F. Prym   G. Rost

THEORIE
DER PRYM'SCHEN FUNKTIONEN ERSTER ORDNUNG

IM ANSCHLUSS AN DIE SCHÖPFUNGEN RIEMANN'S

VON

FRIEDRICH PRYM UND **GEORG ROST**

MIT 25 FIGUREN IM TEXT

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

1911

DEM ANDENKEN

DER

FRAU LUISA PRYM

GEWIDMET

VORWORT

Das vorliegende Werk ist von uns in vieljähriger gemeinsamer Arbeit geschaffen worden. Wenn auch die Fundamente schon seit Jahrzehnten vorhanden waren, so stellten sich dem Aufbau der Theorie sowohl hinsichtlich der strengen Beweisführung wie hinsichtlich der klaren Darstellung doch so mannigfache Schwierigkeiten entgegen, daß keiner von uns beiden für sich allein imstande gewesen wäre, sie zu überwinden. Das im ersten Teil zur Gewinnung des Fundamentalsatzes der Theorie eingeschlagene Verfahren hätte bei allgemeinerer Fassung der Hilfssätze I, II durch ein wesentlich kürzeres ersetzt werden können; wir glaubten jedoch dem zwar etwas längeren, dafür aber leichter verständlichen Verfahren hier den Vorzug geben zu sollen. Besondere Schwierigkeiten hat uns die gegen Ende des zweiten Teiles durchgeführte Erzeugung der Riemann'schen Thetafunktion bereitet; sie gelang uns erst, nachdem die im vierten Abschnitt am Schlusse des achten Artikels stehende Rost'sche Gleichung gewonnen und damit die Art der Abhängigkeit der Riemann'schen Konstanten $2k_1, \cdots, 2k_p$ von der Beschaffenheit der vorgegebenen $(2p+1)$-fach zusammenhängenden Fläche T und von dem Charakter des zur Verwandlung dieser Fläche in eine einfach zusammenhängende Fläche benutzten Schnittsystems aufgedeckt war.

Die Theorie der Prym'schen Funktionen N^{ter} Ordnung, die dadurch charakterisiert sind, daß sie in Gruppen von N Funktionen beim Überschreiten der Schnitte lineare Transformationen erleiden und zugleich durch voneinander unabhängige Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen vollständig bestimmt werden können, läßt sich mit Hilfe des allgemeinen Prym'schen Modulsatzes in ganz analoger Weise durchführen, wie es hier für die Funktionen erster Ordnung geschehen ist. Wir hoffen, daß es uns vergönnt ist, auch diese, in ihren Grundzügen längst vorhandene, Theorie in gemeinsamer Arbeit ausführlich zu entwickeln.

Würzburg, im Juli 1911.

DIE VERFASSER

ERSTER TEIL

DIE GRUNDLAGEN DER THEORIE

OMNIA E CIRCULO

Inhaltsverzeichnis zum ersten Teil.

Erster Abschnitt.

Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ für eine Kreisfläche bei vorgegebener, den Bedingungen der Endlichkeit und Integrierbarkeit genügender Randfunktion.

Zweiter Abschnitt.

Bestimmung von Schranken für die Werte eines zu einer Kreisfläche gehörigen Poisson'schen Integrals.

Dritter Abschnitt.

Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ für mehrblättrige Kreisflächen und mehrblättrige Kreisergänzungsflächen.

Vierter Abschnitt.

Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ für eine von zwei konzentrischen Kreisen begrenzte Ringfläche.

Fünfter Abschnitt.

Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ für eine Riemann'sche Fläche T bei vorgegebenen Unstetigkeitsbedingungen.

Sechster Abschnitt.

Aufstellung und Beweis des Fundamentalsatzes der Theorie.

Siebenter Abschnitt.

Aufstellung der allgemeinen Fundamentalformel.

Anhang.

Vier Abhandlungen von Friedrich Prym.

(Abdruck aus dem „Journal für die reine und angewandte Mathematik“.)

Erster Abschnitt.

Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ für eine Kreisfläche bei vorgegebener, den Bedingungen der Endlichkeit und Integrierbarkeit genügender Randfunktion.

1.

In einer Ebene sei eine Kreisfläche mit dem Radius R gegeben (s. Fig. 1). Ihren Mittelpunkt O nehme man zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit den Achsen OX, OY und bezeichne mit x, y die Koordinaten irgend eines Punktes $\mathfrak{P}$ im Innern der Kreisfläche in bezug auf dieses Koordinatensystem, mit r, t $\left(\begin{smallmatrix} 0 < r < R \\ 0 < t < 2\pi \end{smallmatrix}\right)$ seine Polarkoordinaten in bezug auf ein Polarkoordinatensystem, dessen Pol der Punkt O, dessen Polarachse die X-Achse ist, und bei dem der positive Drehungssinn so gewählt ist, daß eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ die positive Richtung der X-Achse in die positive Richtung der Y-Achse überführt. Entsprechend bezeichne man mit ξ, η die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes auf dem Rande $\mathfrak{R}$ der Kreisfläche, mit R, φ $(0 < \varphi < 2\pi)$ seine Polarkoordinaten. Es bestehen dann die Beziehungen:

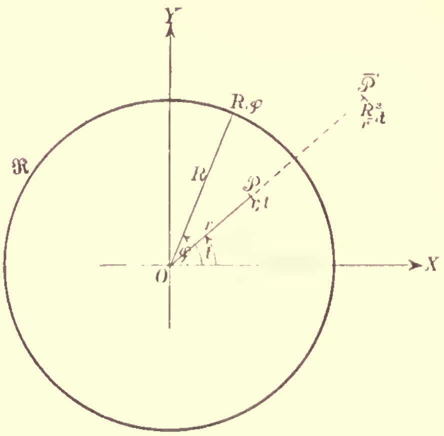


Fig. 1.

$$x = r \cos t, \qquad \xi = R \cos \varphi,$$
$$y = r \sin t, \qquad \eta = R \sin \varphi.$$

Für einen diese Kreisfläche in seinem Innern enthaltenden Teil der Ebene sei nun eine reelle, einwertige Funktion u der beiden reellen unabhängigen Veränderlichen x, y gegeben, welche den folgenden Bedingungen genügt. Für alle Punkte der Kreisfläche, d. h. sowohl für die im Innern als auch für die auf dem Rande $\mathfrak{R}$ gelegenen Punkte, soll die Funktion u stetig sein; in derselben Ausdehnung sollen die partiellen Derivierten

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ existieren und ebenfalls stetig sein; endlich sollen die zweiten Derivierten die Gleichung $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ erfüllen. Für jede solche Funktion u läßt sich dann der Wert $u_{r,t}$, der ihr für einen Punkt $\mathcal{P}$ im Innern der Kreisfläche zukommt, durch die Werte, welche sie auf dem Rande $\mathfrak{R}$ besitzt, ausdrücken.

Um zu diesem Ausdrucke zu gelangen, definiere man zu der gegebenen Funktion u eine neue Funktion v durch die Gleichung:

$$v = \int_{0,0}^{x,y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy \right),$$

indem man unter x, y die Koordinaten eines Punktes der Kreisfläche versteht und dem vom Punkte $0, 0$ bis zum Punkte x, y sich erstreckenden Integrationswege die Bedingung auferlegt, nicht aus der Kreisfläche herauszutreten. Die so definierte Funktion v besitzt dann, da das hinter dem Integralzeichen stehende zweigliedrige Differential infolge der Gleichung $\Delta u = 0$ ein vollständiges ist, für jeden Punkt der Kreisfläche einen vom Integrationsweg unabhängigen, mit x, y sich stetig ändernden Wert, und ihre ersten Derivierten sind mit den ersten Derivierten von u verknüpft durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Daraus folgt aber weiter, daß die Funktion $w = u + vi$ eine für alle Punkte der Kreisfläche einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + yi$ ist.

Bezeichnet man nun den Wert, den diese Funktion w für den im Innern der Kreisfläche gelegenen Punkt $\mathcal{P}$ mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y und den Polarkoordinaten r, t besitzt, mit w_z $(z = x + yi = re^{ti})$, den Wert, den sie für einen Punkt des Randes $\mathfrak{R}$ mit den rechtwinkligen Koordinaten ξ, η und den Polarkoordinaten R, φ besitzt, mit w_ζ $(\zeta = \xi + \eta i = Re^{\varphi i})$, so läßt sich zunächst der Wert w_z durch die Randwerte w_ζ ausdrücken mit Hilfe der Cauchyschen Fundamentalformel:

$$(\mathrm{I}_0.) \qquad w_z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}}^{+} \frac{w_\zeta}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

bei der das Integral in positiver Richtung, d. h. entsprechend dem positiven Drehungssinn des Polarkoordinatensystems, über den Rand $\mathfrak{R}$ der Kreisfläche zu erstrecken ist. Weiter besteht aber auch, wenn man unter $\bar{z}$ die zu $x + yi = re^{ti}$ konjugierte Größe $x - yi = re^{-ti}$ versteht, die Gleichung:

$$(\mathrm{II}_0.) \qquad 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}}^{+} \frac{w_\zeta}{\zeta - \frac{R^2}{\bar{z}}}\, d\zeta.$$

da die komplexe Größe $\frac{R^2}{z} = \frac{R^2}{r} e^{ti}$ dem außerhalb der Kreisfläche gelegenen Punkte $\mathfrak{P}$ mit den Polarkoordinaten $\frac{R^2}{r}$, t entspricht. Führt man jetzt in die beiden aufgestellten Gleichungen an Stelle von z und ζ die ihnen entsprechenden Größen r, t und R, φ ein, indem man $z = re^{ti}$, $\zeta = Re^{\varphi i}$, $w_z = u_{r,t} + v_{r,t}i$, $w_\zeta = u_{R,\varphi} + v_{R,\varphi}i = f(\varphi) + g(\varphi)i$ setzt, und ersetzt zugleich in der zweiten Gleichung überall i durch $-i$, so gehen die beiden Gleichungen, wenn man für φ als Integrationsvariable auch noch den Wert 2π zuläßt und entsprechend $f(2\pi)$, $g(2\pi)$ durch die Gleichungen $f(2\pi) = f(0)$, $g(2\pi) = g(0)$ definiert, über in die Gleichungen:

$$u_{r,t} + v_{r,t}i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [f(\varphi) + g(\varphi)i] \frac{Re^{\varphi i}}{Re^{\varphi i} - re^{ti}} d\varphi, \tag{I.}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [f(\varphi) - g(\varphi)i] \frac{re^{ti}}{Re^{\varphi i} - re^{ti}} d\varphi. \tag{II.}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich aber schließlich durch Addition und darauffolgende Trennung der reellen Teile von den lateralen für $u_{r,t}$ die gewünschte, zuerst von Poisson aufgestellte, Gleichung:

$$\underset{r<R}{u_{r,t}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} d\varphi, \tag{III.}$$

die den Wert $u_{r,t}$, welcher der Funktion u für den im Innern der Kreisfläche gelegenen Punkt $\mathfrak{P}$ zukommt, durch die Werte $u_{R,\varphi} = f(\varphi)$, welche u auf dem Rande $\mathfrak{R}$ besitzt, ausdrückt. Die gewonnene Gleichung zeigt überdies, daß zwei zu der Kreisfläche gegebene Funktionen u der definierten Art identisch sind, wenn sie für alle Punkte des Randes übereinstimmen.

Setzt man in der Gleichung (III.) $r = 0$ und bezeichnet den dem Werte $r = 0$ entsprechenden, von t unabhängigen Wert $u_{0,t}$ der Funktion $u_{r,t}$ einfacher durch u_0, so erhält man die Gleichung:

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi, \tag{IV.}$$

die aussagt, daß der Wert von u im Mittelpunkte der Kreisfläche das arithmetische Mittel aus denjenigen Werten ist, welche u auf dem Rande $\mathfrak{R}$ der Kreisfläche besitzt.

2.

Im folgenden soll unter $f(\varphi)$ irgend eine reelle, einwertige und mit der Periode 2π periodische Funktion der reellen Veränderlichen φ verstanden werden, die den Bedingungen der Endlichkeit und der Integrierbarkeit im Sinne der von RIEMANN*) gegebenen Definition des bestimmten Integrals genügt.

Die erste Bedingung deckt sich mit der Forderung, daß für die Werte, welche $f(\varphi)$ überhaupt annimmt, eine obere Grenze G' und eine untere Grenze K' existiert. Infolgedessen existiert auch für diejenigen Werte, welche $f(\varphi)$ in dem Intervalle von $\varphi = \varphi' - \delta$ bis $\varphi = \varphi' + \delta$ annimmt, eine obere Grenze $G_{\varphi',\delta}$ und eine untere Grenze $K_{\varphi',\delta}$. Läßt man dann die positive Zahl δ gegen Null konvergieren, so konvergieren die beiden Größen $G_{\varphi',\delta}$, $K_{\varphi',\delta}$ gegen bestimmte Grenzwerte $G(\varphi')$, $K(\varphi')$, da bei abnehmendem δ die Größe $G_{\varphi',\delta}$ niemals zunehmen, die Größe $K_{\varphi',\delta}$ niemals abnehmen kann. Die Größe $G(\varphi')$ soll die obere Grenze, die Größe $K(\varphi')$ die untere Grenze und entsprechend die nie negative Differenz $G(\varphi') - K(\varphi')$ die Schwankung der Funktion $f(\varphi)$ für den Punkt $\varphi = \varphi'$ genannt werden. Ist $\varphi = \varphi'$ ein Stetigkeitspunkt der Funktion $f(\varphi)$, so ist $G(\varphi') - K(\varphi') = 0$; ist dagegen $\varphi = \varphi'$ ein Unstetigkeitspunkt der Funktion $f(\varphi)$, so hat $G(\varphi') - K(\varphi')$ einen von Null verschiedenen, immer positiven Wert.

Die weiter noch für die Funktion $f(\varphi)$ gestellte Bedingung der Integrierbarkeit ist dann gleichbedeutend mit der Forderung, daß die zu $f(\varphi)$ gehörige Funktion $G(\varphi) - K(\varphi)$, welche positive Zahl man auch unter σ verstehen mag, in dem Intervalle von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ und daher auch in jedem Intervalle $a \cdots b$ stets nur für eine nicht ausgedehnte Punktmenge Werte besitzt, die größer als σ sind. Dabei soll eine von Punkten eines Intervalls $a \cdots b$, $a < b$, gebildete Punktmenge eine nicht ausgedehnte genannt werden, wenn die Summe derjenigen von den n Strecken $a + (\nu - 1)\frac{b-a}{n} \cdots a + \nu\frac{b-a}{n}$, ${}_{\nu=1,2,\cdots,n}$, auf welchen Punkte der Punktmenge vorkommen, dadurch, daß man nur n groß genug nimmt, der Null so nahe gebracht werden kann, wie man will. Bilden aber, wie verlangt, die irgend einem Intervalle $a \cdots b$ angehörigen Punkte φ, für welche $G(\varphi) - K(\varphi) > \sigma$ ist, für jeden positiven Wert von σ eine nicht ausgedehnte Punktmenge, so läßt sich, wie leicht zu beweisen, in jedem Teile des Intervalls $a \cdots b$ ein Punkt φ bestimmen, für welchen $G(\varphi) - K(\varphi) = 0$ ist, und es besitzt daher die Funktion $f(\varphi)$ in jedem noch so kleinen Teile des Intervalls Stetigkeitspunkte. Daraus folgt dann schließlich noch, daß man für die Bildung der Produktensumme, welche durch Übergang zur Grenze das bestimmte Integral $\int\limits_a^b f(\varphi)\,d\varphi$ liefert, sich auf diejenigen Funktionswerte $f(\varphi)$ beschränken kann, welche den Stetigkeitspunkten der Funktion $f(\varphi)$ entsprechen.

Mit Hilfe der im vorstehenden eingeführten Funktion $f(\varphi)$ definiere man jetzt für die in Art. 1 gewählte Kreisfläche eine Funktion u durch die Gleichungen:

*) RIEMANN, B., Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Art. 4, 5, 6. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 227—271.)

$$(1.)\qquad u_{\substack{r,t\\ r<R}} = \frac{1}{2\pi}\int_{l-\pi}^{l+\pi} f(\varphi)\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}\,d\varphi, \qquad u_{R,\varphi} = f(\varphi),$$

indem man dabei unter l irgend eine reelle Zahl versteht, und stelle sich die Frage, welche Eigenschaften die so definierte Funktion u besitzt.

Nach den über $f(\varphi)$ gemachten Voraussetzungen hat das unter (1.) stehende Integral für jeden im Innern der Kreisfläche gelegenen Punkt r, t einen bestimmten reellen, von l völlig unabhängigen Wert. Beachtet man dann noch, daß die unter dem Integralzeichen vorkommende Funktion:

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2} \text{ der reelle Teil der Funktion } \frac{\zeta+z}{\zeta-z}$$

ist, so ergibt sich zunächst, daß die Funktion u eine reelle und einwertige Funktion des Punktes x, y der Kreisfläche ist, die für jeden im Innern der Kreisfläche gelegenen Punkt $\mathfrak{P}$ nicht nur stetig ist, sondern auch partielle Derivierte in bezug auf x und y von jeder Ordnung besitzt und der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt. Es ist also nur noch zu untersuchen, wie sich die Funktion u verhält, wenn der Punkt $\mathfrak{P}$ mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y und den Polarkoordinaten r, t sich einem beliebig gewählten Punkte O' des Randes $\mathfrak{R}$ unbegrenzt nähert.

Zu dem Ende nehme man den Punkt O', dessen rechtwinklige Koordinaten a, b, dessen Polarkoordinaten R, α seien, zum Anfangspunkt eines neuen rechtwinkligen Koordinatensystems mit den Achsen $O'X'$, $O'Y'$ (s. Fig. 2). Die Y'-Achse soll durch den Punkt O gehen und $O'O$ als positive Richtung haben. Die X'-Achse wird dann im Punkte O' Tangente zum Kreise sein; ihre positive Richtung soll so gewählt sein, daß die beiden Koordinatensysteme $O'X'Y'$, OXY von ungleichem Sinne sind. Mit x', y' bezeichne man die Koordinaten des Punktes $\mathfrak{P}$ in bezug auf das neue System; mit ϱ, τ $(0<\tau<\pi)$ die Polarkoordinaten desselben Punktes in bezug auf ein Polarkoordinatensystem, dessen Pol der Punkt O', dessen Polarachse die X'-Achse ist, und bei dem der positive Drehungssinn so gewählt ist, daß eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ die positive Richtung der X'-Achse in die positive Richtung der Y'-Achse überführt. Durch passende Wahl von τ innerhalb der Grenzen 0 und π kann man dann für das Heranrücken des Punktes $\mathfrak{P}$ zum Punkte O' jede zulässige Richtung fixieren, und das Heranrücken selbst wird dadurch bewirkt, daß man das immer positive ϱ gegen Null konvergieren läßt.

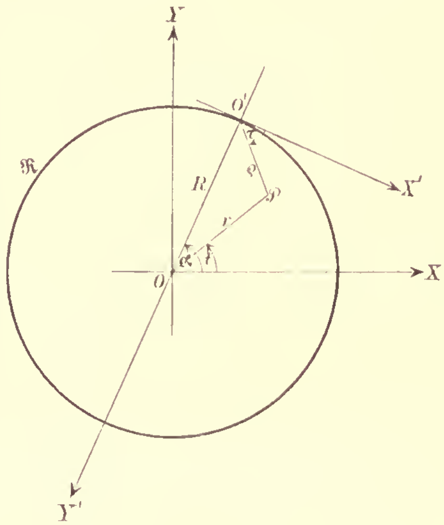


Fig. 2.

Führt man nun, indem man beachtet, daß zwischen den vier dem Punkte $\mathfrak{P}$ zukommenden Paaren von Koordinaten die Beziehungen:

$$r\cos t = x, \qquad x = a + x'\sin\alpha - y'\cos\alpha, \qquad x' = \varrho\cos\tau,$$
$$r\sin t = y, \qquad y = b - x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \qquad y' = \varrho\sin\tau$$

bestehen und daß $a = R\cos\alpha$, $b = R\sin\alpha$ ist, in das die Funktion u für alle innern Punkte der Kreisfläche definierende Integral an Stelle der Koordinaten r, t die Koordinaten ϱ, τ ein, so geht dieses Integral, wenn man noch $l = \alpha$ und zur Abkürzung $\frac{\varrho}{R} = \varkappa$ setzt, über in das Integral:

$$(2.) \qquad u^{\varkappa,\tau} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(\varphi)\,\frac{2\varkappa\sin\tau - \varkappa^2}{[2 - 2\varkappa\sin\tau][1 - \cos(\varphi - \alpha)] + 2\varkappa\cos\tau\sin(\varphi - \alpha) + \varkappa^2}\,d\varphi.$$

Da das Verhalten dieses Integrals für unbegrenzt abnehmendes $\varkappa$ untersucht werden soll, so kann man für das folgende, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, voraussetzen, daß $\varkappa < 1$ sei. Das Integral $u^{\varkappa,\tau}$ zerlege man nun in zwei neue Integrale $u_1^{\varkappa,\tau}$, $u_2^{\varkappa,\tau}$, von denen das erste die Grenzen $\alpha - \pi$ und α, das zweite die Grenzen α und $\alpha + \pi$ besitzt, und transformiere das Integral $u_1^{\varkappa,\tau}$ durch die Substitution $\varphi = \alpha - \varphi_1$, das Integral $u_2^{\varkappa,\tau}$ durch die Substitution $\varphi = \alpha + \varphi_2$. Es ergeben sich dann schließlich, wenn man noch in den Endresultaten bei φ_1, φ_2 die Indizes unterdrückt, die Gleichungen:

$$u^{\varkappa,\tau} = u_1^{\varkappa,\tau} + u_2^{\varkappa,\tau},$$

$$(3.) \qquad u_1^{\varkappa,\tau} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\alpha-\varphi)\,\frac{2\varkappa\sin\tau - \varkappa^2}{(2 - 2\varkappa\sin\tau)(1 - \cos\varphi) - 2\varkappa\cos\tau\sin\varphi + \varkappa^2}\,d\varphi,$$

$$u_2^{\varkappa,\tau} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\alpha+\varphi)\,\frac{2\varkappa\sin\tau - \varkappa^2}{(2 - 2\varkappa\sin\tau)(1 - \cos\varphi) + 2\varkappa\cos\tau\sin\varphi + \varkappa^2}\,d\varphi.$$

Man zerlege jetzt ein jedes der beiden Integrale $u_1^{\varkappa,\tau}$, $u_2^{\varkappa,\tau}$ in zwei neue, von denen das erste die Grenzen 0 und $2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\varkappa}$, das zweite die Grenzen $2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\varkappa}$ und π besitzt. Unter $\operatorname{arc\,tg} x$ bei reellem Argumente x ist hier und im folgenden immer derjenige bestimmte, zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gelegene Wert zu verstehen, welcher erhalten wird, wenn man $d\operatorname{arc\,tg} x = (1 + x^2)^{-1}dx$ im reellen Gebiete zwischen den Grenzen 0 und x integriert, und zugleich soll unter $\sqrt{\varkappa}$ stets der positive Wurzelwert verstanden werden. Wendet man dann auf diese neuen Integrale, indem man zur Abkürzung:

$$Q_1 = \frac{2\varkappa \sin\tau - \varkappa^2}{(2 - 2\varkappa\sin\tau)(1-\cos\varphi) - 2\varkappa\cos\tau\sin\varphi + \varkappa^2},$$

$$Q_2 = \frac{2\varkappa \sin\tau - \varkappa^2}{(2 - 2\varkappa\sin\tau)(1-\cos\varphi) + 2\varkappa\cos\tau\sin\varphi + \varkappa^2},$$

$$(4.)\qquad \frac{1}{2}\int_0^{2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\varkappa}} Q_1\,d\varphi = J_1(\varkappa,\tau), \qquad \frac{1}{2}\int_{2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\varkappa}}^{\pi} Q_1\,d\varphi = J_1'(\varkappa,\tau),$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\varkappa}} Q_2\,d\varphi = J_2(\varkappa,\tau), \qquad \frac{1}{2}\int_{2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\varkappa}}^{\pi} Q_2\,d\varphi = J_2'(\varkappa,\tau)$$

setzt und beachtet, daß die Größen Q_1, Q_2 immer positiv bleiben, wie auch $\varphi, \varkappa, \tau$ sich ändern mögen, den ersten Mittelwertsatz an, so erhält man die Gleichungen:

$$(5.)\qquad \begin{aligned} u_1^{\varkappa,\tau} &= \frac{1}{\pi} J_1(\varkappa,\tau)M_1 + \frac{1}{\pi} J_1'(\varkappa,\tau)M_1', \\ u_2^{\varkappa,\tau} &= \frac{1}{\pi} J_2(\varkappa,\tau)M_2 + \frac{1}{\pi} J_2'(\varkappa,\tau)M_2'. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen M_1, M_1', M_2, M_2' reelle Zahlen, die den Bedingungen:

$$K_1 \leqq M_1 \gtreqless G_1, \qquad K' \leqq M_1' \gtreqless G',$$
$$K_2 \leqq M_2 \gtreqless G_2, \qquad K' \leqq M_2' \gtreqless G'$$

genügen, worin K_1, G_1 untere und obere Grenze der Werte bedeuten, welche $f(\varphi)$ innerhalb des Intervalls von $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = \alpha - 2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\varkappa}$ annimmt, K_2, G_2 untere und obere Grenze der Werte, welche $f(\varphi)$ innerhalb des Intervalls von $\varphi=\alpha$ bis $\varphi=\alpha+2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\varkappa}$ annimmt, endlich K', G', wie früher, untere und obere Grenze der Werte bezeichnen, die $f(\varphi)$ überhaupt annimmt.

3.

Die vier Funktionen J_1, J_1', J_2, J_2' sollen jetzt näher untersucht werden. Da Q_1 in Q_2 übergeht, wenn man τ durch $\pi - \tau$ ersetzt, so bestehen die Beziehungen:

$$(6.)\qquad J_2(\varkappa,\tau) = J_1(\varkappa, \pi-\tau), \qquad J_2'(\varkappa,\tau) = J_1'(\varkappa,\pi-\tau),$$

und man kann sich dementsprechend, weil zugleich mit τ auch $\pi - \tau$ innerhalb des Intervalls $0\cdots\pi$ liegt, auf die Untersuchung der beiden Funktionen J_1, J_1' beschränken.

In die den Funktionen J_1, J_1' entsprechenden Integrale führe man nun an Stelle von φ eine neue Integrationsvariable ξ ein durch die Substitution $\xi = \frac{1}{\varkappa}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$. Man erhält dann zunächst die Gleichungen:

$$(7.)\qquad \begin{aligned} J_1(\varkappa,\tau) &= \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}} \frac{2\sin\tau-\varkappa}{(4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2)\,\xi^2-4\xi\cos\tau+1}\,d\xi\,, \\ J_1'(\varkappa,\tau) &= \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}^{\infty} \frac{2\sin\tau-\varkappa}{(4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2)\,\xi^2-4\xi\cos\tau+1}\,d\xi\,, \end{aligned}$$

und weiter aus diesen, wenn man beachtet, daß das unbestimmte Integral des hinter den Integralzeichen stehenden Differentials durch

$$\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{(4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2)\,\xi-2\cos\tau}{2\sin\tau-\varkappa}\right]+\text{const.}$$

dargestellt wird, und daß sowohl die Größe $4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2$ wie die Größe $2\sin\tau-\varkappa$ immer positiv ist, die Gleichungen:

$$(8.)\qquad \begin{aligned} J_1(\varkappa,\tau) &= \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2-2\sqrt{\varkappa}\cos\tau}{\sqrt{\varkappa}\,(2\sin\tau-\varkappa)}\right]+\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\cos\tau}{2\sin\tau-\varkappa}\right], \\ J_1'(\varkappa,\tau) &= \frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2-2\sqrt{\varkappa}\cos\tau}{\sqrt{\varkappa}\,(2\sin\tau-\varkappa)}\right]. \end{aligned}$$

Unter der schon früher über die Bedeutung von $\operatorname{arc\,tg} x$ bei reellem Argumente x gemachten Festsetzung gilt von den beiden Formeln:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\,,\qquad \operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$$

die erste für jede positive Größe x, die zweite für je zwei reelle Größen x, y, die der Bedingung $1+xy>0$ genügen. Durch Anwendung dieser Formeln ergeben sich dann unmittelbar die Gleichungen:

$$\text{a.)}\quad \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2-2\sqrt{\varkappa}\cos\tau}{\sqrt{\varkappa}\,(2\sin\tau-\varkappa)}\right] = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\sqrt{\varkappa}\,(2\sin\tau-\varkappa)}{4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2-2\sqrt{\varkappa}\cos\tau}\right],$$

$$\text{b.)}\quad \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\cos\tau}{2\sin\tau-\varkappa}\right]-\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\varkappa\cos\tau}{2-\varkappa\sin\tau}\right] = \frac{\pi}{2}-\tau\,,$$

$$\text{c.)}\quad \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\varkappa\cos\tau}{2-\varkappa\sin\tau}\right]-\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\sqrt{\varkappa}\,(2\sin\tau-\varkappa)}{4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2-2\sqrt{\varkappa}\cos\tau}\right] = -\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\sqrt{\varkappa}\,(\sin\tau-\sqrt{\varkappa}\cos\tau)}{2-\varkappa\sin\tau-\sqrt{\varkappa}\cos\tau}\right].$$

Bei der Aufstellung derselben ist zu beachten, daß der Ausdruck $4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2-2\sqrt{\varkappa}\cos\tau$ und damit zugleich auch der Ausdruck $2-\varkappa\sin\tau-\sqrt{\varkappa}\cos\tau = \frac{1}{2}(4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2-2\sqrt{\varkappa}\cos\tau)$ $+\frac{\varkappa}{2}(2\sin\tau-\varkappa)$ immer positiv ist; denn der kleinste Wert, welchen der erstgenannte Ausdruck bei festgehaltenem $\varkappa$ im Rahmen der Bedingung $0<\tau<\pi$ annehmen kann, wird durch $4+\varkappa^2-2\sqrt{\varkappa+4\varkappa^2}$ dargestellt, und dieser Minimalwert ist infolge der schon früher gestellten Bedingung $\varkappa < 1$ positiv, da er durch Multiplikation mit der positiven Größe $4 + \varkappa^2 + 2\underset{+}{\sqrt{\varkappa + 4\varkappa^2}}$ in die für $\varkappa < 1$ immer positive Größe $16 - 4\varkappa - 8\varkappa^2 + \varkappa^4$ übergeht. Addiert man nun zu der ersten unter (8.) stehenden Gleichung die Gleichungen a.), b.), c.) und transformiert die rechte Seite der zweiten unter (8.) stehenden Gleichung mit Hilfe der Gleichung a.), so erhält man die Gleichungen:

$$
(9.)\qquad
\begin{aligned}
J_1(\varkappa, \tau) &= \pi - \tau - \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\sqrt{\varkappa}\,(\sin\tau - \sqrt{\varkappa}\cos\tau)}{2 - \varkappa\sin\tau - \sqrt{\varkappa}\cos\tau}\right],\\
J_1'(\varkappa, \tau) &= \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\sqrt{\varkappa}\,(2\sin\tau - \varkappa)}{4 - 4\varkappa\sin\tau + \varkappa^2 - 2\sqrt{\varkappa}\cos\tau}\right].
\end{aligned}
$$

Ersetzt man in diesen Gleichungen die Größe τ $(0 < \tau < \pi)$ durch die Größe $\pi - \tau$ und beachtet die Gleichungen (6.), so ergeben sich weiter für die Funktionen $J_2(\varkappa, \tau)$, $J_2'(\varkappa, \tau)$ die Gleichungen:

$$
(10.)\qquad
\begin{aligned}
J_2(\varkappa, \tau) &= \tau - \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\sqrt{\varkappa}\,(\sin\tau + \sqrt{\varkappa}\cos\tau)}{2 - \varkappa\sin\tau + \sqrt{\varkappa}\cos\tau}\right],\\
J_2'(\varkappa, \tau) &= \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\sqrt{\varkappa}\,(2\sin\tau - \varkappa)}{4 - 4\varkappa\sin\tau + \varkappa^2 + 2\sqrt{\varkappa}\cos\tau}\right].
\end{aligned}
$$

Von den vier auf den rechten Seiten der Gleichungen (9.) und (10.) in eckigen Klammern stehenden Ausdrücken liegt der erste und der aus ihm durch Übergang von τ zu $\pi - \tau$ hervorgehende dritte Ausdruck dem Werte nach zwischen $-\sqrt{\varkappa}$ und $\sqrt{\varkappa}$, während der immer positive zweite und der aus ihm durch Übergang von τ zu $\pi - \tau$ hervorgehende vierte Ausdruck dem Werte nach zwischen 0 und $2\sqrt{\varkappa}$ liegt. Die Richtigkeit der ersten Behauptung zeigt ein Blick auf die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\varkappa} + \frac{\sqrt{\varkappa}\,(\sin\tau - \sqrt{\varkappa}\cos\tau)}{2 - \varkappa\sin\tau - \sqrt{\varkappa}\cos\tau} &= \frac{\sqrt{\varkappa}\,[2 + (1 - \varkappa)\sin\tau - 2\sqrt{\varkappa}\cos\tau]}{2 - \varkappa\sin\tau - \sqrt{\varkappa}\cos\tau},\\
\sqrt{\varkappa} - \frac{\sqrt{\varkappa}\,(\sin\tau - \sqrt{\varkappa}\cos\tau)}{2 - \varkappa\sin\tau - \sqrt{\varkappa}\cos\tau} &= \frac{\sqrt{\varkappa}\,[2 - (1 + \varkappa)\sin\tau]}{2 - \varkappa\sin\tau - \sqrt{\varkappa}\cos\tau},
\end{aligned}
$$

deren rechte Seiten für jedes in Betracht kommende $\varkappa$ und τ positiv sind. Die Richtigkeit der zweiten Behauptung dagegen ergibt sich aus der Gleichung:

$$
2\sqrt{\varkappa} - \frac{\sqrt{\varkappa}\,(2\sin\tau - \varkappa)}{4 - 4\varkappa\sin\tau + \varkappa^2 - 2\sqrt{\varkappa}\cos\tau} = \frac{\sqrt{\varkappa}\,[8 + \varkappa + 2\varkappa^2 - (2 + 8\varkappa)\sin\tau - 4\sqrt{\varkappa}\cos\tau]}{4 - 4\varkappa\sin\tau + \varkappa^2 - 2\sqrt{\varkappa}\cos\tau},
$$

wenn man beachtet, daß der kleinste Wert, welchen der auf der rechten Seite dieser Gleichung in eckigen Klammern stehende Ausdruck bei festgehaltenem $\varkappa$ im Rahmen der Bedingung $0 < \tau < \pi$ annehmen kann, durch $8 + \varkappa + 2\varkappa^2 - \underset{+}{\sqrt{4 + 48\varkappa + 64\varkappa^2}}$ dargestellt wird, und daß dieser Minimalwert durch Multiplikation mit der positiven Größe

$8+\varkappa+2\varkappa^2+\sqrt{4+48\varkappa+64\varkappa^2}$ in die für $\varkappa<1$ immer positive Größe $60-32\varkappa-31\varkappa^2+4\varkappa^3+4\varkappa^4$ übergeht. Berücksichtigt man nun noch, daß der Wert von $\operatorname{arc\,tg} x$ zwischen $-\sqrt{\varkappa}$ und $\sqrt{\varkappa}$ liegt, wenn $-\sqrt{\varkappa}<x<\sqrt{\varkappa}$ ist, dagegen zwischen 0 und $2\sqrt{\varkappa}$, wenn $0<x<2\sqrt{\varkappa}$ ist, so ergeben sich aus den Gleichungen (9.) und (10.) die Relationen:

$$
(11.)\qquad
\begin{aligned}
\pi-\tau-\sqrt{\varkappa} < J_1(\varkappa,\tau) &< \pi-\tau+\sqrt{\varkappa}, \qquad & 0 < J_1'(\varkappa,\tau) &< 2\sqrt{\varkappa},\\
\tau-\sqrt{\varkappa} < J_2(\varkappa,\tau) &< \tau+\sqrt{\varkappa}, \qquad & 0 < J_2'(\varkappa,\tau) &< 2\sqrt{\varkappa},
\end{aligned}
$$

und aus diesen die Gleichungen:

$$
(12.)\qquad
\begin{aligned}
J_1(\varkappa,\tau) &= \pi-\tau+\varepsilon_1\sqrt{\varkappa}, \qquad & J_1'(\varkappa,\tau) &= 2\varepsilon_1'\sqrt{\varkappa},\\
J_2(\varkappa,\tau) &= \tau+\varepsilon_2\sqrt{\varkappa}, \qquad & J_2'(\varkappa,\tau) &= 2\varepsilon_2'\sqrt{\varkappa}.
\end{aligned}
$$

Dabei bezeichnen $\varepsilon_1, \varepsilon_1', \varepsilon_2, \varepsilon_2'$ reelle von $\varkappa, \tau$ abhängige Zahlen, die den Bedingungen $-1<\varepsilon_1<1$, $0<\varepsilon_1'<1$, $-1<\varepsilon_2<1$, $0<\varepsilon_2'<1$ genügen.

4.

Man führe jetzt die für J_1, J_1', J_2, J_2' gefundenen Ausdrücke in die Gleichungen (5.) ein und addiere die dadurch sich ergebenden Gleichungen:

$$
(13.)\qquad
\begin{aligned}
u_1^{\varkappa,\tau} &= \frac{\pi-\tau+\varepsilon_1\sqrt{\varkappa}}{\pi}M_1 + \frac{2\varepsilon_1'\sqrt{\varkappa}}{\pi}M_1',\\
u_2^{\varkappa,\tau} &= \frac{\tau+\varepsilon_2\sqrt{\varkappa}}{\pi}M_2 + \frac{2\varepsilon_2'\sqrt{\varkappa}}{\pi}M_2',
\end{aligned}
$$

indem man beachtet, daß $u_1^{\varkappa,\tau}+u_2^{\varkappa,\tau}=u^{\varkappa,\tau}$ ist. Es entsteht dann die Gleichung:

$$
(14.)\qquad u^{\varkappa,\tau} = \frac{\pi-\tau}{\pi}M_1 + \frac{\tau}{\pi}M_2 + \frac{\sqrt{\varkappa}}{\pi}\left(\varepsilon_1 M_1+\varepsilon_2 M_2+2\varepsilon_1' M_1'+2\varepsilon_2' M_2'\right).
$$

Nach dem am Schlusse von Art. 2 Bemerkten können die Zahlen M_1, M_1', M_2, M_2' nicht außerhalb des Intervalls $K'\cdots G'$ liegen. Versteht man nun unter g die größere der beiden nie negativen Zahlen, welche die absoluten Werte von K' und G' sind, und beachtet, daß die Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ immer zwischen -1 und 1, die Zahlen $\varepsilon_1', \varepsilon_2'$ immer zwischen 0 und 1 liegen, so ergibt sich, daß der absolute Wert der auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehenden Größe $\varepsilon_1 M_1+\varepsilon_2 M_2+2\varepsilon_1' M_1'+2\varepsilon_2' M_2'$ nicht größer als $6g$ ist, und man kann infolgedessen die Gleichung (14.) durch die einfachere Gleichung:

$$
(15.)\qquad u^{\varkappa,\tau} = \frac{\pi-\tau}{\pi}M_1 + \frac{\tau}{\pi}M_2 + 6\varepsilon\frac{g}{\pi}\sqrt{\varkappa}
$$

ersetzen, wobei ε eine reelle von $\varkappa, \tau$ abhängige Zahl bezeichnet, die der Bedingung $-1<\varepsilon<1$ genügt.

Führt man jetzt an Stelle von $\varkappa$ die ursprüngliche Größe ϱ wieder ein durch die Gleichung $\varkappa = \frac{\varrho}{R}$, setzt in neuer Bezeichnung $u^{\frac{\varrho}{R}, \tau} = u^{(\varrho, \tau)}$ und beachtet, daß die Bedingung $\varkappa < 1$, unter der die Formel (15.) abgeleitet worden ist, für ϱ die Bedingung $\varrho < R$ nach sich zieht, so kann man die Gleichung (15.) durch die Gleichung:

$$(16.) \qquad u^{(\varrho, \tau)} = \frac{\pi - \tau}{\pi} M_1 + \frac{\tau}{\pi} M_2 + 6\,\varepsilon\,\frac{g}{\pi}\sqrt{\frac{\varrho}{R}} \qquad (0 < \varrho < R)$$

ersetzen. Es bezeichnet dabei also $u^{(\varrho, \tau)}$ den Wert der Funktion u für den im Innern der Kreisfläche gelegenen Punkt $\mathfrak{P}$, der in bezug auf den Punkt O' als Pol die Polarkoordinaten ϱ, τ besitzt; M_1, M_2 sind reelle Zahlen, die nach dem am Schlusse von Art. 2 Bemerkten den Bedingungen:

$$K_1^{(\varrho)} \leqq M_1 \lesseqgtr G_1^{(\varrho)}, \qquad K_2^{(\varrho)} \leqq M_2 \lesseqgtr G_2^{(\varrho)}$$

genügen, wobei $K_1^{(\varrho)}$, $G_1^{(\varrho)}$, $K_2^{(\varrho)}$, $G_2^{(\varrho)}$ an Stelle von K_1, G_1, K_2, G_2 stehen, also $K_1^{(\varrho)}$, $G_1^{(\varrho)}$ untere und obere Grenze der Werte bedeuten, welche $f(\varphi)$ innerhalb des Intervalls von $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = \alpha - 2 \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\varrho}{R}}$ annimmt, $K_2^{(\varrho)}$, $G_2^{(\varrho)}$ untere und obere Grenze der Werte, welche $f(\varphi)$ innerhalb des Intervalls von $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = \alpha + 2 \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\varrho}{R}}$ annimmt; endlich bezeichnet g die obere Grenze der absoluten Werte von $f(\varphi)$ und ε eine reelle von ϱ, τ abhängige Zahl, die der Bedingung $-1 < \varepsilon < 1$ genügt.

Um eine entsprechende Formel für den Rand $\mathfrak{R}$ der Kreisfläche zu erhalten, beschreibe man um O' als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius ϱ, bezeichne die Schnittpunkte desselben mit dem ursprünglichen Kreis durch $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, die Polarkoordinaten dieser Punkte in bezug auf das den Punkt O als Pol besitzende System mit R, φ_1 und R, φ_2, in bezug auf das den Punkt O' als Pol besitzende System mit ϱ, τ_1 und ϱ, τ_2 und beachte, daß zwischen diesen Koordinaten die Beziehungen:

$$\varphi_1 \equiv \alpha - 2 \arcsin\frac{\varrho}{2R} \pmod{2\pi}, \quad \tau_1 = \arcsin\frac{\varrho}{2R}; \quad \varphi_2 \equiv \alpha + 2 \arcsin\frac{\varrho}{2R} \pmod{2\pi}, \quad \pi - \tau_2 = \arcsin\frac{\varrho}{2R}$$

bestehen. Es lassen sich dann die beiden Gleichungen $u_{R, \varphi_1} = f(\varphi_1)$, $u_{R, \varphi_2} = f(\varphi_2)$, welche die Werte der Funktion u für die Punkte R, φ_1 und R, φ_2 des Randes $\mathfrak{R}$ bestimmen, durch die beiden Gleichungen:

$$(\overline{16}.) \qquad u_{R, \varphi_1} = f\left(\alpha - 2 \arcsin\frac{\varrho}{2R}\right), \qquad u_{R, \varphi_2} = f\left(\alpha + 2 \arcsin\frac{\varrho}{2R}\right) \qquad (0 < \varrho < R)$$

ersetzen. Unter $\arcsin x$, $_{-1 \leqq x \leqq 1}$, ist hier und im folgenden stets der durch die Bedingung $-\frac{\pi}{2} \leqq \arcsin x \lesseqgtr \frac{\pi}{2}$ vollständig bestimmte Funktionswert zu verstehen.

5.

Auf Grund der Gleichungen (16.), $(\overline{16}.)$ soll jetzt das Verhalten der durch die Gleichungen (1.) definierten Funktion u in der Umgebung des willkürlich gewählten Randpunktes O' mit den Polarkoordinaten R, α untersucht werden.

Wie schon zu Anfang des Art. 2 bemerkt wurde, besitzt die Funktion $f(\varphi)$, entsprechend der für sie gestellten Bedingung der Integrierbarkeit, in jedem noch so kleinen Teile des Intervalls von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ Stetigkeitspunkte, das sind Punkte φ, für welche die Größen $f(\varphi - 0) = \lim\limits_{\delta = +0} f(\varphi - \delta)$, $f(\varphi + 0) = \lim\limits_{\delta = +0} f(\varphi + \delta)$ existieren und zudem die Gleichungen $f(\varphi - 0) = f(\varphi)$, $f(\varphi + 0) = f(\varphi)$ bestehen. Die Funktion $f(\varphi)$ kann weiter aber auch für unbegrenzt viele Punkte φ des genannten Intervalls sich so verhalten, daß die Größen $f(\varphi - 0)$, $f(\varphi + 0)$ zwar existieren, aber wenigstens eine der Gleichungen $f(\varphi - 0) = f(\varphi)$, $f(\varphi + 0) = f(\varphi)$ nicht erfüllt ist. Für die etwa noch übrigen Punkte φ, deren Anzahl ebenfalls unbegrenzt sein kann, wird dann das Verhalten von $f(\varphi)$ dadurch charakterisiert sein, daß mindestens eine der beiden Größen $f(\varphi - 0)$, $f(\varphi + 0)$ nicht existiert. Entsprechend diesen drei Arten von Punkten sollen jetzt in bezug auf den Punkt O' mit den Polarkoordinaten R, α die folgenden drei Fälle unterschieden werden.

Erster Fall.

Es ist $\varphi = \alpha$ ein Stetigkeitspunkt der Funktion $f(\varphi)$, oder was dasselbe, es existieren die Größen $f(\alpha - 0)$, $f(\alpha + 0)$ und es bestehen zudem die Gleichungen $f(\alpha - 0) = f(\alpha)$, $f(\alpha + 0) = f(\alpha)$. Der Definition der Größen $f(\alpha - 0)$, $f(\alpha + 0)$ entsprechend läßt sich dann zu der beliebig vorgegebenen positiven Zahl Δ eine andere positive Zahl $\delta < \Delta$ bestimmen, so daß für jedes ψ, welches der Bedingung $0 < \psi < \delta$ genügt, $|f(\alpha - \psi) - f(\alpha - 0)| < \Delta$, $|f(\alpha + \psi) - f(\alpha + 0)| < \Delta$ ist. Zur Bezeichnung des absoluten Wertes irgend einer reellen Größe x ist hier, wie auch im folgenden, das Zeichen $|x|$ verwendet. Bringt man nun die Gleichungen (16.), $(\overline{16}.)$ in die Gestalt:

$$(16_1.) \qquad u^{(\varrho, \tau)} - f(\alpha) = \frac{\pi - \tau}{\pi} \left[M_1 - f(\alpha - 0)\right] + \frac{\tau}{\pi} \left[M_2 - f(\alpha + 0)\right] + 6\varepsilon \frac{g}{\pi} \sqrt{\frac{\varrho}{R}}, \qquad {\scriptstyle (0 < \varrho < R)}$$

$$(\overline{16}_1.) \quad u_{R, \varphi_1} - f(\alpha) = f\left(\alpha - 2 \arcsin \frac{\varrho}{2R}\right) - f(\alpha - 0), \quad u_{R, \varphi_2} - f(\alpha) = f\left(\alpha + 2 \arcsin \frac{\varrho}{2R}\right) - f(\alpha + 0),$$

und wählt alsdann zu dem vorher bestimmten δ eine positive Zahl ϱ', deren Größe durch die drei Bedingungen:

$$\varrho' < R, \qquad 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\varrho'}{R}} < \delta, \qquad 6 \frac{g}{\pi} \sqrt{\frac{\varrho'}{R}} < \delta$$

beschränkt sein soll, so ergibt sich für jedes positive $\varrho \overline{\gtrless} \varrho'$, wenn man noch beachtet, daß für jede zwischen 0 und 1 gelegene reelle Zahl x $\arcsin \frac{x}{2} < \operatorname{arc\,tg} \underset{+}{\sqrt{x}}$ ist:

$$|M_1 - f(\alpha - 0)| < \Delta, \quad |M_2 - f(\alpha + 0)| < \Delta, \quad \left|6\varepsilon \frac{g}{\pi} \sqrt{\frac{\varrho}{R}}\right| < \Delta,$$

$$\left|f\left(\alpha - 2\arcsin \frac{\varrho}{2R}\right) - f(\alpha - 0)\right| < \Delta, \quad \left|f\left(\alpha + 2\arcsin \frac{\varrho}{2R}\right) - f(\alpha + 0)\right| < \Delta,$$

und daher auch:

$$|u^{(\varrho,\tau)} - f(\alpha)| < 2\Delta, \qquad (0 < \varrho < \varrho')$$

$$|u_{R,\varphi_1} - f(\alpha)| < \Delta, \qquad |u_{R,\varphi_2} - f(\alpha)| < \Delta.$$

Aus diesen Ungleichungen folgt aber schließlich, daß der absolute Wert von $u - f(\alpha)$ sowohl für jeden inneren Punkt wie für jeden Randpunkt des Flächenstückes, welches die beiden um O und O' als Mittelpunkte mit den Radien R und ϱ' beziehungsweise abgegrenzten Kreisflächen gemeinsam haben, unter 2Δ liegt, oder was dasselbe, daß jeder Randpunkt O', für den die Funktion $u_{R,\varphi} = f(\varphi)$ stetig ist, zugleich auch ein Stetigkeitspunkt der durch die Gleichungen (1.) definierten Funktion u ist.

Zweiter Fall.

Es ist $\varphi = \alpha$ ein Unstetigkeitspunkt der Funktion $f(\varphi)$ von der Art, daß die Größen $f(\alpha - 0)$, $f(\alpha + 0)$ zwar existieren, aber wenigstens eine der Gleichungen: $f(\alpha - 0) = f(\alpha)$, $f(\alpha + 0) = f(\alpha)$ nicht erfüllt ist. Die Differenz $f(\alpha + 0) - f(\alpha - 0)$ möge mit h bezeichnet werden. Ebenso wie im vorher behandelten Falle läßt sich dann zu der beliebig vorgegebenen positiven Zahl Δ eine andere positive Zahl $\delta < \Delta$ bestimmen, so daß für jedes ψ, welches der Bedingung $0 < \psi < \delta$ genügt, $|f(\alpha - \psi) - f(\alpha - 0)| < \Delta$, $|f(\alpha + \psi) - f(\alpha + 0)| < \Delta$ ist. Bringt man nun die Gleichungen (16.), $(\overline{16}.)$ in die Gestalt:

$$(16_2.) \qquad u^{(\varrho,\tau)} - \frac{\pi - \tau}{\pi} f(\alpha - 0) - \frac{\tau}{\pi} f(\alpha + 0) = \frac{\pi - \tau}{\pi}[M_1 - f(\alpha - 0)] + \frac{\tau}{\pi}[M_2 - f(\alpha + 0)] + 6\varepsilon \frac{g}{\pi} \sqrt{\frac{\varrho}{R}}, \qquad (0 < \varrho < R)$$

$$(\overline{16}_2.) \qquad \begin{cases} u_{R,\varphi_1} - \frac{\pi - \tau_1}{\pi} f(\alpha - 0) - \frac{\tau_1}{\pi} f(\alpha + 0) = \left[f\left(\alpha - 2\arcsin \frac{\varrho}{2R}\right) - f(\alpha - 0)\right] - \frac{h}{\pi} \arcsin \frac{\varrho}{2R}, \\ u_{R,\varphi_2} - \frac{\pi - \tau_2}{\pi} f(\alpha - 0) - \frac{\tau_2}{\pi} f(\alpha + 0) = \left[f\left(\alpha + 2\arcsin \frac{\varrho}{2R}\right) - f(\alpha + 0)\right] + \frac{h}{\pi} \arcsin \frac{\varrho}{2R}, \end{cases}$$

und wählt alsdann zu dem vorher bestimmten δ eine positive Zahl ϱ', deren Größe durch die vier Bedingungen:

$$\varrho' < R, \qquad 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\varrho'}{R}} < \delta, \qquad 6 \frac{g}{\pi} \sqrt{\frac{\varrho'}{R}} < \delta, \qquad \frac{|h|}{\pi} \arcsin \frac{\varrho'}{2R} < \delta$$

beschränkt sein soll, so ergibt sich auf dieselbe Weise wie im ersten Falle für jedes positive $\varrho \overline{\gtrless} \varrho'$:

$$\left| u^{(\varrho,\tau)} - \frac{\pi-\tau}{\pi} f(\alpha-0) - \frac{\tau}{\pi} f(\alpha+0) \right| < 2\Delta,$$

$$\left| u_{R,\varphi_1} - \frac{\pi-\tau_1}{\pi} f(\alpha-0) - \frac{\tau_1}{\pi} f(\alpha+0) \right| < 2\Delta,$$

$$\left| u_{R,\varphi_2} - \frac{\pi-\tau_2}{\pi} f(\alpha-0) - \frac{\tau_2}{\pi} f(\alpha+0) \right| < 2\Delta.$$

Aus diesen Ungleichungen folgt aber schließlich, daß der absolute Wert der Größe $u - \frac{\pi-\tau}{\pi} f(\alpha-0) - \frac{\tau}{\pi} f(\alpha+0)$ sowohl für jeden inneren Punkt wie für jeden von O' verschiedenen Randpunkt des Flächenstückes, welches die beiden um O und O' als Mittelpunkte mit den Radien R und ϱ' beziehungsweise abgegrenzten Kreisflächen gemeinsam haben, unter 2Δ liegt, oder was dasselbe, daß der Wert der Funktion u, wenn man in der durch den Winkel τ bestimmten Richtung gegen den Punkt O' anrückt, gegen $f(\alpha-0) + \frac{\tau}{\pi}[f(\alpha+0) - f(\alpha-0)]$ konvergiert und zwar gleichmäßig für alle in Betracht kommenden Werte von τ.

In dem besonderen Falle, wo $f(\alpha-0) = f(\alpha+0)$ ist, konvergiert der Wert der Funktion u für alle in Betracht kommenden Werte von τ gleichmäßig gegen $f(\alpha-0)$. Die Funktion u besitzt alsdann, ebenso wie die Randfunktion $u_{R,\varphi} = f(\varphi)$, für den Punkt O' nur eine hebbare Unstetigkeit, insofern sie in eine für den Punkt O' stetige Funktion dadurch verwandelt werden kann, daß man als Wert von $u_{R,\varphi}$ für $\varphi = \alpha$ nicht den durch die Gleichung $u_{R,\varphi} = f(\varphi)$ vorgeschriebenen Wert $f(\alpha)$, sondern den Wert $f(\alpha-0)$ nimmt.

Dritter Fall.

Es ist $\varphi = \alpha$ ein Unstetigkeitspunkt der Funktion $f(\varphi)$ von der Art, daß mindestens eine der beiden Größen $f(\alpha-0)$, $f(\alpha+0)$ nicht existiert. Um auch in diesem Falle das Verhalten der Funktion u in der Umgebung des Punktes O' zu erkennen, ersetze man die Gleichungen (16.), (16.) durch die Ungleichungen:

$$\frac{\pi-\tau}{\pi} K_1^{(\varrho)} + \frac{\tau}{\pi} K_2^{(\varrho)} - 6\frac{g}{\pi}\sqrt{\frac{\varrho}{R}} < u^{(\varrho,\tau)} < \frac{\pi-\tau}{\pi} G_1^{(\varrho)} + \frac{\tau}{\pi} G_2^{(\varrho)} + 6\frac{g}{\pi}\sqrt{\frac{\varrho}{R}}, \qquad (0<\varrho<R) \tag{$16_3.$}$$

$$K_1^{(\varrho)} \leqq u_{R,\varphi_1} \overline{\gtrless} G_1^{(\varrho)}, \qquad K_2^{(\varrho)} \leqq u_{R,\varphi_2} \overline{\gtrless} G_2^{(\varrho)}, \tag{$16_3.$}$$

indem man beachtet, daß die in der Gleichung (16.) vorkommenden Zahlen M_1, M_2 den Bedingungen $K_1^{(\varrho)} \leqq M_1 \overline{\gtrless} G_1^{(\varrho)}$, $K_2^{(\varrho)} \leqq M_2 \overline{\gtrless} G_2^{(\varrho)}$ genügen, und daß auf Grund der Definition der Größen $K_1^{(\varrho)}$, $G_1^{(\varrho)}$, $K_2^{(\varrho)}$, $G_2^{(\varrho)}$ die in der ersten der Gleichungen (16.) vorkommende

Größe $f\left(\alpha - 2\arcsin\frac{\varrho}{2R}\right)$ nicht aus dem Intervalle $K_1^{(\varrho)} \cdots G_1^{(\varrho)}$, die in der zweiten der Gleichungen $(\overline{16}.)$ vorkommende Größe $f\left(\alpha + 2\arcsin\frac{\varrho}{2R}\right)$ nicht aus dem Intervalle $K_2^{(\varrho)} \cdots G_2^{(\varrho)}$ heraustreten kann.

Die vier Größen $K_1^{(\varrho)}$, $K_2^{(\varrho)}$, $G_1^{(\varrho)}$, $G_2^{(\varrho)}$ konvergieren bei unbegrenzt abnehmendem ϱ gegen bestimmte Grenzwerte, weil bei abnehmendem ϱ die Größen $K_1^{(\varrho)}$, $K_2^{(\varrho)}$ ihrer Definition gemäß niemals abnehmen, die Größen $G_1^{(\varrho)}$, $G_2^{(\varrho)}$ niemals zunehmen können. Diese Grenzwerte bezeichne man mit $K_1^{(0)}$, $K_2^{(0)}$, $G_1^{(0)}$, $G_2^{(0)}$, setze also:

$$\lim_{\varrho=0} K_1^{(\varrho)} = K_1^{(0)},\quad \lim_{\varrho=0} K_2^{(\varrho)} = K_2^{(0)},\quad \lim_{\varrho=0} G_1^{(\varrho)} = G_1^{(0)},\quad \lim_{\varrho=0} G_2^{(\varrho)} = G_2^{(0)}$$

und beachte für das folgende, daß die Differenzen $K_1^{(0)} - K_1^{(\varrho)}$, $K_2^{(0)} - K_2^{(\varrho)}$, $G_1^{(\varrho)} - G_1^{(0)}$, $G_2^{(\varrho)} - G_2^{(0)}$ niemals negativ sein können. Der Definition der Größen $K^{(0)}$, $G^{(0)}$ entsprechend läßt sich dann zu der beliebig vorgegebenen positiven Zahl Δ eine andere positive Zahl $\delta < \Delta$ bestimmen, so daß für jedes $\varrho < \delta$:

$$0 \leqq K_1^{(0)} - K_1^{(\varrho)} < \Delta,\quad 0 \leqq K_2^{(0)} - K_2^{(\varrho)} < \Delta,\quad 0 \leqq G_1^{(\varrho)} - G_1^{(0)} < \Delta,\quad 0 \leqq G_2^{(\varrho)} - G_2^{(0)} < \Delta.$$

Formt man nun bei den Ungleichungen $(16_3.)$, $(\overline{16}_3.)$ die Größen, welche u einschließen, den Gleichungen:

$$\frac{\pi-\tau}{\pi} K_1^{(\varrho)} + \frac{\tau}{\pi} K_2^{(\varrho)} - 6\frac{g}{\pi}\sqrt{\frac{\varrho}{R}} = \frac{\pi-\tau}{\pi} K_1^{(0)} + \frac{\tau}{\pi} K_2^{(0)} - \left\{\frac{\pi-\tau}{\pi}\left(K_1^{(0)} - K_1^{(\varrho)}\right) + \frac{\tau}{\pi}\left(K_2^{(0)} - K_2^{(\varrho)}\right) + 6\frac{g}{\pi}\sqrt{\frac{\varrho}{R}}\right\},$$

$$\frac{\pi-\tau}{\pi} G_1^{(\varrho)} + \frac{\tau}{\pi} G_2^{(\varrho)} + 6\frac{g}{\pi}\sqrt{\frac{\varrho}{R}} = \frac{\pi-\tau}{\pi} G_1^{(0)} + \frac{\tau}{\pi} G_2^{(0)} + \left\{\frac{\pi-\tau}{\pi}\left(G_1^{(\varrho)} - G_1^{(0)}\right) + \frac{\tau}{\pi}\left(G_2^{(\varrho)} - G_2^{(0)}\right) + 6\frac{g}{\pi}\sqrt{\frac{\varrho}{R}}\right\},$$

$$K_1^{(\varrho)} = \frac{\pi-\tau_1}{\pi} K_1^{(0)} + \frac{\tau_1}{\pi} K_2^{(0)} - \left\{\left(K_1^{(0)} - K_1^{(\varrho)}\right) + \frac{1}{\pi}\left(K_2^{(0)} - K_1^{(0)}\right)\arcsin\frac{\varrho}{2R}\right\},$$

$$G_1^{(\varrho)} = \frac{\pi-\tau_1}{\pi} G_1^{(0)} + \frac{\tau_1}{\pi} G_2^{(0)} + \left\{\left(G_1^{(\varrho)} - G_1^{(0)}\right) - \frac{1}{\pi}\left(G_2^{(0)} - G_1^{(0)}\right)\arcsin\frac{\varrho}{2R}\right\},$$

$$K_2^{(\varrho)} = \frac{\pi-\tau_2}{\pi} K_1^{(0)} + \frac{\tau_2}{\pi} K_2^{(0)} - \left\{\left(K_2^{(0)} - K_2^{(\varrho)}\right) - \frac{1}{\pi}\left(K_2^{(0)} - K_1^{(0)}\right)\arcsin\frac{\varrho}{2R}\right\},$$

$$G_2^{(\varrho)} = \frac{\pi-\tau_2}{\pi} G_1^{(0)} + \frac{\tau_2}{\pi} G_2^{(0)} + \left\{\left(G_2^{(\varrho)} - G_2^{(0)}\right) + \frac{1}{\pi}\left(G_2^{(0)} - G_1^{(0)}\right)\arcsin\frac{\varrho}{2R}\right\}$$

entsprechend um und wählt alsdann zu dem vorher bestimmten δ eine positive Zahl ϱ', deren Größe durch die fünf Bedingungen:

$$\varrho' < R,\quad \varrho' < \delta,\quad 6\frac{g}{\pi}\sqrt{\frac{\varrho'}{R}} < \delta,\quad \frac{1}{\pi}\left|K_2^{(0)} - K_1^{(0)}\right|\arcsin\frac{\varrho'}{2R} < \delta,\quad \frac{1}{\pi}\left|G_2^{(0)} - G_1^{(0)}\right|\arcsin\frac{\varrho'}{2R} < \delta$$

beschränkt sein soll, so erkennt man, daß für jedes $\varrho \overline{\gtrless} \varrho'$ die absoluten Werte der auf den rechten Seiten der sechs zuletzt angeschriebenen Gleichungen zwischen geschweiften

Klammern stehenden Größen sämtlich unter 2Δ liegen, und daß daher die Ungleichungen $(16_3.)$, $(16_3.)$ durch die eine Ungleichung:

$$\frac{\pi-\tau}{\pi} K_1^{(0)} + \frac{\tau}{\pi} K_2^{(0)} - 2\Delta < u < \frac{\pi-\tau}{\pi} G_1^{(0)} + \frac{\tau}{\pi} G_2^{(0)} + 2\Delta$$

ersetzt werden können, bei der u den Wert der durch die Gleichungen (1.) definierten Funktion u für irgend einen von O' verschiedenen Punkt ϱ, τ $(0<\varrho<\varrho', \tau_1 \leq \tau < \tau_2)$ des Flächenstückes, welches die beiden um O und O' als Mittelpunkte mit den Radien R und ϱ' beziehungsweise abgegrenzten Kreisflächen gemeinsam haben, bezeichnet. Aus dieser Ungleichung folgt aber schließlich, wenn man noch die kleinere der beiden Zahlen $K_1^{(0)}$, $K_2^{(0)}$ mit $K^{(0)}$, die größere der beiden Zahlen $G_1^{(0)}$, $G_2^{(0)}$ mit $G^{(0)}$ bezeichnet, daß der Wert von u für jeden von O' verschiedenen Punkt des genannten Flächenstückes innerhalb des Intervalls $K^{(0)} - 2\Delta \cdots G^{(0)} + 2\Delta$ liegt, und daß dieser Wert, wenn der Punkt ϱ, τ auf dem durch den Winkel τ bestimmten Strahle gegen den Punkt O' anrückt, nur noch Änderungen erleiden kann, die ihrem absoluten Werte nach kleiner als die positive Zahl $\frac{\pi-\tau}{\pi}(G_1^{(0)} - K_1^{(0)}) + \frac{\tau}{\pi}(G_2^{(0)} - K_2^{(0)}) + 4\Delta$ sind. Die Größe $G_1^{(0)} - K_1^{(0)}$ reduziert sich auf Null, wenn $f(\alpha-0)$ existiert, die Größe $G_2^{(0)} - K_2^{(0)}$ dagegen reduziert sich auf Null, wenn $f(\alpha+0)$ existiert.

Ein das Gesagte veranschaulichendes einfaches Beispiel erhält man, wenn man, unter c irgend eine reelle Zahl verstehend, als Randfunktion $u_{R,\varphi}$ diejenige Funktion $f(\varphi)$ wählt, welche durch die Gleichungen $f(0) = c$, $f(\varphi) = e^{\pi - \frac{\varphi}{2}} \cos\left[\ln\left(2R\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]$, $0<\varphi<2\pi$, und die Bedingung, mit der Periode 2π periodisch zu sein, für alle Werte von φ bestimmt ist. Die so definierte Funktion $f(\varphi)$ besitzt an der Stelle $\varphi = 0$ einen Unstetigkeitspunkt von der eben betrachteten Art, und es ist für diesen Punkt $K_1^{(0)} = -1$, $G_1^{(0)} = 1$, $K_2^{(0)} = -e^{\pi}$, $G_2^{(0)} = e^{\pi}$. Da ferner die zu dieser Funktion $f(\varphi)$ gehörige Funktion u, wenn man die Punkte der Kreisfläche durch die früher definierten Polarkoordinaten ϱ, τ $(0<\tau<\pi)$ auf den Punkt $R, 0$ als Pol bezieht, sowohl für jeden innern Punkt ϱ, τ der Kreisfläche, wie für jeden von $R, 0$ verschiedenen Randpunkt ϱ, τ durch die Gleichung $u = e^{\tau}\cos(\ln\varrho)$ dargestellt wird, so tritt an Stelle der früher gewonnenen allgemeinen Ungleichung hier die spezielle:

$$-\frac{\pi-\tau}{\pi} - \frac{\tau}{\pi} e^{\pi} - 2\Delta < e^{\tau}\cos(\ln\varrho) < \frac{\pi-\tau}{\pi} + \frac{\tau}{\pi} e^{\pi} + 2\Delta,$$

die, wie klein auch Δ von Anfang an gewählt sein mag, für jeden vom Punkte $\varrho = 0$ verschiedenen Punkt ϱ, τ der Kreisfläche gilt, und aus der dann weiter folgt, daß die Änderungen, welche die Funktion u erleidet, wenn der Punkt ϱ, τ auf dem durch den Winkel τ bestimmten Strahle gegen den Punkt $\varrho = 0$ anrückt, ihrem absoluten Werte nach die Zahl $2\frac{\pi-\tau}{\pi} + 2\frac{\tau}{\pi} e^{\pi} + 4\Delta$ nicht übersteigen können.

Auf Grund der Resultate, welche im vorhergehenden für das Verhalten der Funktion $u_{r,t}$ in der Umgebung eines Randpunktes R, α, den drei unterschiedenen Fällen entsprechend, gewonnen wurden, läßt sich jetzt das Verhalten der Funktion $u_{r,t}$ in der Nähe des Randes, wie folgt, charakterisieren. Man wähle auf dem Rande $\mathfrak{R}$ der ursprünglichen Kreisfläche irgend einen Punkt R, φ und beschreibe um ihn als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius $\varrho < R$. In jedem der drei Fälle existiert dann für die Werte, welche $u_{r,t}$ in denjenigen Punkten r, t besitzt, die im Innern des aus der ursprünglichen Kreisfläche durch den neu konstruierten Kreis ausgeschnittenen Gebietes liegen, eine obere Grenze, die mit $f^{(1)}_{\varphi,\varrho}$, und eine untere Grenze, die mit $f^{(2)}_{\varphi,\varrho}$ bezeichnet werden soll. Läßt man nun ϱ gegen Null konvergieren, so konvergieren die beiden Größen $f^{(1)}_{\varphi,\varrho}$, $f^{(2)}_{\varphi,\varrho}$ gegen bestimmte Grenzwerte $f^{(1)}(\varphi)$, $f^{(2)}(\varphi)$, da bei abnehmendem ϱ die Größe $f^{(1)}_{\varphi,\varrho}$ niemals zunehmen, die Größe $f^{(2)}_{\varphi,\varrho}$ niemals abnehmen kann. Die Größe $f^{(1)}(\varphi)$ soll die obere Grenze, die Größe $f^{(2)}(\varphi)$ die untere Grenze und entsprechend die nie negative Differenz $f^{(1)}(\varphi) - f^{(2)}(\varphi)$ die Schwankung der Funktion $u_{r,t}$ für den Randpunkt R, φ genannt werden. Zwischen den Grenzen $f^{(1)}(\varphi)$, $f^{(2)}(\varphi)$ der Funktion $u_{r,t}$ für den Punkt R, φ und den zu Anfang von Art. 2 eingeführten Grenzen $G(\varphi)$, $K(\varphi)$ der Funktion $f(\varphi)$ für den Punkt φ bestehen dann, welcher der drei Fälle auch vorliegen mag, immer die Beziehungen $f^{(1)}(\varphi) \overline{\gtrless} G(\varphi)$, $f^{(2)}(\varphi) \geqq K(\varphi)$, und es besteht daher zwischen der Schwankung $f^{(1)}(\varphi) - f^{(2)}(\varphi)$ der Funktion $u_{r,t}$ für den Punkt R, φ und der Schwankung $G(\varphi) - K(\varphi)$ der Funktion $f(\varphi)$ für den Punkt φ stets die Beziehung $f^{(1)}(\varphi) - f^{(2)}(\varphi) \overline{\gtrless} G(\varphi) - K(\varphi)$. Beachtet man nun noch, daß infolge der für $f(\varphi)$ gestellten Bedingung der Integrierbarkeit die irgend einem Intervalle $a \cdots b$ angehörigen Punkte φ, für welche $G(\varphi) - K(\varphi) > \sigma$ ist, stets eine nicht ausgedehnte Menge bilden, welche positive Zahl man auch unter σ verstehen mag, so folgt schließlich, daß auch die Punkte R, φ des Randes, für welche $f^{(1)}(\varphi) - f^{(2)}(\varphi) > \sigma$ ist, stets eine nicht ausgedehnte Menge bilden.

Die für die Funktion $f(\varphi)$ gestellten, sie im allgemeinen charakterisierenden Bedingungen der Endlichkeit und Integrierbarkeit kommen also bei der Funktion $u_{r,t}$ in der Weise zum Ausdrucke, daß einerseits $u_{r,t}$ bei der Annäherung an den Rand immer endlich bleibt, oder, was dasselbe, daß für jeden Randpunkt R, φ die vorher definierten Grenzen $f^{(1)}(\varphi)$, $f^{(2)}(\varphi)$ existieren, und daß andererseits die zu dem Randpunkte R, φ gehörige Schwankung $f^{(1)}(\varphi) - f^{(2)}(\varphi)$ der Funktion $u_{r,t}$, welche positive Zahl man auch unter σ verstehen mag, in dem Intervalle von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ stets nur für eine nicht ausgedehnte Punktmenge Werte besitzt, die größer als σ sind, und zudem für alle den Stetigkeitspunkten φ von $f(\varphi)$ entsprechenden Randpunkte R, φ, wie schon beim ersten Falle gezeigt wurde, die Gleichung $f^{(1)}(\varphi) = f^{(2)}(\varphi) = f(\varphi)$ besteht.

6.

Schon zu Anfang des Art. 2 wurde bemerkt, daß die Funktion $f(\varphi)$ infolge der für sie gestellten Bedingung der Integrierbarkeit in jedem noch so kleinen Teile eines Intervalls $a \cdots b$ Stetigkeitspunkte besitzt, und daß man sich daher für die Bildung der Produktensumme, welche durch Übergang zur Grenze das bestimmte Integral $\int\limits_a^b f(\varphi)d\varphi$ liefert, auf diejenigen Funktionswerte $f(\varphi)$ beschränken kann, welche den Stetigkeitspunkten der Funktion $f(\varphi)$ entsprechen. Daraus folgt dann weiter, daß das Integral $\int\limits_a^b f(\varphi)d\varphi$, welches Intervall man auch unter $a \cdots b$ verstehen mag, seinen Wert nicht ändert, wenn man an Stelle von $f(\varphi)$ irgend welche andere endliche und integrierbare Funktionen $f''(\varphi)$, $f'''(\varphi)$, $\cdots$ treten läßt, welche für die Stetigkeitspunkte von $f(\varphi)$ ebenfalls stetig sind und zudem dort dieselben Werte besitzen wie $f(\varphi)$. Unter all diesen Funktionen $f''(\varphi)$, $f'''(\varphi)$, $\cdots$ gibt es nun eine besonders einfache, die zunächst aufgestellt werden soll.

Man setze in neuer Bezeichnung $\varphi = \varphi_s$, wenn die Funktion $f(\varphi)$ für den Punkt φ stetig ist, dagegen $\varphi = \varphi_u$, wenn die Funktion $f(\varphi)$ für den Punkt φ nicht stetig ist, und definiere alsdann ausschließlich mit Hilfe der Werte, welche die Funktion $f(\varphi)$ in ihren Stetigkeitspunkten φ_s besitzt, eine neue Funktion $\tilde{f}(\varphi)$ durch die Gleichung $\tilde{f}(\varphi) = \frac{1}{2}[\tilde{G}(\varphi) + \tilde{K}(\varphi)]$, indem man allgemein für irgend einen Wert φ' von φ mit $\tilde{G}_{\varphi',\delta}$ und $\tilde{K}_{\varphi',\delta}$ die obere und untere Grenze derjenigen Werte bezeichnet, welche die Funktion $f(\varphi)$ in ihren dem Intervalle von $\varphi = \varphi' - \delta$ bis $\varphi = \varphi' + \delta$ angehörigen Stetigkeitspunkten φ_s besitzt, und weiter dann unter $\tilde{G}(\varphi')$, $\tilde{K}(\varphi')$ die Grenzwerte versteht, gegen welche die beiden Größen $\tilde{G}_{\varphi',\delta}$, $\tilde{K}_{\varphi',\delta}$ bei unbegrenzt abnehmendem δ konvergieren. Da für jeden Punkt φ_s $\tilde{G}(\varphi_s) = \tilde{K}(\varphi_s) = f(\varphi_s)$ ist, so ist auch $\tilde{f}(\varphi_s) = f(\varphi_s)$. Infolgedessen kann die obere Grenze der Funktion $\tilde{f}(\varphi)$ für den Punkt φ' nicht unter $\tilde{G}(\varphi')$ liegen, sie kann aber wegen $\tilde{f}(\varphi) = \tilde{G}(\varphi) - \frac{1}{2}[\tilde{G}(\varphi) - \tilde{K}(\varphi)]$ auch nicht über $\tilde{G}(\varphi')$ liegen. Die obere Grenze der Funktion $\tilde{f}(\varphi)$ für den Punkt φ' ist demnach mit $\tilde{G}(\varphi')$, die untere Grenze, wie durch dieselbe Schlußweise zu zeigen ist, mit $\tilde{K}(\varphi')$ identisch, und es ist zugleich $\tilde{G}(\varphi') \overline{\gtrless} G(\varphi')$, $\tilde{K}(\varphi') \geqq K(\varphi')$, also auch $\tilde{G}(\varphi') - \tilde{K}(\varphi') \overline{\gtrless} G(\varphi') - K(\varphi')$.

Die so definierte Funktion $\tilde{f}(\varphi)$ steht nun zu der Funktion $f(\varphi)$ in folgender Beziehung. Für jeden Stetigkeitspunkt φ_s von $f(\varphi)$ ist die Funktion $\tilde{f}(\varphi)$ ebenfalls stetig und besitzt zudem denselben Wert $\tilde{f}(\varphi_s) = f(\varphi_s)$ wie $f(\varphi)$; denn es ist für einen solchen Punkt nicht nur $\widetilde{G}(\varphi_s) - \widetilde{K}(\varphi_s) = 0$, sondern auch $\widetilde{G}(\varphi_s) = G(\varphi_s)$, $\widetilde{K}(\varphi_s) = K(\varphi_s)$. In bezug auf das Verhalten der Funktion $\widetilde{f}(\varphi)$ für einen Unstetigkeitspunkt φ_n von $f(\varphi)$ kommen dagegen mehrere Fälle in Betracht. Besitzt die Funktion $f(\varphi)$ für den Punkt φ_n eine Unstetigkeit von der Art, daß die Größen $f(\varphi_n - 0)$, $f(\varphi_n + 0)$ existieren, so existieren für denselben Punkt auch die Größen $\widetilde{f}(\varphi_n - 0)$, $\widetilde{f}(\varphi_n + 0)$, und es ist zugleich $\widetilde{f}(\varphi_n - 0) = f(\varphi_n - 0)$, $\widetilde{f}(\varphi_n + 0) = f(\varphi_n + 0)$, $\widetilde{f}(\varphi_n) = \frac{1}{2}[f(\varphi_n - 0) + f(\varphi_n + 0)]$; besteht dann speziell noch die Beziehung $f(\varphi_n - 0) = f(\varphi_n + 0)$, ist also die Funktion $f(\varphi)$ für den Punkt φ_n nur mit einer hebbaren Unstetigkeit behaftet, so ist die Funktion $\widetilde{f}(\varphi)$ für diesen Punkt stetig. Besitzt dagegen die Funktion $f(\varphi)$ für den Punkt φ_n eine Unstetigkeit von der Art, daß wenigstens eine der beiden Größen $f(\varphi_n - 0)$, $f(\varphi_n + 0)$ nicht existiert, und versteht man dann unter $G_1^{(0)}$, $K_1^{(0)}$, $G_2^{(0)}$, $K_2^{(0)}$ dieselben Größen, welche im vorigen Artikel bei der Betrachtung des dritten Falles darunter verstanden wurden, unter $\widetilde{G}_1^{(0)}$, $\widetilde{K}_1^{(0)}$, $\widetilde{G}_2^{(0)}$, $\widetilde{K}_2^{(0)}$ die entsprechenden auf die Funktion $\widetilde{f}(\varphi)$ sich beziehenden Größen, so ist $\widetilde{G}_1^{(0)} - \widetilde{K}_1^{(0)} \lesseqgtr G_1^{(0)} - K_1^{(0)}$, $\widetilde{G}_2^{(0)} - \widetilde{K}_2^{(0)} \lesseqgtr G_2^{(0)} - K_2^{(0)}$. Hierbei kann nun der spezielle Fall eintreten, daß gleichzeitig $\widetilde{G}_1^{(0)} - \widetilde{K}_1^{(0)} = 0$, $\widetilde{G}_2^{(0)} - \widetilde{K}_2^{(0)} = 0$ ist, aber auch der noch speziellere, daß $\widetilde{G}_1^{(0)} = \widetilde{G}_2^{(0)} = \widetilde{K}_1^{(0)} = \widetilde{K}_2^{(0)}$ ist; im ersten Falle existieren für den Punkt φ_n die Größen $\widetilde{f}(\varphi_n - 0)$, $\widetilde{f}(\varphi_n + 0)$, und es ist zugleich $\widetilde{f}(\varphi_n) = \frac{1}{2}[\widetilde{f}(\varphi_n - 0) + \widetilde{f}(\varphi_n + 0)]$; im zweiten Falle dagegen ist $\widetilde{f}(\varphi_n - 0) = \widetilde{f}(\varphi_n + 0) = \widetilde{f}(\varphi_n)$ und φ_n daher ein Stetigkeitspunkt der Funktion $\widetilde{f}(\varphi)$. Unter keinen Umständen kommen also bei der Funktion $\widetilde{f}(\varphi)$ hebbare Unstetigkeiten vor; es ergibt sich dies übrigens auch schon unmittelbar aus ihrer Definition. Daß endlich die Funktion $\widetilde{f}(\varphi)$ der Gruppe der vorher definierten Funktionen $f'(\varphi)$, $f''(\varphi)$, $\cdots$ angehört, erkennt man ohne Mühe, wenn man beachtet, daß nach oben Bemerktem nicht nur allgemein $\widetilde{G}(\varphi) - \widetilde{K}(\varphi) \lesseqgtr G(\varphi) - K(\varphi)$ ist, sondern auch für jeden Stetigkeitspunkt φ_s von $f(\varphi)$, der zugleich immer ein Stetigkeitspunkt von $\widetilde{f}(\varphi)$ ist, die Gleichung $\widetilde{f}(\varphi_s) = f(\varphi_s)$ besteht.

Die Funktion $\widetilde{f}(\varphi)$ soll die zu $f(\varphi)$ gehörige Normalfunktion genannt werden. Sie ist dann gleichzeitig auch die Normalfunktion für jede der vorher definierten Funktionen $f'(\varphi)$, $f''(\varphi)$, $\cdots$. Beachtet man nun noch, daß von den beiden ebenfalls endlichen und integrierbaren Funktionen von φ, die aus $f(\varphi)$ und $\widetilde{f}(\varphi)$ durch Multiplikation mit $\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}$, $r<R$, entstehen, die letztere die zu der ersteren gehörige Normalfunktion ist, so folgt schließlich, daß das in den vorhergehenden Artikeln betrachtete, mit der Funktion $f(\varphi)$ gebildete Integral:

$$u_{\substack{r,t\\ r<R}} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi} f(\varphi)\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}\,d\varphi$$

für jeden Punkt r, t im Innern der Kreisfläche denselben Wert besitzt wie das mit der Funktion $\widetilde{f}(\varphi)$ gebildete Integral:

$$\underset{r<R}{\widetilde{u}_{r,t}} = \frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} \widetilde{f}(\varphi)\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}\,d\varphi.$$

Auf Grund dieser Tatsache kann man unter Umständen das Verhalten der Funktion $u_{r,t}$ in der Umgebung eines Randpunktes R, α, für den wenigstens eine der beiden Größen $f(\alpha-0)$, $f(\alpha+0)$ nicht existiert, genauer, als es bei der im vorigen Artikel an dritter Stelle gemachten Untersuchung möglich war, charakterisieren, indem man bei der dort das Endresultat bildenden Ungleichung, soweit sie sich auf innere Punkte der Kreisfläche oder, was dasselbe, auf die Funktion $u_{r,t}$ bezieht, der Gleichung $u_{r,t} = \widetilde{u}_{r,t}$ entsprechend die Größen $K_1^{(0)}$, $K_2^{(0)}$, $G_1^{(0)}$, $G_2^{(0)}$ durch die schon oben eingeführten, auf die Funktion $\widetilde{f}(\varphi)$ sich beziehenden Größen $\widetilde{K}_1^{(0)}$ $\widetilde{K}_2^{(0)}$, $\widetilde{G}_1^{(0)}$, $\widetilde{G}_2^{(0)}$ ersetzt. Ist dann für den Punkt $\varphi = \alpha$ speziell $\widetilde{G}_1^{(0)} - \widetilde{K}_1^{(0)} = 0$, $\widetilde{G}_2^{(0)} - \widetilde{K}_2^{(0)} = 0$, oder, was dasselbe, existieren die Größen $\widetilde{f}(\alpha-0)$, $\widetilde{f}(\alpha+0)$, so ergibt sich, entsprechend der im vorigen Artikel an zweiter Stelle gemachten Untersuchung, daß der Wert der Funktion $u_{r,t} = \widetilde{u}_{r,t}$, wenn man in der durch den Winkel τ bestimmten Richtung gegen den die Koordinaten R, α besitzenden Punkt O' anrückt, gegen $\widetilde{f}(\alpha-0) + \frac{\tau}{\pi}\left[\widetilde{f}(\alpha+0) - \widetilde{f}(\alpha-0)\right]$ konvergiert und zwar gleichmäßig für alle in Betracht kommenden Werte von τ. Bestehen dagegen für den Punkt $\varphi = \alpha$ die noch spezielleren Beziehungen $\widetilde{G}_1^{(0)} = \widetilde{G}_2^{(0)} = \widetilde{K}_1^{(0)} = \widetilde{K}_2^{(0)}$, oder, was dasselbe, ist $\widetilde{f}(\alpha-0) = \widetilde{f}(\alpha+0) = \widetilde{f}(\alpha)$, so ergibt sich, entsprechend der im vorigen Artikel an erster Stelle gemachten Untersuchung, daß der Wert von $u_{r,t} = \widetilde{u}_{r,t}$ für alle in Betracht kommenden Werte von τ gleichmäßig gegen $\widetilde{f}(\alpha)$ konvergiert, und es kann daher in diesem letzteren Falle die Funktion u, indem man ihre Werte auf dem Rande nicht durch die Gleichung $u_{R,\varphi} = f(\varphi)$, sondern durch die Gleichung $u_{R,\varphi} = \widetilde{f}(\varphi)$ definiert, in eine für den Punkt O' stetige Funktion verwandelt werden.

Aus der Identität der Funktionen $u_{r,t}$, $\widetilde{u}_{r,t}$ folgt weiter aber auch der Satz, daß zwei die Bedingungen der Endlichkeit und Integrierbarkeit erfüllende, einwertige, reelle und mit der Periode 2π periodische Funktionen $f(\varphi)$, $f'(\varphi)$ dieselbe Funktion $u_{r,t} = u'_{r,t}$ liefern, wenn zu ihnen dieselbe Funktion $\widetilde{f}(\varphi)$ als Normalfunktion gehört. Dieser Satz läßt sich umkehren. Es besteht nämlich auch der Satz, daß zwei den genannten Bedingungen genügende Funktionen $f(\varphi)$, $f'(\varphi)$ in ihren mit $\widetilde{f}(\varphi)$, $\widetilde{f}'(\varphi)$ zu bezeichnenden Normalfunktionen übereinstimmen, wenn sie dieselbe Funktion $u_{r,t} = u'_{r,t}$ liefern. Um dies einzusehen, beachte man, daß in diesem Falle die Funktion $u_{r,t} - u'_{r,t}$, welche an Stelle von $u_{r,t}$ tritt, wenn man in dem die Funktion $u_{r,t}$ definierenden Integrale an

Stelle von $f(\varphi)$ die den Bedingungen der Endlichkeit und Integrierbarkeit ebenfalls genügende Funktion $f(\varphi) - f'(\varphi)$ setzt, für jeden im Innern der Kreisfläche gelegenen Punkt den Wert Null besitzt, und daß daher die Funktion $f(\varphi) - f'(\varphi)$ nach dem im vorigen Artikel beim ersten Falle Bewiesenen in jedem ihrer Stetigkeitspunkte ebenfalls den Wert Null besitzen muß. Daraus folgt aber, daß die zu $f(\varphi) - f'(\varphi)$ gehörige Normalfunktion für jedes φ den Wert Null besitzt. Beachtet man dann noch, daß nach einem Satze des Herrn V. Volterra*) zwei endliche und integrierbare Funktionen $f(\varphi)$, $f'(\varphi)$ in jedem noch so kleinen Intervalle Stetigkeitspunkte gemeinsam haben, daß diese gemeinsamen Stetigkeitspunkte immer auch Stetigkeitspunkte der Funktion $f(\varphi) - f'(\varphi)$ sind, und daß die ihnen entsprechenden Werte von $f(\varphi)$, $f'(\varphi)$, $f(\varphi) - f'(\varphi)$ vollständig ausreichen, um die zu den drei Funktionen gehörigen Normalfunktionen zu bestimmen, so folgt weiter, daß die zu $f(\varphi) - f'(\varphi)$ gehörige Normalfunktion mit der stets den Charakter einer Normalfunktion besitzenden Differenz der Normalfunktionen $\widetilde{f}(\varphi)$, $\widetilde{f}'(\varphi)$ identisch ist, oder — da die zu $f(\varphi) - f'(\varphi)$ gehörige Normalfunktion, wie schon bewiesen, für jedes φ den Wert Null hat — daß die Gleichung $\widetilde{f}(\varphi) - \widetilde{f}'(\varphi) = 0$ besteht. Damit ist aber die Richtigkeit des zuletzt aufgestellten Satzes bewiesen. Aus dem Vorstehenden ergibt sich nun schließlich noch, daß bei den die Bedingungen der Endlichkeit und Integrierbarkeit erfüllenden, einwertigen, reellen und mit der Periode 2π periodischen Funktionen $f(\varphi)$ die Gesamtheit derjenigen Funktionen, welche dieselbe Funktion $u_{r,t}$ liefern, identisch ist mit der Gesamtheit derjenigen, welche eine bestimmte Funktion $\widetilde{f}(\varphi)$ als gemeinsame Normalfunktion besitzen.

7.

Man gehe jetzt auf das am Ende von Art. 5 ausgesprochene Resultat zurück. Dasselbe kann mit dem in Art. 2 (S. 5) Bewiesenen, wie folgt, zusammengefaßt werden:

„Ist $f(\varphi)$ irgend eine den Bedingungen der Endlichkeit und Integrierbarkeit genügende, reelle, einwertige und mit der Periode 2π periodische Funktion der reellen Veränderlichen φ, so bestimmt das mit dieser Funktion $f(\varphi)$ gebildete Integral:

$$u_{\substack{r,t\\ r<R}} = \frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(\varphi)\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}\,d\varphi$$

für das Innere der Kreisfläche eine reelle, einwertige Funktion der Koordinaten x, y ($x = r\cos t$, $y = r\sin t$), welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

*) Volterra, V., Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue. (Giornale di Matematiche [Battaglini], Bd. 19 (1881) S. 76—86; S. 82.)

I. Für jeden im Innern der Kreisfläche gelegenen Punkt r, t mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y ist $u_{r,t}$ stetig; in derselben Ausdehnung existieren die partiellen Derivierten $\frac{\partial u_{r,t}}{\partial x}$, $\frac{\partial u_{r,t}}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u_{r,t}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u_{r,t}}{\partial y^2}$ *und sind ebenfalls stetig; endlich erfüllen die zweiten Derivierten die Gleichung* $\Delta u_{r,t} = \frac{\partial^2 u_{r,t}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{r,t}}{\partial y^2} = 0$.

II. Für jeden Punkt R, φ des Randes $\mathfrak{R}$ besitzt die Funktion $u_{r,t}$ eine obere Grenze $f^{(1)}(\varphi)$ und eine untere Grenze $f^{(2)}(\varphi)$; die dadurch bestimmte Schwankung $f^{(1)}(\varphi) - f^{(2)}(\varphi)$ der Funktion $u_{r,t}$ für den Punkt R, φ hat, welche positive Zahl man auch unter σ verstehen mag, in dem Intervalle von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ stets nur für eine nicht ausgedehnte Punktmenge Werte, die größer als σ sind; endlich ist für jeden Randpunkt R, φ, dem ein Stetigkeitspunkt φ von $f(\varphi)$ entspricht, $f^{(1)}(\varphi) = f^{(2)}(\varphi) = f(\varphi)$."

Im Anschluß an dieses Resultat soll jetzt die Frage beantwortet werden, ob die durch das Integral dargestellte Funktion $u_{r,t}$ die einzige ist, welche die genannten Eigenschaften besitzt. Zu dem Ende nehme man an, daß für das Innere der Kreisfläche noch eine zweite reelle, einwertige Funktion der Koordinaten x, y existiere, welche die genannten Eigenschaften besitzt. Dieselbe sei mit $\bar{u}_{r,t}$, und entsprechend seien die obere und untere Grenze der Funktion $\bar{u}_{r,t}$ für den Punkt R, φ des Randes $\mathfrak{R}$ mit $\bar{f}^{(1)}(\varphi)$ und $\bar{f}^{(2)}(\varphi)$ bezeichnet. Das Verhalten dieser Funktion $\bar{u}_{r,t}$ soll jetzt untersucht werden.

Zunächst erkennt man, daß die Werte, welche $\bar{u}_{r,t}$ überhaupt annimmt, eine obere und eine untere Grenze besitzen. Besäßen nämlich die Werte von $\bar{u}_{r,t}$ keine obere Grenze, so müßte ein der Kreisfläche angehöriger Punkt $\mathfrak{P}$ von der Art existieren, daß die Werte von $\bar{u}_{r,t}$ in keiner noch so kleinen um $\mathfrak{P}$ als Mittelpunkt konstruierten Kreisfläche eine obere Grenze hätten. Dieses ist aber unmöglich, da die Funktion $\bar{u}_{r,t}$ für jeden im Innern der Kreisfläche gelegenen Punkt $\mathfrak{P}$ stetig ist und für jeden Randpunkt R, φ eine obere Grenze $\bar{f}^{(1)}(\varphi)$ besitzt. Die Werte, welche die Funktion $\bar{u}_{r,t}$ überhaupt annimmt, besitzen also eine obere Grenze G und zugleich auch, wie auf dieselbe Weise zu zeigen ist, eine untere Grenze K.

Um einen genaueren Einblick in die Natur der Funktion $\bar{u}_{r,t}$ zu erhalten, beschreibe man um irgend einen Punkt $\mathfrak{P}'$ mit den Polarkoordinaten r', t' $(r' < R)$ als Mittelpunkt eine ganz im Innern der Kreisfläche verlaufende Kreislinie und bezeichne ihren Radius mit R', die Linie selbst mit $\mathfrak{R}'$. Für diese neue Kreisfläche K' besitzt dann $\bar{u}_{r,t}$ denselben Charakter wie die in Art. 1 für die ursprüngliche Kreisfläche definierte Funktion u, und man kann daher nach dem dort Gezeigten den Wert, welchen $\bar{u}_{r,t}$ im Punkte $\mathfrak{P}'$ besitzt, durch die Werte ausdrücken, welche der Funktion $\bar{u}_{r,t}$ auf dem Rande $\mathfrak{R}'$ zukommen. Bezieht man zu dem Ende die Punkte des Randes $\mathfrak{R}'$ durch Polarkoordinaten R', ψ auf den Punkt $\mathfrak{P}'$ als Pol und irgend einen durch $\mathfrak{P}'$ gehenden

Strahl als Polarachse, bezeichnet den Wert von $\overline{u}_{r,t}$ im Punkte R', ψ des Randes $\mathfrak{R}'$ mit $\overline{u}\,(R', \psi)$, so hat man entsprechend der Formel (IV.) des Art. 1 hier die Gleichung $\overline{u}_{r',t'} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \overline{u}\,(R', \psi)\,d\psi$, welche aussagt, daß der Wert von $\overline{u}_{r,t}$ im Punkte $\mathfrak{P}'$ immer das arithmetische Mittel aus denjenigen Werten ist, welche $u_{r,t}$ auf irgend einer ganz im Innern der ursprünglichen Kreisfläche verlaufenden um $\mathfrak{P}'$ als Mittelpunkt beschriebenen Kreislinie besitzt.

Aus dem charakterisierten Verhalten der Funktion $\overline{u}_{r,t}$ folgt nun weiter, daß in dem Falle, wo $\overline{u}_{r,t}$ nicht durchaus konstant ist, weder die obere Grenze $\overline{G}$ noch die untere Grenze $\overline{K}$ der Werte, welche $\overline{u}_{r,t}$ überhaupt besitzt, in einem inneren Punkte der Kreisfläche als Wert der Funktion $\overline{u}_{r,t}$ auftreten kann. Um dieses einzusehen, nehme man an, daß die obere Grenze G als Wert der Funktion $u_{r,t}$ für den Punkt $\mathfrak{P}'$ mit den Polarkoordinaten r', t' auftrete. Aus der dann bestehenden Gleichung $\overline{G} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u\,(R', \psi)\,d\psi$ folgt zunächst, daß der Wert von $u_{r,t}$ für jeden Punkt R', ψ des Randes $\mathfrak{R}'$ von K' mit G zusammenfallen muß, und weiter dann — da die aufgestellte Gleichung auch auf jede aus der Kreisfläche K' durch Verkleinerung des Radius R' hervorgehende Kreisfläche bezogen werden kann — daß $u_{r,t}$ für jeden Punkt von K' den Wert $\overline{G}$ besitzt. Konstruiert man jetzt zu irgend einem Randpunkte $\mathfrak{P}''$ von K' als Mittelpunkt eine Kreisfläche K'', alsdann zu einem Randpunkte $\mathfrak{P}'''$ von K'' als Mittelpunkt eine Kreisfläche K''' und fährt in dieser Weise fort, bildet also, stets im Innern der ursprünglichen Kreisfläche verbleibend, eine Kette von Kreisflächen, bei der jede neue Kreisfläche ihren Mittelpunkt auf der Peripherie der unmittelbar vorangehenden hat, und überträgt die für K' gemachten Schlüsse auf die Kreisflächen $K'', K''', K'''', \cdots$, so erkennt man, daß $u_{r,t}$ für jeden Punkt dieses Flächensystems den Wert G besitzt und demnach auch für jeden inneren Punkt der ursprünglichen zum Radius R gehörigen Kreisfläche, da man durch passende Wahl der Mittelpunkte und Radien der Kreisflächen $K'', K''', \cdots$ jeden solchen Punkt zu einem Punkte des zu konstruierenden Flächensystems machen kann. Dieses letzte Resultat widerspricht aber der den betrachteten Fall charakterisierenden Voraussetzung, daß $\overline{u}_{r,t}$ nicht durchaus konstant ist, und es kann daher in diesem Falle $\overline{G}$, und aus denselben Gründen auch K, nicht für einen inneren Punkt der Fläche als Wert von $u_{r,t}$ auftreten. Daraus folgt dann schließlich, daß in jedem Falle die obere Grenze G der Werte, welche $u_{r,t}$ überhaupt annimmt, wenigstens für einen Randpunkt R, φ als obere Grenze der Funktion $\overline{u}_{r,t}$ für diesen Randpunkt, und entsprechend die untere Grenze K der Werte, welche $\overline{u}_{r,t}$ überhaupt annimmt, wenigstens für einen Randpunkt R, φ als untere Grenze der Funktion $\bar{u}_{r,t}$ für diesen Randpunkt auftreten muß.

Es soll jetzt weiter das Verhalten der Funktionen $f^{(1)}(\varphi)$, $f^{(2)}(\varphi)$ als Funktionen von φ untersucht werden. Zunächst ergibt sich aus der Definition dieser Funktionen in Verbindung mit dem soeben für die Funktion $\bar{u}_{r,t}$ erhaltenen Resultate, daß die Zahl $\overline{G}$ die obere Grenze der Werte ist, welche $f^{(1)}(\varphi)$ überhaupt annimmt, und entsprechend, daß die Zahl $\overline{K}$ die untere Grenze der Werte ist, welche $f^{(2)}(\varphi)$ überhaupt annimmt. Beachtet man dann, daß für jeden Randpunkt R, φ $f^{(1)}(\varphi) \geqq f^{(2)}(\varphi)$ ist, so erkennt man, daß die untere Grenze der Werte, welche $f^{(1)}(\varphi)$ überhaupt annimmt, nicht unter K liegen, und entsprechend, daß die obere Grenze der Werte, welche $f^{(2)}(\varphi)$ überhaupt annimmt, nicht über G liegen kann. Die Funktionen $f^{(1)}(\varphi)$, $f^{(2)}(\varphi)$ genügen daher der Bedingung der Endlichkeit. Daß sie aber auch die Bedingung der Integrierbarkeit erfüllen, soll jetzt gezeigt werden.

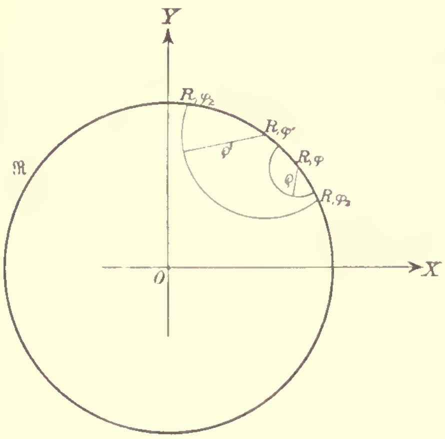


Fig. 3.

Zu dem Ende wähle man auf dem Rande $\mathfrak{R}$ einen Punkt R, φ' und beschreibe um ihn als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius $\varrho' < R$, der den Rand $\mathfrak{R}$ in den Punkten R, φ_1; R, φ_2 schneiden möge (s. Fig. 3). Weiter wähle man auf dem durch die Punkte R, φ_1; R, φ'; R, φ_2 bestimmten Bogen einen von den Punkten R, φ_1; R, φ_2 verschiedenen Punkt R, φ, für den die Lage R, φ' nicht ausgeschlossen sein soll, und beschreibe um ihn einen Kreis, der ganz innerhalb der Kreisfläche mit dem Radius ϱ' liegt, und dessen Radius ϱ sei. Bezeichnet man dann mit $f^{(1)}_{\varphi,\varrho}$, $f^{(2)}_{\varphi,\varrho}$ obere und untere Grenze der Werte, die $\bar{u}_{r,t}$ innerhalb des aus der ursprünglichen Kreisfläche durch den Kreis mit dem Radius ϱ ausgeschnittenen Gebietes besitzt, entsprechend mit $f^{(1)}_{\varphi',\varrho'}$, $f^{(2)}_{\varphi',\varrho'}$ obere und untere Grenze der Werte, die $\bar{u}_{r,t}$ innerhalb des aus der ursprünglichen Kreisfläche durch den Kreis mit dem Radius ϱ' ausgeschnittenen Gebietes besitzt, so ist nach früherer Definition:

$$\lim_{\varrho=0} f^{(1)}_{\varphi,\varrho} = f^{(1)}(\varphi), \quad \lim_{\varrho=0} f^{(2)}_{\varphi,\varrho} = f^{(2)}(\varphi); \quad \lim_{\varrho'=0} f^{(1)}_{\varphi',\varrho'} = f^{(1)}(\varphi'), \quad \lim_{\varrho'=0} f^{(2)}_{\varphi',\varrho'} = f^{(2)}(\varphi'),$$

und es bestehen zudem noch, wie unmittelbar ersichtlich, die Beziehungen:

$$f^{(1)}_{\varphi,\varrho} \leqq f^{(1)}_{\varphi',\varrho'}, \qquad f^{(2)}_{\varphi,\varrho} \geqq f^{(2)}_{\varphi',\varrho'},$$

sowie die hieraus für $\lim \varrho = 0$ hervorgehenden Beziehungen:

$$f^{(1)}(\varphi) \leqq f^{(1)}_{\varphi',\varrho'}, \qquad f^{(2)}(\varphi) \geqq f^{(2)}_{\varphi',\varrho'}.$$

Aus diesen letzten Beziehungen folgt nun, daß die mit $\overline{G}^{(1)}(\varphi')$ zu bezeichnende obere Grenze der Funktion $\overline{f}^{(1)}(\varphi)$ für den Punkt $\varphi = \varphi'$, die nicht kleiner als $\overline{f}^{(1)}(\varphi')$ sein kann, nicht über $\overline{f}^{(1)}_{\varphi', \varrho'}$ liegt, und entsprechend, daß die mit $\overline{K}^{(2)}(\varphi')$ zu bezeichnende untere Grenze der Funktion $\overline{f}^{(2)}(\varphi)$ für den Punkt $\varphi = \varphi'$, die nicht größer als $\overline{f}^{(2)}(\varphi')$ sein kann, nicht unter $\overline{f}^{(2)}_{\varphi', \varrho'}$ liegt. Es bestehen also für die Größen $\overline{G}^{(1)}(\varphi')$, $\overline{K}^{(2)}(\varphi')$ die Ungleichungen:

$$\overline{f}^{(1)}(\varphi') \leqq \overline{G}^{(1)}(\varphi') \leqq \overline{f}^{(1)}_{\varphi', \varrho'}, \qquad \overline{f}^{(2)}(\varphi') \geqq \overline{K}^{(2)}(\varphi') \geqq \overline{f}^{(2)}_{\varphi', \varrho'},$$

und diese liefern, wenn man ϱ' gegen Null konvergieren läßt und $\lim\limits_{\varrho'=0} \overline{f}^{(1)}_{\varphi', \varrho'} = \overline{f}^{(1)}(\varphi')$, $\lim\limits_{\varrho'=0} \overline{f}^{(2)}_{\varphi', \varrho'} = \overline{f}^{(2)}(\varphi')$ beachtet, zur Bestimmung von $\overline{G}^{(1)}(\varphi')$, $\overline{K}^{(2)}(\varphi')$ die Gleichungen:

$$\overline{G}^{(1)}(\varphi') = \overline{f}^{(1)}(\varphi'), \qquad \overline{K}^{(2)}(\varphi') = \overline{f}^{(2)}(\varphi').$$

Was dagegen die mit $\overline{K}^{(1)}(\varphi')$ zu bezeichnende untere Grenze der Funktion $\overline{f}^{(1)}(\varphi)$ für den Punkt $\varphi = \varphi'$ und die mit $\overline{G}^{(2)}(\varphi')$ zu bezeichnende obere Grenze der Funktion $\overline{f}^{(2)}(\varphi)$ für den Punkt $\varphi = \varphi'$ betrifft, so ergeben sich dafür auf Grund der für jedes in Betracht kommende φ bestehenden Relation $\overline{f}^{(1)}(\varphi) \geqq \overline{f}^{(2)}(\varphi)$ zunächst die Beziehungen $\overline{K}^{(1)}(\varphi') \geqq \overline{K}^{(2)}(\varphi')$, $\overline{G}^{(1)}(\varphi') \geqq \overline{G}^{(2)}(\varphi')$ und weiter aus diesen durch Verbindung mit den zuletzt gewonnenen Gleichungen die Beziehungen:

$$\overline{K}^{(1)}(\varphi') \geqq \overline{f}^{(2)}(\varphi'), \qquad \overline{G}^{(2)}(\varphi') \leqq \overline{f}^{(1)}(\varphi').$$

Verbindet man nun noch diese Beziehungen mit den unmittelbar darüberstehenden Gleichungen, so ergibt sich schließlich:

$$\overline{G}^{(1)}(\varphi') - \overline{K}^{(1)}(\varphi') \leqq \overline{f}^{(1)}(\varphi') - \overline{f}^{(2)}(\varphi'), \quad \overline{G}^{(2)}(\varphi') - \overline{K}^{(2)}(\varphi') \leqq \overline{f}^{(1)}(\varphi') - \overline{f}^{(2)}(\varphi').$$

Um das gewonnene, für jedes der Bedingung $0 \leqq \varphi' < 2\pi$ genügende φ' geltende, Resultat zu interpretieren, beachte man, daß der Voraussetzung gemäß die Punkte des Intervalls von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$, für welche $\overline{f}^{(1)}(\varphi) - \overline{f}^{(2)}(\varphi) > \sigma$ ist, stets eine nicht ausgedehnte Punktmenge bilden, welche positive Zahl man auch unter σ verstehen mag. Mit Rücksicht hierauf folgt dann aus den zuletzt gewonnenen Beziehungen, daß sowohl die Punkte φ, für welche die Schwankung $\overline{G}^{(1)}(\varphi) - \overline{K}^{(1)}(\varphi)$ der Funktion $\overline{f}^{(1)}(\varphi)$ Werte besitzt, die größer als σ sind, als auch die Punkte φ, für welche die Schwankung $\overline{G}^{(2)}(\varphi) - \overline{K}^{(2)}(\varphi)$ der Funktion $\overline{f}^{(2)}(\varphi)$ Werte besitzt, die größer als σ sind, stets eine nicht ausgedehnte Punktmenge bilden, welche positive Zahl man auch unter σ verstehen mag, oder, was dasselbe, daß die nach vorher Bewiesenem der Bedingung der Endlichkeit genügenden Funktionen $\overline{f}^{(1)}(\varphi)$, $\overline{f}^{(2)}(\varphi)$ stets auch die Bedingung der Integrierbarkeit erfüllen.

Mit Hilfe der Funktionen $\bar{f}^{(1)}(\varphi)$, $\bar{f}^{(2)}(\varphi)$ bilde man jetzt die beiden Integrale:

$$\bar{u}^{(1)}_{\substack{r,t\\ r<R}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{f}^{(1)}(\varphi)\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}\,d\varphi,\quad \bar{u}^{(2)}_{\substack{r,t\\ r<R}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{f}^{(2)}(\varphi)\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}\,d\varphi$$

und beachte, daß der Voraussetzung gemäß für jeden innerhalb des Intervalls von $\varphi=0$ bis $\varphi=2\pi$ liegenden Stetigkeitspunkt φ der Funktion $f(\varphi)$ die Gleichungen $\bar{f}^{(1)}(\varphi)=\bar{f}^{(2)}(\varphi)=f(\varphi)$ und demnach auch, auf Grund der zuletzt gewonnenen Beziehungen, die Gleichungen $G^{(1)}(\varphi)-K^{(1)}(\varphi)=0$, $G^{(2)}(\varphi)-K^{(2)}(\varphi)=0$ bestehen, oder, was dasselbe, daß jeder innerhalb des Intervalls von $\varphi=0$ bis $\varphi=2\pi$ liegende Stetigkeitspunkt φ von $f(\varphi)$ auch ein Stetigkeitspunkt von $\bar{f}^{(1)}(\varphi)$ und $\bar{f}^{(2)}(\varphi)$ ist. Man erkennt dann, daß die beiden durch die aufgestellten Integrale für das Innere der Kreisfläche bestimmten Funktionen $\bar{u}^{(1)}_{r,t}$, $\bar{u}^{(2)}_{r,t}$ für jeden Punkt $\mathfrak{P}$ der Kreisfläche denselben Wert besitzen wie die ursprüngliche, mit Hilfe von $f(\varphi)$ gebildete, Funktion $u_{r,t}$.

Außer den beiden Funktionen $\bar{u}^{(1)}_{r,t}$, $\bar{u}^{(2)}_{r,t}$ bedarf man für die folgenden Untersuchungen noch einer dritten Funktion. Um zu derselben zu gelangen, bezeichne man mit s die obere Grenze der Werte, welche die Funktion $\bar{f}^{(1)}(\varphi)-\bar{f}^{(2)}(\varphi)$ in dem Intervalle von $\varphi=0$ bis $\varphi=2\pi$ annimmt, verstehe unter σ eine der Bedingung $\sigma<s$ genügende positive Zahl, wenn $s>0$ ist, dagegen die Null, wenn der spezielle Fall $s=0$ vorliegt, unter λ eine der Bedingung $\lambda<2R\pi$ genügende positive Zahl und wähle alsdann, unter Beachtung, daß der Voraussetzung gemäß die Punkte R, φ des Randes, für welche $\bar{f}^{(1)}(\varphi)-\bar{f}^{(2)}(\varphi)>\sigma$ ist, stets eine nicht ausgedehnte Punktmenge bilden, eine positive ganze Zahl n von solcher Größe, daß bei der Teilung des Randes $\mathfrak{R}$ vom Punkte $R, 0$ aus in n gleiche Bogen die Summe derjenigen Bogen, auf denen Punkte R, φ vorkommen, für welche $\bar{f}^{(1)}(\varphi)-\bar{f}^{(2)}(\varphi)>\sigma$ ist, nicht größer als λ ist. Diese Bogen nenne man Bogen der ersten Art und bezeichne ihre Summe mit l. Die noch übrigen der n Bogen dagegen, deren Summe dann $2R\pi-l$ ist, sollen Bogen der zweiten Art genannt werden; sie sind dadurch charakterisiert, daß für jeden ihrer Punkte, mag er ein innerer Punkt oder ein Endpunkt eines solchen Bogens sein, $\bar{f}^{(1)}(\varphi)-\bar{f}^{(2)}(\varphi)\overline{\gtrless}\sigma$ ist. Jetzt setze man in neuer Bezeichnung $\varphi=\varphi_1$, wenn der Punkt R, φ ein innerer Punkt eines Bogens der ersten Art ist oder auch ein Punkt, wo zwei Bogen der ersten Art zusammenstoßen; dagegen $\varphi=\varphi_2$, wenn der Punkt R, φ einem Bogen der zweiten Art, sei es als innerer Punkt, sei es als Endpunkt, angehört; definiere alsdann für den Rand $\mathfrak{R}$ eine Funktion $f'(\varphi)$ durch die Gleichungen:

$$f'(\varphi_1)=s, \qquad f'(\varphi_2)=\sigma$$

und bilde schließlich mit Hilfe dieser Funktion $f'(\varphi)$ das Integral:

$$u'_{\substack{r,t\\ r<R}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(\varphi)\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}\,d\varphi.$$

Die dadurch für das Innere der Kreisfläche bestimmte Funktion $u'_{r,t}$ besitzt für keinen Punkt r, t der Kreisfläche einen negativen Wert, da die unter dem Integralzeichen vorkommende Funktion $f'(\varphi)$ und damit auch das Integralelement für keinen Wert von φ negativ ist. Beachtet man dann noch, daß der im Integralelement vorkommende Quotient für $\varphi = t$ seinen größten Wert und zwar den Wert $\frac{R+r}{R-r}$ annimmt, und daß $\int_0^{2\pi} f'(\varphi)\,d\varphi = ls + (2R\pi - l)\,\sigma$, diese letztere Größe aber wegen $l \overline{\gtrless} \lambda$ nicht größer als $s\lambda + 2R\pi\sigma$ ist, so erhält man für $u'_{r,t}$ die Ungleichung:

$$0 \leq u'_{r,t} \overline{\gtrless} \frac{1}{2\pi}\,\frac{R+r}{R-r}\,(s\lambda + 2R\pi\sigma).$$

Aus den drei durch die aufgestellten Integrale definierten Funktionen $\bar{u}^{(1)}_{r,t}$, $\bar{u}^{(2)}_{r,t}$, $u'_{r,t}$ und der zu untersuchenden Funktion $\bar{u}_{r,t}$ bilde man jetzt die beiden Funktionen:

$$U^{(1)}_{r,t} = \bar{u}^{(1)}_{r,t} + u'_{r,t} - \bar{u}_{r,t}, \qquad U^{(2)}_{r,t} = \bar{u}_{r,t} + u'_{r,t} - \bar{u}^{(2)}_{r,t}.$$

Von diesen läßt sich dann zeigen, daß sie für keinen Punkt r, t im Innern der Kreisfläche einen negativen Wert besitzen können. Zu dem Ende beachte man, daß jede dieser beiden Funktionen für das Innere der Kreisfläche denselben Charakter wie $\bar{u}_{r,t}$ oder, was dasselbe, die unter 1. aufgeführten Eigenschaften besitzt, und daß daher, wie früher bewiesen wurde, für jede dieser beiden Funktionen die untere Grenze der Werte, welche sie im Innern der Kreisfläche hat, wenigstens für einen Punkt des Randes $\mathfrak{R}$ als untere Grenze der Funktion für diesen Randpunkt auftreten muß. Infolgedessen wird der Beweis für die vorstehende Behauptung erbracht sein, sobald man gezeigt hat, daß weder die untere Grenze der Funktion $U^{(1)}_{r,t}$ für den Randpunkt R, φ noch die untere Grenze der Funktion $U^{(2)}_{r,t}$ für den Randpunkt R, φ einen negativen Wert besitzen kann, welche Lage der Punkt R, φ auf dem Rande $\mathfrak{R}$ auch haben mag.

