionen um ihnen später von einer andern Seite her wieder zu begegnen, und wenden uns zur Untersuchung der algebraischen Functionen von einer Veränderlichen, wobei wir die *Riemannschen* Anschauungen und Bezeichnungen im Wesentlichen als bekannt voraussetzen. *) Es sollen zunächst einige der Hauptpunkte der *Riemannschen* Theorie zum besseren Verständniss des Folgenden recapitulirt werden, für unsere besondere Aufgabe specialisirt.

Wir gehen aus von einer algebraischen Gleichung zwischen zwei Veränderlichen s, z:

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0,$$

die in Beziehung auf s vom Grade n ist, deren Coëfficienten in z bis zum m^{ten} Grade ansteigen; als den allgemeinen Fall betrachten wir den, wo diese Coëfficienten alle wirklich den m^{ten} Grad erreichen, ohne jedoch andere Fälle auszuschliessen. Es sei ferner diese Gleichung irreductibel, d. h. es soll dieselbe nicht in Factoren von niedrigerem Grad zerfallen, die in s und z rational sind. Der Verlauf der Function s wird dargestellt durch eine die z-Ebene allenthalben $n$fach bedeckende ganz in sich zusammenhängende *Riemannsche* Fläche T.

Die algebraische Function s von z gehört nach der von *Clebsch* eingeführten Bezeichnung zum Geschlecht 3, wenn die Fläche T siebenfach

*) *Riemann*, Theorie der *Abelschen* Functionen (*Borchardts* Journal Bd. 54.)

zusammenhängend ist, oder wenn sie durch sechs Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden kann. Nach den Sätzen von *Riemann* ist hierzu erforderlich, dass dieselbe $2n-4$ einfache Verzweigungspunkte besitzt, und dies tritt dann ein, wenn für $(n-1)(m-1)-3$ Werthepaare $(s=\gamma,\ z=\delta)$ die drei Functionen $F,\ \frac{\partial F}{\partial s},\ \frac{\partial F}{\partial z}$ zugleich verschwinden, vorausgesetzt, dass andere Singularitäten ausgeschlossen werden. (Vgl. *Riemann* l. c. No. 7.)

Ueber die hierdurch ausgeschlossenen Singularitäten mögen einige Bemerkungen hier Platz finden, deren Beweise leicht nach *Riemanns* Methode ergänzt werden: wenn für ein der Gleichung $F=0$ genügendes Werthepaar von $s,\ z$ sämmtliche Ableitungen der Function F bis zur k^{ten} Ordnung ausschliesslich verschwinden, so hat man ein solches Werthepaar so zu zählen, als ob für $\frac{k.k-1}{2}$ Werthepaare von $s,\ z$ nur die ersten Ableitungen von F verschwänden. Tritt der von *Riemann* ausgeschlossene Fall ein, dass für ein Werthepaar $(s=\gamma,\ z=\delta)$ nicht nur $F,\ \frac{\partial F}{\partial s},\ \frac{\partial F}{\partial z}$, sondern auch $\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial s\,\partial z}\right)^2$ verschwindet, so bedingt dieser keine wesentliche Aenderung. Es fällt dann einfach dies Werthepaar (γ,δ) in einen Verzweigungspunkt der Fläche T, welcher nicht aufgehoben wird, oder es fallen drei Verzweigungspunkte zusammen, von denen zwei aufgehoben werden. Es hat in diesem Fall die Entwicklung von F nach Potenzen von $s-\gamma,\ z-\delta$ die Gestalt:

$$\begin{aligned} F(s,z) \;=\; & (a(s-\gamma)+b(z-\delta))^2+A(s-\gamma)^3+B(s-\gamma)^2(z-\delta) \\ & +C(s-\gamma)(z-\delta)^2+D(z-\delta)^3+\cdots \end{aligned}$$

und bei der soeben gemachten Bemerkung ist vorausgesetzt, dass $(a(s-\gamma)+b(z-\delta))$ nicht Factor der Glieder dritter Ordnung ist. Tritt dieser Fall ein, so fallen vier einfache Verzweigungspunkte einander aufhebend zusammen, und das betreffende Werthepaar $(s=\gamma,\ z=\delta)$ ist für zwei einfache solcher Werthepaare zu rechnen.

Bedeuten $s_1,\ z_1$ irgend zwei rationale Functionen von $s,\ z$, so besteht zwischen diesen ebenfalls eine algebraische Gleichung:

$$F_1(\overset{n_1}{s_1},\overset{m_1}{z_1}) \;=\; 0,$$

und im Allgemeinen, d. h. wenn die Functionen $s_1,\ z_1$ nicht besonderen

Bedingungen genügen, können auch die Veränderlichen s, z rational durch s_1, z_1 ausgedrückt werden. Die Gleichung $F_1 = 0$ gehört unter dieser Voraussetzung ebenfalls zum Geschlecht 3 und kann als eine Transformation der gegebenen Gleichung $F = 0$ angesehen werden.*) Eine solche Transformation soll eine eindeutige genannt werden. Alle Gleichungen, welche durch eindeutige Transformation in einander übergeführt werden können, bilden eine *Classe* solcher Gleichungen und bestimmen eine Classe von Systemen algebraischer Functionen, nämlich die Systeme der rationalen Functionen von s, z resp. s_1, z_1, welche durch Einführung einer Function des Systems als unabhängige Variable in einander transformirt werden können. (*Riemann* l. c. No. 11. 12.)

Wir zerschneiden nun die Fläche T durch sechs Querschnitte in eine einfach zusammenhängende T', um die Integrale rationaler Functionen eindeutig bestimmen zu können. Diese Integrale haben zu beiden Seiten des Querschnitts gewisse längs des Querschnitts constante Werthdifferenzen, *Periodicitätsmoduln* genannt, werden in einzelnen Punkten im Innern von T' in gewisser Weise unendlich und können ausserdem noch an anderen innerhalb T' verlaufenden Linien constante Werthdifferenzen besitzen. (Integrale dritter Gattung.)

Wir betrachten hier nur die einfachsten unter diesen Functionen, nämlich solche, die in der ganzen Fläche T' endlich und stetig sind, die also nur an den Querschnitten gewisse Periodicitätsmoduln besitzen und welche *Integrale erster Gattung* genannt werden. Dass solche Functionen existiren, zeigt die wirkliche Bildung derselben. Man setze:

$$w = \int \frac{\varphi(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})\,dz}{\frac{\partial F}{\partial s}},$$

welches Integral von einem beliebigen festen Punkt aus auf beliebigem Wege durch das Innere von T' erstreckt wird. Bedeutet $\varphi(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})$ eine ganze rationale Function vom Grade $n-2$, resp. $m-2$ in s und z, so bleibt das Integral für unendlich grosse Werthe von s oder z endlich und stetig. In einem einfachen Verzweigungspunkt $z = z_0$ der Fläche T wird $\frac{\partial F}{\partial s}$ unendlich klein wie $\sqrt{z - z_0}$ und sonach bleibt auch hier das Integral w endlich

*) Dieser Satz gilt auch umgekehrt, nämlich: Besteht zwischen den rationalen Functionen s_1, z_1 von s, z eine Gleichung vom Geschlecht 3, so kann s, z rational durch s_1, z_1 ausgedrückt werden.

und stetig. Wenn aber für ein Werthepaar $(s=\gamma,\ z=\delta)\ \frac{\partial F}{\partial s}$ und $\frac{\partial F}{\partial z}$ zugleich verschwinden, so wird $\frac{\partial F}{\partial s}$ unendlich klein wie $z-\delta$, und die Function φ muss für solche Werthepaare ebenfalls unendlich klein werden wie $z-\delta$, damit w endlich bleibe. Kommen keine anderen Singularitäten vor, so genügen diese Bedingungen, um der Function w die verlangte Eigenschaft zu ertheilen. Die Berücksichtigung anderer Singularitäten hat keine Schwierigkeiten, soll aber hier der Kürze halber übergangen werden.

Man schliesst aus dem Gesagten mit *Riemann*, dass drei von einander linear unabhängige Functionen φ existiren, und dass zwischen irgend vier solchen Functionen eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coëfficienten besteht.

Auf einem andern Wege lässt sich zeigen, dass mehr als drei linear unabhängige Functionen w nicht existiren können, und somit folgt aus dieser Betrachtung, dass drei solche Functionen w_1, w_2, w_3 existiren, zwischen denen keine lineare Gleichung besteht und dass jede andere Function w in der Form dargestellt werden kann:

$$w = a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 + \text{const.}$$

§. 8. Eigenschaften der Functionen φ.

Die Functionen φ, welche in den Integralen erster Gattung im Zähler auftreten, sind für die Folge von der grössten Wichtigkeit und sollen daher zunächst einer genaueren Betrachtung unterworfen werden. Alle diese Functionen können, wie wir gesehen haben, linear und homogen durch drei unter ihnen ausgedrückt werden in der Weise:

$$\varphi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3.$$

Eine solche Function verschwindet (ausser in etwaigen singulären Punkten) 2p-2 in vier Punkten der Fläche T, von denen wegen der drei Constanten a_1, a_2, a_3 zwei beliebig gewählt werden können, und im Allgemeinen ist auch umgekehrt eine Function φ durch zwei solche 0-Punkte bis auf einen constanten Factor völlig bestimmt.

Durch jede eindeutige Transformation der Gleichung $F=0$ gehen die Integrale erster Gattung wieder in Integrale erster Gattung über, und daraus entspringt der Satz:

Das Verhältniss zweier Functionen φ geht durch jede eindeutige Trans-

formation wieder in das Verhältniss zweier solcher Functionen über, so dass die Functionen φ für alle diese Transformationen den Charakter von Covarianten haben.

Demnach sind alle homogenen Functionen 0^{ter} Ordnung und alle homogenen Gleichungen zwischen den Functionen φ ganz unabhängig von der besonderen Form, in der gerade die Gleichung $F=0$ vorgelegt ist.

Es ist daher von grossem Vortheil, die Untersuchungen so weit als möglich ohne Voraussetzung einer speciellen Form der Gleichung $F=0$ nur mit den Functionen φ zu führen, wodurch dieselben nicht nur an Allgemeinheit, sondern auch an Einfachheit und Eleganz gewinnen.

Das Verhältniss zweier Functionen φ: $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ wird im Allgemeinen in vier Punkten der Fläche T unendlich gross und unendlich klein in der in 4 Punkten ersten Ordnung und nimmt sonach jeden beliebigen Werth gleichfalls in vier Punkten der Fläche an. Die Constanten des Zählers von $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ lassen sich so bestimmen, dass einer der 0-Punkte des Zählers mit einem 0-Punkt des Nenners zusammenfällt und denselben aufhebt, und man erhält so eine Function, welche in drei Punkte unendlich von der ersten Ordnung wird, von denen zwei beliebig gegeben sein können. Diese Function enthält noch zwei Constanten linear, denn es ist $\frac{c_1\varphi_1+c_2\varphi_2}{\varphi_2}$ eine Function von derselben Eigenschaft.

Im Allgemeinen kann nicht noch ein zweiter 0-Punkt des Zählers mit einem 0-Punkt des Nenners vereinigt werden, denn sonst wäre $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}=z_1$ eine Function die jeden beliebigen Werth nur in zwei Punkten der Fläche T annimmt, und zwischen z_1 und einer beliebigen andern rationalen Function s_1 von s und z würde eine Gleichung zweiten Grades in Bezug auf s_1 bestehen. Man würde daher die Fläche T in den kleinsten Theilen ähnlich auf eine zweiblättrige Fläche T_1 abbilden können und die Integrale rationaler Functionen von s und z wären hyperelliptische. Dieser Specialfall ist anderweitig genau untersucht. Seine Berücksichtigung liegt nicht in unserer Absicht. *)

---

*) Bei den hyperelliptischen Functionen vom Geschlecht 3 können als die von einander unabhängigen Functionen φ folgende angenommen werden: $\varphi_1=1$, $\varphi_2=z$, $\varphi_3=z^2$, so dass zwischen denselben eine homogene Gleichung zweiten Grades besteht: $\varphi_1\varphi_3=\varphi_2^2$. Dass diese Bedingung auch hinreichend ist dafür dass die Gleichung

Setzen wir daher im allgemeinen Fall, indem wir unter φ_1, φ_2, φ_3 drei von einander linear unabhängige Functionen φ verstehen:

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = s_1, \quad \frac{\varphi_3}{\varphi_1} = z_1,$$

so entspricht jedem Werthepaar s, z ein Werthepaar s_1, z_1; aber auch das umgekehrte gilt, dass einem Werthepaar s_1, z_1 nie mehr als ein Werthepaar s, z entsprechen kann, denn wäre das Gegentheil der Fall, so wäre $\frac{\varphi_2 - s_1\varphi_1}{\varphi_3 - z_1\varphi_1}$ eine Function von s und z, die in weniger als drei Punkten 0 und unendlich in der ersten Ordnung würde.

Es kann demnach mit Zuziehung der Gleichung $F(s, z) = 0$ s und z rational durch $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = s_1$, $\frac{\varphi_3}{\varphi_1} = z_1$ ausgedrückt werden, und zwischen s_1, z_1 besteht eine algebraische Gleichung welche als eindeutige Transformation von $F(s, z) = 0$ anzusehen ist, die daher auch zum Geschlecht 3 gehören muss.

Diese Gleichung kann als homogene Gleichung zwischen φ_1, φ_2, φ_3 dargestellt werden und muss (nach etwaiger Absonderung eines Factors) die Gleichung $F(s, z) = 0$ wieder ergeben, wenn für φ_1, φ_2, φ_3 ihre Ausdrücke durch s und z eingesetzt werden.

Es lässt sich auf doppelte Weise der Grad dieser Gleichung ermitteln: da jedem Werth von z_1 in der Substitution

$$s_1 = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \quad z_1 = \frac{\varphi_3}{\varphi_1},$$

vier Werthepaare von s, z also auch vier Werthe von s_1 und ebenso jedem Werth von s_1 vier Werthe von z_1 entsprechen, so besteht zwischen s_1 und z_1 eine Gleichung, die in Bezug auf jede dieser Veränderlichen vom vierten Grade ist. Da aber dasselbe noch gelten muss für zwei neue Veränderliche, die mit s_1, z_1 durch eine beliebige lineare Substitution zusammenhängen, so folgt, dass in dieser Gleichung kein Glied in Bezug auf s_1 und z_1 zu-

---

$F = 0$ auf hyperelliptische Functionen führt, ergiebt sich leicht auf folgendem Wege: Nehmen wir an, es bestehe zwischen den drei Functionen φ_1, φ_2, φ_3 eine homogene Gleichung zweiten Grades, so kann dieselbe auf die Form gebracht werden $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_3^2$ oder $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \left(\frac{\varphi_3}{\varphi_1}\right)^2$. Da nun $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ höchstens in vier Punkten 0 und unendlich von der ersten Ordnung werden kann, so kann $\frac{\varphi_3}{\varphi_1}$ nur in zwei Punkten 0 und ∞ in der ersten Ordnung werden, womit die Behauptung bewiesen ist.

sammengenommen die vierte Dimension übersteigen kann. Es besteht daher zwischen den Functionen φ_1, φ_2, φ_3 eine homogene Gleichung vierter Ordnung:

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0.$$

Zu dem gleichen Resultat gelangen wir auf folgendem Wege: Bezeichnen wir mit h, i, k, l; h_1, i_1, k_1, l_1 je irgend vier der Zahlen 1, 2, 3, so ist:

$$\Psi = \frac{\varphi_h \varphi_i \varphi_k \varphi_l}{\varphi_{h_1} \varphi_{i_1} \varphi_{k_1} \varphi_{l_1}}$$

eine Function, die in 16 Punkten der Fläche T unendlich von der ersten Ordnung wird, die also, nach einem Satz von *Riemann* (l. c. No. 5) linear mit constanten Coëfficienten ausgedrückt werden kann durch 13 specielle Functionen der gleichen Art, die in denselben Punkten wie Ψ unendlich werden. Nun lassen sich aber, bei Festhaltung des Nenners, 14 verschiedene solche Functionen Ψ bilden und zwischen diesen muss also eine lineare Gleichung bestehen, die durch Multiplication mit $\varphi_{h_1} \varphi_{i_1} \varphi_{k_1} \varphi_{l_1}$ wieder unsere homogene Gleichung vierten Grades zwischen den Functionen φ_1, φ_2, φ_3 ergiebt.

Betrachtet man φ_1, φ_2, φ_3 als homogene Coordinaten in der Ebene, so stellt diese Gleichung eine *Curve vierter Ordnung* dar. Da auch umgekehrt eine Curve vierter Ordnung ohne Doppel- oder Rückkehrpunkte zu Functionen vom Geschlecht 3 führt, so können wir die Gleichung einer allgemeinen Curve vierter Ordnung unseren Betrachtungen zu Grunde legen. Die Functionen φ, für sich $= 0$ gesetzt, stellen bei dieser Auffassung beliebige gerade Linien dar. *)

*) Vgl. *Clebsch* und *Gordan*, Theorie der *Abelschen* Functionen. Der Fall der hyperelliptischen Functionen kann nicht durch Specialisirung aus der Gleichung einer Curve vierter Ordnung erhalten werden. Er tritt durchaus als Ausnahme- nicht als Specialfall auf und verlangt eine wesentlich andere Behandlung. Die einfachste geometrische Grundlage für diesen Fall ist eine Curve fünfter Ordnung mit dreifachem Punkt. Es ist dies übrigens der einzige Ausnahmefall, der beim Geschlecht 3 auftritt. Bei Functionen vom höheren Geschlecht kommen noch andere Ausnahmefälle vor. So ist beim Geschlecht 4 ein solcher bisher noch nicht näher untersuchter Ausnahmefall der einer Curve fünfter Ordnung mit zwei zusammenfallenden Doppelpunkten (Selbstberührung), den man auch aus einer Raumcurve erhalten kann, die der Durchschnitt einer Fläche dritter Ordnung mit einer Kegelfläche zweiter Ordnung ist, während die allgemeinen Functionen vom Geschlecht 4 aus der Durchschnittscurve einer allgemeinen Fläche zweiter Ordnung mit einer der dritten Ordnung entspringen. Die hyperelliptischen Functionen vom Geschlecht 4 erhält man aus einer ebenen Curve sechster Ordnung mit vierfachem Punkt.

An diese Transformation der Gleichung $F=0$ schliesst sich folgender Satz:

Alle wie T verzweigten Functionen, σ, die in einer endlichen Anzahl von Punkten 0 und unendlich von endlicher Ordnung sind, sonst aber stetig bleiben, lassen sich darstellen als homogene Functionen 0^{ter} Ordnung von den Functionen φ, so dass sie wie diese den Charakter von Covarianten für die eindeutigen Transformationen besitzen.

Dieser Satz ist im Grunde in den *Riemannschen* Untersuchungen (l. c. No. 8) enthalten. Wir werden wegen der besonderen Form in welcher derselbe hier aufgestellt ist, den Beweis in der Kürze reproduciren.

Wir stützen uns dabei auf den schon benutzten Satz, dass alle wie T verzweigten Functionen, die in μ beliebig gegebenen Punkten der Fläche 0 und unendlich in der ersten Ordnung werden, linear und homogen $\mu-2$ willkürliche Constanten enthalten, oder was dasselbe ist, dass sie durch $\mu-3$ specielle Functionen der gleichen Art durch Vermittlung constanter Coëfficienten linear dargestellt werden können.

Eine Ergänzung hierzu ist von *Roch* gegeben, welche darin besteht, dass die Zahl der Constanten um eine vermehrt wird, wenn die Punkte, in denen die Function unendlich wird, solche sind, in denen eine Function φ verschwindet. (*Borchardts* Journal Bd. 64. p. 372.)

Unser Satz ist daher bewiesen, wenn wir Functionen von der verlangten Art wirklich herstellen, welche die nöthige Anzahl von Constanten enthalten.

Was zunächst die zuletzt erwähnten Functionen betrifft, die ihre Unstetigkeitspunkte in den 0-Punkten einer Function φ haben, so können dieselben nur entweder drei oder vier Unstetigkeitspunkte besitzen, und die Anzahl der Constanten muss resp. 2 und 3 sein. Ist φ_1 die Function φ, welche in den Unstetigkeitspunkten einer solchen Function σ verschwindet, so ist:

$$\sigma = \frac{\varphi}{\varphi_1}$$

im Allgemeinen eine Function, die viermal 0 und unendlich von der ersten Ordnung wird, und der Zähler enthält drei willkürliche Constanten, wie es sein muss. Bestimmt man eine dieser Constanten so, dass ein 0-Punkt von φ mit einem von φ_1 zusammenfällt, so wird σ nur in drei Punkten unendlich, und es bleiben zwei willkürliche Constanten im Zähler, wodurch bewiesen ist, dass alle diese Functionen als Quotienten zweier Functionen φ darstellbar sind.

Wird über die Lage der Unendlichkeitspunkte von σ nicht die eben angenommene besondere Voraussetzung gemacht, so muss die Zahl derselben grösser als 3 sein, weil wenigstens zwei willkürliche Constanten in der Function σ bleiben müssen, da $a\sigma + b$ eine Function ist, die in denselben Punkten und in derselben Ordnung unendlich wird, wie σ, welche Werthe auch die Constanten a und b haben mögen.

Setzen wir jetzt:

$$\sigma = \frac{\overset{\nu}{\Psi_1}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\overset{\nu}{\Psi_2}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)},$$

und lassen Ψ_1 und Ψ_2 ganz homogene Functionen vom Grade ν bedeuten, so enthalten Zähler und Nenner zunächst je

$$\frac{\nu+1 . \nu+2}{2}$$

unbestimmte Constanten linear und homogen. Berücksichtigt man aber, dass, falls $\nu \gtreqless 4$ ist, die Function Ψ_1 ungeändert bleibt, wenn man statt derselben schreibt:

$$\Psi_1 + \overset{\nu-4}{\varrho}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\overset{4}{\Phi}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),$$

worin ϱ eine beliebige ganze homogene Function $\nu - 4^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet: so erkennt man, dass von den Coëfficienten von Ψ_1 $\frac{\nu - 3 . \nu - 2}{2}$ unbestimmt bleiben müssen; man kann etwa der Function Ψ_1 die Bedingung auferlegen, dass sie für $\frac{\nu - 3 . \nu - 2}{2}$ beliebig angenommene, der Gleichung $\Phi = 0$ nicht genügende Werthsysteme von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ verschwinden soll, und kann diese Werthsysteme ausserdem so wählen, dass sie keiner Gleichung von der Form

$$\overset{\nu-4}{\varrho}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0$$

genügen, so dass Ψ_1 nicht die Form erhalten kann:

$$\overset{\nu-4}{\varrho}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\overset{4}{\Phi}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),$$

in welchem Fall Ψ_1 in der Fläche T identisch verschwinden würde. Dieselbe Betrachtung ist auf Ψ_2 anwendbar, und es bleiben demnach in jeder der beiden Functionen

$$\frac{(\nu+1)(\nu+2) - (\nu-3)(\nu-2)}{2} = 4\nu - 2$$

unbestimmte Coëfficienten linear und homogen enthalten.

Ist nun $4\nu-2>\mu$, so kann Ψ_2 so bestimmt werden, dass es für μ beliebig gegebene Punkte der Fläche T verschwindet und es wird Ψ_2 dann noch in $4\nu-\mu$ anderen Punkten der Fläche T verschwinden, von denen im Allgemeinen noch ein Theil beliebig gewählt werden kann.

Bestimmt man dann die Constanten des Zählers Ψ_1 so, dass derselbe in diesen $4\nu-\mu$ Punkten gleichfalls verschwindet, so enthält derselbe noch

$$4\nu-2-4\nu+\mu=\mu-2$$

Constanten linear und homogen, und σ ist eine Function von der verlangten Eigenschaft mit der geforderten Zahl willkürlicher Constanten.

Auch die Fälle $\nu=2$ und $\nu=3$ bedingen keine Ausnahme. Hier fällt zwar die vorhin mit ϱ bezeichnete Function fort; es ist aber in beiden Fällen:

$$\frac{\nu+1.\nu+2}{2}=4\nu-2,$$

so dass ganz dieselben Betrachtungen anwendbar bleiben.

Von der Lage der sich aufhebenden 0-Punkte des Zählers und Nenners von σ deren Zahl $4\nu-\mu$, also grösser als 2 ist, und von denen im Allgemeinen ein Theil beliebig angenommen werden kann, ist die Function σ unabhängig, so dass es selbst bei gegebenen ν unendlich viele Darstellungen einer und derselben Function σ geben kann. Ausserdem aber kann ν beliebig gross angenommen werden, nur eine untere Grenze ist für diese Zahl gegeben durch die Bedingung:

$$4\nu-2>\mu.$$

So lassen sich als Quotienten zweier homogener Functionen zweiter Ordnung alle Functionen darstellen, die in vier oder fünf Punkten der Fläche T unendlich von der ersten Ordnung werden; die Anzahl der im Zähler übrig bleibenden Constanten beträgt resp. zwei und drei. Als Quotienten zweier homogenen Functionen dritter Ordnung können alle Functionen σ dargestellt werden, die in weniger als zehn Punkten der Fläche T unendlich von der ersten Ordnung werden u. s. f.

Damit ist nicht ausgeschlossen, dass für specielle Lagen der Unstetigkeitspunkte Functionen von niedrigerer Ordnung zur Darstellung ausreichen; so ist z. B. der Quotient zweier homogenen Functionen zweiter Ordnung im Allgemeinen eine Function σ die in acht Punkten der Fläche T unendlich von der ersten Ordnung wird; von diesen acht Punkten können aber nur fünf beliebig angenommen werden. Auch hier enthält der Zähler homogen und linear sechs Constanten.

§. 9. Das Abelsche Theorem.

Es sei $\frac{dw}{dz}$ eine beliebige rationale Function von s_1, z_1, also w ein algebraisches Integral, und σ sei eine andere rationale Function von s, z die in μ Punkten der Fläche T unendlich von der ersten Ordnung wird, somit jeden beliebigen Werth gleichfalls in μ Punkten dieser Fläche annimmt.

Mit Hülfe dieser Function σ kann die Fläche T in den kleinsten Theilen ähnlich auf eine andere Fläche T_1 abgebildet werden, welche die σ-Ebene allenthalben μfach bedeckt. Die Function $\frac{dw}{d\sigma}$ ist in dieser Fläche T_1 einwerthig und abgesehen von einzelnen Punkten stetig, und wenn wir mit $\left(\frac{dw}{d\sigma}\right)_1$, $\left(\frac{dw}{d\sigma}\right)_2$, $\cdots$ $\left(\frac{dw}{d\sigma}\right)_\mu$ die μ Werthe dieser Function für dasselbe σ bezeichnen, so ist die Summe:

$$\left(\frac{dw}{d\sigma}\right)_1+\left(\frac{dw}{d\sigma}\right)_2+\cdots+\left(\frac{dw}{d\sigma}\right)_\mu$$

eine einwerthige und mithin rationale Function von σ, und ihr Integral

$$w_1+w_2+\cdots+w_\mu$$

kann folglich durch rationale und logarithmische Functionen von σ dargestellt werden. Dieser Satz führt den Namen des *Abelschen Theorems.* Wir specialisiren dasselbe zunächst für die folgenden Anwendungen, indem wir uns auf die Betrachtung der Integrale erster Gattung beschränken. Bedeutet w ein solches, so ist die Summe $w_1+w_2+\cdots w_\mu$ für alle Werthe von σ endlich und stetig und muss mithin eine Constante sein. Wir haben also den Satz:

I. *Die Summe der Werthe eines Integrals erster Gattung, bis zu solchen Punkten der Fläche T erstreckt, in welchen eine rationale Function von s und z denselben Werth annimmt, ist von dem besonderen Werth dieser Function unabhängig.*

Wir können diesem Satz eine etwas andere Einkleidung geben mit Rücksicht auf die Sätze des vorigen §. Ist nämlich:

$$\sigma = \frac{\Psi_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\Psi_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)},$$

so folgt, dass die Summe der Werthe eines Integrals erster Gattung, bis zu solchen Punkten erstreckt, in denen $\frac{\Psi_1-\sigma\Psi_2}{\Psi_2}$ verschwindet, von σ unabhängig ist, woraus hervorgeht:

Ia *Die Summe der Werthe eines Integrals erster Gattung, erstreckt von festen Punkten bis zu denjenigen Punkten, in denen eine homogene Function von φ_1, φ_2, φ_3 verschwindet, ist von den Coëfficienten dieser homogenen Function unabhängig.*

Oder endlich in geometrischer Einkleidung:

Ib *Die Summe der Werthe eines Integrals erster Gattung, bis zu solchen Punkten der Curve vierter Ordnung $\Phi = 0$ erstreckt, in welchen diese von einer anderen algebraischen Curve geschnitten wird, ist von den Coëfficienten in der Gleichung der letzteren unabhängig.* *)

Bleiben bei der Aenderung der Coëfficienten einige der 0-Punkte ungeändert, so können diese in der Summe unberücksichtigt bleiben, weil die ihnen entsprechenden Integralwerthe constant bleiben.

Für die folgende Anwendung des *Abelschen* Theorems schicken wir einige Bemerkungen über die zu brauchende Bezeichnung voraus:

Einzelne Punkte der Fläche T sollen durch einen Buchstaben, z. B. ζ repräsentirt sein, so dass das Zeichen ζ nicht nur einen bestimmten Werth von z, sondern ein bestimmtes, der Gleichung $F(s, z) = 0$ genügendes Werthepaar s, z, also auch einen bestimmten Werth jeder rationalen Function von s und z ausdrückt. Diese Bezeichnungsweise kann mit Nutzen auf Integrale angewandt werden, so dass $\int_{\zeta_0}^{\zeta} dw$ ein Integral des Differentials dw bedeutet, von einer Werthcombination s_0, z_0 bis zu einer anderen s, z erstreckt, welche resp. durch ζ_0, ζ repräsentirt sind. Ist $dw = f(s, z)\, dz$, so ist in ausführlicherer Bezeichnung:

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} dw = \int_{s_0, z_0}^{s, z} f(s, z)\, dz.$$

Die Bezeichnungsweise auf der linken Seite hat den Vortheil, dass sie ungeändert bleibt, wenn durch rationale Substitution neue Variablen eingeführt werden, vorausgesetzt dass ζ nicht blos einen bestimmten Punkt der Fläche T repräsentirt, sondern die Punkte, welche demselben in allen Flächen T_1 entsprechen, die durch eine in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung aus T entstanden sind. Es bedeutet dann gleichzeitig ζ einen bestimmten Punkt der Curve vierter Ordnung $\Phi = 0$.

Um ferner ein Grössensystem (v_1, v_2, v_3) kurz bezeichnen zu können,

*) Vgl. *Clebsch* und *Gordan*, Theorie der *Abelschen* Functionen. Zweiter Abschnitt.

auch wenn v_1, v_2, v_3 complicirte Ausdrücke haben, bedienen wir uns des *Riemannschen* Zeichens:

$$(v_1, v_2, v_3) = (\overset{3}{\underset{1}{h}}(v)),$$

so dass z. B. eine Function $f(v_1, v_2, v_3)$ der drei Argumente v_1, v_2, v_3 die Bezeichnung hat $f(\overset{3}{\underset{1}{h}}(v_h))$. Wir werden uns aber bei solchen Functionen, die im Folgenden häufig vorkommen, wo ein Missverständniss nicht zu fürchten ist, wie schon oben der etwas weniger correcten Bezeichnung $f(v_h)$ bedienen.

Es existiren, wie wir früher gesehen haben, drei von einander unabhängige Integrale erster Gattung. Diese Functionen nehmen beim Uebergang über die sechs Querschnitte von der negativen auf die positive Seite gewisse constante Zuwächse an, welche die Periodicitätsmoduln der Integrale heissen. Wir haben also, den drei Integralen erster Gattung entsprechend, drei Systeme von je sechs Periodicitätsmoduln zu betrachten, die wir folgendermaassen bezeichnen wollen:

Periodicitätsmoduln von w_1 : $k_1^{(1)}, k_1^{(2)}, k_1^{(3)}, k_1^{(4)}, k_1^{(5)}, k_1^{(6)}$,
- - w_2 : $k_2^{(1)}, k_2^{(2)}, k_2^{(3)}, k_2^{(4)}, k_2^{(5)}, k_2^{(6)}$,
- - w_3 : $k_3^{(1)}, k_3^{(2)}, k_3^{(3)}, k_3^{(4)}, k_3^{(5)}, k_3^{(6)}$.

Wenn man also ohne Rücksicht auf die Querschnitte, jedoch auf demselben Wege, die drei Integrationen w_1, w_2, w_3 erstreckt, so erhält man, je nach der Beschaffenheit dieses Weges, für denselben Punkt der Fläche T unendlich viele Werthe dieser Functionen, welche alle in folgenden Ausdrücken enthalten sind:

$$w_1' = w_1 + \sum_{i=1}^{i=6} m_i k_1^{(i)},$$

$$w_2' = w_2 + \sum_{i=1}^{i=6} m_i k_2^{(i)},$$

$$w_3' = w_3 + \sum_{i=1}^{i=6} m_i k_3^{(i)},$$

worin $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ irgend welche ganze Zahlen sind. Zwei Grössensysteme die in der Beziehung zu einander stehen, wie hier w_1, w_2, w_3 zu w_1', w_2', w_3' heissen *nach dem Modulsystem k congruent*, was durch folgendes Zeichen ausgedrückt wird:

$$(w_1, w_2, w_3) \equiv (w_1', w_2', w_3'),$$

oder:

$$\left(\overset{3}{\underset{1}{h}}(w_h)\right) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}(w'_h)\right).$$

Mit Hülfe dieser Bezeichnungen können wir unserem Theorem folgende zu weiteren Schlüssen geeignete Fassung geben:

Bedeuten w_1, w_2, w_3 drei von einander unabhängige Integrale erster Gattung, so ist:

$$(1.)\quad \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\gamma_1}^{\zeta_1} dw_h + \int_{\gamma_2}^{\zeta_2} dw_h + \cdots + \int_{\gamma_\mu}^{\zeta_\mu} dw_h\right)\right) \equiv (c_1, c_2, c_3),$$

worin die Grössen c_1, c_2, c_3 ungeändert bleiben, wenn die Punkte $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_\mu$ sich so ändern, dass eine rationale Function σ von s und z fortwährend in allen diesen Punkten und in keinen anderen den gleichen (übrigens veränderlichen) Werth hat.

Sind die Punkte $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_\mu$ ebenfalls solche, in denen die Function σ denselben Werth hat, so vereinfacht sich die Congruenz (1). Sie wird:

$$(2.)\quad \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\gamma_1}^{\zeta_1} dw_h + \int_{\gamma_2}^{\zeta_2} dw_h + \cdots + \int_{\gamma_\mu}^{\zeta_\mu} dw_h\right)\right) \equiv (0, 0, 0).$$

Die Bedingung für die Congruenz (2.) lässt sich auch so aussprechen, dass die Punkte $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\mu; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\mu$ solche seien, in denen eine rationale Function σ von s und z unendlich klein und unendlich gross von der ersten Ordnung wird.

Denken wir uns die Punkte $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\mu$ beliebig gegeben, so muss hiernach $\mu > 3$ sein, und eine Function σ, die in den Punkten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\mu$ unendlich wird, enthält noch $\mu - 2$ willkürliche Constanten homogen und linear. Die Verhältnisse derselben lassen sich so bestimmen, dass von den Punkten ζ $\mu - 3$ beliebig gegebene Lagen haben, wodurch die übrigen drei im Allgemeinen völlig bestimmt sind. Sonach sind durch die Congruenz (2.) drei der Punkte ζ als Functionen der $\mu - 3$ übrigen erklärt, welch letztere als unabhängige Veränderliche angesehen werden können.

Wie bereits oben hervorgehoben giebt es aber auch Functionen σ die mehr als $\mu - 2$ willkürliche Constanten enthalten, diejenigen nämlich, die in solchen Punkten Null und unendlich werden, in denen je eine Function φ verschwindet. Es muss dann (im allgemeinen Fall) $\mu = 3$ oder $\mu = 4$ sein. Im ersteren Fall sind zwei der Punkte ζ_1, ζ_2, ζ_3 als Functionen des dritten, im anderen zwei der Punkte ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4 als Functionen der beiden übrigen bestimmt. Die Punkte ζ sind hier die Schnittpunkte der Curve vierter Ordnung mit einer geraden Linie, welche im ersteren Fall durch einen festen Punkt der Curve gehen muss.

Diese letzteren Sätze lassen sich umkehren wie folgt:

II. *Soll die Congruenz* (1.) *für* $\mu = 2$ *befriedigt sein, so dass* ζ_1, ζ_2 *veränderlich sind, so führt die zu Grunde liegende algebraische Gleichung auf hyperelliptische Functionen.*

Denn durch Differentiation von (1.) erhalten wir:

$$(3.) \qquad \frac{\varphi_i(s_1, z_1)\,dz_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_1} + \frac{\varphi_i(s_2, z_2)\,dz_2}{\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_2} = 0; \qquad i = 1,\ 2,\ 3,$$

ein Gleichungssystem, welches für ein von 0 verschiedenes Werthsystem dz_1, dz_2 befriedigt sein soll. Dazu ist aber die nothwendige und hinreichende Bedingung die, dass man zwei (einander nicht proportionale) Factorensysteme h_1, h_2, h_3, h'_1, h'_2, h'_3 bestimmen kann, so dass:

$$\begin{aligned}
h_1\varphi_1(s_1, z_1) + h_2\varphi_2(s_1, z_1) + h_3\varphi_3(s_1, z_1) &= 0,\\
h_1\varphi_1(s_2, z_2) + h_2\varphi_2(s_2, z_2) + h_3\varphi_3(s_2, z_2) &= 0,\\
h'_1\varphi_1(s_1, z_1) + h'_2\varphi_2(s_1, z_1) + h'_3\varphi_3(s_1, z_1) &= 0,\\
h'_1\varphi_1(s_2, z_2) + h'_2\varphi_2(s_2, z_2) + h'_3\varphi_3(s_2, z_2) &= 0.
\end{aligned}$$

Es existiren also zwei nicht in constantem Verhältniss stehende Functionen φ, nämlich $h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2 + h_3\varphi_3$ und $h'_1\varphi_1 + h'_2\varphi_2 + h'_3\varphi_3$, welche in den Punkten ζ_1, ζ_2 verschwinden, und der Quotient derselben ist daher eine rationale Function von s und z, die nur in zwei Punkten 0 und unendlich wird.

III. *Soll die Congruenz* (1.) *für* $\mu = 3$ *oder* $\mu = 4$ *erfüllt sein, so dass resp. einer oder zwei der Punkte* ζ *beliebig gewählt werden können, so muss in diesen Punkten eine Function* φ *verschwinden, welche im ersteren Fall noch in einem festen Punkt gleich Null wird; es müsssen also die Punkte* ζ *die Schnittpunkte einer geraden Linie mit der Curve vierter Ordnung sein, welche im ersteren Fall durch einen festen Punkt der Curve geht.*

Man erhält nämlich wieder durch Differentiation von (1.):

$$(4.) \qquad \frac{\varphi_i(s_1, z_1)\,dz_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_1} + \cdots + \frac{\varphi_i(s_\mu, z_\mu)\,dz_\mu}{\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_\mu} = 0; \qquad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Nach Voraussetzung sind die Differentiale dz_1, …, dz_μ von 0 verschieden, und für $\mu = 4$ sollen zwei derselben beliebig sein. Daraus schliesst man, dass in beiden Fällen sich ein Factorensystem h_1, h_2, h_3 muss bestimmen lassen, so dass

$$h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2 + h_3\varphi_3 = \varphi$$

in den Punkten $\zeta_1, \ldots, \zeta_\mu$ verschwindet. Für $\mu = 3$ verschwindet diese Function φ noch in einem vierten Punkt ζ_4, welcher unveränderlich bleibt, wenn die Punkte ζ_1, ζ_2, ζ_3 sich der Congruenz (1.) gemäss ändern. Denn wäre dz_4 nicht $= 0$, so müsste (nach I.) die Gleichung (4.) zugleich für $\mu = 3$ und $\mu = 4$ bestehen, und es würde folgen, dass in dem Punkt ζ_4 die Functionen φ_1, φ_2, φ_3 verschwinden, gegen die Voraussetzung dass diese Functionen linear unabhängig seien.

Wir wenden nun das *Abelsche* Theorem an, um die Frage zu beantworten, unter welchen Umständen man der Congruenz genügen kann:

$$(5.)\quad \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\gamma_1}^{\zeta_1} dw_h + \int_{\gamma_2}^{\zeta_2} dw_h + \cdots + \int_{\gamma_\mu}^{\zeta_\mu} dw_h\right)\right)$$

$$\equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\gamma'_1}^{\zeta'_1} dw_h + \int_{\gamma'_2}^{\zeta'_2} dw_h + \cdots + \int_{\gamma'_\nu}^{\zeta'_\nu} dw_h\right)\right),$$

wenn die unteren Grenzpunkte γ, γ' als beliebig gegeben, die oberen Grenzpunkte ζ gleichfalls als gegeben, die ζ' aber als gesucht betrachtet werden.

Nach dem *Abelschen* Theorem ist diese Congruenz erfüllt, wenn eine rationale Function σ von s, z existirt, welche unendlich wird in den Punkten:

$$\zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_\mu,\ \gamma'_1,\ \gamma'_2,\ \ldots,\ \gamma'_\nu,$$

und verschwindet in den Punkten

$$\zeta'_1,\ \zeta'_2,\ \ldots,\ \zeta'_\nu,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_\mu.$$

Eine solche Function σ, die in $\mu+\nu$ gegebenen Punkten unendlich wird, enthält, wenn diese Punkte keine besonderen Bedingungen erfüllen, $\mu+\nu-2$ unbestimmte Constanten. Es können also von den 0-Punkten $\mu+\nu-3$ beliebig gegeben sein, und daraus folgt, dass eine Function σ von den verlangten Eigenschaften nur dann existirt, wenn

$$\mu+\nu-3 \geqq \mu, \text{ also } \nu \geqq 3.$$

Ist $\nu > 3$ so sind $\nu - 3$ von den Punkten ζ' noch beliebig. Ist $\nu = 3$ so sind die Punkte ζ' im Allgemeinen völlig und zwar auf algebraischem Wege bestimmt; man erhält dieselben durch Auflösung einer cubischen Gleichung. Daraus folgt:

IV. *Ein System von drei Summen von je μ Integralen erster Gattung von der Form:*

$$\left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\gamma_1}^{\zeta_1} dw_h + \int_{\gamma_2}^{\zeta_2} dw + \cdots + \int_{\gamma_\mu}^{\zeta_\mu}\right)\right)$$

läst sich immer und im Allgemeinen auf eine bestimmte Weise auf ein ähnliches System von Summen aus je drei Gliedern zurückführen, in welchem die unteren Grenzen beliebig gegeben sind, und in welchem die oberen Grenzen aus den Grenzen der gegebenen Integralsummen auf algebraischen Wege abgeleitet werden können.

Wir können uns also in der Folge auf die Betrachtung solcher Integralsummen beschränken, die nur aus je drei Gliedern bestehen und in denen die unteren Grenzpunkte irgend eine passend gewählte besondere Lage haben.

Als speciellen Fall enthält dieser Satz das *Additionstheorem:* Setzen wir nämlich:

$$\left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\gamma_1}^{\zeta_1} dw_h + \int_{\gamma_2}^{\zeta_2} dw_h + \int_{\gamma_3}^{\zeta_3} dw_h\right)\right) \equiv (v_1, v_2, v_3),$$

$$\left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\gamma_1}^{\zeta_1'} dw_h + \int_{\gamma_2}^{\zeta_2'} dw_h + \int_{\gamma_3}^{\zeta_3'} dw_h\right)\right) \equiv (v_1', v_2', v_3'),$$

so ist die Aufgabe des Additionstheorems die, aus den als bekannt vorausgesetzten Punkten ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_1', ζ_2', ζ_3' auf algebraischen Wege drei Punkte ζ_1'', ζ_2'', ζ_3'' zu bestimmen, welche der Congruenz genügen:

$$\left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\gamma_1}^{\zeta_1''} dw_h + \int_{\gamma_2}^{\zeta_2''} dw_h + \int_{\gamma_3}^{\zeta_3''} dw_h\right)\right) \equiv (v_1 + v_1', v_2 + v_2', v_3 + v_3').$$

Diese Aufgabe ist nach Satz IV. immer und im Allgemeinen auf eine bestimmte Weise lösbar.

In der That ist dazu nur erforderlich, eine Function σ zu bestimmen, welche in den Punkten $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_1', \zeta_2', \zeta_3'$ unendlich gross und in den Punkten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ unendlich klein wird. Diese Function verschwindet noch in drei anderen Punkten, welches die gesuchten Punkte ζ_1'', ζ_2'', ζ_3'' sind, und welche demnach durch Auflösung einer cubischen Gleichung erhalten werden.

Wir definiren nun die Veränderlichen v_1, v_2, v_3 als Functionen der drei Punkte $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ vermittels der Congruenz:

$$(6.)\qquad \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\gamma_1}^{\zeta_1} dw_h + \int_{\gamma_2}^{\zeta_2} dw_h + \int_{\gamma_3}^{\zeta_3} dw_h\right)\right) \equiv (v_1, v_2, v_3),$$

welche äquivalent ist mit dem System von Differentialgleichungen:

$$(7.)\qquad dv_i = \frac{\varphi_i(s_1, z_1)\, dz_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_1} + \frac{\varphi_i(s_2, z_2)\, dz_2}{\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_2} + \frac{\varphi_i(s_3, z_3)\, dz_3}{\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_3},$$

zusammen mit der Bedingung, dass:

$$(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \quad \text{und} \quad (v_1, v_2, v_3) \equiv (0, 0, 0)$$

zugleich bestehen soll.

Diese Functionen v_1, v_2, v_3 sind unendlich vieldeutig, denn nach dem Begriff der Congruenz können demselben Punktsystem ζ_1, ζ_2, ζ_3 alle Werthsysteme von der Form

$$\left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(v_h + \sum_{i=1}^{i=6} m_i k_h^{(i)}\right)\right)$$

entsprechen, wenn m_1, m_2, ... m_6 irgend welche ganze Zahlen sind. Bilden wir aber eine im Allgemeinen stetige und eindeutige sechsfach periodische Function der Veränderlichen v_1, v_2, v_3 mit den zusammengehörigen Periodensystemen $k_1^{(i)}$, $k_2^{(i)}$, $k_3^{(i)}$, so ist diese eine eindeutige Function der Punkte $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, was uns zur Aufstellung des ersten Hauptproblems veranlasst:

Das Riemannsche Problem.

Es sollen gegebene sechsfach periodische Functionen der Variablen v_1, v_2, v_3 algebraisch durch die in den Punkten ζ_1, ζ_2, ζ_3 stattfindenden Werthe von s, z dargestellt werden.

Andererseits können wir aus den Differentialgleichungen (7.) im Allgemeinen zu jedem System der Differentiale dv_1, dv_2, dv_3 ein bestimmtes unendlich kleines Verschiebungssystem der Punkte ζ_1, ζ_2, ζ_3 finden, und wir können daher auch diese Punkte sowie jede eindeutige Function derselben als Function der Veränderlichen v_1, v_2, v_3 betrachten, denn zunächst können wir durch eine convergente Entwickelung diese Functionen für ein gewisses endliches Bereich der Veränderlichen v_1, v_2, v_3 berechnen, und dann dieses Bereich durch Anwendung des Additionstheorems beliebig ausdehnen. Ob diese Functionen eindeutig sind bleibt einstweilen dahingestellt, jedenfalls aber sind sie sechsfach periodisch mit den Periodensystemen $k_1^{(i)}$, $k_2^{(i)}$, $k_3^{(i)}$. Dies veranlasst uns zur Aufstellung des zweiten Hauptproblems:

Das Jacobische Problem.

Es sollen die Punkte ζ_1, ζ_2, ζ_3 *auf algebraischem Wege aus den als gegeben vorausgesetzten Werthen von* v_1, v_2, v_3 *ermittelt werden.*

Die Lösung dieser beiden Hauptprobleme betrachten wir als das vornehmste Ziel unserer Theorie. Das erste derselben erlauben wir uns nach *Riemann* zu benennen, weil der Nachweis seiner allgemeinen Lösbarkeit den Schlussstein von *Riemanns* Theorie bildet. Für das zweite Problem ist der Namen *„Jacobisches Umkehrproblem“* auch sonst im Gebrauch.

§. 10. Die Integrale erster Gattung als Argumente der ϑ-Function.

Durch den im vorigen Paragraphen nachgewiesenen Zusammenhang der Integrale erster Gattung mit den sechsfach periodischen Functionen wird der Gedanke nahe gelegt, diese Integrale mit den ϑ-Functionen in Beziehung zu setzen. Es sind dazu einige vorbereitende Bemerkungen nothwendig, welche den Zweck haben, die Periodicitätsmoduln dieser Integrale auf dieselbe Form zu bringen welche die Perioden der aus ϑ-Functionen gebildeten sechsfach periodischen Functionen haben. Diesen Zweck erreichen wir durch passende Wahl der Querschnitte und der von einander unabhängigen Integrale erster Gattung.

Es werde stets diejenige Seite eines Querschnitts als die positive bezeichnet, welche bei seiner Entstehung zur Linken liegt. Man ziehe von einem Punkt 0 der Fläche T einen die Fläche nicht zerstückenden Querschnitt, der in einen Punkt seines eigenen früheren Verlaufs wieder einmündet. Dieser Schnitt besteht aus zwei Stücken, einer in sich zurücklaufenden Linie a_1 und einer diese mit 0 verbindenden Linie c_1. Von der positiven Seite von a_1 führe man einen zweiten Querschnitt b_1 nach dem Ausgangspunkt auf der negativen Seite von a_1 zurück. Die beiden Ufer von a_1 und b_1 zusammen bilden dann ein einfaches Begrenzungsstück. Genau in derselben Weise lassen sich von 0 aus noch zwei andere Paare von Querschnitten legen, die zusammengenommen die Fläche in eine einfach zusammenhängende verwandeln. Ein solches Querschnittsystem soll ein *normales Querschnittsystem* genannt werden.

Da jedes der drei Paare a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 für sich ein einziges in sich zurücklaufendes Begrenzungsstück bildet, so folgt, dass die Integrale aller rationalen Functionen von s und z in entsprechenden Punkten zu beiden Seiten der Linien c_1, c_2, c_3 dieselben Werthe haben, dass also an den Linien c_1, c , c_3 diese Functionen sich stetig ändern.

Unter Perioditätsmodul eines algebraischen Integrals verstehen wir den Ueberschuss der Werthe des Integrals auf der positiven Seite eines Quersehnitts über die in entsprechenden Punkten der negativen Seite stattfindenden Werthe, eine Grösse die längs eines Querschnitts constant ist.

Es seien nun w_1, w_2, w_3 irgend drei von einander unabhängige Integrale erster Gattung und ihre Periodicitätsmoduln folgende:

An den Querschnitten:	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3,
Periodicitätsmoduln von w_1:	$A_1^{(1)}$	$A_2^{(1)}$	$A_3^{(1)}$	$B_1^{(1)}$	$B_2^{(1)}$	$B_3^{(1)}$,
- - - w_2:	$A_1^{(2)}$	$A_2^{(2)}$	$A_3^{(2)}$	$B_1^{(2)}$	$B_2^{(2)}$	$B_3^{(2)}$,
- - - w_3:	$A_1^{(3)}$	$A_2^{(3}$	$A_3^{(3)}$	$B_1^{(2)}$	$B_2^{(2)}$	$B_3^{(2)}$.

Aus einem von *Riemann* (l. c. No. 21) bewiesenen Satze geht hervor, dass die Determinante

$$\Sigma \pm A_1^{(1)} A_3^{(2)} A_3^{(3)}$$

nicht verschwindet und demnach können wir drei neue Integrale erster Gattung u_1, u_2, u_3 einführen mittelst der Formeln:

$$\begin{aligned} \pi i w_1 &= A_1^{(1)} u_1 + A_2^{(1)} u_2 + A_3^{(1)} u_3, \\ \pi i w_2 &= A_1^{(2)} u_1 + A_2^{(2)} u_2 + A_3^{(2)} u_3, \\ \pi i w_3 &= A_1^{(3)} u_1 + A_2^{(3)} u_2 + A_3^{(3)} u_3, \end{aligned}$$

zwischen denen ebenfalls keine lineare Relation besteht. Diese sollen *Normalintegrale erster Gattung* heissen. Ihre Periodicitätsmoduln sind folgende:

An den Querschnitten:	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3,
Periodicitätsmodule von u_1:	πi	0	0	a_{11}	a_{12}	a_{13},
- - - u_2:	0	πi	0	a_{21}	a_{22}	a_{23},
- - - u_3:	0	0	πi	a_{31}	a_{32}	a_{33},

wenn die Grössen a_{ik} durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$\begin{aligned} \pi i B_h^{(1)} &= A_1^{(1)} a_{1h} + A_2^{(1)} a_{2h} + A_3^{(1)} a_{3h}, \\ \pi i B_h^{(2)} &= A_1^{(2)} a_{1h} + A_2^{(2)} a_{2h} + A_3^{(2)} a_{3h}, \\ \pi i B_h^{(3)} &= A_1^{(3)} a_{1h} + A_2^{(3)} a_{2h} + A_3^{(3)} a_{3h}, \qquad h = 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

Da man auf unendlich viele verschiedene Arten ein normales Querschnittsystem legen kann, so giebt es unendlich viele verschiedene Normalintegrale erster Gattung. Die Periodicitätsmoduln derselben, a_{ik}, genügen, wie *Riemann* nachgewiesen hat, (l. c. No. 20. 21) der Bedingung:

$$a_{ik} = a_{ki}$$

und der andern; dass der reelle Theil der Function

$$\sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k$$

wesentlich negativ ist, so dass die Reihe

$$\vartheta(v_1, v_2, v_3) = \sum_{h_1, h_2, h_3} e^{\sum\limits_i \sum\limits_k a_{ik} h_i h_k + 2 \sum\limits_i h_i v_i}$$

die Convergenzbedingung erfüllt.

In diese ϑ-Function nun substituiren wir für die Argumente v_1, v_2, v_3 das System der Normalintegrale erster Gattung mit derselben variablen oberen Grenze ξ und beliebiger unterer Grenze. Bezeichnet ε einen beliebigen festen Punkt, e_1, e_2, e_3 ein gleichfalls beliebiges constantes Grössensystem, so setzen wir:

$$v_1 = \int_\varepsilon^\xi du_1 - e_1, \quad v_2 = \int_\varepsilon^\xi du_2 - e_2, \quad v_3 = \int_\varepsilon^\xi du_3 - e_3,$$

wodurch die Function $\vartheta(v_1, v_2, v_3)$ in eine Function des Punktes ξ übergeht, welche sich in der einfach zusammenhängenden Fläche T' allenthalben stetig ändert. Wegen der Periodicität der Function ϑ bleibt dieselbe auch stetig beim Ueberschreiten der Querschnitte a_1, a_2, a_3 während sie beim Ueberschreiten der Querschnitte b_1, b_2, b_3 plötzliche Werthdifferenzen erfährt nach folgendem Gesetz:

$$\text{bei } b_1:\ \vartheta^{(+)} = e^{-2v_1^{(-)} - a_{11}} \vartheta^{(-)} = e^{-(v_1^{(+)} + v_1^{(-)})} \vartheta^{(-)},$$

$$\text{- } b_2:\ \vartheta^{(+)} = e^{-2v_2^{(-)} - a_{22}} \vartheta^{(-)} = e^{-(v_2^{(+)} + v_2^{(-)})} \vartheta^{(-)},$$

$$\text{- } b_3:\ \vartheta^{(+)} = e^{-2v_3^{(-)} - a_{33}} \vartheta^{(-)} = e^{-(v_3^{(+)} + v_3^{(-)})} \vartheta^{(-)},$$

wenn durch das Zeichen (+), (−) angedeutet ist, ob der Werth einer Function auf der positiven oder negativen Seite eines Querschnitts zu nehmen ist.

Wenn die additiven Constanten e_1, e_2, e_3 nicht besondere Bedingungen erfüllen, so kann die Function $\vartheta(v_1, v_2, v_3)$ nicht identisch verschwinden, und nach einem Satze von *Riemann wird die Function $\vartheta(v_1, v_2, v_3)$ alsdann für drei Punkte der Fläche T' unendlich klein von der ersten Ordnung.*

I. *Die Abhängigkeit der Punkte η_1, η_2, η_3, in denen die Function $\vartheta(v_1, v_2, v_3)$ verschwindet, von den Constanten e_1, e_2, e_3 wird näher bestimmt durch die Congruenz*

$$(1.)\qquad (e_1, e_2, e_3) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_\varepsilon^{\eta_1} du_h + \int_\varepsilon^{\eta_2} du_h + \int_\varepsilon^{\eta_3} du_h + k_h\right)\right),$$

worin k_1, k_2, k_3 Constanten sind, die nur von der Lage des Punktes ε, nicht von der Lage der 0–Punkte η_1, η_2, η_3, also bei unveränderlichem ε auch nicht von e_1, e_2, e_3 abhängen.

Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf *Riemann* (l. c. No. 22 und „Ueber das Verschwinden der ϑ-Function", *Borchardts* Journal Bd. 65. p. 161.). Die Constanten k_1, k_2, k_3 sollen später in einer von *Riemann* abweichenden Art bestimmt werden.