Die untere Grenze der Funktion $U^{(1)}_{r,t}$ für den Randpunkt R, φ ist nicht kleiner als die Summe der unteren Grenzen der Funktionen $\bar{u}^{(1)}_{r,t}$, $u'_{r,t}$ für den Randpunkt R, φ vermindert um die obere Grenze der Funktion $\bar{u}_{r,t}$ für den Randpunkt R, φ, und entsprechend ist die untere Grenze der Funktion $U^{(2)}_{r,t}$ für den Randpunkt R, φ nicht kleiner als die Summe der unteren Grenzen der Funktionen $\bar{u}_{r,t}$, $u'_{r,t}$ für den Randpunkt R, φ vermindert um die obere Grenze der Funktion $\bar{u}^{(2)}_{r,t}$ für den Randpunkt R, φ. Beachtet man nun, daß für den Randpunkt R, φ untere und obere Grenze der Funktion $\bar{u}_{r,t}$ mit

$f^{(1)}(\varphi)$ und $f^{(2)}(\varphi)$ bezeichnet wurden, die untere Grenze der mit Hilfe von $f^{(1)}(\varphi)$ gebildeten Funktion $u^{(1)}_{r,t}$ nach dem am Ende von Art. 5 Bemerkten nicht kleiner als $K^{(1)}(\varphi)$, die obere Grenze der mit Hilfe von $f^{(2)}(\varphi)$ gebildeten Funktion $\bar{u}^{(2)}_{r,t}$ nicht größer als $G^{(2)}(\varphi)$ sein kann, endlich die untere Grenze der mit Hilfe von $f'(\varphi)$ gebildeten Funktion $u'_{r,t}$, der Definition von $f'(\varphi)$ gemäß, stets $f'(\varphi)$ selbst ist, und daß nach dem in diesem Artikel Bewiesenen die Beziehungen $K^{(1)}(\varphi) \geqq f^{(2)}(\varphi)$, $G^{(2)}(\varphi) \leqq f^{(1)}(\varphi)$ bestehen, so erkennt man, daß weder die untere Grenze der Funktion $U^{(1)}_{r,t}$ noch die untere Grenze der Funktion $U^{(2)}_{r,t}$ für den Randpunkt R, φ kleiner als $f'(\varphi) - [f^{(1)}(\varphi) - f^{(2)}(\varphi)]$ sein kann. Diese letztere Größe aber ist niemals negativ, da für jeden Randpunkt R, φ_1 $f'(\varphi_1) = s$, $f^{(1)}(\varphi_1) - f^{(2)}(\varphi_1) \leqq s$, für jeden Randpunkt R, φ_2 $f'(\varphi_2) = \sigma$, $f^{(1)}(\varphi_2) - f^{(2)}(\varphi_2) \leqq \sigma$ ist.

Damit ist der verlangte Nachweis erbracht, und demnach auch der Beweis für die ursprüngliche Behauptung, daß die Funktionen $U^{(1)}_{r,t} = u^{(1)}_{r,t} + u'_{r,t} - \bar{u}_{r,t}$, $U^{(2)}_{r,t} = \bar{u}_{r,t} + u'_{r,t} - \bar{u}^{(2)}_{r,t}$ für keinen Punkt r, t im Innern der Kreisfläche einen negativen Wert besitzen können. Aus $U^{(1)}_{r,t} \geqq 0$, $U^{(2)}_{r,t} \geqq 0$ ergibt sich aber unmittelbar die Ungleichung:

$$\bar{u}^{(2)}_{r,t} - u'_{r,t} \leqq \bar{u}_{r,t} \leqq u^{(1)}_{r,t} + u'_{r,t},$$

und weiter dann, da nach früher Bewiesenem für jeden Punkt r, t im Innern der Kreisfläche $u^{(1)}_{r,t} = u_{r,t}$, $\bar{u}^{(2)}_{r,t} = \bar{u}_{r,t}$, $u'_{r,t} \leqq \frac{1}{2\pi}\frac{R+r}{R-r}(s\lambda + 2R\pi\sigma)$ ist, die Ungleichung:

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{R+r}{R-r}(s\lambda + 2R\pi\sigma) \leqq \bar{u}_{r,t} - u_{r,t} \leqq \frac{1}{2\pi}\frac{R+r}{R-r}(s\lambda + 2R\pi\sigma).$$

Auf diese Weise ist der Wert von $\bar{u}_{r,t} - u_{r,t}$ zwischen zwei Schranken eingeschlossen, die von den Zahlen λ und σ abhängen, während der Wert von $\bar{u}_{r,t} - u_{r,t}$ durchaus unabhängig von λ und σ ist. Liegt nun der spezielle Fall vor, wo $s = 0$ und daher auch $\sigma = 0$ ist, so ergibt sich unmittelbar $\bar{u}_{r,t} - u_{r,t} = 0$. Ist dagegen $s > 0$, so kann man die Zahlen λ, σ, die dann im Rahmen der Bedingungen $0 < \lambda < 2R\pi$, $0 < \sigma < s$ beliebig gewählt werden können, so klein annehmen, daß die beiden die Größe $\bar{u}_{r,t} - u_{r,t}$ einschließenden, sich nur durch das Vorzeichen unterscheidenden Schranken der Null so nahe liegen, wie man will, und es kann daher auch für $s > 0$ die Differenz $\bar{u}_{r,t} - u_{r,t}$ einen von Null verschiedenen Wert nicht besitzen. In jedem Falle ist also $\bar{u}_{r,t} = u_{r,t}$ oder, was dasselbe, es gibt außer der Funktion $u_{r,t}$ nicht noch eine zweite, welche die unter I. und II. aufgeführten Eigenschaften besitzt. Damit ist aber die zu Anfang dieses Artikels gestellte Frage beantwortet.

8.

Durch die in den vorhergehenden Artikeln durchgeführten Untersuchungen ist jetzt der folgende fundamentale Satz bewiesen:

Satz.

„*Bezieht man die Punkte einer Kreisfläche mit dem Mittelpunkte O und dem Radius R* (s. Fig. 1) *auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Anfangspunkte O und den Achsen OX, OY, gleichzeitig aber auch auf ein Polarkoordinatensystem mit dem Punkte O als Pol und der X-Achse als Polarachse, bezeichnet mit* x, y *die rechtwinkligen, mit* r, t, ${\scriptstyle 0 \leq t < 2\pi}$, *die Polarkoordinaten irgend eines im Innern der Kreisfläche gelegenen Punktes, mit* ξ, η *die rechtwinkligen, mit* R, φ, ${\scriptstyle 0 \leq \varphi < 2\pi}$, *die Polarkoordinaten irgend eines auf dem Rande* $\mathfrak{R}$ *der Kreisfläche gelegenen Punktes, so daß also* $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $\xi = R\cos\varphi$, $\eta = R\sin\varphi$ *ist, versteht ferner unter* $f(\varphi)$ *eine den Bedingungen der Endlichkeit und Integrierbarkeit genügende, reelle, einwertige und mit der Periode* 2π *periodische Funktion der reellen Veränderlichen* φ, *ersetzt auch in neuer Bezeichnung* φ *immer durch* φ_s, *wenn* φ *ein der Bedingung* $0 \leqq \varphi < 2\pi$ *genügender Stetigkeitspunkt von* $f(\varphi)$ *ist, und verlangt alsdann zu dieser Kreisfläche unter Ausschluß der von den Punkten* R, φ_s *verschiedenen Punkte des Randes eine reelle, einwertige Funktion* u *des Ortes, welche den folgenden Bedingungen genügt:*

I. Für jeden im Innern der Kreisfläche gelegenen Punkt x, y *soll* u *stetig sein, in derselben Ausdehnung sollen die partiellen Derivierten* $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *existieren und ebenfalls stetig sein; endlich sollen die zweiten Derivierten die Gleichung* $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *erfüllen;*

II. Bei der Annäherung des Punktes x, y *an einen Randpunkt* R, φ *soll die Funktion* u *endlich bleiben, oder, was dasselbe, sie soll für jeden Punkt* R, φ *des Randes eine obere Grenze* $f^{(1)}(\varphi)$ *und eine untere Grenze* $f^{(2)}(\varphi)$ *in dem früher definierten Sinne besitzen; die dadurch bestimmte Schwankung* $f^{(1)}(\varphi) - f^{(2)}(\varphi)$ *der Funktion* u *für den Punkt* R, φ *soll, welche positive Zahl man auch unter* σ *verstehen mag, in dem Intervalle von* $\varphi = 0$ *bis* $\varphi = 2\pi$ *stets nur für eine nicht ausgedehnte Punktmenge Werte haben, die größer als* σ *sind;*

III. Für jeden Randpunkt R, φ_s *soll* $u = f(\varphi_s)$ *und* $f^{(1)}(\varphi_s) = f^{(2)}(\varphi_s) = f(\varphi_s)$ *sein, oder, was dasselbe, für jeden Randpunkt* R, φ_s *soll* u *stetig sein und denselben Wert wie* $f(\varphi)$ *besitzen;*

so kann dieses Verlangen immer durch eine und nur durch eine Funktion u *erfüllt werden, und es wird zugleich der Wert von* u *für alle in Betracht kommenden Punkte der Kreisfläche als Funktion der Polarkoordinaten dargestellt durch die Gleichungen:*

$$\underset{r<R}{u_{r,t}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}\,d\varphi, \qquad u_{R,\varphi_s} = f(\varphi_s).\text{“}$$

In dem besonderen Falle, wo $f(\varphi)$ durchweg stetig ist, sind die Bedingungen II. von selbst erfüllt, sobald die Bedingungen III. erfüllt sind, und die Funktion u ist daher in diesem Falle durch die Bedingungen I. und III. allein schon vollständig bestimmt. Liegt dagegen der Fall vor, daß $f(\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, zwar Unstetigkeitspunkte besitzt, diese Unstetigkeitspunkte aber eine nicht ausgedehnte Punktmenge bilden, so ist von den beiden unter II. gestellten Bedingungen die zweite von selbst erfüllt, sobald die erste erfüllt ist, und es können in diesem Falle die Bedingungen II. durch die einzige Bedingung ersetzt werden, daß für die Werte, welche u im Innern des Kreises besitzt, eine obere und eine untere Grenze existiert, oder, kürzer gesagt, daß die Funktion u der Bedingung der Endlichkeit genügt. Für den Fall, daß die Anzahl der Unstetigkeitspunkte von $f(\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, eine endliche ist, hat diese Bedingung der Endlichkeit zuerst Herr H. A. Schwarz*) eingeführt.

*) Schwarz, H. A., Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. (Gesammelte Werke, Bd. II. S. 175—210; S. 196.)

Zweiter Abschnitt.

Bestimmung von Schranken für die Werte eines zu einer Kreisfläche gehörigen Poisson'schen Integrals.

1.

Für manche Untersuchungen ist es vorteilhaft, möglichst enge Schranken zu kennen, aus denen der Wert des im vorigen Abschnitte betrachteten Integrals:

$$u_{r,t} = \frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(\varphi)\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}\,d\varphi,$$

bezogen auf den im Innern der Kreisfläche gelegenen Punkt $\mathfrak{P}$ mit den Polarkoordinaten r, t, nicht heraustritt. Solche Schranken sollen jetzt ermittelt werden.

Es möge mit K die untere, mit G die obere Grenze der Werte bezeichnet werden, welche die den Bedingungen der Endlichkeit und Integrierbarkeit genügende, reelle, einwertige und mit der Periode 2π periodische Funktion $f(\varphi)$ in ihren Stetigkeitspunkten besitzt. Der Fall, wo die Funktion $f(\varphi)$ für jeden ihrer Stetigkeitspunkte denselben Wert c besitzt, also $K = G = c$ und $u_{r,t} = c$ ist, soll bei den folgenden Betrachtungen immer ausgeschlossen sein. Setzt man dann in dem obigen Integralausdruck an Stelle von $f(\varphi)$ das eine Mal K, das andere Mal G, so gewinnt man, da der im Integralelement vorkommende Quotient für jeden Wert von φ positiv ist, für $u_{r,t}$ eine untere und eine obere Schranke, und zwar erhält man auf diese Weise, wenn man noch die Gleichung:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi}\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}\,d\varphi = 1$$

beachtet, die Beziehung:

$$K < u_{r,t} < G, \qquad {\scriptstyle 0 \leq r < R.}$$

Um günstigere Schranken für $u_{r,t}$ zu erhalten, verstehe man unter ψ irgend eine der Bedingung $0 \leqq \psi \gtreqless \pi$ genügende Zahl, bringe hierauf die obige Gleichung, nachdem man zuvor noch $l = \psi + t + \pi$ gesetzt hat, durch Einführung einer neuen Integrationsvariable in die Gestalt:

$$u_{r,t} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\psi}^{2\pi+\psi} f(t+\varphi)\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\varphi + r^2}\,d\varphi$$

und bilde alsdann mit Hilfe dieser Gleichung und der aus ihr für $r = 0$ hervorgehenden, den Wert u_0 von $u_{r,t}$ im Mittelpunkte O des Kreises darstellenden Gleichung:

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\psi}^{2\pi+\psi} f(t+\varphi)\,d\varphi,$$

indem man zur Abkürzung:

$$g(\varphi) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\varphi + r^2}$$

setzt, die Gleichung:

$$u_{r,t} - g(\psi)\,u_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\psi}^{2\pi+\psi} f(t+\varphi)\,[g(\varphi) - g(\psi)]\,d\varphi,$$

welche unter Ausschluß des Falles $r = 0$ als Ausgangspunkt für die weitere Untersuchung dienen soll.

Die auf der rechten Seite dieser Gleichung hinter dem Integralzeichen vorkommende Größe $g(\varphi) - g(\psi)$ ist, als Funktion von φ betrachtet, für alle Werte von φ zwischen ψ und $2\pi - \psi$ negativ, für alle Werte von φ zwischen $2\pi - \psi$ und $2\pi + \psi$ positiv. Infolgedessen erhält man sowohl für den auf das Intervall $\psi \cdots 2\pi - \psi$, als auch für den auf das Intervall $2\pi - \psi \cdots 2\pi + \psi$ sich beziehenden Teil des Integrals eine untere und eine obere Schranke, wenn man in jedem dieser beiden Teilintegrale an Stelle von $f(t+\varphi)$ das eine Mal K, das andere Mal G setzt. Man gelangt auf diese Weise zunächst zu den Ungleichungen:

$$\frac{G}{2\pi}\int\limits_{\psi}^{2\pi-\psi}[g(\varphi) - g(\psi)]\,d\varphi \leqq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\psi}^{2\pi-\psi} f(t+\varphi)\,[g(\varphi) - g(\psi)]\,d\varphi \leqq \frac{K}{2\pi}\int\limits_{\psi}^{2\pi-\psi}[g(\varphi) - g(\psi)]\,d\varphi,$$

$$\frac{K}{2\pi}\int\limits_{2\pi-\psi}^{2\pi+\psi}[g(\varphi) - g(\psi)]\,d\varphi \leqq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi-\psi}^{2\pi+\psi} f(t+\varphi)\,[g(\varphi) - g(\psi)]\,d\varphi \leqq \frac{G}{2\pi}\int\limits_{2\pi-\psi}^{2\pi+\psi}[g(\varphi) - g(\psi)]\,d\varphi,$$

und erhält dann weiter aus diesen durch Addition, nachdem man zuvor noch die links und rechts vorgeschriebenen Integrationen auf Grund der Gleichungen:

$$g(\varphi) - 1 = \frac{dQ(\varphi)}{d\varphi}, \qquad Q(\varphi) = 2\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r\sin\varphi}{R - r\cos\varphi}\right)$$

ausgeführt hat, die Ungleichung:

$$-\frac{G-K}{\pi}\left[Q(\psi)-\psi\frac{dQ(\psi)}{d\psi}\right]-G\frac{dQ(\psi)}{d\psi}\leqq u_{r,t}-g(\psi)u_0\,\overline{\gtrless}\,\frac{G-K}{\pi}\left[Q(\psi)-\psi\frac{dQ(\psi)}{d\psi}\right]-K\frac{dQ(\psi)}{d\psi},$$

aus der dann schließlich die Ungleichung:

$$(\mathrm{F}_0.)\quad -\frac{G-K}{\pi}\left[Q(\psi)-\psi\frac{dQ(\psi)}{d\psi}\right]-(G-u_0)\frac{dQ(\psi)}{d\psi}\underset{0<r<R,}{\leqq u_{r,t}-u_0\,\overline{\gtrless}}\,\frac{G-K}{\pi}\left[Q(\psi)-\psi\frac{dQ(\psi)}{d\psi}\right]+(u_0-K)\frac{dQ(\psi)}{d\psi},$$

folgt. Die unter der Voraussetzung $0\leqq\psi\,\overline{\gtrless}\,\pi$ durchgeführte Ableitung von $(\mathrm{F}_0.)$ läßt unmittelbar erkennen, daß für $\psi=0$ und $\psi=\pi$, da der Fall $K=G$ ausgeschlossen ist, die Gleichheitszeichen bei $(\mathrm{F}_0.)$ zu unterdrücken sind, daß dagegen diese Gleichheitszeichen für jedes zwischen 0 und π gelegene ψ beibehalten werden müssen, solange $f(\varphi)$ nur den Bedingungen, die zu Anfang dafür aufgestellt wurden, unterworfen ist, man also die Gesamtheit der überhaupt möglichen Funktionen $u_{r,t}$ betrachtet.

Da in der Ungleichung $(\mathrm{F}_0.)$ an Stelle von ψ jede der Bedingung $0\leqq\psi\,\overline{\gtrless}\,\pi$ genügende Zahl treten kann, und $u_{r,t}-u_0$ von ψ unabhängig ist, so kann man $(\mathrm{F}_0.)$, wenn man noch zur Abkürzung:

$$U(\psi)=-\frac{G-K}{\pi}\left[Q(\psi)-\psi\frac{dQ(\psi)}{d\psi}\right]-(G-u_0)\frac{dQ(\psi)}{d\psi},\quad O(\psi)=\frac{G-K}{\pi}\left[Q(\psi)-\psi\frac{dQ(\psi)}{d\psi}\right]+(u_0-K)\frac{dQ(\psi)}{d\psi}$$

setzt, durch die Ungleichung:

$$U(\psi_1)\leqq u_{r,t}-u_0\,\overline{\gtrless}\,O(\psi_2)$$

ersetzen, bei der ψ_1, ψ_2 irgend zwei dem Intervalle $0\cdots\pi$ angehörige Zahlen bezeichnen. Aus dieser letzten Ungleichung wird man, da $U(\psi)$ und $O(\psi)$ außer ψ auch noch die Größen K, G, u_0 enthalten, die engsten Schranken für alle diejenigen Funktionen $u_{r,t}$, welchen dasselbe K, G und u_0 zukommt, erhalten, wenn man für ψ_1 diejenige Zahl ψ des Intervalls $0\cdots\pi$ wählt, für welche die Funktion $U(\psi)$ ihren größten Wert besitzt, für ψ_2 dagegen diejenige Zahl ψ des Intervalls $0\cdots\pi$, für welche die Funktion $O(\psi)$ ihren kleinsten Wert besitzt. Nun zeigt aber ein Blick auf die Gleichungen:

$$\frac{dU(\psi)}{d\psi}=\left[\frac{G-K}{\pi}\psi-(G-u_0)\right]\frac{d^2Q(\psi)}{d\psi^2},\qquad \frac{dO(\psi)}{d\psi}=\left[-\frac{G-K}{\pi}\psi+(u_0-K)\right]\frac{d^2Q(\psi)}{d\psi^2},$$

$$\frac{d^2Q(\psi)}{d\psi^2}=\frac{dg(\psi)}{d\psi}=-\frac{2(R^2-r^2)Rr\sin\psi}{(R^2-2Rr\cos\psi+r^2)^2},$$

daß in dem Intervalle von $\psi=0$ bis $\psi=\pi$ die Funktion $U(\psi)$ ihren größten Wert für $\psi=\frac{G-u_0}{G-K}\pi$, die Funktion $O(\psi)$ ihren kleinsten Wert für $\psi=\frac{u_0-K}{G-K}\pi$ annimmt, und man erhält daher, wenn man diese Werte an Stelle von ψ_1, ψ_2 beziehungsweise in die zuletzt aufgestellte Ungleichung einträgt, schließlich die Ungleichung:

$$(\mathrm{F.})\quad -\frac{2}{\pi}(G-K)\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{r\sin\left(\frac{G-u_0}{G-K}\pi\right)}{R-r\cos\left(\frac{G-u_0}{G-K}\pi\right)}\right]\leqq u_{r,t}-u_0\overset{=}{<}\frac{2}{\pi}(G-K)\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{r\sin\left(\frac{u_0-K}{G-K}\pi\right)}{R-r\cos\left(\frac{u_0-K}{G-K}\pi\right)}\right],\quad 0<r<R,$$

als die günstigste in jener Ungleichung enthaltene.

Die im vorstehenden zur Herleitung der Ungleichungen ($\mathrm{F}_0.$), (F.) angestellten Betrachtungen lassen im übrigen erkennen, daß diese Ungleichungen, unter eventuellem Ausschluß der Gleichheitszeichen, auch dann noch gelten, wenn man darin an Stelle von G, K zwei den Bedingungen $G' \geqq G$, $K' \overset{=}{<} K$ genügende Zahlen G', K' setzt.

Daß bei passender Verfügung über die Funktion $f(\varphi)$ die Größe $u_{r,t}-u_0$ mit sich änderndem t für jedes r sowohl die obere wie die untere durch (F.) gegebene Schranke erreichen kann, erkennt man, wenn man, unter α eine zwischen 0 und π gelegene Zahl verstehend, die spezielle, zu der durch die Gleichungen:

$$f(\varphi)=G,\ \text{wenn}\ -\alpha\leqq\varphi<\alpha,\qquad f(\varphi)=K,\ \text{wenn}\ \alpha\leqq\varphi<2\pi-\alpha,$$

definierten Funktion $f(\varphi)$ gehörige, Funktion:

$$u_{r,t}=\frac{G-K}{\pi}\left\{\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{r\sin(\alpha+t)}{R-r\cos(\alpha+t)}\right]+\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{r\sin(\alpha-t)}{R-r\cos(\alpha-t)}\right]\right\}+\frac{G-K}{\pi}\alpha+K$$

$$=\frac{G-K}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2Rr\cos t-(R^2+r^2)\cos\alpha}{(R^2-r^2)\sin\alpha}\right]+\frac{G+K}{2},\qquad K<G,$$

betrachtet. Man hat dann $u_0=\frac{G-K}{\pi}\alpha+K$ und erhält infolgedessen aus der Ungleichung (F.) für die hier betrachtete spezielle Funktion $u_{r,t}$ die Ungleichung:

$$-\frac{2}{\pi}(G-K)\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r\sin\alpha}{R+r\cos\alpha}\right)\leqq u_{r,t}-u_0\overset{=}{<}\frac{2}{\pi}(G-K)\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r\sin\alpha}{R-r\cos\alpha}\right).$$

Die dadurch für $u_{r,t}-u_0$ gelieferten Schranken werden aber von $u_{r,t}-u_0$ auch wirklich erreicht, und zwar die obere für $t=0$, die untere für $t=\pi$. Auch möge mit Rücksicht auf die im nächsten Artikel folgenden Untersuchungen noch bemerkt werden, daß bei passender Verfügung über die Größe α im Rahmen der Bedingung $0<\alpha<\pi$ für die Größe u_0 jeder Wert zwischen K und G auftreten kann.

Bildet man die Differenz der durch die Ungleichung (F.) für $u_{r,t}-u_0$ gegebenen Schranken, so erhält man für die mit $S|u_{r,t}|$ zu bezeichnende Schwankung der Funktion $u_{r,t}$ auf der zum Radius r gehörigen Kreislinie die Ungleichung:

$$(\mathrm{S.})\qquad S|u_{r,t}|\overset{=}{<}\frac{2}{\pi}(G-K)\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2Rr}{R^2-r^2}\sin\left(\frac{u_0-K}{G-K}\pi\right)\right],\qquad 0<r<R$$

2.

Aus der im vorigen Artikel gewonnenen Formel (F.) als Hauptformel sollen jetzt einige einfachere Formeln abgeleitet werden.

Man beachte zunächst, daß unter den Voraussetzungen $0 < r < R$ und $\varepsilon^2 = 1$ für jeden positiven Wert von x die Beziehung:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r \sin x}{R + \varepsilon r \cos x}\right) < \frac{r}{R + \varepsilon r}\, x$$

besteht. Setzt man nämlich:

$$f(x) = \frac{r}{R + \varepsilon r}\, x - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r \sin x}{R + \varepsilon r \cos x}\right), \quad f'(x) = \frac{R r (R - \varepsilon r)(1 - \cos x)}{(R + \varepsilon r)(R^2 + 2 \varepsilon R r \cos x + r^2)},$$

so wächst unter den gemachten Voraussetzungen die Funktion $f(x)$, wie ein Blick auf ihre mit $f'(x)$ bezeichnete Derivierte ergibt, beständig mit wachsendem x, erreicht für $x = 0$ den Wert Null und besitzt daher für positive x stets positive Werte. Wendet man nun auf die Ungleichung (F.) die aus der obigen Beziehung unmittelbar sich ergebenden, für $0 < x < \pi$ gleichzeitig geltenden Formeln:

$$0 < \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r \sin x}{R - r \cos x}\right) < \frac{r}{R - r}\, x, \qquad 0 < \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r \sin x}{R - r \cos x}\right) < \frac{r}{R + r}\, (\pi - x)$$

an, so erhält man die einfacheren Ungleichungen:

$$(\mathrm{F}_1.) \qquad -\frac{2r}{R - r}\,(G - u_0) < u_{r,t} - u_0 < \frac{2r}{R - r}\,(u_0 - K),$$

$$0 < r < R$$

$$(\mathrm{F}_2.) \qquad -\frac{2r}{R + r}\,(u_0 - K) < u_{r,t} - u_0 < \frac{2r}{R + r}\,(G - u_0).$$

Die so gewonnenen Ungleichungen ($\mathrm{F}_1.$), ($\mathrm{F}_2.$) können auch direkt aus der Ungleichung ($\mathrm{F}_0.$) erhalten werden, indem man darin das eine Mal $\psi = 0$, das andere Mal $\psi = \pi$ setzt und beachtet, daß für diese speziellen Werte von ψ, wie schon früher bemerkt wurde, die bei ($\mathrm{F}_0.$) stehenden Gleichheitszeichen nicht mehr zulässig sind.

Um für $u_{r,t} - u_0$ die günstigsten von u_0 freien Schranken zu erhalten, beachte man, daß die in (F.) vorkommende Größe u_0 je nach der Beschaffenheit der Funktion $f(\varphi)$ jeden zwischen K und G gelegenen Wert haben kann, und daß die Funktion $\frac{r \sin x}{R - r \cos x}$, wenn x von 0 bis $\arccos \frac{r}{R}$ geht, beständig zunehmend die Werte von 0 bis $\frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$ durchläuft, dagegen, wenn x von $\arccos \frac{r}{R}$ bis π weitergeht, beständig abnehmend die Werte von $\frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$ bis 0 durchläuft. In dem Falle, wo u_0 der Bedingung $K < u_0 < \frac{K + G}{2}$ genügt, bestehen daher die Beziehungen:

$$0 < \frac{r \sin\left(\frac{G - u_0}{G - K}\,\pi\right)}{R - r \cos\left(\frac{G - u_0}{G - K}\,\pi\right)} < \frac{r}{R}, \qquad 0 < \frac{r \sin\left(\frac{u_0 - K}{G - K}\,\pi\right)}{R - r \cos\left(\frac{u_0 - K}{G - K}\,\pi\right)} \overline{\gtrless} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}},$$

und man erhält auf Grund derselben aus der Formel (F.) die einfachere Formel:

$$(\mathrm{F}_3.)\qquad -\frac{2}{\pi}(G-K)\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{R} < u_{r,t} - u_0 \overset{=}{<} \frac{2}{\pi}(G-K)\arcsin\frac{r}{R}, \qquad {0<r<R, \atop K<u_0<\frac{K+G}{2}},$$

bei der das Gleichheitszeichen nur für den speziellen Wert $r = R\cos\left(\frac{u_0 - K}{G-K}\pi\right)$ in Betracht kommen kann. In dem Falle, wo u_0 der Bedingung $\frac{K+G}{2} < u_0 < G$ genügt, bestehen dagegen die Beziehungen:

$$0 < \frac{r\sin\left(\frac{G-u_0}{G-K}\pi\right)}{R - r\cos\left(\frac{G-u_0}{G-K}\pi\right)} \overset{=}{<} \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}, \qquad 0 < \frac{r\sin\left(\frac{u_0-K}{G-K}\pi\right)}{R - r\cos\left(\frac{u_0-K}{G-K}\pi\right)} < \frac{r}{R},$$

und man erhält auf Grund derselben aus der Formel (F.) die einfachere Formel:

$$(\mathrm{F}_4.)\qquad -\frac{2}{\pi}(G-K)\arcsin\frac{r}{R} \leqq u_{r,t} - u_0 < \frac{2}{\pi}(G-K)\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{R}, \qquad {0<r<R, \atop \frac{K+G}{2}<u_0<G},$$

bei der das Gleichheitszeichen nur für den speziellen Wert $r = R\cos\left(\frac{G-u_0}{G-K}\pi\right)$ in Betracht kommen kann. In dem besonderen Falle endlich, wo $u_0 = \frac{K+G}{2}$ ist, ergibt sich aus der Formel (F.) unmittelbar die Formel:

$$(\mathrm{F}_5.)\qquad -\frac{2}{\pi}(G-K)\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{R} \leqq u_{r,t} - u_0 \overset{=}{<} \frac{2}{\pi}(G-K)\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{R}, \qquad {0<r<R, \atop u_0=\frac{K+G}{2}}.$$

Beachtet man nun noch, daß für $0<r<R$ die Beziehung $\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{R} < \arcsin\frac{r}{R}$ besteht, so erhält man aus den letzten drei Formeln die in jedem Falle giltige Formel:

$$(\mathrm{F}_6.)\qquad -\frac{2}{\pi}(G-K)\arcsin\frac{r}{R} \leqq u_{r,t} - u_0 \overset{=}{<} \frac{2}{\pi}(G-K)\arcsin\frac{r}{R}, \qquad 0<r<R,$$

bei der jedoch das links stehende Gleichheitszeichen nur für den speziellen Wert $r = R\cos\left(\frac{G-u_0}{G-K}\pi\right)$, das rechts stehende Gleichheitszeichen nur für den speziellen Wert $r = R\cos\left(\frac{u_0-K}{G-K}\pi\right)$ in Betracht kommen kann.

Auch die Ungleichungen (F_3.), (F_4.), (F_5.), (F_6.) können ohne Mühe aus der Ungleichung (F_0.) abgeleitet werden, wenn man dabei noch das in Art. 1 über $U(\psi)$ und $O(\psi)$ Gesagte beachtet. Setzt man nämlich in der Ungleichung (F_0.) $\psi = \arccos\frac{r}{R}$, so geht dieselbe direkt in die Ungleichung (F_6.) über, und kombiniert man alsdann die so erhaltene Ungleichung (F_6.) mit der aus (F_0.) für $\psi = \frac{\pi}{2}$ hervorgehenden Ungleichung:

$$-\frac{2}{\pi}(G-K)\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{R} + \frac{2r^2}{R^2+r^2}\left(\frac{K+G}{2} - u_0\right) \leqq u_{r,t} - u_0 \overset{=}{<} \frac{2}{\pi}(G-K)\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{R} + \frac{2r^2}{R^2+r^2}\left(\frac{K+G}{2} - u_0\right),$$

so erhält man durch einfache Überlegungen die Ungleichungen (F_3.), (F_4.), (F_5).

Um schließlich auch noch an Stelle der am Ende von Art. 1 für die Schwankung $S\,|u_{r,t}|$ der Funktion $u_{r,t}$ auf der zum Radius r gehörigen Kreislinie aufgestellten Ungleichung (S.) eine einfachere zu erhalten, beachte man, daß der auf der rechten Seite der Ungleichung (S.) stehende Ausdruck seinen größten Wert für $u_0 = \frac{K+G}{2}$ annimmt, und daß $\operatorname{arc\,tg} \frac{2Rr}{R^2-r^2} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{R}$ ist. Es ergibt sich dann sofort die einfachere, schon von Herrn C. Neumann*) gewonnene Ungleichung:

$$\text{(S'.)} \qquad S\,|u_{r,t}| \lesseqgtr \frac{4}{\pi}(G-K) \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{R}, \qquad {\scriptstyle 0<r<R,}$$

bei der, wie das in Art. 1 aufgestellte Beispiel für den speziellen Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ zeigt, das Gleichheitszeichen nicht weggelassen werden darf.

3.

Man betrachte jetzt das allgemeinere Integral:

$$u_{r,t} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{l-\pi}^{l+\pi} [f_1(\varphi) + f_2(\varphi)i] \frac{R^2-r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} \, d\varphi,$$

bei dem $f_1(\varphi)$, $f_2(\varphi)$ zwei den Bedingungen der Endlichkeit und Integrierbarkeit genügende, reelle, einwertige und mit der Periode 2π periodische Funktionen der reellen Veränderlichen φ bezeichnen mögen, unter i die laterale Einheit zu verstehen ist, endlich R, r, t, l dieselbe Bedeutung wie früher haben sollen, und stelle sich unter Ausschließung des Falles, wo die Funktion $f_1(\varphi) + f_2(\varphi)i$ für jeden ihrer Stetigkeitspunkte denselben Wert $c_1 + c_2 i$ besitzt, also $u_{r,t} = c_1 + c_2 i$ ist, die Aufgabe, für den Modul, welcher dem Integralwerte für den im Innern der Kreisfläche gelegenen Punkt $\mathfrak{P}$ mit den Polarkoordinaten r, t zukommt, möglichst enge Schranken zu finden.

Zur Lösung dieser Aufgabe bedarf man eines Satzes, der zunächst abgeleitet werden soll. Es mögen $F_1(\varphi)$, $F_2(\varphi)$ zwei von $\varphi = a$ bis $\varphi = b$, $a < b$, den Bedingungen der Endlichkeit und Integrierbarkeit genügende, reelle, einwertige Funktionen der reellen Veränderlichen φ bezeichnen. Die Funktionen $F_1^2(\varphi)$, $F_2^2(\varphi)$, $F_1^2(\varphi) + F_2^2(\varphi)$ genügen dann ebenfalls den genannten Bedingungen und haben zudem nirgendwo negative Werte. Beachtet man nun noch, daß eine reelle Funktion der reellen Veränderlichen φ, die von $\varphi = a$ bis $\varphi = b$ endlich und für keinen Punkt dieses Intervalls negativ ist, immer zugleich mit ihrem Quadrate für das Intervall integrierbar oder nicht integrierbar ist, so

*) Neumann, C., Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. (Leipzig, Teubner, 1884, 2. Aufl., S. 415. Formel (11.))

ergibt sich, daß auch die Funktion $\underset{+}{\sqrt{}}F_1^2(\varphi)+F_2^2(\varphi)$ den genannten Bedingungen genügt. Setzt man jetzt:

$$J_1=\int_a^b F_1(\varphi)\,d\varphi=\int_a^b F_1(\psi)\,d\psi\,,\qquad J_2=\int_a^b F_2(\varphi)\,d\varphi=\int_a^b F_2(\psi)\,d\psi\,,$$

bildet auf Grund dieser Gleichungen die Gleichung:

$$J_1^2+J_2^2=\int_a^b\int_a^b[F_1(\varphi)\,F_1(\psi)+F_2(\varphi)\,F_2(\psi)]\,d\varphi\,d\psi$$

und beachtet, daß stets:

$$F_1(\varphi)\,F_1(\psi)+F_2(\varphi)\,F_2(\psi)\lesseqgtr\underset{+}{\sqrt{F_1^2(\varphi)+F_2^2(\varphi)}}\,\underset{+}{\sqrt{F_1^2(\psi)+F_2^2(\psi)}}$$

ist, so erhält man für $J_1^2+J_2^2$ die Relation:

$$J_1^2+J_2^2\lesseqgtr\int_a^b\underset{+}{\sqrt{F_1^2(\varphi)+F_2^2(\varphi)}}\,d\varphi\int_a^b\underset{+}{\sqrt{F_1^2(\psi)+F_2^2(\psi)}}\,d\psi$$

und entsprechend für $\underset{+}{\sqrt{J_1^2+J_2^2}}$ die Relation:

$$\underset{+}{\sqrt{J_1^2+J_2^2}}\lesseqgtr\int_a^b\underset{+}{\sqrt{F_1^2(\varphi)+F_2^2(\varphi)}}\,d\varphi\,.$$

Diese letzte Relation liefert aber, wenn man das Integral $J=J_1+J_2 i$ einführt, also:

$$J=\int_a^b[F_1(\varphi)+F_2(\varphi)\,i]\,d\varphi$$

setzt und die Gleichungen $\underset{+}{\sqrt{J_1^2+J_2^2}}=\operatorname{mod}J$, $\underset{+}{\sqrt{F_1^2(\varphi)+F_2^2(\varphi)}}=\operatorname{mod}[F_1(\varphi)+F_2(\varphi)\,i]$ beachtet, unmittelbar den gewünschten Satz in der Gestalt:

$$\operatorname{mod}J\lesseqgtr\int_a^b\operatorname{mod}[F_1(\varphi)+F_2(\varphi)\,i]\,d\varphi\,.$$

Aus der vorstehenden Untersuchung erhellt zugleich, daß bei dieser Relation das Gleichheitszeichen dann aber auch nur dann zu nehmen ist, wenn die Richtung der dem Funktionswerte $F_1(\varphi)+F_2(\varphi)\,i$ in der Ebene der komplexen Zahlen entsprechenden Strecke für alle diejenigen zwischen a und b gelegenen Stetigkeitspunkte der Funktion $F_1(\varphi)+F_2(\varphi)\,i$, in welchen diese Funktion nicht den Wert Null hat, dieselbe ist.

Mit Rücksicht auf die gestellte Aufgabe bezeichne man nun die obere Grenze der Werte, welche dem Modul von $f_1(\varphi)+f_2(\varphi)\,i$ in den Stetigkeitspunkten der Funktion $f_1(\varphi)+f_2(\varphi)\,i$ zukommen, mit G und wende alsdann den eben gewonnenen

Modulsatz auf das mit $u_{r,t}$ bezeichnete Integral an. Man erhält auf diese Weise zunächst die Relation:

$$\operatorname{mod} u_{r,t} \gtreqless \frac{1}{2\pi}\int_{l-\pi}^{l+\pi} \operatorname{mod}\left[f_1(\varphi)+f_2(\varphi)i\right]\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}\,d\varphi\,.$$

Setzt man jetzt in dem auf der rechten Seite dieser Relation stehenden Integralausdrucke an Stelle von $\operatorname{mod}[f_1(\varphi)+f_2(\varphi)i]$ die eben definierte positive Zahl G, so gewinnt man für $\operatorname{mod} u_{r,t}$ eine obere Schranke, die sich auf Grund der Gleichung:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{l-\pi}^{l+\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}\,d\varphi=1$$

als identisch mit G erweist. Diese obere Schranke würde von dem genannten Integralausdrucke nur dann erreicht werden, wenn die Funktion $f_1(\varphi)+f_2(\varphi)i$ für jeden ihrer Stetigkeitspunkte die Zahl G als Modul besäße, von $\operatorname{mod} u_{r,t}$, nach dem beim Modulsatz Bemerkten, aber nur dann, wenn die Funktion $f_1(\varphi)+f_2(\varphi)i$ zudem noch für jeden ihrer Stetigkeitspunkte dieselbe Zahl $\varkappa$, $0<\varkappa<2\pi$, als Richtungszahl besäße. Dann käme aber der Funktion $f_1(\varphi)+f_2(\varphi)i$ für jeden ihrer Stetigkeitspunkte derselbe Wert $Ge^{\varkappa i}$ zu, und man befände sich in dem schon von Anfang an ausgeschlossenen Falle. Von diesem Falle abgesehen hat man daher stets:

$$0\leqq \operatorname{mod} u_{r,t}<G\,.$$

Um günstigere Schranken für $\operatorname{mod} u_{r,t}$ zu erhalten, verstehe man unter ψ irgend eine der Bedingung $0\leqq\psi\gtreqless\pi$ genügende Zahl, bringe hierauf die für $u_{r,t}$ aufgestellte Gleichung, nachdem man zuvor noch $l=\psi+t+\pi$ gesetzt hat, durch Einführung einer neuen Integrationsvariable in die Gestalt:

$$u_{r,t}=\frac{1}{2\pi}\int_{\psi}^{2\pi+\psi}\left[f_1(t+\varphi)+f_2(t+\varphi)i\right]\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\varphi+r^2}\,d\varphi$$

und bilde alsdann mit Hilfe dieser Gleichung und der aus ihr für $r=0$ hervorgehenden, den Wert u_0 von $u_{r,t}$ im Mittelpunkte O des Kreises darstellenden Gleichung:

$$u_0=\frac{1}{2\pi}\int_{\psi}^{2\pi+\psi}\left[f_1(t+\varphi)+f_2(t+\varphi)i\right]d\varphi\,,$$

indem man zur Abkürzung:

$$g(\varphi)=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\varphi+r^2}$$

setzt, die Gleichung:

$$u_{r,t}-g(\psi)u_0=\frac{1}{2\pi}\int_{\psi}^{2\pi+\psi}\left[f_1(t+\varphi)+f_2(t+\varphi)i\right]\left[g(\varphi)-g(\psi)\right]d\varphi\,.$$

Wendet man alsdann auf diese Gleichung den oben aufgestellten Modulsatz an, so erhält man die Ungleichung:

$$\operatorname{mod}\left[u_{r,t}-g(\psi)u_0\right] \gtreqless \frac{1}{2\pi}\int_{\psi}^{2\pi+\psi} \operatorname{mod}\left[f_1(t+\varphi)+f_2(t+\varphi)i\right] \operatorname{mod}\left[g(\varphi)-g(\psi)\right] d\varphi\,,$$

welche unter Ausschluß des Falles $r=0$ den Ausgangspunkt für die weitere Untersuchung bilden soll.

Die drei Faktoren, aus denen sich das Element des auf der rechten Seite dieser Ungleichung stehenden Integrals zusammensetzt, sind für keinen Wert von φ negativ. Infolgedessen erhält man eine obere Schranke für den Integralwert, wenn man den Faktor $\operatorname{mod}\left[f_1(t+\varphi)+f_2(t+\varphi)i\right]$ durch G ersetzt. Beachtet man dann noch, daß für das von $\varphi=\psi$ bis $\varphi=2\pi-\psi$ sich erstreckende Intervall $\operatorname{mod}\left[g(\varphi)-g(\psi)\right]=-\left[g(\varphi)-g(\psi)\right]$, für das von $\varphi=2\pi-\psi$ bis $\varphi=2\pi+\psi$ sich erstreckende Intervall $\operatorname{mod}\left[g(\varphi)-g(\psi)\right]=g(\varphi)-g(\psi)$ ist, so erhält man aus der aufgestellten Ungleichung zunächst die Ungleichung:

$$\operatorname{mod}\left[u_{r,t}-g(\psi)u_0\right] \gtreqless -\frac{G}{2\pi}\int_{\psi}^{2\pi-\psi}\left[g(\varphi)-g(\psi)\right]d\varphi+\frac{G}{2\pi}\int_{2\pi-\psi}^{2\pi+\psi}\left[g(\varphi)-g(\psi)\right]d\varphi$$

und weiter dann aus dieser, indem man die Integrationen auf Grund der Gleichungen:

$$g(\varphi)-1=\frac{dQ(\varphi)}{d\varphi}, \qquad Q(\varphi)=2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r\sin\varphi}{R-r\cos\varphi}\right)$$

ausführt, die Ungleichung:

$$\operatorname{mod}\left[u_{r,t}-g(\psi)u_0\right] \gtreqless \frac{G}{\pi}\left[2\,Q(\psi)+(\pi-2\psi)\frac{dQ(\psi)}{d\psi}\right].$$

Aus dieser letzten Ungleichung ergibt sich aber schließlich, wenn man noch zur Abkürzung:

$$S(\psi)=2\,Q(\psi)+(\pi-2\psi)\frac{dQ(\psi)}{d\psi}$$

setzt und sowohl die Beziehung $\operatorname{mod}\left[u_{r,t}-g(\psi)u_0\right] \geqq g(\psi)\operatorname{mod}u_0-\operatorname{mod}u_{r,t}$ wie die Beziehung $\operatorname{mod}\left[u_{r,t}-g(\psi)u_0\right] \geqq \operatorname{mod}u_{r,t}-g(\psi)\operatorname{mod}u_0$ beachtet, die Ungleichung:

$$(\mathrm{F}_{0'}) \qquad -\frac{G}{\pi}S(\psi)+\frac{dQ(\psi)}{d\psi}\operatorname{mod}u_0 \leqq \operatorname{mod}u_{r,t}-\operatorname{mod}u_0 \gtreqless \frac{G}{\pi}S(\psi)+\frac{dQ(\psi)}{d\psi}\operatorname{mod}u_0\,, \qquad 0<r<R.$$

Die vorstehende, unter der Voraussetzung $0 \leqq \psi \gtreqless \pi$ durchgeführte Ableitung von $(\mathrm{F}_{0'})$ läßt unmittelbar erkennen, daß für $\psi=0$ und $\psi=\pi$, da der Fall, wo die Funktion $f_1(\varphi)+f_2(\varphi)i$ für jeden ihrer Stetigkeitspunkte denselben Wert hat, ausgeschlossen ist, die Gleichheitszeichen bei $(\mathrm{F}_{0'})$ zu unterdrücken sind. Eine eingehende, direkte Untersuchung zeigt weiter aber auch noch, daß das bei ihr rechts stehende

Gleichheitszeichen für jedes zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegene ψ, das links stehende Gleichheitszeichen für jedes zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π gelegene ψ unterdrückt werden muß; daß dagegen, so lange $f_1(\varphi) + f_2(\varphi)i$ nur den allgemeinen Bedingungen, die zu Anfang dafür aufgestellt wurden, unterworfen ist, man also die Gesamtheit der überhaupt möglichen Funktionen $u_{r,t}$ betrachtet, das rechts stehende Gleichheitszeichen für jedes der Bedingung $\frac{\pi}{2} \leqq \psi < \pi$ genügende ψ, welchen Wert auch r haben möge, beibehalten werden muß, das links stehende aber für irgend ein der Bedingung $0 < \psi \gtreqless \frac{\pi}{2}$ genügendes ψ beibehalten oder unterdrückt werden muß, je nachdem ein Wert von r in Betracht kommt, für den $-\frac{G}{\pi} S(\psi) + \frac{dQ(\psi)}{d\psi} \bmod u_0 \geqq - \bmod u_0$ ist, oder ein Wert von r, für den $-\frac{G}{\pi} S(\psi) + \frac{dQ(\psi)}{d\psi} \bmod u_0 < - \bmod u_0$ ist. Die Richtigkeit der vorstehenden Ausführungen erhellt übrigens auch aus den im folgenden durchgeführten Untersuchungen.

Da in der Ungleichung (F_0.) an Stelle von ψ jede der Bedingung $0 \leqq \psi \gtreqless \pi$ genügende Zahl treten kann, und $\bmod u_{r,t} - \bmod u_0$ von ψ unabhängig ist, so kann man (F_0.), wenn man noch zur Abkürzung:

$$U(\psi) = -\frac{G}{\pi} S(\psi) + \frac{dQ(\psi)}{d\psi} \bmod u_0, \qquad O(\psi) = \frac{G}{\pi} S(\psi) + \frac{dQ(\psi)}{d\psi} \bmod u_0$$

setzt, durch die Ungleichung:

$$U(\psi_1) \leqq \bmod u_{r,t} - \bmod u_0 \gtreqless O(\psi_2)$$

ersetzen, bei der ψ_1, ψ_2 irgend zwei dem Intervalle $0 \cdots \pi$ angehörige Zahlen bezeichnen. Aus dieser letzten Ungleichung wird man, da $U(\psi)$ und $O(\psi)$ außer ψ auch noch die Größen G und $\bmod u_0$ enthalten, die engsten Schranken für die Moduln aller derjenigen Funktionen $u_{r,t}$, welchen dieselben Größen G und $\bmod u_0$ zukommen, erhalten, wenn man für ψ_1 diejenige Zahl ψ des Intervalls $0 \cdots \pi$ wählt, für welche die Funktion $U(\psi)$ ihren größten Wert besitzt, für ψ_2 dagegen diejenige Zahl ψ des Intervalls $0 \cdots \pi$, für welche die Funktion $O(\psi)$ ihren kleinsten Wert besitzt. Nun zeigt aber ein Blick auf die Gleichungen:

$$\frac{dU(\psi)}{d\psi} = \left[-(G - \bmod u_0) + \frac{2G}{\pi}\psi\right] \frac{d^2Q(\psi)}{d\psi^2}, \qquad \frac{dO(\psi)}{d\psi} = \left[(G + \bmod u_0) - \frac{2G}{\pi}\psi\right] \frac{d^2Q(\psi)}{d\psi^2},$$

$$\frac{d^2Q(\psi)}{d\psi^2} = \frac{dg(\psi)}{d\psi} = -\frac{2(R^2 - r^2)Rr\sin\psi}{(R^2 - 2Rr\cos\psi + r^2)^2},$$

daß in dem Intervalle von $\psi = 0$ bis $\psi = \pi$ die Funktion $U(\psi)$ ihren größten Wert für $\psi = \frac{\pi}{2G}(G - \bmod u_0)$, die Funktion $O(\psi)$ ihren kleinsten Wert für $\psi = \frac{\pi}{2G}(G + \bmod u_0)$

annimmt, und man erhält daher, wenn man diese Werte an Stelle von ψ_1, ψ_2 beziehungsweise in die zuletzt aufgestellte Ungleichung einträgt, schließlich die Ungleichung:

$$(\text{F.})\qquad -\frac{4G}{\pi}\operatorname{arctg}\left[\frac{r\sin\left[\frac{\pi}{2G}(G-\operatorname{mod}u_0)\right]}{R-r\cos\left[\frac{\pi}{2G}(G-\operatorname{mod}u_0)\right]}\right] \leqq \underset{0<r<R,}{\operatorname{mod}u_{r,t}-\operatorname{mod}u_0} \gtreqless \frac{4G}{\pi}\operatorname{arctg}\left[\frac{r\sin\left[\frac{\pi}{2G}(G+\operatorname{mod}u_0)\right]}{R-r\cos\left[\frac{\pi}{2G}(G+\operatorname{mod}u_0)\right]}\right],$$

als die günstigste in jener Ungleichung enthaltene. Da $\operatorname{mod}u_{r,t}-\operatorname{mod}u_0 \geqq -\operatorname{mod}u_0$ ist, so kann die untere Schranke, welche durch die Formel (F.) geliefert wird, nur dann in Betracht kommen, wenn sie nicht kleiner als $-\operatorname{mod}u_0$ ist, oder, was dasselbe, wenn $\frac{r}{R} \gtreqless \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4G}\operatorname{mod}u_0\right)$ ist.

Bei passender Verfügung über die Funktion $f_1(\varphi)+f_2(\varphi)i$ kann $\operatorname{mod}u_{r,t}-\operatorname{mod}u_0$ mit sich änderndem t für jedes $r \gtreqless R\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4G}\operatorname{mod}u_0\right)$ sowohl die obere wie die untere durch (F.) gegebene Schranke erreichen, für jedes $r > R\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4G}\operatorname{mod}u_0\right)$ auch noch die obere, aber nicht mehr die untere, wohl aber die dann an ihre Stelle tretende Größe $-\operatorname{mod}u_0$. Man erkennt dieses, wenn man, unter G eine positive Zahl, unter $\varkappa$ eine reelle Zahl, endlich unter α eine zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π gelegene Zahl verstehend, die spezielle, zu der durch die Gleichungen:

$f_1(\varphi)+f_2(\varphi)i = Ge^{\varkappa i}$, wenn $-\alpha \leqq \varphi < \alpha$, $\quad f_1(\varphi)+f_2(\varphi)i = -Ge^{\varkappa i}$, wenn $\alpha \leqq \varphi < 2\pi-\alpha$,

definierten Funktion $f_1(\varphi)+f_2(\varphi)i$ gehörige Funktion:

$$\begin{aligned} u_{r,t} &= \frac{2}{\pi}Ge^{\varkappa i}\left\{\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{r\sin(\alpha+t)}{R-r\cos(\alpha+t)}\right]+\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{r\sin(\alpha-t)}{R-r\cos(\alpha-t)}\right]+\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{2}{\pi}Ge^{\varkappa i}\quad\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2Rr\cos t-(R^2+r^2)\cos\alpha}{(R^2-r^2)\sin\alpha}\right] \end{aligned}$$

betrachtet und berücksichtigt, daß für diese Funktion $u_0 = \frac{2\alpha-\pi}{\pi}Ge^{\varkappa i}$, $\operatorname{mod}u_0 = \frac{2\alpha-\pi}{\pi}G$ ist, und daß infolgedessen die Ungleichung (F.) hier die Gestalt:

$$-\frac{4G}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r\sin\alpha}{R+r\cos\alpha}\right) \leqq \operatorname{mod}u_{r,t}-\operatorname{mod}u_0 \gtreqless \frac{4G}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r\sin\alpha}{R-r\cos\alpha}\right)$$

annimmt, während zugleich $R\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4G}\operatorname{mod}u_0\right)$ in $R\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ übergeht. Wie nämlich ein Blick auf den ersten für $u_{r,t}$ aufgestellten Ausdruck zeigt, wird die durch diese Ungleichung gelieferte obere Schranke von $\operatorname{mod}u_{r,t}-\operatorname{mod}u_0$ für $t=0$ und jedes r wirklich erreicht, die untere Schranke dagegen für $t=\pi$ und jedes r, für welches der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck, nachdem man darin $t=\pi$ gesetzt hat, nicht negativ ist. Dieser Fall liegt aber, wie der zweite für $u_{r,t}$ aufgestellte Ausdruck zeigt, vor, wenn $-2Rr-(R^2+r^2)\cos\alpha$ nicht negativ ist, oder, was dasselbe, wenn $r \gtreqless R\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ ist. Für $r>R\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ dagegen gibt es immer zwei zwischen 0 und 2π liegende, durch die Gleichung $2Rr\cos t-(R^2+r^2)\cos\alpha=0$ bestimmte Werte von t, für welche $u_{r,t}$ verschwindet, und es wird daher für jedes $r>R\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ die Differenz $\operatorname{mod} u_{r,t}-\operatorname{mod} u_0$ bei passend gewähltem Werte von t die Größe $-\operatorname{mod} u_0$ wirklich erreichen. Auch möge mit Rücksicht auf die folgenden Untersuchungen noch bemerkt werden, daß bei passender Verfügung über die Größe α im Rahmen der Bedingung $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ für $\operatorname{mod} u_0$ jeder der Bedingung $0<\operatorname{mod} u_0<G$ genügende Wert auftreten kann.

4.

Aus der im vorigen Artikel gewonnenen Formel (F.) als Hauptformel sollen jetzt einige einfachere Formeln abgeleitet werden.

Wendet man auf die Ungleichung (F.) die schon in Art. 2 aufgestellten, für $0<x<\pi$ gleichzeitig geltenden Formeln:

$$0<\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{r\sin x}{R-r\cos x}\right)<\frac{r}{R-r}\,x, \qquad 0<\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{r\sin x}{R-r\cos x}\right)<\frac{r}{R+r}(\pi-x)$$

an, so erhält man die einfacheren Ungleichungen:

$$(\mathrm{F}_1.)\qquad -\frac{2r}{R-r}(G-\operatorname{mod} u_0)<\operatorname{mod} u_{r,t}-\operatorname{mod} u_0<\frac{2r}{R-r}(G+\operatorname{mod} u_0),$$

$$0<r<R.$$

$$(\mathrm{F}_2.)\qquad -\frac{2r}{R+r}(G+\operatorname{mod} u_0)<\operatorname{mod} u_{r,t}-\operatorname{mod} u_0<\frac{2r}{R+r}(G-\operatorname{mod} u_0).$$

Die so gewonnenen Ungleichungen (F_1.), (F_2.) können auch direkt aus der Ungleichung (F_0.) erhalten werden, indem man darin das eine Mal $\psi=0$, das andere Mal $\psi=\pi$ setzt, und beachtet, daß für diese speziellen Werte von ψ, wie schon früher bemerkt wurde, die bei (F_0.) stehenden Gleichheitszeichen nicht mehr zulässig sind. Von den beiden oberen Schranken, welche durch die Formeln (F_1.), (F_2.) für $\operatorname{mod} u_{r,t}-\operatorname{mod} u_0$ geliefert werden, ist die durch die Formel (F_1.) gelieferte stets ungünstiger als die durch die Formel (F_2.) gelieferte. Die durch die beiden Formeln gelieferten unteren Schranken dagegen können nur dann in Betracht kommen, wenn sie nicht kleiner als $-\operatorname{mod} u_0$ sind; das aber ist bei der in (F_1.) vorkommenden unteren Schranke nur dann der Fall, wenn $\frac{r}{R}<\frac{\operatorname{mod} u_0}{2G-\operatorname{mod} u_0}$, bei der in ($\mathrm{F}_2$.) vorkommenden unteren Schranke nur dann, wenn $\frac{r}{R}<\frac{\operatorname{mod} u_0}{2G+\operatorname{mod} u_0}$ ist. Beachtet man aber, daß schon für $\frac{r}{R}<\frac{\operatorname{mod} u_0}{G}$ und umsomehr für $\frac{r}{R} < \frac{\operatorname{mod} u_0}{2G + \operatorname{mod} u_0}$ die Beziehung $-\frac{2r}{R+r}(G + \operatorname{mod} u_0) < -\frac{2r}{R-r}(G - \operatorname{mod} u_0)$ besteht, so erkennt man schließlich, daß die durch die Formel (F_2.) für $\operatorname{mod} u_{r,t} - \operatorname{mod} u_0$ gelieferte untere Schranke, wenn sie überhaupt in Betracht kommt, d. h. wenn sie nicht kleiner als $-\operatorname{mod} u_0$ ist, stets ungünstiger ist als die durch die Formel (F_1.) gelieferte.

Um für $\operatorname{mod} u_{r,t} - \operatorname{mod} u_0$ die günstigsten von u_0 freien Schranken zu erhalten, beachte man, daß die Funktion $\frac{r \sin x}{R - r\cos x}$ in dem Intervalle von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ ihren größten Wert $\frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$ für $x = \arccos\frac{r}{R}$, in dem Intervalle von $x = \frac{\pi}{2}$ bis $x = \pi$ ihren größten Wert $\frac{r}{R}$ für $x = \frac{\pi}{2}$ annimmt. Man erhält dann aus (F.) die Ungleichung:

$$(F_3.) \qquad -\frac{4G}{\pi}\arcsin\frac{r}{R} < \operatorname{mod} u_{r,t} - \operatorname{mod} u_0 \leqq \frac{4G}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{R}, \qquad 0 < r < R,$$

wenn man noch beachtet, daß für $r > 0$ die hier vorkommende untere Schranke nur in dem Falle, wo $\frac{r}{R} = \sin\left(\frac{\pi}{2G}\operatorname{mod} u_0\right)$ und gleichzeitig $\operatorname{mod} u_0 > 0$ ist, nicht kleiner ist als die durch (F.) für $\operatorname{mod} u_{r,t} - \operatorname{mod} u_0$ gegebene untere Schranke, und daß in diesem Falle beide Schranken den Wert $-2\operatorname{mod} u_0$ haben, also von $\operatorname{mod} u_{r,t} - \operatorname{mod} u_0$ unter keinen Umständen erreicht werden können. Im übrigen kann die durch die Formel (F_3.) für $\operatorname{mod} u_{r,t} - \operatorname{mod} u_0$ gelieferte untere Schranke nur dann in Betracht kommen, wenn sie nicht kleiner als $-\operatorname{mod} u_0$ ist, oder, was dasselbe, wenn $\frac{r}{R} \leqq \sin\left(\frac{\pi}{4G}\operatorname{mod} u_0\right)$ ist. Die durch die Formel (F_3.) für $\operatorname{mod} u_{r,t} - \operatorname{mod} u_0$ gelieferte obere Schranke kann nur für solche Funktionen $u_{r,t}$ erreicht werden, für welche $\operatorname{mod} u_0 = 0$ ist, dann aber auch, wie die Betrachtung der gegen Ende des vorigen Artikels aufgestellten speziellen Funktion $u_{r,t}$ für den Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ zeigt, bei jedem Werte von r.

Auch die Ungleichung (F_3.) kann ohne Mühe aus der Ungleichung (F_0.) abgeleitet werden. Setzt man nämlich in der Ungleichung (F_0.) das eine Mal $\psi = \arccos\frac{r}{R}$, das andere Mal $\psi = \frac{\pi}{2}$ und beachtet das im vorigen Artikel über $U(\psi)$ und $O(\psi)$ Gesagte, so erhält man die Ungleichungen:

$$-\frac{4G}{\pi}\arcsin\frac{r}{R} < \operatorname{mod} u_{r,t} - \operatorname{mod} u_0 < \frac{4G}{\pi}\arcsin\frac{r}{R},$$

$$-\frac{4G}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{R} - \frac{2r^2}{R^2+r^2}\operatorname{mod} u_0 \leqq \operatorname{mod} u_{r,t} - \operatorname{mod} u_0 \leqq \frac{4G}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{R} - \frac{2r^2}{R^2+r^2}\operatorname{mod} u_0,$$

aus denen unmittelbar die Ungleichung (F_3.) folgt.

5.

Es soll jetzt schließlich noch für den Modul der Differenz $u_{r,t} - u_0$, unter Ausschluß des Falles $r = 0$, eine möglichst günstige obere Schranke bestimmt werden.

Man betrachte zunächst den speziellen Fall, wo in dem zu Anfang des Art. 3 eingeführten Integrale:

$$u_{r,t} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi} [f_1(\varphi) + f_2(\varphi)i]\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}\,d\varphi$$

die Funktion $f_2(\varphi)$ für jedes φ den Wert Null hat, $f_1(\varphi) + f_2(\varphi)i$ sich also auf die reelle Funktion $f_1(\varphi)$ reduziert, und verstehe unter K_1 die untere, unter G_1 die obere Grenze der Werte, welche die Funktion $f_1(\varphi)$ in ihren Stetigkeitspunkten besitzt, dagegen unter G, der in Art. 3 eingeführten Bezeichnung entsprechend, die obere Grenze der Werte, welche dem Modul von $f_1(\varphi)$ in den Stetigkeitspunkten der Funktion $f_1(\varphi)$ zukommen, indem man auch hier den Fall ausschließt, wo die Funktion $f_1(\varphi)$ für jeden ihrer Stetigkeitspunkte denselben Wert besitzt. Der in Art. 1 aufgestellten Formel (F.) gemäß besteht dann für die reelle Größe $u_{r,t} - u_0$ die Ungleichung:

$$-\frac{2}{\pi}(G_1 - K_1)\operatorname{arctg}\left[\frac{r\sin\left(\frac{G_1-u_0}{G_1-K_1}\pi\right)}{R - r\cos\left(\frac{G_1-u_0}{G_1-K_1}\pi\right)}\right] \leqq u_{r,t} - u_0 \lesseqgtr \frac{2}{\pi}(G_1 - K_1)\operatorname{arctg}\left[\frac{r\sin\left(\frac{u_0-K_1}{G_1-K_1}\pi\right)}{R - r\cos\left(\frac{u_0-K_1}{G_1-K_1}\pi\right)}\right], \quad {\scriptstyle 0<r<R,}$$

und weiter, da nach dem auf Seite 34 im Anschlusse an die Formel (F.) Bemerkten bei der vorstehenden Ungleichung die Größen G_1, K_1 wegen $G \geqq G_1$, $-G \lesseqgtr K_1$ durch die Größen G, $-G$ beziehungsweise ersetzt werden dürfen, die Ungleichung:

$$-\frac{4G}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{r\sin\left[\frac{\pi}{2G}(G-u_0)\right]}{R - r\cos\left[\frac{\pi}{2G}(G-u_0)\right]}\right] \leqq u_{r,t} - u_0 \lesseqgtr \frac{4G}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{r\sin\left[\frac{\pi}{2G}(G+u_0)\right]}{R - r\cos\left[\frac{\pi}{2G}(G+u_0)\right]}\right], \quad {\scriptstyle 0<r<R.}$$

Aus dieser letzten Ungleichung folgt aber — da $\operatorname{mod}[u_{r,t} - u_0]$ bei reellem $u_{r,t} - u_0$ sich entweder mit $u_{r,t} - u_0$ oder mit $u_0 - u_{r,t}$ deckt, je nachdem $u_{r,t} - u_0$ positiv oder negativ ist — daß unter allen Umständen die größere der beiden Größen:

$$\frac{4G}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{r\sin\left[\frac{\pi}{2G}(G-u_0)\right]}{R - r\cos\left[\frac{\pi}{2G}(G-u_0)\right]}\right], \qquad \frac{4G}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{r\sin\left[\frac{\pi}{2G}(G+u_0)\right]}{R - r\cos\left[\frac{\pi}{2G}(G+u_0)\right]}\right]$$

eine obere Schranke für $\mathrm{mod}\,[u_{r,t}-u_0]$ bildet. Beachtet man nun noch, daß bei positivem u_0 der links stehende Ausdruck den größeren Wert hat und die Größe u_0 durch $\mathrm{mod}\,u_0$ ersetzt werden kann, daß dagegen bei negativem u_0 der rechts stehende Ausdruck den größeren Wert hat und die Größe u_0 durch $-\mathrm{mod}\,u_0$ ersetzt werden kann, so erhält man schließlich, welchen Wert u_0 auch haben mag, für $\mathrm{mod}\,[u_{r,t}-u_0]$ die Ungleichung:

$$(\mathrm{F}_0'.) \qquad \mathrm{mod}\,[u_{r,t}-u_0] \overline{\overline{<}} \frac{4G}{\pi}\,\mathrm{arc\,tg}\left[\frac{r\sin\left[\frac{\pi}{2G}(G-\mathrm{mod}\,u_0)\right]}{R-r\cos\left[\frac{\pi}{2G}(G-\mathrm{mod}\,u_0)\right]}\right], \qquad 0<r<R.$$

Daß bei passender Verfügung über die Funktion $f_1(\varphi)$ die Größe $\mathrm{mod}\,[u_{r,t}-u_0]$ mit sich änderndem t für jedes r die durch die Formel $(\mathrm{F}_0'.)$ gegebene obere Schranke erreichen kann, erkennt man aus dem am Ende von Art. 3 aufgestellten Beispiel, nachdem man darin $\varkappa=0$ gesetzt hat. Für die dann auftretende reelle Funktion $u_{r,t}$, bei der $u_0=\frac{2\alpha-\pi}{\pi}G$, $\mathrm{mod}\,u_0=\frac{2\alpha-\pi}{\pi}G$ ist, wird nämlich durch die Formel $(\mathrm{F}_0'.)$ als obere Schranke für $\mathrm{mod}\,[u_{r,t}-u_0]$ die Größe $\frac{4G}{\pi}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r\sin\alpha}{R+r\cos\alpha}\right)$ geliefert, und diese Größe wird von $\mathrm{mod}\,[u_{r,t}-u_0]$ für $t=\pi$ auch erreicht.

Um für $\mathrm{mod}\,[u_{r,t}-u_0]$ die günstigste von u_0 freie obere Schranke zu erhalten, beachte man, daß die Funktion $\frac{r\sin x}{R-r\cos x}$ in dem Intervalle von $x=0$ bis $x=\frac{\pi}{2}$ ihren größten Wert $\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}$ für $x=\mathrm{arc\,cos}\,\frac{r}{R}$ annimmt. Man erhält dann aus der Ungleichung $(\mathrm{F}_0'.)$ die schon von Herrn H. A. Schwarz*) aufgestellte Ungleichung:

$$(\mathrm{F}'.) \qquad \mathrm{mod}\,[u_{r,t}-u_0] \overline{\overline{<}} \frac{4G}{\pi}\,\mathrm{arc\,sin}\,\frac{r}{R}, \qquad 0<r<R,$$

bei der das Gleichheitszeichen nicht weggelassen werden darf, da, wie das eben betrachtete Beispiel zeigt, zu jedem vorgegebenen Werte r' von r unter allen denjenigen Funktionen $u_{r,t}$, bei welchen die zugrunde liegende Funktion $f_1(\varphi)$ ihrem absoluten Werte nach die Zahl G nicht übersteigt, stets solche existieren, für welche $\mathrm{mod}\,[u_{r',t}-u_0]$ bei sich änderndem t den Wert $\frac{4G}{\pi}\,\mathrm{arc\,sin}\,\frac{r'}{R}$ erreicht.

In dem allgemeinen Falle, wo $f_1(\varphi)+f_2(\varphi)i$ nur den zu Anfang des Art. 3 aufgestellten Bedingungen unterworfen ist, gilt die Formel $(\mathrm{F}_0'.)$ nicht mehr unbeschränkt,

*) Schwarz, H. A., Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. (Gesammelte Werke, Bd. II, S. 175—210; S. 190.)

sie gilt aber, welche Funktion $u_{r,t}$ auch vorliegen mag, unter allen Umständen noch, wie mit Hilfe der in Art. 3 abgeleiteten Formel:

$$\operatorname{mod}\left[u_{r,t} - g(\psi)u_0\right] \overline{\gtrless} \frac{G}{\pi}\left[2\,Q(\psi) + (\pi - 2\psi)\,\frac{d\,Q(\psi)}{d\psi}\right], \qquad {\scriptstyle 0<r<R,}$$

gezeigt werden kann, für jedes $r \geqq R \sin\left(\frac{\pi}{2G} \operatorname{mod} u_0\right)$. Die Formel (F'.) dagegen gilt auch noch im allgemeinen Falle unbeschränkt; denn sie geht aus der eben angeschriebenen, für jedes zwischen 0 und π liegende ψ geltenden Formel unmittelbar hervor, wenn man darin $\psi = \operatorname{arc}\cos\frac{r}{R}$ setzt und beachtet, daß dann $g(\psi) = 1$, $\frac{d\,Q(\psi)}{d\psi} = 0$, $Q(\psi) = 2 \operatorname{arc}\sin\frac{r}{R}$ wird.

Dritter Abschnitt.

Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ für mehrblättrige Kreisflächen und mehrblättrige Kreisergänzungsflächen.

1.

Die im ersten Abschnitte gewonnenen Resultate bleiben im wesentlichen bestehen, wenn man an Stelle der reellen Funktion $f(\varphi)$ eine komplexe Funktion $f'(\varphi) + f''(\varphi)i$ zu Grunde legt, deren Bestandteile $f'(\varphi)$, $f''(\varphi)$ den im ersten Abschnitte für $f(\varphi)$ gestellten Bedingungen genügen. Alle folgenden Untersuchungen sollen nun auf Grund dieser allgemeineren Annahme durchgeführt werden, jedoch, der einfacheren Darstellung wegen, mit Beschränkung auf den Fall, wo die reellen, einwertigen und mit der Periode 2π periodischen Funktionen $f'(\varphi)$, $f''(\varphi)$, aus denen sich $f(\varphi) = f'(\varphi) + f''(\varphi)i$ mit Hilfe der lateralen Einheit i zusammensetzt, für jeden Wert der reellen Veränderlichen φ stetig sind. Für diesen Fall geht aus dem am Ende des ersten Abschnittes ausgesprochenen Satze unter Beibehaltung der dort angewandten Bezeichnungen der folgende Satz hervor:

Satz. *„Es existiert zu der Kreisfläche K* (s. Fig. 1) *mit dem Mittelpunkte O und dem Radius R immer eine und nur eine in der ganzen Fläche einwertige und stetige Funktion $u = u' + u''i$ des durch die Polarkoordinaten r, t, $0 \leq r < R, 0 \leq t < 2\pi$, auf Grund der Gleichungen $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ fixierten Punktes x, y, welche für jeden Punkt R, t des Randes von K mit einer vorgegebenen einwertigen, stetigen und mit der Periode 2π periodischen komplexen Funktion $f(t) = f'(t) + f''(t)i$ der reellen Veränderlichen t dem Werte nach übereinstimmt, für jeden inneren Punkt der Kreisfläche stetige Derivierte $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ besitzt und in derselben Ausdehnung der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügt. Diese Funktion u wird für alle Punkte der Kreisfläche als Funktion der Polarkoordinaten r, t dargestellt durch die Gleichungen:*

$$u_{r,t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}\,d\varphi\,, \qquad u_{R,t} = f(t)\,, \qquad \begin{matrix} 0 \leq r < R, \\ 0 \leq t < 2\pi. \end{matrix}\text{“}$$

Da die Funktion u für jeden im Innern der Kreisfläche gelegenen Punkt der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt, so läßt sich zu ihr eine einwertige und stetige Funktion $v = v' + v'' i$ der durch die Bedingung $x^2 + y^2 < R^2$ beschränkten reellen Veränderlichen x, y finden, welche für jeden inneren Punkt der Kreisfläche mit ihr verknüpft ist durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Eine solche Funktion v ist für jeden im Innern der Kreisfläche gelegenen Punkt x, y vollständig bestimmt, sobald man noch den Wert v_0, den sie für den Mittelpunkt O der Kreisfläche besitzen soll, angibt. Unter Hinzunahme dieses Wertes v_0 erhält man nämlich zur Bestimmung von v die Gleichung:

$$v = v_0 + \int\limits_{0,\,0}^{x,\,y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right);$$

dabei ist der Integrationsweg für das rechts stehende Integral nur der Bedingung unterworfen, vollständig im Innern der Kreisfläche zu verlaufen. Setzt man alsdann $w = u + vi$, so ist die so für alle inneren Punkte der Kreisfläche definierte Größe w eine Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + yi$, da ihr reeller Teil $w' = u' - v''$ mit ihrem lateralen Teile $w'' i = (u'' + v')\,i$ durch die Gleichungen $\frac{\partial w''}{\partial x} = -\frac{\partial w'}{\partial y}$, $\frac{\partial w''}{\partial y} = \frac{\partial w'}{\partial x}$ verknüpft ist.

Eine Darstellung der Funktion w für das Innere der Kreisfläche läßt sich aber auch, ohne daß man vorher v durch Integration bestimmt, direkt gewinnen, wenn man beachtet, daß die Gleichung:

$$\frac{Re^{\varphi i} + re^{ti}}{Re^{\varphi i} - re^{ti}} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} + \frac{2Rr\sin(t-\varphi)}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}\,i$$

besteht, der hierbei links stehende Ausdruck eine Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + yi = re^{ti}$ darstellt, und infolgedessen der reelle Teil μ desselben mit dem lateralen Teile νi durch die Gleichungen $\frac{\partial \nu}{\partial x} = -\frac{\partial \mu}{\partial y}$, $\frac{\partial \nu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}$ verknüpft ist. Es ergibt sich alsdann unmittelbar:

$$w_z = u_{r,t} + v_{r,t}\,i = v_0 i + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,\frac{Re^{\varphi i} + z}{Re^{\varphi i} - z}\,d\varphi, \qquad {z = re^{ti}, \atop 0 \le r < R,\ 0 \le t < 2\pi,}$$

während zugleich die Komponenten $u_{r,t}$ und $v_{r,t}$ von w_z durch die Gleichungen:

$$u_{r,t} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}\,d\varphi, \quad v_{r,t} = v_0 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,\frac{2Rr\sin(t-\varphi)}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}\,d\varphi, \quad {0 \le r < R, \atop 0 \le t < 2\pi,}$$

bestimmt sind.

Die Funktion w_z läßt sich für das Innere der Kreisfläche durch eine nach Potenzen von z mit ganzen positiven Exponenten fortschreitende Reihe, deren Koeffizienten von z unabhängig sind, darstellen, und entsprechend lassen sich die Funktionen $u_{r,t}$, $v_{r,t}$ für das Innere der Kreisfläche durch Reihen, die nach Potenzen von r mit ganzen positiven Exponenten fortschreiten und als Koeffizienten Funktionen von t besitzen, darstellen. Man erhält nämlich auf Grund der Gleichung:

$$\frac{\zeta + z}{\zeta - z} = 1 + 2\frac{z}{\zeta} + 2\frac{z^2}{\zeta^2} + 2\frac{z^3}{\zeta^3} + \cdots, \qquad \begin{matrix} z = re^{ti}, \ \zeta = Re^{\varphi i}, \\ 0 \leq r < R, \end{matrix}$$

und der aus ihr durch Trennung der reellen Teile von den lateralen sich ergebenden Gleichungen:

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{r^n}{R^n}\cos n(t-\varphi), \qquad \frac{2Rr\sin(t-\varphi)}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} = 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{r^n}{R^n}\sin n(t-\varphi)$$

zunächst für w_z die Darstellung:

$$w_z = u_{r,t} + v_{r,t}\, i = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots, \qquad \begin{matrix} z = re^{ti}, \\ 0 < r < R, \ 0 \leq t < 2\pi, \end{matrix}$$

wobei

$$c_0 = u_0 + v_0 i, \qquad u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi, \qquad \underset{n>0}{c_n} = \frac{1}{R^n \pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi) e^{-n\varphi i} d\varphi$$

ist, und weiter dann für die Komponenten $u_{r,t}$ und $v_{r,t}$ von w_z die Darstellungen:

$$u_{r,t} = u_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n(t-\varphi)\, d\varphi\right)\frac{r^n}{R^n}, \quad v_{r,t} = v_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n(t-\varphi)\, d\varphi\right)\frac{r^n}{R^n}, \qquad \begin{matrix} 0 < r < R, \\ 0 \leq t < 2\pi. \end{matrix}$$

2.

Die Funktion u, deren Existenz in dem zu Anfang des vorigen Artikels aufgestellten Satze ausgesprochen wurde, ist auch dann noch eindeutig bestimmt, wenn man die ihr auferlegten Bedingungen, soweit dabei die Derivierten in Betracht kommen, für einzelne Punkte der Kreisfläche fallen, es also dahingestellt sein läßt, ob für diese Punkte die genannten Derivierten überhaupt existieren. Der Beweis für diese Behauptung soll, mit Hilfe eines von Riemann*) zu ähnlichem Zwecke ersonnenen Verfahrens, hier nur für den bei den späteren Untersuchungen ausschließlich in Betracht kommen-

*) Riemann, B., Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe. Art. 10. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 3—48.)

den Fall durchgeführt werden, wo die der Funktion u auferlegten Bedingungen, soweit dabei die Derivierten in Betracht kommen, für den Mittelpunkt des Kreises fallen gelassen sind.

Man verstehe zu dem Ende unter $\widetilde{u}$ eine Funktion der reellen Veränderlichen x, y, die für jeden von dem Mittelpunkte O verschiedenen Punkt der Kreisfläche dieselben Bedingungen erfüllt, wie die in dem aufgestellten Satze definierte Funktion u, und die zudem, ebenso wie diese, auch noch für den Punkt O stetig ist. Die Differenz $U = \widetilde{u} - u$ der Funktionen $\widetilde{u}, u$ ist dann eine für die ganze Kreisfläche einwertige und stetige Funktion des Punktes x, y, welche für jeden Randpunkt R, t den Wert Null hat und für jeden im Innern gelegenen, von O verschiedenen Punkt $\mathfrak{P}$ nicht nur stetige Derivierte $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ besitzt, sondern auch der Differentialgleichung $\Delta U = 0$ genügt. Aus diesem Verhalten der Funktion U und ihrer Derivierten folgt dann zunächst, indem man in derselben Weise schließt, wie es im ersten Abschnitte zu Anfang des Art. 7 für die Funktion $u_{r,t}$ geschehen ist, daß der Wert der Funktion U für jeden von O verschiedenen Punkt $\mathfrak{P}$ im Innern der Kreisfläche das arithmetische Mittel aus denjenigen Werten ist, welche die Funktion U auf irgend einer um $\mathfrak{P}$ als Mittelpunkt beschriebenen, ganz im Innern der Kreisfläche verlaufenden und den Punkt O weder umgebenden noch enthaltenden Kreislinie besitzt.

Um weiter dann den Zusammenhang des dem Mittelpunkte O zukommenden Wertes U_0 von U mit den übrigen Werten der Funktion U zu erkennen, verstehe man unter $\overline{U}$ eine gleich näher zu bestimmende Funktion der reellen Veränderlichen x, y, welche für jeden im Innern der Kreisfläche gelegenen, von O verschiedenen Punkt $\mathfrak{P}$ dieselben Bedingungen erfüllt wie die Funktion u, beziehe alsdann das Integral:

$$\iint\limits_F (U \Delta \overline{U} - \overline{U} \Delta U)\, \partial x \partial y$$

auf eine Ringfläche F, welche von zwei um O als Mittelpunkt mit den Radien r_1, r_2, $0 < r_1 < r_2 < R$, beschriebenen Kreisen $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ begrenzt ist, und reduziere es nach bekanntem Verfahren auf Randintegrale. Man gelangt auf diese Weise, wenn man noch beachtet, daß jedes Element des aufgestellten Integrals und daher auch das ganze Integral den Wert Null hat, zu der Gleichung:

$$\text{(G.)} \int\limits_{\mathfrak{K}_1}^{+} U\left(-\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}dx + \frac{\partial \overline{U}}{\partial x}dy\right) - \int\limits_{\mathfrak{K}_1}^{+} \overline{U}\left(-\frac{\partial U}{\partial y}dx + \frac{\partial U}{\partial x}dy\right) = \int\limits_{\mathfrak{K}_2}^{+} U\left(-\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}dx + \frac{\partial \overline{U}}{\partial x}dy\right) - \int\limits_{\mathfrak{K}_2}^{+} \overline{U}\left(-\frac{\partial U}{\partial y}dx + \frac{\partial U}{\partial x}dy\right),$$

wobei die oben an den Integralzeichen stehenden Pluszeichen andeuten sollen, daß eine jede der Integrationen über die unten an dem Integralzeichen angegebene Kreislinie in der Richtung der wachsenden t auszuführen ist. Aus der so gewonnenen Gleichung geht nun zunächst, indem man $U = 1$ setzt, die Gleichung:

$$(\mathrm{G}'.) \qquad \int\limits_{\mathfrak{K}_1}^{+}\left(-\frac{\partial U}{\partial y}\,dx + \frac{\partial U}{\partial x}\,dy\right) = \int\limits_{\mathfrak{K}_2}^{+}\left(-\frac{\partial U}{\partial y}\,dx + \frac{\partial U}{\partial x}\,dy\right)$$

hervor, die zeigt, daß der Wert des über eine ganz im Innern der Kreisfläche verlaufende, um O als Mittelpunkt beschriebene Kreislinie erstreckten Integrals $\int\left(-\frac{\partial U}{\partial y}\,dx + \frac{\partial U}{\partial x}\,dy\right)$ von dem Radius dieser Kreislinie unabhängig ist. Diesen konstanten Wert bezeichne man mit c. Setzt man alsdann in der mit (G.) bezeichneten Gleichung $U = \ln r = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ und führt zugleich bei denjenigen Integralen, welche die Derivierten von U enthalten, an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten x, y die Polarkoordinaten r, t auf Grund der Gleichungen $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ ein, so erhält man, wenn man noch den Wert von U im Punkte r, t mit $U_{r,t}$ bezeichnet, die Gleichung:

$$(\mathrm{G}''.) \qquad \int\limits_0^{2\pi} U_{r_1,t}\,dt - c\ln r_1 = \int\limits_0^{2\pi} U_{r_2,t}\,dt - c\ln r_2\,.$$

Da c eine von r_1, r_2 unabhängige Größe ist, so hat der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck einen von r_1 unabhängigen Wert, und es kann daher der auf der linken Seite stehende Ausdruck seinen Wert nicht ändern, wenn man r_1 im Rahmen der Bedingung $0 < r_1 < r_2$ sich bewegen läßt. Daraus folgt zunächst, daß die Größe c der Null gleich ist, da im anderen Falle der Wert des auf der linken Seite stehenden Ausdrucks bei unbegrenzt abnehmendem r_1 nicht ungeändert bleiben, sondern ins Unendliche gehen würde, und man erkennt nun, indem man r_1 gegen Null konvergieren läßt, daß der Wert des auf der linken Seite stehenden Ausdrucks gleich $2\pi U_0$ ist. Infolgedessen kann die Gleichung (G″.) durch die Gleichung:

$$U_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} U_{r_2,t}\,dt\,, \qquad 0 < r_2 < R,$$

ersetzt werden, die aussagt, daß auch für den Mittelpunkt O der Wert U_0, den die Funktion U dort hat, das arithmetische Mittel aus denjenigen Werten ist, welche U auf irgend einer ganz im Innern der Kreisfläche verlaufenden, um O als Mittelpunkt beschriebenen Kreislinie besitzt.

Trennt man nun den reellen Teil U' der Funktion U von ihrem lateralen Teile $U''i$, so ergibt sich aus den bis jetzt gewonnenen Resultaten, daß sowohl der Wert der Funktion U' als auch der Wert der Funktion U'' für jeden im Innern der

Kreisfläche gelegenen Punkt $\mathfrak{P}$ das arithmetische Mittel aus denjenigen Werten ist, welche die in Betracht gezogene Funktion auf irgend einer um $\mathfrak{P}$ als Mittelpunkt beschriebenen, ganz im Innern der Kreisfläche verlaufenden und im Falle, wo $\mathfrak{P}$ von O verschieden ist, den Punkt O weder umgebenden noch enthaltenden Kreislinie besitzt. Aus diesem Verhalten der Funktionen U', U'' und dem Umstande, daß dieselben in der ganzen Kreisfläche einwertig und stetig sind und am Rande der Fläche durchweg den Wert Null besitzen, folgt aber, indem man in derselben Weise schließt, wie es im ersten Abschnitte zu Anfang des Art. 7 für die Funktion $\overline{u}_{r,t}$ geschehen ist, daß sowohl die größten Werte G', G'' als auch die kleinsten Werte K', K'', welche die Funktionen U', U'' überhaupt annehmen, jedenfalls unter den für die Randpunkte auftretenden Funktionswerten vorkommen müssen, also nicht von Null verschieden sein können, und daß demnach die Funktionen U', U'' für keinen Punkt der Kreisfläche einen von Null verschiedenen Wert haben können. Es besitzt also auch $U = \widetilde{u} - u$ für jeden Punkt der Kreisfläche den Wert Null, oder, was dasselbe, die Funktion $\widetilde{u}$ ist mit der Funktion u identisch.

3.

Es möge unter $z = x + yi$ eine unbeschränkt veränderliche komplexe Größe verstanden werden, deren reeller Teil x, deren lateraler Teil yi sei. Um diese Größe z geometrisch zu repräsentieren, wähle man in einer Ebene einen Punkt O, lege durch denselben zwei aufeinander senkrecht stehende Achsen X, Yi und ordne alsdann, nachdem man für jede der beiden Achsen den Punkt O als Anfangspunkt der Zählung festgesetzt und von ihm aus in der Achsenrichtung die Längeneinheit aufgetragen hat, der Größe x diejenige Strecke $O\mathfrak{P}_x$ der X-Achse zu, welche den absoluten Wert von x als Länge und entweder die Richtung der X-Achse oder die entgegengesetzte besitzt, je nachdem x positiv oder negativ ist, der Größe yi dagegen diejenige Strecke $O\mathfrak{P}_{yi}$ der Yi-Achse, welche den absoluten Wert von y als Länge und entweder die Richtung der Yi-Achse oder die entgegengesetzte besitzt, je nachdem y positiv oder negativ ist. Als Repräsentanten der Größe $z = x + yi$ kann man dann diejenige in der Ebene gelegene Strecke $O\mathfrak{P}_z$ ansehen, welche bei senkrechter Projektion auf die X-Achse die Strecke $O\mathfrak{P}_x$, bei senkrechter Projektion auf die Yi-Achse die Strecke $O\mathfrak{P}_{yi}$ liefert. Bezeichnet man mit r die Länge der Strecke $O\mathfrak{P}_z$, mit t, ${\scriptstyle 0 \leqq t < 2\pi}$, die Größe des Winkels, um den man die Halbachse OX um den Punkt O im positiven Sinne, d. h. im Sinne der Drehung durch den ersten Quadranten zur Yi-Achse, drehen muß, damit sie die Richtung $O\mathfrak{P}_z$ erhält, so sind die Größen r, t mit den Größen x, y verknüpft durch die Gleichungen $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, und man hat daher auch $z = x + yi = re^{ti}$. Der Punkt $\mathfrak{P}_z$, der mit dem Punkte O zusammen die der Größe z entsprechende Strecke $O\mathfrak{P}_z$

bestimmt, soll mit Rücksicht hierauf der Korrespondent der Größe z oder kürzer der Punkt z genannt werden, und entsprechend möge die Ebene der Punkte z die Z-Ebene heißen; endlich sollen noch die zur Größe z gehörigen Größen x, y die rechtwinkligen, die zur Größe z gehörigen Größen r, t die Polarkoordinaten des Punktes z genannt werden. Mit Rücksicht hierauf wird im folgenden der Punkt z auch wohl mit dem Namen „der Punkt x, y" oder „der Punkt r, t" belegt werden.

Für die Funktionentheorie empfiehlt sich die Annahme, daß die Z-Ebene eine geschlossene Fläche ist, die nur einen unerreichbaren Punkt, welcher „der Punkt $\mathfrak{P}_\infty$" oder kürzer „der Punkt ∞" genannt werden soll, besitzt. Auf Grund dieser Annahme, welche die Ebene, soweit sie zur Repräsentation der Werte von z in Betracht kommt, nicht beeinflußt, lassen sich nämlich manche Betrachtungen sowohl der Form wie dem Wortausdrucke nach einfacher gestalten, ohne daß dadurch die Strenge derselben beeinträchtigt zu werden braucht. Von einem Punkte $\mathfrak{P}_z$, der sich in der Z-Ebene so bewegt, daß zu jeder vorgegebenen positiven Zahl p sich ein Zeitpunkt angeben läßt, von dem an der Modul r der zugehörigen Größe z seinem Werte nach nicht mehr unter p sinkt, kann jetzt gesagt werden, er strebe dem Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ zu. Beschreibt man um den Punkt O der Z-Ebene als Mittelpunkt eine Kreislinie mit dem Radius R, so trennt dieselbe die Ebene in zwei Teile, von denen der eine den Punkt O, der andere den Punkt ∞ enthält, und bildet zugleich für jeden dieser beiden Teile die vollständige Begrenzung. Der den Punkt O enthaltende Teil ist eine einfache Kreisfläche, der den Punkt ∞ enthaltende Teil soll die zum Radius R gehörige Kreisergänzungsfläche genannt werden. Ein positiver Umlauf um die Kreisfläche oder, was dasselbe, um den Punkt O, das ist ein Umlauf, bei dem die nach innen gerichtete Normale zu der Fortschrittsrichtung so liegt wie die positive Richtung der Yi-Achse zur positiven Richtung der X-Achse, ist in Bezug auf die Kreisergänzungsfläche oder, was dasselbe, in Bezug auf den Punkt $\mathfrak{P}_\infty$ als ein negativer Umlauf anzusehen, wie umgekehrt.

Über der Z-Ebene denke man sich jetzt eine n-blättrige Riemann'sche Fläche T mit einer endlichen Anzahl von Windungspunkten ausgebreitet. Über einem Punkte $\mathfrak{P}_z$ der Z-Ebene liegen dann n Punkte der Fläche T, wenn die Fläche über dieser Stelle keinen Windungspunkt besitzt; dagegen nur r Punkte, wenn die Fläche über dieser Stelle r Windungspunkte von den Ordnungen $\nu_1 - 1, \nu_2 - 1, \cdots, \nu_r - 1$ besitzt und $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_r = n$ ist. Ein Windungspunkt wird nämlich ein Windungspunkt von der Ordnung $\nu - 1$ oder ein $(\nu - 1)$-facher Windungspunkt genannt, wenn ein in der Fläche T um ihn als Mittelpunkt in einer keinen anderen Windungspunkt umschließenden und auch durch keinen Windungspunkt gehenden Kreisbahn sich bewegender Punkt erst nach ν Umläufen wieder in die Anfangslage zurückkehrt, ist aber immer als ein einziger Punkt anzusehen. Die soeben definierte in sich zurücklaufende Kreisbahn soll eine ν-fache Kreislinie und der von ihr begrenzte, den $(\nu-1)$-fachen Windungspunkt als Mittelpunkt enthaltende Teil der Fläche T eine ν-blättrige Kreisfläche genannt werden. Ohne gegen diese Definition zu verstoßen, kann man einen Punkt, der kein Windungspunkt ist, auch als einen 0-fachen Windungspunkt ansehen, und dementsprechend soll im folgenden bei allen Untersuchungen, die sich auf einen $(\nu-1)$-fachen Windungspunkt beziehen, der Fall $\nu = 1$ nicht ausgeschlossen sein. Jedem über dem Punkte $\mathcal{P}_z$ der Z-Ebene liegenden Punkte $\mathcal{P}$ der Fläche T sollen nun die zum Punkte $\mathcal{P}_z$ gehörigen Werte von z, x, y ebenfalls zugeordnet werden. Wird im folgenden von den Punkten der Fläche T, denen der Wert $z = a$ zukommt, nur einer betrachtet, so soll derselbe, als schon durch die Anschauung bestimmt, der Punkt $z = a$ oder einfacher der Punkt a genannt werden; kommen dagegen von den genannten Punkten mehrere gleichzeitig in Betracht, so sollen zu ihrer Unterscheidung dem Buchstaben a irgend welche Marken hinzugefügt werden.

Beschreibt man in der Z-Ebene um den Punkt $z = 0$ als Mittelpunkt eine Kreislinie, deren Radius R so groß gewählt sei, daß dieselbe die sämtlichen erreichbaren Punkte der Z-Ebene, über denen Windungspunkte der Fläche T liegen, einschließt, beachtet, daß jedem Punkte $\mathcal{P}$ dieser Kreislinie n Punkte $\mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)}, \cdots, \mathcal{P}^{(n)}$ der Fläche T entsprechen, und bestimmt alsdann die Linien, welche die Punkte $\mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)}, \cdots, \mathcal{P}^{(n)}$ in der Fläche T beschreiben, wenn der Punkt $\mathcal{P}$ von einer Anfangslage aus die Kreislinie vollständig durchläuft, so entsteht in der Fläche T ein Liniensystem, das im einfachsten Falle aus n getrennten einfachen Kreislinien besteht, im allgemeinen Falle dagegen aus q getrennten mehrfachen Kreislinien, von denen die erste eine ν_1-fache, die zweite eine ν_2-fache, $\cdots$, die q^{te} eine ν_q-fache ist, während zugleich die Beziehung $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_q = n$ besteht. In dem genannten einfachsten Falle soll nun für $\mu = 1, 2, \cdots, n$ der durch die μ^{te} Kreislinie begrenzte, sich einblättrig ins Unendliche erstreckende Teil der Fläche T als eine zum Radius R gehörige Kreisergänzungsfläche mit dem unerreichbaren Punkte $\mathcal{P}_{\infty_\mu}$ angesehen werden, und es sollen zugleich, nachdem so die Fläche T den Charakter einer geschlossenen Fläche erhalten hat, die n den Charakter 0-facher Windungspunkte besitzenden Punkte $\mathcal{P}_{\infty_1}, \mathcal{P}_{\infty_2}, \cdots, \mathcal{P}_{\infty_n}$ die dem Punkte $\mathcal{P}_\infty$ der Z-Ebene entsprechenden Punkte der Fläche T genannt werden. Liegt dagegen der allgemeine Fall vor, so soll für $\varkappa = 1, 2, \cdots, q$ der durch die $\varkappa^{\text{te}}$ $\nu_\varkappa$-fache Kreislinie begrenzte, sich als $\nu_\varkappa$-blättrige zusammenhängende Fläche ins Unendliche erstreckende Teil der Fläche T als eine geschlossene Fläche mit dem unerreichbaren Punkte $\mathcal{P}_{\infty_\varkappa^{(\nu_\varkappa)}}$, der dann auf Grund der früheren Definition den Charakter eines $(\nu_\varkappa - 1)$-fachen Windungspunktes besitzt, angesehen und als solche eine zum Radius R gehörige $\nu_\varkappa$-blättrige Kreisergänzungsfläche genannt werden, während zugleich, nachdem so die Fläche T den Charakter einer geschlossenen Fläche erhalten hat, die q Punkte $\mathfrak{P}_{\infty_1^{(\nu_1)}}, \mathfrak{P}_{\infty_2^{(\nu_2)}}, \cdots, \mathfrak{P}_{\infty_q^{(\nu_q)}}$ die dem Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ der Z-Ebene entsprechenden Punkte der Fläche T heißen sollen.

Die Lage eines Punktes $\mathfrak{P}$ in einer den $(\nu-1)$-fachen Windungspunkt $z=a=a'+a''i$ der Fläche T als Mittelpunkt enthaltenden ν-blättrigen Kreisfläche $K^{(\nu)}$, die zum Radius R gehören möge, kann man dadurch bestimmen, daß man den Punkt $\mathfrak{P}$ auf ein Polarkoordinatensystem bezieht, welches den Mittelpunkt $z=a$ der Fläche $K^{(\nu)}$ zum Pol, irgend einen der ν Radien, welche man vom Punkte $z=a$ aus in der positiven Richtung der X-Achse ziehen kann, zur Polarachse hat, und bei dem der positive Drehungssinn so gewählt ist, daß eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ die positive Richtung der X-Achse in die positive Richtung der Yi-Achse überführt. Zwischen den so definierten Polarkoordinaten r, t, ${\scriptstyle 0<r<R,\ 0<t<2\nu\pi}$, eines Punktes $\mathfrak{P}$ der Fläche $K^{(\nu)}$ und dem zugehörigen Werte von z besteht dann die Gleichung:

$$z=x+yi=a+re^{ti}=(a'+r\cos t)+(a''+r\sin t)\,i, \qquad {\scriptstyle 0\leq r<R,\ 0\leq t<2\nu\pi,}$$

und es entspricht zugleich jedem von $z=a$ verschiedenen Punkte der Fläche $K^{(\nu)}$ ein bestimmtes Wertepaar r, t, wie umgekehrt, während der Punkt $z=a$ durch die Gleichung $r=0$ bestimmt ist.

Eine Funktion $f=f(x,y)$ soll eine in der Fläche $K^{(\nu)}$ einwertige Funktion des Ortes oder Punktes x, y genannt werden, wenn zu jedem Punkte x, y der Fläche ein und nur ein Wert von f gehört. Eine in der Fläche $K^{(\nu)}$ einwertige Funktion des Punktes x, y liefert im allgemeinen eine ν-wertige Funktion der reellen Veränderlichen x, y in dem durch die Ungleichung $(x-a')^2+(y-a'')^2 \lesseqgtr R^2$ bestimmten Gebiete der Z-Ebene, da jedem von a', a'' verschiedenen Punkte x, y dieses Gebietes ν Punkte von $K^{(\nu)}$ entsprechen. Führt man aber an Stelle von x, y die eben definierten Polarkoordinaten r, t ein, indem man $f=f(x,y)=f(a'+r\cos t, a''+r\sin t)$ setzt, so geht dadurch f in eine einwertige Funktion der beiden reellen Veränderlichen r, t über, und darin besteht der Nutzen, den die Einführung der Größen r, t gewährt. Betrachtet man alsdann das Verhalten einer solchen in der Fläche $K^{(\nu)}$ einwertigen Funktion $f=f(x,y)=f(a'+r\cos t, a''+r\sin t)$ des Punktes x, y bei unbegrenzt abnehmendem r, so sind drei Fälle möglich; entweder konvergiert $f=f(a'+r\cos t, a''+r\sin t)$ mit unbegrenzt abnehmendem r gleichmäßig für alle Werte von t gegen eine von t unabhängige mit $f_a=\lim\limits_{r=0} f(a'+r\cos t, a''+r\sin t)$ zu bezeichnende Größe, und es ist zugleich $f_a=f(a',a'')$; oder es konvergiert f im angegebenen Sinne gegen die mit f_a bezeichnete Größe, ohne daß die Gleichung $f_a=f(a',a'')$ besteht; oder endlich, es konvergiert f entweder überhaupt nicht gegen eine von t unabhängige Größe oder doch nicht im angegebenen Sinne. Im ersten Falle, aber auch nur in diesem, soll die Funktion f für den Punkt

$z = a$ stetig genannt werden; im zweiten Falle besitzt sie dann für den Punkt $z = a$ eine hebbare, im dritten Falle endlich eine nicht hebbare Unstetigkeit.

In ähnlicher Weise, wie es im vorstehenden bei einer ν-blättrigen Kreisfläche $K^{(\nu)}$ geschehen ist, kann man auch bei einer den $(\nu-1)$-fachen Windungspunkt $\infty^{(\nu)}$ der Fläche T enthaltenden ν-blättrigen Kreisergänzungsfläche $K'^{(\nu)}$, die zum Radius R gehören möge, die Lage eines Punktes $\mathcal{P}$ durch Einführung von Polarkoordinaten bestimmen. Zu dem Ende lege man durch den Punkt $\mathcal{P}$ zu der die Fläche $K'^{(\nu)}$ begrenzenden ν-fachen Kreislinie eine konzentrische ν-fache Kreislinie, deren Punkten dann Werte von z mit demselben Modul r entsprechen, ziehe hierauf von einem beliebig gewählten, dann aber auch für alle Fälle festzuhaltenden, der ν dem Werte $z = R$ entsprechenden Punkte der Begrenzungslinie einen Strahl in der positiven Richtung der X-Achse, der die durch $\mathcal{P}$ gezogene Kreislinie in einem Punkte A treffen möge, und bestimme alsdann die Lage des Punktes $\mathcal{P}$ auf dieser zum Radius r gehörigen Kreislinie durch Angabe der Länge $r \cdot l$ desjenigen Bogens $A\mathcal{P}$ dieser Kreislinie, den man, vom Punkte A in der Richtung der abnehmenden y ausgehend, durchlaufen muß, um zum Punkte $\mathcal{P}$ zu gelangen, setze endlich $t = -l$. Zwischen den so definierten Polarkoordinaten r, t, ${}_{r \geqq R,\ 0 \geqq t > -2\nu\pi}$, eines Punktes $\mathcal{P}$ der Fläche $K'^{(\nu)}$ und dem zugehörigen Werte von z besteht dann die Gleichung:

$$z = x + yi = re^{ti} = (r \cos t) + (r \sin t)\, i, \qquad {}_{r > R,\ 0 \geqq t > -2\nu\pi,}$$

und es entspricht zugleich jedem Punkte z der Fläche $K'^{(\nu)}$ ein bestimmtes Wertepaar r, t, wie umgekehrt.

Eine Funktion $f = f(x, y)$ soll eine in der Fläche $K'^{(\nu)}$ einwertige Funktion des Ortes oder Punktes x, y genannt werden, wenn zu jedem Punkte dieser Fläche ein und nur ein Wert von f gehört. Eine in der Fläche $K'^{(\nu)}$ einwertige Funktion des Punktes x, y liefert im allgemeinen eine ν-wertige Funktion der reellen Veränderlichen x, y in dem durch die Ungleichung $x^2 + y^2 \geqq R^2$ bestimmten Gebiete der Z-Ebene, da jedem von $\mathcal{P}_\infty$ verschiedenen Punkte dieses Gebietes ν Punkte von $K'^{(\nu)}$ entsprechen. Führt man aber an Stelle von x, y die eben definierten Polarkoordinaten r, t ein, indem man $f = f(x, y) = f(r \cos t,\ r \sin t)$ setzt, so geht dadurch f in eine einwertige Funktion der beiden reellen Veränderlichen r, t über. Betrachtet man alsdann das Verhalten einer solchen in der Fläche $K'^{(\nu)}$ einwertigen Funktion $f = f(x, y) = f(r \cos t,\ r \sin t)$ des Punktes x, y bei unbegrenzt wachsendem r, so sind drei Fälle möglich; entweder konvergiert $f = f(r \cos t, r \sin t)$ mit unbegrenzt wachsendem r gleichmäßig für alle Werte von t gegen eine von t unabhängige, mit $f_{\infty^{(\nu)}} = \lim\limits_{r \to \infty} f(r \cos t,\ r \sin t)$ zu bezeichnende Größe, und es ist zugleich $f_{\infty^{(\nu)}}$ mit dem der Funktion f für den Punkt $\infty^{(\nu)}$ zukommenden Werte identisch; oder es konvergiert f im angegebenen Sinne gegen die mit $f_{\infty^{(\nu)}}$ bezeichnete Größe und es ist $f_{\infty^{(\nu)}}$ von dem der Funktion f für den Punkt $\infty^{(\nu)}$ zukommenden Werte verschieden; oder endlich, es konvergiert f entweder überhaupt nicht gegen eine von t unabhängige Größe oder doch nicht im angegebenen Sinne. Im ersten Falle, aber auch nur in diesem, soll die Funktion f für den Punkt $\infty^{(\nu)}$ stetig genannt werden; im zweiten Falle besitzt sie dann für den Punkt $\infty^{(\nu)}$ eine hebbare, im dritten Falle endlich eine nicht hebbare Unstetigkeit.

4.

In der über der Z-Ebene ausgebreiteten n-blättrigen Fläche T sei durch eine um den $(\nu-1)$-fachen Windungspunkt $z=a$ als Mittelpunkt beschriebene ν-fache Kreislinie eine ν-blättrige Kreisfläche $K^{(\nu)}$ abgegrenzt. Der Radius der begrenzenden Kreislinie möge mit R bezeichnet werden. Die Lage eines Punktes z in dieser Fläche denke man sich durch die zu diesem Zwecke im vorigen Artikel eingeführten, mit z durch die Gleichung:

$$z = x + yi = a + re^{ti}, \qquad {\scriptstyle 0<r<R, \; 0\leq t<2\nu\pi,}$$

verknüpften Polarkoordinaten r, t bestimmt.

Zu dieser Fläche $K^{(\nu)}$ soll nun eine in der ganzen Fläche einwertige und stetige Funktion $u = u' + u''i$ des Punktes x, y bestimmt werden, welche für jeden Punkt R, t des Randes von $K^{(\nu)}$ mit einer vorgegebenen einwertigen, stetigen und mit der Periode $2\nu\pi$ periodischen komplexen Funktion $f(t) = f'(t) + f''(t)i$ der reellen Veränderlichen t dem Werte nach übereinstimmt, für jeden vom Punkte $z=a$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche stetige Derivierte $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ besitzt und in derselben Ausdehnung der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt, während es dahingestellt bleiben soll, ob die genannten Derivierten für den Punkt $z=a$ existieren.

Zur Lösung der gestellten Aufgabe nehme man an, daß eine Funktion u der verlangten Art existiere, und bezeichne den Wert, den sie im Punkte r, t der Fläche $K^{(\nu)}$ besitzt, mit $u_{r,t}$. Bezieht man alsdann die Punkte r, t, ${\scriptstyle 0<r<R,\, 0\leq t<2\nu\pi}$, der Fläche $K^{(\nu)}$ und die auf Grund der Gleichung:

$$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}i = \bar{r}e^{\bar{t}i}$$

ebenfalls durch Polarkoordinaten fixierten Punkte $\bar{r}, \bar{t}$, ${\scriptstyle 0\leq\bar{r}<R,\, 0\leq\bar{t}<2\pi}$, der in einer $\bar{Z}$-Ebene liegenden, durch den Mittelpunkt $\bar{z}=0$ und den Radius R bestimmten Kreisfläche $\bar{K}$ wechselseitig eindeutig aufeinander durch die Gleichungen:

$$(\mathrm{G}_0.) \qquad \frac{\bar{r}}{R} = \sqrt[\nu]{\frac{r}{R}}_{+}, \qquad \bar{t} = \frac{t}{\nu},$$

aus denen sich für die zugehörigen Größen $\bar z$, z die Beziehung:

$$\text{(G.)} \qquad \frac{\bar z}{R} = \frac{(z-a)^{\frac{1}{\nu}}}{R^{\frac{1}{\nu}}}$$

ergibt, und ordnet der Fläche $\bar K$ eine Funktion $u = u_{\bar r, \bar t}$ des Punktes $\bar r, \bar t$ zu durch die Gleichung $u_{\bar r, \bar t} = u_{r,t}$, bei der r, t den dem Punkte $\bar r, \bar t$ entsprechenden Punkt der Fläche $K^{(\nu)}$ bezeichnen soll, setzt auch $f(\nu \bar t) = \bar f(\bar t)$ und beachtet, daß dann die Gleichung $u_{R, \bar t} = \bar f(\bar t)$ besteht, so ist die so definierte Funktion u — da die Beziehung $u_{\bar r, \bar t} = u_{r,t}$ für jedes der Bedingung $0 \leqq \bar r \gtreqless R$ genügende $\bar r$ besteht, $u_{r,t}$ allenthalben stetig ist und den Gleichungen $(\mathrm{G}_0.)$ zufolge einer in $K^{(\nu)}$ stetigen Funktion des Punktes r, t immer eine in $\bar K$ stetige Funktion des Punktes $\bar r, \bar t$ entspricht — eine in der ganzen Kreisfläche $\bar K$ einwertige und stetige Funktion des Punktes $\bar x, \bar y$, die für jeden Punkt $R, \bar t$ des Randes mit der Funktion $\bar f(\bar t)$ dem Werte nach übereinstimmt, die zudem, wie gleich gezeigt werden soll, für jeden vom Punkte $\bar z = 0$ verschiedenen inneren Punkt von $\bar K$ stetige Derivierte $\frac{\partial u}{\partial \bar x}, \frac{\partial u}{\partial \bar y}, \frac{\partial^2 u}{\partial \bar x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \bar y^2}$ besitzt und der Differentialgleichung $\bar\Delta u = 0$ genügt, und die sich daher auf Grund des in Art. 2 dieses Abschnittes bewiesenen Satzes darstellen läßt durch die Gleichungen:

$$\text{(U.)} \qquad u_{\bar r, \bar t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar f(\varphi)\, \frac{R^2 - \bar r^2}{R^2 - 2R\bar r\cos(\bar t - \varphi) + \bar r^2}\, d\varphi, \qquad u_{R, \bar t} = \bar f(\bar t), \qquad {\scriptstyle 0 < \bar r < R,\ 0 \leq \bar t < 2\pi.}$$

Daß die durch die Gleichung $u_{\bar r, \bar t} = u_{r,t}$ für die ganze Kreisfläche $\bar K$ definierte Funktion u in der Tat, wie behauptet wurde, für jeden von $\bar z = 0$ verschiedenen inneren Punkt $\bar r, \bar t$ der Fläche $\bar K$ stetige Derivierten $\frac{\partial u}{\partial \bar x}, \frac{\partial u}{\partial \bar y}, \frac{\partial^2 u}{\partial \bar x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \bar y^2}$ besitzt und der Differentialgleichung $\bar\Delta u = 0$ genügt, läßt sich auf folgende Weise zeigen. Man beschreibe mit einem passend gewählten Radius R' eine ganz im Innern der Fläche $K^{(\nu)}$ verlaufende, nicht durch den Punkt a gehende einfache Kreislinie, welche den dem Punkte $\bar r, \bar t$ von $\bar K$ entsprechenden Punkt r, t umschließt, aber einen von r, t verschiedenen Mittelpunkt r_0, t_0, dem in der Fläche $\bar K$ der Punkt $\bar r_0, \bar t_0$ entsprechen möge, besitzt, beziehe den Punkt r, t durch Polarkoordinaten ϱ, τ, ${\scriptstyle 0 \leq \varrho < R',\ 0 \leq \tau < 2\pi}$, auf den Punkt r_0, t_0 als Pol und den durch r_0, t_0 in der positiven Richtung der X-Achse gezogenen Strahl als Polarachse, so daß zwischen den Größen ϱ, τ und den zu den Punkten r, t; r_0, t_0 gehörigen Größen $z = a + re^{ti}$, $z_0 = a + r_0 e^{t_0 i}$ die Beziehung $\varrho e^{\tau i} = z - z_0$ besteht, und bezeichne den Wert, den die Funktion u für den Punkt $\varrho = R'$, $\tau = \tau$ der Kreislinie besitzt, mit $f(\tau)$. Nach früher Bewiesenem besteht dann für jeden im Innern des durch die Kreislinie begrenzten Teiles der Fläche $K^{(\nu)}$ gelegenen Punkt r, t die Gleichung:

$$u_{r,t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\frac{R'^2 - \varrho^2}{R'^2 - 2R'\varrho\cos(\tau-\varphi) + \varrho^2}\,d\varphi,$$

und auch, nachdem man

$$v_{r,t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\frac{2R'\varrho\sin(\tau-\varphi)}{R'^2 - 2R'\varrho\cos(\tau-\varphi) + \varrho^2}\,d\varphi$$

gesetzt hat, die Gleichung:

$$u_{r,t} + v_{r,t}\,i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\frac{R'e^{\varphi i} + \varrho e^{\tau i}}{R'e^{\varphi i} - \varrho e^{\tau i}}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\frac{R'e^{\varphi i} + (z-z_0)}{R'e^{\varphi i} - (z-z_0)}\,d\varphi\,.$$

Führt man jetzt in die letzte Gleichung mit Hilfe der vorher aufgestellten Gleichung (G.), durch welche die Flächen $K^{(\nu)}$, K punktweise aufeinander bezogen wurden, an Stelle der Größen r, t; r_0, t_0 die Größen $\bar r, t$; $\bar r_0, t_0$ ein, beachtet, daß dann $u_{r,t}$ in $u_{\bar r,t}$ übergeht, und bezeichnet entsprechend diejenige Funktion von $\bar r, t$, in welche $v_{r,t}$ übergeht, mit $\bar v_{r,t}$, so erhält man, wenn man noch $\bar r_0 e^{t_0 i} = z_0$ setzt, für $u_{r,t} + \bar v_{r,t}\,i$ die Gleichung:

$$u_{\bar r,t} + \bar v_{r,t}\,i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\frac{\bar R^\nu R'e^{\varphi i} + R(\bar z^\nu - \bar z_0^\nu)}{\bar R^\nu R'e^{\varphi i} - R(\bar z^\nu - \bar z_0^\nu)}\,d\varphi\,.$$

Beachtet man nun noch, daß aus dem die rechte Seite dieser Gleichung bildenden Integrale die Größe $u_{r,t}$ hervorgeht, wenn man die unter dem Integralzeichen zwischen $f(\varphi)$ und $d\varphi$ stehende rationale Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + \bar y i$ durch ihren mit $F(\bar x, y)$ zu bezeichnenden reellen Teil ersetzt, und daß dieser reelle Teil F für jedes in Betracht kommende Wertepaar $\bar x, \bar y$ stetige Derivierten $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ besitzt und der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ genügt, so ergibt sich schließlich, daß die Funktion $\bar u$ in der Tat für jeden von $z = 0$ verschiedenen inneren Punkt r, t der Fläche $\bar K$ stetige Derivierten $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ besitzt und der Differentialgleichung $\Delta\bar u = 0$ genügt.

Führt man jetzt in die vorher gewonnenen, die Funktion u für jeden Punkt $\bar r, \bar t$ der Fläche K darstellenden Gleichungen (U.) an Stelle der Größen r, t die Größen r, t mit Hilfe der Gleichungen (G_0.) und zugleich an Stelle der Integrationsvariablen φ eine neue Integrationsvariable φ durch die Substitution $\varphi = \frac{\varphi}{\nu}$ ein, indem man beachtet, daß dann $u_{\bar r,t}$ in $u_{r,t}$ übergeht und daß die Gleichung $f\left(\frac{\varphi}{\nu}\right) = f(\varphi)$ besteht, so erhält man die Gleichungen:

$$\text{(U.)}\qquad u_{r,t} = \frac{1}{2\nu\pi}\int_0^{2\nu\pi} f(\varphi)\,\frac{R^{\frac{2}{\nu}} - r^{\frac{2}{\nu}}}{R^{\frac{2}{\nu}} - 2R^{\frac{1}{\nu}}r^{\frac{1}{\nu}}\cos\left(\frac{t-\varphi}{\nu}\right) + r^{\frac{2}{\nu}}}\,d\varphi, \qquad u_{R,t} = f(t), \qquad \begin{matrix} 0 < r < R, \\ 0 \le t < 2\nu\pi, \end{matrix}$$

bei denen, ebenso wie im folgenden, unter $r^{\frac{1}{\nu}}$ die Größe $\underset{+}{\sqrt[\nu]{r}}$, unter $R^{\frac{1}{\nu}}$ die Größe $\underset{+}{\sqrt[\nu]{R}}$ zu verstehen ist. Diese Gleichungen sind abgeleitet worden auf Grund der Annahme, daß eine Funktion u der verlangten Art existiert. Mit Rücksicht hierauf muß also schließlich noch gezeigt werden, daß die durch die Gleichungen (U.) dargestellte Funktion u in der Tat eine Funktion der verlangten Art ist. Nun folgt aber zunächst — da die Gleichung $u_{\bar r,t} = u_{r,t}$ für jedes der Bedingung $0 \leqq r \gtreqless R$ genügende r besteht, $u_{\bar r,t}$ allenthalben stetig ist und den Gleichungen $(\mathrm{G}_0.)$ zufolge einer in K stetigen Funktion des Punktes r, t immer eine in $K^{(\nu)}$ stetige Funktion des Punktes r, t entspricht, auch $u_{R,t} = f(t)$ ist — daß die erhaltene Funktion u eine in der ganzen Fläche $K^{(\nu)}$ einwertige und stetige Funktion des Punktes x, y ist, die für jeden Punkt R, t des Randes von $K^{(\nu)}$ mit der Funktion $f(t)$ dem Werte nach übereinstimmt. Daß diese Funktion u aber auch für jeden von $z = a$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche stetige Derivierte $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ besitzt und der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt, erkennt man, indem man beachtet, daß bei dem die Funktion $u_{r,t}$ darstellenden Integrale der zwischen $f(\varphi)$ und $d\varphi$ stehende Ausdruck, der Gleichung:

$$\frac{R^{\frac{1}{\nu}}e^{\frac{\varphi}{\nu}i} + (z-a)^{\frac{1}{\nu}}}{R^{\frac{1}{\nu}}e^{\frac{\varphi}{\nu}i} - (z-a)^{\frac{1}{\nu}}} = \frac{R^{\frac{1}{\nu}}e^{\frac{\varphi}{\nu}i} + r^{\frac{1}{\nu}}e^{\frac{t}{\nu}i}}{R^{\frac{1}{\nu}}e^{\frac{\varphi}{\nu}i} - r^{\frac{1}{\nu}}e^{\frac{t}{\nu}i}} = \frac{R^{\frac{2}{\nu}} - r^{\frac{2}{\nu}}}{R^{\frac{2}{\nu}} - 2R^{\frac{1}{\nu}}r^{\frac{1}{\nu}}\cos\left(\frac{t-\varphi}{\nu}\right) + r^{\frac{2}{\nu}}} + \frac{2R^{\frac{1}{\nu}}r^{\frac{1}{\nu}}\sin\left(\frac{t-\varphi}{\nu}\right)}{R^{\frac{2}{\nu}} - 2R^{\frac{1}{\nu}}r^{\frac{1}{\nu}}\cos\left(\frac{t-\varphi}{\nu}\right) + r^{\frac{2}{\nu}}}\,i$$

gemäß, der reelle Teil μ einer im Innern von $K^{(\nu)}$ allenthalben einwertigen und stetigen Funktion $\mu + \nu i$ der komplexen Veränderlichen $z = x + yi$ ist und infolgedessen, als Funktion der reellen Veränderlichen x, y betrachtet, für jeden vom Punkte $z = a$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche $K^{(\nu)}$ nicht nur stetige Derivierte nach x und y von jeder Ordnung besitzt, sondern auch der Differentialgleichung $\Delta\mu = 0$ genügt. Die durch die Gleichungen (U.) dargestellte Funktion u genügt also in der Tat den zu Anfang des Artikels aufgestellten Bedingungen und ist zugleich, wie aus dem Gange der Untersuchung unmittelbar hervorgeht, die einzige derartige Funktion.

Die in diesem Artikel bis jetzt erhaltenen Resultate lassen sich nun in den folgenden Satz zusammenfassen:

Satz I. „*Ist in der über der Z-Ebene ausgebreiteten n-blättrigen Fläche T durch eine um den $(\nu-1)$-fachen Windungspunkt $z=a$ als Mittelpunkt mit dem Radius R beschriebene ν-fache Kreislinie eine ν-blättrige Kreisfläche $K^{(\nu)}$ abgegrenzt, so existiert zu dieser Kreisfläche immer eine und nur eine in der ganzen Kreisfläche einwertige und stetige Funktion $u=u'+u''i$ des durch die Polarkoordinaten r, t, ${}_{0\le r\le R,\ 0<t<2\nu\pi}$, auf Grund der Gleichung $z=x+yi=a+re^{ti}$ fixierten Punktes x, y, welche für jeden Punkt R, t des Randes von $K^{(\nu)}$ mit einer vorgegebenen einwertigen, stetigen und mit der Periode $2\nu\pi$ periodischen komplexen Funktion $f(t)=f'(t)+f''(t)i$ der reellen Veränderlichen t dem Werte nach übereinstimmt, für jeden vom Punkte $z=a$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche stetige Derivierte $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ besitzt und in derselben Ausdehnung der partiellen Differentialgleichung $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ genügt. Diese Funktion u wird für alle Punkte der Fläche $K^{(\nu)}$ als Funktion der Polarkoordinaten r, t dargestellt durch die Gleichungen:*

$$(\mathrm{U}_1.)\qquad u_{r,t}=\frac{1}{2\nu\pi}\int_0^{2\nu\pi} f(\varphi)\,\frac{R^{\frac{2}{\nu}}-r^{\frac{2}{\nu}}}{R^{\frac{2}{\nu}}-2R^{\frac{1}{\nu}}r^{\frac{1}{\nu}}\cos\left(\frac{t-\varphi}{\nu}\right)+r^{\frac{2}{\nu}}}\,d\varphi\,,\qquad u_{R,t}=f(t)\,,\qquad {}_{0<t<2\nu\pi.}^{0\le r<R,}\text{“}$$

Zu der Funktion u läßt sich eine einwertige und stetige Funktion $v=v'+v''i$ des in seiner Bewegung auf das Innere von $K^{(\nu)}$ beschränkten Punktes x, y finden, welche für jeden von $z=a$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche $K^{(\nu)}$ mit u verknüpft ist durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\,,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\,.$$

Eine solche Funktion v ist für jeden im Innern von $K^{(\nu)}$ gelegenen Punkt x, y vollständig bestimmt, sobald man ihr noch die Bedingung auferlegt, für den Mittelpunkt $z=a=a'+a''i$ der Fläche $K^{(\nu)}$ eine vorgegebene Größe v_0 als Wert zu besitzen, so daß also $\lim\limits_{r=0} v_{r,t}=v_0$ ist. Unter Hinzunahme der Größe v_0 erhält man nämlich zur Bestimmung von v die Gleichung:

$$v=v_0+\int_{a',a''}^{x,y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx+\frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right);$$

dabei ist der Integrationsweg für das rechts stehende Integral nur der Bedingung unterworfen, vollständig im Innern von $K^{(\nu)}$ zu verlaufen. Setzt man alsdann $w=u+vi$, so ist die so für alle inneren Punkte von $K^{(\nu)}$ definierte Größe w eine Funktion der komplexen Veränderlichen $z=x+yi$. Auf Grund der letzten vor dem aufgestellten Satze stehenden Gleichung erhält man ohne Mühe:

$$w_z = u_{r,t} + v_{r,t} i = v_0 i + \frac{1}{2\nu\pi} \int_0^{2\nu\pi} f(\varphi) \frac{R^{\frac{1}{\nu}} e^{\frac{\varphi}{\nu} i} + (z-a)^{\frac{1}{\nu}}}{R^{\frac{1}{\nu}} e^{\frac{\varphi}{\nu} i} - (z-a)^{\frac{1}{\nu}}} d\varphi, \qquad \begin{matrix} (z-a)^{\frac{1}{\nu}} = r^{\frac{1}{\nu}} e^{\frac{t}{\nu} i}, \\ 0 \leq r < R,\ 0 \leq t < 2\nu\pi, \end{matrix}$$

während zugleich die Komponenten $u_{r,t}$ und $v_{r,t}$ von w_z durch die Gleichungen:

$$u_{r,t} = \frac{1}{2\nu\pi} \int_0^{2\nu\pi} f(\varphi) \frac{R^{\frac{2}{\nu}} - r^{\frac{2}{\nu}}}{R^{\frac{2}{\nu}} - 2 R^{\frac{1}{\nu}} r^{\frac{1}{\nu}} \cos\left(\frac{t-\varphi}{\nu}\right) + r^{\frac{2}{\nu}}} d\varphi, \quad v_{r,t} = v_0 + \frac{1}{2\nu\pi} \int_0^{2\nu\pi} f(\varphi) \frac{2 R^{\frac{1}{\nu}} r^{\frac{1}{\nu}} \sin\left(\frac{t-\varphi}{\nu}\right)}{R^{\frac{2}{\nu}} - 2 R^{\frac{1}{\nu}} r^{\frac{1}{\nu}} \cos\left(\frac{t-\varphi}{\nu}\right) + r^{\frac{2}{\nu}}} d\varphi,$$

$$0 \leq r < R, \quad 0 \leq t < 2\nu\pi,$$

bestimmt sind.

Die Funktion w_z läßt sich für das Innere von $K^{(\nu)}$ durch eine nach Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{\nu}}$ mit ganzen positiven Exponenten fortschreitende Reihe, deren Koeffizienten von z unabhängig sind, darstellen, und entsprechend lassen sich die Funktionen $u_{r,t}$, $v_{r,t}$ für das Innere von $K^{(\nu)}$ durch Reihen, die nach Potenzen von $r^{\frac{1}{\nu}}$ mit ganzen positiven Exponenten fortschreiten und als Koeffizienten Funktionen von t besitzen, darstellen. Man erhält, unter Berücksichtigung der am Ende von Art. 1 gemachten Entwicklungen, zunächst für w_z die Darstellung:

$$w_z = u_{r,t} + v_{r,t} i = c_0 + c_1 (z-a)^{\frac{1}{\nu}} + c_2 (z-a)^{\frac{2}{\nu}} + \cdots + c_n (z-a)^{\frac{n}{\nu}} + \cdots, \qquad \begin{matrix} (z-a)^{\frac{1}{\nu}} = r^{\frac{1}{\nu}} e^{\frac{t}{\nu} i}, \\ 0 \leq r < R,\ 0 \leq t < 2\nu\pi, \end{matrix}$$

wobei

$$c_0 = u_0 + v_0 i, \qquad u_0 = \frac{1}{2\nu\pi} \int_0^{2\nu\pi} f(\varphi) d\varphi, \qquad \underset{n>0}{c_n} = \frac{1}{\nu\pi R^{\frac{n}{\nu}}} \int_0^{2\nu\pi} f(\varphi) e^{-n \frac{\varphi}{\nu} i} d\varphi$$

ist, und weiter dann für die Komponenten $u_{r,t}$ und $v_{r,t}$ von w_z die Darstellungen:

$$u_{r,t} = u_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1}{\nu\pi} \int_0^{2\nu\pi} f(\varphi) \cos n \left(\frac{t-\varphi}{\nu}\right) d\varphi \right) \frac{r^{\frac{n}{\nu}}}{R^{\frac{n}{\nu}}}, \qquad v_{r,t} = v_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1}{\nu\pi} \int_0^{2\nu\pi} f(\varphi) \sin n \left(\frac{t-\varphi}{\nu}\right) d\varphi \right) \frac{r^{\frac{n}{\nu}}}{R^{\frac{n}{\nu}}},$$

$$0 \leq r < R, \quad 0 \leq t < 2\nu\pi.$$

Bei den vorhergehenden Betrachtungen ist der Fall, wo $\nu = 1$, der Punkt $z = a$ also ein 0-facher Windungspunkt der Fläche T, und entsprechend die Fläche $K^{(\nu)}$ eine einfache Kreisfläche ist, wie schon früher bemerkt, nicht ausgeschlossen. Für den speziellen Fall $a = 0$, $\nu = 1$ reduzieren sich die hier erhaltenen Resultate auf die in Art. 1. und Art. 2. dieses Abschnittes gewonnenen.

5.

Auf Grund des im vorhergehenden Artikel gewonnenen Satzes I läßt sich jetzt die allgemeinere Aufgabe lösen, zur Fläche $K^{(\nu)}$ eine Funktion $u = u' + u''i$ zu bestimmen, welche für alle vom Punkte $z = a$ verschiedenen Punkte x, y der Fläche sich ebenso verhält, wie die in dem Satze definierte Funktion u, für den Punkt $z = a$ aber in derselben Weise unstetig wird wie eine gleich näher zu charakterisierende komplexe Funktion $\overline{u} = \overline{u}' + \overline{u}''i$, in dem Sinne, daß die Differenz $u - \overline{u}$ sich in der Umgebung des Punktes $z = a$ wie eine für diesen Punkt stetige Funktion verhält.

Zunächst soll die Funktion $\overline{u}$ definiert werden. Zu dem Ende führe man in der Fläche $K^{(\nu)}$ einen mit l zu bezeichnenden Schnitt vom Punkte $z = a$ aus längs des durch die Gleichung $t = 0$ bestimmten Radius bis zur Begrenzung, bezeichne die auf diese Weise aus der Fläche $K^{(\nu)}$ entstandene, von der zum Radius R gehörigen ν-fachen Kreislinie und den beiden Seiten des Schnittes l begrenzte Fläche mit $\widetilde{K}^{(\nu)}$ und ordne alsdann dem durch die Polarkoordinaten r, t, ${\scriptstyle 0 < r < R,\ 0 < t < 2\nu\pi}$, auf Grund der Gleichung $z = x + yi = a + re^{ti}$ fixierten Punkte x, y dieser Fläche die durch die Gleichung:

$$w_z = \mathfrak{L} \ln \frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{\nu}}} + \frac{\mathfrak{L}_1}{(z-a)^{\frac{1}{\nu}}} + \frac{\mathfrak{L}_2}{(z-a)^{\frac{2}{\nu}}} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_m}{(z-a)^{\frac{m}{\nu}}}$$

$$= \mathfrak{L} \ln \frac{1}{r^{\frac{1}{\nu}}} - \mathfrak{L}\frac{t}{\nu}i + \frac{\mathfrak{L}_1}{r^{\frac{1}{\nu}}} e^{-\frac{t}{\nu}i} + \frac{\mathfrak{L}_2}{r^{\frac{2}{\nu}}} e^{-2\frac{t}{\nu}i} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_m}{r^{\frac{m}{\nu}}} e^{-m\frac{t}{\nu}i} \qquad \begin{matrix} (z-a)^{\frac{1}{\nu}} = r^{\frac{1}{\nu}} e^{\frac{t}{\nu}i}, \\ 0 < r < R,\ 0 \leq t < 2\nu\pi, \end{matrix}$$

— bei der die $\mathfrak{L}$ irgend welche komplexe Konstanten, die teilweise auch den Wert Null haben können, bezeichnen und unter $\ln \frac{1}{r^{\frac{1}{\nu}}}$ die reelle Größe $-\frac{1}{\nu}\int_1^r \frac{dr}{r}$ zu verstehen ist — bestimmte Größe w_z zu. Die so auf die Fläche $\widetilde{K}^{(\nu)}$ bezogene Funktion w_z ist dann in dieser Fläche, vom Punkte $z = a$ abgesehen, eine einwertige und stetige Funktion des Punktes x, y, deren Werte in je zwei auf verschiedenen Seiten des Schnittes l gelegenen, aber demselben Werte von z entsprechenden Punkten $r = r$, $t = 0$ und $r = r$, $t = 2\nu\pi$ durch die Gleichung $w_z^+ - w_z^- = 2\pi i \mathfrak{L}$ verknüpft sind, wenn die durch $t = 0$ bestimmte Seite des Schnittes l die positive, die durch $t = 2\nu\pi$ bestimmte Seite die negative genannt wird. Nach diesen Vorbereitungen definiere man jetzt die Funktion $\overline{u}$ durch denjenigen Ausdruck, welcher aus dem ersten die Funktion w_z darstellenden Ausdrucke dadurch hervorgeht, daß man an Stelle der darin vorkommenden, die Konstanten $\mathfrak{L}$ als Multiplikatoren besitzenden Funktionen von z ihre reellen Teile treten läßt, und bezeichne zugleich denjenigen Ausdruck, welcher dadurch entsteht, daß man an Stelle der genannten Funktionen von z ihre lateralen Teile treten läßt, mit $\bar{v}i$. Die so definierten Funktionen $\bar{u}$, $\bar{v}$ werden dann als Funktionen der Polarkoordinaten r, t dargestellt durch die Gleichungen:

$$\bar{u}_{r,t} = \mathfrak{L} \ln \frac{1}{r^{\frac{1}{\nu}}} + \frac{\mathfrak{L}_1}{r^{\frac{1}{\nu}}} \cos \frac{t}{\nu} + \frac{\mathfrak{L}_2}{r^{\frac{2}{\nu}}} \cos \frac{2t}{\nu} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_m}{r^{\frac{m}{\nu}}} \cos \frac{mt}{\nu},$$

$$\bar{v}_{r,t} = -\mathfrak{L}\,\frac{t}{\nu} - \frac{\mathfrak{L}_1}{r^{\frac{1}{\nu}}} \sin \frac{t}{\nu} - \frac{\mathfrak{L}_2}{r^{\frac{2}{\nu}}} \sin \frac{2t}{\nu} - \cdots - \frac{\mathfrak{L}_m}{r^{\frac{m}{\nu}}} \sin \frac{mt}{\nu}, \qquad {\scriptstyle 0 < r < R,\ 0 \le t < 2\nu\pi},$$

und es ist zugleich $\bar{w}_z = \bar{u}_{r,t} + \bar{v}_{r,t} i$. Die Funktion u ist in der Fläche $K^{(\nu)}$, vom Punkte $z = a$ abgesehen, eine einwertige und stetige Funktion des Punktes x, y, welche für jeden Punkt R, t des Randes von $K^{(\nu)}$ mit der durch die Gleichung $f(t) = \bar{u}_{R,t}$ definierten, einwertigen, stetigen und mit der Periode $2\nu\pi$ periodischen Funktion der reellen Veränderlichen t dem Werte nach übereinstimmt, für jeden vom Punkte $z = a$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche stetige Derivierte nach x und y von jeder Ordnung besitzt und in derselben Ausdehnung der Differentialgleichung $\Delta \bar{u} = 0$ genügt. Sie ist zudem mit der Funktion v ihrer Entstehung gemäß für jeden vom Punkte $z = a$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche $K^{(\nu)}$ verknüpft durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Nachdem so die Funktion u definiert ist, gelangt man durch einfache Überlegungen zu dem folgenden, die Lösung der zu Anfang des Artikels gestellten Aufgabe enthaltenden

Satz II. *„Ist in der über der Z-Ebene ausgebreiteten n-blättrigen Fläche T durch eine um den $(\nu-1)$-fachen Windungspunkt $z = a$ als Mittelpunkt mit dem Radius R beschriebene ν-fache Kreislinie eine ν-blättrige Kreisfläche $K^{(\nu)}$ abgegrenzt, so existiert zu dieser Kreisfläche immer eine und nur eine Funktion $u = u' + u''i$ des durch die Polarkoordinaten r, t, ${\scriptstyle 0 \le r < R,\ 0 < t < 2\nu\pi}$, auf Grund der Gleichung $z = x + yi = a + re^{ti}$ fixierten Punktes x, y, die für jeden vom Punkte $z = a$ verschiedenen Punkt der Fläche einwertig und stetig ist, für den Punkt $z = a$ aber in derselben Weise unstetig wird wie die durch die Gleichung:*

$$\bar{u}_{r,t} = \mathfrak{L} \ln \frac{1}{r^{\frac{1}{\nu}}} + \frac{\mathfrak{L}_1}{r^{\frac{1}{\nu}}} \cos \frac{t}{\nu} + \frac{\mathfrak{L}_2}{r^{\frac{2}{\nu}}} \cos \frac{2t}{\nu} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_m}{r^{\frac{m}{\nu}}} \cos \frac{mt}{\nu}, \qquad {\scriptstyle 0 < r < R,\ 0 \le t < 2\nu\pi},$$

für jeden vom Punkte $z = a$ verschiedenen Punkt der Fläche definierte komplexe Funktion $\bar{u}_{r,t}$ — in dem Sinne, daß die Differenz $u_{r,t} - \bar{u}_{r,t}$ mit unbegrenzt abnehmendem r gleichmäßig für alle Werte von t gegen eine von t unabhängige Größe konvergiert — die ferner für jeden Randpunkt R, t mit einer vorgegebenen einwertigen, stetigen und mit der Periode $2\nu\pi$

periodischen komplexen Funktion $f(t) = f'(t) + f''(t)i$ *der reellen Veränderlichen* t *dem Werte nach übereinstimmt, endlich für jeden vom Punkte* $z = a$ *verschiedenen inneren Punkt der Fläche stetige Derivierte* $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *besitzt und der partiellen Differentialgleichung* $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *genügt. Diese Funktion* u *wird, wenn man noch die einwertige, stetige und mit der Periode* $2\nu\pi$ *periodische Funktion der reellen Veränderlichen* t, *in welche* $\bar{u}_{r,t}$ *für* $r = R$ *übergeht, mit* $\bar{f}(t)$ *bezeichnet, für jeden vom Punkte* $z = a$ *verschiedenen Punkt der Fläche als Funktion der Polarkoordinaten* r, t *dargestellt durch die Gleichungen:*

$$(\mathrm{U}_2.) \qquad u_{r,t} = \bar{u}_{r,t} + \frac{1}{2\nu\pi}\int\limits_0^{2\nu\pi} [f(q) - \bar{f}(q)] \frac{R^{\frac{2}{\nu}} - r^{\frac{2}{\nu}}}{R^{\frac{2}{\nu}} - 2R^{\frac{1}{\nu}} r^{\frac{1}{\nu}} \cos\left(\frac{t-q}{\nu}\right) + r^{\frac{2}{\nu}}}\, dq, \qquad u_{R,t} = f(t), \quad {\scriptstyle 0 < r < R, \atop 0 \leq t < 2\nu\pi.}\text{“}$$

Daß durch die Gleichungen $(\mathrm{U}_2.)$ in der Tat eine Funktion u der verlangten Art für jeden vom Punkte $z = a$ verschiedenen Punkt der Fläche dargestellt wird, ergibt sich unmittelbar, wenn man die oben erwähnten Eigenschaften der Funktion $\bar{u}$ und zugleich die aus Satz I des vorigen Artikels sich ergebenden Eigenschaften des hier in Verbindung mit $\bar{u}$ auftretenden Integrals berücksichtigt. Daß diese Funktion u aber auch die einzige derartige Funktion ist, erkennt man, wenn man beachtet, daß die mit einer Funktion u der verlangten Art und der gegebenen Funktion $\bar{u}$ gebildete Differenz $\hat{u} = u - \bar{u}$ dadurch in eine in der ganzen Fläche $K^{(\nu)}$ einwertige und stetige Funktion verwandelt werden kann, daß man ihr für den Punkt $z = a$, für den sie einen Wert zunächst nicht besitzt, die der Voraussetzung gemäß existierende Größe $g = \lim\limits_{r=0}(u_{r,t} - \bar{u}_{r,t})$ als Wert zuschreibt, und daß die so vervollständigte Funktion $\hat{u}$ — da sie im übrigen für jeden vom Punkte $z = a$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche stetige Derivierte $\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial y}, \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}$ besitzt und der Differentialgleichung $\Delta \hat{u} = 0$ genügt, auch für jeden Randpunkt R, t mit der Funktion $f(t) - \bar{f}(t)$ dem Werte nach übereinstimmt — auf Grund von Satz I des vorigen Artikels durch diejenigen Gleichungen dargestellt wird, welche aus den dort angegebenen Gleichungen $(\mathrm{U}_1.)$ hervorgehen, wenn man darin u durch $\hat{u}$, $f(q)$ durch $f(q) - \bar{f}(q)$ und $f(t)$ durch $f(t) - \bar{f}(t)$ ersetzt.

Zu der gewonnenen Funktion u läßt sich eine einwertige und stetige Funktion $v = v' + v''i$ des in seiner Bewegung auf die Fläche $\widetilde{K}^{(\nu)}$ nach Ausschluß der Begrenzungslinie $r = R$ und des Punktes $z = a$ beschränkten Punktes x, y finden, welche für jeden solchen Punkt mit u verknüpft ist durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Eine solche Funktion v ist für jeden der erwähnten Punkte x, y von $\widetilde{K}^{(\nu)}$ vollständig bestimmt, sobald man noch den Wert $v_{r',0}$, welchen sie für den auf der positiven Seite des Schnittes l gelegenen Punkt $r = r'$, $t = 0$, $0 < r' < R$, besitzen soll, angibt. Unter Hinzunahme der Größe $v_{r',0}$ erhält man nämlich zur Bestimmung von v die Gleichung:

$$v = v_{r',0} + \int_{r',0}^{x,y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right);$$

dabei ist der Integrationsweg für das rechts stehende Integral nur den Bedingungen unterworfen, den Schnitt l nicht zu überschreiten und weder den Punkt $z = a$ noch auch Punkte der Begrenzungslinie $r = R$ zu enthalten. Eine Darstellung von v als Funktion der Polarkoordinaten r, t läßt sich aber auch direkt gewinnen, wenn man die am Ende des vorigen Artikels durchgeführte Untersuchung und das in diesem Artikel über die Beziehungen zwischen u und $\bar{v}$ Gesagte berücksichtigt. Man erhält dann ohne Mühe für $v_{r,t}$ die Darstellung:

$$v_{r,t} = C_{r'} + \bar{v}_{r,t} + \frac{1}{2\nu\pi} \int_0^{2\nu\pi} [f(\varphi) - \bar{f}(\varphi)] \frac{2 R^{\frac{1}{\nu}} r^{\frac{1}{\nu}} \sin\left(\frac{t-\varphi}{\nu}\right)}{R^{\frac{2}{\nu}} - 2 R^{\frac{1}{\nu}} r^{\frac{1}{\nu}} \cos\left(\frac{t-\varphi}{\nu}\right) + r^{\frac{2}{\nu}}} d\varphi, \qquad \begin{matrix} 0 < r < R, \\ 0 < t < 2\nu\pi, \end{matrix}$$

wobei $C_{r'}$ eine nur von r' und der vorgegebenen Größe $v_{r',0}$ abhängige Größe bezeichnet, die als Funktion dieser Größen erhalten wird, wenn man in der vorstehenden Gleichung r, t in $r', 0$ übergehen läßt und die Gleichung $\bar{v}_{r',0} = 0$ beachtet.

Die Funktion v ist für jeden den Bedingungen $0 < r < R$, $0 \leq t \gtreqless 2\nu\pi$ genügenden Punkt r, t der Fläche $\widetilde{K}^{(\nu)}$ einwertig und stetig, wird für den Punkt $z = a$ in derselben Weise unstetig wie die Funktion $\bar{v}$ und besitzt zudem in je zwei auf verschiedenen Seiten des Schnittes l gelegenen, aber demselben Werte von z entsprechenden Punkten $r = r$, $t = 0$ und $r = r$, $t = 2\nu\pi$ Werte, die durch die Gleichung $v^+ - v^- = \bar{v}^+ - \bar{v}^- = 2\pi\mathfrak{L}$ verknüpft sind.

Setzt man jetzt $w = u + vi$, so ist die so für jeden nicht auf der Begrenzungslinie $r = R$ liegenden und auch nicht mit dem Punkte $z = a$ zusammenfallenden Punkt der Fläche $\widetilde{K}^{(\nu)}$ definierte Größe w eine Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + yi$. Diese Funktion w_z, die durch die Gleichung:

$$w_z = u_{r,t} + v_{r,t} i = C_{r'} i + \bar{w}_z + \frac{1}{2\nu\pi} \int_0^{2\nu\pi} [f(\varphi) - \bar{f}(\varphi)] \frac{R^{\frac{1}{\nu}} e^{\frac{\varphi}{\nu} i} + (z-a)^{\frac{1}{\nu}}}{R^{\frac{1}{\nu}} e^{\frac{\varphi}{\nu} i} - (z-a)^{\frac{1}{\nu}}} d\varphi, \qquad \begin{matrix} (z-a)^{\frac{1}{\nu}} = r^{\frac{1}{\nu}} e^{\frac{t}{\nu} i}, \\ 0 < r < R,\ 0 \leq t \gtreqless 2\nu\pi, \end{matrix}$$

dargestellt wird, ist für jeden der Bedingung $0 < r < R$, $0 \leq t \gtreqless 2\nu\pi$ genügenden Punkt r, t

der Fläche $\tilde{K}^{(\nu)}$ einwertig und stetig, wird für den Punkt $z = a$ in derselben Weise unstetig wie die Funktion w_z und besitzt zudem in je zwei auf verschiedenen Seiten des Schnittes l gelegenen, aber demselben Werte von z entsprechenden Punkten $r = r$, $t = 0$ und $r = r$, $t = 2\nu\pi$ Werte, die durch die Gleichung $w_z^+ - w_z^- = w_z^+ - w_z^- = 2\pi i \mathfrak{L}$ verknüpft sind. Unter Berücksichtigung der am Ende des vorigen Artikels durchgeführten Untersuchung erhält man schließlich noch für w_z die Darstellung:

$$w_z = u_{r,t} + v_{r,t}\, i = \mathfrak{L} \ln \frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{\nu}}} + \frac{\mathfrak{L}_1}{(z-a)^{\frac{1}{\nu}}} + \frac{\mathfrak{L}_2}{(z-a)^{\frac{2}{\nu}}} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_m}{(z-a)^{\frac{m}{\nu}}} \qquad {\scriptstyle (z-a)^{\frac{1}{\nu}} = r^{\frac{1}{\nu}} e^{\frac{t}{\nu} i},}$$

$$+ c_0 + c_1 (z-a)^{\frac{1}{\nu}} + c_2 (z-a)^{\frac{2}{\nu}} + \cdots + c_n (z-a)^{\frac{n}{\nu}} + \cdots, \qquad {\scriptstyle 0 < r < R,\ 0 \leq t < 2\nu\pi,}$$

wobei

$$c_0 = C_\nu i + \frac{1}{2\nu\pi} \int\limits_0^{2\nu\pi} [f(\varphi) - f(\varphi)]\, d\varphi, \quad \underset{n>0}{c_n} = \frac{1}{\nu\pi R^{\frac{n}{\nu}}} \int\limits_0^{2\nu\pi} [f(\varphi) - f(\varphi)]\, e^{-n\frac{\varphi}{\nu} i}\, d\varphi$$

ist.

6.

In der über der Z-Ebene ausgebreiteten n-blättrigen Fläche T sei durch eine ν-fache Kreislinie eine den $(\nu - 1)$-fachen Windungspunkt $\infty^{(\nu)}$ enthaltende ν-blättrige Kreisergänzungsfläche $K'^{(\nu)}$ abgegrenzt. Der gemeinsame Modul der zu den Punkten der begrenzenden Kreislinie gehörigen Werte von z möge mit R bezeichnet werden. Die Lage eines Punktes z in dieser Fläche denke man sich durch die zu diesem Zwecke in Art. 3 dieses Abschnittes eingeführten, mit z durch die Gleichung:

$$z = x + yi = re^{ti}, \qquad {\scriptstyle r > R,\ 0 > t > -2\nu\pi,}$$

verknüpften Polarkoordinaten r, t bestimmt.

Zu dieser Fläche $K'^{(\nu)}$ soll nun eine in der ganzen Fläche einwertige und stetige Funktion $u = u' + u''i$ des Punktes x, y bestimmt werden, welche für jeden Punkt R, t des Randes von $K'^{(\nu)}$ mit einer vorgegebenen einwertigen, stetigen und mit der Periode $2\nu\pi$ periodischen komplexen Funktion $f(t) = f'(t) + f''(t)i$ der reellen Veränderlichen t dem Werte nach übereinstimmt, für jeden vom Punkte $\infty^{(\nu)}$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche stetige Derivierte $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ besitzt und in derselben Ausdehnung der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt, während es dahingestellt bleiben soll, wie die genannten Derivierten sich verhalten, wenn der Punkt x, y dem Punkte $\infty^{(\nu)}$ zustrebt.

Zur Lösung der gestellten Aufgabe nehme man an, daß eine Funktion u der verlangten Art existiere, und bezeichne den Wert, den sie im Punkte r, t der Fläche $K'^{(\nu)}$

besitzt mit $u_{r,t}$, den Wert, den sie im Punkte $\infty^{(\nu)}$ besitzt, mit $u_{\infty^{(\nu)}} = \lim\limits_{r=\infty} u_{r,t}$. Bezieht man alsdann die Punkte r, t, ${\scriptstyle r > R,\ 0 > t > -2\nu\pi}$, der Fläche $K'^{(\nu)}$ und die auf Grund der Gleichung:

$$z = \bar{x} + \bar{y}i = \bar{r}e^{\bar{t}i}$$

ebenfalls durch Polarkoordinaten fixierten Punkte $\bar{r}, \bar{t}$, ${\scriptstyle 0 < \bar{r} < R,\ 0 < \bar{t} < 2\pi}$, der in einer Z-Ebene liegenden, durch den Mittelpunkt $\bar{z} = 0$ und den Radius R bestimmten Kreisfläche K wechselseitig eindeutig aufeinander durch die Gleichungen:

$$(\mathrm{G}_0'.) \qquad \frac{\bar{r}}{R} = \sqrt[\nu]{\frac{R}{r}}, \qquad \bar{t} = -\frac{t}{\nu},$$

indem man zugleich, entsprechend der aus diesen Gleichungen für die zugehörigen Größen $\bar{z}, z$ sich ergebenden Beziehung:

$$(\mathrm{G}'.) \qquad \frac{\bar{z}}{R} = \frac{R^{\frac{1}{\nu}}}{z^{\frac{1}{\nu}}},$$

als Korrespondenten des Punktes $\infty^{(\nu)}$ den Punkt $\bar{z} = 0$ erklärt, und ordnet der Fläche K eine Funktion $\bar{u} = \bar{u}_{\bar{r},\bar{t}}$ des Punktes $\bar{r}, \bar{t}$ zu durch die Gleichungen $\bar{u}_{\bar{r},\bar{t}} = u_{r,t}$, $\bar{u}_0 = u_{\infty^{(\nu)}}$, wobei r, t den dem Punkte $\bar{r}, \bar{t}$ entsprechenden Punkt der Fläche $K'^{(\nu)}$ bezeichnen soll, setzt auch $f(-\nu\bar{t}) = \bar{f}(\bar{t})$ und beachtet, daß dann die Gleichung $\bar{u}_{R,\bar{t}} = \bar{f}(\bar{t})$ besteht, so ist die so definierte Funktion $\bar{u}$ — da die Beziehung $\bar{u}_{\bar{r},\bar{t}} = u_{r,t}$ für jedes der Bedingung $0 \leqq \bar{r} \gtreqless R$ genügende $\bar{r}$ besteht, $u_{r,t}$ allenthalben stetig ist und den Gleichungen $(\mathrm{G}_0'.)$ zufolge einer in $K'^{(\nu)}$ stetigen Funktion des Punktes r, t immer eine in K stetige Funktion des Punktes $\bar{r}, \bar{t}$ entspricht — eine in der ganzen Kreisfläche K einwertige und stetige Funktion des Punktes $\bar{x}, \bar{y}$, die für jeden Punkt $R, \bar{t}$ des Randes mit der Funktion $\bar{f}(\bar{t})$ dem Werte nach übereinstimmt, die zudem, wie durch die in Art. 4 an der entsprechenden Stelle angewandte Schlußweise gezeigt werden kann, für jeden vom Punkte $\bar{z} = 0$ verschiedenen inneren Punkt von K stetige Derivierte $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$ besitzt und der Differentialgleichung $\Delta \bar{u} = 0$ genügt und die sich daher auf Grund des in Art. 2 dieses Abschnittes bewiesenen Satzes darstellen läßt durch die Gleichungen:

$$(\mathrm{U}'.) \quad \bar{u}_{\bar{r},\bar{t}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{f}(\varphi)\frac{R^2 - \bar{r}^2}{R^2 - 2R\bar{r}\cos(\bar{t}-\varphi) + \bar{r}^2}\,d\varphi, \quad \bar{u}_0 = \lim_{\bar{r}=0} \bar{u}_{\bar{r},\bar{t}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{f}(\varphi)\,d\varphi, \quad \bar{u}_{R,\bar{t}} = \bar{f}(\bar{t}), \quad {\scriptstyle 0 < \bar{r} < R,\ 0 < \bar{t} < 2\pi.}$$

Führt man jetzt in die eben gewonnenen, die Funktion $\bar{u}$ für jeden Punkt $\bar{r}, \bar{t}$ der Fläche K darstellenden Gleichungen $(\mathrm{U}'.)$ an Stelle der Größen $\bar{r}, \bar{t}$ die Größen r, t

mit Hilfe der Gleichungen (G'_0.) und zugleich an Stelle der Integrationsvariablen φ eine neue Integrationsvariable ψ durch die Substitution $\psi = -\frac{\varphi}{\nu}$ ein, indem man beachtet, daß dann $u_{r,\bar{t}}$ in $u_{r,t}$ übergeht, und daß die Gleichungen $u_0 = u_{\infty^{(\nu)}}$, $f\left(-\frac{\varphi}{\nu}\right) = f(\varphi)$ bestehen, so erhält man die Gleichungen:

$$(\mathrm{U}'.)\quad u_{r,t} = -\frac{1}{2\nu\pi}\int\limits_0^{-2\nu\pi} f(\varphi)\frac{r^{\frac{2}{\nu}} - R^{\frac{2}{\nu}}}{R^{\frac{2}{\nu}} - 2R^{\frac{1}{\nu}}r^{\frac{1}{\nu}}\cos\left(\frac{\varphi - t}{\nu}\right) + r^{\frac{2}{\nu}}}\,d\varphi,\quad u_{\infty^{(\nu)}} = \lim_{r=\infty} u_{r,t} = -\frac{1}{2\nu\pi}\int\limits_0^{-2\nu\pi} f(\varphi)\,d\varphi\,,\quad u_{R,t} = f(t),$$
$$r > R,\quad 0 > t > -2\nu\pi,$$

bei denen, ebenso wie im folgenden, unter $r^{\frac{1}{\nu}}$ die Größe $\sqrt[\nu]{r}_{+}$, unter $R^{\frac{1}{\nu}}$ die Größe $\sqrt[\nu]{R}_{+}$ zu verstehen ist. Diese Gleichungen sind abgeleitet worden auf Grund der Annahme, daß eine Funktion u der verlangten Art existiert. Mit Rücksicht hierauf muß also schließlich noch gezeigt werden, daß die durch die Gleichungen (U'.) dargestellte Funktion u in der Tat eine Funktion der verlangten Art ist. Nun folgt aber zunächst — da die Gleichung $u_{r,t} = \bar{u}_{r,t}$ für jedes der Bedingung $r \geqq R$ genügende r besteht, $\bar{u}_{r,t}$ allenthalben stetig ist und den Gleichungen (G'_0.) zufolge einer in K stetigen Funktion des Punktes r, t immer eine in $K'^{(\nu)}$ stetige Funktion des Punktes r, t entspricht, auch $u_{R,t} = f(t)$ ist — daß die erhaltene Funktion u eine in der ganzen Fläche $K'^{(\nu)}$ einwertige und stetige Funktion des Punktes x, y ist, die für jeden Punkt R, t des Randes von $K'^{(\nu)}$ mit der Funktion $f(t)$ dem Werte nach übereinstimmt. Daß diese Funktion u aber auch für jeden vom Punkte $\infty^{(\nu)}$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche stetige Derivierte $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ besitzt und der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt, erkennt man, indem man beachtet, daß bei dem die Funktion $u_{r,t}$ darstellenden Integrale der zwischen $f(\varphi)$ und $d\varphi$ stehende Ausdruck, der Gleichung:

$$\frac{z^{\frac{1}{\nu}} + R^{\frac{1}{\nu}}e^{\frac{\varphi}{\nu}i}}{z^{\frac{1}{\nu}} - R^{\frac{1}{\nu}}e^{\frac{\varphi}{\nu}i}} = \frac{r^{\frac{1}{\nu}}e^{\frac{t}{\nu}i} + R^{\frac{1}{\nu}}e^{\frac{\varphi}{\nu}i}}{r^{\frac{1}{\nu}}e^{\frac{t}{\nu}i} - R^{\frac{1}{\nu}}e^{\frac{\varphi}{\nu}i}} = \frac{r^{\frac{2}{\nu}} - R^{\frac{2}{\nu}}}{R^{\frac{2}{\nu}} - 2R^{\frac{1}{\nu}}r^{\frac{1}{\nu}}\cos\left(\frac{\varphi - t}{\nu}\right) + r^{\frac{2}{\nu}}} + \frac{2R^{\frac{1}{\nu}}r^{\frac{1}{\nu}}\sin\left(\frac{\varphi - t}{\nu}\right)}{R^{\frac{2}{\nu}} - 2R^{\frac{1}{\nu}}r^{\frac{1}{\nu}}\cos\left(\frac{\varphi - t}{\nu}\right) + r^{\frac{2}{\nu}}}\,i$$

gemäß, der reelle Teil μ einer im Innern von $K'^{(\nu)}$ allenthalben einwertigen und stetigen Funktion $\mu + \nu i$ der komplexen Veränderlichen $z = x + yi$ ist und infolgedessen, als Funktion der reellen Veränderlichen x, y betrachtet, für jeden vom Punkte $\infty^{(\nu)}$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche $K'^{(\nu)}$ nicht nur stetige Derivierte nach x und y von jeder Ordnung besitzt, sondern auch der Differentialgleichung $\Delta\mu = 0$ genügt. Die durch die Gleichungen (U'.) dargestellte Funktion u genügt also in der Tat den zu

Anfang des Artikels aufgestellten Bedingungen und ist zugleich, wie aus dem Gange der Untersuchung unmittelbar hervorgeht, die einzige derartige Funktion.

Die in diesem Artikel bis jetzt erhaltenen Resultate lassen sich nun in den folgenden Satz zusammenfassen:

Satz III. *„Ist in der über der Z-Ebene ausgebreiteten n-blättrigen Fläche T durch eine der Gleichung* $\mod z = R$ *entsprechende ν-fache Kreislinie eine den* $(\nu-1)$*-fachen Windungspunkt* $\infty^{(\nu)}$ *enthaltende ν-blättrige Kreisergänzungsfläche* $K'^{(\nu)}$ *abgegrenzt, so existiert zu dieser Kreisergänzungsfläche immer eine und nur eine in der ganzen Fläche einwertige und stetige Funktion* $u = u' + u''i$ *des durch die Polarkoordinaten* r, t, $_{r>R,\ 0 \geqq t > -2\nu\pi}$, *auf Grund der Gleichung* $z = x + yi = re^{ti}$ *fixierten Punktes* x, y, *welche für jeden Punkt* R, t *des Randes von* $K'^{(\nu)}$ *mit einer vorgegebenen einwertigen, stetigen und mit der Periode* $2\nu\pi$ *periodischen komplexen Funktion* $f(t) = f'(t) + f''(t)i$ *der reellen Veränderlichen t dem Werte nach übereinstimmt, für jeden vom Punkte* $\infty^{(\nu)}$ *verschiedenen inneren Punkt der Fläche stetige Derivierte* $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *besitzt und in derselben Ausdehnung der partiellen Differentialgleichung* $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *genügt. Diese Funktion wird für alle Punkte der Fläche* $K'^{(\nu)}$ *als Funktion der Polarkoordinaten r, t dargestellt durch die Gleichungen:*

$$(\mathrm{U}_3.)\quad u_{r,t} = -\frac{1}{2\nu\pi}\int\limits_0^{-2\nu\pi} f(\varphi)\frac{r^{\frac{2}{\nu}} - R^{\frac{2}{\nu}}}{R^{\frac{2}{\nu}} - 2R^{\frac{1}{\nu}}r^{\frac{1}{\nu}}\cos\left(\frac{\varphi - t}{\nu}\right) + r^{\frac{2}{\nu}}}\,d\varphi,\quad u_{\infty^{(\nu)}} = \lim_{r=\infty} u_{r,t} = -\frac{1}{2\nu\pi}\int\limits_0^{-2\nu\pi} f(\varphi)\,d\varphi,\quad u_{R,t} = f(t),$$

$$_{r>R,\ 0 \geqq t > -2\nu\pi.}\text{“}$$

Zu der Funktion u läßt sich eine einwertige und stetige Funktion $v = v' + v''i$ des in seiner Bewegung auf das Innere von $K'^{(\nu)}$ beschränkten Punktes x, y finden, welche für jeden vom Punkte $\infty^{(\nu)}$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche $K'^{(\nu)}$ mit u verknüpft ist durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Eine solche Funktion v ist für jeden im Innern von $K'^{(\nu)}$ gelegenen Punkt x, y vollständig bestimmt, sobald man ihr noch die Bedingung auferlegt, für den Punkt $\infty^{(\nu)}$ eine vorgegebene Größe $v_{\infty^{(\nu)}}$ als Wert zu besitzen, so daß also $\lim\limits_{r=\infty} v_{r,t} = v_{\infty^{(\nu)}}$ ist. Unter Hinzunahme der Größe $v_{\infty^{(\nu)}}$ erhält man nämlich zur Bestimmung von v die Gleichung:

$$v = v_{\infty^{(\nu)}} + \int\limits_{\infty^{(\nu)}}^{x,y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right);$$

dabei ist das rechts stehende Integral als die Grenze aufzufassen, gegen die der Wert des vom Punkte x', y' bis zum Punkte x, y auf einem vollständig im Innern von $K'^{(\nu)}$

verlaufenden Integrationswege erstreckten Integrals konvergiert, wenn der Punkt x', y' dem Punkte $\infty^{(\nu)}$ zustrebt. Setzt man alsdann $w = u + vi$, so ist die so für alle inneren Punkte von $K'^{(\nu)}$ definierte Größe w eine Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + yi$. Auf Grund der letzten vor dem aufgestellten Satze stehenden Gleichung erhält man ohne Mühe:

$$w_z = u_{r,t} + v_{r,t}\,i = v_{\infty^{(\nu)}}\,i - \frac{1}{2\nu\pi}\int_0^{-2\nu\pi} f(\varphi)\,\frac{z^{\frac{1}{\nu}} + R^{\frac{1}{\nu}}e^{\frac{\varphi}{\nu}i}}{z^{\frac{1}{\nu}} - R^{\frac{1}{\nu}}e^{\frac{\varphi}{\nu}i}}\,d\varphi, \qquad \begin{matrix} z^{\frac{1}{\nu}} = r^{\frac{1}{\nu}}e^{\frac{t}{\nu}i}, \\ r > R,\ 0 > t > -2\nu\pi, \end{matrix}$$

während zugleich die Komponenten $u_{r,t}$ und $v_{r,t}$ von w_z durch die Gleichungen:

$$u_{r,t} = -\frac{1}{2\nu\pi}\int_0^{-2\nu\pi} f(\varphi)\,\frac{r^{\frac{2}{\nu}} - R^{\frac{2}{\nu}}}{R^{\frac{2}{\nu}} - 2R^{\frac{1}{\nu}}r^{\frac{1}{\nu}}\cos\left(\frac{\varphi - t}{\nu}\right) + r^{\frac{2}{\nu}}}\,d\varphi, \quad v_{r,t} = v_{\infty^{(\nu)}} - \frac{1}{2\nu\pi}\int_0^{-2\nu\pi} f(\varphi)\,\frac{2R^{\frac{1}{\nu}}r^{\frac{1}{\nu}}\sin\left(\frac{\varphi - t}{\nu}\right)}{R^{\frac{2}{\nu}} - 2R^{\frac{1}{\nu}}r^{\frac{1}{\nu}}\cos\left(\frac{\varphi - t}{\nu}\right) + r^{\frac{2}{\nu}}}\,d\varphi,$$
$$r > R,\quad 0 > t > -2\nu\pi,$$

bestimmt sind.

Die Funktion w_z läßt sich für das Innere von $K'^{(\nu)}$ durch eine nach Potenzen von $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ mit ganzen positiven Exponenten fortschreitende Reihe, deren Koeffizienten von z unabhängig sind, darstellen, und entsprechend lassen sich die Funktionen $u_{r,t}$, $v_{r,t}$ für das Innere von $K'^{(\nu)}$ durch Reihen, die nach Potenzen von $\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ mit ganzen positiven Exponenten fortschreiten und als Koeffizienten Funktionen von t besitzen, darstellen. Man erhält, unter Berücksichtigung der am Ende von Art. 1 gemachten Entwicklungen, zunächst für w_z die Darstellung:

$$w_z = u_{r,t} + v_{r,t}\,i = c_0 + c_1\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{\nu}} + c_2\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{2}{\nu}} + \cdots + c_n\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{n}{\nu}} + \cdots, \qquad \begin{matrix} z^{\frac{1}{\nu}} = r^{\frac{1}{\nu}}e^{\frac{t}{\nu}i}, \\ r > R,\ 0 > t > -2\nu\pi, \end{matrix}$$

wobei

$$c_0 = u_{\infty^{(\nu)}} + v_{\infty^{(\nu)}}\,i, \quad u_{\infty^{(\nu)}} = -\frac{1}{2\nu\pi}\int_0^{-2\nu\pi} f(\varphi)\,d\varphi, \quad \underset{n>0}{c_n} = -\frac{R^{\frac{n}{\nu}}}{\nu\pi}\int_0^{-2\nu\pi} f(\varphi)\,e^{n\frac{\varphi}{\nu}i}\,d\varphi$$

ist, und weiter dann für die Komponenten $u_{r,t}$ und $v_{r,t}$ von w_z die Darstellungen:

$$u_{r,t} = u_{\infty^{(\nu)}} - \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{\nu\pi}\int_0^{-2\nu\pi} f(\varphi)\cos n\left(\frac{\varphi - t}{\nu}\right)d\varphi\right)\frac{R^{\frac{n}{\nu}}}{r^{\frac{n}{\nu}}}, \qquad v_{r,t} = v_{\infty^{(\nu)}} - \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{\nu\pi}\int_0^{-2\nu\pi} f(\varphi)\sin n\left(\frac{\varphi - t}{\nu}\right)d\varphi\right)\frac{R^{\frac{n}{\nu}}}{r^{\frac{n}{\nu}}},$$
$$r > R,\quad 0 > t > -2\nu\pi.$$

Bei den vorhergehenden Betrachtungen ist der Fall, wo $\nu = 1$, der Punkt $\infty^{(\nu)}$ also ein 0-facher Windungspunkt der Fläche T, und entsprechend die Fläche $K'^{(\nu)}$ eine einfache Kreisergänzungsfläche ist, nicht ausgeschlossen.

7.

Auf Grund des im vorhergehenden Artikel gewonnenen Satzes III läßt sich jetzt die allgemeinere Aufgabe lösen, zur Fläche $K'^{(\nu)}$ eine Funktion $u = u' + u''i$ zu bestimmen, welche für alle vom Punkte $\infty^{(\nu)}$ verschiedenen Punkte x, y der Fläche sich ebenso verhält, wie die in dem Satze definierte Funktion u, für den Punkt $\infty^{(\nu)}$ aber in derselben Weise unstetig wird wie eine gleich näher zu charakterisierende komplexe Funktion $\bar{u} = \bar{u}' + \bar{u}''i$, in dem Sinne, daß die Differenz $u - \bar{u}$ für den Punkt $\infty^{(\nu)}$ stetig bleibt.

Zunächst soll die Funktion $\bar{u}$ definiert werden. Zu dem Ende führe man in der Fläche $K'^{(\nu)}$ vom Punkte $R, 0$ der Begrenzung aus längs des durch die Gleichung $t = 0$ bestimmten Strahles einen mit seinem Endpunkte dem Punkte $\infty^{(\nu)}$ zustrebenden Schnitt l, bezeichne die auf diese Weise aus der Fläche $K'^{(\nu)}$ entstandene, von der zum Radius R gehörigen ν-fachen Kreislinie und den beiden Seiten des Schnittes l begrenzte Fläche mit $\widetilde{K}'^{(\nu)}$ und ordne alsdann dem durch die Polarkoordinaten r, t, $r > R,\ 0 > t > -2\nu\pi$, auf Grund der Gleichung $z = x + yi = re^{ti}$ fixierten Punkte x, y dieser Fläche die durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} \bar{w}_z &= \mathfrak{L} \ln z^{\frac{1}{\nu}} + \mathfrak{L}_1 z^{\frac{1}{\nu}} + \mathfrak{L}_2 z^{\frac{2}{\nu}} + \cdots + \mathfrak{L}_m z^{\frac{m}{\nu}} \qquad z^{\frac{1}{\nu}} = r^{\frac{1}{\nu}} e^{\frac{t}{\nu} i}, \\ &= \mathfrak{L} \ln r^{\frac{1}{\nu}} + \mathfrak{L} \frac{t}{\nu} i + \mathfrak{L}_1 r^{\frac{1}{\nu}} e^{\frac{t}{\nu} i} + \mathfrak{L}_2 r^{\frac{2}{\nu}} e^{2\frac{t}{\nu} i} + \cdots + \mathfrak{L}_m r^{\frac{m}{\nu}} e^{m\frac{t}{\nu} i}, \qquad r \geqq R,\ 0 \geqq t \geqq -2\nu\pi, \end{aligned}$$

— bei der die $\mathfrak{L}$ irgend welche komplexe Konstanten, die teilweise auch den Wert Null haben können, bezeichnen und unter $\ln r^{\frac{1}{\nu}}$ die reelle Größe $\frac{1}{\nu}\int_1^r \frac{dr}{r}$ zu verstehen ist — bestimmte Größe $\bar{w}_z$ zu. Die so auf die Fläche $\widetilde{K}'^{(\nu)}$ bezogene Funktion $\bar{w}_z$ ist dann in dieser Fläche, vom Punkte $\infty^{(\nu)}$ abgesehen, eine einwertige und stetige Funktion des Punktes x, y, deren Werte in je zwei auf verschiedenen Seiten des Schnittes l gelegenen, aber demselben Werte von z entsprechenden Punkten $r = r,\ t = 0$ und $r = r,\ t = -2\nu\pi$ durch die Gleichung $\bar{w}_z^+ - \bar{w}_z^- = 2\pi i \mathfrak{L}$ verknüpft sind, wenn die durch $t = 0$ bestimmte Seite des Schnittes l die positive, die durch $t = -2\nu\pi$ bestimmte Seite die negative genannt wird. Nach diesen Vorbereitungen definiere man jetzt die Funktion $\bar{u}$ durch denjenigen Ausdruck, welcher aus dem ersten die Funktion $\bar{w}_z$ darstellenden Ausdrucke dadurch hervorgeht, daß man an Stelle der darin vorkommenden, die Konstanten $\mathfrak{L}$ als

Multiplikatoren besitzenden Funktionen von z ihre reellen Teile treten läßt, und bezeichne zugleich denjenigen Ausdruck, welcher dadurch entsteht, daß man an Stelle der genannten Funktionen von z ihre lateralen Teile treten läßt, mit $\bar{v}i$. Die so definierten Funktionen u, $\bar{v}$ werden dann als Funktionen der Polarkoordinaten r, t dargestellt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_{r,t} &= \mathfrak{L} \ln r^{\frac{1}{\nu}} + \mathfrak{L}_1 r^{\frac{1}{\nu}} \cos\frac{t}{\nu} + \mathfrak{L}_2 r^{\frac{2}{\nu}} \cos\frac{2t}{\nu} + \cdots + \mathfrak{L}_m r^{\frac{m}{\nu}} \cos\frac{mt}{\nu}, \\ v_{r,t} &= \mathfrak{L}\frac{t}{\nu} \qquad + \mathfrak{L}_1 r^{\frac{1}{\nu}} \sin\frac{t}{\nu} + \mathfrak{L}_2 r^{\frac{2}{\nu}} \sin\frac{2t}{\nu} + \cdots + \mathfrak{L}_m r^{\frac{m}{\nu}} \sin\frac{mt}{\nu}, \end{aligned} \qquad {\scriptstyle r \geqq R,\ 0 \geqq t \geqq -2\nu\pi,}$$

und es ist zugleich $w_z = \bar{u}_{r,t} + v_{r,t} i$. Die Funktion u ist in der Fläche $K'^{(\nu)}$, vom Punkte $\infty^{(\nu)}$ abgesehen, eine einwertige und stetige Funktion des Punktes x, y, welche für jeden Punkt R, t des Randes von $K'^{(\nu)}$ mit der durch die Gleichung $f(t) = u_{R,t}$ definierten, einwertigen, stetigen und mit der Periode $2\nu\pi$ periodischen Funktion der reellen Veränderlichen t dem Werte nach übereinstimmt, für jeden vom Punkte $\infty^{(\nu)}$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche stetige Derivierte nach x und y von jeder Ordnung besitzt und in derselben Ausdehnung der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt. Sie ist zudem mit der Funktion v ihrer Entstehung gemäß für jeden vom Punkte $\infty^{(\nu)}$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche $K'^{(\nu)}$ verknüpft durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Nachdem so die Funktion u definiert ist, gelangt man durch einfache Überlegungen zu dem folgenden, die Lösung der zu Anfang des Artikels gestellten Aufgabe enthaltenden

Satz IV. *„Ist in der über der Z-Ebene ausgebreiteten n-blättrigen Fläche T durch eine der Gleichung* $\operatorname{mod} z = R$ *entsprechende ν-fache Kreislinie eine den $(\nu-1)$-fachen Windungspunkt $\infty^{(\nu)}$ enthaltende ν-blättrige Kreisergänzungsfläche $K'^{(\nu)}$ abgegrenzt, so existiert zu dieser Kreisergänzungsfläche immer eine und nur eine Funktion $u = u' + u''i$ des durch die Polarkoordinaten r, t, ${\scriptstyle r > R,\ 0 > t > -2\nu\pi}$, auf Grund der Gleichung $z = x + yi = re^{ti}$ fixierten Punktes x, y, die für jeden vom Punkte $\infty^{(\nu)}$ verschiedenen Punkt der Fläche einwertig und stetig ist, für den Punkt $\infty^{(\nu)}$ aber in derselben Weise unstetig wird wie die durch die Gleichung:*

$$\bar{u}_{r,t} = \mathfrak{L} \ln r^{\frac{1}{\nu}} + \mathfrak{L}_1 r^{\frac{1}{\nu}} \cos\frac{t}{\nu} + \mathfrak{L}_2 r^{\frac{2}{\nu}} \cos\frac{2t}{\nu} + \cdots + \mathfrak{L}_m r^{\frac{m}{\nu}} \cos\frac{mt}{\nu}, \qquad {\scriptstyle r > R,\ 0 > t > -2\nu\pi,}$$

für jeden vom Punkte $\infty^{(\nu)}$ verschiedenen Punkt der Fläche definierte komplexe Funktion $\bar{u}_{r,t}$ — in dem Sinne, daß die Differenz $u_{r,t} - \bar{u}_{r,t}$ mit unbegrenzt wachsendem r gleichmäßig für *alle Werte von t gegen eine von t unabhängige Größe konvergiert — die ferner für jeden Randpunkt R, t mit einer vorgegebenen einwertigen, stetigen und mit der Periode $2\nu\pi$ periodischen komplexen Funktion $f(t) = f'(t) + f''(t)i$ der reellen Veränderlichen t dem Werte nach übereinstimmt, endlich für jeden vom Punkte $\infty^{(\nu)}$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche stetige Derivierte $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ besitzt und der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügt. Diese Funktion u wird, wenn man noch die einwertige, stetige und mit der Periode $2\nu\pi$ periodische Funktion der reellen Veränderlichen t, in welche $\bar{u}_{r,t}$ für $r = R$ übergeht, mit $\bar{f}(t)$ bezeichnet, für jeden vom Punkte $\infty^{(\nu)}$ verschiedenen Punkt der Fläche als Funktion der Polarkoordinaten r, t dargestellt durch die Gleichungen:*

$$(\mathrm{U}_4.)\quad u_{r,t} = \bar{u}_{r,t} - \frac{1}{2\nu\pi}\int_0^{-2\nu\pi}[f(\varphi) - \bar{f}(\varphi)]\,\frac{r^{\frac{2}{\nu}} - R^{\frac{2}{\nu}}}{R^{\frac{2}{\nu}} - 2R^{\frac{1}{\nu}}r^{\frac{1}{\nu}}\cos\left(\frac{\varphi - t}{\nu}\right) + r^{\frac{2}{\nu}}}\,d\varphi, \qquad u_{R,t} = f(t), \quad {\scriptstyle r > R,\; 0 \geqq t \geqq -2\nu\pi.}\text{“}$$

Daß durch die Gleichungen $(\mathrm{U}_1.)$ in der Tat eine Funktion u der verlangten Art für jeden vom Punkte $\infty^{(\nu)}$ verschiedenen Punkt der Fläche dargestellt wird, ergibt sich unmittelbar, wenn man die oben erwähnten Eigenschaften der Funktion $\bar{u}$ und zugleich die aus Satz III des vorigen Artikels sich ergebenden Eigenschaften des hier in Verbindung mit $\bar{u}$ auftretenden Integrals berücksichtigt. Daß diese Funktion u aber auch die einzige derartige Funktion ist, erkennt man, wenn man beachtet, daß die mit einer Funktion u der verlangten Art und der gegebenen Funktion $\bar{u}$ gebildete Differenz $\hat{u} = u - \bar{u}$ dadurch in eine in der ganzen Fläche $K'^{(\nu)}$ einwertige und stetige Funktion des Punktes x, y verwandelt werden kann, daß man ihr für den Punkt $\infty^{(\nu)}$, für den sie einen Wert zunächst nicht besitzt, die der Voraussetzung gemäß existierende Größe $g = \lim_{r=\infty}(u_{r,t} - \bar{u}_{r,t})$ als Wert zuschreibt, und daß die so vervollständigte Funktion $\hat{u}$ — da sie im übrigen für jeden vom Punkte $\infty^{(\nu)}$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche stetige Derivierte $\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}$, $\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}$ besitzt und der Differentialgleichung $\Delta\hat{u} = 0$ genügt, auch für jeden Randpunkt R, t mit der Funktion $f(t) - \bar{f}(t)$ dem Werte nach übereinstimmt — auf Grund von Satz III des vorigen Artikels durch diejenigen Gleichungen dargestellt wird, welche aus den dort angegebenen Gleichungen $(\mathrm{U}_3.)$ hervorgehen, wenn man darin u durch $\hat{u}$, $f(\varphi)$ durch $f(\varphi) - \bar{f}(\varphi)$ und $f(t)$ durch $f(t) - \bar{f}(t)$ ersetzt.

Zu der gewonnenen Funktion u läßt sich eine einwertige und stetige Funktion $v = v' + v''i$ des in seiner Bewegung auf die Fläche $\widetilde{K}'^{(\nu)}$ nach Ausschluß der Begrenzungslinie $r = R$ und des Punktes $\infty^{(\nu)}$ beschränkten Punktes x, y finden, welche für jeden solchen Punkt mit u verknüpft ist durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Eine solche Funktion v ist für jeden der erwähnten Punkte x, y von $\widetilde{K}'^{(\nu)}$ vollständig bestimmt, sobald man noch den Wert $v_{r',0}$, welchen sie für den auf der positiven Seite des Schnittes l gelegenen Punkt $r = r'$, $t = 0$, ${}_{r'>R}$, besitzen soll, angibt. Unter Hinzunahme der Größe $v_{r',0}$ erhält man nämlich zur Bestimmung von v die Gleichung:

$$v = v_{r',0} + \int\limits_{r',0}^{x,y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy \right);$$

dabei ist der Integrationsweg für das rechts stehende Integral nur den Bedingungen unterworfen, den Schnitt l nicht zu überschreiten und auch nicht Punkte der Begrenzungslinie $r = R$ zu enthalten. Eine Darstellung von v als Funktion der Polarkoordinaten r, t läßt sich aber auch direkt gewinnen, wenn man die am Ende des vorigen Artikels durchgeführte Untersuchung und das in diesem Artikel über die Beziehungen zwischen u und v Gesagte berücksichtigt. Man erhält dann ohne Mühe für $v_{r,t}$ die Darstellung:

$$v_{r,t} = C_{r'} + \overline{v}_{r,t} - \frac{1}{2\nu\pi} \int\limits_0^{-2\nu\pi} [f(\varphi) - \overline{f}(\varphi)] \frac{2 R^{\frac{1}{\nu}} r^{\frac{1}{\nu}} \sin\left(\frac{\varphi - t}{\nu}\right)}{R^{\frac{2}{\nu}} - 2 R^{\frac{1}{\nu}} r^{\frac{1}{\nu}} \cos\left(\frac{\varphi - t}{\nu}\right) + r^{\frac{2}{\nu}}}\, d\varphi, \qquad {\scriptstyle r > R,\ 0 > t > -2\nu\pi,}$$

wobei $C_{r'}$ eine nur von r' und der vorgegebenen Größe $v_{r',0}$ abhängige Größe bezeichnet, die als Funktion dieser Größen erhalten wird, wenn man in der vorstehenden Gleichung r, t in $r', 0$ übergehen läßt und die Gleichung $\overline{v}_{r',0} = 0$ beachtet.

Die Funktion v ist für jeden den Bedingungen $r > R$, $0 \gtreqless t \geqq -2\nu\pi$ genügenden Punkt r, t der Fläche $\widetilde{K}'^{(\nu)}$ einwertig und stetig, wird für den Punkt $\infty^{(\nu)}$ in derselben Weise unstetig wie die Funktion $\overline{v}$ und besitzt zudem in je zwei auf verschiedenen Seiten des Schnittes l gelegenen, aber demselben Werte von z entsprechenden Punkten $r = r$, $t = 0$ und $r = r$, $t = -2\nu\pi$ Werte, die durch die Gleichung $v^+ - v^- = \overline{v}^+ - \overline{v}^- = 2\pi\mathfrak{L}$ verknüpft sind.

Setzt man jetzt $w = u + vi$, so ist die so für jeden nicht auf der Begrenzungslinie $r = R$ liegenden und auch nicht mit dem Punkte $\infty^{(\nu)}$ zusammenfallenden Punkt der Fläche $\widetilde{K}'^{(\nu)}$ definierte Größe w eine Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + yi$. Diese Funktion w_z, die durch die Gleichung:

$$w_z = u_{r,t} + v_{r,t} i = C_{r'} i + \overline{w}_z - \frac{1}{2\nu\pi} \int\limits_0^{-2\nu\pi} [f(\varphi) - \overline{f}(\varphi)] \frac{z^{\frac{1}{\nu}} + R^{\frac{1}{\nu}} e^{\frac{\varphi}{\nu} i}}{z^{\frac{1}{\nu}} - R^{\frac{1}{\nu}} e^{\frac{\varphi}{\nu} i}}\, d\varphi, \qquad {\scriptstyle z^{\frac{1}{\nu}} = r^{\frac{1}{\nu}} e^{\frac{t}{\nu} i},\ r > R,\ 0 \gtreqless t \geqq -2\nu\pi,}$$

dargestellt wird, ist für jeden der Bedingung $r > R$, $0 \gtreqless t \geqq -2\nu\pi$ genügenden Punkt r, t der Fläche $\widetilde{K}'^{(\nu)}$ einwertig und stetig, wird für den Punkt $\infty^{(\nu)}$ in derselben Weise unstetig wie die Funktion w_z und besitzt zudem in je zwei auf verschiedenen Seiten des Schnittes l gelegenen, aber demselben Werte von z entsprechenden Punkten $r = r$, $t = 0$ und $r = r$, $t = -2\nu\pi$ Werte, die durch die Gleichung $w_z^+ - w_z^- = w_z^+ - w_z^- = 2\pi i \mathfrak{L}$ verknüpft sind. Unter Berücksichtigung der am Ende des vorigen Artikels durchgeführten Untersuchung erhält man schließlich noch für w_z die Darstellung:

$$\begin{aligned} w_z = u_{r,t} + v_{r,t} i = \mathfrak{L} \ln z^{\frac{1}{\nu}} + \mathfrak{L}_1 z^{\frac{1}{\nu}} + \mathfrak{L}_2 z^{\frac{2}{\nu}} + \cdots + \mathfrak{L}_m z^{\frac{m}{\nu}} \\ + c_0 + c_1 \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{\nu}} + c_2 \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{2}{\nu}} + \cdots + c_n \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{n}{\nu}} + \cdots, \end{aligned} \qquad \begin{gathered} z^{\frac{1}{\nu}} = r^{\frac{1}{\nu}} e^{\frac{t}{\nu} i}, \\ r > R,\ 0 > t \geqq -2\nu\pi, \end{gathered}$$

wobei

$$c_0 = C_{r'} i - \frac{1}{2\nu\pi} \int_0^{-2\nu\pi} [f(\varphi) - f(\varphi)]\, d\varphi, \qquad \underset{n>0}{c_n} = -\frac{R^{\frac{n}{\nu}}}{\nu\pi} \int_0^{-2\nu\pi} [f(\varphi) - f(\varphi)]\, e^{n \frac{\varphi}{\nu} i}\, d\varphi$$

ist.

Vierter Abschnitt.

Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ für eine von zwei konzentrischen Kreisen begrenzte Ringfläche.

1.

In der Z-Ebene sei durch zwei um den Punkt $z = 0$ als Mittelpunkt mit den Radien R, $\bar{R}$, ${}_{\bar{R} > R}$, beschriebene Kreise $\mathfrak{K}$, $\bar{\mathfrak{K}}$ eine Ringfläche abgegrenzt. Die Lage eines Punktes z in dieser Fläche denke man sich durch die früher eingeführten, mit z durch die Gleichung:

$$z = x + yi = re^{ti}, \qquad \begin{matrix} R < r < \bar{R}, \\ 0 \leq t < 2\pi, \end{matrix}$$

verknüpften Polarkoordinaten r, t bestimmt.

Zu dieser Ringfläche soll nun eine in der ganzen Fläche einwertige und stetige Funktion $u = u' + u''i$ des Punktes x, y bestimmt werden, welche für jeden Punkt R, t der Randlinie $\mathfrak{K}$ mit einer vorgegebenen einwertigen, stetigen und mit der Periode 2π periodischen komplexen Funktion $f(t) = f'(t) + f''(t)i$, für jeden Punkt R, t der Randlinie $\mathfrak{K}$ mit einer vorgegebenen einwertigen, stetigen und mit der Periode 2π periodischen komplexen Funktion $f(t) = f'(t) + f''(t)i$ der reellen Veränderlichen t dem Werte nach übereinstimmt, für jeden inneren Punkt der Fläche stetige Derivierte $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ besitzt und in derselben Ausdehnung der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt.

Läßt sich eine solche Funktion u bestimmen, so ist dieselbe zugleich die einzige den aufgestellten Bedingungen genügende Funktion. Nimmt man nämlich an, daß u eine zweite derartige Funktion sei, und bildet alsdann die Differenz $\tilde{u} = u - u$, so ist $\tilde{u}$ eine in der ganzen Ringfläche einwertige und stetige Funktion des Punktes x, y, welche für jeden Punkt der Randlinien $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}$ den Wert Null hat, für jeden inneren Punkt der Fläche stetige Derivierte $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}$ besitzt und in derselben Ausdehnung der Differentialgleichung $\Delta \tilde{u} = 0$ genügt. Trennt man jetzt den reellen Teil $\tilde{u}'$ der Funktion $\tilde{u}$ von ihrem lateralen Teile $\tilde{u}''i$, so ergibt sich, indem man für die beiden reellen Funktionen $\tilde{u}'$, $\tilde{u}''$ in derselben Weise schließt, wie es im ersten Abschnitte zu Anfang des Art. 7 für die

Funktion $\bar{u}_{r,t}$ geschehen ist, daß sowohl die größten Werte G', G'' als auch die kleinsten Werte K', K'', welche die Funktionen $\widetilde{u}'$, $\widetilde{u}''$ in der Ringfläche überhaupt annehmen, unter den für die Randpunkte auftretenden Funktionswerten vorkommen müssen, also nicht von Null verschieden sein können, und daß demnach die Funktionen $\widetilde{u}'$, $\widetilde{u}''$ für keinen Punkt der Ringfläche einen von Null verschiedenen Wert haben können. Es hat also auch $\widetilde{u} = \bar{u} - u$ für jeden Punkt der Ringfläche den Wert Null, oder, was dasselbe, die Funktion $\bar{u}$ ist mit der Funktion u identisch. Die gestellte Aufgabe besitzt demnach, wenn sie überhaupt lösbar ist, nur eine einzige Lösung.

Was nun die Behandlung der Aufgabe betrifft, so kann dieselbe mit Vorteil auf die Behandlung der beiden einfacheren Aufgaben reduziert werden, welche aus ihr dadurch hervorgehen, daß man das eine Mal $f(t) = 0$, das andere Mal $f(t) = 0$ setzt. Lassen sich nämlich diese beiden speziellen Aufgaben lösen, und bezeichnet man die Lösung der ersten mit U, die der zweiten mit $\bar{U}$, so bildet die durch die Gleichung $u = U + \bar{U}$ definierte Funktion u die Lösung der ursprünglich gestellten Aufgabe. Mit Rücksicht hierauf soll jetzt zunächst die erste spezielle Aufgabe behandelt werden.

2.

Die Bestimmung der soeben definierten Funktion U, der die Bedingungen auferlegt sind, für jeden Punkt R, t der Randlinie $\mathfrak{K}$ mit $f(t)$ dem Werte nach übereinzustimmen, für jeden Punkt $\bar{R}, t$ der Randlinie $\bar{\mathfrak{K}}$ den Wert Null zu besitzen, soll hier mit Hilfe einer Methode durchgeführt werden, die man passend als Methode der successiven Influenzen bezeichnen kann. Diese Methode ist im Prinzip von R. Murphy*) ersonnen und später dann von den Herren C. Neumann**) und H. A. Schwarz***) weiter ausgebildet worden.

Um diese Methode im vorliegenden Falle anwenden zu können, hat man vor allem die gegebene Ringfläche als dasjenige Gebiet aufzufassen, welches der durch die Linie $\mathfrak{K}$ begrenzten Kreisfläche und der durch die Linie $\bar{\mathfrak{K}}$ begrenzten Kreisergänzungsfläche gemeinsam ist, und die Anwendung der Methode hat dann in der Weise zu erfolgen, daß man auf Grund von Satz I und von Satz III des vorhergehenden Abschnittes

*) Murphy, R., Elementary principles of the theories of electricity, heat and molecular actions. Part I. (39). (Cambridge 1833, S. 93—98.)

**) Neumann, C., Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential. (Leipzig, Teubner, 1877, S. 310—338.)

***) Schwarz, H. A., Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren. — Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. — (Gesammelte Werke, Bd. II., S. 133—171.)

für die Kreisfläche Funktionen $u^{(1)}, u^{(3)}, u^{(5)}, \cdots$, für die Kreisergänzungsfläche Funktionen $u^{(2)}, u^{(4)}, u^{(6)}, \cdots$, in der Reihenfolge $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \cdots$ dadurch bestimmt, daß man zunächst der für die Kreisfläche zu bestimmenden Funktion $u^{(1)}$ die in der Aufgabe vorkommende Funktion $f(t)$ als Randfunktion vorschreibt und alsdann für $m = 1, 2, 3, \cdots$ die Werte der für die Kreisergänzungsfläche zu bestimmenden Funktion $u^{(2m)}$ längs des Randes $\mathfrak{K}$ dieser Fläche der Gleichung $u^{(2m)}_{R,t} = u^{(2m-1)}_{\bar{R},t}$ gemäß, die Werte der für die Kreisfläche zu bestimmenden Funktion $u^{(2m+1)}$ längs des Randes $\mathfrak{K}$ dieser Fläche der Gleichung $u^{(2m+1)}_{R,t} = u^{(2m)}_{R,t}$ gemäß wählt, so daß also

längs des Randes $\mathfrak{K}$ der Kreisfläche	längs des Randes $\bar{\mathfrak{K}}$ der Kreisergänzungsfläche
$u^{(1)}_{r,t}$ den Wert $u^{(1)}_{R,t} = f(t)$,	$u^{(2)}_{r,t}$ den Wert $u^{(2)}_{R,t} = u^{(1)}_{R,t}$,
$u^{(3)}_{r,t}$ den Wert $u^{(3)}_{R,t} = u^{(2)}_{R,t}$,	$u^{(4)}_{r,t}$ den Wert $u^{(4)}_{R,t} = u^{(3)}_{R,t}$,
$u^{(5)}_{r,t}$ den Wert $u^{(5)}_{R,t} = u^{(4)}_{R,t}$,	$u^{(6)}_{r,t}$ den Wert $u^{(6)}_{R,t} = u^{(5)}_{R,t}$,
. . . .	. . . .

besitzt. Aus den so für jeden Punkt der Ringfläche bestimmten Funktionen $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \cdots$ läßt sich nämlich eine unendliche Reihe bilden, welche nach Hinzunahme einer gewissen einfachen Funktion die verlangte Funktion U liefert.

Die Funktionen $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \cdots$ lassen sich nun auf Grund der Sätze I, III, wenn man noch bei den auf die Kreisergänzungsfläche sich beziehenden Integralen die Integrationsvariablen sich in demselben Intervalle $0 \cdots 2\pi$ bewegen läßt, das hier der Koordinate t zugewiesen ist, für das Innere der Flächen, auf die sie bezogen sind, zunächst darstellen durch die Gleichungen:

$$u^{(1)}_{r,t} \underset{r<R}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}\,d\varphi, \qquad u^{(2)}_{r,t} \underset{r>R}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^{(1)}_{R,\varphi_1}\,\frac{r^2 - \bar{R}^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi_1) + r^2}\,d\varphi_1,$$

$$u^{(3)}_{r,t} \underset{r<R}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^{(2)}_{R,\varphi_2}\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi_2) + r^2}\,d\varphi_2, \qquad u^{(4)}_{r,t} \underset{r>R}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^{(3)}_{R,\varphi_3}\,\frac{r^2 - R^2}{R^2 - 2\bar{R}r\cos(t-\varphi_3) + r^2}\,d\varphi_3,$$

$$u^{(5)}_{r,t} \underset{r<R}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^{(4)}_{R,\varphi_4}\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi_4) + r^2}\,d\varphi_4, \qquad u^{(6)}_{r,t} \underset{r>R}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^{(5)}_{\bar{R},\varphi_5}\,\frac{r^2 - R^2}{\bar{R}^2 - 2\bar{R}r\cos(t-\varphi_5) + r^2}\,d\varphi_5,$$

. . . .

Diese Funktionen können aber auch, unter Benutzung der Hilfsformeln:

$$(\mathrm{H}_{2m}.)\qquad \frac{r^2 - q^{2m}R^2}{q^{2m}R^2 - 2q^m Rr\cos(t-\varphi) + r^2} \underset{r>R}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\bar{R}^2 - q^{2m}R^2}{q^{2m}R^2 - 2q^m R\bar{R}\cos(\psi-\varphi) + \bar{R}^2}\right]\frac{r^2 - \bar{R}^2}{\bar{R}^2 - 2\bar{R}r\cos(t-\psi) + r^2}\,d\psi,$$

$m = 1, 2, 3, \cdots$

$$(\mathrm{H}_{2m+1}.)\qquad \frac{R^2 - q^{2m}r^2}{R^2 - 2Rq^m r\cos(t-\varphi) + q^{2m}r^2} \underset{r<\bar{R}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{R^2 - q^{2m}\bar{R}^2}{R^2 - 2Rq^m\bar{R}\cos(\psi-\varphi) + q^{2m}\bar{R}^2}\right]\frac{\bar{R}^2 - r^2}{\bar{R}^2 - 2\bar{R}r\cos(t-\psi) + r^2}\,d\psi,$$

bei denen zur Abkürzung $q = \bar{R}^2 R^{-2}$ gesetzt ist, in independenter Form dargestellt werden. Die Formel $(\mathrm{H}_{2m}.)$ geht aus der ersten Gleichung $(\mathrm{U}_3.)$ des Satzes III, nachdem man darin $\nu = 1$ und in neuer Bezeichnung $R = \bar{R}$, $\varphi = \psi$ gesetzt hat, hervor, wenn man an Stelle von $u_{r,t}$ die auf der linken Seite von $(\mathrm{H}_{2m}.)$ stehende, die allgemeinen Eigenschaften von $u_{r,t}$ besitzende Funktion treten läßt und beachtet, daß diese Funktion für den Randpunkt $r = \bar{R}$, $t = \psi$ durch den auf der rechten Seite von $(\mathrm{H}_{2m}.)$ in eckigen Klammern stehenden Ausdruck dargestellt wird. Die Formel $(\mathrm{H}_{2m+1}.)$ dagegen geht aus der ersten Gleichung $(\mathrm{U}_1.)$ des Satzes I, nachdem man darin $\nu = 1$ und in neuer Bezeichnung $\varphi = \psi$ gesetzt hat, hervor, wenn man an Stelle von $u_{r,t}$ die auf der linken Seite von $(\mathrm{H}_{2m+1}.)$ stehende, die allgemeinen Eigenschaften von $u_{r,t}$ besitzende Funktion treten läßt und beachtet, daß diese Funktion für den Randpunkt $r = \bar{R}$, $t = \psi$ durch den auf der rechten Seite von $(\mathrm{H}_{2m+1}.)$ in eckigen Klammern stehenden Ausdruck dargestellt wird. Um jetzt die independente Darstellung der Funktionen $u^{(2)}, u^{(3)}, \cdots$ zu erhalten, ersetze man zunächst bei der zweiten Gleichung des aufgestellten Systems die Größe $u^{(1)}_{\bar{R},\varphi_1}$ durch den ihr auf Grund der ersten Gleichung entsprechenden Integralausdruck und führe die Integration nach φ_1 mit Hilfe der Formel $(\mathrm{H}_2.)$ aus; ersetze hierauf bei der dritten Gleichung die Größe $u^{(2)}_{R,\varphi_2}$ durch den ihr auf Grund der eben gewonnenen Gleichung entsprechenden Integralausdruck und führe die Integration nach φ_2 mit Hilfe der Formel $(\mathrm{H}_3.)$ aus; behandle weiter dann die folgenden Gleichungen der Reihe nach in derselben Weise. Man gelangt so zu dem Gleichungensystem:

$$u^{(1)}_{r,t} \underset{r<\bar{R}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{\bar{R}^2 - r^2}{\bar{R}^2 - 2\bar{R}r\cos(t-\varphi) + r^2}\,d\varphi, \qquad u^{(2)}_{r,t} \underset{r>R}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{r^2 - q^2R^2}{q^2R^2 - 2qRr\cos(t-\varphi) + r^2}\,d\varphi,$$

$$u^{(3)}_{r,t} \underset{r<\bar{R}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{R^2 - q^2r^2}{R^2 - 2Rqr\cos(t-\varphi) + q^2r^2}\,d\varphi, \qquad u^{(4)}_{r,t} \underset{r>R}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{r^2 - q^4R^2}{q^4R^2 - 2q^2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}\,d\varphi,$$

$$u^{(5)}_{r,t} \underset{r<\bar{R}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{R^2 - q^4r^2}{R^2 - 2Rq^2r\cos(t-\varphi) + q^4r^2}\,d\varphi, \qquad u^{(6)}_{r,t} \underset{r>R}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{r^2 - q^6R^2}{q^6R^2 - 2q^3Rr\cos(t-\varphi) + r^2}\,d\varphi,$$

. . . .

welches die Funktionen $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \cdots$ in independenter Form darstellt und sich von dem vorher aufgestellten auch dadurch unterscheidet, daß die links stehenden Gleichungen, von der ersten abgesehen, auch noch für den Rand $\mathfrak{K}$ der Kreisfläche also für $r = R$, die rechts stehenden auch noch für den Rand $\mathfrak{K}$ der Kreisergänzungsfläche also für $r = R$ gelten. Setzt man nämlich in der die Funktion $u^{(2m)}_{r,t}$ bestimmenden Gleichung $r = R$, so geht das auf ihrer rechten Seite stehende Integral infolge der Beziehung $q = R^2 R^{-2}$ in das die Größe $u^{(2m-1)}_{R,t}$ darstellende Integral über, und entsprechend geht, wenn man in der die Funktion $u^{(2m+1)}_{r,t}$ bestimmenden Gleichung $r = R$ setzt, das auf ihrer rechten Seite stehende Integral in das die Größe $u^{(2m)}_{R,t}$ darstellende Integral über. Durch das letzte Gleichungensystem werden also, wenn man noch die Gleichung $u^{(1)}_{R,t} = f(t)$ hinzunimmt, auch die vorher für die Funktionen $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \cdots$ aufgestellten Randbedingungen zum Ausdruck gebracht.

Bezeichnet man jetzt für $m = 1, 2, 3, \cdots$ den Wert, welchen die Funktion $u^{(2m-1)}_{r,t}$ im Mittelpunkte der Kreisfläche besitzt, mit $u_0^{(2m-1)}$, den Wert, welchen die Funktion $u^{(2m)}_{r,t}$ im Punkte ∞ der Kreisergänzungsfläche besitzt, mit $u_\infty^{(2m)}$, so daß also

$$u_0^{(2m-1)} = u_{0,t}^{(2m-1)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi\,, \qquad u_\infty^{(2m)} = \lim_{r=\infty} u_{r,t}^{(2m)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi$$

ist, versteht unter G den größten der Werte, welche $\operatorname{mod} f(t)$ überhaupt annehmen kann, und wendet auf die den Differenzen $u^{(2m-1)}_{r,t} - u_0^{(2m-1)}$ und $u^{(2m)}_{r,t} - u_\infty^{(2m)}$ entsprechenden Ausdrücke die von der Formel (F'.) in Art. 5 des zweiten Abschnittes nur durch die Bezeichnung sich unterscheidende, für je zwei der Bedingung $p > s \geqq 0$ genügende reelle Größen p, s geltende Formel:

$$\operatorname{mod}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\frac{p^2 - s^2}{p^2 - 2ps\cos(t-\varphi) + s^2}\,d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi\right] \leqq \frac{4G}{\pi}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{s}{p}\right)$$

an, so erhält man, wenn man noch die für jedes der Bedingung $0 \leqq x < 1$ genügende x geltende Ungleichung $\frac{2}{\pi}\,\mathrm{arc\,sin}\,x \leqq x$ beachtet, die im folgenden zur Verwendung kommenden Beziehungen:

$$\operatorname{mod}\left[u^{(2m-1)}_{r,t} - u_0^{(2m-1)}\right] \leqq 2G q^{m-1}\frac{r}{R}\,, \qquad \operatorname{mod}\left[u^{(2m)}_{r,t} - u_\infty^{(2m)}\right] \leqq 2G q^m \frac{R}{r}\,,$$

von denen die erste für jedes der Bedingung $r \leqq R$, die zweite für jedes der Bedingung $r \geqq R$ genügende r gilt, und bei denen q seiner Definition gemäß die zwischen 0 und 1 gelegene Zahl $R^2 R^{-2}$ vertritt.

Um nun die gewünschte Funktion U zu erhalten, bilde man aus den zu der Ringfläche bestimmten Funktionen $u^{(1)}_{r,t}, u^{(2)}_{r,t}, u^{(3)}_{r,t}, \cdots \left(\begin{smallmatrix}\bar{R} < r < R\\ 0 < t < 2\pi\end{smallmatrix}\right)$ die unendliche Reihe:

$$\left[u^{(1)}_{r,t} - u^{(1)}_0\right] - \left[u^{(2)}_{r,t} - u^{(2)}_\infty\right] + \left[u^{(3)}_{r,t} - u^{(3)}_0\right] - \left[u^{(4)}_{r,t} - u^{(4)}_\infty\right] + \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder und zudem für alle Punkte r, t der Ringfläche in gleichem Grade, da die mit den Moduln ihrer Glieder gebildete Reihe, wie die soeben für diese Moduln gewonnenen Beziehungen zeigen, für alle Punkte r, t der Ringfläche in gleichem Grade konvergiert. Beachtet man dann noch, daß ein jedes Glied der Reihe eine in der ganzen Ringfläche einwertige und stetige Funktion des Punktes r, t ist, und daß infolge der für $m = 1, 2, 3, \cdots$ geltenden Beziehungen $u^{(2m)}_{\bar{R},t} = u^{(2m-1)}_{\bar{R},t}$, $u^{(2m+1)}_{R,t} = u^{(2m)}_{R,t}$, $u^{(2m)}_\infty = u^{(2m-1)}_0$ und der Gleichung $u^{(1)}_{R,t} = f(t)$ die Summe der ersten $2m$ Glieder der Reihe für $r = R$ den Wert Null, die Summe der ersten $2m+1$ Glieder der Reihe für $r = \bar{R}$ den Wert $f(t) - u^{(1)}_0$ hat, so erkennt man, daß diese Reihe eine in der ganzen Ringfläche einwertige und stetige, mit $F_{r,t}$ zu bezeichnende Funktion des Punktes r, t darstellt, welche für jeden Punkt R, t der Linie $\mathfrak{K}$ mit $f(t) - u^{(1)}_0$ dem Werte nach übereinstimmt, für jeden Punkt $\bar{R}, t$ der Linie $\bar{\mathfrak{K}}$ dagegen den Wert Null hat.

Die so erhaltene, durch die Gleichung:

$$F_{r,t} = \left[u^{(1)}_{r,t} - u^{(1)}_0\right] - \left[u^{(2)}_{r,t} - u^{(2)}_\infty\right] + \left[u^{(3)}_{r,t} - u^{(3)}_0\right] - \left[u^{(4)}_{r,t} - u^{(4)}_\infty\right] + \cdots, \qquad \begin{smallmatrix}\bar{R} \le r \le R,\\ 0 \le t \le 2\pi,\end{smallmatrix} \tag{1.}$$

für die ganze Ringfläche definierte Funktion $F_{r,t}$ besitzt aber auch für jeden im Innern der Ringfläche gelegenen Punkt x, y stetige Derivierte $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ und genügt zudem in derselben Ausdehnung der Differentialgleichung $\Delta F = 0$. Um dieses einzusehen, beachte man zunächst, daß aus dem letzten die Funktionen $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \cdots$ darstellenden Gleichungensysteme die für $m = 1, 2, 3, \cdots$ und jedes der Bedingung $\bar{R} \leqq r < R$ genügende r geltenden Gleichungen:

$$u^{(2m-1)}_{r,t} - u^{(2m-1)}_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\Re\left|\frac{q^{m-1}z}{\zeta - q^{m-1}z}\right| d\varphi, \qquad u^{(2m)}_{r,t} - u^{(2m)}_\infty = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\Re\left|\frac{q^m\zeta}{z - q^m\zeta}\right| d\varphi$$

folgen, bei denen $z = re^{ti}$, $\zeta = Re^{\varphi i}$ ist und unter $\Re|\cdots|$ der reelle Teil des zwischen den beiden Vertikalstrichen sich findenden Ausdruckes zu verstehen ist. Bildet man dann aus den hinter $\Re$ stehenden Ausdrücken die unendliche Reihe:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\left\{\frac{q^{m-1}z}{\zeta - q^{m-1}z} - \frac{q^m\zeta}{z - q^m\zeta}\right\}$$

und beschränkt die Bewegung des Punktes z, der eben genannten Bedingung $\bar{R} \leqq r < R$

entsprechend, auf die von den Punkten des Randes $\mathfrak{K}$ verschiedenen Punkte der Ringfläche, so konvergiert diese Reihe, da $q < 1$ ist, für alle in Betracht kommenden Wertepaare $z = re^{ti}$, $\zeta = Re^{\varphi i}$ unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder und zudem in gleichem Grade. Daraus folgt aber zunächst, daß diese Reihe, deren Glieder stetige Funktionen von φ sind, bei festgehaltenem z eine stetige Funktion der reellen Veränderlichen φ darstellt, und weiter, daß das von 0 bis 2π erstreckte Integral des aus dem reellen Teile des Reihenwertes durch Multiplikation mit $f(\varphi)d\varphi$ gebildeten Differentials gleich ist der Summe der von 0 bis 2π erstreckten Integrale derjenigen Differentiale, welche aus den reellen Teilen der einzelnen Glieder der Reihe durch Multiplikation mit $f(\varphi)d\varphi$ entstehen. Auf Grund dieser Beziehung läßt sich jetzt die Funktion $F_{r,t}$, nachdem man die Glieder der sie definierenden unendlichen Reihe durch die dafür aufgestellten Integralausdrücke ersetzt hat, für jeden nicht auf dem Rande $\mathfrak{K}$ gelegenen Punkt r, t der Ringfläche darstellen durch die Gleichung:

$$(2.) \qquad F_{r,t} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\Re\left|\sum_{m=1}^{m=\infty}\left\{\frac{q^{m-1}z}{\zeta - q^{m-1}z} - \frac{q^m\zeta}{z - q^m\zeta}\right\}\right| d\varphi, \qquad \begin{matrix}\bar{R} < r < R,\\ 0 \leq t < 2\pi.\end{matrix}$$

Kann man nun von der auf der rechten Seite dieser Gleichung zwischen den beiden Vertikalstrichen stehenden unendlichen Reihe, deren Wert nur von dem Verhältnis der Größen z, ζ abhängig ist, noch zeigen, daß sie in der Ringfläche nach Ausschluß des Randes $\mathfrak{K}$ eine einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen z ist oder, was dasselbe, sich in eine nach Potenzen von z mit ganzen Exponenten fortschreitende Reihe überführen läßt, so ist damit bewiesen, daß die Funktion $F_{r,t}$, wie behauptet wurde, für jeden im Innern der Ringfläche gelegenen Punkt x, y stetige Derivierte $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ besitzt und zudem in derselben Ausdehnung der partiellen Differentialgleichung $\Delta F = 0$ genügt. Zum Zwecke der Überführung verwandle man nun die vorliegende Reihe zunächst mit Hilfe der Gleichungen:

$$\frac{q^{m-1}z}{\zeta - q^{m-1}z} = \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(q^{m-1}\frac{z}{\zeta}\right)^n, \qquad \frac{q^m\zeta}{z - q^m\zeta} = \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(q^m\frac{\zeta}{z}\right)^n,$$

in die zweifach unendliche Reihe:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\left(q^{m-1}\frac{z}{\zeta}\right)^n - \left(q^m\frac{\zeta}{z}\right)^n\right\}$$

und fasse bei dieser Reihe einen jeden der beiden durch das Minuszeichen verbundenen Terme als ein Glied auf. Kehrt man alsdann bei dieser neuen Reihe, indem man beachtet, daß sie unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder konvergiert, weil die mit den

Moduln ihrer Glieder gebildete Reihe konvergiert, die Summationsordnung um und führt die Summation nach m aus, so entsteht die gewünschte Reihe:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}{}' \frac{1}{1-q^n}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n, \qquad \bar{R} < r < R,\quad 0 \leq t < 2\pi,$$

bei welcher der dem Summenzeichen beigefügte Accent andeuten soll, daß für den Summationsbuchstaben n der Wert Null ausgeschlossen ist.

Aus der durch die Gleichung (1.) definierten, nach Einführung der eben gewonnenen Reihe in die Gleichung (2.) für alle Punkte der Ringfläche durch die Gleichungen:

$$(3.)\qquad F_{r,t} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\Re\left|\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}{}' \frac{1}{1-q^n}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n\right| d\varphi, \qquad F_{R,t} = f(t) - u_0^{(1)}, \qquad \bar{R} \leq r < R,\quad 0 \leq t < 2\pi,$$

dargestellten Funktion F erhält man jetzt sofort die zu Anfang dieses Artikels verlangte Funktion U, indem man — bei positivem p unter $\ln p$ die reelle Größe $\int_1^p \frac{dx}{x}$ verstehend — die durch die Gleichung:

$$L_{r,t} = \frac{\ln\frac{r}{\bar{R}}}{\ln\frac{R}{\bar{R}}}\, u_0^{(1)}, \qquad \bar{R} \leq r \leq R,\quad 0 \leq t < 2\pi,$$

definierte, einwertige und stetige Funktion L des Punktes x, y der Ringfläche hinzuaddiert. Diese letztere Funktion verhält sich nämlich im Innern der Ringfläche, da $\ln r = \Re|\ln z|$ ist, geradeso wie die Funktion F, insofern als sie dort für jeden Punkt x, y stetige Derivierte $\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}$ besitzt und der Differentialgleichung $\Delta L = 0$ genügt, während das Verhalten der Funktionen F und L an den Randlinien $\mathfrak{K}$ und $\bar{\mathfrak{K}}$ der Ringfläche durch die Gleichungen $F_{R,t} = f(t) - u_0^{(1)}$, $L_{R,t} = u_0^{(1)}$; $F_{\bar{R},t} = 0$, $L_{\bar{R},t} = 0$ charakterisiert ist. Infolgedessen genügt die Funktion $L + F$ den sämtlichen für die Funktion U aufgestellten Bedingungen, und da überdies, nach dem in Art. 1 dieses Abschnittes Bewiesenen, eine zweite diesen Bedingungen genügende Funktion nicht existiert, so besteht die Gleichung $U = L + F$. Die verlangte Funktion U wird daher, wenn man noch die Konstante $u_0^{(1)}$ durch das ihr entsprechende Integral ersetzt, für alle Punkte der Ringfläche dargestellt durch die Gleichungen:

$$U_{r,t} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\ln\frac{r}{\bar{R}}}{\ln\frac{R}{\bar{R}}}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\Re\left|\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}{}' \frac{1}{1-q^n}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n\right| d\varphi, \qquad U_{R,t} = f(t), \qquad \bar{R} < r < R,\quad 0 \leq t < 2\pi,$$

wobei $z = re^{ti}$, $\zeta = Re^{\varphi i}$, $q = \bar{R}^2 R^{-2}$ ist.

3.

Die am Ende des Art. 1 an zweiter Stelle definierte Funktion U, der die Bedingungen auferlegt sind, für jeden Punkt $\bar R, t$ der Randlinie $\bar{\mathfrak{K}}$ mit $f(t)$ dem Werte nach übereinzustimmen, für jeden Punkt R, t der Randlinie $\mathfrak{K}$ den Wert Null zu besitzen, kann, wie aus dem Vorhergehenden unmittelbar ersichtlich ist, ebenfalls durch die Methode der successiven Influenzen erhalten werden. Unter Benutzung der im vorigen Artikel für die Funktion U gewonnenen Darstellung läßt sich aber die Funktion U auch durch das folgende, einfachere Verfahren erhalten.

Man ordne allgemein dem Punkte r, t der Ringfläche den durch die Gleichung:

$$(\mathrm{G.}) \qquad r' = \frac{R\bar R}{r}$$

bestimmten Punkt r', t derselben zu, beachte, daß infolge dieser Gleichung einem inneren Punkte r, t der Ringfläche ein ebenfalls im Innern derselben gelegener Punkt r', t, dem Punkte $\bar R, t$ der Randlinie $\bar{\mathfrak{K}}$ der Punkt R, t der Randlinie $\mathfrak{K}$, dem Punkte R, t der Randlinie $\mathfrak{K}$ der Punkt $\bar R, t$ der Randlinie $\bar{\mathfrak{K}}$ entspricht, und definiere alsdann für die Ringfläche eine Funktion $\tilde U$ des Punktes r', t durch die Gleichung $\tilde U_{r', t} = U_{r, t}$, bei der r, t den dem Punkte r', t entsprechenden Punkt bezeichnen soll. Diese Funktion $\tilde U$ wird dann für jeden Punkt r', t der Ringfläche durch diejenigen Gleichungen dargestellt, welche aus den am Ende des vorigen Artikels für die Funktion U gewonnenen Gleichungen hervorgehen, wenn man darin $r = \frac{R\bar R}{r'}$ setzt. Man erhält auf diese Weise, wenn man noch beachtet, daß eine Größe $\Re\left|\cdots\right|$ ihren Wert nicht ändert, wenn man in dem zwischen den beiden Vertikalstrichen sich findenden Ausdrucke allenthalben i durch $-i$ ersetzt, für die Funktion $\tilde U$ die Gleichungen:

$$\tilde U_{r', t} = \frac{1}{2\pi} \frac{\ln \frac{r'}{R}}{\ln \frac{\bar R}{R}} \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\, \Re\left| \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}{}' \frac{1}{1-q^n} \left(\frac{\zeta}{z'}\right)^n \right| d\varphi, \quad \tilde U_{\bar R, t} = f(t), \qquad {\scriptstyle R < r' < \bar R, \atop 0 \leq t < 2\pi,}$$

wobei $z' = r' e^{ti}$, $\zeta = \bar R e^{\varphi i}$ ist.

Was nun die Eigenschaften der Funktion $\tilde U$ betrifft, so folgt zunächst aus der die Funktion $\tilde U$ für jeden Punkt r', t der Ringfläche definierenden Gleichung $\tilde U_{r', t} = U_{r, t}$ — da $U_{r, t}$ eine in der ganzen Ringfläche einwertige und stetige Funktion des Punktes r, t ist, und der Gleichung (G.) zufolge einer in der Ringfläche stetigen Funktion des Punktes r, t immer eine in der Ringfläche stetige Funktion des Punktes r', t entspricht, auch $U_{R,t} = f(t)$, $U_{\bar R,t} = 0$ ist — daß die Funktion $\widetilde{U}$ eine in der ganzen Ringfläche einwertige und stetige Funktion des Punktes r', t ist, welche für jeden Punkt R, t der Randlinie $\mathfrak{K}$ mit $f(t)$ dem Werte nach übereinstimmt, für jeden Punkt $\bar R, t$ der Randlinie $\bar{\mathfrak{K}}$ dagegen den Wert Null hat. Die Funktion $\widetilde{U}$ besitzt aber auch für jeden im Innern der Kreisfläche gelegenen Punkt $x' = r' \cos t$, $y' = r' \sin t$ stetige Derivierte $\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x'}, \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial y'}, \frac{\partial^2 \widetilde{U}}{\partial x'^2}, \frac{\partial^2 \widetilde{U}}{\partial y'^2}$ und genügt zudem in derselben Ausdehnung der Differentialgleichung $\Delta \widetilde{U} = 0$, da bei der eben gewonnenen, die Funktion $\widetilde{U}$ für alle nicht auf der Randlinie $\mathfrak{K}$ gelegenen Punkte darstellenden Gleichung die zwischen den beiden Vertikalstrichen stehende unendliche Reihe eine in der Ringfläche nach Ausschluß der Randlinie $\mathfrak{K}$ einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen $z' = x' + y'i = r'e^{ti}$ darstellt, und $\ln r' = \Re \,|\ln z'|$ ist. Beachtet man nun noch, daß die Funktion $f(t)$, mit der die Funktion $\widetilde{U}$ längs der Randlinie $\mathfrak{K}$ übereinstimmt, nur der Bedingung unterworfen ist, eine einwertige, stetige und mit der Periode 2π periodische komplexe Funktion der reellen Veränderlichen t zu sein, und im Rahmen dieser Bedingung von Anfang an beliebig gewählt werden konnte, so erkennt man, daß die vorher gewonnenen, die Funktion $\widetilde{U}$ für jeden Punkt r', t der Ringfläche darstellenden Gleichungen, wenn man darin an Stelle der Funktion $f(t)$ die den gleichen Bedingungen unterworfene Funktion $f(t)$ treten läßt und entsprechend $f(\varphi)$ durch $f(\varphi)$ ersetzt, auch den Accent bei r' unterdrückt, eine Funktion des Punktes r, t der Ringfläche liefern, welche den sämtlichen der Funktion $\bar U$ auferlegten Bedingungen genügt und infolgedessen — da nach dem in Art. 1 dieses Abschnittes Bewiesenen eine zweite diesen Bedingungen genügende Funktion nicht existiert — mit der Funktion $\bar U$ identisch ist. Die verlangte Funktion $\bar U$ wird daher für alle Punkte der Ringfläche dargestellt durch die Gleichungen:

$$\bar U_{r,t} = \frac{1}{2\pi} \frac{\ln \frac{r}{\bar R}}{\ln \frac{R}{\bar R}} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, \Re \left| \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}{}' \frac{1}{1-q^n} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n \right| d\varphi \,. \quad \bar U_{R,t} = f(t), \qquad \begin{array}{l} \bar R < r \leqq R, \\ 0 \leqq t < 2\pi, \end{array}$$

wobei $z = re^{ti}$, $\zeta = Re^{\varphi i}$, $q = \bar R^2 R^{-2}$ ist.

4.

Die Darstellung der in Art. 1 dieses Abschnittes verlangten Funktion u kann jetzt auf Grund der Gleichung $u = U + \bar U$ sofort erhalten werden, wenn man beachtet, daß für jeden inneren Punkt r, t der Ringfläche sowohl die für $U_{r,t}$, $\bar R \leqq r < R$, als auch die für $\bar U_{r,t}$, $\bar R < r \leqq R$, gewonnene Gleichung besteht, und daß $U_{R,t} = f(t)$, $\bar U_{R,t} = 0$, $U_{\bar R,t} = 0$, $\bar U_{\bar R,t} = f(t)$ ist. Die Funktion u wird demgemäß, wenn man noch die Größen

$z, \zeta, \bar{\zeta}, q$ durch die ihnen entsprechenden Ausdrücke ersetzt, auch für $\Re|\cdots|$ den reellen Teil des zwischen den beiden Vertikalstrichen sich findenden Ausdruckes setzt und die dann auftretenden Reihen der Gleichung $\sum\limits_{n=-\infty}^{n=+\infty}{}' g(n) = \sum\limits_{n=1}^{n=\infty} [g(n) + g(-n)]$ entsprechend umformt, für alle Punkte der Ringfläche dargestellt durch die Gleichungen:

$$u_{r,t} = \frac{1}{2\pi} \frac{\ln \frac{r}{R}}{\ln \frac{R}{R}} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \left\{ \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{R^{-n} r^n - R^n r^{-n}}{R^{-n} R^n - R^n R^{-n}} \cos n(t-\varphi) \right\} d\varphi$$

$$\qquad R < r < R, \quad 0 \leq t < 2\pi,$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{\ln \frac{r}{R}}{\ln \frac{R}{R}} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \left\{ \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{R^{-n} r^n - R^n r^{-n}}{R^{-n} R^n - R^n R^{-n}} \cos n(t-\varphi) \right\} d\varphi,$$

$$u_{R,t} = f(t), \qquad u_{R,t} = f(t).$$

Das so erhaltene Resultat bildet einen speziellen Fall des Resultates, welches Herr C. Neumann*) bei seinen Untersuchungen über die Integration der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ für eine von zwei Niveaukurven begrenzte Ringfläche auf einem von dem hier eingeschlagenen Wege durchaus verschiedenen Wege erhalten hat.

Das gewonnene Resultat kann nun unmittelbar von der vorliegenden, in der Z-Ebene konstruierten Ringfläche auf eine Ringfläche übertragen werden, welche in der über der Z-Ebene ausgebreiteten n-blätterigen Fläche T durch zwei um den 0-fachen Windungspunkt $z = a$ als Mittelpunkt mit den Radien R, R, $R > R$, beschriebene, keinen eigentlichen Windungspunkt der Fläche umschließende Kreislinien $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}$ abgegrenzt ist. Man braucht zu dem Ende nur die Punkte z dieser neuen Ringfläche auf ein Polarkoordinatensystem zu beziehen, welches den Punkt $z = a$ zum Pol und den von diesem Punkte in der positiven Richtung der X-Achse ausgehenden Strahl zur Polarachse hat, also

$$z = x + yi = a + re^{ti}, \qquad R \leq r \leq R, \quad 0 \leq t < 2\pi,$$

zu setzen und alsdann die für u erhaltenen Gleichungen auf den Punkt r, t dieser Ringfläche zu beziehen. Man erhält so schließlich als Resultat der in diesem Abschnitte durchgeführten Untersuchungen den folgenden

Satz V. *„Ist in der über der Z-Ebene ausgebreiteten n-blättrigen Fläche T durch zwei um den 0-fachen Windungspunkt $z = a$ als Mittelpunkt mit den Radien R, R, $R > R$,*

*) Neumann, C., Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 59. (S. 335—366; S. 359.) Vergleiche auch: Schwarz, H. A., Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. (Gesammelte Werke, Bd. II., S. 175—210; S. 205—210.)

beschriebene, keinen eigentlichen Windungspunkt der Fläche umschließende Kreislinien $\mathfrak{K}$, $\bar{\mathfrak{K}}$ *eine Ringfläche abgegrenzt, so existiert zu dieser Ringfläche immer eine und nur eine in der ganzen Ringfläche einwertige und stetige Funktion* $u = u' + u''i$ *des durch die Polarkoordinaten* r, t, $\bar{R} \leq r \leq R,\ 0 \leq t < 2\pi$, *auf Grund der Gleichung* $z = x + yi = a + re^{ti}$ *fixierten Punktes* x, y, *welche für jeden Punkt* R, t *der Randlinie* $\mathfrak{K}$ *mit einer vorgegebenen einwertigen, stetigen und mit der Periode* 2π *periodischen komplexen Funktion* $f(t) = f'(t) + f''(t)i$, *für jeden Punkt* $\bar{R}$, t *der Randlinie* $\bar{\mathfrak{K}}$ *mit einer vorgegebenen einwertigen, stetigen und mit der Periode* 2π *periodischen komplexen Funktion* $\bar{f}(t) = \bar{f}'(t) + \bar{f}''(t)i$ *der reellen Veränderlichen* t *dem Werte nach übereinstimmt, für jeden inneren Punkt der Ringfläche stetige Derivierte* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *besitzt und in derselben Ausdehnung der partiellen Differentialgleichung* $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *genügt. Diese Funktion* u *wird für alle Punkte der Ringfläche als Funktion der Polarkoordinaten* r, t *dargestellt durch die Gleichungen:*

$$(\mathrm{U}_5.)\quad \begin{aligned} u_{r,t} = {} & \frac{1}{2\pi}\,\frac{\ln\frac{r}{\bar{R}}}{\ln\frac{R}{\bar{R}}}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\left\{\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\bar{R}^{-n}\,r^n - \bar{R}^n\,r^{-n}}{\bar{R}^{-n}R^n - \bar{R}^n R^{-n}}\cos n\,(t-\varphi)\right\}d\varphi \\ & + \frac{1}{2\pi}\,\frac{\ln\frac{r}{R}}{\ln\frac{\bar{R}}{R}}\int_0^{2\pi} \bar{f}(\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \bar{f}(\varphi)\left\{\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{R^{-n}\,r^n - R^n\,r^{-n}}{R^{-n}\bar{R}^n - R^n\bar{R}^{-n}}\cos n\,(t-\varphi)\right\}d\varphi, \end{aligned} \qquad \begin{matrix}\bar{R} < r < R,\\ 0 \leq t < 2\pi,\end{matrix}$$

$$u_{R,t} = f(t), \qquad u_{\bar{R},t} = \bar{f}(t).\text{“}$$

5.

Es sollen jetzt noch für den besonderen Fall, wo $f(t)$, $\bar{f}(t)$ reelle Funktionen sind, zu $u_{r,t}$ und entsprechend für den allgemeinen Fall, wo $f(t)$, $\bar{f}(t)$ nicht der Beschränkung, reell zu sein, unterworfen sind, zu mod $u_{r,t}$ möglichst enge Schranken, aus denen der Wert der genannten Größen bei festem r und sich änderndem t nicht heraustritt, ermittelt werden.

Man setze zunächst zur Abkürzung:

$$g_{r,t}(\varphi) = \frac{\ln\frac{r}{\bar{R}}}{\ln\frac{R}{\bar{R}}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\bar{R}^{-n}\,r^n - \bar{R}^n\,r^{-n}}{\bar{R}^{-n}R^n - \bar{R}^n R^{-n}}\cos n(t-\varphi),$$

$$\bar{g}_{r,t}(\varphi) = \frac{\ln\frac{r}{R}}{\ln\frac{\bar{R}}{R}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{R^{-n}\,r^n - R^n\,r^{-n}}{R^{-n}\bar{R}^n - R^n\bar{R}^{-n}}\cos n(t-\varphi); \qquad \begin{matrix}\bar{R} < r < R,\\ 0 \leq t < 2\pi,\end{matrix}$$

es läßt sich dann u für alle Punkte der Ringfläche als Funktion der Polarkoordinaten r, t auch darstellen durch die Gleichungen:

$$u_{r,t} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\, g_{r,t}(\varphi)\, d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \bar{f}(\varphi)\, \bar{g}_{r,t}(\varphi)\, d\varphi, \qquad {\scriptstyle \bar{R} < r < R,\; 0 \leq t < 2\pi,}$$

$$u_{R,t} = f(t), \qquad u_{\bar{R},t} = \bar{f}(t).$$

Die neu eingeführten, die Größen r, t als Parameter enthaltenden reellen Funktionen $g_{r,t}(\varphi)$, $\bar{g}_{r,t}(\varphi)$ haben, wie auch r, t im Rahmen der Bedingungen $\bar{R} < r < R$, $0 \leq t < 2\pi$ gewählt werden, für kein in Betracht kommendes φ einen negativen Wert. Zum Beweise dieser Behauptung nehme man an, daß die auf den Punkt r_0, t_0, ${\scriptstyle \bar{R} < r_0 < R}$, der Ringfläche bezogene Funktion $g_{r_0,t_0}(\varphi)$ für einen der Bedingung $0 \leq \varphi_0 \gtreqless 2\pi$ genügenden Wert φ_0 von φ einen negativen Wert habe, also $g_{r_0,t_0}(\varphi_0) < 0$ sei. Dann kann man, da $g_{r_0,t_0}(\varphi)$ nach früher Bewiesenem eine stetige Funktion der reellen Veränderlichen φ ist, eine von φ_0 verschiedene, der Bedingung $0 \leq \varphi_1 \gtreqless 2\pi$ genügende Zahl φ_1 von der Art angeben, daß $g_{r_0,t_0}(\varphi)$ für jedes zwischen φ_0 und φ_1 liegende φ einen negativen Wert besitzt. Läßt man nun in dem soeben für u aufgestellten Gleichungensysteme an Stelle der Funktion $\bar{f}(t)$ die Null, und zugleich an Stelle der Funktion $f(t)$ eine einwertige, stetige und mit der Periode 2π periodische reelle Funktion von t treten, welche für jedes nicht zwischen φ_0 und φ_1 liegende, der Bedingung $0 \leq t < 2\pi$ genügende t den Wert Null, für jedes zwischen φ_0 und φ_1 liegende t dagegen einen positiven Wert hat, so erhält man eine reelle Funktion u von der im Satze V definierten Art, welche für den im Innern der Ringfläche gelegenen Punkt r_0, t_0, aber für keinen auf einer der Randlinien $\mathfrak{R}$, $\bar{\mathfrak{R}}$ der Ringfläche gelegenen Punkt einen negativen Wert besitzt. Dieses Verhalten der gewonnenen Funktion u widerspricht aber dem schon in Art. 1 benutzten Satze, daß sowohl der größte wie der kleinste Wert, den eine solche Funktion u in der Ringfläche überhaupt annimmt, unter den für die Randpunkte auftretenden Funktionswerten vorkommen muß. Die Annahme $g_{r_0,t_0}(\varphi_0) < 0$ hat also auf einen Widerspruch geführt und ist daher als unzulässig zurückzuweisen. Damit ist aber der erste, auf die Funktion $g_{r,t}(\varphi)$ sich beziehende, Teil der aufgestellten Behauptung bewiesen, und es kann auf dieselbe Weise auch der Beweis für den zweiten, auf die Funktion $\bar{g}_{r,t}(\varphi)$ sich beziehenden, Teil der Behauptung erbracht werden.