Der zuletzt ausgesprochene Satz lässt sich auch so ausdrücken: Die Function

$$\vartheta\Big(\int_\varepsilon^\zeta du_h - \sum_1^3{}_i \int_\varepsilon^{\eta_i} du_h - k_h\Big)$$

verschwindet als Function von ζ in den drei Punkten η_1, η_2, η_3. Lassen wir ζ mit η_3 zusammenfallen, und berücksichtigen, dass die Function ϑ eine gerade Function ist, so ergeben sich die beiden Gleichungen

$$(2.)\quad \begin{cases} \vartheta\Big(-\int_\varepsilon^{\eta_1} du_h - \int_\varepsilon^{\eta_2} du_h - k_h\Big) = 0, \\ \vartheta\Big(\int_\varepsilon^{\eta_1} du_h + \int_\varepsilon^{\eta_2} du_h + k_h\Big) = 0. \end{cases}$$

Die hier auftretenden Punkte η_1, η_2 sind durch die Congruenz (1.) definirt, in der die Grössen e_1, e_2, e_3 ganz beliebig sind, nur an die eine Voraussetzung gebunden, dass die von ihnen abhängige ϑ-Function $\vartheta\Big(\int_\varepsilon^\zeta du_h - e_h\Big)$ nicht identisch verschwinde. Dieselben können also innerhalb gewisser Grenzen drei von einander unabhängige ganz willkürliche Aenderungen erleiden. Der Congruenz (1.) entsprechend können daher auch die Punkte η_1, η_2, η_3 innerhalb gewisser Grenzen ein System von einander unabhängiger Verschiebungen erfahren. Und da nun eine stetige Function complexer Argumente nicht innerhalb eines endlichen Gebiets verschwinden kann, ohne überhaupt $= 0$ zu sein, so folgt dass die Gleichungen (2.) allgemein, d. h. für ganz beliebige Lagen der Punkte η_1, η_2 Gültigkeit haben. Wir haben daher den Satz:

II. *Die Function $\vartheta(r_1, r_2, r_3)$ verschwindet, sobald man der Congruenz genügen kann:*

$$(3.)\quad (r_1, r_2, r_3) \equiv \Big(\overset{3}{\underset{1}{h}}\Big(\int_\varepsilon^{\eta_1} du_h + \int_\varepsilon^{\eta_2} du_h + k_h\Big)\Big).$$

Die Umkehrung dieses Satzes beweist man auf folgendem Wege:

Es sei jetzt angenommen, das Grössensystem r_1, r_2, r_3 genüge der Bedingung

$$\vartheta(r_1, r_2, r_3) = 0,$$

und zunächst sei

$$(4.)\qquad \vartheta\Big(\int_\varepsilon^\zeta du_h - r_h\Big)$$

nicht identisch (für alle Lagen von ε und ζ) gleich Null. Dann verschwindet diese Function in drei Punkten, von denen einer mit ε zusammenfallen muss. Bezeichnen wir die beiden andern mit η_1, η_2, so folgt aus I. die Congruenz (3.).

Wenn aber die Function (4.) identisch, für alle Lagen von ε, ζ verschwindet, so betrachten wir in gleicher Weise die Function

$$\vartheta\Big(\int_\varepsilon^\zeta du_h - \int_{\zeta'}^{\zeta''} du_h - r_h\Big),$$

welche nicht identisch für alle Lagen von ε, ζ, ζ', ζ'' verschwinden kann, weil die Argumente derselben durch Verschiebung des Punktsystems ζ, ζ', ζ'' ein System von einander unabhängiger Aenderungen erfahren können. Diese Function verschwindet aber nach unseren Voraussetzungen in den Punkten ε, ζ'' und mithin noch in einem dritten Punkt η_1, so dass aus I. die Congruenz folgt:

$$\left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\Big(\int_{\zeta'}^{\zeta''} du_h + r_h\Big)\right) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\Big(\int_\varepsilon^{\zeta''} du_h + \int_\varepsilon^{\eta_1} du_h + k_h\Big)\right),$$

oder:

$$(r_1, r_2, r_3) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\Big(\int_\varepsilon^{\zeta'} du_h + \int_\varepsilon^{\eta_1} du_h + k_h\Big)\right);$$

worin bei unveränderlichen r_1, r_2, r_3 der Punkt ζ' willkürlich ist. Es kann aber, wie aus §. 9 II. hervorgeht, dieser Fall nur eintreten, wenn unsere Integrale zu den hyperelliptischen gehören.

Es ergiebt sich hieraus eine wichtige Folgerung: *Riemann* hat in der Abhandlung „über das Verschwinden der ϑ-Function" gezeigt, dass die nothwendige und hinreichende Bedingung für das identische Verschwinden von (4.) in dem hier vorausgesetzten Sinne die ist, dass die vier Grössen

$$\vartheta(r_1, r_2, r_3),\qquad \vartheta_1'(r_1, r_2, r_3),\qquad \vartheta_2'(r_1, r_2, r_3),\qquad \vartheta_3'(r_1, r_2, r_3)$$

zugleich verschwinden, wenn die Ableitungen der Function ϑ nach der ersten, zweiten und dritten Variablen resp. mit ϑ'_1, ϑ'_2, ϑ'_3 bezeichnet werden. Es kann also dieser Fall nur bei denjenigen ϑ-Functionen dreier Veränderlichen eintreten, welche aus den hyperelliptischen Functionen hervorgehen. Es ergiebt sich hieraus weiter, dass in unserem allgemeinen Fall keine der Grössen $\vartheta(\frac{1}{2}p_1, \frac{1}{2}p_2, \frac{1}{2}p_3)$ oder $\vartheta\{p\}(0,0,0)$ verschwinden kann, wenn $\frac{1}{2}p_1$, $\frac{1}{2}p_2$, $\frac{1}{2}p_3$ ein System zusammengehöriger halber Perioden mit gerader Charakteristik (p) bedeutet, weil die drei Ableitungen $\vartheta'_i(\frac{1}{2}p_1, \frac{1}{2}p_2, \frac{1}{2}p_3)$ unter dieser Voraussetzung immer verschwinden. Ebenso wenig können für ein System zusammengehöriger halber Perioden mit ungerader Charakteristik (p) die drei Ableitungen $\vartheta'_1(\frac{1}{2}p_1, \frac{1}{2}p_2, \frac{1}{2}p_3)$, $\vartheta'_2(\frac{1}{2}p_1, \frac{1}{2}p_2, \frac{1}{2}p_3)$, $\vartheta'_3(\frac{1}{2}p_1, \frac{1}{2}p_2, \frac{1}{2}p_3)$ zugleich verschwinden.

Durch die vorstehenden Betrachtungen ist der Satz bewiesen:

III. *Wenn $\vartheta(r_1, r_2, r_3)$ verschwindet, so lassen sich die beiden Congruenzen befriedigen:*

$$(5.)\quad \begin{cases} (r_1, r_2, r_3) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_\varepsilon^{\eta_1} du_h + \int_\varepsilon^{\eta_2} du_h + k_h\right)\right), \\ (r_1, r_2, r_3) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(-\int_\varepsilon^{\eta'_1} du_h - \int_\varepsilon^{\eta'_2} du_h - k_h\right)\right). \end{cases}$$

Die vier Punkte η_1, η_2, η'_1, η'_2 stehen dabei in folgendem Zusammenhang:

$$(6.)\quad \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_\varepsilon^{\eta_1} du_h + \int_\varepsilon^{\eta_2} du_h + \int_\varepsilon^{\eta'_1} du_h + \int_\varepsilon^{\eta'_2} du_h\right)\right) \equiv (-2k_1, -2k_2, -2k_3),$$

eine Congruenz, die wir durch Subtraction der beiden Congruenzen (5.) erhalten. Da wir nach II. das Grössensystem (r_1, r_2, r_3) durch die erste Congruenz (5.) als definirt annehmen können, so folgt, dass in (6.) die zwei Punkte η_1, η_2 willkürlich gewählt werden können. Daraus aber schliessen wir weiter nach dem Theorem III. §. 9 dass in den vier Punkten $\eta_1, \eta_2, \eta'_1, \eta'_2$ eine Function φ verschwindet.

Durch die Congruenz (6.) sind die Constanten k_1, k_2, k_3 bis auf gewisse noch nicht näher bekannte Systeme zusammengehöriger halber Perioden durch bestimmte Integrale ausgedrückt, worauf wir weiterhin eingehend zurückkommen.

Wenn die Function $\vartheta\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - r_h\right)$ zwar nicht für alle Lagen von ε und ζ, was in unserem allgemeinen Fall nicht möglich ist, wohl aber für ein bestimmtes ε für alle Lagen von ζ verschwindet, so folgt aus III., dass die Congruenz

$$(7.)\qquad (r_1, r_2, r_3) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h + \int_{\varepsilon}^{\eta_1} du_h + \int_{\varepsilon}^{\eta_2} du_h + k_h\right)\right),$$

für jede Lage des Punktes ζ erfüllt werden kann. Nach III. §. 9 sind daher ζ, η_1, η_2 solche Punkte, in denen eine Function φ verschwindet, welche ausserdem noch in einem unveränderlichen Punkt ζ_0 gleich Null wird; daher hat man nach (6.):

$$\left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta_0} du_h + \int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h + \int_{\varepsilon}^{\eta_1} du_h + \int_{\varepsilon}^{\eta_2} du_h\right)\right) \equiv (-2k_1, -2k_2, -2k_3),$$

wodurch (7.) übergeführt wird in

$$(8.)\qquad (r_1, r_2, r_3) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(-\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h - k_h\right)\right).$$

Hieraus und aus II. folgt:

IV. *Die nothwendige und hinreichende Bedingung für das identische Verschwinden von* $\vartheta\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h - r_h\right)$ *als Function von* ζ *ist die Congruenz* (8.)

oder:

V. *Die nothwendige und hinreichende Bedingung für das identische Verschwinden von* $\vartheta\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h - \int_{\varepsilon}^{\eta_1} du_h - \int_{\varepsilon}^{\eta_2} du_h - \int_{\varepsilon}^{\eta_3} du_h - k_h\right)$ *als Function von* ζ *betrachtet, ist die, dass in den Punkten* η_1, η_2, η_3 *eine Function* φ *verschwindet.*

Hieraus endlich und aus I. folgt:

VI. *Die Congruenz*

$$(9.)\qquad (e_1, e_2, e_3) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\varepsilon}^{\eta_1} du_h + \int_{\varepsilon}^{\eta_2} du_h + \int_{\varepsilon}^{\eta_3} du_h + k_h\right)\right)$$

kann für ein beliebig gegebenes Grössensystem (e_1, e_2, e_3) *immer erfüllt werden, und nur auf eine Weise, wenn nicht die Congruenz*

$$(e_1, e_2, e_3) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(-\int_{\varepsilon}^{\zeta_0} du_h - k_h\right)\right)$$

befriedigt werden kann, und auf unendlich viele Arten, wenn letzteres der Fall ist. In diesem Ausnahmefall können die Punkte η_1, η_2, η_3 *die* 0-*Punkte von irgend einer Function* φ *sein, welche in* ζ_0 *verschwindet.*

In diesen letzten Sätzen ist der Beweis enthalten, dass das im vorigen §. aufgestellte *Jacobische* Problem im Allgemeinen nur eine Lösung zulässt, und zugleich erkennen wir die Bedingung für die Unbestimmtheit derselben.

Denn die Congruenz

$$(v_1, v_2, v_3) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\gamma_1}^{\zeta_1} du_h + \int_{\gamma_2}^{\zeta_2} du_h + \int_{\gamma_3}^{\zeta_3} du_h\right)\right)$$

wird durch Aenderung der Grössen v_1, v_2, v_3 um gewisse Constanten auf die Form (9.) zurückgeführt. Unbestimmt wird daher das *Jacobische* Problem nur dann, wenn demselben solche Punkte ζ_1, ζ_2, ζ_3 genügen, in denen eine Function φ verschwindet. Wir schliessen daraus, dass rationale und symmetrische Functionen der in ζ_1, ζ_2, ζ_3 stattfindenden Werthe von s, z im Allgemeinen stetige und eindeutige sechsfach periodische Functionen der Argumente v_1, v_2, v_3 sind.

§. 11. Darstellung algebraischer Functionen durch ϑ-Functionen.

Die Function $\vartheta\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - e_h\right)$ ist, falls sie nicht identisch verschwindet, wie oben gezeigt, eine Function von ζ, die in der ganzen Fläche T mit Ausnahme der Querschnitte b_1, b_2, b_3 stetig bleibt und in drei Punkten unendlich klein von der ersten Ordnung wird. Ueberschreitet man den Querschnitt b_ν von der negativen auf die positive Seite, so nimmt die Function den Factor an:

$$e^{-2\left(\int_\varepsilon^\zeta du_\nu - e_\nu\right)},$$

wo unter $\int_\varepsilon^\zeta du_\nu$ das arithmetische Mittel der beiden an dem betreffenden Querschnitt stattfindenden Werthe dieser Function zu verstehen ist.

Betrachten wir nun den Quotienten zweier solcher ϑ-Functionen:

$$Q = \frac{\vartheta\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - e_h\right)}{\vartheta\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - g_h\right)},$$

so stellt dieser eine Function dar, welche in je drei Punkten der Fläche T unendlich gross und unendlich klein von der ersten Ordnung wird (von denen auch einige zusammenfallen und sich aufheben können), die übrigens, mit Ausnahme der Querschnitte b_ν, stetig bleibt, an b_ν nach folgendem Gesetz unstetig wird:

$$Q^{(+)} = e^{2(e_\nu - g_\nu)} Q^{(-)}.$$

Im Wesentlichen dieselbe Eigenschaft besitzt auch die Function:

$$Q = e^{-2\sum_1^3 {}_i m_i \int_\varepsilon^\zeta du_i} \frac{\vartheta\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - e_h\right)}{\vartheta\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - g_h\right)},$$

wenn m_1, m_2, m_3 ganze Zahlen sind. Nur besteht an den Querschnitten b_ν die Gleichung:

$$Q^{(+)} = e^{2(e_\nu - g_\nu - \sum_1^3 {}_i m_i a_{i\nu})} Q^{(-)}.$$

Diese Function Q ist daher nur dann an den Querschnitten b_ν stetig, wenn $e_\nu - g_\nu - \sum_1^3 {}_i m_i a_{i\nu}$ ein ganzzahliges Vielfache von πi ist, d. h. wenn:

$$(e_1, e_2, e_3) \equiv (g_1, g_2, g_3).$$

Dann aber würde sich die Function Q auf eine Constante reduciren.

Der Quotient zweier ϑ-Functionen in Verbindung mit Exponentialfactoren von der hier betrachteten Form kann daher niemals eine rationale Function von s und z darstellen.

Nehmen wir aber q verschiedene Grössensysteme an:

$$\begin{array}{l} e_1^{(1)},\ e_2^{(1)},\ e_3^{(1)};\quad g_1^{(1)},\ g_2^{(1)},\ g_3^{(1)}, \\ e_1^{(2)},\ e_2^{(2)},\ e_3^{(2)};\quad g_1^{(2)},\ g_2^{(2)},\ g_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_1^{(q)},\ e_2^{(q)},\ e_3^{(q)};\quad g_1^{(q)},\ g_2^{(q)},\ g_3^{(q)}, \end{array}$$

und bilden mit ihrer Hülfe das Product:

$$P = e^{-2\sum_1^3 {}_i m_i \int_\varepsilon^\zeta du_i} \prod_{i=1}^{i=q} \frac{\vartheta\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - e_h^{(i)}\right)}{\vartheta\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - g_h^{(i)}\right)},$$

so wird, vorausgesetzt dass keine der in P vorkommenden ϑ-Functionen identisch verschwindet, diese Function in je $3q$ Punkten der Fläche T unendlich gross und unendlich klein von der ersten Ordnung (die natürlich auch theilweise einander aufhebend zusammenfallen können), ist an den Querschnitten a_1, a_2, a_3 stetig und an dem Querschnitt b_ν der Bedingung unterworfen:

$$P^{(+)} = e^{2\left(\sum_{i=1}^{i=q} e_\nu^{(i)} - \sum_{i=1}^{i=q} g_\nu^{(i)} - \sum_{i=1}^{i=3} m_i a_{i\nu}\right)} P^{(-)}.$$

Wenn daher die Grössen e, g der Congruenz genügen:

$$\left(\sum_{i=1}^{i=q} e_1^{(i)}, \sum_{i=1}^{i=q} e_2^{(i)}, \sum_{i=1}^{i=q} e_3^{(i)}\right) \equiv \left(\sum_{i=1}^{i=q} g_1^{(i)}, \sum_{i=1}^{i=q} g_2^{(i)}, \sum_{i=1}^{i=q} g_3^{(i)}\right),$$

so kann man über die ganzen Zahlen m_1, m_2, m_3 so verfügen, dass P auch an den Querschnitten b_1, b_2, b_3 stetig bleibt und demnach eine rationale Function von s und z ist. *Umgekehrt lässt sich jede rationale Function von s und z, und zwar in mannigfaltiger Weise durch einen Ausdruck von der Form P darstellen.*

Um dies zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass man, welche Lage auch ein Punkt η haben mag, immer über die Punkte ε', ε'' so verfügen kann, dass

$$\vartheta\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - \int_\varepsilon^\eta du_h - \int_\varepsilon^{\varepsilon'} du_h - \int_\varepsilon^{\varepsilon''} du_h - k_h\right)$$

als Function von ζ nicht identisch verschwindet. Man hat nur ε', ε'' so zu wählen, dass nicht in den drei Punkten ε', ε'', η eine Function φ verschwindet (§. 10 V.). Diese Function verschwindet dann in den drei Punkten η, ε', ε''.

Es sei nun σ eine beliebige rationale Function von s und z, die in den Punkten $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_\mu$ unendlich klein, in $\eta_1', \eta_2' \dots \eta_\mu'$ unendlich gross von der ersten Ordnung wird. Nach dem *Abelschen* Theorem besteht dann die Congruenz

$$\left(\sum_{i=1}^{i=\mu} \int_\varepsilon^{\eta_i} du_1, \sum_{i=1}^{i=\mu} \int_\varepsilon^{\eta_i} du_2, \sum_{i=1}^{i=\mu} \int_\varepsilon^{\eta_i} du_3\right) \equiv \left(\sum_{i=1}^{i=\mu} \int_\varepsilon^{\eta_i'} du_1, \sum_{i=1}^{i=\mu} \int_\varepsilon^{\eta_i'} du_2, \sum_{i=1}^{i=\mu} \int_\varepsilon^{\eta_i'} du_3\right),$$

oder, wenn wir setzen:

$$(e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, e_3^{(i)}) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_\varepsilon^{\eta_i} du_h + \int_\varepsilon^{\varepsilon'} du_h + \int_\varepsilon^{\varepsilon''} du_h + k_h\right)\right),$$

$$(g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, g_3^{(i)}) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_\varepsilon^{\eta_i'} du_h + \int_\varepsilon^{\varepsilon'} du_h + \int_\varepsilon^{\varepsilon''} du_h + k_h\right)\right):$$

$$\left(\sum_1^\mu {}_i\, e_1^{(i)}, \sum_1^\mu {}_i\, e_2^{(i)}, \sum_1^\mu {}_i\, e_3^{(i)}\right) \equiv \left(\sum_1^\mu {}_i\, g_1^{(i)}, \sum_1^\mu {}_i\, g_2^{(i)}, \sum_1^\mu {}_i\, g_3^{(i)}\right),$$

und demnach lässt sich über die ganzen Zahlen m_1, m_2, m_3 so verfügen, dass

$$P = e^{-\sum_1^3 {}_i m_i \int_\varepsilon^\zeta du_h} \prod_{i=1}^{i=\mu} \frac{\vartheta\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - e_h^{(i)}\right)}{\vartheta\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - g_h^{(i)}\right)}$$

eine rationale Function von s und z wird. Diese Function aber wird Null in den Punkten $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_\mu$, unendlich in $\eta'_1, \eta'_2 \dots \eta'_\mu$ und stimmt sonach bis auf einen constanten Factor mit der gegebenen Function σ überein.

Die beiden Punkte $\varepsilon', \varepsilon''$ sind an die einzige Beschränkung geknüpft, dass die in ihnen verschwindende Function φ in keinem der Punkte η, η' verschwindet. In den Punkten $\varepsilon', \varepsilon''$ wird Zähler und Nenner von P zugleich und in gleicher Ordnung unendlich klein, so dass P selbst dort endlich bleibt.

Die Darstellung einer gegebenen Function σ durch ϑ-Functionen kann auf mannigfache andere Arten erreicht werden, wobei eine geringere Zahl von ϑ-Functionen im Zähler und Nenner ausreicht. So kann man immer zwei, in den meisten Fällen drei der gegebenen Punkte η, η' (letzteres wenn in ihnen nicht eine Function φ verschwindet) in derselben ϑ-Function vereinigen, so dass im günstigsten Fall $\frac{1}{3}\mu$ Factoren im Zähler und Nenner zur Darstellung ausreichen. Bei der hier gegebenen Darstellung hat man auf Ausnahmefälle gar nicht Rücksicht zu nehmen.

Bei dem Nachweis, dass unsere Function P eine rationale Function von s und z ist, wurde von den Punkten $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_\mu$, $\eta'_1, \eta'_2 \dots \eta'_\mu$ keine andere Eigenschaft benutzt, als die aus dem *Abelschen* Theorem folgende Congruenz. Wenn daher nur diese Congruenz besteht, so wird P eine rationale Function von s und z sein, die in den Punkten $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_\mu$ unendlich klein, in $\eta'_1, \eta'_2 \dots \eta'_\mu$ unendlich gross von der ersten Ordnung, sonst weder Null noch unendlich wird.

Daraus ergiebt sich ein Satz, der als die *Umkehrung des Abelschen Theorems* bezeichnet werden kann:

VII. *Wenn die Punkte $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_\mu$; $\eta'_1, \eta'_2 \dots \eta'_\mu$ der Congruenz genügen:*

$$\left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\eta'_1}^{\eta_1} du_h + \int_{\eta'_2}^{\eta_2} du_h + \cdots + \int_{\eta'_\mu}^{\eta_\mu} du_h\right)\right) \equiv (0, 0, 0),$$

so existirt eine rationale Function σ von s und z, die in den Punkten $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_\mu$ unendlich klein, in $\eta'_1, \eta'_2 \dots \eta'_\mu$ unendlich gross von der ersten Ordnung, sonst weder Null noch unendlich wird.

Eine lineare Function dieser Function σ lässt sich dann so bestimmen, dass sie in den Punkten $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_\mu$, resp. $\eta'_1, \eta'_2 \dots \eta'_\mu$ und in keinen andern je einen beliebig gegebenen Werth annimmt.

§. 12. Bestimmung der Constanten k_1, k_2, k_3.

Es hat sich oben ergeben, dass die Function $\vartheta\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - e_h\right)$, falls sie nicht identisch verschwindet, in drei Punkten η_1, η_2, η_3 der Fläche T unendlich klein von der ersten Ordnung wird, welche der Congruenz genügen:

$$(e_1, e_2, e_3) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_\varepsilon^{\eta_1} du_h + \int_\varepsilon^{\eta_2} du_h + \int_\varepsilon^{\eta_3} du_h + k_h\right)\right).$$

Hierin sind die Constanten k_1, k_2, k_3 unabhängig von e_1, e_2, e_3 und können sonach, ausser von den Coëfficienten der Gleichung $F(s, z) = 0$, nur noch von dem willkürlich zu wählenden unteren Grenzpunkt ε abhängen; übrigens sind diese Constanten ihrer Natur nach nur bis auf ein beliebiges System zusammengehöriger Perioden bestimmt. Soweit die Werthe derselben daher überhaupt bestimmt sind, können sie gefunden werden, wenn die Punkte η_1, η_2, η_3 für irgend ein specielles System (e_1, e_2, e_3) bekannt sind. Hierfür können wir, was am nächsten liegt, das System

$$(e_1, e_2, e_3) \equiv (0, 0, 0)$$

wählen, denn die Function

$$\vartheta\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h\right)$$

verschwindet nicht identisch, da sonst $\vartheta(0, 0, 0)$ verschwinden müsste, was, wie wir oben gesehen haben, nicht der Fall ist. Werden daher die dieser Annahme entsprechenden Punkte η_1, η_2, η_3 mit $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$, $c_3^{(0)}$ bezeichnet, so ergiebt sich die Congruenz

$$(1.)\quad (k_1, k_2, k_3) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(-\int_\varepsilon^{c_1^{(0)}} du_h - \int_\varepsilon^{c_2^{(0)}} du_h - \int_\varepsilon^{c_3^{(0)}} du_h\right)\right),$$

und wir können folgenden Satz aufstellen:

VIII. *Verschwindet die Function* $\vartheta\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h\right)$ *in den Punkten* $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$, $c_3^{(0)}$, *so verschwindet* $\vartheta\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - \int_{c_1^{(0)}}^{\eta_1} du_h - \int_{c_2^{(0)}}^{\eta_2} du_h - \int_{c_3^{(0)}}^{\eta_3} du_h\right)$ *in den Punkten* η_1, η_2, η_3, *welche Lage diese letzteren Punkte haben mögen.*

Die hier auftretenden unteren Grenzpunkte $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$, $c_3^{(0)}$ lassen sich auf algebraischem Wege bestimmen. Um dies nachzuweisen, setzen wir die Werthe von (k_1, k_2, k_3) wie sie unter (1.) aufgestellt sind, in die Congruenz (6.) §. 10. p. 68 wodurch dieselbe die Gestalt erhält:

$$(2.)\qquad \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{c_1^{(0)}}^{\eta_1} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{\eta_2} du_h + \int_{c_1^{(0)}}^{\eta_1'} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{\eta_2'} du_h + 2\int_{c_3^{(0)}}^{\varepsilon} du_h\right)\right) \equiv (0, 0, 0),$$

wenn $\eta_1, \eta_2, \eta_1', \eta_2'$ irgend vier Punkte sind, in denen eine Function φ verschwindet.

Nach VII. §. 11. folgt aber hieraus, dass eine rationale Function σ von s und z existirt, welche in den Punkten $\eta_1, \eta_2, \eta_1', \eta_2'$ unendlich gross von der ersten, in ε unendlich gross von der zweiten Ordnung und in $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, c_3^{(0)}$ unendlich klein von der zweiten Ordnung wird.

Eine solche Function σ, die in sechs Punkten unendlich gross von der ersten Ordnung wird, hängt von vier Constanten linear ab, und man kann die drei Verhältnisse dieser Constanten so bestimmen, dass die sechs Nullpunkte dieser Function irgend dreien von einander unabhängigen Bedingungen genügen. Sind diese Bedingungen algebraisch, so wird die Function dadurch auf eine endliche Anzahl von Arten bestimmt. Solche Bedingungen sind aber die, welche hier gestellt werden müssen, nämlich dass die sechs Nullpunkte von σ paarweise zusammenfallen. Unter den verschiedenen möglichen Systemen dieser Nullpunkte müssen die Punkte $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, c_3^{(0)}$ gefunden werden.

Die Darstellung einer solchen Function σ ist auf unendlich viele verschiedene Arten möglich, von denen die einfachste folgende ist:

Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ irgend drei von einander unabhängige Functionen φ, φ_4 sei eine Function φ die in den vier Punkten $\eta_1, \eta_2, \eta_1', \eta_2'$ verschwindet, ferner sei φ_5 eine solche Function φ, die in ε unendlich klein von der zweiten Ordnung wird, welche dadurch bis auf einen constanten Factor bestimmt ist, und ausser in ε noch in zwei Punkten verschwindet. Endlich sei $\Psi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ eine homogene Function zweiten Grades, welche in den beiden Punkten Null wird, in denen φ_5 ausser in ε verschwindet, und welche demnach noch vier Constanten homogen und linear enthält. Unser σ kann dann in der Form angenommen werden:

$$\sigma = \frac{\Psi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\varphi_4 \cdot \varphi_5},$$

und die Verhältnisse der Constanten in Ψ müssen so bestimmt werden, dass die noch übrigen sechs Nullpunkte von Ψ paarweise zusammenfallen. Unter den verschiedenen Möglichkeiten, wie dies geschehen kann, ist auch die enthalten, dass diese Nullpunkte in die Punkte $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, c_3^{(0)}$ fallen.

Die geometrische Bedeutung dieser Function Ψ ist folgende: Man lege in dem Punkt ε eine Tangente ($\varphi_5 = 0$) an die Curve vierter Ordnung $\Phi = 0$ und durch die beiden vom Berührungspunkt verschiedenen Schnittpunkte dieser Tangente einen Kegelschnitt welcher die Curve vierter Ordnung in drei Punkten berührt. Unter den verschiedenen möglichen Systemen von Berührungspunkten solcher Kegelschnitte müssen die gesuchten Punkte $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$, $c_3^{(0)}$ sich finden.

Auf die Bildungsweise der Functionen $\Psi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ kommen wir im nächsten Abschnitt zurück. Hier soll nur noch die Bedeutung der übrigen möglichen Systeme von 0-Punkten solcher Functionen Ψ erörtert werden, welche nicht mit den Punkten $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$, $c_3^{(0)}$ zusammenfallen. Es wird sich dabei die Anzahl der Functionen Ψ ergeben, welche den hier gestellten Bedingungen genügen, womit zugleich der Beweis geführt ist, dass diese Bedingungen von einander unabhängig sind.

Nehmen wir an, es seien Ψ_0, Ψ zwei solcher Functionen, von denen die erste zu dem Punktsystem $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$, $c_3^{(0)}$, die andere in entsprechender Weise zu dem Punktsystem c_1, c_2, c_3 führt. Dann ist $\frac{\Psi}{\Psi_0}$ eine rationale Function von s und z welche unendlich klein und unendlich gross von der zweiten Ordnung wird resp. in den Punkten c_1, c_2, c_3; $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$, $c_3^{(0)}$, sonst aber endlich und stetig bleibt. Wir haben also nach dem *Abelschen* Theorem die Congruenz

$$(3.)\qquad \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(2\int_{c_1^{(0)}}^{c_1} du_h + 2\int_{c_2^{(0)}}^{c_2} du_h + 2\int_{c_3^{(0)}}^{c_3} du_h\right)\right) \equiv (0, 0, 0),$$

oder durch Division mit 2, wenn $(\frac{1}{2}\varpi_1, \frac{1}{2}\varpi_2, \frac{1}{2}\varpi_3)$ ein System zusammengehöriger halber Perioden mit der Charakteristik (ϖ) bedeutet:

$$(4.)\qquad \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{c_1^{(0)}}^{c_1} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{c_2} du_h + \int_{c_3^{(0)}}^{c_3} du_h\right)\right) \equiv (\tfrac{1}{2}\varpi_1, \tfrac{1}{2}\varpi_2, \tfrac{1}{2}\varpi_3).$$

Aus dem Theorem VIII. folgt also, dass die Punkte c_1, c_2, c_3 diejenigen sind, in welchen die Function

$$\vartheta\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h \pm \tfrac{1}{2}\varpi_h\right),$$

oder, was dasselbe ist, $\vartheta\{\varpi\}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h\right)$ verschwindet. Ist die Charakteristik (ϖ) gerade, so kann diese Function überhaupt nicht identisch verschwinden, ist (ϖ) ungerade, so kann über ε jedenfalls so verfügt werden, dass dieselbe nicht identisch verschwindet (p. 67), woraus zunächst (nach V. §. 10) folgt, dass in den Punkten c_1, c_2, c_3 nicht eine Function φ verschwindet, und ferner dass für jede Charakteristik (ϖ) ein und nur ein Punktsystem c_1, c_2, c_3 existirt. Die Anzahl dieser Punktsysteme und mithin die Anzahl der von einander verschiedenen Functionen Ψ ist sonach eben so gross wie die der Charakteristiken, nämlich 64 ($c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$, $c_3^{(0)}$ eingeschlossen).

Es besteht aber zwischen diesen 64 Punktsystemen c_1, c_2, c_3 ein wesentlicher Unterschied, je nachdem sie zu einer geraden oder einer ungeraden Charakteristik gehören. Ist nämlich die Charakteristik (ϖ) ungerade, so wird einer der Punkte c_1, c_2, c_3, etwa c_3, mit ε zusammenfallen und die Function Ψ ist durch φ_5 theilbar. Das Resultat der Division ist eine Function φ welche in zwei (von ε unabhängigen) Punkten c_1, c_2 unendlich klein von der zweiten Ordnung wird. Ist die Charakteristik (ϖ) gerade, so kann keiner der Punkte c_1, c_2, c_3 mit ε zusammenfallen.

Hieraus folgt:

IX. *Es existiren 28 Functionen φ welche in zwei Punkten unendlich klein von der zweiten Ordnung werden und 36 eigentliche Functionen Ψ welche von der Lage des Punktes ε abhängig sind.*

Diese 28 Functionen φ, für sich $= 0$ gesetzt, geben die Gleichungen der 28 Doppeltangenten unserer Curve vierter Ordnung. Sie spielen in der Theorie eine so wichtige Rolle, dass die Einführung eines besonderen Namens für dieselben geboten ist. Wir nennen mit *Riemann* die Quadratwurzeln aus diesen Functionen φ *Abelsche Functionen.* (Vgl. *Roch* „über die Anzahl willkürlicher Constanten in algebraischen Functionen.“ *Borchardts* Journal Bd. 64. p. 372.)

III. Abschnitt.

Die Abelschen Functionen.

§. 13. Darstellung der Abelschen Functionen durch ϑ-Functionen.

Es mögen jetzt (ϖ_1), (ϖ_2) irgend zwei ungerade Charakteristiken bedeuten. Der Quotient der beiden ϑ-Functionen:

$$\frac{\vartheta\{\varpi_1\}\left(\int_{\zeta'}^{\zeta} du_h\right)}{\vartheta\{\varpi_2\}\left(\int_{\zeta'}^{\zeta} du_h\right)},$$

ist eine symmetrische Function der beiden Punkte ζ, ζ', welcher als Function von ζ die Eigenschaft hat, in je zwei Punkten der Fläche T' unendlich gross und unendlich klein von der ersten Ordnung zu werden, sonst aber stetig zu bleiben.

Um die Aenderung dieser Function an den Querschnitten zu untersuchen, sei

$$(\varpi_1) = \begin{pmatrix} \nu_1^{(1)} & \nu_2^{(1)} & \nu_3^{(1)} \\ \mu_1^{(1)} & \mu_2^{(1)} & \mu_3^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (\varpi_2) = \begin{pmatrix} \nu_1^{(2)} & \nu_2^{(2)} & \nu_3^{(2)} \\ \mu_1^{(2)} & \mu_2^{(2)} & \mu_3^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Zufolge der fundamentalen Eigenschaft der ϑ-Functionen, die in den Formeln (3.) p. 15 ausgedrückt ist erhält diese Function beim Ueberschreiten der Querschnitte gewisse Factoren, die $= \pm 1$ sind und folgendermassen bestimmt werden:

Am Querschnitt a_i ist der Factor $(-1)^{\nu_i^{(1)} - \nu_i^{(2)}}$,

\- \- b_i \- \- \- $(-1)^{\mu_i^{(1)} - \mu_i^{(2)}}$.

Das Quadrat unserer Function ist sonach an allen Querschnitten stetig und daher rational durch die in ζ stattfindenden Werthe von s, z darstellbar.

Nach den Sätzen des §. 12 sind die Punkte, in welchen diese Function Null und unendlich wird, solche, in denen je eine Function φ unendlich klein von der zweiten Ordnung wird, also die 0-Punkte je einer *Abelschen* Function.

Bezeichnen wir diese beiden *Abelschen* Functionen mit $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$, so muss demnach eine Gleichung von der Form bestehen:

$$C\frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{\vartheta\{\varpi_1\}\left(\int_{\zeta'}^{\zeta} du_h\right)}{\vartheta\{\varpi_2\}\left(\int_{\zeta'}^{\zeta} du_h\right)}\right)^2,$$

wenn C von ζ unabhängig, dagegen noch von ζ' abhängig ist. Wegen der Symmetrie der Function auf der rechten Seite muss C den Factor enthalten: $\frac{x'_1}{x'_2}$, wenn die Werthe der Functionen x_1, x_2 in dem Punkte ζ' mit x'_1, x'_2 bezeichnet werden. Verfügt man also über einen constanten Factor der Functionen x_1, x_2 in passender Weise, so kann man die Gleichung aufstellen:

$$\sqrt{\frac{x_1 x'_1}{x_2 x'_2}} = \frac{\vartheta\{\varpi_1\}\left(\int_{\zeta'}^{\zeta} du_h\right)}{\vartheta\{\varpi_2\}\left(\int_{\zeta'}^{\zeta} du_h\right)}.$$

Da, wie wir oben gesehen haben, zu jeder ungeraden Charakteristik (ϖ) eine bestimmte *Abelsche* Function $\sqrt{x}$ gehört, und umgekehrt, so lässt sich jeder Quotient zweier *Abelschen* Functionen in dieser Weise als Quotient zweier ϑ-Functionen darstellen.

Wenn eine Abelsche Function $\sqrt{x}$ *in denselben Punkten verschwindet wie* $\vartheta\{\varpi\}\left(\int_{\zeta'}^{\zeta} du_h\right)$, *so soll* (ϖ) *die Charakteristik dieser Abelschen Function genannt und mit* $(\sqrt{x})$ *bezeichnet werden.*

Es hat also jede *Abelsche* Function eine bestimmte ungerade Charakteristik und umgekehrt gehört zu jeder ungeraden Charakteristik eine bestimmte *Abelsche* Function.

Mit Anwendung dieser neuen Bezeichnung lässt sich die oben gefundene Relation auch so schreiben:

$$(1.)\qquad \sqrt{\frac{x_1 x_1'}{x_2 x_2'}} = \frac{\vartheta\{\sqrt{x_1}\}\left(\int_{\zeta'}^{\zeta} du_h\right)}{\vartheta\{\sqrt{x_2}\}\left(\int_{\zeta'}^{\zeta} du_h\right)}.$$

Die Charakteristiken haben, wie aus dieser Formel hervorgeht, eine bestimmte algebraische Beziehung zu den *Abelschen* Functionen in folgender Weise: Der Quotient zweier *Abelschen* Functionen $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$ wird in T' in zwei Punkten Null und unendlich in der ersten Ordnung, bleibt sonst stetig und nimmt beim Ueberschreiten der Querschnitte Factoren an, die $= \pm 1$ sind. Diese Factoren werden durch die Summe (oder die Differenz) der Charakteristiken des Zählers und Nenners bestimmt, so nämlich, dass wenn:

$$(\sqrt{x_1}) + (\sqrt{x_2}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2' & \varepsilon_3' \end{pmatrix}$$

gesetzt wird, der Factor, den $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$ an a_i annimmt, $=(-1)^{\varepsilon_i}$, der an $b_i = (-1)^{\varepsilon_i'}$ ist.

Die Formel (1.) lässt sich anwenden, um die Quadrate der *Abelschen* Functionen linear darzustellen durch die in den Normalintegralen erster Gattung vorkommenden Functionen φ_1, φ_2, φ_3. Ist nämlich:

$$u_1 = \int \frac{\varphi_1\, dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}, \qquad u_2 = \int \frac{\varphi_2\, dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}, \qquad u_3 = \int \frac{\varphi_3\, dz}{\frac{\partial F}{\partial s}},$$

$$du_1 : du_2 : du_3 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3,$$

und lässt man in (1.) ζ mit ζ' zusammenfallen, so erhält man auf der rechten Seite einen Ausdruck von der Form $\frac{0}{0}$ dessen Werth sich durch Differentation bestimmen lässt. Auf der linken Seite ergiebt sich $\frac{x_1}{x_2}$, und wenn man einen constanten Factor, der an sich unbestimmt bleibt, $= 1$ setzt, so erhält man für das Quadrat einer beliebigen *Abelschen* Function den Ausdruck:

$$(2.)\qquad x = \vartheta_1'\{\sqrt{x}\}.\varphi_1 + \vartheta_2'\{\sqrt{x}\}.\varphi_2 + \vartheta_3'\{\sqrt{x}\}.\varphi_3,$$

wenn die $\vartheta'\{\sqrt{x}\}$ dieselbe Bedeutung haben wie früher (p. 42.). Wir werden später diese Formel anwenden, um umgekehrt die Normalintegrale erster Gattung durch die *Abelschen* Functionen darzustellen, was vortheilhafter ist, da die Bedingungen für die letzteren algebraisch sind, während die für die Normalintegrale erster Gattung transcendent sind.

§. 14. Algebraische Relationen zwischen den Abelschen Functionen.

Da wir die *Abelschen* Functionen im Vorhergehenden in Beziehung gesetzt haben zu den ungeraden Charakteristiken, so werden auch die Sätze über die Gruppirung dieser Charakteristiken, die man in den §§. 3, 4 findet, ihre bestimmte algebraische (und geometrische) Bedeutung erhalten, was sofort bei der folgenden Frage hervortritt.

Wir suchen aus den *Abelschen* Functionen Ausdrücke zusammenzusetzen, die sich rational durch *s, z* darstellen lassen. Diese Eigenschaft kann niemals dem Quotienten zweier *Abelscher* Functionen $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$ zukommen, denn ein solcher Quotient wechselt beim Ueberschreiten wenigstens eines der Querschnitte sein Zeichen, da die Summe zweier verschiedener ungerader Charakteristiken niemals $=\binom{000}{000}$ sein kann.

Betrachten wir aber den Quotienten von zwei Producten je zweier *Abelscher* Functionen wie

$$\sqrt{\frac{x_1 \xi_1}{x_2 \xi_2}},$$

so wird dieser dann, und nur dann, rational sein, wenn die Summe der Charakteristiken im Zähler und Nenner gleich sind. In Zeichen:

$$(\sqrt{x_1})+(\sqrt{\xi_1}) = (\sqrt{x_2})+(\sqrt{\xi_2}),$$

wofür wir kürzer schreiben können:

$$(\sqrt{x_1 \xi_1}) = (\sqrt{x_2 \xi_2}),$$

wenn man unter der Charakteristik eines Productes von zwei oder mehr Abelschen Functionen die Summe der Charakteristiken der einzelnen Factoren versteht.

Daraus ergiebt sich der Satz:

I. *Der Quotient* $\sqrt{\frac{x_1 \xi_1}{x_2 \xi_2}}$ *ist rational durch s, z darstellbar, wenn die Charakteristiken* $(\sqrt{x_1})$, $(\sqrt{\xi_1})$; $(\sqrt{x_2})$, $(\sqrt{\xi_2})$ *zwei Paare einer Gruppe bilden.* (§. 3.).

Demnach ordnen sich, ebenso wie die Charakteristiken, die $14.27 = 6.63$ Paare *Abelscher* Functionen zu sechs und sechs in 63 Gruppen, welche die Eigenschaft haben, dass der Quotient und mithin auch das Product je zweier Paare einer Gruppe rational ist.

Nehmen wir nun aus einer dieser Gruppen drei Paare heraus:

$$\sqrt{x_1},\ \sqrt{\xi_1};\quad \sqrt{x_2},\ \sqrt{\xi_2};\quad \sqrt{x_3},\ \sqrt{\xi_3},$$

so können wir daraus die beiden rationalen Functionen bilden:

$$\sqrt{\frac{x_1\,\xi_1}{x_3\,\xi_3}}, \quad \sqrt{\frac{x_2\,\xi_2}{x_3\,\xi_3}},$$

welche in denselben vier Punkten (in denen keine Function φ verschwindet), nämlich in den 0-Punkten von $\sqrt{x_3}$ und $\sqrt{\xi_3}$, unendlich gross in der ersten Ordnung werden. Nach dem (p. 51, 52) angeführten *Riemannschen* Satz sind also diese beiden Functionen linear darstellbar durch eine ähnliche Function, oder es besteht zwischen diesen Functionen eine lineare (nicht homogene) Gleichung. Dasselbe sagt der folgende Satz aus:

II. *Zwischen den drei Functionen* $\sqrt{x_1\xi_1}$, $\sqrt{x_2\xi_2}$, $\sqrt{x_3\xi_3}$ *besteht eine lineare homogene Relation mit constanten Coëfficienten welcher durch passende Verfügung über die in* ξ_1, ξ_2, ξ_3 *noch disponiblen constanten Factoren die Gestalt gegeben werden kann:*

$$(1.) \qquad \sqrt{x_1\xi_1} + \sqrt{x\;\xi_2} + \sqrt{x_3\xi_3} = 0.$$

Solcher Gleichungen kann man in jeder Gruppe 20, also im Ganzen 1260 aufstellen. Man kann der Gleichung (1.) jede der drei Formen geben:

$$(2.) \qquad \begin{cases} 2\sqrt{x_2\xi_2x_3\xi_3} = +x_1\xi_1 - x_2\xi_2 - x_3\xi_3, \\ 2\sqrt{x_3\xi_3x_1\xi_1} = -x_1\xi_1 + x_2\xi_2 - x_3\xi_3, \\ 2\sqrt{x_1\xi_1x_2\xi_2} = -x_1\xi_1 - x_2\xi_2 + x_2\xi_3, \end{cases}$$

oder auch die symmetrische Form:

$$(3.) \qquad x_1^2\xi_1^2 + x_2^2\xi_2^2 + x_3^2\xi_3^2 - 2\,x_2\xi_2x_3\xi_3 - 2\,x_3\xi_3x_1\xi_1 - 2\,x_1\xi_1x_2\xi_2 = 0.$$

Aus (2.) erhält man die rationalen Ausdrücke für die Functionen $\sqrt{\frac{x_1\,\xi_1}{x_3\,\xi_3}}$, $\sqrt{\frac{x_2\,\xi_2}{x_3\,\xi_3}}$. Ferner sind die Formeln (2.) der Ausdruck für den geometrischen Satz, dass die acht Berührungspunkte von vier Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung auf einem Kegelschnitt liegen, wenn die Charakteristiken derselben zwei Paare einer Gruppe bilden, und dass die Berührungspunkte dreier Doppeltangenten auf einen Kegelschnitt liegen oder nicht, je nachdem die Summe der Charakteristiken derselben ungerade oder gerade ist. Im ersteren Fall geht dieser Kegelschnitt noch durch die Berührungspunkte einer vierten Doppeltangente. Man sieht hieraus, dass die Gruppirung der 28 ungeraden Charakteristiken, wie sie im §. 3 betrachtet ist, übereinstimmt mit der von *Steiner* angegebenen Gruppirung der Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung. *)

Ueberhaupt wird man in den Sätzen des §. 3 zum Theil *Steinersche* Sätze über die Doppeltangenten wiedererkennen.

Ein geometrischer Satz, von dem ich nicht weiss, ob er bisher bemerkt worden ist, der aber für die Folge von Bedeutung ist, ergiebt sich aus der Existenz der vollständigen Systeme ungerader Charakteristiken. §. 4.

Es lassen sich auf $8.36 = 288$ *verschiedene Arten bei einer allgemeinen Curve vierter Ordnung Systeme von je sieben Doppeltangenten finden, welche die charakteristische Eigenschaft haben, dass die Berührungspunkte von keinen dreien derselben auf einem Kegelschnitt liegen.*

Diese Systeme entsprechen den 288 vollständigen Systemen ungerader Charakteristiken.

Die Quadrate der *Abelschen* Functionen sind Functionen φ und daher besteht zwischen höchstens vier derselben eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coëfficienten. Es kann niemals durch diese linearen Gleichungen, ohne Zuziehung der Gleichung $F(s, z) = 0$, eine der Gleichungen (1.) (oder (2.), (3.)) identisch erfüllt werden; denn sollte $\sqrt{x_1 \xi_1 x_2 \xi_2}$ schon an sich rational sein, so müssten die vier Functionen x_1, ξ_1, x_2, ξ_2 bis auf constante Factoren paarweise identisch sein, gegen die Voraussetzung. Es können somit alle diese Gleichungen (1.) (oder (2.), (3.)) als verschiedene Formen der Gleichung $F(s, z) = 0$ oder der Gleichung der Curve vierter Ordnung $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi\ ) = 0$ angesehen werden, wodurch wir auf die Form der Gleichung geführt sind, welche zuerst *Hesse* für die allgemeine Curve vierter Ordnung aufgestellt hat. **)

Es ergiebt sich ferner leicht, dass zwischen den drei Functionen x_1, x_2, x_3 eine lineare homogene Relation mit constanten Coëfficienten nicht bestehen kann. Denn wäre dies der Fall, so würden diese drei Functionen in einem Punkt verschwinden, welche der Gleichung (1.), also auch der Gleichung $F(s, z) = 0$ genügt. Es würden also drei verschiedene Functionen φ existiren, die in demselben Punkt der Fläche T in der zweiten

*) *Steiner* „Eigenschaften der Curven vierten Grades etc.“ *Crelles* Journal Bd. 49. p. 265.

**) *Hesse* „Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung“. *Crelles* Journal Bd. 49. p. 279.

Ordnung verschwinden, was (im allgemeinen Fall, der nicht auf hyperelliptische Functionen führt) nicht möglich ist. (Vgl. p. 59).

Geometrisch folgt hieraus, dass drei Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung, welche in einer *Steinerschen* Gruppe vorkommen, in der keine zwei gepaart sind (deren Charakteristiken eine gerade Charakteristik zur Summe haben) nicht durch einen Punkt gehen können, wenn die Curve vierter Ordnung keinen Doppelpunkt hat. Anders gruppirte Doppeltangenten können unter besonderen Voraussetzungen zu dreien oder mehreren durch einen Punkt gehen, ohne dass dadurch Doppelpunkte bedingt werden.

Wir können daher durch irgend drei solche *Abelsche* Functionen x_1, x_2, x_3 alle übrigen linear und homogen ausdrücken und können die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ an Stelle von s, z als Variable einführen, so dass die Gleichung $F(s, z) = 0$ geradezu die Form (1.) (oder (2.), (3.)) annimmt.

Es existiren auch Relationen höherer Ordnung zwischen den *Abelschen* Functionen. Sind nämlich

$$\sqrt{x_1 x_1' x_1''},\quad \sqrt{x_2 x_2' x_2''},\quad \sqrt{x_3 x_3' x_3''},\quad \sqrt{x_4 x_4' x_4''},\quad \sqrt{x_5 x_5' x_5''}$$

fünf Producte von je drei *Abelschen* Functionen, welche dieselbe Charakteristik haben:

$$(\sqrt{x_1 x_1' x_1''}) = (\sqrt{x_2 x_2' x_2''}) = \cdots = (\sqrt{x_5 x_5' x_5''}), \qquad (\text{§. 3. IV. V.}),$$

so sind die Quotienten

$$\sqrt{\frac{x_1 x_1' x_1''}{x_5 x_5' x_5''}},\quad \sqrt{\frac{x_2 x_2' x_2''}{x_5 x_5' x_5''}},\quad \sqrt{\frac{x_3 x_3' x_3''}{x_5 x_5' x_5''}},\quad \sqrt{\frac{x_4 x_4' x_4''}{x_5 x_5' x_5''}}$$

rational und werden in denselben sechs Punkten unendlich gross von der ersten Ordnung. Daraus folgt wie oben,

III. *dass zwischen diesen vier Producten eine lineare nicht homogene Gleichung mit constanten Coëfficienten besteht, oder was das Gleiche ist, dass eine Relation von der Form Statt hat:*

$$\sqrt{x_1 x_1' x_1''} + \sqrt{x_2 x_2' x_2''} + \sqrt{x_3 x_3' x_3''} + \sqrt{x_4 x_4' x_4''} + \sqrt{x_5 x_5' x_5''} = 0,$$

falls eine solche Relation nicht schon zwischen einer geringeren Zahl dieser Producte eintritt.

Auf dieselbe Weise schliesst man weiter, dass zwischen höchstens $2n-1$ Producten von der Form $\sqrt{x x' \ldots x^{(n-1)}}$, welche die gleiche Charakteristik haben, eine homogene Relation mit constanten Coëfficienten besteht.

§. 15. Algebraische Bestimmung der Abelschen Functionen und ihrer Charakteristiken.

Ist die Gleichung vom Geschlecht 3 in irgend einer beliebigen Form

$$F(s, z) = 0$$

gegeben, so lassen sich drei von einander linear unabhängige Functionen φ ohne Auflösung höherer algebraischer Gleichungen finden, denn von den Functionen φ wird ausser einem bestimmten Grad in s und z nur verlangt, dass sie in gewissen Punkten auf bestimmte Weise verschwinden sollen. Die Bestimmung der Lage dieser Punkte (nämlich der singulären Punkte von $F(s, z) = 0$) kann zwar unter Umständen auf Gleichungen höheren Grades führen, aber man übersieht leicht, dass in den Functionen φ nur symmetrische Functionen der Wurzeln dieser Gleichungen auftreten, so dass die Functionen φ rational durch die Coëfficienten der Gleichung $F(s, z) = 0$ ausdrückbar sind. Es kommen daher auch in der homogenen Gleichung vierten Grades $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0$ nur rationale Functionen dieser Coëfficienten vor, und wir können daher ohne Weiteres von einer beliebig gegebenen homogenen Gleichung vierten Grades zwischen drei unabhängigen Veränderlichen ausgehen.

Die Bestimmung der *Abelschen* Functionen aber (der Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung) verlangt die Auflösung einer algebraischen Gleichung 28. Grades, welche im Allgemeinen, d. h. wenn über die Gestalt der Gleichung $F = 0$ oder $\Phi = 0$ nicht besondere Voraussetzungen gemacht werden, eine Reduction auf Gleichungen niedrigeren Grades nicht gestattet, was von *C. Jordan* bewiesen ist.*) Von dieser Gleichung 28. Grades müssen wir für die weitere Entwickelung der Theorie voraussetzen, dass ihre Auflösungen bekannt seien (wie man in der Theorie der hyperelliptischen Functionen voraussetzen muss, dass die Function unter dem Quadratwurzelzeichen in ihre linearen Factoren zerlegt sei). Es ist dies aber die einzige nicht algebraisch auflösbare Gleichung, deren Lösung zur vollständigen Erledigung der Fundamentalprobleme erforderlich ist.

Setzen wir aber auch die Lösung der in Rede stehenden Gleichung 28. Grades als bekannt voraus, so bleibt immer noch eine wichtige Frage zu beantworten, nämlich: wie bestimmt man die Charakteristiken der einzelnen *Abelschen* Functionen? Diese Frage wird im Nachstehenden ihre vollständige

*) *C. Jordan,* Traité des Substitutions p. 330.

Beantwortung finden. Es ist jedoch von vornherein zu betonen, dass die Charakteristiken der *Abelschen* Functionen ihrer Natur nach nicht alle völlig bestimmt sind; sie hängen in gewisser Weise von der Art ab, wie die Fläche T in eine einfach zusammenhängende T' verwandelt wird. Die nachfolgende Untersuchung wird uns nicht blos alle möglichen Arten der Charakteristikenbestimmung liefern, sondern auch keinen Zweifel darüber lassen, dass diese Bestimmungsarten alle zulässig sind. Das einer solchen Bestimmungsart entsprechende Querschnittsystem der Fläche T zu kennen, ist vollkommen überflüssig, wie denn überhaupt in den Endresultaten diese Fläche und die sich daran knüpfenden geometrischen Anschauungen ganz in den Hintergrund treten.

Wir geben der nachfolgenden Untersuchung der *Abelschen* Functionen eine geometrische Einkleidung, theils des bequemeren Ausdrucks halber, theils um die Anknüpfung an andere Untersuchungen des gleichen Gegenstandes zu erleichtern. Wir reden demnach kurz von den Charakteristiken der Doppeltangenten, indem wir damit die Charakteristiken der ihnen entsprechenden *Abelschen* Functionen meinen.

Die Curve vierter Ordnung ist im Allgemeinen durch sieben ihrer Doppeltangenten bestimmt; diese sieben aber können ganz beliebige Lagen haben. Wir nehmen daher sieben der Doppeltangenten als bekannt an und suchen die übrigen 21 daraus zu bestimmen.

Sind sieben beliebige gerade Linien gegeben, so giebt es eine zwar endliche aber beträchtliche Anzahl von Curven vierter Ordnung, welche diese Linien zu Doppeltangenten haben; *es giebt aber eine und nur eine einzige, wenn ausserdem noch verlangt wird, dass die Berührungspunkte von keinen dreien dieser Linien auf einem Kegelschnitt liegen, oder was dasselbe ist, dass die Charakteristiken derselben ein vollständiges System bilden sollen.*

Da umgekehrt bei jeder Curve vierter Ordnung, wie oben gezeigt 288 Systeme solcher Doppeltangenten existiren, so gelangen wir auf diese Weise zur allgemeinsten Curve vierter Ordnung.

Den sieben als gegeben vorausgesetzten Doppeltangenten können die Charakteristiken eines beliebigen vollständigen Systems in beliebiger Ordnung beigelegt werden. Denn denken wir uns umgekehrt die sämmtlichen Doppeltangenten mit ihren Charakteristiken bestimmt, so können wir ein beliebiges System von der verlangten Eigenschaft herauswählen und unseren Betrachtungen zu Grunde legen.