Nachdem jetzt feststeht, daß die Funktionen $g_{r,t}(\varphi)$, $\bar{g}_{r,t}(\varphi)$, wie auch die Größen r, t im Rahmen der Bedingungen $\bar{R} < r < R$, $0 \leq t < 2\pi$ gewählt werden, für keinen Wert von φ einen negativen Wert haben, betrachte man zunächst den besonderen Fall, wo $f(t)$, $\bar{f}(t)$ reelle Funktionen sind. Setzt man dann, unter K, $\bar{K}$ die kleinsten, unter

G, $\bar{G}$ die größten den Funktionen $f(t)$, $\bar{f}(t)$ beziehungsweise zukommenden Werte verstehend, in dem letzten für $u_{r,t}$ aufgestellten Ausdruck an Stelle von $f(\varphi)$, $\bar{f}(\varphi)$ das eine Mal K, $\bar{K}$, das andere Mal G, $\bar{G}$ beziehungsweise, so gewinnt man für $u_{r,t}$ die günstigste untere und die günstigste obere Schranke und erhält schließlich, wenn man noch die Gleichungen:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_{r,t}(\varphi)\,d\varphi = \frac{\ln\frac{r}{\bar{R}}}{\ln\frac{R}{\bar{R}}}, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{g}_{r,t}(\varphi)\,d\varphi = \frac{\ln\frac{r}{R}}{\ln\frac{\bar{R}}{R}}$$

beachtet, die gewünschte, auch noch für $r = \bar{R}$ und $r = R$ geltende, Formel:

$$K\,\frac{\ln\frac{r}{\bar{R}}}{\ln\frac{R}{\bar{R}}} + \bar{K}\,\frac{\ln\frac{r}{R}}{\ln\frac{\bar{R}}{R}} \leqq u_{r,t} \overline{\overline{<}}\, G\,\frac{\ln\frac{r}{\bar{R}}}{\ln\frac{R}{\bar{R}}} + \bar{G}\,\frac{\ln\frac{r}{R}}{\ln\frac{\bar{R}}{R}}, \qquad \bar{R} < r < R.$$

Sollen dagegen in dem allgemeinen Falle, wo die Funktionen $f(t)$, $\bar{f}(t)$ nicht der Beschränkung, reell zu sein, unterworfen sind, für $\operatorname{mod} u_{r,t}$ möglichst enge Schranken ermittelt werden, so leite man zunächst aus der für $u_{r,t}$ aufgestellten Gleichung unter Anwendung des in Art. 3 des zweiten Abschnittes bewiesenen Modulsatzes die Ungleichung:

$$\operatorname{mod} u_{r,t} \overline{\overline{<}}\, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{mod}\,[f(\varphi)]\,g_{r,t}(\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{mod}\,[\bar{f}(\varphi)]\,\bar{g}_{r,t}(\varphi)\,d\varphi$$

ab und beachte, daß man für den auf der rechten Seite dieser Ungleichung stehenden Ausdruck die günstigste obere Schranke gewinnt, wenn man darin, unter G, $\bar{G}$ die größten den Funktionen $\operatorname{mod} f(t)$, $\operatorname{mod} \bar{f}(t)$ beziehungsweise zukommenden Werte verstehend, an Stelle von $\operatorname{mod} f(\varphi)$, $\operatorname{mod} \bar{f}(\varphi)$ die Größen G, $\bar{G}$ beziehungsweise treten läßt. Führt man dann noch die Integrationen aus, so erhält man schließlich die gewünschte, auch noch für $r = \bar{R}$ und $r = R$ geltende, Formel:

$$0 \leqq \operatorname{mod} u_{r,t} \overline{\overline{<}}\, G\,\frac{\ln\frac{r}{\bar{R}}}{\ln\frac{R}{\bar{R}}} + \bar{G}\,\frac{\ln\frac{r}{R}}{\ln\frac{\bar{R}}{R}}, \qquad \bar{R} \leqq r < R.$$

Fünfter Abschnitt.

Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ für eine Riemann'sche Fläche T bei vorgegebenen Unstetigkeitsbedingungen.

1.

Die in Art. 3 des dritten Abschnittes eingeführte, über der Z-Ebene ausgebreitete, n-blättrige, geschlossene Riemann'sche Fläche T besitzt der Voraussetzung gemäß eine endliche Anzahl von Windungspunkten, die teilweise oder auch insgesamt von höherer als der ersten Ordnung sein können. Sieht man nun einen $(\nu-1)$-fachen Windungspunkt, insofern als derselbe stets durch Zusammenrücken von $(\nu-1)$ passend gewählten einfachen Windungspunkten erzeugt werden kann, als äquivalent an mit $(\nu-1)$ einfachen Windungspunkten und bezeichnet die Anzahl der einfachen Windungspunkte, welche der Fläche T bei dieser Art der Zählung zukommen, mit w, die Zahl, welche den Zusammenhang der Fläche angibt, mit $2p+1$, so besteht zwischen den ganzen Zahlen n, w, p stets die Beziehung $w = 2(p+n-1)$.*) Der spezielle Fall $w = 2n-2$, $p = 0$ ist bei den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen.

Die $(2p+1)$-fach zusammenhängende Fläche T kann auf die verschiedensten Weisen durch $2p$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche T' verwandelt werden.**) Das für die weiteren Untersuchungen zweckmäßigste Querschnittsystem ergibt sich auf folgende Weise (s. Fig. 4). Man fixiere in der Fläche T irgend einen nicht mit einem Windungspunkte zusammenfallenden Punkt $\mathcal{P}_0$ und ziehe von ihm aus einen ersten die Fläche nicht zerstückelnden Querschnitt, der zu einem von $\mathcal{P}_0$ verschiedenen seiner Punkte zurückkehrt. Dieser Querschnitt setzt sich dann zusammen aus einem geschlossenen Schnitte a_1 und einem Schnitte c_1, welcher von $\mathcal{P}_0$ ausgeht und in den Schnitt a_1 mündet. Bei dem Schnitte c_1 soll die eine Seite als die positive, die andere als die negative bezeichnet werden, und zwar sei die Bezeichnung so gewählt, daß bei

*) Riemann, B., Theorie der Abel'schen Functionen. I, Art. 7. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 88—144; S. 113, 114.)

**) Riemann, B., Theorie der Abel'schen Functionen. I, Art. 3; II, Art. 19. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 88—144; S. 104; S. 129, 130.)

einem positiven, d. h. dem positiven Drehungssinn des Polarkoordinatensystems entsprechenden, Umlauf um den Punkt $\mathfrak{P}_0$ der Schnitt c_1 von der positiven zur negativen Seite hin überschritten wird; bei dem Schnitte a_1 dagegen soll diejenige Seite, auf welcher der Schnitt c_1 mündet, als positive, die andere als negative angesehen werden. Einen zweiten, mit b_1 zu bezeichnenden, Querschnitt ziehe man jetzt von dem der negativen Seite des Schnittes c_1 und der positiven Seite des Schnittes a_1 gemeinsam angehörigen Punkte aus durch die Fläche bis zu demjenigen Punkte auf der negativen Seite des Schnittes a_1, welcher

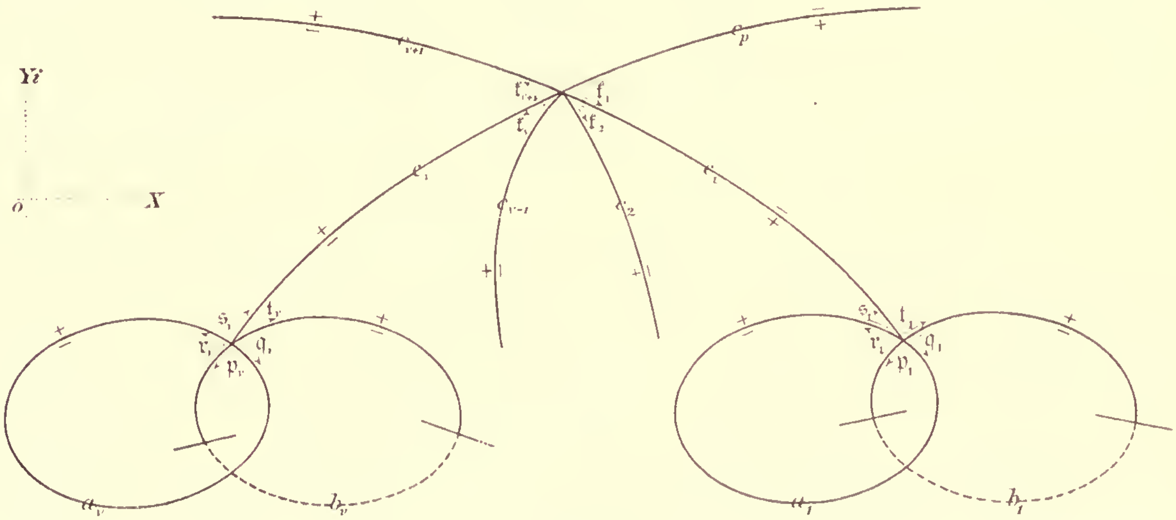


Fig. 4.

dem Ausgangspunkte gegenüber liegt, und nenne bei diesem Schnitte b_1 diejenige Seite, auf welcher der Schnitt c_1 mündet, die positive, die andere die negative. Die auf diese Weise aus der Fläche T entstandene, von den beiden Seiten der Schnitte a_1, b_1, c_1 begrenzte Fläche ist eine $(2p-1)$-fach zusammenhängende. Diese Fläche verwandle man nun, indem man, wiederum vom Punkte $\mathfrak{P}_0$ ausgehend, in derselben Weise, wie es vorher bei der Fläche T geschehen ist, zwei aus drei Teilen c_2, a_2, b_2 bestehende Querschnitte zieht, in eine $(2p-3)$-fach zusammenhängende Fläche und fahre so fort, bis man zu einer einfach zusammenhängenden Fläche kommt, ziehe dabei aber die Schnitte $c_3, \cdots, c_p$ so, daß die Schnitte c bei einem negativen Umlauf um ihren gemeinsamen Ausgangspunkt $\mathfrak{P}_0$ in der Reihenfolge $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_p$ überschritten werden.

Die in angegebener Weise aus der Fläche T entstandene einfach zusammenhängende Fläche, deren Begrenzung von den beiden Seiten der Schnitte a_ν, b_ν, c_ν, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, gebildet wird, soll mit T' bezeichnet werden. Ist hier oder im weiteren Verlaufe der Arbeit kurzweg von Schnitten oder Kurven die Rede, so sind darunter ausschließlich solche zu verstehen, welche aus einer endlichen Anzahl von Stücken algebraischer Kurven zusammengesetzt sind, also auch aus Strecken oder Kreisbogen bestehen können, und demnach im allgemeinen, also etwa abgesehen von einzelnen Punkten, eine bestimmte, beim Fortschreiten auf der Kurve ihre Richtung stetig ändernde Tangente besitzen. Speziell in bezug auf die Schnitte a, b, c aber soll vorausgesetzt werden, daß dieselben sich aus einer endlichen Anzahl von Stücken gerader Linien zusammensetzen. Diese Bedingung kommt nur für die in Art. 10 durchzuführenden Untersuchungen in Betracht und kann später, nachdem das Endresultat erhalten ist, leicht abgestreift werden. An Stelle des Punktes $\mathfrak{P}_0$ der Fläche T, von dem die p Schnitte $c_1, c_2, \cdots, c_p$ ausgehen, sind bei der Fläche T'' p Begrenzungspunkte getreten, die in der Weise durch $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \cdots, \mathfrak{k}_p$ bezeichnet werden sollen, daß $\mathfrak{k}_\nu$ den der negativen Seite von c_ν und der positiven Seite von $c_{\nu-1}$ gemeinsam angehörigen Punkt bedeutet. Dagegen sollen die fünf zur Begrenzung von T'' gehörigen Punkte, welche an Stelle des den drei Schnitten a_ν, b_ν, c_ν $(\nu=1,2,\cdots,p)$ gemeinsamen Punktes der Fläche T getreten sind, in der aus der Figur zu ersehenden Weise durch $\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{q}_\nu, \mathfrak{r}_\nu, \mathfrak{s}_\nu, \mathfrak{t}_\nu$ bezeichnet werden. Endlich sollen zwei Punkte der Begrenzung von T'', die sich nur dadurch unterscheiden, daß der eine auf der positiven, der andere auf der negativen Seite eines Schnittes a_ν, b_ν oder c_ν liegt, und denen daher derselbe Wert von z zukommt, entsprechende Begrenzungspunkte genannt und allgemein durch $\mathfrak{P}^+, \mathfrak{P}^-$ bezeichnet werden.

Bei der Begrenzung der Fläche T'' soll als positive Richtung des Durchlaufens diejenige bezeichnet werden, welche zu der ins Innere von T'' gerichteten Normalen der Begrenzungslinie ebenso liegt wie die positive Richtung der X-Achse zur positiven Richtung der Yi-Achse. Diese positive Richtung des Durchlaufens ist in der Figur durch Pfeile angedeutet. Infolge der über die Schnitte gemachten Voraussetzungen besitzt die Begrenzung der Fläche T'' eine bestimmte, mit $\varDelta$ zu bezeichnende, Länge, und man kann daher die Lage eines Punktes $\mathfrak{P}$ der Begrenzung dadurch eindeutig bestimmen, daß man die Länge λ desjenigen Stückes der Begrenzung angibt, welches man, vom Punkte $\mathfrak{k}_1$ in der Richtung des Pfeiles ausgehend, durchlaufen muß, um zum Punkte $\mathfrak{P}$ zu gelangen. Die Zahl λ, $0<\lambda<\varDelta$, soll die Koordinate des Begrenzungspunktes $\mathfrak{P}$ genannt werden.

2.

Es möge unter $f=f(\lambda)=f'(\lambda)+f''(\lambda)i$ eine durch die Koordinate λ, $0\leq\lambda<\varDelta$, als unabhängige Veränderliche, auf die Begrenzung der Fläche T'' bezogene Funktion verstanden werden, die für jeden Punkt $\mathfrak{P}$ der Begrenzung einen bestimmten, mit $f_{\mathfrak{P}}$ zu bezeichnenden, Wert besitzt, beim Übergang des Punktes $\mathfrak{P}$ zu einem benachbarten $\mathfrak{P}'$ eine zugleich mit der Länge des Bogens $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ gegen Null konvergierende Änderung erfährt, und deren, allgemein mit f^+, f^- zu bezeichnende, Werte in je zwei durch einen und denselben der Schnitte a, b, c getrennten Begrenzungspunkten $\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-$ durch eine und dieselbe Gleichung in der Weise verknüpft sind, daß

$$\text{(S.)}\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \{ f^+ = A_\nu f^- + \mathfrak{A}_\nu, \\ &\text{längs } b_\nu \{ f^+ = B_\nu f^- + \mathfrak{B}_\nu, \\ &\text{längs } c_\nu \{ f^+ = \quad f^-, \end{aligned} \qquad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,}$$

ist, wobei A_ν, B_ν, $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, Konstanten bedeuten. Die Konstanten A_ν, B_ν, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, sollen den Bedingungen $A_\nu \neq 0$, $B_\nu \neq 0$ unterworfen sein, da weder im Falle $A_\nu = 0$ noch im Falle $B_\nu = 0$ von einer Verknüpfung der Werte f^+, f^- längs des betreffenden Schnittes, a_ν oder b_ν, die Rede sein könnte. Zwischen den Konstanten A_ν, B_ν, $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ und den Werten, welche die Funktion f in den Punkten $\mathfrak{p}_\nu$, $\mathfrak{q}_\nu$, $\mathfrak{r}_\nu$, $\mathfrak{s}_\nu$, $\mathfrak{t}_\nu$ besitzt (s. Fig. 4), bestehen dann auf Grund der Beziehungen (S.) die Gleichungen:

$$1.)\ f_{\mathfrak{q}_\nu} = A_\nu f_{\mathfrak{p}_\nu} + \mathfrak{A}_\nu, \qquad 2.)\ f_{\mathfrak{s}_\nu} = A_\nu f_{\mathfrak{r}_\nu} + \mathfrak{A}_\nu,$$
$$3.)\ f_{\mathfrak{r}_\nu} = B_\nu f_{\mathfrak{p}_\nu} + \mathfrak{B}_\nu, \qquad 4.)\ f_{\mathfrak{t}_\nu} = B_\nu f_{\mathfrak{q}_\nu} + \mathfrak{B}_\nu,$$
$$5.)\ f_{\mathfrak{s}_\nu} = f_{\mathfrak{t}_\nu},$$

und man erkennt, indem man die aus den ersten vier Gleichungen durch Elimination der Größen $f_{\mathfrak{q}_\nu}$, $f_{\mathfrak{r}_\nu}$ sich ergebenden Gleichungen:

$$f_{\mathfrak{s}_\nu} = A_\nu B_\nu f_{\mathfrak{p}_\nu} + A_\nu \mathfrak{B}_\nu + \mathfrak{A}_\nu, \qquad f_{\mathfrak{t}_\nu} = A_\nu B_\nu f_{\mathfrak{p}_\nu} + B_\nu \mathfrak{A}_\nu + \mathfrak{B}_\nu$$

mit der Gleichung $f_{\mathfrak{s}_\nu} = f_{\mathfrak{t}_\nu}$ kombiniert, daß die bei einer solchen Funktion auftretenden $4p$ Konstanten A_ν, B_ν, $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, durch die p Relationen:

$$\text{(S}'.\text{)}\qquad (1 - B_\nu)\mathfrak{A}_\nu = (1 - A_\nu)\mathfrak{B}_\nu, \qquad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,}$$

verknüpft sind.

Sind umgekehrt irgend $4p$ den p Gleichungen (S'.) und den Bedingungen $A_\nu \neq 0$, $B_\nu \neq 0$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, genügende Konstanten A_ν, B_ν, $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, gegeben, so lassen sich dazu immer unbegrenzt viele Funktionen bilden, welche dieselben Eigenschaften besitzen wie die eben betrachtete Funktion f. Zur Herstellung einer solchen Funktion f nehme man zunächst die p Werte $f_{\mathfrak{p}_\nu}$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, sowie den Wert $f_{\mathfrak{t}_1} = f_{\mathfrak{t}_2} = \cdots = f_{\mathfrak{t}_p}$ willkürlich an und bestimme hierauf mit Hilfe der Gleichungen 1.), 2.), 3.), 4.) die $4p$ Werte $f_{\mathfrak{q}_\nu}$, $f_{\mathfrak{r}_\nu}$, $f_{\mathfrak{s}_\nu}$, $f_{\mathfrak{t}_\nu}$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$. Infolge der Bedingungen (S'.) ist dann die Gleichung $f_{\mathfrak{s}_\nu} = f_{\mathfrak{t}_\nu}$ für jedes ν von selbst erfüllt. Wählt man jetzt die Werte der herzustellenden Funktion f für die negative Seite eines jeden der Schnitte a, b, c unter Festhaltung der schon bestimmten Werte $f_\mathfrak{p}$, $f_\mathfrak{q}$, $f_\mathfrak{r}$, $f_\mathfrak{t}$, $f_\mathfrak{t}$ so, daß f für die ganze negative Seite eines jeden der Schnitte a, b, c eine einwertige und stetige Funktion der Koordinate λ ist, und bestimmt alsdann die Werte der Funktion f für die positive Seite eines jeden der Schnitte a, b, c den Gleichungen $(S.)$ gemäß, so ist damit eine Funktion f der verlangten Art hergestellt. Zugleich erkennt man, daß sich auf diese Weise zu den gegebenen Konstanten $A, B, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ unbegrenzt viele derartige Funktionen bilden lassen.

Da nach dem eben Bewiesenen die Gesamtheit der Größensysteme $A_1, B_1, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1; \cdots; A_p, B_p, \mathfrak{A}_p, \mathfrak{B}_p$, welche für die Bildung von Funktionen f der in Rede stehenden Art in Betracht kommen können, durch die Gleichungen $(S'.)$ und die Ungleichungen $A_\nu \neq 0$, $B_\nu \neq 0$, $\nu=1,2,\cdots,p$, vollständig charakterisiert ist, so erhält man stets ein derartiges System von $4p$ Größen, wenn man an Stelle eines jeden der p Teilsysteme $[A_\nu, B_\nu, \mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu]$, $\nu=1,2,\cdots,p$, aus denen sich das allgemeine System $A_1, B_1, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1; \cdots; A_p, B_p, \mathfrak{A}_p, \mathfrak{B}_p$ zusammensetzt, ein in seinen vier Elementen der Gleichung:

$$(1-B)\mathfrak{A} = (1-A)\mathfrak{B}$$

sowie den Bedingungen $A \neq 0$, $B \neq 0$ genügendes Zahlensystem $[A, B, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ treten läßt. Daß man auf diese Weise aber auch ein jedes derartige System von $4p$ Größen erzeugen kann, leuchtet unmittelbar ein. Beachtet man nun, daß die mit einer willkürlichen Konstanten $\mathfrak{K}$ gebildeten Größen $\mathfrak{A} = (1-A)\mathfrak{K}$, $\mathfrak{B} = (1-B)\mathfrak{K}$ stets eine Lösung der eben aufgestellten Gleichung bilden, und diese Lösung zugleich die allgemeinste ist, wenn die Größen A, B nicht beide den Wert 1 haben, daß dagegen in dem Falle $A=1$, $B=1$ die Gleichung von selbst erfüllt ist, welche Werte man auch den Größen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ beilegen mag, so erkennt man, daß die Gesamtheit der für die Bildung von Systemen $A_1, B_1, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1; \cdots; A_p, B_p, \mathfrak{A}_p, \mathfrak{B}_p$ der verlangten Art in Betracht kommenden Teilsysteme $[A_\nu, B_\nu, \mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu]$ $(\nu=1,2,\cdots,p)$ aus den beiden Systemen:

$$[A,\, B,\, (1-A)\mathfrak{K},\, (1-B)\mathfrak{K}], \quad [1,\, 1,\, \mathfrak{A},\, \mathfrak{B}]$$

hervorgeht, wenn man beim ersten die Größen $A, B, \mathfrak{K}$ unter Festhaltung der Bedingungen $A \neq 0$, $B \neq 0$ und unter Ausschluß des Wertepaares 1, 1 für das Größenpaar A, B, beim zweiten die Größen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sich im Gebiete der komplexen Zahlen frei bewegen läßt.

Es möge zum Schlusse noch bemerkt werden, daß auch jede Konstante k als eine Funktion f der betrachteten Art aufgefaßt werden kann. Setzt man nämlich $f=k$, sodaß also längs des ganzen Schnittsystems $f^- = k$, $f^+ = k$ ist, und beachtet, daß alsdann

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \{ f^+ = A_\nu f^- + (1-A_\nu)k, \\ &\text{längs } b_\nu \{ f^+ = B_\nu f^- + (1-B_\nu)k, \qquad \nu=1,2,\cdots,p, \\ &\text{längs } c_\nu \{ f^+ = \quad f^-, \end{aligned}$$

ist, welche Größen man auch unter A_ν, B_ν, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, verstehen mag, so erkennt man, daß eine Konstante k immer und zwar auf unbegrenzt viele Weisen als eine Funktion f der betrachteten Art aufgefaßt werden kann.

3.

Die dem Punkte ∞ der Z-Ebene entsprechenden Punkte $\infty_1, \infty_2, \cdots, \infty_q$ der Fläche T'' sollen mit $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_q$, die zugehörigen Ordnungszahlen mit $\nu_1 - 1, \nu_2 - 1, \cdots, \nu_q - 1$ bezeichnet werden. Im Anschlusse daran sollen die im Endlichen gelegenen Windungspunkte $z = a_1$, $z = a_2, \cdots, z = a_r$ der Fläche T'' mit $\mathscr{P}_{q+1}, \mathscr{P}_{q+2}, \cdots, \mathscr{P}_{q+r}$, die zugehörigen Ordnungszahlen mit $\nu_{q+1} - 1$, $\nu_{q+2} - 1$, $\cdots$, $\nu_{q+r} - 1$ bezeichnet werden. Zwischen den Zahlen ν und den schon früher eingeführten Zahlen n, w, mit denen die Zahl p durch die Relation $w = 2(p+n-1)$ verknüpft ist, bestehen dann die Beziehungen:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \nu_\varkappa = n\,, \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q+r} (\nu_\varkappa - 1) = w\,.$$

Die Zahlen $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_q$ können teilweise oder auch alle mit der Zahl 1 zusammenfallen; in dem letzteren, durch $q = n$ charakterisierten, Falle liegen die Windungspunkte der Fläche T'' sämtlich im Endlichen. Die Zahlen $\nu_{q+1}, \nu_{q+2}, \cdots, \nu_{q+r}$ dagegen sind sämtlich größer als 1. Zu den aufgezählten $q+r$ Punkten nehme man nun noch irgend t nicht auf der Begrenzung gelegene Punkte $z = \varepsilon_1$, $z = \varepsilon_2, \cdots, z = \varepsilon_t$ der Fläche T'' hinzu und bezeichne dieselben mit $\mathscr{P}_{q+r+1}, \mathscr{P}_{q+r+2}, \cdots, \mathscr{P}_{q+r+t}$, setze auch zur Abkürzung $q + r + t = s$. In den Fällen, wo die Punkte a, ε unterschiedslos betrachtet werden, soll der kürzeren Darstellung wegen eine einheitliche, durch die Gleichungen $a_1 = a_{q+1}$, $a_2 = a_{q+2}, \cdots, a_r = a_{q+r}$; $\varepsilon_1 = a_{q+r+1}$, $\varepsilon_2 = a_{q+r+2}, \cdots, \varepsilon_t = a_{q+r+t}$ bestimmte Bezeichnung für sie verwendet werden; zugleich soll dann, im Anschlusse an schon früher Bemerktes, der Punkt $\mathscr{P}_{q+r+\tau}$ ${\scriptstyle (\tau=1,2,\cdots,t)}$, dem der Wert $z = \varepsilon_\tau = a_{q+r+\tau}$ entspricht, als ein 0-facher Windungspunkt angesehen und demgemäß ihm die Ordnungszahl $\nu_{q+r+\tau} - 1$, wobei $\nu_{q+r+\tau} = 1$ ist, zugelegt werden.

Man betrachte jetzt für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ den Punkt $\mathscr{P}_\sigma$ als Punkt einer zum Radius R_σ gehörigen, ν_σ-blättrigen Kreisergänzungsfläche K'_σ und denke sich die Lage eines Punktes z in dieser Fläche, den in Art. 3 des dritten Abschnittes gemachten Festsetzungen gemäß, durch Polarkoordinaten r_σ, t_σ, ${\scriptstyle r_\sigma < R_\sigma,\ 0 \geqq t_\sigma > -2\nu_\sigma\pi}$, die mit z durch die Gleichung $z = x + yi = r_\sigma e^{t_\sigma i}$ verknüpft sind, bestimmt. Entsprechend betrachte man für $\sigma = q+1, q+2, \cdots, s$ den Punkt $\mathscr{P}_\sigma$, dem der Wert $z = a_\sigma = a'_\sigma + a''_\sigma i$ entspricht, als Mittelpunkt einer zum Radius R_σ gehörigen, ν_σ-blättrigen Kreisfläche K_σ und denke sich die Lage eines Punktes z in dieser Fläche, ebenfalls den in Art. 3 des dritten Abschnittes gemachten Festsetzungen gemäß, durch Polarkoordinaten r_σ, t_σ, $0 < r_\sigma > R_\sigma$, $0 < t_\sigma < 2\nu_\sigma\pi$, die mit z durch die Gleichung $z = x + yi = a_\sigma + r_\sigma e^{t_\sigma i}$ verknüpft sind, bestimmt. Dabei sollen jedoch die Radien $R_1, R_2, \cdots, R_s$ so gewählt sein, daß die zugehörigen Flächen $K_1', K_2', \cdots, K_q'$; $K_{q+1}, K_{q+2}, \cdots, K_s$ getrennt liegen, und auch keine derselben einen Begrenzungspunkt der Fläche T'' enthält.

Der Fläche K_σ' $(\sigma = 1, 2, \cdots, q)$ ordne man nun die durch die Gleichung:

$$\varphi_\sigma(r_\sigma, t_\sigma) = \mathfrak{L}_\sigma \ln r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} + \mathfrak{L}_{\sigma 1} r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} \cos\frac{t_\sigma}{\nu_\sigma} + \mathfrak{L}_{\sigma 2} r_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}} \cos\frac{2t_\sigma}{\nu_\sigma} + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma} r_\sigma^{\frac{m_\sigma}{\nu_\sigma}} \cos\frac{m_\sigma t_\sigma}{\nu_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, q)$$

bestimmte einwertige Funktion des Punktes r_σ, t_σ, $r_\sigma > R_\sigma$, $0 > t_\sigma > -2\nu_\sigma\pi$, zu; der Fläche K_σ $(\sigma = q+1, q+2, \cdots, s)$ dagegen die durch die Gleichung:

$$\varphi_\sigma(r_\sigma, t_\sigma) = \mathfrak{L}_\sigma \ln \frac{1}{r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}}} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}}} \cos\frac{t_\sigma}{\nu_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{r_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}}} \cos\frac{2t_\sigma}{\nu_\sigma} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{r_\sigma^{\frac{m_\sigma}{\nu_\sigma}}} \cos\frac{m_\sigma t_\sigma}{\nu_\sigma} \qquad (\sigma = q+1, q+2, \cdots, s)$$

bestimmte einwertige Funktion des Punktes r_σ, t_σ, $0 < r_\sigma < R_\sigma$, $0 < t_\sigma < 2\nu_\sigma\pi$. Dabei bezeichnen die m positive ganze Zahlen, die $\mathfrak{L}$ irgend welche komplexe Konstanten, die teilweise oder auch sämtlich den Wert Null haben können; die auftretenden Logarithmen sind der Bedingung reell zu sein, die auftretenden Potenzen der Bedingung positiv zu sein unterworfen. Die wesentlichen Eigenschaften der aufgestellten Funktionen φ sind aus den zu Anfang des Art. 7 und des Art. 5 des dritten Abschnittes gemachten Ausführungen zu entnehmen.

Es möge jetzt unter $F = F(x, y)$ eine komplexe Funktion des Punktes x, y der Fläche T'' verstanden werden, die für jeden von den Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ verschiedenen Punkt der Fläche einwertig und stetig ist, für den Punkt $\mathfrak{P}_\sigma$ $(\sigma = 1, 2, \cdots, s)$ in derselben Weise unstetig wird wie die Funktion φ_σ, in dem Sinne, daß für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ die Differenz $F(r_\sigma \cos t_\sigma, r_\sigma \sin t_\sigma) - \varphi_\sigma(r_\sigma, t_\sigma)$ mit unbegrenzt wachsendem r_σ, für $\sigma = q+1, q+2, \cdots, s$ die Differenz $F(a_\sigma' + r_\sigma \cos t_\sigma, a_\sigma'' + r_\sigma \sin t_\sigma) - \varphi_\sigma(r_\sigma, t_\sigma)$ mit unbegrenzt abnehmendem r_σ gleichmäßig für alle Werte von t_σ gegen eine von t_σ unabhängige Größe konvergiert, und deren, allgemein mit F^+, F^- zu bezeichnende, Werte in je zwei durch einen und denselben der Schnitte a, b, c getrennten Begrenzungspunkten $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{P}^-$ durch eine und dieselbe Gleichung in der Weise verknüpft sind, daß

$$(\mathrm{S.}) \qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \{ F^+ = A_\nu F^- + \mathfrak{A}_\nu, \\ &\text{längs } b_\nu \{ F^+ = B_\nu F^- + \mathfrak{B}_\nu, \\ &\text{längs } c_\nu \{ F^+ = F^-, \end{aligned} \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p,$$

ist, wobei A_ν, B_ν, $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\nu=1,2,\cdots,p$, vorgegebene Konstanten bedeuten, die nach der im vorhergehenden Artikel durchgeführten Untersuchung den p Gleichungen:

$$\text{(S'.)} \qquad (1-B_\nu)\mathfrak{A}_\nu = (1-A_\nu)\mathfrak{B}_\nu, \qquad \nu=1,2,\cdots,p,$$

zu genügen haben, und die im übrigen nur den Bedingungen $A_\nu \neq 0$, $B_\nu \neq 0$, $\nu=1,2,\cdots,p$, unterworfen sein sollen.

Die Funktion F kann, da sie der Voraussetzung gemäß, als Funktion des Punktes x, y von T' betrachtet, nicht nur für jeden von den Punkten $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche T', sondern auch für jeden Begrenzungspunkt der Bedingung der Stetigkeit genügt, auf unbegrenzt viele Weisen über jedes Stück der Begrenzung hinüber, das selbst nur einen Teil der negativen oder der positiven Seite eines Schnittes a_ν, b_ν oder c_ν bildet, stetig fortgesetzt werden. Unter allen diesen Fortsetzungen ist eine dadurch ausgezeichnet, daß sie in direktem Zusammenhang mit der zu dem betreffenden Schnitte gehörigen Gleichung des Systems (S.) steht. Diese Art der Fortsetzung soll jetzt näher charakterisiert werden.

Zu dem Ende nehme man irgend ein den Mündungspunkt von b_ν nicht enthaltendes Stück des Schnittes a_ν, bezeichne den dadurch bestimmten Teil der negativen Seite von a_ν mit $p_1^- p_2^-$, der positiven Seite von a_ν mit $p_1^+ p_2^+$, ziehe alsdann sowohl vom Punkte p_1^- zum Punkte p_2^-, als auch vom Punkte p_1^+ zum Punkte p_2^+ eine ganz im Innern der Fläche T' verlaufende Kurve und bezeichne das von dem Begrenzungsteile $p_1^- p_2^-$ und der Kurve $p_1^- p_2^-$ begrenzte Stück der Fläche T' mit $\mathfrak{P}$, das von dem Begrenzungsteile $p_1^+ p_2^+$ und der Kurve $p_1^+ p_2^+$ begrenzte Stück der Fläche T' mit $\mathfrak{Q}$ (s. Fig. 5). Die Kurven $p_1^- p_2^-$, $p_1^+ p_2^+$ sollen im übrigen so gezogen sein, daß sie keinen Punkt gemeinsam haben, und daß die Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ außerhalb der Flächenstücke $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ liegen. Ordnet man jetzt einem jeden Punkte x, y des Flächenstückes $\mathfrak{P}$ an Stelle des ihm zukommenden Wertes der Funktion $F(x, y)$ den Wert, den die Funktion $A_\nu F(x, y) + \mathfrak{A}_\nu$ für diesen

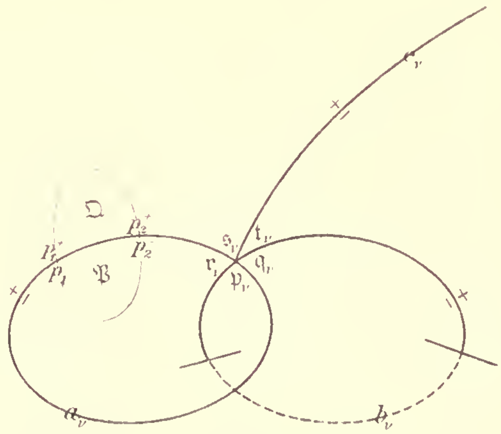


Fig. 5.

Punkt besitzt, zu, so bildet die so für das Flächenstück $\mathfrak{P}$ definierte neue Funktion eine stetige Fortsetzung der für das Flächenstück $\mathfrak{Q}$ gegebenen Funktion $F(x, y)$ über das Begrenzungsstück $p_1^+ p_2^+$ hinüber, in dem Sinne, daß die für jeden Punkt des Flächenstückes $\mathfrak{Q}$ durch die Gleichung $F_1(x, y) = F(x, y)$, für jeden Punkt des

Flächenstückes $\mathfrak{P}$ durch die Gleichung $F_1(x, y) = A_\nu F(x, y) + \mathfrak{A}_\nu$ definierte, längs des die Flächenstücke $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ trennenden Teiles von a_ν der Gleichung $F_1^+ = F_1^-$ genügende Funktion F_1 in der Fläche $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$, welche durch Aufhebung des die Flächenstücke $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ trennenden Teiles des Schnittes a_ν entsteht, allenthalben einwertig und stetig ist. Ordnet man umgekehrt einem jeden Punkte x, y des Flächenstückes $\mathfrak{Q}$ an Stelle des ihm zukommenden Wertes der Funktion $F(x, y)$ den Wert, den die Funktion $A_\nu^{-1}[F(x, y) - \mathfrak{A}_\nu]$ für diesen Punkt besitzt, zu, so bildet die so für das Flächenstück $\mathfrak{Q}$ definierte neue Funktion eine stetige Fortsetzung der für das Flächenstück $\mathfrak{P}$ gegebenen Funktion $F(x, y)$ über das Begrenzungsstück $p_1^- p_2^-$ hinüber, in dem eben angegebenen Sinne, sodaß also die für jeden Punkt des Flächenstückes $\mathfrak{P}$ durch die Gleichung $F_2(x, y) = F(x, y)$, für jeden Punkt des Flächenstückes $\mathfrak{Q}$ durch die Gleichung $F_2(x, y) = A_\nu^{-1}[F(x, y) - \mathfrak{A}_\nu]$ definierte, längs des die Flächenstücke $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ trennenden Teiles von a_ν der Gleichung $F_2^+ = F_2^-$ genügende Funktion F_2 in der Fläche $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$ allenthalben einwertig und stetig ist. Die vorstehenden auf den Schnitt a_ν sich beziehenden Betrachtungen können wörtlich auf irgend ein den Mündungspunkt von a_ν nicht enthaltendes Stück des Schnittes b_ν übertragen werden, indem man die Buchstaben A_ν, $\mathfrak{A}_\nu$ durch die Buchstaben B_ν, $\mathfrak{B}_\nu$ beziehungsweise ersetzt. Was endlich den Schnitt c_ν betrifft, so erkennt man unmittelbar, daß für jedes Stück von c_ν, welches keinen Mündungspunkt eines anderen Schnittes enthält, die Funktion $F(x, y)$ selbst die stetige Fortsetzung der Funktion $F(x, y)$, im angegebenen Sinne, über jedes der beiden zugehörigen Begrenzungsstücke hinüber bildet. Die so charakterisierten stetigen Fortsetzungen sollen die den Gleichungen (S.) entsprechenden stetigen Fortsetzungen der Funktion F genannt werden.

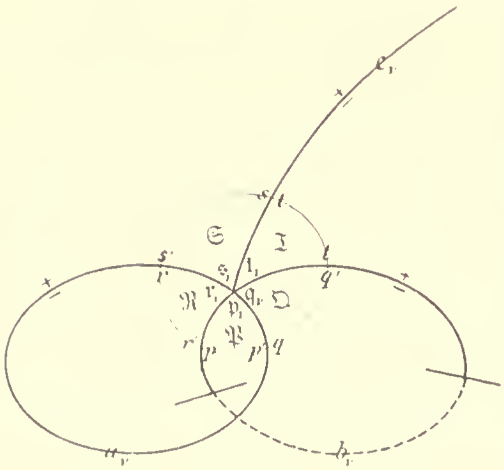


Fig. 6.

Die Funktion $F(x, y)$ kann aber auch von jedem der fünf Flächenstücke $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{T}, \mathfrak{S}, \mathfrak{R}$ aus, welche um den gemeinsamen Mündungspunkt der Schnitte a_ν, b_ν, c_ν herum durch Kurven pp', qq', tt', ss', rr' (s. Fig. 6) in der Weise abgegrenzt sein sollen, daß die Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ außerhalb dieser Flächenstücke liegen, über das in Betracht kommende Stück der Begrenzung hinüber den Gleichungen (S.) entsprechend stetig fortgesetzt werden. Um dies einzusehen, definiere man, indem man zur Abkürzung F statt $F(x, y)$ schreibt, fünf Funktionen $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, $F_3(x, y)$, $F_4(x, y)$, $F_5(x, y)$ in der Weise, daß für jeden Punkt x, y von:

	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}$	$\mathfrak{R}$
$F_1 =$	F	$A_\nu^{-1}(F - \mathfrak{A}_\nu)$	$A_\nu^{-1} B_\nu^{-1}(F - \mathfrak{A}_\nu) - B_\nu^{-1}\mathfrak{B}_\nu$	$B_\nu^{-1}(F - \mathfrak{B}_\nu)$
$F_2 =$	$A_\nu F + \mathfrak{A}_\nu$	F	$B_\nu^{-1}(F - \mathfrak{B}_\nu)$	$A_\nu B_\nu^{-1}(F - \mathfrak{B}_\nu) + \mathfrak{A}_\nu$
$F_3 =$	$B_\nu(A_\nu F + \mathfrak{A}_\nu) + \mathfrak{B}_\nu$	$B_\nu F + \mathfrak{B}_\nu$	F	$A_\nu F + \mathfrak{A}_\nu$
$F_4 =$	$B_\nu(A_\nu F + \mathfrak{A}_\nu) + \mathfrak{B}_\nu$	$B_\nu F + \mathfrak{B}_\nu$	F	$A_\nu F + \mathfrak{A}_\nu$
$F_5 =$	$B_\nu F + \mathfrak{B}_\nu$	$A_\nu^{-1}(B_\nu F + \mathfrak{B}_\nu) - A_\nu^{-1}\mathfrak{A}_\nu$	$A_\nu^{-1}(F - \mathfrak{A}_\nu)$	F

ist. Unter Beachtung der Gleichungen (S.), (S'.) erkennt man dann leicht, daß die Funktionen F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, die in den Flächenstücken $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}$ beziehungsweise mit der Funktion $F(x, y)$ übereinstimmen, in dem Flächenstücke $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} + \mathfrak{T} + \mathfrak{S} + \mathfrak{R}$, welches aus den genannten fünf Flächenstücken durch Aufhebung der sie trennenden Teile der Schnitte a_ν, b_ν, c_ν entsteht, allenthalben einwertig und stetig sind, und daß daher mit diesen Funktionen auch die den Gleichungen (S.) entsprechenden stetigen Fortsetzungen der Funktion $F(x, y)$ über die Begrenzungsstücke $p\mathfrak{p}, p'$, $q\mathfrak{q}, q'$, $t\mathfrak{t}, t'$, $s\mathfrak{s}, s'$, $r\mathfrak{r}, r'$ beziehungsweise hinüber gewonnen sind. Daß endlich die Funktion $F(x, y)$ selbst die den Gleichungen (S.) entsprechende stetige Fortsetzung der Funktion $F(x, y)$ von jedem der p Flächenstücke aus, welche man um den gemeinsamen Ausgangspunkt der Schnitte $c_1, c_2, \cdots, c_p$ herum durch Kurven abgrenzen kann, über das in Betracht kommende Stück der Begrenzung hinüber bildet, ist unmittelbar klar.

4.

Die fundamentale, durch die Überschrift dieses Abschnittes angedeutete Aufgabe läßt sich jetzt in folgender Weise formulieren.

Aufgabe. *„Es ist zu zeigen, daß zu der Fläche T' eine Funktion $U = U' + U''i$ des Punktes x, y existiert, welche den folgenden Bedingungen genügt:*

I. Die Funktion U soll für jeden nicht mit einem der Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ zusammenfallenden Punkt x, y der Fläche T', einerlei also, ob derselbe im Innern oder auf der Begrenzung von T' liegt, einwertig und stetig sein. Für den Punkt $\mathcal{P}_\sigma$ $(\sigma = 1, 2, \cdots, s)$ dagegen soll sie in derselben Weise unstetig werden wie die im vorigen Artikel definierte Funktion φ_σ, sodaß also für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ die Differenz:

$$U - \left(\mathfrak{L}_\sigma \ln r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} + \mathfrak{L}_{\sigma 1} r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} \cos\frac{l_\sigma}{\nu_\sigma} + \mathfrak{L}_{\sigma 2} r_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}} \cos\frac{2 l_\sigma}{\nu_\sigma} + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma} r_\sigma^{\frac{m_\sigma}{\nu_\sigma}} \cos\frac{m_\sigma l_\sigma}{\nu_\sigma}\right)$$

mit unbegrenzt wachsendem r_σ, für $\sigma = q + 1, q + 2, \cdots, s$ die Differenz:

$$U - \left(\mathfrak{L}_\sigma \ln \frac{1}{r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}}} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}}} \cos\frac{t_\sigma}{\nu_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{r_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}}} \cos\frac{2 t_\sigma}{\nu_\sigma} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{r_\sigma^{\frac{m_\sigma}{\nu_\sigma}}} \cos\frac{m_\sigma t_\sigma}{\nu_\sigma}\right)$$

mit unbegrenzt abnehmendem r_σ gleichmäßig für alle Werte von t_σ gegen eine von t_σ unabhängige Größe konvergiert. Zudem sollen ihre, allgemein mit U^+, U^- zu bezeichnenden, Werte in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{P}^-$ in der Weise verknüpft sein, daß

$$\text{(S.)}\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \{\, U^+ = A_\nu U^- + \mathfrak{A}_\nu, \\ &\text{längs } b_\nu \{\, U^+ = B_\nu U^- + \mathfrak{B}_\nu, \\ &\text{längs } c_\nu \{\, U^+ = U^-, \end{aligned}\qquad \nu=1,2,\cdots,p,$$

ist, wobei A_ν, B_ν, $\nu=1,2,\cdots,p$, vorgegebene Konstanten bedeuten, die sämtlich den Modul 1 besitzen, während $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\nu=1,2,\cdots,p$, vorgegebene Konstanten bezeichnen, die den p Gleichungen:

$$\text{(S'.)}\qquad (1-B_\nu)\,\mathfrak{A}_\nu = (1-A_\nu)\,\mathfrak{B}_\nu, \qquad \nu=1,2,\cdots,p,$$

genügen, im übrigen aber keinen Bedingungen unterworfen sind.

II. Die Derivierten $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, als Grenzen der entsprechenden Differenzenquotienten definiert, sollen nicht nur für jeden von den Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ verschiedenen inneren Punkt x, y der Fläche T'' existieren und stetig sein, sondern auch noch für jeden Begrenzungspunkt, sobald man die Funktion U über ein diesen Begrenzungspunkt im Innern enthaltendes Stück der Begrenzung von T'' hinüber den Gleichungen (S.) *entsprechend stetig fortsetzt, und es werden alsdann, ausschließlich auf Grund ihrer Definition, die allgemein mit $\frac{\partial U^+}{\partial x}$, $\frac{\partial U^+}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U^+}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U^+}{\partial y^2}$, $\frac{\partial U^-}{\partial x}$, $\frac{\partial U^-}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U^-}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U^-}{\partial y^2}$ zu bezeichnenden Werte der in Rede stehenden Derivierten in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{P}^-$ in der Weise verknüpft sein, daß*

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \Big\{ \frac{\partial U^+}{\partial x} = A_\nu \frac{\partial U^-}{\partial x}, \quad \frac{\partial U^+}{\partial y} = A_\nu \frac{\partial U^-}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U^+}{\partial x^2} = A_\nu \frac{\partial^2 U^-}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U^+}{\partial y^2} = A_\nu \frac{\partial^2 U^-}{\partial y^2}, \\ &\text{längs } b_\nu \Big\{ \frac{\partial U^+}{\partial x} = B_\nu \frac{\partial U^-}{\partial x}, \quad \frac{\partial U^+}{\partial y} = B_\nu \frac{\partial U^-}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U^+}{\partial x^2} = B_\nu \frac{\partial^2 U^-}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U^+}{\partial y^2} = B_\nu \frac{\partial^2 U^-}{\partial y^2}, \\ &\text{längs } c_\nu \Big\{ \frac{\partial U^+}{\partial x} = \frac{\partial U^-}{\partial x}, \quad \frac{\partial U^+}{\partial y} = \frac{\partial U^-}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U^+}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U^-}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U^+}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U^-}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

III. Die Derivierten $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ sollen für jeden Punkt x, y der Fläche T'', für den ihre Existenz gefordert wurde, also für jeden nicht mit einem der Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ zusammenfallenden Punkt die Gleichung $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ erfüllen."

Die gestellte Aufgabe verlangt demnach, um es kurz auszudrücken, die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta U = 0$ für die Fläche T'' unter den durch die Funktionen q charakterisierten Unstetigkeitsbedingungen und den durch die Gleichungen (S.) festgelegten Grenzbedingungen. Man kann diese Aufgabe aber auch so auffassen, daß sie für die Fläche T eine der Differentialgleichung $\Delta U = 0$ genügende Funktion verlangt, welche in den Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ in der durch die Funktionen φ charakterisierten Weise, längs der Linien a, b in der durch die Gleichungen (S.) charakterisierten Weise unstetig wird. Für gewisse von Kreislinien begrenzte Teile der Fläche T sind ähnliche Aufgaben schon im dritten und vierten Abschnitte gelöst worden. Die dort erhaltenen, in den Sätzen I, II, III, IV, V niedergelegten Lösungen bilden die Grundlage für die Behandlung der hier gestellten Aufgabe. Man kann nämlich von diesen schon vorhandenen Lösungen aus zur Lösung der gestellten Aufgabe allmählich aufsteigen durch wiederholte Anwendung der Methode der successiven Influenzen unter Zuhilfenahme eines Beweisverfahrens, das als eine Verallgemeinerung des von Herrn H. A. Schwarz ersonnenen und in seinen schon (S. 79) erwähnten Arbeiten mitgeteilten Beweisverfahrens insofern anzusehen ist, als es auch auf solche komplexe Funktionen $u = u' + u''i$ angewendet werden kann, bei welchen die auferlegten Bedingungen nicht in Bedingungen, von denen die einen nur u', die anderen nur u'' enthalten, zerlegt werden können. Die Grundlage dieses im folgenden zur Verwendung kommenden Beweisverfahrens, durch das der Methode der successiven Influenzen neue Gebiete erschlossen werden, bilden zwei Hilfssätze, die zunächst abgeleitet werden sollen.

5.

Man führe in die Fläche T nur die p in Art. 1 definierten Schnittpaare a_1, b_1; $a_2, b_2; \cdots; a_p, b_p$ ein, jedoch ohne die beiden Seiten dieser Schnitte als Begrenzungslinien anzusehen, bezeichne die dadurch aus T hervorgehende Fläche mit T und grenze alsdann in T durch eine in sich zurücklaufende, aus einer endlichen Anzahl von Stücken algebraischer Kurven bestehende Linie $\mathfrak{R}$, die ganz im Endlichen verläuft und keinen Windungspunkt, aber auch keinen zu einem Schnitte a oder b gehörigen Punkt enthält, ein Flächenstück F ab. Diesen Festsetzungen entsprechend kann also das Flächenstück F einige oder auch alle Windungspunkte, ebenso einige oder auch alle Punkte $\mathfrak{P}_\infty$, endlich einige oder auch alle Schnittpaare a, b in seinem Innern enthalten.

Es werde nun die Annahme gemacht, daß zu der Fläche F eine einwertige Funktion $u = u' + u''i$ des Punktes x, y existiere, welche den folgenden Bedingungen genügt:

1. Die Funktion u soll für jeden nicht zu einem Schnitte a oder einem Schnitte b gehörigen Punkt x, y von F stetig sein, aber auch noch für jeden zu einem etwa in F gelegenen Schnitte a_ν oder b_ν gehörigen Punkt $\mathfrak{P}^+$ oder $\mathfrak{P}^-$, sobald man sich auf die Werte von u für die in der Umgebung des Punktes $\mathfrak{P}^+$ oder $\mathfrak{P}^-$ mit dem Punkte zur selben Seite des betreffenden Schnittes liegenden Punkte x, y beschränkt; dagegen sollen ihre Werte u^+, u^- in je zwei zu einem solchen Schnitte a_ν oder b_ν gehörigen entsprechenden Punkten $\mathfrak{P}^+, \mathfrak{P}^-$ in der Weise verknüpft sein, daß

$$(\mathrm{S}_\nu)\qquad \begin{aligned}&\text{längs } a_\nu \{ u^+ = A_\nu u^-,\\ &\text{längs } b_\nu \{ u^+ = B_\nu u^-\end{aligned}$$

ist, wobei A_ν, B_ν Konstanten mit dem Modul 1 bezeichnen.

II. Die Derivierten $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ sollen bei Hinzunahme der den Gleichungen (S_ν) entsprechenden stetigen Fortsetzungen der Funktion u über die Schnitte a_ν, b_ν hinüber für jeden nicht auf der Begrenzung $\mathfrak{R}$ gelegenen, aber auch nicht mit einem Windungspunkte oder einem Punkte $\mathcal{P}_\varkappa$ zusammenfallenden Punkt von F existieren und stetig sein, und es werden alsdann, ausschließlich auf Grund ihrer Definition, die Werte der genannten Derivierten in je zwei zu einem Schnitte a_ν oder b_ν gehörigen entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ in der Weise verknüpft sein, daß

$$\text{längs } a_\nu \Big\{ \frac{\partial u^+}{\partial x} = A_\nu \frac{\partial u^-}{\partial x},\ \frac{\partial u^+}{\partial y} = A_\nu \frac{\partial u^-}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2} = A_\nu \frac{\partial^2 u^-}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^2} = A_\nu \frac{\partial^2 u^-}{\partial y^2},$$

$$\text{längs } b_\nu \Big\{ \frac{\partial u^+}{\partial x} = B_\nu \frac{\partial u^-}{\partial x},\ \frac{\partial u^+}{\partial y} = B_\nu \frac{\partial u^-}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2} = B_\nu \frac{\partial^2 u^-}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^2} = B_\nu \frac{\partial^2 u^-}{\partial y^2}$$

ist.

III. Die Derivierten $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ sollen für jeden Punkt von F, für den ihre Existenz gefordert wurde, die Gleichung $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ erfüllen.

Für jede solche Funktion $u = u' + u''i$ gilt der Satz, daß der Wert von mod u *für keinen Punkt der Fläche F größer ist als das Maximum G der Werte, welche* mod u *für die Punkte der Begrenzung $\mathfrak{R}$ von F besitzt.*

Da die Richtigkeit dieses Satzes unmittelbar einleuchtet, wenn mod u für alle Punkte von F denselben Wert besitzt, so kann man bei dem jetzt folgenden Beweise des Satzes diesen Fall, als schon erledigt, ausschließen.

Man setze also voraus, daß mod u nicht für alle Punkte von F denselben Wert besitzt, bezeichne das, jedenfalls über Null und nicht unter G liegende, Maximum der Werte, welche mod u für die Punkte von F besitzt, mit G' und stelle sich die Frage, ob G' für einen im Innern, also nicht auf der Begrenzung $\mathfrak{R}$ von F gelegenen Punkt $\mathcal{P}$ als Wert von mod u auftreten kann. Für die Beantwortung dieser Frage sind dann in bezug auf die Lage des Punktes $\mathcal{P}$ vier Fälle zu unterscheiden.

Als ersten Fall sehe man denjenigen an, wo der Punkt $\mathcal{P}$ ein im Endlichen gelegener, aber weder zu einem Schnitte a noch zu einem Schnitte b gehöriger Punkt $z = a$ ist. In diesem Falle grenze man zu dem Punkte $\mathcal{P}$ als Mittelpunkt, wenn $\mathcal{P}$ ein $(\nu-1)$-facher Windungspunkt ist, eine nicht aus F heraustretende und auch keinen Punkt eines Schnittes a oder b enthaltende, etwa zum Radius R gehörige ν-blättrige Kreisfläche K ab — also eine einblättrige, wenn $\mathcal{P}$ ein 0-facher Windungspunkt ist — und denke sich die Lage eines Punktes z in dieser Kreisfläche, den in Art. 3 des dritten

Abschnittes gemachten Festsetzungen gemäß, durch Polarkoordinaten r, t, ${}_{0<r<R,\ 0<t<2\nu\pi}$, die mit z durch die Gleichung $z = x + yi = a + re^{ti}$ verknüpft sind, bestimmt. Bezeichnet man alsdann den Wert von u in irgend einem Punkte r, t der Kreisfläche K mit $u_{r,t}$, den Wert von u im Mittelpunkte $\mathfrak{P}$ der Kreisfläche mit u_0, beachtet, daß nach Satz I zwischen u_0 und den Werten, welche $u_{r,t}$ auf der Peripherie von K besitzt, die Beziehung $u_0 = \frac{1}{2\nu\pi}\int\limits_0^{2\nu\pi} u_{R,t}dt$ besteht, und wendet auf diese den in Art. 3 des zweiten Abschnittes bewiesenen Modulsatz an, so erhält man, da der Voraussetzung gemäß mod $u_0 = G'$ ist, die Beziehung:

$$G' \overline{\overline{<}} \frac{1}{2\nu\pi}\int\limits_0^{2\nu\pi} \operatorname{mod} u_{R,t}dt.$$

Bei dieser Beziehung ist jedoch, da mod $u_{R,t}$ auf Grund der Definition von G' für keinen Punkt R, t der Peripherie von K größer als G' ist, nur das Gleichheitszeichen zulässig. Daraus folgt dann, daß $u_{R,t}$ für jedes t nicht nur den Modul G', sondern auch dieselbe Richtungszahl $\varkappa$ besitzen muß, sodaß also für jeden Punkt R, t der Peripherie von K und damit auch, nach Satz I, für jeden Punkt r, t von K überhaupt die Beziehung $u_{r,t} = G'e^{\varkappa i}$ besteht. Grenzt man jetzt zu irgend einem Peripheriepunkte $\mathfrak{P}_1$ von K als Mittelpunkt eine Kreisfläche K_1, alsdann zu einem Peripheriepunkte $\mathfrak{P}_2$ von K_1 als Mittelpunkt eine Kreisfläche K_2 ab und fährt in dieser Weise fort, bildet also, ohne jedoch einen der Schnitte a, b zu überschreiten und ohne aus F herauszutreten, eine Kette von Kreisflächen, bei der jede neue Kreisfläche ihren Mittelpunkt auf der Peripherie der unmittelbar vorangehenden hat, und überträgt die für K gemachten Schlüsse auf die Kreisflächen $K_1, K_2, \cdots$, so erkennt man, daß u für jeden Punkt dieses Flächensystems den Wert $G'e^{\varkappa i}$ besitzt. Da aber durch passende Wahl der Mittelpunkte und Radien der Kreisflächen $K_1, K_2, \cdots$ ein jeder im Innern von F gelegene Punkt, der weder ein Windungspunkt, noch ein Punkt $\mathfrak{P}_\infty$, noch auch ein Punkt eines Schnittes a oder b ist, zu einem Punkte des zu konstruierenden Flächensystems gemacht werden kann, so ergibt sich schließlich, daß die Funktion u für jeden solchen Punkt und daher auch, den ihr auferlegten Stetigkeitsbedingungen zufolge, für jeden Punkt von F überhaupt den Wert $G'e^{\varkappa i}$ besitzt. Dieses Resultat steht aber im Widerspruch mit der bei Beginn der Untersuchung gemachten Voraussetzung, daß mod u nicht für alle Punkte von F denselben Wert besitzt, und es kann daher dieser erste Fall nicht eintreten.

Als zweiten Fall sehe man denjenigen an, wo der Punkt $\mathfrak{P}$ ein Punkt $\mathfrak{P}_\infty$ ist. Man betrachte dann diesen Punkt $\mathfrak{P}_\infty$, wenn er ein $(\nu-1)$-facher Windungspunkt ist, als Punkt einer nicht aus F heraustretenden und auch keinen Punkt eines Schnittes a oder b enthaltenden, etwa zum Radius R gehörigen ν-blättrigen Kreisergänzungsfläche K' — also einer einblättrigen, wenn $\mathfrak{P}_\infty$ ein 0-facher Windungspunkt ist — und denke sich die Lage eines Punktes z in dieser Kreisergänzungsfläche, den in Art. 3 des dritten Abschnittes gemachten Festsetzungen gemäß, durch Polarkoordinaten r, t, $r \geq R,\ 0 \geq t \geq -2\nu\pi$, die mit z durch die Gleichung $z = x + yi = re^{ti}$ verknüpft sind, bestimmt. Bezeichnet man alsdann den Wert von u in irgend einem Punkte r, t der Fläche K' mit $u_{r,t}$, den Wert von u im Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ mit u_∞, beachtet, daß nach Satz III zwischen u_∞ und den Werten, welche $u_{r,t}$ auf dem Rande von K' besitzt, die Beziehung $u_\infty = \frac{1}{2\nu\pi}\int\limits_{-2\nu\pi}^{0} u_{R,t}\,dt$ besteht, und wendet auf diese den in Art. 3 des zweiten Abschnittes bewiesenen Modulsatz an, so erhält man, da der Voraussetzung gemäß $\operatorname{mod} u_\infty = G'$ ist, die Beziehung:

$$G' \leqq \frac{1}{2\nu\pi}\int\limits_{-2\nu\pi}^{0} \operatorname{mod} u_{R,t}\,dt.$$

Bei dieser Beziehung ist jedoch, da $\operatorname{mod} u_{R,t}$ auf Grund der Definition von G' für keinen Punkt R, t des Randes von K' größer als G' ist, nur das Gleichheitszeichen zulässig. Daraus folgt dann, daß $\operatorname{mod} u_{R,t}$ für jeden Punkt R, t des Randes von K' den Wert G' besitzen muß, und es ist damit der zweite Fall auf den schon als unmöglich erkannten ersten Fall zurückgeführt.

Ein dritter denkbarer Fall ist der, wo der Punkt $\mathfrak{P}$ zu einem, aber nur zu einem der Schnitte a, b gehört. Man betrachte zunächst den Unterfall, wo der Punkt $\mathfrak{P}$ zum Schnitte a_ν gehört. In diesem Unterfalle bezeichne man den Punkt, je nachdem er auf a_ν^+ oder auf a_ν^- liegt, mit $\mathfrak{P}^+$ oder mit $\mathfrak{P}^-$ und grenze zu ihm als Mittelpunkt eine Kreisfläche K ab, deren Radius R so klein gewählt sei, daß sie weder einen Punkt von $\mathfrak{R}$ noch einen Punkt von b_ν noch auch einen Punkt der übrigen Schnitte a, b enthält, und daß ihre Peripherie mit dem Schnitte a_ν nur zwei Punkte gemeinsam hat, bezeichne den an a_ν^- anstoßenden Teil von K mit $\mathfrak{P}$, den an a_ν^+ anstoßenden mit $\mathfrak{Q}$ (s. Fig. 7) und definiere alsdann zur Fläche K eine Funktion $\bar{u}$ dadurch, daß man für jeden Punkt von $\mathfrak{P}$ $\bar{u} = u$, für jeden Punkt von $\mathfrak{Q}$ $\bar{u} = A_\nu^{-1} u$ setzt. Hebt man jetzt den die Flächenstücke $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ trennenden Teil des Schnittes a_ν auf und betrachtet die definierte Funktion $\bar{u}$ als Funktion des Punktes x, y in der zusammenhängenden Fläche K, so erkennt man, daß $\bar{u}$ eine Funktion von der im Satze I charakterisierten Art ist. Es besteht daher, bei Anwendung derselben Bezeichnung wie im ersten Falle, die Beziehung $\operatorname{mod} \bar{u}_0 \lesseqgtr \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} \operatorname{mod} \bar{u}_{R,t}\,dt$ und folglich auch, da wegen $\operatorname{mod} A_\nu = 1$ für jeden Punkt von K $\operatorname{mod} \bar{u}_{r,t} = \operatorname{mod} u_{r,t}$

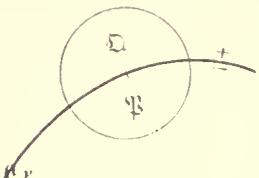


Fig. 7.

und speziell $\operatorname{mod} \bar{u}_0 = \operatorname{mod} u_0 = G'$ ist, einerlei ob der Punkt $\mathcal{P}$ auf a_ν^+ oder auf a_ν^- liegt, die Beziehung:

$$G' \gtreqless \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{mod} u_{R,t}\, dt.$$

Aus dieser Beziehung folgt aber, durch die schon wiederholt angewandte Schlußweise, daß die mit t sich stetig ändernde Größe $\operatorname{mod} u_{R,t}$ für jeden Punkt R, t der Peripherie von K den Wert G' besitzt, und damit ist auch der betrachtete Unterfall auf den schon als unmöglich erkannten ersten Fall zurückgeführt. Auf dieselbe Weise läßt sich auch der andere Unterfall, wo der Punkt $\mathcal{P}$ zum Schnitte b_ν gehört, auf den ersten Fall zurückführen; man braucht dazu nur in der vorstehenden Betrachtung allenthalben a_ν, b_ν durch b_ν, a_ν und A_ν durch B_ν zu ersetzen.

Der vierte noch denkbare Fall endlich ist der, wo der Punkt $\mathcal{P}$ sowohl zum Schnitte a_ν wie zum Schnitte b_ν gehört, sich also mit einem der vier zum gemeinsamen Mündungspunkt der Schnitte a_ν, b_ν gehörigen Punkte $\mathfrak{p}_\nu$, $\mathfrak{q}_\nu$, $\mathfrak{r}_\nu$, $\mathfrak{s}_\nu$ deckt. In diesem Falle grenze man zu dem Punkte $\mathcal{P}$ als Mittelpunkt eine Kreisfläche K ab, deren Radius R so klein gewählt sei, daß sie weder einen Punkt der Begrenzung $\mathfrak{R}$ von F noch einen Punkt der übrigen Schnitte a, b enthält, und daß ihre Peripherie sowohl mit dem Schnitte a_ν wie mit dem Schnitte b_ν nur zwei Punkte gemeinsam hat, bezeichne die vier Teile, in welche K durch die Schnitte a_ν, b_ν zerfällt, der Bezeichnung $\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{q}_\nu, \mathfrak{r}_\nu, \mathfrak{s}_\nu$ entsprechend, mit $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ (s. Fig. 8) und definiere alsdann zur Fläche K eine Funktion u dadurch, daß man für jeden Punkt von $\mathfrak{P}$ $\bar{u} = u$, für jeden Punkt von $\mathfrak{Q}$ $\bar{u} = A_\nu^{-1} u$, für jeden Punkt von $\mathfrak{R}$ $\bar{u} = B_\nu^{-1} u$, für jeden Punkt von $\mathfrak{S}$ $\bar{u} = A_\nu^{-1} B_\nu^{-1} u$ setzt. Hebt man jetzt die die Flächenstücke $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ trennenden Teile der Schnitte a_ν, b_ν auf und betrachtet die definierte Funktion $\bar{u}$ als Funktion des Punktes x, y in der zusammenhängenden Fläche K, so erkennt man, daß $\bar{u}$ eine Funktion von der im Satze I charakterisierten Art ist. Es besteht daher, bei Anwendung derselben Bezeichnung wie im ersten Falle, die Beziehung $\operatorname{mod} \bar{u}_0 \lesseqgtr \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{mod} \bar{u}_{R,t}\, dt$ und folglich auch, da wegen $\operatorname{mod} A_\nu = 1$, $\operatorname{mod} B_\nu = 1$ für jeden Punkt von K $\operatorname{mod} \bar{u}_{r,t} = \operatorname{mod} u_{r,t}$ und speziell $\operatorname{mod} \bar{u}_0 = \operatorname{mod} u_0 = G'$ ist, einerlei mit welchem der Punkte $\mathfrak{p}_\nu$, $\mathfrak{q}_\nu$, $\mathfrak{r}_\nu$, $\mathfrak{s}_\nu$ der Punkt $\mathcal{P}$ sich deckt, die Beziehung:

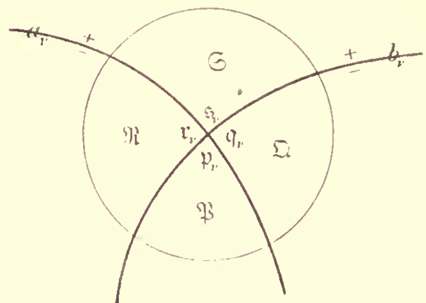


Fig. 8.

$$G' \gtreqless \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{mod} u_{R,t}\, dt.$$

Aus dieser Beziehung folgt aber, durch die schon wiederholt angewandte Schlußweise, daß die mit t sich stetig ändernde Größe $\mathrm{mod}\, u_{R,t}$ für jeden Punkt R, t der Peripherie von K den Wert G' besitzt, und damit ist auch dieser vierte und letzte Fall auf den schon als unmöglich erkannten ersten Fall zurückgeführt.

Nachdem so die zu Anfang gestellte Frage, ob das Maximum G' der Werte, welche $\mathrm{mod}\, u$ für die Punkte von F besitzt, für einen im Innern von F gelegenen Punkt $\mathfrak{P}$ als Wert von $\mathrm{mod}\, u$ auftreten kann, wenn $\mathrm{mod}\, u$ nicht für alle Punkte von F denselben Wert besitzt, in verneinendem Sinne beantwortet und damit für diesen Fall festgestellt ist, daß der Wert von $\mathrm{mod}\, u$ in einem inneren Punkt von F stets kleiner ist als das Maximum G der Werte, welche $\mathrm{mod}\, u$ für die auf der Begrenzung $\mathfrak{R}$ von F gelegenen Punkte besitzt, läßt sich das Resultat der in diesem Artikel durchgeführten Untersuchung dahin aussprechen, daß der Wert von $\mathrm{mod}\, u$, wie in dem zu Anfang aufgestellten Satze behauptet wurde, einerlei, ob $\mathrm{mod}\, u$ in allen oder nicht in allen Punkten von F denselben Wert hat, für keinen Punkt der Fläche F größer ist als das Maximum G der Werte, welche $\mathrm{mod}\, u$ für die Punkte der Begrenzung $\mathfrak{R}$ von F besitzt.

Durch wiederholte Anwendung des aufgestellten und jetzt bewiesenen Satzes gelangt man nun unmittelbar zu dem folgenden

Hilfssatz I. „*Es seien in der aus der Fläche T durch Einführung der p Schnittpaare $a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ \cdots;\ a_p, b_p$ hervorgehenden Fläche T' k getrennt liegende Flächenstücke $F_1, F_2, \cdots, F_k$, deren Gesamtheit mit F bezeichnet werden möge, in der Weise abgegrenzt, daß allgemein die Begrenzung von $F_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, k)$ von einer in sich zurücklaufenden, aus einer endlichen Anzahl von Stücken algebraischer Kurven bestehenden Linie $\mathfrak{R}_\varkappa$ gebildet wird, die ganz im Endlichen verläuft und keinen Windungspunkt, aber auch keinen zu einem Schnitte a oder b gehörigen Punkt enthält, während das Flächensystem F einige oder auch alle Windungspunkte, ebenso einige oder auch alle Punkte $\mathfrak{P}_\varkappa$, endlich einige oder auch alle Schnittpaare a, b in seinem Innern enthalten darf. Dabei soll der Fall, wo $k = 1$ ist, also statt des Flächensystems F nur ein einziges Flächenstück F_1 vorliegt, nicht ausgeschlossen sein.*

Zu dem Flächensysteme F existiere nun eine einwertige Funktion $u = u' + u''i$ des Punktes x, y, welche den folgenden Bedingungen genügt:

1. Die Funktion u soll für jeden nicht zu einem Schnitte a oder einem Schnitte b gehörigen Punkt x, y von $F_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, k)$ stetig sein, aber auch noch für jeden zu einem etwa in $F_\varkappa$ gelegenen Schnitte a_ν oder b_ν gehörigen Punkt $\mathfrak{P}^+$ oder $\mathfrak{P}^-$, sobald man sich auf die Werte von u für die in der Umgebung des Punktes $\mathfrak{P}^+$ oder $\mathfrak{P}^-$ mit dem Punkte zur selben Seite des betreffenden Schnittes liegenden Punkte x, y beschränkt; dagegen sollen ihre Werte u^+, u^- in je zwei zu einem solchen Schnitte a_ν oder b_ν gehörigen entsprechenden Punkten $\mathfrak{P}^+, \mathfrak{P}^-$ in der Weise verknüpft sein, daß

$$(\mathrm{S}_1.)\qquad \begin{array}{l} \text{längs } a_\nu \{ u^+ = A_\nu u^-, \\ \text{längs } b_\nu \{ u^+ = B_\nu u^- \end{array}$$

ist, wobei A_ν, B_ν Konstanten mit dem Modul 1 bezeichnen.

II. Die Derivierten $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ sollen bei Hinzunahme der den Gleichungen (S$_1$.) *entsprechenden stetigen Fortsetzungen der Funktion u über die Schnitte a_ν, b_ν hinüber für jeden nicht auf der Begrenzung $\mathfrak{R}_\varkappa$ gelegenen, aber auch nicht mit einem Windungspunkte oder einem Punkte $\mathcal{P}_\infty$ zusammenfallenden Punkt von $F_\varkappa$ existieren und stetig sein, und es werden alsdann, ausschließlich auf Grund ihrer Definition, die Werte der genannten Derivierten in je zwei zu einem Schnitte a_ν oder b_ν gehörigen entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ in der Weise verknüpft sein, daß*

$$\text{längs } a_\nu \left\{ \frac{\partial u^+}{\partial x} = A_\nu \frac{\partial u^-}{\partial x},\ \frac{\partial u^+}{\partial y} = A_\nu \frac{\partial u^-}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2} = A_\nu \frac{\partial^2 u^-}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^2} = A_\nu \frac{\partial^2 u^-}{\partial y^2}, \right.$$

$$\text{längs } b_\nu \left\{ \frac{\partial u^+}{\partial x} = B_\nu \frac{\partial u^-}{\partial x},\ \frac{\partial u^+}{\partial y} = B_\nu \frac{\partial u^-}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2} = B_\nu \frac{\partial^2 u^-}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^2} = B_\nu \frac{\partial^2 u^-}{\partial y^2} \right.$$

ist.

III. Die Derivierten $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ sollen für jeden Punkt von $F_\varkappa$, für den ihre Existenz gefordert wurde, die Gleichung $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ erfüllen.

Es ist dann der Wert von mod u *für keinen Punkt des Flächensystems F größer als das Maximum G der Werte, welche* mod u *für die Punkte der durch die Linien $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \cdots, \mathfrak{R}_k$ gebildeten Begrenzung $\mathfrak{R}$ von F besitzt.*"

6.

In der Fläche T sei eine Kreisfläche K abgegrenzt; ihr Mittelpunkt möge mit M, ihr Radius mit R bezeichnet werden (s. Fig. 9). Zu dieser Fläche wähle man ein Polarkoordinatensystem mit positivem Drehungssinne, welches den Punkt M zum Pol und irgend einen von M ausgehenden Strahl zur Polarachse hat, und bezeichne die dem Punkte $\mathcal{P}$ der Fläche dann zukommenden Polarkoordinaten mit r, t, ${\scriptstyle 0 < r \leq R,\ 0 \leq t < 2\pi}$. Die Peripherie von K denke man sich jetzt, unter n eine positive ganze Zahl verstehend, durch $2n$ Punkte R, α_1; R, α_2; $\cdots$; R, α_{2n} ${\scriptstyle (\alpha_1 = 0,\ \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{2n})}$ in $2n$ Teile zerlegt und bezeichne diese Teile, vom Punkte R, α_1 in der Richtung der wachsenden t ausgehend, der Reihe nach mit r_1, s_1; r_2, s_2; $\cdots$; r_n, s_n. Schließlich konstruiere man zu den n Peripherieteilen $r_1, r_2, \cdots, r_n$ n sich aus Stücken algebraischer Kurven zusammensetzende Kurven $q_1, q_2, \cdots, q_n$ in der Weise, daß für $\nu = 1, 2, \cdots, n$ die Kurve q_ν vom Anfangspunkte $R, \alpha_{2\nu-1}$ des Bogens r_ν aus durch das Innere der Fläche K, ohne sich selbst oder eine der $n-1$ übrigen Kurven q zu schneiden oder zu berühren, bis zum Endpunkte $R, \alpha_{2\nu}$ des Bogens r_ν sich erstreckt und in keinem der beiden Punkte $R, \alpha_{2\nu-1}$; $R, \alpha_{2\nu}$, welche sie mit der Peripherie von K gemeinsam hat, die Peripherie berührt. Die in Bogenmaß gemessene Größe des hohlen Winkels, welchen der vom Punkte $R, \alpha_{2\nu-1}$ nach irgend einem Punkte r, t der Fläche K gezogene Strahl mit dem Peripherieteile $s_{\nu-1}$ bildet, soll mit $\tau_{2\nu-1}$; die Größe des hohlen Winkels, welchen der vom Punkte $R, \alpha_{2\nu}$ nach demselben Punkte r, t gezogene Strahl mit dem Peripherieteile s_ν bildet, soll mit $\tau_{2\nu}$ bezeichnet werden. Entsprechend möge von den hohlen Winkeln, welche die Kurve q_ν im Punkte $R, \alpha_{2\nu-1}$ mit dem Peripherieteile $s_{\nu-1}$ und im Punkte $R, \alpha_{2\nu}$ mit dem Peripherieteile s_ν bildet, der erstere, in Bogenmaß gemessen, die Zahl $\tau'_{2\nu-1}$ $(0<\tau'_{2\nu-1}<\pi)$, der letztere die Zahl $\tau'_{2\nu}$ $(0<\tau'_{2\nu}<\pi)$ als Maß haben.

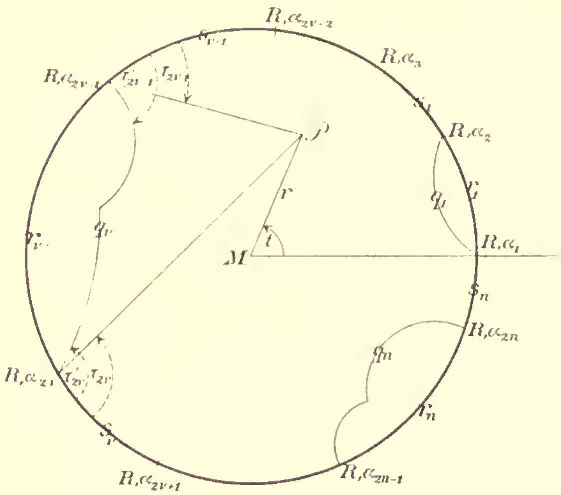


Fig. 9.

Es werde nun unter $f(t) = f'(t) + f''(t)i$ eine einwertige, stetige und mit der Periode 2π periodische komplexe Funktion der reellen Veränderlichen t verstanden, die, als Funktion des Peripheriepunktes R, t, $0 \leq t < 2\pi$, betrachtet, für jeden auf den Bogen $s_1, s_2, \cdots, s_n$ gelegenen Punkt R, t den Wert Null besitzt. Auf Grund des in Art. 4 des dritten Abschnittes aufgestellten Satzes 1 kann man dann zu der Fläche K eine Funktion $u = u' + u''i$ des Punktes x, y von K bestimmen, welche die in dem Satze erwähnten allgemeinen Eigenschaften besitzt und zudem für jeden Peripheriepunkt R, t mit der Funktion $f(t)$ dem Werte nach übereinstimmt. Diese Funktion u wird für alle Punkte der Fläche K als Funktion der Polarkoordinaten r, t dargestellt durch die Gleichungen:

$$u_{r,t} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_{2\mu-1}}^{\alpha_{2\mu}} f(\varphi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} d\varphi, \qquad u_{R,t} = f(t). \qquad \begin{matrix} 0 \leq r < R, \\ 0 \leq t < 2\pi. \end{matrix}$$

Unter der Voraussetzung, daß die Funktion $f(t)$ nicht durchweg den Wert Null besitzt, oder, was dasselbe, daß das Maximum G der Werte, welche $\operatorname{mod} f(t)$ auf den Bogen r annimmt, eine von Null verschiedene Zahl ist, soll jetzt für die Werte, welche $\operatorname{mod} u$ in den auf den Kurven q gelegenen Punkten besitzt, eine möglichst günstige obere Schranke bestimmt werden.

Zu dem Ende gehe man von der, auf einfache Weise aus der die Funktion $u_{r,t}$ darstellenden Gleichung sich ergebenden, Relation:

$$\operatorname{mod} u_{r,t} \overline{\gtrless} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{1}{2\pi} \operatorname{mod} \int\limits_{\alpha_{2\mu-1}}^{\alpha_{2\mu}} f(\varphi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} d\varphi, \qquad {\scriptstyle 0 \leq r < R, \atop 0 \leq t < 2\pi,}$$

aus, wende auf das allgemeine Glied der auf ihrer rechten Seite stehenden Summe den im zweiten Abschnitte zu Anfang des Art. 3 abgeleiteten Modulsatz an und beachte, daß $\operatorname{mod} f(\varphi)$ in dem Intervalle von $\varphi = \alpha_{2\mu-1}$ bis $\varphi = \alpha_{2\mu}$ die Zahl G nicht überschreiten, aber auch, als stetige Funktion von φ wegen $f(\alpha_{2\mu-1}) = 0$, $f(\alpha_{2\mu}) = 0$, nicht für jedes dem Intervalle angehörige φ den Wert G haben kann, ferner, daß der zwischen $f(\varphi)$ und $d\varphi$ stehende Ausdruck für jedes in Betracht kommende Wertepaar r, t wesentlich positiv ist, endlich noch, daß die Gleichung:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\alpha_{2\mu-1}}^{\alpha_{2\mu}} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} d\varphi \\ +&\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\alpha_{2\mu}}^{\alpha_{2\mu+1}} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} d\varphi \end{aligned}\right\} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_1 + 2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} d\varphi = 1, \qquad {\scriptstyle 0 \leq r < R, \atop 0 \leq t < 2\pi,}$$

besteht, bei der unter α_{2n+1} die Größe $\alpha_1 + 2\pi$ zu verstehen ist. Man erkennt dann, daß für jeden inneren Punkt r, t der Fläche K die Beziehung:

$$\operatorname{mod} u_{r,t} < \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{G}{2\pi} \int\limits_{\alpha_{2\mu-1}}^{\alpha_{2\mu}} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} d\varphi < G, \qquad {\scriptstyle 0 \leq r < R, \atop 0 \leq t < 2\pi,}$$

besteht. Setzt man nun zur Abkürzung:

$$\Gamma_{r,t} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{G}{2\pi} \int\limits_{\alpha_{2\mu-1}}^{\alpha_{2\mu}} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} d\varphi, \qquad {\scriptstyle 0 \leq r < R, \atop 0 \leq t < 2\pi,}$$

und bezeichnet die obere Grenze der Werte, welche die immer positive Funktion $\Gamma_{r,t}$ des Punktes r, t, ${\scriptstyle 0 \leq r < R,\, 0 \leq t < 2\pi}$, für die im Innern der Fläche K gelegenen Punkte r, t der Kurven q besitzt, mit G, so bildet die so definierte Größe G, da für jeden im Innern der Fläche K gelegenen, also von den Punkten R, α_1; R, α_2; $\cdots$; R, α_{2n} verschiedenen Punkt r, t der Kurven q die Beziehung $\operatorname{mod} u_{r,t} < \Gamma_{r,t}$ besteht, und für jeden Punkt R, α_ν, ${\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, 2n}$, $\operatorname{mod} u_{R,\alpha_\nu} = 0$ ist, eine obere, aber nie erreichbare Schranke für die Werte, welche $\operatorname{mod} u$ in den auf den Kurven q überhaupt gelegenen Punkten besitzt, und zugleich, wie aus dem Vorhergehenden unmittelbar erhellt, die günstigste obere Schranke, wenn die zu u gehörige Randfunktion $f(t)$ nur den genannten allgemeinen Bedingungen unterworfen ist.

Die Größe G ist kleiner als G. Der Beweis für diese Behauptung wird erbracht sein, sobald gezeigt ist, daß der Wert von $\Gamma_{r,t}$, der für jeden im Innern der Fläche K gelegenen Punkt r, t der Kurve q_ν $(\nu=1,2,\dots,n)$ kleiner als G ist, nicht über jede unter G liegende Zahl hinübergeht, wenn der Punkt r, t sich auf der Kurve q_ν dem Punkte $R, \alpha_{2\nu-1}$ unbegrenzt nähert, und auch nicht, wenn der Punkt r, t sich auf der Kurve q_ν dem Punkte $R, \alpha_{2\nu}$ unbegrenzt nähert. Um dies zu zeigen, gebe man der die Größe $\Gamma_{r,t}$ definierenden Gleichung die Form:

$$\Gamma_{r,t} = \frac{G}{2\pi}\int\limits_{\alpha_{2\nu-1}}^{\alpha_{2\nu}} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}\,d\varphi + \left\{\begin{aligned} &\sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1}\frac{G}{2\pi}\int\limits_{\alpha_{2\mu-1}}^{\alpha_{2\mu}}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}\,d\varphi \\ &+\sum_{\mu=\nu+1}^{\mu=n}\frac{G}{2\pi}\int\limits_{\alpha_{2\mu-1}}^{\alpha_{2\mu}}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}\,d\varphi\end{aligned}\right\},$$

und führe das auf der rechten Seite dieser Gleichung an erster Stelle stehende Integral zunächst, mit Hilfe der Formel:

$$\int\limits_0^{\varphi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\varphi+r^2}\,d\varphi = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{r\sin\varphi}{R-r\cos\varphi}\right)+\varphi,$$

in den Ausdruck:

$$-2\operatorname{arctg}\left[\frac{r\sin(\alpha_{2\nu-1}-t)}{R-r\cos(\alpha_{2\nu-1}-t)}\right]+2\operatorname{arctg}\left[\frac{r\sin(\alpha_{2\nu}-t)}{R-r\cos(\alpha_{2\nu}-t)}\right]-\alpha_{2\nu-1}+\alpha_{2\nu}$$

und weiter dann durch Einführung der zu Anfang dieses Artikels definierten, mit den Größen r, t durch die Beziehungen:

$$\frac{r\sin(\alpha_{2\nu-1}-t)}{R-r\cos(\alpha_{2\nu-1}-t)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\tau_{2\nu-1}\right), \qquad \frac{r\sin(\alpha_{2\nu}-t)}{R-r\cos(\alpha_{2\nu}-t)} = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}+\tau_{2\nu}\right)$$

verknüpften Größen $\tau_{2\nu-1}$, $\tau_{2\nu}$ in den Ausdruck $2\tau_{2\nu-1}+2\tau_{2\nu}-2\left(\pi-\frac{\alpha_{2\nu}-\alpha_{2\nu-1}}{2}\right)$ über. Es wird dann:

$$\Gamma_{r,t} = \frac{G}{\pi}\left[\tau_{2\nu-1}+\tau_{2\nu}-\left(\pi-\frac{\alpha_{2\nu}-\alpha_{2\nu-1}}{2}\right)\right] + \left\{\begin{aligned} &\sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1}\frac{G}{2\pi}\int\limits_{\alpha_{2\mu-1}}^{\alpha_{2\mu}}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}\,d\varphi \\ &+\sum_{\mu=\nu+1}^{\mu=n}\frac{G}{2\pi}\int\limits_{\alpha_{2\mu-1}}^{\alpha_{2\mu}}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}\,d\varphi\end{aligned}\right\}.$$

Läßt man jetzt den Punkt r, t sich auf der Kurve q_ν entweder dem Punkte $R, \alpha_{2\nu-1}$ oder dem Punkte $R, \alpha_{2\nu}$ unbegrenzt nähern, so konvergiert im ersten Falle $\tau_{2\nu-1}$ gegen $\tau'_{2\nu-1}$, $\tau_{2\nu}$ gegen $\pi - \frac{\alpha_{2\nu} - \alpha_{2\nu-1}}{2}$, im zweiten Falle $\tau_{2\nu-1}$ gegen $\pi - \frac{\alpha_{2\nu} - \alpha_{2\nu-1}}{2}$, $\tau_{2\nu}$ gegen $\tau'_{2\nu}$, während in beiden Fällen ein jedes der $n-1$ auf der rechten Seite der letzten Gleichung vorkommenden Integrale gegen Null konvergiert, und es konvergiert daher $U_{r,t}$ im ersten Falle gegen $\frac{\tau'_{2\nu-1}}{\pi} G$, im zweiten Falle gegen $\frac{\tau'_{2\nu}}{\pi} G$, also in jedem der beiden Fälle, da nach den in bezug auf die Kurve q_ν gemachten Festsetzungen die Zahlen $\tau'_{2\nu-1}$, $\tau'_{2\nu}$ zwischen 0 und π liegen, gegen eine unter G liegende Zahl. Damit ist aber der Beweis für die Behauptung, daß $G < G$ ist, erbracht.

Setzt man nun noch $G = \varkappa G$ und beachtet, daß die so eingeführte, zwischen 0 und 1 gelegene Zahl $\varkappa$, der Definition von G gemäß, die obere Grenze der Werte ist, welche die immer positive Funktion:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_{2\mu-1}}^{\alpha_{2\mu}} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}\, d\varphi, \qquad \begin{array}{l} 0 \leq r < R, \\ 0 \leq t < 2\pi, \end{array}$$

des Punktes r, t für die im Innern der Fläche K gelegenen Punkte r, t der Kurven q besitzt, nennt auch diese Zahl $\varkappa$, insofern als sie nur von der Lage der Mündungspunkte R, α der Kurven q und der Gestalt dieser Kurven abhängt, die dem Kurvensysteme $q_1, q_2, \cdots, q_n$ entsprechende Zahl, so läßt sich das Resultat der in diesem Artikel durchgeführten Untersuchung nach Hinzunahme des bisher ausgeschlossenen Falles $G = 0$ zusammenfassen in den folgenden

Hilfssatz II. *„Es sei bei einer in der Fläche T abgegrenzten Kreisfläche K die Peripherie in $2n$ $(n>1)$, der Reihe nach mit $r_1, s_1; r_2, s_2; \cdots; r_n, s_n$ zu bezeichnende, Teile zerlegt, und es seien zugleich für $\nu = 1, 2, \cdots, n$ die Endpunkte des Bogens r_ν durch eine sich aus Stücken algebraischer Kurven zusammensetzende und, von ihren Endpunkten abgesehen, vollständig im Innern der Fläche K verlaufende Kurve q_ν verbunden, die weder sich selbst, noch eine der $n-1$ übrigen Kurven q schneidet oder berührt, auch in ihren Endpunkten die Peripherie von K nicht berührt. Zu dieser Kreisfläche K sei nun irgend eine Funktion $u = u' + u''i$ des Punktes x, y von der in dem Satze* I *definierten Art gegeben, welche für jeden auf den Bogen $s_1, s_2, \cdots, s_n$ gelegenen Punkt den Wert Null besitzt. Ist dann G das Maximum der Werte, welche der in der ganzen Fläche K stetigen Funktion* mod u *für die Punkte der Bogen r zukommen, so ist das Maximum der Werte, welche* mod u *für die Punkte der Kurven q besitzt, niemals größer als $\varkappa G$, wobei $\varkappa$ die dem Kurvensysteme $q_1, q_2, \cdots, q_n$ entsprechende, weder von der Zahl G noch von der Funktion u abhängige, immer zwischen 0 und 1 gelegene Zahl bezeichnet."*

7.

Für die Behandlung der in Art. 4 gestellten Aufgabe empfiehlt sich die Einführung des Begriffs einer zu einem Systeme F von Stücken der — schon zu Anfang des Art. 5 erwähnten, aus der Fläche T durch Einführung der Schnitte $a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_p, b_p$ hervorgehenden — Fläche T' gehörigen **Fundamentalfunktion**. Dieser Begriff soll jetzt definiert werden.

Man markiere in der Fläche T' die schon zu Anfang des Art. 3 definierten Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$, unter denen sich alle Windungspunkte und alle Punkte $\mathcal{P}_\infty$ befinden, und ordne allgemein dem Schnittpaare a_ν, b_ν $(\nu=1,2,\cdots,p)$ die vier bei der Problemstellung in Art. 4 gewählten, nur den Bedingungen:

$$\operatorname{mod} A_\nu = 1,\ \operatorname{mod} B_\nu = 1; \qquad (1-B_\nu)\mathfrak{A}_\nu = (1-A_\nu)\mathfrak{B}_\nu$$

unterworfenen Konstanten $A_\nu, B_\nu, \mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$, dem Punkte $\mathcal{P}_\sigma$ $(\sigma=1,2,\cdots,s)$ die ebendort gewählte, durch die Konstanten $\mathfrak{L}_\sigma, \mathfrak{L}_{\sigma 1}, \mathfrak{L}_{\sigma 2}, \cdots, \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}$ vollständig bestimmte Funktion φ_σ zu. Alsdann grenze man in der Fläche T' k getrennt liegende Flächenstücke $F_1, F_2, \cdots, F_k$, deren Gesamtheit im folgenden mit F bezeichnet werden soll, in der Weise ab, daß allgemein die Begrenzung von $F_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots,k)$ von einer in sich zurücklaufenden, aus einer endlichen Anzahl von Stücken algebraischer Kurven bestehenden Linie $\mathfrak{R}_\varkappa$ gebildet wird, und daß zudem diese Begrenzungslinie keinen zu einem Schnitte a oder b gehörigen Punkt und auch keinen der Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ enthält, also insbesondere ganz im Endlichen verläuft und durch keinen Windungspunkt hindurchgeht. In seinem Innern dagegen darf das Flächensystem F einige oder auch alle Schnittpaare a, b, ebenso einige der Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ oder auch alle diese Punkte enthalten. Dabei soll der Fall, wo $k=1$ ist, also statt des Flächensystems F nur ein einziges Flächenstück F_1 vorliegt, nicht ausgeschlossen sein.

Es werde nun angenommen, daß zu dem Flächensysteme F eine einwertige Funktion $u = u' + u''i$ des Punktes x, y existiere, welche den folgenden Bedingungen genügt:

I. Die Funktion u soll für jeden nicht mit einem Punkte $\mathcal{P}_\sigma$ $(\sigma=1,2,\cdots,s)$ zusammenfallenden und auch nicht zu einem Schnitte a oder einem Schnitte b gehörigen Punkt x, y von $F_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots,k)$ stetig sein, aber auch noch für jeden zu einem etwa in $F_\varkappa$ gelegenen Schnitte a_ν oder b_ν gehörigen Punkt $\mathcal{P}^+$ oder $\mathcal{P}^-$, sobald man sich auf die Werte von u für die in der Umgebung des Punktes $\mathcal{P}^+$ oder $\mathcal{P}^-$ mit dem Punkte zur selben Seite des betreffenden Schnittes liegenden Punkte x, y beschränkt; dagegen sollen ihre Werte u_ν^+, u_ν^- in je zwei zu einem solchen

Schnitte a_ν oder b_ν gehörigen entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ in der Weise verknüpft sein, daß

$$(\mathrm{S}_\nu.)\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \{ u^+ = A_\nu u^- + \mathfrak{A}_\nu, \\ &\text{längs } b_\nu \{ u^+ = B_\nu u^- + \mathfrak{B}_\nu \end{aligned}$$

ist; für jeden etwa in $F_\varkappa$ gelegenen Punkt $\mathcal{P}_\sigma$ aber soll sie in der durch die Funktion φ_σ charakterisierten Weise unstetig werden.

II. Die Derivierten $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ sollen bei Hinzunahme der den Gleichungen $(\mathrm{S}_\nu.)$ entsprechenden stetigen Fortsetzungen der Funktion u über die Schnitte a_ν, b_ν hinüber für jeden nicht auf der Begrenzung $\mathfrak{R}_\varkappa$ gelegenen, aber auch nicht mit einem der Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ zusammenfallenden Punkt von $F_\varkappa$ existieren und stetig sein, und es werden alsdann, ausschließlich auf Grund ihrer Definition, die Werte der genannten Derivierten in je zwei zu einem Schnitte a_ν oder b_ν gehörigen entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ in der Weise verknüpft sein, daß

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \left\{ \frac{\partial u^+}{\partial x} = A_\nu \frac{\partial u^-}{\partial x},\ \frac{\partial u^+}{\partial y} = A_\nu \frac{\partial u^-}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2} = A_\nu \frac{\partial^2 u^-}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^2} = A_\nu \frac{\partial^2 u^-}{\partial y^2}, \right. \\ &\text{längs } b_\nu \left\{ \frac{\partial u^+}{\partial x} = B_\nu \frac{\partial u^-}{\partial x},\ \frac{\partial u^+}{\partial y} = B_\nu \frac{\partial u^-}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2} = B_\nu \frac{\partial^2 u^-}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^2} = B_\nu \frac{\partial^2 u^-}{\partial y^2} \right. \end{aligned}$$

ist.

III. Die Derivierten $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ sollen für jeden Punkt von $F_\varkappa$, für den ihre Existenz gefordert wurde, die Gleichung $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ erfüllen.

Eine jede diesen Bedingungen genügende Funktion soll eine zu dem Flächensysteme F gehörige Fundamentalfunktion genannt werden. Bei Verwendung dieses Begriffes ist aber im Auge zu behalten, daß die Konstanten A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und die in den Funktionen φ vorkommenden Konstanten $\mathfrak{L}$ bei der Problemstellung in Art. 4 ein für allemal festgelegt worden sind.

In bezug auf die so definierten Fundamentalfunktionen gilt nun der folgende

Satz. „*Eine zu dem Flächensysteme F gehörige Fundamentalfunktion ist vollständig bestimmt, sobald für sie die Werte, welche sie längs der durch die Linien $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \cdots, \mathfrak{R}_k$ gebildeten Begrenzung $\mathfrak{R}$ von F besitzt, bekannt sind.*"

Der Beweis dieses Satzes wird durch die folgende Überlegung erbracht. Existierte neben einer zu dem Flächensysteme F gehörigen Fundamentalfunktion u eine zweite Fundamentalfunktion $\bar{u}$, welche mit ihr in den Werten längs der Begrenzung $\mathfrak{R}$ von F übereinstimmte, so würde die mit ihnen gebildete Differenz $\bar{u} - u$, nachdem man ihr noch für die etwa in F gelegenen Punkte des Punktsystems $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$, in welchen sie ja Werte zunächst nicht besitzt, die ihr für diese Punkte zukommenden Grenzwerte als Werte zugelegt hat, eine zu F gehörige Funktion des Punktes x, y von der im Hilfssatze I charakterisierten Art sein, die zudem für jeden Punkt der Begrenzung $\mathfrak{R}$ von F den Wert Null besäße, und deren Modul daher, auf Grund des genannten Hilfssatzes, für jeden Punkt von F der Null gleich wäre, im Widerspruch mit der Annahme, daß $\bar{u}$ von u verschieden ist. Damit ist aber der aufgestellte Satz bewiesen. Bei dieser Betrachtung ist für diejenigen etwa in F gelegenen Punkte des Punktsystems $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$, welche weder mit einem Windungspunkte noch mit einem Punkte $\mathscr{P}_\infty$ zusammenfallen, der in Art. 2 des dritten Abschnittes bewiesene Satz zu berücksichtigen.

8.

Es soll jetzt in die Behandlung der in Art. 4 gestellten Aufgabe in der Weise eingetreten werden, daß zunächst in diesem und dem folgenden Artikel zwei die Lösung dieser Aufgabe vorbereitende Untersuchungen durchgeführt werden.

In der aus der Fläche T durch Einführung der Schnittpaare $a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_p, b_p$ hervorgehenden Fläche T' sei, nachdem man in ihr die Punkte $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$ markiert hat, ein Flächensystem F von der in Art. 7 beschriebenen Art und eine einblättrige, keinen der Punkte $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$, aber auch keinen zu einem Schnitte a oder b gehörigen Punkt enthaltende Kreisfläche K abgegrenzt, die in der folgenden Beziehung zu einander stehen. Die Kreisfläche K soll allgemein mit dem Flächenstücke $F_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, k)$ nur Abschnitte, zum mindesten einen Abschnitt — also einen einfach zusammenhängenden Flächenteil, dessen Begrenzung sich aus einem einzigen Stücke der Peripherie von K und einem einzigen Stücke der Begrenzung $\mathfrak{R}_\varkappa$ von $F_\varkappa$ zusammensetzt — gemeinsam haben; weiter soll ihre Peripherie so zu $\mathfrak{R}_\varkappa$ liegen, daß ein auf $\mathfrak{R}_\varkappa$ in einer und derselben Richtung sich bewegender Punkt von einer Stelle an, wo er in das Innere der Kreisfläche K eintritt, bis zu der zunächst folgenden Stelle, wo er austritt, sich ganz im Innern von K bewegt, und daß weder an der Eintritts- noch an der Austrittsstelle eine Berührung zwischen der Peripherie von K und den in die Fläche K fallenden Teilen der Begrenzung $\mathfrak{R}_\varkappa$ von $F_\varkappa$ stattfindet; endlich soll die durch Vereinigung der Kreisfläche K mit den Flächenstücken $F_1, F_2, \cdots, F_k$ entstehende, zusammenhängende Fläche F von einer einzigen, in sich zurücklaufenden Linie begrenzt sein. Dabei ist der Fall, wo $k = 1$ ist, also statt des Flächensystems F nur ein einziges Flächenstück F_1 vorliegt, nicht ausgeschlossen; man wird sich sogar das Verständnis der in diesem Artikel durchgeführten Untersuchung wesentlich erleichtern, wenn man sie zunächst nur auf die folgende, dem Falle $k = 1$ entsprechende, Figur 10 bezieht.

Die außerhalb der Kreisfläche K gelegenen Teile der Begrenzungslinien $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \cdots, \mathfrak{R}_k$

des Flächensystems F sollen unterschiedslos mit p, die innerhalb gelegenen mit q, die außerhalb des Flächensystems F gelegenen Teile der Peripherie von K mit s, die innerhalb gelegenen mit r bezeichnet werden. Die Schnittpunkte der Begrenzungslinien von F mit der Peripherie von K, von denen jeder als ein den vier in ihm zusammenstoßenden Linien p, q, r, s gemeinsam angehöriger Punkt anzusehen ist, sollen dagegen unterschiedslos mit (p, s) bezeichnet werden. Ein jeder der Buchstaben p, q, r, s soll aber auch, sobald er im folgenden an dem Zeichen für irgend eine zu dem Flächensysteme F oder zu der Kreisfläche K gehörige Funktion des Punktes x, y als unterer Index auftritt, einen auf den dem Buchstaben entsprechenden Linien frei beweglichen Punkt bezeichnen und zugleich soll dann das mit diesem Buchstaben versehene Funktionszeichen den Wert der Funktion in dem beweglichen Punkte repräsentieren.

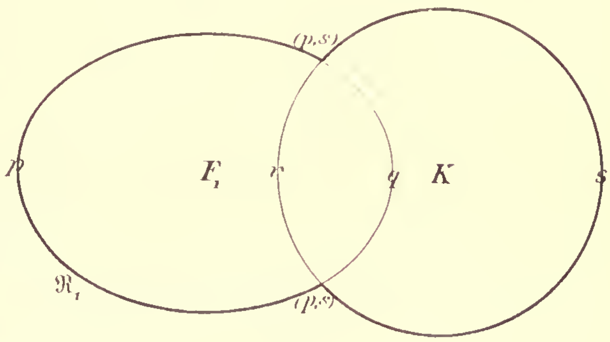


Fig. 10.

Man nehme nun an, daß zu dem Flächensysteme F, wie man auch für die durch $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \cdots, \mathfrak{R}_k$ gebildete Begrenzung desselben eine längs jeder einzelnen Randkurve $\mathfrak{R}_\varkappa$ einwertige und stetige Funktion des Begrenzungspunktes wählen mag, stets eine Fundamentalfunktion gebildet werden könne, welche längs der Begrenzung von F mit der gewählten Funktion des Begrenzungspunktes dem Werte nach übereinstimmt. Es soll dann bewiesen werden, daß auf Grund dieser Annahme auch zur Fläche F eine Fundamentalfunktion sich bilden läßt, welche längs der, mit $p+s$ zu bezeichnenden, Begrenzung von F mit einer beliebig vorgegebenen einwertigen und stetigen Funktion $f = f' + f''i$ des Begrenzungspunktes dem Werte nach übereinstimmt.

Zu dem Ende wähle man für die von den Linien p und q gebildete, mit $p+q$ zu bezeichnende, Begrenzung von F eine einwertige Funktion $g = g' + g''i$ des Begrenzungspunktes, welche längs jeder Begrenzungslinie $\mathfrak{R}_\varkappa$ stetig ist und zudem für jeden Punkt einer Linie p mit der vorgegebenen Funktion f dem Werte nach übereinstimmt, sodaß also die Gleichung $g_p = f_p$ besteht, und bestimme alsdann einerseits zu dem Flächensysteme F in Übereinstimmung mit der gemachten Annahme Fundamentalfunktionen $u^{(1)}, u^{(3)}, u^{(5)}, \cdots$, andererseits zu der Kreisfläche K auf Grund des Satzes I Fundamentalfunktionen $u^{(2)}, u^{(4)}, u^{(6)}, \cdots$, in der Reihenfolge $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \cdots$ dadurch, daß man die Werte, welche die Funktionen $u^{(1)}, u^{(3)}, u^{(5)}, \cdots$ längs der Begrenzung $p+q$ von F, und die Werte, welche die Funktionen $u^{(2)}, u^{(4)}, u^{(6)}, \cdots$ längs der, mit $r+s$ zu bezeichnenden, Peripherie von K besitzen sollen, in der Weise wählt, daß

$$\text{für } u^{(1)}\begin{cases} u_p^{(1)} = f_p\,, \\ u_q^{(1)} = g_q\,, \end{cases} \qquad \text{für } u^{(2)}\begin{cases} u_r^{(2)} = u_r^{(1)}, \\ u_s^{(2)} = f_s\,, \end{cases}$$

$$\text{für } u^{(3)}\begin{cases} u_p^{(3)} = f_p\,, \\ u_q^{(3)} = u_q^{(2)}, \end{cases} \qquad \text{für } u^{(4)}\begin{cases} u_r^{(4)} = u_r^{(3)}, \\ u_s^{(4)} = f_s\,, \end{cases}$$

$$\text{für } u^{(5)}\begin{cases} u_p^{(5)} = f_p\,, \\ u_q^{(5)} = u_q^{(4)}, \end{cases} \qquad \text{für } u^{(6)}\begin{cases} u_r^{(6)} = u_r^{(5)}, \\ u_s^{(6)} = f_s\,, \end{cases}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \qquad\qquad \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

ist. Die Funktionen $u^{(2n+1)}$, $u^{(2n+2)}$ konvergieren dann mit unbegrenzt wachsendem n gegen bestimmte Grenzfunktionen u, $\bar{u}$, von denen die erste für jeden nicht mit einem der Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ zusammenfallenden Punkt von F, die zweite für jeden Punkt von K existiert. Der Beweis für diese Behauptung soll jetzt erbracht werden.

Man betrachte die Funktionen $u^{(2n+1)} - u^{(2n-1)}$, $u^{(2n+2)} - u^{(2n)}$, ${\scriptstyle n=1,2,3,\cdots}$, und berücksichtige, daß die Gleichungen:

$$1.)\ u_p^{(2n+1)} - u_p^{(2n-1)} = 0, \qquad 3.)\ u_r^{(2n+2)} - u_r^{(2n)} = u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)},$$

$$2.)\ u_q^{(2n+1)} - u_q^{(2n-1)} = u_q^{(2n)} - u_q^{(2n-2)}, \qquad 4.)\ u_s^{(2n+2)} - u_s^{(2n)} = 0$$

für $n = 1, 2, 3, \cdots$ bestehen, wenn man noch die dabei im Falle $n = 1$ auftretende Größe $u_q^{(0)}$ durch die Gleichung $u_q^{(0)} = g_q$ definiert. Die zu dem Flächensysteme F gehörige Funktion $u^{(2n+1)} - u^{(2n-1)}$ ist, nachdem man ihr noch für die etwa in F gelegenen Punkte des Punktsystems $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$, in welchen sie ja Werte zunächst nicht besitzt, die ihr für diese Punkte zukommenden Grenzwerte als Werte zugelegt hat, eine Funktion von der im Hilfssatze I charakterisierten Art, die zudem längs der Linien p durchweg den Wert Null, längs der Linien q die Werte $u_q^{(2n)} - u_q^{(2n-2)}$ besitzt. Infolgedessen ist $\operatorname{mod}\left[u^{(2n+1)} - u^{(2n-1)}\right]$ für keinen Punkt von F, also auch für keinen Punkt der Linien r größer als das mit $\operatorname{Mod}\left[u_q^{(2n)} - u_q^{(2n-2)}\right]$ zu bezeichnende Maximum der Werte, welche $\operatorname{mod}\left[u_q^{(2n)} - u_q^{(2n-2)}\right]$ längs der Linien q besitzt. Die zur Kreisfläche K gehörige Funktion $u^{(2n+2)} - u^{(2n)}$ dagegen ist eine Funktion von der im Hilfssatze I, bei der Annahme $k = 1$, charakterisierten Art, welche längs der Linien s durchweg den Wert Null, längs der Linien r die Werte $u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}$ besitzt, und sie ist daher zugleich auch eine Funktion von der im Hilfssatze II charakterisierten Art. Infolgedessen ist $\operatorname{mod}\left[u^{(2n+2)} - u^{(2n)}\right]$ für keinen Punkt von K größer als $\operatorname{Mod}\left[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}\right]$ und insbesondere für keinen Punkt der Linien q größer als $\varkappa \operatorname{Mod}\left[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}\right]$, wobei $\varkappa$, ${\scriptstyle 0<\varkappa<1}$, die dem Liniensystem q entsprechende Zahl in dem vor dem Hilfssatze II angegebenen Sinne bezeichnet, und unter $\operatorname{Mod}\left[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}\right]$ das Maximum der Werte, welche $\operatorname{mod}\left[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}\right]$

längs der Linien r besitzt, zu verstehen ist. Es gelten daher für $n = 1, 2, 3, \cdots$ die Relationen:

5.) $\operatorname{Mod}\left[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}\right] \overline{\gtrless} \operatorname{Mod}\left[u_q^{(2n)} - u_q^{(2n-2)}\right]$, 6.) $\operatorname{Mod}\left[u_q^{(2n+2)} - u_q^{(2n)}\right] \overline{\gtrless} \varkappa \operatorname{Mod}\left[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}\right]$,

bei denen die Gleichheitszeichen dann aber auch nur dann zu nehmen sind, wenn zwischen der vorgegebenen Funktion f und der gewählten Funktion g eine solche Beziehung besteht, daß längs der Linien q durchweg $u_q^{(2)} = g_q$ ist und infolgedessen jede der Funktionen $u^{(3)}, u^{(5)}, \cdots$ mit der Funktion $u^{(1)}$, jede der Funktionen $u^{(4)}, u^{(6)}, \cdots$ mit der Funktion $u^{(2)}$ identisch ist. Ersetzt man nun das eine Mal in den beiden Relationen 5.), 6.) n durch $n-1$ und eliminiert alsdann die Größe $\operatorname{Mod}\left[u_r^{(2n-1)} - u_r^{(2n-3)}\right]$, das andere Mal nur in der Relation 6.) n durch $n-1$ und eliminiert alsdann die Größe $\operatorname{Mod}\left[u_q^{(2n)} - u_q^{(2n-2)}\right]$, so ergeben sich die für $n = 2, 3, \cdots$ geltenden Relationen:

7.) $\operatorname{Mod}\left[u_q^{(2n)} - u_q^{(2n-2)}\right] \overline{\gtrless} \varkappa \operatorname{Mod}\left[u_q^{(2n-2)} - u_q^{(2n-4)}\right]$, 8.) $\operatorname{Mod}\left[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}\right] \overline{\gtrless} \varkappa \operatorname{Mod}\left[u_r^{(2n-1)} - u_r^{(2n-3)}\right]$,

und weiter dann, indem man mit Hilfe dieser Relationen $\operatorname{Mod}\left[u_q^{(2n)} - u_q^{(2n-2)}\right]$ zu $\operatorname{Mod}\left[u_q^{(2)} - u_q^{(0)}\right]$, $\operatorname{Mod}\left[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}\right]$ zu $\operatorname{Mod}\left[u_r^{(3)} - u_r^{(1)}\right]$ in direkte Beziehung setzt und beachtet, daß nach 5.) $\operatorname{Mod}\left[u_r^{(3)} - u_r^{(1)}\right] \overline{\gtrless} \operatorname{Mod}\left[u_q^{(2)} - u_q^{(0)}\right]$ ist, auch zur Abkürzung $\operatorname{Mod}\left[u_q^{(2)} - u_q^{(0)}\right] = G$ setzt, die für $n = 1, 2, 3, \cdots$ geltenden Relationen:

$$9.)\ \operatorname{Mod}\left[u_q^{(2n)} - u_q^{(2n-2)}\right] \overline{\gtrless} \varkappa^{n-1} G, \qquad 10.)\ \operatorname{Mod}\left[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}\right] \overline{\gtrless} \varkappa^{n-1} G.$$

Aus diesen Relationen folgen jetzt schließlich, da nach früher Bemerktem für jeden Punkt von F die Beziehung $\operatorname{mod}\left[u^{(2n+1)} - u^{(2n-1)}\right] \overline{\gtrless} \operatorname{Mod}\left[u_q^{(2n)} - u_q^{(2n-2)}\right]$, für jeden Punkt von K die Beziehung $\operatorname{mod}\left[u^{(2n+2)} - u^{(2n)}\right] \overline{\gtrless} \operatorname{Mod}\left[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}\right]$ besteht, die für $n = 1, 2, 3, \cdots$ geltenden Relationen:

$$11.)\ \operatorname{mod}\left[u^{(2n+1)} - u^{(2n-1)}\right] \overline{\gtrless} \varkappa^{n-1} G, \qquad 12.)\ \operatorname{mod}\left[u^{(2n+2)} - u^{(2n)}\right] \overline{\gtrless} \varkappa^{n-1} G,$$

von denen die erste für jeden Punkt von F, die zweite für jeden Punkt von K besteht. Diese letzten Relationen lassen nun erkennen, daß die zu der unendlichen Reihe $\left[u^{(3)} - u^{(1)}\right] + \left[u^{(5)} - u^{(3)}\right] + \cdots$ gehörige Modulnreihe für alle Punkte von F, die zu der unendlichen Reihe $\left[u^{(4)} - u^{(2)}\right] + \left[u^{(6)} - u^{(4)}\right] + \cdots$ gehörige Modulnreihe für alle Punkte von K konvergiert, und zwar in gleichem Grade. Daraus folgt dann zunächst, daß die Funktionen $u^{(2n+1)}$, $u^{(2n+2)}$, wie behauptet wurde, mit unbegrenzt wachsendem n gegen bestimmte Grenzfunktionen:

$$u = \lim_{n=\infty} u^{(2n+1)} = u^{(1)} + \left[u^{(3)} - u^{(1)}\right] + \cdots + \left[u^{(2n+1)} - u^{(2n-1)}\right] + \cdots,$$
$$\bar{u} = \lim_{n=\infty} u^{(2n+2)} = u^{(2)} + \left[u^{(4)} - u^{(2)}\right] + \cdots + \left[u^{(2n+2)} - u^{(2n)}\right] + \cdots$$

konvergieren, von denen die erste für jeden nicht mit einem der Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$

zusammenfallenden Punkt von F, die zweite für jeden Punkt von K existiert; weiter aber auch, daß die Funktion $\bar{u}$ jedenfalls längs der die einzelnen Teile von F begrenzenden Randkurven $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \cdots, \mathfrak{R}_k$, die Funktion $\bar{\bar{u}}$ jedenfalls längs der Peripherie von K sich stetig ändert. Endlich ergibt sich noch, indem man die Gleichungen $u_p^{(2n+1)} = f_p$, $u_q^{(2n+1)} = u_q^{(2n)}$, $u_r^{(2n+2)} = u_r^{(2n+1)}$, $u_s^{(2n+2)} = f_s$ beachtet, daß das Verhalten der Funktion $\bar{u}$ längs der Begrenzung $p + q$ von F und das Verhalten der Funktion $\bar{\bar{u}}$ längs der Peripherie $r + s$ von K charakterisiert ist durch die Gleichungen:

$$\bar{u}_p = f_p, \qquad \bar{\bar{u}}_r = \bar{u}_r,$$
$$\bar{u}_q = \bar{\bar{u}}_q, \qquad \bar{\bar{u}}_s = f_s.$$

Um einen genaueren Einblick in die Natur der gewonnenen Funktionen $\bar{u}, \bar{\bar{u}}$ zu erhalten, bilde man jetzt zu dem Flächensysteme F, in Übereinstimmung mit der gemachten Annahme, eine Fundamentalfunktion $\bar{U}$, welche längs der Begrenzung $p + q$ von F mit der Funktion $\bar{u}$ dem Werte nach übereinstimmt, sodaß also $\bar{U}_p = \bar{u}_p$, $\bar{U}_q = \bar{u}_q$ ist, bilde entsprechend zu der Kreisfläche K, auf Grund des Satzes I, eine Fundamentalfunktion $\bar{\bar{U}}$, welche längs der Peripherie $r + s$ von K mit der Funktion $\bar{\bar{u}}$ dem Werte nach übereinstimmt, sodaß also $\bar{\bar{U}}_r = \bar{\bar{u}}_r$, $\bar{\bar{U}}_s = \bar{\bar{u}}_s$ ist, und betrachte alsdann die beiden Funktionen:

$$\bar{U} - u^{(2n+1)}, \qquad \bar{\bar{U}} - u^{(2n+2)}.$$

Die erste derselben ist, nachdem man ihr noch für die etwa in F gelegenen Punkte des Punktsystems $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_\varkappa$, in welchen sie ja Werte zunächst nicht besitzt, die ihr für diese Punkte zukommenden Grenzwerte als Werte zugelegt hat, eine zu F gehörige Funktion von der im Hilfssatze I charakterisierten Art, deren Verhalten längs der Begrenzung $p + q$ von F durch die Gleichungen:

$$\bar{U}_p - u_p^{(2n+1)} = \bar{u}_p - u_p^{(2n+1)} = 0,$$
$$\bar{U}_q - u_q^{(2n+1)} = \bar{u}_q - u_q^{(2n+1)} = \sum_{\nu = n+1}^{\nu = \infty} \left[u_q^{(2\nu+1)} - u_q^{(2\nu-1)}\right]$$

bestimmt ist, und deren Modul infolgedessen für keinen Punkt von F größer als Mod $\sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty} \left[u_q^{(2\nu+1)} - u_q^{(2\nu-1)}\right]$, also auch, der Relation 11.) zufolge, für keinen Punkt von F größer als $\sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty} \varkappa^{\nu-1} G$ oder, was dasselbe, größer als $\frac{\varkappa^n}{1-\varkappa} G$ ist. Die zweite dagegen ist eine zu K gehörige Funktion von der im Hilfssatze I, bei der Annahme $k = 1$, charakterisierten Art, deren Verhalten längs der Peripherie $r + s$ von K durch die Gleichungen:

$$\bar{\bar{U}}_r - u_r^{(2n+2)} = \bar{\bar{u}}_r - u_r^{(2n+2)} = \sum_{\nu = n+1}^{\nu = \infty} \left[u_r^{(2\nu+2)} - u_r^{(2\nu)}\right],$$
$$\bar{\bar{U}}_s - u_s^{(2n+2)} = \bar{\bar{u}}_s - u_s^{(2n+2)} = 0$$

bestimmt ist, und deren Modul infolgedessen für keinen Punkt von K größer als Mod $\sum\limits_{\nu=n+1}^{\nu=\infty}[u_r^{(2\nu+2)} - u_r^{(2\nu)}]$, also auch, der Relation 12.) zufolge, für keinen Punkt von K größer als $\sum\limits_{\nu=n+1}^{\nu=\infty}\varkappa^{\nu-1}G$ oder, was dasselbe, größer als $\frac{\varkappa^n}{1-\varkappa}G$ ist. Es konvergiert daher mit unbegrenzt wachsendem n mod $[U - u^{(2n+1)}]$ für alle Punkte von F, mod $[U - u^{(2n+2)}]$ für alle Punkte von K gegen Null, und zwar in gleichem Grade, oder, was dasselbe, es ist, von den etwa in F gelegenen Punkten des Punktsystems $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ abgesehen,

$$U = \lim_{n\cdots\infty} u^{(2n+1)} = \bar{u}, \qquad U = \lim_{n\cdots\infty} u^{(2n+2)} = \bar{\bar{u}}.$$

Damit ist aber bewiesen, daß die Funktion $\bar{u}$ eine zu dem Flächensysteme F, die Funktion $\bar{\bar{u}}$ eine zu der Kreisfläche K gehörige Fundamentalfunktion ist.

Ohne Mühe erkennt man jetzt auch noch, daß die gewonnenen Funktionen $\bar{u}, \bar{\bar{u}}$ für jeden Punkt x, y irgend eines dem Flächensysteme F und der Kreisfläche K gemeinsamen, von einer einzigen Linie q und einer einzigen Linie r begrenzten Abschnittes denselben Wert besitzen; man hat dazu nur zu beachten, daß die Funktionen $\bar{u}, \bar{\bar{u}}$, als Funktionen des in seiner Bewegung auf einen solchen Abschnitt beschränkten Punktes x, y betrachtet, sich auf Grund des eben Bewiesenen wie zwei zu dem Abschnitte gehörige Fundamentalfunktionen verhalten, zugleich aber auch, auf Grund der Gleichungen $\bar{u}_q = \bar{\bar{u}}_q$, $\bar{u}_r = \bar{\bar{u}}_r$, für jeden Punkt der Begrenzung des Abschnittes denselben Wert besitzen, und daß nach dem am Ende von Art. 7 Bewiesenen zwei zu einem Gebiete gehörige Fundamentalfunktionen, welche längs der Begrenzung des Gebietes dem Werte nach übereinstimmen, identisch sind.

Man definiere nun schließlich für die von den Linien p und s begrenzte zusammenhängende Fläche $\bar{F}$, welche die sämtlichen Punkte des Flächensystems F und der Kreisfläche K enthält, eine Funktion u in der Weise, daß man für jeden Punkt von F $u = \bar{u}$, für jeden Punkt von K $u = \bar{\bar{u}}$ setzt, und beachte, daß dadurch u auch für jeden Punkt der dem Flächensysteme F und der Kreisfläche K gemeinsamen Gebiete eindeutig erklärt ist, da nach dem eben Bewiesenen für jeden Punkt eines solchen Gebietes die Beziehung $\bar{u} = \bar{\bar{u}}$ besteht. Die so zur Fläche $\bar{F}$ bestimmte Funktion u ist dann eine zu $\bar{F}$ gehörige Fundamentalfunktion, die zudem, auf Grund der Gleichungen $u_p = \bar{u}_p = f_p$, $u_s = \bar{\bar{u}}_s = f_s$, längs der Begrenzung $p + s$ von $\bar{F}$ mit der vorgegebenen Funktion f des Begrenzungspunktes dem Werte nach übereinstimmt, und sie ist zugleich nach dem in Art. 7 Bewiesenen die einzige derartige Fundamentalfunktion. Damit ist aber der Beweis für die zu Anfang der Untersuchung aufgestellte Behauptung erbracht, und man kann jetzt das Resultat der in diesem Artikel durchgeführten Untersuchung zusammenfassen in den folgenden

Satz. *„In der aus der Fläche T durch Einführung der Schnittpaare $a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_p, b_p$ hervorgehenden Fläche T' sei, nachdem man in ihr die Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ markiert hat, ein aus k getrennt liegenden Flächenstücken $F_1, F_2, \cdots, F_k$ bestehendes Flächensystem F, bei dem allgemein $F_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, k)$ von einer einzigen geschlossenen Linie $\mathfrak{R}_\varkappa$ begrenzt sein soll, und eine Kreisfläche K abgegrenzt, welche in der zu Anfang dieses Artikels angegebenen Beziehung zu einander stehen. Läßt sich dann zu dem Flächensysteme F, wie man auch für die durch $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \cdots, \mathfrak{R}_k$ gebildete Begrenzung desselben eine längs jeder einzelnen Randkurve $\mathfrak{R}_\varkappa$ einwertige und stetige Funktion des Begrenzungspunktes wählen mag, stets eine Fundamentalfunktion bilden, welche längs der Begrenzung von F mit der gewählten Funktion des Begrenzungspunktes dem Werte nach übereinstimmt, so läßt sich auch zu der die sämtlichen Punkte des Flächensystems F und der Kreisfläche K enthaltenden zusammenhängenden Fläche $\overline{F}$ eine Fundamentalfunktion bilden, welche längs der Begrenzung von $\overline{F}$ mit einer beliebig vorgegebenen einwertigen und stetigen Funktion des Begrenzungspunktes dem Werte nach übereinstimmt. Der Fall, wo statt des Flächensystems F nur ein einziges Flächenstück F_1 vorliegt, ist dabei nicht ausgeschlossen."*

9.

In der Fläche T grenze man, nachdem man die Schnittpaare $a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_p, b_p$ eingeführt und die Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ markiert hat, durch eine das Schnittpaar a_ν, b_ν

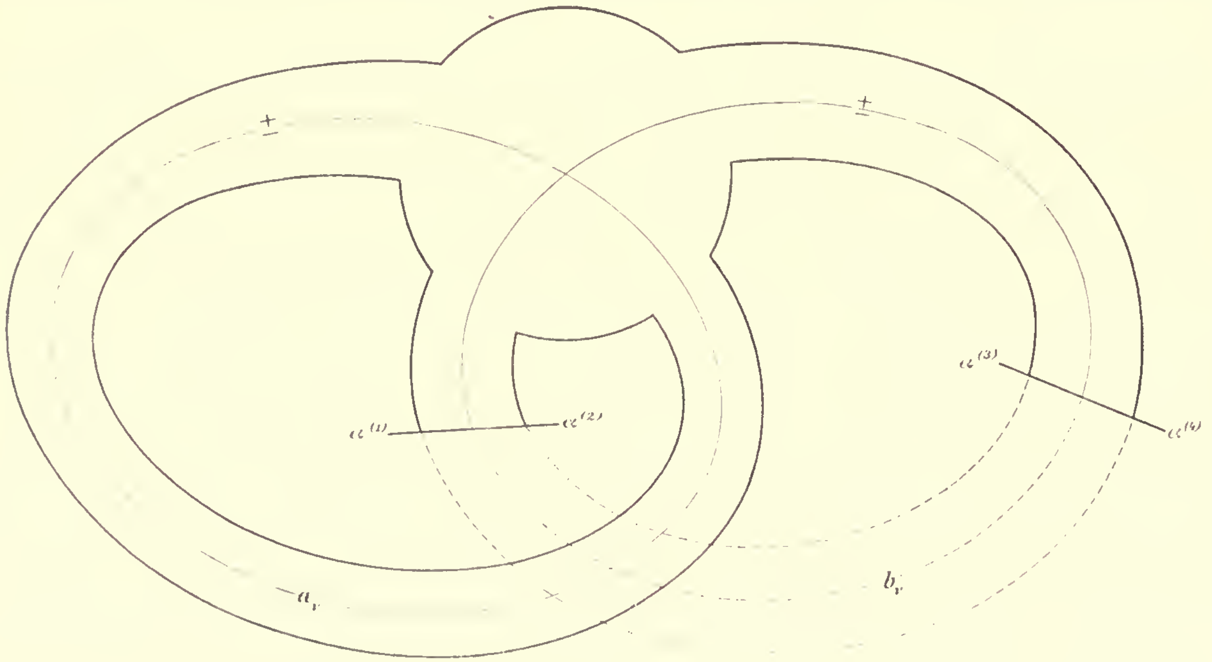


Fig. 11.

umschließende, in sich zurücklaufende Kurve, der schematischen Figur 11 entsprechend (bei der $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$, $\alpha^{(4)}$ Windungspunkte, $\alpha^{(1)}$—$\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$—$\alpha^{(4)}$ Übergangslinien zwischen denselben beiden Blättern bezeichnen sollen, und die in dem unteren dieser beiden Blätter liegenden Teile der Begrenzungslinie zum Unterschied von den in dem oberen liegenden gestrichelt sind), ein das Schnittpaar a_ν, b_ν, aber keinen der Punkte $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$ enthaltendes Flächenstück ab und entferne alsdann das Schnittpaar a_ν, b_ν. Ein Flächenstück von dieser Art möge ein Doppelring genannt werden. Mit Rücksicht auf das Folgende soll die Begrenzung des hier vorliegenden, mit D_ν zu bezeichnenden, Doppelrings vier getrennte Bogen einer um den gemeinsamen Mündungspunkt der Linien a_ν, b_ν als Mittelpunkt beschriebenen Kreislinie enthalten. Die Fläche D_ν kann dann auch aufgefaßt werden als eine Fläche, welche durch die Vereinigung zweier getrennt liegender, einfach zusammenhängender Flächenstücke F_1, F_2 mit der von der eben genannten Kreislinie begrenzten Kreisfläche K in der durch die Figur 12 charakterisierten Weise

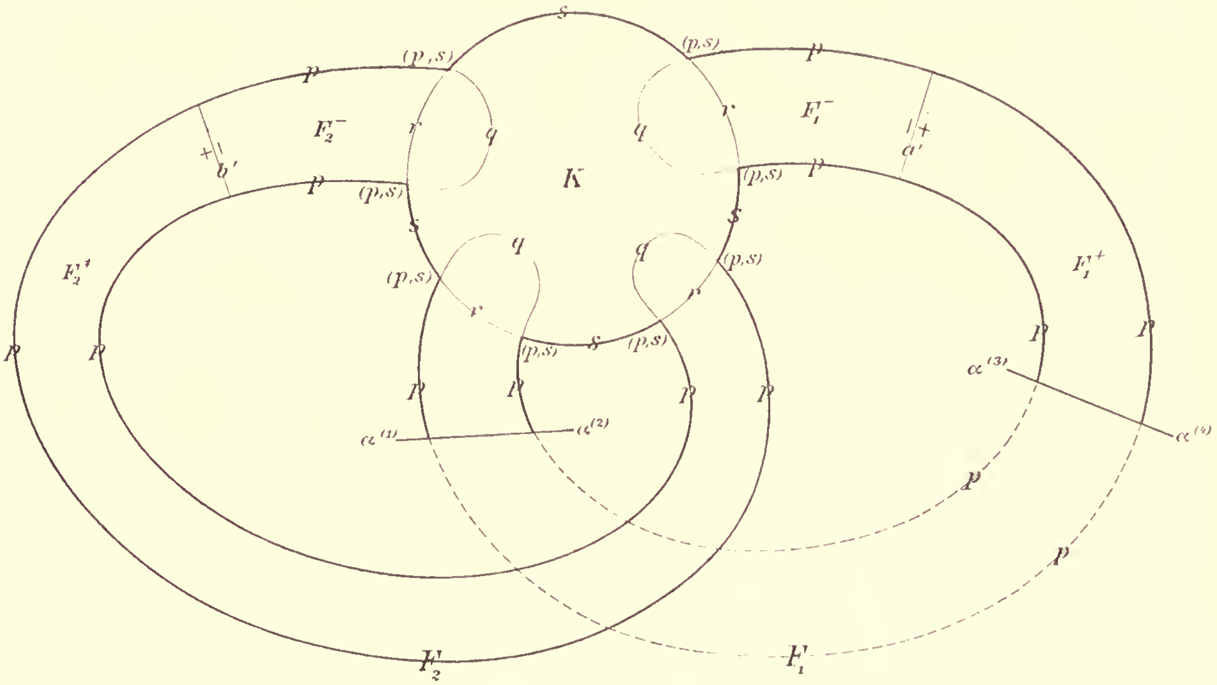


Fig. 12.

entstanden ist, und es soll dabei zugleich vorausgesetzt werden, daß das mit F zu bezeichnende System der beiden Flächenstücke F_1, F_2 und die Kreisfläche K in derselben Beziehung zu einander stehen, auch in betreff ihrer Begrenzungen, wie das zu Anfang des Art. 8 eingeführte Flächensystem F und die ebendort eingeführte Kreisfläche K. Infolgedessen kann die dort für die Teile der Begrenzung des Flächensystems F und der Peripherie von K eingeführte Bezeichnung vermittels der Buchstaben p, q, r, s unmittelbar auf die hier vorliegende Figur übertragen werden.

Nach diesen Festsetzungen wähle man jetzt auf jedem der beiden getrennt liegenden Teile p der Begrenzung von F_1 einen nicht mit einem Punkte (p, s) zusammenfallenden Punkt, führe von dem einen dieser beiden Punkte zum andern einen mit a' zu bezeichnenden, vom Anfangs- und Endpunkte abgesehen ganz im Innern von F_1 verlaufenden und weder sich selbst noch einen der Bogen r schneidenden oder berührenden Schnitt in der Weise, daß er, wenn man ihn in die Figur 11 übertragen würde, mit der Schnittlinie b_ν nur einen Punkt gemeinsam hätte, und bezeichne bei diesem Schnitte die eine Seite als die positive, die andere als die negative; dabei sei die Bezeichnung so gewählt, daß man, wenn man b_1^+ in positivem Sinne durchläuft, den Schnitt a' von der negativen zur positiven Seite hin überschreitet. Ebenso wähle man auf jedem der beiden getrennt liegenden Teile p der Begrenzung von F_2 einen nicht mit einem Punkte (p, s) zusammenfallenden Punkt und führe von dem einen dieser beiden Punkte zum andern einen mit b' zu bezeichnenden, vom Anfangs- und Endpunkte abgesehen ganz im Innern von F_2 verlaufenden und weder sich selbst noch einen der Bogen r schneidenden oder berührenden Schnitt in der Weise, daß er, wenn man ihn in die Figur 11 übertragen würde, mit der Schnittlinie a_ν nur einen Punkt gemeinsam hätte, und bezeichne bei diesem Schnitte die eine Seite als die positive, die andere als die negative; dabei sei die Bezeichnung so gewählt, daß man, wenn man a_ν^+ in positivem Sinne durchläuft, den Schnitt b' von der positiven zur negativen Seite hin überschreitet. Durch den Schnitt a' wird das Flächenstück F_1 in zwei Teile zerlegt, von denen der eine, die positive Seite a'^+ des Schnittes als Begrenzungsstück enthaltende Teil mit F_1^+, der andere, die negative Seite a'^- des Schnittes als Begrenzungsstück enthaltende Teil mit F_1^- bezeichnet werden soll; ebenso wird durch den Schnitt b' das Flächenstück F_2 in zwei Teile zerlegt, von denen der eine, die positive Seite b'^+ des Schnittes als Begrenzungsstück enthaltende Teil mit F_2^+, der andere, die negative Seite b'^- des Schnittes als Begrenzungsstück enthaltende Teil mit F_2^- bezeichnet werden soll.

Man nehme nun an, daß zu dem nicht zerschnittenen Flächenstücke $F_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2)$, wie man auch für die Begrenzung desselben eine einwertige und stetige Funktion des Begrenzungspunktes wählen mag, stets eine einwertige Funktion $\nu_\varkappa = \nu'_\varkappa + \nu''_\varkappa i$ des Punktes x, y gebildet werden könne, welche für jeden Punkt von $F_\varkappa$ stetig ist, für jeden im Innern von $F_\varkappa$ gelegenen Punkt stetige Derivierte $\frac{\partial \nu_\varkappa}{\partial x}, \frac{\partial \nu_\varkappa}{\partial y}, \frac{\partial^2 \nu_\varkappa}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \nu_\varkappa}{\partial y^2}$ besitzt und der Differentialgleichung $\Delta \nu_\varkappa = 0$ genügt, endlich längs der Begrenzung von $F_\varkappa$ mit der gewählten Funktion des Begrenzungspunktes dem Werte nach übereinstimmt, und beachte, daß eine solche Funktion $\nu_\varkappa$ durch die Werte, welche ihr für die Begrenzung von $F_\varkappa$ vorgeschrieben sind, vollständig bestimmt ist, da sie sich in $F_\varkappa$ geradeso verhält wie eine Fundamentalfunktion, welche zu irgend einem keinen der Schnitte a_1, b_1; $a_2, b_2; \cdots; a_p, b_p$ enthaltenden Stücke der Fläche T gehört, in diesem Stücke, und eine solche nach dem in Art. 7 Bewiesenen durch ihre Randwerte vollständig bestimmt ist. Definiert man alsdann mit Hilfe der Funktionen ν_1, ν_2 zu dem Systeme $F^{(a',b')}$ der beiden durch die Schnitte a', b' zerlegten Flächenstücke F_1, F_2 eine Funktion $\mu = \mu' + \mu'' i$ in der Weise, daß man, unter $A_\nu, B_\nu, \mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ die bei der Problemstellung in Art. 4 gewählten, nur den Bedingungen:

$$\operatorname{mod} A_\nu = 1, \ \operatorname{mod} B_\nu = 1; \qquad (1 - B_\nu)\mathfrak{A}_\nu = (1 - A_\nu)\mathfrak{B}_\nu$$

unterworfenen Konstanten verstehend, für jeden Punkt x, y von F_1^- $\mu = \nu_1$, für jeden Punkt x, y von F_1^+ $\mu = A_\nu \nu_1 + \mathfrak{A}_\nu$, für jeden Punkt x, y von F_2^- $\mu = \nu_2$, für jeden Punkt x, y von F_2^+ $\mu = B_\nu \nu_2 + \mathfrak{B}_\nu$ setzt, so besitzt die so zu dem Flächensysteme $F^{(a',b')}$ bestimmte Funktion μ die folgenden Eigenschaften. Zunächst ist μ, als Funktion des Punktes x, y in einem der vier Teile $F_1^+, F_1^-, F_2^+, F_2^-$ des Systems $F^{(a',b')}$ betrachtet, eine in dem Teile allenthalben einwertige und stetige Funktion des Punktes x, y; zudem sind ihre, allgemein mit μ^+, μ^- zu bezeichnenden, Werte in je zwei zum Schnitte a' oder zum Schnitte b' gehörigen, demselben Wertepaar x, y entsprechenden Punkten $\mathfrak{P}^+, \mathfrak{P}^-$ in der Weise verknüpft, daß

$$(\mathfrak{S}.) \qquad \begin{aligned} &\text{längs } a' \{ \mu^+ = A_\nu \mu^- + \mathfrak{A}_\nu, \\ &\text{längs } b' \{ \mu^+ = B_\nu \mu^- + \mathfrak{B}_\nu \end{aligned}$$

ist. Ferner besitzt die Funktion μ nicht nur für jeden im Innern eines der vier genannten Teile des Systems $F^{(a',b')}$ liegenden Punkt x, y stetige Derivierte $\frac{\partial \mu}{\partial x}, \frac{\partial \mu}{\partial y}, \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}$, sondern auch noch für jeden auf einer der vier Begrenzungslinien a'^+, a'^-, b'^+, b'^-, aber nicht zugleich auf einer Linie p liegenden Punkt $\mathfrak{P}^+$, beziehungsweise $\mathfrak{P}^-$, sobald man die Funktion μ über ein diesen Punkt im Innern enthaltendes Stück der Begrenzungslinie hinüber den Gleichungen ($\mathfrak{S}$.) entsprechend stetig fortsetzt (vgl. Art. 3), und es werden alsdann, ausschließlich auf Grund ihrer Definition, die allgemein mit $\frac{\partial \mu^+}{\partial x}, \frac{\partial \mu^+}{\partial y}, \frac{\partial^2 \mu^+}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \mu^+}{\partial y^2}, \frac{\partial \mu^-}{\partial x}, \frac{\partial \mu^-}{\partial y}, \frac{\partial^2 \mu^-}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \mu^-}{\partial y^2}$ zu bezeichnenden Werte dieser Derivierten in je zwei zum Schnitte a' oder zum Schnitte b' gehörigen, aber nicht auf einer Begrenzungslinie p von $F^{(a',b')}$ liegenden, entsprechenden Punkten $\mathfrak{P}^+, \mathfrak{P}^-$ in der Weise verknüpft sein, daß

$$\text{längs } a' \left\{ \frac{\partial \mu^+}{\partial x} = A_\nu \frac{\partial \mu^-}{\partial x}, \ \frac{\partial \mu^+}{\partial y} = A_\nu \frac{\partial \mu^-}{\partial y}, \ \frac{\partial^2 \mu^+}{\partial x^2} = A_\nu \frac{\partial^2 \mu^-}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 \mu^+}{\partial y^2} = A_\nu \frac{\partial^2 \mu^-}{\partial y^2}, \right.$$

$$\text{längs } b' \left\{ \frac{\partial \mu^+}{\partial x} = B_\nu \frac{\partial \mu^-}{\partial x}, \ \frac{\partial \mu^+}{\partial y} = B_\nu \frac{\partial \mu^-}{\partial y}, \ \frac{\partial^2 \mu^+}{\partial x^2} = B_\nu \frac{\partial^2 \mu^-}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 \mu^+}{\partial y^2} = B_\nu \frac{\partial^2 \mu^-}{\partial y^2} \right.$$

ist. Endlich erfüllen die Derivierten $\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}$ für jeden Punkt x, y von $F^{(a',b')}$, für den ihre Existenz soeben festgestellt wurde, also für jeden nicht auf einer Begrenzungslinie p oder q gelegenen Punkt von $F^{(a',b')}$ die Gleichung $\Delta\mu = \frac{\partial^2\mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mu}{\partial y^2} = 0$.

Die Werte μ_p, μ_q, welche die Funktion μ längs der, mit $p+q$ zu bezeichnenden, Begrenzung von $F^{(a',b')}$ besitzt, sind durch die Werte bestimmt, welche der Funktion ν_1 für die Begrenzung von F_1 und der Funktion ν_2 für die Begrenzung von F_2 vorgeschrieben wurden. Durch passende Wahl dieser Werte im Rahmen der Bedingung der Stetigkeit kann an Stelle von μ_p jede Funktion des Punktes x, y von p gebracht werden, welche den Bedingungen genügt, sich stetig zu ändern, solange der Punkt x, y auf p seine Lage stetig ändert, aber nicht den Schnitt a' oder den Schnitt b' überschreitet, und beim Überschreiten des Schnittes a' oder des Schnittes b' sich der Gleichung $\mu_p^+ = A_\nu \mu_p^- + \mathfrak{A}_\nu$, beziehungsweise der Gleichung $\mu_p^+ = B_\nu \mu_p^- + \mathfrak{B}_\nu$ entsprechend zu ändern; zugleich kann aber auch an Stelle von μ_q jede Funktion des Punktes x, y von q gebracht werden, welche den Bedingungen genügt, sich stetig zu ändern, wenn der Punkt x, y auf q seine Lage stetig ändert, und in jedem Punkte (p, s) denselben Wert zu besitzen wie die Funktion μ_p. Es können also auf Grund der zu Anfang in bezug auf die Funktionen ν_1, ν_2 gemachten Annahmen für eine zu bildende Funktion μ der beschriebenen Art die Werte μ_p, μ_q, welche sie längs der Begrenzung $p+q$ von $F^{(a',b')}$ besitzen soll, im Rahmen der eben genannten Bedingungen beliebig vorgegeben werden.

Eine Funktion des Punktes x, y von $F^{(a',b')}$, welche mit der Funktion μ in den aufgeführten Eigenschaften übereinstimmt, soll eine Funktion vom Typus μ genannt werden. Ist μ eine solche Funktion, und definiert man alsdann einerseits zu dem durch den Schnitt a' zerlegten Flächenstück $F_1^{(a')}$ eine Funktion $\bar{\nu}_1$ in der Weise, daß man für jeden Punkt x, y von F_1^- $\bar{\nu}_1 = \mu$, für jeden Punkt x, y von F_1^+ $\bar{\nu}_1 = A_\nu^{-1}(\mu - \mathfrak{A}_\nu)$ setzt, andererseits zu dem durch den Schnitt b' zerlegten Flächenstück $F_2^{(b')}$ eine Funktion $\bar{\nu}_2$ in der Weise, daß man für jeden Punkt x, y von F_2^- $\bar{\nu}_2 = \mu$, für jeden Punkt x, y von F_2^+ $\bar{\nu}_2 = B_\nu^{-1}(\mu - \mathfrak{B}_\nu)$ setzt, entfernt hierauf die Schnitte a', b', indem man beachtet, daß die Funktion $\bar{\nu}_1$ in je zwei zum Schnitte a' gehörigen entsprechenden Punkten $\mathscr{P}^+$, $\mathscr{P}^-$, die Funktion $\bar{\nu}_2$ in je zwei zum Schnitte b' gehörigen entsprechenden Punkten $\mathscr{P}^+$, $\mathscr{P}^-$ denselben Wert besitzt, so ist $\bar{\nu}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2)$ eine zu $F_\varkappa$ gehörige Funktion von derselben Art, wie die zu Anfang definierte Funktion $\nu_\varkappa$, und es hängt zugleich μ von $\bar{\nu}_1$, $\bar{\nu}_2$ in derselben Weise ab wie die früher gebildete Funktion μ von den Funktionen ν_1, ν_2. Die Gesamtheit der Funktionen vom Typus μ deckt sich also mit der Gesamtheit derjenigen Funktionen, welche durch das zur Bildung von μ benutzte Verfahren erzeugt werden können. Beachtet man nun noch, daß die beiden Funktionen $\bar{\nu}_1$, $\bar{\nu}_2$ vollständig bestimmt sind, sobald man die Werte von $\bar{\nu}_1$ längs der Begrenzung von F_1 und die Werte von $\bar{\nu}_2$ längs der Begrenzung von F_2 kennt, und daß diese Werte zugleich mit den Werten $\bar{\mu}_p$, $\bar{\mu}_q$, welche die Funktion μ längs der Begrenzung $p+q$ von $F^{(a',b')}$ besitzt, bekannt sind, so erkennt man schließlich, daß eine Funktion μ vom Typus μ durch die Werte, welche ihr für die Begrenzung $p+q$ von $F^{(a',b')}$ im Rahmen der früher genannten Bedingungen vorgeschrieben werden, vollständig bestimmt ist.

Mit Rücksicht auf die folgende Untersuchung soll die Differenz $\mu^* = \mu - \mu$ irgend zweier Funktionen μ, μ vom Typus μ noch einer besonderen Betrachtung unterzogen werden. Eine jede in der angegebenen Weise entstehende Funktion des Punktes x, y von $F^{(a',b')}$ soll eine Funktion μ^* genannt werden. Ohne Mühe erkennt man, daß man die sämtlichen Funktionen μ^* auch erhält, wenn man für jeden Punkt x, y von F_1^- $\mu^* = \nu_1$, für jeden Punkt x, y von F_1^+ $\mu^* = A_\nu \nu_1$, für jeden Punkt x, y von F_2^- $\mu^* = \nu_2$, für jeden Punkt x, y von F_2^+ $\mu^* = B_\nu \nu_2$ setzt und alsdann an Stelle von ν_1, ν_2 jedes überhaupt existierende Funktionenpaar von der zu Anfang charakterisierten Art treten läßt. Die den Konstanten A_ν, B_ν auferlegten, durch die Gleichungen $\mathrm{mod}\, A_\nu = 1$, $\mathrm{mod}\, B_\nu = 1$ ausgedrückten Bedingungen wirken nun bei einer Funktion μ^* in eigentümlicher Weise auf das Verhalten von $\mathrm{mod}\, \mu^*$ ein. Um dies einzusehen, beachte man zunächst, daß nach dem in Art. 5 Bewiesenen $\mathrm{mod}\, \nu_1$ für keinen Punkt von F_1, $\mathrm{mod}\, \nu_2$ für keinen Punkt von F_2 größer ist als der mit G zu bezeichnende Maximumwert in der Gesamtheit der Werte, welche sich aus den Werten von $\mathrm{mod}\, \nu_1$ längs der Begrenzung von F_1 und den Werten von $\mathrm{mod}\, \nu_2$ längs der Begrenzung von F_2 zusammensetzen; beachte weiter, daß auf Grund der zwischen je zwei Funktionen ν_1, ν_2 und der aus ihnen erzeugten Funktion μ^* bestehenden, soeben aufgestellten Gleichungen für jeden Punkt x, y von $F_1^{(a')}$ $\mathrm{mod}\, \mu^* = \mathrm{mod}\, \nu_1$, für jeden Punkt x, y von $F_2^{(b')}$ $\mathrm{mod}\, \mu^* = \mathrm{mod}\, \nu_2$ ist, und berücksichtige endlich noch, daß infolge dieser letzten Beziehungen die Größe G zugleich auch das Maximum derjenigen Werte ist, welche $\mathrm{mod}\, \mu^*$ für die Punkte der Begrenzung $p+q$ von $F^{(a',b')}$ besitzt. Man gelangt dann schließlich zu dem wichtigen, dem Hilfssatze I analogen Satze, daß $\mathrm{mod}\, \mu^*$ für keinen Punkt des Systems $F^{(a',b')}$ größer ist als das Maximum G der Werte, welche $\mathrm{mod}\, \mu^*$ für die Punkte der Begrenzung $p+q$ von $F^{(a',b')}$ besitzt.

Auf Grund der in bezug auf die Funktionen ν_1, ν_2 gemachten Annahmen kann man jetzt zu dem die sämtlichen Punkte von $F^{(a',b')}$ und K enthaltenden, von den Linien p und s begrenzten Doppelring $D_\nu^{(a',b')}$ eine einwertige Funktion $u = u' + u''i$ des Punktes x, y bestimmen, die, als Funktion des Punktes x, y von $F^{(a',b')}$ betrachtet, sich wie eine Funktion vom Typus μ, als Funktion des Punktes x, y von K betrachtet, sich wie eine Funktion von der im Satze I definierten Art verhält, und die zudem längs der, mit $p+s$ zu bezeichnenden, Begrenzung von $D_\nu^{(a',b')}$ mit einer vorgegebenen einwertigen Funktion $f = f' + f''i$ des Begrenzungspunktes dem Werte nach übereinstimmt.

Die Funktion f hat nur den Bedingungen zu genügen, sich stetig zu ändern, solange der Begrenzungspunkt seine Lage stetig ändert, aber nicht den Schnitt a' oder den Schnitt b' überschreitet, und beim Überschreiten des Schnittes a' oder des Schnittes b' sich der Gleichung $f^+ = A_\nu f^- + \mathfrak{A}_\nu$, beziehungsweise der Gleichung $f^+ = B_\nu f^- + \mathfrak{B}_\nu$ entsprechend zu ändern. Eine solche Funktion u soll jetzt bestimmt werden.

Zu dem Ende wähle man für die Begrenzung $p+q$ von $F^{(a',b')}$ eine einwertige Funktion $g = g' + g''i$ des Begrenzungspunktes, welche sich stetig ändert, solange der Begrenzungspunkt seine Lage stetig ändert, aber nicht den Schnitt a' oder den Schnitt b' überschreitet, welche beim Überschreiten des Schnittes a' oder des Schnittes b' sich der Gleichung $g^+ = A_\nu g^- + \mathfrak{A}_\nu$, beziehungsweise der Gleichung $g^+ = B_\nu g^- + \mathfrak{B}_\nu$ entsprechend ändert, und welche zudem für jeden Punkt einer Linie p mit der vorgegebenen Funktion f dem Werte nach übereinstimmt, sodaß also die Gleichung $g_p = f_p$ besteht, und bestimme alsdann einerseits zu dem Systeme $F^{(a',b')}$ in Übereinstimmung mit den gemachten Annahmen Funktionen $u^{(1)}, u^{(3)}, u^{(5)}, \cdots$ vom Typus μ, andererseits zu der Kreisfläche K auf Grund des Satzes I Funktionen $u^{(2)}, u^{(4)}, u^{(6)}, \cdots$ von der in dem Satze definierten Art, in der Reihenfolge $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \cdots$ dadurch, daß man die Werte, welche die Funktionen $u^{(1)}, u^{(3)}, u^{(5)}, \cdots$ längs der Begrenzung $p+q$ von $F^{(a',b')}$, und die Werte, welche die Funktionen $u^{(2)}, u^{(4)}, u^{(6)}, \cdots$ längs der, mit $r+s$ zu bezeichnenden, Peripherie von K besitzen sollen, in der Weise wählt, daß

$$\text{für } u^{(1)}\begin{cases} u_p^{(1)} = f_p\,, \\ u_q^{(1)} = g_q\,, \end{cases} \qquad \text{für } u^{(2)}\begin{cases} u_r^{(2)} = u_r^{(1)}, \\ u_s^{(2)} = f_s\,, \end{cases}$$

$$\text{für } u^{(3)}\begin{cases} u_p^{(3)} = f_p\,, \\ u_q^{(3)} = u_q^{(2)}, \end{cases} \qquad \text{für } u^{(4)}\begin{cases} u_r^{(4)} = u_r^{(3)}, \\ u_s^{(4)} = f_s\,, \end{cases}$$

$$\text{für } u^{(5)}\begin{cases} u_p^{(5)} = f_p\,, \\ u_q^{(5)} = u_q^{(4)}, \end{cases} \qquad \text{für } u^{(6)}\begin{cases} u_r^{(6)} = u_r^{(5)}, \\ u_s^{(6)} = f_s\,, \end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

ist. Genau auf dieselbe Weise wie im vorigen Artikel läßt sich dann, unter Beachtung, daß die zu dem Systeme $F^{(a',b')}$ gehörige Funktion $u^{(2n+1)} - u^{(2n-1)}$ eine Funktion μ^* ist und daher für sie der vorher abgeleitete, dem Hilfssatze I analoge Satz gilt, zunächst zeigen, daß die Funktionen $u^{(2n+1)}, u^{(2n+2)}$ mit unbegrenzt wachsendem n gegen bestimmte Grenzfunktionen:

$$\bar{u} = \lim_{n=\infty} u^{(2n+1)} = u^{(1)} + \left[u^{(3)} - u^{(1)}\right] + \cdots + \left[u^{(2n+1)} - u^{(2n-1)}\right] + \cdots,$$

$$\bar{\bar{u}} = \lim_{n=\infty} u^{(2n+2)} = u^{(2)} + \left[u^{(4)} - u^{(2)}\right] + \cdots + \left[u^{(2n+2)} - u^{(2n)}\right] + \cdots$$

konvergieren; weiter dann, daß die für jeden Punkt des Systems $F^{(a',b')}$ existierende

Funktion $\bar{u}$ eine Funktion vom Typus μ, die für jeden Punkt der Kreisfläche K existierende Funktion $\bar{\bar{u}}$ eine zu K gehörige Funktion von der in dem Satze I definierten Art ist, und daß das Verhalten der Funktion $\bar{u}$ längs der Begrenzung $p+q$ von $F^{(a',b')}$, sowie das Verhalten der Funktion $\bar{\bar{u}}$ längs der Begrenzung $r+s$ von K charakterisiert ist durch die Gleichungen:

$$\bar{u}_p = f_p, \qquad \bar{\bar{u}}_r = \bar{u}_r,$$
$$\bar{u}_q = \bar{\bar{u}}_q, \qquad \bar{\bar{u}}_s = f_s;$$

endlich noch, daß die Funktionen $\bar{u}, \bar{\bar{u}}$ für jeden Punkt x, y irgend eines der vier dem Systeme $F^{(a',b')}$ und der Kreisfläche K gemeinsamen, von je einer einzigen Linie q und einer einzigen Linie r begrenzten Abschnitte denselben Wert besitzen.

Definiert man nun für die von den Linien p und s begrenzte zusammenhängende Fläche $D_\nu^{(a',b')}$ eine Funktion u in der Weise, daß man für jeden Punkt des Systems $F^{(a',b')}$ $u = \bar{u}$, für jeden Punkt der Kreisfläche K $u = \bar{\bar{u}}$ setzt, so ist die so bestimmte Funktion u eine einwertige Funktion des Punktes x, y von $D_\nu^{(a',b')}$ mit den verlangten Eigenschaften, da sie, als Funktion des Punktes x, y von $F^{(a',b')}$ betrachtet, sich wie eine Funktion vom Typus μ, als Funktion des Punktes x, y von K betrachtet, sich wie eine Funktion von der im Satze I definierten Art verhält, und sie zudem, auf Grund der Gleichungen $u_p = \bar{u}_p = f_p$, $u_s = \bar{\bar{u}}_s = f_s$, längs der Begrenzung $p+s$ von $D_\nu^{(a',b')}$ mit der vorgegebenen Funktion f des Begrenzungspunktes dem Werte nach übereinstimmt.

Man lege jetzt in die Fläche $D_\nu^{(a',b')}$ die ursprünglichen Schnitte a_ν, b_ν hinein, bezeichne die vier Gebiete, in welche dadurch $D_\nu^{(a',b')}$ zerfällt, mit G_1, G_2, G_3, G_4 in der Weise, daß G_1 das an $a_\nu^-, b_\nu^-, a'^+, b'^+$ anstoßende, G_2 das an $a_\nu^+, b_\nu^-, a'^-, b'^+$ anstoßende, G_3 das an $a_\nu^-, b_\nu^+, a'^+, b'^-$ anstoßende, endlich G_4 das an $a_\nu^+, b_\nu^+, a'^-, b'^-$ anstoßende Gebiet ist (s. Fig. 13), und definiere alsdann zu der aus $D_\nu^{(a',b')}$ durch Einführung der Schnitte a_ν, b_ν entstandenen, mit D'_ν zu bezeichnenden, Fläche mit Hilfe der soeben gewonnenen Funktion u eine Funktion U dadurch, daß man für jeden Punkt x, y

$$\begin{aligned}
&\text{von } G_1 \{ U = u, \\
&\text{von } G_2 \{ U = A_\nu u + \mathfrak{A}_\nu, \\
&\text{von } G_3 \{ U = B_\nu u + \mathfrak{B}_\nu, \\
&\text{von } G_4 \{ U = A_\nu(B_\nu u + \mathfrak{B}_\nu) + \mathfrak{A}_\nu = B_\nu(A_\nu u + \mathfrak{A}_\nu) + \mathfrak{B}_\nu
\end{aligned}$$

setzt. Die so zu der Fläche D'_ν bestimmte Funktion U besitzt die folgenden Eigenschaften. Zunächst ist U, als Funktion des Punktes x, y in einem der vier die Fläche D'_ν bildenden Gebiete G_1, G_2, G_3, G_4 betrachtet, eine in dem Gebiete allenthalben einwertige und stetige Funktion des Punktes x, y; zudem sind ihre Werte U^+, U^- in

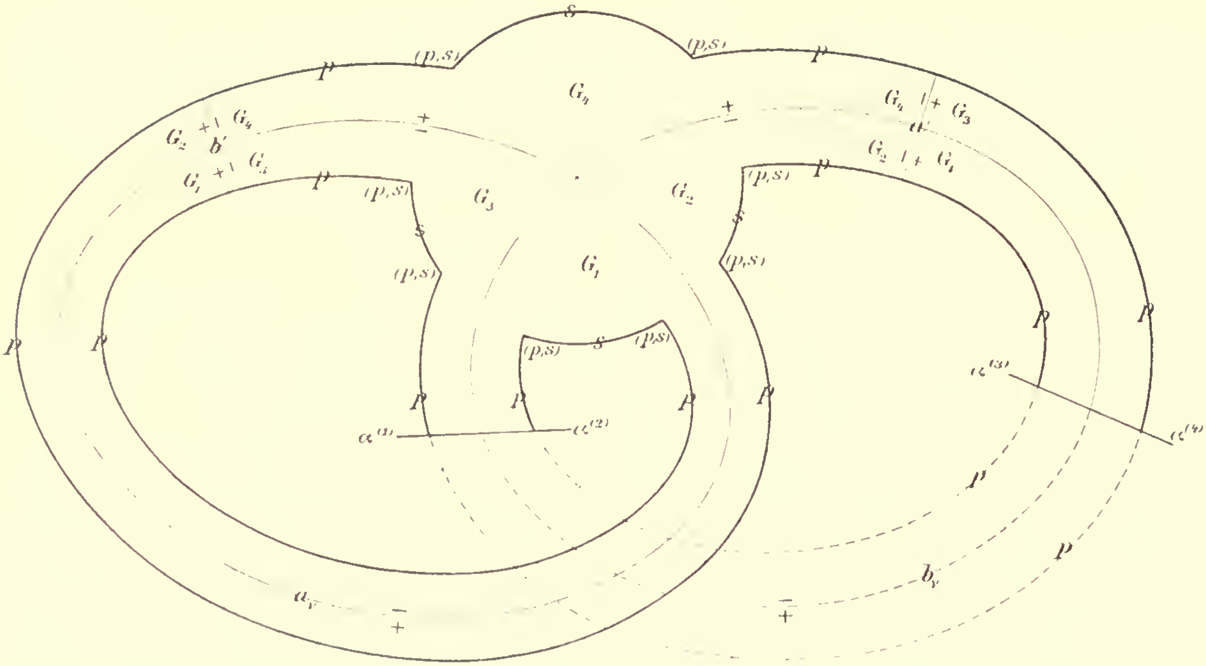


Fig. 13.

je zwei zum Schnitte a' oder zum Schnitte b' gehörigen entsprechenden Punkten $\mathscr{P}^+$, $\mathscr{P}^-$ in der Weise verknüpft, daß

$$(\Sigma.)\qquad \text{längs } a' \{ U^+ = U^-, \qquad \text{längs } b' \{ U^+ = U^-$$

ist, dagegen ihre Werte U^+, U^- in je zwei zum Schnitte a_ν oder zum Schnitte b_ν gehörigen entsprechenden Punkten $\mathscr{P}^+$, $\mathscr{P}^-$ in der Weise, daß

$$(\mathrm{S}_\nu.)\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \{ U^+ = A_\nu U^- + \mathfrak{A}_\nu, \\ &\text{längs } b_\nu \{ U^+ = B_\nu U^- + \mathfrak{B}_\nu \end{aligned}$$

ist. Ferner besitzt die Funktion U nicht nur für jeden im Innern eines der vier genannten Gebiete liegenden Punkt x, y stetige Derivierte $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, sondern auch noch für jeden auf einer der Begrenzungslinien a'^+, a'^-, b'^+, b'^-, a_ν^+, a_ν^-, b_ν^+, b_ν^- der Gebiete, aber nicht zugleich auf einer Linie p liegenden Punkt $\mathscr{P}^+$, beziehungsweise $\mathscr{P}^-$, sobald man die Funktion U über ein diesen Punkt im Innern enthaltendes Stück der Begrenzung des betreffenden Gebietes hinüber den Gleichungen $(\Sigma.)$, $(\mathrm{S}_\nu.)$ entsprechend stetig fortsetzt, und es werden alsdann, ausschließlich auf Grund ihrer Definition, die Werte dieser Derivierten in je zwei entsprechenden, aber nicht auf einer Begrenzungslinie p von D'_ν liegenden Punkten $\mathscr{P}^+$, $\mathscr{P}^-$ in der Weise verknüpft sein, daß

$$\text{längs } a' \text{ und } b' \left\{ \frac{\partial U^+}{\partial x} = \frac{\partial U^-}{\partial x},\ \frac{\partial U^+}{\partial y} = \frac{\partial U^-}{\partial y},\ \frac{\partial^2 U^+}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U^-}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 U^+}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U^-}{\partial y^2},\right.$$

$$\text{längs } a_\nu \left\{ \frac{\partial U^+}{\partial x} = A_\nu \frac{\partial U^-}{\partial x},\ \frac{\partial U^+}{\partial y} = A_\nu \frac{\partial U^-}{\partial y},\ \frac{\partial^2 U^+}{\partial x^2} = A_\nu \frac{\partial^2 U^-}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 U^+}{\partial y^2} = A_\nu \frac{\partial^2 U^-}{\partial y^2},\right.$$

$$\text{längs } b_\nu \left\{ \frac{\partial U^+}{\partial x} = B_\nu \frac{\partial U^-}{\partial x},\ \frac{\partial U^+}{\partial y} = B_\nu \frac{\partial U^-}{\partial y},\ \frac{\partial^2 U^+}{\partial x^2} = B_\nu \frac{\partial^2 U^-}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 U^+}{\partial y^2} = B_\nu \frac{\partial^2 U^-}{\partial y^2}\right.$$

ist. Endlich erfüllen die Derivierten $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ für jeden Punkt x, y von D'_ν, für den ihre Existenz soeben festgestellt wurde, also für jeden nicht auf der Begrenzung $p+s$ gelegenen Punkt von D'_ν die Gleichung $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$.

Aus dem Verhalten der Funktion U und ihrer Derivierten $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ für die Schnitte a', b' folgt unmittelbar, daß die Funktion U selbst die den Gleichungen (Σ) entsprechende stetige Fortsetzung der Funktion U sowohl über den Schnitt a' wie über den Schnitt b' hinüber bildet, und man kann daher die Schnitte a', b', als für die Funktion U und ihre eben genannten Derivierten nicht mehr in Betracht kommend, entfernen. Bezeichnet man alsdann den nur noch die Schnitte a_ν, b_ν enthaltenden Doppelring wiederum mit D'_ν, seine bis jetzt durch $p+s$ bezeichnete Begrenzung dagegen mit $\mathfrak{D}_\nu$ und beachtet, daß die Funktion U längs $\mathfrak{D}_\nu$ sich stetig ändert, so erkennt man, daß die gewonnene Funktion U eine zu D'_ν gehörige Fundamentalfunktion ist; als solche ist sie nach früher Bewiesenem vollständig bestimmt, sobald für sie die Werte, welche sie längs $\mathfrak{D}_\nu$ besitzt, bekannt sind. Beachtet man dann weiter noch, daß die der Funktion U für die Punkte von $\mathfrak{D}_\nu$ zukommenden, durch die Werte der vorgegebenen Funktion f bestimmten Werte infolge des für die Wahl von f gelassenen Spielraums als Werte einer für die Begrenzung $\mathfrak{D}_\nu$ beliebig vorgegebenen einwertigen und stetigen Funktion des Begrenzungspunktes angesehen werden dürfen, so kann man das Resultat der in diesem Artikel durchgeführten Untersuchung zusammenfassen in den folgenden

Satz. *„In der Fläche T sei, nachdem man die Schnittpaare $a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_p, b_p$ eingeführt und die Punkte $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$ markiert hat, ein das Schnittpaar a_ν, b_ν, aber keinen der Punkte $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$ enthaltender Doppelring D'_ν* (s. Fig. 11) *abgegrenzt, dessen Begrenzung $\mathfrak{D}_\nu$ so beschaffen sei, daß der aus ihm durch Entfernung des Schnittpaares a_ν, b_ν entstehende Doppelring D_ν aus zwei getrennt liegenden einfach zusammenhängenden Flächenstücken F_1, F_2 und einer Kreisfläche K in der früher beschriebenen, durch die Figur* 12 *charakterisierten Weise zusammengesetzt werden kann. Läßt sich dann zu der Fläche $F_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2)$, wie man auch für die Begrenzung derselben eine einwertige und stetige Funktion des Begrenzungspunktes wählen mag, stets eine einwertige Funktion $\nu_\varkappa = \nu'_\varkappa + \nu''_\varkappa i$ des Punktes x, y bilden, welche für jeden Punkt von $F_\varkappa$ stetig ist, für jeden im Innern von $F_\varkappa$ gelegenen*

Punkt stetige Derivierte $\frac{\partial v_\varkappa}{\partial x}$, $\frac{\partial v_\varkappa}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 v_\varkappa}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v_\varkappa}{\partial y^2}$ *besitzt und der partiellen Differentialgleichung* $\Delta v_\varkappa = \frac{\partial^2 v_\varkappa}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_\varkappa}{\partial y^2} = 0$ *genügt, endlich längs der Begrenzung von* $F_\varkappa$ *mit der gewählten Funktion des Begrenzungspunktes dem Werte nach übereinstimmt, so läßt sich auch zu dem Doppelring* D'_ν *eine Fundamentalfunktion bilden, welche längs der Begrenzung* $\mathfrak{D}_\nu$ *desselben mit einer beliebig vorgegebenen einwertigen und stetigen Funktion des Begrenzungspunktes dem Werte nach übereinstimmt.*"

10.

Unter Benutzung der in den beiden vorhergehenden Artikeln gewonnenen Resultate soll jetzt zur Lösung der in Art. 4 gestellten Aufgabe geschritten werden.

In der Fläche T seien, nachdem man die $2p$ schon in Art. 1 definierten, aus Stücken gerader Linien sich zusammensetzenden Linien $a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_p, b_p$ als Hilfslinien, aber nicht als Schnittlinien eingeführt hat, die q in Art. 3 definierten einblättrigen oder mehrblättrigen Kreisergänzungsflächen $K'_1, K'_2, \cdots, K'_q$, welche die q unendlich fernen Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_q$ beziehungsweise enthalten, sowie die $s-q$ ebendort definierten mehrblättrigen beziehungsweise einblättrigen Kreisflächen $K_{q+1}, K_{q+2}, \cdots, K_s$, welche die r im Endlichen gelegenen Windungspunkte $\mathcal{P}_{q+1}, \mathcal{P}_{q+2}, \cdots, \mathcal{P}_{q+r}$ und die $s-q-r$ willkürlich gewählten Punkte $\mathcal{P}_{q+r+1}, \mathcal{P}_{q+r+2}, \cdots, \mathcal{P}_s$ beziehungsweise als Mittelpunkte besitzen, abgegrenzt. Die Radien der die s Flächen K', K begrenzenden, mit $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}$ zu bezeichnenden, einfachen oder mehrfachen Kreislinien sind so gewählt worden, daß die Flächen K', K getrennt liegen und keinen Punkt der Linien a, b enthalten. Man grenze nun weiter zu den p Mündungspunkten der Linien a, b als Mittelpunkten Kreisflächen $M_1, M_2, \cdots, M_p$ mit so kleinen Radien ab, daß die alsdann in der Fläche T abgegrenzten Flächen K', K, M getrennt liegen, die, mit $\mathfrak{M}_\nu$ zu bezeichnende, Peripherie von M_ν $(\nu=1,2,\cdots,p)$ mit den Linien a_ν, b_ν je zwei nicht mit Eckpunkten zusammenfallende Punkte gemeinsam hat, aber keine der übrigen Linien a, b trifft, und die in die Kreisfläche M_ν fallenden Teile der Linien a_ν, b_ν vier Radien von M_ν bilden. Das an die konkaven Seiten der die Kreisergänzungsflächen K' begrenzenden Kreislinien $\mathfrak{K}'$ und an die konvexen Seiten der die Kreisflächen K, M begrenzenden Kreislinien $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$ anstoßende, von diesen Kreislinien begrenzte, ganz im Endlichen liegende und keinen Windungspunkt enthaltende, $(3p+s)$-fach zusammenhängende Stück S der Fläche T soll nun, um eine Grundlage für die Herstellung eines bestimmten Systems gleichgroßer Kreisflächen zu gewinnen, mit einer quadratischen Teilung versehen werden. Dazu sind die folgenden Konstruktionen erforderlich.

Man konstruiere, unter δ eine gleich näher zu bestimmende positive Zahl verstehend, zunächst zu jeder der $s+p$ Kreislinien $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$ die beiden ihr im Abstande δ

parallelen Kreislinien und bezeichne von den so erhaltenen Hilfskreislinien die $s+p$ im Innern der Flächen K', K, M beziehungsweise liegenden mit $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$, die $s+p$ noch übrigen entsprechend mit $\overline{\mathfrak{K}}'$, $\overline{\mathfrak{K}}$, $\overline{\mathfrak{M}}$. Durch die $s+p$ Paare $\overline{\mathfrak{K}}'$, $\mathfrak{K}'$; $\overline{\mathfrak{K}}$, $\mathfrak{K}$; $\overline{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{M}$ konzentrischer Hilfskreislinien sollen $s+p$ getrennt liegende Ringflächen von der Beschaffenheit abgegrenzt sein, daß die ersten s keinen Punkt der Linien a, b enthalten, die durch $\overline{\mathfrak{M}}_\nu$, $\mathfrak{M}_\nu$ $_{(\nu=1,2,\cdots,p)}$ begrenzte Ringfläche keinen Punkt der Linien a_1, b_1; $\cdots$; $a_{\nu-1}$, $b_{\nu-1}$; $a_{\nu+1}$, $b_{\nu+1}$; $\cdots$; a_p, b_p enthält, die Linie $\mathfrak{M}_\nu$ mit den Linien a_ν, b_ν je zwei nicht mit Eckpunkten zusammenfallende Punkte gemeinsam hat, und die innerhalb $\overline{\mathfrak{M}}_\nu$ gelegenen Teile dieser Linien vier Radien von $\overline{\mathfrak{M}}_\nu$ bilden. Jetzt grenze man zu dem Linienpaare a_ν, b_ν $_{(\nu=1,2,\cdots,p)}$ einen dasselbe enthaltenden Doppelring G_ν ab durch eine in sich zurücklaufende gebrochene Linie $\mathfrak{G}_\nu$ von der Art, daß ihre Stücke paarweise den Stücken des Linienpaares a_ν, b_ν im Abstande δ parallel sind und überdies bei einem negativen Umlauf um den Doppelring G_ν jedes einzelne Stück von $\mathfrak{G}_\nu$ in derselben Richtung durchlaufen wird wie die ihm zugewendete Seite des korrespondierenden Stückes von a_ν oder b_ν bei einem Durchlaufen in der früher (s. Fig. 4) durch die Pfeile markierten Richtung. Die p Doppelringe G_1, G_2, $\cdots$, G_p sollen getrennt liegen und zudem soll für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ der Doppelring G_ν mit der durch $\overline{\mathfrak{M}}_\nu$, $\mathfrak{M}_\nu$ begrenzten Ringfläche vier von je zwei Parallelen und je zwei Kreisbogen begrenzte, getrennt liegende Flächenstücke, aber weiter keinen Punkt gemeinsam haben, dagegen von den $s+p-1$ übrigen Ringflächen getrennt liegen. Man erkennt ohne Mühe, daß bei gegebenen $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$, a, b sich stets eine, aber auch nur eine positive Zahl δ' bestimmen läßt, sodaß für jede unter δ' liegende positive Zahl δ nicht nur die verlangten Konstruktionen ausführbar sind, sondern auch die gewünschten Gebilde entstehen.

Um nun die erwähnte quadratische Teilung zu erhalten, denke man sich, unter λ die durch die Gleichung $\lambda = \frac{\delta}{3}$ definierte Zahl verstehend, in der Z-Ebene, über welcher die Fläche T ausgebreitet ist, die den Gleichungen $x = m\lambda$, $_{m=0,\,{}^{1}_{-1},\,{}^{2}_{-2},\cdots}$ entsprechenden Parallelen zur Y-Achse, sowie die den Gleichungen $y = m\lambda$, $_{m=0,\,{}^{1}_{-1},\,{}^{2}_{-2},\cdots}$ entsprechenden Parallelen zur X-Achse gezogen und übertrage die in der Z-Ebene durch diese Linien bestimmte quadratische Teilung in jedes der n Blätter von T. Aus einem in der Z-Ebene durch die Teilung entstandenen, die Seitenlänge λ besitzenden, Quadrate als Grundquadrat gehen dann in der Fläche T immer n Quadrate hervor, wenn über jedem inneren Punkt desselben n Punkte von T liegen; befindet sich dagegen über einem inneren Punkt des Grundquadrates ein Windungspunkt von T, so kommt unter den aus dem Grundquadrate hervorgehenden Flächenstücken von T zum mindesten ein mehrblättriges quadratisches Flächenstück vor. Infolge der Gleichung $\lambda = \frac{\delta}{3}$ liegen die sämtlichen etwa in T vorkommenden mehrblättrigen quadratischen Flächenstücke im Innern der r mehrblättrigen Kreisflächen $K_{q+1}, K_{q+2}, \cdots, K_{q+r}$. Alle nicht aus den Kreisflächen K, M heraustretenden Quadrate und mehrblättrigen quadratischen Flächenstücke sowie alle nicht aus den Kreisergänzungsflächen K' heraustretenden Quadrate denke man sich nun entfernt; das System der übrig bleibenden, für das Folgende ausschließlich in Betracht kommenden Quadrate möge mit Q bezeichnet und das zum Flächenstücke S gehörige Quadratsystem genannt werden. Ein Quadrat des Systems Q, durch welches eine der, in ihrer Gesamtheit die Begrenzung des Flächenstückes S bildenden, Kreislinien $\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{M}$ hindurchgeht, nenne man ein endständiges Quadrat, oder auch, wenn hervorgehoben werden soll, daß es von einer bestimmten der Kreislinien $\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{M}$ durchsetzt wird, ein zu der Kreislinie gehöriges endständiges Quadrat. Die zu einer der Kreislinien $\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{M}$ gehörigen endständigen Quadrate liegen sämtlich im Innern der zu der Kreislinie konstruierten Ringfläche.

Einem jeden Quadrate des Systems Q möge nun eine, allgemein mit k zu bezeichnende, Kreisfläche zugeordnet werden und zwar diejenige, welche zu dem Mittelpunkt des Quadrats als Mittelpunkt mit dem Radius $\varrho - \frac{3}{4}\lambda - \frac{\delta}{4}$ abgegrenzt werden kann. Eine jede dieser Kreisflächen k soll nach dem Quadrate, dem sie zugeordnet ist, kurz der Kreis k des Quadrates genannt werden. Liegen zwei Quadrate getrennt, so liegen auch ihre Kreise k getrennt; haben dagegen zwei Quadrate eine Seite oder auch nur eine Ecke gemeinsam, so haben ihre Kreise k ein Kreisbogenzweieck gemeinsam. Die Kreise k der zu einer der Kreislinien $\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{M}$ gehörigen endständigen Quadrate liegen sämtlich im Innern der zu der Kreislinie konstruierten Ringfläche.

Es soll jetzt schließlich noch zu dem Linienpaare a_ν, b_ν $(\nu = 1, 2, \cdots, p)$ ein Doppelring D_ν von der in Art. 9 charakterisierten Beschaffenheit gebildet werden. Zu dem Ende konstruiere man zunächst eine in sich zurücklaufende gebrochene Linie $\mathfrak{H}_\nu$, deren Stücke paarweise zu den Stücken des Linienpaares a_ν, b_ν im Abstande $\frac{\delta}{2}$ parallel sind, bezeichne den von $\mathfrak{H}_\nu$ begrenzten, einen Teil des Doppelrings G_ν bildenden Doppelring mit H_ν und denke sich die nicht aus G_ν heraustretenden, zu $\mathfrak{M}_\nu$ gehörigen endständigen Quadrate zugleich mit den im Innern von H_ν gelegenen nicht endständigen Quadraten des Systems Q schraffiert. Die Kreise k der schraffierten Quadrate füllen dann zwei getrennt liegende einfach zusammenhängende Flächenstücke $F_{1,\nu}, F_{2,\nu}$ aus, die zu der Kreisfläche M_ν nicht nur so liegen, daß durch Vereinigung der Flächen $F_{1,\nu}, F_{2,\nu}, M_\nu$ ein Doppelring D_ν von der gewünschten Beschaffenheit entsteht, sondern auch so, daß die in M_ν hineinfallenden Teile der Begrenzungen von $F_{1,\nu}, F_{2,\nu}$ ein Kurvensystem q von der im Hilfssatze II charakterisierten Art bilden. Um die Richtigkeit der letzten Behauptung einzusehen, hat man zunächst zu beachten, daß etwaige Schnittpunkte der Peripherie des zu irgend einem nicht endständigen schraffierten Quadrate gehörigen Kreises k mit der Peripherie $\mathfrak{M}_\nu$ stets auf den in die schraffierten endständigen Quadrate fallenden Bogen von $\mathfrak{M}_\nu$ liegen, da anderenfalls ein innerhalb H_ν gelegenes, nicht endständiges Quadrat mit einem aus G_ν heraustretenden, also ganz außerhalb H_ν gelegenen endständigen Quadrate zum mindesten eine Ecke gemeinsam haben würde, und daß daher die in die Kreisfläche M_ν fallenden Teile der Begrenzungen von $F_{1,\nu}$, $F_{2,\nu}$ ausschließlich von Peripherieteilen der zu endständigen schraffierten Quadraten gehörigen Kreise k gebildet werden. Beachtet man dann weiter noch, daß ein etwa auf $\mathfrak{M}_\nu$ fallender Schnittpunkt der Peripherien zweier zu schraffierten endständigen Quadraten gehörigen Kreise k notwendig in einem dritten schraffierten endständigen Quadrate liegt, also kein Punkt der Begrenzungen von $F_{1,\nu}$, $F_{2,\nu}$ sein kann, so erkennt man schließlich, daß ein auf der Begrenzung von $F_{\varkappa,\nu}$ $(\varkappa=1,2)$ in einer und derselben Richtung sich bewegender Punkt von einer Stelle an, wo er in das Innere der Kreisfläche M_ν eintritt, bis zu der zunächst folgenden Stelle, wo er austritt, sich ganz im Innern von M_ν bewegt, und daß weder an der Eintritts- noch an der Austrittsstelle eine Berührung zwischen der Peripherie $\mathfrak{M}_\nu$ und den in die Fläche M_ν fallenden Teilen der Begrenzungen von $F_{1,\nu}$, $F_{2,\nu}$ stattfinden kann. Damit ist aber die aufgestellte Behauptung bewiesen.

Das von Kreisen k ausgefüllte, einfach zusammenhängende Flächenstück $F_{\varkappa,\nu}$ $(\varkappa=1,2)$ kann man sich nun auch allmählich in der Weise entstanden denken, daß man zunächst irgend einen der in ihm liegenden Kreise k fixiert und dann die noch übrigen Kreise k einzeln in einer solchen Reihenfolge hinzunimmt, daß die m in irgend einem Stadium dieses Prozesses vorhandenen Kreise k stets eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{F}_m$ ausfüllen. Der zuletzt hinzugenommene m^{te} Kreis steht dann zu der von den $m-1$ vorher schon vorhandenen Kreisen k gebildeten Fläche $\mathfrak{F}_{m-1}$ in solcher Beziehung, daß mit Hilfe des in Art. 8 auseinandergesetzten Verfahrens zur Fläche $\mathfrak{F}_m$ stets eine einwertige Funktion $u = u' + u''i$ des Punktes x, y, welche für jeden Punkt von $\mathfrak{F}_m$ stetig ist, für jeden im Innern von $\mathfrak{F}_m$ gelegenen Punkt stetige Derivierte $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ besitzt und der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt, endlich längs der Begrenzung von $\mathfrak{F}_m$ mit einer beliebig vorgegebenen einwertigen und stetigen Funktion des Begrenzungspunktes dem Werte nach übereinstimmt, gebildet werden kann, sobald man eine derartige Funktion für die Fläche $\mathfrak{F}_{m-1}$ bilden kann. Da dieses aber für die Fläche $\mathfrak{F}_1$, die ja mit dem zuerst fixierten Kreise k identisch ist, auf Grund des Satzes I möglich ist, so ist es auch für jede der Flächen $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, $\cdots$ möglich, und es läßt sich daher auch zu der Fläche $F_{\varkappa,\nu}$, insofern sie mit der letzten dieser Flächen identisch ist, eine Funktion $u = u_{\varkappa,\nu}$ von der erwähnten Beschaffenheit bilden. Jetzt führe man schließlich noch in die Fläche T die Schnitte a_ν, b_ν, $\nu=1,2,\cdots,p$, ein, jedoch ohne die beiden Seiten dieser

Schnitte als Begrenzungslinien anzusehen, bezeichne die dadurch aus T hervorgehende Fläche, wie es schon in den früheren Artikeln immer geschehen ist, mit T' und den dadurch aus dem oben gebildeten Doppelring D_ν hervorgehenden, die Schnitte a_ν, b_ν in seinem Innern enthaltenden, Doppelring, der in Art. 9 angewandten Bezeichnung entsprechend, mit D'_ν.

Nach diesen Vorbereitungen soll jetzt mit der Integration der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ im Sinne der in Art. 4 gestellten Aufgabe begonnen werden. Dabei hat man sich den in Art. 7 eingeführten Begriff der zu einem Stücke oder einem Systeme von Stücken der Fläche T' gehörigen Fundamentalfunktion gegenwärtig zu halten, also vor allem die bei der Einführung dieses Begriffes gemachte Voraussetzung zu beachten, daß die Fläche T' die Schnitte $a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_p, b_p$ enthält, daß in ihr die Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ markiert sind, und daß zudem die den Schnitten a, b zugeordneten Konstanten $A, B, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und die den Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ zugeordneten Funktionen q mit Rücksicht auf das gestellte Problem ein für allemal festgelegt sind. Auch ist im Auge zu behalten, daß eine zu einem Flächenstücke oder Flächensysteme F gehörige Fundamentalfunktion ihrer Definition gemäß für jeden Punkt der Begrenzung von F einwertig und stetig ist, und daß eine solche Fundamentalfunktion durch die Werte, welche sie längs der Begrenzung von F besitzt, oder, wie im folgenden zur Abkürzung immer gesagt werden soll, durch die ihr entsprechende Randfunktion vollständig bestimmt ist.

Zunächst kann man auf Grund des Satzes IV zu jeder der q Kreisergänzungsflächen $K'_1, K'_2, \cdots, K'_q$, auf Grund des Satzes II zu jeder der $s-q$ Kreisflächen K_{q+1}, $K_{q+2}, \cdots, K_s$ und auf Grund des in Art. 9 ausgesprochenen Satzes zu jedem der p Doppelringe $D'_1, D'_2, \cdots, D'_p$ eine Fundamentalfunktion mit beliebig vorgegebener einwertiger und stetiger Randfunktion bilden. Man hat dabei für die Bildung von Fundamentalfunktionen zum Doppelring D'_ν $(\nu = 1, 2, \cdots, p)$ nur zu beachten, daß die vorher gebildeten Flächenstücke $F_{1,\nu}$, $F_{2,\nu}$ zu der Kreisfläche M_ν in derselben Beziehung stehen wie die bei dem Satze des Art. 9 genannten Flächenstücke F_1, F_2 zu der ebendort genannten Kreisfläche K, daß die Funktion $u_{\varkappa,\nu}$, deren Bildung oben besprochen wurde, sich in bezug auf die Fläche $F_{\varkappa,\nu}$ $(\varkappa = 1, 2)$ gerade so verhält wie die in dem erwähnten Satze genannte Funktion $v_\varkappa$ in bezug auf die Fläche $F_\varkappa$, und daß die für $u_{\varkappa,\nu}$ vorzugebende Randfunktion ebenso wie die für $v_\varkappa$ vorzugebende nur den Bedingungen der Einwertigkeit und Stetigkeit unterworfen ist.

Die $s+p$ getrennt liegenden Flächen K', K, D' lassen sich zu gewissen ebenfalls noch getrennt liegenden, ausschließlich von Peripherieteilen der Kreise k begrenzten Flächen, zu deren Bezeichnung die Buchstaben $\hat{K}'$, $\hat{K}$, $\hat{D}'$ beziehungsweise verwendet werden sollen, dadurch erweitern, daß man zur Fläche K'_σ $(\sigma = 1, 2, \cdots, q)$ die Kreise k der sämtlichen zu $\mathfrak{K}'_\sigma$ gehörigen endständigen Quadrate, zur Fläche K_σ $(\sigma = q+1, q+2, \cdots, s)$ die

Kreise k der sämtlichen zu $\mathfrak{K}_\sigma$ gehörigen endständigen Quadrate, dagegen zur Fläche D'_ν $(\nu=1,2,\cdots,p)$ die Kreise k der sämtlichen nicht schraffierten zu $\mathfrak{M}_\nu$ gehörigen endständigen Quadrate hinzunimmt. Bei jeder der $s+p$ Flächen K', K, D' sollen nun die genannten Kreise k einzeln in einer solchen Reihenfolge hinzugenommen werden, daß in jedem Stadium des Erweiterungsprozesses der zuletzt hinzugenommene Kreis k zu der vor seiner Hinzunahme vorhandenen Fläche in derselben Beziehung steht wie der zu Anfang des Art. 8 eingeführte Kreis K zu dem ebendort eingeführten Flächensysteme F. Das Verlangte kann, wie einfache Überlegungen zeigen, dadurch geleistet werden, daß man allgemein zu der Fläche K'_σ, K_σ oder D'_ν von den genannten Kreisen k zunächst diejenigen, welche ganz innerhalb der vorher definierten Fläche $\hat{K}'_\sigma$, $\hat{K}_\sigma$, $\hat{D}'_\nu$ beziehungsweise liegen — wenn solche Kreise k überhaupt vorhanden sind — in beliebiger Reihenfolge hinzunimmt und weiter dann die noch übrigen Kreise k, der Einfachheit wegen, in solcher Reihenfolge, daß dieselbe derjenigen Reihenfolge entspricht, in welcher die zugehörigen Quadrate bei einem Durchlaufen der betreffenden Kreislinie $\mathfrak{K}'_\sigma$, $\mathfrak{K}_\sigma$ oder $\mathfrak{M}_\nu$ durchsetzt werden. Beachtet man dann, daß sich, wie schon oben ausgeführt wurde, zu der ursprünglichen Fläche, mag dieselbe eine Fläche K'_σ, K_σ oder D'_ν sein, eine Fundamentalfunktion mit beliebig vorgegebener einwertiger und stetiger Randfunktion bilden läßt, und daß bei der Erweiterung dieser Fläche durch successives Hinzunehmen der genannten Kreise k in der angegebenen Reihenfolge jeder neu hinzukommende Kreis in bezug auf die vor seiner Hinzunahme vorhandene Fläche die in dem Satze des Art. 8 gestellte Lagenbedingung erfüllt, so erkennt man, daß man auf Grund des genannten Satzes successive zu jeder der im Laufe des Erweiterungsprozesses entstehenden Flächen und daher auch zu der schließlich entstehenden Fläche $\hat{K}'_\sigma$, $\hat{K}_\sigma$ oder $\hat{D}'_\nu$ eine Fundamentalfunktion mit beliebig vorgegebener einwertiger und stetiger Randfunktion bilden kann.

Die bis jetzt noch nicht verwendeten Kreise k der Quadrate des Systems Q füllen ein, ganz im Endlichen liegendes und keinen Windungspunkt enthaltendes, $(s+p)$-fach zusammenhängendes Stück der Fläche T aus. Das System der $s+p$ getrennt liegenden Flächen $\hat{K}'$, $\hat{K}$, $\hat{D}'$ soll nun dadurch zu einer zusammenhängenden Fläche erweitert werden, daß man die eben genannten Kreise k bis auf einen vorher beliebig zu wählenden, mit k_0 zu bezeichnenden, Kreis hinzunimmt, und zwar sollen diese Kreise k einzeln in einer solchen Reihenfolge hinzugenommen werden, daß in jedem Stadium des Erweiterungsprozesses die überhaupt noch übrigen Kreise k ein zusammenhängendes Stück der Fläche T ausfüllen. Beachtet man dann, daß sich nach dem vorher Bemerkten zu jeder der $s+p$ Flächen $\hat{K}'$, $\hat{K}$, $\hat{D}'$ eine Fundamentalfunktion mit beliebig vorgegebener einwertiger und stetiger Randfunktion bilden läßt, und daß bei der Erweiterung dieser Flächen durch successives Hinzunehmen der genannten Kreise k in der beschriebenen Reihenfolge ein neu hinzukommender Kreis die Anzahl der vor seiner Hinzunahme vorhandenen getrennt liegenden Flächen, wenn er in m derselben eingreift, um $m-1$ vermindert und zugleich in bezug auf das System dieser m Flächen, welches durch seine Hinzunahme zu einer von einer einzigen geschlossenen Linie begrenzten Fläche erweitert wird, immer die in dem Satze des Art. 8 gestellte Lagenbedingung erfüllt, so erkennt man, daß man auf Grund des genannten Satzes successive zu jedem der im Laufe des Erweiterungsprozesses entstehenden Systeme von $s+p$ oder von weniger als $s+p$ Flächen, und daher auch zu der schließlich entstehenden, von vier ganz innerhalb der Kreisfläche k_0 liegenden Kreisbogen begrenzten, in Fig. 14 durch Schraffierung angedeuteten und mit F zu bezeichnenden Fläche eine Fundamentalfunktion mit beliebig vorgegebener einwertiger und stetiger Randfunktion bilden kann.

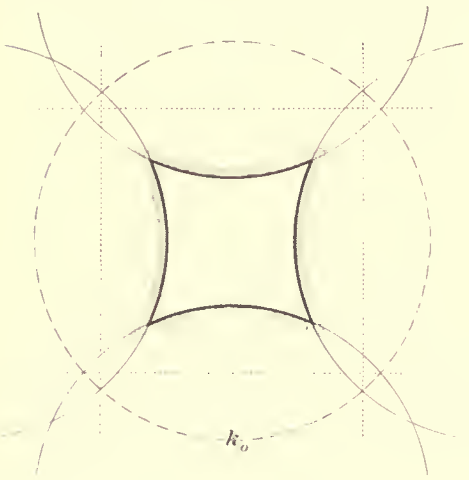


Fig. 14.

11.

Nachdem im vorhergehenden Artikel die Integration der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ für die durch Erweiterung der Flächen $\hat{K}'$, $\hat{K}$, $\hat{D}'$ entstandene, die sämtlichen Schnitte $a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_p, b_p$ und die sämtlichen Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ in ihrem Innern enthaltende Fläche F unter den vorgegebenen Unstetigkeitsbedingungen geleistet worden ist, soll jetzt von der Fläche F zu einer von einer einzigen Kreislinie begrenzten, die Fläche F als Teil enthaltenden Fläche F_0 übergegangen werden. Man denke sich die neue Fläche F_0 dadurch erzeugt, daß man zur Fläche F diejenige Ringfläche L, welche durch die ganz innerhalb F liegende, den Radius $R=\frac{6}{8}\lambda$ besitzende, Peripherie r der Kreisfläche k_0 und eine mit ihr konzentrische, ganz außerhalb F liegende Kreislinie s vom Radius $R=\frac{1}{8}\lambda$ begrenzt wird, hinzunimmt, sodaß also die Begrenzung von F_0 durch die Kreislinie s gebildet wird (s. Fig. 15), und beachte, daß man nach dem im vorhergehenden Artikel Bewiesenen zu der von dem Kreisbogenviereck q begrenzten

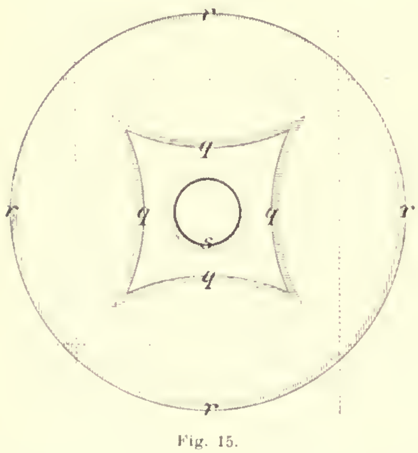


Fig. 15.

Fläche F eine Fundamentalfunktion mit beliebig vorgegebener einwertiger und stetiger Randfunktion, auf Grund des Satzes V dagegen zu der, von den Kreislinien r, s begrenzten, Ringfläche L eine Funktion von der im Satze V definierten Art bilden kann, welche sowohl längs der Begrenzungslinie r wie längs der Begrenzungslinie s mit einer beliebig vorgegebenen einwertigen und stetigen Funktion des Begrenzungspunktes dem Werte nach übereinstimmt. Es ist dann zu zeigen, daß man auch zu der die sämtlichen Punkte der Flächen F, L enthaltenden Fläche F_0 eine Fundamentalfunktion bilden kann, welche längs der Begrenzung s von F_0 mit einer beliebig vorgegebenen einwertigen und stetigen Funktion $f_s = f_s' + f_s'' i$ des Begrenzungspunktes dem Werte nach übereinstimmt.

Zu dem Ende wähle man für die Begrenzung q von F eine einwertige und stetige Funktion $g_q = g_q' + g_q'' i$ des Begrenzungspunktes und bestimme alsdann einerseits zu der Fläche F Fundamentalfunktionen $u^{(1)}, u^{(3)}, u^{(5)}, \cdots$, andererseits zu der Ringfläche L Funktionen $u^{(2)}, u^{(4)}, u^{(6)}, \cdots$ von der im Satze V definierten Art, in der Reihenfolge $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \cdots$ dadurch, daß man die Werte, welche die Funktionen $u^{(1)}, u^{(3)}, u^{(5)}, \cdots$ längs der Begrenzung q von F, und die Werte, welche die Funktionen $u^{(2)}, u^{(4)}, u^{(6)}, \cdots$ längs der Randlinien r und s von L besitzen sollen, in der Weise wählt, daß

$$\text{für } u^{(1)} \left\{ u_q^{(1)} = g_q \right., \qquad \text{für } u^{(2)} \left\{ \begin{aligned} u_r^{(2)} &= u_r^{(1)}, \\ u_s^{(2)} &= f_s \;, \end{aligned} \right.$$

$$\text{für } u^{(3)} \left\{ u_q^{(3)} = u_q^{(2)} \right., \qquad \text{für } u^{(4)} \left\{ \begin{aligned} u_r^{(4)} &= u_r^{(3)}, \\ u_s^{(4)} &= f_s \;, \end{aligned} \right.$$

$$\text{für } u^{(5)} \left\{ u_q^{(5)} = u_q^{(4)} \right., \qquad \text{für } u^{(6)} \left\{ \begin{aligned} u_r^{(6)} &= u_r^{(5)}, \\ u_s^{(6)} &= f_s \;, \end{aligned} \right.$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots$$

ist. Die Funktionen $u^{(2n+1)}$, $u^{(2n+2)}$ konvergieren dann mit unbegrenzt wachsendem n gegen bestimmte Grenzfunktionen $\bar{u}$, $\bar{\bar{u}}$, von denen die erste für jeden nicht mit einem der Punkte $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$ zusammenfallenden Punkt von F, die zweite für jeden Punkt von L existiert. Der Beweis für diese Behauptung soll jetzt erbracht werden.

Man betrachte die Funktionen $u^{(2n+1)} - u^{(2n-1)}$, $u^{(2n+2)} - u^{(2n)}$, ${\scriptstyle n=1,2,3,\cdots}$, und berücksichtige, daß die Gleichungen:

$$u_q^{(2n+1)} - u_q^{(2n-1)} = u_q^{(2n)} - u_q^{(2n-2)}, \qquad \begin{aligned} u_r^{(2n+2)} - u_r^{(2n)} &= u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}, \\ u_s^{(2n+2)} - u_s^{(2n)} &= 0 \end{aligned}$$

für $n = 1, 2, 3, \cdots$ bestehen, wenn man noch die dabei im Falle $n = 1$ auftretende Größe $u_q^{(0)}$ durch die Gleichung $u_q^{(0)} = g_q$ definiert. Die zur Fläche F gehörige Funktion $u^{(2n+1)} - u^{(2n-1)}$

ist, nachdem man ihr noch für die Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$, in welchen sie ja Werte zunächst nicht besitzt, die ihr für diese Punkte zukommenden Grenzwerte als Werte zugelegt hat, eine Funktion von der im Hilfssatze I, bei der Annahme $k=1$, charakterisierten Art, die längs der Begrenzung q von F die Werte $u_q^{(2n)} - u_q^{(2n-2)}$ besitzt. Infolgedessen ist mod $[u^{(2n+1)} - u^{(2n-1)}]$ für keinen Punkt von F, also auch für keinen Punkt der Linie r größer als das mit Mod $[u_q^{(2n)} - u_q^{(2n-2)}]$ zu bezeichnende Maximum der Werte, welche mod $[u_q^{(2n)} - u_q^{(2n-2)}]$ längs der Linie q besitzt. Die zur Ringfläche L gehörige Funktion $u^{(2n+2)} - u^{(2n)}$ dagegen ist eine Funktion von der im Satze V charakterisierten Art, welche längs der Linie s durchweg den Wert Null, längs der Linie r die Werte $u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}$ besitzt. Infolgedessen ist mod $[u^{(2n+2)} - u^{(2n)}]$, wie aus der am Schlusse von Art. 5 des vierten Abschnittes aufgestellten Formel folgt, für keinen Punkt von L größer als das mit Mod $[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}]$ zu bezeichnende Maximum der Werte, welche mod $[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}]$ längs der Linie r besitzt, und insbesondere für keinen Punkt der Linie q größer als $\varkappa$ Mod $[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}]$, wobei $\varkappa$ die zwischen 0 und 1 gelegene Zahl $\frac{\ln(4\sqrt{2}-2)}{\ln 6}$ bezeichnet. Man gelangt zu dieser letzteren Relation, indem man in der eben genannten Formel an Stelle von $u_{r,t}$ die Größe $u_q^{(2n+2)} - u_q^{(2n)}$ treten läßt und dementsprechend, unter Beachtung, daß eine jede der vier Ecken des Kreisbogenvierecks q von dem Mittelpunkte der Ringfläche den Abstand $\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\lambda$ hat, in dem auf ihrer rechten Seite stehenden Ausdrucke $G = \text{Mod}\,[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}]$, $G = 0$, $R = \frac{6}{8}\lambda$, $R = \frac{1}{8}\lambda$, $r = \frac{2\sqrt{2}-1}{4}\lambda$ setzt. Nachdem so die für $n = 1, 2, 3, \cdots$ geltenden Relationen:

$$\text{Mod}\,[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}] \overline{\gtrless} \text{Mod}\,[u_q^{(2n)} - u_q^{(2n-2)}], \qquad \text{Mod}\,[u_q^{(2n+2)} - u_q^{(2n)}] \overline{\gtrless} \varkappa\, \text{Mod}\,[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}]$$

gewonnen sind, erhält man, indem man in derselben Weise weiter schließt, wie es in Art. 8 an der entsprechenden Stelle geschehen ist, und zur Abkürzung Mod $[u_q^{(2)} - u_q^{(0)}] = G$ setzt, die für $n = 1, 2, 3, \cdots$ geltenden Relationen:

$$\text{mod}\,[u^{(2n+1)} - u^{(2n-1)}] \overline{\gtrless} \varkappa^{n-1} G, \qquad \text{mod}\,[u^{(2n+2)} - u^{(2n)}] \overline{\gtrless} \varkappa^{n-1} G,$$

von denen die erste für jeden Punkt von F, die zweite für jeden Punkt von L besteht. Diese letzten Relationen zeigen nun, daß die Funktionen $u^{(2n+1)}, u^{(2n+2)}$, wie behauptet wurde, mit unbegrenzt wachsendem n gegen bestimmte Grenzfunktionen:

$$\overline{u} = \lim_{n=\infty} u^{(2n+1)} = u^{(1)} + [u^{(3)} - u^{(1)}] + \cdots + [u^{(2n+1)} - u^{(2n-1)}] + \cdots,$$

$$\overline{\overline{u}} = \lim_{n=\infty} u^{(2n+2)} = u^{(2)} + [u^{(4)} - u^{(2)}] + \cdots + [u^{(2n+2)} - u^{(2n)}] + \cdots$$

konvergieren, und ähnliche Betrachtungen, wie die in Art. 8 angestellten, lassen dann erkennen, daß die für jeden nicht mit einem der Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ zusammenfallenden

Punkt von F existierende Funktion $\bar{u}$ eine zu F gehörige Fundamentalfunktion, die für jeden Punkt der Ringfläche L existierende Funktion $\bar{\bar{u}}$ eine zu L gehörige Funktion von der im Satze V definierten Art ist, und daß das Verhalten der Funktion $\bar{u}$ längs der Begrenzung q von F, sowie das Verhalten der Funktion $\bar{\bar{u}}$ längs der Randlinien r und s von L charakterisiert ist durch die Gleichungen:

$$\bar{u}_q = \bar{\bar{u}}_q, \qquad \begin{array}{l} \bar{u}_r = \bar{\bar{u}}_r, \\ \bar{\bar{u}}_s = f_s. \end{array}$$

Es soll jetzt noch bewiesen werden, daß die gewonnenen Funktionen $\bar{u}$, $\bar{\bar{u}}$ für jeden Punkt x, y des den Flächen F und L gemeinsamen, von der Linie q und der Linie r begrenzten, Gebietes denselben Wert besitzen. Zu dem Ende beachte man, daß die Differenz $\tilde{u} = \bar{u} - \bar{\bar{u}}$, als Funktion des in seiner Bewegung auf das gemeinsame Gebiet beschränkten Punktes x, y betrachtet, eine in dem ganzen Gebiete einwertige und stetige Funktion des Punktes x, y ist, welche für jeden inneren Punkt des Gebietes stetige Derivierte $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}, \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}$ besitzt, in derselben Ausdehnung der Differentialgleichung $\Delta \tilde{u} = 0$ genügt und zudem auf Grund der Gleichungen $\bar{u}_q = \bar{\bar{u}}_q$, $\bar{u}_r = \bar{\bar{u}}_r$ für jeden Punkt der Randlinien q, r den Wert Null hat. Nun läßt sich aber durch die am Ende von Art. 1 des vierten Abschnittes angewendete Schlußweise zeigen, daß eine solche Funktion $\tilde{u}$ für keinen Punkt des in Rede stehenden Gebietes einen von Null verschiedenen Wert haben kann, und damit ist der verlangte Beweis erbracht.

Definiert man nun schließlich für die von der Linie s begrenzte, die sämtlichen Punkte der Flächen F, L enthaltende Fläche F_0 eine Funktion u in der Weise, daß man für jeden Punkt von F $u = \bar{u}$, für jeden Punkt von L $u = \bar{\bar{u}}$ setzt, so ist die so bestimmte Funktion u, da sie, als Funktion des Punktes x, y von F betrachtet, sich wie eine Fundamentalfunktion, als Funktion des Punktes x, y von L betrachtet, sich wie eine Funktion von der im Satze V definierten Art verhält, eine zu F_0 gehörige Fundamentalfunktion, welche zudem, wie verlangt wurde, längs der Begrenzung s von F_0, auf Grund der Gleichung $u_s = \bar{\bar{u}}_s = f_s$, mit der vorgegebenen Funktion f_s des Begrenzungspunktes dem Werte nach übereinstimmt, und sie ist zugleich nach dem in Art. 7 Bewiesenen die einzige derartige Fundamentalfunktion. Damit ist aber die zu Anfang dieses Artikels gestellte Aufgabe gelöst.

12.

Zur Lösung der in Art. 4 gestellten Aufgabe ist jetzt noch der Übergang von der durch die Kreislinie s begrenzten, die sämtlichen Schnitte $a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_p, b_p$ und die sämtlichen Punkte $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$ in ihrem Innern enthaltenden Fläche F_0 zu der schon zu Anfang des Art. 5 eingeführten unbegrenzten, die Fläche F_0 als Teil enthaltenden Fläche T zu vollziehen. Man denke sich die Fläche T hier dadurch erzeugt, daß man zur Fläche F_0 die Kreisfläche k_0 vom Radius $R = \frac{6}{8}\lambda$ hinzunimmt (s. Fig. 16),

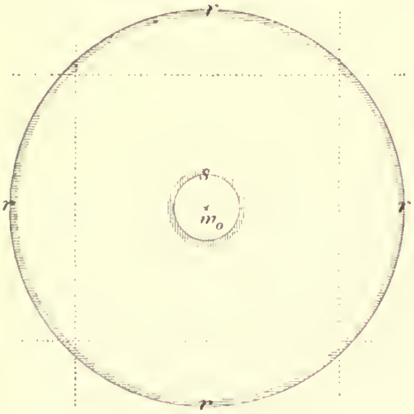


Fig. 16.

und beachte, daß man nach dem im vorhergehenden Artikel Bewiesenen zu der von der Kreislinie s begrenzten Fläche F_0, auf Grund des Satzes I dagegen zu der von der Kreislinie r begrenzten Kreisfläche k_0 eine Fundamentalfunktion mit beliebig vorgegebener einwertiger und stetiger Randfunktion bilden kann. Es ist dann zu zeigen, daß man zu der die sämtlichen Punkte der Flächen F_0, k_0 enthaltenden unbegrenzten Fläche T eine Funktion bilden kann, welche den in Art. 4 gestellten Bedingungen genügt.

Zu dem Ende wähle man für die Begrenzung s von F_0 eine einwertige und stetige Funktion $g_s = g'_s + g''_s i$ des Begrenzungspunktes und bestimme alsdann einerseits zu der Fläche F_0 Fundamentalfunktionen $u^{(1)}$, $u^{(3)}$, $u^{(5)}$, $\cdots$, andererseits zu der Kreisfläche k_0 Fundamentalfunktionen $u^{(2)}$, $u^{(4)}$, $u^{(6)}$, $\cdots$, in der Reihenfolge $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $\cdots$ dadurch, daß man, unter c eine beliebige Konstante verstehend, die Werte, welche die Funktionen $u^{(1)}$, $u^{(3)}$, $u^{(5)}$, $\cdots$ längs der Begrenzung s von F_0, und die Werte, welche die Funktionen $u^{(2)}$, $u^{(4)}$, $u^{(6)}$, $\cdots$ längs der Peripherie r von k_0 besitzen sollen, in der Weise wählt, daß

$$\text{für } u^{(1)}\left\{u_s^{(1)} = g_s\right., \qquad \text{für } u^{(2)}\left\{u_r^{(2)} = u_r^{(1)} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_r^{(1)}\,d\varphi + c\right.,$$

$$\text{für } u^{(3)}\left\{u_s^{(3)} = u_s^{(2)}\right., \qquad \text{für } u^{(4)}\left\{u_r^{(4)} = u_r^{(3)} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_r^{(3)}\,d\varphi + c\right.,$$

$$\text{für } u^{(5)}\left\{u_s^{(5)} = u_s^{(4)}\right., \qquad \text{für } u^{(6)}\left\{u_r^{(6)} = u_r^{(5)} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_r^{(5)}\,d\varphi + c\right.,$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

ist. In den dabei vorkommenden Integralen ist $u_r^{(2n-1)}$ für $n = 1, 2, 3, \cdots$, nachdem man zuvor die Lage eines Punktes $\mathfrak{P}$ auf der Peripherie r von k_0 durch Polarkoordinaten R, φ, $0 < \varphi < 2\pi$, mit dem Mittelpunkte m_0 von k_0 als Pol bestimmt hat, als Funktion von φ zu betrachten. Die Funktionen $u^{(2n+1)}$, $u^{(2n+2)}$ konvergieren nun mit unbegrenzt wachsendem n gegen bestimmte Grenzfunktionen $\overline{u}$, $\overline{\overline{u}}$, von denen die erste für jeden nicht mit einem der Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{P}_s$ zusammenfallenden Punkt von F_0, die zweite für jeden Punkt von k_0 existiert. Der Beweis für diese Behauptung soll jetzt erbracht werden.

Man betrachte die Funktionen $u^{(2n+1)} - u^{(2n-1)}$, $u^{(2n+2)} - u^{(2n)}$, ${\scriptstyle n=1,2,3,\cdots}$, und berücksichtige, daß die Gleichungen:

$$u_s^{(2n+1)} - u_s^{(2n-1)} = u_s^{(2n)} - u_s^{(2n-2)}, \qquad u_r^{(2n+2)} - u_r^{(2n)} = u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}\right]d\varphi$$

für $n = 1, 2, 3, \cdots$ bestehen, wenn man noch die dabei im Falle $n = 1$ auftretende Größe $u_s^{(0)}$ durch die Gleichung $u_s^{(0)} = g_s$ definiert. Die zur Fläche F_0 gehörige Funktion $u^{(2n+1)} - u^{(2n-1)}$ ist, nachdem man ihr noch für die Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$, in welchen sie ja Werte zunächst nicht besitzt, die ihr für diese Punkte zukommenden Grenzwerte als Werte zugelegt hat, eine Funktion von der im Hilfssatze 1, bei der Annahme $k = 1$, charakterisierten Art, die längs der Begrenzung s von F_0 die Werte $u_s^{(2n)} - u_s^{(2n-2)}$ besitzt. Infolgedessen ist $\mathrm{mod}\left[u^{(2n+1)} - u^{(2n-1)}\right]$ für keinen Punkt von F_0, also auch für keinen Punkt der Linie r größer als das mit $\mathrm{Mod}\left[u_s^{(2n)} - u_s^{(2n-2)}\right]$ zu bezeichnende Maximum der Werte, welche $\mathrm{mod}\left[u_s^{(2n)} - u_s^{(2n-2)}\right]$ längs der Linie s besitzt. Die zur Kreisfläche k_0 gehörige Funktion $u^{(2n+2)} - u^{(2n)}$ dagegen ist eine Funktion von der im Satze I charakterisierten Art, welche längs der Peripherie r von k_0 die Werte $u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}\right]d\varphi$ und dementsprechend im Mittelpunkte m_0 von k_0 den Wert Null besitzt. Infolgedessen ist $\mathrm{mod}\left[u^{(2n+2)} - u^{(2n)}\right]$ für keinen Punkt von k_0 größer als das Maximum der Werte, welche $\mathrm{mod}\left[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}\right]d\varphi\right]$ längs der Linie r besitzt, also auch für keinen Punkt von k_0 größer als das Zweifache des mit $\mathrm{Mod}\left[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}\right]$ zu bezeichnenden Maximums der Werte, welche $\mathrm{mod}\left[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}\right]$ längs der Linie r besitzt, und insbesondere ist $\mathrm{mod}\left[u^{(2n+2)} - u^{(2n)}\right]$ für keinen Punkt der Linie s größer als $\varkappa\, \mathrm{Mod}\left[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}\right]$, wobei $\varkappa$ die zwischen 0 und 1 gelegene Zahl $\frac{4}{7}$ bezeichnet. Man gelangt zu dieser letzteren Relation, indem man die in Art. 4 des zweiten Abschnittes unter (F_2.) sich findende Formel $\mathrm{mod}\, u_{r,t} - \mathrm{mod}\, u_0 < \frac{2r}{R+r}\,(G - \mathrm{mod}\, u_0)$, ${\scriptstyle 0<r<R}$, auf die Kreisfläche k_0 vom Radius $R = \frac{6}{8}\lambda$ bezieht und zugleich r durch den Radius $\frac{1}{8}\lambda$ der Kreislinie s ersetzt, alsdann an Stelle von u die im Mittelpunkt m_0 den Wert Null besitzende Funktion $u^{(2n+2)} - u^{(2n)}$ und demgemäß an Stelle von $u_{\frac{\lambda}{8},t}$ die Größe $u_s^{(2n+2)} - u_s^{(2n)}$, an Stelle von G die Größe $\mathrm{Mod}\left[u_r^{(2n+2)} - u_r^{(2n)}\right]$ treten läßt, endlich noch beachtet, daß nach oben Bemerktem $\mathrm{Mod}\left[u_r^{(2n+2)} - u_r^{(2n)}\right] \gtreqless 2\, \mathrm{Mod}\left[u_r^{(2n+1)} - u_r^{(2n-1)}\right]$ ist. Nachdem so die für $n = 1, 2, 3, \cdots$ geltenden Relationen:

$$\operatorname{Mod}\left[u_r^{(2n+1)}-u_r^{(2n-1)}\right] \gtreqless \operatorname{Mod}\left[u_s^{(2n)}-u_s^{(2n-2)}\right], \qquad \operatorname{Mod}\left[u_s^{(2n+2)}-u_s^{(2n)}\right] \gtreqless \varkappa \operatorname{Mod}\left[u_r^{(2n+1)}-u_r^{(2n-1)}\right]$$

gewonnen sind, erhält man, indem man in derselben Weise weiter schließt, wie es in Art. 8 an der entsprechenden Stelle geschehen ist, und zur Abkürzung $\operatorname{Mod}\left[u_s^{(2)}-u_s^{(0)}\right]=G$ setzt, die für $n=1,2,3,\cdots$ geltenden Relationen:

$$\operatorname{mod}\left[u^{(2n+1)}-u^{(2n-1)}\right] \gtreqless \varkappa^{n-1} G, \qquad \operatorname{mod}\left[u^{(2n+2)}-u^{(2n)}\right] \gtreqless 2\varkappa^{n-1} G,$$

von denen die erste für jeden Punkt von F_0, die zweite für jeden Punkt von k_0 besteht. Diese letzten Relationen zeigen nun, daß die Funktionen $u^{(2n+1)}$, $u^{(2n+2)}$, wie behauptet wurde, mit unbegrenzt wachsendem n gegen bestimmte Grenzfunktionen:

$$\bar{u} = \lim_{n=\infty} u^{(2n+1)} = u^{(1)} + \left[u^{(3)}-u^{(1)}\right] + \cdots + \left[u^{(2n+1)}-u^{(2n-1)}\right] + \cdots,$$

$$\bar{\bar{u}} = \lim_{n=\infty} u^{(2n+2)} = u^{(2)} + \left[u^{(4)}-u^{(2)}\right] + \cdots + \left[u^{(2n+2)}-u^{(2n)}\right] + \cdots$$

konvergieren, und ähnliche Betrachtungen, wie die in Art. 8 angestellten, lassen dann erkennen, daß die für jeden nicht mit einem der Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ zusammenfallenden Punkt von F_0 existierende Funktion $\bar{u}$ eine zu F_0 gehörige Fundamentalfunktion, die für jeden Punkt der Kreisfläche k_0 existierende Funktion $\bar{\bar{u}}$ eine zu k_0 gehörige Fundamentalfunktion ist, und daß das Verhalten der Funktion $\bar{u}$ längs der Begrenzung s von F_0, sowie das Verhalten der Funktion $\bar{\bar{u}}$ längs der Peripherie r von k_0 charakterisiert ist durch die Gleichungen:

$$\bar{u}_s = \bar{\bar{u}}_s, \qquad \bar{\bar{u}}_r = \bar{u}_r - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{u}_r \, d\varphi + c.$$

Das so gewonnene Funktionenpaar $\bar{u}, \bar{\bar{u}}$ ist von der zu seiner Bildung benutzten Konstanten c abhängig, insofern als die Funktion $\bar{\bar{u}}$ im Punkte m_0 den Wert c besitzt. Läßt man daher in den vorstehenden Betrachtungen an Stelle der Konstanten c eine andere Konstante c' treten, so erhält man ein neues, durch $\bar{v}, \bar{\bar{v}}$ zu bezeichnendes, Funktionenpaar, das mit $\bar{u}, \bar{\bar{u}}$ in den allgemeinen Eigenschaften übereinstimmt, dessen Verhalten längs der Linien s und r jedoch charakterisiert ist durch die Gleichungen:

$$\bar{v}_s = \bar{\bar{v}}_s, \qquad \bar{\bar{v}}_r = \bar{v}_r - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{v}_r \, d\varphi + c',$$

sodaß also $\bar{\bar{v}}$ im Punkte m_0 den Wert c' besitzt. Bildet man jetzt aus den Funktionen $\bar{u}, \bar{v}$ und $\bar{\bar{u}}, \bar{\bar{v}}$ durch Subtraktion das Funktionenpaar:

$$\bar{w} = \bar{u} - \bar{v}, \qquad \bar{\bar{w}} = \bar{\bar{u}} - \bar{\bar{v}},$$

so kommen demselben die folgenden Eigenschaften zu. Die zur Fläche F_0 gehörige Funktion $\bar{w}$ ist, nachdem man ihr noch für die Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$, in welchen sie ja Werte zunächst nicht besitzt, die ihr für diese Punkte zukommenden Grenzwerte als Werte zugelegt hat, eine Funktion von der im Hilfssatze I, bei der Annahme $k = 1$, charakterisierten Art, die zur Kreisfläche k_0 gehörige Funktion w dagegen ist eine Funktion von der im Satze I charakterisierten Art, die im Punkte m_0 den Wert $c - c'$ besitzt, und es ist zudem das Verhalten von $\bar{w}$, w längs der Linien s und r charakterisiert durch die Gleichungen:

$$\bar{w}_s = w_s, \qquad \bar{w}_r = w_r + C'',$$

wobei die Konstante C'', als Differenz der Konstanten:

$$C = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{u}_r \, d\varphi + c, \qquad C' = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_r \, d\varphi + c',$$

bestimmt ist durch die Gleichung:

$$C'' = C - C' = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{w}_r \, d\varphi + c - c'.$$

Die Konstante C'' besitzt einen von Null verschiedenen Wert, wenn auch nur eine der bei der Problemstellung in Art. 4 gewählten $2p$ Konstanten A_ν, B_ν, $\nu = 1, 2, \cdots, p$, von 1 verschieden ist. Der Beweis für diese Behauptung soll zunächst erbracht werden.

Man nehme an, daß C'' den Wert Null habe. Unter dieser Annahme besitzen die Funktionen $\bar{w}$, w für jeden Punkt der Linien r, s und daher, nach dem in Art. 1 des vierten Abschnittes Bewiesenen, auch für jeden Punkt des den Flächen F_0 und k_0 gemeinsamen, von den Linien r, s begrenzten Gebietes denselben Wert. Definiert man nun für die unbegrenzte, die sämtlichen Punkte der Flächen F_0, k_0 enthaltende Fläche T eine Funktion w in der Weise, daß man für jeden Punkt von F_0 $w = \bar{w}$, für jeden Punkt von k_0 $w = w$ setzt, so ist die so bestimmte Funktion w eine einwertige Funktion des Punktes x, y von T, deren Verhalten sich folgendermaßen charakterisieren läßt. Wählt man in der Fläche T irgend einen von den Punkten $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ verschiedenen und auch nicht zu einem der Schnitte a, b gehörigen Punkt $\mathcal{P}$, grenzt zu diesem Punkt $\mathcal{P}$ als Mittelpunkt eine Kreisfläche $\varkappa$ ab, deren Radius ϱ jedenfalls so klein gewählt sei, daß $\varkappa$ keinen der Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ und auch keinen zu einem der Schnitte a, b gehörigen Punkt enthält, und bezeichnet den die Kreisfläche $\varkappa$ zur Fläche T ergänzenden Teil der Fläche T mit $T_\varkappa$, so verhält sich w, als Funktion des in seiner Bewegung auf die Fläche $T_\varkappa$ beschränkten Punktes x, y betrachtet, wie eine Funktion von der im Hilfssatze I charakterisierten Art. Infolgedessen ist der Wert mod $w_{\mathcal{P}'}$, den mod w für irgend einen im Innern von $T_\varkappa$ gewählten, weder mit einem der Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ zusammenfallenden, noch auch zu einem der Schnitte a, b gehörigen Punkt $\mathcal{P}'$ besitzt, nicht größer als das Maximum der Werte, welche mod w für die

Punkte der Peripherie von $\varkappa$ besitzt, wie klein auch der Radius ϱ von $\varkappa$ genommen sein mag, und daher auch, da diese Werte mit unbegrenzt abnehmendem ϱ gegen den Wert mod $w_{\mathfrak{P}}$, den mod w im Punkte $\mathfrak{P}$ besitzt, konvergieren, nicht größer als mod $w_{\mathfrak{P}}$. Es besteht also die Beziehung mod $w_{\mathfrak{P}'} \overline{\overline{<}}$ mod $w_{\mathfrak{P}}$, aber auch, da $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ in der vorstehenden Betrachtung miteinander vertauscht werden können, die Beziehung mod $w_{\mathfrak{P}} \overline{\overline{<}}$ mod $w_{\mathfrak{P}'}$, und es kann daher mod $w_{\mathfrak{P}'}$ nicht von mod $w_{\mathfrak{P}}$ verschieden sein. Aus der so für jeden im Innern von $T_\varkappa$ gelegenen Punkt $\mathfrak{P}'$ der betrachteten Art als richtig erkannten Gleichung mod $w_{\mathfrak{P}'} =$ mod $w_{\mathfrak{P}}$ folgt nun, da w, als Funktion des Punktes x, y von $T_\varkappa$ betrachtet, eine Funktion von der im Hilfssatze I charakterisierten Art ist, zunächst, daß nicht nur mod w sondern auch (vergl. S. 105) w selbst für alle Punkte der Fläche $T_\varkappa$ denselben Wert besitzt, und schließlich, indem man den Radius ϱ von $\varkappa$ gegen Null konvergieren läßt und die Stetigkeit der zur unbegrenzten Fläche T gehörigen Funktion w im Punkte $\mathfrak{P}$ beachtet, daß die Funktion w auch für alle Punkte von T denselben Wert besitzt, und zwar den Wert $c - c'$, da für jeden Punkt von k_0 w durch die Gleichung $w = w$ definiert ist, und w im Mittelpunkte m_0 von k_0 den Wert $c - c'$ hat. Das so unter der Annahme $C'' = 0$ gewonnene Resultat steht aber, da $c - c'$ von Null verschieden ist, mit den längs der Schnitte a, b geltenden Gleichungen $w^+ = A_\nu w^-$, $w^+ = B_\nu w^-$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, im Widerspruch, wenn auch nur eine der $2p$ Konstanten A, B von 1 verschieden ist, und es kann daher in diesem Falle, wie behauptet wurde, C'' nicht den Wert Null haben.

Es soll jetzt zunächst für den Fall, daß die $2p$ Konstanten A_ν, B_ν, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, nicht sämtlich den Wert 1 besitzen, und dementsprechend C'' von Null verschieden ist, die durch den vorstehenden Beweis unterbrochene Betrachtung zu Ende geführt werden. Man bilde zur Fläche F_0 aus den Funktionen u, w eine Funktion U, zur Kreisfläche k_0 aus den Funktionen $\bar{u}, w$ eine Funktion U, indem man

$$U = \bar{u} - \frac{C}{C''}\,w, \qquad\qquad U = u - \frac{C}{C''}\,w$$

setzt. Die Funktion U ist dann eine zu F_0, die Funktion U eine zu k_0 gehörige Fundamentalfunktion; auch erkennt man ohne Mühe, daß das Verhalten der Funktion U längs der Begrenzung s von F_0, sowie das Verhalten der Funktion U längs der Peripherie r von k_0 charakterisiert ist durch die Gleichungen:

$$U_s = U_s, \qquad\qquad U_r = U_r,$$

und daß infolgedessen, nach dem in Art. 1 des vierten Abschnittes Bewiesenen, die Funktionen U, U für jeden Punkt des den Flächen F_0 und k_0 gemeinsamen, von den Linien r, s begrenzten Gebietes denselben Wert besitzen. Definiert man nun schließlich für die unbegrenzte, die sämtlichen Punkte der Flächen F_0, k_0 enthaltende Fläche $\overline{T}$ eine Funktion U in der Weise, daß man für jeden Punkt von F_0 $U = U$, für jeden Punkt von k_0 $U = \bar{U}$ setzt, so ist die so bestimmte Funktion U eine in der Fläche T und damit auch eine in der aus $\bar{T}$ durch Einführung der p Schnitte c entstehenden Fläche — die, wenn man die beiden Seiten der Schnitte a_ν, b_ν, c_ν, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, als Begrenzungslinien ansieht, mit der in Art. 1 definierten Fläche T'' identisch ist — einwertige Funktion des Punktes x, y, welche den sämtlichen in Art. 4 gestellten Bedingungen genügt. Die Funktion U ist aber auch die einzige diesen Bedingungen genügende Funktion. Existierte nämlich eine zweite derartige, mit U' zu bezeichnende, Funktion, so würde, wie durch die bei der Untersuchung der Funktion w angewandte Schlußweise gezeigt werden kann, die aus U und U' durch Subtraktion gebildete Funktion $W = U - U'$, nachdem man ihr noch für die Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ die ihr für diese Punkte zukommenden Grenzwerte als Werte zugelegt hat, für alle Punkte von T denselben Wert besitzen. Dieser Wert könnte aber, da längs der Schnitte a, b die Gleichungen $w^+ = A_\nu w^-$, $w^+ = B_\nu w^-$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, bestehen, und die $2p$ Konstanten A, B nicht sämtlich den Wert 1 besitzen, nur mit der Null zusammenfallen, im Widerspruch mit der Annahme, daß U' von U verschieden ist. Die in Art. 4 gestellte Aufgabe hat demnach in dem hier betrachteten Falle, wo die $2p$ Konstanten A_ν, B_ν, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, nicht sämtlich den Wert 1 besitzen, nur eine einzige Lösung.

Der noch übrige spezielle Fall, wo die $2p$ Konstanten A_ν, B_ν, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, sämtlich den Wert 1 besitzen und infolgedessen das im allgemeinen Falle eingeschlagene Verfahren versagt, läßt sich folgendermaßen erledigen. Man gehe auf die früher gewonnenen Funktionen $\bar{u}$, $\bar{\bar{u}}$ zurück, beachte, daß das Verhalten der Funktion $\bar{u}$ längs der Kreislinie s vom Radius $R - \frac{1}{8}\lambda$, sowie das Verhalten der Funktion $\bar{\bar{u}}$ längs der Kreislinie r vom Radius $R - \frac{6}{8}\lambda$ sich unter Benutzung der eingeführten Konstanten C charakterisieren läßt durch die Gleichungen:

$$\bar{u}_s = \bar{\bar{u}}_s, \qquad \bar{\bar{u}}_r = \bar{u}_r + C,$$

auch daß $\bar{\bar{u}}$ im Punkte m_0 den Wert c besitzt, und definiere alsdann mit Hilfe dieser Funktionen zur Fläche F_0 eine Funktion U, zur Kreisfläche k_0 eine Funktion U, indem man, unter ϱ, ${\scriptstyle 0<\varrho<R}$, den Abstand des Punktes x, y der Kreisfläche k_0 von dem Mittelpunkte m_0 verstehend,

$$\bar{U} = \bar{u}, \qquad U = \bar{\bar{u}} - C \frac{\ln \frac{\varrho}{\bar{R}}}{\ln \frac{R}{\bar{R}}}$$

setzt. Die Funktion U ist dann eine zu F_0 gehörige Fundamentalfunktion, die Funktion $\bar{U}$ dagegen ist in dem Falle, wo C von Null verschieden ist, eine zu k_0 gehörige Funktion von der im Satze II definierten Art, in dem Falle, wo C der Null gleich ist, eine zu k_0 gehörige Fundamentalfunktion, welche zudem im Punkte m_0 den

Wert c hat; auch erkennt man ohne Mühe, daß das Verhalten der Funktion $\bar U$ längs der Begrenzung s von F_0, sowie das Verhalten der Funktion $\bar{\bar U}$ längs der Peripherie r von k_0 charakterisiert ist durch die Gleichungen:

$$\bar U_s = \bar{\bar U}_s, \qquad \bar{\bar U}_r = \bar U_r,$$

und daß infolgedessen, nach dem in Art. 1 des vierten Abschnittes Bewiesenen, die Funktionen $\bar U$, $\bar{\bar U}$ für jeden Punkt des den Flächen F_0 und k_0 gemeinsamen, von den Linien r und s begrenzten Gebietes denselben Wert besitzen. Definiert man nun schließlich für die unbegrenzte, die sämtlichen Punkte der Flächen F_0, k_0 enthaltende Fläche T eine Funktion U in der Weise, daß man für jeden Punkt von F_0 $U = \bar U$, für jeden Punkt von k_0 $U = \bar{\bar U}$ setzt, so ist die so bestimmte Funktion U eine einwertige Funktion des Punktes x, y von T, deren Verhalten sich folgendermaßen charakterisieren läßt. Grenzt man zu dem Punkte m_0 als Mittelpunkt eine Kreisfläche $\varkappa$, deren Radius ϱ kleiner als der Radius R von s ist, ab und bezeichnet den die Kreisfläche $\varkappa$ zur Fläche T ergänzenden Teil der Fläche T mit $T_\varkappa$, so verhält sich U, als Funktion des in seiner Bewegung auf die Fläche $T_\varkappa$ beschränkten Punktes x, y betrachtet, wie eine zu $T_\varkappa$ gehörige Fundamentalfunktion, und es konvergieren zugleich die zu der Begrenzung von $T_\varkappa$ oder, was dasselbe, zur Peripherie von $\varkappa$ gehörigen Werte von

$$U + C\,\frac{\ln \dfrac{\varrho}{R}}{\ln \dfrac{R}{R}}$$

mit unbegrenzt abnehmendem ϱ gegen c. Die genannten Eigenschaften bestimmen die Funktion U aber auch vollständig. Existierte nämlich eine zweite, mit U' zu bezeichnende, Funktion von den gleichen Eigenschaften, so würde, wie durch die bei der Untersuchung der Funktion w angewandte Schlußweise gezeigt werden kann, die aus U und U' durch Subtraktion gebildete Funktion $W = U - U'$, nachdem man ihr noch für die Punkte $\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_x$, m_0 die ihr für diese Punkte zukommenden Grenzwerte als Werte zugelegt hat, für alle Punkte von T denselben Wert besitzen, der zudem, da W im Punkte m_0 den Wert Null hat, der Null gleich sein müßte, im Widerspruch mit der Annahme, daß U' von U verschieden ist.

Hat die Größe C den Wert Null, so ist die soeben für die Fläche T erhaltene Funktion U, wenn man sie auf die aus T durch Einführung der p Schnitte c entstehende, von den beiden Seiten der Schnitte a_ν, b_ν, c_ν, ${}_{\nu=1,2,\cdots,p}$, begrenzte Fläche T' bezieht, eine Funktion, welche den in Art. 4 gestellten Bedingungen genügt und zudem im Punkte m_0 den Wert c besitzt, und sie ist zugleich, nach dem eben Bewiesenen, die einzige derartige Funktion. Daß aber die Größe C wirklich den Wert Null haben kann, zeigt die folgende Betrachtung.