Es seien nun die Gleichungen der sieben gegebenen geraden Linien:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad g^{(0)} = 0, \quad g = 0, \quad g' = 0, \quad g'' = 0.$$

Betrachten wir hierin x_1, x_2, x_3 als unabhängige Veränderliche, so mögen $g^{(0)}$, g, g', g'' durch diese folgendermaassen ausgedrückt sein:

$$(1.)\qquad \begin{cases} g^{(0)} = x_1 + x_2 + x_3, \\ g \phantom{^{(0)}} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \\ g' \phantom{^{(0)}} = a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3, \\ g'' \phantom{^{(0)}} = a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3. \end{cases}$$

Diesen sieben Doppeltangenten mögen die Charakteristiken eines vollständigen Systems beigelegt sein, so dass wir haben:

$$(2.)\qquad \begin{cases} (\sqrt{x_1}) = (\beta_1), \quad (\sqrt{x_2}) = (\beta_2), \quad (\sqrt{x_3}) = (\beta_3), \quad (\sqrt{g^{(0)}}) = (\beta_4), \quad (\sqrt{g}) = (\beta_5), \\ \qquad\qquad (\sqrt{g'}) = (\beta_6), \quad (\sqrt{g''}) = (\beta_7), \\ (p) = \sum\limits_{i=1}^{i=7} (\beta_i). \end{cases}$$

Nach §. 4 XIV. kommen die drei Charakteristiken $(\sqrt{x_1})$, $(\sqrt{x_2})$, $(\sqrt{x_3})$ in einer und nur in einer Gruppe vor, welche keine der Charakteristiken $(\sqrt{g})$ enthält und zwar ist die Charakteristik dieser Gruppe:

$$(p + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3).$$

Sind daher ξ_1, ξ_2, ξ_3 drei noch unbekannte lineare Functionen von x_1, x_2, x_3, so kann die Gleichung der Curve vierter Ordnung in die Form gesetzt werden:

$$(3.)\qquad \sqrt{x_1 \xi_1} + \sqrt{x_2 \xi_2} + \sqrt{x_3 \xi_3} = 0,$$

und $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ sind drei weitere Doppeltangenten, deren Charakteristiken resp. mit denen von $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ in der oben erwähnten Gruppe gepaart sind. Demnach haben wir:

$$(4.)\qquad \begin{cases} (\sqrt{\xi_1}) = (p + \beta_2 + \beta_3) = (p) + (\sqrt{x_2 x_3}), \\ (\sqrt{\xi_2}) = (p + \beta_3 + \beta_1) = (p) + (\sqrt{x_3 x_1}), \\ (\sqrt{\xi_3}) = (p + \beta_1 + \beta_2) = (p) + (\sqrt{x_1 x_2}). \end{cases}$$

Wir betrachten nun die drei Gruppen

$$(\sqrt{x_2 \xi_2}), \quad (\sqrt{x_2 \xi_3}), \quad (\sqrt{x_2 x_3}),$$

welche zu denjenigen gehören, die nach §. 3 I. zusammen alle 28 ungeraden Charakteristiken enthalten. Da aber die Charakteristiken $(\sqrt{g^{(0)}}), (\sqrt{g}), (\sqrt{g'}), (\sqrt{g''})$

weder in der Gruppe $(\sqrt{x_2\xi_2})$ noch in $(\sqrt{x_2x_3})$ vorkommen, so müssen sie in $(\sqrt{x_2\xi_3})$ enthalten sein. Auf die gleiche Weise schliesst man, dass dieselben in den Gruppen $(\sqrt{x_3\xi_1})$, $(\sqrt{x_1\xi_2})$, und zwar in diesen drei Gruppen ungepaart enthalten sind. Bedeuten daher $\gamma_1^{(0)}, \gamma_1, \gamma_1', \gamma_1'', \gamma_2^{(0)}, \gamma_2, \gamma_2', \gamma_2'', \gamma_3^{(0)}, \gamma_3, \gamma_3', \gamma_3''$ unbekannte lineare Functionen von x_1, x_2, x_3, welche, $=0$ gesetzt, weitere Doppeltangenten liefern, so haben wir folgende drei Gruppen:

$$(5.)\quad \begin{cases} (p+\beta_1) : (\sqrt{x_2\xi_3})(\sqrt{x_3\xi_2})(\sqrt{g^{(0)}\gamma_1^{(0)}})(\sqrt{g\gamma_1})(\sqrt{g'\gamma_1'})(\sqrt{g''\gamma_1''}), \\ (p+\beta_2) : (\sqrt{x_3\xi_1})(\sqrt{x_1\xi_3})(\sqrt{g^{(0)}\gamma_2^{(0)}})(\sqrt{g\gamma_2})(\sqrt{g'\gamma_2'})(\sqrt{g''\gamma_2''}), \\ (p+\beta_3) : (\sqrt{x_1\xi_2})(\sqrt{x_2\xi_1})(\sqrt{g^{(0)}\gamma_3^{(0)}})(\sqrt{g\gamma_3})(\sqrt{g'\gamma_3'})(\sqrt{g''\gamma_3''}), \end{cases}$$

woraus sich für die Functionen $\sqrt{\gamma}$ die Charakteristiken ergeben:

$$(6.)\quad \begin{cases} (\sqrt{\gamma_1^{(0)}}) = (p+\beta_1+\beta_4) = (p)+(\sqrt{x_1g^{(0)}}), & (\sqrt{\gamma_2^{(0)}}) = (p+\beta_2+\beta_4) = (p)+(\sqrt{x_2g^{(0)}}), \\ (\sqrt{\gamma_1}) \ = (p+\beta_1+\beta_5) = (p)+(\sqrt{x_1g}), & (\sqrt{\gamma_2}) \ = (p+\beta_2+\beta_5) = (p)+(\sqrt{x_2g}), \\ (\sqrt{\gamma_1'}) \ = (p+\beta_1+\beta_6) = (p)+(\sqrt{x_1g'}), & (\sqrt{\gamma_2'}) \ = (p+\beta_2+\beta_6) = (p)+(\sqrt{x_2g'}), \\ (\sqrt{\gamma_1''}) \ = (p+\beta_1+\beta_7) = (p)+(\sqrt{x_1g''}), & (\sqrt{\gamma_2''}) \ = (p+\beta_2+\beta_7) = (p)+(\sqrt{x_2g''}), \\ \multicolumn{2}{c}{(\sqrt{\gamma_3^{(0)}}) = (p+\beta_3+\beta_4) = (p)+(\sqrt{x_3g^{(0)}}),} \\ \multicolumn{2}{c}{(\sqrt{\gamma_3}) \ = (p+\beta_3+\beta_5) = (p)+(\sqrt{x_3g}),} \\ \multicolumn{2}{c}{(\sqrt{\gamma_3'}) \ = (p+\beta_3+\beta_6) = (p)+(\sqrt{x_3g'}),} \\ \multicolumn{2}{c}{(\sqrt{\gamma_3''}) \ = (p+\beta_3+\beta_7) = (p)+(\sqrt{x_3g''}).} \end{cases}$$

Unsere nächste Aufgabe ist die, die noch unbekannten Functionen ξ, γ zu bestimmen. Zu dem Ende leiten wir aus (3.) die Gleichung her:

$$(7.)\qquad 4x_2\xi_2x_3\xi_3 = (x_1\xi_1 - x_2\xi_2 - x_3\xi_3)^2 = f^2$$

und aus der ersten Gruppe (5.) erhalten wir eine Gleichung von der Form:

$$(8.)\qquad 4x_2\xi_3 g\gamma_1 = \varphi^2,$$

wenn φ eine noch zu bestimmende homogene Function zweiten Grades ist. Die beiden Gleichungen (7.), (8.) können als mit einander identisch angenommen werden, so dass durch Subtraction derselben eine identische Gleichung folgt:

$$(9.)\qquad 4x_2\xi_3(\xi_2x_3 - g\gamma_1) = (f-\varphi)(f+\varphi).$$

Die Annahme, dass etwa $f-\varphi$ durch x_2, $f+\varphi$ durch ξ_3 theilbar sei, ist nicht zulässig, da sonst für $x_2=0$, $\xi_3=0$ auch f verschwinden, also die beiden

Doppeltangenten x_2, ξ_3 sich auf der Curve vierter Ordnung schneiden würden, was bei allgemeinen Curven vierter Ordnung nicht eintreten kann.

Demnach können wir, indem wir mit λ_1 einen noch unbestimmten constanten Coëfficienten bezeichnen, setzen:

$$f-\varphi = 2\lambda_1 x_2 \xi_3,$$
$$f+\varphi = \frac{2(\xi_2 x_3 - g\gamma_1)}{\lambda_1};$$

oder durch Addition und Subtraction:

$$f = +\lambda_1 x_2 \xi_3 + \frac{\xi_2 x_3 - g\gamma_1}{\lambda_1},$$
$$\varphi = -\lambda_1 x_2 \xi_3 + \frac{\xi_2 x_3 - g\gamma_1}{\lambda_1}.$$

Substituirt man für f den Ausdruck aus (7.) so folgt aus der ersten dieser Gleichungen:

$$g\gamma_1 = \xi_2 x_3 - \lambda_1(x_1\xi_1 - x_2\xi_2 - x_3\xi_3) + \lambda_1^2 x_2 \xi_3.$$

Die analogen Betrachtungen kann man an den beiden anderen in (5.) zusammengestellten Gruppen anstellen, und gelangt so zu folgendem System von Gleichungen:

$$(10.)\quad \begin{cases} g\gamma_1 = \xi_2 x_3 - \lambda_1(+x_1\xi_1 - x_2\xi_2 - x_3\xi_3) + \lambda_1^2 x_2\xi_3, \\ g\gamma_2 = \xi_3 x_1 - \lambda_2(-x_1\xi_1 + x_2\xi_2 - x_3\xi_3) + \lambda_2^2 x_3\xi_1, \\ g\gamma_3 = \xi_1 x_2 - \lambda_3(-x_1\xi_1 - x_2\xi_2 + x_3\xi_3) + \lambda_3^2 x_1\xi_2. \end{cases}$$

Solcher Systeme von Gleichungen können wir vier aufstellen, indem wir g ersetzen durch $g^{(0)}, g, g', g''$, entsprechend γ durch $\gamma^{(0)}, \gamma, \gamma', \gamma''$, λ durch $\lambda^{(0)}, \lambda, \lambda', \lambda''$, während ξ_1, ξ_2, ξ_3 in allen Systemen dieselben sind. Unbekannt sind jetzt die Functionen γ, ξ und die constanten λ. Um dieselben zu bestimmen, multipliciren wir die beiden letzten Gleichungen (10.) mit $\frac{1}{\lambda_2}$, $\frac{1}{\lambda_3}$ und addiren beide, wodurch sich ergiebt:

$$(11.)\qquad g\left(\frac{\gamma_2}{\lambda_2}+\frac{\gamma_3}{\lambda_3}\right) = x_1\left(2\xi_1 + \lambda_3\xi_2 + \frac{\xi_3}{\lambda_2}\right) + \xi_1\left(\lambda_2 x_3 + \frac{x_2}{\lambda_3}\right).$$

Da nun zwischen den drei Functionen g, x_1, ξ_1 keine lineare homogene Gleichung besteht (vgl. §. 14 p. 83), so folgt aus (11.), dass g linear zusammengesetzt sein muss aus

$$x_1 \text{ und } \lambda_2 x_3 + \frac{x_2}{\lambda_3}.$$

Da nun andererseits
$$g = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$
ist, so muss, wenn h_1 eine neue unbekannte Constante bedeutet,
$$\lambda_2 = h_1 a_3, \quad \frac{1}{\lambda_3} = h_1 a_2$$
sein, wodurch die Gleichung (11.) in folgende übergeht:
$$h_1 g\left(\frac{\gamma_2}{\lambda_2} + \frac{\gamma_3}{\lambda_3} - h_1 \xi_1\right) = x_1 \left\{ h_1(2 - h_1 a_1)\xi_1 + \frac{\xi_2}{a_2} + \frac{\xi_3}{a_3} \right\},$$
woraus sofort folgt, wenn k_1 einen weiteren unbekannten Coëfficienten bezeichnet:
$$(12.) \qquad -k_1 g = h_1(2 - h_1 a_1)\xi_1 + \frac{\xi_2}{a_2} + \frac{\xi_3}{a_3},$$
$$(13.) \qquad \frac{\gamma_2}{\lambda_2} + \frac{\gamma_3}{\lambda_3} = h_1 \xi_1 - \frac{k_1}{h_1} x_1.$$
Behandelt man auf die gleiche Weise je zwei der Gleichungen (10.), so ergiebt sich, (12.) entsprechend, folgendes System:
$$(14.) \quad \begin{cases} -k_1 g = \xi_1 h_1(2 - h_1 a_1) + \dfrac{\xi_2}{a_2} + \dfrac{\xi_3}{a_3}, \\ -k_2 g = \dfrac{\xi_1}{a_1} + \xi_2 h_2(2 - h_2 a_2) + \dfrac{\xi_3}{a_3}, \\ -k_3 g = \dfrac{\xi_1}{a_1} + \dfrac{\xi_2}{a_2} + \xi_3 h_3(2 - h_3 a_3). \end{cases}$$
Da zwischen den Functionen ξ_1, ξ_2, ξ_3 keine lineare homogene Relation besteht, so müssen die rechten Seiten der Gleichungen (14.), nachdem dieselben resp. durch k_1, k_2, k_3 dividirt sind, identisch werden, woraus folgt:
$$\frac{h_1(2 - h_1 a_1)}{k_1} = \frac{1}{k_2 a_1} = \frac{1}{k_3 a_1},$$
also zunächst:
$$k_1 = k_2 = k_3 = k,$$
ferner:
$$h_1(2 - h_1 a_1) a_1 = 1, \qquad (h_1 a_1 - 1)^2 = 0,$$
also:
$$h_1 = \frac{1}{a_1}, \qquad h_2 = \frac{1}{a_2}, \qquad h_3 = \frac{1}{a_3},$$
wodurch (12.) oder jede der Gleichungen (14.) übergeht in:
$$-kg = \frac{\xi_1}{a_1} + \frac{\xi_2}{a_2} + \frac{\xi_3}{a_3},$$

oder nach (1.):

$$(15.)\qquad \frac{\xi_1}{a_1}+\frac{\xi_2}{a_2}+\frac{\xi_3}{a_3}+k(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3) = 0,$$

$$\lambda_1=\frac{a_2}{a_3},\quad \lambda_2=\frac{a_3}{a_1},\quad \lambda_3=\frac{a_1}{a_2}.$$

Weiter erhalten wir aus (13.) und den beiden auf analoge Weise aus (10.) abgeleiteten Gleichungen:

$$(16.)\quad \begin{cases} \dfrac{\gamma_2}{\lambda_2}+\dfrac{\gamma_3}{\lambda_3} = \dfrac{\xi_1}{a_1}-ka_1x_1, \\[2mm] \dfrac{\gamma_3}{\lambda_3}+\dfrac{\gamma_1}{\lambda_1} = \dfrac{\xi_2}{a_2}-ka_2x_2, \\[2mm] \dfrac{\gamma_1}{\lambda_1}+\dfrac{\gamma_2}{\lambda_2} = \dfrac{\xi_3}{a_2}-ka_3x_3, \end{cases}$$

woraus durch Addition mit Rücksicht auf (15.):

$$\frac{\gamma_1}{\lambda_1}+\frac{\gamma_2}{\lambda_2}+\frac{\gamma_3}{\lambda_3}=\frac{\xi_1}{a_1}+\frac{\xi_2}{a_2}+\frac{\xi_3}{a_3}=-k(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3).$$

und indem man diese Gleichung von jeder der Gleichungen (16.) subtrahirt:

$$(17.)\quad \begin{cases} -\dfrac{a_3}{a_2}\gamma_1=\dfrac{\xi_1}{a_1}+ka_2x_2+ka_3x_3=-ka_1x_1-\dfrac{\xi_2}{a_2}-\dfrac{\xi_3}{a_3}, \\[2mm] -\dfrac{a_1}{a_3}\gamma_2=ka_1x_1+\dfrac{\xi_2}{a_2}+ka_1x_3=-\dfrac{\xi_1}{a_1}-ka_2x_2-\dfrac{\xi_3}{a_3}, \\[2mm] -\dfrac{a_2}{a_1}\gamma_3=ka_1x_1+ka_2x_3+\dfrac{\xi_3}{a_3}=-\dfrac{\xi_1}{a_1}-\dfrac{\xi_2}{a_2}-ka_3x_3. \end{cases}$$

Dadurch sind die Bedingungen (10.) thatsächlich befriedigt, und es erübrigt noch die Bestimmung der Constanten k. Wir erinnern daran, dass sich die vorstehenden Formeln sofort vervierfältigen lassen, indem man für g setzt: $g^{(0)}, g, g', g''$. Demnach erhalten wir aus (15.) vier Gleichungen, die wir folgendermaassen schreiben:

$$(18.)\quad \begin{cases} \xi_1+\xi_2+\xi_3+x_1+x_2+x_3 = 0, \\[2mm] \dfrac{\xi_1}{a_1}+\dfrac{\xi_2}{a_2}+\dfrac{\xi_3}{a_3}+k\,(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)=0, \\[2mm] \dfrac{\xi_1}{a_1'}+\dfrac{\xi_2}{a_2'}+\dfrac{\xi_3}{a_3'}+k'\,(a_1'x_1+a_2'x_2+a_3'x_3)=0, \\[2mm] \dfrac{\xi_1}{a_1''}+\dfrac{\xi_2}{a_2''}+\dfrac{\xi_3}{a_3''}+k''(a_1''x_1+a_2''x_2+a_3''x_3)=0. \end{cases}$$

Der in der ersten dieser Gleichungen auftretende Coëfficient $k^{(0)}$ kann $=1$ gesetzt werden, indem man über einen constanten Factor der drei Functionen ξ_1, ξ_2, ξ_3, der sonst unbestimmt bleiben würde, verfügt.

Von den vier Gleichungen (18.) muss aber Eine identische Folge der übrigen sein, und auf diesen Umstand lässt sich eine eindeutige Bestimmungsweise der Constanten k, k', k'' gründen. Multipliciren wir nämlich die drei letzten der Gleichungen (18.) mit den unbestimmten Coëfficienten λ, λ', λ'', addiren alle vier Gleichungen (18.) und setzen das Resultat identisch $= 0$, so erhalten wir:

$$(19.)\quad \begin{cases} 1+\dfrac{\lambda}{a_1}+\dfrac{\lambda'}{a_1'}+\dfrac{\lambda''}{a_1''}=0, & 1+\lambda k a_1+\lambda' k' a_1'+\lambda'' k'' a_1''=0, \\ 1+\dfrac{\lambda}{a_2}+\dfrac{\lambda'}{a_2'}+\dfrac{\lambda''}{a_2''}=0, & 1+\lambda k a_2+\lambda' k' a_2'+\lambda'' k'' a_2''=0, \\ 1+\dfrac{\lambda}{a_3}+\dfrac{\lambda'}{a_3'}+\dfrac{\lambda''}{a_3''}=0, & 1+\lambda k a_3+\lambda' k' a_3'+\lambda'' k'' a_3''=0. \end{cases}$$

Aus dem ersten dieser beiden Systeme erhalten wir λ, λ', λ'' rational durch die gegebenen Grössen a, a', a'' ausgedrückt, aus dem zweiten ebenso λk, $\lambda' k'$, $\lambda'' k''$; mithin sind auch die Coëfficienten k, k', k'' rational durch die a, a', a'' bestimmt und lassen sich leicht durch Determinanten darstellen.

Durch Auflösung von dreien der linearen Gleichungen (18.) erhält man endlich die noch unbekannten Functionen ξ_1, ξ_2, ξ_3, so dass damit unser Problem, die Curve vierter Ordnung zu bestimmen, die sieben gegebene gerade Linien mit der angegebenen Beschränkung zu Doppeltangenten hat, auf eine unzweideutige Weise gelöst ist. Zugleich sind, ausser den sieben gegebenen Doppeltangenten 15 weitere vollständig mit ihren Charakteristiken bestimmt, nämlich:

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3;\quad \gamma_1^{(0)},\ \gamma_1,\ \gamma_1',\ \gamma_1'';\quad \gamma_2^{(0)},\ \gamma_2,\ \gamma_2',\ \gamma_2'';\quad \gamma_3^{(0)},\ \gamma_3,\ \gamma_3',\ \gamma_3''$$

und es bleiben noch sechs zu finden übrig.

Ehe wir zur Lösung dieser Aufgabe schreiten, geben wir den bisher gefundenen Resultaten eine etwas andere Gestalt. Wir setzen:

$$(20.)\quad \begin{cases} a_1\sqrt{k}=\alpha_1, & a_2\sqrt{k}=\alpha_2, & a_3\sqrt{k}=\alpha_3, \\ a_1'\sqrt{k'}=\alpha_1', & a_2'\sqrt{k'}=\alpha_2', & a_3'\sqrt{k'}=\alpha_3', \\ a_1''\sqrt{k''}=\alpha_1'', & a_2''\sqrt{k''}=\alpha_2'', & a_3''\sqrt{k''}=\alpha_3'', \end{cases}$$

wodurch die Gleichungen (18.) die einfachere Form annehmen:

$$
(21.)\quad \begin{cases}
\xi_1+\xi_2+\xi_3+x_1+x_2+x_3 = 0, \\
\dfrac{\xi_1}{\alpha_1}+\dfrac{\xi_2}{\alpha_2}+\dfrac{\xi_3}{\alpha_3}+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3 = 0, \\
\dfrac{\xi_1}{\alpha'_1}+\dfrac{\xi_2}{\alpha'_2}+\dfrac{\xi_3}{\alpha'_3}+\alpha'_1 x_1+\alpha'_2 x_2+\alpha'_3 x_3 = 0, \\
\dfrac{\xi_1}{\alpha''_1}+\dfrac{\xi_2}{\alpha''_2}+\dfrac{\xi_3}{\alpha''_3}+\alpha''_1 x_1+\alpha''_2 x_2+\alpha''_3 x_3 = 0,
\end{cases}
$$

und die Gleichungen (19.) ergeben, wenn man in denselben λ, λ', λ'' durch $\frac{\lambda}{\sqrt{k}}$, $\frac{\lambda'}{\sqrt{k'}}$, $\frac{\lambda''}{\sqrt{k''}}$ ersetzt:

$$
(22.)\quad \begin{cases}
1+\dfrac{\lambda}{\alpha_1}+\dfrac{\lambda'}{\alpha'_1}+\dfrac{\lambda''}{\alpha''_1} = 0, & 1+\lambda\alpha_1+\lambda'\alpha'_1+\lambda''\alpha''_1 = 0, \\
1+\dfrac{\lambda}{\alpha_2}+\dfrac{\lambda'}{\alpha'_2}+\dfrac{\lambda''}{\alpha''_2} = 0, & 1+\lambda\alpha_2+\lambda'\alpha'_2+\lambda''\alpha''_2 = 0, \\
1+\dfrac{\lambda}{\alpha_3}+\dfrac{\lambda'}{\alpha'_3}+\dfrac{\lambda''}{\alpha''_3} = 0, & 1+\lambda\alpha_3+\lambda'\alpha'_3+\lambda''\alpha''_3 = 0.
\end{cases}
$$

Eliminirt man aus diesen sechs Gleichungen λ, λ', λ'' so ergeben sich drei Gleichungen zwischen den Grössen α, vermöge deren man drei derselben durch die sechs übrigen ausdrücken kann. Statt daher die Constanten a als beliebig gegeben zu betrachten, kann man auch sechs der Grössen α, etwa α_1, α_2, α_3, α'_1, α'_2, α'_3 als beliebig gegeben annehmen. Die drei übrigen, α''_1, α''_2, α''_3 sind dadurch, wie jetzt gezeigt werden wird, bis auf das allen dreien gemeinschaftliche Vorzeichen völlig bestimmt. Wir werden die betreffenden Ausdrücke in vollkommen explicirter Form aufstellen.

Wir führen zur Abkürzung folgende Bezeichnung ein:

$$
\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \alpha'_1, & \alpha'_2, & \alpha'_3 \end{vmatrix} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), \qquad
\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \alpha_1, & \dfrac{1}{\alpha_2}, & \dfrac{1}{\alpha_3} \\ \alpha'_1, & \dfrac{1}{\alpha'_2}, & \dfrac{1}{\alpha'_3} \end{vmatrix} = \left(\alpha_1,\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right) \text{ etc.}
$$

Die Elimination der λ aus den Gleichungen des ersten Systems (22.) und je einer des zweiten und umgekehrt führt zu folgenden beiden Systemen:

$$
(23.)\quad \begin{cases}
\alpha''_1\left(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right)-\frac{1}{\alpha''_1}\left(\alpha_1,\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right)+\frac{1}{\alpha''_2}\left(\alpha_1,\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_3}\right)-\frac{1}{\alpha''_3}\left(\alpha_1,\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2}\right) = 0, \\
\alpha''_2\left(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right)-\frac{1}{\alpha''_1}\left(\alpha_2,\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right)+\frac{1}{\alpha''_2}\left(\alpha_2,\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_3}\right)-\frac{1}{\alpha''_3}\left(\alpha_2,\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2}\right) = 0, \\
\alpha''_3\left(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right)-\frac{1}{\alpha''_1}\left(\alpha_3,\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right)+\frac{1}{\alpha''_2}\left(\alpha_3,\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_3}\right)-\frac{1}{\alpha''_3}\left(\alpha_3,\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2}\right) = 0,
\end{cases}
$$

$$(24.)\quad \begin{cases} \frac{1}{\alpha_1''}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)-\alpha_1''\left(\frac{1}{\alpha_1},\alpha_2,\alpha_3\right)+\alpha_2''\left(\frac{1}{\alpha_1},\alpha_1,\alpha_3\right)-\alpha_3''\left(\frac{1}{\alpha_1},\alpha_1,\alpha_2\right) = 0, \\ \frac{1}{\alpha_2''}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)-\alpha_1''\left(\frac{1}{\alpha_2},\alpha_2,\alpha_3\right)+\alpha_2''\left(\frac{1}{\alpha_2},\alpha_1,\alpha_3\right)-\alpha_3''\left(\frac{1}{\alpha_2},\alpha_1,\alpha_2\right) = 0, \\ \frac{1}{\alpha_3''}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)-\alpha_1''\left(\frac{1}{\alpha_3},\alpha_2,\alpha_3\right)+\alpha_2''\left(\frac{1}{\alpha_3},\alpha_1,\alpha_3\right)-\alpha_3''\left(\frac{1}{\alpha_3},\alpha_1,\alpha_2\right) = 0, \end{cases}$$

wofür wir, mit Benutzung einer sofort verständlichen Abkürzung, schreiben:

$$(25.)\quad \begin{cases} \alpha_1'' = a_1\frac{1}{\alpha_1''}+a_2\frac{1}{\alpha_2''}+a_3\frac{1}{\alpha_3''}, & \frac{1}{\alpha_1''} = b_1\alpha_1''+b_2\alpha_2''+b_3\alpha_3'', \\ \alpha_2'' = a_1'\frac{1}{\alpha_1''}+a_2'\frac{1}{\alpha_2''}+a_3'\frac{1}{\alpha_3''}, & \frac{1}{\alpha_2''} = b_1'\alpha_1''+b_2'\alpha_2''+b_3'\alpha_3'', \\ \alpha_3'' = a_1''\frac{1}{\alpha_1''}+a_2''\frac{1}{\alpha_2''}+a_3''\frac{1}{\alpha_3''}, & \frac{1}{\alpha_3''} = b_1''\alpha_1''+b_2''\alpha_2''+b_3''\alpha_3''. \end{cases}$$

Das erste System dieser Gleichungen ist die Auflösung des zweiten, auch wenn für α_1'', α_2'', α_3'', $\frac{1}{\alpha_1''}$, $\frac{1}{\alpha_2''}$, $\frac{1}{\alpha_3''}$ beliebige Grössen gesetzt werden, und daraus ergeben sich folgende Relationen:

$$(26.)\quad \begin{cases} \delta a_1 = b_2'b_3''-b_3'b_2'', & \delta a_1' = b_3b_1''-b_1b_3'', & \delta a_1'' = b_1'b_2'-b_2'b_1'', \\ \delta a_2 = b_2''b_3-b_3''b_2, & \delta a_2' = b_3''b_1-b_1''b_3, & \delta a_2'' = b_1''b_2-b_2''b_1, \\ \delta a_3 = b_2b_3'-b_3b_2', & \delta a_3' = b_3b_1'-b_1b_3', & \delta a_3'' = b_1b_2'-b_2b_1', \end{cases}$$

$$\delta = \Sigma\pm b_1b_2'b_3''.$$

Aus dem zweiten System (25.) leiten wir nun die beiden homogenen Gleichungen zweiten Grades ab:

$$(27.)\quad \alpha_1''(b_1\alpha_1''+b_2\alpha_2''+b_3\alpha_3'') = \alpha_2''(b_1'\alpha_1''+b_2'\alpha_2''+b_3'\alpha_3'') = \alpha_3''(b_1''\alpha_1''+b_2''\alpha_2''+b_3''\alpha_3'').$$

Eliminirt man hieraus α_1'', so ergiebt sich für $\frac{\alpha_2''}{\alpha_3''}$ eine biquadratische Gleichung, von welcher drei Wurzeln bekannt sind, nämlich

$$1,\quad \frac{\alpha_2}{\alpha_3},\quad \frac{\alpha_2'}{\alpha_3'},$$

(weil nämlich die Gleichungen (23.), (24.) identisch werden, wenn man α_1'', α_2'', α_3'' ersetzt durch 1, 1, 1, oder durch α_1, α_2, α_3 oder durch α_1', α_2', α_3'), Aus der letzten Gleichung (27.) ergiebt sich zunächst:

$$\alpha_1'' = -\frac{\alpha_2''(b_2'\alpha_2''+b_3'\alpha_3'')-\alpha_3''(b_2''\alpha_2''+b_3''\alpha_3'')}{\alpha_2''b_1'-\alpha_3''b_1''},$$

und durch Substitution dieses Ausdrucks in (27.) ergiebt sich die gesuchte biquadratische Gleichung. Es ist aber nicht nothwendig, dieselbe wirklich zu bilden; wir suchen in derselben nur die Coëfficienten von $\alpha_2''^4$ und $\alpha_3''^4$, indem wir resp. α_3'' und $\alpha_2''=0$ setzen.

Man erhält für diese Coëfficienten die Ausdrücke:

$$b_2'(b_1b_2'-b_2b_1'), \qquad b_3''(b_1b_3''-b_3b_1''),$$

woraus sich mit Hülfe der Relationen (26.) ergiebt:

$$\frac{\alpha_2\alpha_2'\alpha_2''}{\alpha_3\alpha_3'\alpha_3''}=\frac{b_3''(b_1b_3''-b_3b_1'')}{b_2'(b_1b_2'-b_2b_1')}=\frac{b_3''a_2'}{b_2'a_3''},$$

oder endlich mit Rücksicht auf die Bedeutung der a, b:

$$\frac{\alpha_2\alpha_2'\alpha_2''}{\alpha_3\alpha_3'\alpha_3''}=\frac{\left(\frac{1}{\alpha_1},\alpha_2,\frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\alpha_1,\alpha_2,\frac{1}{\alpha_3}\right)}{\left(\alpha_1,\frac{1}{\alpha_2},\alpha_3\right)\left(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\alpha_3\right)}.$$

In dieser Formel können wir zunächst die Indices 1, 2, 3, cyklisch vertauschen, und sind ferner berechtigt, α_1 mit $\frac{1}{\alpha_1}$, α_2 mit $\frac{1}{\alpha_2}$, α_3 mit $\frac{1}{\alpha_3}$ nach Belieben zu vertauschen (auch einzeln), was auf eine andere Anordnung der Elimination aus den Gleichungen (22.) hinauskommt. Demnach ergeben sich folgende sechs Gleichungen:

$$(28.)\quad\begin{cases}\dfrac{\alpha_2\alpha_2'\alpha_2''}{\alpha_3\alpha_3'\alpha_3''}=\dfrac{\left(\alpha_1,\alpha_2,\frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\frac{1}{\alpha_1},\alpha_2,\frac{1}{\alpha_3}\right)}{\left(\alpha_1,\frac{1}{\alpha_2},\alpha_3\right)\left(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\alpha_3\right)}; & \alpha_2\alpha_2'\alpha_2''.\alpha_3\alpha_3'\alpha_3''=\dfrac{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\left(\frac{1}{\alpha_1},\alpha_2,\alpha_3\right)}{\left(\alpha_1,\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right)},\\[2ex] \dfrac{\alpha_3\alpha_3'\alpha_3''}{\alpha_1\alpha_1'\alpha_1''}=\dfrac{\left(\frac{1}{\alpha_1},\alpha_2,\alpha_3\right)\left(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\alpha_3\right)}{\left(\alpha_1,\alpha_2,\frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\alpha_1,\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right)}; & \alpha_3\alpha_3'\alpha_3''.\alpha_1\alpha_1'\alpha_1''=\dfrac{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\left(\alpha_1,\frac{1}{\alpha_2},\alpha_3\right)}{\left(\frac{1}{\alpha_1},\alpha_2,\frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right)},\\[2ex] \dfrac{\alpha_1\alpha_1'\alpha_1''}{\alpha_2\alpha_2'\alpha_2''}=\dfrac{\left(\alpha_1,\frac{1}{\alpha_2},\alpha_3\right)\left(\alpha_1,\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha_1},\alpha_2,\alpha_3\right)\left(\frac{1}{\alpha_1},\alpha_2,\frac{1}{\alpha_3}\right)}; & \alpha_1\alpha_1'\alpha_1''.\alpha_2\alpha_2'\alpha_2''=\dfrac{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\left(\alpha_1,\alpha_2,\frac{1}{\alpha_3}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\alpha_3\right)\left(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right)},\end{cases}$$

wodurch die drei Grössen α_1'', α_2'', α_3'' bis auf ein unbestimmt bleibendes allen dreien gemeinschaftliches Vorzeichen völlig bestimmt sind.

In der nunmehr eingeführten Bezeichnung sind folgende Doppeltangenten sammt ihren Charakteristiken bestimmt: zunächst erhalten wir die ξ_1, ξ_2, ξ_3 durch Auflösung von dreien der Gleichungen (21.); ferner haben wir, wenn wir die frühere Bezeichnung insofern etwas ändern, als wir constante Factoren auf die nichts ankommt, weglassen:

$$g_1^{(0)} = x_1 + x_2 + x_3, \quad \gamma_1^{(0)} = x_1 + \xi_2 + \xi_3, \quad \gamma_2^{(0)} = \xi_1 + x_2 + \xi_3,$$

$$g = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \quad \gamma_1 = \alpha_1 x_1 + \frac{\xi_2}{\alpha_2} + \frac{\xi_3}{\alpha_3}, \quad \gamma_2 = \frac{\xi_1}{\alpha_1} + \alpha_2 x_2 + \frac{\xi_3}{\alpha_3},$$

$$g' = \alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 + \alpha_3' x_3, \quad \gamma_1' = \alpha_1' x_1 + \frac{\xi_2}{\alpha_2'} + \frac{\xi_3}{\alpha_3'}, \quad \gamma_2' = \frac{\xi_1}{\alpha_1'} + \alpha_2' x_2 + \frac{\xi_3}{\alpha_3'},$$

$$g'' = \alpha_1'' x_1 + \alpha_2'' x_2 + \alpha_3'' x_3, \quad \gamma_1'' = \alpha_1'' x_1 + \frac{\xi_2}{\alpha_2''} + \frac{\xi_3}{\alpha_3''}, \quad \gamma_2'' = \frac{\xi_1}{\alpha_1''} + \alpha_2'' x_2 + \frac{\xi_3}{\alpha_3''},$$

$$\gamma_3^{(0)} = \xi_1 + \xi_2 + x_3,$$

$$\gamma_3 = \frac{\xi_1}{\alpha_1} + \frac{\xi_2}{\alpha_2} + \alpha_3 x_3,$$

$$\gamma_3' = \frac{\xi_1}{\alpha_1'} + \frac{\xi_2}{\alpha_2'} + \alpha_3' x_3,$$

$$\gamma_3'' = \frac{\xi_1}{\alpha_1''} + \frac{\xi_2}{\alpha_2''} + \alpha_3'' x_3.$$

Die noch fehlenden sechs Doppeltangenten erhalten wir nun auf folgende Weise, indem wir zuerst die Charakteristiken derselben zu ermitteln suchen. Aus den drei Gruppen (5.) (p. 88) entnehmen wir, indem wir die beiden letzteren Gruppen (5.) addiren, folgende drei Gruppen:

$$(29.)\quad \begin{cases} (p + \beta_1) : (\sqrt{x_2 \xi_3})(\sqrt{\xi_2 x_3})(\sqrt{g^{(0)} \gamma_1^{(0)}})(\sqrt{g\, \gamma_1})(\sqrt{g' \gamma_1'})(\sqrt{g'' \gamma_1''}), \\ (\beta_2 + \beta_3) : (\sqrt{x_2 x_3})(\sqrt{\xi_2 \xi_3})(\sqrt{\gamma_2^{(0)} \gamma_3^{(0)}})(\sqrt{\gamma_2 \gamma_3})(\sqrt{\gamma_2' \gamma_3'})(\sqrt{\gamma_2'' \gamma_3''}), \\ (p + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3) : (\sqrt{x_1 \xi_1})(\sqrt{x_2 \xi_2})(\sqrt{x_3 \xi_1}). \end{cases}$$

Diese drei Gruppen enthalten nach §. 3. I. zusammen alle ungeraden Charakteristiken, und daher müssen die noch fehlenden in der Gruppe $(\sqrt{x_1 \xi_1})$ enthalten sein. Wir bezeichnen dieselben daher mit:

$$(\sqrt{x_4}),\quad (\sqrt{\xi_4});\quad (\sqrt{x_5}),\quad (\sqrt{\xi_5});\quad (\sqrt{x_6}),\quad (\sqrt{\xi_6}),$$

so dass wir haben:

$$(\sqrt{x_1 \xi_1}) = (\sqrt{x_4 \xi_4}) = (\sqrt{x_5 \xi_5}) = (\sqrt{x_6 \xi_6}).$$

Ebenso wie wir früher von der Gruppe $(\sqrt{x_1 \xi_1})$ ausgegangen sind, so legen wir jetzt die Gruppe $(\sqrt{x_2 \xi_3})$ zu Grunde, und erhalten dann nach derselben Methode, nur wesentlich einfacher, die noch fehlenden Doppeltangenten. Vergleichen wir die Gruppe $(\sqrt{x_2 \xi_3})$ mit der Gruppe $(\sqrt{x_1 \xi_1})$, so sehen wir, dass wir, was früher

$$\begin{array}{ll} x_1,\ x_2,\ x_3 & \text{war, zu ersetzen haben durch:} \\ \underline{g^{(0)},\ x_3,\ \xi_3} & \\ \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3 & \text{zu ersetzen durch:} \\ \gamma_1^{(0)},\ \xi_2,\ x_2. & \end{array}$$

Demnach haben wir jetzt an Stelle der Gruppen (5.) folgende drei zu betrachten:

$$(\sqrt{x_3 x_2}) = (\beta_2+\beta_3), \quad (\sqrt{\xi_3 \gamma_1^{(0)}}) = (\beta_2+\beta_4), \quad (\sqrt{g^{(0)}\xi_2}) = (p+\beta_3+\beta_1+\beta_4).$$

Die erste dieser Gruppen ist in (29.) vollständig aufgestellt. Die zweite enthält, wie man aus der ersten und dritten Gruppe (5.) ersieht, folgende Paare:

$$(\beta_2+\beta_4) : (\sqrt{\xi_3\gamma_1^{(0)}}), \ (\sqrt{x_2 g^{(0)}}), \ (\sqrt{\xi_1\gamma_3^{(0)}}).$$

Sie hat also mit jeder der beiden Gruppen $(\sqrt{x_2 x_3})$ und $(\sqrt{x_1\xi_1})$ 6 ungepaarte Charakteristiken gemeinschaftlich und kann demnach nicht enthalten:

$$(\sqrt{x_3}), \ (\sqrt{\xi_2}), \ (\sqrt{\gamma_2^{(0)}}), \ (\sqrt{x_1}).$$

Da sie ferner mit jeder der beiden Gruppen $(\sqrt{x_2\xi_3})$, $(\sqrt{x_2\xi_1})$ vier zweimal gepaarte Charakteristiken gemein hat, so kann sie nicht enthalten:

$$(\sqrt{g}), \ (\sqrt{\gamma_1}), \ (\sqrt{g'}), \ (\sqrt{\gamma_1'}), \ (\sqrt{g''}), \ (\sqrt{\gamma_1''}), \ (\sqrt{\gamma_3}), \ (\sqrt{\gamma_3'}), \ (\sqrt{\gamma_3''}).$$

Sie muss daher, wie die Vergleichung mit $(\sqrt{x_2 x_3})$ lehrt,

$$(\sqrt{\gamma_2}), \ (\sqrt{\gamma_2'}), \ (\sqrt{\gamma_2''})$$

enthalten, und diese drei Charakteristiken müssen in derselben mit je einer Charakteristik der drei Paare $(\sqrt{x_4\xi_4})$, $(\sqrt{x_5\xi_5})$, $(\sqrt{x_6\xi_6})$ gepaart sein. Da nun über die Anordnung dieser letzteren noch keine Voraussetzung gemacht ist, so können wir die fragliche Gruppe folgendermaassen aufstellen:

$$(\beta_2+\beta_4) : (\sqrt{\xi_3\gamma_1^{(0)}}), \ (\sqrt{x_2 g''}), \ (\sqrt{\xi_1\gamma_3^{(0)}}), \ (\sqrt{\gamma_2\xi_4}), \ (\sqrt{\gamma_2'\xi_5}), \ (\sqrt{\gamma_2''\xi_6}),$$

und daraus erhält man die dritte der obigen Gruppen durch Hinzufügung der Gruppe $(\sqrt{x_1\xi_1})$:

$$(p+\beta_3+\beta_1+\beta_4) : (\sqrt{x_3\gamma_1^{(0)}}), \ (\sqrt{\xi_2 g^{(0)}}), \ (\sqrt{x_1\gamma_3^{(0)}}), \ (\sqrt{\gamma_2 x_4}), \ (\sqrt{\gamma_2 x_5}), \ (\sqrt{\gamma_2'' x_6}).$$

Wir haben daher den drei Gruppen (5.) entsprechend, folgende drei Gruppen:

$$(30.) \quad \begin{cases} (\beta_2+\beta_3) : (\sqrt{x_2 x_3}), \ (\sqrt{\xi_2\xi_3}), \ (\sqrt{\gamma_2^{(0)}\gamma_3^{(0)}}), \ (\sqrt{\gamma_2\gamma_3}), \ (\sqrt{\gamma_2'\gamma_3'}), \ (\sqrt{\gamma_2''\gamma_3''}); \\ (\beta_2+\beta_4) : (\sqrt{g'' x_2}), \ (\sqrt{\gamma_1^{(0)}\xi_3}), \ (\sqrt{\gamma_3^{(0)}\xi_1}), \ (\sqrt{\gamma_2\xi_4}), \ (\sqrt{\gamma_2\xi_5}), \ (\sqrt{\gamma_2''\xi_6}), \\ (p+\beta_3+\beta_1+\beta_4) : (\sqrt{g^{(0)}\xi_2}), \ (\sqrt{\gamma_1^{(0)} x_3}), \ (\sqrt{\gamma_3^{(0)} x_1}), \ (\sqrt{\gamma_2 x_4}), \ (\sqrt{\gamma_2 x_5}), \ (\sqrt{\gamma_2'' x_6}), \end{cases}$$

woraus wir zunächst die Charakteristiken der noch fehlenden Doppeltangenten erhalten:

$$(31.) \quad \begin{cases} (\sqrt{\xi_4}) = (p+\beta_4+\beta_5) = (p)+(\sqrt{g^{(0)}g}), \ (\sqrt{x_4}) = (p+\beta_6+\beta_7) = (p)+(\sqrt{g'g''}), \\ (\sqrt{\xi_5}) = (p+\beta_4+\beta_6) = (p)+(\sqrt{g^{0}g'}), \ (\sqrt{x_5}) = (p+\beta_7+\beta_5) = (p)+(\sqrt{g''g}), \\ (\sqrt{\xi_6}) = (p+\beta_4+\beta_7) = (p)+(\sqrt{g''g''}), \ (\sqrt{x_6}) = (p+\beta_5+\beta_6) = (p)+(\sqrt{g g'}). \end{cases}$$

Aus den beiden letzten Gruppen (30.) schliessen wir weiter (nach §. 4), dass die Charakteristiken

$$(\sqrt{g^{(0)}}),\quad (\sqrt{x_3}),\quad (\sqrt{\xi_3}),\quad (\sqrt{\gamma_3^{(0)}}),\quad (\sqrt{\gamma_2}),\quad (\sqrt{\gamma_2'}),\quad (\sqrt{\gamma_2''})$$

ein vollständiges System bilden, und zwar ein zu $(\beta_2+\beta_3+\beta_4)$ gehöriges. Wir ersetzen also in den früheren Betrachtungen ferner

$$g^{(0)},\ g,\ g',\ g'' \quad \text{durch}$$
$$\gamma_3^{(0)},\ \gamma_2,\ \gamma_2',\ \gamma_2''$$

und, wie durch die Vergleichung von (30.) mit (5.) sich ergiebt,

$$\begin{array}{llll}
\gamma_1^{(0)},\ \gamma_1,\ \gamma_1',\ \gamma_1'' & \text{durch} & \gamma_2^{(0)},\ \gamma_3,\ \gamma_3',\ \gamma_3'', \\
\gamma_2^{(0)},\ \gamma_2,\ \gamma_2',\ \gamma_1'' & \text{durch} & \xi_1,\ \xi_4,\ \xi_5,\ \xi_6, \\
\gamma_3^{(0)},\ \gamma_3,\ \gamma_3',\ \gamma_3'' & \text{durch} & x_1,\ x_4,\ x_5,\ x_6.
\end{array}$$

Sowie also oben $g, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ durch $x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ ausgedrückt waren, so erhalten wir jetzt $\gamma_2, \gamma_3, \xi_4, x_4$ ausgedrückt durch $g^{(0)}, x_3, \xi_3, \gamma_1^{(0)}, \xi_2, x_2$ wenn wir nach Analogie von (15.) eine Gleichung aufstellen von der Form:

$$(32.)\qquad \gamma_1^{(0)}+\frac{\xi_2}{b}+\frac{x_2}{\beta}+\varkappa(g^{(0)}+b\,x_3+\beta\,\xi_3) = 0;$$

denn es folgt aus (8.) p. 88, wenn man für φ seinen Ausdruck setzt und $g\gamma$ durch $g^{(0)}\gamma_1^{(0)}$ ersetzt, die Gleichung

$$\sqrt{\gamma_1^{(0)}g^{(0)}}+\sqrt{\xi_2 x_3}+\sqrt{x_2\xi_3} = 0,$$

eine Gleichung, welche von derselben Form ist wie (3.) p. 87. Hat man die Gleichung (32.) gefunden, so ergiebt sich aus derselben (nach 17. p. 91):

$$(33.)\quad \left\{\begin{array}{l}
\gamma_2 = \gamma_1^{(0)} + \frac{\xi_2}{b} + \frac{x_2}{\beta} = -\varkappa(g^{(0)}+b\,x_3+\beta\,\xi_3), \\
\gamma_3 = \varkappa g^{(0)} + \frac{\xi_2}{b} + \frac{x_2}{\beta} = -\gamma_1^{(0)} - \varkappa b x_3 - \varkappa\beta\,\xi_3, \\
\xi_4 = \gamma_1^{(0)} + \varkappa b x_3 + \frac{x_2}{\beta} = -\varkappa g^{(0)} - \frac{\xi_2}{b} - \varkappa\beta\,\xi_3, \\
x_4 = \gamma_1^{(0)} + \frac{\xi_2}{b} + \varkappa\beta\xi_3 = -\varkappa g^{(0)} - \varkappa b x_3 - \frac{x_2}{\beta}.
\end{array}\right.$$

Um also ξ_4, x_4 zu bestimmen, hat man nichts weiter nöthig, als die bekannte Function γ_2 linear auszudrücken einmal durch $\gamma_1^{(0)}, \xi_2, x_2$ dann durch $g^{(0)}, x_3, \xi_3$, wodurch die Constanten $\varkappa$, b, β bestimmt sind. Durch Accentuirung der Buchstaben ergiebt sich daraus von selbst ξ_5, x_5; ξ_6, x_6. Um diese Rechnung durchzuführen, setzen wir

$$\gamma_2 = \frac{\xi_1}{\alpha_1} + \alpha_2 x_2 + \frac{\xi_3}{\alpha_3} = -\alpha_1 x_1 - \frac{\xi_2}{\alpha_2} - \alpha_3 x_3,$$
$$g^{(0)} = x_1 + x_2 \quad + x_3 = -\xi_1 \quad -\xi_2 - \xi_3;$$
$$\gamma_1^{(0)} = x_1 + \xi_2 \quad + \xi_3 = -\xi_1 \quad - x_2 - x_3,$$

und eliminiren zunächst x_1 und ξ_1 aus den beiden Ausdrücken für γ_2 und $g^{(0)}$:

$$\gamma_2 + \alpha_1 g^{(0)} = -\frac{\xi_2}{\alpha_2} + \alpha_1 x_2 + (\alpha_1 - \alpha_3) x_3,$$
$$\gamma_2 + \frac{g^{(0)}}{\alpha_1} = -\frac{\xi_2}{\alpha_1} + \alpha_2 x_2 + \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_3} \xi_3.$$

Aus diesen beiden Ausdrücken kann man ξ_2 und x_2 zugleich eliminiren, wodurch man erhält:

$$(34.) \qquad \gamma_2(\alpha_2 - \alpha_1) = g^{(0)}(1 - \alpha_1\alpha_2) + (\alpha_1 - \alpha_3)\alpha_2 x_3 - (\alpha_1 - \alpha_3)\frac{\xi_3}{\alpha_3}.$$

Auf die gleiche Weise ergiebt sich aus den beiden Ausdrücken für γ_2 und $\gamma_1^{(0)}$:

$$\gamma_2 + \alpha_1 \gamma_1^{(0)} = -(1 - \alpha_1\alpha_2)\frac{\xi_2}{\alpha_2} - \alpha_3 x_3 + \alpha_1 \xi_3,$$
$$\gamma_2 + \frac{\gamma_1^{(0)}}{\alpha_1} = -(1 - \alpha_1\alpha_2)\frac{x_2}{\alpha_1} - \frac{x_3}{\alpha_1} + \frac{\xi_3}{\alpha_3},$$

woraus durch Elimination von x_3 und ξ_3:

$$(35.) \qquad \gamma_2(1 - \alpha_1\alpha_3) = -(\alpha_1 - \alpha_3)\gamma_1^{(0)} - (1 - \alpha_1\alpha_2)\frac{\xi_2}{\alpha_2} + (1 - \alpha_1\alpha_2)\alpha_3 x_2.$$

Aus (34.) und (35.) erhält man die Gleichung (32.) in folgender Form:

$$(36.) \quad \begin{cases} \dfrac{\alpha_1 - \alpha_3}{1 - \alpha_1\alpha_3}\gamma_1^{(0)} + \dfrac{1 - \alpha_1\alpha_2}{\alpha_2(1 - \alpha_1\alpha_3)}\xi_2 - \dfrac{(1 - \alpha_1\alpha_2)\alpha_3}{(1 - \alpha_1\alpha_3)} x_2 + \dfrac{1 - \alpha_1\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} g^{(0)} + \\ \qquad\qquad \dfrac{(\alpha_1 - \alpha_3)\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} x_3 - \dfrac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_1}\dfrac{\xi_3}{\alpha_3} = 0, \end{cases}$$

und hieraus nach (33.)

$$\begin{aligned} \xi_4 &= \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{1 - \alpha_1\alpha_3}\gamma_1^{(0)} - \frac{(1 - \alpha_1\alpha_2)\alpha_3}{1 - \alpha_1\alpha_3} x_2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} x_3 \\ &= -\frac{1 - \alpha_1\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} g^{(0)} - \frac{1 - \alpha_1\alpha_2}{\alpha_2(1 - \alpha_1\alpha_3)}\xi_2 - \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2}\frac{\xi_3}{\alpha_3}; \\ x_4 &= \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{1 - \alpha_1\alpha_3}\gamma_1^{(0)} - \frac{1 - \alpha_1\alpha_2}{\alpha_2(1 - \alpha_1\alpha_3)}\xi_2 + \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2}\frac{\xi_3}{\alpha_3} \\ &= -\frac{1 - \alpha_1\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} g^{(0)} + \frac{(1 - \alpha_1\alpha_2)\alpha_3}{1 - \alpha_1\alpha_3} x_2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} x_3. \end{aligned}$$

Ersetzen wir $g^{(0)}$ und $\gamma_1^{(0)}$ durch ihre Ausdrücke in $x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3$, so ergeben sich mit Unterdrückung constanter Factoren folgende sehr elegante Formeln:

$$\xi_4 = \frac{\xi_1}{\alpha_1(1-\alpha_2\alpha_3)} + \frac{\xi_2}{\alpha_2(1-\alpha_3\alpha_1)} + \frac{\xi_3}{\alpha_3(1-\alpha_1\alpha_2)}$$

oder:

$$\xi_4 = \frac{\xi_1}{\alpha_1(1-\alpha_2\alpha_3)} + \frac{x_2}{\alpha_1-\alpha_3} + \frac{x_3}{\alpha_1-\alpha_2},$$

wofür man auch die analogen Ausdrücke setzen kann:

$$\frac{x_1}{\alpha_2-\alpha_3} + \frac{\xi_2}{\alpha_2(1-\alpha_3\alpha_1)} + \frac{x_3}{\alpha_2-\alpha_1}; \quad \frac{x_1}{\alpha_3-\alpha_2} + \frac{x_2}{\alpha_3-\alpha_1} + \frac{\xi_3}{\alpha_3(1-\alpha_1\alpha_2)}.$$

Ferner ergiebt sich

$$x_4 = \frac{x_1}{1-\alpha_2\alpha_3} + \frac{x_2}{1-\alpha_3\alpha_1} + \frac{x_3}{1-\alpha_1\alpha_2}$$

oder:

$$x_4 = \frac{x_1}{1-\alpha_2\alpha_3} + \frac{\xi_2}{\alpha_2(\alpha_1-\alpha_3)} + \frac{\xi_3}{\alpha_3(\alpha_1-\alpha_2)}.$$

Hieraus erhält man die Darstellungen von ξ_5, x_5; ξ_6, x_6 indem man α resp. durch α' und α'' ersetzt.

Wir fassen das Ergebniss dieser Untersuchung kurz zusammen, indem wir für die Bestimmung der Charakteristiken folgendes Beispiel zu Grunde legen:

$$(p) = (0), \quad (\beta_1) = \binom{111}{111}, \quad (\beta_2) = \binom{001}{011}, \quad (\beta_3) = \binom{011}{001}, \quad (\beta_4) = \binom{101}{100},$$

$$(\beta_5) = \binom{100}{101}, \quad (\beta_6) = \binom{110}{010}, \quad (\beta_7) = \binom{010}{110}.$$

Die Gleichung der allgemeinen Curve vierter Ordnung kann in die Form gesetzt werden:

$$\sqrt{x_1\xi_1} + \sqrt{x_2\xi_2} + \sqrt{x_3\xi_3} = 0,$$

worin die ξ_1, ξ_2, ξ_3 *aus den Gleichungen* (21.) *p. 93 zu bestimmen sind, und die Abelschen Functionen erhalten dann folgende Ausdrücke und Charakteristiken:*

$$\sqrt{x_1} : (\beta_1) = \binom{111}{111}; \quad \sqrt{x_2} : (\beta_2) = \binom{001}{011}; \quad \sqrt{x_3} : (\beta_3) = \binom{011}{001};$$

$$\sqrt{\xi_1} : (p+\beta_2+\beta_3) = \binom{010}{010}; \quad \sqrt{\xi_2} : (p+\beta_3+\beta_1) = \binom{100}{110}; \quad \sqrt{\xi_3} : (p+\beta_1+\beta_2) = \binom{110}{100};$$

$$\sqrt{x_1+x_2+x_3} \quad : (\beta_4) = \binom{101}{100}; \quad \sqrt{\xi_1+x_2+x_3} \quad : (p+\beta_1+\beta_4) = \binom{010}{011};$$

$$\sqrt{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3} : (\beta_5) = \binom{100}{101}; \quad \sqrt{\frac{\xi_1}{\alpha_1}+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3} : (p+\beta_1+\beta_5) = \binom{011}{010};$$

$$\sqrt{\alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2 + \alpha'_3 x_3} : (\beta_6) = \binom{110}{010}; \quad \sqrt{\frac{\xi_1}{\alpha'_1} + \alpha'_2 x_2 + \alpha'_3 x_3} : (p + \beta_1 + \beta_6) = \binom{001}{101};$$

$$\sqrt{\alpha_1 x_1 + \alpha''_2 x_2 + \alpha''_3 x_3} : (\beta_7) = \binom{010}{110}; \quad \sqrt{\frac{\xi_1}{\alpha''_1} + \alpha''_2 x_2 + \alpha''_3 x_3} : (p + \beta_1 + \beta_7) = \binom{101}{001};$$

$$\sqrt{x_1 + \xi_2 + x_3} \quad : (p + \beta_2 + \beta_4) = \binom{100}{111}; \quad \sqrt{x_1 + x_2 + \xi_3} \quad : (p + \beta_3 + \beta_4) = \binom{110}{101};$$

$$\sqrt{\alpha_1 x_1 + \frac{\xi_2}{\alpha_2} + \alpha_3 x_3} : (p + \beta_2 + \beta_5) = \binom{101}{110}; \quad \sqrt{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \frac{\xi_3}{\alpha_3}} : (p + \beta_3 + \beta_5) = \binom{111}{100};$$

$$\sqrt{\alpha'_1 x_1 + \frac{\xi_2}{\alpha_2} + \alpha'_3 x_3} : (p + \beta_2 + \beta_6) = \binom{111}{001}; \quad \sqrt{\alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2 + \frac{\xi_3}{\alpha'_3}} : (p + \beta_3 + \beta_6) = \binom{101}{011};$$

$$\sqrt{\alpha''_1 x_1 + \frac{\xi_2}{\alpha''_2} + \alpha''_3 x_3} : (p + \beta_2 + \beta_7) = \binom{011}{101}; \quad \sqrt{\alpha''_1 x_1 + \alpha''_2 x_2 + \frac{\xi_3}{\alpha''_3}} : (p + \beta_3 + \beta_7) = \binom{001}{111};$$

$$\sqrt{\frac{x_1}{1 - \alpha_2 \alpha_3} + \frac{x_2}{1 - \alpha_3 a_1} + \frac{x_3}{1 - \alpha_1 \alpha_2}} : (p + \beta_6 + \beta\ ) = \binom{100}{100};$$

$$\sqrt{\frac{x_1}{1 - \alpha'_2 \alpha'_3} + \frac{x_2}{1 - \alpha'_3 \alpha'_1} + \frac{x_3}{1 - \alpha'_1 \alpha'_2}} : (p + \beta_7 + \beta_5) = \binom{110}{011};$$

$$\sqrt{\frac{x_1}{1 - \alpha''_2 \alpha'_3} + \frac{x_2}{1 - \alpha''_3 \alpha''_1} + \frac{x_3}{1 - \alpha'_1 \alpha''_2}} : (p + \beta_5 + \beta_6) = \binom{010}{111};$$

$$\sqrt{\frac{\xi_1}{\alpha_1(1 - \alpha_2 \alpha_3)} + \frac{\xi_2}{\alpha_2(1 - \alpha_3 \alpha_1)} + \frac{\xi_3}{\alpha_3(1 - \alpha_1 \alpha_2)}} : (p + \beta_4 + \beta_5) = \binom{001}{001};$$

$$\sqrt{\frac{\xi_1}{\alpha_1(1 - \alpha'_2 \alpha'_3)} + \frac{\xi_2}{\alpha'_2(1 - \alpha_3 \alpha_1)} + \frac{\xi_3}{\alpha'_3(1 - \alpha'_1 \alpha'_2)}} : (p + \beta_4 + \beta_6) = \binom{011}{110};$$

$$\sqrt{\frac{\xi_1}{\alpha''_1(1 - \alpha''_2 \alpha''_3)} + \frac{\xi_2}{\alpha''_2(1 - \alpha''_3 \alpha''_1)} + \frac{\xi_3}{\alpha''_3(1 - \alpha'_1 \alpha''_2)}} : (p + \beta_4 + \beta_7) = \binom{111}{010}.$$

Hinsichtlich der Aufgabe, die im Vorhergehenden gelöst ist, habe ich beizufügen, dass *Riemann* in der in der Einleitung erwähnten Vorlesung dieselbe behandelt hat, und dass die hier durchgeführte Untersuchung sich zum Theil an die *Riemannsche* anlehnt, mit der sie in den Resultaten übereinstimmt. Der Ausgangspunkt ist bei *Riemann* ein anderer, und dadurch bedingt sind auch die Methoden verschieden. *Riemann* geht von drei Paaren einer Gruppe aus, wie $\sqrt{x_1 \xi_1}$, $\sqrt{x_2 \xi_2}$, $\sqrt{x_3 \xi_3}$, die er als bekannt annimmt, wonach die Bestimmung der übrigen *Abelschen* Functionen noch von einer biquadratischen Gleichung abhängt. Durch die Sätze über die vollständigen Systeme ungerader Charakteristiken wird nicht nur diese biquadratische Gleichung umgangen, sondern das ganze Verfahren wird systematischer und durchsichtiger. Unsere Voraussetzungen stimmen mit denen überein, welche der Untersuchung von *Aronhold* über die Doppeltangenten der Curven 4ter Ordnung zu Grunde liegen *).

Wir schliessen hier noch eine Bemerkung an über die Bildung der verschiedenen Formen der Gleichung der Curve vierter Ordnung. Im §. 14 wurde nachgewiesen, dass zwischen drei Paaren von *Abelschen* Functionen einer Gruppe, etwa $\sqrt{p_1 q_1}$, $\sqrt{p_2 q_2}$, $\sqrt{p_3 q_3}$, eine Gleichung von der Form besteht:

$$\sqrt{h_1 p_1 q_1} + \sqrt{h_2 p_2 q_2} + \sqrt{h_3 p_3 q_3} = 0, \tag{37.}$$

wenn h_1, h_2, h_3 Constanten bedeuten, welche noch zu bestimmen sind. In den vorangegangenen Betrachtungen sind die Mittel enthalten, um die Werthe dieser Constanten in allen Fällen zu ermitteln, und es ist leicht, in einzelnen Fällen diese Gleichung wirklich aufzustellen. Es soll hier ein Mittel angegeben werden, um diese Constanten leicht in allen Fällen berechnen zu können. Befreit man die Gleichung (37.) von Wurzelzeichen, so ergiebt sich eine homogene Gleichung vierter Ordnung, welche, wenn man über einen gemeinschaftlichen Factor der Constanten h_1, h_2, h_3 passend verfügt, identisch angenommen werden kann mit der aus

$$\sqrt{x_1 \xi_1} + \sqrt{x_2 \xi_2} + \sqrt{x_3 \xi_3} = 0$$

folgenden homogenen Gleichung vierten Grades. So ergiebt sich die Identität

$$x_1^2 \xi_1^2 + x_2^2 \xi_2^2 - x_3^2 \xi_3^2 - 2 x_2 \xi_2 x_3 \xi_3 - 2 x_3 \xi_3 x_1 \xi_1 - 2 x_1 \xi_1 x_2 \xi_2$$
$$= h_1^2 p_1^2 q_1^2 + h_2^2 p_2^2 q_2^2 + h_3^2 p_3^2 q_3^2 - 2 h_2 h_3 p_2 q_2 p_3 q_3 - 2 h_3 h_1 p_3 q_3 p_1 q_1 - 2 h_1 h_2 p_1 q_1 p_2 q_2.$$

Hierin sind ξ_1, ξ_2, ξ_3, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 zu betrachten als bekannte lineare Functionen von x_1, x_2, x_3, während die Constanten h_1, h_2, h_3 gesucht sind. Die Werthe dieser letzteren müssen vollständig bestimmt sein bis auf ein allen dreien gemeinschaftliches Vorzeichen. Man erhält die Werthe derselben, wenn man x_1, x_2, x_3, ξ_1, ξ_2, ξ_3, q_1, q_2, q_3 als lineare homogene Functionen von p_1, p_2, p_3 ausdrückt. Setzt man dann $p_2 = p_3 = 0$, ferner $p_3 = p_1 = 0$, zuletzt $p_1 = p_2 = 0$, so ergeben sich aus obiger identischer Gleichung die Werthe von h_1^2, h_2^2, h_3^2. Setzt man, nachdem diese bestimmt sind, $p_1 = 0$, dann $p_2 = 0$, zuletzt $p_3 = 0$, so erhält man ebenso die drei Producte $h_2 h_3$, $h_3 h_1$, $h_1 h_2$, wodurch die Bestimmung der Vorzeichen vervollständigt wird.

---

*) *Aronhold,* Monatsberichte der Berliner Academie 1864. p. 499.

§. 16. Die Moduln.

Durch die Untersuchungen des vorhergehenden Paragraphen ist die algebraische Gleichung, welche den betrachteten Functionen zu Grunde liegt, zurückgeführt auf eine Normalform

$$\sqrt{x_1\xi_1}+\sqrt{x_2\xi_2}+\sqrt{x_3\xi_3} = 0,$$

welche nur noch von sechs unbestimmten Constanten abhängt, nämlich den $a_1, a_2, a_3, a_1', a_2', a_3'$. Diese sechs Constanten werden die *Moduln der Classe* von Functionen genannt, die aus unserer algebraischen Gleichung abgeleitet wird. Wir werden sie zum Unterschied von den ϑ-Moduln als die *Classenmoduln* bezeichnen, und unter diesem Namen, der Uebereinstimmung halber, auch die Grössen a_1'', a_2'', a_3'' begreifen, welche zur genaueren Präcisirung *abgeleitete Moduln* genannt werden können. Der Zweck des Folgenden ist, Gleichungen aufzustellen zwischen den ϑ-Moduln einerseits und den Classenmoduln andererseits, vermöge deren die einen durch die anderen bestimmt werden können.

Das Mittel hierzu bieten uns die Formeln des §. 13, in welchen die Quadrate der *Abelschen* Functionen linear ausgedrückt waren durch die in den Normalintegralen erster Gattung vorkommenden Functionen φ.

Wir behalten hinsichtlich der Charakteristiken die Bezeichnung des vorigen Paragraphen bei, wonach $(\sqrt{x_1}) = (\beta_1)$, $(\sqrt{x_2}) = (\beta_2)$, $(\sqrt{x_3}) = (\beta_3)$ war, und fügen nur noch zur Abkürzung hinzu:

$(\sqrt{\xi_1}) = (p+\beta_2+\beta_3) = (\beta_1')$, $(\sqrt{\xi_2}) = (p+\beta_3+\beta_1) = (\beta_2')$, $(\sqrt{\xi_3}) = (p+\beta_1+\beta_2) = (\beta_3')$,
so dass wir, wie aus den Gruppen (5.) §. 15, oder auch direct aus den Sätzen des §. 4 zu ersehen ist, zwei vollständige Systeme ungerader Charakteristiken haben:

$$(\beta_1),\ (\beta_2),\ (\beta_3),\ (\beta_4),\ (\beta_5),\ (\beta_6),\ (\beta_7),$$
$$(\beta_1'),\ (\beta_2'),\ (\beta_3'),\ (\beta_4),\ (\beta_5),\ (\beta_6),\ (\beta_7),$$

von denen das erste zu (p) gehört, das zweite zu

$$(p') = (\beta_1+\beta_2+\beta_3).$$

Hiernach ergiebt die Formel (2.) §. 13:

$$(1.)\quad \begin{cases} x_1 = a_1 \sum\limits_{i=1}^{i=3} \vartheta_i'|\beta_1|\varphi_i, & \xi_1 = b_1 \sum\limits_{i=1}^{i=3} \vartheta_i'|\beta_1'|\varphi_i, \\ x_2 = a_2 \sum\limits_{i=1}^{i=3} \vartheta_i'|\beta_2|\varphi_i, & \xi_2 = b_2 \sum\limits_{i=1}^{i=3} \vartheta_i'|\beta_2'|\varphi_i, \\ x_3 = a_3 \sum\limits_{i=1}^{i=3} \vartheta_i'|\beta_3|\varphi_i, & \xi_3 = b_3 \sum\limits_{i=1}^{i=3} \vartheta_i'|\beta_3'|\varphi_i, \end{cases}$$

wenn a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 noch zu bestimmende Constanten bedeuten. Ebenso haben wir, da (β_4) die Charakteristik ist von

$$\sqrt{x_1+x_2+x_3} = \sqrt{-\xi_1-\xi_2-\xi_3},$$

$$x_1+x_2+x_3 = -\xi_1-\xi_2-\xi_3 = h\sum_1^3 \vartheta_i'\{\beta_4\}\varphi_i, \tag{2.}$$

worin h ebenfalls ein unbestimmter Coëfficient ist. Aus (1.) und (2.) folgen nun weiter die Gleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases} \sum_1^3{}_\nu\, a_\nu \vartheta_1'\{\beta_\nu\} = h\vartheta_1'\{\beta_4\}, & \sum_1^3{}_\nu\, b_\nu \vartheta_1'\{\beta_\nu'\} = -h\vartheta_1'\{\beta_4\}, \\ \sum_1^3{}_\nu\, a_\nu \vartheta_2'\{\beta_\nu\} = h\vartheta_2'\{\beta_4\}, & \sum_1^3{}_\nu\, b_\nu \vartheta_2'\{\beta_\nu'\} = -h\vartheta_2'\{\beta_4\}, \\ \sum_1^3{}_\nu\, a_\nu \vartheta_3'\{\beta_\nu\} = h\vartheta_3'\{\beta_4\}, & \sum_1^3{}_\nu\, b_\nu \vartheta_3'\{\beta_\nu'\} = -h\vartheta_3'\{\beta_4\}. \end{cases}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen ergeben sich die Constanten a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, abgesehen von einem allen gemeinschaftlichen Factor h, ausgedrückt durch die $\vartheta_1'\{\beta_1\}$ etc., und wenn man diese Ausdrücke in (1.) substituirt, so erhält man die Functionen φ_1, φ_2, φ_3 ausgedrückt durch die Quadrate der *Abelschen* Functionen x_1, x_2, x_3, wiederum abgesehen von einem constanten Factor. Setzt man also die Moduln der ϑ-Functionen als bekannt voraus, so kann man hiernach die Verhältnisse der Functionen $\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3$ finden. Für die Bestimmung eines allen dreien gemeinschaftlichen Factors werden wir weiter unten Hülfsmittel kennen lernen.

Um die angedeuteten Operationen auszuführen, setzen wir, wie schon oben, zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} \vartheta_1'\{\beta_1\}, & \vartheta_1'\{\beta_2\}, & \vartheta_1'\{\beta_3\} \\ \vartheta_2'\{\beta_1\}, & \vartheta_2'\{\beta_2\}, & \vartheta_2'\{\beta_3\} \\ \vartheta_3'\{\beta_1\}, & \vartheta_3'\{\beta_2\}, & \vartheta_3'\{\beta_3\} \end{vmatrix} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3],$$

wonach man durch Auflösung von (3.) erhält:

$$(4.)\quad \begin{cases} [\beta_1, \beta_2, \beta_3]\, a_1 = h[\beta_4, \beta_2, \beta_3]; & [\beta_1', \beta_2', \beta_3']\, b_1 = -h[\beta_4, \beta_2', \beta_3'], \\ [\beta_1, \beta_2, \beta_3]\, a_2 = h[\beta_1, \beta_4, \beta_3]; & [\beta_1', \beta_2', \beta_3']\, b_2 = -h[\beta_1', \beta_4, \beta_3'], \\ [\beta_1, \beta_2, \beta_3]\, a_3 = h[\beta_1, \beta_2, \beta_4]; & [\beta_1', \beta_2', \beta_3']\, b_3 = -h[\beta_1', \beta_2', \beta_4]. \end{cases}$$

Die hieraus für a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 folgenden Ausdrücke lassen sich nach §. 6, 3 darstellen durch die geraden ϑ-Functionen für die Werthe Null der Argumente. Man erhält nach jenen Formeln

$$-a_1 = (-1)^{\Sigma(\mu^{(1)}+\mu^{(4)})(\nu^{(5)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})}\, h\, \frac{\vartheta\{\beta_1+\beta_6+\beta_7\}\,\vartheta\{\beta_1+\beta_7+\beta_5\}\,\vartheta\{\beta_1+\beta_5+\beta_6\}}{\vartheta\{\beta_4+\beta_6+\beta_7\}\,\vartheta\{\beta_4+\beta_7+\beta_5\}\,\vartheta\{\beta_4+\beta_5+\beta_6\}},$$

$$-a_2 = (-1)^{\Sigma(\mu^{(2)}+\mu^{(4)})(\nu^{(5)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})}\, h\, \frac{\vartheta\{\beta_2+\beta_6+\beta_7\}\,\vartheta\{\beta_2+\beta_7+\beta_5\}\,\vartheta\{\beta_2+\beta_5+\beta_6\}}{\vartheta\{\beta_4+\beta_6+\beta_7\}\,\vartheta\{\beta_4+\beta_7+\beta_5\}\,\vartheta\{\beta_4+\beta_5+\beta_6\}},$$

$$-a_3 = (-1)^{\Sigma(\mu^{(3)}+\mu^{(4)})(\nu^{(5)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})}\, h\, \frac{\vartheta\{\beta_3+\beta_6+\beta_7\}\,\vartheta\{\beta_3+\beta_7+\beta_5\}\,\vartheta\{\beta_3+\beta_5+\beta_6\}}{\vartheta\{\beta_4+\beta_6+\beta_7\}\,\vartheta\{\beta_4+\beta_7+\beta_5\}\,\vartheta\{\beta_4+\beta_5+\beta_6\}}.$$

Hierin ist $(\beta_i) = \begin{pmatrix} \nu_1^{(i)} & \nu_2^{(i)} & \nu_3^{(i)} \\ \mu_1^{(i)} & \mu_2^{(i)} & \mu_3^{(i)} \end{pmatrix}$. Man erhält daraus b_1, b_2, b_3, wenn man h durch $-h$, (β_1), (β_2), (β_3) durch (β_1'), (β_2'), (β_3') ersetzt. Ist dann $(\beta_i') = \begin{pmatrix} \nu_1'^{(i)} & \nu_2'^{(i)} & \nu_3'^{(i)} \\ \mu_1'^{(i)} & \mu_2'^{(i)} & \mu_3'^{(i)} \end{pmatrix}$, und substituirt man noch

$$(\beta_1') = (p+\beta_2+\beta_3);\quad (\beta_2') = (p+\beta_3+\beta_1);\quad (\beta_3') = (p+\beta_3+\beta_1).$$

so folgt:

$$(-1)^{\Sigma(\mu'^{(1)}+\mu^{(4)})(\nu^{(5)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})}\, b_1 = h\, \frac{\vartheta\{\beta_1'+\beta_6+\beta_7\}\,\vartheta\{\beta_1'+\beta_7+\beta_5\}\,\vartheta\{\beta_1'+\beta_5+\beta_6\}}{\vartheta\{\beta_4+\beta_6+\beta_7\}\,\vartheta\{\beta_4+\beta_7+\beta_5\}\,\vartheta\{\beta_4+\beta_5+\beta_6\}}$$

$$= h\, \frac{\vartheta\{\beta_1+\beta_4+\beta_5\}\,\vartheta\{\beta_1+\beta_4+\beta_6\}\,\vartheta\{\beta_1+\beta_4+\beta_7\}}{\vartheta\{\beta_4+\beta_6+\beta_7\}\,\vartheta\{\beta_4+\beta_7+\beta_5\}\,\vartheta\{\beta_4+\beta_5+\beta_6\}}$$

und analog die Ausdrücke für b_2, b_3. Nehmen wir nach unserm Beispiel

$$(\beta_1) = \begin{pmatrix}111\\111\end{pmatrix},\quad (\beta_2) = \begin{pmatrix}001\\011\end{pmatrix},\quad (\beta_3) = \begin{pmatrix}011\\001\end{pmatrix},\quad (\beta_4) = \begin{pmatrix}101\\100\end{pmatrix};\quad (\beta_5) = \begin{pmatrix}100\\101\end{pmatrix},$$

$$(\beta_6) = \begin{pmatrix}110\\010\end{pmatrix};\quad (\beta_7) = \begin{pmatrix}010\\110\end{pmatrix};\quad (\beta_1') = \begin{pmatrix}010\\010\end{pmatrix};\quad (\beta_2') = \begin{pmatrix}100\\110\end{pmatrix};\quad (\beta_3') = \begin{pmatrix}110\\100\end{pmatrix},$$

so erhalten wir aus diesen Formeln

$$a_1 = h\, \frac{\vartheta\begin{pmatrix}011\\011\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}001\\100\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}101\\000\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}001\\000\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}011\\111\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}111\\011\end{pmatrix}}, \qquad b_1 = -h\, \frac{\vartheta\begin{pmatrix}110\\110\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}100\\001\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}000\\101\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}001\\000\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}011\\111\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}111\\011\end{pmatrix}},$$

$$a_2 = -h\, \frac{\vartheta\begin{pmatrix}101\\111\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}111\\000\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}011\\100\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}001\\000\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}011\\111\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}111\\011\end{pmatrix}}, \qquad b_2 = h\, \frac{\vartheta\begin{pmatrix}000\\010\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}010\\101\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}110\\001\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}001\\000\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}011\\111\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}111\\011\end{pmatrix}},$$

$$a_3 = h\, \frac{\vartheta\begin{pmatrix}111\\101\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}101\\010\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}001\\110\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}001\\000\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}011\\111\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}111\\011\end{pmatrix}}; \qquad b_3 = -h\, \frac{\vartheta\begin{pmatrix}010\\000\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}000\\111\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}100\\011\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}001\\000\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}011\\111\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}111\\011\end{pmatrix}}.$$

Gehen wir nun über zur Betrachtung der Function $\sqrt{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}$ mit der Charakteristik (β_5). Bezeichnen wir mit k einen neuen unbestimmten Coëfficienten, so ergiebt sich wie oben:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = -\frac{\xi_1}{\alpha_1} - \frac{\xi_2}{\alpha_2} - \frac{\xi_3}{\alpha_3} = k\, h \sum_1^3{}_i\, \vartheta_i\{\beta_5\}\, \varphi_i$$

und daraus, mit Rücksicht auf die Formeln (1.)

$$
(5.)\quad \begin{cases}
\sum_1^3{}_\nu\, \alpha_\nu a_\nu \vartheta'_1\{\beta_\nu\} = hk\vartheta'_1\{\beta_5\}, & \sum_1^3{}_\nu \dfrac{b_\nu}{\alpha_\nu}\vartheta'_1\{\beta'_\nu\} = -hk\vartheta'_1\{\beta_5\}, \\
\sum_1^3{}_\nu\, \alpha_\nu a_\nu \vartheta'_2\{\beta_\nu\} = hk\vartheta'_2\{\beta_5\}, & \sum_1^3{}_\nu \dfrac{b_\nu}{\alpha_\nu}\vartheta'_2\{\beta'_\nu\} = -hk\vartheta'_2\{\beta_5\}, \\
\sum_1^3{}_\nu\, \alpha_\nu a_\nu \vartheta'_3\{\beta_\nu\} = hk\vartheta'_3\{\beta_5\}, & \sum_1^3{}_\nu \dfrac{b_\nu}{\alpha_\nu}\vartheta'_3\{\beta'_\nu\} = -hk\vartheta'_3\{\beta_5\}.
\end{cases}
$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen ergiebt sich

$$
a_1\alpha_1[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = hk[\beta_5, \beta_2, \beta_3]; \qquad \frac{b_1}{\alpha_1}[\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3] = -hk[\beta_5, \beta'_2, \beta'_3].
$$

Ersetzt man hierin a_1, b_1 durch ihre Werthe aus (4.) und bildet die analogen Gleichungen für α_2, α_3, so ergiebt sich

$$
(6.)\quad \begin{cases}
\alpha_1 = k\dfrac{[\beta_5, \beta_2, \beta_3]}{[\beta_4, \beta_2, \beta_3]}, & \dfrac{1}{\alpha_1} = k\dfrac{[\beta_5, \beta'_2, \beta'_3]}{[\beta_4, \beta'_2, \beta'_3]}, \\
\alpha_2 = k\dfrac{[\beta_1, \beta_5, \beta_3]}{[\beta_1, \beta_4, \beta_3]}, & \dfrac{1}{\alpha_2} = k\dfrac{[\beta'_1, \beta_5, \beta'_3]}{[\beta'_1, \beta_4, \beta'_3]}, \\
\alpha_3 = k\dfrac{[\beta_1, \beta_2, \beta_5]}{[\beta_1, \beta_2, \beta_4]}, & \dfrac{1}{\alpha_3} = k\dfrac{[\beta'_1, \beta'_2, \beta_5]}{[\beta'_1, \beta'_2, \beta_4]}.
\end{cases}
$$

Durch Multiplication je zweier entsprechender dieser Gleichungen erhält man k bis auf das Vorzeichen, welches der Natur der Sache nach unbestimmt bleiben muss:

$$
(7.)\quad k^2 = \frac{[\beta_4,\beta_2,\beta_3][\beta_4,\beta'_2,\beta'_3]}{[\beta_5,\beta_2,\beta_3][\beta_5,\beta'_2,\beta_3]} = \frac{[\beta_1,\beta_4,\beta_3][\beta'_1,\beta_4,\beta'_3]}{[\beta_1,\beta_5,\beta_3][\beta'_1,\beta_5,\beta'_3]} = \frac{[\beta_1,\beta_2,\beta_4][\beta'_1,\beta'_2,\beta'_4]}{[\beta_1,\beta_2,\beta_5][\beta'_1,\beta'_2,\beta_5]}.
$$

Aus dem vorstehenden Formelsystem ergeben sich noch zwei andere Systeme für α'_1, α'_2, α'_3; α''_1, α''_2, α''_3 wenn man (β_5) resp. mit (β_6) und (β_7) vertauscht. Alle diese Formeln lassen sich sehr elegant durch die Werthe der geraden ϑ-Functionen für die Werthe Null der Argumente darstellen, wenn man sich der Formeln (3.) §. 6 bedient. Man erhält zunächst aus (6.)

$$
(8.)\quad \begin{cases}
\alpha_1 = -k(-1)^{\Sigma(\mu^{(4)}+\mu^{(5)})(\nu^{(1)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})} \dfrac{\vartheta\{\beta_4+\beta_6+\beta_7\}\,\vartheta\{\beta_4+\beta_6+\beta_1\}\,\vartheta\{\beta_4+\beta_7+\beta_1\}}{\vartheta\{\beta_5+\beta_6+\beta_7\}\,\vartheta\{\beta_5+\beta_6+\beta_1\}\,\vartheta\{\beta_5+\beta_7+\beta_1\}}, \\
\alpha_2 = -k(-1)^{\Sigma(\mu^{(4)}+\mu^{(5)})(\nu^{(2)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})} \dfrac{\vartheta\{\beta_4+\beta_6+\beta_7\}\,\vartheta\{\beta_4+\beta_6+\beta_2\}\,\vartheta\{\beta_4+\beta_7+\beta_2\}}{\vartheta\{\beta_5+\beta_6+\beta_7\}\,\vartheta\{\beta_5+\beta_6+\beta_2\}\,\vartheta\{\beta_5+\beta_7+\beta_2\}}, \\
\alpha_3 = -k(-1)^{\Sigma(\mu^{(4)}+\mu^{(5)})(\nu^{(3)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})} \dfrac{\vartheta\{\beta_4+\beta_6+\beta_7\}\,\vartheta\{\beta_4+\beta_6+\beta_3\}\,\vartheta\{\beta_4+\beta_7+\beta_3\}}{\vartheta\{\beta_5+\beta_6+\beta_7\}\,\vartheta\{\beta_5+\beta_6+\beta_3\}\,\vartheta\{\beta_5+\beta_7+\beta_3\}}.
\end{cases}
$$

Ebenso erhält man

$$(9.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_1} = k(-1)^{\Sigma\mu^{(1)}(\nu^{(4)}+\nu^{(5)})}\dfrac{\vartheta\{\beta_4+\beta_6+\beta_7\}\vartheta\{\beta_1+\beta_5+\beta_7\}\vartheta\{\beta_1+\beta_5+\beta_6\}}{\vartheta\{\beta_5+\beta_6+\beta_7\}\vartheta\{\beta_1+\beta_4+\beta_7\}\vartheta\{\beta_1+\beta_4+\beta_6\}}, \\ \dfrac{1}{\alpha_2} = k(-1)^{\Sigma\mu^{(2)}(\nu^{(4)}+\nu^{(5)})}\dfrac{\vartheta\{\beta_4+\beta_6+\beta_7\}\vartheta\{\beta_2+\beta_5+\beta_7\}\vartheta\{\beta_2+\beta_5+\beta_6\}}{\vartheta\{\beta_5+\beta_6+\beta_7\}\vartheta\{\beta_2+\beta_4+\beta_7\}\vartheta\{\beta_2+\beta_4+\beta_6\}}, \\ \dfrac{1}{\alpha_3} = k(-1)^{\Sigma\mu^{(3)}(\nu^{(4)}+\nu^{(5)})}\dfrac{\vartheta\{\beta_4+\beta_6+\beta_7\}\vartheta\{\beta_3+\beta_5+\beta_7\}\vartheta\{\beta_3+\beta_5+\beta_6\}}{\vartheta\{\beta_5+\beta_6+\beta_7\}\vartheta\{\beta_3+\beta_4+\beta_7\}\vartheta\{\beta_3+\beta_4+\beta_6\}}. \end{cases}$$

Hieraus erhält man durch Multiplication zweier entsprechender Gleichungen

$$k^2 = (-1)^{\Sigma(\mu^{(4)}+\mu^{(5)})(\nu^{(4)}+\nu^{(5)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})}\frac{\vartheta^2\{\beta_5+\beta_6+\beta_7\}}{\vartheta^2\{\beta_4+\beta_6+\beta_7\}},$$

woraus die Wurzel gezogen werden kann:

$$k = e^{\frac{i\pi}{2}\Sigma(\mu^{(4)}+\mu^{(5)})(\nu^{(4)}+\nu^{(5)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})}\frac{\vartheta\{\beta_5+\beta_6+\beta_7\}}{\vartheta\{\beta_4+\beta_6+\beta_7\}}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(10.)\quad \begin{cases} \varepsilon = e^{-\frac{i\pi}{2}\Sigma(\mu^{(4)}+\mu^{(5)})(\nu^{(4)}+\nu^{(5)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})}, \quad \varepsilon' = e^{-\frac{i\pi}{2}\Sigma(\mu^{(4)}+\mu^{(6)})(\nu^{(4)}+\nu^{(5)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})}, \\ \varepsilon'' = e^{-\frac{i\pi}{2}\Sigma(\mu^{(4)}+\mu^{(7)})(\nu^{(4)}+\nu^{(5)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})}, \end{cases}$$

so dass ε, ε', ε'' Potenzen von i sind, so ergiebt sich aus (9.) und den analogen Systemen

$$(11.)\quad \begin{cases} \alpha_1 = (-1)^{\Sigma\mu^{(1)}(\nu^{(4)}+\nu^{(5)})}\varepsilon\,\dfrac{\vartheta\{\beta_1+\beta_4+\beta_6\}\vartheta\{\beta_1+\beta_4+\beta_7\}}{\vartheta\{\beta_1+\beta_5+\beta_6\}\vartheta\{\beta_1+\beta_5+\beta_7\}}, \\ \alpha_2 = (-1)^{\Sigma\mu^{(2)}(\nu^{(4)}+\nu^{(5)})}\varepsilon\,\dfrac{\vartheta\{\beta_2+\beta_4+\beta_6\}\vartheta\{\beta_2+\beta_4+\beta_7\}}{\vartheta\{\beta_2+\beta_5+\beta_6\}\vartheta\{\beta_2+\beta_5+\beta_7\}}, \\ \alpha_3 = (-1)^{\Sigma\mu^{(3)}(\nu^{(4)}+\nu^{(6)})}\varepsilon\,\dfrac{\vartheta\{\beta_3+\beta_4+\beta_6\}\vartheta\{\beta_3+\beta_4+\beta_7\}}{\vartheta\{\beta_3+\beta_5+\beta_6\}\vartheta\{\beta_3+\beta_5+\beta_7\}}, \\ \alpha_1' = (-1)^{\Sigma\mu^{(1)}(\nu^{(4)}+\nu^{(6)})}\varepsilon'\,\dfrac{\vartheta\{\beta_1+\beta_4+\beta_7\}\vartheta\{\beta_1+\beta_1+\beta_5\}}{\vartheta\{\beta_1+\beta_6+\beta_7\}\vartheta\{\beta_1+\beta_6+\beta_5\}}, \\ \alpha_2' = (-1)^{\Sigma\mu^{(2)}(\nu^{(4)}+\nu^{(6)})}\varepsilon'\,\dfrac{\vartheta\{\beta_2+\beta_4+\beta_7\}\vartheta\{\beta_2+\beta_4+\beta_5\}}{\vartheta\{\beta_2+\beta_6+\beta_7\}\vartheta\{\beta_2+\beta_6+\beta_5\}}, \\ \alpha_3' = (-1)^{\Sigma\mu^{(3)}(\nu^{(4)}+\nu^{(6)})}\varepsilon'\,\dfrac{\vartheta\{\beta_3+\beta_4+\beta_7\}\vartheta\{\beta_3+\beta_4+\beta_5\}}{\vartheta\{\beta_3+\beta_6+\beta_7\}\vartheta\{\beta_3+\beta_6+\beta_5\}}, \\ \alpha_1'' = (-1)^{\Sigma\mu^{(1)}(\nu^{(4)}+\nu^{(7)})}\varepsilon''\,\dfrac{\vartheta\{\beta_1+\beta_4+\beta_5\}\vartheta\{\beta_1+\beta_4+\beta_6\}}{\vartheta\{\beta_1+\beta_7+\beta_5\}\vartheta\{\beta_1+\beta_7+\beta_6\}}, \\ \alpha_2'' = (-1)^{\Sigma\mu^{(2)}(\nu^{(4)}+\nu^{(7)})}\varepsilon''\,\dfrac{\vartheta\{\beta_2+\beta_4+\beta_5\}\vartheta\{\beta_2+\beta_4+\beta_6\}}{\vartheta\{\beta_2+\beta_7+\beta_5\}\vartheta\{\beta_2+\beta_7+\beta_6\}}, \\ \alpha_3'' = (-1)^{\Sigma\mu^{(3)}(\nu^{(4)}+\nu^{(7)})}\varepsilon''\,\dfrac{\vartheta\{\beta_3+\beta_4+\beta_5\}\vartheta\{\beta_3+\beta_4+\beta_6\}}{\vartheta\{\beta_3+\beta_7+\beta_5\}\vartheta\{\beta_3+\beta_7+\beta_6\}}. \end{cases}$$

Nach unserer besonderen Annahme lauten diese Formeln:

$$
(11'.)\quad \left\{
\begin{aligned}
\alpha_1 &= i\frac{\vartheta\binom{100}{001}\vartheta\binom{000}{101}}{\vartheta\binom{101}{000}\vartheta\binom{001}{100}}, &
\alpha_1' &= i\frac{\vartheta\binom{000}{101}\vartheta\binom{110}{110}}{\vartheta\binom{011}{011}\vartheta\binom{101}{000}}, &
\alpha_1'' &= -\frac{\vartheta\binom{110}{110}\vartheta\binom{100}{001}}{\vartheta\binom{001}{100}\vartheta\binom{011}{011}}, \\
\alpha_2 &= i\frac{\vartheta\binom{010}{101}\vartheta\binom{110}{001}}{\vartheta\binom{011}{100}\vartheta\binom{111}{000}}, &
\alpha_2' &= i\frac{\vartheta\binom{110}{001}\vartheta\binom{000}{010}}{\vartheta\binom{101}{111}\vartheta\binom{011}{100}}, &
\alpha_2'' &= \frac{\vartheta\binom{000}{010}\vartheta\binom{010}{101}}{\vartheta\binom{111}{000}\vartheta\binom{101}{111}}, \\
\alpha_3 &= i\frac{\vartheta\binom{000}{111}\vartheta\binom{100}{011}}{\vartheta\binom{001}{110}\vartheta\binom{101}{010}}, &
\alpha_3' &= i\frac{\vartheta\binom{100}{011}\vartheta\binom{010}{000}}{\vartheta\binom{111}{101}\vartheta\binom{001}{110}}, &
\alpha_3'' &= \frac{\vartheta\binom{010}{000}\vartheta\binom{000}{111}}{\vartheta\binom{101}{010}\vartheta\binom{111}{101}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Aus diesen Gleichungen leitet man sofort ein weiteres System ab, welches für den allgemeinen Fall durch Eine Gleichung charakterisirt sein mag:

$$
(12.)\qquad \frac{\alpha_1'\alpha_1''}{\alpha_1} = (-1)^{\Sigma\mu^{(1)}(\nu^{(4)}+\nu^{(5)}+\nu^{(6)}+\nu^{(7)})}\,\frac{\varepsilon'\varepsilon''}{\varepsilon}\,\frac{\vartheta^2\{\beta_1+\beta_4+\beta_5\}}{\vartheta^2\{\beta_1+\beta_6+\beta_7\}},
$$

und welches sich nach unserer besonderen Annahme folgendermaassen gestaltet:

$$
(12'.)\quad \left\{
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\alpha_1'\alpha_1''}{\alpha_1}} &= i\frac{\vartheta\binom{110}{110}}{\vartheta\binom{011}{011}}, &
\sqrt{\frac{\alpha_2'\alpha_2''}{\alpha_2}} &= \frac{\vartheta\binom{000}{010}}{\vartheta\binom{101}{111}}, &
\sqrt{\frac{\alpha_3'\alpha_3''}{\alpha_3}} &= \frac{\vartheta\binom{010}{000}}{\vartheta\binom{111}{101}}, \\
\sqrt{\frac{\alpha_1''\alpha_1}{\alpha_1'}} &= i\frac{\vartheta\binom{100}{001}}{\vartheta\binom{001}{100}}, &
\sqrt{\frac{\alpha_2''\alpha_2}{\alpha_2}} &= \frac{\vartheta\binom{010}{101}}{\vartheta\binom{111}{000}}, &
\sqrt{\frac{\alpha_3''\alpha_3}{\alpha_3}} &= \frac{\vartheta\binom{000}{111}}{\vartheta\binom{101}{010}}, \\
\sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_1'}{\alpha_1''}} &= \frac{\vartheta\binom{000}{101}}{\vartheta\binom{101}{000}}, &
\sqrt{\frac{\alpha_2\alpha_2'}{\alpha_2''}} &= i\frac{\vartheta\binom{110}{001}}{\vartheta\binom{011}{100}}, &
\sqrt{\frac{\alpha_3\alpha_3'}{\alpha_3''}} &= i\frac{\vartheta\binom{100}{011}}{\vartheta\binom{001}{110}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Durch die Gleichungen (11.) (11′.) sind die Classenmoduln in überraschend einfacher Weise ausgedrückt durch die ϑ-Moduln. Geht man daher von dem Gesichtspunkt aus, dass die ϑ-Moduln beliebig gegeben seien, so berechnet man durch diese Gleichungen in völlig eindeutiger Weise durch gut convergente Reihen die Classenmoduln. Diese Anschauungsweise ist hier zulässig, weil die Anzahl der Classenmoduln dieselbe ist wie die der ϑ-Moduln.

Setzt man aber die Classenmoduln als gegeben voraus, so kann man durch ein Näherungsverfahren aus sechs der Gleichungen (12.) (12′.) die

ϑ-Moduln berechnen indem man zuerst Näherungswerthe für die letzteren sucht und diese dann mittest der Gleichungen (12.) (12′.) corrigirt. Man hat also, um die ϑ-Moduln aus den Classenmoduln zu berechnen, ein System von sechs transcendenten Gleichungen aufzulösen, welche, wie aus der Theorie der unendlich vielen Formen der ϑ-Function bekannt ist, unendlich viele gleichberechtigte Lösungen zulassen.

Mittels der Relation III. §. 6 leitet man aus (11.) noch folgende Formeln her:

$$(13.)\quad (1-\alpha_2\alpha_3) = (-1)^{\Sigma(\mu^{(1)}+\mu^{(5)})(\nu+\nu^{(4)})} \frac{\vartheta\{\beta_1+\beta_2+\beta_6\}\,\vartheta\{\beta_1+\beta_2+\beta_7\}\,\vartheta\{\beta_1+\beta_3+\beta_6\}\,\vartheta\{\beta_1+\beta_3+\beta_7\}}{\vartheta\{\beta_5+\beta_2+\beta_6\}\,\vartheta\{\beta_5+\beta_2+\beta_7\}\,\vartheta\{\beta_5+\beta_3+\beta_6\}\,\vartheta\{\beta_5+\beta_3+\beta_7\}};$$

und aus IV. §. 6:

$$(14.)\quad (\alpha_2-\alpha_3) = (-1)^{\Sigma[\mu^{(5)}\nu^{(4)}+(\nu^{(5)}+\nu^{(2)})(\mu^{(5)}+\mu^{(3)})]}\,\varepsilon\, \frac{\vartheta\{\beta_2+\beta_3+\beta_6\}\,\vartheta\{\beta_2+\beta_3+\beta_7\}\,\vartheta\{\beta_4+\beta_5+\beta_6\}\,\vartheta\{\beta_4+\beta_5+\beta_7\}}{\vartheta\{\beta_2+\beta_5+\beta_6\}\,\vartheta\{\beta_2+\beta_5+\beta_7\}\,\vartheta\{\beta_3+\beta_5+\beta_6\}\,\vartheta\{\beta_3+\beta_5+\beta_7\}}.$$

Jede dieser Formeln repräsentirt neun verschiedene, die man erhält, wenn man zunächst β_1, β_2, β_3 und zugleich α_1, α_2, α_3 cyklisch vertauscht, dann β_5, β_6, β_7 und zugleich α, α', α''. Wir stellen diese Formeln wieder für unsere besondere Annahme zusammen:

$$(1-\alpha_2\alpha_3) = \frac{\vartheta\binom{000}{110}\vartheta\binom{100}{010}\vartheta\binom{010}{100}\vartheta\binom{110}{000}}{\vartheta\binom{011}{100}\vartheta\binom{111}{000}\vartheta\binom{001}{110}\vartheta\binom{101}{010}},\quad 1-\alpha_2'\alpha_3' = \frac{\vartheta\binom{100}{010}\vartheta\binom{010}{001}\vartheta\binom{110}{000}\vartheta\binom{000}{011}}{\vartheta\binom{101}{111}\vartheta\binom{011}{100}\vartheta\binom{111}{101}\vartheta\binom{001}{110}};$$

$$(1-\alpha_3\alpha_1) = \frac{\vartheta\binom{100}{000}\vartheta\binom{000}{100}\vartheta\binom{000}{110}\vartheta\binom{100}{010}}{\vartheta\binom{001}{110}\vartheta\binom{101}{010}\vartheta\binom{101}{000}\vartheta\binom{001}{100}},\quad 1-\alpha_3'\alpha_1' = \frac{\vartheta\binom{000}{100}\vartheta\binom{110}{111}\vartheta\binom{100}{010}\vartheta\binom{010}{001}}{\vartheta\binom{111}{101}\vartheta\binom{001}{110}\vartheta\binom{011}{011}\vartheta\binom{101}{000}},$$

$$(1-\alpha_1\alpha_2) = \frac{\vartheta\binom{010}{100}\vartheta\binom{110}{000}\vartheta\binom{100}{000}\vartheta\binom{000}{100}}{\vartheta\binom{101}{000}\vartheta\binom{001}{100}\vartheta\binom{011}{100}\vartheta\binom{111}{000}},\quad 1-\alpha_1'\alpha_2' = \frac{\vartheta\binom{110}{000}\vartheta\binom{000}{011}\vartheta\binom{000}{100}\vartheta\binom{110}{111}}{\vartheta\binom{011}{011}\vartheta\binom{101}{000}\vartheta\binom{101}{111}\vartheta\binom{011}{100}};$$

$$1-\alpha_2''\alpha_3'' = -\frac{\vartheta\binom{010}{001}\vartheta\binom{000}{110}\vartheta\binom{000}{011}\vartheta\binom{010}{100}}{\vartheta\binom{111}{000}\vartheta\binom{101}{111}\vartheta\binom{101}{010}\vartheta\binom{111}{101}},\quad \alpha_2-\alpha_3 = -i\,\frac{\vartheta\binom{100}{000}\vartheta\binom{000}{100}\vartheta\binom{111}{011}\vartheta\binom{011}{111}}{\vartheta\binom{011}{100}\vartheta\binom{111}{000}\vartheta\binom{001}{110}\vartheta\binom{101}{010}},$$

$$1-\alpha_3''\alpha_1'' = \frac{\vartheta\binom{110}{111}\vartheta\binom{100}{000}\vartheta\binom{010}{001}\vartheta\binom{000}{110}}{\vartheta\binom{101}{010}\vartheta\binom{111}{101}\vartheta\binom{001}{100}\vartheta\binom{011}{011}};\quad \alpha_3-\alpha_1 = i\,\frac{\vartheta\binom{010}{100}\vartheta\binom{110}{000}\vartheta\binom{111}{011}\vartheta\binom{011}{111}}{\vartheta\binom{001}{110}\vartheta\binom{101}{010}\vartheta\binom{101}{000}\vartheta\binom{001}{100}},$$

$$1-\alpha_1''\alpha_2'' = \frac{\vartheta\binom{000}{011}\vartheta\binom{010}{100}\vartheta\binom{110}{111}\vartheta\binom{100}{000}}{\vartheta\binom{001}{100}\vartheta\binom{011}{011}\vartheta\binom{111}{000}\vartheta\binom{101}{111}};\quad \alpha_1-\alpha_2 = i\,\frac{\vartheta\binom{000}{110}\vartheta\binom{100}{010}\vartheta\binom{111}{011}\vartheta\binom{011}{111}}{\vartheta\binom{101}{000}\vartheta\binom{001}{100}\vartheta\binom{011}{100}\vartheta\binom{111}{000}}.$$

$$\alpha_2'-\alpha_3' = -i\,\frac{\vartheta\binom{000}{100}\vartheta\binom{110}{111}\vartheta\binom{001}{000}\vartheta\binom{111}{011}}{\vartheta\binom{101}{111}\vartheta\binom{011}{100}\vartheta\binom{111}{101}\vartheta\binom{001}{110}},\quad \alpha_2''-\alpha_3'' = -\frac{\vartheta\binom{110}{111}\vartheta\binom{100}{000}\vartheta\binom{011}{111}\vartheta\binom{001}{000}}{\vartheta\binom{111}{000}\vartheta\binom{101}{111}\vartheta\binom{101}{010}\vartheta\binom{111}{101}},$$

$$\alpha_3'-\alpha_1' = i\,\frac{\vartheta\binom{110}{000}\vartheta\binom{000}{011}\vartheta\binom{001}{000}\vartheta\binom{111}{011}}{\vartheta\binom{111}{101}\vartheta\binom{001}{110}\vartheta\binom{011}{011}\vartheta\binom{101}{000}},\quad \alpha_3''-\alpha_1'' = \frac{\vartheta\binom{000}{011}\vartheta\binom{010}{100}\vartheta\binom{011}{111}\vartheta\binom{001}{000}}{\vartheta\binom{101}{010}\vartheta\binom{111}{101}\vartheta\binom{001}{100}\vartheta\binom{011}{011}},$$

$$\alpha_1'-\alpha_2' = -i\,\frac{\vartheta\binom{100}{010}\vartheta\binom{010}{001}\vartheta\binom{001}{000}\vartheta\binom{111}{011}}{\vartheta\binom{011}{011}\vartheta\binom{101}{000}\vartheta\binom{101}{111}\vartheta\binom{011}{100}},\quad \alpha_1''-\alpha_2'' = -\frac{\vartheta\binom{010}{001}\vartheta\binom{000}{110}\vartheta\binom{011}{111}\vartheta\binom{001}{000}}{\vartheta\binom{001}{100}\vartheta\binom{011}{011}\vartheta\binom{111}{000}\vartheta\binom{101}{111}}.$$

Hieraus lassen sich ähnliche, jedoch minder einfache Formeln herleiten wie (12′.) von denen Beispiels halber eine angeführt sein mag:

$$\frac{\vartheta\binom{110}{111}}{\vartheta\binom{011}{011}} = \sqrt[4]{-\frac{(1-\alpha_2\alpha_3)(1-\alpha_3'\alpha_1')(1-\alpha_1'\alpha_2')(1-\alpha_3''\alpha_1'')(1-\alpha_1''\alpha_2'')}{(1-\alpha_2'\alpha_3')(1-\alpha_2''\alpha_3'')(1-\alpha_3\alpha_1)(1-\alpha_1\alpha_2)}}.$$

Wir werden später Hülfsmittel kennen lernen um alle Quotienten $\frac{\vartheta\{\varpi\}}{\vartheta\{\varpi'\}}$ wenn (ϖ) und (ϖ') beliebige gerade Charakteristiken sind, algebraisch zu bestimmen.

§. 17. Die Wurzelfunctionen zweiten Grades.

Wir bezeichnen in der Folge mit dem Namen *Wurzelfunctionen zweiten Grades* (oder vorläufig kurz Wurzelfunctionen) ganze rationale und homogene Ausdrücke, gebildet aus den *Abelschen* Functionen, von der Eigenschaft, dass jedes Glied derselben die nämliche Charakteristik hat, welche auch die Charakteristik der betreffenden Wurzelfunction heissen soll, und theilen diese Functionen nach ihrer Ordnung ein. Eine Folge dieser Definition ist die, dass der Quotient zweier solcher Functionen gleicher Ordnung in der ganzen Fläche T', einzelne Punkte abgerechnet, in denen er unendlich von endlicher Ordnung wird, endlich und stetig bleibt, und beim Ueberschreiten der Querschnitte Factoren annimmt, die gleich ± 1 sind. Dieses Factorensystem wird durch die Summe der Charakteristiken von Zähler und Nenner bestimmt, genau in der Weise, wie bei den Quotienten zweier *Abelscher* Functionen (§. 13).

Das Product zweier Wurzelfunctionen von gleicher Charakteristik ist rational durch s, z darstellbar, wenn die Summe ihrer Ordnungszahlen eine gerade Zahl ist.

Es seien nämlich $\sqrt{\Phi}$, $\sqrt{\Phi_1}$ zwei solche Functionen von der Ordnung n, resp. n_1, und $n+n_1$ sei eine gerade Zahl. Die Charakteristik dieser Functionen sei

$$(\sqrt{\Phi}) = (\sqrt{\Phi_1}).$$

Ist nun $n \geqq n_1$, so zerlege man diese Charakteristik $(\sqrt{\Phi})$ in n_1 gleiche oder verschiedene ungerade Charakteristiken $(\sqrt{x_2})$, $(\sqrt{x_2}) \ldots (\sqrt{x_{n_1}})$, zu welcher die *Abelschen* Functionen gehören: $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2} \ldots \sqrt{x_n}$, und bilde das Product

$$\frac{\sqrt{\Phi}}{x^{\frac{n-n_1}{2}} \sqrt{x_1 x_2 \ldots x_{n_1}}} \frac{\sqrt{\Phi_1}}{\sqrt{x_1 x_2 \ldots x_{n_1}}} = \frac{\sqrt{\Phi \Phi_1}}{x^{\frac{n-n_1}{2}} x_1 x_2 \ldots x_{n_1}},$$

worin x das Quadrat einer beliebigen *Abelschen* Function bedeutet, oder auch eine lineare Function von solchen. Diese Function ist in der Fläche T auch beim Ueberschreiten der Querschnitte stetig und somit rational, und da der Nenner rational ist, so muss es auch der Zähler sein, und zwar ist derselbe eine ganze rationale Function der Ordnung $\frac{n+n_1}{2}$ in den x.

Es ist also z. B. immer das Product zweier Wurzelfunctionen von gleicher Ordnung und gleicher Charakteristik und mithin das Quadrat einer jeden Wurzelfunction rational.

Bei gerader Ordnungszahl n sind die Wurzelfunctionen mit der Charakteristik $\binom{000}{000}$ selbst ganze rationale Functionen von der Ordnung $\frac{n}{2}$ in den x. Denn bedeutet $\sqrt{x}$ irgend eine *Abelsche* Function, so ist unter dieser Voraussetzung $\frac{\sqrt{\Phi}}{x^{\frac{n}{2}}}$ eine in der Fläche T auch beim Ueberschreiten der Querschnitte stetige Function. Bei ungerader Ordnungszahl kommen aber auch irrationale Wurzelfunctionen mit der Charakteristik $\binom{000}{000}$ vor.

Ist $\sqrt{\Phi}$ eine Wurzelfunction von der Ordnung n und der Charakteristik $(\sqrt{\Phi})$, ist ferner wie oben

$$(\sqrt{\Phi}) = (\sqrt{x_1 x_2 \ldots x_n}),$$

so ist nach dem soeben Bewiesenen

$$\frac{\sqrt{\Phi}}{\sqrt{x_1 x_2 \ldots x_n}}$$

eine rationale Function, die in $2n$ Punkten der Fläche T unendlich gross von der ersten Ordnung wird, und die mithin in eben so vielen Punkten unendlich klein von der ersten Ordnung wird. Es folgt hieraus, dass eine Wurzelfunction n^{ter} Ordnung (abgesehen von etwaigen singulären Punkten) in $2n$ Punkten der Fläche T unendlich klein von der ersten Ordnung wird. Durch $2n-3$ dieser 0-Punkte und durch die Charakteristik ist die Wurzelfunction im Allgemeinen bis auf einen constanten Factor völlig bestimmt. Denn es folgt aus dem am Schluss des §. 14 nachgewiesenen Satze, dass alle Wurzelfunctionen von der Ordnung n und von gleicher Charakteristik linear und homogen durch $2n-2$ derselben ausdrückbar sind, dass somit die $2n-3$ Verhältnisse der $2n-2$ constanten Coëfficienten durch $2n-3$ Bedingungen bestimmt sind.

Dass auch umgekehrt immer $2n-2$ linear unabhängige Wurzelfunctionen n^{ter} Ordnung und von gegebener Charakteristik existiren, dass somit wirklich immer $2n-3$ 0-Punkte einer solchen Function willkürlich gegeben sein können, wird weiter unten nachgewiesen werden, nachdem die Richtigkeit des Satzes in einigen speciellen aber besonders wichtigen Fällen dargethan ist.

Die Wurzelfunctionen haben folgende geometrische Bedeutung: das Quadrat einer solchen Function n^{ter} Ordnung, rational gemacht und $=0$ gesetzt, stellt eine Curve n^{ter} Ordnung dar, welche die gegebene Curve 4^{ter} Ordnung in $2n$ Punkten berührt.

Solcher Curven giebt es nach dem Obigen bei geradem n 63 bei ungeradem 64 Systeme*) (entsprechend den Charakteristiken). Die Berührungspunkte einer solchen Curve eines bestimmten Systems sind durch $2n-3$ derselben im Allgemeinen völlig bestimmt, die Curve selbst natürlich nur wenn $n<4$ ist.

Es mögen nun $\sqrt{\Phi}$ und $\sqrt{\Phi'}$ zwei Wurzelfunctionen gleicher Ordnung n aber von verschiedener Charakteristik bedeuten. Wir betrachten die Function

$$\sqrt{\sigma} = \frac{\sqrt{\Phi}}{\sqrt{\Phi'}},$$

welche in der Fläche T' in μ Punkten unendlich gross und unendlich klein

*) Vgl. *Clebsch* Anwendung der *Abelschen* Functionen in der Geometrie. (*Borchardts* Journal Bd. 63 p. 189.) Bei gerader Ordnungszahl bilden die doppelt gezählten Curven $\frac{n}{2}$ Ordnung das 64. System.

von der ersten Ordnung wird, sonst stetig ist, beim Ueberschreiten des Querschnitts a_i den Factor $(-1)^{g_i}$ an b_i den Factor $(-1)^{h_i}$ annimmt, wenn

$$(\sqrt{\Phi})+(\sqrt{\Phi'})=(\sqrt{\sigma})=\binom{g_1\,g_2\,g_3}{h_1\,h_2\,h_3}$$

ist. Die Anzahl der 0-Punkte dieser Function muss nicht nothwendig $=2n$ sein, da sich 0-Punkte des Zählers und Nenners gegenseitig aufheben können. Wir werden weiter unten nachweisen, dass alle Functionen, denen die hier erwähnten Eigenschaften zukommen, sich auf mannigfache Art als Quotienten zweier Wurzelfunctionen darstellen lassen. Für jetzt wollen wir für diese Functionen einen Satz beweisen, der für dieselben die gleiche Bedeutung hat, wie das *Abelsche* Theorem für die rationalen Functionen, und der auch aus dem *Abelschen* Theorem gefolgert werden kann. Wir wollen hier eine directe Ableitung dieses Satzes geben nach einer Methode, die auch auf den Beweis des *Abelschen* Theorems selber angewandt werden kann.

Es möge die Function $\sqrt{\sigma}$ unendlich klein in der ersten Ordnung werden in den Punkten

$$\gamma_1,\ \gamma_2 \cdots \gamma_\mu$$

und unendlich gross in der ersten Ordnung in

$$\gamma_1',\ \gamma_2' \cdots \gamma_\mu'.$$

Um die Function $\log\sqrt{\sigma}$ eindeutig zu bestimmen, ziehen wir durch das Innere von T' einander nicht schneidende Linien $l_1,\ l_2 \ldots l_\mu$ von γ_1' nach γ_1, von γ_2' nach $\gamma_2 \ldots$ von γ_μ' nach γ_μ. Wir erhalten dann eine Fläche T'', welche ausser der Begrenzung von T' noch die beiden Ufer der Linien $l_1,\ l_2 \ldots l_\mu$ zu Grenzen hat. In dieser Fläche kann $\log\sqrt{\sigma}$ als stetige Function erklärt werden, welche auf der positiven Seite der Linien l um $2\pi i$ grösser ist als auf der negativen, auf der positiven Seite des Querschnitts a_k um $g_k\pi i$, auf der positiven Seite von b_k um $h_k\pi i$ grösser als auf der negativen (wo übrigens die Zahlen g_k und h_k nur bis auf Vielfache von 2 bestimmt werden können). Ist nun u_k ein Normalintegral erster Gattung, so ist das über die ganze Begrenzung von T'' erstreckte Integral

$$\int \log\sqrt{\sigma}\, du_k = 0.$$

Es ist dasselbe aber auch gleich der Summe der Integrale

$$\int (\log \sqrt{\sigma^{(+)}} - \log \sqrt{\sigma^{(-)}})\, du_k,$$

erstreckt über die Linien a, b, l. Diese Integrale aber lassen sich leicht bestimmen, und wenn wir diese Betrachtung für die drei Normalintegrale erster Gattung durchführen, so ergiebt sich die Congruenz

$$\text{I.} \quad \left(\begin{smallmatrix}3\\h\\1\end{smallmatrix}\left(\int_{\gamma_1}^{\gamma'_1} du_h + \int_{\gamma_2}^{\gamma'_2} du_h + \cdots + \int_{\gamma_\mu}^{\gamma'_\mu} du_h\right)\right) \equiv (\tfrac{1}{2}\varpi_1, \tfrac{1}{2}\varpi_2, \tfrac{1}{2}\varpi_3),$$

wenn $\frac{1}{2}\varpi_1$, $\frac{1}{2}\varpi_2$, $\frac{1}{2}\varpi_3$ ein System zusammengehöriger halber Perioden ist mit der Charakteristik

$$(\varpi) = (\sqrt{\sigma}) = (\sqrt{\Phi}) + (\sqrt{\Phi'}).$$

Dass eine Congruenz von der Form I. bestehen muss, ist eine unmittelbare Folge des *Abelschen* Theorems; aber die Bestimmung der Charakteristik (ϖ) ist auf anderem Wege weitläufiger.

Der einfachste Fall der Congruenz I. ist der, wo die Functionen $\sqrt{\Phi}$, $\sqrt{\Phi'}$ selbst *Abelsche* Functionen sind. Bedeuten also $\sqrt{x}$, $\sqrt{x'}$ zwei *Abelsche* Functionen, mit den 0-Punkten ε, γ; ε', γ', so haben wir die Congruenz

$$\text{II.} \quad \left(\begin{smallmatrix}3\\h\\1\end{smallmatrix}\left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} du_h + \int_{\gamma}^{\gamma'} du_h\right)\right) \equiv (\tfrac{1}{2}\varpi_1, \tfrac{1}{2}\varpi_2, \tfrac{1}{2}\varpi_3),$$

wenn wieder

$$(\varpi) = (\sqrt{x x'}),$$

und es können daher durch eine Congruenz wie II. alle Systeme zusammengehöriger halber Perioden dargestellt werden.