Man verstehe unter U eine zur Fläche T gehörige Funktion, welche mit der erhaltenen Funktion U in den allgemeinen Eigenschaften übereinstimmt, lasse es aber dahingestellt sein, welche Werte die das Verhalten von U im Punkte m_0 bestimmenden Konstanten C, c besitzen. Nun führe man in die Fläche T p von einem und demselben Punkte $\mathfrak{P}$ auslaufende, keinen der Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s, m_0$ enthaltende und in den Punkten $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \cdots, \mathfrak{s}_p$ beziehungsweise mündende Schnitte $c_1', c_2', \cdots, c_p'$ ein, bezeichne die von den beiden Seiten der Schnitte a_ν, b_ν, c_ν', $\nu=1,2,\cdots,p$, begrenzte, einfach zusammenhängende Fläche mit T^* und dehne das mit der Funktion U gebildete Integral $\int\left(-\frac{\partial U}{\partial y}dx + \frac{\partial U}{\partial x}dy\right)$ in positiver Richtung über die Begrenzung von T^* aus. Das so erstreckte Integral hat, da im vorliegenden Falle längs eines jeden der Schnitte a, b, c' $\frac{\partial U^+}{\partial x} = \frac{\partial U^-}{\partial x}$, $\frac{\partial U^+}{\partial y} = \frac{\partial U^-}{\partial y}$ ist und zudem die beiden Seiten eines jeden dieser Schnitte bei der Integration in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden, den Wert Null. Andererseits kann man den Wert des vorgelegten Integrals aber auch dadurch erhalten, daß man dasselbe um jeden der Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s, m_0$ von T^*, für welche die Funktion U unstetig wird, in positiver Richtung erstreckt, diese $s+1$ Punktintegrale auswertet und die Summe der so gewonnenen Werte bildet. Durch Vergleichung der beiden Ergebnisse erhält man dann die Beziehung:

$$C = -\ln\left(\frac{R}{R}\right)\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_\sigma.$$

Diese Beziehung zeigt nun, daß im vorliegenden, durch $A_\nu = 1$, $B_\nu = 1$, $\nu=1,2,\cdots,p$, charakterisierten Falle C immer dann den Wert Null besitzt, also die in Art. 4 gestellte Aufgabe auch immer eine Lösung hat, wenn die bei der Problemstellung eingeführten Konstanten $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \cdots, \mathfrak{L}_s$ durch die Gleichung $\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_\sigma = 0$ verknüpft sind. Da aber auch umgekehrt jede im Falle $A_\nu = 1$, $B_\nu = 1$, $\nu=1,2,\cdots,p$, der gestellten Aufgabe genügende Funktion, wenn man sie auf die Fläche T bezieht, eine Funktion U von der eben betrachteten Art ist, für welche C und daher auch $\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_\sigma$ den Wert Null hat, so erkennt man, daß in dem vorliegenden Falle durch die in Art. 4 gestellte Aufgabe dann aber auch nur dann nichts Unmögliches verlangt wird, wenn man für diesen Fall zu den in der Aufgabe gestellten Bedingungen noch die Bedingung $\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_\sigma = 0$ hinzunimmt, und daß dann die vorher erhaltene Funktion U diejenige den gestellten Bedingungen genügende Funktion U ist, welche im Punkte m_0 den vorgegebenen Wert c besitzt. Auch erkennt man weiter, daß die aus U durch Addition der beliebigen Konstanten c' entstehende Funktion $U + c'$ diejenige den gestellten Bedingungen genügende Funktion ist, welche im Punkte m_0 den Wert $c + c'$ besitzt, und daher schließlich, daß eine Funktion U durch die genannten Bedingungen erst dann vollständig bestimmt ist, wenn man für sie noch den Wert vorgibt, welchen sie für einen von den Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ verschiedenen, im übrigen aber willkürlich wählbaren Punkt der Fläche T' besitzen soll.

Das Resultat der in diesem Abschnitte durchgeführten Untersuchungen läßt sich nun zusammenfassen in den folgenden

Satz. „*Die über der Z-Ebene ausgebreitete, $(2p+1)$-fach zusammenhängende, n-blättrige Fläche T sei in der in Art. 1 angegebenen Weise durch Einführung der Schnitte $a_\nu, b_\nu, c_\nu, {}_{\nu=1,2,\cdots,p}$, in die einfach zusammenhängende, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c begrenzte Fläche T' verwandelt, und es seien zugleich in dieser letzteren die s in Art. 3 definierten Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ markiert. Ordnet man alsdann allgemein dem Schnittpaare a_ν, b_ν ${}_{(\nu=1,2,\cdots,p)}$ irgend vier nur den Bedingungen:*

$$\operatorname{mod} A_\nu = 1, \ \operatorname{mod} B_\nu = 1; \qquad (1 - B_\nu)\mathfrak{A}_\nu = (1 - A_\nu)\mathfrak{B}_\nu$$

unterworfene Konstanten $A_\nu, B_\nu, \mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$, den Punkten $\mathfrak{P}_\sigma$, ${}_{\sigma=1,2,\cdots,s}$, dagegen Konstanten $\mathfrak{L}_\sigma, \mathfrak{L}_{\sigma 1}, \mathfrak{L}_{\sigma 2}, \cdots, \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}$, ${}_{\sigma=1,2,\cdots,s}$, die in dem speziellen Falle, wo die 2p Konstanten A, B sämtlich den Wert 1 besitzen, der Bedingung $\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_\sigma = 0$ genügen sollen, in jedem anderen Falle aber beliebig gewählt werden dürfen, und die daher teilweise oder auch alle den Wert Null haben können, zu, so existiert zu der Fläche T' immer eine Funktion $U = U' + U''i$ des Punktes x, y, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

I. Die Funktion U ist für jeden nicht mit einem der Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ zusammenfallenden Punkt x, y der Fläche T', einerlei also, ob derselbe im Innern oder auf der Begrenzung von T' liegt, einwertig und stetig. Für den Punkt $\mathfrak{P}_\sigma$ ${}_{(\sigma=1,2,\cdots,s)}$ dagegen wird sie in derselben Weise unstetig, wie die in Art. 3 definierte Funktion $\varphi_\sigma(r_\sigma, t_\sigma)$, sodaß also für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ die Differenz:

$$U - \left(\mathfrak{L}_\sigma \ln r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} + \mathfrak{L}_{\sigma 1} r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} \cos\frac{t_\sigma}{\nu_\sigma} + \mathfrak{L}_{\sigma 2} r_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}} \cos\frac{2t_\sigma}{\nu_\sigma} + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma} r_\sigma^{\frac{m_\sigma}{\nu_\sigma}} \cos\frac{m_\sigma t_\sigma}{\nu_\sigma}\right)$$

mit unbegrenzt wachsendem r_σ, für $\sigma = q+1, q+2, \cdots, s$ die Differenz:

$$U - \left(\mathfrak{L}_\sigma \ln\frac{1}{r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}}} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}}}\cos\frac{t_\sigma}{\nu_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{r_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}}}\cos\frac{2t_\sigma}{\nu_\sigma} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{r_\sigma^{\frac{m_\sigma}{\nu_\sigma}}}\cos\frac{m_\sigma t_\sigma}{\nu_\sigma}\right)$$

mit unbegrenzt abnehmendem r_σ gleichmäßig für alle Werte von t_σ gegen eine von t_σ unabhängige Größe konvergiert. Zudem sind ihre allgemein mit U^+, U^- zu bezeichnenden Werte in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{P}^-$ in der Weise verknüpft, daß

$$\text{(S.)}\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \{ U^+ = A_\nu U^- + \mathfrak{A}_\nu, \\ &\text{längs } b_\nu \{ U^+ = B_\nu U^- + \mathfrak{B}_\nu, \\ &\text{längs } c_\nu \{ U^+ = U^-, \end{aligned} \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p,$$

ist, wobei die Konstanten $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$, $\nu = 1, 2, \cdots, p$, *der Voraussetzung gemäß mit den* $2p$ *Konstanten* A, B *durch die, für das Zusammenbestehen der Gleichungen* (S.) *notwendigen,* p *Relationen:*

$$\text{(S}'.\text{)}\qquad (1 - B_\nu)\mathfrak{A}_\nu = (1 - A_\nu)\mathfrak{B}_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p,$$

verbunden sind.

II. Die Derivierten $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, *als Grenzen der entsprechenden Differenzenquotienten definiert, existieren und sind stetig nicht nur für jeden von den Punkten* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ *verschiedenen inneren Punkt* x, y *der Fläche* T'', *sondern auch noch für jeden Begrenzungspunkt, sobald man die Funktion* U *über ein diesen Begrenzungspunkt im Innern enthaltendes Stück der Begrenzung von* T'' *hinüber den Gleichungen* (S.) *entsprechend stetig fortsetzt, und es sind alsdann, ausschließlich auf Grund ihrer Definition, die Werte der genannten Derivierten in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten* $\mathfrak{P}^+, \mathfrak{P}^-$ *in der Weise verknüpft, daß*

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \Big\{ \frac{\partial U^+}{\partial x} = A_\nu \frac{\partial U^-}{\partial x}, \ \frac{\partial U^+}{\partial y} = A_\nu \frac{\partial U^-}{\partial y}, \ \frac{\partial^2 U^+}{\partial x^2} = A_\nu \frac{\partial^2 U^-}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 U^+}{\partial y^2} = A_\nu \frac{\partial^2 U^-}{\partial y^2}, \\ &\text{längs } b_\nu \Big\{ \frac{\partial U^+}{\partial x} = B_\nu \frac{\partial U^-}{\partial x}, \ \frac{\partial U^+}{\partial y} = B_\nu \frac{\partial U^-}{\partial y}, \ \frac{\partial^2 U^+}{\partial x^2} = B_\nu \frac{\partial^2 U^-}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 U^+}{\partial y^2} = B_\nu \frac{\partial^2 U^-}{\partial y^2}, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p. \\ &\text{längs } c_\nu \Big\{ \frac{\partial U^+}{\partial x} = \frac{\partial U^-}{\partial x}, \ \frac{\partial U^+}{\partial y} = \frac{\partial U^-}{\partial y}, \ \frac{\partial^2 U^+}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U^-}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 U^+}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U^-}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

III. Die Derivierten $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ *erfüllen für jeden Punkt* x, y *der Fläche* T'', *für den ihre Existenz soeben festgestellt wurde, also für jeden nicht mit einem der Punkte* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ *zusammenfallenden Punkt die Gleichung* $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$.

In dem Falle, wo die $2p$ *Konstanten* A, B *nicht sämtlich den Wert* 1 *haben, gibt es nur eine einzige Funktion* U, *welche die eben genannten Eigenschaften besitzt; in dem speziellen Falle dagegen, wo die* $2p$ *Konstanten* A, B *sämtlich den Wert* 1 *haben, ist die aus der Funktion* U *durch Addition einer willkürlichen Konstanten hervorgehende Funktion die allgemeinste Funktion, welche die genannten Eigenschaften besitzt.*"

Der vorstehende Satz ist unter der Voraussetzung abgeleitet worden, daß die Schnitte a, b, c sich aus einer endlichen Anzahl von Stücken gerader Linien zusammensetzen. Diese Bedingung, welche ausschließlich zur Vereinfachung der Untersuchungen des Art. 10 gestellt worden ist, soll jetzt noch abgestreift werden, oder, was dasselbe, es soll gezeigt werden, daß auch dann, wenn die Schnitte a, b, c, durch welche die ursprüngliche Fläche T in eine einfach zusammenhängende Fläche T'' verwandelt wird, aus einer endlichen Anzahl von Stücken algebraischer Kurven zusammengesetzt sind, der vorstehende Satz gilt, also zu der Fläche T' eine Funktion U mit den in dem Satze genannten Eigenschaften existiert.

Zu dem Ende ordne man den $3p$ aus Stücken algebraischer Kurven bestehenden Schnitten $a_\nu, b_\nu, c_\nu, {}_{\nu=1,2,\cdots,p}$, beziehungsweise $3p$ aus Stücken gerader Linien bestehende Schnitte $\bar{a}_\nu, \bar{b}_\nu, \bar{c}_\nu, {}_{\nu=1,2,\cdots,p}$, von der Art zu, daß ein jeder dieser Schnitte $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sich mehr oder weniger eng an die positive Seite des entsprechenden der Schnitte a, b, c anschließt, aber mit ihm nur die beiden Endpunkte gemeinsam hat, und daß zudem der zwischen ihm und dem entsprechenden der Schnitte a, b, c gelegene Teil der Fläche T, von den beiden Endpunkten abgesehen, keinen Punkt eines der übrigen Schnitte und auch keinen der Punkte $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$ enthält. Auf Grund des vorstehenden Satzes existiert dann zu der durch Aufhebung der Schnitte a, b, c entstehenden, von den beiden Seiten der Schnitte $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ begrenzten, einfach zusammenhängenden Fläche T'' eine, mit U zu bezeichnende, Funktion, welche die in dem Satze genannten Eigenschaften besitzt. Definiert man jetzt zu der die sämtlichen Schnitte $a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ enthaltenden Fläche eine Funktion U dadurch, daß man für jeden Punkt des von den beiden Linien $a_\nu^+, \bar{a}_\nu^-$ ${}_{(\nu=1,2,\cdots,p)}$ begrenzten Gebietes $U = A_\nu U + \mathfrak{A}_\nu$, für jeden Punkt des von den beiden Linien $b_\nu^+, \bar{b}_\nu^-$ ${}_{(\nu=1,2,\cdots,p)}$ begrenzten Gebietes $U = B_\nu U + \mathfrak{B}_\nu$, endlich für jeden noch übrigen Punkt der Fläche $U = U$ setzt, so kommen für die so definierte Funktion U, da sie in je zwei zu einem der Schnitte $a, \bar{b}, \bar{c}$ gehörigen entsprechenden Punkten $\mathscr{P}^+, \mathscr{P}^-$ denselben Wert besitzt, die Schnitte $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ nicht mehr in Betracht, und sie ist daher schon in der durch Aufhebung der Schnitte $a, b, \bar{c}$ entstehenden Fläche T' einwertig. Als Funktion des Punktes x, y von T' betrachtet, besitzt die Funktion U aber, wie unmittelbar erhellt, die sämtlichen in dem vorstehenden Satze genannten Eigenschaften. Damit ist der verlangte Nachweis erbracht.

Sechster Abschnitt.

Aufstellung und Beweis des Fundamentalsatzes der Theorie.

1.

Die über der Z-Ebene ausgebreitete, $(2p+1)$-fach zusammenhängende Fläche T sei in der schon in Art. 1 des fünften Abschnittes angegebenen Weise durch Einführung der $3p$ Schnitte $a_\nu, b_\nu, c_\nu,$ $\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,$ in die einfach zusammenhängende Fläche T' verwandelt. In dieser, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c begrenzten, Fläche markiere man die schon im fünften Abschnitt zu Anfang des Art. 3 definierten Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$, unter denen sich alle Windungspunkte und alle Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ befinden, und ziehe alsdann von dem der negativen Seite von c_1 und der positiven Seite von c_p gemeinsam angehörigen Punkte aus in beliebiger Reihenfolge durch das Innere der Fläche T' s — ebenso wie die Schnitte a, b, c ausschließlich aus einer endlichen Anzahl von Stücken algebraischer Kurven sich zusammensetzende — weder einander noch auch sich selbst schneidende oder berührende Schnitte l, allgemein nach $\mathfrak{P}_\sigma$ $\scriptstyle (\sigma=1,2,\cdots,s)$ den Schnitt l_σ. Man nehme, unter $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_s$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \cdots, s$ verstehend, an, daß die Schnitte c, l bei einem negativen Umlauf um ihren gemeinsamen Ausgangspunkt $\mathfrak{P}_0$ in der Reihenfolge $c_1, c_2, \cdots, c_p, l_{\varkappa_1}, l_{\varkappa_2}, \cdots, l_{\varkappa_s}$ überschritten werden, wähle beim Schnitte l_σ $\scriptstyle (\sigma=1,2,\cdots,s)$ die Bezeichnung der beiden Seiten so, daß bei dem genannten Umlauf um $\mathfrak{P}_0$ der Schnitt l_σ von der negativen zur positiven Seite hin überschritten wird, und bezeichne endlich die dem Punkte $\mathfrak{P}_0$ jetzt entsprechenden $p+s$ Punkte in der in Figur 17 angedeuteten Weise durch $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \cdots, \mathfrak{k}_p, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_s$. Die durch Einführung der s Schnitte l aus T' hervorgehende, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c, l begrenzte, einfach zusammenhängende Fläche soll mit T'' bezeichnet werden.

Zu dem Punkte $\mathfrak{P}_\sigma$ grenze man nun in der Fläche T'' durch eine ν_σ-fache Kreislinie k_σ für $\sigma=1, 2, \cdots, q$ eine ν_σ-blättrige Kreisergänzungsfläche K'_σ, für $\sigma=q+1, q+2, \cdots, s$ eine den Punkt $\mathfrak{P}_\sigma$ als Mittelpunkt enthaltende, ν_σ-blättrige Kreisfläche K_σ ab. Dabei sollen die Radien $R_1, R_2, \cdots, R_s$ der Kreislinien $k_1, k_2, \cdots, k_s$ so gewählt sein, daß nicht nur die Flächen K', K vollständig getrennt liegen, sondern auch allgemein die Kreis-

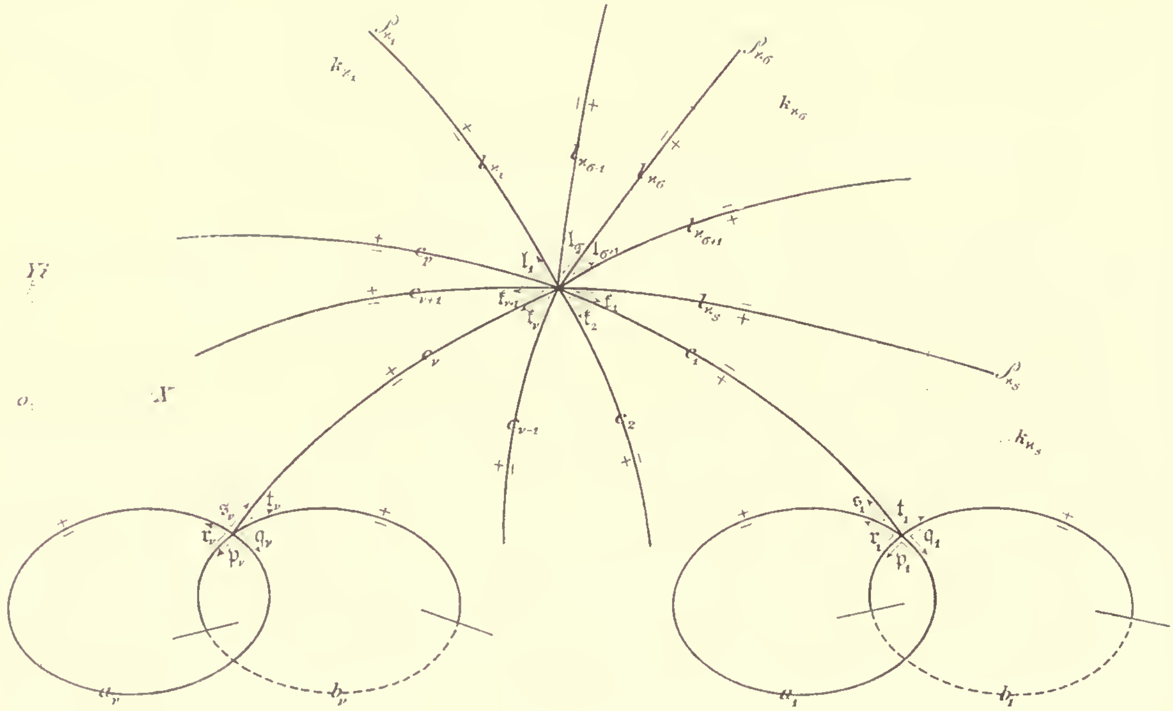


Fig. 17.

linie k_σ mit dem Schnitte l_σ nur einen Punkt gemeinsam hat und im übrigen vollständig innerhalb T'' verläuft. Die Lage eines in der Fläche K'_σ oder in der Fläche K_σ gelegenen Punktes z denke man sich durch die schon in Art. 3 des dritten Abschnittes eingeführten, für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ mit z durch die Gleichung $z = x + yi = r_\sigma e^{t_\sigma i}$, ${\scriptstyle r_\sigma > R_\sigma,\ 0 > t_\sigma > -2\nu_\sigma \pi}$, für $\sigma = q+1, q+2, \cdots, s$ mit z durch die Gleichung $z = x + yi = a_\sigma + r_\sigma e^{t_\sigma i}$, ${\scriptstyle 0 < r_\sigma < R_\sigma,\ 0 < t_\sigma < 2\nu_\sigma \pi}$, verknüpften Polarkoordinaten r_σ, t_σ bestimmt. Setzt man dann, unter z einen Punkt der dem Index σ entsprechenden Fläche K'_σ oder K_σ verstehend,

$$\text{für } \sigma = 1, 2, \cdots, q \left| z_\sigma = \frac{1}{z^{\frac{1}{\nu_\sigma}}} = \frac{1}{r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}}} e^{-\frac{t_\sigma}{\nu_\sigma} i}, \right. \qquad \text{für } \sigma = q+1, q+2, \cdots, s \left| z_\sigma = (z - a_\sigma)^{\frac{1}{\nu_\sigma}} = r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} e^{\frac{t_\sigma}{\nu_\sigma} i} \right.$$

und unterwirft zugleich die auftretenden Potenzen von r_σ der Bedingung positiv zu sein, so ist z_σ eine in der betreffenden Fläche einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen z, die in je zwei zu dem in die Fläche fallenden Stück von l_σ gehörigen entsprechenden Punkten $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{P}^-$ denselben Wert besitzt und die zudem für den Punkt $\mathfrak{P}_\sigma$, nach der von Riemann*) gegebenen Definition, unendlich klein von der ersten

*) Riemann, B., Theorie der Abel'schen Functionen. I, Art. 2. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 88—144; S. 103.

Ordnung (0^1) wird, und es stellt dementsprechend — wenn man unter z' irgend einen auf der negativen Seite von l_σ gelegenen Punkt der betreffenden Fläche, unter z'_σ den diesem Punkte zukommenden Wert von z_σ, unter $\ln\frac{1}{z'_\sigma}$ irgend einen der unbegrenzt vielen, dem Wert z'_σ entsprechenden Werte von $\ln\frac{1}{z'_\sigma}$ versteht und im Anschlusse daran $\ln\frac{1}{z_\sigma}$ für den Punkt z der Fläche durch die Gleichung $\ln\frac{1}{z_\sigma} = \ln\frac{1}{z'_\sigma} - \int\limits_{z'}^{z}\frac{dz_\sigma}{z_\sigma}$ unter Voraussetzung eines den Schnitt l_σ nicht überschreitenden und auch nicht durch den Punkt $\mathfrak{P}_\sigma$ gehenden Integrationsweges definiert — der mit irgend welchen komplexen Konstanten $\mathfrak{L}$ gebildete Ausdruck:

$$f_\sigma(z_\sigma) = \mathfrak{L}_\sigma \ln\frac{1}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{z_\sigma^{m_\sigma}} \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, s)$$

eine in der dem Index σ entsprechenden Fläche K'_σ oder K_σ mit Ausnahme des Punktes $\mathfrak{P}_\sigma$ einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen z dar, deren Werte f_σ^+, f_σ^- in je zwei zu dem in die Fläche fallenden Stück von l_σ gehörigen entsprechenden Punkten $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{P}^-$ durch die Gleichung $f_\sigma^+ = f_\sigma^- + 2\pi i \mathfrak{L}_\sigma$ verknüpft sind.

2.

Man nehme an, daß zur Fläche T'' eine komplexe Funktion $F = F(x, y)$ des Punktes x, y existiere, die für jeden von den Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ verschiedenen Punkt der Fläche einwertig und stetig ist, für den Punkt $\mathfrak{P}_\sigma$ $(\sigma = 1, 2, \cdots, s)$ in derselben Weise unstetig wird wie eine Funktion $f_\sigma(z_\sigma)$ von der oben definierten Art, in dem Sinne, daß für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ die Differenz $F(r_\sigma \cos t_\sigma, r_\sigma \sin t_\sigma) - f_\sigma(z_\sigma)$, $z_\sigma = r_\sigma^{-\frac{1}{\nu_\sigma}} e^{-\frac{t_\sigma}{\nu_\sigma} i}$, mit unbegrenzt wachsendem r_σ, für $\sigma = q+1, q+2, \cdots, s$ die Differenz $F(a'_\sigma + r_\sigma \cos t_\sigma, a''_\sigma + r_\sigma \sin t_\sigma) - f_\sigma(z_\sigma)$, $z_\sigma = r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} e^{\frac{t_\sigma}{\nu_\sigma} i}$, mit unbegrenzt abnehmendem r_σ gleichmäßig für alle Werte von t_σ gegen eine von t_σ unabhängige Größe konvergiert, und deren, allgemein mit F^+, F^- zu bezeichnende, Werte in je zwei durch einen und denselben der Schnitte a, b, c, l getrennten Begrenzungspunkten $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{P}^-$ durch eine und dieselbe Gleichung in der Weise verknüpft sind, daß

$$(\mathrm{S.})\quad \begin{array}{ll} \text{längs } a_\nu \{ F^+ = A_\nu F^- + \mathfrak{A}_\nu, & \\ \text{längs } b_\nu \{ F^+ = B_\nu F^- + \mathfrak{B}_\nu, & \nu = 1, 2, \cdots, p, \\ \text{längs } c_\nu \{ F^+ = F^- + \mathfrak{C}_\nu, & \\ \text{längs } l_\sigma \{ F^+ = F^- + 2\pi i \mathfrak{L}_\sigma, & \sigma = 1, 2, \cdots, s, \end{array}$$

ist, wobei $A_\nu, B_\nu, \mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{C}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots, p)$ Konstanten bedeuten, und die Größe $\mathfrak{L}_\sigma$ $(\sigma = 1, 2, \cdots, s)$, dem eben charakterisierten Verhalten von F für den Punkt $\mathscr{P}_\sigma$ entsprechend, mit der in $f_\sigma(z_\sigma)$ vorkommenden Konstanten $\mathfrak{L}_\sigma$ identisch ist. Die Konstanten A_ν, B_ν $(\nu=1,2,\cdots,p)$ sollen den Bedingungen $A_\nu \neq 0$, $B_\nu \neq 0$ unterworfen sein, da weder im Falle $A_\nu = 0$ noch im Falle $B_\nu = 0$ von einer Verknüpfung der Werte F^+, F^- längs des betreffenden Schnittes, a_ν oder b_ν, die Rede sein könnte.

Eine Funktion F der beschriebenen Art kann nur dann existieren, wenn die $5p+s$ in den Gleichungen (S.) auftretenden Konstanten gewisse Bedingungen erfüllen. Um dieses einzusehen, beachte man, daß die Gleichungen (S.) einerseits für die Werte, welche die Funktion F in den Punkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ besitzt, die Beziehungen:

$$1.)\ F_{\mathfrak{q}_\nu} = A_\nu F_{\mathfrak{p}_\nu} + \mathfrak{A}_\nu, \qquad 2.)\ F_{\mathfrak{s}_\nu} = A_\nu F_{\mathfrak{r}_\nu} + \mathfrak{A}_\nu,$$

$$3.)\ F_{\mathfrak{r}_\nu} = B_\nu F_{\mathfrak{p}_\nu} + \mathfrak{B}_\nu, \qquad 4.)\ F_{\mathfrak{t}_\nu} = B_\nu F_{\mathfrak{q}_\nu} + \mathfrak{B}_\nu, \qquad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$$

$$5.)\ F_{\mathfrak{s}_\nu} = F_{\mathfrak{t}_\nu} + \mathfrak{C}_\nu,$$

andererseits für die Werte, welche die Funktion F in den Punkten $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{l}$ besitzt, die Beziehungen:

$$6.)\ F_{\mathfrak{f}_2} = F_{\mathfrak{f}_1} + \mathfrak{C}_1, \qquad \cdots, F_{\mathfrak{f}_{\nu+1}} = F_{\mathfrak{f}_\nu} + \mathfrak{C}_\nu, \qquad \cdots, F_{\mathfrak{l}_1} = F_{\mathfrak{f}_p} + \mathfrak{C}_p,$$

$$7.)\ F_{\mathfrak{l}_2} = F_{\mathfrak{l}_1} + 2\pi i \mathfrak{L}_{\varkappa_1}, \cdots, F_{\mathfrak{l}_{\sigma+1}} = F_{\mathfrak{l}_\sigma} + 2\pi i \mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma}, \cdots, F_{\mathfrak{f}_1} = F_{\mathfrak{l}_s} + 2\pi i \mathfrak{L}_{\varkappa_s}$$

liefern. Kombiniert man alsdann das eine Mal die aus den Gleichungen 1.), 2.), 3.), 4.) durch Elimination der Größen $F_{\mathfrak{q}_\nu}$, $F_{\mathfrak{r}_\nu}$ entstehenden Gleichungen:

$$F_{\mathfrak{s}_\nu} = A_\nu B_\nu F_{\mathfrak{p}_\nu} + A_\nu \mathfrak{B}_\nu + \mathfrak{A}_\nu, \qquad F_{\mathfrak{t}_\nu} = A_\nu B_\nu F_{\mathfrak{p}_\nu} + B_\nu \mathfrak{A}_\nu + \mathfrak{B}_\nu$$

mit der Gleichung 5.), das andere Mal die durch Addition der Gleichungen 6.) und durch Addition der Gleichungen 7.) beziehungsweise entstehenden Gleichungen:

$$F_{\mathfrak{l}_1} = F_{\mathfrak{f}_1} + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{C}_\nu, \qquad F_{\mathfrak{f}_1} = F_{\mathfrak{l}_1} + 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma$$

mit einander, so erkennt man, daß eine Funktion F der beschriebenen Art nur dann existieren kann, wenn die $5p+s$ Konstanten A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}$ den $p+1$ Gleichungen:

$$(\mathrm{S}'.)\quad \begin{cases} (1-B_\nu)\mathfrak{A}_\nu - (1-A_\nu)\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{C}_\nu, & {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,} \\ \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{C}_\nu + 2\pi i \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0 \end{cases}$$

genügen. Da aber auch umgekehrt zu irgend $5p+s$ den $p+1$ Gleichungen (S′.) und den Bedingungen $A_\nu \neq 0$, $B_\nu \neq 0$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, genügenden Konstanten A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}$, wie einfache Betrachtungen zeigen, immer unbegrenzt viele Funktionen F der beschriebenen Art sich bilden lassen, so stellen die $p+1$ Gleichungen (S'.) nicht nur die notwendigen, sondern auch die hinreichenden Bedingungen dafür dar, daß zu den $5p+s$ Konstanten A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}$ Funktionen F der beschriebenen Art existieren.

Eine Funktion F der beschriebenen Art kann, da sie der Voraussetzung gemäß, als Funktion des Punktes x, y von T'' betrachtet, nicht nur für jeden im Innern von T'' gelegenen Punkt, sondern auch für jeden von den Punkten $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$ verschiedenen Punkt der Begrenzung von T'' einwertig und stetig ist, über jedes Stück der Begrenzung hinüber, das selbst nur einen Teil der negativen oder positiven Seite eines Schnittes a_ν, b_ν, c_ν oder l_σ bildet und für den Fall, daß ein Schnitt l_σ in Betracht kommt, sich nicht bis zu dem Punkte $\mathscr{P}_\sigma$ erstreckt, in der in Art. 3 des fünften Abschnittes angegebenen Weise den Gleichungen (S.) entsprechend stetig fortgesetzt werden. Daß eine solche Funktion F aber auch über jedes Stück der Begrenzung von T'' hinüber, welches einen der Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$ enthält, jedoch nicht in ihm endet und für den Fall, daß dieser Punkt einer der Punkte $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_s$, $\mathfrak{k}_1$ ist, sich nicht bis zu einem der Punkte $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$ erstreckt, in der früher angegebenen Weise den Gleichungen (S.) entsprechend stetig fortgesetzt werden kann, ist aus den in dem eben zitierten Artikel durchgeführten Betrachtungen unmittelbar zu entnehmen.

3.

Unter Beibehaltung der in den vorhergehenden Artikeln gemachten Festsetzungen stelle man sich jetzt die folgende

Aufgabe. *„Es ist zu zeigen, daß zu der Fläche T'' eine komplexe Funktion $W = W^{(1)} + W^{(2)}i$ des Punktes x, y gebildet werden kann, welche den folgenden Bedingungen genügt:*

I. Die Funktion W soll für jeden nicht mit einem der Punkte $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$ zusammenfallenden Punkt x, y der Fläche T'', einerlei also, ob derselbe im Innern oder auf der Begrenzung von T'' liegt, einwertig und stetig sein. Für den Punkt $\mathscr{P}_\sigma$ ${\scriptstyle (\sigma=1,2,\cdots,s)}$ dagegen soll sie in derselben Weise unstetig werden wie eine Funktion $f_\sigma(z_\sigma)$ von der in Art. 1 definierten Art, in dem Sinne, daß die Differenz:

$$W - \left(\mathfrak{L}_\sigma \ln\frac{1}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{z_\sigma^{m_\sigma}}\right), \quad \begin{array}{l} z_\sigma = z^{-\frac{1}{\nu_\sigma}} = r_\sigma^{-\frac{1}{\nu_\sigma}} e^{-\frac{t_\sigma}{\nu_\sigma}i}, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, q, \\ z_\sigma = (z-a_\sigma)^{\frac{1}{\nu_\sigma}} = r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} e^{\frac{t_\sigma}{\nu_\sigma}i}, \quad \sigma = q+1, q+2, \cdots, s, \end{array}$$

für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ mit unbegrenzt wachsendem r_σ, für $\sigma = q+1, q+2, \cdots, s$ mit unbegrenzt abnehmendem r_σ gleichmäßig für alle Werte von t_σ gegen eine von t_σ unabhängige Größe *konvergiert. Zudem sollen ihre, allgemein mit* W^+, W^- *zu bezeichnenden, Werte in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten* $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{P}^-$ *in der Weise verknüpft sein, daß*

$$(\mathrm{S.})\qquad \begin{array}{ll} \text{längs } a_\nu \{\ W^+ = A_\nu W^- + \mathfrak{A}_\nu, & \\ \text{längs } b_\nu \{\ W^+ = B_\nu W^- + \mathfrak{B}_\nu, & \nu = 1, 2, \cdots, p, \\ \text{längs } c_\nu \{\ W^+ = W^- + \mathfrak{C}_\nu, & \\ \text{längs } l_\sigma \{\ W^+ = W^- + 2\pi i \mathfrak{L}_\sigma, & \sigma = 1, 2, \cdots, s, \end{array}$$

ist, wobei A_ν, B_ν, $\nu = 1, 2, \cdots, p$, *vorgegebene Konstanten bedeuten, die sämtlich den Modul* 1 *besitzen, und die* $3p + s$ *Konstanten* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}$, *dem im vorhergehenden Artikel gewonnenen Resultate entsprechend, mit den* $2p$ *Konstanten* A, B *durch die* $p + 1$ *Relationen:*

$$(\mathrm{S}'.)\qquad \begin{cases} (1 - B_\nu)\mathfrak{A}_\nu - (1 - A_\nu)\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{C}_\nu, & \nu = 1, 2, \cdots, p, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{C}_\nu + 2\pi i \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0 & \end{cases}$$

verbunden sind. Die in den Funktionen f *vorkommenden* $\mathfrak{L}_\sigma$, $\mathfrak{L}_{\sigma 1}$, $\cdots$, $\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}$, $\sigma = 1, 2, \cdots, s$, *sollen, je nachdem die* $2p$ *Größen* A, B *nicht sämtlich oder sämtlich den Wert* 1 *besitzen, beliebig vorgegebene oder im Rahmen der, aus* (S′.) *für* $A_\nu = 1$, $B_\nu = 1$, $\nu = 1, 2, \cdots, p$, *folgenden, Bedingung* $\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0$ *vorgegebene Konstanten bedeuten. Ferner soll dann für jede Zahl* ν *aus der Reihe* $1, 2, \cdots, p$, *für welche* $A_\nu = 1$, $B_\nu = 1$ *und daher auf Grund der Gleichungen* (S′.) $\mathfrak{C}_\nu = 0$ *ist,* $\mathfrak{A}_\nu$ *eine beliebig vorgegebene,* $\mathfrak{B}_\nu$ *eine nicht vorgegebene Konstante bezeichnen; dagegen soll für jede Zahl* ν *aus der Reihe* $1, 2, \cdots, p$, *für welche* A_ν, B_ν *nicht beide den Wert* 1 *besitzen,* $\mathfrak{C}_\nu$ *eine mit den anderen* $\mathfrak{C}$ *durch die Bedingung* $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{C}_\nu + 2\pi i \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0$ *verknüpfte, im übrigen aber beliebig vorgegebene Konstante bedeuten, während* $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ *zwei mit dem vorgegebenen* $\mathfrak{C}_\nu$ *durch die Gleichung* $(1 - B_\nu)\mathfrak{A}_\nu - (1 - A_\nu)\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{C}_\nu$ *verbundene, aber nicht vorgegebene Konstanten bezeichnen sollen.*

II. Die Derivierten $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, *als Grenzen der entsprechenden Differenzenquotienten definiert, sollen nicht nur für jeden inneren Punkt* x, y *der Fläche* T'' *existieren und stetig sein, sondern auch noch für jeden von den Punkten* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ *verschiedenen Begrenzungspunkt, sobald man die Funktion* W *über ein diesen Begrenzungspunkt im Innern enthaltendes Stück der Begrenzung von* T'' *hinüber den Gleichungen* (S.) *entsprechend stetig fortsetzt, und es werden alsdann, ausschließlich auf Grund ihrer Definition, die allgemein mit* $\frac{\partial W^+}{\partial x}$, $\frac{\partial W^+}{\partial y}$, $\frac{\partial W^-}{\partial x}$, $\frac{\partial W^-}{\partial y}$ *zu bezeichnenden Werte der in Rede stehenden Derivierten in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten* $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{P}^-$ *in der Weise verknüpft sein, daß*

$$\text{längs } a_\nu \left\{ \frac{\partial W^+}{\partial x} = A_\nu \frac{\partial W^-}{\partial x}, \quad \frac{\partial W^+}{\partial y} = A_\nu \frac{\partial W^-}{\partial y}, \right.$$

$$\text{längs } b_\nu \left\{ \frac{\partial W^+}{\partial x} = B_\nu \frac{\partial W^-}{\partial x}, \quad \frac{\partial W^+}{\partial y} = B_\nu \frac{\partial W^-}{\partial y}, \right. \qquad {\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p,}$$

$$\text{längs } c_\nu \left\{ \frac{\partial W^+}{\partial x} = \quad \frac{\partial W^-}{\partial x}, \quad \frac{\partial W^+}{\partial y} = \quad \frac{\partial W^-}{\partial y}, \right.$$

$$\text{längs } l_\sigma \left\{ \frac{\partial W^+}{\partial x} = \quad \frac{\partial W^-}{\partial x}, \quad \frac{\partial W^+}{\partial y} = \quad \frac{\partial W^-}{\partial y}, \right. \qquad {\scriptstyle \sigma = 1, 2, \cdots, s.}$$

III. Die Derivierten $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$ *sollen für jeden Punkt* x, y *der Fläche* T'', *für den ihre Existenz gefordert wurde, also für jeden nicht mit einem der Punkte* $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ *zusammenfallenden Punkt von* T'' *die Gleichung* $\frac{\partial W}{\partial y} = i \frac{\partial W}{\partial x}$ *erfüllen.*"

Um die Existenz einer den genannten Bedingungen genügenden Funktion W nachzuweisen, soll nun zunächst in Art. 4 gezeigt werden, daß man unbegrenzt viele Funktionen W bilden kann, welche mit der verlangten Funktion W in den allgemeinen Eigenschaften übereinstimmen, und weiter dann in Art. 5, daß unter diesen Funktionen W sich wenigstens eine befindet, welche den genannten Bedingungen genügt.

4.

Das für die zu bildende Funktion W im Rahmen der Bedingungen mod $A_\nu = 1$, mod $B_\nu = 1$ beliebig vorgegebene Konstantenpaar A_ν, B_ν $_{(\nu=1,2,\cdots,p)}$ soll mit Rücksicht auf die Rolle, welche diese Konstanten in den Gleichungen (S.) spielen, das dem Index ν entsprechende Faktorenpaar genannt werden; je nachdem dann die Größen A_ν, B_ν nicht beide oder beide den Wert 1 besitzen, möge dieses Faktorenpaar ein eigentliches oder ein uneigentliches heißen. Man verstehe ferner für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ unter $\mathfrak{A}'_\nu, \mathfrak{B}'_\nu$ irgend ein der Bedingung $(1 - B_\nu)\mathfrak{A}'_\nu - (1 - A_\nu)\mathfrak{B}'_\nu = 0$ genügendes Konstantenpaar, unter $\mathfrak{L}'_\sigma, \mathfrak{L}'_{\sigma 1}, \cdots, \mathfrak{L}'_{\sigma m_\sigma}$, $_{\sigma=1,2,\cdots,s}$, beliebige Konstanten, wenn nicht alle p Faktorenpaare A, B uneigentliche sind, dagegen irgend welche der Bedingung $\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}'_\sigma = 0$ genügende Konstanten, wenn alle p Faktorenpaare A, B uneigentliche sind. Auf Grund des am Ende des fünften Abschnittes ausgesprochenen Satzes existiert dann zu der Fläche T'' eine komplexe Funktion $U = U^{(1)} + U^{(2)}i$ des Punktes x, y, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

I. Die Funktion U ist für jeden nicht mit einem der Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ zusammenfallenden Punkt x, y der Fläche T'', einerlei also, ob derselbe im Innern oder auf der Begrenzung von T'' liegt, einwertig und stetig. Für den Punkt $\mathcal{P}_\sigma$ $_{(\sigma=1,2,\cdots,s)}$ dagegen wird sie in der Weise unstetig, daß für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ die Differenz:

$$U - \left(\mathfrak{L}'_\sigma \ln r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} + \mathfrak{L}'_{\sigma 1} r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} \cos\frac{t_\sigma}{\nu_\sigma} + \mathfrak{L}'_{\sigma 2} r_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}} \cos\frac{2t_\sigma}{\nu_\sigma} + \cdots + \mathfrak{L}'_{\sigma m_\sigma} r_\sigma^{\frac{m_\sigma}{\nu_\sigma}} \cos\frac{m_\sigma t_\sigma}{\nu_\sigma}\right)$$

mit unbegrenzt wachsendem r_σ, für $\sigma = q+1, q+2, \cdots, s$ die Differenz:

$$U - \left(\mathfrak{L}'_\sigma \ln \frac{1}{r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}}} + \frac{\mathfrak{L}'_{\sigma 1}}{r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}}} \cos\frac{t_\sigma}{\nu_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}'_{\sigma 2}}{r_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}}} \cos\frac{2t_\sigma}{\nu_\sigma} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}'_{\sigma m_\sigma}}{r_\sigma^{\frac{m_\sigma}{\nu_\sigma}}} \cos\frac{m_\sigma t_\sigma}{\nu_\sigma}\right)$$

mit unbegrenzt abnehmendem r_σ gleichmäßig für alle Werte von t_σ gegen eine von t_σ unabhängige Größe konvergiert. Zudem sind ihre, allgemein mit U^+, U^- zu bezeichnenden, Werte in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathscr{P}^+$, $\mathscr{P}^-$ in der Weise verknüpft, daß

$$(\mathrm{S.})\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \{\, U^+ = A_\nu U^- + \mathfrak{A}'_\nu, \\ &\text{längs } b_\nu \{\, U^+ = B_\nu U^- + \mathfrak{B}'_\nu, && \scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p, \\ &\text{längs } c_\nu \{\, U^+ = \quad U^-, \\ &\text{längs } l_\sigma \{\, U^+ = \quad U^-, && \scriptstyle \sigma = 1, 2, \cdots, s, \end{aligned}$$

ist, wobei die Konstanten $\mathfrak{A}'_\nu$, $\mathfrak{B}'_\nu$, $\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p$, nach den für sie gemachten Voraussetzungen mit den $2p$ Konstanten A, B durch die p Relationen:

$$(\mathrm{S}'.)\qquad (1 - B_\nu)\mathfrak{A}'_\nu - (1 - A_\nu)\mathfrak{B}'_\nu = 0, \qquad \scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p,$$

verbunden sind.

II. Die Derivierten $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, als Grenzen der entsprechenden Differenzenquotienten definiert, existieren und sind stetig nicht nur für jeden inneren Punkt x, y der Fläche T''', sondern auch noch für jeden von den Punkten $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$ verschiedenen Begrenzungspunkt, sobald man die Funktion U über ein diesen Begrenzungspunkt im Innern enthaltendes Stück der Begrenzung von T''' hinüber den Gleichungen (S.) entsprechend stetig fortsetzt, und es sind alsdann, ausschließlich auf Grund ihrer Definition, die Werte der genannten Derivierten in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathscr{P}^+$, $\mathscr{P}^-$ in der Weise verknüpft, daß

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \Big\{ \frac{\partial U^+}{\partial x} = A_\nu \frac{\partial U^-}{\partial x}, \ \frac{\partial U^+}{\partial y} = A_\nu \frac{\partial U^-}{\partial y}, \ \frac{\partial^2 U^+}{\partial x^2} = A_\nu \frac{\partial^2 U^-}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 U^+}{\partial y^2} = A_\nu \frac{\partial^2 U^-}{\partial y^2}, \\ &\text{längs } b_\nu \Big\{ \frac{\partial U^+}{\partial x} = B_\nu \frac{\partial U^-}{\partial x}, \ \frac{\partial U^+}{\partial y} = B_\nu \frac{\partial U^-}{\partial y}, \ \frac{\partial^2 U^+}{\partial x^2} = B_\nu \frac{\partial^2 U^-}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 U^+}{\partial y^2} = B_\nu \frac{\partial^2 U^-}{\partial y^2}, && \scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p, \\ &\text{längs } c_\nu \Big\{ \frac{\partial U^+}{\partial x} = \quad \frac{\partial U^-}{\partial x}, \ \frac{\partial U^+}{\partial y} = \quad \frac{\partial U^-}{\partial y}, \ \frac{\partial^2 U^+}{\partial x^2} = \quad \frac{\partial^2 U^-}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 U^+}{\partial y^2} = \quad \frac{\partial^2 U^-}{\partial y^2}, \\ &\text{längs } l_\sigma \Big\{ \frac{\partial U^+}{\partial x} = \quad \frac{\partial U^-}{\partial x}, \ \frac{\partial U^+}{\partial y} = \quad \frac{\partial U^-}{\partial y}, \ \frac{\partial^2 U^+}{\partial x^2} = \quad \frac{\partial^2 U^-}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 U^+}{\partial y^2} = \quad \frac{\partial^2 U^-}{\partial y^2}, && \scriptstyle \sigma = 1, 2, \cdots, s. \end{aligned}$$

III. Die Derivierten $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ erfüllen für jeden Punkt x, y der Fläche T''', für den ihre Existenz soeben festgestellt wurde, also für jeden nicht mit einem der Punkte $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$ zusammenfallenden Punkt die Gleichung $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$.

Daß durch die genannten Eigenschaften die Funktion U vollständig oder nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, je nachdem die p Faktorenpaare A, B nicht sämtlich oder sämtlich uneigentliche sind, ist ebenfalls schon in Art. 12 des fünften Abschnittes gezeigt worden.

Infolge der genannten Eigenschaften besitzt das über eine in der einfach zusammenhängenden Fläche T''' verlaufende, aber durch keinen der Punkte $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$ gehende, geschlossene Kurve C erstreckte Integral $\int\limits_C \left(-\frac{\partial U}{\partial y}dx + \frac{\partial U}{\partial x}dy\right)$ stets den Wert Null. Man erhält dementsprechend, unter x_0, y_0 einen im Innern von T''' fest angenommenen Punkt, unter x, y einen beliebigen von den Punkten $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$ verschiedenen Punkt der Fläche T''' verstehend, für das vom Punkte x_0, y_0 bis zum Punkte x, y über eine in T''' verlaufende, aber durch keinen der Punkte $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$ gehende Kurve erstreckte Integral $\int\limits_{x_0, y_0}^{x, y} \left(-\frac{\partial U}{\partial y}dx + \frac{\partial U}{\partial x}dy\right)$ stets denselben Wert, welche Kurve der beschriebenen Art man auch als Integrationsweg wählen mag, und man erkennt im Hinblick hierauf auch, daß dieses Integral für jeden im Innern von T''' gelegenen Punkt zur Derivierten nach x die Größe $-\frac{\partial U}{\partial y}$, zur Derivierten nach y die Größe $\frac{\partial U}{\partial x}$ hat. Es wird daher durch die Gleichung:

$$V = \int\limits_{x_0, y_0}^{x, y} \left(-\frac{\partial U}{\partial y}dx + \frac{\partial U}{\partial x}dy\right),$$

bei Festhaltung der über den Integrationsweg gemachten Voraussetzungen, zur Fläche T''' eine komplexe Funktion $V = V^{(1)} + V^{(2)}i$ des Punktes x, y geliefert, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

I. Die Funktion V ist für jeden nicht mit einem der Punkte $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$ zusammenfallenden Punkt x, y der Fläche T''', einerlei also, ob derselbe im Innern oder auf der Begrenzung von T''' liegt, einwertig und stetig. Für den Punkt $\mathscr{P}_\sigma$ $(\sigma = 1, 2, \cdots, s)$ dagegen wird sie, wie aus den in Art. 7 und in Art. 5 des dritten Abschnittes angestellten Untersuchungen erhellt, in der Weise unstetig, daß für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ die Differenz:

$$V - \left(\mathfrak{L}'_\sigma \frac{t_\sigma}{\nu_\sigma} + \mathfrak{L}'_{\sigma 1} r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} \sin\frac{t_\sigma}{\nu_\sigma} + \mathfrak{L}'_{\sigma 2} r_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}} \sin\frac{2 t_\sigma}{\nu_\sigma} + \cdots + \mathfrak{L}'_{\sigma m_\sigma} r_\sigma^{\frac{m_\sigma}{\nu_\sigma}} \sin\frac{m_\sigma t_\sigma}{\nu_\sigma}\right)$$

mit unbegrenzt wachsendem r_σ, für $\sigma = q+1, q+2, \cdots, s$ die Differenz:

$$V - \left(- \mathfrak{L}'_\sigma \frac{t_\sigma}{v_\sigma} - \frac{\mathfrak{L}'_{\sigma 1}}{r_\sigma^{\frac{1}{v_\sigma}}} \sin \frac{t_\sigma}{v_\sigma} - \frac{\mathfrak{L}'_{\sigma 2}}{r_\sigma^{\frac{2}{v_\sigma}}} \sin \frac{2 t_\sigma}{v_\sigma} - \cdots - \frac{\mathfrak{L}'_{\sigma m_\sigma}}{r_\sigma^{\frac{m_\sigma}{v_\sigma}}} \sin \frac{m_\sigma t_\sigma}{v_\sigma} \right)$$

mit unbegrenzt abnehmendem r_σ gleichmäßig für alle Werte von t_σ gegen eine von t_σ unabhängige Größe konvergiert. Dabei ist für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ unter $\frac{t_\sigma}{v_\sigma}$, für $\sigma = q+1$, $q+2, \cdots, s$ unter $-\frac{t_\sigma}{v_\sigma}$ der Faktor von i im lateralen Teile der in Art. 1 für den der Fläche K'_σ oder der Fläche K_σ angehörigen Punkt z mit den Polarkoordinaten r_σ, t_σ durch die Gleichung $\ln \frac{1}{z_\sigma} = \ln \frac{1}{z'_\sigma} - \int\limits_{z'}^{z} \frac{dz_\sigma}{z_\sigma}$ definierten Größe $\ln \frac{1}{z_\sigma}$ zu verstehen. Die, allgemein mit V^+, V^- zu bezeichnenden, Werte der Funktion V in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ sind in der Weise verknüpft, daß

$$\text{(S.)} \qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \{ V^+ = A_\nu V^- + \mathfrak{A}''_\nu, \\ &\text{längs } b_\nu \{ V^+ = B_\nu V^- + \mathfrak{B}''_\nu, \qquad {\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p,} \\ &\text{längs } c_\nu \{ V^+ = V^- + \mathfrak{C}''_\nu, \\ &\text{längs } l_\sigma \{ V^+ = V^- + 2\pi \mathfrak{L}'_\sigma, \qquad {\scriptstyle \sigma = 1, 2, \cdots, s,} \end{aligned}$$

ist, wobei $\mathfrak{A}''_\nu$, $\mathfrak{B}''_\nu$, $\mathfrak{C}''_\nu$, ${\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p,}$ Konstanten bedeuten, die mit den $2p$ Konstanten A, B und den s Konstanten $\mathfrak{L}'_\sigma$, ${\scriptstyle \sigma = 1, 2, \cdots, s,}$ durch die $p+1$, den in Art. 2 abgeleiteten Relationen (S'.) entsprechenden, Relationen:

$$\text{(S'.)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &(1 - B_\nu) \mathfrak{A}''_\nu - (1 - A_\nu) \mathfrak{B}''_\nu = \mathfrak{C}''_\nu, \qquad {\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p,} \\ &\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{C}''_\nu + 2\pi \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}'_\sigma = 0 \end{aligned} \right.$$

verbunden sind.

II. Die Derivierten $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, als Grenzen der entsprechenden Differenzenquotienten definiert, existieren und sind stetig nicht nur für jeden inneren Punkt x, y der Fläche T''', sondern auch noch für jeden von den Punkten $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ verschiedenen Begrenzungspunkt, sobald man die Funktion V über ein diesen Begrenzungspunkt im Innern enthaltendes Stück der Begrenzung von T''' hinüber den Gleichungen (S.) entsprechend stetig fortsetzt, und es sind alsdann, ausschließlich auf Grund ihrer Definition, die Werte der genannten Derivierten in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ in der Weise verknüpft, daß

$$\text{längs } a_\nu \left\{ \frac{\partial V^+}{\partial x} = A_\nu \frac{\partial V^-}{\partial x}, \quad \frac{\partial V^+}{\partial y} = A_\nu \frac{\partial V^-}{\partial y}, \right.$$

$$\text{längs } b_\nu \left\{ \frac{\partial V^+}{\partial x} = B_\nu \frac{\partial V^-}{\partial x}, \quad \frac{\partial V^+}{\partial y} = B_\nu \frac{\partial V^-}{\partial y}, \right. \qquad {\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p,}$$

$$\text{längs } c_\nu \left\{ \frac{\partial V^+}{\partial x} = \frac{\partial V^-}{\partial x}, \quad \frac{\partial V^+}{\partial y} = \frac{\partial V^-}{\partial y}, \right.$$

$$\text{längs } l_\sigma \left\{ \frac{\partial V^+}{\partial x} = \frac{\partial V^-}{\partial x}, \quad \frac{\partial V^+}{\partial y} = \frac{\partial V^-}{\partial y}, \right. \qquad {\scriptstyle \sigma = 1, 2, \cdots, s.}$$

III. Die Derivierten $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ sind für jeden Punkt x, y der Fläche T'', für den ihre Existenz soeben festgestellt wurde, also für jeden nicht mit einem der Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ zusammenfallenden Punkt, mit den Derivierten $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$ durch die Gleichungen $\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x}$ verknüpft.

Definiert man jetzt zur Fläche T'' eine Funktion W durch die Gleichung $W = U + Vi$, so stimmt diese Funktion W mit der in Art. 3 verlangten Funktion W in den allgemeinen Eigenschaften überein und besitzt zudem dieselben p Faktorenpaare A, B, unterscheidet sich aber von ihr dadurch, daß an Stelle der Konstanten $\mathfrak{L}_\sigma, \mathfrak{L}_{\sigma 1}, \cdots, \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}$ ${\scriptstyle (\sigma = 1, 2, \cdots, s)}$ die Konstanten $\mathfrak{L}'_\sigma, \mathfrak{L}'_{\sigma 1}, \cdots, \mathfrak{L}'_{\sigma m_\sigma}$, an Stelle der Konstanten $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{C}_\nu$ ${\scriptstyle (\nu = 1, 2, \cdots, p)}$ die Konstanten $\mathfrak{A}'_\nu + \mathfrak{A}''_\nu i$, $\mathfrak{B}'_\nu + \mathfrak{B}''_\nu i$, $\mathfrak{C}''_\nu i$ beziehungsweise stehen. Diese letzteren Konstanten sind mit den $2p$ Konstanten A_ν, B_ν, ${\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p}$, und den s Konstanten $\mathfrak{L}'_\sigma$, ${\scriptstyle \sigma = 1, 2, \cdots, s}$, verknüpft durch die $p + 1$ Relationen:

$$(\mathrm{S}') \qquad \begin{cases} (1 - B_\nu)(\mathfrak{A}'_\nu + \mathfrak{A}''_\nu i) - (1 - A_\nu)(\mathfrak{B}'_\nu + \mathfrak{B}''_\nu i) = \mathfrak{C}''_\nu i, & {\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p,} \\ \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{C}''_\nu i + 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}'_\sigma = 0. \end{cases}$$

Über die Konstanten $\mathfrak{A}'_\nu, \mathfrak{B}'_\nu$, ${\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p}$, kann, den gemachten Voraussetzungen entsprechend, im Rahmen der Bedingungen $(1 - B_\nu)\mathfrak{A}'_\nu - (1 - A_\nu)\mathfrak{B}'_\nu = 0$, ${\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p}$, verfügt werden; über die Konstanten $\mathfrak{L}'_\sigma, \mathfrak{L}'_{\sigma 1}, \cdots, \mathfrak{L}'_{\sigma m_\sigma}$, ${\scriptstyle \sigma = 1, 2, \cdots, s}$, dagegen kann, ebenfalls den gemachten Voraussetzungen entsprechend, beliebig oder nur im Rahmen der Bedingung $\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}'_\sigma = 0$ verfügt werden, je nachdem die p Faktorenpaare A, B nicht sämtlich oder sämtlich uneigentliche sind. Hat man aber über die genannten Konstanten im Rahmen der angegebenen Bedingungen in irgend einer Weise verfügt, so ist dadurch die Funktion U, je nachdem die p Faktorenpaare A, B nicht sämtlich oder sämtlich uneigentliche sind, vollständig oder nur bis auf eine additive Konstante bestimmt, und es ist daher die Funktion V mit den ihr zukommenden Konstanten $\mathfrak{A}''_\nu, \mathfrak{B}''_\nu, \mathfrak{C}''_\nu$, ${\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p}$, in jedem Falle vollständig bestimmt. Dementsprechend ist die Funktion $W = U + Vi$ im ersten Falle vollständig, im zweiten Falle nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Unter Beachtung des soeben Gesagten bilde man nun zwei spezielle, mit $W^{(0)}$, w zu bezeichnende, Funktionen W, indem man das eine Mal

$$\mathfrak{A}'_\nu = 0\,,\ \mathfrak{B}'_\nu = 0\ :\ \mathfrak{L}'_\sigma = \mathfrak{L}_\sigma,\ \mathfrak{L}'_{\sigma 1} = \mathfrak{L}_{\sigma 1},\ \cdots,\ \mathfrak{L}'_{\sigma m_\sigma} = \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}, \qquad \begin{matrix}\nu = 1, 2, \cdots, p,\\ \sigma = 1, 2, \cdots, s,\end{matrix}$$

setzt, eine diesen Festsetzungen entsprechende Funktion U mit $U^{(0)}$, die zugehörige Funktion Vi mit $V^{(0)}i$ und die bei dieser an Stelle der Konstanten $\mathfrak{A}''_\nu i$, $\mathfrak{B}''_\nu i$, $\mathfrak{C}''_\nu i$ $(\nu = 1, 2, \cdots, p)$ auftretenden Konstanten mit $\mathfrak{A}^{(0)}_\nu$, $\mathfrak{B}^{(0)}_\nu$, $\mathfrak{C}^{(0)}_\nu$ bezeichnet, sodaß dann $W^{(0)}$ durch die Gleichung $W^{(0)} = U^{(0)} + V^{(0)}i$ bestimmt ist; das andere Mal dagegen — unter α'_ν, β'_ν $(\nu=1,2,\cdots,p)$ irgend ein der Bedingung $(1-B_\nu)\alpha'_\nu - (1-A_\nu)\beta'_\nu = 0$ oder der Bedingung $\alpha'_\nu = 0$ genügendes Konstantenpaar verstehend, je nachdem A_ν, B_ν ein eigentliches oder ein uneigentliches Faktorenpaar ist —

$$\mathfrak{A}'_\nu = \alpha'_\nu,\ \mathfrak{B}'_\nu = \beta'_\nu;\ \ \mathfrak{L}'_\sigma = 0,\ \ \mathfrak{L}'_{\sigma 1} = 0,\ \ \cdots,\ \mathfrak{L}'_{\sigma m_\sigma} = 0, \qquad \begin{matrix}\nu = 1, 2, \cdots, p,\\ \sigma = 1, 2, \cdots, s,\end{matrix}$$

setzt, eine diesen Festsetzungen entsprechende Funktion U mit u, die zugehörige Funktion Vi mit vi und die bei dieser an Stelle der Konstanten $\mathfrak{A}''_\nu i$, $\mathfrak{B}''_\nu i$, $\mathfrak{C}''_\nu i$ $(\nu = 1, 2, \cdots, p)$ auftretenden Konstanten mit $\alpha''_\nu i$, $\beta''_\nu i$, $\gamma''_\nu i$ bezeichnet, sodaß dann w durch die Gleichung $w = u + vi$ für jeden Punkt x, y von T'' bestimmt ist, wenn man noch den Funktionen u, v für die Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ die ihnen dort zukommenden Grenzwerte als Werte zulegt. Die aus den beiden Funktionen $W^{(0)}$, w durch Addition entstehende Funktion $W^{(0)} + w$ stimmt dann mit der in Art. 3 verlangten Funktion W in den allgemeinen Eigenschaften überein und besitzt zudem nicht nur dieselben p Faktorenpaare A, B, sondern auch dieselben Konstanten $\mathfrak{L}$; an Stelle der Konstanten $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{C}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots, p)$ dagegen treten bei ihr die Konstanten $\mathfrak{A}^{(0)}_\nu + \alpha'_\nu + \alpha''_\nu i$, $\mathfrak{B}^{(0)}_\nu + \beta'_\nu + \beta''_\nu i$, $\mathfrak{C}^{(0)}_\nu + \gamma''_\nu i$ beziehungsweise auf, wobei, den gemachten Festsetzungen entsprechend, $\mathfrak{A}^{(0)}_\nu$, $\mathfrak{B}^{(0)}_\nu$, $\mathfrak{C}^{(0)}_\nu$, $\nu = 1, 2, \cdots, p$, bestimmte, mit den $2p$ Konstanten A_ν, B_ν, $\nu = 1, 2, \cdots, p$, und den s Konstanten $\mathfrak{L}_\sigma$, $\sigma = 1, 2, \cdots, s$, durch die Gleichungen:

$$\begin{cases}(1-B_\nu)\,\mathfrak{A}^{(0)}_\nu - (1-A_\nu)\,\mathfrak{B}^{(0)}_\nu = \mathfrak{C}^{(0)}_\nu, & \nu = 1, 2, \cdots, p,\\[1ex] \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{C}^{(0)}_\nu + 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0\end{cases}$$

verknüpfte Größen sind, α'_ν, β'_ν $(\nu = 1, 2, \cdots, p)$ dagegen irgend ein der Bedingung $(1-B_\nu)\alpha'_\nu - (1-A_\nu)\beta'_\nu = 0$ oder der Bedingung $\alpha'_\nu = 0$ genügendes Größenpaar repräsentiert, je nachdem A_ν, B_ν ein eigentliches oder ein uneigentliches Faktorenpaar ist, endlich die $3p$ mit den Konstanten A, B durch die Gleichungen:

$$\begin{cases}(1-B_\nu)\,\alpha''_\nu - (1-A_\nu)\,\beta''_\nu = \gamma''_\nu, & \nu = 1, 2, \cdots, p,\\[1ex] \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \gamma''_\nu = 0\end{cases}$$

verknüpften Größen α'', β'', γ'' von den $2p$ Größen α', β' in der Weise abhängen, daß ihre Werte vollständig bestimmt sind, sobald man die Werte der Größen α', β' festgelegt hat. Im folgenden Artikel soll nun gezeigt werden, daß man die $2p$ Größen α', β' im Rahmen der genannten Bedingungen so wählen kann, daß für jede Zahl ν aus der Reihe $1, 2, \cdots, p$, für welche A_ν, B_ν ein eigentliches Faktorenpaar ist, $\gamma''_\nu i$ in die Größe $\mathfrak{C}_\nu - \mathfrak{C}_\nu^{(0)}$, also $\mathfrak{C}_\nu^{(0)} + \gamma''_\nu i$ in die für die verlangte Funktion W vorgegebene Konstante $\mathfrak{C}_\nu$, und zugleich für jede Zahl ν aus der Reihe $1, 2, \cdots, p$, für welche A_ν, B_ν ein uneigentliches Faktorenpaar und daher nach obigem $\alpha'_\nu = 0$ ist, $\alpha''_\nu i$ in die Größe $\mathfrak{A}_\nu - \mathfrak{A}_\nu^{(0)}$, also $\mathfrak{A}_\nu^{(0)} + \alpha'_\nu + \alpha''_\nu i$ in die für die verlangte Funktion W vorgegebene Konstante $\mathfrak{A}_\nu$ übergeht. Die den so gewählten Konstanten α', β' entsprechende Funktion $W^{(0)} + w$ besitzt dann alle für die verlangte Funktion W vorgegebenen Konstanten, und es wird damit eine den sämtlichen in Art. 3 gestellten Bedingungen genügende Funktion W gewonnen sein.

5.

Die Funktionen u, v, aus denen sich die Funktion w der Gleichung $w = u + vi$ gemäß zusammensetzt, sind für jeden Punkt x, y der Fläche T'' einwertig und stetig; zudem sind ihre Werte in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ in der Weise verknüpft, daß

$$
(\mathrm{S.})\qquad
\begin{array}{ll}
\text{längs } a_\nu \left\{ u^+ = A_\nu u^- + \alpha'_\nu, \right. & v^+ = A_\nu v^- + \alpha''_\nu, \\
\text{längs } b_\nu \left\{ u^+ = B_\nu u^- + \beta'_\nu, \right. & v^+ = B_\nu v^- + \beta''_\nu, \qquad {\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p,} \\
\text{längs } c_\nu \left\{ u^+ = u^-, \right. & v^+ = v^- + \gamma''_\nu, \\
\text{längs } l_\varrho \left\{ u^+ = u^-, \right. & v^+ = v^-, \qquad {\scriptstyle \varrho = 1, 2, \cdots, s,}
\end{array}
$$

ist, wobei zwischen den auftretenden Konstanten für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ die Relationen:

$$
(\mathrm{S}'.)\qquad (1 - B_\nu)\alpha'_\nu - (1 - A_\nu)\beta'_\nu = 0, \qquad (1 - B_\nu)\alpha''_\nu - (1 - A_\nu)\beta''_\nu = \gamma''_\nu, \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \gamma''_\nu = 0
$$

bestehen und zudem $\alpha'_\nu = 0$ ist für jedes ν, dem ein uneigentliches Faktorenpaar A_ν, B_ν entspricht. Die Derivierten $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ existieren und sind stetig für jeden von den Punkten $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ verschiedenen Punkt der Fläche T''; zudem sind ihre Werte in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ in derselben Weise verknüpft wie die Werte der korrespondierenden Derivierten bei den im vorhergehenden Artikel definierten allgemeineren Funktionen U, V; endlich erfüllen die genannten Derivierten für jeden von den Punkten $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ verschiedenen Punkt der Fläche T'' die Gleichungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Man bilde jetzt, nachdem man zuvor den reellen Teil der Funktion u mit $u^{(1)}$, den lateralen Teil mit $u^{(2)}i$ bezeichnet und dementsprechend $u = u^{(1)} + u^{(2)}i$ gesetzt hat, mit den ersten Derivierten von $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ das Integral:

$$\iint \left\{ \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y}\right)^2 \right\} \partial x \, \partial y$$

und dehne es über die Fläche T'' aus. Um dasselbe auszuwerten, ziehe man im Innern eines jeden der s in Art. 1 durch die s Kreislinien k_σ mit den Radien R_σ, $\sigma = 1, 2, \cdots, s$, abgegrenzten, die sämtlichen Punkte $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$ enthaltenden Flächenstücke K', K eine zu k_σ konzentrische Kreislinie k'_σ mit dem Radius r_σ (s. Fig. 18) und beachte, daß für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ $r_\sigma > R_\sigma$, für $\sigma = q+1, q+2, \cdots, s$ $r_\sigma < R_\sigma$ ist, scheide alsdann die von den Kreislinien k'_σ begrenzten, die Punkte $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$ beziehungsweise enthaltenden Flächenstücke aus der Fläche T'' aus, bezeichne die übrig bleibende, ganz im Endlichen gelegene, einfach zusammenhängende Fläche mit T^*, das in dieselbe hineinfallende Stück des Schnittes l_σ mit l'_σ, ihre von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c, l' und den Kreislinien $k'_1, k'_2, \cdots, k'_s$ gebildete Begrenzung mit $\mathfrak{R}$, und dehne das aufgestellte Integral zunächst nur über die, einen Teil der Fläche T'' bildende, Fläche T^* aus. Der Wert dieses über T^* ausgedehnten Integrals möge mit H^* bezeichnet werden, sodaß also

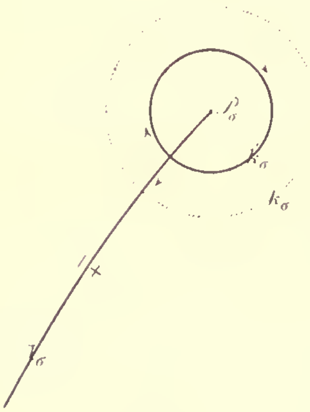


Fig. 18.

$$H^* = \iint\limits_{T^*} \left\{ \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y}\right)^2 \right\} \partial x \, \partial y$$

ist. Ersetzt man nun bei diesem Integrale, indem man berücksichtigt, daß $\frac{\partial (u^{(1)} + u^{(2)}i)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial (u^{(1)} + u^{(2)}i)}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ und dementsprechend

$$\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial (u^{(1)} - u^{(2)}i)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial (u^{(1)} - u^{(2)}i)}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

ist, den zwischen den geschweiften Klammern stehenden Ausdruck durch den die rechte Seite der letzten Gleichung bildenden Ausdruck und wendet alsdann unter Beachtung der Relationen $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ das Verfahren der teilweisen Integration an, bezeichnet auch die Änderungen, welche x, y erleiden, wenn man beim Durchlaufen der Begrenzung $\mathfrak{R}$ von T^* in der, durch die Pfeile markierten, positiven Richtung von einem Begrenzungspunkte x, y zu einem unendlich benachbarten übergeht, mit dx, dy beziehungsweise und setzt zur Abkürzung $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$, so erhält man zunächst:

$$\Pi^* = \iint\limits_{T^*}\left\{\frac{\partial(u^{(1)}-u^{(2)}i)}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial(u^{(1)}-u^{(2)}i)}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right\}\partial x\,\partial y = \overset{+}{\int\limits_{\mathfrak{R}}}(u^{(1)}-u^{(2)}i)\,dv,$$

wobei das an letzter Stelle stehende Integral in der, durch die Pfeile markierten, positiven Richtung über die ganze Begrenzung $\mathfrak{R}$ der Fläche T^* zu erstrecken ist. Beachtet man jetzt, daß bei der Integration durch die ganze Begrenzung $\mathfrak{R}$ längs eines jeden der Schnitte a, b, c, l' zweimal integriert wird, das eine Mal auf der positiven, das andere Mal auf der negativen Seite, auch daß die einem Schnittelemente $\mathcal{P}\mathcal{P}'$ entsprechenden Größen dx, dy auf der negativen Seite des Schnittes sich von den ihm entsprechenden Größen dx, dy auf der positiven Seite nur durch das Vorzeichen unterscheiden, und vereinigt bei jedem Schnitte die auf die positive und die auf die negative Seite desselben sich beziehenden Teile des in Rede stehenden Randintegrals, indem man durchweg die beiden einem Schnittelemente $\mathcal{P}\mathcal{P}'$ entsprechenden Integralelemente zusammenfaßt, in ein einziges, nur über die positive Seite des Schnittes zu erstreckendes Integral, so erhält man für Π^* die Gleichung:

$$\begin{aligned}\Pi^* = {} & \sum_{\nu=1}^{\nu=p}{}' \overset{+}{\int\limits_{[a_\nu^+,\,b_\nu^+,\,c_\nu^+]}}\left\{(u^{(1)}-u^{(2)}i)^+\,dv^+ - (u^{(1)}-u^{(2)}i)^-\,dv^-\right\} \\ & + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}{}' \overset{+}{\int\limits_{l_\sigma'^+}}\left\{(u^{(1)}-u^{(2)}i)^+\,dv^+ - (u^{(1)}-u^{(2)}i)^-\,dv^-\right\} + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}{}' \overset{+}{\int\limits_{k_\sigma'}}(u^{(1)}-u^{(2)}i)\,dv,\end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung $dv^+ = \frac{\partial v^+}{\partial x}dx + \frac{\partial v^+}{\partial y}dy$, $dv^- = \frac{\partial v^-}{\partial x}dx + \frac{\partial v^-}{\partial y}dy$ gesetzt ist.

Die auf der rechten Seite der letzten Gleichung vorkommenden, über die positiven Seiten der Schnitte a, b, c, l' beziehungsweise zu erstreckenden Integrale sollen jetzt ausgewertet werden. Zu dem Ende bezeichne man die zu irgend einer komplexen Zahl $g = g^{(1)} + g^{(2)}i$ konjugierte Zahl $g^{(1)} - g^{(2)}i$ durch $\bar{g}$, sodaß dann $g\bar{g} = (\operatorname{mod} g)^2$ und, wegen $\operatorname{mod} A_\nu = 1$, $\operatorname{mod} B_\nu = 1$, speziell $A_\nu \bar{A}_\nu = 1$, $B_\nu \bar{B}_\nu = 1$ ist, beachte, daß für $\nu = 1, 2, \cdots, p$; $\sigma = 1, 2, \cdots, s$

$$\text{längs } a_\nu \begin{cases}(u^{(1)}-u^{(2)}i)^+ = \bar{A}_\nu(u^{(1)}-u^{(2)}i)^- + \bar{\alpha}'_\nu, \quad dv^+ = A_\nu dv^-, \\ (u^{(1)}-u^{(2)}i)^+ dv^+ = (u^{(1)}-u^{(2)}i)^- dv^- + \bar{\alpha}'_\nu dv^+,\end{cases}$$

$$\text{längs } b_\nu \begin{cases}(u^{(1)}-u^{(2)}i)^+ = \bar{B}_\nu(u^{(1)}-u^{(2)}i)^- + \bar{\beta}'_\nu, \quad dv^+ = B_\nu dv^-, \\ (u^{(1)}-u^{(2)}i)^+ dv^+ = (u^{(1)}-u^{(2)}i)^- dv^- + \bar{\beta}'_\nu dv^+,\end{cases}$$

$$\text{längs } c_\nu \begin{cases}(u^{(1)}-u^{(2)}i)^+ = (u^{(1)}-u^{(2)}i)^-, \quad dv^+ = dv^-, \\ (u^{(1)}-u^{(2)}i)^+ dv^+ = (u^{(1)}-u^{(2)}i)^- dv^-,\end{cases}$$

$$\text{längs } l'_\sigma \begin{cases}(u^{(1)}-u^{(2)}i)^+ = (u^{(1)}-u^{(2)}i)^-, \quad dv^+ = dv^-, \\ (u^{(1)}-u^{(2)}i)^+ dv^+ = (u^{(1)}-u^{(2)}i)^- dv^-\end{cases}$$

ist, und reduziere mit Hilfe dieser Relationen die bei der letzten für H^* gewonnenen Gleichung zwischen den geschweiften Klammern stehenden Ausdrücke. Man erhält dann für H^* zunächst die Gleichung:

$$H^* = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \Big\{\alpha'_\nu \int_{a_\nu^+}^{+} dv^+ + \beta'_\nu \int_{b_\nu^+}^{+} dv^+\Big\} + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \int_{k'_\sigma}^{+} (u^{(1)} - u^{(2)} i)\, dv$$

und schließlich, indem man die mit Hilfe der Relationen (S.) sich ergebenden Gleichungen:

$$\int_{a_\nu^+}^{+} dv^+ = v_{\mathfrak{s}_\nu} - v_{\mathfrak{q}_\nu} = A_\nu B_\nu (1 - B_\nu)\, v_{\mathfrak{p}_\nu} + A_\nu \beta''_\nu,$$

$$\int_{b_\nu^+}^{+} dv^+ = v_{\mathfrak{r}_\nu} - v_{\mathfrak{t}_\nu} = - A_\nu B_\nu (1 - A_\nu)\, v_{\mathfrak{p}_\nu} - B_\nu \alpha''_\nu$$

benutzt und die aus der ersten unter (S'.) angeschriebenen Relation sich ergebende Beziehung $(1 - B_\nu)\alpha'_\nu - (1 - A_\nu)\beta'_\nu = 0$ beachtet, die Gleichung:

$$H^* = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \{A_\nu \alpha'_\nu \beta''_\nu - B_\nu \beta'_\nu \alpha''_\nu\} + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \int_{k'_\sigma}^{+} (u^{(1)} - u^{(2)} i)\, dv.$$

Es ist jetzt nur noch zu untersuchen, was aus H^* wird, wenn man die Radien $r_1, r_2, \cdots, r_q$ der Kreislinien $k'_1, k'_2, \cdots, k'_q$ unbegrenzt wachsen und zugleich die Radien $r_{q+1}, r_{q+2}, \cdots, r_s$ der Kreislinien $k'_{q+1}, k'_{q+2}, \cdots, k'_s$ unbegrenzt abnehmen läßt. Konvergiert alsdann H^* gegen eine bestimmte Größe, so ist der Wert dieser Größe zugleich der Wert des über die Fläche T'' ausgedehnten, zu Anfang gebildeten Integrals, während im anderen Falle von einem Werte dieses Integrals nicht gesprochen werden kann. Zur Durchführung der verlangten Untersuchung beachte man zunächst, daß die Funktion $u = u^{(1)} + u^{(2)} i$, als Funktion des in seiner Bewegung auf die Fläche K'_σ, ${\scriptstyle \sigma = 1, 2, \cdots, q}$, beschränkten Punktes x, y betrachtet, eine Funktion von der im Satze III definierten Art, dagegen als Funktion des in seiner Bewegung auf die Fläche K_σ, ${\scriptstyle \sigma = q+1, q+2, \cdots, s}$, beschränkten Punktes x, y betrachtet, eine Funktion von der im Satze I definierten Art ist, und daß die Funktion v mit der Funktion u durch die Gleichungen $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ verknüpft ist. Auf Grund der in Art. 6 und in Art. 4 des dritten Abschnittes durchgeführten Untersuchungen bestehen daher, wenn man noch, unter Benutzung der in Art. 1 dieses Abschnittes für die Flächen K', K eingeführten Koordinatensysteme, die Polarkoordinaten eines Punktes der Linie k_σ mit R_σ, t_σ, die Polarkoordinaten eines Punktes der Linie k'_σ mit r_σ, t_σ und den Wert der Funktion u für den Punkt R_σ, t_σ mit $f_\sigma(t_\sigma) = f_\sigma^{(1)}(t_\sigma) + f_\sigma^{(2)}(t_\sigma) i$ bezeichnet, für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ die Gleichungen:

$$u_{r_\sigma, t_\sigma} = -\frac{1}{2\nu_\sigma\pi}\int\limits_0^{-2\nu_\sigma\pi} f_\sigma(\varphi) \frac{r_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}} - R_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}}}{R_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}} - 2R_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} \cos\left(\frac{\varphi - t_\sigma}{\nu_\sigma}\right) + r_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}}} d\varphi, \quad v_{r_\sigma, t_\sigma} = v_{\vartheta_\sigma} - \frac{1}{2\nu_\sigma\pi}\int\limits_0^{-2\nu_\sigma\pi} f_\sigma(\varphi) \frac{2R_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} \sin\left(\frac{\varphi - t_\sigma}{\nu_\sigma}\right)}{R_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}} - 2R_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} \cos\left(\frac{\varphi - t_\sigma}{\nu_\sigma}\right) + r_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}}} d\varphi,$$

dagegen für $\sigma = q+1, q+2, \cdots, s$ die Gleichungen:

$$u_{r_\sigma, t_\sigma} = \frac{1}{2\nu_\sigma\pi}\int\limits_0^{2\nu_\sigma\pi} f_\sigma(\varphi) \frac{R_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}} - r_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}}}{R_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}} - 2R_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} \cos\left(\frac{t_\sigma - \varphi}{\nu_\sigma}\right) + r_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}}} d\varphi, \quad v_{r_\sigma, t_\sigma} = v_{\vartheta_\sigma} + \frac{1}{2\nu_\sigma\pi}\int\limits_0^{2\nu_\sigma\pi} f_\sigma(\varphi) \frac{2R_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} \sin\left(\frac{t_\sigma - \varphi}{\nu_\sigma}\right)}{R_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}} - 2R_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} \cos\left(\frac{t_\sigma - \varphi}{\nu_\sigma}\right) + r_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}}} d\varphi.$$

Beachtet man nun weiter, daß durch Einführung der Polarkoordinaten r_σ, t_σ in das auf der rechten Seite der letzten für Π^* gewonnenen Gleichung vorkommende, über k'_σ zu erstreckende Integral die Gleichung:

$$\int\limits_{k'_\sigma}^{+} (u^{(1)} - u^{(2)} i)\, dv = -\int\limits_0^{\mp 2\nu_\sigma\pi} (u^{(1)}_{r_\sigma, t_\sigma} - u^{(2)}_{r_\sigma, t_\sigma} i) \frac{d v_{r_\sigma, t_\sigma}}{d t_\sigma} d t_\sigma,$$

bei der als obere Grenze des rechts stehenden Integrals für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ die Zahl $-2\nu_\sigma\pi$, für $\sigma = q+1, q+2, \cdots, s$ die Zahl $+2\nu_\sigma\pi$ zu gelten hat, entsteht, und daß die Größe:

$$\frac{d v_{r_\sigma, t_\sigma}}{d t_\sigma} = \frac{1}{2\nu_\sigma^2\pi}\int\limits_0^{+2\nu_\sigma\pi} f_\sigma(\varphi) \frac{2R_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} \left[\left(R_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}} + r_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}}\right) \cos\left(\frac{\varphi - t_\sigma}{\nu_\sigma}\right) - 2R_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}}\right]}{\left[R_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}} - 2R_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} r_\sigma^{\frac{1}{\nu_\sigma}} \cos\left(\frac{\varphi - t_\sigma}{\nu_\sigma}\right) + r_\sigma^{\frac{2}{\nu_\sigma}}\right]^2} d\varphi$$

für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ mit unbegrenzt wachsendem r_σ, für $\sigma = q+1, q+2, \cdots, s$ mit unbegrenzt abnehmendem r_σ gleichmäßig für alle in Betracht kommenden Werte von t_σ gegen Null, die Größe $u^{(1)}_{r_\sigma, t_\sigma} - u^{(2)}_{r_\sigma, t_\sigma} i$ gegen $u^{(1)}_{\vartheta_\sigma} - u^{(2)}_{\vartheta_\sigma} i$ konvergiert, so erkennt man, daß die auf der rechten Seite der letzten für Π^* gewonnenen Gleichung stehende Summe der s Integrale gegen Null konvergiert, wenn man die Radien $r_1, r_2, \cdots, r_q$ der Kreislinien $k'_1, k'_2, \cdots, k'_q$ unbegrenzt wachsen und zugleich die Radien $r_{q+1}, r_{q+2}, \cdots, r_s$ der Kreislinien $k'_{q+1}, k'_{q+2}, \cdots, k'_s$ unbegrenzt abnehmen läßt. Unter diesen Festsetzungen konvergiert also auch Π^* selbst gegen eine bestimmte Größe, und es ist der Wert dieser Größe nach früher Bemerktem zugleich der Wert des über die Fläche T'' ausgedehnten, zu Anfang gebildeten Integrals. Es besteht daher die Gleichung:

$$\text{(J.)} \qquad \iint\limits_{T''} \left\{ \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \{ A_\nu \alpha'_\nu \beta''_\nu - B_\nu \beta'_\nu \alpha''_\nu \}.$$

Mit Hilfe der gewonnenen Gleichung (J.) läßt sich nun der am Schlusse des vorhergehenden Artikels verlangte Nachweis erbringen. Zu dem Ende hat man den Fall, wo die p Faktorenpaare A, B nicht sämtlich uneigentliche sind, von dem Falle, wo dieselben sämtlich uneigentliche sind, zu trennen.

Erster Fall.

Die p Faktorenpaare A, B sind nicht sämtlich uneigentliche. Um die Vorstellung zu fixieren, werde speziell angenommen, daß für $\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$ das Faktorenpaar A_ν, B_ν ein uneigentliches d. h. $A_\nu = 1$, $B_\nu = 1$, für $\nu = \mathfrak{p}+1, \mathfrak{p}+2, \cdots, p$ das Faktorenpaar A_ν, B_ν ein eigentliches sei. Dabei ist unter $\mathfrak{p}$ eine Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \cdots, p-1$ zu verstehen, und der Grenzfall $\mathfrak{p} = 0$ ist dahin zu interpretieren, daß die p Faktorenpaare A, B sämtlich eigentliche sind. In dem vorliegenden ersten Falle sind, nach den zu Anfang dieses Artikels gemachten Ausführungen, die Werte der Funktionen u, v in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-$ in der Weise verknüpft, daß

$$
(\mathrm{S.})\qquad
\begin{array}{lll}
\left.\begin{array}{l}
\text{längs } a_\nu \{ u^+ = u^-, \quad v^+ = v^- + \alpha''_\nu, \\
\text{längs } b_\nu \{ u^+ = u^- + \beta'_\nu, \quad v^+ = v^- + \beta''_\nu, \\
\text{längs } c_\nu \{ u^+ = u^-, \quad v^+ = v^-,
\end{array}\right\} & \scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}, \\
\left.\begin{array}{l}
\text{längs } a_\nu \{ u^+ = A_\nu u^- + \alpha'_\nu, \quad v^+ = A_\nu v^- + \alpha''_\nu, \\
\text{längs } b_\nu \{ u^+ = B_\nu u^- + \beta'_\nu, \quad v^+ = B_\nu v^- + \beta''_\nu, \\
\text{längs } c_\nu \{ u^+ = u^-, \quad v^+ = v^- + \gamma''_\nu,
\end{array}\right\} & \scriptstyle \nu = \mathfrak{p}+1, \mathfrak{p}+2, \cdots, p, \\
\left.\begin{array}{l}
\text{längs } l_\sigma \{ u^+ = u^-, \quad v^+ = v^-,
\end{array}\right\} & \scriptstyle \sigma = 1, 2, \cdots, s
\end{array}
$$

ist, wobei für $\nu = \mathfrak{p}+1, \mathfrak{p}+2, \cdots, p$ die Relationen:

$$
(\mathrm{S}'.)\qquad (1-B_\nu)\,\alpha'_\nu - (1-A_\nu)\,\beta'_\nu = 0, \quad (1-B_\nu)\,\alpha''_\nu - (1-A_\nu)\,\beta''_\nu = \gamma''_\nu, \quad \sum_{\nu=\mathfrak{p}+1}^{\nu=p} \gamma''_\nu = 0
$$

bestehen, die β'_ν, ${\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}}$, irgend welche Konstanten, die α'_ν, β'_ν, ${\scriptstyle \nu = \mathfrak{p}+1, \mathfrak{p}+2, \cdots, p}$, irgend welche den Bedingungen $(1-B_\nu)\,\alpha'_\nu - (1-A_\nu)\,\beta'_\nu = 0$, ${\scriptstyle \nu = \mathfrak{p}+1, \mathfrak{p}+2, \cdots, p}$, beziehungsweise genügende Konstantenpaare bedeuten. Die Größen α', β' können daher auch, wie für das Folgende geschehen soll, durch die Gleichungen:

$$
(\mathrm{K.})\qquad \underset{\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}}{\beta'_\nu = \varkappa_\nu,} \qquad \underset{\nu = \mathfrak{p}+1, \mathfrak{p}+2, \cdots, p}{\alpha'_\nu = (1-A_\nu)\,\varkappa_\nu, \quad \beta'_\nu = (1-B_\nu)\,\varkappa_\nu,}
$$

definiert werden, wenn man dabei unter $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_p$ irgend welche Konstanten versteht. Sind die Werte der Größen $\varkappa$ und damit auch die Werte der Größen α', β' festgelegt, so ist dadurch, nach dem im vorhergehenden Artikel Bemerkten, die Funktion u und zugleich auch die Funktion v mit den ihr zukommenden Konstanten α'', β'', γ'' vollständig bestimmt. Für die weitere Untersuchung soll $\varkappa_p = 0$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, $\alpha'_p = 0$, $\beta'_p = 0$ gesetzt werden. Führt man dann in die Gleichung (J.) mit Hilfe der aus den Gleichungen (K.) sich unmittelbar ergebenden Gleichungen:

$$\underset{\nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p}}{\beta'_\nu = \bar{\varkappa}_\nu,} \qquad \underset{\nu=\mathfrak{p}+1,\mathfrak{p}+2,\cdots,p}{\alpha'_\nu = (1-A_\nu)\bar{\varkappa}_\nu,\quad \beta'_\nu = (1-B_\nu)\bar{\varkappa}_\nu,}$$

die zu den Größen $\varkappa$ konjugierten Größen $\bar{\varkappa}$ ein, so erhält man, wenn man noch beachtet, daß für die Konstanten der hier vorliegenden Funktionen u, v die Relationen $\alpha'_\nu = 0$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p}}$; $(1-B_\nu)\alpha''_\nu - (1-A_\nu)\beta''_\nu = \gamma''_\nu$, ${\scriptstyle \nu=\mathfrak{p}+1,\mathfrak{p}+2,\cdots,p}$, bestehen, und daß $\varkappa_p = 0$ gesetzt wurde, die Gleichung:

$$(\mathrm{J}_1.)\qquad \iint\limits_{T''} \left\{\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y}\right)^2\right\}\partial x\,\partial y = -\sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}}\alpha''_\nu\bar{\varkappa}_\nu + \sum_{\nu=\mathfrak{p}+1}^{\nu=p-1}\gamma''_\nu\bar{\varkappa}_\nu.$$

Man bestimme nun $p-1$, mit $u_1, u_2, \cdots, u_{p-1}$ zu bezeichnende, spezielle Funktionen u, und zwar $u_\varrho = u_\varrho^{(1)} + u_\varrho^{(2)} i$, ${\scriptstyle \varrho=1,2,\cdots,p-1}$, dadurch, daß man, unter $\delta_{\varrho\nu}$ eine Größe, die für $\nu = \varrho$ den Wert 1, für $\nu \neq \varrho$ den Wert 0 besitzt, verstehend, für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ $\varkappa_\nu = \delta_{\varrho\nu}$ setzt, und bezeichne die zu der Funktion u_ϱ gehörige Funktion v mit v_ϱ, die dieser letzteren zukommenden Konstanten mit $\alpha''_{\varrho\nu}, \beta''_{\varrho\nu}, \gamma''_{\varrho\nu}$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$. Die Werte der Funktionen u_ϱ, v_ϱ für die Begrenzung von T'' sind dann in der Weise verknüpft, daß

$$\left.\begin{array}{lll} \text{längs } a_\nu\{u_\varrho^+ = & u_\varrho^-, & v_\varrho^+ = v_\varrho^- + \alpha''_{\varrho\nu},\\ \text{längs } b_\nu\{u_\varrho^+ = & u_\varrho^- + \delta_{\varrho\nu}, & v_\varrho^+ = v_\varrho^- + \beta''_{\varrho\nu},\\ \text{längs } c_\nu\{u_\varrho^+ = & u_\varrho^-, & v_\varrho^+ = v_\varrho^-, \end{array}\right\} \quad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p},}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{längs } a_\nu\{u_\varrho^+ = & A_\nu u_\varrho^- + (1-A_\nu)\delta_{\varrho\nu}, & v_\varrho^+ = A_\nu v_\varrho^- + \alpha''_{\varrho\nu},\\ \text{längs } b_\nu\{u_\varrho^+ = & B_\nu u_\varrho^- + (1-B_\nu)\delta_{\varrho\nu}, & v_\varrho^+ = B_\nu v_\varrho^- + \beta''_{\varrho\nu},\\ \text{längs } c_\nu\{u_\varrho^+ = & u_\varrho^-, & v_\varrho^+ = v_\varrho^- + \gamma''_{\varrho\nu}, \end{array}\right\} \quad {\scriptstyle \nu=\mathfrak{p}+1,\mathfrak{p}+2,\cdots,p,}$$

$$\text{längs } l_\sigma\{u_\varrho^+ = u_\varrho^-, \qquad v_\varrho^+ = v_\varrho^-, \quad\} \quad {\scriptstyle \sigma=1,2,\cdots,s,}$$

ist, wobei für $\nu = \mathfrak{p}+1, \mathfrak{p}+2, \cdots, p$, die Relationen:

$$(1-B_\nu)\alpha''_{\varrho\nu} - (1-A_\nu)\beta''_{\varrho\nu} = \gamma''_{\varrho\nu}, \qquad \sum_{\nu=\mathfrak{p}+1}^{\nu=p}\gamma''_{\varrho\nu} = 0$$

bestehen. Bildet man alsdann aus den Funktionen $u_1, u_2, \cdots, u_{p-1}$ mit Hilfe der bei der allgemeinen Funktion u vorkommenden noch unbestimmten Größen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_{p-1}$ die Funktion $\varkappa_1 u_1 + \varkappa_2 u_2 + \cdots + \varkappa_{p-1}u_{p-1}$, so stimmt diese letztere mit der aufgestellten Funktion u nicht nur in den allgemeinen Eigenschaften überein, sondern besitzt auch die bei der Funktion u auftretenden Konstanten A, B, α', β' und ist daher nach früher Bewiesenem mit ihr identisch. Es besteht also die Gleichung:

$$u = \varkappa_1 u_1 + \varkappa_2 u_2 + \cdots + \varkappa_{p-1} u_{p-1}$$

und zugleich, infolge der Definition der zu einer Funktion u gehörigen Funktion v, auch die Gleichung:

$$v = \varkappa_1 v_1 + \varkappa_2 v_2 + \cdots + \varkappa_{p-1} v_{p-1}.$$

Auf Grund dieser letzten Gleichung ergeben sich dann zwischen den Konstanten $\alpha''_\nu, \beta''_\nu, \gamma''_\nu$ der Funktion v und den entsprechenden Konstanten der Funktionen $v_1, v_2, \cdots, v_{p-1}$ die Relationen:

$$\alpha''_\nu = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p-1} \varkappa_\varrho \alpha''_{\varrho\nu}, \qquad \beta''_\nu = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p-1} \varkappa_\varrho \beta''_{\varrho\nu}, \qquad \gamma''_\nu = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p-1} \varkappa_\varrho \gamma''_{\varrho\nu},$$
$$\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p} \qquad\qquad \nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p} \qquad\qquad \nu = \mathfrak{p}+1, \mathfrak{p}+2, \cdots, p$$

welche die Größen $\alpha''_\nu, \beta''_\nu, \gamma''_\nu$ als lineare Funktionen der Größen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_{p-1}$ darstellen, da die Größen $\alpha''_{\varrho\nu}, \beta''_{\varrho\nu}, \gamma''_{\varrho\nu}$ von den $\varkappa$ unabhängig sind.

Man betrachte jetzt das System der $p-1$ unter den vorstehenden Relationen enthaltenen, in bezug auf die noch unbestimmten Größen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_{p-1}$ linearen Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
\alpha''_{11}\varkappa_1 + \alpha''_{21}\varkappa_2 + \cdots + \alpha''_{p-1,1}\varkappa_{p-1} = \alpha''_1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha''_{1\mathfrak{p}}\varkappa_1 + \alpha''_{2\mathfrak{p}}\varkappa_2 + \cdots + \alpha''_{p-1,\mathfrak{p}}\varkappa_{p-1} = \alpha''_{\mathfrak{p}}, \\
\gamma''_{1,\mathfrak{p}+1}\varkappa_1 + \gamma''_{2,\mathfrak{p}+1}\varkappa_2 + \cdots + \gamma''_{p-1,\mathfrak{p}+1}\varkappa_{p-1} = \gamma''_{\mathfrak{p}+1}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\gamma''_{1,p-1}\varkappa_1 + \gamma''_{2,p-1}\varkappa_2 + \cdots + \gamma''_{p-1,p-1}\varkappa_{p-1} = \gamma''_{p-1}.
\end{array}$$

Die Determinante $\Delta = \sum \pm \alpha''_{11} \cdots \alpha''_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}} \gamma''_{\mathfrak{p}+1,\mathfrak{p}+1} \cdots \gamma''_{p-1,p-1}$ dieses Gleichungensystems hat einen von Null verschiedenen Wert. Zum Beweise dieser Behauptung nehme man an, daß Δ den Wert Null besitze. Unter dieser Annahme lassen sich, nach bekanntem Satze der Determinantentheorie, die $p-1$ Größen $\varkappa$, auch wenn man das Wertesystem $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 0, \cdots, \varkappa_{p-1} = 0$ ausschließt, so bestimmen, daß $\alpha''_1 = 0, \cdots, \alpha''_{\mathfrak{p}} = 0$, $\gamma''_{\mathfrak{p}+1} = 0, \cdots, \gamma''_{p-1} = 0$ wird. Die den so bestimmten Größen $\varkappa$ entsprechende Funktion u hat dann, wie ein Blick auf die oben aufgestellte Gleichung (J_1.), deren rechte Seite für $\alpha''_1 = 0, \cdots, \alpha''_{\mathfrak{p}} = 0$, $\gamma''_{\mathfrak{p}+1} = 0, \cdots, \gamma''_{p-1} = 0$ verschwindet, zeigt, in der ganzen Fläche T'' denselben Wert, und zwar den Wert Null, da längs $a_p \{u^+ = A_p u^-$, längs $b_p \{u^+ = B_p u^-$ ist und zudem die Größen A_p, B_p nicht beide den Wert 1 besitzen. Dieses aber ist, wie die Gleichungen (S.) zeigen, nur möglich, wenn die der Funktion u zukommenden Konstanten α', β' oder, was auf dasselbe hinauskommt, die eben bestimmten, mit den Konstanten α', β' durch die Gleichungen (K.) verknüpften Größen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_{p-1}$ sämtlich den Wert Null besitzen, während doch soeben bei der Bestimmung der Größen $\varkappa$ das Wertesystem $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 0$, $\cdots$, $\varkappa_{p-1} = 0$ ausgeschlossen wurde. Die Determinante Δ des aufgestellten Gleichungensystems kann also, da die Annahme $\Delta = 0$ auf einen Widerspruch geführt hat, nur einen von Null verschiedenen Wert besitzen. Hat aber, wie jetzt feststeht, die Determinante Δ einen von Null verschiedenen Wert, so lassen sich die Größen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_{p-1}$ oder, was dasselbe, die mit ihnen durch die Gleichungen (K.) verknüpften Größen α', β' stets und nur auf eine Weise so bestimmen, daß die Größen $\alpha''_1, \cdots, \alpha''_{\mathfrak{p}}, \gamma''_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, \gamma''_{p-1}$ vorgegebene Werte annehmen, also auch so, daß für $\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$ $\alpha''_\nu i = \mathfrak{A}_\nu - \mathfrak{A}_\nu^{(0)}$, für $\nu = \mathfrak{p}+1$, $\mathfrak{p}+2, \cdots, p-1$ $\gamma''_\nu i = \mathfrak{C}_\nu - \mathfrak{C}_\nu^{(0)}$ und zugleich dann, wegen $\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \gamma''_\nu = 0$ und $\sum_{\nu=1}^{\nu=p} (\mathfrak{C}_\nu - \mathfrak{C}_\nu^{(0)}) = 0$, $\gamma''_p i = \mathfrak{C}_p - \mathfrak{C}_p^{(0)}$ wird. Damit ist aber für den vorliegenden ersten Fall, wo die p Faktorenpaare A, B nicht sämtlich uneigentliche sind, der am Schlusse des vorhergehenden Artikels verlangte Nachweis erbracht, wenn man noch beachtet, daß die Untersuchung eines jeden der noch übrigen hierher gehörigen speziellen Fälle sich von der eben durchgeführten Untersuchung nur durch die Bezeichnung unterscheiden würde.

Zweiter Fall.

Die p Faktorenpaare A, B sind sämtlich uneigentliche. In diesem Falle sind, nach den zu Anfang dieses Artikels gemachten Ausführungen, die Werte der Funktionen u, v in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{P}^-$ in der Weise verknüpft, daß

$$\text{(S.)} \qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \{ u^+ = u^-, && v^+ = v^- + \alpha''_\nu, \\ &\text{längs } b_\nu \{ u^+ = u^- + \beta'_\nu, && v^+ = v^- + \beta''_\nu, && {\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p,} \\ &\text{längs } c_\nu \{ u^+ = u^-, && v^+ = v^-, \\ &\text{längs } l_\sigma \{ u^+ = u^-, && v^+ = v^-, && {\scriptstyle \sigma = 1, 2, \cdots, s,} \end{aligned}$$

ist, wobei die β'_ν, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, irgend welche Konstanten bedeuten. Sind die Werte der Konstanten β' festgelegt, so ist dadurch, nach dem im vorhergehenden Artikel Bemerkten, die Funktion u bis auf eine additive Konstante, die Funktion v dagegen mit den ihr zukommenden Konstanten α'', β'' vollständig bestimmt. Zur vollständigen Bestimmung der Funktion u möge noch festgesetzt werden, daß sie für einen beliebig gewählten Punkt $\mathfrak{P}$ der Fläche T'' den Wert Null besitze. Da bei der hier vorliegenden Funktion u die Größen α'_ν sämtlich den Wert Null besitzen, so tritt jetzt an Stelle der Gleichung (J.) die Gleichung:

$$\text{(J}_2\text{.)} \qquad \iint\limits_{T''} \left\{ \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y}\right)^2 \right\} \partial x \, \partial y = -\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \beta'_\nu \alpha''_\nu.$$

Man bestimme nun p, mit $u_1, u_2, \cdots, u_p$ zu bezeichnende, spezielle Funktionen u, und zwar $u_\varrho = u_\varrho^{(1)} + u_\varrho^{(2)} i$, ${\scriptstyle \varrho=1,2,\cdots,p}$, dadurch, daß man, unter $\delta_{\varrho\nu}$ eine Größe, die für

$\nu = \varrho$ den Wert 1, für $\nu \neq \varrho$ den Wert 0 besitzt, verstehend, für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ $\beta'_\nu = \delta_{\varrho\nu}$ setzt und außerdem noch der Funktion u_ϱ für den vorher gewählten Punkt $\mathfrak{P}$ den Wert Null zulegt, bezeichne auch die zu der Funktion u_ϱ gehörige Funktion v mit v_ϱ, die dieser letzteren zukommenden Konstanten mit $\alpha''_{\varrho\nu}$, $\beta''_{\varrho\nu}$, $\nu = 1, 2, \cdots, p$. Die Werte der Funktionen u_ϱ, v_ϱ für die Begrenzung von T''' sind dann in der Weise verknüpft, daß

$$\begin{array}{lll} \text{längs } a_\nu \{ u_\varrho^+ = u_\varrho^-, & v_\varrho^+ = v_\varrho^- + \alpha''_{\varrho\nu}, & \\ \text{längs } b_\nu \{ u_\varrho^+ = u_\varrho^- + \delta_{\varrho\nu}, & v_\varrho^+ = v_\varrho^- + \beta''_{\varrho\nu}, & \nu = 1, 2, \cdots, p, \\ \text{längs } c_\nu \{ u_\varrho^+ = u_\varrho^-, & v_\varrho^+ = v_\varrho^-, & \\ \text{längs } l_\sigma \{ u_\varrho^+ = u_\varrho^-, & v_\varrho^+ = v_\varrho^-, & \sigma = 1, 2, \cdots, s, \end{array}$$

ist. Bildet man alsdann aus den Funktionen $u_1, u_2, \cdots, u_p$ mit Hilfe der bei der allgemeinen Funktion u vorkommenden Konstanten β'_ν, $\nu = 1, 2, \cdots, p$, die Funktion $\beta'_1 u_1 + \beta'_2 u_2 + \cdots + \beta'_p u_p$, so stimmt diese letztere mit der aufgestellten Funktion u nicht nur in den allgemeinen Eigenschaften überein, sondern besitzt auch die bei der Funktion u auftretenden Konstanten β' und kann sich daher nach früher Bewiesenem von ihr nur durch eine additive Konstante unterscheiden. Diese Konstante muß aber mit der Null zusammenfallen, da die Funktionen $u, u_1, u_2, \cdots, u_p$ den gemachten Festsetzungen gemäß für den vorher gewählten Punkt $\mathfrak{P}$ sämtlich den Wert Null besitzen. Es besteht also die Gleichung:

$$u = \beta'_1 u_1 + \beta'_2 u_2 + \cdots + \beta'_p u_p$$

und zugleich, infolge der Definition der zu einer Funktion u gehörigen Funktion v, auch die Gleichung:

$$v = \beta'_1 v_1 + \beta'_2 v_2 + \cdots + \beta'_p v_p .$$

Auf Grund dieser letzten Gleichung ergeben sich dann zwischen den Konstanten α''_ν, β''_ν der Funktion v und den entsprechenden Konstanten der Funktionen $v_1, v_2, \cdots, v_p$ die Relationen:

$$\alpha''_\nu = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \beta'_\varrho \alpha''_{\varrho\nu}, \qquad \beta''_\nu = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \beta'_\varrho \beta''_{\varrho\nu}, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p,$$

welche die Größen α''_ν, β''_ν als lineare Funktionen der Größen $\beta'_1, \beta'_2, \cdots, \beta'_p$ darstellen, da die Größen $\alpha''_{\varrho\nu}$, $\beta''_{\varrho\nu}$ von den β' unabhängig sind.

Man betrachte jetzt das System der p unter den vorstehenden Relationen enthaltenen, in bezug auf die noch unbestimmten Größen $\beta'_1, \beta'_2, \cdots, \beta'_p$ linearen Gleichungen:

$$\begin{array}{c} \alpha''_{11}\beta'_1 + \alpha''_{21}\beta'_2 + \cdots + \alpha''_{p1}\beta'_p = \alpha''_1, \\ \alpha''_{12}\beta'_1 + \alpha''_{22}\beta'_2 + \cdots + \alpha''_{p2}\beta'_p = \alpha''_2, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \alpha''_{1p}\beta'_1 + \alpha''_{2p}\beta'_2 + \cdots + \alpha''_{pp}\beta'_p = \alpha''_p . \end{array}$$

Die Determinante $\Delta = \sum \pm \alpha''_{11}\alpha''_{22} \cdots \alpha''_{pp}$ dieses Gleichungensystems hat einen von Null verschiedenen Wert. Zum Beweise dieser Behauptung nehme man an, daß Δ den Wert Null besitze. Unter dieser Annahme lassen sich, nach bekanntem Satze der Determinantentheorie, die p Größen $\beta'_1, \beta'_2, \cdots, \beta'_p$, auch wenn man das Wertesystem $\beta'_1 = 0, \beta'_2 = 0, \cdots, \beta'_p = 0$ ausschließt, so bestimmen, daß $\alpha''_1 = 0, \alpha''_2 = 0, \cdots, \alpha''_p = 0$ wird. Die den so bestimmten Größen β' entsprechende Funktion u hat dann, wie ein Blick auf die oben aufgestellte Gleichung (J_2.), deren rechte Seite für $\alpha''_1 = 0, \alpha''_2 = 0, \cdots, \alpha''_p = 0$ verschwindet, zeigt, in der ganzen Fläche T'' denselben Wert, und zwar den Wert Null, da sie für den vorher gewählten Punkt $\mathfrak{P}$ den Wert Null besitzt. Dieses aber ist, wie die Gleichungen (S.) zeigen, nur möglich, wenn die der Funktion u zukommenden Konstanten $\beta'_1, \beta'_2, \cdots, \beta'_p$ sämtlich den Wert Null besitzen, während doch soeben bei der Bestimmung der Größen β' das Wertesystem $\beta'_1 = 0, \beta'_2 = 0, \cdots, \beta'_p = 0$ ausgeschlossen wurde. Die Determinante Δ des aufgestellten Gleichungensystems kann also, da die Annahme $\Delta = 0$ auf einen Widerspruch geführt hat, nur einen von Null verschiedenen Wert besitzen. Hat aber, wie jetzt feststeht, die Determinante Δ einen von Null verschiedenen Wert, so lassen sich die Größen $\beta'_1, \beta'_2, \cdots, \beta'_p$ stets und nur auf eine Weise so bestimmen, daß die Größen $\alpha''_1, \alpha''_2, \cdots, \alpha''_p$ vorgegebene Werte annehmen, also auch so, daß für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ $\alpha''_\nu i = \mathfrak{A}_\nu - \mathfrak{A}_\nu^{(0)}$ wird. Damit ist auch für den zweiten Fall, wo die p Faktorenpaare A, B sämtlich uneigentliche sind, der am Schlusse des vorigen Artikels verlangte Nachweis erbracht.

6.

Durch die Untersuchungen des vorhergehenden Artikels ist der am Ende des Art. 4 verlangte Nachweis erbracht und damit gezeigt, daß zur Fläche T'' stets eine den sämtlichen in Art. 3 aufgestellten Bedingungen genügende komplexe Funktion $W = W^{(1)} + W^{(2)}i$ des Punktes x, y gebildet werden kann. Eine weitere Frage ist jetzt die, ob die erhaltene Funktion W die einzige den aufgestellten Bedingungen genügende Funktion ist. Um diese Frage zu entscheiden, nehme man an, daß eine zweite denselben Bedingungen genügende Funktion W' existiere. Bezeichnet man alsdann die Differenz der Funktionen W', W mit w, setzt also $w = W' - W$, so hat die so definierte Funktion w, wenn man ihr noch für die Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ die ihr für diese Punkte zukommenden Grenzwerte als Werte zulegt, die folgenden Eigenschaften:

I. Die Funktion w ist für jeden Punkt x, y der Fläche T'' einwertig und stetig; zudem sind ihre, mit w^+, w^- zu bezeichnenden, Werte in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathfrak{P}^+, \mathfrak{P}^-$ zu beiden Seiten eines der Schnitte a, b, c, l in der Weise verknüpft, daß

$$
\text{(S.)}\qquad
\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \left\{ w^+ = A_\nu w^- + \alpha_\nu, \right.\\
&\text{längs } b_\nu \left\{ w^+ = B_\nu w^- + \beta_\nu, \right. && {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,}\\
&\text{längs } c_\nu \left\{ w^+ = w^-, \right.\\
&\text{längs } l_\sigma \left\{ w^+ = w^-, \right. && {\scriptstyle \sigma=1,2,\cdots,s,}
\end{aligned}
$$

ist, wobei die Konstanten $\alpha_\nu, \beta_\nu, {\scriptstyle (\nu=1,2,\cdots,p)}$ der Bedingung $(1-B_\nu)\alpha_\nu - (1-A_\nu)\beta_\nu = 0$ oder der Bedingung $\alpha_\nu = 0$ genügen, je nachdem A_ν, B_ν ein eigentliches oder ein uneigentliches Faktorenpaar ist.

II. Die Derivierten $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, als Grenzen der entsprechenden Differenzenquotienten definiert, existieren und sind stetig nicht nur für jeden inneren Punkt x, y der Fläche T'', sondern auch noch für jeden von den Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ verschiedenen Begrenzungspunkt, sobald man die Funktion w über ein diesen Begrenzungspunkt im Innern enthaltendes Stück der Begrenzung von T'' hinüber den Gleichungen (S.) entsprechend stetig fortsetzt, und es sind alsdann, ausschließlich auf Grund ihrer Definition, die Werte der genannten Derivierten in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{P}^-$ in der Weise verknüpft, daß

$$
\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \left\{ \frac{\partial w^+}{\partial x} = A_\nu \frac{\partial w^-}{\partial x},\quad \frac{\partial w^+}{\partial y} = A_\nu \frac{\partial w^-}{\partial y}, \right.\\
&\text{längs } b_\nu \left\{ \frac{\partial w^+}{\partial x} = B_\nu \frac{\partial w^-}{\partial x},\quad \frac{\partial w^+}{\partial y} = B_\nu \frac{\partial w^-}{\partial y}, \right. && {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,}\\
&\text{längs } c_\nu \left\{ \frac{\partial w^+}{\partial x} = \frac{\partial w^-}{\partial x},\quad \frac{\partial w^+}{\partial y} = \frac{\partial w^-}{\partial y}, \right.\\
&\text{längs } l_\sigma \left\{ \frac{\partial w^+}{\partial x} = \frac{\partial w^-}{\partial x},\quad \frac{\partial w^+}{\partial y} = \frac{\partial w^-}{\partial y}, \right. && {\scriptstyle \sigma=1,2,\cdots,s.}
\end{aligned}
$$

III. Die Derivierten $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ erfüllen für jeden Punkt x, y der Fläche T'', für den ihre Existenz soeben festgestellt wurde, also für jeden nicht mit einem der Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ zusammenfallenden Punkt die Gleichung $\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}$.

Infolge der genannten Eigenschaften besitzt das über eine in der einfach zusammenhängenden Fläche T'' verlaufende, geschlossene Kurve C erstreckte Integral $\int\limits_{C}(w\,dx + w\,i\,dy)$ stets den Wert Null. Man erhält dementsprechend, unter x', y' einen im Innern von T'' fest angenommenen Punkt, unter x, y einen beliebigen Punkt der Fläche T'' verstehend, für das vom Punkte x', y' bis zum Punkte x, y über eine in T'' verlaufende Kurve erstreckte Integral $\int\limits_{x',y'}^{x,y}(w\,dx + w\,i\,dy)$ stets denselben Wert, welche Kurve man auch als Integrationsweg wählen mag. Es wird daher durch die Gleichung:

$$\Omega(x, y) = \int\limits_{x', y'}^{x, y} (w\,dx + wi\,dy),$$

unter Festhaltung der über den Integrationsweg gemachten Voraussetzung, zur Fläche T''' eine einwertige und stetige Funktion Ω des Punktes x, y geliefert, welche für jeden inneren Punkt x, y von T''' stetige Derivierte $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = w$, $\frac{\partial \Omega}{\partial y} = wi$, $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = i\frac{\partial w}{\partial y}$ besitzt, aber auch noch für jeden von den Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ verschiedenen Begrenzungspunkt, sobald man die Funktion $\Omega(x, y)$ über ein diesen Begrenzungspunkt im Innern enthaltendes Stück der Begrenzung von T''' hinüber in der Weise stetig fortsetzt, daß man den Endpunkt x, y des Integrationsweges die Begrenzung überschreiten läßt und gleichzeitig das Integralelement $w\,dx + wi\,dy$ oder, was dasselbe, die Funktion w über die Begrenzung hinüber den Gleichungen (S.) entsprechend stetig fortsetzt. Beachtet man nun noch, daß die für jeden von den Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ verschiedenen Punkt x, y von T''' bestehende Gleichung $\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}$ für die genannten zweiten Derivierten die Gleichung $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0$ nach sich zieht, so erkennt man, daß die Funktion $\Omega(x, y)$ sich für jede ganz im Innern von T''' liegende Kreisfläche K wie eine Funktion von der in dem Satze I definierten Art verhält, also für jeden inneren Punkt x, y von K — wenn man mit a', a'' die Mittelpunktskoordinaten, mit R den Radius von K bezeichnet und unter r, t die durch die Gleichungen $x = a' + r\cos t$, $y = a'' + r\sin t$ bestimmten Polarkoordinaten des Punktes x, y von K versteht — als Funktion der Polarkoordinaten r, t durch die Gleichung:

$$\Omega_{\substack{r, t \\ r < R}} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Omega_{R, \varphi}\, \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t - \varphi) + r^2}\, d\varphi$$

dargestellt wird. Das Gesagte gilt auch noch für eine Kreisfläche K, deren Mittelpunkt ein von den Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ verschiedener Punkt der Begrenzung von T''' ist, sobald man in diesem Falle, bei hinreichend klein gewähltem Radius R von K, die Funktion $\Omega(x, y)$ für den mit dem Mittelpunkte nicht auf derselben Seite der Begrenzung gelegenen Teil von K durch die oben beschriebene stetige Fortsetzung definiert. Aus der so gewonnenen Darstellung folgt nun weiter, daß die Funktion $\Omega(x, y)$ nicht nur für jeden inneren Punkt x, y von T''', sondern auch noch, bei Hinzunahme ihrer stetigen Fortsetzung, für jeden von den Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ verschiedenen Begrenzungspunkt von T''' stetige Derivierte nach x und y von jeder Ordnung besitzt, und daß zugleich die Werte dieser Derivierten von der Reihenfolge der Derivationen unabhängig sind. Auf Grund dieses Resultates und der Gleichung $w = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$ ergibt sich nun schießlich, daß die Funktion w nicht nur für jeden inneren Punkt x, y von T''' stetige zweite Derivierte:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x \partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^3 \Omega}{\partial y \partial x \partial x}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \Omega}{\partial y^2 \partial x}$$

besitzt, sondern auch noch für jeden von den Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ verschiedenen Begrenzungspunkt, sobald man die Funktion Ω in der früher angegebenen Weise oder, was dasselbe, die Funktion w den Gleichungen (S.) entsprechend über die Begrenzung hinüber stetig fortsetzt, und daß zudem zwischen diesen Derivierten für jeden Punkt x, y der Fläche T''', für den ihre Existenz soeben festgestellt wurde, sowohl die Beziehung $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$, als auch die aus dieser mit Hilfe der Gleichung $\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}$ sich ergebende Beziehung $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ besteht.

Man bilde jetzt, nachdem man zuvor den reellen Teil der Funktion w mit $w^{(1)}$, den lateralen Teil mit $w^{(2)}i$ bezeichnet und dementsprechend $w = w^{(1)} + w^{(2)}i$ gesetzt hat, mit den ersten Derivierten von $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ das Integral:

$$i\iint \left\{\left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial y}\right)^2\right\} \partial x \, \partial y$$

und dehne es über die Fläche T''' aus. Um dasselbe auszuwerten, dehne man das Integral zunächst nur über die schon in Art. 5 benutzte, einen Teil der Fläche T''' bildende, Fläche T^* aus, bezeichne den ihm dann zukommenden Wert mit H^*, sodaß also

$$H^* = i\iint\limits_{T^*} \left\{\left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial y}\right)^2\right\} \partial x \, \partial y$$

ist, und werte dieses letztere Integral unter Benutzung der Figuren 17, 18 und unter Wiederholung der zu Anfang des vorhergehenden Artikels angewandten Schlußweisen aus. Zu dem Ende bringe man die vorstehende Gleichung, mit Hilfe der Relationen $i\frac{\partial(w^{(1)} + w^{(2)}i)}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$, $i\frac{\partial(w^{(1)} + w^{(2)}i)}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial x}$, in die Form:

$$H^* = \iint\limits_{T^*} \left\{\frac{\partial(w^{(1)} - w^{(2)}i)}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial(w^{(1)} - w^{(2)}i)}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right\} \partial x \, \partial y$$

und wende auf das jetzt vorliegende Integral, unter Beachtung der vorher gewonnenen Beziehung $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$, das Verfahren der teilweisen Integration an. Man erhält dann zunächst die Gleichung:

$$\begin{aligned} H^* = &\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int\limits_{[a_\nu^+, b_\nu^+, c_\nu^+]}^{+} \left\{(w^{(1)} - w^{(2)}i)^+ \, dw^+ - (w^{(1)} - w^{(2)}i)^- \, dw^-\right\} \\ &+ \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \int\limits_{l_\sigma'^+}^{+} \left\{(w^{(1)} - w^{(2)}i)^+ \, dw^+ - (w^{(1)} - w^{(2)}i)^- \, dw^-\right\} + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \int\limits_{k_\sigma'}^{+} (w^{(1)} - w^{(2)}i) \, dw, \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung $dw^+ = \frac{\partial w^+}{\partial x} dx + \frac{\partial w^+}{\partial y} dy$, $dw^- = \frac{\partial w^-}{\partial x} dx + \frac{\partial w^-}{\partial y} dy$ gesetzt ist; weiter, indem man beachtet, daß für $\nu = 1, 2, \cdots, p$; $\sigma = 1, 2, \cdots, s$

$$
\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \; \{(w^{(1)} - w^{(2)} i)^+ dw^+ = (w^{(1)} - w^{(2)} i)^- dw^- + \bar{\alpha}_\nu dw^+, \\
&\text{längs } b_\nu \; \{(w^{(1)} - w^{(2)} i)^+ dw^+ = (w^{(1)} - w^{(2)} i)^- dw^- + \bar{\beta}_\nu dw^+, \\
&\text{längs } c_\nu \; \{(w^{(1)} - w^{(2)} i)^+ dw^+ = (w^{(1)} - w^{(2)} i)^- dw^-, \\
&\text{längs } l_\sigma \; \{(w^{(1)} - w^{(2)} i)^+ dw^+ = (w^{(1)} - w^{(2)} i)^- dw^-
\end{aligned}
$$

ist, wobei, der im vorhergehenden Artikel eingeführten Bezeichnung entsprechend, $\bar{\alpha}_\nu$, $\bar{\beta}_\nu$ die zu α_ν, β_ν konjugierten Größen bezeichnen, die Gleichung:

$$H^* = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \{\alpha_\nu \int_{a_\nu^+}^{+} dw^+ + \bar{\beta}_\nu \int_{b_\nu^+}^{+} dw^+\} + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \int_{k'_\sigma}^{+} (w^{(1)} - w^{(2)} i)\, dw;$$

und schließlich, indem man die mit Hilfe der Relationen (S.) sich ergebenden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\int_{a_\nu^+}^{+} dw^+ &= w_{\mathfrak{s}_\nu} - w_{\mathfrak{q}_\nu} = - A_\nu B_\nu (1 - B_\nu)\, w_{\mathfrak{p}_\nu} + A_\nu \beta_\nu, \\
\int_{b_\nu^+}^{+} dw^+ &= w_{\mathfrak{r}_\nu} - w_{\mathfrak{t}_\nu} = - A_\nu B_\nu (1 - \bar{A}_\nu)\, w_{\mathfrak{p}_\nu} - B_\nu \alpha_\nu
\end{aligned}
$$

benutzt und die aus der Relation $(1 - B_\nu)\alpha_\nu - (1 - A_\nu)\beta_\nu = 0$ sich ergebende Beziehung $(1 - B_\nu)\bar{\alpha}_\nu - (1 - A_\nu)\bar{\beta}_\nu = 0$ berücksichtigt, die Gleichung:

$$H^* = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \{A_\nu \bar{\alpha}_\nu \beta_\nu - B_\nu \bar{\beta}_\nu \alpha_\nu\} + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \int_{k'_\sigma}^{+} (w^{(1)} - w^{(2)} i)\, dw.$$

Beachtet man nun, daß die Funktion $w = w^{(1)} + w^{(2)} i$, als Funktion des in seiner Bewegung auf die Fläche K'_σ, ${\scriptstyle \sigma = 1, 2, \cdots, q}$, beschränkten Punktes x, y betrachtet, eine Funktion von der im Satze III definierten Art, dagegen als Funktion des in seiner Bewegung auf die Fläche K_σ, ${\scriptstyle \sigma = q+1, q+2, \cdots, s}$, beschränkten Punktes x, y betrachtet, eine Funktion von der im Satze I definierten Art ist, und daß infolgedessen das in der letzten Gleichung hinter dem zweiten Summenzeichen stehende Integral für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ mit unbegrenzt wachsendem r_σ, für $\sigma = q+1, q+2, \cdots, s$ mit unbegrenzt abnehmendem r_σ gegen Null konvergiert, wie sich nach Einführung der zum Punkte x, y der Integrationskurve k'_σ gehörigen Polarkoordinate t_σ als Integrationsvariable ohne Mühe ergibt (vergl. S. 169), so erkennt man, daß der Wert des über die Fläche T'' ausgedehnten, zu Anfang dieser Untersuchung gebildeten Integrals durch die auf der rechten Seite der letzten

Gleichung an erster Stelle stehende Summe geliefert wird. Es besteht daher die Gleichung:

$$i\iint\limits_{T''}\left\{\left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial y}\right)^2\right\}\partial x\,\partial y=\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left\{A_\nu\bar{\alpha}_\nu\beta_\nu-B_\nu\bar{\beta}_\nu\alpha_\nu\right\}.$$

Der auf der rechten Seite der gewonnenen Gleichung hinter dem Summenzeichen stehende Ausdruck hat infolge der Bedingungen, denen die Konstanten α, β genügen, für jedes ν aus der Reihe $1, 2, \cdots, p$ den Wert Null. In dem Falle, wo dem Index ν ein eigentliches Faktorenpaar A_ν, B_ν entspricht, die Größen α_ν, β_ν also der Gleichung $(1-B_\nu)\alpha_\nu-(1-A_\nu)\beta_\nu=0$, und entsprechend die Größen $\bar{\alpha}_\nu$, $\bar{\beta}_\nu$ der Gleichung $(1-B_\nu)\bar{\alpha}_\nu-(1-A_\nu)\bar{\beta}_\nu=0$ oder, was dasselbe, der aus ihr durch Multiplikation mit $-A_\nu B_\nu$ entstehenden Gleichung $(1-B_\nu)A_\nu\bar{\alpha}_\nu-(1-A_\nu)B_\nu\bar{\beta}_\nu=0$ genügen, ergibt sich nämlich aus der ersten und letzten der drei soeben angeschriebenen Gleichungen durch Elimination der Größen $(1-A_\nu)$, $(1-B_\nu)$ die Relation $A_\nu\bar{\alpha}_\nu\beta_\nu-B_\nu\bar{\beta}_\nu\alpha_\nu=0$, während in dem Falle, wo dem Index ν ein uneigentliches Faktorenpaar A_ν, B_ν entspricht, also die Größe α_ν der Gleichung $\alpha_\nu=0$, und entsprechend die Größe $\bar{\alpha}_\nu$ der Gleichung $\bar{\alpha}_\nu=0$ genügt, die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung unmittelbar einleuchtet.

Nachdem so der Wert des über die Fläche T'' ausgedehnten Integrals als mit der Null identisch erkannt ist, ergibt sich durch direkte Betrachtung dieses Integrals, daß die Größen $\frac{\partial w^{(1)}}{\partial x}$, $\frac{\partial w^{(2)}}{\partial x}$, $\frac{\partial w^{(1)}}{\partial y}$, $\frac{\partial w^{(2)}}{\partial y}$ jedenfalls für jeden von den Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ verschiedenen Punkt der Fläche T'' den Wert Null besitzen, und daß daher die Funktion $w=w^{(1)}+w^{(2)}i$ in der ganzen Fläche T'' einen konstanten, mit c zu bezeichnenden, Wert hat.

Aus dem gewonnenen Resultate folgt nun, daß die Funktionen W', W'', deren Differenz zu Anfang dieses Artikels mit w bezeichnet wurde, durch die Gleichung $W''-W'=c$ verknüpft sind. Existiert also außer der Funktion W' eine zweite Funktion W'', welche den sämtlichen in Art. 3 für W' aufgestellten Bedingungen genügt, so kann sich diese Funktion W'' von der Funktion W' nur um eine additive Konstante unterscheiden. Andererseits genügt aber auch die aus W' durch Addition einer beliebigen Konstanten C entstehende Summe $W'+C$, als Funktion des Punktes x, y von T'' betrachtet, den sämtlichen in Art. 3 für W' aufgestellten Bedingungen; denn sie stimmt mit der Funktion W' in den allgemeinen Eigenschaften sowie in den Konstanten A, B, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}$ überein und unterscheidet sich in bezug auf die Konstanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, da längs $a_\nu\{(W'+C)^+=A_\nu(W'+C)^-+\mathfrak{A}_\nu+(1-A_\nu)C$, längs $b_\nu\{(W'+C)^+=B_\nu(W'+C)^-+\mathfrak{B}_\nu+(1-B_\nu)C$ ist, von ihr nur dadurch, daß für jede Zahl ν aus der Reihe $1, 2, \cdots, p$, für welche A_ν, B_ν ein eigentliches Faktorenpaar ist, an Stelle der zugehörigen, bei der Problemstellung nicht vorgegebenen Konstanten $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ die Konstanten $\mathfrak{A}_\nu+(1-A_\nu)C$, $\mathfrak{B}_\nu+(1-B_\nu)C$ auftreten. Man erkennt daher schließlich, daß die zu Anfang des Art. 3 verlangte Funktion W durch die für sie aufgestellten Bedingungen nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, und daß die allgemeinste den genannten Bedingungen genügende Funktion erhalten wird, wenn man zu der in den Artikeln 4, 5 gewonnenen Funktion W eine willkürliche Konstante C addiert.

7.

Die in den Artikeln 4, 5 gewonnene, einwertige Funktion $W = U + Vi$ des Punktes x, y von T''' ist, da sie den sämtlichen zu Anfang des Art. 3 aufgestellten Bedingungen genügt, eine Funktion der komplexen Veränderlichen z, die sich für das Gebiet irgend eines von den Punkten $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ verschiedenen Punktes $z = a$ von T''', mag derselbe im Innern oder auf der Begrenzung von T''' liegen, durch eine Reihe von der Form:

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

darstellen läßt, wobei die c von z unabhängige Größen bezeichnen; die sich dagegen für das Gebiet des Punktes $\mathcal{P}_\sigma$ $(\sigma = 1, 2, \cdots, s)$ durch eine Reihe von der Form:

$$\mathfrak{L}_\sigma \ln \frac{1}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{z_\sigma^{m_\sigma}} + c_{\sigma 0} + c_{\sigma 1} z_\sigma + c_{\sigma 2} z_\sigma^2 + \cdots + c_{\sigma n} z_\sigma^n + \cdots$$

darstellen läßt, wobei für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ $z_\sigma = z^{-\frac{1}{\nu_\sigma}}$, für $\sigma = q+1, q+2, \cdots, s$ $z_\sigma = (z - a_\sigma)^{\frac{1}{\nu_\sigma}}$ ist, die vorkommenden Potenzen ebenso wie der Logarithmus den in Art. 1 gemachten Festsetzungen entsprechend zu interpretieren sind, und die c von z unabhängige Größen bezeichnen.

Die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung ergibt sich im vorliegenden Falle unmittelbar aus den in den Artikeln 4, 5, 6, 7 des dritten Abschnittes durchgeführten Untersuchungen, wenn man die Eigenschaften der zur Bildung der Funktion $W = U + Vi$ benutzten Funktion U und den durch die Gleichungen $\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x}$ charakterisierten Zusammenhang der Funktionen U, V beachtet. Dabei ist der Begriff des zu einem Punkte von T''' gehörigen Gebietes in folgender Weise zu definieren. Liegt ein von den Punkten $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ verschiedener Punkt der Fläche T''' vor, so grenze man zu ihm als Mittelpunkt diejenige Kreisfläche ab, welche auf ihrer Peripherie wenigstens einen, in ihrem Innern aber keinen der Punkte $\mathcal{P}_{q+1}, \mathcal{P}_{q+2}, \cdots, \mathcal{P}_s$ enthält; liegt andererseits ein Punkt $\mathcal{P}_\sigma$ vor, so grenze man zu ihm für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ diejenige, den Punkt $\mathcal{P}_\sigma$ enthaltende, ν_σ-blättrige Kreisergänzungsfläche ab, welche auf ihrer Peripherie wenigstens einen, in ihrem Innern aber keinen der Punkte $\mathcal{P}_{q+1}, \mathcal{P}_{q+2}, \cdots, \mathcal{P}_s$ enthält, für $\sigma = q+1$, $q+2, \cdots, s$ dagegen diejenige den Punkt $\mathcal{P}_\sigma$ als Mittelpunkt besitzende, ν_σ-blättrige

Kreisfläche, welche auf ihrer Peripherie wenigstens einen, in ihrem Innern aber außer dem Punkte $\mathcal{P}_\sigma$ keinen weiteren der Punkte $\mathcal{P}_{q+1}, \mathcal{P}_{q+2}, \cdots, \mathcal{P}_s$ enthält. Unter dem Gebiete irgend eines Punktes $\mathcal{P}$ der Fläche T''' soll dann die Gesamtheit der Punkte z verstanden werden, welche im Innern der zum Punkte $\mathcal{P}$ in soeben angegebener Weise abgegrenzten Fläche liegen und zudem von dem Punkte $\mathcal{P}$ aus auf einem ganz im Innern der betreffenden Fläche verlaufenden und die Begrenzung von T''' nicht schneidenden Wege erreicht werden können. Die genannte, zu dem Punkte $\mathcal{P}$ abgegrenzte Fläche bildet zugleich den Konvergenzbereich für die oben dem Punkte zugeordnete Reihe, und die durch diese Reihe für den Fall, daß das Gebiet des Punktes nur einen Teil des Konvergenzbereiches ausmacht, bestimmte stetige Fortsetzung der Funktion W über das Gebiet des Punktes $\mathcal{P}$ hinaus in die nicht dem Gebiete angehörenden Teile des Konvergenzbereiches deckt sich mit den den Gleichungen (S.) entsprechenden stetigen Fortsetzungen der Funktion W über das Gebiet hinaus oder, was dasselbe, über die Begrenzung von T''' hinüber.

Unter Beachtung des Vorstehenden lassen sich jetzt die sämtlichen in diesem Abschnitt erhaltenen Resultate zusammenfassen in den folgenden, alle weiteren Untersuchungen beherrschenden

Fundamentalsatz.

„Die über der Z-Ebene ausgebreitete, $(2p+1)$-fach zusammenhängende, n-blättrige Fläche T sei in der in Art. 1 angegebenen Weise durch Einführung der Schnitte a_ν, b_ν, c_ν, ${}_{\nu=1,2,\cdots,p}$, in die einfach zusammenhängende Fläche T' und weiter dann, nach Markierung der Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$, durch Einführung der Schnitte l_σ, ${}_{\sigma=1,2,\cdots,s}$, in die einfach zusammenhängende Fläche T'' verwandelt. Man ordne den $2p$ Schnitten a_ν, b_ν, ${}_{\nu=1,2,\cdots,p}$, $2p$ Konstanten A_ν, B_ν, ${}_{\nu=1,2,\cdots,p}$, die sämtlich den Modul 1 besitzen, zu und nenne A_ν, B_ν ein eigentliches oder ein uneigentliches Faktorenpaar, je nachdem die Größen A_ν, B_ν nicht beide oder beide den Wert 1 besitzen; verstehe alsdann unter $\mathfrak{L}_\sigma, \mathfrak{L}_{\sigma 1}, \mathfrak{L}_{\sigma 2}, \cdots, \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}$, ${}_{\sigma=1,2,\cdots,s}$, beliebig vorgegebene oder im Rahmen der Bedingung $\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0$ vorgegebene Konstanten, je nachdem die p Faktorenpaare A, B nicht sämtlich oder sämtlich uneigentliche sind, und ordne dem Punkte $\mathcal{P}_\sigma$ die Funktion:

$$f_\sigma(z_\sigma) = \mathfrak{L}_\sigma \ln \frac{1}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{z_\sigma^{m_\sigma}}$$

zu, wobei für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ $z_\sigma = z^{-\frac{1}{r_\sigma}}$, für $\sigma = q+1, q+2, \cdots, s$ $z_\sigma = (z-a_\sigma)^{\frac{1}{r_\sigma}}$ ist, und die vorkommenden Potenzen ebenso wie der Logarithmus den in Art. 1 gemachten Festsetzungen entsprechend zu interpretieren sind; ordne ferner den p Faktorenpaaren A_ν, B_ν, ${}_{\nu=1,2,\cdots,p}$, p Konstanten $\mathfrak{C}_\nu$, ${}_{\nu=1,2,\cdots,p}$, zu, die so gewählt seien, daß die zu uneigentlichen Faktoren-

paaren gehörigen Größen $\mathfrak{C}$ *sämtlich mit der Null zusammenfallen, die zu eigentlichen Faktorenpaaren gehörigen Größen* $\mathfrak{C}$ *dagegen mit den schon gewählten Größen* $\mathfrak{L}$ *durch die Beziehung* $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\mathfrak{C}_\nu + 2\pi i\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_\sigma = 0$ *verknüpft sind: ordne endlich noch jedem uneigentlichen Faktorenpaare* A_ν, B_ν *eine beliebig angenommene Konstante* $\mathfrak{A}_\nu$ *zu.*

Es existiert dann zur Fläche T'' *immer eine Funktion* W *des Punktes* z, *welche die folgenden Eigenschaften besitzt:*

I. Die Funktion W *ist für jeden nicht mit einem der Punkte* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ *zusammenfallenden Punkt* z *der Fläche* T'', *einerlei also, ob derselbe im Innern oder auf der Begrenzung von* T'' *liegt, einwertig und stetig. Für den Punkt* $\mathfrak{P}_\sigma$ $(\sigma=1,2,\cdots,s)$ *dagegen wird sie in derselben Weise unstetig, wie die dem Punkte zugeordnete Funktion* $f_\sigma(z_\sigma)$, *sodaß also die Differenz:*

$$W - \left(\mathfrak{L}_\sigma \ln\frac{1}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{z_\sigma^{m_\sigma}}\right)$$

für den Punkt stetig bleibt. Zudem sind ihre Werte in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{P}^-$ *in der Weise verknüpft, daß*

$$(\mathrm{S.})\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu\{\; W^+ = A_\nu W^- + \mathfrak{A}_\nu, \\ &\text{längs } b_\nu\{\; W^+ = B_\nu W^- + \mathfrak{B}_\nu, && \nu=1,2,\cdots,p, \\ &\text{längs } c_\nu\{\; W^+ = W^- + \mathfrak{C}_\nu, \\ &\text{längs } l_\sigma\{\; W^+ = W^- + 2\pi i\mathfrak{L}_\sigma, && \sigma=1,2,\cdots,s, \end{aligned}$$

ist, wobei die $3p+s$ *Konstanten* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}$ *mit den* $2p$ *Konstanten* A, B *durch die, nach früherem für das Zusammenbestehen der Gleichungen* (S.) *notwendigen,* $p+1$ *Relationen:*

$$(\mathrm{S'.})\qquad \left\{\begin{aligned} &(1-B_\nu)\mathfrak{A}_\nu - (1-A_\nu)\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{C}_\nu, && \nu=1,2,\cdots,p, \\ &\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\mathfrak{C}_\nu + 2\pi i\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_\sigma = 0 \end{aligned}\right.$$

verbunden sind, und die außer den vorgegebenen Konstanten noch vorkommenden Größen, also die p *Größen* $\mathfrak{B}$ *sowie die zu eigentlichen Faktorenpaaren* A, B *gehörigen Größen* $\mathfrak{A}$, *als Konstanten, die nicht vorgegeben werden können, anzusehen sind.*

II. Die Derivierte $\frac{dW}{dz}$, *definiert als Grenze des Differenzenquotienten* $\frac{\Delta W}{\Delta z}$ *für* $\lim \Delta z = 0$, *existiert, besitzt, wie* Δz *auch gegen Null konvergieren mag, immer denselben Wert und ist stetig nicht nur für jeden inneren Punkt* z *der Fläche* T'', *sondern auch noch für jeden von den Punkten* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_s$ *verschiedenen Begrenzungspunkt, sobald man zum Zwecke der Bildung von* $\frac{\Delta W}{\Delta z}$ *die Funktion* W *über ein diesen Begrenzungspunkt* *im Innern enthaltendes Stück der Begrenzung von T'' hinüber den Gleichungen* (S.) *entsprechend stetig fortsetzt, und es sind alsdann, ausschließlich auf Grund ihrer Definition, die Werte der Derivierten $\frac{dW}{dz}$ in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ in der Weise verknüpft, daß*

$$\text{längs } a_\nu \left\{ \frac{dW^+}{dz} = A_\nu \frac{dW^-}{dz}, \right.$$

$$\text{längs } b_\nu \left\{ \frac{dW^+}{dz} = B_\nu \frac{dW^-}{dz}, \right. \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p,$$

$$\text{längs } c_\nu \left\{ \frac{dW^+}{dz} = \frac{dW^-}{dz}, \right.$$

$$\text{längs } l_\sigma \left\{ \frac{dW^+}{dz} = \frac{dW^-}{dz}, \right. \qquad \sigma = 1, 2, \cdots, s.$$

Die aus der Funktion W durch Addition einer willkürlichen Konstanten C entstehende Funktion $W + C$ besitzt ebenfalls die genannten Eigenschaften und ist zugleich die allgemeinste derartige Funktion.

Eine die genannten Eigenschaften besitzende Funktion des Punktes z von T'' ist immer auch eine Funktion der komplexen Veränderlichen z und läßt sich dementsprechend für das Gebiet irgend eines von den Punkten $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_s$ verschiedenen Punktes $z = a$ durch eine Reihe von der Form:

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

darstellen, wobei die c von z unabhängige Größen bezeichnen, für das Gebiet des Punktes $\mathcal{P}_\sigma$ ($\sigma = 1, 2, \cdots, s$) *dagegen durch eine Reihe von der Form:*

$$\mathfrak{L}_\sigma \ln \frac{1}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{z_\sigma^{m_\sigma}} + c_{\sigma 0} + c_{\sigma 1} z_\sigma + c_{\sigma 2} z_\sigma^2 + \cdots + c_{\sigma n} z_\sigma^n + \cdots,$$

wobei, wie schon bemerkt wurde, für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ $z_\sigma = z^{-\frac{1}{r_\sigma}}$, für $\sigma = q+1, q+2, \cdots, s$ $z_\sigma = (z-a_\sigma)^{\frac{1}{r_\sigma}}$ ist, und die c von z unabhängige Größen bezeichnen.

In dem besonderen Falle, wo die außer den p Faktorenpaaren A, B noch vorgegebenen Konstanten, also die Größen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{C}$ und die zu uneigentlichen Faktorenpaaren A, B gehörigen Größen $\mathfrak{A}$, sämtlich den Wert Null besitzen, wird durch eine willkürliche Konstante C die allgemeinste, die genannten Eigenschaften besitzende Funktion repräsentiert."

Siebenter Abschnitt.

Aufstellung der allgemeinen Fundamentalformel.

1.

Man verstehe unter $A_1, B_1; A_2, B_2; \cdots; A_p, B_p$ und $\bar{A}_1, \bar{B}_1; \bar{A}_2, \bar{B}_2; \cdots; \bar{A}_p, \bar{B}_p$ zwei Systeme von je $2p$ den Modul 1 besitzenden Größen, welche durch die $2p$ Relationen $A_\nu \bar{A}_\nu = 1$, $B_\nu \bar{B}_\nu = 1$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, verknüpft sind, unter $W = W(z)$, $\bar{W} = \bar{W}(z)$ irgend zwei Funktionen der komplexen Veränderlichen z von der im Fundamentalsatz beschriebenen Art, von denen die erste die p Größenpaare A_ν, B_ν, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, die zweite die p Größenpaare $\bar{A}_\nu, \bar{B}_\nu$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, als Faktorenpaare besitzt. Das Verhalten dieser Funktionen W, $\bar{W}$ für den Punkt $\mathfrak{P}_\sigma$ ${\scriptstyle (\sigma=1,2,\cdots,s)}$ sei charakterisiert durch die Funktionen:

$$f_\sigma(z_\sigma) = \mathfrak{L}_\sigma \ln \frac{1}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{z_\sigma^{m_\sigma}},$$

$$\bar{f}_\sigma(z_\sigma) = \bar{\mathfrak{L}}_\sigma \ln \frac{1}{z_\sigma} + \frac{\bar{\mathfrak{L}}_{\sigma 1}}{z_\sigma} + \frac{\bar{\mathfrak{L}}_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \cdots + \frac{\bar{\mathfrak{L}}_{\sigma m_\sigma}}{z_\sigma^{m_\sigma}},$$

sodaß für das Gebiet dieses Punktes die Darstellungen:

$$\text{(R.)}\quad \begin{aligned} W(z) &= \mathfrak{L}_\sigma \ln \frac{1}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{z_\sigma^{m_\sigma}} + c_{\sigma 0} + c_{\sigma 1} z_\sigma + c_{\sigma 2} z_\sigma^2 + \cdots + c_{\sigma n} z_\sigma^n + \cdots, \\ \bar{W}(z) &= \bar{\mathfrak{L}}_\sigma \ln \frac{1}{z_\sigma} + \frac{\bar{\mathfrak{L}}_{\sigma 1}}{z_\sigma} + \frac{\bar{\mathfrak{L}}_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \cdots + \frac{\bar{\mathfrak{L}}_{\sigma m_\sigma}}{z_\sigma^{m_\sigma}} + \bar{c}_{\sigma 0} + \bar{c}_{\sigma 1} z_\sigma + \bar{c}_{\sigma 2} z_\sigma^2 + \cdots + \bar{c}_{\sigma n} z_\sigma^n + \cdots \end{aligned}$$

bestehen, wobei für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ $z_\sigma = z^{-\frac{1}{r_\sigma}}$, für $\sigma = q+1, q+2, \cdots, s$ $z_\sigma = (z - a_\sigma)^{\frac{1}{r_\sigma}}$ ist, die c, $\bar{c}$ von z unabhängige Größen bezeichnen, und die Konstanten $\mathfrak{L}$, $\bar{\mathfrak{L}}$ teilweise oder auch sämtlich den Wert Null besitzen können. Was die linearen Gleichungen betrifft, welche das Verhalten der Funktionen W, $\bar{W}$ längs der Begrenzung von T'' charakterisieren, so sei die Bezeichnung für die darin außer den Konstanten $A, B, \mathfrak{L}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{\mathfrak{L}}$ noch vorkommenden Konstanten, entsprechend der im Fundamentalsatz angewandten Bezeichnung, so gewählt, daß

$$
(\mathrm{S.})\qquad
\begin{array}{lll}
\text{längs } a_\nu \{\; W^+ = A_\nu W^- + \mathfrak{A}_\nu, & \overline{W}^+ = \bar{A}_\nu \overline{W}^- + \bar{\mathfrak{A}}_\nu, & \\
\text{längs } b_\nu \{\; W^+ = B_\nu W^- + \mathfrak{B}_\nu, & \overline{W}^+ = \bar{B}_\nu \overline{W}^- + \bar{\mathfrak{B}}_\nu, & \nu = 1, 2, \ldots, p, \\
\text{längs } c_\nu \{\; W^+ = W^- + \mathfrak{C}_\nu, & \overline{W}^+ = \overline{W}^- + \bar{\mathfrak{C}}_\nu, & \\
\text{längs } l_\sigma \{\; W^+ = W^- + 2\pi i \mathfrak{L}_\sigma, & \overline{W}^+ = \overline{W}^- + 2\pi i \bar{\mathfrak{L}}_\sigma, & \sigma = 1, 2, \ldots, s,
\end{array}
$$

ist. Dabei bestehen zwischen den Konstanten die Beziehungen:

$$
(\mathrm{S}'.)\qquad
\left\{
\begin{array}{lll}
(1 - B_\nu)\mathfrak{A}_\nu - (1 - A_\nu)\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{C}_\nu, & (1 - \bar{B}_\nu)\bar{\mathfrak{A}}_\nu - (1 - \bar{A}_\nu)\bar{\mathfrak{B}}_\nu = \bar{\mathfrak{C}}_\nu, & \nu = 1, 2, \ldots, p, \\
\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{C}_\nu + 2\pi i \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0, & \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \bar{\mathfrak{C}}_\nu + 2\pi i \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s} \bar{\mathfrak{L}}_\sigma = 0. &
\end{array}
\right.
$$

Die in den Gleichungen (R.) und (S.) auftretenden Konstanten der Funktionen W, $\overline{W}$ sind durch eine eigentümliche Relation verknüpft. Diese Relation soll jetzt abgeleitet werden. Zu dem Ende beachte man, daß das über die Begrenzung $\mathfrak{R}$ der schon in Art. 5 des sechsten Abschnittes benutzten einfach zusammenhängenden Fläche T^* in positiver Richtung erstreckte Integral $\int\limits_{\mathfrak{R}}^{+} W \frac{d\overline{W}}{dz}\, dz$ den Wert Null besitzt, da die unter dem Integralzeichen stehende Funktion $W \frac{d\overline{W}}{dz}$ der komplexen Veränderlichen z für jeden Punkt der Fläche T^* einwertig und stetig ist, und daß daher die Gleichung:

$$
\int\limits_{\mathfrak{R}}^{+} W \frac{d\overline{W}}{dz}\, dz = 0
$$

besteht. Zerlegt man nun das auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Integral in die den einzelnen Stücken der Begrenzung $\mathfrak{R}$ entsprechenden Teile und bezeichnet den Komplex der auf die Schnitte a, b, c, l' sich beziehenden Integrale, nachdem man zuvor noch bei jedem dieser Schnitte die auf die positive und die auf die negative Seite desselben sich beziehenden Integrale in der in dem eben genannten Artikel beschriebenen Weise vereinigt hat, mit J_1, den Komplex der auf die Kreislinien k' sich beziehenden Integrale mit J_2, so kann man die vorstehende Gleichung durch die Gleichungen:

$$
J_1 + J_2 = 0,
$$

$$
J_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int\limits_{[a_\nu^+, b_\nu^+, c_\nu^+]}^{+} \{ W^+ d\overline{W}^+ - W^- d\overline{W}^- \} + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \int\limits_{l_{\varkappa_\sigma}'^{+}}^{+} \{ W^+ d\overline{W}^+ - W^- d\overline{W}^- \}, \qquad J_2 = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \int\limits_{k_\sigma'}^{+} W\, d\overline{W}
$$

ersetzen, und man erhält dann die erwähnte Relation, indem man die einzelnen Integrationen ausführt und die so für J_1, J_2 sich ergebenden Ausdrücke in die Gleichung $J_1 + J_2 = 0$ einträgt.

Um die mit J_1 bezeichnete Integralsumme, bei der $d\overline{W}^+ = \frac{d\overline{W}^+}{dz}dz$, $d\overline{W}^- = \frac{d\overline{W}^-}{dz}dz$ ist, auszuwerten, beachte man, daß für $\nu = 1, 2, \cdots, p$; $\sigma = 1, 2, \cdots, s$

$$\text{längs } a_\nu \{\; W^+ d\overline{W}^+ = W^- d\overline{W}^- + \mathfrak{A}_\nu d\overline{W}^+,$$

$$\text{längs } b_\nu \{\; W^+ d\overline{W}^+ = W^- d\overline{W}^- + \mathfrak{B}_\nu d\overline{W}^+,$$

$$\text{längs } c_\nu \{\; W^+ d\overline{W}^+ = W^- d\overline{W}^- + \mathfrak{C}_\nu d\overline{W}^+,$$

$$\text{längs } l'_{\varkappa_\sigma} \{\; W^+ d\overline{W}^+ = W^- d\overline{W}^- + 2\pi i \mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma} d\overline{W}^+$$

ist, und reduziere mit Hilfe dieser Relationen die zwischen den geschweiften Klammern stehenden Ausdrücke. Man erhält dann für J_1 zunächst die Gleichung:

$$J_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \Big\{ \mathfrak{A}_\nu \int_{a_\nu^+}^{+} d\overline{W}^+ + \mathfrak{B}_\nu \int_{b_\nu^+}^{+} d\overline{W}^+ + \mathfrak{C}_\nu \int_{c_\nu^+}^{+} d\overline{W}^+ \Big\} + 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma} \int_{l'^+_{\varkappa_\sigma}}^{+} d\overline{W}^+$$

und schließlich, indem man die mit Hilfe der Relationen (S.) sich ergebenden Gleichungen:

$$\int_{a_\nu^+}^{+} d\overline{W}^+ = \overline{W}_{\mathfrak{s}_\nu} - \overline{W}_{\mathfrak{q}_\nu} = -A_\nu B_\nu (1 - B_\nu) \overline{W}_{\mathfrak{p}_\nu} + A_\nu \mathfrak{B}_\nu,$$

$$\int_{b_\nu^+}^{+} d\overline{W}^+ = \overline{W}_{\mathfrak{r}_\nu} - \overline{W}_{\mathfrak{t}_\nu} = -A_\nu B_\nu (1 - A_\nu) \overline{W}_{\mathfrak{p}_\nu} - B_\nu \mathfrak{A}_\nu,$$

$$\int_{c_\nu^+}^{+} d\overline{W}^+ = \overline{W}_{\mathfrak{t}_{\nu+1}} - \overline{W}_{\mathfrak{s}_\nu} = \overline{W}_{\mathfrak{t}_1} - A_\nu B_\nu \overline{W}_{\mathfrak{p}_\nu} - (A_\nu \mathfrak{B}_\nu + \mathfrak{A}_\nu) + \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \cdots + \mathfrak{C}_\nu,$$

$$\int_{l'^+_{\varkappa_\sigma}}^{+} d\overline{W}^+ = \overline{W}_{\mathfrak{l}_{\sigma+1}} - \overline{W}_{\mathfrak{n}_{\varkappa_\sigma}} = \overline{W}_{\mathfrak{t}_1} - 2\pi i (\mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma} + \mathfrak{L}_{\varkappa_{\sigma+1}} + \cdots + \mathfrak{L}_{\varkappa_s}) - \overline{W}_{\mathfrak{m}_{\varkappa_\sigma}},$$

— bei denen $\mathfrak{m}_{\varkappa_\sigma}$ den der Linie $k'_{\varkappa_\sigma}$ und der negativen Seite des Schnittes $l_{\varkappa_\sigma}$, $\mathfrak{n}_{\varkappa_\sigma}$ den der Linie $k'_{\varkappa_\sigma}$ und der positiven Seite des Schnittes $l_{\varkappa_\sigma}$ gemeinsam angehörigen Punkt der Begrenzung $\mathfrak{R}$ von T^* bezeichnet (s. Fig. 19), und die für $\nu = p$, $\sigma = s$ auftretenden Zeichen $\mathfrak{t}_{p+1}$, $\mathfrak{l}_{s+1}$ als gleichbedeutend mit den Zeichen $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{t}_1$ beziehungsweise anzusehen sind — benutzt und die unter (S'.) stehenden Relationen:

$$(1 - B_\nu)\mathfrak{A}_\nu - (1 - A_\nu)\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{C}_\nu, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{C}_\nu + 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0$$

berücksichtigt, die Gleichung:

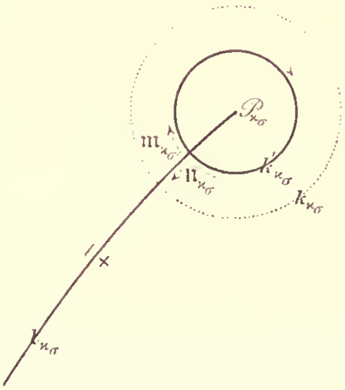


Fig. 19.

$$J_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \{A_\nu \mathfrak{A}_\nu \mathfrak{B}_\nu - B_\nu \mathfrak{B}_\nu \mathfrak{A}_\nu - (A_\nu \mathfrak{B}_\nu + \mathfrak{A}_\nu)\mathfrak{C}_\nu\} + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{C}_\nu(\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \cdots + \mathfrak{C}_\nu)$$
$$+ 4\pi^2 \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma}(\mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma} + \mathfrak{L}_{\varkappa_{\sigma+1}} + \cdots + \mathfrak{L}_{\varkappa_s}) - 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma} W_{\mathfrak{m}_{\varkappa_\sigma}}.$$

Um die mit J_2 bezeichnete Integralsumme, bei der $dW = \frac{dW}{dz}dz$ ist, auszuwerten, beachte man, daß die sämtlichen Punkte der Kreislinie k'_σ dem Gebiete des Punktes $\mathfrak{P}_\sigma$ angehören, und daß daher für jeden Punkt der von $\mathfrak{m}_\sigma$ bis $\mathfrak{n}_\sigma$ sich erstreckenden Integrationskurve k'_σ die aus den zu Anfang dieses Artikels angeschriebenen Gleichungen (R.) folgenden Gleichungen:

$$W = \mathfrak{L}_\sigma \ln\frac{1}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{z_\sigma^{m_\sigma}} + c_{\sigma 0} + c_{\sigma 1}z_\sigma + c_{\sigma 2}z_\sigma^2 + \cdots,$$

$$\frac{dW}{dz_\sigma} = -\frac{\mathfrak{L}_\sigma}{z_\sigma} - \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{z_\sigma^2} - 2\frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{z_\sigma^3} - \cdots - m_\sigma \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{z_\sigma^{m_\sigma+1}} + c_{\sigma 1} + 2c_{\sigma 2}z_\sigma + 3c_{\sigma 3}z_\sigma^2 + \cdots$$

bestehen, bilde alsdann auf Grund dieser Gleichungen durch Multiplikation der auf ihren rechten Seiten stehenden Reihen die Gleichung:

$$\left(W - \mathfrak{L}_\sigma \ln\frac{1}{z_\sigma}\right)\frac{dW}{dz_\sigma} = \frac{\mathfrak{M}_{\sigma 1}}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{M}_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \cdots + \frac{\mathfrak{M}_{\sigma, 2m_\sigma+1}}{z_\sigma^{2m_\sigma+1}} + d_{\sigma 0} + d_{\sigma 1}z_\sigma + d_{\sigma 2}z_\sigma^2 + \cdots,$$

bei der speziell:

$$\mathfrak{M}_{\sigma 1} = -\mathfrak{L}_\sigma c_{\sigma 0} + \sum_{\mu=1}^{\mu=m_\sigma} \mu\,(\mathfrak{L}_{\sigma\mu}c_{\sigma\mu} - \mathfrak{L}_{\sigma\mu}c_{\sigma\mu})$$

ist, multipliziere sie mit $dz_\sigma = \frac{dz_\sigma}{dz}dz$ und integriere über die Kurve k'_σ vom Punkte $\mathfrak{m}_\sigma$ bis zum Punkte $\mathfrak{n}_\sigma$. Man erhält dann, indem man beachtet, daß für jede von -1 verschiedene ganze Zahl n $\int_{k'_\sigma}^{+} z_\sigma^n dz_\sigma = 0$ ist, daß dagegen $\int_{k'_\sigma}^{+} z_\sigma^{-1} dz_\sigma = -2\pi i$ ist, die Gleichung:

$$\int_{k'_\sigma}^{+} \left(W - \mathfrak{L}_\sigma \ln\frac{1}{z_\sigma}\right)\frac{dW}{dz_\sigma}dz_\sigma = -2\pi i\mathfrak{M}_{\sigma 1}$$

und weiter aus dieser die Gleichung:

$$\text{(1.)} \qquad \int_{k'_\sigma}^{+} W dW = \mathfrak{L}_\sigma \int_{k'_\sigma}^{+} \ln\left(\frac{1}{z_\sigma}\right)\frac{dW}{dz_\sigma}dz_\sigma - 2\pi i\mathfrak{M}_{\sigma 1}.$$

Auf das rechts stehende Integral wende man nun das Verfahren der teilweisen Integration an. Es ergibt sich dann, wenn man noch die Differenz $F_{\mathfrak{n}_\sigma} - F_{\mathfrak{m}_\sigma}$ der Werte, die einer

Funktion F von z in den Punkten $\mathfrak{n}_\sigma$ und $\mathfrak{m}_\sigma$ zukommen, mit $\Big| F \Big|_{\mathfrak{m}_\sigma}^{\mathfrak{n}_\sigma}$ bezeichnet, die Gleichung:

$$(2.)\qquad \mathfrak{L}_\sigma \int\limits_{k'_\sigma}^{+} \ln\left(\frac{1}{z_\sigma}\right) \frac{dW}{dz_\sigma}\, dz_\sigma = \mathfrak{L}_\sigma \Big| \ln\left(\frac{1}{z_\sigma}\right) W \Big|_{\mathfrak{m}_\sigma}^{\mathfrak{n}_\sigma} + \mathfrak{L}_\sigma \int\limits_{k'_\sigma}^{+} \overline{W} \frac{dz_\sigma}{z_\sigma},$$

und es ist jetzt noch das auf ihrer rechten Seite stehende Integral auszuwerten. Nun erhält man aber, wenn man $\overline{W}$ durch die unter (R.) angeschriebene, die Funktion $\overline{W}$ für jeden Punkt der Integrationskurve k'_σ darstellende Reihe ersetzt und die Integration unter Beachtung des oben über das Integral $\int\limits_{k'_\sigma}^{+} z_\sigma^n dz_\sigma$ Bemerkten ausführt, die Gleichung:

$$(3.)\quad \mathfrak{L}_\sigma \int\limits_{k'_\sigma}^{+} \overline{W} \frac{dz_\sigma}{z_\sigma} = \mathfrak{L}_\sigma \mathfrak{L}_\sigma \int\limits_{k'_\sigma}^{+} \ln\left(\frac{1}{z_\sigma}\right) \frac{dz_\sigma}{z_\sigma} + \mathfrak{L}_\sigma c_{\sigma 0} \int\limits_{k'_\sigma}^{+} \frac{dz_\sigma}{z_\sigma} = -\frac{1}{2} \mathfrak{L}_\sigma \mathfrak{L}_\sigma \Big| \left(\ln \frac{1}{z_\sigma}\right)^2 \Big|_{\mathfrak{m}_\sigma}^{\mathfrak{n}_\sigma} - 2\pi i\, \mathfrak{L}_\sigma \bar{c}_{\sigma 0}.$$

Addiert man jetzt die Gleichungen (1.), (2.), (3.), so erhält man die Gleichung:

$$(4.)\qquad \int\limits_{k'_\sigma}^{+} W d\overline{W} = \mathfrak{L}_\sigma \Big| \ln\left(\frac{1}{z_\sigma}\right) W \Big|_{\mathfrak{m}_\sigma}^{\mathfrak{n}_\sigma} - \frac{1}{2} \mathfrak{L}_\sigma \mathfrak{L}_\sigma \Big| \left(\ln \frac{1}{z_\sigma}\right)^2 \Big|_{\mathfrak{m}_\sigma}^{\mathfrak{n}_\sigma} - 2\pi i (\mathfrak{L}_\sigma \bar{c}_{\sigma 0} + \mathfrak{M}_{\sigma 1})$$

und schließlich, indem man die ersten beiden auf ihrer rechten Seite stehenden Ausdrücke mit Hilfe der Relationen:

$$\left(\ln \frac{1}{z_\sigma}\right)_{\mathfrak{n}_\sigma} = \left(\ln \frac{1}{z_\sigma}\right)_{\mathfrak{m}_\sigma} + 2\pi i, \qquad \overline{W}_{\mathfrak{n}_\sigma} = \overline{W}_{\mathfrak{m}_\sigma} + 2\pi i\, \mathfrak{L}_\sigma$$

reduziert und $\mathfrak{M}_{\sigma 1}$ durch den ihm entsprechenden schon früher aufgestellten Ausdruck ersetzt, die Gleichung:

$$(5.)\quad \int\limits_{k'_\sigma}^{+} W d\overline{W} = 2\pi i \mathfrak{L}_\sigma \overline{W}_{\mathfrak{m}_\sigma} - 2\pi^2 \mathfrak{L}_\sigma \mathfrak{L}_\sigma - 2\pi i (\mathfrak{L}_\sigma \bar{c}_{\sigma 0} - \mathfrak{L}_\sigma c_{\sigma 0}) - 2\pi i \sum_{\mu=1}^{\mu=m_\sigma} \mu (\mathfrak{L}_{\sigma\mu} \bar{c}_{\sigma\mu} - \mathfrak{L}_{\sigma\mu} c_{\sigma\mu}).$$

Damit ist aber auch J_2 ausgewertet; denn man erhält durch Addition der s aus der letzten Gleichung für $\sigma = 1, 2, \cdots, s$ hervorgehenden Gleichungen unmittelbar:

$$J_2 = 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma \overline{W}_{\mathfrak{m}_\sigma} - 2\pi^2 \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma \mathfrak{L}_\sigma - 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} (\mathfrak{L}_\sigma c_{\sigma 0} - \mathfrak{L}_\sigma c_{\sigma 0}) - 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \sum_{\mu=1}^{\mu=m_\sigma} \mu (\mathfrak{L}_{\sigma\mu} \bar{c}_{\sigma\mu} - \mathfrak{L}_{\sigma\mu} c_{\sigma\mu}).$$

Die so für J_1, J_2 gewonnenen Ausdrücke trage man nun in die Gleichung $J_1 + J_2 = 0$ ein. Man erhält dann die zu Anfang dieses Artikels erwähnte, zwischen den Konstanten der Funktionen W, $\overline{W}$ bestehende Relation dargestellt durch die folgende

Fundamentalformel.

$$\text{(F.)}\quad \begin{aligned} \int\limits_{\mathfrak{R}}^{+} W d\bar W = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \{ A_\nu \mathfrak{A}_\nu \bar{\mathfrak{B}}_\nu - B_\nu \mathfrak{B}_\nu \bar{\mathfrak{A}}_\nu - (A_\nu \mathfrak{B}_\nu + \mathfrak{A}_\nu) \bar{\mathfrak{C}}_\nu \} + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{C}_\nu (\bar{\mathfrak{C}}_1 + \bar{\mathfrak{C}}_2 + \cdots + \bar{\mathfrak{C}}_\nu) \\ + 4\pi^2 \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma} (\bar{\mathfrak{L}}_{\varkappa_\sigma} + \bar{\mathfrak{L}}_{\varkappa_{\sigma+1}} + \cdots + \bar{\mathfrak{L}}_{\varkappa_s}) - 2\pi^2 \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma \bar{\mathfrak{L}}_\sigma \\ - 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} (\mathfrak{L}_\sigma \bar{c}_{\sigma 0} - \bar{\mathfrak{L}}_\sigma c_{\sigma 0}) - 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \sum_{\mu=1}^{\mu=m_\sigma} \mu (\mathfrak{L}_{\sigma\mu} \bar{c}_{\sigma\mu} - \bar{\mathfrak{L}}_{\sigma\mu} c_{\sigma\mu}) = 0. \end{aligned}$$

2.

Der auf der rechten Seite der soeben gewonnenen Formel hinter dem ersten Summenzeichen stehende, dem Index ν entsprechende Ausdruck:

$$\mathfrak{G}_\nu = A_\nu \mathfrak{A}_\nu \bar{\mathfrak{B}}_\nu - B_\nu \mathfrak{B}_\nu \bar{\mathfrak{A}}_\nu - (A_\nu \mathfrak{B}_\nu + \mathfrak{A}_\nu) \bar{\mathfrak{C}}_\nu$$

reduziert sich in dem Falle, wo A_ν, B_ν ein uneigentliches Faktorenpaar, also $A_\nu = 1$, $B_\nu = 1$ und folglich $\mathfrak{C}_\nu = 0$ ist, auf den einfacheren Ausdruck $\mathfrak{A}_\nu \bar{\mathfrak{B}}_\nu - \mathfrak{B}_\nu \bar{\mathfrak{A}}_\nu$. In dem Falle dagegen, wo A_ν, B_ν ein eigentliches Faktorenpaar ist, kann dem in Rede stehenden Ausdruck auf folgende Weise eine für die spätere Verwendung der Formel geeignetere Gestalt gegeben werden.

Man beachte, daß in dem Falle, wo A_ν, B_ν ein eigentliches Faktorenpaar ist, also A_ν, B_ν nicht beide den Wert 1 besitzen, die Größenpaare $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$; $\bar{\mathfrak{A}}_\nu, \bar{\mathfrak{B}}_\nu$ mit den Größen $\mathfrak{C}_\nu$, $\bar{\mathfrak{C}}_\nu$ beziehungsweise durch die im vorhergehenden Artikel unter (S′.) aufgeführten Gleichungen:

$$\text{(S}'_\nu.) \qquad (1 - B_\nu) \mathfrak{A}_\nu - (1 - A_\nu) \mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{C}_\nu, \qquad (1 - \bar{B}_\nu) \bar{\mathfrak{A}}_\nu - (1 - \bar{A}_\nu) \bar{\mathfrak{B}}_\nu = \bar{\mathfrak{C}}_\nu$$

verknüpft sind, und daß ein jedes diesen Gleichungen genügende Größensystem $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\bar{\mathfrak{A}}_\nu$, $\bar{\mathfrak{B}}_\nu$, wenn man unter D_ν, $\bar{D}_\nu$ die im vorliegenden Falle stets von Null verschiedenen Größen:

$$D_\nu = 2 - A_\nu - B_\nu, \qquad \bar{D}_\nu = 2 - \bar{A}_\nu - \bar{B}_\nu$$

versteht, in die durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{A}_\nu = \frac{\mathfrak{C}_\nu}{D_\nu} + (1 - A_\nu) K_\nu, \qquad \bar{\mathfrak{A}}_\nu = \frac{\bar{\mathfrak{C}}_\nu}{\bar{D}_\nu} + (1 - \bar{A}_\nu) \bar{K}_\nu,$$

$$\mathfrak{B}_\nu = -\frac{\mathfrak{C}_\nu}{D_\nu} + (1 - B_\nu) K_\nu, \qquad \bar{\mathfrak{B}}_\nu = -\frac{\bar{\mathfrak{C}}_\nu}{\bar{D}_\nu} + (1 - \bar{B}_\nu) \bar{K}_\nu$$

bestimmte Form bei passender Wahl der Konstanten K_ν, $\bar{K}_\nu$ gebracht werden kann.

Führt man nun mit Hilfe dieser Gleichungen die Größen K_ν, $\bar K_\nu$ in den mit $\mathfrak{G}_\nu$ bezeichneten Ausdruck ein, so erhält man:

$$\mathfrak{G}_\nu = \bar{\mathfrak{C}}_\nu \left(K_\nu - \frac{A_\nu B_\nu}{2 D_\nu \bar D_\nu} \mathfrak{C}_\nu \right) - \mathfrak{C}_\nu \left(\bar K_\nu - \frac{A_\nu \bar B_\nu}{2 D_\nu \bar D_\nu} \bar{\mathfrak{C}}_\nu \right) - \frac{1}{2} \bar{\mathfrak{C}}_\nu \mathfrak{C}_\nu ,$$

und man gelangt so schließlich, wenn man noch an Stelle der Konstanten K_ν, $\bar K_\nu$ neue Konstanten $\mathfrak{K}_\nu$, $\bar{\mathfrak{K}}_\nu$ vermittels der Gleichungen

$$K_\nu = \frac{\bar A_\nu B_\nu}{2 D_\nu \bar D_\nu} \mathfrak{C}_\nu + \mathfrak{K}_\nu , \qquad \bar K_\nu = \frac{A_\nu B_\nu}{2 D_\nu D_\nu} \bar{\mathfrak{C}}_\nu + \bar{\mathfrak{K}}_\nu$$

einführt, zu der Gleichung:

$$\mathfrak{G}_\nu = \bar{\mathfrak{C}}_\nu \mathfrak{K}_\nu - \mathfrak{C}_\nu \bar{\mathfrak{K}}_\nu - \frac{1}{2} \mathfrak{C}_\nu \mathfrak{C}_\nu .$$

Das so erhaltene Resultat läßt sich nun in folgender Weise aussprechen:

„Bringt man in dem Falle, wo A_ν, B_ν ein eigentliches Faktorenpaar ist, die den Bedingungen $(S'_\nu.)$ genügenden Größen $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\bar{\mathfrak{A}}_\nu$, $\bar{\mathfrak{B}}_\nu$ in die durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{A}_\nu = \left[\frac{1}{D_\nu} + (1 - A_\nu) \frac{A_\nu B_\nu}{2 D_\nu D_\nu} \right] \mathfrak{C}_\nu + (1 - A_\nu) \mathfrak{K}_\nu , \quad \bar{\mathfrak{A}}_\nu = \left[\frac{1}{\bar D_\nu} + (1 - A_\nu) \frac{A_\nu \bar B_\nu}{2 D_\nu D_\nu} \right] \bar{\mathfrak{C}}_\nu + (1 - \bar A_\nu) \bar{\mathfrak{K}}_\nu ,$$

$$\mathfrak{B}_\nu = \left[- \frac{1}{D_\nu} + (1 - B_\nu) \frac{A_\nu B_\nu}{2 D_\nu D_\nu} \right] \mathfrak{C}_\nu + (1 - B_\nu) \mathfrak{K}_\nu , \quad \bar{\mathfrak{B}}_\nu = \left[- \frac{1}{\bar D_\nu} + (1 - B_\nu) \frac{A_\nu \bar B_\nu}{2 D_\nu D_\nu} \right] \bar{\mathfrak{C}}_\nu + (1 - \bar B_\nu) \bar{\mathfrak{K}}_\nu$$

bestimmte Form und führt diese Ausdrücke in den ersten mit $\mathfrak{G}_\nu$ bezeichneten Ausdruck ein, so erhält man die Gleichung:

$$A_\nu \mathfrak{A}_\nu \mathfrak{B}_\nu - B_\nu \mathfrak{B}_\nu \mathfrak{A}_\nu - (A_\nu \mathfrak{B}_\nu + \bar{\mathfrak{A}}_\nu) \mathfrak{C}_\nu = \bar{\mathfrak{C}}_\nu \mathfrak{K}_\nu - \mathfrak{C}_\nu \bar{\mathfrak{K}}_\nu - \frac{1}{2} \mathfrak{C}_\nu \mathfrak{C}_\nu .\text{“}$$

3.

Die in der Fundamentalformel vorkommenden, zu der Zahl σ gehörigen Konstanten $c_{\sigma 0}, c_{\sigma 1}, \cdots, c_{\sigma m_\sigma}$, $\bar c_{\sigma 0}, \bar c_{\sigma 1}, \cdots, \bar c_{\sigma m_\sigma}$ treten ihrer Definition gemäß als Koeffizienten von Potenzreihen auf; es bestehen nämlich auf Grund der Gleichungen (R.) des Art. 1 für einen beliebigen dem Gebiet des Punktes $\mathscr{P}_\sigma$ angehörigen Punkt ζ die Darstellungen:

$$F_\sigma(\zeta) = W(\zeta) - \left(\mathfrak{L}_\sigma \ln \frac{1}{\zeta_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{\zeta_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{\zeta_\sigma^2} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{\zeta_\sigma^{m_\sigma}} \right) = c_{\sigma 0} + c_{\sigma 1} \zeta_\sigma + c_{\sigma 2} \zeta_\sigma^2 + \cdots ,$$

$$\bar F_\sigma(\zeta) = \bar W(\zeta) - \left(\bar{\mathfrak{L}}_\sigma \ln \frac{1}{\zeta_\sigma} + \frac{\bar{\mathfrak{L}}_{\sigma 1}}{\zeta_\sigma} + \frac{\bar{\mathfrak{L}}_{\sigma 2}}{\zeta_\sigma^2} + \cdots + \frac{\bar{\mathfrak{L}}_{\sigma m_\sigma}}{\zeta_\sigma^{m_\sigma}} \right) = \bar c_{\sigma 0} + \bar c_{\sigma 1} \zeta_\sigma + \bar c_{\sigma 2} \zeta_\sigma^2 + \cdots ,$$

wobei für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ $\zeta_\sigma = \zeta^{-\frac{1}{\nu_\sigma}}$, also $\zeta = \zeta_\sigma^{-\nu_\sigma}$, für $\sigma = q+1, q+2, \cdots, s$ $\zeta_\sigma = (\zeta - a_\sigma)^{\frac{1}{\nu_\sigma}}$, also $\zeta = a_\sigma + \zeta_\sigma^{\nu_\sigma}$, und nach früherem der Fall nicht ausgeschlossen ist, daß die Größen $\mathfrak{L}, \overline{\mathfrak{L}}$ teilweise oder auch sämtlich den Wert Null besitzen. Infolgedessen kann man die Konstanten $c_{\sigma n}, \bar{c}_{\sigma n}, {\scriptstyle n>0}$, durch die Werte, welche die nach ζ_σ genommenen Derivierten der vorher für einen beliebigen dem Gebiet des Punktes $\mathcal{P}_\sigma$ angehörigen Punkt ζ definierten Funktionen $F_\sigma(\zeta)$, $\bar{F}_\sigma(\zeta)$ für den Punkt $\mathcal{P}_\sigma$ oder, was dasselbe, für $\zeta_\sigma = 0$ besitzen, ausdrücken. Es ergibt sich nämlich unmittelbar:

$$c_{\sigma n} = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n F_\sigma(\zeta)}{d\zeta_\sigma^n}\right)_0, \qquad \bar{c}_{\sigma n} = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n \bar{F}_\sigma(\zeta)}{d\zeta_\sigma^n}\right)_0, \qquad \begin{array}{l} \sigma = 1, 2, \cdots, s, \\ n = 1, 2, 3, \cdots, \end{array}$$

wobei der angehängte Index 0 andeuten soll, daß der Grenzwert der zwischen den runden Klammern stehenden n^{ten} Derivierten für $\lim \zeta_\sigma = 0$ zu nehmen ist. Unterscheidet man jetzt den Fall, wo σ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, q$ ist, von dem Fall, wo σ eine Zahl aus der Reihe $q+1, q+2, \cdots, s$ ist, so kann man in den eben gewonnenen Formeln, auf Grund der vorher für die beiden Fälle angeführten, zwischen ζ und ζ_σ bestehenden Beziehung, die Größe ζ durch die Größe ζ_σ ausdrücken, also

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } \sigma = 1, 2, 3, \cdots, q & \left\{ \left(\dfrac{d^n F_\sigma(\zeta)}{d\zeta_\sigma^n}\right)_0 = \left(\dfrac{d^n F_\sigma(\zeta_\sigma^{-\nu_\sigma})}{d\zeta_\sigma^n}\right)_0, \quad \left(\dfrac{d^n \bar{F}_\sigma(\zeta)}{d\zeta_\sigma^n}\right)_0 = \left(\dfrac{d^n \bar{F}_\sigma(\zeta_\sigma^{-\nu_\sigma})}{d\zeta_\sigma^n}\right)_0, \right. \\ \text{für } \sigma = q+1, q+2, \cdots, s & \left\{ \left(\dfrac{d^n F_\sigma(\zeta)}{d\zeta_\sigma^n}\right)_0 = \left(\dfrac{d^n F_\sigma(a_\sigma + \zeta_\sigma^{\nu_\sigma})}{d\zeta_\sigma^n}\right)_0, \quad \left(\dfrac{d^n \bar{F}_\sigma(\zeta)}{d\zeta_\sigma^n}\right)_0 = \left(\dfrac{d^n \bar{F}_\sigma(a_\sigma + \zeta_\sigma^{\nu_\sigma})}{d\zeta_\sigma^n}\right)_0, \right. \end{array}\right. \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

setzen, und man erhält dann schließlich

$$\begin{array}{ll} \text{für } \sigma = 1, 2, 3, \cdots, q & \left\{ c_{\sigma n} = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{d^n F_\sigma(\zeta_\sigma^{-\nu_\sigma})}{d\zeta_\sigma^n}\right)_0, \quad \bar{c}_{\sigma n} = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{d^n \bar{F}_\sigma(\zeta_\sigma^{-\nu_\sigma})}{d\zeta_\sigma^n}\right)_0, \right. \\ \text{für } \sigma = q+1, q+2, \cdots, s & \left\{ c_{\sigma n} = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{d^n F_\sigma(a_\sigma + \zeta_\sigma^{\nu_\sigma})}{d\zeta_\sigma^n}\right)_0, \quad \bar{c}_{\sigma n} = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{d^n \bar{F}_\sigma(a_\sigma + \zeta_\sigma^{\nu_\sigma})}{d\zeta_\sigma^n}\right)_0, \right. \end{array} \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

ANHANG.

I.

Zur Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

II.

Beweis zweier Sätze der Functionentheorie.

III.

Ueber ein Randintegral.

IV.

Zur Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

VON

FRIEDRICH PRYM.

ABDRUCK AUS DEM „JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK“.

Erste Abhandlung.

Zur Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 70, Seite 354—362.

Mit der Integration des obigen Systems von Differentialgleichungen, unter Zugrundelegung von charakteristischen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen, beschäftigen sich die beiden Arbeiten von *Riemann*: „*Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse 1851*" und „*Theorie der Abelschen Functionen 1857*". Die in der erstern Arbeit begonnenen Untersuchungen über die Integration des obigen Systems hat *Riemann* in der zweiten Arbeit ausgedehnt auf eine allenthalben $n$blättrige, zusammenhangende, unbegrenzte, geschlossene Fläche T mit einer endlichen Anzahl beliebig gelegener Verzweigungspunkte, aus der mit Hülfe von $2p$ Querschnitten eine einfach zusammenhangende Fläche T' gebildet wird. Als ein grossartiges Resultat dieser letzteren Untersuchungen ergab sich die Erkenntniss, dass zu jeder graphisch willkürlich gewählten Fläche T immer eine Gruppe sogenannter *Abel*scher, in der Fläche T' oder T'' (s. w. u. art. 2) einwerthiger Integrale existirt, und ferner, dass eben diese *Abel*schen Integrale solche Functionen $u + vi$ von x und y sind, dass dieselben durch die Bedingung, den obigen Differentialgleichungen zu genügen, und durch passend gewählte, von einander unabhängige Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen vollständig bestimmt werden können.

Nach diesen Entdeckungen *Riemann*s lag es nahe, einen weitern Fortschritt in der Functionenlehre von der Theorie der partiellen Differentialgleichungen aus, als dem Centrum der bisherigen Untersuchungen, zu erwarten. Gelänge es, das obige System unter Zugrundelegung neuer charakteristischer Grenzbedingungen zu integriren, so würde das Resultat die Entdeckung und die Erkenntniss neuer Gruppen von Functionen der complexen Variable $x + yi$ sein. Dass dieser Versuch bis jetzt nicht gemacht wurde, mag theilweise wohl seinen Grund haben in gewissen, der jüngsten Zeit angehörigen Bestrebungen, die einfachen, weil naturgemässen Methoden *Riemanns* durch complicirte, vielfachen Ausnahmefällen unterworfene, algebraische zu ersetzen. Dadurch traten andere Probleme in den Vordergrund, die von der ursprünglichen, von *Riemann* eingeschlagenen Richtung nur zu frühe abzulenken geeignet waren. Ein Versuch von *Roch* in der Arbeit: „*De theoremate quodam circa functiones abelianas 1863*": die obigen Differentialgleichungen unter Fixirung neuer Grenzbedingungen zu behandeln, muss als verfehlt betrachtet werden, da namentlich nothwendige Relationen zwischen den in die Grenzbedingungen einzuführenden Constanten übersehen wurden; doch lässt sich auch dieser Fall noch mit Hülfe der von *Riemann* geschaffenen Methoden vollständig behandeln.

Betrachtet man nun genauer die bis jetzt bekannten Fälle, in denen es gelungen ist, das obige System von Differentialgleichungen zu integriren, so erkennt man leicht, dass in jedem dieser Fälle die Grenzbedingungen so gewählt sind, dass die Lösung der Aufgabe von der Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung, der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, abhängig gemacht werden kann, und dass diese Erscheinung darin ihren Grund hat, dass die Grenzbedingungen u allein enthalten. In Folge dessen erscheint die Function u für sich bestimmbar, und nachdem u gefunden, läßt sich in jedem Falle die zugehörige Function v durch ein einfaches, u enthaltendes Integral ausdrücken. Man erkennt weiter, dass es unmöglich ist, auf diese einfache Form das Problem zu reduciren, wenn die Grenzbedingungen u und v untrennbar enthalten, und auch, dass die von *Riemann* angewandten Methoden für die Behandlung solcher Fälle nicht mehr ausreichen.

Mehrjährige Untersuchungen auf dem Gebiete der Functionenlehre, die jetzt vollständig abgeschlossen vor mir liegen und in ihrer Gesammtheit in kurzer Zeit veröffentlicht werden sollen, haben mich nun in den Stand gesetzt, unter Anwendung neuer Methoden das obige System von Differentialgleichungen auch in solchen Fällen zu integriren, wo die Grenzbedingungen u und v untrennbar enthalten. Die folgende kurze Notiz hat den Zweck, vorläufig nur ein Resultat dieser meiner Untersuchungen zur allgemeinen Kenntniss zu bringen, das mir aus dem Grunde schon jetzt einer Mittheilung nicht unwerth erscheint, weil es zeigt, dass die, zu jeder Fläche T existirenden sogenannten *Abel*schen Integrale, deren Verhalten an der Begrenzung der aus T zu bildenden Fläche T' oder T'' dadurch charakterisirt ist, dass sie, in T' oder T'' einwerthig, beim Ueberschreiten der Querschnitte um Constante, Periodicitätsmodulen genannt, zunehmen, nur specielle Fälle sind aus einer grossen Klasse allgemeinerer Functionen $u + vi$ der complexen Variable $x + yi$, die ebenfalls wie die sogenannten *Abel*schen Integrale, in T' oder T'' einwerthig, durch von einander unabhängige Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen vollständig bestimmt werden können, und deren Verhalten an der Begrenzung der Fläche T' oder T'' sich kurz dahin charakterisiren lässt, dass sie beim Ueberschreiten der Querschnitte in lineare Ausdrücke von sich selbst übergehen.

1.

Die complexe Grösse $z = x + yi$ denke man sich nach der *Gauss*schen Methode vertreten durch den Punkt einer unbegrenzten, im Unendlichen geschlossenen Ebene, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y sind. In dieser Z-Ebene denke man sich eine allenthalben $n$fach ausgebreitete, unbegrenzte, im Unendlichen als geschlossen zu betrachtende, zusammenhangende Fläche T mit einer endlichen Anzahl beliebig gelegener Verzweigungspunkte graphisch willkürlich angenommen. Einem jeden Punkte der Fläche T entspricht dann ein und nur ein Werthepaar x, y; umgekehrt aber entsprechen jedem Werthepaare x, y im allgemeinen n übereinanderliegende Punkte der Fläche T, und zwar einer in jedem Blatte. Ist w die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte dieser $n$blättrigen, unbegrenzten, geschlossenen Fläche, $2p+1$ die Zahl, die den Zusammenhang der Fläche angiebt, so hat man stets $w = 2(p+n-1)$, $2p = w - 2n + 2$ (cf. *Riemann A. F. 7. pag. 29*). Der specielle Fall $w = 2n - 2$, $p = 0$ bleibe im Folgenden ausgeschlossen. Die $2p+1$ fach zusammenhangende Fläche T kann dann auf die verschiedensten Weisen durch $2p$ Querschnitte in eine einfach zusammenhangende Fläche T' zerlegt werden. Als die, für die weiteren Betrachtungen passendste Zerschneidung hat sich die folgende ergeben.

Man zerlege zunächst in der Weise, wie es *Riemann (A. F. 19. pag. 43)* angegeben, die Fläche T in eine einfach zusammenhangende durch ein, mit all seinen Theilen im Endlichen liegendes Schnittnetz, welches aus p Paaren von zwei, in einem und demselben Punkte anfangenden und endenden Schnitten $a_1, b_1; \cdots; a_\nu, b_\nu; \cdots; a_p, b_p$ besteht und aus $p-1$ Schnitten $c_1, c_2, \cdots, c_{p-1}$, welche die einzelnen Paare in der Weise verbinden, dass allgemein c_ν von einem Punkte von b_ν nach einem Punkte von $a_{\nu+1}$ geht. Betrachtet man die beiden Seiten eines jeden Schnittes a, b, c als zur Begrenzung der, durch diese Zerschneidung aus T entstandenen einfach zusammenhangenden Fläche gehörig, so besteht diese Begrenzung aus *einem* Stücke, und dieselbe wird positiv durchlaufen, wenn dabei in jedem Punkte die Richtung des Fortschreitens zu der Richtung der nach dem Innern des anstossenden Flächenteiles ziehbaren Normale in derselben Beziehung steht wie die Richtung der X-Axe zur Richtung der Y-Axe. Diese Richtung markire man längs der Begrenzung durch Pfeile. Bei den Schnitten a, b unterscheide man eine positive und negative Seite, und zwar wähle man die Bezeichnung so, dass man, auf der positiven Seite von a_ν in der Richtung der Pfeile (ohne Rücksicht auf den etwa einmündenden Schnitt $c_{\nu-1}$) sich fortbewegend, von der negativen Seite von b_ν auf die positive Seite von b_ν geführt wird: und folglich, auf der positiven Seite von b_ν in der Richtung der Pfeile (ohne Rücksicht auf den etwa einmündenden Schnitt c_ν) sich fortbewegend, von der positiven Seite von a_ν auf die negative Seite von a_ν gelangt. Dies ist stets ausführbar, und man kann immer, entweder bei a_ν oder bei b_ν zuerst die Bezeichnung willkürlich wählen.

Man nehme dann die $p-1$ Schnitte $c_1, c_2, \cdots, c_{p-1}$ weg und ersetze sie durch p neue Schnittlinien $c_1, c_2, \cdots, c_p$, die man von einem willkürlich gewählten, im Endlichen liegenden Punkte π der Fläche in der Weise zieht, dass allgemein c_ν vom Punkte π nach dem gemeinschaftlichen Anfangs- und Endpunkte der Schnitte a_ν, b_ν führt und dort auf der positiven Seite von a_ν wie von b_ν mündet. Die Linie c_ν soll während ihres Laufes weder sich selbst, noch irgend eine andere der Linien a, b, c schneiden oder berühren. Beide Seiten eines Schnittes c_ν betrachte man als zur Begrenzung gehörig, und bezeichne allgemein bei dem Schnitte c_ν, vom Punkte π aus gesehen, die rechte Seite als positive, die linke als negative. Bei dieser Art der Bezeichnung führt ein Durchlaufen des, von den beiden Seiten der Schnitte a_ν und b_ν gebildeten Theiles der Begrenzung in der Richtung der Pfeile stets von der negativen Seite des Schnittes c_ν auf die positive Seite von c_ν. Die Schnitte a, b bilden dann mit diesen Schnitten $c_1, c_2, \cdots, c_p$ auch ein Schnittnetz, welches die $2p+1$ fach zusammenhangende Fläche T in eine einfach zusammenhangende Fläche zerlegt. Diese Art der Zerschneidung soll den folgenden Betrachtungen zu Grunde gelegt, und die dadurch aus T entstehende, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c begrenzte, einfach zusammenhangende Fläche fortan als Fläche T'' bezeichnet werden. Es erscheint nicht überflüssig, zu bemerken, dass man dieses neue Schnittnetz aus dem ursprünglichen auch durch einfache Dehnungen der Schnitte $c_1, c_2, \cdots, c_{p-1}$, verbunden mit Verschiebungen ihrer Mündungspunkte auf den Schnitten a, b erhalten kann.

2.

In der Fläche T'' fixire man beliebig r Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_\varrho, \cdots, \varepsilon_r$, und bilde aus der Fläche T'' eine neue Fläche, indem man von dem früher angenommenen Punkte π, in welchem die sämmtlichen Schnitte c zusammenstossen, durch das Innere der Fläche T'' r, einander und auch sich selbst nicht schneidende Linien l nach den r Punkten ε zieht, allgemein nach ε_ϱ die Linie l_ϱ. Eine jede solche Linie l_ϱ fasse man als einen Schnitt in der Fläche T'' auf, und bezeichne, vom Punkte π aus gesehen, die rechte Seite eines solchen Schnittes als positive, die linke als negative. Die auf diese Weise, durch Einführung der r Schnitte l aus der Fläche T'' entstehende, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c, l begrenzte, einfach zusammenhangende Fläche bezeichne man als

Fläche T'''. In der Begrenzung dieser Fläche T''' nenne man entsprechende Punkte überhaupt je zwei, denen dasselbe Coordinatenpaar x, y zukommt, und die sich nur dadurch unterscheiden, dass der eine auf der positiven, der andere auf der negativen Seite eines Schnittes a, b, c oder l liegt.

Bezeichnet man die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes ε_ϱ in Bezug auf das gewählte Axensystem durch x_ϱ, y_ϱ, setzt $x_\varrho + y_\varrho i = z_\varrho$, und versteht unter r_ϱ entweder den Ausdruck $z - z_\varrho$, oder den Ausdruck $(z - z_\varrho)^{\frac{1}{\nu}}$, oder den Ausdruck $\frac{1}{z}$, oder endlich den Ausdruck $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{\nu}}$, jenachdem der Punkt ε_ϱ entweder im Endlichen liegt und kein Verzweigungspunkt ist, oder im Endlichen liegt und ein $\nu - 1$ facher Verzweigungspunkt ist, oder im Unendlichen liegt und kein Verzweigungspunkt ist, oder endlich im Unendlichen liegt und ein $\nu - 1$ facher Verzweigungspunkt ist: so wird r_ϱ in der Umgebung des Punktes ε_ϱ eine einwerthige und stetige Function des Ortes sein, die im Punkte ε_ϱ unendlich klein von der ersten Ordnung (0^1) wird *(R. A. F. 2. pag. 17)*. Bezeichnet man dann ferner durch $\varphi_\varrho(r_\varrho)$ einen endlichen Ausdruck von der Form

$$\varphi_\varrho(r_\varrho) = L_\varrho \, ln \, r_\varrho + L_\varrho^{(1)} \frac{1}{r_\varrho} + L_\varrho^{(2)} \frac{1}{r_\varrho^2} + \cdots,$$

wo $L_\varrho, L_\varrho^{(1)}, L_\varrho^{(2)}, \cdots$ willkürliche Constante bedeuten, die auch theilweise den Wert Null haben können, so wird die Function $\varphi_\varrho(r_\varrho)$ in der Umgebung des Punktes ε_ϱ, wenn z den Schnitt l_ϱ nicht überschreitet, einwerthig sein, im Punkte ε_ϱ unstetig werden in der, durch den Ausdruck φ bestimmten Art, und in den Punkten auf der positiven Seite des, in die Umgebung des Punktes ε_ϱ hineinfallenden Stückes des Schnittes l_ϱ um die Constante $-2\pi i L_\varrho$ grösser sein als in den entsprechenden Punkten auf der negativen Seite. Einem jeden der r Punkte ε_ϱ ordne man nun eine solche Funktion $\varphi_\varrho(r_\varrho)$ zu, ohne damit etwa später zu treffenden Bestimmungen über die Constanten L vorzugreifen.

3.

Nach diesen Vorbereitungen lässt sich das, in der Einleitung erwähnte Resultat folgendermassen aussprechen:

„Nimmt man, den $2p$ Schnitten a_ν, b_ν $(\nu = 1, 2, \cdots, p)$ entsprechend, $2p$ constante Grössen A_ν, B_ν $(\nu = 1, 2, \cdots, p)$, die sämmtlich den Modul 1 besitzen, willkürlich an: nennt, mit Rücksicht auf Folgendes, A_ν, B_ν ein Factorenpaar der ersten Art, wenn nicht beide Grössen A_ν, B_ν den Werth 1 haben, dagegen ein Factorenpaar der zweiten Art, wenn beide Grössen gleich 1 sind: nimmt ferner zu jedem Factorenpaare A_ν, B_ν eine Grösse Λ_ν an: deren Werth beliebig gewählt werden darf, wenn A_ν, B_ν ein Factorenpaar der ersten Art ist,

deren Werth dagegen Null sein soll, wenn A_ν, B_ν ein Factorenpaar der zweiten Art ist: nimmt endlich, sooft für einen Index ν die drei Grössen A_ν, B_ν, Δ_ν die Werthe 1, 1, 0 *resp. haben, noch eine vierte Grösse A'_ν willkürlich an, und legt den r, in den oben angenommenen Ausdrücken $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_r$ vorkommenden Constanten $L_1, L_2, \cdots, L_r$ solche Werthe zu, dass der Gleichung*

$$2\pi i \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} L_\varrho = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \Delta_\nu$$

Genüge geleistet wird, während die Werthe der noch übrigen Constanten in den Ausdrücken φ keinen Beschränkungen unterliegen sollen und vollständig willkürlich gewählt werden mögen; so existirt zu der Fläche T'' immer eine complexe Function $u + vi$ der Coordinaten x, y mit folgenden Eigenschaften:

1) *Die Function $u + vi$ ist eine in der Fläche T'' allenthalben einwerthige, und mit Ausnahme der Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$ auch stetige Function des Ortes oder Punktes x, y, die in der ganzen Fläche T'' den Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ genügt.*

2) *Für die r Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$ wird diese Function der complexen Variable $x + yi$ unstetig, und zwar allgemein für den Punkt ε_ϱ unstetig in der, durch den Ausdruck*

$$\varphi_\varrho(r_\varrho) = L_\varrho \ln r_\varrho + L_\varrho^{(1)} \frac{1}{r_\varrho} + L_\varrho^{(2)} \frac{1}{r_\varrho^2} + \cdots$$

angegebenen Art, so dass die Differenz $(u + vi) - \varphi_\varrho(r_\varrho)$ für den Punkt ε_ϱ stetig bleibt.

3) *Die Werthe von $u + vi$ in je zwei entsprechenden Punkten auf der positiven und negativen Seite der, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c, l gebildeten Begrenzung der Fläche T'', die man durch $(u + vi)^+$ und $(u + vi)^-$ bezeichne, sind in der Weise verknüpft, dass allgemein*

$$\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \{ (u + vi)^+ = A_\nu (u + vi)^- + A'_\nu, \\
&\text{längs } b_\nu \{ (u + vi)^+ = B_\nu (u + vi)^- + B'_\nu, \\
&\text{längs } c_\nu \{ (u + vi)^+ = (u + vi)^- + \Delta_\nu, \\
&\text{längs } l_\varrho \{ (u + vi)^+ = (u + vi)^- - 2\pi i L_\varrho,
\end{aligned}$$

für $\nu = 1, 2, \cdots, p$; $\varrho = 1, 2, \cdots, r$; wobei zwischen den $5p$ Constanten A_ν, B_ν, Δ_ν, A'_ν, B'_ν ($\nu = 1, 2, \cdots, p$) die p Relationen

$$\Delta_\nu = B'_\nu (A_\nu - 1) - A'_\nu (B_\nu - 1)$$

für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ stattfinden.

4) *Durch die bis jetzt erwähnten Eigenschaften (immer mit Rücksicht auf die vorher gemachten Annahmen, wonach also die Werthe der sämmtlichen Constanten A, B, Δ, L, $L^{(1)}$, $L^{(2)}$, $\cdots$ festgelegt sind, und ausserdem noch die Werthe all der Constanten A'_ν, die*

zu Indices ν gehören, für die A_ν, B_ν, $\Delta_\nu = 1, 1, 0$ resp.) ist die Function $u + vi$ bis auf eine additive willkürliche Constante bestimmt."

Man bemerke, dass die $p + 1$ Relationen:

$$2\pi i \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} L_\varrho = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \Delta_\nu; \qquad \Delta_\nu = B'_\nu(A_\nu - 1) - A'_\nu(B_\nu - 1); \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, p)$$

die zwischen den $5p + r$, in den Grenzbedingungen *3)* auftretenden Constanten stattfinden, nicht den Charakter von Beschränkungen haben, sondern aus der Einwerthigkeit der Function $u + vi$ allein schon nothwendig folgen. Sind alle p Factorenpaare A_ν, B_ν von der zweiten Art, so ergiebt sich $\Sigma L_\varrho = 0$ (cf. *R. A. F. 3. pag. 19*). Das unter *4)* enthaltene Resultat lässt sich auch folgendermassen aussprechen:

„*Eine in der Fläche T'' (die die Schnitte l nicht enthält) allenthalben einwerthige und stetige Function $u + vi$ der complexen Variable $x + yi$, deren Werthe in je zwei entsprechenden Punkten auf der positiven und negativen Seite der, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c gebildeten Begrenzung der Fläche T'' in der Weise verknüpft sind, dass allgemein (für $\nu = 1, 2, \cdots, p$)*

$$\text{längs } a_\nu \{ (u+vi)^+ = A_\nu (u+vi)^- + A'_\nu,$$

$$\text{längs } b_\nu \{ (u+vi)^+ = B_\nu (u+vi)^- + B'_\nu,$$

$$\text{längs } c_\nu \{ (u+vi)^+ = (u+vi)^-,$$

ist immer eine Constante, wenn nur die $2p$ Grössen A_ν, B_ν sämmtlich den Modul 1 besitzen, und ferner von den $2p$ übrigen Constanten A'_ν, B'_ν all die Constanten A'_ν, die zu Indices ν gehören, für die gleichzeitig $A_\nu = 1$, $B_\nu = 1$ ist, den Wert Null haben."

Durch diese Resultate meiner Untersuchungen erscheint nun auch die Theorie dieser merkwürdigen transcendenten Functionen $u + vi$ auf eine, von der Ausdrucksform unabhängige, keinen Ausnahmefällen unterworfene Grundlage gestützt. Nennt man von den unzählig vielen Functionen $u + vi$ der complexen Variable $x + yi$, deren Existenz im Vorigen ausgesprochen wurde, zu derselben Gruppe gehörig alle diejenigen, für die die $2p$ Constanten A_ν, B_ν dieselben sind, und bezeichnet eine solche Gruppe durch das Symbol $\binom{A_1, A_2, \cdots, A_p}{B_1, B_2, \cdots, B_p}$, Gruppencharakteristik genannt, so erkennt man sofort, dass die Gesammtheit der, zu der Fläche T'' gehörigen sogenannten *Abel*schen Integrale die Gruppe $\binom{1, 1, \cdots, 1}{1, 1, \cdots, 1}$ bildet. Diese specielle, von *Riemann* untersuchte Gruppe nimmt zu den übrigen Gruppen gleichsam eine Ausnahmestellung dadurch ein, dass von den zu ihr gehörigen allenthalben endlichen Functionen eine jede sich durch je p specielle dieser Functionen, die linearunabhängig sind, linear ausdrücken lässt *(R. A. F. 4. pag. 20)*, während von den, zu irgend einer andern Gruppe gehörigen allenthalben endlichen

Functionen $u + vi$ eine jede sich schon durch je $p-1$ specielle dieser Functionen, die linearunabhängig sind, linear ausdrücken lässt.

Es existirt noch eine zweite grosse Klasse von Functionen $U + Vi$ der complexen Variable $x + yi$, die, in T' oder T''' einwerthig, nur in den Punkten ε_ϱ unstetig werden wie Functionen $\varphi_\varrho(r_\varrho)$ und beim Ueberschreiten der Querschnitte in lineare Ausdrücke von sich selbst übergehen. Sie unterscheiden sich von den vorher betrachteten Functionen $u + vi$ wesentlich dadurch, dass für sie die $2p$ Constanten A_ν, B_ν nicht sämmtlich den Modul 1 besitzen, und dass sie in Folge dessen nicht wie die Functionen $u + vi$ durch von einander unabhängige Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen allein bestimmt werden können. Alle diese noch übrigen Functionen $U + Vi$ sind in der Form

$$U + Vi = C + \int e^J \frac{d(u+vi)}{d(x+yi)} d(x+yi)$$

darstellbar, wobei J eine allenthalben endliche Function der Gruppe $\binom{1, 1, \cdots, 1}{1, 1, \cdots, 1}$ bedeutet, $u + vi$ eine der vorher betrachteten Functionen, und C eine Constante. Meine in der Einleitung erwähnte, demnächst erscheinende Arbeit, auf die ich wegen weiterer Ausführungen hier verweisen muss, enthält die vollständige Theorie sowohl der Functionen $u + vi$ wie der Functionen $U + Vi$: eine Theorie, dadurch bemerkenswerth, dass aus ihr die Haupteigenschaften der durch Quotienten von ϑ-Functionen darstellbaren Gebilde (vergl. meine Arbeit: „*Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche, Zürich 1866.*“) unabhängig vom Ausdrucke, ohne also die Kenntniss der ϑ-Function vorauszusetzen, abgeleitet werden können. Schliesslich bemerke ich noch, dass einige meiner hierhergehörigen Methoden und Resultate durch meine sich regelmässig wiederholenden Vorlesungen über Functionentheorie schon in den Besitz meiner Schüler übergegangen sind.

Würzburg, im Sommer 1869.

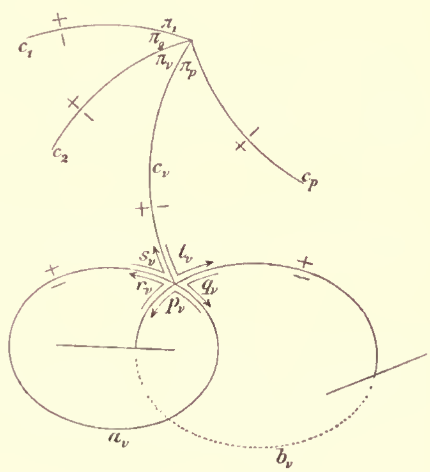
Zweite Abhandlung.

Beweis zweier Sätze der Functionentheorie.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 71, Seite 223—236.

1.

Man nehme eine $2p+1$ fach zusammenhangende Fläche T und zerlege dieselbe genau in der Weise, wie art. 1 meiner Arbeit in Bd. 70, Heft 4 dieses Journals es angiebt, in eine einfach zusammenhangende Fläche T'' durch p Schnittpaare a_ν, b_ν und durch p, von demselben Punkte π ausgehende Schnittlinien $c_1, c_2, \cdots, c_p$. Die dort angewandten Bezeichnungen und getroffenen Bestimmungen lasse man ungeändert bestehen und füge die folgenden neu hinzu. Den gemeinsamen Mündungspunkt der drei Schnitte a_ν, b_ν, c_ν bezeichne man fünffach als p_ν, q_ν, r_ν, s_ν, t_ν, jenachdem man sich in dem einen oder andern der fünf, von den drei Schnitten dort gebildeten Winkelräume befindet. Den gemeinsamen Mündungspunkt der p Schnitte c bezeichne man (unter Wegnahme des Buchstaben π ohne Index) p-fach als $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_p$, und zwar als π_ν, wenn man sich auf der positiven Seite des Schnittes c_ν befindet. Ausserdem treffe man, lediglich der einfachern Bezeichnung später wegen, die Bestimmung, dass die p Schnitte c so gezogen seien, dass man, um den gemeinsamen Mündungspunkt derselben umgekehrt wie der Zeiger einer Uhr herumgehend, die Schnitte c successive in der Reihenfolge $c_1, c_2, \cdots, c_p$ überschreitet. Die nebenstehende Figur veranschaulicht eine mögliche Art der Bezeichnung.



Für die Begrenzung der Fläche T'', die von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c gebildet wird, sei gegeben (z. B. in Folge graphischer Annahme) eine längs der ganzen Begrenzung einwerthige und stetige Function f des Ortes oder Punktes in der Begrenzung, deren Werte in je zwei entsprechenden Punkten auf der positiven und negativen Seite der Begrenzung, die man durch f^+ und f^- bezeichne, in der Weise verknüpft sein sollen, dass allgemein für $\nu = 1, 2, \cdots, p$

$$(G.) \qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \{ f^+ = A_\nu f^- + A'_\nu, \\ &\text{längs } b_\nu \{ f^+ = B_\nu f^- + B'_\nu, \\ &\text{längs } c_\nu \{ f^+ = f^- + \varDelta_\nu. \end{aligned}$$

wobei die $5p$ Grössen A_ν, B_ν, A'_ν, B'_ν, $\varDelta_\nu$ constante Werthe haben sollen. Die Frage ist dann, ob die der Function f auferlegte Bedingung, längs der Begrenzung einwerthig und stetig zu sein, mit beliebigen Werthen der $5p$ Constanten verträglich ist, oder ob dieselbe nothwendige Relationen zwischen diesen Constanten zur Folge hat.

Bezeichnet man den Werth, den die Function f in irgend einem Punkte β der Begrenzung hat, durch f_β, und wendet die Gleichungen $(G.)$ zunächst auf die Mündungsstelle der drei Schnitte a_ν, b_ν, c_ν an, so ergeben sich mit Rücksicht auf die Figur die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} &1)\ f_{q_\nu} = A_\nu f_{p_\nu} + A'_\nu, \qquad 2)\ f_{r_\nu} = B_\nu f_{p_\nu} + B'_\nu, \\ &3)\ f_{s_\nu} = A_\nu f_{r_\nu} + A'_\nu = A_\nu B_\nu f_{p_\nu} + A_\nu B'_\nu + A'_\nu, \\ &4)\ f_{t_\nu} = B_\nu f_{q_\nu} + B'_\nu = A_\nu B_\nu f_{p_\nu} + B_\nu A'_\nu + B'_\nu, \\ &5)\ f_{s_\nu} = f_{t_\nu} + \varDelta_\nu. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen 3) und 4) folgt durch Subtraction

$$f_{s_\nu} - f_{t_\nu} = B'_\nu (A_\nu - 1) - A'_\nu (B_\nu - 1),$$

während aus der Gleichung 5) die Differenz derselben Functionswerthe sich gleich $\varDelta_\nu$ ergiebt. Man hat also für $\nu = 1, 2, \cdots, p$:

$$\varDelta_\nu = B'_\nu (A_\nu - 1) - A'_\nu (B_\nu - 1).$$

Wendet man ebenso die Gleichungen $(G.)$ auf die Mündungsstelle der p Schnitte c an, so erhält man die p Gleichungen

$$f_{\pi_1} - f_{\pi_2} = \varDelta_1, \quad f_{\pi_2} - f_{\pi_3} = \varDelta_2, \quad \cdots, \quad f_{\pi_{p-1}} - f_{\pi_p} = \varDelta_{p-1}, \quad f_{\pi_p} - f_{\pi_1} = \varDelta_p,$$

und durch Addition dieser sämmtlichen p Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \varDelta_\nu = 0.$$

Man hat so das Resultat, dass wenn eine längs der ganzen Begrenzung der Fläche T' einwerthige und stetige Function f des Ortes oder Punktes in der Begrenzung gegeben vorliegt, deren Werthe f^+ und f^- in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten durch Gleichungen von der Form $(G.)$ verknüpft sind, dann zwischen den $5p$ Constanten A_ν, B_ν, A'_ν, B'_ν, $\varDelta_\nu$ nothwendig die $p+1$ Relationen

$$(G'.) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \varDelta_\nu = 0, \qquad \varDelta_\nu = B'_\nu(A_\nu - 1) - A'_\nu(B_\nu - 1), \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, p)$$

stattfinden. Läge an Stelle der Fläche T' die im art. 2 der oben citirten Arbeit gebildete Fläche T''' vor, so dass im Punkte π noch r Linien l_ϱ mündeten, und wäre dann längs l_ϱ: $f^+ = f^- - 2\pi i L_\varrho$, während f im Punkte ε_ϱ und in dessen Umgebung sich wie eine Function $\varphi_\varrho(r_\varrho)$ verhielte, so würde, unter Festhaltung der übrigen, der Function f auferlegten Bedingungen, an Stelle der ersten Gleichung unter $(G'.)$ die neue

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \varDelta_\nu - 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} L_\varrho = 0$$

treten, während die übrigen p Gleichungen unter $(G'.)$ ungeändert blieben. Es folgt dies unmittelbar, wenn man in derselben Weise wie vorher operirt; auch erkennt man leicht, dass diese Resultate unabhängig sind von der Ordnung, in der die Schnitte c und l um ihren gemeinsamen Mündungspunkt herum auf einander folgen.

2.

Eine complexe Function $u+vi$ der Coordinaten x, y sei definirt durch die folgenden Bedingungen:

1) In der ganzen Fläche T' soll sie eine allenthalben einwerthige und stetige Function des Ortes oder Punktes x, y sein und den Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ genügen.
2) Ihre Werthe in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten sollen in der Weise verknüpft sein, dass allgemein für $\nu = 1, 2, \cdots, p$

$$\text{längs } a_\nu \{ (u+vi)^+ = A_\nu (u+vi)^- + A'_\nu,$$
$$\text{längs } b_\nu \{ (u+vi)^+ = B_\nu (u+vi)^- + B'_\nu,$$
$$\text{längs } c_\nu \{ (u+vi)^+ = (u+vi)^-.$$

Ueber die $4p$ Constanten A_ν, B_ν, A'_ν, B'_ν sei Folgendes festgesetzt. Die $2p$ Grössen A_ν, B_ν sollen sämmtlich den Modul 1 besitzen, im übrigen aber willkürlich gewählt sein. All' die Constanten A'_ν, die zu Indices ν gehören, für die gleichzeitig $A_\nu = 1$, $B_\nu = 1$ gewählt ist, sollen den Werth Null haben. In Betreff der Werthe der noch übrigen Constanten sei nichts festgesetzt; aus dem vorigen Artikel weiss man, dass in Folge der Bedingungen 1) in diesem Falle zwischen den Constanten immer die p Relationen

$$B'_\nu(A_\nu - 1) = A'_\nu(B_\nu - 1), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

stattfinden müssen, weil sonst die Bedingungen 1) und 2) schon von vornherein nicht verträglich wären.

Dass nun diese Definition in sich selbst keinen Widerspruch enthält, dass die aufgestellten Bedingungen verträglich sind, dass überhaupt Gebilde $u + vi$ existiren, die die erwähnten Eigenschaften besitzen, leuchtet unmittelbar ein, wenn man überlegt, dass jede beliebige Constante c als Function $u + vi$ mit den erwähnten Eigenschaften betrachtet werden kann; es erhält dann A'_ν den Werth $(1 - A_\nu)c$, B'_ν den Werth $(1 - B_\nu)c$. Jede Constante gehört also zu den oben definirten Functionen; dass umgekehrt auch jede solche Function in der ganzen Fläche T'' denselben Werth hat, also eine Constante ist, soll jetzt bewiesen werden.

Zu dem Ende betrachte man das Integral

$$H = 2i \int\!\!\int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} \partial x \,\partial y\,,$$

ausgedehnt über die ganze Fläche T''. In Folge der Bedingungen 1) hat dieses Integral einen bestimmten Werth, und zwar stellt dasselbe, wenn man von dem Factor $2i$ absieht, den Inhalt der Fläche dar, welche die Gesammtheit der Werthe, die $w = u + vi$ innerhalb T'' annimmt, auf einer W-Ebene repräsentirt. In Folge der Differentialgleichungen, denen u und v genügen, läßt sich H auch schreiben

$$H = i \int\!\!\int \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \partial x \,\partial y - i \int\!\!\int \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \partial x \,\partial y\,.$$

Nach bekannten Methoden folgt nun:

$$\int\!\!\int \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \partial x \,\partial y = \int_R^{+} u\,dv\,,$$

$$\int\!\!\int \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \partial x \,\partial y = \int_R^{+} v\,du\,,$$

wobei die rechts stehenden Integrale in positiver (durch die Pfeile markirter) Richtung durch die ganze Begrenzung R der Fläche T'' zu erstrecken sind. Es bezeichnen dabei also du und dv die Aenderungen, die u und v erleiden, wenn man von einem Punkte x, y

der Begrenzung zu einem, in der Richtung der Pfeile dem Punkte x, y benachbarten Begrenzungspunkte $x+dx$, $y+dy$ übergeht. Führt man nun diese Randintegrale ein, so folgt

$$H = i \int_R^+ (u\,dv - v\,du),$$

und addirt man zu dieser Gleichung die Gleichung

$$0 = \int_R^+ (u\,du + v\,dv),$$

deren Richtigkeit einleuchtet, da u und v, und folglich auch ihre Quadrate beim Durchlaufen der ganzen Begrenzung als einwerthige und stetige Functionen wieder zu ihren Anfangswerthen, mit denen man ausging, zurückkehren, so erhält man endlich

$$H = \int_R^+ (u - vi)\,d(u + vi).$$

Bei der Integration durch die ganze Begrenzung R wird längs jedes Schnittes a, b, c zweimal integrirt, einmal auf der positiven, das andere Mal auf der negativen Seite, und zwar ist die Richtung der Integration auf der negativen Seite beständig entgegengesetzt der Richtung der Integration in den entsprechenden Theilen auf der positiven Seite. Kehrt man also bei dem über die negative Seite der Begrenzung zu erstreckenden Integrale, unter Anwendung des negativen Vorzeichens, die Integrationsordnung um, so erhält dieses Integral in allen Theilen dieselbe Integrationsrichtung, wie das über die positive Seite zu erstreckende sie besitzt, und durch Zusammenfassen je zweier entsprechender Elemente der beiden Integrale ergiebt sich

$$H = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int_{[a_\nu, b_\nu, c_\nu]^+}^+ \left\{ (u - vi)^+ d(u + vi)^+ - (u - vi)^- d(u + vi)^- \right\},$$

wobei jetzt das hinter dem Summenzeichen stehende Integral einmal über die positive Seite eines jeden der drei Schnitte a_ν, b_ν, c_ν von Anfang bis zu Ende in der Richtung der Pfeile auszudehnen ist, während $(u-vi)^+$, $(u-vi)^-$ die Werthe der Function $u-vi$ in zwei entsprechenden Begrenzungspunkten, und $d(u+vi)^+$, $d(u+vi)^-$ die Aenderungen bezeichnen, die $(u+vi)^+$ und $(u+vi)^-$ gleichzeitig erleiden, wenn man auf einem der Schnitte in der Richtung, die die Pfeile auf der positiven Seite desselben haben, sich fortbewegt.

Bezeichnet man die zu einer complexen Zahl $g = m + ni$ conjugirte Zahl $m - ni$ durch $\bar{g}$, wobei dann $g\bar{g} = (\text{mod.}\, g)^2$, berücksichtigt ferner, dass in Folge der über die

Grössen A_ν, B_ν gemachten Annahmen dann allgemein $A_\nu \bar{A}_\nu = 1$, $B_\nu \bar{B}_\nu = 1$ ist, so ergeben sich für die Begrenzung die folgenden Gleichungen:

$$\text{längs } a_\nu \begin{cases} (u-vi)^+ = \bar{A}_\nu (u-vi)^- + \bar{A}'_\nu, \quad d(u+vi)^+ = A_\nu d(u+vi)^-, \\ (u-vi)^+ d(u+vi)^+ = (u-vi)^- d(u+vi)^- + \bar{A}'_\nu d(u+vi)^+; \end{cases}$$

$$\text{längs } b_\nu \begin{cases} (u-vi)^+ = \bar{B}_\nu (u-vi)^- + \bar{B}'_\nu, \quad d(u+vi)^+ = B_\nu d(u+vi)^-, \\ (u-vi)^+ d(u+vi)^+ = (u-vi)^- d(u+vi)^- + \bar{B}'_\nu d(u+vi)^+; \end{cases}$$

$$\text{längs } c_\nu \begin{cases} (u-vi)^+ = (u-vi)^-, \quad d(u+vi)^+ = d(u+vi)^-, \\ (u-vi)^+ d(u+vi)^+ = (u-vi)^- d(u+vi)^-. \end{cases}$$

Entnimmt man aus diesen Gleichungen die Werthe der unter dem letzten Integralzeichen vorkommenden Differenzen, ausgedrückt durch $d(u+vi)^+$ allein, und führt dieselben in das Integral ein, so zeigt sich, dass die auf die Linien c bezüglichen Theile des Integrals sämmtlich verschwinden, und es wird

$$H = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{ \bar{A}'_\nu \int_{a_\nu^+}^{+} d(u+vi)^+ + \bar{B}'_\nu \int_{b_\nu^+}^{+} d(u+vi)^+ \right\}.$$

Ein Durchlaufen der ganzen positiven Seite des Schnittes a_ν in der Richtung der Pfeile führt nun, mit Rücksicht auf die Figur, vom Punkte q_ν zum Punkte s_ν, während ein Durchlaufen der ganzen positiven Seite des Schnittes b_ν in der Richtung der Pfeile vom Punkte t_ν zum Punkte r_ν führt. Bezeichnet man also den Werth der Function $u+vi$ in irgend einem Punkte β der Begrenzung abgekürzt durch f_β, so ergiebt sich

$$H = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{ A'_\nu (f_{s_\nu} - f_{q_\nu}) + B'_\nu (f_{r_\nu} - f_{t_\nu}) \right\},$$

und die vier in diesem Ausdrucke vorkommenden, dem Index ν entsprechenden Functionswerthe sind in Folge der Grenzbedingungen 2) mit dem Werthe der Function $u+vi$ im Punkte p_ν durch die Gleichungen

$$f_{q_\nu} = A_\nu f_{p_\nu} + A'_\nu, \qquad f_{r_\nu} = B_\nu f_{p_\nu} + B'_\nu,$$

$$f_{s_\nu} = A_\nu f_{r_\nu} + A'_\nu = A_\nu B_\nu f_{p_\nu} + A_\nu B'_\nu + A'_\nu,$$

$$f_{t_\nu} = B_\nu f_{q_\nu} + B'_\nu = A_\nu B_\nu f_{p_\nu} + B_\nu A'_\nu + B'_\nu$$

verknüpft. Aus diesen Gleichungen folgt weiter:

$$f_{s_\nu} - f_{q_\nu} = A_\nu (B_\nu - 1) f_{p_\nu} + A_\nu B'_\nu, \quad f_{r_\nu} - f_{t_\nu} = B_\nu (1 - A_\nu) f_{p_\nu} - B_\nu A'_\nu,$$

$$A'_\nu (f_{s_\nu} - f_{q_\nu}) + B'_\nu (f_{r_\nu} - f_{t_\nu}) = [B_\nu B'_\nu (1 - A_\nu) - A_\nu A'_\nu (1 - B_\nu)] f_{p_\nu} + A_\nu \bar{A}'_\nu B'_\nu - B_\nu B'_\nu A'_\nu.$$

Auf der rechten Seite der letzten Gleichung ist der Coefficient von f_{p_ν} gleich Null, denn derselbe ist auch gleich $A_\nu B_\nu[\bar{B}'_\nu(\bar{A}_\nu-1)-\bar{A}'_\nu(\bar{B}_\nu-1)]$, und der hier in der eckigen Klammer stehende Ausdruck hat den Werth Null, da er aus dem, den Werth Null besitzenden Ausdrucke $B'_\nu(A_\nu-1)-A'_\nu(B_\nu-1)$ hervorgeht, indem man darin an Stelle von i die Zahl $-i$ schreibt. Man erhält also schliesslich

$$H=\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\{A_\nu\bar{A}'_\nu B'_\nu-B_\nu\bar{B}'_\nu A'_\nu\}.$$

Die einem bestimmten Index ν entsprechenden Grössen A_ν, B_ν sind nur der Bedingung unterworfen, Zahlen mit dem Modul 1 zu sein, ausserdem sind mit ihnen die demselben Index ν entsprechenden Grössen A'_ν, B'_ν durch die Relation

$$(R.)\qquad B'_\nu(A_\nu-1)=A'_\nu(B_\nu-1)$$

verknüpft. In Bezug auf die Werthe von A_ν, B_ν unterscheide man die folgenden vier, alle Möglichkeiten umfassenden Fälle:

I) A_ν und B_ν seien beide von 1 verschieden; dann folgt aus den beiden Gleichungen

$$\bar{B}'_\nu(\bar{A}_\nu-1)=\bar{A}'_\nu(\bar{B}_\nu-1),\qquad A'_\nu(B_\nu-1)=B'_\nu(A_\nu-1),$$

indem das Product der linken Seiten gleich ist dem Producte der rechten,

$$(A_\nu-1)(\bar{B}_\nu-1)\bar{A}'_\nu B'_\nu-(\bar{A}_\nu-1)(B_\nu-1)\bar{B}'_\nu A'_\nu=0,$$

und aus dieser letzten Gleichung durch Division mit der in diesem Falle von Null verschiedenen Grösse: $(A_\nu-1)(\bar{B}_\nu-1)$:

$$A_\nu\bar{A}'_\nu B'_\nu-B_\nu\bar{B}'_\nu A'_\nu=0.$$

II) A_ν sei gleich 1, B_ν von 1 verschieden; dann liefert die Relation $(R.)$: $A'_\nu=0$, folglich ist dann auch $\bar{A}'_\nu=0$ und $A_\nu\bar{A}'_\nu B'_\nu-B_\nu\bar{B}'_\nu A'_\nu=0$.

III) A_ν sei von 1 verschieden, B_ν gleich 1; dann liefert die Relation $(R.)$: $B'_\nu=0$, folglich ist dann auch $\bar{B}'_\nu=0$ und $A_\nu\bar{A}'_\nu B'_\nu-B_\nu\bar{B}'_\nu A'_\nu=0$.

IV) A_ν und B_ν seien beide gleich 1. In Folge der ursprünglichen Grenzbedingungen 2) hat in diesem Falle A'_ν den Werth Null, folglich ist auch $\bar{A}'_\nu=0$ und $A_\nu\bar{A}'_\nu B'_\nu-B_\nu\bar{B}'_\nu A'_\nu=0$.

Es zeigt sich also, dass das irgend einem Index ν $(\nu=1,2,\cdots,p)$ entsprechende Glied der letzten Summe, die H darstellt, immer den Werth Null besitzt, und dass folglich unter den gestellten Bedingungen das Integral H selbst den Werth Null erhält. H kann aber, da es in seiner ursprünglichen Gestalt, wenn man von dem Factor $2i$ absieht, ein Integral mit immer positiven Elementen ist, nur dann Null sein, wenn jedes Element für sich den Werth Null hat. Aus $H = 0$ folgt demnach für die ganze Fläche T': $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, und mit Berücksichtigung der Differentialgleichungen sub 1) auch $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, allgemein zu reden, so dass die Punkte, für die diese vier Differentialquotienten möglicher Weise nicht Null wären, keinen auch noch so kleinen Flächentheil stetig erfüllen können. Die Function $u + vi$ hat also, soweit sie in T'' stetig ist, nothwendig einen constanten Werth, und da sie den Bedingungen 1) gemäss in T'' allenthalben stetig sein soll, in der ganzen Fläche T'' denselben Werth. Man hat so den schon früher ausgesprochenen

Satz I. *Eine in der Fläche T'' allenthalben einwerthige und stetige Function $u + vi$ der complexen Variable $x + yi$, deren Werthe in je zwei entsprechenden Punkten auf der positiven und negativen Seite der, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c gebildeten Begrenzung der Fläche T'' in der Weise verknüpft sind, dass allgemein (für $\nu = 1, 2, \cdots, p$)*

$$\text{längs } a_\nu \{(u+vi)^+ = A_\nu (u+vi)^- + A'_\nu,$$

$$\text{längs } b_\nu \{(u+vi)^+ = B_\nu (u+vi)^- + B'_\nu,$$

$$\text{längs } c_\nu \{(u+vi)^+ = (u+vi)^- + \Delta_\nu,$$

wobei die $2p$ Grössen A_ν, B_ν sämmtlich den Modul 1 besitzen, ist immer eine Constante, wenn die p Grössen Δ_ν Null sind und ferner von den $2p$ übrigen Constanten A'_ν, B'_ν all' die Constanten A'_ν, die zu Indices ν gehören, für die gleichzeitig $A_\nu = 1$, $B_\nu = 1$ ist, ebenfalls den Werth Null haben.

3.

Haben die $2p$ Constanten A_ν, B_ν sämmtlich den Werth 1, so verwandelt sich der gefundene Satz in den folgenden speciellen, für die Theorie der *Abel*schen Integrale fundamentalen Satz:

„*Eine in der Fläche T'' allenthalben einwerthige und stetige Function $\omega = u + vi$ der complexen Variable $z = x + yi$, deren Werthe in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten in der Weise verknüpft sind, dass allgemein*

$$\text{längs } a_\nu \{\omega^+ = \omega^-; \quad \text{längs } b_\nu \{\omega^+ = \omega^- + B'_\nu; \quad \text{längs } c_\nu \{\omega^+ = \omega^-;$$

für $\nu = 1, 2, \cdots, p$, wobei es dahin gestellt bleibt, welche Werthe die p Constanten B'_ν besitzen, ist immer eine Constante.“

In anderer Fassung lässt sich dieser Satz auch so aussprechen:

„*Verschwinden bei einem, zur Fläche T'' gehörigen allenthalben endlichen Abelschen Integrale (z. B. durch Variation der linear in ihm enthaltenen willkürlichen Constanten) die sämmtlichen p Periodicitätsmoduln A'_ν für die Schnitte a_ν, so verschwinden gleichzeitig auch* *die sämmtlichen p Periodicitätsmoduln B'_ν für die Schnitte b_ν, und das Integral selbst reducirt sich auf eine Constante."*

Nur wenn man diesen Satz zur Hülfe nimmt, lässt sich zeigen, dass es immer möglich ist, aus p gegebenen, zur Fläche T' gehörigen linearunabhängigen allenthalben endlichen *Abel*schen Integralen $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \cdots, \omega^{(p)}$ durch lineare Composition ein System von Integralen $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_p$ zu bilden, dadurch characterisirt, dass allgemein der Periodicitätsmodul von ω_ν für den Schnitt a_ν den Werth πi, für jeden der $p-1$ übrigen Schnitte a den Werth Null besitzt. Bezeichnet man nämlich den Periodicitätsmodul von $\omega^{(\mu)}$ für den Schnitt a_ν $(\nu = 1, 2, \cdots, p)$ durch $A_\nu^{(\mu)}$, so wird es dann, aber auch nur dann möglich sein, die verlangten p Integrale $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_p$ zu bilden, und zwar in der Form

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= m_{11}\,\omega^{(1)} + m_{12}\,\omega^{(2)} + \cdots + m_{1p}\,\omega^{(p)},\\
\omega_2 &= m_{21}\,\omega^{(1)} + m_{22}\,\omega^{(2)} + \cdots + m_{2p}\,\omega^{(p)},\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
\omega_p &= m_{p1}\,\omega^{(1)} + m_{p2}\,\omega^{(2)} + \cdots + m_{pp}\,\omega^{(p)},
\end{aligned}$$

wenn es möglich ist, die p^2 Constanten m so zu bestimmen, dass die p Systeme von je p Gleichungen erfüllt werden, die aus dem Systeme

$$(S_\nu.)\qquad \left\{\begin{aligned}
0 &= m_{\nu 1} A_1^{(1)} + m_{\nu 2} A_1^{(2)} + \cdots + m_{\nu p} A_1^{(p)},\\
0 &= m_{\nu 1} A_2^{(1)} + m_{\nu 2} A_2^{(2)} + \cdots + m_{\nu p} A_2^{(p)},\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
\pi i &= m_{\nu 1} A_\nu^{(1)} + m_{\nu 2} A_\nu^{(2)} + \cdots + m_{\nu p} A_\nu^{(p)},\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
0 &= m_{\nu 1} A_p^{(1)} + m_{\nu 2} A_p^{(2)} + \cdots + m_{\nu p} A_p^{(p)},
\end{aligned}\right.$$

successive hervorgehen, wenn man darin für ν successive die Zahlen $1, 2, \cdots, p$ setzt und gleichzeitig πi in die linke Seite der ersten, zweiten, $\cdots$, p^{ten} Gleichung einrücken lässt, während jedes Mal alle $p-1$ übrigen linken Seiten den Werth Null haben. Bezeichnet man die Determinante der p^2 Grössen A in dem oben stehenden Systeme von p Gleichungen durch D, so würde für jedes ν und μ folgen

$$m_{\nu\mu} = \frac{\pi i}{D}\,\frac{\partial D}{\partial A_\nu^{(\mu)}},$$

sobald bewiesen wäre, dass die Determinante D einen von Null verschiedenen Werth besitzt. Ohne diesen Nachweis*) hat die letzte Formel keinen Sinn.

*) Vergleiche: *„Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abelschen Integrale von Carl Neumann pag. 435."* und *„Theorie der Abelschen Functionen von A. Clebsch und P. Gordan pag. 108."*

Dass nun unter allen Umständen der Wert der Determinante D von Null verschieden ist, lässt sich mit Hülfe des oben ausgesprochenen Satzes wie folgt zeigen. Wäre $D=0$, so liessen sich für die p Grössen $m_{\nu 1}, m_{\nu 2}, \cdots, m_{\nu p}$ immer p Werthe finden, die nicht sämmtlich Null, und die dem Systeme von p Gleichungen genügen würden, das aus dem Systeme (S_ν) entsteht, wenn auch in die linke Seite der ν^{ten} Gleichung 0 statt πi eingeführt wird. Der mit diesen Werthen gebildete Ausdruck

$$\omega_\nu = m_{\nu 1}\omega^{(1)} + m_{\nu 2}\omega^{(2)} + \cdots + m_{\nu p}\omega^{(p)}$$

wäre dann ein allenthalben endliches Integral, das für alle p Schnitte a den Periodicitätsmodul Null besässe, und folglich eine Constante. Es existirte also zwischen den p Functionen $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \cdots, \omega^{(p)}$ eine lineare Relation mit constanten Coefficienten, was gegen die ursprüngliche Voraussetzung, nach der diese p Functionen linearunabhängig sein sollen, verstossen würde. Die Determinante D kann also nie Null sein, und folglich ist die Bestimmung der p Functionen $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_p$ den aufgestellten Bedingungen gemäss stets möglich.

Im Obigen ist der Satz mitenthalten, dass wenn $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \cdots, \omega^{(p)}$ irgend ein System zur Fläche T'' gehöriger, allenthalben endlicher *Abel*scher Integrale bezeichnet, und diese Integrale linearunabhängig sind, dann auch immer gleichzeitig die p Systeme zusammengehöriger Periodicitätsmoduln, die dem Integralsysteme für die p Schnitte $a_1, a_2, \cdots, a_p$ zukommen, linearunabhängig sind.

4.