§. 18. Die Wurzelfunctionen zweiter Ordnung.

Nach §. 14, II. können alle Producte zweier *Abelscher* Functionen mit derselben Charekteristik linear und homogen durch zwei derselben ausgedrückt werden. Sind daher $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{\xi_1}$, $\sqrt{x_2}$, $\sqrt{\xi_2}$ vier *Abelsche* Functionen, die der Bedingung genügen:

$$(\sqrt{x_1 \xi_1}) = (\sqrt{x_2 \xi_2}),$$

so sind alle Wurzelfunctionen zweiter Ordnung mit der Charakteristik $(\sqrt{x_1 \xi_1})$ in der Form darstellbar:

$$\sqrt{\Psi} = a_1 \sqrt{x_1 \xi_1} + a_2 \sqrt{x_2 \xi_2},$$

wenn a_1, a_2 willkürliche Constanten sind.

Da nun $\sqrt{x_1 \xi_1}$, $\sqrt{x_2 \xi_2}$ nicht in constantem Verhältniss stehen, so lässt sich das Verhältniss $a_1 : a_2$ immer so bestimmen, dass von den vier 0-Punkten von $\sqrt{\Psi}$ einer eine beliebig gegebene Lage erhält, wodurch die übrigen vollständig bestimmt sind.

Hieraus folgt, dass die Quadratwurzel aus jeder homogenen Function zweiter Ordnung der Functionen φ_1, φ_2, φ_3, die in vier Punkten unendlich klein von der zweiten Ordnung wird, als Wurzelfunction zweiter Ordnung dargestellt werden kann.

Denn bedeutet f eine solche homogene Function zweiter Ordnung, so ist $\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\Psi}}$ eine Function, die in T' mit Ausnahme einzelner Punkte stetig bleibt, und man kann über die Charakteristik $(\sqrt{\Psi})$ so verfügen, dass dieselbe beim Ueberschreiten der Querschnitte gleichfalls stetig bleibt und mithin rational ist. Ferner lässt sich über die in $\sqrt{\Psi}$ enthaltenen Constanten so verfügen, dass dieselbe nur in drei Punkten unendlich gross und unendlich klein von der ersten Ordnung wird, und sonach als Quotient zweier Functionen φ sich darstellt, falls sie nicht constant ist. Es würden also drei der 0-Punkte von $\sqrt{\Psi}$ mit denen einer Function φ zusammenfallen und $\frac{\Psi}{\varphi^2}$ wäre eine rationale Function die nur in je einem Punkt Null und unendlich in der zweiten Ordnung wird, was nicht möglich ist, wenn nicht wieder $\frac{\sqrt{\Psi}}{\varphi}$ constant ist. Ist letzteres der Fall, so ist auch $\sqrt{f}$ eine Function φ, und kann, wenn man will, als Wurzelfunction zweiter Ordnung mit der Charakteristik $\binom{000}{000}$ aufgefasst werden; andernfalls muss $\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\Psi}}$ constant sein, und unsere Behauptung ist erwiesen.

Für gewisse Werthe des Verhältnisses $a_1 : a_2$ kann es sich ereignen, dass $\sqrt{\Psi}$ in das Product zweier *Abelscher* Functionen zerfällt. Es soll untersucht werden, unter welchen Umständen dies eintritt. Ist $\sqrt{x_3 \xi_3}$ ein solches Product, so muss also

$$\sqrt{x_3 \xi_3} = a_1 \sqrt{x_1 \xi_1} + a_2 \sqrt{x_2 \xi_2},$$

woraus zunächst hervorgeht:

$$(\sqrt{x_3 \xi_3}) = (\sqrt{x_1 \xi_1}) = (\sqrt{x_2 \xi_2}) = (\sqrt{\Psi}),$$

d. h. es muss $\sqrt{x_3 \xi_3}$ ein Paar sein, welches mit $\sqrt{x_1 \xi_1}$, $\sqrt{x_2 \xi_2}$ in dieselbe

Gruppe gehört. Es muss ferner $\sqrt{\Psi}$ in denselben Punkten verschwinden wie $\sqrt{x_3 \xi_3}$, und da andererseits die Function $\sqrt{\Psi}$ durch einen ihrer 0-Punkte bis auf einen constanten Factor völlig bestimmt ist, so folgt der Satz:

Eine Wurzelfunction zweiter Ordnung $\sqrt{\Psi}$ zerfällt dann und nur dann in das Product zweier Abelscher Functionen, wenn die Constanten a_1, a_2 so bestimmt sind, dass $\sqrt{\Psi}$ in einem Nullpunkt einer Abelschen Function der Gruppe $(\sqrt{\Psi})$ verschwindet.

Betrachten wir also die 63 Systeme von Functionen $\sqrt{\Psi}$ und denken uns in jedem derselben die Constanten so bestimmt, dass sie in einem 0-Punkt γ einer beliebigen *Abelschen* Function $\sqrt{q}$ verschwindet, so werden unter den 63 Functionen alle diejenigen in das Product zweier *Abelscher* Functionen zerfallen, deren Charakteristik der Bedingung genügt, dass $(\sqrt{\Psi})+(\sqrt{q})$ eine ungerade Charakteristik ist, diejenigen dagegen werden nicht zerfallen, bei denen $(\sqrt{\Psi})+(\sqrt{q})$ gerade ist. Da aber, wenn man für $\sqrt{\Psi}$ alle von $\binom{000}{000}$ verschiedenen Charakteristiken setzt, aus $(\sqrt{\Psi})+(\sqrt{q})$ alle Charakteristiken mit Ausnahme von $(\sqrt{q})$ hervorgehen, so folgt, dass von unseren 63 Functionen 27 zerfallen, 36 nicht zerfallen. Die Zerlegung einer solchen zerfallenden Function ist leicht zu bestimmen. Sie zerfällt nämlich in das Product der beiden *Abelschen* Functionen, deren Charakteristiken sind: $(\sqrt{q})$ und $(\sqrt{\Psi})+(\sqrt{q})$.

Für die Geometrie folgt hieraus der Satz, dass von den 63 Kegelschnitten, welche die Curve vierter Ordnung im Berührungspunkt einer Doppeltangente und in drei andern Punkten berührt, 27 in ein Doppeltangentenpaar zerfallen, 36 dagegen nicht zerfallen.

Die Wichtigkeit dieser Functionen Ψ für unsere Theorie beruht darauf, dass sie identisch werden mit den im §. 12 eingeführten Functionen $\Psi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, wenn der dort gebrauchte untere Grenzpunkt passend gewählt wird.

Diese Functionen $\Psi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ waren nämlich dadurch definirt, dass sie unendlich werden sollten in den beiden Punkten, in welchem eine Function φ verschwindet, die ausserdem noch in einem beliebig gegebenen Punkte ε unendlich klein von der zweiten Ordnung wird, und dass sie ausserdem in drei Punkten c_1, c_2, c_3 unendlich klein von der zweiten Ordnung werden sollten.

Wählt man für ε den von γ verschiedenen 0-Punkt der Function $\sqrt{q}$, so sieht man dass diese Functionen Ψ mit den hier betrachteten Quadraten der Wurzelfunctionen zweiter Ordnung identisch sind, und dass man sonach die 36 Punktsysteme c_1, c_2, c_3 durch Auflösung von cubischen Gleichungen erhält.

Diese 36 Punktsysteme haben die Eigenschaft, dass in ihnen je eine der 36 Functionen

$$\vartheta\{\varpi\}\Big(\int_\varepsilon^\zeta du_h\Big)$$

verschwindet, worin (ϖ) eine gerade Charakteristik bedeutet, und unter denselben ist ein Punktsystem $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, c_3^{(0)}$ ausgezeichnet, in dem

$$\vartheta\Big(\int_\varepsilon^\zeta du_h\Big)$$

verschwindet. Daraus ergiebt sich leicht die Zuordnung der 36 Punktsysteme c_1, c_2, c_3 zu den Charakteristiken der Functionen $\sqrt{\Psi}$.

In der That: bedeutet $\sqrt{\xi}$ eine beliebige, von $\sqrt{q}$ verschiedene, *Abelsche* Function, so wird der Quotient $\frac{\sqrt{\Psi}}{\sqrt{q\xi}}$ unendlich klein von der ersten Ordnung in einem der Punktsysteme c_1, c_2, c_3, unendlich gross von der ersten Ordnung in ε und den 0-Punkten von $\sqrt{\xi}$. Die gleiche Eigenschaft besitzt die Function:

$$\frac{\vartheta\{\varpi\}\Big(\int_\varepsilon^\zeta du_h\Big)}{\vartheta\{\sqrt{\xi}\}\Big(\int_\varepsilon^\zeta du_h\Big)},$$

wenn (ϖ) eine noch zu bestimmende gerade Charakteristik ist. Verfügt man daher passend über einen constanten Factor, so ergiebt sich die Gleichung

$$\sqrt{\frac{\Psi}{\xi q}} = \frac{\vartheta\{\varpi\}\Big(\int_\varepsilon^\zeta du_h\Big)}{\vartheta\{\sqrt{\xi}\}\Big(\int_\varepsilon^\zeta du_h\Big)}.$$

Denn die Quadrate dieser beiden Functionen sind rational und werden in denselben Punkten Null und unendlich.

Das Factorensystem ± 1, welches die Function auf der rechten Seite beim Ueberschreiten der Querschnitte annimmt, ist bestimmt durch die Charakteristik

$$(\varpi) + (\sqrt{\xi})$$

und das entsprechende Factorensystem für die Function auf der linken Seite durch

$$(\sqrt{\Psi}) + (\sqrt{q\xi}),$$

und da beide Charakteristiken übereinstimmen müssen, so folgt:

$$(\varpi) = (\sqrt{\Psi}) + (\sqrt{q}),$$

womit diese Aufgabe gelöst ist. Zu dem Punktsystem $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$, $c_3^{(0)}$ führt also diejenige Function $\sqrt{\Psi}$, deren Charakteristik $(\sqrt{q})$ ist.

Hiermit sind die sämmtlichen Punktsysteme c_1, c_2, c_3, von denen im §. 12 die Rede war, vollständig algebraisch bestimmt, einschliesslich der Charakteristiken, zu denen dieselben gehören. Sind die *Abelschen* Functionen bekannt, so erfordert diese Bestimmung nur die Auflösung von Gleichungen zweiten und dritten Grades.

Als Beispiel für die Bestimmung der Punkte $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$, $c_3^{(0)}$ diene folgendes, worin die oben (p. 100) gemachte besondere Annahme über die Charakteristiken der *Abelschen* Functionen zu Grunde liegt. Es sei

$$\sqrt{q} = \sqrt{\xi_3}, \qquad (\sqrt{q}) = (\sqrt{\Psi}) = \binom{110}{100},$$

also:

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{x_1 x_2} + a\sqrt{\xi_1 \xi_2}.$$

In den 0-Punkten von $\sqrt{\xi_3}$ ist wegen $\sqrt{x_1\xi_1} + \sqrt{x_2\xi_2} + \sqrt{x_3\xi_3} = 0$:

$$x_1\xi_1 = x_2\xi_2$$

oder:

$$\frac{x_1}{\xi_2} = \frac{x_2}{\xi_1} = \lambda;$$

wenn man also aus

$$x_1 - \lambda\xi_2 = 0, \qquad x_2 - \lambda\xi_1 = 0, \qquad \xi_3 = 0,$$

x_1, x_2, x_3 eliminirt, so erhält man eine quadratische Gleichung für λ, deren beide Wurzeln λ', λ'' die Punkte ε, γ bestimmen. Nun muss der Coëfficient a so bestimmt werden, dass $\sqrt{\Psi}$ in γ verschwindet, dass also in γ

$$\Psi = x_1 x_2 + a^2 \xi_1 \xi_2 - a(x_1\xi_1 + x_2\xi_2 - x_3\xi_3) = 0$$

werde. Nun ist aber in γ

$$\xi_3 = 0, \quad \frac{x_1}{\xi_2} = \frac{x_2}{\xi_1} = \lambda'',$$

also:

$$\lambda''^2 + a^2 - 2a\lambda'' = 0, \qquad a = \lambda''.$$

Um daher die Punkte $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, c_3^{(0)}$ zu finden, hat man die gemeinschaftlichen Wurzeln von

$$\sqrt{x_1 x_2} + \lambda'' \sqrt{\xi_1 \xi_2} = 0, \qquad \sqrt{x_1 \xi_1} + \sqrt{x_2 \xi_2} + \sqrt{x_3 \xi_3} = 0$$

zu suchen, oder genauer, in rationaler Form, die gemeinschaftlichen Wurzeln von

$$x_1 x_2 + \lambda''^2 \xi_1 \xi_2 - \lambda''(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 - x_3 \xi_3) = 0,$$

$$4 x_1 x_2 \xi_1 \xi_2 = (x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 - x_3 \xi_3)^2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen leitet man leicht die beiden folgenden quadratischen her:

$$x_1 x_2 = \lambda''^2 \xi_1 \xi_2,$$

$$2\lambda'' \xi_1 \xi_2 = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 - x_3 \xi_3,$$

welchen vier Werthsysteme der Unbekannten genügen, von denen eines bekannt ist, nämlich dem Punkt γ entsprechend. Die drei andern Systeme entsprechen den Punkten $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, c_3^{(0)}$.

§. 19. Die Wurzelfunctionen dritter Ordnung.

Die Wurzelfunctionen dritter Ordnung sind für die Folge von der grössten Bedeutung, wesshalb ihnen hier eine eingehendere Betrachtung gewidmet werden soll. Es geht bereits aus dem in §. 14 Bewiesenen hervor, dass nicht mehr als vier linear unabhängige Functionen dieser Art mit gegebener Charakteristik existiren können. Es ist nun aber zu zeigen, dass auch wirklich immer vier solche Functionen vorhanden sind, und wie dieselben gebildet werden können. Dabei verlangen die Functionen mit gerader Charakteristik eine etwas andere Behandlung als die mit ungerader.

Bedeutet zunächst (g) eine beliebige gerade Charakteristik, so kann man nach §. 3, III. immer auf mehrfache Art drei Paare von *Abelschen* Functionen einer Gruppe finden:

$$\sqrt{x_1 \xi_1}, \quad \sqrt{x_2 \xi_2}, \quad \sqrt{x_3 \xi_3},$$

welche die Eigenschaft haben, dass

$$(g) = (\sqrt{x_1 x_2 x_3}).$$

(In der beigefügten dritten Tafel findet man für jede gerade Charakteristik (g) eine solche Bestimmung der Charakteristiken $(\sqrt{x_1})$, $(\sqrt{\xi_1})$; $(\sqrt{x_2})$, $(\sqrt{\xi_2})$; $(\sqrt{x_3})$, $(\sqrt{\xi_3})$).

Es ist nun unter diesen Voraussetzungen auch

$$(g) = (\sqrt{x_1 \xi_2 \xi_3}) = (\sqrt{\xi_1 x_2 \xi_3}) = (\sqrt{\xi_1 \xi_2 x_3}),$$

und es lässt sich zeigen, dass zwischen den vier Functionen

$$\sqrt{x_1 x_2 x_3}, \quad \sqrt{x_1 \xi_2 \xi_3}, \quad \sqrt{\xi_1 x_2 \xi_3}, \quad \sqrt{\xi_1 \xi_2 x_3}$$

keine homogene lineare Gleichung mit constanten Coëfficienten besteht.

Nehmen wir nämlich an, es bestehe eine solche Gleichung wie

$$(1.) \quad \alpha \sqrt{x_1 x_2 x_3} + \alpha_1 \sqrt{x_1 \xi_2 \xi_3} + \alpha_2 \sqrt{\xi_1 x_2 \xi_3} + \alpha_3 \sqrt{\xi_1 \xi_2 x_3} = 0,$$

während wir andererseits die Relation haben:

$$(2.) \quad \sqrt{x_1 \xi_1} + \sqrt{x_2 \xi_2} + \sqrt{x_3 \xi_3} = 0,$$

aus welcher die drei folgenden hervorgehen:

$$(3.) \quad \begin{cases} 2\sqrt{x_2 \xi_2 x_3 \xi_3} = x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2 - x_3 \xi_3, \\ 2\sqrt{x_3 \xi_3 x_1 \xi_1} = -x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 - x_3 \xi_3, \\ 2\sqrt{x_1 \xi_1 x_2 \xi_2} = -x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3, \end{cases}$$

so folgt aus (1.) durch Multiplication mit $\sqrt{x_1 x_2 x_3}$, wegen (3.)

$$(4.) \quad \begin{cases} \alpha x_1 x_2 x_3 + \alpha_1 x_1 (x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2 - x_3 \xi_3) + \alpha_2 x_2 (-x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 - x_3 \xi_3) \\ \qquad + \alpha_3 x_3 (-x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3) = 0, \end{cases}$$

eine Gleichung, die, als von der dritten Ordnung, identisch sein müsste vermöge der zwischen x_1, x_2, x_3; ξ_1, ξ_2, ξ_3 bestehenden linearen Relationen. Setzen wir daher in (4.) $x_1 = 0$, so folgt daraus

$$(\alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3)(x_2 \xi_2 - x_3 \xi_3) = 0.$$

Es müsste also entweder $(\alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3)$ oder $(x_2 \xi_2 - x_3 \xi_3)$ durch x_1 theilbar sein. Beides aber ist nach §. 14 unmöglich, denn im ersten Fall würde zwischen x_1, x_2, x_3 eine lineare homogene Relation bestehen, im andern Fall müsste, wie aus (3.) hervorgeht, gegen die Voraussetzung x_1 mit ξ_1 identisch sein.

Demnach ist der allgemeinste Ausdruck einer Wurzelfunction dritter Ordnung mit gerader Charakteristik (g) folgender:

$$(5.) \quad \sqrt{\chi} = a \sqrt{x_1 x_2 x_3} + a_1 \sqrt{x_1 \xi_2 \xi_3} + a_2 \sqrt{\xi_1 x_2 \xi_3} + a_3 \sqrt{\xi_1 \xi_2 x_3},$$

worin die a_1, a_1, a_2, a_3 willkürliche Constanten sind.

Eine solche Function wird in sechs Punkten unendlich klein von der ersten Ordnung und von diesen sechs Punkten können drei beliebig gewählt werden, wodurch die drei andern im Allgemeinen völlig bestimmt sind.

Das Quadrat einer Function $\sqrt{\chi}$ sowie das Product zweier derselben mit gleicher Charakteristik sind homogene Functionen dritter Ordnung.

Die geometrische Bedeutung einer Gleichung $\chi = 0$ ist die einer Curve dritter Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung in sechs Punkten berührt. Solcher Curven erhalten wir 36 Systeme. Die Berührungspunkte zweier Curven desselben Systems liegen auf einer Curve dritter Ordnung; die sechs Berührungspunkte von einer derselben liegen nicht auf einem Kegelschnitt *).

In der Form (5.) können die Wurzelfunctionen dritter Ordnung mit ungerader Charakteristik nicht dargestellt werden. Um auch diese zu erhalten, sei jetzt $\sqrt{\chi}$ eine solche Function mit der ungeraden Charakteristik

$$(\sqrt{\chi}) = (\sqrt{x_1}),$$

so dass $\sqrt{x_1}$ die *Abelsche* Function mit der gleichen Charakteristik bedeutet.

Es mögen ferner $\sqrt{x_1 \xi_1}$, $\sqrt{x_2 \xi_2}$ zwei Paare von *Abelschen* Functionen einer Gruppe sein, so dass man hat:

$$(\sqrt{x_1}) = (\sqrt{\xi_1 x_2 \xi_2}).$$

Bedeutet dann m irgend eine Function φ, also eine lineare homogene Function dreier Quadrate *Abelscher* Functionen **), h eine Constante, so werden wir setzen können:

$$(6.)\quad \sqrt{\chi} = m\sqrt{x_1} + 2h\sqrt{\xi_1 x_2 \xi_2},$$

und dies wird der allgemeinste Ausdruck einer Wurzelfunction dritter Ordnung von der betreffenden Charakteristik sein, wenn wir zeigen können, dass keine Gleichung von der Form

$$(7.)\quad 0 = m\sqrt{x_1} + 2h\sqrt{\xi_1 x_2 \xi_2}$$

identisch erfüllt ist. Denn dann enthält der Ausdruck (6.) wirklich vier willkürliche Constanten linear und homogen.

---

*) Vgl. *Hesse*. l. c.

**) Wir brauchen in der Folge, um einen grösseren Reichthum in der Bezeichnung zu haben, für die Functionen φ vorzugsweise die Buchstaben m, n, μ, ν etc.

Um die Unmöglichkeit einer Gleichung (7.) nachzuweisen, multipliciren wir dieselbe mit $\sqrt{x_1}$ wodurch sie unter Voraussetzung der Gleichung

$$\sqrt{x_1\xi_1}+\sqrt{x_2\xi_2}+\sqrt{x_3\xi_3} = 0$$

übergeht in

$$mx_1+h(-x_1\xi_1-x_2\xi_2+x_3\xi_3) = 0,$$

welche, als von der zweiten Ordnung identisch sein müsste. Die Unmöglichkeit dieser Annahme ergiebt sich dann genau wie oben.

Eine etwas andere Darstellung dieser Wurzelfunctionen, welche unter Umständen dieser vorzuziehen ist, ist folgende: Es sei

$$(\sqrt{x_1\xi_1}) = (\sqrt{x_2\xi_2}) = (\sqrt{x_3\xi_3})$$

und m, m_1 zwei beliebig anzunehmende Functionen φ, z. B. x_1, x_2 oder x_1, ξ_1. Dann können wir setzen:

$$(8.)\quad \sqrt{\chi} = \sqrt{x_1}(am+a_1m_1)+\sqrt{\xi_1}(a_2\sqrt{x_2\xi_2}+a_3\sqrt{x_3\xi_3}).$$

Wir sehen hieraus, dass auch bei ungerader Charakteristik von den sechs Nullpunkten einer Wurzelfunction dritter Ordnung drei beliebig gewählt werden können, wodurch die übrigen im Allgemeinen bestimmt sind.

Auch hier ergiebt sich, dass das Quadrat einer und das Product zweier Wurzelfunctionen dritter Ordnung mit derselben Charakteristik rational (von der dritten Ordnung) ist. Aber es ist auch das Product einer solchen Function mit einer bestimmten *Abelschen* Function, nämlich derjenigen welche dieselbe Charakteristik hat, rational (von der zweiten Ordnung).

Geometrisch führen diese Functionen zu 28 weiteren Systemen von Curven dritter Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung in sechs Punkten berühren. Die Berührungspunkte zweier solcher Curven desselben Systems liegen auf einer andern Curve dritter Ordnung und die sechs Berührungspunkte einer solchen Curve liegen mit den Berührungspunkten einer gewissen dem System eigenthümlichen Doppeltangente auf einem Kegelschnitt. *)

Genau in derselben Weise, wie bei den Wurzelfunctionen zweiter Ordnung schliesst man auch hier, dass die Quadratwurzel aus einer homogenen Function dritter Ordnung der drei Veränderlichen φ_1, φ_2, φ_3, die in sechs Punkten unendlich klein von der zweiten Ordnung wird, immer als Wurzel-

---

*) *Hesse.* l. c.

function dritter Ordnung, also in einer der beiden Formen (5.), (6.) darstellbar ist.

Wir haben gesehen, dass eine Wurzelfunction dritter Ordnung durch ihre Charakteristik und durch drei ihrer 0-Punkte im Allgemeinen völlig bestimmt ist. Es giebt aber gewisse Lagen dieser drei 0-Punkte, für welche eine Ausnahme eintritt, derart, dass in denselben unendlich viele Wurzelfunctionen dritter Ordnung mit einer bestimmten Charakteristik verschwinden können. Um zu erkennen, wann dieser Ausnahmefall eintritt, bezeichnen wir mit $\sqrt{\chi}$, $\sqrt{\chi'}$ zwei Wurzelfunctionen dritter Ordnung mit der gleichen Charakteristik und mit drei gemeinschaftlichen 0-Punkten. Es ist dann $\sqrt{\frac{\chi}{\chi'}}$ eine rationale Function die nur in drei Punkten Null und unendlich wird, und die demnach als Quotient zweier Functionen φ darstellbar sein muss. Wenn also drei 0-Punkte einer Function $\sqrt{\chi}$ von gegebener Charakteristik diese Function nicht vollkommen bestimmen, so verschwindet in den drei übrigen 0-Punkten eine Function φ, deren vierter 0-Punkt fest ist. Man überzeugt sich leicht von der Umkehrung dieses Satzes: Bestimmt man eine Reihe von Functionen $\sqrt{\chi}$ mit derselben Charakteristik, deren drei 0-Punkte die 0-Punkte von Functionen φ sind, welche einen gemeinsamen vierten 0-Punkt besitzen, so sind die drei übrigen 0-Punkte dieser Functionen $\sqrt{\chi}$ immer dieselben. Ist die Charakteristik $(\sqrt{\chi})$ ungerade, so tritt die in Rede stehende Ausnahme dann, und nur dann ein, wenn von den drei gegebenen 0-Punkten zwei mit den 0-Punkten der *Abelschen* Function mit der Charakteristik $(\sqrt{\chi})$ zusammenfallen. Es zerfällt dann die Function $\sqrt{\chi}$ in das Product dieser *Abelschen* Function und einer Function φ.

Wir betrachten jetzt zwei beliebige Wurzelfunctionen dritter Ordnung:

$$\sqrt{\chi} \text{ mit den 0-Punkten } \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6,$$

$$\sqrt{\chi'} \text{ mit den 0-Punkten } \zeta'_1, \zeta'_2, \zeta'_3, \zeta'_4, \zeta'_5, \zeta'_6.$$

Nach dem am Schluss des §. 17 bewiesenen Satz besteht alsdann die Congruenz

$$(9.)\qquad \left(\begin{smallmatrix}3\\h\\1\end{smallmatrix}\left(\sum_{i=1}^{i=6}\int_{\zeta_i}^{\zeta'_i} du_h\right)\right) \equiv (\tfrac{1}{2}\varpi_1, \tfrac{1}{2}\varpi_2, \tfrac{1}{2}\varpi_3),$$

wenn $\frac{1}{2}\varpi_1$, $\frac{1}{2}\varpi_2$, $\frac{1}{2}\varpi_3$ ein System zusammengehöriger halber Perioden ist mit der Charakteristik $(\varpi) = (\sqrt{\chi}) + (\sqrt{\chi'})$.

Bedeutet $\sqrt{q}$ diejenige *Abelsche* Function die in den Punkten ε, γ verschwindet und $\sqrt{\Psi_0}$ die Wurzelfunction zweiter Ordnung, welche in den Punkten $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$, $c_3^{(0)}$ verschwindet, und wählen wir für $\sqrt{\chi}$ die Function $\sqrt{q\Psi_0}$, deren Charakteristik $=(0)$ ist, so ergiebt sich aus (9.):

$$(10.)\quad \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{c_1^{(0)}}^{\zeta_1} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{\zeta_2} du_h + \int_{c_3^{(0)}}^{\zeta_3} du_h + \int_{\varepsilon}^{\zeta_4} du_h + \int_{\gamma}^{\zeta_5} du_h + \int_{\gamma}^{\zeta_6} du_h\right)\right) \equiv (\tfrac{1}{2}\varpi_1, \tfrac{1}{2}\varpi_2, \tfrac{1}{2}\varpi_3),$$

$$(\varpi) = (\sqrt{\chi}).$$

Bedeutet ferner c_1, c_2, c_3 ein Punktsystem, in welchem eine Function $\sqrt{\Psi}$ mit der Charakteristik $(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{\chi})$ (ausser in γ) verschwindet, so ist, gleichfalls nach dem am Schluss von §. 17 bewiesenen Satz

$$\left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\varepsilon}^{c_1} du_h + \int_{\varepsilon}^{c_2} du_h + \int_{\gamma}^{c_3} du_h\right)\right) \equiv (\tfrac{1}{2}\varpi_1, \tfrac{1}{2}\varpi_2, \tfrac{1}{2}\varpi_3),$$

und hiernach geht (10.) über in

$$(11.)\quad \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{c_1^{(0)}}^{\zeta_1} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{\zeta_2} du_h + \int_{c_3^{(0)}}^{\zeta_3} du_h + \int_{\gamma}^{\varepsilon} du_h\right)\right) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(-\int_{c_1}^{\zeta_4} du_h - \int_{c_2}^{\zeta_5} du_h - \int_{c_3}^{\zeta_6} du_h\right)\right).$$

Diese Sätze führen zur Darstellung der Wurzelfunctionen dritter Ordnung durch ϑ-Functionen. Setzen wir nämlich zur Abkürzung:

$$v_h = \int_{c_1^{(0)}}^{\zeta_1} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{\zeta_2} du_h + \int_{c_3^{(0)}}^{\zeta_3} du_h,$$

und verstehen unter $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$ zwei beliebige, von $\sqrt{q}$ verschiedene *Abelsche* Functionen, so hat der Quotient

$$\frac{\vartheta\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h - v_h\right) \vartheta\{\sqrt{\chi q}\}\left(\int_{\gamma}^{\zeta} du_h + v_h\right)}{\vartheta\{\sqrt{x_1}\}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h\right) \vartheta\{\sqrt{x_2}\}\left(\int_{\gamma}^{\zeta} du_h\right)},$$

als Function von ζ betrachtet, folgende Eigenschaften:

Er wird, wegen (11.) unendlich klein in der ersten Ordnung in den Punkten

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6,$$

unendlich gross von der ersten Ordnung in den 0-Punkten der drei *Abelschen* Functionen $\sqrt{q}$, $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_3}$, ist im Uebrigen in der Fläche T' stetig und nimmt beim Ueberschreiten der Querschnitte ein Factorensystem ± 1 an, welches bestimmt ist durch die Charakteristik:

$$(\sqrt{\chi q x_1 x_2}).$$

Genau dieselben Eigenschaften besitzt aber die Function $\sqrt{\frac{\chi}{q x_1 x_2}}$, und wenn wir daher über einen constanten Factor passend verfügen, so haben wir die Gleichung

$$(12.)\quad \sqrt{\frac{\chi}{q x_1 x_2}} = \frac{\vartheta\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - v_h\right)\vartheta\{\sqrt{\chi q}\}\left(\int_\gamma^\zeta du_h + v_h\right)}{\vartheta\{\sqrt{x_1}\}\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h\right)\vartheta\{\sqrt{x_2}\}\left(\int_\gamma^\zeta du_h\right)}.$$

Hieraus leitet man leicht einen Ausdruck her für den Quotienten der zwei Wurzelfunctionen $\sqrt{\chi}$, $\sqrt{\chi'}$. Ist nämlich

$$v_h' = \int_{c_1^{(1)}}^{\zeta_1'} du_h + \int_{c_2^{(1)}}^{\zeta_2'} du_h + \int_{c_3^{(1)}}^{\zeta_3'} du_h,$$

so folgt:

$$(13.)\quad \sqrt{\frac{\chi}{\chi'}} = \frac{\vartheta\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - v_h\right)\vartheta\{\sqrt{\chi q}\}\left(\int_\gamma^\zeta du_h + v_h\right)}{\vartheta\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - v_h'\right)\vartheta\{\sqrt{\chi' q}\}\left(\int_\gamma^\zeta du_h + v_h'\right)},$$

worin die Formel (12.) als Specialfall wieder enthalten ist. Es ist sehr zu bemerken, dass in diesen Darstellungen von den 0-Punkten der Functionen $\sqrt{\chi}$, $\sqrt{\chi'}$ nur je drei vorkommen, und dass diese ganz beliebig gewählt sein können.

§. 20. Die Wurzelfunctionen höherer Ordnung.

Indem wir uns zur Betrachtung der Wurzelfunctionen höherer Ordnung wenden, bedienen wir uns der Kürze und Anschaulichkeit halber einer geometrischen Ausdrucksweise. Bereits im §. 14 wurde gezeigt, dass eine Wurzelfunction n^{ter} Ordnung höchstens $2n-2$ willkürliche Constanten linear und homogen enthalten kann. Es wird unsere Hauptaufgabe sein, nachzuweisen, dass wirklich in der allgemeinsten Function dieser Art die Anzahl der Constanten so gross ist, oder mit andern Worten, dass von den $2n$ 0-Punkten einer solchen Function $2n-3$ beliebig gewählt werden können, wodurch die übrigen drei im Allgemeinen völlig bestimmt sind. Ist dies bewiesen, so folgt daraus sofort, ganz wie bei den Wurzelfunctionen zweiter

Ordnung, dass die Quadratwurzel aus einer ganzen homogenen Function n^{ter} Ordnung in den φ_1, φ_2, φ_3, die in $2n$ Punkten unendlich klein in der zweiten Ordnung wird, immer als Wurzelfunction n^{ter} Ordnung darstellbar ist.

Wir betrachten zunächst die Wurzelfunctionen gerader Ordnung, deren es, wie wir gesehen haben 63 Systeme giebt. Solche Functionen lassen sich folgendermaassen darstellen: Es seien $\sqrt{x_1\xi_1}$, $\sqrt{x_2\xi_2}$ zwei Paare von *Abelschen* Functionen einer Gruppe und f_1, f zwei ganze rationale und homogene Functionen von der Ordnung $\frac{n-2}{2}$. Es ist dann eine Wurzelfunction n^{ter} Ordnung mit der Charakteristik $(\sqrt{x_1\xi_1})$:

$$(1.)\qquad \sqrt{\Phi_n} = f_1\sqrt{x_1\xi_1}+f_2\sqrt{x_2\xi_2},$$

und umgekehrt ist jede Wurzelfunction der gedachten Art in dieser Form darstellbar. Die Anzahl der in dieser Function enthaltenen Constanten beträgt

$$\frac{n.n+2}{4},$$

eine Zahl, die für $n=4$ mit der geforderten Zahl $2n-2$ übereinstimmt, für $n>4$ aber um

$$\frac{n-2.n-4}{4}$$

zu gross ist. Es kommt also nur darauf an, nachzuweisen, dass man über diese überzähligen Constanten so verfügen kann, dass keine Gleichung von der Form

$$(2.)\qquad f_1\sqrt{x_1\xi_1}+f_2\sqrt{x_2\xi_2} = 0.$$

identisch, d. h. in der ganzen Fläche T besteht. Multipliciren wir zu diesem Zweck die Gleichung (2.) mit $\sqrt{x_1\xi_1}$ so wird dieselbe rational von der Ordnung $\frac{n+2}{2}$ nämlich:

$$(3.)\qquad f_1x_1\xi_1+\tfrac{1}{2}f_2(-x_1\xi_1-x_2\xi_2+x_3\xi_3) = 0$$

und stellt also, wenn sie nicht ganz identisch ist, eine Curve von der Ordnung $\frac{n+2}{2}$ dar, welche die gegebene Curve vierter Ordnung als einen Theil enthalten muss.

Der erstere Fall würde nur dann eintreten können, wenn f_2 durch $x_1\xi_1$ theilbar wäre. Dies vermeidet man dadurch, dass man von den $\frac{n.n+2}{8}$

in f_2 enthaltenen Constanten $\frac{n-2.n-4}{8}$ als lineare homogene Functionen der übrigen so bestimmt, dass die Curve $f_2 = 0$ durch $\frac{n-2.n-4}{8}$ beliebig gewählte nicht auf einer Curve $\frac{n-6}{2}$ ter Ordnung gelegene Punkte geht, was möglich ist, da eine Curve $\frac{n-6}{2}$ ter Ordnung durch $\frac{n-2.n-4}{8}-1$ Punkte bestimmt ist. Es bleiben dann in f_2 noch

$$\frac{n.n+2}{8} - \frac{n-2.n-4}{8} = n-1$$

willkürliche Constanten übrig, die linear und homogen darin enthalten sind. Unter diesen Voraussetzungen stellt (3.) eine Curve $\frac{n+2}{2}$ ter Ordnung dar, in welcher noch

$$n-1+\frac{n.n+2}{8} = 2n-2+\frac{n-2.n-4}{8}$$

unbestimmte Constanten linear und homogen vorkommen, und welche die gegebene Curve vierter Ordnung als Theil enthalten müsste. Bestimmt man daher von den noch übrigen Constanten wieder $\frac{n-2.n-4}{8}$ so dass die Curve (3.) durch eben so viele nicht auf einer Curve $\frac{n-6}{2}$ ter Ordnung liegende beliebige Punkte geht, so kann auch dieser Fall nicht eintreten und es bleiben, wie es sein muss, in der Function (1.) gerade $2n-2$ willkürliche Coëfficienten.

Ist ferner $\sqrt{\Phi_n}$ eine Wurzelfunction ungerader Ordnung mit gerader Charakteristik, so kann man setzen:

$$(4.) \qquad \sqrt{\Phi_n} = f\sqrt{x_1x_2x_3}+f_1\sqrt{x_1\xi_2\xi_3}+f_2\sqrt{x_2\xi_3\xi_1}+f_3\sqrt{x_3\xi_1\xi_2},$$

wenn

$$(\sqrt{x_1\xi_1}) = (\sqrt{x_2\xi_2}) = (\sqrt{x_3\xi_3})$$

und f, f_1, f_2, f_3 ganze homogene rationale Functionen von der Ordnung $\frac{n-3}{2}$. Diese Function enthält $4\frac{n^2-1}{8}$ willkürliche Constanten, also $\frac{n-1.n-3}{2}$ zu viel, und es liegt uns ob, nachzuweisen, dass man über diese so verfügen kann, dass keine Gleichung von der Form

$$(5.) \qquad f\sqrt{x_1x_2x_3}+f_1\sqrt{x_1\xi_2\xi_3}+f_2\sqrt{x_2\xi_3\xi_1}+f_3\sqrt{x_3\xi_1\xi_2} = 0$$

identisch besteht. Zu dem Zweck multipliciren wir diese Gleichung (5.) mit $\sqrt{x_1 x_2 x_3}$, wonach sie sich schreiben lässt:

$$(6.)\quad \begin{cases} x_1\{f\,x_2x_3+\tfrac{1}{2}f_1(x_1\xi_1-x_2\xi_2-x_3\xi_3)-\tfrac{1}{2}f_2x_2\xi_1-\tfrac{1}{2}f_3x_3\xi_1\} \\ \qquad\qquad +\tfrac{1}{2}(f_2x_2-f_3x_3)(x_2\xi_2-x_3\xi_3) \;=\; 0, \end{cases}$$

welche entweder identisch sein oder eine Curve $\frac{n+3}{2}$ Ordnung repräsentiren müsste, welche die gegebene Curve als Theil enthält.

Damit nun diese Gleichung nicht für $f_2=0$, $f_3=0$ identisch werden kann, bestimme man $\frac{n-3.n-5}{8}$ von den in f_1 enthaltenen Constanten so, dass die Curve $f_1=0$ durch eben so viele nicht auf einer Curve $\frac{n-7}{2}$ ter Ordnung gelegenen Punkte geht, so dass

$$f\,x_2x_3+\tfrac{1}{2}f_1(x_1\xi_1-x_2\xi_2-x_3\xi_3)$$

nicht identisch verschwinden kann. Damit ferner

$$f_2x_2-f_3x_3$$

weder identisch verschwindet, noch durch x_1 theilbar wird, bestimme man zunächst $\frac{n-1.n-3}{8}$ von den in f_2 enthaltenen Constanten so, dass die Curve $f_2=0$ durch eben so viele nicht auf einer Curve $\frac{n-5}{2}$ ter Ordnung gelegene Punkte geht, und dann von den in $f_2x_2-f_3x_3$ enthaltenen Constanten $\frac{n^2-1}{8}$ so, dass die Curve $f_2x_2-f_3x_3=0$ durch eben so viele nicht auf einer Curve $\frac{n-3}{2}$ ter Ordnung gelegene Punkte geht. Dann kann (6.) nicht identisch erfüllt sein, und von den in dieser Gleichung noch übrig bleibenden Constanten kann man noch $\frac{n-1.n-3}{8}$ so bestimmen, dass die durch (6.) dargestellte Curve durch eben so viele nicht auf einer Curve $\frac{n-5}{2}$ ter Ordnung gelegene Punkte geht, so dass dieselbe auch nicht eine Curve vierter Ordnung als Theil enthalten kann. Die Zahl der dann noch übrig bleibenden Constanten ist, wie es sein soll,

$$4\frac{n^2-1}{8}-\frac{n-1.n-3}{8}-\frac{n-3.n-5}{8}-\frac{n^2-1}{8}-\frac{n-1.n-3}{8} \;=\; 2n-2.$$

Ist n immer noch ungerade, dagegen die Charakteristik von $\sqrt{\Phi_n}$ auch ungerade, so kann man setzen:

$$(7.)\qquad \sqrt{\Phi_n} \;=\; F\sqrt{x_1}+f\sqrt{\xi_1x_2\xi_2}$$

wenn F, f ganze rationale homogene Functionen resp. von den Ordnungen $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-3}{2}$ sind. Die Anzahl der Constanten ist hier $\frac{(n+1)^2}{4}$, also um $\frac{(n-3)^2}{4}$ zu gross. Ueber diese überzähligen Constanten muss man so verfügen, dass keine Gleichung von der Form:

$$(8.)\qquad F x_1 + \tfrac{1}{2} f(-x_1\xi_1 - x_2\xi_2 + x_3\xi_3) = 0$$

identisch oder mit der Gleichung der Curve vierter Ordnung zugleich besteht. Man bestimmt zu diesem Zweck $\frac{n-1 \,.\, n-3}{8}$ von den in f enthaltenen Constanten so, dass die Curve $f=0$ durch eben so viele nicht auf einer Curve $\frac{n-5}{2}$ter Ordnung gelegene Punkte geht, und dann von den in (8.) noch übrig bleibenden Constanten $\frac{n-3 \,.\, n-5}{8}$ so, dass die Curve (8.) durch so viele nicht auf einer Curve $\frac{n-7}{2}$ter Ordnung gelegene Punkte geht, wonach wieder (8.) nicht identisch erfüllt sein kann und gerade die richtige Anzahl $2n-2$ von Constanten übrig bleibt.

Es giebt also, bei ungeradem n, 64 Systeme von Curven n^{ter} Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung in $2n$ Punkten berühren. Die Berührungspunkte zweier Curven desselben Systems von der Ordnung n resp. n' bilden den vollständigen Durchschnitt einer Curve von der Ordnung $\frac{n+n'}{2}$ mit der Curve vierter Ordnung. Ins Besondere liegen bei ungerader Charakteristik, also bei 28 Systemen die Berührungspunkte einer solchen Curve mit den Berührungspunkten einer bestimmten Doppeltangente auf einer Curve $\frac{n+1}{2}$ ter Ordnung.

Aus dem Bewiesenen folgt, dass in allen Fällen von den $2n$ 0-Punkten einer Wurzelfunction n^{ter} Ordnung $2n-3$ beliebig gegeben sein können, und dass durch diese und die Charakteristik die übrigen drei 0-Punkte im Allgemeinen völlig bestimmt sind. Aber es giebt Ausnahmen, und man erkennt leicht wie oben (bei den Wurzelfunctionen dritter Ordnung) dass wenn $2n-3$ 0-Punkte eine Wurzelfunction von gegebener Charakteristik nicht vollständig bestimmen, in den drei übrigen 0-Punkten eine Function φ verschwinden muss. Es ist zu zeigen, dass auch das Umgekehrte gilt, nämlich:

Wenn von den $3n$ 0-Punkten einer Wurzelfunction n^{ter} Ordnung $\sqrt{\Phi_n}$ drei zugleich 0-Punkte einer Function φ sind, so sind die $2n-3$ übrigen die 0-Punkte von unendlich vielen Wurzelfunctionen $\sqrt{\Phi_n}$ mit derselben Charakteristik.

Um dies nachzuweisen, nehmen wir an es verschwinde

$$\begin{array}{lll} \varphi & \text{in den Punkten} & \varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3, \\ \varphi' & \text{-}\quad\text{-}\quad\text{-} & \varepsilon,\ \varepsilon_1',\ \varepsilon_2',\ \varepsilon_3'. \end{array}$$

Wir bestimmen nun die beiden Functionen $\sqrt{\Phi_n}$, $\sqrt{\Phi_n'}$ mit der gleichen Charakteristik so dass

$$\begin{array}{l} \sqrt{\Phi_n} \text{ in } \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \alpha_1,\ \alpha_2 \ldots \alpha_{2n-6},\ \eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3, \\ \sqrt{\Phi_n'} \text{ in } \varepsilon_1',\ \varepsilon_2',\ \varepsilon_3',\ \alpha_1,\ \alpha_2 \ldots \alpha_{2n-6},\ \eta_1',\ \eta_2',\ \eta_3' \end{array}$$

verschwindet, wo die $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{2n-6}$ beliebig angenommene Punkte sind, während η_1, η_2, η_3; $\eta_1', \eta_2', \eta_3'$ durch diese bestimmt sind. Nun ist die Function

$$\frac{\varphi\sqrt{\Phi'_n}}{\varphi'\sqrt{\Phi_n}}$$

rational und wird unendlich klein in $\eta_1', \eta_2', \eta_3'$,
unendlich gross in η_1, η_2, η_3.

Daraus folgt, dass entweder η_1, η_2, η_3 mit $\eta_1', \eta_2', \eta_3'$ zusammenfallen müssen, in welchem Fall unsere Behauptung bewiesen wäre, oder dass η_1, η_2, η_3 ebenso wie $\eta_1', \eta_1', \eta_3'$ die 0-Punkte je einer Function φ sein müssen. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn die $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{2n-6}$ besondere Lagen haben. Es verschwinde nämlich:

$$\begin{array}{l} \varphi_1 \text{ in } \eta,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3, \\ \varphi_2 \text{ in } \varepsilon,\ \eta,\ \varepsilon',\ \eta' \end{array}$$

und es werde eine Wurzelfunction $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung $\sqrt{\Phi_{n-2}}$ mit der Charakteristik $(\sqrt{\Phi_n})$ bestimmt, welche verschwindet in

$$\alpha_1,\ \alpha_2 \ldots \alpha_{2n-7},\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,$$

wo die $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ durch die α im Allgemeinen bestimmt sind. Nun wird die rationale Function

$$\frac{\varphi\varphi_1\sqrt{\Phi_{n-2}}}{\varphi_2\sqrt{\Phi_n}} \begin{array}{l} = 0 \text{ in } \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3, \\ = \infty \text{ in } \varepsilon',\ \eta',\ \alpha_{2n-6}. \end{array}$$

Es müssten also $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ wiederum 0-Punkte einer Function φ sein und die $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{2n-6}$ könnten nicht allgemein sein, oder es müssten $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ mit $\varepsilon', \eta', \alpha_{2n-6}$ zusammenfallen, und die $2n-6$ Punkte α wären wieder nicht allgemein, sondern müssten 0-Punkte einer Function $\sqrt{\Phi_{n-2}}$ sein.

Aber auch in diesen Fällen bleibt unsere Behauptung richtig, denn setzen wir sie für $n-2$ als bewiesen voraus, so können wir im ersten Fall einen der Punkte $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ beliebig wählen, also mit α_{2n-6} zusammenfallen lassen und es würde folgen:

$$\frac{\varphi\varphi_1\sqrt{\Phi_{n-2}}}{\varphi_2\sqrt{\Phi_n}} = \text{const.}$$

und wir können setzen:

$$\sqrt{\Phi_n} = \frac{\varphi\varphi_1\sqrt{\Phi_{n-2}}}{\varphi_2},$$

und auf gleiche Weise würden wir eine Function $\sqrt{\Phi_n'}$ bestimmen können:

$$\sqrt{\Phi_n'} = \frac{\varphi'\varphi_1\sqrt{\Phi_{n-2}}}{\varphi_2},$$

welche abgesehen von den 0-Punkten von φ und φ' die gleichen 0-Punkte hat. Die Quadrate dieser Functionen können mit Hülfe der Gleichung der Curve vierter Ordnung vom Nenner φ_2^2 befreit werden, so dass sie in der früher betrachteten Form der Wurzelfunctionen dargestellt werden können.

Wir knüpfen hieran den Beweis des folgenden Satzes:

Alle wie T' verzweigten Functionen $\sqrt{\sigma}$ welche in einer endlichen Anzahl von Punkten unendlich gross und unendlich klein von der ersten Ordnung werden (oder auch durch Zusammenfallen mehrerer solcher Punkte in höherer Ordnung) und beim Ueberschreiten der Querschnitte ein Factorensystem ± 1 mit der Charakteristik $(\sqrt{\sigma})$ annehmen, sind in mannigfaltiger Weise als Quotienten zweier Wurzelfunctionen darstellbar.

Es werde

$$\sqrt{\sigma}\ \begin{cases}\text{unendlich klein in } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\mu, \\ \text{unendlich gross in } \varepsilon_1', \varepsilon_2' \ldots \varepsilon_\mu'.\end{cases}$$

Man bestimme eine Wurzelfunction $\sqrt{\Phi_n}$ mit beliebiger Charakteristik, welche in den Punkten $\varepsilon_1', \varepsilon_2' \ldots \varepsilon_\mu'$ unendlich klein wird, wass immer möglich ist, falls

$$2n-3 \geqq \mu$$

angenommen wird. Diese Function verschwindet ausserdem noch in $2n-\mu$ Punkten, die mit $\varepsilon_{\mu+1}', \varepsilon_{\mu+2}' \ldots \varepsilon_{2n}'$ bezeichnet sein mögen. Hierauf bestimme man eine andere Function $\sqrt{\Phi'_n}$ deren Charakteristik aus

$$(\sqrt{\sigma}) = (\sqrt{\Phi_n}) + (\sqrt{\Phi'_n})$$

bestimmt wird, und welche in den Punkten

$$\varepsilon_4, \varepsilon_5 \ldots \varepsilon_\mu, \varepsilon'_{\mu+1}, \varepsilon'_{\mu+2} \ldots \varepsilon'_{2n}$$

unendlich klein wird und ausserdem noch in drei durch diese bestimmten Punkten η_1, η_2, η_3. (Für den Fall dass $\mu = 2$ oder $= 3$ ist, sind nur die Punkte $\varepsilon'_{\mu+1} \ldots \varepsilon'_{2n}$ als Nullpunkte von $\sqrt{\Phi'_n}$ gegeben). Bilden wir jetzt die rationale Function

$$\sqrt{\sigma} : \sqrt{\frac{\Phi'_n}{\Phi_n}}$$

so wird diese unendlich klein in $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, unendlich gross in η_1, η_2, η_3 (oder falls $\mu = 2$ ist, in $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ und in η_1, η_2 woraus folgt dass sie constant ist). Sind nun $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ nicht die 0-Punkte einer Function φ, so müssen η_1, η_2, η_3 mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ zusammenfallen, und wir finden:

$$\sqrt{\sigma} = \text{Const.} \sqrt{\frac{\Phi'_n}{\Phi_n}}.$$

Sind dagegen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ die 0-Punkte einer Function φ, so haben die η_1, η_2, η_3 die gleiche Eigenschaft. Nach dem oben Bewiesenen ist dann einer der Punkte η_1, η_2, η_3 noch willkürlich und kann mit einem der Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ identificirt werden, wodurch wir zum gleichen Resultat gelangen.

§. 21. Die Wurzelfunctionen vierten Grades.

Wir nehmen nun die Untersuchungen des §. 19 wieder auf, in welchem gezeigt wurde, dass eine Wurzelfunction zweiten Grades und dritter Ordnung von vier constanten Coëfficienten linear und homogen abhängt. Man kann also die 0-Punkte einer solchen Function irgend dreien von einander unabhängigen Bedingungen unterwerfen, und wird, falls diese Bedingungen algebraisch sind, eine endliche Anzahl von Functionen erhalten, welche der gestellten Forderung genügen. Wir stellen die Bedingung, dass die sechs 0-Punkte einer solchen Function paarweise zusammenfallen sollen. Die Quadratwurzeln der Functionen welche auf diese Weise entstehen sind als ***Wurzelfunctionen vierten Grades*** zu bezeichnen, da der Quotient zweier solcher Functionen in der Fläche T' stetig bleibt (ausser in drei Punkten, in denen er unendlich wird), beim Ueberschreiten der Querschnitte aber Factoren annimmt, welche vierte Wurzeln der Einheit sind.

Es soll zunächst die Anzahl dieser Functionen bestimmt werden. Zu dem Ende gehen wir aus von der Formel (12.) §. 19:

$$(1.)\quad \sqrt{\frac{\chi}{q x_1 x_2}} = \frac{\vartheta\left(\int_\varepsilon^{\zeta} du_h - v_h\right)\vartheta\{\sqrt{\chi q}\}\left(\int_\gamma^{\zeta} du_h + v_h\right)}{\vartheta\{\sqrt{x_1}\}\left(\int_\varepsilon^{\zeta} du_h\right)\vartheta\{\sqrt{x_2}\}\left(\int_\gamma^{\zeta} du_h\right)}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks verschwindet in sechs Punkten, nämlich in $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, wodurch v_1, v_2, v_3 bestimmt sind:

$$(v_1, v_2, v_3) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{c_1^{(\eta)}}^{\zeta_1} du_h + \int_{c_2^{(\eta)}}^{\zeta_2} du_h + \int_{c_3^{(\eta)}}^{\zeta_3} du_h\right)\right).$$

und in drei von diesen abhängigen Punkten. Sollen die letzteren, wie es unsere Aufgabe verlangt, mit den ersteren zusammenfallen, so muss, wenn $\frac{1}{2}\varpi_1$, $\frac{1}{2}\varpi_2$, $\frac{1}{2}\varpi_3$ ein System zusammengehöriger halber Perioden mit der Charakteristik

$$(\varpi) = (\sqrt{\chi q})$$

bedeutet, die Congruenz bestehen:

$$\left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_\varepsilon^{\zeta} du_h - v_h\right)\right) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_\gamma^{\zeta} du_h + v_h + \tfrac{1}{2}\varpi_h\right)\right);$$

woraus man erhält:

$$(2v_1, 2v_2, 2v_3) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_\varepsilon^{\gamma} du_h + \tfrac{1}{2}\varpi_h\right)\right).$$

oder, wenn $\frac{1}{2}p_1$, $\frac{1}{2}p_2$, $\frac{1}{2}p_3$ ein beliebiges System zusammengehöriger halber Perioden mit der Charakteristik (p) ist:

$$(v_1, v_2, v_3) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\tfrac{1}{2}\int_\varepsilon^{\gamma} du_h + \tfrac{1}{4}\varpi_h + \tfrac{1}{2}p_h\right)\right).$$

Bezeichnen wir also die auf diese Weise sich ergebenden Functionen χ mit Ω und setzen:

$$(\varpi) = \binom{\nu_1\ \nu_2\ \nu_3}{\mu_1\ \mu_2\ \mu_3}, \qquad (p) = \binom{n_1\ n_2\ n_3}{m_1\ m_2\ m_3};$$

so erhält man, nach Unterdrückung constanter Factoren:

$$(2.)\quad \sqrt{\frac{\Omega}{q x_1 x_2}} = e^{-\sum_{i=1}^{i=3}(n_i + \frac{1}{2}\nu_i)\left(\int_\varepsilon^{\zeta} du_i + \int_\gamma^{\zeta} du_i\right)} \frac{\left[\vartheta\left(\int_\varepsilon^{\zeta} du_h + \frac{1}{2}\int_\gamma^{\varepsilon} du_h - \frac{1}{4}\varpi_h - \frac{1}{2}p_h\right)\right]^2}{\vartheta\{\sqrt{x_1}\}\left(\int_\varepsilon^{\zeta} du_h\right)\vartheta\{\sqrt{x_2}\}\left(\int_\gamma^{\zeta} du_h\right)}.$$

Da nun die Charakteristiken (ϖ) und (p) irgend beliebige sein können, so folgt, dass die Anzahl der Functionen $\sqrt{\Omega}$ $64.64 = 4096$ beträgt. In jedem System der Functionen χ kommen 64 Functionen Ω vor.

Betrachten wir nun zwei beliebige unter diesen Functionen Ω, Ω' und setzen:

$$(\varpi') = \begin{pmatrix} \nu'_1 & \nu'_2 & \nu'_3 \\ \mu'_1 & \mu'_2 & \mu'_3 \end{pmatrix}, \qquad (p') = \begin{pmatrix} n'_1 & n'_2 & n'_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix},$$

so ergiebt sich aus der Formel (2.):

$$(3.)\quad \sqrt{\frac{\Omega}{\Omega'}} = e^{-\sum\limits_{i=1}^{i=3}[(n_i-n'_i)+\frac{1}{2}(\nu_i-\nu'_i)]\left\{\int\limits_{\varepsilon}^{\zeta} du_i+\int\limits_{\gamma}^{\zeta} du_i\right\}} \left[\frac{\vartheta\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\zeta} du_h+\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma}^{\varepsilon} du_h-\frac{1}{4}\varpi_h-\frac{1}{2}p_h\right)}{\vartheta\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\zeta} du_h+\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma}^{\varepsilon} du_h-\frac{1}{4}\varpi'_h-\frac{1}{2}p'_h\right)}\right]^2$$

und daraus:

$$(4.)\quad \sqrt[4]{\frac{\Omega}{\Omega'}} = e^{-\sum\limits_{i=1}^{i=3}(n_i-n'_i)+\frac{1}{2}(\nu_i-\nu'_i)\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon}^{\zeta} du_i+\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma}^{\zeta} du_i\right\}} \frac{\vartheta\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\zeta} du_h+\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma}^{\varepsilon} du_h-\frac{1}{4}\varpi_h-\frac{1}{2}p_h\right)}{\vartheta\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\zeta} du_h+\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma}^{\varepsilon} du_h-\frac{1}{4}\varpi'_h-\frac{1}{2}p'_h\right)}.$$

Die erste dieser beiden Functionen (3.) erhält beim Ueberschreiten des Querschnitts a_k den Factor $(-1)^{\nu_k-\nu'_k}$ beim Ueberschreiten von b_k den Factor $(-1)^{\mu_k-\mu'_k}$. Die zweite Function (4.) erhält beim Ueberschreiten des Querschnitts a_k von der negativen auf die positive Seite den Factor

$$e^{-\pi i(n_k - n'_k + \frac{1}{2}(\nu_k - \nu'_k))}$$

und ebenso beim Ueberschreiten von b_k den Factor

$$e^{\pi i(m_k - m'_k + \frac{1}{2}(\mu_k - \mu'_k))},$$

welches, wie man sieht, vierte Wurzeln der Einheit sind.

Nach den früher getroffenen Festsetzungen ist

$$(\sqrt{\Omega}) = (\varpi) + (\sqrt{q})$$

die Charakteristik der Function $\sqrt{\Omega}$. Dieselbe soll als *erste Charakteristik* der Function $\sqrt[4]{\Omega}$ bezeichnet sein, während $(p) = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ die *zweite Charakteristik* der Function $\sqrt[4]{\Omega}$ genannt und mit $(\sqrt[4]{\Omega})$ bezeichnet sein soll. Erste und zweite Charakteristik zusammen bestimmen das Factorensystem, welches eine Function $\sqrt[4]{\frac{\Omega}{\Omega'}}$ beim Ueberschreiten der Querschnitte annimmt, wie oben gezeigt.

Nach der ersten Charakteristik können die Wurzelfunctionen vierten Grades in Systeme eingetheilt werden, so dass alle diese Functionen mit derselben ersten Charakteristik ein System bilden. Wir haben also 64 Systeme von je 64 Wurzelfunctionen vierten Grades. Hiernach kann die erste Charakteristik auch als *Systemcharakteristik* bezeichnet werden.

Nach den bisherigen Definitionen kann von den 64 zweiten Charakteristiken in jedem System eine beliebig angenommen werden, auch wenn die entsprechenden Functionen $\sqrt[4]{\Omega}$ bekannt sind; denn unbeschadet den bisherigen Festsetzungen können wir $\frac{1}{2}\varpi_h$ um ein beliebiges System zusammengehöriger Perioden vermehren, wodurch wir erreichen, dass eines der Systeme $\frac{1}{2}p_h$ ein beliebig gegebenes werde.

Geht man aber von der Darstellung (4.) aus, so wird man zwar auch hier den Integrationsweg in $\int_\varepsilon^\gamma du_h$ so bestimmen können, dass das System $\frac{1}{2}p_h$ ein beliebig gegebenes werde. Ist dieser Integrationsweg aber einmal festgesetzt, so muss für jede bestimmte andere Function $\sqrt[4]{\Omega'}$ das System $\frac{1}{4}\varpi'_h+\frac{1}{2}p'_h$ ein ganz bestimmtes sein.

Es gehört daher zu jeder Function $\sqrt[4]{\Omega}$ ein System zusammengehöriger Viertel der Perioden; von diesen kann nur eines um ein beliebiges System zusammengehöriger halber Perioden geändert werden. Ist über dies eine System irgend wie verfügt, so enthalten die zusammengehörigen Viertel der Perioden, die zu den sämmtlichen Functionen $\sqrt[4]{\Omega}$ gehören, keine Unbestimmtheit mehr (falls die ϑ-Moduln als bestimmt vorausgesetzt werden).

Die geometrische Bedeutung der hier betrachteten Functionen ist die: Die Gleichung $\Omega=0$ stellt eine Curve dritter Ordnung dar, welche die gegebene Curve vierter Ordnung in drei Punkten vierpunktig berührt. Solcher Curven existiren 4096.*)

Um die Wurzelfunctionen vierten Grades auf algebraischem Wege zu definiren, verfahren wir, wie folgt: Es seien $\sqrt{\chi}$, $\sqrt{\chi'}$ zwei Wurzelfunctionen zweiten Grades und dritter Ordnung mit der gleichen Charakteristik. Es ist dann, wie oben gezeigt, das Product $\sqrt{\chi\chi'}$ eine ganze rationale und homogene Function dritter Ordnung f, und wir haben die Gleichung

$$\sqrt{\chi\chi'}-f=0.$$

*) Vgl. *Hesse* l. c. *Clebsch* Anwendung der *Abelschen* Functionen auf Geometrie. *Borchardts* Journal Bd. 63 p. 189.

Gehen nun $\sqrt{\chi}$, $\sqrt{\chi'}$ in die Quadrate von Wurzelfunctionen vierten Grades, $\sqrt{\Omega}$, $\sqrt{\Omega'}$, des gleichen Systems über, so muss f das Quadrat einer Wurzelfunction zweiten Grades und dritter Ordnung werden, deren Charakteristik aber von $(\sqrt{\Omega})$ verschieden ist. Bezeichnen wir also für diesen Fall diese Function mit χ, so haben wir:

$$(5.)\qquad \sqrt{\Omega\Omega'}-\chi = 0$$

und die Charakteristik $(\sqrt{\chi})$ kann jede der 63 von $(\sqrt{\Omega})$ verschiedenen sein.

Mit Hülfe des Ausdrucks der Functionen $\sqrt{\Omega}$ durch ϑ-Functionen lässt sich die Charakteristik $(\sqrt{\chi})$ aus erster und zweiter Charakteristik von $\sqrt[4]{\Omega}$, $\sqrt[4]{\Omega'}$ bestimmen. Bilden wir nämlich nach der Formel (2.) die Function $\frac{\sqrt[4]{\Omega\Omega'}}{\sqrt{qx_1x_2}}$, so tritt im Zähler das Product der beiden ϑ-Functionen auf:

$$\vartheta\Big(\int_\varepsilon^\zeta du_h - v_h\Big)\vartheta\Big(\int_\gamma^\zeta du_h + v_h - \tfrac{1}{2}(\varpi_h + p_h + p'_h)\Big)$$

wenn zur Abkürzung gesetzt ist:

$$v_h = \tfrac{1}{2}\int_\varepsilon^\gamma du_h + \tfrac{1}{4}\varpi_h + \tfrac{1}{2}p_h,$$

$$(\sqrt{\Omega q}) = (\varpi),\quad (\sqrt[4]{\Omega}) = (p),\quad (\sqrt[4]{\Omega'}) = (p').$$

Die Vergleichung dieses Zählers mit dem allgemeinen Ausdruck für $\frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{qx_1x_2}}$ in (1.) ergiebt sofort das Resultat:

$$(\sqrt{\chi q}) = (\varpi)+(p)+(p')$$

oder:

$$(6.)\qquad (\sqrt{\chi}) = (\sqrt{\Omega})+(\sqrt[4]{\Omega})+(\sqrt[4]{\Omega'}),$$

woraus man wieder ersieht, dass in der Formel (5.) alle Charakteristiken $(\sqrt{\chi})$ vorkommen können mit Ausnahme von $(\sqrt{\Omega})$.

Die algebraische Bestimmung der Wurzelfunctionen vierten Grades eines Systems wird, wenn die *Abelschen* Functionen als bekannt vorausgesetzt werden, von der Auflösung einer Gleichung 64^{ten} Grades abhängen, diese Gleichung aber ist durch Quadratwurzeln auflösbar.

Man überzeugt sich hiervon leicht, gestützt auf einen Satz von *Abel* *), durch Anwendung der Gleichung (5.). Aus derselben geht nämlich hervor,

*) *Abel*, Mémoire sur une Classe particulière d'équations resolubles algébriquement, Oeuvres T. I p. 114. Vgl. auch *Clebsch* und *Gordan*. Theorie der *Abelschen* Functionen, zehnter Abschnitt.

dass man aus einer als bekannt vorausgesetzten Function $\sqrt{\Omega}$ alle übrigen desselben Systems rational herleiten kann. Ist die Function $\sqrt{\Omega}$ bekannt, so hängt die Bestimmung der 0-Punkte derselben von der Lösung einer cubischen Gleichung ab. Man kann nun eine Wurzelfunction zweiten Grades und dritter Ordnung $\sqrt{\chi}$ von beliebiger Charakteristik, die nur nicht $=(\sqrt{\Omega})$ sein darf, so bestimmen, dass drei ihrer 0-Punkte mit denen von $\sqrt{\Omega}$ zusammenfallen, und zwar kommen in dieser Function nur symmetrische Combinationen der Wurzeln der erwähnten Gleichung vor, woraus folgt, dass die Coëfficienten der Function $\sqrt{\chi}$ rational durch die von $\sqrt{\Omega}$ ausdrückbar sind.

Bestimmt man dann weiter eine Wurzelfunction zweiten Grades und dritter Ordnung mit der Charakteristik $(\sqrt{\Omega})$, welche in den drei übrigen 0-Punkten der Function $\sqrt{\chi}$ verschwindet, so kann diese wieder rational durch die Coëfficienten von $\sqrt{\chi}$, also auch durch die von $\sqrt{\Omega}$ dargestellt werden. Diese letztere Function kann aber keine andere sein als $\sqrt{\Omega'}$ und diese ist sonach rational aus $\sqrt{\Omega}$ abgeleitet. Was die zweite Charakteristik dieser Function anlangt, so hat man, wenn die von $\sqrt[4]{\Omega}$ festgesetzt ist:

$$(7.)\qquad (\sqrt[4]{\Omega'}) = (\sqrt{\Omega})+(\sqrt[4]{\Omega})+(\sqrt{\chi}).$$

Daraus geht hervor, dass die sämmtlichen Wurzeln der in Rede stehenden Gleichung 64^{ten} Grades rational durch eine derselben ausdrückbar sind. Diese Eigenschaft genügt noch nicht, um die algebraische Auflösbarkeit einer solchen Gleichung darzuthun.

Nehmen wir aber an, es sei eine dritte Function $\sqrt{\Omega_1}$ durch Vermittlung einer andern Wurzelfunction zweiten Grades $\sqrt{\chi_1}$ auf gleiche Weise aus $\sqrt{\Omega}$ hergeleitet wie $\sqrt{\Omega'}$, und benutzen die Function $\sqrt{\chi}$ zur Ableitung einer vierten Function $\sqrt{\Omega_1'}$ aus $\sqrt{\Omega_1}$ und die Function $\sqrt{\chi_1}$ zur Herleitung einer fünften Function $\sqrt{\Omega''}$ aus $\sqrt{\Omega'}$, so haben diese Functionen folgende Charakteristiken:

$$\begin{aligned}
(\sqrt[4]{\Omega'}) &= (\sqrt[4]{\Omega}) + (\sqrt{\Omega}) + (\sqrt{\chi}),\\
(\sqrt[4]{\Omega_1}) &= (\sqrt[4]{\Omega}) + (\sqrt{\Omega}) + (\sqrt{\chi_1}),\\
(\sqrt[4]{\Omega_1'}) &= (\sqrt[4]{\Omega_1}) + (\sqrt{\Omega}) + (\sqrt{\chi}) = (\sqrt[4]{\Omega}) + (\sqrt{\chi}) + (\sqrt{\chi_1}),\\
(\sqrt[4]{\Omega''}) &= (\sqrt[4]{\Omega'}) + (\sqrt{\Omega}) + (\sqrt{\chi_1}) = (\sqrt[4]{\Omega}) + (\sqrt{\chi}) + (\sqrt{\chi_1}),
\end{aligned}$$

woraus hervorgeht, dass die beiden Functionen $\sqrt{\Omega_1''}$ und $\sqrt{\Omega''}$ mit einander identisch sind.

Ist demnach λ die Unbekannte der fraglichen Gleichung 64ten Grades, etwa einer der Coëfficienten von $\sqrt{\Omega}$, und zugleich diejenige Wurzel, welche zu der Function $\sqrt{\Omega}$ führt, sind ferner λ', λ_1', λ'', λ_1'' die Wurzeln, welche zu den Functionen $\sqrt{\Omega'}$, $\sqrt{\Omega_1'}$, $\sqrt{\Omega''}$, $\sqrt{\Omega_1''}$ führen, so ist

$$\lambda'' = \lambda_1'',$$

und wenn $f(\lambda)$, $f_1(\lambda)$ rationale Functionen bedeuten:

$$\lambda' = f(\lambda), \quad \lambda_1' = f_1(\lambda), \quad \lambda'' = f_1(\lambda'), \quad \lambda_1'' = f(\lambda_1')$$

also:

$$ff_1(\lambda) = f_1 f(\lambda)$$

und dies ist nach der erwähnten *Abelschen* Abhandlung die hinreichende Bedingung für die algebraische Auflösbarkeit unserer Gleichung. Da der Grad derselben $64 = 2^6$ ist, so sind nur quadratische Gleichungen in letzter Instanz zu lösen.

§. 22. Algebraische Bestimmung der Wurzelfunctionen vierten Grades mit ungerader Systemcharakteristik.

Wir geben in Folgendem einen directen Beweis für die algebraische Bestimmbarkeit der Wurzelfunctionen vierten Grades, welcher zugleich zeigt, wie in einem gegebenen Fall die Rechnung wirklich geführt werden kann, beschränken uns aber dabei auf die Annahme einer ungeraden ersten Charakteristik, welches die einfachere und zugleich für die spätere Anwendung ausreichende ist.

Es sei demnach die Charakteristik der gesuchten Function $\sqrt{\Omega} = (\sqrt{x_1})$ und $\sqrt{x_1}$ die entsprechende *Abelsche* Function. Nach §. 19 kann die Function $\sqrt{\Omega}$ in der Form dargestellt werden:

$$\sqrt{\Omega} = m\sqrt{x_1} + 2\sqrt{\xi_1 x_2 \xi_2},$$

wenn $\sqrt{\xi_1}$, $\sqrt{x_2}$, $\sqrt{\xi_2}$ *Abelsche* Functionen bedeuten, die der Bedingung genügen:

$$(\sqrt{x_1 \xi_1}) = (\sqrt{x_2 \xi_2})$$

und m eine lineare homogene Function der drei unabhängigen Veränderlichen.

Es lassen sich die 64 Functionen $\sqrt{\Omega}$ so in 32 Paare $\sqrt{\Omega}$, $\sqrt{\Omega'}$ zusammenstellen, dass

$$(\sqrt{x_2}) = (\sqrt{\Omega}) + (\sqrt[4]{\Omega}) + (\sqrt[4]{\Omega'}),$$

denn zu jeder zweiten Charakteristik $(\sqrt[4]{\Omega})$ findet man dieser Bedingung gemäss eine bestimmte andere $(\sqrt[4]{\Omega'})$. Ist daher $\sqrt{\chi}$ eine Wurzelfunction zweiten Grades und dritter Ordnung mit der Charakteristik $(\sqrt{x_2})$, so gilt die Gleichung

$$\sqrt{\chi} = \sqrt[4]{\Omega\Omega'}.$$

Bedeuten also m, m', μ noch unbekannte lineare homogene Functionen der drei unabhängigen Veränderlichen, h eine unbekannte Constante, so lässt sich diese Gleichung so schreiben:

$$(1.) \qquad (m\sqrt{x_1} + 2\sqrt{\xi_1 x_2 \xi_2})(m'\sqrt{x_1} + 2\sqrt{\xi_1 x_2 \xi_2}) = (\mu\sqrt{x_2} + h\sqrt{\xi_1 x_1 \xi_2})^2,$$

eine Gleichung, durch welche die Bedingungen unserer Aufgabe vollständig ausgedrückt sind. Als Unbekannte treten auf die 9 Constanten in m, m', μ und die Constante h.

Die Gleichung (1.) lässt sich rational machen, wenn man ein weiteres Paar *Abelscher* Functionen $\sqrt{x_3\xi_3}$ einführt, welches in die Gruppe $(\sqrt{x_1\xi_1})$ gehört, so dass eine Gleichung von der Form besteht:

$$\sqrt{x_1\xi_1} + \sqrt{x_2\xi_2} + \sqrt{x_3\xi_3} = 0.$$

Damit geht die Gleichung (1.) über in:

$$(2.) \qquad \begin{cases} mm'x_1 + (m+m')(-x_1\xi_1 - x_2\xi_2 + x_3\xi_3) + 4\xi_1 x_2 \xi_2 \\ \quad = \mu^2 x_2 + h\mu(-x_1\xi_1 - x_2\xi_2 + x_3\xi_3) + h^2 x_1 \xi_1 \xi_2 \end{cases}$$

und diese Gleichung muss, da sie von der dritten Ordnung ist, identisch sein. Das Gleichsetzen der Coëfficienten entsprechender Glieder auf beiden Seiten liefert zur Bestimmung der zehn Unbekannten zehn Gleichungen. Die Coëfficienten von m müssen sich daraus auf 64 Arten ergeben, die von μ aber und h nur auf 32 Arten (abgesehen von einer gemeinschaftlichen Aenderung der Vorzeichen), da durch die Vertauschung von m mit m', μ und h nicht geändert werden.

Setzen wir zunächst, um abzukürzen

$$(3.) \qquad m + m' - h\mu = q,$$

so lässt sich (2.) in folgende Form setzen:

$$(4.) \qquad x_1(mm' - \xi_1 q - h^2\xi_1\xi_2) - x_2(\mu^2 + \xi_2 q - 4\xi_1\xi_2) = -x_3\xi_3 q.$$

18 *

Hieraus folgt nun, da für $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ weder x_3 noch ξ_3 verschwinden kann (p. 83), dass q von der Form sein muss:

$$(5.)\qquad q = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

wenn α_1, α_2 noch unbestimmte Constanten sind. Darnach lässt sich (4.) schreiben:

$$(6.)\qquad x_1(mm' - \xi_1 q - h^2\xi_1\xi_2 + \alpha_1 x_3 \xi_3) = x_2(\mu^2 + \xi_2 q - 4\xi_1\xi_2 - \alpha_2 x_3 \xi_3),$$

woraus, mit Einführung einer neuen noch unbekannten linearen homogenen Function p folgt:

$$(7.)\qquad mm' - \xi_1 q - h^2\xi_1\xi_2 + \alpha_1 x_3\xi_3 = x_2 p,$$

$$(8.)\qquad \mu^2 + \xi_2 q - 4\xi_1\xi_2 - \alpha_2 x_3 \xi_3 = x_1 p.$$

Wir können nun irgend drei der sechs Functionen x_1, x_2, x_3, ξ_1, ξ_2, ξ_3 als unabhängige Variablen betrachten und die übrigen durch dieselben ausdrücken. Für die folgende Rechnung am Einfachsten ist es, x_1, ξ_1, ξ_2 als die unabhängigen Veränderlichen zu wählen. (Durch passende Wahl von x_2, ξ_1, ξ_2 lässt es sich stets vermeiden, dass zwischen x_1, ξ_1, ξ_2 eine lineare homogene Relation besteht.) Wir setzen demnach

$$(9.)\qquad \begin{cases} x_2 = a\,x_1 + b\,\xi_1 + c\,\xi_2, \\ x_3 = a'\,x_1 + b'\,\xi_1 + c'\,\xi_2, \\ \xi_3 = a''x_1 + b''\xi_1 + c''\xi_2, \end{cases}$$

worin die Coëfficienten $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ als bekannte Constanten zu betrachten sind und leicht durch die Classenmoduln dargestellt werden.

Setzen wir nun in der identischen Gleichung (8.) $x_1 = 0$ so ergiebt sich

$$\mu^2 = 4\xi_1\xi_2 - \alpha_2(x_2\xi_2 - x_3\xi_3),$$

oder wegen (9.):

$$(10.)\qquad \mu^2 = \alpha_2 b'b''\xi_1^2 + \alpha_2(c'c'' - c)\xi_2^2 + (4 - \alpha_2(b - b'c'' - c'b''))\xi_1\xi_2,$$

und die Bedingung, dass dieser Ausdruck ein vollständiges Quadrat sein muss, liefert für α_2 eine quadratische Gleichung:

$$(11.)\qquad 4\alpha_2^2 b'b''(c'c'' - c) = (4 - \alpha_2(b - b'c'' - c'b''))^2.$$

Hieraus erhält man zwei Werthe von α_2 und aus (10.) folgt dann, immer unter der Voraussetzung $x_1 = 0$:

$$(12.)\qquad \mu = \xi_1\sqrt{\alpha_2 b'b''} + \xi_2\sqrt{\alpha_2(c'c'' - c)}.$$

Die Vorzeichen dieser beiden Quadratwurzeln sind aber nicht von einander unabhängig sondern das eine ist durch das andere bestimmt mittels der Gleichung

$$2\sqrt{\alpha_2 b' b''}\sqrt{\alpha_2}(c'c''-c) = 4-\alpha_2(b-b'c''-c'b'').$$

Setzen wir daher

$$(13.)\qquad \mu = \gamma x_1+\gamma'\xi_1+\gamma''\xi_2,$$

so haben wir

$$(14.)\quad \gamma' = \sqrt{\alpha_2 b' b''},\quad \gamma'' = \sqrt{\alpha_2(c'c''-c)},\quad 2\gamma'\gamma'' = \alpha_2(b'c''+b''c'-b)+4.$$

Da eine gleichzeitige Aenderung der Vorzeichen sämmtlicher Coëfficienten von μ und von h keine neue Lösung unseres Problems liefert, so ist durch (14.) das System der Unbekannten γ', γ'' nur auf zwei wesentlich verschiedene Arten bestimmt, entsprechend den beiden Werthen von α_2 und zu jedem dieser Werthsysteme muss daher γ noch auf 16 verschiedene Arten bestimmt werden.

Substituirt man den so erhaltenen Ausdruck für μ in (8.) so lässt sich diese Gleichung durch x_1 dividiren und man erhält

$$(15.)\quad \begin{cases} p-\alpha_1\xi_1 = x_1(\gamma^2-\alpha_2 a'a'')+\xi_1(2\gamma\gamma'-\alpha_2(a'b''+b'a'')) \\ \qquad\qquad +\xi_2(2\gamma\gamma''-\alpha_2(a'c''+c'a''-a)), \end{cases}$$

so dass auf der rechten Seite dieser Gleichung nur die eine Unbekannte γ vorkommt, deren Bestimmung wir bis zuletzt versparen.

Um m und m' zu erhalten leiten wir zunächst aus (3.) folgende Gleichung ab:

$$(16.)\qquad (m+m')^2 = h^2\mu^2+2h\mu q+q^2,$$

ferner ergiebt sich aus (7.) und (8.) durch Elimination von $x_3\xi_3$

$$(17.)\qquad \alpha_2 mm' = (\alpha_2 h^2+4\alpha_1)\xi_1\xi_2+q(p-\alpha_1\xi_2+\alpha_2\xi_1)-\alpha_1\mu^2$$

und aus (16.) und (17.)

$$(18.)\qquad \alpha_2(m-m')^2 = \lambda(\mu^2-4\xi_1\xi_2)+qr,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt ist

$$(19.)\qquad \lambda = h^2\alpha_2+4\alpha_1,$$

$$(20.)\qquad r = q\alpha_2+2h\mu\alpha_2-4(p-\alpha_1\xi_2)-4\alpha_2\xi_1,$$

so dass λ eine Constante, r eine lineare homogene Function von x_1, ξ_1, ξ_2 ist. Stellen wir nun die Bedingungen auf, dass die rechte Seite von (18.) ein vollständiges Quadrat sei, so ergeben sich drei Gleichungen, welche nur noch die drei Unbekannten α_1, h, γ enthalten; sind diese aus denselben bestimmt, so kann man aus (18.) die Wurzel ziehen und hieraus und aus (3.) ergeben sich dann unmittelbar die ursprünglich gesuchten Functionen m, m'.

Um diese Rechnung durchzuführen drücken wir die beiden Functionen q und r aus durch die drei Functionen μ, ξ_1, ξ_2 in der Form

$$(21.)\quad \begin{cases} q = \varrho\mu+\varrho_1\xi_1+\varrho_2\xi_2, \\ r = \sigma\mu+\sigma_1\xi_1+\sigma_2\xi_2, \end{cases}$$

worin ϱ, ϱ_1, ϱ_2, σ, σ_1, σ_2 Constanten bedeuten, auf die wir alsbald zurückkommen.

Soll nun die rechte Seite von (18.) ein Quadrat sein, so muss sie es auch bleiben für $q=0$ d. h. für $\mu = -\frac{\varrho_1\xi_1+\varrho_2\xi_2}{\varrho}$; also muss

$$\left(\frac{\varrho_1\xi_1+\varrho_2\xi_2}{\varrho}\right)^2-4\xi_1\xi_2$$

ein Quadrat sein, woraus die erste Bedingung folgt:

$$(22.)\quad \varrho_1\varrho_2 = \varrho^2.$$

Auf die gleiche Weise ergiebt sich die zweite Bedingung:

$$(23.)\quad \sigma_1\sigma_2 = \sigma^2.$$

Die dritte Bedingung erhält man, wenn man in dem allgemeinen Ausdruck (18.) das Quadrat des Coëfficienten von $\mu\xi_1$ gleichsetzt dem vierfachen Product der Coëfficienten von μ^2 und ξ^2:

$$4(\lambda+\varrho\sigma)\varrho_1\sigma_1 = (\varrho\sigma_1+\varrho_1\sigma)^2,$$

wofür man mit Benutzung von (22.) und (23.) auch schreiben kann

$$(24.)\quad 4\lambda = \varrho_1\sigma_2+\varrho_2\sigma_1-2\varrho\sigma.$$

Sind die Gleichungen (22.), (23.), (24.) befriedigt, so ergiebt sich aus (18.)

$$(25.)\quad \sqrt{\alpha_2}(m-m') = \mu\tfrac{1}{2}(\sqrt{\varrho_1\sigma_2}+\sqrt{\varrho_2\sigma_1})+\xi_1\sqrt{\varrho_1\sigma_1}+\xi_2\sqrt{\varrho_2\sigma_2},$$

worin die Vorzeichen der Quadratwurzeln alle durch eins derselben bestimmt sind vermittelst der Gleichungen

$$\sqrt{\varrho_1\sigma_1}\sqrt{\varrho_2\sigma_2} = \varrho\sigma, \quad \sqrt{\varrho_1\sigma_2}\sqrt{\varrho_2\sigma_1} = \varrho\sigma,$$

$$\sqrt{\varrho_1\sigma_1}(\sqrt{\varrho_1\sigma_2}+\sqrt{\varrho_2\sigma_1}) = \varrho\sigma_1+\varrho_1\sigma, \quad \sqrt{\varrho_2\sigma_2}(\sqrt{\varrho_1\sigma_2}+\sqrt{\varrho_2\sigma_1}) = \varrho\sigma_2+\varrho_2\sigma.$$

Eine gleichzeitige Aenderung aller Zeichen bewirkt nur eine Vertauschung von m mit m'.

Um nun die Gleichungen für die noch fehlenden Unbekannten aufzustellen, müssen wir die Ausdrücke für die Constanten ϱ, ϱ_1; ϱ_2; σ, σ_1, σ_2 bilden.

Zunächst ergiebt sich aus

$$q = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 (a x_1 + b\xi_1 + c\xi_2)$$

und

$$x_1 = \frac{\mu - \gamma'\xi_1 - \gamma''\xi_2}{\gamma}$$

$$q = \mu\frac{\alpha_1 + a\alpha_2}{\gamma} + \xi_1\left(\alpha_2 b - \gamma'\frac{\alpha_1 + a\alpha_2}{\gamma}\right) + \xi_2\left(\alpha_2 c - \gamma''\frac{\alpha_1 + a\alpha_2}{\gamma}\right),$$

also:

$$(26.)\qquad \varrho = \frac{\alpha_1 + a\alpha_2}{\gamma}; \quad \varrho_1 = \alpha_2 b - \gamma'\varrho, \quad \varrho_2 = \alpha_2 c - \gamma''\varrho,$$

also nach (22.):

$$(27.)\qquad \varrho^2 = (\alpha_2 b - \gamma'\varrho)(\alpha_2 c - \gamma''\varrho);$$

was, da α_2, γ', γ'' schon bestimmt sind, eine quadratische Gleichung für ϱ ist. Aus (26.) erhält man zu jedem Werth von ϱ ein bestimmtes Werthsystem von ϱ_1, ϱ_2, so dass jetzt ϱ, ϱ_1, ϱ_2 zu den bekannten Grössen zu rechnen sind.

Eine gleichzeitige Aenderung der Vorzeichen von γ', γ'' bedingt eine Vorzeichenänderung von ϱ, die nach (26.) eine Vorzeichenänderung von γ zur Folge hat. Wir erhalten demnach nur vier wesentlich verschiedene Werthsysteme von ϱ, ϱ_1, ϱ_2, entsprechend den beiden Werthen von α_2 und den beiden Wurzeln der Gleichung (27.).

Es folgt nun weiter aus (21.), (20.), (15.):

$$(28.)\qquad \begin{cases} \sigma = (\varrho + 2h)\alpha_2 - 4\dfrac{\gamma^2 - \alpha_2 a' a''}{\gamma}, \\ \sigma_1 = \varrho_1\alpha_2 + 4\alpha_2(a'b'' + b'a'' - 1) - 4\gamma'\dfrac{\gamma^2 + \alpha_2 a' a''}{\gamma}, \\ \sigma_2 = \varrho_2\alpha_2 + 4\alpha_2(a'c'' + c'a'' - a) - 4\gamma''\dfrac{\gamma^2 + \alpha_2 a' a''}{\gamma}. \end{cases}$$

Ferner folgt aus (26.) und (19.):

$$(29.)\qquad \alpha_1 = \gamma\varrho - \alpha_2 a, \quad \lambda = h^2\alpha_2 + 4(\gamma\varrho - \alpha_2 a),$$

wodurch die Unbekannte α_1 eliminirt ist. Die Gleichungen (23.), (24.) liefern nun die nöthigen Mittel zur Bestimmung der beiden noch fehlenden Unbekannten γ und h. Diese Bestimmung muss von einer Gleichung achten Grades abhängen, welche sich auf eine Gleichung vom vierten und eine vom zweiten Grade zurückführen lässt.

Substituirt man zunächst (28.) und (29.) in (24.) so folgt:

$$(30.)\quad \begin{cases} (\varrho+2h)^2 = -4\dfrac{\gamma'\varrho_2+\gamma''\varrho_1+2\varrho}{\alpha_2}\dfrac{\gamma^2+\alpha_2 a'a''}{\gamma}+\varrho^2+16a \\ \qquad +4\varrho_2(a'b''+b'a''-1)+4\varrho_1(a'c''+c'a''-a). \end{cases}$$

Hiernach liegt es nahe, die Grösse

$$(31.)\quad \frac{\gamma^2+\alpha_2 a'a''}{\gamma} = s$$

als Unbekannte einzuführen, wonach man erhält:

$$(32.)\quad \left(\frac{\gamma^2-\alpha_2 a'a''}{\gamma}\right)^2 = s^2-4a'a''\alpha_2.$$

Dann können wir (30.) abgekürzt so schreiben:

$$(33.)\quad (\varrho+2h)^2 = As+B,$$

wo A und B bekannte Grössen bedeuten.

Setzen wir ferner in (23.) die Werthe (28.) ein, so erhält man, gleichfalls in abgekürzter Bezeichnung

$$\alpha_2^2(\varrho+2h)^2-8\alpha_2(\varrho+2h)\frac{\gamma^2-\alpha_2 a'a''}{\gamma}+16\left(\frac{\gamma^2-\alpha_2 a'a''}{\gamma}\right)^2 = Cs^2+Ds+E,$$

oder mit Benutzung (32.), (33.):

$$(34.)\quad (\varrho+2h)\frac{\gamma^2-\alpha_2 a'a''}{\gamma} = A's^2+B's+C',$$

worin C, D, E, A', B', C' ebenfalls bekannte Grössen sind. Erheben wir endlich (34.) ins Quadrat, so ergiebt sich, wieder mit Benutzung von (32.), (33.)

$$(35.)\quad (As+B)(s-4a'a''\alpha_2) = (A's^2+B's+C')^2,$$

welches eine Gleichung vierten Grades für s ist. Hat man diese gelöst, so findet man aus (31.) durch Auflösung einer quadratischen Gleichung die zugehörigen Werthe von γ und aus (34.) und (29.) ergeben sich in eindeutiger Weise die zugehörigen Werthe von h und α_1 wodurch unsere Aufgabe vollständig gelöst ist.

Dass uns hier eine Gleichung vierten Grades übrig geblieben ist, während nach der allgemeinen Theorie quadratische Gleichungen zur Lösung ausreichen sollten, hat darin seinen Grund, dass wir hier nur sechs von den *Abelschen* Functionen benutzt haben, von denen aus man nur mittelst einer Gleichung vierten Grades zu den übrigen gelangen kann. Die Ausdrücke sind aber zu complicirt, um die Reduction der übrig gebliebenen Gleichung vierten Grades auf quadratische Gleichungen durch Benutzung weiterer *Abelscher* Functionen übersehen zu können. Immerhin ist das Problem auf algebraisch lösbare Gleichungen zurückgeführt.

Bei der hier durchgeführten Berechnung der Functionen $\sqrt{\Omega}$ eines bestimmten Systems sind noch nicht die zweiten Charakteristiken der einzelnen Functionen bestimmt. Um dieses zu können muss man sich des Verfahrens bedienen, welches im §. 21 angedeutet wurde, worüber hier noch Folgendes bemerkt werden soll. Will man die beschwerliche Berechnung der dort erwähnten symmetrischen Functionen vermeiden, so kann man folgenden Weg einschlagen: Nehmen wir an, es sei eine der Functionen $\sqrt{\Omega}$ bekannt:

$$\sqrt{\Omega} = m\sqrt{x_1} + 2\sqrt{\xi_1 x_2 \xi_2}$$

und man habe derselben eine beliebige zweite Charakteristik $(\sqrt[4]{\Omega})$ ertheilt. Eine zweite, daraus herzuleitende Function sei

$$\sqrt{\Omega'} = m'\sqrt{x_1} + 2\sqrt{\xi_1 x_2 \xi_2},$$

die zweite Charakteristik $(\sqrt[4]{\Omega'})$ sei vorgeschrieben. Es handelt sich um die Bestimmung der drei in m' enthaltenen unbekannten Coëfficienten. Man nimmt zu diesem Zweck eine Wurzelfunction zweiten Grades und dritter Ordnung $\sqrt{\chi}$, deren Charakteristik nach §. 21 aus der Gleichung bestimmt ist:

$$(\sqrt{\chi}) = (\sqrt{\Omega}) + (\sqrt[4]{\Omega}) + (\sqrt[4]{\Omega'}).$$

Diese Function enthält linear und homogen vier unbekannnte Coëfficienten die mit α_1, α_2, α_3, α_4 bezeichnet sein mögen, und man hat die Gleichung zu befriedigen:

$$\sqrt{\Omega\Omega'} = \chi,$$

welche, rational gemacht, vom dritten Grade ist, und daher identisch sein muss. Vergleicht man also die Coëfficienten entsprechender Glieder auf beiden Seiten, so erhält man zehn Gleichungen von der Form:

$$\alpha_1^2 = A_1, \quad \alpha_2^2 = A_2, \quad \alpha_3^2 = A_3, \quad \alpha_4^2 = A_4,$$
$$\alpha_1\alpha_2 = A_{12}, \quad \alpha_1\alpha_3 = A_{13}, \quad \alpha_1\alpha_4 = A_{14},$$
$$\alpha_3\alpha_4 = A_{34}, \quad \alpha_4\alpha_2 = A_{42}, \quad \alpha_2\alpha_3 = A_{23},$$

wenn die Grössen A lineare Functionen der drei in m' enthaltenen Unbekannten sind. Durch Elimination der α ergeben sich hieraus die sechs Gleichungen

$$A_1 A_2 = A_{12}^2, \quad A_1 A_3 = A_{13}^2, \quad A_1 A_4 = A_{14}^2,$$
$$A_3 A_4 = A_{34}^2, \quad A_4 A_2 = A_{42}^2, \quad A_2 A_3 = A_{23}^2,$$

so dass man zur Bestimmung der drei Unbekannten sechs quadratische Gleichungen erhält, von denen man weiss, dass sie ein und nur ein System gemeinsamer Lösungen haben. Man kann also durch Elimination lineare Gleichungen für diese Unbekannten herleiten. Diese Rechnung hat durchaus keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Aus der besonderen Form der Gleichungen ergeben sich auch noch einige Vereinfachungen, jedoch ist kaum zu erwarten, dass man im Allgemeinen zu irgend wie übersichtlichen Ausdrücken werde gelangen können.

Nach diesen Erörterungen haben wir die Wurzelfunctionen vierten Grades eines Systems mit ungerader Charakteristik sammt ihren zweiten Charakteristiken als bekannt anzusehen, wenn über eine dieser letzteren nach Willkür verfügt ist. Nun haben wir aber im §. 21 gesehen, dass nur in *einem* System über eine zweite Charakteristik willkürlich verfügt werden kann, und dass, wenn diese festgesetzt ist, zu jeder Wurzelfunction vierten Grades ein bestimmtes System zusammengehöriger Viertel der Perioden gehört. Diese Bestimmung kann aber ihrer Natur nach nicht vollständig auf algebraischem Wege erledigt werden. Wir werden zu diesem Zweck weiter unten andere Mittel kennen lernen.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass man in ähnlicher Weise wie die *Abelschen* Functionen zur Darstellung der Wurzelfunctionen zweiten Grades, so die hier betrachteten speciellen Wurzelfunctionen vierten Grades, (die dann als Wurzelfunctionen vierten Grades und erster Ordnung zu bezeichnen wären) zur Darstellung allgemeinerer Wurzelfunctionen vierten Grades benutzen kann. Geometrisch führen diese Functionen zu Curvensystemen höherer Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung überall wo sie derselben begegnen, vierpunktig berühren. Wir gehen auf diese Untersuchungen hier nicht näher ein, da wir in der Folge keinen Gebrauch von denselben zu machen haben.

§. 23. Ein Ausnahmefall.

Es ist hier der Ort, eines Ausnahmefalles zu gedenken, in welchem sich die Einführung der Wurzelfunctionen vierten Grades ganz umgehen lässt, und für welche daher die weitere Theorie der algebraischen Integrale eine besonders einfache Gestalt erhalten würde.

Es ist in §. 21 bei Bestimmung der Anzahl der Wurzelfunctionen vierten Grades stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass von den Functionen

$$(1.)\quad \vartheta\left(\int_{\varepsilon}^{z} du_h - \tfrac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\gamma} du_h - \tfrac{1}{4}\varpi_h\right)$$

keine identisch verschwindet. Untersuchen wir nun, was in dieser Voraussetzung enthalten ist, und was eintritt, wenn dieselbe nicht erfüllt ist.

Nach §. 10, IV. ist diese Voraussetzung dann, und nur dann, nicht erfüllt, wenn sich ein Punkt η bestimmen lässt, welcher der Congruenz genügt:

$$(2.)\quad \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\tfrac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\gamma} du_h + \int_{c_1^{(0)}}^{\eta} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{\varepsilon} du_h + \int_{c_3^{(0)}}^{\varepsilon} du_h\right)\right) \equiv (-\tfrac{1}{4}\varpi_1, -\tfrac{1}{4}\varpi_2, -\tfrac{1}{4}\varpi_3),$$

welche durch Multiplication mit 4 übergeht in:

$$(3.)\quad \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(4\int_{c_1^{(0)}}^{\eta} du_h + 2\int_{c_2^{(0)}}^{\varepsilon} du_h + 2\int_{c_2^{(0)}}^{\gamma} du_h + 4\int_{c_3^{(0)}}^{\varepsilon} du_h\right)\right) \equiv (0, 0, 0).$$

Es muss also eine rationale Function σ existiren, welche unendlich gross in der vierten Ordnung wird in den Punkten $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, c_3^{(0)}$, unendlich klein in der zweiten Ordnung in γ, in der vierten Ordnung in η und in der sechsten Ordnung in ε. Ist nun $\sqrt{q}$ die *Abelsche* Function deren 0-Punkte ε, γ sind, $\sqrt{\Psi_0}$ die Wurzelfunction zweiter Ordnung, die in $\gamma, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, c_3^{(0)}$ verschwindet, und bestimmen wir eine Function φ, die unendlich klein in der zweiten Ordnung wird in dem Punkt η, so ist

$$\sigma' = \frac{\varphi q^3}{\Psi_0^2}$$

eine rationale Function, die mit σ sämmtliche Unendlichkeitspunkte und sämmtliche 0-Punkte bis auf zwei, nämlich die zwei von η verschiedenen 0-Punkte von φ gemeinschaftlich hat, und demnach würde $\sigma : \sigma'$ nur in je zwei Punkten Null und unendlich, wenn es nicht constant, also σ mit σ' bis auf einen constanten Factor identisch wäre. Da ersteres nicht möglich ist, so müssen die vier 0-Punkte von φ mit dem Punkt η zusammenfallen. Es muss also der Punkt η ein solcher sein, in dem eine Function φ unendlich klein von der vierten Ordnung wird. Unser Ausnahmefall tritt also dann, und nur dann ein, wenn eine *Abelsche* Function, die wir mit $\sqrt{p}$ bezeichnen wollen, die Eigenschaft hat, dass ihre beiden 0-Punkte zusammenfallen, oder geometrisch, wenn die der Theorie zu Grunde liegende Curve vierter Ordnung eine vierpunktig berührende Tangente besitzt.

Auch die Umkehrung hiervon ist richtig, denn nehmen wir an, es existire eine solche *Abelsche* Function $\sqrt{p}$ mit zusammenfallenden 0-Punkten η und bestimmen wir eine Wurzelfunction zweiter Ordnung $\sqrt{\Psi}$ mit der Charakteristik $(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{p})$ und den 0-Punkten γ, c_1, c_2, c_3, so ist die Function

$$\sigma = \frac{q\sqrt{pq}}{\sqrt{\Psi\Psi_0}}$$

rational und wird unendlich klein, resp. unendlich gross in den Punkten

$$\begin{matrix} \varepsilon, & \varepsilon, & \varepsilon, & \gamma, & \eta, & \eta, \\ c_1^{(0)}, & c_2^{(0)}, & c_3^{(0)}, & c_1, & c_2, & c_3. \end{matrix}$$

Es ist daher nach dem *Abelschen* Theorem

$$(4.) \qquad \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{c_1^{(0)}}^{\eta} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{\varepsilon} du_h + \int_{c_3^{(0)}}^{\varepsilon} du_h + \int_{c_1}^{\eta} du_h + \int_{c_2}^{\varepsilon} du_h + \int_{c_3}^{\gamma} du_h\right)\right) \equiv (0, 0, 0),$$

ferner nach §. 17:

$$(5.) \qquad \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{c_1^{(0)}}^{c_1} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{c_2} du_h + \int_{c_3^{(0)}}^{c_3} du_h\right)\right) \equiv (\tfrac{1}{2}\varpi_1, \tfrac{1}{2}\varpi_2, \tfrac{1}{2}\varpi_3),$$

wenn

$$(\varpi) = (\sqrt{pq}),$$

und aus (4.), (5.) folgt:

$$(6.) \qquad \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(2\int_{c_1^{(0)}}^{\eta} du_h + 2\int_{c_2^{(0)}}^{\varepsilon} du_h + 2\int_{c_3^{(0)}}^{\varepsilon} du_h + \int_{\varepsilon}^{\gamma} du_h\right)\right) \equiv (\tfrac{1}{2}\varpi_1, \tfrac{1}{2}\varpi_2, \tfrac{1}{2}\varpi_3),$$

woraus durch Division mit 2 eine Congruenz von der Form (2.) hervorgeht; aber das dabei auftretende System $(\frac{1}{4}\varpi_1, \frac{1}{4}\varpi_2, \frac{1}{4}\varpi_3)$ wird ein ganz bestimmtes sein. Daraus folgt, dass die Ausnahme unter den hier gemachten Voraussetzungen nur eine bestimmte Wurzelfunction vierten Grades in einem bestimmten System betrifft, dessen Charakteristik $(\varpi) + (\sqrt{q}) = (\sqrt{p})$ ist. Kommt mehr als eine *Abelsche* Function vor, deren 0-Punkte zusammenfallen, so enthalten mehrere Systeme je eine Function welche eine Ausnahme bildet.

Es lässt sich nun in unserm Fall nach §. 10, VI. die Congruenz

$$(7.)\qquad \Big(\overset{3}{\underset{1}{h}}\Big(\tfrac{1}{4}\varpi_h+\tfrac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\gamma}du_h\Big)\Big) \equiv \Big(\overset{3}{\underset{1}{h}}\Big(\int_{c_1^{(0)}}^{C_1}du_h+\int_{c_2^{(0)}}^{C_2}du_h+\int_{c_3^{(0)}}^{C_3}du_h\Big)\Big)$$

in der Weise befriedigen, dass von den drei Punkten C_1, C_2, C_3 einer beliebig angenommen werden kann. Es sind dann die Punkte C_1, C_2, C_3 0-Punkte einer Function φ, welche, wie leicht zu sehen ihren vierten 0-Punkt in dem 0-Punkt η der Function $\sqrt{p}$ hat. Denn es folgt aus der Congruenz (7.):

$$\Big(\overset{3}{\underset{1}{h}}\Big(2\int_{c_1^{(0)}}^{C_1}du_h+2\int_{c_2^{(0)}}^{C_2}du_h+2\int_{c_3^{(0)}}^{C_3}du_h+2\int_{\gamma}^{\eta}du_h\Big)\Big) \equiv (0, 0, 0),$$

woraus, wenn man das *Abelsche* Theorem auf die Function $\frac{\varphi^2}{\Psi_0}$ anwendet, unsere Behauptung als richtig erkannt wird.

Solche Punkte C_1, C_2, C_3 können die 0-Punkte einer Wurzelfunction vierten Grades des Systems $(\sqrt{p})$ sein, so dass Eine Function dieses Systems unbestimmt wird.

Um dies auf algebraischem Wege nachzuweisen, nehmen wir an, es seien $\sqrt{p_1}$, $\sqrt{p_2}$, $\sqrt{p_3}$ drei *Abelsche* Functionen, welche der Bedingung genügen:

$$(\sqrt{pp_1}) = (\sqrt{p_2p_3}),$$

zwischen diesen besteht eine Gleichung von der Form:

$$(8.)\qquad 2\sqrt{pp_1p_2p_3} = f,$$

wenn f eine homogene Function zweiten Grades, etwa von p_1, p_2, p_3 ist. $f=0$ stellt daher einen Kegelschnitt dar, der nach unseren Voraussetzungen von der geraden Linie $p=0$ im Punkte η berührt wird. Es kann daher f auf unendlich viele verschiedene Arten in die Form gesetzt werden:

$$(9.)\qquad f = s^2-rp,$$

wenn $s=0$ die Gleichung einer beliebigen geraden Linie ist, die durch den Punkt η geht, und $r=0$ die Gleichung der Tangente von $f=0$ in dem zweiten Schnittpunkt dieses Kegelschnitts mit der Linie $s=0$.

Aus (8.) und (9.) folgt nun die Gleichung:

$$(10.)\qquad \sqrt{p}(r\sqrt{p}+2\sqrt{p_1p_2p_3}) = s^2,$$

woraus man ersieht, dass die Function:

$$(11.)\qquad \sqrt{\Omega} = r\sqrt{p}+2\sqrt{p_1p_2p_3}$$

in den drei von η verschiedenen 0-Punkten von s unendlich klein in der zweiten Ordnung wird, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Die Gleichung

$$\Omega = (r\sqrt{p}+2\sqrt{p_1 p_2 p_3})^2 = r^2 p + 2r(s^2 - rp) + 4p_1 p_2 p_3 = 0$$

stellt eine Curve dritter Ordnung dar, welche die gegebene Curve vierter Ordnung dreimal vierpunktig berührt. Wir haben hier eine ganze Schaar solcher Curven, und es lässt sich eine Curve der Art mit Einem beliebig gegebenen 0-Punkt bestimmen.

In diesem Fall kann man leicht die übrigen Functionen $\sqrt[4]{\Omega}$ des Systems $(\sqrt{p})$ sammt ihren zweiten Charakteristiken bestimmen. Zu dem Ende suchen wir die 0-Punkte der Function

$$\vartheta\Big(\int_\varepsilon^\zeta du_h - \tfrac{1}{2}\int_\varepsilon^\gamma du_h - \tfrac{1}{4}\varpi_h - \tfrac{1}{2}p_h\Big),$$

wo $\frac{1}{2}p_1$, $\frac{1}{2}p_2$, $\frac{1}{2}p_3$ ein System zusammengehöriger halber Perioden mit beliebig gegebener Charakteristik (p) bedeutet. Die 0-Punkte dieser Function sind zugleich die 0-Punkte einer Function $\sqrt[4]{\Omega}$ mit der ersten Charakteristik $(\sqrt{p})$ und der zweiten Charakteristik (p). Wir bezeichnen dieselben mit C_1, C_2, C_3. Sie genügen der Congruenz

$$(12.)\qquad \Big(\overset{3}{\underset{1}{h}}\Big(\tfrac{1}{2}\int_\varepsilon^\gamma du_h + \tfrac{1}{4}\varpi_h + \tfrac{1}{2}p_h\Big)\Big) \equiv \Big(\overset{3}{\underset{1}{h}}\Big(\int_{c_1^{(0)}}^{C_1} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{C_2} du_h + \int_{c_3^{(0)}}^{C_3} du_h\Big)\Big)$$

Sind nun γ, c_1, c_2, c_3 die 0-Punkte einer Function $\sqrt{\Psi}$, mit der Charakteristik

$$(\sqrt{\Psi}) = (p) + (\sqrt{q}),$$

so ist (nach §. 17)

$$(\tfrac{1}{2}p_1, \tfrac{1}{2}p_2, \tfrac{1}{2}p_3) \equiv \Big(\overset{3}{\underset{1}{h}}\Big(\int_{c_1^{(0)}}^{c_1} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{c_2} du_h + \int_{c_3^{(0)}}^{c_3} du_h\Big)\Big),$$

und demnach geht (12.) über in

$$\Big(\overset{3}{\underset{1}{h}}\Big(\tfrac{1}{2}\int_\varepsilon^\gamma du_h + \tfrac{1}{4}\varpi_h\Big)\Big) \equiv \Big(\overset{3}{\underset{1}{h}}\Big(\int_{c_1}^{C_1} du_h + \int_{c_2}^{C_2} du_h + \int_{c_3}^{C_3} du_h\Big)\Big),$$

oder endlich mit Hülfe von (2.) in

$$(13.)\qquad \Big(\overset{3}{\underset{1}{h}}\Big(\int_{c_1^{(0)}}^{\eta} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{\varepsilon} du_h + \int_{c_3^{(0)}}^{\varepsilon} du_h + \int_{c_1}^{C_1} du_h + \int_{c_2}^{C_2} du_h + \int_{c_3}^{C_3} du_h\Big)\Big) \equiv (0, 0, 0).$$

Ist nun $\sqrt{\Psi'}$ eine Wurzelfunction zweiter Ordnung, welche im Punkt η verschwindet, deren Charakteristik

$$(\sqrt{\Psi'}) = (\sqrt{\Psi q}) = (p)$$

ist, so ist

$$\sigma = \frac{q\sqrt{\Psi'}}{\sqrt{\Psi\Psi_0}}$$

eine rationale Function, welche unendlich gross in der ersten Ordnung wird in c_1, c_2, c_3, $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$, $c_3^{(0)}$, unendlich klein in η, ε, ε und die daher wegen der Congruenz (13.) ausserdem noch in C_1, C_2, C_3 verschwinden muss. Diese sind daher die drei von η verschiedenen 0-Punkte der Function $\sqrt{\Psi'}$.

Wenn nun $(\sqrt{p\Psi'}) = (p) + (\sqrt{p})$ ungerade ist, und die zu dieser Charakteristik gehörige *Abelsche* Function mit $\sqrt{t}$ bezeichnet wird, so zerfällt $\sqrt{\Psi'}$ in $\sqrt{t}\,\sqrt{p}$ und man erhält

$$\sqrt{\Omega} = t\sqrt{p}, \qquad \sqrt[4]{\Omega} = \sqrt{t}\,\sqrt[4]{p}.$$

Ist dagegen $\sqrt{p\Psi'} = (p) + (\sqrt{p})$ gerade, so wird $\sqrt{\Psi'}$ nicht zerfallen, und wir haben in diesem Falle $\sqrt{\Psi'}$ nach §. 18. zu bilden. Es ist dann zu setzen:

$$\sqrt{p}\sqrt{\Omega} = \Psi',$$

also:

$$\sqrt{\Omega} = \frac{\Psi'}{\sqrt{p}}, \qquad \sqrt[4]{\Omega} = \frac{\sqrt{\Psi'}}{\sqrt[4]{p}}.$$

Wir können die Gleichung der entsprechenden dreimal vierpunktig berührenden Curve dritter Ordnung leicht auf folgende Art bilden: Ist $\Phi = 0$ die Gleichung der gegebenen Curve vierter Ordnung, so ist

$$\Psi'^2 - \lambda\Phi = 0,$$

mit der unbestimmten Constanten λ eine Curve vierter Ordnung welche die Curve $\Phi = 0$ in vier Punkten vierpunktig berührt, unter denen der Berührungspunkt der geraden Linie $p = 0$ ist. Bestimmt man daher λ so, dass $\Psi'^2 - \lambda\Phi$ in einem beliebigen von η verschiedenen Punkt der Linie $p = 0$ verschwindet, so wird diese Function durch p theilbar, und das Ergebniss der Division ist die gesuchte Function Ω.

Für unsere Zwecke ist es aber nicht erforderlich, diese Functionen Ω wirklich zu bilden, sondern, da es überall nur auf die Verhältnisse der

Functionen $\sqrt[4]{\Omega}$ ankommt, so werden wir durchweg mit den Functionen $\sqrt[4]{\Psi'}$ ausreichen, und wir brauchen die Functionen $\sqrt[4]{\Omega}$ des Systems $(\sqrt[4]{p})$ gar nicht in die Theorie einzuführen. Hiernach nimmt besonders die Lösung des Umkehrproblems eine viel einfachere Gestalt an als im allgemeinen Fall.

Die Resultate sind zwar als Specialfälle in unserer allgemeinen Theorie enthalten, es wäre aber nicht ohne Interesse, die wesentlich einfachere Theorie dieses besonderen Falles unabhängig zu entwickeln. Noch grössere Vereinfachungen ergeben sich, wenn mehrere der *Abelschen* Functionen zusammenfallende 0-Punkte haben.

IV. Abschnitt.

Lösung der Fundamentalprobleme.

§. 24. Das Riemannsche Problem.

Wir sind nunmehr im Besitz der Mittel, um die in §. 9 aufgestellten Fundamentalprobleme in den einfachsten Fällen vollständig zu lösen. Wir wenden uns zunächst zu dem ersten der beiden dort aufgestellten Probleme, nämlich zur algebraischen Darstellung sechsfach periodischer Functionen, beschränken uns aber dabei auf den einfachsten Fall, nämlich auf die sechsfach periodischen Functionen zweiter Ordnung in dem wir mit den Wurzelfunctionen zweiten Grades vollständig ausreichen.

Wir gehen aus von einer beliebigen *Abelschen* Function $\sqrt{q}$ mit den beiden 0-Punkten ε, γ und einer Wurzelfunction zweiter Ordnung und zweiten Grades $\sqrt{\Psi}$, mit einstweilen noch unbestimmter Charakteristik $(\sqrt{\Psi})$, deren willkürlichen 0-Punkt wir mit den Punkt γ zusammenfallen lassen. Die drei übrigen 0-Punkte dieser Function seien c_1, c_2, c_3, so dass (nach §. 12 und 18) die Function

$$\vartheta\left|\varpi\right|\left(\int_\varepsilon^z du_h\right)$$

in den Punkten c_1, c_2, c_3 verschwindet, wenn

$$(\varpi) = (\sqrt{\Psi q}).$$

Es seien nun η_1, η_2, η_3 drei beliebig gegebene Punkte der Fläche T und es werde gesetzt:

$$(1.)\qquad (w_1, w_2, w_3) \equiv \left(\begin{smallmatrix}3\\h\\1\end{smallmatrix}\left(\int_{c_1}^{\eta_1} du_h + \int_{c_2}^{\eta_2} du_h + \int_{c_3}^{\eta_3} du_h\right)\right).$$

Bedeutet nun (ϖ') eine beliebige andere Charakteristik, so ist der Quotient

$$(2.)\qquad \frac{\vartheta\{\varpi\}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h - w_h\right)}{\vartheta\{\varpi'\}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h - w_h\right)}$$

die Quadratwurzel aus einer rationalen Function von s, z die in den Punkten η_1, η_2, η_3 unendlich klein in der ersten Ordnung wird, und an den Querschnitten der Fläche T ein durch die Charakteristik $(\varpi)+(\varpi')$ bestimmtes Factorensystem ± 1 annimmt.

Jede andere Function von ζ, welche diese beiden Eigenschaften mit dieser gemein hat, muss bis auf einen constanten (d. h. von ζ unabhängigen) Factor mit derselben identisch sein, da der Quotient zweier solcher Functionen eine rationale Function von s und z wäre, welche nur in drei, aber beliebigen, Punkten unendlich gross von der ersten Ordnung würde. Eine solche Function muss aber eine Constante sein. (§. 8).

Wir haben daher zunächst die Aufgabe, solche Functionen algebraisch darzustellen, und dazu dienen uns die Wurzelfunctionen zweiten Grades und dritter Ordnung.

In der That: sind $\sqrt{\chi}$, $\sqrt{\chi'}$ irgend zwei solche Functionen, deren Charakteristiken der Bedingung genügen:

$$(\sqrt{\chi})+(\sqrt{\chi'}) = (\varpi)+(\varpi'),$$

so erhält der Quotient

$$(3.)\qquad \sqrt{\frac{\chi}{\chi'}}$$

an den Querschnitten dasselbe Factorensystem wie die Function (2.). Bestimmen wir nun die drei willkürlichen 0-Punkte der Function $\sqrt{\chi}$ so dass sie mit den Punkten η_1, η_2, η_3 zusammenfallen, so verschwindet dieselbe noch in drei weiteren, durch diese bestimmten Punkten $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, in welchen auch die Function $\sqrt{\chi'}$ verschwinden muss. Ist diese letztere Function demgemäss bestimmt, so wird (2.) und (3.) bis auf einen constanten Factor übereinstimmen, und die weitere Aufgabe ist, diesen Factor in seiner Abhängigkeit von den Punkten η_1, η_2, η_3 zu ermitteln.

Wir werden den hier angedeuteten Gedankengang in seiner weiteren Ausführung etwas modificiren, indem wir statt von den Punkten η_1, η_2, η_3 von den gemeinschaftlichen 0-Punkten der Functionen $\sqrt{\chi}, \sqrt{\chi'}$; $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$

ausgehen. Diese letzteren Punkte nämlich sind ebenso willkürlich als die ersten; jedes der beiden Systeme ist durch das andere bestimmt.

Wir bezeichnen der Deutlichkeit halber eine Wurzelfunction zweiten Grades und dritter Ordnung mit der Charakteristik (k) durch $\sqrt{\chi_{(k)}}$ und bestimmen die Constanten einer jeden solchen Function so, dass sie in den drei beliebigen Punkten ζ_1, ζ_2, ζ_3 verschwindet. Wir erhalten nach §. 19 verschiedene Darstellungen dieser Functionen je nachdem (k) gerade oder ungerade ist. Im ersteren Fall nehmen wir drei Paare von *Abelschen* Functionen einer Gruppe an:

$$(\sqrt{x_1 \xi_1}) = (\sqrt{x_2 \xi_2}) = (\sqrt{x_3 \xi_3}),$$

so dass

$$(k) = (\sqrt{x_1 x_2 x_3}) = (\sqrt{x_1 \xi_2 \xi_3}) = (\sqrt{\xi_1 x_2 \xi_3}) = (\sqrt{\xi_1 \xi_2 x_3}).$$

Bezeichnen dann

$$\begin{array}{llllll} x_1, & x_2, & x_3, & \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, \\ x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & x_3^{(1)}, & \xi_1^{(1)}, & \xi_2^{(1)}, & \xi_3^{(1)}, \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & x_3^{(2)}, & \xi_1^{(2)}, & \xi_2^{(2)}, & \xi_3^{(2)}, \\ x_1^{(3)}, & x_2^{(3)}, & x_3^{(3)}, & \xi_1^{(3)}, & \xi_2^{(3)}, & \xi_3^{(3)} \end{array}$$

die Werthe, welche die Functionen x_1, x_2, x_3, ξ_1, ξ_2, ξ_3 in den Punkten ζ, ζ_1, ζ_2, ζ_3 annehmen, so können wir setzen:

$$(4.) \qquad \sqrt{\chi_{(k)}} = \begin{vmatrix} \sqrt{x_1 x_2 x_3}, & \sqrt{x_1 \xi_2 \xi_3}, & \sqrt{\xi_1 x_2 \xi_3}, & \sqrt{\xi_1 \xi_2 x_3} \\ \sqrt{x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)}}, & \sqrt{x_1^{(1)} \xi_2^{(1)} \xi_3^{(1)}}, & \sqrt{\xi_1^{(1)} x_2^{(1)} \xi_3^{(1)}}, & \sqrt{\xi_1^{(1)} \xi_2^{(1)} x_3^{(1)}} \\ \sqrt{x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(2)}}, & \sqrt{x_1^{(2)} \xi_2^{(2)} \xi_3^{(2)}}, & \sqrt{\xi_1^{(2)} x_2^{(2)} \xi_3^{(2)}}, & \sqrt{\xi_1^{(2)} \xi_2^{(2)} x_3^{(2)}} \\ \sqrt{x_1^{(3)} x_2^{(3)} x_3^{(3)}}, & \sqrt{x_1^{(3)} \xi_2^{(3)} \xi_3^{(3)}}, & \sqrt{\xi_1^{(3)} x_2^{(3)} \xi_3^{(3)}}, & \sqrt{\xi_1^{(3)} \xi_2^{(3)} x_3^{(3)}} \end{vmatrix}.$$

Ist dagegen (k) ungerade $= (\sqrt{x_1})$ so entnehmen wir aus einer beliebigen Gruppe, welche $(\sqrt{x_1})$ enthält, die drei Paare

$$(\sqrt{x_1 \xi_1}) = (\sqrt{x_2 \xi_2}) = (\sqrt{x_3 \xi_3});$$

und können dann für $\sqrt{\chi_{(k)}}$ eine der beiden folgenden Darstellungen wählen:

$$(5.) \qquad \sqrt{\chi_{(k)}} = \begin{vmatrix} x_1 \sqrt{x_1}, & x_2 \sqrt{x_1}, & x_3 \sqrt{x_1}, & \sqrt{\xi_1 x_2 \xi_2} \\ x_1^{(1)} \sqrt{x_1^{(1)}}, & x_2^{(1)} \sqrt{x_1^{(1)}}, & x_3^{(1)} \sqrt{x_1^{(1)}}, & \sqrt{\xi_1^{(1)} x_2^{(1)} \xi_2^{(1)}} \\ x_1^{(2)} \sqrt{x_1^{(2)}}, & x_2^{(2)} \sqrt{x_1^{(2)}}, & x_3^{(2)} \sqrt{x_1^{(2)}}, & \sqrt{\xi_1^{(2)} x_2^{(2)} \xi_2^{(2)}} \\ x_1^{(3)} \sqrt{x_1^{(3)}}, & x_2^{(3)} \sqrt{x_1^{(3)}}, & x_3^{(3)} \sqrt{x_1^{(3)}}, & \sqrt{\xi_1^{(3)} x_2^{(3)} \xi_2^{(3)}} \end{vmatrix}$$

$$(6.)\qquad \sqrt{\chi_{(k)}} = \begin{vmatrix} x_2\sqrt{x_1}, & \sqrt{\xi_1 x_2 \xi_2}, & x_3\sqrt{x_1}, & \sqrt{\xi_1 x_3 \xi_3} \\ x_2^{(1)}\sqrt{x_1^{(1)}}, & \sqrt{\xi_1^{(1)} x_2^{(1)} \xi_2^{(1)}}, & x_3^{(1)}\sqrt{x_1^{(1)}}, & \sqrt{\xi_1^{(1)} x_3^{(1)} \xi_3^{(1)}} \\ x_2^{(2)}\sqrt{x_1^{(2)}}, & \sqrt{\xi_1^{(2)} x_2^{(2)} \xi_2^{(2)}}, & x_3^{(2)}\sqrt{x_1^{(2)}}, & \sqrt{\xi_1^{(2)} x_3^{(2)} \xi_3^{(2)}} \\ x_2^{(3)}\sqrt{x_1^{(3)}}, & \sqrt{\xi_1^{(3)} x_2^{(3)} \xi_2^{(3)}}, & x_3^{(3)}\sqrt{x_1^{(3)}}, & \sqrt{\xi_1^{(3)} x_3^{(3)} \xi_3^{(3)}} \end{vmatrix}.$$

Es ist noch zu bemerken, dass diese Functionen bis auf das Vorzeichen völlig bestimmt sind, denn die Function (4.) wird rational durch Multiplication mit

$$\sqrt{x_1 x_2 x_3 x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(2)} x_1^{(3)} x_2^{(3)} x_3^{(3)}}.$$

Die Functionen (5.), (6.) durch Multiplication mit

$$\sqrt{x_1 x_1^{(1)} x_1^{(2)} x_1^{(3)}},$$

auch können diese Functionen durch Quadriren rational gemacht werden.

Ist sonach

$$(k)+(k') = (\varpi)+(\varpi'),$$

so ergiebt sich nach dem Obigen die Formel:

$$(7.)\qquad A_1\sqrt{\frac{\chi_{(k)}}{\chi_{(k')}}} = \frac{\vartheta\{\varpi\}\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - w_h\right)}{\vartheta\{\varpi'\}\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - w_h\right)}.$$

wo hinsichtlich A_1 zunächst nur die Unabhängigkeit von ζ feststeht. Es wird sich aber alsbald zeigen, dass A_1 nicht von $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, also auch nicht von η_1, η_2, η_3 abhängen kann.

Es lässt sich nämlich mit Hülfe des *Abelschen* Theorems die Formel (7.) in einer merkwürdigen Weise transformiren. Betrachten wir zu diesem Zweck die Function $\sqrt{q\Psi}$ als eine Wurzelfunction zweiten Grades und dritter Ordnung so ist nach §. 17 p. 114:

$$(8.)\quad \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{c_1}^{\eta_1} du_h+\int_{c_2}^{\eta_2} du_h+\int_{c_3}^{\eta_3} du_h+\int_{\gamma}^{\zeta_1} du_h+\int_{\varepsilon}^{\zeta_2} du_h+\int_{\gamma}^{\zeta_3} du_h\right)\right) \equiv (\tfrac{1}{2}p_1, \tfrac{1}{2}p_2, \tfrac{1}{2}p_3),$$

wenn $\frac{1}{2}p_1$, $\frac{1}{2}p_2$, $\frac{1}{2}p$ ein System zusammengehöriger halber Perioden bedeutet, dessen Charakteristik bestimmt ist durch

$$(p) = (\sqrt{\chi_{(k)}}) + (\sqrt{q\Psi}) = (k)+(\varpi) = (k')+(\varpi'),$$

woraus folgt:

$$(9.)\qquad (k) = (\varpi)+(p), \qquad (k') = (\varpi')+(p).$$

Setzen wir daher

$$(10.)\quad (v_1, v_2, v_3) \equiv \left(\begin{smallmatrix}3\\h\\1\end{smallmatrix}\left(\int_\varepsilon^{\zeta} du_h + \int_\gamma^{\zeta_1} du_h + \int_\varepsilon^{\zeta_2} du_h + \int_\gamma^{\zeta_3} du_h\right)\right),$$

so folgt aus (8.):

$$\left(\begin{smallmatrix}3\\h\\1\end{smallmatrix}\left(\int_\varepsilon^{\zeta} du_h - w_h\right)\right) \equiv (v_1 + \tfrac{1}{2}p_1, v_2 + \tfrac{1}{2}p_2, v_3 + \tfrac{1}{2}p_3),$$

und die Formel (7.) geht über in folgende:

$$(11.)\quad A\sqrt{\frac{\chi(k)}{\chi(k')}} = \frac{\vartheta\{k\}(v_1, v_2, v_3)}{\vartheta\{k'\}(v_1, v_2, v_3)},$$

worin A sich von A_1 nur durch eine Potenz von i unterscheidet, die nach der Formel (6.) §. 2 leicht bestimmt wird, auf die es aber nicht ankommt. Es genügt zu wissen, dass A, so wie A_1 von ζ unabhängig ist.

Nun ist aber das Quadrat des Quotienten auf der rechten Seite von (11.) eine symmetrische Function von $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ das gleiche gilt von dem Quadrat der Function $\sqrt{\frac{\chi(k)}{\chi(k')}}$ und muss daher auch von A^2 gelten. Da aber A von ζ unabhängig ist, so folgt hieraus, dass es auch von $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ nicht abhängen kann und mithin durch die Moduln ausdrückbar sein muss.

Die Formel (11.) hat die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass in ihr jede Spur der Punkte η_1, η_2, η_3 verschwunden ist, an deren Stelle die vollkommen willkürlichen Punkte $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ getreten sind. Betrachten wir die Grössen v_1, v_2, v_3 als beliebig gegeben, und die Punkte $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ vermöge der Congruenz (10.) von diesen abhängig, so ist einer dieser Punkte noch willkürlich, und wir können ihn etwa mit der ihm in (10.) entsprechenden unteren Grenze zusammenfallen lassen. Wir ziehen es aber vor, der Symmetrie halber die vier Punkte unbestimmt zu lassen.

Weiter ist noch aus der Formel (11.) der Einfluss der Function $\sqrt{\Psi}$; also der Punkte c_1, c_2, c_3 weggefallen und endlich können statt der unteren Grenzpunkte $\varepsilon, \gamma, \varepsilon, \gamma$ irgend vier 0-Punkte einer Function φ, also beispielsweise auch die 0-Punkte einer beliebigen anderen *Abelschen* Function gesetzt werden, denn dadurch ändern sich die Grössen v_1, v_2, v_3 höchstens um ein System zusammengehöriger Perioden, was in der Formel (11.) nichts ändert. Es ist also in dieser Formel eine sehr elegante Lösung des *Riemannschen* Problems enthalten, wenn es uns noch gelingt, die Constante A durch die Moduln darzustellen.

Wir bereiten die Lösung dieser Aufgabe durch folgende Betrachtungen vor: Man zerlege $(k)+(k')$ in irgend einer Weise in zwei ungerade Charakteristiken:

$$(k)+(k') = (\sqrt{x_1})+(\sqrt{x_2}),$$

und lasse $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$ die zu den Charakteristiken $(\sqrt{x_1})$, $(\sqrt{x_2})$ gehörigen *Abelschen* Functionen bedeuten. Verschwinden diese dann in den Punkten ε_1, γ_1 resp. ε_2, γ_2, so hat man nach §. 17

$$\left(\begin{smallmatrix}3\\h\\1\end{smallmatrix}\left(\int_\varepsilon^{\varepsilon_1} du_h+\int_\gamma^{\gamma_1} du_h\right)\right) \equiv (\tfrac{1}{2}p_1^{(1)}, \tfrac{1}{2}p_2^{(1)}, \tfrac{1}{2}p_3^{(1)}),$$

$$\left(\begin{smallmatrix}3\\h\\1\end{smallmatrix}\left(\int_\varepsilon^{\varepsilon_2} du_h+\int_\gamma^{\gamma_2} du_h\right)\right) \equiv (\tfrac{1}{2}p_1^{(2)}, \tfrac{1}{2}p_2^{(2)}, \tfrac{1}{2}p_3^{(2)}),$$

wenn $\frac{1}{2}p_h^{(1)}$, $\frac{1}{2}p_h^{(2)}$ zwei Systeme zusammengehöriger halber Perioden bedeuten, deren Charakteristiken bestimmt sind durch

$$(p^{(1)}) = (\sqrt{q})+(\sqrt{x_1}), \qquad (p^{(2)}) = (\sqrt{q})+(\sqrt{x_2}),$$

woraus folgt:

$$(12.)\quad \begin{cases} (k)+(k') = (p^{(1)})+(p^{(2)}), & (k)+(p^{(1)}) = (k')+(p^{(2)}), \\ & (k)+(p^{(2)}) = (k')+(p^{(1)}). \end{cases}$$

Man lasse nun in der Formel (11.) die Punkte ζ_2, ζ_3 einmal mit ε_1, γ_1, dann mit ε_2, γ_2 zusammenfallen und bezeichne die dadurch sich ergebenden Ausdrücke für die Functionen $\sqrt{\chi_{(k)}}$ und $\sqrt{\chi_{(k')}}$ mit $\sqrt{\chi_{(k)}^{(1)}}$, $\sqrt{\chi_{(k')}^{(1)}}$; $\sqrt{\chi_{(k)}^{(2)}}$, $\sqrt{\chi_{(k')}^{(2)}}$. Ferner setze man zur Abkürzung:

$$\left(\begin{smallmatrix}3\\h\\1\end{smallmatrix}\left(\int_\varepsilon^{\zeta} du_h+\int_\gamma^{\zeta_1} du_h\right)\right) \equiv (v_1', v_2', v_3'),$$

wodurch man aus (11.) die beiden Formeln erhält:

$$(13.)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta\{k\}(v_h'+\frac{1}{2}p_h^{(1)})}{\vartheta\{k'\}(v_h'+\frac{1}{2}p_h^{(1)})} = A\sqrt{\dfrac{\chi_{(k)}^{(1)}}{\chi_{(k')}^{(1)}}}, \\[2ex] \dfrac{\vartheta\{k\}(v_h'+\frac{1}{2}p_h^{(2)})}{\vartheta\{k'\}(v_h'+\frac{1}{2}p_h^{(2)})} = A\sqrt{\dfrac{\chi_{(k)}^{(2)}}{\chi_{(k')}^{(2)}}}. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so ergiebt sich durch Anwendung der Formel (6.) §. 6

$$(14.)\qquad e^{-\frac{\pi i}{4}\Sigma(\mu+\mu')(\nu+\nu')} = A^2\sqrt{\frac{\chi_{(k)}^{(1)}\chi_{(k)}^{(2)}}{\chi_{(k')}^{(1)}\chi_{(k')}^{(2)}}},$$

wenn:

$$(k) = \begin{pmatrix}\nu_1\,\nu_2\,\nu_3\\ \mu_1\,\mu_2\,\mu_3\end{pmatrix}, \qquad (k') = \begin{pmatrix}\nu_1'\,\nu_2'\,\nu_3'\\ \mu_1'\,\mu_2'\,\mu_3'\end{pmatrix},$$

wodurch A^4 eindeutig bestimmt ist. Die auf der rechten Seite von (14.) stehende Function muss sich demnach auf eine Constante reduciren, deren Werth zu ermitteln ist. Behufs der Durchführung der Rechnung ist es nothwendig, drei Fälle zu unterscheiden:

I. Die Charakteristiken (k), (k') sind beide gerade.

Zerlegen wir zunächst in beliebiger Art:

$$(k)+(k') = (\sqrt{x_1})+(\sqrt{x_2}),$$

und betrachten die Gruppe $(k)+(\sqrt{x_1})$. Da diese Gruppe in ihren Paaren weder $(\sqrt{x_1})$ noch $(\sqrt{x_2})$ enthalten kann, (weil (k) und $(k)+(\sqrt{x_1})+(\sqrt{x_2}) = (k')$ gerade sind), so müssen (nach §. 3, I) die beiden Gruppen $(k)+(k')$ und $(k)+(\sqrt{x_1})$ zu denen gehören, welche vier Charakteristiken gemein haben, von denen je zwei in jeder Gruppe gepaart sind. Es giebt demnach eine Zerlegung von folgender Form:

$$(k)+(k') = (\sqrt{x_1})+(\sqrt{x_2}) = (\sqrt{y_1})+(\sqrt{y_2}) = (\sqrt{z_1})+(\sqrt{z_2}),$$
$$(k)+(\sqrt{x_1}) = (\sqrt{y_1})+(\sqrt{z_1}) = (\sqrt{y_2})+(\sqrt{z_2}),$$

woraus sofort folgt:

$$(k)+(\sqrt{x_2}) = (k')+(\sqrt{x_1}) = (\sqrt{y_1})+(\sqrt{z_2}) = (\sqrt{y_2})+(\sqrt{z_1}),$$

und ferner:

$$(k) = (\sqrt{x_1 y_1 z_1}) = (\sqrt{x_1 y_2 z_2}) = (\sqrt{x_2 y_1 z_2}) = (\sqrt{x_2 y_2 z_1}),$$
$$(k') = (\sqrt{x_2 y_1 z_1}) = (\sqrt{x_2 y_2 z_2}) = (\sqrt{x_1 y_1 z_2}) = (\sqrt{x_1 y_2 z_1}),$$

worin $\sqrt{x_1}$; $\sqrt{x_2}$; $\sqrt{y_1}$; $\sqrt{y_2}$; $\sqrt{z_1}$; $\sqrt{z_2}$ *Abelsche* Functionen sind, deren Charakteristiken aus der Tafel I. entnommen werden können.

Dem zufolge setzen wir, indem wir wieder die Werthe von Functionen für die Punkte ζ_1, ζ_2, ζ_3 durch obere Indices bezeichnen:

$$(15.)\quad \begin{cases} \sqrt{\chi_{(k)}} = \begin{vmatrix} \sqrt{x_1 y_1 z_1}, & \sqrt{x_1 y_2 z_2}, & \sqrt{x_2 y_1 z_2}, & \sqrt{x_2 y_2 z_1} \\ \sqrt{x_1^{(1)} y_1^{(1)} z_1^{(1)}}, & \sqrt{x_1^{(1)} y_2^{(1)} z_2^{(1)}}, & \sqrt{x_2^{(1)} y_1^{(1)} z_2^{(1)}}, & \sqrt{x_2^{(1)} y_2^{(1)} z_1^{(1)}} \\ \sqrt{x_1^{(2)} y_1^{(2)} z_1^{(2)}}, & \sqrt{x_1^{(2)} y_2^{(2)} z_2^{(2)}}, & \sqrt{x_2^{(2)} y_1^{(2)} z_2^{(2)}}, & \sqrt{x_2^{(2)} y_2^{(2)} z_1^{(2)}} \\ \sqrt{x_1^{(3)} y_1^{(3)} z_1^{(3)}}, & \sqrt{x_1^{(3)} y_2^{(3)} z_2^{(3)}}, & \sqrt{x_2^{(3)} y_1^{(3)} z_2^{(3)}}, & \sqrt{x_2^{(3)} y_2^{(3)} z_1^{(3)}} \end{vmatrix}, \\[2ex] \sqrt{\chi_{(k')}} = \begin{vmatrix} \sqrt{x_2 y_2 z_2}, & \sqrt{x_2 y_1 z_1}, & \sqrt{x_1 y_2 z_1}, & \sqrt{x_1 y_1 z_2} \\ \sqrt{x_2^{(1)} y_2^{(1)} z_2^{(1)}}, & \sqrt{x_2^{(1)} y_1^{(1)} z_1^{(1)}}, & \sqrt{x_1^{(1)} y_2^{(1)} z_1^{(1)}}, & \sqrt{x_1^{(1)} y_1^{(1)} z_2^{(1)}} \\ \sqrt{x_2^{(2)} y_2^{(2)} z_2^{(2)}}, & \sqrt{x_2^{(2)} y_1^{(2)} z_1^{(2)}}, & \sqrt{x_1^{(2)} y_2^{(2)} z_1^{(2)}}, & \sqrt{x_1^{(2)} y_1^{(2)} z_2^{(2)}} \\ \sqrt{x_2^{(3)} y_2^{(3)} z_2^{(3)}}, & \sqrt{x_2^{(3)} y_1^{(3)} z_1^{(3)}}, & \sqrt{x_1^{(3)} y_2^{(3)} z_1^{(3)}}, & \sqrt{x_1^{(3)} y_1^{(3)} z_2^{(3)}} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Setzen wir nun für ζ_2, ζ_3 einmal ε_1, γ_1, dann ε_2, γ_2, so wird im ersten Fall $x_1^{(2)} = x_1^{(3)} = 0$, im andern $x_2^{(2)} = x_2^{(3)} = 0$, und es ergiebt sich:

$$(16.)\quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\chi^{(1)}_{(k)}}{\chi^{(1)}_{(k')}}} = \dfrac{\sqrt{y_1 z_1}\sqrt{y_2^{(1)} z_2^{(1)}} - \sqrt{y_2 z_2}\sqrt{y_1^{(1)} z_1^{(1)}}}{\sqrt{y_2 z_1}\sqrt{y_1^{(1)} z_2^{(1)}} - \sqrt{y_1 z_2}\sqrt{y_2^{(1)} z_1^{(1)}}} \left[\dfrac{\sqrt{y_1^{(2)} z_2^{(2)}}\sqrt{y_2^{(3)} z_1^{(3)}} - \sqrt{y_1^{(3)} z_2^{(3)}}\sqrt{y_2^{(2)} z_1^{(2)}}}{\sqrt{y_1^{(2)} z_1^{(2)}}\sqrt{y_2^{(3)} z_2^{(3)}} - \sqrt{y_1^{(3)} z_1^{(3)}}\sqrt{y_2^{(2)} z_2^{(2)}}}\right]_{\zeta_2, \zeta_3 = \varepsilon_1, \gamma_1}, \\[2ex] \sqrt{\dfrac{\chi^{(2)}_{(k)}}{\chi^{(2)}_{(k')}}} = \dfrac{\sqrt{y_2 z_1}\sqrt{y_1^{(1)} z_2^{(1)}} - \sqrt{y_1 z_2}\sqrt{y_2^{(1)} z_1^{(1)}}}{\sqrt{y_1 z_1}\sqrt{y_2^{(1)} z_2^{(1)}} - \sqrt{y_2 z_2}\sqrt{y_1^{(1)} z_1^{(1)}}} \left[\dfrac{\sqrt{y_1^{(2)} z_1^{(2)}}\sqrt{y_2^{(3)} z_2^{(3)}} - \sqrt{y_1^{(3)} z_1^{(3)}}\sqrt{y_2^{(2)} z_2^{(2)}}}{\sqrt{y_1^{(2)} z_2^{(2)}}\sqrt{y_2^{(3)} z_1^{(3)}} - \sqrt{y_1^{(3)} z_2^{(3)}}\sqrt{y_2^{(2)} z_1^{(2)}}}\right]_{\zeta_2, \zeta_3 = \varepsilon_2, \gamma_2}, \end{cases}$$

woraus zunächst hervorgeht, dass, wie es sein muss, das Product dieser beiden Functionen constant ist.

Nun besteht zwischen den Functionen $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$, $\sqrt{y_1}$, $\sqrt{y_2}$, $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$ eine Gleichung von der Form:

$$(17.)\quad h_1\sqrt{x_1 x_2} + h_2\sqrt{y_1 y_2} + h_3\sqrt{z_1 z_2} = 0,$$

worin h_1, h_2, h_3 Constanten sind, welche nach der Methode p. 102 leicht bestimmt werden, auf die es aber hier nicht ankommt, da sich dieselben fortheben. Setzt man in (17.) $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$ so erhält man die beiden Gleichungen:

$$(18.)\quad h_2^2 y_1^{(2)} y_2^{(2)} = h_3^2 z_1^{(2)} z_2^{(2)}; \quad h_2^2 y_1^{(3)} y_2^{(3)} = h_3^2 z_1^{(3)} z_2^{(3)},$$

Gleichungen, welche gültig sind für ζ_2, $\zeta_3 = \varepsilon_1$, γ_1 und ζ_2, $\zeta_3 = \varepsilon_2$, γ_2.

Mit Anwendung dieser Formeln folgt nun:

$$(19.)\quad \left\{ \frac{\sqrt{y_1^{(2)} z_2^{(2)}}\sqrt{y_2^{(3)} z_1^{(3)}} - \sqrt{y_1^{(3)} z_2^{(3)}}\sqrt{y_2^{(2)} z_1^{(2)}}}{\sqrt{y_1^{(2)} z_1^{(2)}}\sqrt{y_2^{(3)} z_2^{(3)}} - \sqrt{y_1^{(3)} z_1^{(3)}}\sqrt{y_2^{(2)} z_2^{(2)}}} = \sqrt{\frac{y_1^{(2)} y_1^{(3)}}{y_2^{(2)} y_2^{(3)}}}\; \frac{y_2^{(3)} z_2^{(2)} - y_2^{(2)} z_2^{(3)}}{y_1^{(2)} z_2^{(3)} - y_1^{(3)} z_2^{(2)}} \right. \text{ gültig für } \begin{matrix} \zeta_2, \zeta_3 = \varepsilon_1, \gamma_1 \\ \zeta_2, \zeta_3 = \varepsilon_2, \gamma_2 \end{matrix}.$$

Wir bilden daher jetzt die Gleichungen

$$(20.)\quad \begin{cases} z_1 = a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 x_1 = a_1' y_1 + b_1' y_2 + c_1' x_2, \\ z_2 = a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 x_1 = a_2' y_1 + b_2' y_2 + c_2' x_2, \end{cases}$$

was leicht durch Elimination geschieht, so dass die Coëfficienten a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_1', b_1', c_1', a_2', b_2', c_2' bekannte rationale Functionen der Classenmoduln sind. Und hieraus ergiebt sich

$$(21.)\quad \left|\frac{y_2^{(3)} z_2^{(2)} - y_2^{(2)} z_2^{(3)}}{y_1^{(2)} z_2^{(3)} - y_1^{(3)} z_2^{(2)}}\right|_{\zeta_2, \zeta_3 = \varepsilon_1, \gamma_1} = \frac{a_2}{b_2}; \quad \left|\frac{y_2^{(3)} z_2^{(2)} - y_2^{(2)} z_2^{(3)}}{y_1^{(2)} z_2^{(3)} - y_1^{(3)} z_1^{(2)}}\right|_{\zeta_2, \zeta_3 = \varepsilon_2, \gamma_2} = \frac{a_2'}{b_2'},$$

ferner aus (18.) und (20.)

$$\text{für } x_1 = 0 : h_2^2 y_1 y_2 - h_3^2 (a_1 y_1 + b_1 y_2)(a_2 y_1 + b\ y_2) = 0,$$

$$\text{für } x_2 = 0 : h_2^2 y_1 y_2 - h_3^2 (a_1' y_1 + b_1' y_2)(a_2' y_1 + b_2' y\ ) = 0,$$

als zwei quadratische Gleichungen, deren Wurzeln die Werthe von $\frac{y_1}{y_2}$ für die Punkte ε_1, γ_1 resp. ε_2, γ_2 liefern, woraus:

$$(22.)\quad \left|\frac{y_1^{(2)}y_1^{(3)}}{y_2^{(2)}y_2^{(3)}}\right|_{\zeta_2, \zeta_3 = \varepsilon_1, \gamma_1} = \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}; \quad \left|\frac{y_1^{(2)}y_1^{(3)}}{y_2^{(2)}y_2^{(3)}}\right|_{\zeta_2, \zeta_3 = \varepsilon_2, \gamma_2} = \frac{b'_1 b'_2}{a'_1 a'_2};$$

und wenn man (19.), (21.), (22.) in (16.) substituirt:

$$\sqrt{\frac{\chi_{(k)}^{(1)}\chi_{(k)}^{(2)}}{\chi_{(k')}^{(1)}\chi_{(k')}^{(2)}}} = \sqrt{\frac{b_1 a_2 a'_1 b'_2}{a_1 b_2 b'_1 a'_2}};$$

wonach sich aus (14.) ergiebt:

$$(23.)\quad A^4 = (-1)^{\Sigma(\mu\nu'+\nu\mu')}\frac{a_1 b_2 b_1 a'_2}{b_1 a_2 a'_1 b'_2}.$$

Eine kleine Modification erfordert die Rechnung, wenn zwischen y_1, y_2, x_1 oder zwischen y_1, y_2, x_2 eine homogene lineare Gleichung besteht, oder wenn beides zugleich stattfindet. Im ersten Fall wird für $\zeta_2, \zeta_3 = \varepsilon_1, \gamma_1$: $\frac{y_1^{(2)}}{y_2^{(2)}} = \frac{y_1^{(3)}}{y_2^{(3)}}$, wodurch sich die rechte Seite von (19.) sofort auf 1 reducirt. Man erhält also, wenn y_1, y_2, x_1 nicht linear unabhängig sind:

$$(23^*)\quad A^4 = (-1)^{\Sigma(\mu\nu'+\nu\mu')}\frac{b'_1 a'_2}{a'_1 b'_2};$$

und wenn ausserdem zwischen y_1, y_2, x_2 eine lineare homogene Gleichung besteht:

$$(23^{**})\quad A^4 = (-1)^{\Sigma(\mu\nu'+\nu\mu')}.$$

Es lässt sich aber auch die Constante A in völlig eindeutiger Weise durch ϑ-Functionen ausdrücken, was man auf folgende Weise erreicht:

Man lasse in der ersten Gleichung (13.) die Punkte ζ, ζ_1 zusammenfallen mit ε_1, γ_1, wodurch

$$(v'_1, v'_2, v'_3) \equiv (\tfrac{1}{2}p_1^{(1)}, \tfrac{1}{2}p_2^{(1)}, \tfrac{1}{2}p_3^{(1)})$$

wird. Weiter ergiebt sich unter der gleichen Voraussetzung aus der ersten Gleichung (16.)

$$\left|\sqrt{\frac{\chi_{(k)}^{(1)}}{\chi_{(k')}^{(1)}}}\right|_{\zeta, \zeta_1 = \varepsilon_1, \gamma_1} = 1,$$

woraus folgt:

$$(24.)\quad A = \frac{\vartheta\{k\}}{\vartheta\{k'\}} = \sqrt[4]{(-1)^{\Sigma\mu\nu'+\nu\mu'}\frac{a_1 b_2 a'_2 b'_1}{a_2 b_1 a'_1 b'_2}};$$

eine Formel, durch welche eine schon oben (§. 16) berührte und theilweise gelöste Aufgabe vollständig erledigt ist, nämlich die, für die sämmtlichen

Constanten $\frac{\vartheta\{k\}}{\vartheta\{k'\}}$ algebraische Ausdrücke zu finden. Es ist leicht, auf diesem Wege die Formeln des §. 16 wieder herzuleiten, wenn man sich der Gleichungen p. 95 bedient. Wir heben einen merkwürdigen besonderen Fall der Formel (24.) hervor, der dann eintritt, wenn zwischen x_1, y_1, y_2 und x_2, y_1, y_2 je eine lineare homogene Relation mit constanten Coëfficienten besteht:

$$(24^*)\qquad \frac{\vartheta\{k\}}{\vartheta\{k'\}} = \sqrt[4]{(-1)^{\Sigma(\mu\nu'+\nu\mu')}}.$$

Die Mehrdeutigkeit der vierten Wurzeln, welche hier auftreten, lässt sich auf algebraischem Wege nicht beseitigen; es ist aber diese vierte Wurzel eben durch die Formel (24.) eindeutig bestimmt, wenn man die ϑ-Moduln als bekannt voraussetzt. Dieser Umstand tritt genau in derselben Weise in der Theorie der elliptischen Functionen auf, wo auch durch eindeutige Ausdrücke die vierte Wurzel aus dem Quadrat des Moduls dargestellt ist. (*Jacobi* Fundamenta nova p. 184.)

Damit haben wir für diesen Fall eine sehr elegante Lösung des *Riemannschen* Problems gewonnen, welche in der Gleichung enthalten ist:

$$\text{I.}\qquad \sqrt{\frac{\chi(k)}{\chi(k')}} = \frac{\vartheta\{k'\}}{\vartheta\{k\}}\,\frac{\vartheta\{k\}(v_1, v_2, v_3)}{\vartheta\{k'\}(v_1, v_2, v_3)} = \sqrt[4]{(-1)^{\Sigma(\mu\nu'+\nu\mu')}\frac{a_1 b_2 a_2' b_1'}{a_2 b_1 a_1' b_2'}}\;\frac{\vartheta\{k\}(v_1, v_2, v_3)}{\vartheta\{k'\}(v_4, v_2, v_3)},$$

wodurch die algebraische Function $\sqrt{\frac{\chi(k)}{\chi(k')}}$ als eindeutige, stetige, sechsfach periodische Function der unabhängigen Veränderlichen v_1, v_2, v_3 dargestellt ist, als Analogon zu den *Jacobischen* Darstellungen der elliptischen Functionen $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$, $\frac{\cos\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u}$ (Fundamenta nova p. 183.)

II. Die Charakteristiken (k), (k') sind beide ungerade.

Es sei jetzt $(k) = (\sqrt{z_1})$, $(k') = (\sqrt{z_2})$ und

$$(25.)\qquad (\sqrt{x_1 x_2}) = (\sqrt{y_1 y_2}) = (\sqrt{z_1 z_2}) = (k) + (k'),$$

wo $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$, $\sqrt{y_1}$, $\sqrt{y_2}$, $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$ *Abelsche* Functionen bedeuten. Aus (25.) folgt:

$$(26.)\qquad \begin{cases} (\sqrt{z_1}) = (\sqrt{x_1 x_2 z_2}) = (\sqrt{y_1 y_2 z_2}), \\ (\sqrt{z_2}) = (\sqrt{x_1 x_2 z_1}) = (\sqrt{y_1 y_2 z_1}). \end{cases}$$

Da ferner nach §. 3 I. die drei Gruppen

$$(\sqrt{x_1 x_2}) = (\sqrt{y_1 y_2}) = (\sqrt{z_1 z_2}),$$
$$(\sqrt{x_1 y_1}) = (\sqrt{x_2 y_2}),$$
$$(\sqrt{x_1 y_2}) = (\sqrt{x_2 y_1})$$

nur vier Charakteristiken gemein haben, so müssen $(\sqrt{x_1 y_1 z_1})$, $(\sqrt{x_1 y_1 z_2})$ gerade sein. Wir setzen

$$(27.)\quad \begin{cases} (\sqrt{x_1 y_1 z_1}) = (k) + (\sqrt{x_1 y_1}) = (k_1), \\ (\sqrt{x_1 y_1 z_2}) = (k') + (\sqrt{x_1 y_1}) = (k_1'). \end{cases}$$

Ueber die Functionen $\sqrt{\chi_{(k)}}$, $\sqrt{\chi_{(k')}}$ können wir in diesem Fall folgende Annahme machen:

$$(28.)\qquad \sqrt{\chi_{(k)}} = \begin{vmatrix} x_1\sqrt{z_1}, & y_1\sqrt{z_1}, & \sqrt{x_1 x_2 z_2}, & \sqrt{y_1 y_2 z_2} \\ x_1^{(1)}\sqrt{z_1^{(1)}}, & y_1^{(1)}\sqrt{z_1^{(1)}}, & \sqrt{x_1^{(1)} x_2^{(1)} z_2^{(1)}}, & \sqrt{y_1^{(1)} y_2^{(1)} z_2^{(1)}} \\ x_1^{(2)}\sqrt{z_1^{(2)}}, & y_1^{(2)}\sqrt{z_1^{(2)}}, & \sqrt{x_1^{(2)} x_2^{(2)} z_2^{(2)}}, & \sqrt{y_1^{(2)} y_2^{(2)} z_2^{(2)}} \\ x_1^{(3)}\sqrt{z_1^{(3)}}, & y_1^{(3)}\sqrt{z_1^{(3)}}, & \sqrt{x_1^{(3)} x_2^{(3)} z_2^{(3)}}, & \sqrt{y_1^{(3)} y_2^{(3)} z_2^{(3)}} \end{vmatrix},$$

$$(29.)\qquad \sqrt{\chi_{(k')}} = \begin{vmatrix} x_1\sqrt{z_2}, & y_1\sqrt{z_2}, & \sqrt{x_1 x_2 z_1}, & \sqrt{y_1 y_2 z_1} \\ x_1^{(1)}\sqrt{z_2^{(1)}}, & y_1^{(1)}\sqrt{z_2^{(1)}}, & \sqrt{x_1^{(1)} x_2^{(1)} z_1^{(1)}}, & \sqrt{y_1^{(1)} y_2^{(1)} z_1^{(1)}} \\ x_1^{(2)}\sqrt{z_2^{(2)}}, & y_1^{(2)}\sqrt{z_2^{(2)}}, & \sqrt{x_1^{(2)} x_2^{(2)} z_1^{(2)}}, & \sqrt{y_1^{(2)} y_2^{(2)} z_1^{(2)}} \\ x_1^{(3)}\sqrt{z_2^{(3)}}, & y_1^{(3)}\sqrt{z_2^{(3)}}, & \sqrt{x_1^{(3)} x_2^{(3)} z_1^{(3)}}, & \sqrt{y_1^{(3)} y_2^{(3)} z_1^{(3)}} \end{vmatrix};$$

und dies haben wir in die Formel (11.) zu setzen:

$$(30.)\qquad A\sqrt{\frac{\chi_{(k)}}{\chi_{(k')}}} = \frac{\vartheta\{k\}(v_1, v_2, v_3)}{\vartheta\{k'\}(v_1, v_2, v_3)}.$$

Wir lassen nun Behufs der Bestimmung der Constanten A die Punkte ζ, ζ_1 mit den 0-Punkten ε', γ' von $\sqrt{x_1}$; ζ_2, ζ_3 mit den 0-Punkten ε'', γ'' von $\sqrt{y_1}$ zusammenfallen. Alsdann wird

$$(v_1, v_2, v_3) \equiv (\tfrac{1}{2}p_1, \tfrac{1}{2}p_2, \tfrac{1}{2}p_3),$$

wenn $\frac{1}{2}p_h$ ein System zusammengehöriger halber Perioden mit der Charakteristik

$$(p) = (\sqrt{x_1 y_1})$$

bedeutet, und es folgt aus (30.):

$$(31.)\quad e^{-\frac{1}{2}\pi i \Sigma n(\mu-\mu')}\frac{\vartheta\{k_1\}}{\vartheta\{k_1'\}} = A\left|\frac{\sqrt{y_1 z_1 y_2^{(1)} z_2^{(1)}} - \sqrt{y_1^{(1)} z_1^{(1)} y_2 z_2}}{\sqrt{y_1 z_2 y_2^{(1)} z_1^{(1)}} - \sqrt{y_1^{(1)} z_2^{(1)} y_2 z_1}}\;\frac{\sqrt{x_1^{(2)} z_1^{(2)} x_2^{(3)} z_2^{(3)}} - \sqrt{x_2^{(2)} z_2^{(2)} x_1^{(3)} z_1^{(3)}}}{\sqrt{x_1^{(2)} z_2^{(2)} x_2^{(3)} z_1^{(3)}} - \sqrt{x_2^{(2)} z_1^{(2)} x_1^{(3)} z_2^{(3)}}}\right|_{\substack{\zeta,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3 = \\ \varepsilon',\gamma',\varepsilon'',\gamma''}};$$

wenn

$$(k)=\binom{\nu_1\,\nu_2\,\nu_3}{\mu_1\,\mu_2\,\mu_3},\quad (k')=\binom{\nu'_1\,\nu'_2\,\nu'_3}{\mu'_1\,\mu'_2\,\mu'_3},\quad (\sqrt{x_1y_1})=\binom{n_1\,n_2\,n_3}{m_1\,m_2\,m_3}.$$

Haben wir nun die Gleichung

$$(32.)\qquad h'\sqrt{x_1x_2}+h''\sqrt{y_1y_2}+\sqrt{z_1z_2}\;=\;0,$$

so ist für ε', γ'

$$(32^a)\qquad h''^2y_1y_2\;=\;z_1z_2,$$

und für ε'', γ''

$$(32^b)\qquad h'^2x_1x_2\;=\;z_1z_2,$$

mit deren Hülfe der Factor von A auf der rechten Seite von (32.) sich schreiben lässt:

$$\left|\sqrt{\frac{z_1z_1^{(1)}z_1^{(2)}z_1^{(3)}}{z_2z_2^{(1)}z_2^{(2)}z_2^{(3)}}}\;\frac{y_1z_2^{(1)}-z_2y_1^{(1)}}{y_1z_1^{(1)}-z_1y_1^{(1)}}\;\frac{x_1^{(2)}z_2^{(3)}-x_1^{(3)}z_2^{(2)}}{x_1^{(2)}z_1^{(3)}-x_1^{(3)}z_1^{(2)}}\right|_{\zeta,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3=\varepsilon',\gamma',\varepsilon'',\gamma''}.$$

Bilden wir nun die Gleichungen

$$(33.)\qquad\begin{cases}y_1=a_1z_1+a_2z_2+a_3x_1=a'_1z_1+a'_2z_2+a'_3x_2,\\ y_2=b_1z_1+b_2z_2+b_3x_1=b'_1z_1+b'_2z_2+b'_3x_2,\end{cases}$$

so ergiebt sich aus (32^a), (32^b):

$$\left|\frac{z_1z_1^{(1)}}{z_2z_2^{(1)}}\right|_{\zeta,\zeta_1=\varepsilon',\gamma'}=-\frac{a_2b_2}{a_1b_1},\qquad \left|\frac{z_1^{(2)}z_1^{(3)}}{z_2^{(2)}z_2^{(3)}}\right|_{\zeta_2,\zeta_3=\varepsilon'',\gamma''}=-\frac{a_2a'_2}{a_1a'_1}$$

und unmittelbar aus (33.):

$$\left|\frac{y_1z_2^{(1)}-z_2y_1^{(1)}}{y_1z_1^{(1)}-z_1y_1^{(1)}}\right|_{\zeta,\zeta_1=\varepsilon',\gamma'}=-\frac{a_1}{a_2},\qquad \left|\frac{x_1^{(2)}z_2^{(3)}-x_1^{(3)}z_2^{(2)}}{x_1^{(2)}z_1^{(3)}-x_1^{(3)}z_1^{(2)}}\right|_{\zeta_2,\zeta_3=\varepsilon'',\gamma''}=-\frac{a_1}{a_2}$$

und sonach erhält man aus (31.)

$$(34.)\qquad e^{-\frac{1}{2}\pi i\Sigma n(\mu-\mu')}\frac{\vartheta\{k_1\}}{\vartheta\{k'_1\}}\;=\;A\frac{a_1}{a_2}\sqrt{\frac{b_2a'_2}{b_1a'_1}}.$$

Auch hier ergeben sich Vereinfachungen, wenn zwischen x_1, z_1, z_2 oder zwischen y_1, z_1, z_2 (beides zugleich ist nicht möglich) eine lineare homogene Relation besteht. Im ersteren Fall nämlich wird

$$\sqrt{\frac{z_1z_1^{(1)}}{z_2z_2^{(1)}}}\;\frac{y_1z_2^{(1)}-z_2y_1^{(1)}}{y_1z_1^{(1)}-z_1y_1^{(1)}}\;=\;1$$

und wenn wir setzen:

$$x_1\;=\;a_1z_1+a_2z_2,$$
$$x_2\;=\;a'_1z_1+a'_2z_2+c'y_1,$$

so folgt:

$$(34^*)\qquad e^{-\frac{1}{2}\pi i\Sigma n(\mu-\mu')}\frac{\vartheta\{k_1\}}{\vartheta\{k'_1\}} = A\sqrt{-\frac{a_1 a'_2}{a_2 a'_1}}.$$

Die Constante $\frac{\vartheta\{k_1\}}{\vartheta\{k'_1\}}$ kann nach der unter I. mitgetheilten Methode algebraisch bestimmt werden, so dass hierdurch für A^4 ein eindeutiger algebraischer Ausdruck gewonnen ist. Die Formel (30.) liefert endlich für diesen Fall die gesuchte Darstellung:

$$\text{II.}\qquad \frac{a_2}{a_1}\sqrt{\frac{b_1 a'_1}{b_2 a'_2}\frac{\chi_{(k)}}{\chi_{(k')}}} = e^{-\frac{1}{2}\pi i\Sigma n(\mu-\mu')}\frac{\vartheta\{k'_1\}}{\vartheta\{k_1\}}\frac{\vartheta\{k\}(v_1, v_2, v_3)}{\vartheta\{k'\}(v_1, v_2, v_3)}.$$

Diese Formeln haben in der Theorie der elliptischen Functionen kein Analogon, weil dort nur eine ungerade ϑ-Function existirt.

III. Die Charakteristik (k) ist ungerade, (k') gerade.

Es sei jetzt $(k) = (\sqrt{x})$ ungerade, (k') gerade. Wir suchen zunächst eine Zerlegung:

$$(k')+(\sqrt{x}) = (\sqrt{x_1 x_2}) = (\sqrt{y_1 y_2}) = (\sqrt{z_1 z_2}),$$

und betrachten die beiden Gruppen:

$$(\sqrt{x_1 y_1}) = (\sqrt{x_2 y_2}); \qquad (\sqrt{x_1 y_2}) = (\sqrt{x_2 y_1}),$$

von denen nach §. 3 eine die Charakteristik $(\sqrt{x})$ enthalten muss. Es sei dies die erste dieser beiden Gruppen, so dass man hat:

$$(\sqrt{x_1 y_1}) = (\sqrt{x_2 y_2}) = (\sqrt{x y})$$

woraus folgt:

$$(k')+(\sqrt{y}) = (\sqrt{x_1 y_2}) = (\sqrt{x_2 y_1}).$$

Da die Charakteristik $(\sqrt{z_1})$ in diesen beiden Gruppen nicht vorkommt, so sind

$$(\sqrt{x y z_1}) = (k_1), \qquad (k')+(\sqrt{y z_1}) = (k'_1)$$

gerade. Nun setzen wir

$$(35.)\qquad \sqrt{\chi_{(k)}} = \begin{vmatrix} x\sqrt{x}, & z_1\sqrt{x}, & \sqrt{y x_1 y_1}, & \sqrt{y x_2 y_2} \\ x^{(1)}\sqrt{x^{(1)}}, & z_1^{(1)}\sqrt{x^{(1)}}, & \sqrt{y^{(1)} x_1^{(1)} y_1^{(1)}}, & \sqrt{y^{(1)} x_2^{(1)} y_2^{(1)}} \\ x^{(2)}\sqrt{x^{(2)}}, & z_1^{(2)}\sqrt{x^{(2)}}, & \sqrt{y^{(2)} x_1^{(2)} y_1^{(2)}}, & \sqrt{y^{(2)} x_2^{(2)} y_2^{(2)}} \\ x^{(3)}\sqrt{x^{(3)}}, & z_1^{(3)}\sqrt{x^{(3)}}, & \sqrt{y^{(3)} x_1^{(3)} y_1^{(3)}}, & \sqrt{y^{(3)} x_2^{(3)} y_2^{(3)}} \end{vmatrix},$$

$$(36.)\quad \sqrt{\chi_{(k')}} = \begin{vmatrix} \sqrt{x x_1 x_2}, & \sqrt{x y_1 y_2}, & \sqrt{y x_1 y_2}, & \sqrt{y x_2 y_1} \\ \sqrt{x^{(1)} x_1^{(1)} x_2^{(1)}}, & \sqrt{x^{(1)} y_1^{(1)} y_2^{(1)}}, & \sqrt{y^{(1)} x_1^{(1)} y_2^{(1)}}, & \sqrt{y^{(1)} x_2^{(1)} y_1^{(1)}} \\ \sqrt{x^{(2)} x_1^{(2)} x_2^{(2)}}, & \sqrt{x^{(2)} y_1^{(2)} y_2^{(2)}}, & \sqrt{y^{(2)} x_1^{(2)} y_2^{(2)}}, & \sqrt{y^{(2)} x_2^{(2)} y_1^{(2)}} \\ \sqrt{x^{(3)} x_1^{(3)} x_2^{(3)}}, & \sqrt{x^{(3)} y_1^{(3)} y_2^{(3)}}, & \sqrt{y^{(3)} x_1^{(3)} y_2^{(3)}}, & \sqrt{y^{(3)} x_2^{(3)} y_1^{(3)}} \end{vmatrix}$$

und haben nach (11.):

$$(37.)\quad A\sqrt{\frac{\chi_{(k)}}{\chi_{(k')}}} = \frac{\vartheta\{k\}(v_1, v_2, v_3)}{\vartheta\{k'\}(v_1, v_2, v_3)}.$$

Zur Bestimmung der Constanten A lassen wir die Punkte ζ, ζ_1, ζ_2, ζ_3 zusammenfallen mit den 0-Punkten ε', γ'; ε'', γ'' der Functionen $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{y}$ wodurch die Argumente (v_1, v_2, v_3) der ϑ-Functionen übergehen in ein System zusammengehöriger halber Perioden mit der Charakteristik

$$(\sqrt{y z_1}) = (k) + (k_1) = (k') + (k_1')$$

und es ergiebt sich wie oben:

$$(38.)\quad e^{-\frac{1}{2}\pi i \Sigma n(\mu-\mu')} \frac{\vartheta\{k_1\}}{\vartheta\{k_1'\}} = A \left| \frac{\sqrt{x_1 y_1 x_2^{(1)} y_2^{(1)}} - \sqrt{x_2 y_2 x_1^{(1)} y_1^{(1)}}}{\sqrt{x_1 y_2 x_2^{(1)} y_1^{(1)}} - \sqrt{x_2 y_1 x_1^{(1)} y_2^{(1)}}} \; \frac{x^{(2)} z_1^{(3)} - x^{(3)} z_1^{(2)}}{\sqrt{x_1^{(2)} x_2^{(2)} y_1^{(3)} y_2^{(3)}} - \sqrt{x_1^{(3)} x_2^{(3)} y_1^{(2)} y_2^{(2)}}} \right|_{\substack{\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 = \\ \varepsilon', \gamma', \varepsilon'', \gamma''}}.$$

Bestehen nun die Relationen

$$(39.)\quad \begin{cases} \sqrt{x_1 x_2} + h\sqrt{y_1 y_2} + h'\sqrt{z_1 z_2} = 0, \\ \sqrt{x_1 y_1} + k\sqrt{x_2 y_2} + k'\sqrt{x y} = 0, \end{cases}$$

so folgen daraus die beiden Gleichungen

$$(40.)\quad \begin{cases} x_1 x_2 = h^2 y_1 y_2, & \text{für die Punkte } \varepsilon', \gamma', \\ x_1 y_1 = k^2 x_2 y_2, & \text{„ „ „ } \varepsilon'', \gamma'', \end{cases}$$

wodurch der Factor von A auf der rechten Seite von (38.) übergeht in

$$\left| \frac{\sqrt{x_1 x_1^{(1)} x_1^{(2)} x_1^{(3)}}}{k\sqrt{x_2 x_2^{(1)} x_2^{(2)} x_2^{(3)}}} \; \frac{(y_1 x_2^{(1)} - y_1^{(1)} x_2)(x^{(2)} z_1^{(3)} - x^{(3)} z_1^{(2)})}{(x_1 y_1^{(1)} - x_1^{(1)} y_1)(x_1^{(2)} y_2^{(3)} - x_1^{(3)} y_2^{(3)})} \right|_{\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 = \varepsilon', \gamma', \varepsilon'', \gamma''}.$$

Man leitet nun wieder durch Elimination Gleichungen von folgender Gestalt ab:

$$(41.)\quad \begin{cases} y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 z_1 = a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' y, \\ y_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 z_1 = b_1' x_1 + b_2' x_2 + b_3' y, \\ \quad x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y, \\ \quad z_1 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 y, \end{cases}$$

woraus sich wie oben ergiebt

$$\left|\sqrt{\frac{x_1 x_1^{(1)}}{x_2 x_2^{(1)}}}\right|_{\zeta,\zeta_1=\varepsilon',\gamma'} = \sqrt{\frac{a_2 b_2}{a_1 b_1}}, \qquad \left|\frac{\sqrt{x_1^{(2)} x_1^{(3)}}}{k\sqrt{x_2^{(2)} x_2^{(3)}}}\right|_{\zeta_2,\zeta_3=\varepsilon'',\gamma''} = \sqrt{-\frac{b_2'}{a_1'}},$$

$$\left|\frac{y_1 x_2^{(1)} - y_1^{(1)} x_2}{x_1 y_1^{(1)} - x_1^{(1)} y_1}\right|_{\zeta,\zeta_1=\varepsilon',\gamma'} = \frac{a_1}{a_2}, \qquad \left|\frac{x^{(2)} z_1^{(3)} - x^{(3)} z_1^{(2)}}{x_1^{(2)} y_1^{(3)} - x_1^{(3)} y_2^{(2)}}\right|_{\zeta_2,\zeta_3=\varepsilon'',\gamma''} = \frac{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}{a_2'},$$

und man erhält aus (38.)

$$(42.) \qquad e^{-\frac{1}{2}\pi i \Sigma n(\mu-\mu')} \frac{\vartheta\{k_1\}}{\vartheta\{k_1'\}} = A\frac{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}{a_2'}\sqrt{-\frac{a_1 b_2 b_2'}{a_2 b_1 a_1'}}.$$

Besteht, was hier der einzige zu berücksichtigende Ausnahmefall ist, zwischen x_1, x_2, z_1 eine lineare homogene Relation, so hat man nur zu setzen:

$$\left|\sqrt{\frac{x_1 x_1^{(1)}}{x_2 x_2^{(1)}}}\,\frac{y_1 x_2^{(1)} - y_1^{(1)} x_2}{x_1 y_1^{(1)} - x_1^{(1)} y_1}\right|_{\zeta,\zeta_1=\varepsilon',\gamma'} = 1,$$

während alles Andere ungeändert bleibt.

Hiernach erhalten wir die endliche Formel:

$$\text{III.} \qquad \frac{a_2'}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}\sqrt{-\frac{a_2 b_1 a_1'}{a_1 b_2 b_2'}\,\frac{\chi(k)}{\chi(k')}} = e^{-\frac{1}{2}\pi i \Sigma n(\mu-\mu')}\frac{\vartheta\{k_1'\}}{\vartheta\{k_1\}}\,\frac{\vartheta\{k\}(v_1, v_2, v_3)}{\vartheta\{k'\}(v_1, v_2, v_3)},$$

$$(k) = \binom{\nu_1\ \nu_2\ \nu_3}{\mu_1\ \mu_2\ \mu_3}, \quad (k') = \binom{\nu_1'\ \nu_2'\ \nu_3'}{\mu_1'\ \mu_2'\ \mu_3'}, \quad (\sqrt{y z_1}) = \binom{n_1\ n_2\ n_3}{m_1\ m_2\ m_3}.$$

Der Factor $\dfrac{\vartheta\{k_1'\}}{\vartheta\{k_1\}}$ kann nach I. algebraisch dargestellt werden. Diese Formeln sind analog den Darstellungen von $\sin\operatorname{am} u$, $\operatorname{tg}\operatorname{am} u$, $\dfrac{\sin\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u}$ aus der Theorie der elliptischen Functionen, und damit ist unser Problem vollständig gelöst.

Die Formel III. gewährt noch einen weiteren Nutzen, auf den hier hingewiesen werden muss: Setzen wir die Normalintegrale erster Gattung in der Form an:

$$u_1 = \int \frac{\varphi_1\, dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}, \quad u_2 = \int \frac{\varphi_2\, dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}, \quad u_3 = \int \frac{\varphi_3\, dz}{\frac{\partial F}{\partial s}},$$

so können wir, wie in §. 16 gezeigt, die Functionen φ_1, φ_2, φ_3 bis auf einen gemeinschaftlichen constanten Factor linear ausdrücken durch die Quadrate dreier *Abelscher* Functionen, wenn die Moduln der ϑ-Function als bekannt vorausgesetzt werden. Die Formel III. liefert uns das Mittel, diesen noch fehlenden constanten Factor unter der gleichen Voraussetzung zu bestimmen.

Lassen wir nämlich in III. die Punkte ζ_1, ζ_2, ζ_3 zusammenfallen mit γ, ε, γ so wird

$$v_1 = \int_\varepsilon^\zeta du_1, \quad v_2 = \int_\varepsilon^\zeta du_2, \quad v_3 = \int_\varepsilon^\zeta du_3.$$

Würden wir noch ζ mit ε zusammenfallen lassen, so würden beide Seiten von III. verschwinden. Wenn wir aber III. in Bezug auf z differentiiren und dann ζ mit ε zusammenfallen lassen, so entsteht eine richtige Gleichung.

Die rechte Seite dieser Gleichung ist multiplicirt mit dem erwähnten constanten Factor der drei Functionen φ_1, φ_2, φ_3 und es kann derselbe daraus bestimmt werden.

Dies ist der einzige Punkt in unserer ganzen Theorie, wo wir nicht mehr allein mit Functionen rechnen können, die für alle rationalen Transformationen invariant sind, wo es also nöthig ist, irgend eine besondere Form der Gleichung $F(s, z) = 0$ anzunehmen, denn dieser constante Factor ist nothwendig von dieser besonderen Form abhängig. Wir stellen daher hier auch keinen Ausdruck für denselben auf, da ein solcher einen viel specielleren Charakter haben würde als alle unsere bisherigen Formeln, und da für jeden besonderen Fall derselbe durch eine, im Prinzip wenigstens, einfache Rechnung erhalten werden kann.

§. 25. Die Wurzelfunctionen vierten Grades.

Wir haben in den §§. 21, 22 gezeigt, wie die Wurzelfunctionen vierten Grades durch ϑ-Functionen und auf algebraischem Wege bestimmt werden können. Es blieb aber dabei noch eine Lücke hinsichtlich der vollständigen Bestimmung der Charakteristiken, welche wir jetzt auszufüllen im Stande sind.

Es sollen in der Folge diese Functionen mit $\sqrt[4]{\Omega\binom{(p)}{(\varpi)}}$ bezeichnet werden, wenn (ϖ) die erste, (p) die zweite Charakteristik derselben ist. Wir gehen aus von einem System dieser Functionen mit ungerader erster Charakteristik (ϖ) und bezeichnen mit $\sqrt{q}$ die zur Charakteristik $(\varpi) = (\sqrt{q})$ gehörige *Abelsche* Function, deren 0-Punkte ε, γ sind. In diesem einen System kann eine der zweiten Charakteristiken beliebig angenommen werden, und in §. 22 ist gezeigt, wie alsdann auf algebraischem Wege die sämmtlichen Functionen dieses Systems mit ihren zweiten Charakteristiken bestimmt werden können. Wir haben somit nach Formel (4.) §. 21 (p. 134)

$$(1.)\quad C\sqrt[4]{\frac{\Omega^{(p)}_{(1\,q)}}{\Omega^{(0)}_{(1\,q)}}} = \frac{\vartheta\{p\}(w_1, w_2, w_3)}{\vartheta(w_1, w_2, w_3)},$$

wenn zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(2.)\quad (w_1, w_2, w_3) \equiv \left(\begin{smallmatrix}3\\h\\1\end{smallmatrix}\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h + \tfrac{1}{2}\int_\gamma^\varepsilon du_h\right)\right);$$

worin die Functionen $\sqrt[4]{\Omega^{(p)}_{(1\,q)}}$, $\sqrt[4]{\Omega^{(0)}_{(1\,q)}}$ algebraisch vollständig bestimmt sind (Für $\sqrt[4]{\Omega^{(0)}_{(1\,q)}}$ kann eine beliebige der 64 Functionen des betreffenden Systems gesetzt werden).

Zunächst handelt es sich um die Bestimmung der Constanten C, wozu uns die Formeln des vorigen § dienen. Wir leiten die betreffenden Ausdrücke, gleich in einer etwas allgemeineren Fassung, direct aus jenen Resultaten her. Ist wie dort:

$$(3.)\quad (v_1, v_2, v_3) \equiv \left(\begin{smallmatrix}3\\h\\1\end{smallmatrix}\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h + \int_\gamma^{\zeta_1} du_h + \int_\varepsilon^{\zeta_2} du_h + \int_\gamma^{\zeta_3} du_h\right)\right)$$

und bedeuten (k), (k') zwei beliebige Charakteristiken, so haben wir:

$$(4.)\quad A\sqrt{\frac{\chi_{(k)}}{\chi_{(k')}}} = \frac{\vartheta\{k\}(v_1, v_2, v_3)}{\vartheta\{k'\}(v_1, v_2, v_3)};$$

worin A eine abgesehen vom Vorzeichen völlig bestimmte Constante ist.

Nehmen wir nun die Function $\sqrt[4]{\Omega^{(0)}_{(1\,q)}}$ aus ihrem System beliebig an, und bezeichnen die 0-Punkte derselben, die man durch Auflösung einer cubischen Gleichung erhält, mit C_1, C_2, C_3 so können wir in (4.) die Punkte ζ_1, ζ_2, ζ_3 mit diesen Punkten C_1, C_2, C_3 zusammenfallen lassen, wodurch sich ergiebt:

$$(v_1, v_2, v_3) \equiv \left(\begin{smallmatrix}3\\h\\1\end{smallmatrix}\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h + \int_\gamma^{C_1} du_h + \int_\varepsilon^{C_2} du_h + \int_\gamma^{C_3} du_h\right)\right).$$

Da nun $\dfrac{\sqrt{\Omega^{(0)}_{(1\,q)}}}{q\sqrt{q}}$ eine rationale Function ist, welche in den Punkten C_1, C_2, C_3 unendlich klein von der zweiten Ordnung, in ε, γ unendlich gross von der dritten Ordnung wird, so haben wir nach dem *Abelschen* Theorem die Congruenz:

$$\left(\begin{smallmatrix}3\\h\\1\end{smallmatrix}\left(2\int_\gamma^{C_1} du_h + 2\int_\varepsilon^{C_2} du_h + 2\int_\gamma^{C_3} du_h + \int_\varepsilon^\gamma du_h\right)\right) \equiv (0, 0, 0),$$

oder durch Division mit 2:

$$(5.)\quad \left(\begin{smallmatrix}3\\h\\1\end{smallmatrix}\left(\int_\gamma^{c_1} du_h + \int_\varepsilon^{c_2} du_h + \int_\gamma^{c_3} du_h\right)\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix}3\\h\\1\end{smallmatrix}\left(\tfrac{1}{2}\int_\gamma^{\varepsilon} du_h + \tfrac{1}{2}P_h\right)\right),$$

worin $\frac{1}{2}P_1$, $\frac{1}{2}P_2$, $\frac{1}{2}P_3$ ein System zusammengehöriger halber Perioden bedeutet, dem man durch passende Bestimmung des Integrationswegs $\int_\gamma^\varepsilon du_h$ eine beliebige Charakteristik ertheilen kann. Wir wollen diese Charakteristik $= (\sqrt{q})$ annehmen. Man erhält alsdann:

$$(v_1, v_2, v_3) \equiv (w_1 + \tfrac{1}{2}P_1, w_2 + \tfrac{1}{2}P_2, w_3 + \tfrac{1}{2}P_3)$$

und (4.) geht über in

$$(6.)\quad A\left|\sqrt{\frac{\chi_{(k)}}{\chi_{(k')}}}\right|_{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 = c_1, c_2, c_3} = \frac{\vartheta\{(k)+(\sqrt{q})\}(w_1, w_2, w_3)}{\vartheta\{(k')+(\sqrt{q})\}(w_1, w_2, w_3)},$$

wobei ein constanter Factor, eine leicht zu bestimmende Potenz von i, in die Constante A mit eingerechnet ist, so dass A immer noch bis auf das Vorzeichen völlig bekannt ist. Es handelt sich also noch um die Bestimmung der Function auf der linken Seite von (6.).

Bedeuten $\sqrt{q_1}$, $\sqrt{q_2}$, $\sqrt{q_3}$ drei *Abelsche* Functionen, deren Charakteristiken der Bedingung genügen:

$$(\sqrt{q}) = (\sqrt{q_1 q_2 q_3}),$$

so können wir nach §. 22 die Functionen $\sqrt{\Omega^{(p)}_{(\sqrt{q})}}$ aufstellen in der Form:

$$\sqrt{\Omega^{(p)}_{(\sqrt{q})}} = m^{(p)}\sqrt{q} + 2\sqrt{q_1 q_2 q_3},$$

worin die $m^{(p)}$ vollständig bekannte lineare und homogene Functionen etwa von q_1, q_2, q_3 sind, und es ergiebt sich mit Rücksicht auf die Charakteristiken-Bestimmung §. 21 für ein gerades (k):

$$(7.)\quad \sqrt[4]{\Omega^{(0)}_{(\sqrt{q})}}\sqrt[4]{\Omega^{(\sqrt{q})+(k)}_{(\sqrt{q})}} = a_0\sqrt{x_1 y_1 z_1} + a_1\sqrt{x_1 y_2 z_2} + a_2\sqrt{x_2 y_1 z_2} + a_3\sqrt{x_2 y_2 z_1},$$

wenn:

$$(k) = (\sqrt{x_1 y_1 z_1}) = (\sqrt{x_1 y_2 z_2}) = (\sqrt{x_2 y_1 z_2}) = (\sqrt{x_2 y_2 z_1}),$$

und für ein ungerades (k):

$$(7'.)\quad \sqrt[4]{\Omega^{(0)}_{(\sqrt{q})}}\sqrt[4]{\Omega^{(\sqrt{q})+(k)}_{(\sqrt{q})}} = b_0 x_1\sqrt{x} + b_1 y_1\sqrt{x} + b_2\sqrt{x_1 x_2 y} + b_3\sqrt{y_1 y_2 y},$$

wenn

$$(k) = (\sqrt{x}) = (\sqrt{x_1 x_2 y}) = (\sqrt{y_1 y_2 y}),$$

worin die Constanten a, b nach §. 22 als völlig bekannt zu betrachten sind. Die Functionen auf der rechten Seite von (7.), (7'.) müssen nun bis auf constante Factoren mit den in (6.) vorkommenden Functionen $\sqrt{\chi_{(k)}}$ übereinstimmen, und es ergiebt sich durch Vergleichung der Coëfficienten entsprechender Glieder, wenn die Functionen $\sqrt{\chi_{(k)}}$ in der Weise des vorigen §. dargestellt vorausgesetzt werden für gerade (k)

$$(8.)\quad \sqrt{\chi_{(k)}} = \frac{1}{a_0}\begin{vmatrix} \sqrt{x_1^{(1)} y_2^{(1)} z_2^{(1)}}, & \sqrt{x_2^{(1)} y_1^{(1)} z_2^{(1)}}, & \sqrt{x_2^{(1)} y_2^{(1)} z_1^{(1)}} \\ \sqrt{x_1^{(2)} y_2^{(2)} z_2^{(2)}}, & \sqrt{x_2^{(2)} y_1^{(2)} z_2^{(2)}}, & \sqrt{x_2^{(2)} y_2^{(2)} z_1^{(2)}} \\ \sqrt{x_1^{(3)} y_2^{(3)} z_2^{(3)}}, & \sqrt{x_2^{(3)} y_1^{(3)} z_2^{(3)}}, & \sqrt{x_2^{(3)} y_2^{(3)} z_1^{(3)}} \end{vmatrix} \sqrt[4]{\Omega_{(1q)}^{(0)}}\,\sqrt[4]{\Omega_{(1q)}^{(1q)+(k)}}$$

und für ungerade (k)

$$(8'.)\quad \sqrt{\chi_{(k)}} = \frac{1}{b_0}\begin{vmatrix} y_1^{(1)}\sqrt{x^{(1)}}, & \sqrt{x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}}, & \sqrt{y_1^{(1)} y_2^{(1)} y^{(1)}} \\ y_1^{(2)}\sqrt{x^{(2)}}, & \sqrt{x_1^{(2)} x_2^{(2)} y^{(2)}}, & \sqrt{y_1^{(2)} y_2^{(2)} y^{(2)}} \\ y_1^{(3)}\sqrt{x^{(3)}}, & \sqrt{x_1^{(3)} x_2^{(3)} y^{(3)}}, & \sqrt{y_1^{(3)} y_2^{(3)} y^{(3)}} \end{vmatrix} \sqrt[4]{\Omega_{(1q)}^{(0)}}\,\sqrt[4]{\Omega_{(1q)}^{(1q)+(k)}},$$

worin sich die oberen Indices 1, 2, 3 auf die Punkte C_1, C_2, C_3, d. h. auf die Nullpunkte der Function $\sqrt[4]{\Omega_{(1q)}^{(0)}}$ beziehen. Behalten wir daher die unter I., II., III. des vorigen §. benutzte Bezeichnung bei, so ist unsere Aufgabe, die Function auf der linken Seite von (6.) zu bestimmen, gelöst, sobald wir folgende drei Verhältnisse ermittelt haben:

$$\text{I.}\quad \frac{\Delta_k}{\Delta_{k'}} = \begin{vmatrix} \sqrt{x_1^{(1)} y_2^{(1)} z_2^{(1)}}, & \sqrt{x_2^{(1)} y_1^{(1)} z_2^{(1)}}, & \sqrt{x_2^{(1)} y_2^{(1)} z_1^{(1)}} \\ \sqrt{x_1^{(2)} y_2^{(2)} z_2^{(2)}}, & \sqrt{x_2^{(2)} y_1^{(2)} z_2^{(2)}}, & \sqrt{x_2^{(2)} y_2^{(2)} z_1^{(2)}} \\ \sqrt{x_1^{(3)} y_2^{(3)} z_2^{(3)}}, & \sqrt{x_2^{(3)} y_1^{(3)} z_2^{(3)}}, & \sqrt{x_2^{(3)} y_2^{(3)} z_1^{(3)}} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \sqrt{x_2^{(1)} y_1^{(1)} z_1^{(1)}}, & \sqrt{x_1^{(1)} y_2^{(1)} z_1^{(1)}}, & \sqrt{x_1^{(1)} y_1^{(1)} z_2^{(1)}} \\ \sqrt{x_2^{(2)} y_1^{(2)} z_1^{(2)}}, & \sqrt{x_1^{(2)} y_2^{(2)} z_1^{(2)}}, & \sqrt{x_1^{(2)} y_1^{(2)} z_2^{(2)}} \\ \sqrt{x_2^{(3)} y_1^{(3)} z_1^{(3)}}, & \sqrt{x_1^{(3)} y_2^{(3)} z_1^{(3)}}, & \sqrt{x_1^{(3)} y_1^{(3)} z_2^{(3)}} \end{vmatrix};$$

wenn $(k) = (\sqrt{x_1 y_1 z_1})$, $(k') = (\sqrt{x_2 y_2 z_2})$ gerade Charakteristiken sind.

Das Quadrat dieses Verhältnisses ist eine symmetrische Function der drei Punkte C_1, C_2, C_3 und lässt sich daher rational durch die Coëfficienten der cubischen Gleichung ausdrücken, durch welche diese drei Punkte bestimmt sind. Man kann dabei auf folgende Weise verfahren:

Nach §. 22 lassen sich vier lineare homogene Functionen μ_1, ν_1, μ_2, ν_2 so bestimmen, dass in den drei Punkten C_1, C_2, C_3 die drei Gleichungen befriedigt sind:

$$\mu_1\sqrt{x_1} = \sqrt{z_1 z_2 x_2}, \quad \mu_2\sqrt{x_2} = \sqrt{z_1 z_2 x_1},$$
$$\nu_1\sqrt{y_1} = \sqrt{z_1 z_2 y_2}, \quad \nu_2\sqrt{y_2} = \sqrt{z_1 z_2 y_2};$$

mit deren Hülfe man für das Verhältniss $\Delta_k : \Delta_{k'}$ folgenden Ausdruck erhält:

$$\frac{\Delta_k}{\Delta_{k'}} = \sqrt{\frac{x_2^{(1)}x_2^{(2)}x_2^{(3)}y_2^{(1)}y_2^{(2)}y_2^{(3)}z_2^{(1)}z_2^{(2)}z_2^{(3)}}{x_1^{(1)}x_1^{(2)}x_1^{(3)}y_1^{(1)}y_1^{(2)}y_1^{(3)}z_1^{(1)}z_1^{(2)}z_1^{(3)}}}\frac{\begin{vmatrix} \mu_2^{(1)}, & \nu_2^{(1)}, & z_1^{(1)} \\ \mu_2^{(2)}, & \nu_2^{(2)}, & z_1^{(2)} \\ \mu_2^{(3)}, & \nu_2^{(3)}, & z_1^{(3)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_1^{(1)}, & \nu_1^{(1)}, & z_2^{(1)} \\ \mu_1^{(2)}, & \nu_1^{(2)}, & z_2^{(2)} \\ \mu_1^{(3)}, & \nu_1^{(3)}, & z_2^{(3)} \end{vmatrix}}.$$

Der Quotient der beiden Determinanten in diesem Ausdruck ist gleich dem Quotienten der Functionaldeterminanten der beiden Systeme linearer Functionen μ_2, ν_2, z_1; μ_1, ν_1, z_2, während man die Wurzelgrösse finden kann, wenn man in der cubischen Gleichung für die C_1, C_2, C_3 einmal $\frac{x_2}{x_1}$ dann $\frac{y_2}{y_1}$, zuletzt $\frac{z_2}{z_1}$ als Unbekannte einführt. Diese Gleichung erhält man durch Elimination von je einer der drei Veränderlichen aus der Gleichung $\Omega_{(\sqrt{q})}^{(0)} = 0$ und der gegebenen Gleichung vierter Ordnung.

$$\text{II.}\quad \frac{\Delta_k}{\Delta_{k'}} = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}\sqrt{z_1^{(1)}}, & \sqrt{x_1^{(1)}x_2^{(1)}z_2^{(1)}}, & \sqrt{y_1^{(1)}y_2^{(1)}z_2^{(1)}} \\ y_1^{(2)}\sqrt{z_1^{(2)}}, & \sqrt{x_1^{(2)}x_2^{(2)}z_2^{(2)}}, & \sqrt{y_1^{(2)}y_2^{(2)}z_2^{(2)}} \\ y_1^{(3)}\sqrt{z_1^{(3)}}, & \sqrt{x_1^{(3)}x_2^{(3)}z_2^{(3)}}, & \sqrt{y_1^{(3)}y_2^{(3)}z_2^{(3)}} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1^{(1)}\sqrt{z_2^{(1)}}, & \sqrt{x_1^{(1)}x_2^{(1)}z_1^{(1)}}, & \sqrt{y_1^{(1)}y_2^{(1)}z_1^{(1)}} \\ y_1^{(2)}\sqrt{z_2^{(2)}}, & \sqrt{x_1^{(2)}x_2^{(2)}z_1^{(2)}}, & \sqrt{y_1^{(2)}y_2^{(2)}z_1^{(2)}} \\ y_1^{(3)}\sqrt{z_2^{(3)}}, & \sqrt{x_1^{(3)}x_2^{(3)}z_1^{(3)}}, & \sqrt{y_1^{(3)}y_2^{(3)}z_1^{(3)}} \end{vmatrix},$$

wenn $(k) = (\sqrt{z_1})$, $(k') = (\sqrt{z_2})$ ungerade Charakteristiken sind.

Es lassen sich hier wieder vier lineare homogene Functionen μ_1, ν_1, μ_2, ν_2 bestimmen, so dass in den Punkten C_1, C_2, C_3 die Gleichungen bestehen:

$$\mu_1\sqrt{z_1} = \sqrt{x_1x_2z_2}, \qquad \mu_2\sqrt{z_2} = \sqrt{x_1x_2z_1},$$
$$\nu_1\sqrt{z_1} = \sqrt{y_1y_2z_2}, \qquad \nu_2\sqrt{z_2} = \sqrt{y_1y_2z_1},$$

wodurch man erhält:

$$\frac{\Delta_k}{\Delta_{k'}} = \sqrt{\frac{z_1^{(1)}z_1^{(2)}z_1^{(3)}}{z_2^{(1)}z_2^{(2)}z_2^{(3)}}}\frac{\begin{vmatrix} y_1^{(1)}, & \mu_1^{(1)}, & \nu_1^{(1)} \\ y_1^{(2)}, & \mu_1^{(2)}, & \nu_1^{(2)} \\ y_1^{(3)}, & \mu_1^{(3)}, & \nu_1^{(3)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{(1)}, & \mu_2^{(1)}, & \nu_2^{(1)} \\ y_1^{(2)}, & \mu_2^{(2)}, & \nu_2^{(2)} \\ y_1^{(3)}, & \mu_2^{(3)}, & \nu_2^{(3)} \end{vmatrix}},$$

was wie oben (I.) bestimmt werden kann.

$$\text{III.}\quad \frac{\Delta_k}{\Delta_{k'}} = \begin{vmatrix} z_1^{(1)}\sqrt{x^{(1)}}, & \sqrt{y^{(1)}x_1^{(1)}y_1^{(1)}}, & \sqrt{y^{(1)}x_2^{(1)}y_2^{(1)}} \\ z_1^{(2)}\sqrt{x^{(2)}}, & \sqrt{y^{(2)}x_1^{(2)}y_1^{(2)}}, & \sqrt{y^{(2)}x_2^{(2)}y_2^{(2)}} \\ z_1^{(3)}\sqrt{x^{(3)}}, & \sqrt{y^{(3)}x_1^{(3)}y_1^{(3)}}, & \sqrt{y^{(3)}x_2^{(3)}y_2^{(3)}} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \sqrt{x^{(1)}y_1^{(1)}y_2^{(1)}}, & \sqrt{y^{(1)}x_1^{(1)}y_2^{(1)}}, & \sqrt{y^{(1)}x_2^{(1)}y_1^{(1)}} \\ \sqrt{x^{(2)}y_1^{(2)}y_2^{(2)}}, & \sqrt{y^{(2)}x_1^{(2)}y_2^{(2)}}, & \sqrt{y^{(2)}x_2^{(2)}y_1^{(2)}} \\ \sqrt{x^{(3)}y_1^{(3)}y_2^{(3)}}, & \sqrt{y^{(3)}x_1^{(3)}y_2^{(3)}}, & \sqrt{y^{(3)}x_2^{(3)}y_1^{(3)}} \end{vmatrix},$$

wenn $(k) = (\sqrt{x})$ ungerade $(k') = (\sqrt{x y_1 y_2})$ gerade ist.

Wie oben bestimmt man vier lineare Functionen μ_1, μ_2, ν_1, ν_2, so dass in C_1, C_2, C_3 die Gleichungen bestehen:

$$\mu_1\sqrt{x} = \sqrt{y\,x_1 y_1}, \qquad \nu_1\sqrt{y_1} = \sqrt{x\,y\,x_1},$$
$$\mu_2\sqrt{x} = \sqrt{y\,x_2 y_2}, \qquad \nu_2\sqrt{y_2} = \sqrt{x\,y\,x_2},$$

wodurch man erhält:

$$\frac{\Delta_k}{\Delta_{k'}} = \frac{x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}}{\sqrt{y_1^{(1)}y_1^{(2)}y_1^{(3)}y_2^{(1)}y_2^{(2)}y_2^{(3)}}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} z_1^{(1)}, & \mu_1^{(1)}, & \mu_2^{(1)} \\ z_1^{(2)}, & \mu_1^{(2)}, & \mu_2^{(2)} \\ z_1^{(3)}, & \mu_1^{(3)}, & \mu_2^{(3)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^{(1)}, & \nu_1^{(1)}, & \nu_2^{(1)} \\ x^{(2)}, & \nu_1^{(2)}, & \nu_2^{(2)} \\ x^{(3)}, & \nu_1^{(3)}, & \nu_2^{(3)} \end{vmatrix}},$$

was wie oben zu bestimmen ist.

Sonach können wir, indem wir die jetzt bestimmten constanten Factoren in die Bezeichnung $\sqrt[4]{\Omega}$ mit aufnehmen, die Gleichung aufstellen:

$$(9.)\qquad \sqrt[4]{\frac{\Omega_{(1q)}^{(k)}}{\Omega_{(1q)}^{(k')}}} = \frac{\vartheta\{k\}(w_1, w_2, w_3)}{\vartheta\{k'\}(w_1, w_2, w_3)}.$$

Hierin ist nach den bisherigen Erörterungen die Function auf der linken Seite als völlig bekannt zu betrachten bis auf das Vorzeichen. Das Quadrat dieser Function ist daher völlig eindeutig bestimmt und in der That kann dieses Quadrat auch rational dargestellt werden mit Hülfe von (7.), (7'.).

Ebenso wie das Quadrat von (9.) können wir auch die folgende Gleichung in völlig eindeutiger Weise aufstellen:

$$(10.)\qquad \sqrt[4]{\frac{\Omega_{(1q)}^{(k)}\,\Omega_{(1q)}^{(k_1)}}{\Omega_{(1q)}^{(k')}\,\Omega_{(1q)}^{(k_1')}}} = \frac{\vartheta\{k\}(w_1, w_2, w_3)\,\vartheta\{k_1\}(w_1, w_2, w_3)}{\vartheta\{k'\}(w_1, w_2, w_3)\,\vartheta\{k_1'\}(w_1, w_2, w_3)},$$

falls

$$(k) + (k_1) = (k') + (k_1')$$

ist, denn unter dieser Voraussetzung kann die linke Seite von (10.) gleichfalls rational gemacht werden. Man gelangt zu dieser Bestimmung auf folgendem Wege: Haben v_1, v_2, v_3 dieselbe Bedeutung wie oben, so kann man nach §. 24 die Formel aufstellen:

$$(11.)\qquad \frac{\vartheta\{k\}(v_1, v_2, v_3)\,\vartheta\{k_1\}(v_1, v_2, v_3)}{\vartheta\{k'\}(v_1, v_2, v_3)\,\vartheta\{k'_1\}(v_1, v_2, v_3)} = C\sqrt{\frac{\chi_{(k)}\chi_{(k_1)}}{\chi_{(k')}\chi_{(k'_1)}}},$$

worin C eine bis auf das Vorzeichen bestimmte Constante ist. Da aber die Function auf der rechten Seite von (11.) in Bezug auf die Punkte ζ, ζ_1, ζ_2, ζ_3 rational gemacht werden kann, (was in der That durch Multiplication der die Functionen $\sqrt{\chi}$ darstellenden Determinanten leicht auszuführen ist), so kann auch das Vorzeichen von C eindeutig bestimmt werden, etwa dadurch dass man in (11.) $(v_1, v_2, v_3) \equiv (0, 0, 0)$ werden, also die Punkte ζ, ζ_1, ζ_2, ζ_3 mit ε, γ zusammenfallen lässt, wobei freilich in manchen Fällen eine Differentiation nach einem der Punkte ζ nothwendig ist. Man kann in (11.) für v_1, v_2, v_3 statt der Werthe $(0, 0, 0)$ auch ein beliebiges System zusammengehöriger halber Perioden setzen, wodurch man den gleichen Zweck erreicht. Es gelingt jedoch nicht in allen Fällen zu vermeiden, dass eine der ϑ-Functionen in (11.) dabei verschwindet, so dass eine Differentiation nicht immer zu umgehen ist. Hat man auf diese Weise das Vorzeichen von C bestimmt, so lässt man die Punkte ζ_1, ζ_2, ζ_3 mit C_1, C_2, C_3 zusammenfallen, wodurch (v_1, v_2, v_3) in $(w_1+\frac{1}{2}P_1, w_2+\frac{1}{2}P_2, w_3+\frac{1}{2}P_3)$ übergeht, und die Function auf der rechten Seite von (11.) wird genau in derselben Weise bestimmt wie oben die Function auf der linken Seite von (6.). Man übersieht aber sofort, dass wenn man die unter I., II., III. angegebenen Rechnungen hier wiederholt, die dort auftretenden Wurzelgrössen sich alle durch rationale Ausdrücke ersetzen lassen, so dass sich die Formel (10.) in völlig eindeutiger Weise aufstellen lässt.

Wir gehen nun über zur Untersuchung der Wurzelfunctionen vierten Grades der übrigen Systeme. Diese, oder genauer gesagt, ihre Verhältnisse sind nach (4.) §. 21 bestimmt durch folgende Formel:

$$(12.)\qquad \sqrt[4]{\frac{\Omega^{(k)}_{(\sqrt{q})+(\varpi)}}{\Omega^{(k')}_{(\sqrt{q})+(\varpi)}}} = \frac{\vartheta\{k\}(w_h+\frac{1}{4}\varpi_h)}{\vartheta\{k'\}(w_h+\frac{1}{4}\varpi_h)};$$

wenn w_1, w_2, w_3 dieselbe Bedeutung haben wie oben, und $\frac{1}{4}\varpi_1$, $\frac{1}{4}\varpi_2$, $\frac{1}{4}\varpi_3$ ein beliebiges System zusammengehöriger Viertel der Perioden ist.

Wir gelangen zur algebraischen Bestimmung dieser Functionen, gestützt auf die vorangegangenen Untersuchungen durch Anwendung der Formeln des Additionstheorems. Es ergeben sich algebraische Darstellungen, in denen die Constanten einen transcendenten aber völlig eindeutigen Ausdruck haben.

Wir wählen eine gerade Charakteristik (p) welche die Eigenschaft hat, dass auch $(p)+(\varpi)$ gerade ist, und bestimmen zu dieser ein vollständiges System ungerader Charakteristiken (β_1), (β_2), (β_3), (β_4), (β_5), (β_6), (β_7). Es sei dann:

$$(p) = (\beta_0) = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \quad (\beta_i) = \begin{pmatrix} \nu_1^{(i)} & \nu_2^{(i)} & \nu_3^{(i)} \\ \mu_1^{(i)} & \mu_2^{(i)} & \mu_3^{(i)} \end{pmatrix}; \quad (\varpi) = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix};$$

$$(k) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}; \quad (k') = \begin{pmatrix} g'_1 & g'_2 & g'_3 \\ h'_1 & h'_2 & h'_3 \end{pmatrix}.$$

Man erhält aus der Formel IV. §. 5 (p. 37):

$$(13.)\quad \vartheta\{p\}\,\vartheta\{p+\varpi\}\,\vartheta^2\{k\}(w_h+\tfrac{1}{4}\varpi_h) = e^{-(k_1w_1+k_2w_2+k_3w_3)}\sum_{i=0}^{i=7}\varepsilon_i\vartheta^2\{k+\beta_i\}(\tfrac{1}{4}\varpi_h)\vartheta\{p+\varpi+\beta_i\}(w_h)\vartheta\{p+\beta_i\}(w_h),$$

wenn zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(14.)\qquad \varepsilon_i = e^{\pi i\Sigma\nu^{(i)}(m+h+\mu^{(i)})-\frac{1}{2}\pi i\Sigma k\mu^{(i)}}.$$

Setzt man daher in gleicher Weise

$$(15.)\qquad \varepsilon'_i = e^{\pi i\Sigma\nu^{(i)}(m+h'+\mu^{(i)})-\frac{1}{2}\pi i\Sigma k\mu^{(i)}}.$$

so folgt mit Hülfe von (13.):

$$(16.)\qquad \frac{\vartheta^2\{k\}(w_h+\frac{1}{4}\varpi_h)}{\vartheta^2\{k'\}(w_h+\frac{1}{4}\varpi_h)} = \frac{\sum_{i=0}^{i=7}\varepsilon_i\vartheta^2\{k+\beta_i\}(\frac{1}{4}\varpi_h)\vartheta\{p+\varpi+\beta_i\}(w_h)\vartheta\{p+\beta_i\}(w_h)}{\sum_{i=0}^{i=7}\varepsilon'_i\vartheta^2\{k'+\beta_i\}(\frac{1}{4}\varpi_h)\vartheta\{p+\varpi+\beta_i\}(w_h)\vartheta\{p+\beta_i\}(w_h)}.$$

Indem wir uns also der eindeutig bestimmten Formel (10.) bedienen, können wir in Folge von (16.) und (12.) setzen:

$$(17.)\qquad \sqrt{\Omega^{(k)}_{(1q)+(\varpi)}} = \sum_{i=0}^{i=7}\varepsilon_i\vartheta^2\{k+\beta_i\}(\tfrac{1}{4}\varpi_h)\sqrt[4]{\Omega^{(p+\varpi+\beta_i)}_{(1q)}\,\Omega^{(p+\beta_i)}_{(1q)}},$$

wodurch die sämmtlichen Wurzelfunctionen vierten Grades in völlig eindeutiger Weise bestimmt sind. Aus (12.) ergiebt sich die nunmehr auch eindeutig bestimmte Formel

$$(18.)\qquad \sqrt{\frac{\Omega^{(k)}_{(\sqrt{q})+(\varpi)}}{\Omega^{(k')}_{(\sqrt{q})+(\varpi)}}} = \frac{\vartheta^2\{k\}(w_h+\frac{1}{4}\varpi_h)}{\vartheta^2\{k'\}(w_h+\frac{1}{4}\varpi_h)}.$$

§. 26. Das Umkehrproblem.

Die Resultate des vorigen §. führen nun zu einer sehr eleganten Lösung des Umkehrproblems, wodurch dasselbe unter einen wesentlich neuen Gesichtspunkt gebracht wird, der, wie es mir scheint für diesen allgemeinen Fall der naturgemässe ist.

Wir erinnern an die Aufgabe:

Sind v_1, v_2, v_3 beliebig gegebene Grössen, so sollen die Punkte $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ aus der Congruenz bestimmt werden:

$$(1.)\qquad (v_1, v_2, v_3) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\gamma_1}^{\zeta_1} du_h + \int_{\gamma_2}^{\zeta_2} du_h + \int_{\gamma_3}^{\zeta_3} du_h\right)\right).$$

Die unteren Grenzpunkte $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ können irgend welche sein, und wegen des Additionstheorems beschränken wir die Aufgabe nicht, wenn wir dafür irgend passende besondere Punkte wählen.

Wir lassen zunächst, jedoch nur vorläufig, diese Punkte zusammenfallen mit den Punkten $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$, $c_3^{(0)}$ (§§. 12, 18) und setzen demgemäss:

$$(2.)\qquad (v_1', v_2', v_3') \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{c_1^{(0)}}^{\zeta_1} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{\zeta_2} du_h + \int_{c_3^{(0)}}^{\zeta_3} du_h\right)\right).$$

Die Punkte $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$, $c_3^{(0)}$ waren definirt als die 0-Punkte einer Wurzelfunction zweiter Ordnung und zweiten Grades $\sqrt{\Psi^{(0)}}$, die ihren vierten 0-Punkt im 0-Punkt γ einer *Abelschen* Function $\sqrt{q}$ hat, welch letztere ausserdem in ε verschwindet, und deren Charakteristik der Bedingung entspricht $(\sqrt{\Psi^{(0)}}) = (\sqrt{q})$. Unter diesen Voraussetzungen können wir das Umkehrproblem auffassen als die Aufgabe der Auflösung der transcendenten Gleichung

$$(3.)\qquad \vartheta\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h - v_h'\right) = 0,$$

worin der Punkt ζ als die Unbekannte erscheint und welche, wie wir wissen, nur die drei Auflösungen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ zulässt. Ohne Weiteres lässt sich die Gleichung (3.) nicht auf eine algebraische zurückführen, wohl aber durch folgenden einfachen Kunstgriff:

Wir nehmen statt der Gleichung (3.) die andere:

$$(4.)\qquad \vartheta\Big(\int_\varepsilon^\zeta du_h - v'_h\Big)\vartheta\Big(\int_\gamma^\zeta du_h - v'_h + \tfrac{1}{2}\varpi_h\Big) = 0,$$

in welcher $\frac{1}{2}\varpi_1$, $\frac{1}{2}\varpi_2$, $\frac{1}{2}\varpi_3$ irgend ein System zusammengehöriger halber Perioden bedeutet. Die Gleichung (4.) liefert allerdings sechs Punkte als Auflösungen, unter denen die drei gesuchten enthalten sind. Wir können diese von den drei anderen neu eingeführten absondern, wenn wir die Gleichung (4.) für zwei verschiedene Systeme $\frac{1}{2}\varpi_h$ aufstellen und die gemeinschaftlichen Wurzeln der so gebildeten beiden Gleichungen aufsuchen. Es ergeben sich auf diese Weise 64 Gleichungen, von denen zwei beliebige zur Lösung des Problems ausreichen.

Diese 64 Gleichungen können algebraisch gemacht werden mit Hülfe des Additionstheorems der ϑ-Functionen.

Zu diesem Zweck zerlegen wir die Argumente der ϑ-Functionen (4.) in folgender Weise, indem wir den w_1, w_2, w_3 dieselbe Bedeutung lassen wie im vorigen §., nämlich:

$$(5.)\qquad (w_1, w_2, w_3) \equiv \left(\begin{smallmatrix}3\\ h\\ 1\end{smallmatrix}\Big(\int_\varepsilon^\zeta du_h + \tfrac{1}{2}\int_\gamma^\varepsilon du_h\Big)\right),$$

$$(6.)\qquad \left\{\begin{aligned} \int_\varepsilon^\zeta du_h - v'_h &= (w_h + \tfrac{1}{4}\varpi_h) - \Big(\tfrac{1}{2}\int_\gamma^\varepsilon du_h + v'_h + \tfrac{1}{4}\varpi_h\Big),\\ \int_\gamma^\zeta du_h + v'_h + \tfrac{1}{2}\varpi_h &= (w_h + \tfrac{1}{4}\varpi_h) + \Big(\tfrac{1}{2}\int_\gamma^\varepsilon du_h + v'_h + \tfrac{1}{4}\varpi_h\Big),\end{aligned}\right.$$

so dass wir auf die Gleichung (4.) die Formel I. §. 5 p. 35 anwenden können. Ist (p) eine beliebige gerade Charakteristik und (β_1), (β_2), (β_3), (β_4), (β_5), (β_6), (β_7) ein zu dieser gehöriges vollständiges System ungerader Charakteristiken, und

$$(p) = (\beta_0) = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix}, \qquad (\beta_i) = \begin{pmatrix} \nu_1^{(i)} & \nu_2^{(i)} & \nu_3^{(i)}\\ \mu_1^{(i)} & \mu_2^{(i)} & \mu_3^{(i)}\end{pmatrix},$$

so geht hiernach die Gleichung (4.) mit Unterdrückung des constanten Factors $\vartheta^2|p|$ in folgende über:

$$(7.)\qquad 0 = \sum_{i=0}^{i=7}(-1)^{\Sigma\nu^{(i)}m}\vartheta^2|\beta_i|(w_h + \tfrac{1}{4}\varpi_h)\,\vartheta^2|p+\beta_i|\Big(\tfrac{1}{2}\int_\gamma^\varepsilon du_h + v'_h + \tfrac{1}{4}\varpi_h\Big).$$

(Es hindert nichts, $(p) = (0)$ anzunehmen, wodurch diese Formel sich noch etwas vereinfacht.) Wir betrachten zunächst die Argumente der zweiten Factoren, die wir jetzt ausführlicher so schreiben:

$$(8.)\qquad \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\tfrac{1}{2}\int_{\gamma}^{\varepsilon} du_h + \int_{c_1^{(0)}}^{\zeta_1} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{\zeta_2} du_h + \int_{c_3^{(0)}}^{\zeta_3} du_h + \tfrac{1}{4}\varpi_h\right)\right).$$

Diese lassen sich auf folgende merkwürdige Weise transformiren.

Es bezeichne $\sqrt[4]{\Omega^{(0)}_{(\sqrt{q})}}$ die im vorigen §. schon betrachtete Wurzelfunction vierten Grades und C_1, C_2, C_3 ihre 0-Punkte. Diese letzteren können nach der Formel (9.) §. 25 auch erklärt werden als die 0-Punkte der Function

$$\vartheta\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h + \tfrac{1}{2}\int_{\gamma}^{\varepsilon} du_h\right),$$

und daraus ergiebt sich sofort die Congruenz

$$(9.)\qquad \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\tfrac{1}{2}\int_{\gamma}^{\varepsilon} du_h\right)\right) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{C_1}^{c_1^{(0)}} du_h + \int_{C_2}^{c_2^{(0)}} du_h + \int_{C_3}^{c_3^{(0)}} du_h\right)\right),$$

woraus man erhält:

$$(10.)\ \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\tfrac{1}{2}\int_{\gamma}^{\varepsilon} du_h + \int_{c_1^{(0)}}^{\zeta_1} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{\zeta_2} du_h + \int_{c_3^{(0)}}^{\zeta_3} du_h\right)\right) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{C_1}^{\zeta_1} du_h + \int_{C_2}^{\zeta_2} du_h + \int_{C_3}^{\zeta_3} du_h\right)\right).$$

Diese Congruenz legt den Gedanken nahe, in dem Umkehrproblem die Punkte C_1, C_2, C_3 als untere Grenzen einzuführen, so dass aus dem schliesslichen Resultat die Punkte $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$, $c_3^{(0)}$ ganz fortfallen. Sind daher jetzt v_1, v_2, v_3 die unabhängigen Variablen des Umkehrproblems, so setzen wir:

$$(11.)\qquad (v_1, v_2, v_3) \equiv \left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{C_1}^{\zeta_1} du_h + \int_{C_2}^{\zeta_2} du_h + \int_{C_3}^{\zeta_3} du_h\right)\right),$$

wodurch die Gleichung (7.) in folgende übergeht:

$$(12.)\qquad 0 = \sum_{i=0}^{i=7} (-1)^{\Sigma m\nu^{(i)}} \vartheta^2\{\beta_i\}(w_h + \tfrac{1}{4}\varpi_h)\, \vartheta^2\{\beta_i + p\}(v_h + \tfrac{1}{4}\varpi_h).$$

Unsere Aufgabe ist daher gelöst, wenn wir für die Verhältnisse der Functionen $\vartheta^2\{\beta_i\}(w_h + \frac{1}{4}\varpi_h)$ die im vorigen §. unter (17.), (18.) (9.) aufgestellten algebraischen Ausdrücke setzen. Dadurch erhalten wir die 64 gesuchten Gleichungen (und zwar jede in mannigfaltigen Formen.)

$$(13.)\qquad 0 = \sum_{i=0}^{i=7} (-1)^{\Sigma m\nu^{(i)}} \vartheta^2\{\beta_i + p\}(v_h + \tfrac{1}{4}\varpi_h) \sqrt{\Omega^{(\beta_i)}_{(\sqrt{q})+(\varpi)}},$$

wo die Functionen $\sqrt{\Omega}$ durch die Betrachtungen des vorigen §. algebraisch völlig bestimmt sind. Zwei von diesen Gleichungen (13.) genügen, um zusammen mit der gegebenen Gleichung vierter Ordnung oder einer Gleichung von der Form:

$$(14.)\qquad \sqrt{x_1\xi_1}+\sqrt{x_2\xi_2}+\sqrt{x_3\xi_3} = 0$$

das Umkehrproblem zu lösen. Diese Gleichungen können alle rational gemacht werden, und man hat dann die Aufgabe, aus drei homogenen Gleichungen mit drei Unbekannten, von denen man weiss, dass sie drei und *nur* drei Lösungen zulassen, die Werthe der Verhältnisse der Unbekannten zu bestimmen, was auf eine cubische Gleichung führt.

Am einfachsten wird die Sache, wenn man zwei Gleichungen (13.) mit den Charakteristiken (ϖ), (ϖ') so auswählt, dass:

$$(\sqrt{q})+(\varpi) = (\sqrt{p}),\qquad (\sqrt{q})+(\varpi') = (\sqrt{p'})$$

ungerade sind. Diese Gleichungen werden nämlich durch Multiplication mit $\sqrt{p}$ resp. $\sqrt{p'}$ rational und nur von der zweiten Ordnung.

Das ganze Verfahren wird durch die geometrische Deutung noch anschaulicher. Man bildet die Gleichungen zweier Curven dritter Ordnung welche die gegebene Curve vierter Ordnung in den gesuchten Punkten und in je drei anderen Punkten berühren. Die sechs Berührungspunkte jeder dieser Curven liegen auf einem Kegelschnitt, und demnach verlangt die Lösung des Umkehrproblems die Aufsuchung der vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte, von denen drei auf der gegebenen Curve vierter Ordnung liegen.

Die Coëfficienten in den Gleichungen dieser Kegelschnitte sind die Quadrate von ϑ-Functionen, deren Argumente die Variablen des Umkehrproblems sind, vermehrt um ganz bestimmte Systeme zusammengehöriger Viertel der Perioden.

Berichtigung.

Seite 158 Zeile 4 v. u. l. §. 2. statt §. 6.

- 158 - 3 v. u. Formel (14.) l. $e^{-\frac{\pi i}{2}\Sigma(\mu+\mu')(\nu+\nu')}$ statt $e^{-\frac{\pi i}{4}\Sigma(\mu+\mu')(\nu+\nu')}$.

Tafel I.

Die 63 Gruppen ungerader Charakteristiken.

Die Tafel ist zur besseren Uebersicht nach einem leicht ersichtlichen Prinzip in acht Theile getheilt. In der ersten Colonne stehen die Gruppencharakteristiken. Die Paare sind durch Doppelstriche von einander getrennt.

000 000												
000 100	010 010	010 110	010 011	010 111	001 001	001 101	001 011	001 111	011 010	011 110	011 001	011 101
000 010	100 100	100 110	100 101	100 111	001 001	001 011	001 101	001 111	101 100	101 110	101 001	101 011
000 001	100 100	100 101	100 110	100 111	010 010	010 011	010 110	010 111	110 100	110 101	110 010	110 011
000 011	100 100	100 111	100 110	100 101	011 010	011 001	011 110	011 101	111 100	111 111	111 010	111 001
000 101	010 010	010 111	010 110	010 011	101 100	101 001	101 110	101 011	111 010	111 111	111 100	111 001
000 110	001 001	001 111	001 101	001 011	110 100	110 010	110 101	110 011	111 001	111 111	111 100	111 010
000 111	011 010	011 101	011 001	011 110	101 100	101 011	101 001	101 110	110 100	110 011	110 010	110 101
100 000	010 010	110 010	011 010	111 010	001 001	101 001	011 001	111 001	010 011	110 011	001 011	101 011
100 100	010 110	110 010	010 111	110 011	001 101	101 001	001 111	101 011	111 010	011 110	111 001	011 101
100 010	010 110	110 100	010 111	110 101	001 001	101 011	001 011	101 001	111 100	011 110	111 111	011 101
100 001	001 101	101 100	001 111	101 110	010 010	110 011	010 011	110 010	111 100	011 101	111 111	011 110
100 011	010 110	110 101	010 111	110 100	001 101	101 110	001 111	101 100	111 010	011 001	111 001	011 010
100 101	010 110	110 011	010 111	110 010	001 001	101 100	001 011	101 110	111 100	011 001	111 111	011 010
100 110	001 101	101 011	001 111	101 001	010 010	110 100	010 011	110 101	111 100	011 010	111 111	011 001
100 111	010 010	110 101	010 011	110 100	001 001	101 110	001 011	101 100	111 010	011 101	111 001	011 110

010 000	100 100	110 100	100 101	110 101	001 001	011 001	001 101	011 101	111 100	101 100	111 001	101 001
010 100	100 110	110 010	100 111	110 011	001 001	011 101	001 101	011 001	111 010	101 110	111 111	101 011
010 010	100 110	110 100	100 111	110 101	001 011	011 001	001 111	011 101	111 100	101 110	111 001	101 011
010 001	100 100	110 101	100 101	110 100	001 011	011 010	001 111	011 110	111 010	101 011	111 111	101 110
010 011	100 110	110 101	100 111	110 100	001 001	011 010	001 101	011 110	111 010	101 001	111 111	101 100
010 101	100 110	110 011	100 111	110 010	001 011	011 110	001 111	011 010	111 100	101 001	111 001	101 100
010 110	100 100	110 010	100 101	110 011	001 011	011 101	001 111	011 001	111 010	101 100	111 111	101 001
010 111	100 100	110 011	100 101	110 010	001 001	011 110	001 101	011 010	111 100	101 011	111 001	101 110

001 000	100 100	101 100	100 110	101 110	010 010	011 010	010 110	011 110	111 100	110 100	111 010	110 010
001 100	100 101	101 001	100 111	101 011	010 010	011 110	010 110	011 010	111 001	110 101	111 111	110 010
001 010	100 100	101 110	100 110	101 100	010 011	011 001	010 111	011 101	111 001	110 011	111 111	110 101
001 001	100 101	101 100	100 111	101 110	010 011	011 010	010 111	011 110	111 100	110 101	111 010	110 011
001 011	100 101	101 110	100 111	101 100	010 010	011 001	010 110	011 101	111 001	110 010	111 111	110 100
001 101	100 100	101 001	100 110	101 011	010 011	011 110	010 111	011 010	111 001	110 100	111 111	110 010
001 110	100 101	101 011	100 111	101 001	010 011	011 101	010 111	011 001	111 100	110 010	111 010	110 100
001 111	100 100	101 011	100 110	101 001	010 010	011 101	010 110	011 001	111 100	110 011	011 010	110 101

011 000	100 100	111 100	100 111	111 111	010 011	001 011	010 111	001 111	101 100	110 100	101 011	110 011
011 100	100 110	111 010	100 101	111 001	010 011	001 111	010 111	001 011	101 001	110 101	101 110	110 010
011 010	100 110	111 100	100 101	111 111	010 011	001 001	010 111	001 101	101 001	110 011	101 110	110 100
011 001	100 110	111 111	100 101	111 100	010 010	001 011	010 110	001 111	101 100	110 101	101 011	110 010
011 011	100 100	111 111	100 111	111 100	010 010	001 001	010 110	001 101	101 001	110 010	101 110	110 101
011 101	100 100	111 001	100 111	111 010	010 010	001 111	010 110	001 011	101 001	110 100	101 110	110 011
011 110	100 100	111 010	100 111	111 001	010 011	001 101	010 111	001 001	101 100	110 010	101 011	110 101
011 111	100 110	111 001	100 101	111 010	010 010	001 101	010 110	001 001	101 100	110 011	101 011	110 100

101 000	100 101	001 101	100 111	001 111	010 010	111 010	010 111	111 111	011 010	110 010	011 101	110 101
101 100	100 101	001 001	100 111	001 011	010 110	111 010	010 011	111 111	011 001	110 101	011 110	110 010
101 010	100 101	001 111	100 111	001 101	010 110	111 100	010 011	111 001	011 001	110 011	011 110	110 100
101 001	100 100	001 101	100 110	001 111	010 110	111 111	010 011	111 010	011 010	110 011	011 101	110 100
101 011	100 100	001 111	100 110	001 101	010 010	111 001	010 111	111 100	011 001	110 010	011 110	110 101
101 101	100 100	001 001	100 110	001 011	010 010	111 111	010 111	111 010	011 001	110 100	011 110	110 011
101 110	100 101	001 011	100 111	001 001	010 010	111 100	010 111	111 001	011 010	110 100	011 101	110 011
101 111	100 100	001 011	100 110	001 001	010 110	111 001	010 011	111 100	011 010	110 101	011 101	110 010
110 000	100 110	010 110	100 111	010 111	001 001	111 001	001 111	111 111	011 001	101 001	011 110	101 110
110 100	100 110	010 010	100 111	010 011	001 101	111 001	001 011	111 111	011 010	101 110	011 101	101 001
110 010	100 100	010 110	100 101	010 111	001 101	111 111	001 011	111 001	011 001	101 011	011 110	101 100
110 001	100 110	010 111	100 111	010 110	001 101	111 100	001 011	111 010	011 010	101 011	011 101	101 100
110 011	100 100	010 111	100 101	010 110	001 001	111 010	001 111	111 100	011 010	101 001	011 101	101 110
110 101	100 110	010 011	100 111	010 010	001 001	111 100	001 111	111 010	011 001	101 100	011 110	101 011
110 110	100 100	010 010	100 101	010 011	001 001	111 111	001 111	111 001	011 010	101 100	011 101	101 011
110 111	100 100	010 011	100 101	010 010	001 101	111 010	001 011	111 100	011 001	101 110	011 110	101 001
111 000	100 110	011 110	100 101	011 101	010 110	101 110	010 011	101 011	001 101	110 101	001 011	110 011
111 100	100 110	011 010	100 101	011 001	010 010	101 110	010 111	101 011	001 001	110 101	001 111	110 011
111 010	100 100	011 110	100 111	011 101	010 110	101 100	010 011	101 001	001 001	110 011	001 111	110 101
111 001	100 100	011 101	100 111	011 110	010 010	101 011	010 111	101 110	001 101	110 100	001 011	110 010
111 011	100 110	011 101	100 101	011 110	010 010	101 001	010 111	101 100	001 001	110 010	001 111	110 100
111 101	100 100	011 001	100 111	011 010	010 110	101 011	010 011	101 110	001 001	110 100	001 111	110 010
111 110	100 100	011 010	100 111	011 001	010 010	101 100	010 111	101 001	001 101	110 011	001 011	110 101
111 111	100 110	011 001	100 101	011 010	010 110	101 001	010 011	101 100	001 101	110 010	001 011	110 100

Tafel II.

Die vollständigen Systeme ungerader Charakteristiken.

Enthält zu jeder geraden Charakteristik (p) ein vollständiges System ungerader Charakteristiken (β_h) wobei immer $(\beta_1) = \binom{111}{111}$ angenommen ist.

p	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7
000 000	111 111	001 011	011 001	101 100	100 101	110 010	010 110
000 100		100 110	110 100	101 001	001 001	011 110	010 111
000 010		010 110	110 010	011 001	001 001	101 110	100 111
000 001		001 101	101 001	011 010	010 010	110 101	100 111
000 011		010 010	011 010	110 101	100 101	101 011	001 111
000 101		100 100	101 100	110 011	010 011	011 101	001 111
000 011		010 010	011 011	110 101	100 101	101 011	001 111
000 111		001 011	101 011	110 101	100 101	010 110	011 110
100 000		110 100	100 110	001 101	001 001	110 011	111 010
100 010		100 100	110 100	001 111	001 011	110 011	111 010
100 001		100 100	101 100	010 110	010 011	101 011	111 001
100 011		010 011	010 111	101 110	100 110	101 001	111 001
010 000		110 010	010 110	001 011	001 001	110 101	111 100
010 100		100 100	100 110	111 001	011 001	011 110	010 111
010 001		010 010	011 010	100 111	100 101	011 101	111 001
010 101		100 101	100 111	011 110	010 110	011 001	111 001
001 000		011 001	001 011	100 101	100 100	011 110	111 010
001 100		100 100	100 101	111 010	011 010	011 101	001 111

p	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7
001 010	111 111	001 001	011 001	100 111	100 110	011 110	111 010
001 110		100 110	100 111	011 101	001 101	011 010	111 010
011 000		010 010	010 011	101 110	101 100	011 101	111 001
011 100		011 010	111 010	110 101	110 100	001 101	001 111
011 011		010 110	010 111	011 110	101 001	101 011	111 001
011 111		010 010	010 011	011 010	101 001	101 011	111 001
101 000		100 100	100 101	011 110	011 010	101 011	111 001
101 010		101 100	111 101	110 011	110 010	001 011	001 111
101 101		101 110	100 111	101 110	011 001	011 101	111 001
101 111		100 100	100 101	101 100	011 001	011 101	111 001
110 000		010 010	010 110	101 011	101 001	110 101	111 100
110 001		110 010	111 010	010 101	011 001	100 101	100 111
110 110		110 101	100 111	110 101	011 010	011 110	111 010
110 111		100 100	100 110	110 100	011 010	011 110	111 010
111 000		011 001	011 101	101 110	101 100	110 010	110 011
111 011		010 010	011 010	010 011	001 101	011 101	001 111
111 101		100 100	101 100	100 111	001 011	101 011	001 111
111 110		100 100	110 100	100 110	010 011	110 011	010 111

Tafel III.

Enthält für jede gerade Charakteristik (p) eine Zerlegung in drei ungerade, zugleich mit den Gruppen, in welchen letztere ungepaart vorkommen, so dass: $(p)=(\alpha_1)+(\alpha_2)+(\alpha_3)$; $(\alpha_1+\beta_1)=(\alpha_2+\beta_2)=(\alpha_3+\beta_3)=(g)$.

Auch hier ist $(\alpha_1)=\begin{pmatrix}111\\111\end{pmatrix}$ angenommen:

p	α_1	β_1	α_2	β_2	α_3	β_3	g		p	α_1	β_1	α_2	β_2	α_3	β_3	g
000 000	111 111	010 010	001 011	100 110	110 100	011 001	101 101		001 010	111 111	100 100	111 100	100 111	001 001	010 010	011 011
000 100		010 110	011 101	110 101	100 110	001 111	101 001		001 110		110 101	011 101	010 111	101 100	100 110	001 010
000 010		001 101	011 001	101 011	100 100	010 110	110 010		011 000		011 001	010 010	110 100	110 101	010 011	100 110
000 001		010 011	011 001	110 101	100 111	001 011	101 100		011 100		001 011	001 101	111 001	101 110	011 010	110 100
000 011		001 011	010 010	100 110	101 110	011 010	110 100		011 011		011 010	110 010	010 111	010 110	110 011	100 101
000 101		001 101	011 110	101 100	100 100	010 110	110 010		011 111		011 110	110 010	010 011	010 010	110 011	100 001
000 011		001 011	010 010	100 110	101 110	011 010	110 100		101 000		101 001	110 011	100 101	100 100	110 010	010 110
000 111		010 010	100 110	001 011	011 110	110 011	101 101		101 010		111 010	111 100	111 001	101 001	101 100	000 101
100 000		110 010	101 011	100 110	110 100	111 001	001 101		101 101		101 100	110 100	100 111	100 110	110 101	010 011
100 010		001 001	111 001	001 111	100 100	010 010	110 110		101 111		101 110	110 100	100 101	100 100	110 101	010 001
100 001		001 111	111 001	001 001	100 111	010 111	110 000		110 000		001 001	010 010	100 100	011 101	101 011	110 110
100 011		011 110	110 010	010 011	101 110	001 111	100 001		110 001		101 100	101 001	111 010	100 111	110 100	010 011
010 000		001 101	001 011	111 001	100 100	010 110	110 010		110 110		001 001	011 010	101 100	010 011	100 101	110 110
010 100		010 110	001 101	100 100	100 110	001 111	101 001		110 111		001 001	011 010	101 100	010 010	100 100	110 110
010 001		010 011	001 001	100 101	100 111	001 011	101 100		111 000		111 100	011 001	011 010	011 110	011 101	000 011
010 101		101 110	011 110	001 111	110 100	100 101	010 001		111 011		110 011	010 010	011 110	010 110	011 010	001 100
001 000		011 101	001 011	101 001	111 100	011 110	100 010		111 101		110 101	100 100	101 110	100 110	101 100	001 010
001 100		110 101	011 101	010 111	101 110	100 100	001 010		111 110		001 001	010 010	100 100	010 011	100 101	110 110