Eine complexe Function $u+vi$ der Coordinaten x, y sei definirt durch die folgenden Bedingungen:

1) In der ganzen Fläche T'' soll sie eine allenthalben einwerthige und stetige Function des Ortes oder Punktes x, y sein und den Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ genügen.
2) Ihre Werthe in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten sollen in der Weise verknüpft sein, dass allgemein für $\nu = 1, 2, \cdots, p$:

$$\text{längs } a_\nu \; \{(u+vi)^+ = A_\nu(u+vi)^- + A'_\nu,$$
$$\text{längs } b_\nu \; \{(u+vi)^+ = B_\nu(u+vi)^- + B'_\nu,$$
$$\text{längs } c_\nu \; \{(u+vi)^+ = (u+vi)^- + \varDelta_\nu,$$

wobei über die $5p$ Constanten $A_\nu, B_\nu, A'_\nu, B'_\nu, \varDelta_\nu$ Folgendes festgesetzt sei. Den $2p$ Grössen A_ν, B_ν sollen bestimmte Zahlwerthe zugelegt sein, deren Quadrate sämmtlich 1 sind. Für das irgend einem Index ν entsprechende

Factorenpaar A_ν, B_ν ist also eines der vier Werthepaare $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ nach willkürlicher Wahl zulässig. Die reellen Theile der $2p$ Constanten A'_ν, B'_ν sollen sämmtlich Null sein, während über die rein imaginären Theile dieser Constanten nichts festgesetzt sei. Dass zwischen den $5p$ Constanten immer die $p+1$ Relationen

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \Delta_\nu = 0, \quad \Delta_\nu = B'_\nu(A_\nu - 1) - A'_\nu(B_\nu - 1), \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, p)$$

als bestehend vorausgesetzt werden müssen, weiss man aus art. 1, indem sonst die aufgestellten Bedingungen keinenfalls verträglich wären.

Man erkennt sofort, dass, wenn die $2p$ Grössen A_ν, B_ν sämmtlich den Werth 1 haben, jede willkürliche Constante $C = c + c_1 i$, wenn die $2p$ Grössen dagegen nicht sämmtlich den Werth 1 haben, jede rein imaginäre Constante $C = c_1 i$ als Function $u + vi$ mit den erwähnten Eigenschaften betrachtet werden kann; es erhält dann A'_ν den Werth $(1 - A_\nu)C$, B'_ν den Werth $(1 - B_\nu)C$, Δ_ν den Werth Null. Dass umgekehrt auch jede Funktion $u + vi$, die den oben aufgestellten Bedingungen genügt, in der ganzen Fläche T' denselben Werth hat, also eine Constante ist, soll jetzt bewiesen werden.

Zu dem Ende betrachte man wieder das Integral

$$H = \int\!\!\int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} \partial x \, \partial y,$$

ausgedehnt über die ganze Fläche T'. Nach den schon in art. 2 angewandten Methoden und Schlussweisen erhält man

$$H = \int_R^+ u\,dv = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int_{[a_\nu, b_\nu, c_\nu]^+}^{+} \left\{ u^+ dv^+ - u^- dv^- \right\},$$

wobei das hinter dem Summenzeichen stehende Integral einmal über die positive Seite eines jeden der drei Schnitte a_ν, b_ν, c_ν von Anfang bis zu Ende in der Richtung der Pfeile auszudehnen ist, während u^+, u^- die Werthe der Function u in zwei entsprechenden Begrenzungspunkten, und dv^+, dv^- die Aenderungen bezeichnen, die v^+ und v^- gleichzeitig erleiden, wenn man auf einem der Schnitte in der Richtung, die die Pfeile auf der positiven Seite desselben haben, sich fortbewegt. Berücksichtigt man nun, dass in Folge der Bedingungen 2) die $2p$ Grössen A_ν, B_ν stets reell sind, und dass in dem Falle aus der Relation $\Delta_\nu = B'_\nu(A_\nu - 1) - A'_\nu(B_\nu - 1)$ immer auch der reelle Theil von Δ_ν sich gleich Null ergiebt, wenn, wie vorausgesetzt wurde, die reellen Theile von A'_ν, B'_ν Null sind, so ergeben sich für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \left\{ u^+ = A_\nu u^-, \quad dv^+ = A_\nu dv^-, \quad u^+ dv^+ = u^- dv^-; \right. \\
&\text{längs } b_\nu \left\{ u^+ = B_\nu u^-, \quad dv^+ = B_\nu dv^-, \quad u^+ dv^+ = u^- dv^-; \right. \\
&\text{längs } c_\nu \left\{ u^+ = u^-, \quad\quad\; dv^+ = dv^-, \quad\quad u^+ dv^+ = u^- dv^-. \right.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass das hinter dem Summenzeichen stehende Integral für jeden Index ν den Werth Null hat, indem seine sämmtlichen Elemente verschwinden. In Folge dessen ist auch H selbst Null und, nach ähnlichen Schlüssen wie früher, $u+vi$ eine in der ganzen Fläche T'' constante Grösse $C=c+c_1 i$, deren reeller Theil c immer Null sein muss, wenn nicht alle $2p$ Grössen A_ν, B_ν den Werth 1 haben, während in allen Fällen der Werth ihres rein imaginären Theiles $c_1 i$ durch die aufgestellten Bedingungen in keiner Weise beeinflusst wird. Man hat so den folgenden

Satz II. *Eine in der Fläche T'' allenthalben einwerthige und stetige Function $u+vi$ der complexen Variable $x+yi$, deren Werthe in je zwei entsprechenden Punkten auf der positiven und negativen Seite der, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c gebildeten Begrenzung der Fläche T'' in der Weise verknüpft sind, dass allgemein für $\nu=1,2,\cdots,p$:*

$$\text{längs } a_\nu \left\{ (u+vi)^+ = A_\nu (u+vi)^- + A'_\nu, \right.$$

$$\text{längs } b_\nu \left\{ (u+vi)^+ = B_\nu (u+vi)^- + B'_\nu, \right.$$

$$\text{längs } c_\nu \left\{ (u+vi)^+ = (u+vi)^- + \varDelta_\nu, \right.$$

wobei die $2p$ Grössen A_ν, B_ν Zahlwerthe besitzen, deren Quadrate sämmtlich 1 sind, ist immer eine Constante, wenn die reellen Theile der $2p$ Constanten A'_ν, B'_ν und folglich auch die reellen Theile der p Constanten $\varDelta_\nu$ sämmtlich den Werth Null haben.

Mit Hülfe dieses Resultates lässt sich aus dem, im art. 3 meiner frühern Arbeit aufgestellten Satze durch einfache Auflösung eines Systems linearer Gleichungen ein neuer Satz ableiten, der sich auf alle diejenigen Functionen $u+vi$ bezieht, die zu Gruppen gehören, deren Characteristiken aus nur reellen Grössen zusammengesetzt sind. Es sind dies diejenigen Gruppen, deren Characteristiken aus dem Symbol $\begin{pmatrix} A_1, A_2, \cdots, A_p \\ B_1, B_2, \cdots, B_p \end{pmatrix}$ hervorgehen, wenn man für die A und B nur reelle Grössen mit dem Modul 1 setzt. Da demnach für jede der $2p$ Grössen A_ν, B_ν sowohl die Zahl $+1$ wie die Zahl -1 zulässig ist, so giebt es im Ganzen 2^{2p} solcher Gruppen. Der erwähnte Satz, der speciell dem Gebiete der Functionen $u+vi$, die diesen 2^{2p} Gruppen angehören, eigenthümlich ist, insofern als ein analoger Satz für die, den übrigen Gruppen angehörigen Functionen $u+vi$ nicht existirt, mag theilweise hier noch eine Stelle finden. Für die allenthalben endlichen Functionen ausgesprochen, lautet er wie folgt:

„*Nimmt man, den $2p$ Schnitten a_ν, b_ν $(\nu=1,2,\cdots,p)$ entsprechend, ein System von $2p$ Grössen A_ν, B_ν $(\nu=1,2,\cdots,p)$, deren Quadrate sämmtlich 1 sind, willkürlich an, wählt ausserdem $2p$ reelle Grössen $A'_{1,\nu}$, $B'_{1,\nu}$ $(\nu=1,2,\cdots,p)$, deren Werthe nur der einzigen Bedingung*

$$(R.) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{ B'_{1,\nu}(A_\nu - 1) - A'_{1,\nu}(B_\nu - 1) \right\} = 0$$

zu gehorchen haben und im übrigen ganz beliebig angenommen werden dürfen, so existirt zu der Fläche T' immer eine complexe Function $u+vi$ der Coordinaten x, y mit folgenden Eigenschaften:

1) *Die Function $u+vi$ ist eine in der Fläche T' allenthalben einwerthige und stetige Function des Ortes oder Punktes x, y, die in der ganzen Fläche T' den Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ genügt.*

2) *Die Werthe von $u+vi$ in je zwei entsprechenden Punkten auf der positiven und negativen Seite der, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c gebildeten Begrenzung der Fläche T' sind in der Weise verknüpft, dass allgemein für $\nu=1,2,\cdots,p$:*

$$\text{längs } a_\nu \left\{ (u+vi)^+ = A_\nu (u+vi)^- + A'_{1,\nu} + iA'_{2,\nu}, \right.$$
$$\text{längs } b_\nu \left\{ (u+vi)^+ = B_\nu (u+vi)^- + B'_{1,\nu} + iB'_{2,\nu}, \right.$$
$$\text{längs } c_\nu \left\{ (u+vi)^+ = (u+vi)^- + \varDelta_{1,\nu} + i\varDelta_{2,\nu}, \right.$$

wobei zwischen den $5p$ Constanten A_ν, B_ν, $A'_\nu = A'_{1,\nu} + iA'_{2,\nu}$, $B'_\nu = B'_{1,\nu} + iB'_{2,\nu}$, $\varDelta_\nu = \varDelta_{1,\nu} + i\varDelta_{2,\nu}$ $(\nu=1,2,\cdots,p)$ die bekannten $p+1$ Relationen

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \varDelta_\nu = 0, \quad \varDelta_\nu = B'_\nu(A_\nu-1) - A'_\nu(B_\nu-1), \qquad (\nu=1,2,\cdots,p)$$

stattfinden.

3) *Durch die bis jetzt erwähnten Eigenschaften (immer mit Rücksicht auf die vorher gemachten Annahmen, wonach also das System der $2p$ Grössen A_ν, B_ν fixirt ist, und ausserdem die reellen Theile der $2p$ Constanten A'_ν, B'_ν der Relation (R.) gemäss, im übrigen aber willkürlich angenommen sind) ist die Function $u+vi$ bestimmt bis auf eine additive Constante, die vollständig willkürlich bleibt, wenn alle A_ν, B_ν den Werth 1 haben, die dagegen nur rein imaginär sein kann, wenn nicht alle A_ν, B_ν den Werth 1 besitzen."*

Für die allenthalben endlichen Functionen der Gruppe $\binom{1,\,1,\,\cdots,\,1}{1,\,1,\,\cdots,\,1}$ hat diesen Satz zuerst *Riemann (A. F. 4. pag. 20)* ausgesprochen.

Düren, im September 1869.

Dritte Abhandlung.

Ueber ein Randintegral.

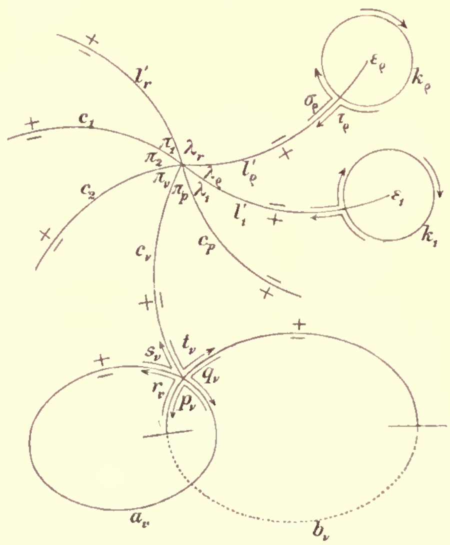
Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 71, Seite 305–315.

Eine Menge wichtiger Eigenschaften, die den von mir in Bd. 70, Heft 4 dieses Journals aufgestellten Functionen $u + vi$ zukommen, kann, nachdem zuvor bestimmte einfachste Formen dieser Functionen als Normalformen fixirt sind, erhalten werden durch die Betrachtung einer gewissen Art von Randintegralen. Um bei späteren Mittheilungen nicht immer wieder von neuem specielle Fälle dieser Randintegrale betrachten zu müssen, soll hier für dieselben die allgemeinste Form gegeben und behandelt werden.

1.

Gegeben sei eine Fläche T''' von ähnlicher Beschaffenheit wie die in art. 1. und 2. meiner eben erwähnten Arbeit gebildete Fläche T''. Die p Schnitte c und die r nach den r Punkten ε führenden Schnitte l seien so gezogen, dass dieselben in der Ordnung $c_1, c_2, \cdots, c_p, l_1, l_2, \cdots, l_r$ aufeinanderfolgen, wenn man ihren gemeinsamen Mündungspunkt positiv (d. h. umgekehrt wie der Zeiger einer Uhr) umkreist. Die in den erwähnten Artikeln getroffenen Bestimmungen und gewählten Bezeichnungen lasse man sämmtlich ungeändert bestehen, und füge die folgenden neu hinzu. Den gemeinsamen Mündungspunkt der drei Schnitte a_ν, b_ν, c_ν bezeichne man fünffach als $p_\nu, q_\nu, r_\nu, s_\nu, t_\nu$, jenachdem man sich in dem einen oder andern der fünf, von den drei Schnitten dort gebildeten Winkelräume befindet. Den gemeinsamen Mündungspunkt der p Schnitte c und der r Schnitte l bezeichne man $p+r$ fach als $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_p, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$, und zwar als π_ν, wenn man sich auf der positiven Seite des Schnittes c_ν, als λ_ϱ, wenn man sich auf der positiven Seite des Schnittes l_ϱ befindet. Man scheide dann die sämmtlichen r Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$ durch r Curven k aus der Fläche T''' aus, allgemein den Punkt ε_ϱ durch eine, weder sich selbst noch irgend eine der $r-1$ übrigen Curven k schneidende

Curve k_ϱ, die man von einem Punkte σ_ϱ auf der negativen Seite des Schnittes l_ϱ durch die Fläche T''' um den Punkt ε_ϱ herum bis zu dem, dem Punkte σ_ϱ entsprechenden Punkte τ_ϱ auf der positiven Seite von l_ϱ zieht. Der Punkt σ_ϱ und die Gestalt der Curve k_ϱ seien zunächst so gewählt, dass dieselbe, wenn ε_ϱ ein Verzweigungspunkt ist, keinen weitern Verzweigungspunkt der Fläche T''', dass dieselbe dagegen, wenn ε_ϱ kein Verzweigungspunkt ist, überhaupt keinen Verzweigungspunkt mit dem Punkte ε_ϱ zusammen einschliesst: und ferner so, dass wenn der Punkt ε_ϱ im Endlichen liegt, die Punkte der Curve k_ϱ alle denselben Abstand vom Punkte ε_ϱ, wenn dagegen der Punkt ε_ϱ im Unendlichen liegt, die Punkte der Curve k_ϱ alle denselben Abstand vom Punkte $z=0$ haben. Diesen Annahmen gemäss wird also die Curve k_ϱ, wenn ε_ϱ ein $\nu-1$ facher Verzweigungspunkt ist, sich ν-mal kreisförmig um den Punkt ε_ϱ winden müssen, um vom Punkte σ_ϱ zum Punkte τ_ϱ zu gelangen, dagegen nur einmal, wenn ε_ϱ kein Verzweigungspunkt ist. Bei der Curve k_ϱ nenne man die dem Punkte ε_ϱ zugewandte Seite die innere, die andere die äussere, und das, durch diese Curve aus der Fläche T''' ausgeschiedene, den Punkt ε_ϱ enthaltende Flächenstück die Umgebung des Punktes ε_ϱ. Denjenigen Theil des Schnittes l_ϱ, der sich von dem gemeinsamen Mündungspunkte aller Schnitte c und l bis an die Curve k_ϱ erstreckt, nenne man l'_ϱ. Die neue Fläche, die aus der Fläche T''' durch Ausscheidung der r Punkte ε vermittelst der Curven k entsteht, und die ebenfalls einfach zusammenhangend ist, bezeichne man als Fläche T^*. Derselben fehlen Flächentheile, die der T''' angehören. Ihre Begrenzung wird gebildet von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c, l' und von den äusseren Seiten der Curven k. Längs dieser Begrenzung markire man die positive Richtung des Durchlaufens durch Pfeile. Man bemerke, dass dabei die aus T''' ausgeschiedenen, nicht zu T^* gehörigen Flächentheile, oder, was dasselbe, die Punkte ε negativ umlaufen werden. Die nebenstehende Figur veranschaulicht eine solche Fläche T^*.



Zugleich mit der ursprünglichen Fläche T''' seien gegeben zwei Functionen der complexen Variable $z=x+yi$, ω die eine, ω' die andere, mit folgenden Eigenschaften. Mit Ausnahme der r Punkte ε sollen die Funktionen in der ganzen übrigen Fläche T''' allenthalben einwerthig und stetig sein. In dem Punkte ε_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots,r)$ sollen ω und ω' unstetig werden, und zwar in der, durch endliche Ausdrücke von der Form

$$\varphi_\varrho(r_\varrho) = L_\varrho \, ln \, r_\varrho + L_{\varrho 1}\frac{1}{r_\varrho} + L_{\varrho 2}\frac{1}{r_\varrho^2} + \cdots + L_{\varrho, m_\varrho}\frac{1}{r_\varrho^{m_\varrho}},$$

$$\varphi'_\varrho(r_\varrho) = L'_\varrho \, ln \, r_\varrho + L'_{\varrho 1}\frac{1}{r_\varrho} + L'_{\varrho 2}\frac{1}{r_\varrho^2} + \cdots + L'_{\varrho, n_\varrho}\frac{1}{r_\varrho^{n_\varrho}},$$

resp. characterisirbaren Art, so dass die Differenzen $\omega - \varphi_\varrho(r_\varrho)$ und $\omega' - \varphi'_\varrho(r_\varrho)$ für den Punkt ε_ϱ stetig bleiben. In diesen Ausdrücken bezeichnen die L und L' Constante, m_ϱ und n_ϱ ganze Zahlen; r_ϱ hat die im art. 2. meiner erwähnten Arbeit angegebene Bedeutung, und es muss für den Fall, dass ε_ϱ ein $\nu-1$facher Verzweigungspunkt ist, noch der Werth von r_ϱ in einem Punkte der Umgebung von ε_ϱ festgesetzt sein (was auf ν Weisen geschehen kann), dann ist r_ϱ für die ganze Umgebung von ε_ϱ einwerthig bestimmt. Die Werthe von ω, ω' in je zwei entsprechenden Punkten auf der positiven und negativen Seite der, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c, l gebildeten Begrenzung der Fläche T''', die man durch ω^+ und ω^-, ω'^+ und ω'^- bezeichne, sollen in der Weise verknüpft sein, dass allgemein für $\nu = 1, 2, \cdots, p$; $\varrho = 1, 2, \cdots, r$:

$$(G.)\qquad \begin{array}{ll} \text{längs } a_\nu \{\omega^+ = A_\nu\omega^- + A'_\nu, & \omega'^+ = A_\nu\omega'^- + A''_\nu, \\ \text{längs } b_\nu \{\omega^+ = B_\nu\omega^- + B'_\nu, & \omega'^+ = B_\nu\omega'^- + B''_\nu, \\ \text{längs } c_\nu \{\omega^+ = \omega^- + \varDelta_\nu, & \omega'^+ = \omega'^- + \varDelta'_\nu, \\ \text{längs } l_\varrho \{\omega^+ = \omega^- - 2\pi i L_\varrho, & \omega'^+ = \omega'^- - 2\pi i L'_\varrho, \end{array}$$

wobei die $A, A, A', A'', B, B, B', B'', \varDelta, \varDelta'$ Constante bezeichnen, und die $2p$ Producte $A_\nu A_\nu$, $B_\nu B_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots, p)$ sämmtlich den Werth 1 besitzen sollen. Functionen ω, ω' mit diesen Eigenschaften kann man, nebenbei bemerkt, in unbegrenzter Anzahl erhalten durch Integration von in T' einwerthigen Functionen der Variable z, die für eine endliche Anzahl von Punkten in T' unendlich von angebbarer Ordnung werden und beim Ueberschreiten der Schnitte a, b constante Factoren annehmen. Der speciellere Fall, wo ein Unstetigkeitspunkt von ω nicht auch zugleich ein Unstetigkeitspunkt von ω' ist, oder wo eine der Functionen oder auch beide allenthalben endlich sind, ist in dem obigen allgemeinen Falle mitenthalten, insofern als für jede der Constanten L, L' in den Ausdrücken φ, φ', ohne Störung der weiteren Entwicklungen, auch der Werth Null zulässig ist.

Aus den bis jetzt erwähnten Eigenschaften der Functionen ω, ω' ergeben sich durch bekannte Schlüsse die folgenden als secundäre. Zwischen den, in die Grenzgleichungen $(G.)$ eintretenden Constanten existiren nothwendig (vergl. m. Arbeit Bd. 71, Heft 3, art. 1) die $2p+2$ Relationen

$$(G'.)\qquad \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \Delta_\nu - 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} L_\varrho = 0, & \Delta_\nu = B'_\nu(A_\nu - 1) - A'_\nu(B_\nu - 1), \\ \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \Delta'_\nu - 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} L'_\varrho = 0, & \Delta'_\nu = B''_\nu(A_\nu - 1) - A''_\nu(B_\nu - 1), \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, p).$$

Da die Differenzen $\omega - \varphi_\varrho(r_\varrho)$, $\omega' - \varphi'_\varrho(r_\varrho)$ in dem Punkte ε_ϱ stetig sind und beim Ueberschreiten des Schnittes l_ϱ ungeändert bleiben, so haben dieselben, wenn man sie für die Umgebung des Punktes ε_ϱ als Functionen von r_ϱ betrachtet, bis zu einem endlichen Modul von r_ϱ den Character einwerthiger und stetiger Functionen der complexen Variable $\zeta = r_\varrho$. Setzt man also für die Umgebung des Punktes ε_ϱ (dem immer der Werth $r_\varrho = 0$ entspricht)

$$\omega - \varphi_\varrho(r_\varrho) = \psi_\varrho(r_\varrho), \qquad \omega' - \varphi'_\varrho(r_\varrho) = \psi'_\varrho(r_\varrho),$$

so lassen sich die Functionen ψ, ψ' bis zu einem endlichen Modul von r_ϱ darstellen durch Reihen von der Form

$$\psi_\varrho(r_\varrho) = c_{\varrho 0} + c_{\varrho 1} r_\varrho + c_{\varrho 2} r_\varrho^2 + c_{\varrho 3} r_\varrho^3 + \cdots,$$
$$\psi'_\varrho(r_\varrho) = c'_{\varrho 0} + c'_{\varrho 1} r_\varrho + c'_{\varrho 2} r_\varrho^2 + c'_{\varrho 3} r_\varrho^3 + \cdots,$$

wobei die c, c' Constante bezeichnen. Nach den über die Curve k_ϱ vorher getroffenen Bestimmungen kann man dieselbe als mit all ihren Theilen in dem Gebiete liegend ansehen, für das die obigen Reihenentwicklungen gelten. Es werden also ω und ω' in dem, durch die Curve k_ϱ aus T'' ausgeschiedenen Flächenstücke und auch noch auf der Begrenzung k_ϱ desselben dargestellt durch

$$\omega = \varphi_\varrho(r_\varrho) + \psi_\varrho(r_\varrho), \qquad \omega' = \varphi'_\varrho(r_\varrho) + \psi'_\varrho(r_\varrho),$$

wobei φ, φ', ψ, ψ' die aufgestellten Reihen bezeichnen.

Nach diesen Vorbereitungen betrachte man das Integral

$$J = \int_R^+ \omega\, d\omega',$$

ausgedehnt in positiver Richtung durch die ganze, aus den beiden Seiten der Schnitte a, b, c, l' und den äusseren Seiten der Curven k bestehende Begrenzung R der Fläche T^*. Da die Functionen ω, ω' in der Fläche T^* allenthalben einwerthig und stetig sind, indem diese Fläche die r Punkte ε nicht mehr enthält, so hat nach bekanntem Satze das obige Integral, ausgedehnt über die ganze Begrenzung dieser Fläche, den Werth Null. Dasselbe ist aber auch gleich der Summe der Integrale, die erhalten werden, wenn man der Reihe nach über die einzelnen Begrenzungstheile integrirt. Die Ausführung dieser Integration liefert zwischen den Constanten, die das Verhalten der beiden

Functionen ω, ω' an der Begrenzung von T'' und in den Unstetigkeitspunkten ε characterisiren, eine merkwürdige Relation, deren Herleitung der Zweck der vorliegenden Arbeit ist.

2.

Das Integral J kann man zunächst in zwei Integrale J_1 und J_2 zerlegen, von denen das erste sich auf das System der Schnitte a, b, c, das zweite sich auf das System der Schnitte l' und der Curven k bezieht. Das Integral J_1 kann weiter als Summe von p einfacheren Integralen S_ν $(\nu = 1, 2, \cdots, p)$ aufgefasst werden, von denen das dem Index ν entsprechende in der Richtung der Pfeile über den Theil der Begrenzung der Fläche T^* zu erstrecken ist, der von den beiden Seiten der drei Schnitte a_ν, b_ν, c_ν gebildet wird. Das Integral J_2 dagegen kann als Summe von r einfacheren Integralen T_ϱ $(\varrho = 1, 2, \cdots, r)$ betrachtet werden, von denen das dem Index ϱ entsprechende in der Richtung der Pfeile über den Theil der Begrenzung der Fläche T^* zu erstrecken ist, der von den beiden Seiten des Schnittes l'_ϱ und von der äussern Seite der Curve k_ϱ gebildet wird. Da ferner bei der Ausführung des Integrals S_ν längs jedes der drei Schnitte a_ν, b_ν, c_ν zweimal integrirt wird, einmal auf der positiven, das andere Mal auf der negativen Seite, und die Richtung der Integration auf der negativen Seite immer genau entgegengesetzt ist der Richtung der Integration in den entsprechenden Theilen auf der positiven Seite, so kann man die beiden, auf die positive und negative Seite bezüglichen Theile von S_ν durch Zusammenfassen correspondirender Elemente in ein einziges Integral vereinigen, das nur über die positive Seite zu erstrecken ist. Dieselbe Betrachtung ist anwendbar auf denjenigen Theil von T_ϱ, der sich auf die beiden Seiten des Schnittes l'_ϱ bezieht; man erhält so schliesslich:

$$0 = J = J_1 + J_2,$$

$$J_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} S_\nu = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int\limits_{[a_\nu, b_\nu, c_\nu]^+}^{+} \{\omega^+ d\omega'^+ - \omega^- d\omega'^-\},$$

$$J_2 = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} T_\varrho = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \Big[\int\limits_{l'^+_\varrho}^{+} \{\omega^+ d\omega'^+ - \omega^- d\omega'^-\} + \int\limits_{k_\varrho}^{+} \omega\, d\omega' \Big],$$

wobei also jetzt das Integral

$$S_\nu = \int\limits_{[a_\nu, b_\nu, c_\nu]^+}^{+} \{\omega^+ d\omega'^+ - \omega^- d\omega'^-\}$$

einmal über die positive Seite eines jeden der drei Schnitte a_ν, b_ν, c_ν von Anfang bis zu Ende in der Richtung der Pfeile zu erstrecken ist, und ebenso das, als Theil von T_ϱ auftretende Integral

$$\int_{l_\varrho'^+}^{+} \{\omega^+ d\omega'^+ - \omega^- d\omega'^-\}$$

einmal über die positive Seite des Schnittes l'_ϱ von Anfang bis zu Ende in der Richtung der Pfeile zu erstrecken ist, während zugleich ω^+, ω^- die Werthe der Function ω in zwei entsprechenden Begrenzungspunkten, $d\omega'^+, d\omega'^-$ die Aenderungen bezeichnen, die ω'^+ und ω'^- gleichzeitig erleiden, wenn man auf einem der Schnitte a_ν, b_ν, c_ν oder l'_ϱ in der Richtung, die die Pfeile auf der positiven Seite desselben haben, sich fortbewegt. Das Integral S_ν soll zunächst berechnet werden.

Aus den, unter $(G.)$ aufgestellten Grenzbedingungen ergeben sich, mit Berücksichtigung der Gleichungen $A_\nu A_\nu = 1$, $B_\nu B_\nu = 1$, die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \{ d\omega'^+ = A_\nu d\omega'^-, \quad \omega^+ d\omega'^+ = \omega^- d\omega'^- + A'_\nu d\omega'^+,\\
&\text{längs } b_\nu \{ d\omega'^+ = B_\nu d\omega'^-, \quad \omega^+ d\omega'^+ = \omega^- d\omega'^- + B'_\nu d\omega'^+,\\
&\text{längs } c_\nu \{ d\omega'^+ = d\omega'^-, \qquad \omega^+ d\omega'^+ = \omega^- d\omega'^- + \varDelta_\nu d\omega'^+.
\end{aligned}$$

Entnimmt man aus diesen Gleichungen die Werthe der Differenzen

$$\{\omega^+ d\omega'^+ - \omega^- d\omega'^-\},$$

ausgedrückt durch $d\omega'^+$ allein, und führt dieselben in das Integral S_ν ein, so folgt:

$$S = A'_\nu \int_{a_\nu^+}^{+} d\omega'^+ + B'_\nu \int_{b_\nu^+}^{+} d\omega'^+ + \varDelta_\nu \int_{c_\nu^+}^{+} d\omega'^+.$$

Ein Durchlaufen der ganzen positiven Seite des Schnittes a_ν in der Richtung der Pfeile führt nun, mit Rücksicht auf die Figur, vom Punkte q_ν zum Punkte s_ν, ein Durchlaufen der ganzen positiven Seite des Schnittes b_ν in der Richtung der Pfeile vom Punkte t_ν zum Punkte r_ν, endlich ein Durchlaufen der ganzen positiven Seite des Schnittes c_ν in der Richtung der Pfeile vom Punkte s_ν zum Punkte π_ν. Bezeichnet man also den Werth der Function ω' in irgend einem Punkte β der Begrenzung abgekürzt durch ω'_β, so ergiebt sich

$$S_\nu = A'_\nu(\omega'_{s_\nu} - \omega'_{q_\nu}) + B'_\nu(\omega'_{r_\nu} - \omega'_{t_\nu}) + \varDelta_\nu(\omega'_{\pi_\nu} - \omega'_{s_\nu}).$$

In Folge der Grenzbedingungen $(G.)$ sind die Werthe der Function ω' in den vier Punkten $q_\nu, r_\nu, s_\nu, t_\nu$ mit dem Werthe der Function ω' im Punkte p_ν verknüpft durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\omega'_{q_\nu} = A_\nu \omega'_{p_\nu} + A''_\nu, \qquad \omega'_{r_\nu} = B_\nu \omega'_{p_\nu} + B''_\nu,\\
&\omega'_{s_\nu} = A_\nu \omega'_{r_\nu} + A''_\nu = A_\nu B_\nu \omega'_{p_\nu} + A_\nu B''_\nu + A''_\nu,\\
&\omega'_{t_\nu} = B_\nu \omega'_{q_\nu} + B''_\nu = A_\nu B_\nu \omega'_{p_\nu} + B_\nu A''_\nu + B''_\nu.
\end{aligned}$$

Führt man diese Ausdrücke in die letzte Formel für S_ν ein, so wird

$$S_\nu = \varDelta_\nu \omega'_{\pi_\nu} + A_\nu A'_\nu B''_\nu - B_\nu B'_\nu A''_\nu - \varDelta_\nu (A_\nu B''_\nu + A''_\nu) + [B'_\nu B_\nu (1-A_\nu) - A'_\nu A_\nu (1-B_\nu) - A_\nu B_\nu \varDelta_\nu]\, \omega'_{p_\nu},$$

und man erhält so schliesslich, indem man berücksichtigt, dass den Relationen $(G'.)$ zufolge der Coefficient von ω'_{p_ν} auf der rechten Seite dieser Gleichung den Werth Null hat, für den Werth des Integrals S_ν den Ausdruck

$$S_\nu = \varDelta_\nu \omega'_{\pi_\nu} + A_\nu A'_\nu B''_\nu - B_\nu B'_\nu A''_\nu - \varDelta_\nu (A_\nu B''_\nu + A''_\nu).$$

Der von ω' freie Theil dieses Ausdruckes soll im Folgenden abgekürzt durch C_ν bezeichnet werden.

3.

Im Vorigen bezeichnete T_ϱ den Ausdruck

$$T_\varrho = \int_{l'^+_\varrho}^{+} \{\omega^+ d\omega'^+ - \omega^- d\omega'^-\} + \int_{k_\varrho}^{+} \omega\, d\omega'.$$

Was das erste Integral rechts betrifft, so hat man längs l_ϱ und folglich auch

$$\text{längs } l'_\varrho \; \{\omega^+ = \omega^- - 2\pi i L_\varrho, \quad d\omega'^+ = d\omega'^-, \quad \omega^+ d\omega'^+ = \omega^- d\omega'^- - 2\pi i L_\varrho d\omega'^+.$$

Da ferner ein Durchlaufen der ganzen positiven Seite des Schnittes l'_ϱ in der Richtung der Pfeile, mit Rücksicht auf die Figur, vom Punkte τ_ϱ zum Punkte λ_ϱ führt, so ergiebt sich der Werth des in Rede stehenden Integrals

$$\int_{l'^+_\varrho}^{+} \{\omega^+ d\omega'^+ - \omega^- d\omega'^-\} = -2\pi i L_\varrho \int_{l'^+_\varrho}^{+} d\omega'^+ = -2\pi i L_\varrho (\omega'_{\lambda_\varrho} - \omega'_{\tau_\varrho}).$$

Was das zweite, in dem obigen Ausdrucke für T_ϱ vorkommende Integral betrifft, so werden den früher getroffenen Bestimmungen zufolge die Functionen ω, ω' auf der Curve k_ϱ, über die dieses Integral von σ_ϱ bis τ_ϱ zu erstrecken ist, dargestellt durch die Gleichungen

$$\omega = \varphi_\varrho(r_\varrho) + \psi_\varrho(r_\varrho), \qquad \omega' = \varphi'_\varrho(r_\varrho) + \psi'_\varrho(r_\varrho),$$

wobei φ_ϱ, φ'_ϱ, ψ_ϱ, ψ'_ϱ die im art. 1 aufgestellten Reihen bezeichnen. Man hat also, unter Anwendung einer abgekürzten Bezeichnungsweise, so lange als dadurch kein Irrthum zu befürchten steht,

$$(1.) \qquad \int_{k_\varrho}^{+} \omega\, d\omega' = \int_\sigma^\tau \varphi_\varrho \frac{d\omega'}{dr_\varrho} dr_\varrho + \int_\sigma^\tau \psi_\varrho \frac{d\varphi'}{dr_\varrho} dr_\varrho + \int_\sigma^\tau \psi_\varrho \frac{d\psi'}{dr_\varrho} dr_\varrho.$$

Da die Funktionen ψ_ϱ, ψ'_ϱ von z in dem, durch die Curve k_ϱ vollständig begrenzten, den Punkt ε_ϱ enthaltenden Flächenstücke einwerthige und stetige Functionen des Ortes oder Punktes sind, so hat das dritte der rechts stehenden Integrale den Werth Null. Für die, unter den beiden anderen Integralzeichen vorkommenden Producte von Functionen erhält man unmittelbar die folgenden, ebenfalls für die ganze Curve k_ϱ convergenten Entwicklungen

$$\varphi_\varrho \frac{d\omega'}{dr_\varrho} = L_\varrho\, ln\, r_\varrho \frac{d\omega'}{dr_\varrho} + M_\varrho^{(1)} \frac{1}{r_\varrho} + M_\varrho^{(2)} \frac{1}{r_\varrho^2} + \cdots + M_\varrho^{(m_\varrho + n_\varrho + 1)} \frac{1}{r_\varrho^{m_\varrho + n_\varrho + 1}} + M_{\varrho 0} + M_{\varrho 1} r_\varrho + M_{\varrho 2} r_\varrho^2 + M_{\varrho 3} r_\varrho^3 + \cdots,$$

$$\psi_\varrho \frac{d\varphi'}{dr_\varrho} = \quad N_\varrho^{(1)} \frac{1}{r_\varrho} + N_\varrho^{(2)} \frac{1}{r_\varrho^2} + N_\varrho^{(3)} \frac{1}{r_\varrho^3} + \cdots + \quad N_\varrho^{(n_\varrho + 1)} \frac{1}{r_\varrho^{n_\varrho + 1}} \quad + N_{\varrho 0} + N_{\varrho 1} r_\varrho + N_{\varrho 2} r_\varrho^2 + N_{\varrho 3} r_\varrho^3 + \cdots,$$

wobei die Coefficienten M und N sämmtlich endliche Aggregate der, in den Reihen für φ, φ', ψ, ψ' als Coefficienten auftretenden Constanten L, L', c, c' sind, und speciell die beiden Coefficienten $M_\varrho^{(1)}$ und $N_\varrho^{(1)}$ die Werthe

$$M_\varrho^{(1)} = \qquad\qquad [L_{\varrho 1} c'_{\varrho 1} + 2 L_{\varrho 2} c'_{\varrho 2} + 3 L_{\varrho 3} c'_{\varrho 3} + \cdots + m_\varrho L_{\varrho, m_\varrho} c'_{\varrho, m_\varrho}],$$

$$N_\varrho^{(1)} = L'_\varrho c_{\varrho 0} - [L'_{\varrho 1} c_{\varrho 1} + 2 L'_{\varrho 2} c_{\varrho 2} + 3 L'_{\varrho 3} c_{\varrho 3} + \cdots + n_\varrho L'_{\varrho, n_\varrho} c_{\varrho, n_\varrho}],$$

besitzen. Die ebenfalls hier auftretenden Grössen m_ϱ, n_ϱ sind die in den Ausdrücken φ, φ' als Exponenten vorkommenden ganzen Zahlen. Multiplicirt man nun die oben aufgestellten Reihen mit dr_ϱ und integrirt sie über die Curve k_ϱ von σ bis τ, so folgt

$$\int_\sigma^\tau \varphi_\varrho \frac{d\omega'}{dr_\varrho} dr_\varrho = L_\varrho \int_\sigma^\tau ln\, r_\varrho \frac{d\omega'}{dr_\varrho} dr_\varrho + M_\varrho^{(1)} \int_\sigma^\tau \frac{dr_\varrho}{r_\varrho},$$

$$\int_\sigma^\tau \psi_\varrho \frac{d\varphi'}{dr_\varrho} dr_\varrho = N_\varrho^{(1)} \int_\sigma^\tau \frac{dr_\varrho}{r_\varrho},$$

denn es sind die unbestimmten Integrale aller übrigen Glieder der obigen, noch mit dr_ϱ multiplicirten Reihen in der Umgebung des Punktes ε_ϱ einwerthige Functionen des Ortes, die beim Durchlaufen der Curve k_ϱ von σ bis τ im Endpunkte τ denselben Werth wieder annehmen, den sie im Anfangspunkte σ besitzen, und es haben folglich die bestimmten Integrale dieser Glieder von σ bis τ erstreckt sämmtlich den Werth Null. Fasst man die gewonnenen Resultate zusammen, so ergiebt sich

$$(2.) \qquad \int_{k_\varrho}^{+} \omega\, d\omega' = L_\varrho \int_\sigma^\tau ln\, r_\varrho \frac{d\omega'}{dr_\varrho} dr_\varrho + (M_\varrho^{(1)} + N_\varrho^{(1)}) \int_\sigma^\tau \frac{dr_\varrho}{r_\varrho}.$$

Durch $[f]_\sigma^\tau$ bezeichne man die Differenz $f_\tau - f_\sigma$ der Werthe, die irgend ein, in die eckige Klammer eingeschriebener Ausdruck f in den Punkten τ und σ hat. Aus der Gleichung (2.) folgt dann, indem man auf das erste Integral rechts das Verfahren der theilweisen Integration anwendet, und das zweite Integral rechts ausführt,

$$(3.)\qquad \int\limits_{k_\varrho}^{+} \omega\, d\omega' = \left[L_\varrho\, \omega'\, ln\, r_\varrho + (M_\varrho^{(1)} + N_\varrho^{(1)})\, ln\, r_\varrho\right]_\sigma^\tau - L_\varrho \int\limits_\sigma^\tau \omega'\, \frac{dr_\varrho}{r_\varrho}.$$

Setzt man hier für den mit dr_ϱ multiplicirten Quotienten der Grössen ω' und r_ϱ die betreffende Reihenentwicklung, so liefert die Integration derselben

$$\int\limits_\sigma^\tau \omega'\, \frac{dr_\varrho}{r_\varrho} = L_\varrho' \int\limits_\sigma^\tau ln\, r_\varrho\, \frac{dr_\varrho}{r_\varrho} + c_{\varrho 0}' \int\limits_\sigma^\tau \frac{dr_\varrho}{r_\varrho} = \left[\frac{1}{2}\, L_\varrho'\, ln^2\, r_\varrho + c_{\varrho 0}'\, ln\, r_\varrho\right]_\sigma^\tau,$$

indem die, zwischen den Grenzen σ und τ genommenen Integrale aller übrigen Glieder der Reihe verschwinden. Führt man den gefundenen Werth in (3.) ein, und setzt

$$M_\varrho = -L_\varrho c_{\varrho 0}' + M_\varrho^{(1)}, \qquad N_\varrho = -N_\varrho^{(1)},$$

so folgt

$$(4.)\qquad \int\limits_{k_\varrho}^{+} \omega\, d\omega' = \left[L_\varrho \omega'\, ln\, r_\varrho + (M_\varrho - N_\varrho)\, ln\, r_\varrho - \frac{1}{2}\, L_\varrho L_\varrho' ln^2\, r_\varrho\right]_\sigma^\tau,$$

und hieraus ergiebt sich nach einfacher Reduction, unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$[ln\, r_\varrho]_\sigma = [ln\, r_\varrho]_\tau + 2\pi i, \qquad \omega_{\sigma_\varrho}' = \omega_{\tau_\varrho}' + 2\pi i L_\varrho',$$

endlich

$$(5.)\qquad \int\limits_{k_\varrho}^{+} \omega\, d\omega' = -2\pi i L_\varrho \omega_{\tau_\varrho}' - 2\pi i (M_\varrho - N_\varrho) + 2\pi^2 L_\varrho L_\varrho'.$$

Setzt man nun für die beiden Integrale, deren Summe oben mit T_ϱ bezeichnet wurde, die gefundenen Werthe ein, so erhält man schliesslich:

$$T_\varrho = -2\pi i L_\varrho \omega_{\lambda_\varrho}' - 2\pi i (M_\varrho - N_\varrho) + 2\pi^2 L_\varrho L_\varrho'.$$

4.

Führt man in die Gleichung des art. 2.

$$0 = J = J_1 + J_2 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} S_\nu + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} T_\varrho$$

an Stelle von S_ν und T_ϱ die gefundenen Werthe ein, so ergiebt sich

$$0 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} C_\nu - 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (M_\varrho - N_\varrho) + 2\pi^2 \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} L_\varrho L_\varrho' + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} A_\nu \omega_{\pi_\nu}' - 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} L_\varrho \omega_{\lambda_\varrho}'.$$

Die in diesem Ausdrucke noch vorkommenden Werthe der Funktion ω' für die $p+r$ Punkte π und λ erscheinen in Folge der Grenzbedingungen ($G.$) und der, über die

Aufeinanderfolge der Schnitte c und l gemachten Annahmen verknüpft durch die $p+r$ Gleichungen

$$\omega'_{\pi_1}-\omega'_{\pi_2}=\varDelta'_1,\ \omega'_{\pi_2}-\omega'_{\pi_3}=\varDelta'_2,\cdots,\omega'_{\pi_{p-1}}-\omega'_{\pi_p}=\varDelta'_{p-1},\ \omega'_{\pi_p}-\omega'_{\lambda_1}=\varDelta'_p,$$
$$\omega'_{\lambda_1}-\omega'_{\lambda_2}=-2\pi i L'_1,\cdots,\omega'_{\lambda_{r-1}}-\omega'_{\lambda_r}=-2\pi i L'_{r-1},\ \omega'_{\lambda_r}-\omega'_{\pi_1}=-2\pi i L'_r.$$

Drückt man nun aus diesen Gleichungen die sämmtlichen $p+r$ Functionswerthe durch den einen ω'_{π_1} aus, indem man von der letzten Gleichung ausgehend successive bis zur ersten aufsteigt, setzt ferner zur Abkürzung

$$-2\pi i L_\varrho=\varDelta_{p+\varrho},\qquad -2\pi i L'_\varrho=\varDelta'_{p+\varrho},\qquad p+r=q,$$

und berücksichtigt die beiden ersten Gleichungen $(G'.)$, die unter Anwendung dieser Abkürzungen sich schreiben

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\varDelta_\nu=0,\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=q}\varDelta'_\nu=0,$$

so folgt

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\varDelta_\nu\omega'_{\pi_\nu}-2\pi i\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}L_\varrho\omega'_{\lambda_\varrho}=\ &\varDelta_1(\varDelta'_1+\varDelta'_2+\cdots+\varDelta'_q)\\&+\varDelta_2(\varDelta'_2+\varDelta'_3+\cdots+\varDelta'_q)\\&\cdots\cdots\cdots\\&+\varDelta_{q-1}(\varDelta'_{q-1}+\varDelta'_q)+\varDelta_q\varDelta'_q,\end{aligned}$$

und durch Einführung dieses Ausdruckes erhält man schliesslich die gesuchte Relation in der Form:

$$(F.)\qquad \left\{\begin{aligned}0=\sum_{\nu=1}^{\nu=p}C_\nu-2\pi i\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}(M_\varrho-N_\varrho)+2\pi^2\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}L_\varrho L'_\varrho\\+\varDelta_1(\varDelta'_1+\varDelta'_2+\cdots+\varDelta'_q)\\+\varDelta_2(\varDelta'_2+\varDelta'_3+\cdots+\varDelta'_q)\\\cdots\cdots\cdots\\+\varDelta_{q-1}(\varDelta'_{q-1}+\varDelta'_q)+\varDelta_q\varDelta'_q,\end{aligned}\right.$$

wobei also zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\begin{gathered}C_\nu=A_\nu A'_\nu B''_\nu-\bar{B}_\nu B'_\nu A''_\nu-\varDelta_\nu(A_\nu B''_\nu+A''_\nu),\\ M_\varrho=-L_\varrho c'_{\varrho 0}+L_{\varrho 1}c'_{\varrho 1}+2L_{\varrho 2}c'_{\varrho 2}+\cdots+m_\varrho L_{\varrho,m_\varrho}c'_{\varrho,m_\varrho},\\ N_\varrho=-L'_\varrho c_{\varrho 0}+L'_{\varrho 1}c_{\varrho 1}+2L'_{\varrho 2}c_{\varrho 2}+\cdots+n_\varrho L'_{\varrho,n_\varrho}c_{\varrho,n_\varrho},\\ (\varrho=1,2,\cdots,r)\{\varDelta_{p+\varrho}=-2\pi i L_\varrho,\quad \varDelta'_{p+\varrho}=-2\pi i L'_\varrho\},\quad q=p+r.\end{gathered}$$

Sind die Functionen ω, ω' beide allenthalben endlich in T''' oder T'', so haben die Constanten L, L' sämmtlich den Werth Null, und es ergiebt sich dann aus der obigen, alle Fälle umfassenden Formel die speciellere:

$$\begin{aligned} 0 = \int_R^{+} \omega\, d\omega' = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} C_\nu &+ \Delta_1(\Delta_1' + \Delta_2' + \cdots + \Delta_p') \\ &+ \Delta_2(\Delta_2' + \Delta_3' + \cdots + \Delta_p') \\ &\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &+ \Delta_{p-1}(\Delta_{p-1}' + \Delta_p') + \Delta_p \Delta_p'. \end{aligned}$$

Vertauscht man in dem links stehenden Integrale die beiden Functionen ω und ω', so hat das dann entstehende Integral ebenfalls den Werth Null. Die Vertauschung von ω und ω' zieht aber auf der rechten Seite der obigen Gleichung eine gleichzeitige Vertauschung von A_ν und A_ν, B_ν und B_ν, A_ν' und A_ν'', B_ν' und B_ν'', Δ_ν und Δ_ν' nach sich. Man erhält so für diesen Fall die folgende Relation:

$$(F''.)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \{A_\nu A_\nu'' B_\nu' - B_\nu B_\nu'' A_\nu' - \Delta_\nu'(A_\nu B_\nu' + A_\nu')\} & \\ + \Delta_1'(\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_p) & \\ + \Delta_2'(\Delta_2 + \Delta_3 + \cdots + \Delta_p) & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ + \Delta_{p-1}'(\Delta_{p-1} + \Delta_p) + \Delta_p' \Delta_p, & \end{aligned}\right.$$

die von der vorhergehenden sich nur durch die Form unterscheidet, indem mit Hülfe der Gleichungen $(G'.)$ die eine leicht in die andere übergeführt werden kann. Für manche Untersuchungen ist die letztere Form vorzuziehen.

Würzburg, im November 1869.

Vierte Abhandlung.

Zur Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 73, Seite 340—364.

Ein fundamentaler Satz der Functionentheorie lautet:

„Bezieht man die Punkte einer Kreisfläche durch Coordinaten x, y auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, so existirt zu dieser Kreisfläche immer eine und nur eine reelle Function u der Coordinaten x, y mit folgenden Eigenschaften:

I. Die Function u ist für die ganze Kreisfläche, den Rand einbegriffen, eine einwerthige und stetige Function des Ortes oder Punktes x, y und stimmt am Rande vollständig mit einer für den Rand willkürlich angenommenen, längs des Randes allenthalben stetigen Function überein.

II. Die sämmtlichen Derivirten der Function u von angebbarer Ordnung sind im Innern der Kreisfläche, d. h. bis in jede endliche Nähe zum Rande, einwerthig und stetig, und die zweiten Derivirten genügen der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.“

Das bekannte Verfahren, dessen man sich bei mathematisch-physikalischen Untersuchungen bedient, um eine Function u mit den erwähnten Eigenschaften zu erhalten*), beruht auf der unbewiesenen Voraussetzung, dass jede einwerthige, stetige, reelle, und mit der Periode 2π periodische Function $f(\varphi)$ des reellen Argumentes φ sich für jeden Werth des Argumentes φ durch eine *Fourier*sche Reihe darstellen lasse. Nur für den Fall, dass die Function $f(\varphi)$ auf der Strecke von $-\pi$ bis $+\pi$ nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt, hat *Dirichlet* (d. Journal Bd. 4) diesen letztgenannten Satz bewiesen, und die Untersuchungen von *Riemann* in der Arbeit: „*Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*“, wie manche wichtige Aufschlüsse über die zur Darstellbarkeit erforderlichen Bedingungen man ihnen auch verdankt, haben dennoch gerade für diejenigen Functionen, die unbeschadet der Stetigkeit unendlich

*) Vergleiche z. B.: „*Das Dirichletsche Princip in seiner Anwendung auf die Riemannschen Flächen, von Carl Neumann*“, *pag. 5 u. flg.*

oft oscilliren, die Darstellbarkeit nicht bewiesen. Es beruht auf einem Irrthume, wenn Herr *Hankel* in einer kürzlich erschienenen Schrift*) annimmt, der Beweis für die Darstellbarkeit solcher Functionen durch trigonometrische Reihen sei von *Riemann* geliefert worden, und zur Bestätigung dieser seiner Ansicht auf art. 10 der oben citirten *Riemann*schen Arbeit verweist. In dem genannten Artikel hat *Riemann* nur bewiesen, dass, wenn die Function $f(\varphi)$ durchweg endlich bleibt und eine Integration zulässt, dann die Coefficienten der trigonometrischen Reihe zuletzt unendlich klein werden, womit für die Convergenz der Reihe noch nichts bewiesen ist. Im Gegentheile bemerkt *Riemann* ausdrücklich, mit Rücksicht auf die vorangegangene Untersuchung im art. 9, dass in diesem Falle die Convergenz der Reihe für einen bestimmten Werth von φ nur abhänge von dem Verhalten der Function $f(\varphi)$ in unmittelbarer Nähe dieses Werthes. Und in der That muss man, um über die Convergenz entscheiden zu können, sei es dass man sich dazu des im art. 9 unter III. gegebenen Satzes oder anderer Methoden bedienen will, über das Verhalten der Function $f(\varphi)$, auch wenn sie allenthalben stetig ist, noch weitere einschränkende Voraussetzungen treffen. Eine solche Voraussetzung würde z. B. die sein, dass die Function $f(\varphi)$ für jeden Werth φ einen endlichen Differentialquotienten besitzt, oder die von Herrn *Lipschitz* in seiner Arbeit über denselben Gegenstand (d. Journal Bd. 63, pag. 296—308) gemachte Annahme, dass der absolute Werth von $f(\varphi+\delta)-f(\varphi)$ mit positivem, abnehmendem δ schneller abnimmt als eine positive Potenz von δ, multiplicirt mit einer endlichen Constanten. Die Darstellbarkeit einer, nur der Bedingung der Stetigkeit unterworfenen Function $f(\varphi)$ durch eine trigonometrische Reihe ist also bis jetzt noch nicht bewiesen, und es kann folglich auf diese Annahme auch kein Beweis des im Anfange ausgesprochenen Satzes gestützt werden.

Zu den nachstehenden Betrachtungen führte mich die Vermuthung, dass die Unmöglichkeit, den obigen Satz allgemein zu beweisen, sobald man für u die bekannte Reihenentwicklung aufstellt, die auf dem Rande der Kreisfläche in eine *Fourier*sche Reihe übergeht, lediglich in der gewählten Ausdrucksform ihren Grund habe. Wenn man von einem Ausdrucke für u verlangt, er solle auf dem Rande selbst, seinem Werthe nach, mit einer für den Rand willkürlich angenommenen Function übereinstimmen, so verlangt man eben zu viel. Es würde vollkommen genügen, wenn man von einem Ausdrucke in x, y, der die übrigen für u aufgestellten Eigenschaften besitzt, zeigen könnte, dass sein Werth, wenn der Punkt x, y sich einem Randpunkte unbegrenzt nähert, ohne Unterbrechung der Stetigkeit gegen den Werth convergirt, den die für den Rand willkürlich fixirte Function in dem betreffenden Randpunkte besitzt. Zur Durchführung dieser Untersuchung kann man die eben erwähnte Reihenentwicklung für u, die nach

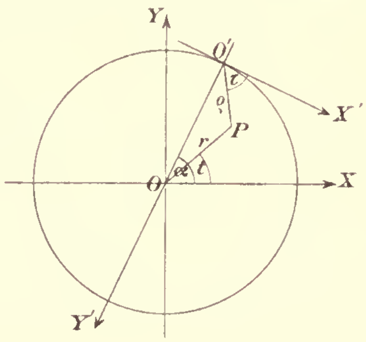
*) *„Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen, pag. 15 und pag. 33.“*

steigenden Potenzen des Radius vectors fortschreitet, nicht benutzen, dagegen führt die Anwendung einer andern, durch Summation der genannten Reihe entstehenden und schon von Herrn *C. Neumann* (d. Journal Bd. 59 pag. 364) aufgestellten Ausdrucksform zu dem gewünschten Ziele und damit zu einem strengen Beweise des ausgesprochenen Satzes. Dies zu zeigen, ist der Zweck der folgenden Seiten. Ich habe mich dabei nicht auf den Fall beschränkt, wo die für den Rand gegebene Function allenthalben stetig ist, sondern auch gleich den Fall mit berücksichtigt, wo dieselbe eine endliche Anzahl von Stetigkeitsunterbrechungen, hervorgerufen durch sprungweise Aenderungen um endliche Grössen, besitzt. Die Untersuchung dieses letztern Falles lässt zugleich den innern Grund erkennen für die merkwürdige Erscheinung, dass eine convergente *Fourier*sche Reihe, die eine Function $f(\varphi)$ darstellt, für diejenigen Werthe α von φ, für die $f(\varphi)$ springt, den Mittelwerth aus den Werthen $f(\alpha-0)$ und $f(\alpha+0)$ liefert. Andere Fälle bleiben hier ausgeschlossen; dagegen habe ich mit der obigen verwandte Fragen in den Kreis der Untersuchung eingeflochten.

Schliesslich bemerke ich noch, dass mir während der Ausarbeitung dieses Aufsatzes eine, im XV. Jahrgange der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich (pag. 113—128) unter dem Titel: „*Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ *für die Fläche eines Kreises*" erschienene Abhandlung des Herrn *H. A. Schwarz* zukam, in der der Verfasser, unter Anwendung derselben, oben erwähnten Ausdrucksform für u, ebenfalls einen Beweis des zu Anfange aufgestellten Satzes geliefert hat. Da im Uebrigen meine Untersuchung, sowohl durch den Gang des Beweises als durch die angewandten Methoden, sich wesentlich von derjenigen des Herrn *Schwarz* unterscheidet, so habe ich ihre Veröffentlichung nicht für überflüssig gehalten.

1.

In einer Ebene sei ein Kreis vom Radius R gegeben (s. d. Figur). Den Mittelpunkt O desselben nehme man zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems und wähle die Axen X, Y so, dass die Richtung der wachsenden Abscissen die Richtung der wachsenden Ordinaten zur Linken hat. Mit x, y bezeichne man die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Punktes P der Ebene, bezogen auf das System X, Y; mit r, t die Polarcoordinaten desselben Punktes, bezogen auf den Punkt O als Pol und die X-Axe als Polaraxe. Der Winkel t werde wachsend gezählt bei einer Drehung des Radius vectors r von der X-Axe durch den ersten Quadranten zur Y-Axe.



Einen beliebig gewählten Punkt O' der Kreisperipherie, dessen rechtwinklige Coordinaten a, b, dessen Polarcoordinaten R, α seien, nehme man zum Anfangspunkte eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems X', Y'. Die Y'-Axe soll durch den Punkt O gehen, und $O'O$ soll die Richtung der wachsenden Ordinaten sein. Die X'-Axe wird dann im Punkte O' Tangente zum Kreise sein, und die Richtung der wachsenden Abscissen soll die schon fixirte Richtung der wachsenden Ordinaten zur Rechten haben. Mit x', y' bezeichne man die Coordinaten des Punktes P in Bezug auf das neue System, mit ϱ, τ die Polarcoordinaten desselben Punktes, bezogen auf ein Polarcoordinatensystem, dessen Pol der Punkt O', dessen Polaraxe die X'-Axe ist. Der Winkel τ werde wachsend gezählt bei einer Drehung des Radius vectors ϱ von der X'-Axe durch den ersten Quadranten zur Y'-Axe. Man hat dann zwischen den vier, dem Punkte P zukommenden Paaren von Coordinaten die folgenden Beziehungen:

$$x = r\cos t, \qquad x = a + \sin\alpha\cdot x' - \cos\alpha\cdot y', \qquad x' = \varrho\cos\tau,$$

$$y = r\sin t, \qquad y = b - \cos\alpha\cdot x' - \sin\alpha\cdot y', \qquad y' = \varrho\sin\tau.$$

Nach diesen Festsetzungen betrachte man zwei Functionen u und v der Coordinaten r, t, definirt durch die Gleichungen:

$$(1.)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi=t-\pi}^{\varphi=t+\pi} f(\varphi)\,\frac{(R^2-r^2)\,d\varphi}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2},\\ v &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi=t-\pi}^{\varphi=t+\pi} f(\varphi)\,\frac{2Rr\sin(t-\varphi)\,d\varphi}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2},\end{aligned}\right.$$

unter folgenden Voraussetzungen. Die Coordinaten r, t sollen einem Punkte P im Innern der Kreisfläche angehören, d. h. r ist kleiner als R vorausgesetzt. Das Symbol $f(\varphi)$ soll eine reelle, mit der Periode 2π periodische Function der reellen Variable φ bezeichnen, die, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl p von Unstetigkeitsstellen in jedem Intervalle φ bis $\varphi+2\pi$, einwerthig und stetig ist, und deren Verhalten für die, durch die Congruenzen

$$\varphi \equiv c_1 \pmod{2\pi},\ \ \varphi\equiv c_2 \pmod{2\pi},\ \cdots,\ \varphi\equiv c_p \pmod{2\pi}$$

festgelegten Unstetigkeitsstellen characterisirt sei durch die Gleichungen:

$$f(c_1+0)-f(c_1-0)=h_1,\ \ f(c_2+0)-f(c_2-0)=h_2,\ \cdots,\ f(c_p+0)-f(c_p-0)=h_p,$$

wobei $h_1, h_2, \cdots, h_p$ irgend welche reelle endliche Constante bezeichnen. Im Uebrigen sind der Function $f(\varphi)$ keinerlei Bedingungen aufgelegt, sie kann beliebig oft durch Null gehen, sie kann beliebig oft vom Wachsen zum Abnehmen übergehen oder umgekehrt, sie kann graphisch willkürlich angenommen werden. Unter l ist eine willkürliche reelle Constante verstanden; welchen Werth man dem l auch beilegen mag, die Werthe von u und v werden dadurch nicht beeinflusst, da die unter den Integralzeichen vorkommenden Functionen von φ sämmtlich periodisch sind mit der Periode 2π.

In Folge der Bedingung $r < R$ besitzen die unter den Integralzeichen stehenden Functionen für jeden Werth von φ einen bestimmten endlichen Werth. Da sie ausserdem, als Functionen von x, y betrachtet, innerhalb der Kreisfläche einwerthig und stetig sind, auch die Grenzen der Integrale endliche Grössen sind, so folgt zunächst, dass u und v zwei, innerhalb der Kreisfläche, bis in jede endliche Nähe zum Rande, einwerthige und stetige Functionen des Ortes oder Punktes x, y sind. Da ferner auch die ersten, nach x und y genommenen Differentialquotienten der unter den Integralzeichen vorkommenden Functionen innerhalb der Kreisfläche einwerthig und stetig sind, so kann man die ersten Differentialquotienten von u und v nach x und y durch Differentiation unter dem Integralzeichen bilden, und erhält dann, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$N = R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2 = R^2 - 2Rx\cos\varphi - 2Ry\sin\varphi + x^2 + y^2,$$

$$N_1 = 2R\left[(R^2+x^2-y^2)\cos\varphi + 2xy\sin\varphi - 2Rx\right],$$

$$N_2 = 2R\left[(R^2-x^2+y^2)\sin\varphi + 2xy\cos\varphi - 2Ry\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi=l-\pi}^{\varphi=l+\pi} f(\varphi)\frac{N_1}{N^2}\,d\varphi, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi=l-\pi}^{\varphi=l+\pi} f(\varphi)\frac{N_2}{N^2}\,d\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi=l-\pi}^{\varphi=l+\pi} f(\varphi)\frac{N_2}{N^2}\,d\varphi, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi=l-\pi}^{\varphi=l+\pi} f(\varphi)\frac{N_1}{N^2}\,d\varphi.$$

Die ersten Derivirten von u und v nach x und y sind also im Innern der Kreisfläche ebenfalls allenthalben einwerthig und stetig, und da zudem zwischen ihnen die Relationen: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$: bestehen, so zeigt sich $u+vi$ als eine Function der complexen Variable $x+yi$, die mit ihren sämmtlichen Derivirten von angebbarer Ordnung innerhalb des Kreises allenthalben einwerthig und stetig ist. Es ist damit zunächst bewiesen, dass der Ausdruck u, wenn man die Bewegung des Punktes P auf die Kreisfläche mit dem Radius R beschränkt, eine reelle Function der Coordinaten x, y darstellt, die mit ihren sämmtlichen Derivirten von angebbarer Ordnung im Innern der Fläche, d. h. bis in jede endliche Nähe zum Rande, allenthalben einwerthig und stetig ist, und deren zweite Derivirte der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügen.

2.

Es soll jetzt weiter untersucht werden, wie der Ausdruck u sich verhält, wenn der Punkt P dem Rande der Kreisfläche näher und näher rückt: ob dann der Werth von u sich einer festen Grenze nähert, oder ob etwas davon Verschiedenes stattfindet. Zu dem Ende könnte man untersuchen, was aus dem Integrale u wird, wenn bei constant bleibendem t die Variable r sich wachsend dem Werthe R nähert. Es würde dies dem Falle entsprechen, wo der Punkt P sich einem festen Punkte O' der Peripherie in der Richtung des Radius OO' nähert. Das Resultat könnte unter Umständen ein anderes werden, wenn der Punkt P sich dem Punkte O' in einer von OO' verschiedenen Richtung näherte. Um also gleich den allgemeinsten Fall zu untersuchen, wo der Punkt P in einer beliebig angenommenen Richtung zum Punkte O' geht, indem nur auf diese Weise der Charakter der Function u für den Randpunkt O' klar erkannt werden kann, führe man in dem Ausdrucke u an Stelle von r und t die Coordinaten ϱ und τ, von dem Punkte O' als Pol aus, ein. Durch passende Wahl von τ zwischen 0 und π, die Grenzen selbst ausgeschlossen, kann man dann für das Heranrücken des Punktes P zum Punkte O' jede zulässige Richtung fixiren, und das Heranrücken selbst wird bewirkt, indem man das immer positive ϱ unter jede Grenze sinken lässt.

Zunächst geht nun der Ausdruck u durch Einführung von ϱ und τ über in:

$$(2.)\qquad u = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi = l-\pi}^{\varphi = l+\pi} f(\varphi)\,\frac{(2R\varrho\sin\tau - \varrho^2)\,d\varphi}{[2R^2 - 2R\varrho\sin\tau]\,[1-\cos(\varphi-\alpha)] + 2R\varrho\cos\tau\sin(\varphi-\alpha) + \varrho^2}.$$

Setzt man dann, da der Werth von u von dem Werthe der Constante l unabhängig ist, $l = \alpha$, und zerlegt das Integral zwischen den Grenzen $\alpha - \pi$ und $\alpha + \pi$ in zwei neue Integrale $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$, von denen das erste die Grenzen $\alpha - \pi$ und α, das zweite die Grenzen α und $\alpha + \pi$ besitzt, führt ferner in dem Integrale $u^{(1)}$ eine neue Integrationsvariable φ_1 ein durch die Substitution $\varphi = \alpha - \varphi_1$, ebenso in dem Integrale $u^{(2)}$ eine neue Integrationsvariable φ_2 durch die Substitution $\varphi = \alpha + \varphi_2$, so erhält man schliesslich, wenn man in den Endresultaten bei φ_1, φ_2 einfach die Indices unterdrückt und zur Abkürzung $\frac{\varrho}{R} = \varkappa$ setzt:

$$(3.)\qquad \left\{\begin{aligned}
u_{\varkappa,\tau} &= u^{(1)}_{\varkappa,\tau} + u^{(2)}_{\varkappa,\tau},\\
u^{(1)}_{\varkappa,\tau} &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi f(\alpha-\varphi)\,\frac{(2\varkappa\sin\tau - \varkappa^2)\,d\varphi}{(2-2\varkappa\sin\tau)(1-\cos\varphi) - 2\varkappa\cos\tau\sin\varphi + \varkappa^2},\\
u^{(2)}_{\varkappa,\tau} &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi f(\alpha+\varphi)\,\frac{(2\varkappa\sin\tau - \varkappa^2)\,d\varphi}{(2-2\varkappa\sin\tau)(1-\cos\varphi) + 2\varkappa\cos\tau\sin\varphi + \varkappa^2}.
\end{aligned}\right.$$

Mag nun die Function $f(\varphi)$ für $\varphi=\alpha$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden oder nicht, immer lässt sich eine positive Zahl 2γ kleiner als $\frac{\pi}{2}$ angeben, so dass in den beiden Intervallen von $\varphi=\alpha-2\gamma$ bis $\varphi=\alpha-0$ und von $\varphi=\alpha+0$ bis $\varphi=\alpha+2\gamma$ die Function $f(\varphi)$ stetig ist. Zerlegt man dann ein jedes der beiden Integrale $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ in zwei neue, von denen das erste die Grenzen 0 und 2γ, das zweite die Grenzen 2γ und π besitzt, setzt ferner zur Abkürzung:

$$
(4.)\qquad\begin{cases}
Q_1=\dfrac{2\varkappa\sin\tau-\varkappa^2}{(2-2\varkappa\sin\tau)(1-\cos\varphi)-2\varkappa\cos\tau\sin\varphi+\varkappa^2},\\[2ex]
Q_2=\dfrac{2\varkappa\sin\tau-\varkappa^2}{(2-2\varkappa\sin\tau)(1-\cos\varphi)+2\varkappa\cos\tau\sin\varphi+\varkappa^2},\\[2ex]
\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\gamma}Q_1\,d\varphi=J_1(\gamma,\varkappa,\tau),\quad \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{2\gamma}^{\pi}Q_1\,d\varphi=J_1'(\gamma,\varkappa,\tau),\\[2ex]
\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\gamma}Q_2\,d\varphi=J_2(\gamma,\varkappa,\tau),\quad \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{2\gamma}^{\pi}Q_2\,d\varphi=J_2'(\gamma,\varkappa,\tau),
\end{cases}
$$

und berücksichtigt, dass die Grössen Q_1 und Q_2 ihr Zeichen nicht wechseln, wie auch φ, $\varkappa$ und τ variiren mögen, indem die Nenner dieser Ausdrücke in der Form

$$(2-2\varkappa\sin\tau)(1-\cos\varphi)\pm 2\varkappa\cos\tau\sin\varphi+\varkappa^2=\left[2\cos\tau\sin\tfrac{\varphi}{2}\pm\varkappa\cos\tfrac{\varphi}{2}\right]^2+\left[(2\sin\tau-\varkappa)\sin\tfrac{\varphi}{2}\right]^2$$

enthalten sind, ihr gemeinsamer Zähler $2\varkappa\sin\tau-\varkappa^2$ dagegen für jeden Punkt P im Innern der Kreisfläche positiv ist und erst auf der Peripherie den Werth Null erhält, so folgt, indem man bekannte Sätze aus der Theorie der bestimmten Integrale anwendet,

$$
(5.)\qquad\begin{cases}
u^{(1)}_{\varkappa,\tau}=\dfrac{1}{\pi}\,J_1(\gamma,\varkappa,\tau)\,f(\alpha-2\theta_1\gamma)+\dfrac{1}{\pi}\,J_1'(\gamma,\varkappa,\tau)M_1,\\[2ex]
u^{(2)}_{\varkappa,\tau}=\dfrac{1}{\pi}\,J_2(\gamma,\varkappa,\tau)\,f(\alpha+2\theta_2\gamma)+\dfrac{1}{\pi}\,J_2'(\gamma,\varkappa,\tau)M_2,
\end{cases}
$$

wobei θ_1, θ_2 zwei reelle Zahlen bezeichnen, die den Bedingungen $0\leqq\theta_1\gtreqless 1$, $0\leqq\theta_2\gtreqless 1$ genügen, M_1, M_2 zwei reelle Zahlen, die den Bedingungen $K\leqq M_1\gtreqless G$, $K\leqq M_2\gtreqless G$ unterworfen sind, wenn K den kleinsten, G den grössten unter all den Werthen bedeutet, die $f(\varphi)$ überhaupt annehmen kann. Und man mag noch bemerken, obschon dies durch die Bezeichnung nicht hervorgehoben wurde, dass bei festangenommenem α die Werthe der Zahlen θ_1, θ_2, M_1, M_2 von den drei Grössen γ, $\varkappa$, τ abhängen, dass aber bei jeder zulässigen Wahl von γ, $\varkappa$, τ die eben aufgestellten Grenzen für die θ und M unveränderlich bewahrt bleiben.

3.

Zur Untersuchung der vier Functionen J_1, J_1', J_2, J_2' übergehend, kann man zunächst bemerken, dass die beiden letzten sich leicht auf die beiden ersten zurückführen lassen. Denn da Q_1 in Q_2 übergeht, wenn man in dem Ausdrucke für Q_1 statt τ die Grösse $\pi - \tau$ einführt, so hat man dem entsprechend auch

$$(6.)\qquad J_2(\gamma, \varkappa, \tau) = J_1(\gamma, \varkappa, \pi - \tau), \qquad J_2'(\gamma, \varkappa, \tau) = J_1'(\gamma, \varkappa, \pi - \tau).$$

Man führe nun in den Integralen J_1 und J_1' an Stelle von φ eine neue Integrationsvariable ξ ein durch die Gleichungen $\xi = \frac{1}{\varkappa} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, $d\xi = \frac{1}{\varkappa} \dfrac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$, indem man berücksichtigt, dass

$$\frac{1}{2} Q_1 d\varphi = \frac{(2\varkappa \sin\tau - \varkappa^2)\, d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{(4 - 4\varkappa \sin\tau + \varkappa^2) \sin^2\frac{\varphi}{2} - 4\varkappa \cos\tau \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2} + \varkappa^2 \cos^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{(2\sin\tau - \varkappa)\, d\xi}{(4 - 4\varkappa\sin\tau + \varkappa^2)\xi^2 - 4\cos\tau\,\xi + 1},$$

und dass bei dieser Transformation den Werthen $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\gamma$ die Werthe $\xi = 0$ bis $\xi = \frac{\operatorname{tang}\gamma}{\varkappa}$, den Werthen $\varphi = 2\gamma$ bis $\varphi = \pi$ die Werthe $\xi = \frac{\operatorname{tang}\gamma}{\varkappa}$ bis $\xi = \infty$ entsprechen. Es wird dann

$$(7.)\qquad \begin{cases} J_1(\gamma, \varkappa, \tau) = \displaystyle\int_{\xi=0}^{\xi=\frac{\operatorname{tang}\gamma}{\varkappa}} \frac{(2\sin\tau - \varkappa)\, d\xi}{(4 - 4\varkappa\sin\tau + \varkappa^2)\xi^2 - 4\cos\tau\,\xi + 1}, \\[2ex] J_1'(\gamma, \varkappa, \tau) = \displaystyle\int_{\xi=\frac{\operatorname{tang}\gamma}{\varkappa}}^{\xi=\infty} \frac{(2\sin\tau - \varkappa)\, d\xi}{(4 - 4\varkappa\sin\tau + \varkappa^2)\xi^2 - 4\cos\tau\,\xi + 1}, \end{cases}$$

und da das unbestimmte Integral der hinter den Integralzeichen stehenden Function von ξ dargestellt wird durch

$$\operatorname{arc\,tang}\left[\frac{(4 - 4\varkappa\sin\tau + \varkappa^2)\xi - 2\cos\tau}{2\sin\tau - \varkappa}\right] + \text{Const.},$$

so folgt schliesslich, wenn man zur Abkürzung $\frac{\operatorname{tang}\gamma}{\varkappa} = n$ setzt, und berücksichtigt, dass die Grössen $2\sin\tau - \varkappa$ und $4 - 4\varkappa\sin\tau + \varkappa^2$ immer positiv sind,

$$(8.)\qquad \begin{cases} J_1(\gamma, \varkappa, \tau) = \operatorname{arc\,tg}\left[\dfrac{(4 - 4\varkappa\sin\tau + \varkappa^2)n - 2\cos\tau}{2\sin\tau - \varkappa}\right] + \operatorname{arc\,tg}\left[\dfrac{2\cos\tau}{2\sin\tau - \varkappa}\right], \\[2ex] J_1'(\gamma, \varkappa, \tau) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\left[\dfrac{(4 - 4\varkappa\sin\tau + \varkappa^2)n - 2\cos\tau}{2\sin\tau - \varkappa}\right]. \end{cases}$$

Unter $\operatorname{arc\,tg}\alpha$, bei reellem Argumente α, ist hier und im Folgenden immer derjenige einzige bestimmte, zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ enthaltene Werth verstanden, der entsteht, wenn man $d \operatorname{arc\,tang} x = (1+x^2)^{-1}dx$ auf directem Wege zwischen den Grenzen 0 und α integrirt. Für ein positives α und ein ebenfalls positives β gelten dann die Formeln:

$$\operatorname{arc\,tg} \alpha = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\alpha}, \qquad \operatorname{arc\,tg} \alpha - \operatorname{arc\,tg} \beta = \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}\right),$$

von denen die zweite auch für negatives β noch gültig bleibt, wenn nur $1+\alpha\beta>0$ ist.

Man nehme nun den Punkt P in dem, durch die Grösse τ fixirten Strahle so nahe zum Punkte O' liegend an, dass, wie klein auch γ gewählt sei, $\varkappa$ kleiner als $\operatorname{tg}\gamma$ sei. Dann ist, weil $\operatorname{tg}\gamma<1$, auch $\varkappa<1$, $\varkappa n<1$, dagegen $n>1$. Unter dieser Voraussetzung ist der Ausdruck $(4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2)n-2\cos\tau$ für jeden Werth von τ positiv, denn der kleinste Werth, den er bei variablem τ überhaupt annehmen kann, ist $(4+\varkappa^2)n-2\sqrt{1+4\varkappa^2n^2}$, und dieser Minimumwerth ist positiv, weil $(4+\varkappa^2)^2n^2-4(1+4\varkappa^2n^2)=(16-8\varkappa^2+\varkappa^4)n^2-4$ für $\varkappa<1$ und $n>1$ immer positiv ist. Man hat also stets

$$(a.) \qquad \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{(4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2)n-2\cos\tau}{2\sin\tau-\varkappa}\right]=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\sin\tau-\varkappa}{(4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2)n-2\cos\tau}\right].$$

Bezeichnet ferner τ' einen zulässigen Werth für τ, der zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, so hat man

$$\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\cos\tau'}{2\sin\tau'-\varkappa}\right]=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\sin\tau'-\varkappa}{2\cos\tau'}\right],$$

$$\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\sin\tau'-\varkappa}{2\cos\tau'}\right]=\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\sin\tau'}{2\cos\tau'}\right]-\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\varkappa\cos\tau'}{2-\varkappa\sin\tau'}\right],$$

und durch Subtraction der zweiten Gleichung von der ersten ergiebt sich

$$(b.) \qquad \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\cos\tau'}{2\sin\tau'-\varkappa}\right]=\frac{\pi}{2}-\tau'+\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\varkappa\cos\tau'}{2-\varkappa\sin\tau'}\right].$$

Man erkennt nun leicht, dass diese letzte Formel noch richtig bleibt, wenn $\tau'=\frac{\pi}{2}$ wird, und auch noch, wenn man an Stelle von τ' die Grösse $\pi-\tau'$ schreibt. Die Formel (*b.*) gilt demnach wie (*a.*) für jeden zulässigen Werth des Winkels τ zwischen 0 und π. Berücksichtigt man noch, dass

$$\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\sin\tau-\varkappa}{(4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2)n-2\cos\tau}\right]-\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\varkappa\cos\tau}{2-\varkappa\sin\tau}\right]=\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\sin\tau-\varkappa n\cos\tau}{(2-\varkappa\sin\tau)n-\cos\tau}\right],$$

und dass $\varkappa n$ durch $\operatorname{tg}\gamma$ ersetzt werden kann, so folgt aus den Gleichungen (8.)

$$(9.) \qquad \begin{cases} J_1(\gamma,\varkappa,\tau)=\pi-\tau-\operatorname{arc\,tg}\left[\dfrac{\sin(\tau-\gamma)}{2n\cos\gamma-\cos(\tau-\gamma)}\right], \\ J_1'(\gamma,\varkappa,\tau)=\operatorname{arc\,tg}\left[\dfrac{2\sin\tau-\varkappa}{(4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2)n-2\cos\tau}\right], \end{cases}$$

und hieraus weiter, indem man τ durch $\pi-\tau$ ersetzt und die Gleichungen (6.) beachtet,

$$(10.) \qquad \begin{cases} J_2(\gamma,\varkappa,\tau)=\tau-\operatorname{arc\,tg}\left[\dfrac{\sin(\tau+\gamma)}{2n\cos\gamma+\cos(\tau+\gamma)}\right], \\ J_2'(\gamma,\varkappa,\tau)=\operatorname{arc\,tg}\left[\dfrac{2\sin\tau-\varkappa}{(4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2)n+2\cos\tau}\right]. \end{cases}$$

Einfache Betrachtungen, wie sie in der Theorie der Maxima und Minima vorkommen, zeigen nun, dass der Werth des Ausdruckes

$$F(\theta)=\frac{\sin\theta}{2n\cos\gamma+\cos\theta},$$

wenn θ, γ, n reelle Grössen bezeichnen, und $0<\gamma<\frac{\pi}{4}$, $n>1$ ist, immer zwischen den Grenzen $-\frac{1}{n}$ und $+\frac{1}{n}$ liegt. Ebenso leicht ergiebt sich, dass, in Folge der vorher über die Lage des Punktes P getroffenen Bestimmungen, die Differenz

$$\frac{2}{n}-\left[\frac{2\sin\tau-\varkappa}{(4-4\varkappa\sin\tau+\varkappa^2)\,n-2\cos\tau}\right]$$

für jeden zulässigen Werth von τ zwischen 0 und π positiv ist. Berücksichtigt man dann noch, dass für jedes reelle positive α der Werth von $\operatorname{arc\,tg}(\pm\alpha)$ zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ liegt, so ergeben sich aus den Gleichungen (9.) und (10.) die Relationen:

$$(11.)\qquad\begin{cases}\pi-\tau-\frac{1}{n}<J_1(\gamma,\varkappa,\tau)<\pi-\tau+\frac{1}{n}, & 0<J_1'(\gamma,\varkappa,\tau)<\frac{2}{n},\\ \tau-\frac{1}{n}<J_2(\gamma,\varkappa,\tau)<\quad\tau+\frac{1}{n}, & 0<J_2'(\gamma,\varkappa,\tau)<\frac{2}{n},\end{cases}$$

und man erhält schliesslich, indem man unter ε_1, ε_2 zwei reelle Zahlen zwischen -1 und $+1$, unter ε_1', ε_2' zwei reelle Zahlen zwischen 0 und 1 versteht, die Grenzen selbst ausgeschlossen:

$$(12.)\qquad\begin{cases}J_1(\gamma,\varkappa,\tau)=\pi-\tau+\frac{\varepsilon_1}{n}, & J_1'(\gamma,\varkappa,\tau)=\frac{2\varepsilon_1'}{n},\\ J_2(\gamma,\varkappa,\tau)=\tau+\frac{\varepsilon_2}{n}, & J_2'(\gamma,\varkappa,\tau)=\frac{2\varepsilon_2'}{n}.\end{cases}$$

4.

Führt man die für J_1, J_1', J_2, J_2' gefundenen Werthe in die Formeln (5.) ein, so folgt:

$$(13.)\qquad\begin{cases}u_{\varkappa,\tau}^{(1)}=\frac{1}{\pi}\left(\pi-\tau+\frac{\varepsilon_1}{n}\right)f(\alpha-2\theta_1\gamma)+\frac{2\varepsilon_1' M_1}{n\pi},\\ u_{\varkappa,\tau}^{(2)}=\frac{1}{\pi}\left(\qquad\tau+\frac{\varepsilon_2}{n}\right)f(\alpha+2\theta_2\gamma)+\frac{2\varepsilon_2' M_2}{n\pi},\end{cases}$$

unter der vorher gemachten Voraussetzung, dass γ eine Grösse zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ bezeichnet, die so klein angenommen ist, dass die Function $f(\varphi)$ in den beiden Intervallen von $\varphi=\alpha-2\gamma$ bis $\varphi=\alpha-0$ und von $\varphi=\alpha+0$ bis $\varphi=\alpha+2\gamma$ stetig bleibt, und unter der fernern Voraussetzung, dass $\varkappa<\operatorname{tg}\gamma$ ist, während zur Abkürzung n für $\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\varkappa}$ geschrieben wurde. Die obigen Formeln bleiben also richtig bei einer Verkleinerung von γ von dem fixirten Werthe aus, wenn man nur gleichzeitig auch $\varkappa$ so weit abnehmen lässt, dass $\varkappa$ kleiner als $\operatorname{tg}\gamma$ bleibt. Setzt man nun $\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{\nu}$, so ist $\nu>1$, da $\operatorname{tg}\gamma<1$, und der Bedingung $\varkappa<\operatorname{tg}\gamma$ wird genügt, wenn man $\varkappa=\frac{1}{\nu^2}$ setzt; es wird dann $n=\nu$. Da ferner, weil γ zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ liegt, $\gamma<\operatorname{tg}\gamma$ ist, so kann man

$$2\theta_1\gamma=2\theta_1'\operatorname{tg}\gamma=\frac{2\theta_1'}{\nu},\qquad 2\theta_2\gamma=2\theta_2'\operatorname{tg}\gamma=\frac{2\theta_2'}{\nu}$$

setzen, wobei $0\leqq\theta_1'<1$, $0\leqq\theta_2'<1$, indem die Werthe von θ_1, θ_2 nach Früherem den Bedingungen $0\leqq\theta_1\gtreqless 1$, $0\leqq\theta_2\gtreqless 1$ genügen. Bildet man jetzt durch Addition der linken Seiten der Gleichungen (13.) die Function $u_{\varkappa,\tau}$, so folgt bei passender Anordnung

$$(14.)\qquad \begin{cases} u_{\varkappa=\frac{1}{\nu^2},\tau}=f(\alpha-0)+\frac{\tau}{\pi}\left[f(\alpha+0)-f(\alpha-0)\right] \\ \qquad +\frac{\pi-\tau}{\pi}\left[f\left(\alpha-\frac{2\theta_1'}{\nu}\right)-f(\alpha-0)\right]+\frac{\tau}{\pi}\left[f\left(\alpha+\frac{2\theta_2'}{\nu}\right)-f(\alpha+0)\right] \\ \qquad +\frac{1}{\nu\pi}\left[2\varepsilon_1' M_1+2\varepsilon_2' M_2+\varepsilon_1 f\left(\alpha-\frac{2\theta_1'}{\nu}\right)+\varepsilon_2 f\left(\alpha+\frac{2\theta_2'}{\nu}\right)\right] \end{cases}$$

für $\nu=\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$ und, nach dem oben Bemerkten, also auch für jedes grössere ν. Lässt man nun, bei constant gehaltenem τ, durch fortwährende stetige Vergrösserung von ν die Grösse $\varkappa$, also auch $\varrho=R\varkappa$, stetig kleiner und kleiner werden, so entspricht diesem Processe geometrisch ein unbegrenztes stetiges Anrücken des Punktes P gegen den Begrenzungspunkt O' in der, durch den Winkel τ fixirten Richtung, und es convergirt dann, wie die letzte Formel unmittelbar zeigt, $u_{\varkappa,\tau}$ gegen die feste Grenze

$$(15.)\qquad \lim_{\varkappa=0} u_{\varkappa,\tau}=f(\alpha-0)+\frac{\tau}{\pi}\left[f(\alpha+0)-f(\alpha-0)\right],$$

denn man kann stets, wie klein auch eine von Null verschiedene positive Zahl σ angenommen werden mag, dazu den Werth von ϱ so klein, oder was dasselbe, den Werth von ν so gross annehmen, dass die Summe der Grössen, die auf der rechten Seite der Formel (14.) in der zweiten und dritten Zeile stehen, für dieses ν und auch für jedes grössere ν ihrem absoluten Werthe nach die Zahl σ nicht übersteigt, einerlei, welchen von den zulässigen Werthen τ besitzt oder annimmt.

Gehört nun zu dem Randpunkte O', dem im ersten Polarcoordinatensysteme die Coordinaten $r=R$, $t=\alpha$ zukommen, ein Werth α von t, für den die willkürlich angenommene Function f keine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, so ist $f(\alpha+0)=f(\alpha-0)=f(\alpha)$, und die, durch den Ausdruck u dargestellte Function der Coordinaten x, y des Punktes P erhält dann, wenn P vom Innern her auf irgend eine Weise in den Punkt O' rückt, immer den bestimmten Werth $f(\alpha)$. Erleidet dagegen die Function f für den Werth α

des Argumentes eine Unterbrechung der Stetigkeit, d. h. ist α einem der früher fixirten p Werthe $c_1, c_2, \cdots, c_p$ nach dem Modul 2π congruent, so zeigt die Formel (15.), dass in dem Falle der Werth, den die Function u beim Einrücken des Punktes P in die Lage O' erhält, von der Richtung, in der dasselbe geschieht, abhängig ist, und zwar so, dass zu jeder bestimmten Richtung ein und nur ein bestimmter Werth von u gehört, der sich mit dem, die Richtung bestimmenden Winkel τ in der Weise stetig ändert, dass die Aenderungen von u den Aenderungen von τ proportional sind. Durch passende Wahl der Richtung des Einrückens kann man dann für u jeden Werth erhalten, der zwischen $f(\alpha-0)$ und $f(\alpha+0)$ liegt, und geht man in der, durch $\tau=\frac{\pi}{2}$ fixirten Richtung des Kreisradius gegen den Punkt O', so trifft man dort mit dem Werthe $\frac{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)}{2}$ ein. Der Punkt O' bildet in diesem Falle einen Unstetigkeitspunkt für die, durch den Ausdruck u dargestellte Function, ohne dass darum, wenn man sich die Werthe von u durch Ordinaten, die in den entsprechenden Punkten x, y senkrecht auf der Ebene des Kreises stehen, repräsentirt dächte, die dadurch entstehende, über der Kreisfläche im Raume ausgebreitete Fläche irgendwo eine Unterbrechung ihres Zusammenhanges erlitte.

Damit ist bewiesen, dass immer eine Function u existirt, die ausser den, schon am Ende von art. 1 erwähnten Eigenschaften noch weiter die besitzt, dass sie am Rande der Kreisfläche vollständig mit einer für den Rand $(r=R,\ t=t)$ willkürlich angenommenen reellen Function $f(t)$ übereinstimmt, wenn nur $f(t)$ der Bedingung, längs des Randes allenthalben einwerthig und stetig zu sein, unterworfen ist; dass dagegen, wenn die Function $f(t)$ die Bedingung der Stetigkeit in der Weise verletzt, dass sie für einzelne Punkte $(r=R,\ t=c_1, c_2, \cdots, c_p)$ des Randes springt, dann die Uebereinstimmung nur für die von den c verschiedenen Punkte des Randes besteht, während in den Punkten c selbst die Function u alle nur möglichen Werthe zwischen den Werthen $f(c-0)$ und $f(c+0)$ besitzt. Im ersten Falle, wo $f(t)$ allenthalben stetig vorausgesetzt wird, ist, wie Formel (14.) zeigt, die Function u für die ganze Kreisfläche, den Rand einbegriffen, stetig; im zweiten Falle kann von der Stetigkeit der Function u nur die Rede sein in einem Gebiete, das aus der Kreisfläche entsteht, indem man die p Punkte c durch ebensoviele Kreise, die diese Punkte zu Mittelpunkten haben und deren Radien endliche, im Uebrigen beliebig kleine Werthe besitzen, ausscheidet.

5.

Eine weitere Frage ist die, ob ausser der, durch den Ausdruck u dargestellten Function u nicht noch eine zweite Function, u_1, existirt, die die bis jetzt gefundenen Eigenschaften von u ebenfalls besitzt; oder ob durch die erwähnten Eigenschaften die Function u eindeutig bestimmt erscheint. Die Existenz einer zweiten Function, u_1, vorausgesetzt, wird dann die durch $\mu = u - u_1$ zu bezeichnende Differenz der beiden Functionen für die ganze Kreisfläche, den Rand einbegriffen, eine einwerthige und stetige Function des Ortes oder Punktes x, y sein, die am Rande allenthalben den Werth Null besitzt. In welcher Richtung also auch der Punkt P in einen Randpunkt O' einrücken mag, der zugehörige Werth von μ wird stets gegen Null convergiren. Damit ist ausdrücklich festgesetzt, dass für den Fall, wo die Function u am Rande Unstetigkeitspunkte $c_1, c_2, \cdots, c_p$ besitzt, die Function u_1 für diese Punkte in gleicher Weise unstetig werden soll wie die Function u. Was ferner die Derivirten von μ betrifft, so werden jedenfalls die ersten und zweiten Derivirten von μ im Innern der Kreisfläche, d. h. bis in jede endliche Nähe zum Rande, einwerthig und stetig sein, und die nach x und y genommenen zweiten Derivirten der Gleichung $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}=0$ genügen.

Eine Function μ mit diesen Eigenschaften kann aber, wie jetzt gezeigt werden soll, für keinen Punkt im Innern der Kreisfläche einen von Null verschiedenen Werth besitzen. Das Gegentheil angenommen, sei P_1 ein Punkt im Innern der Kreisfläche, für den die Function μ einen von Null verschiedenen Werth M_1 besitze. Mit M' bezeichne man den absoluten Werth von M_1, mit M'' eine von Null verschiedene fest anzunehmende positive Zahl, die um eine endliche Grösse kleiner als M' sei. Da nach der Voraussetzung der Werth von μ durch stetige Aenderung stets gegen Null convergirt, wenn der Punkt P sich in irgend einer Richtung gegen einen Punkt des Randes bewegt, so werden die Punkte der Kreisfläche, für die der absolute Werth von μ grösser oder gleich M'' ist, alle in angebbarer endlicher Entfernung vom Rande liegen. Man kann also um den Mittelpunkt O einen zweiten, dem ersten concentrischen Kreis ziehen, dessen Radius R_1 um eine endliche Grösse kleiner ist als R, und der die genannten Punkte sämmtlich einschliesst, so dass in keinem Punkte auf der Peripherie dieses Kreises der absolute Werth von μ die Zahl M'' übersteigt.

Setzt man dann

$$\nu = -\int_{0,0}^{x,y}\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}dx - \frac{\partial \mu}{\partial x}dy\right),$$

und beschränkt die Bewegung des variablen Punktes x, y auf diese kleinere Kreisfläche F', ohne den, mit K' zu bezeichnenden Rand derselben auszuschliessen, so ist $\mu + \nu i$ in der Fläche F', den Rand einbegriffen, eine allenthalben einwerthige und stetige Function der complexen Variable $z = x + yi$, die bis in jede Nähe zum Rande und auch noch auf dem Rande K' selbst einwerthige und stetige Derivirte besitzt. In Folge dessen hat das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K'}^{+}\frac{(\mu+\nu i)dz}{z-z'},$$

ausgedehnt in positiver Richtung durch die Begrenzung K' von F' immer einen bestimmten Werth, wenn nur der Punkt x', y' der Ebene, für den z den Werth z' hat, nicht auf K' selbst liegt. Und zwar ist der Werth dieses Integrals beständig Null, wenn der Punkt x', y' ausserhalb F'' liegt, während für einen Punkt x', y' im Innern von F'' der Werth des Integrals mit dem Werthe übereinstimmt, den die Function $\mu + \nu i$ in diesem Punkte besitzt.

Bezeichnet man nun die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes P_1 mit x_1, y_1, die Polarcoordinaten mit r_1, t_1, und den zugehörigen Werth von z mit z_1, so wird jedenfalls r_1 um eine endliche Grösse kleiner sein als R_1, weil der Punkt P_1 im Innern der Fläche F'', in endlicher Entfernung vom Rande K' liegt. Der Punkt x_2, y_2 dagegen, für den z den Werth $z_2 = \frac{R_1^2}{r_1} e^{t_1 i}$ besitzt, wird dann nothwendig ausserhalb F' liegen. Bezeichnet man noch den Werth, den die Function ν im Punkte P_1 besitzt, durch N_1, während der Werth der Function μ in diesem Punkte schon vorher durch M_1 bezeichnet wurde, so folgt, wenn man in dem letzten Integrale an Stelle von z' einmal z_1, das andere Mal z_2 einführt:

$$\text{(I.)}\quad M_1 + N_1 i = \frac{1}{2\pi i} \int_{K'}^{+} \frac{(\mu + \nu i)\,dz}{z - z_1}, \qquad \text{(II.)}\quad 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{K'}^{+} \frac{(\mu + \nu i)\,dz}{z - z_2}.$$

Trennt man in diesen beiden Gleichungen die reellen Theile von den rein imaginären, nachdem man für z_1, z_2 ihre Ausdrücke durch Polarcoordinaten eingeführt, und z durch $R_1 e^{\varphi i}$, dz durch $R_1 e^{\varphi i} i d\varphi$ ersetzt hat, so folgt weiter, indem man den Ausdruck $R_1^2 - 2 R_1 r_1 \cos(t_1 - \varphi) + r_1^2$ zur Abkürzung mit Q bezeichnet:

$$\text{(I}^a.\text{)}\qquad M_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\varphi}{Q} \left\{ \mu \left[R_1^2 - R_1 r_1 \cos(t_1 - \varphi) \right] - \nu \left[R_1 r_1 \sin(t_1 - \varphi) \right] \right\},$$

$$\text{(I}^b.\text{)}\qquad N_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\varphi}{Q} \left\{ \mu \left[R_1 r_1 \sin(t_1 - \varphi) \right] + \nu \left[R_1^2 - R_1 r_1 \cos(t_1 - \varphi) \right] \right\},$$

$$\text{(II}^a.\text{)}\qquad 0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\varphi}{Q} \left\{ \mu \left[r_1^2 - R_1 r_1 \cos(t_1 - \varphi) \right] - \nu \left[R_1 r_1 \sin(t_1 - \varphi) \right] \right\},$$

$$\text{(II}^b.\text{)}\qquad 0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\varphi}{Q} \left\{ \mu \left[R_1 r_1 \sin(t_1 - \varphi) \right] + \nu \left[r_1^2 - R_1 r_1 \cos(t_1 - \varphi) \right] \right\}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann man die Werthe M_1 und N_1 der Functionen μ und ν für den Punkt P_1 ausdrücken durch die Werthe allein, die die Function μ auf der Integrationscurve K' besitzt. Subtrahirt man nämlich die Gleichung (II^a.) von (I^a.) und addirt die Gleichung (II^b.) zu (I^b.), berücksichtigt auch, dass die Function ν im Kreismittelpunkte 0, 0 den Werth Null besitzt, so zerstören sich die Terme unter den Integralzeichen, in denen ν vorkommt, und man erhält schliesslich:

$$M_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mu\,(R_1^2 - r_1^2)\,d\varphi}{R_1^2 - 2R_1 r_1 \cos(t_1 - \varphi) + r_1^2}, \qquad N_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{2\mu R_1 r_1 \sin(t_1 - \varphi)\,d\varphi}{R_1^2 - 2R_1 r_1 \cos(t_1 - \varphi) + r_1^2}.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen zeigt, dass zwischen dem Werthe M_1, den die Function μ im Punkte P_1 besitzt, und den Werthen von μ am Rande K' von F' ein bestimmter Zusammenhang besteht. Aus dieser Gleichung sollen jetzt weitere Schlüsse gezogen werden. Da den früher getroffenen Anordnungen gemäss der absolute Werth von μ in keinem Punkte der Integrationscurve K' die positive Zahl M'' übersteigt, auch der Factor, mit dem μ unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite der in Rede stehenden Gleichung multiplicirt erscheint, während der Integration sein Vorzeichen nicht ändert, sondern, da $r_1 < R_1$ ist, stets positiv bleibt, so folgt aus der obigen Gleichung, unter Anwendung eines Satzes von *Cauchy*,

$$-\frac{M''}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(R_1^2 - r_1^2)\,d\varphi}{R_1^2 - 2R_1 r_1 \cos(t_1 - \varphi) + r_1^2} \leqq M_1 \gtreqless \frac{M''}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(R_1^2 - r_1^2)\,d\varphi}{R_1^2 - 2R_1 r_1 \cos(t_1 - \varphi) + r_1^2},$$

und hieraus endlich, nach Ausführung des bestimmten Integrals:

$$-M'' \leqq M_1 \gtreqless M''.$$

Dieses letzte Resultat steht aber im Widerspruche mit Früherm, wonach die positive Zahl M'' endlich kleiner als der absolute Werth M' von M_1 gewählt war, unter der einzigen Voraussetzung, dass der Werth M_1, den die Function μ im Punkte P_1 besitzt, von Null verschieden sei. Die einander widersprechenden Ergebnisse, zu denen diese Voraussetzung geführt hat, beweisen ihre Unrichtigkeit und damit zugleich die Unhaltbarkeit der ursprünglichen Annahme, dass die Function μ für irgend einen Punkt P im Innern der Kreisfläche, deren Radius R, einen von Null verschiedenen Werth besitze. Die Function μ hat also für jeden innern, in endlicher Entfernung vom Rande gelegenen Punkt der Kreisfläche den Werth Null; da sie ausserdem für die ganze Kreisfläche, den Rand einbegriffen, einwerthig und stetig ist, und ihr Werth beim Uebergange vom Innern zum Rande stets gegen Null convergirt, so ist sie für alle Punkte der Kreisfläche und des Randes Null. Aus $\mu = 0$ folgt aber $u_1 = u$, d. h. die Function u_1 ist mit der Function u identisch, und es existirt demnach nur *eine* Function u, die die früher angegebenen Eigenschaften besitzt. Damit ist der im Anfange dieser Arbeit genannte Satz in allen seinen Theilen bewiesen.

6.

Für alle Punkte P im Innern der Kreisfläche kann der Ausdruck für u in eine nach steigenden Potenzen von $\frac{r}{R}$ fortschreitende Reihe entwickelt werden. Man hat nämlich

$$\frac{1}{2}\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}=\frac{1}{2}+\frac{r}{R}\cos(t-\varphi)+\frac{r^2}{R^2}\cos 2(t-\varphi)+\frac{r^3}{R^3}\cos 3(t-\varphi)+\cdots,$$

gültig für jedes r, dessen Werth kleiner als die Zahl R. Multiplicirt man linke und rechte Seite dieser Gleichung mit $\frac{1}{\pi}f(\varphi)d\varphi$ und integrirt nach φ zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$, so folgt, indem man, was hier erlaubt ist, auf der rechten Seite die Aufeinanderfolge der Operationen der Summation und Integration ändert:

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\varphi)\,\frac{(R^2-r^2)\,d\varphi}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\varphi)\,d\varphi+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{r^n}{R^n}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\varphi)\cos n(t-\varphi)\,d\varphi.$$

Den Werth, den die zu unterst stehende Reihe für einen Punkt P mit den Coordinaten r, t im Innern des Kreises besitzt, bezeichne man durch $S_{r,t}$, den Werth der Function u in demselben Punkte durch $u_{r,t}$. Für jeden innern, in endlicher Entfernung vom Rande gelegenen Punkt der Kreisfläche ist dann $S_{r,t}=u_{r,t}$.

Die in der untern Zeile stehende Reihe geht, wenn man r wachsend gleich R werden lässt, der Form nach über in die *Fourier*sche Reihe

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\varphi)\,d\varphi+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\varphi)\cos n(t-\varphi)\,d\varphi.$$

Convergirt nun diese *Fourier*sche Reihe für einen Werth t' der Variable t, und bezeichnet man ihren Werth für dieses t durch $S_{t'}$, so ist, wie *Abel* und *Dirichlet* bewiesen, $S_{t'}$ zugleich die Grenze, gegen die der Werth $S_{r,t'}$ der frühern, nach steigenden Potenzen von $\frac{r}{R}$ fortschreitenden Reihe ohne Unterbrechung der Stetigkeit convergirt, wenn r stetig gegen R convergirt. Dieser Werth $S_{t'}$ kann dann aber nicht von dem Werthe $\frac{f(t'+0)+f(t'-0)}{2}$ verschieden sein, gegen den, nach art. 4, die Function $u_{r,t'}$ convergirt, wenn bei constant bleibendem t' die Variable r gegen R convergirt. Denn da die beiden Functionen $S_{r,t'}$ und $u_{r,t'}$ für jedes $r<R$ gleichwerthig sind, und ausserdem jede von

ihnen für $\lim r = R$ ohne Unterbrechung der Stetigkeit gegen eine feste Grenze convergirt, so können ihre Werthe an der Grenze des Gebietes der Variable r, d. h. für $r = R$ nicht verschieden sein.

Für die Function u sind damit zwei Ausdrucksformen aufgestellt, das bestimmte Integral und die unendliche Reihe, die sich, was ihr Verhalten auf dem Rande der Kreisfläche selbst betrifft, wesentlich unterscheiden. Die erste Ausdrucksform versagt auf dem Rande, d. h. für $r = R$, immer, indem sie dort allenthalben den Werth Null liefert. Die zweite Ausdrucksform kann unter Umständen auch noch auf dem Rande, d. h. für $r = R$, sei es allenthalben oder nur in einzelnen Punkten R, t' die Function u darstellen, und zwar wird sie diese Darstellung, wie eben bewiesen, leisten, wenn die *Fourier*sche Reihe, in die sie für $r = R$ übergeht, für die betreffenden Werthe von t convergirt. Aber auch in dem Falle, wo die Reihe $S_{r,t}$ für $r = R$ noch convergirt, wird sie nur für *die* Randpunkte, in denen $f(t)$ keine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, den Werth darstellen, den die Function u in dem Punkte besitzt, während für die Unstetigkeitspunkte auf dem Rande, wo $f(t)$ springt und die Function u unendlich viele Werthe besitzt, die Reihe, ihre Convergenz vorausgesetzt, nur den einzigen Werth $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ von all den Werthen der Function u liefert, der einem Einrücken in der Richtung des Radius R entspricht. Alle übrigen Werthe, die u in einem solchen Punkte je nach den verschiedenen Richtungen des Einrückens erhalten kann, werden von der Reihe $S_{r,t}$ für $r = R$ nicht mehr geliefert, sind also gleichsam beim Uebergange vom Innern auf den Rand ausgefallen. Bei dieser, immer zulässigen Auffassung der *Fourier*schen Reihe, wonach sie lediglich als Grenzform einer Reihe $S_{r,t}$, die für die Kreisfläche bis in jede endliche Nähe zum Rande eine Function u darstellt, erscheint, aber als Grenzform, die einem Anrücken vom Innern gegen den Rand in der Richtung des Kreisradius entspricht, erklärt sich ihr Verhalten für die Punkte t, wo die Function $f(t)$ springt, auf natürliche Weise aus dem Verhalten der Function u für die entsprechenden Randpunkte R, t.

7.

Um den Mittelpunkt O des Kreises, dessen Radius R, beschreibe man einen zweiten, dem gegebenen concentrischen Kreis mit einem Radius $R' < R$. Die Fläche des ersten Kreises bezeichne man mit F, die des zweiten mit F': entsprechend die Peripherien der beiden Kreise durch K und K' resp. Unter u werde dieselbe Function wie vorher verstanden. Dieselbe ist eindeutig bestimmt, sobald die Function $f(\varphi)$, die in art. 1 ausführlicher charakterisirt wurde, gegeben vorliegt, und mit Rücksicht darauf möge zur Abkürzung gesagt werden, eine Function u correspondire mit einer gegebenen Function $f(\varphi)$. Unter diesen Voraussetzungen betrachte man das Integral

$$U_{F'} = \iint\limits_{F'} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} \partial x \, \partial y,$$

ausgedehnt über die Fläche F'. Da die Derivirten von u bis in jede endliche Nähe zum Rande K der ursprünglichen Kreisfläche einwerthig und stetig sind, so sind sie es jedenfalls in F' und auch noch auf der Begrenzung K' von F'. Es besitzt also das obige Integral einen endlichen, positiven Werth, der sich, wie bekannt, auch ausdrückt durch das einfache Integral

$$-\int\limits_{K'}^{+} u \frac{du}{dp} ds \qquad \text{oder} \qquad \int\limits_{K'}^{+} u \frac{dv}{ds} ds,$$

erstreckt in positiver Richtung über die Begrenzung K' von F', wenn ds ein Element dieser Begrenzung, p die nach Innen gerichtete Normale bezeichnet. Lässt man nun durch successive Vergrösserung von R' die Fläche F' gegen F convergiren, so können in Bezug auf den Werth $U_{F'}$ des obigen Doppelintegrals zwei Fälle eintreten: entweder wächst $U_{F'}$ über alle Grenzen, oder es convergirt $U_{F'}$ gegen einen festen Grenzwerth G. Im erstern Falle hat das Integral U_F keine Bedeutung mehr, im zweiten Falle ist sein Werth G. Dass der erste Fall immer eintritt, wenn die Function $f(\varphi)$, mit der die Function u correspondirt, für einzelne Werthe c des Argumentes springt, soll zunächst bewiesen werden. Die folgende Untersuchung liefert diesen Beweis in allgemeinerer Form, und bildet so gleichsam eine Ergänzung zu dem art. 17 der *Riemann*schen Dissertation, indem sie zeigt, dass eine sammt ihren ersten Derivirten einwerthige und stetige Function λ von x und y sich nicht einer, in einem Punkte in der gleich festzusetzenden Weise unstetigen Function μ unendlich annähern kann, ohne dass das Integral $\Omega(\lambda)$ aufhört endlich zu sein.

Fixirt sei ein begrenztes endliches Stück T der XY-Ebene, und in demselben liegend ein Punkt P. Für diese Fläche sei eine reelle Function μ der rechtwinkligen Coordinaten x, y gegeben, die sammt ihren ersten Derivirten im Innern von T bis in jede endliche Nähe zum Punkte P einwerthig und stetig ist, und zugleich mit ihren Derivirten diese Eigenschaften auch noch auf dem Rande von T besitzt. Das Verhalten der Function μ im Punkte P, von dem aus man Polarcoordinaten r, t einführe, sei dadurch charakterisirt, dass wenn man in irgend einer Richtung t auf den Punkt P zugeht, dann der Werth von μ ohne Unterbrechung der Stetigkeit gegen eine feste Grenze $G(t)$ convergirt, die von der gewählten Richtung abhängig, sich mit t um den Punkt P herum allenthalben stetig ändert. $G(t)$ wird also eine einwerthige, stetige, und mit der Periode 2π periodische Function von t sein; der Fall, dass $G(t)$ für jedes t denselben Werth besitze, sei ausgeschlossen. Was die Derivirten von μ betrifft, so soll bezüglich ihrer Existenz oder ihres Verhaltens im Punkte P nichts festgesetzt sein. Für eine solche Function μ, behaupte ich dann, wird das Integral

$$\Omega(\mu) = \iint \left\{ \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2 \right\} \partial x \partial y = \iint \left\{ \left(\frac{\partial \mu}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)^2 \right\} r \partial r \partial t,$$

wenn man es über die Fläche T ausdehnt, keinen angebbaren Werth erhalten, indem sein Werth, je mehr sich die Summation dem Unstetigkeitspunkte P nähert, um so mehr über alle Grenzen wächst.

Um dieses zu beweisen, beschreibe man um P als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius r_2, dessen Fläche vollständig innerhalb T liegt, und einen zweiten, diesem concentrischen Kreis mit einem endlich kleinern Radius r_1. Ausserdem fixire man zwei Radiivectoren $t = t_1$ und $t = t_2$, $(t_2 > t_1)$, die so gewählt seien, (was nach den gemachten Annahmen immer möglich), dass die Werthe M_1 und M_2 von μ, die man erhält, indem man das eine Mal in der durch t_1, das zweite Mal in der durch t_2 bestimmten Richtung in den Punkt P einrückt, endlich verschieden sind. Betrachtet man dann das Integral

$$W_\mu = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)^2 dt,$$

so bilden dessen Elemente einen Theil der Elemente des obigen Integrals $\Omega(\mu)$, und da dieses letztere nur positive Elemente besitzt, nie also Elemente sich gegenseitig aufheben, so wird der verlangte Beweis erbracht sein, wenn man zeigt, dass der Werth des Integrals W_μ dadurch, dass man die Zahlen r_1 und r_2 in passender Weise klein genug nimmt, grösser gemacht werden kann als eine willkürlich gegebene, beliebig gross angenommene positive Zahl.

Die Function μ ist der Annahme gemäss sammt ihren ersten Derivirten in dem, durch die Grenzwerthe r_1, r_2 und t_1, t_2 fixirten Gebiete, den Rand desselben einbegriffen, eine einwerthige und stetige Function von r und t. Man setze $\mu = F(r, t)$, und zur Abkürzung $F(r, t_1) = f_1(r)$, $F(r, t_2) = f_2(r)$: dann hat man nach den über t_1 und t_2 vorher getroffenen Bestimmungen $\lim_{r=0} f_1(r) = M_1$, $\lim_{r=0} f_2(r) = M_2$. Betrachtet man nun das in dem Doppelintegrale W_μ vorkommende innere, von t_1 bis t_2 zu erstreckende Integral, so bleibt bei der Ausführung dieser Summation nach t die Grösse r constant, und für die Grenzen t_1 und t_2 hat μ die Werthe $f_1(r)$ und $f_2(r)$ resp. Unter all den Functionen v von t, die von $t = t_1$ bis $t = t_2$ sammt ihrer ersten Derivirten einwerthig und stetig sind, und ausserdem für die Grenzen t_1, t_2 die gegebenen Werthe $f_1(r)$, $f_2(r)$ resp. besitzen, existirt nun eine, für die das Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 dt$$

am kleinsten wird. Es ist dies die Function $r = ct + c_1$, wenn man die Constanten c, c_1 aus den Gleichungen $f_1(r) = ct_1 + c_1$, $f_2(r) = ct_2 + c_1$ bestimmt; der betreffende Werth des Integrals wird dann $c^2(t_2 - t_1)$. Man hat also unter allen Umständen

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)^2 dt \geqq \frac{[f_2(r) - f_1(r)]^2}{t_2 - t_1},$$

und daher auch, weil r und dr immer positiv sind,

$$W_\mu \geqq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{r_1}^{r_2} [f_2(r) - f_1(r)]^2 \frac{dr}{r}.$$

Da die beiden Functionen $f_1(r)$ und $f_2(r)$ von $r = r_2$ bis $r = 0$ stetig sind, und für verschwindendes r die erste den Werth M_1, die zweite den Werth M_2 erhält, so kann man jedenfalls die positive Zahl r_2, ohne gegen frühere Voraussetzungen zu verstossen, von Null verschieden so klein annehmen, dass der Werth des Ausdruckes $[f_2(r) - f_1(r)]^2$, der für $\lim r = 0$ ohne Unterbrechung der Stetigkeit gegen die feste Grenze $[M_2 - M_1]^2$ convergirt, in dem Intervalle von $r = 0$ bis $r = r_2$ stets grösser als $\frac{1}{2}[M_2 - M_1]^2$ bleibt. Unter dieser Voraussetzung über die Grösse von r_2 wird dann, wie man auch die positive Zahl r_1, die kleiner als r_2 vorausgesetzt ist, wählen mag, stets

$$W_\mu > \frac{[M_2 - M_1]^2}{2(t_2 - t_1)} \, ln \left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

sein, wobei der ln rein reell zu nehmen ist. Lässt man nun, während r_2 den festgesetzten Werth behält, r_1 kleiner und kleiner werden, so kann man dadurch den Werth von $ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ ohne Aufhören grösser und grösser machen, und es wird folglich W_μ, und um so mehr $\Omega(\mu)$ bei successiver Vergrösserung des Integrationsgebietes durch Abnahme von r_1 über jede angebbare positive Zahl herüberwachsen.

8.

Ganz anders stellt sich die Sache, wenn die Function $f(\varphi)$, mit der die Function u correspondirt, allenthalben stetig ist. Während, wie eben bewiesen, die Voraussetzung, dass $f(\varphi)$ für einzelne Werthe des Argumentes springt, mit Nothwendigkeit das Unendlichwerden des Integrals

$$U_F = \iint \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} \partial x \partial y,$$

wenn man es über die Kreisfläche F vom Radius R ausdehnt, nach sich zieht, können, wenn $f(\varphi)$ allenthalben stetig ist, in Bezug auf U_F beide vorher genannte Fälle eintreten, d. h. es kann, je nach der sonstigen Beschaffenheit von $f(\varphi)$, das Integral U_F entweder endlich sein oder auch keinen angebbaren Werth besitzen. Die Richtigkeit der ersten Behauptung leuchtet unmittelbar ein, man braucht nur für u den reellen Theil einer Function von z zu wählen, die mit ihren ersten Derivirten in der Fläche F und auch noch auf dem Rande K derselben einwerthig und stetig ist. Den Beweis für die zweite Behauptung liefert das folgende Beispiel.

Die Längeneinheit wähle man so, dass der Radius R des gegebenen Kreises, dessen Gleichung $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ ist, kleiner als $\frac{1}{2}$ wird. In Bezug auf diese Kreisfläche, den Rand einbegriffen, definire man eine Function u als den reellen Theil der Function

$$u + vi = i\sqrt{-\,ln\,(R + x + yi)}$$

der complexen Variable $x + yi$, nachdem man zuvor diese Function für die Kreisfläche wie folgt eindeutig bestimmt hat. Man führe vom Punkte $x = -R$, $y = 0$ aus Polarcoordinaten ϱ, τ ein durch die Gleichungen: $x = -R + \varrho\cos\tau$, $y = \varrho\sin\tau$; es kann dann durch die Bewegung des Punktes x, y auf der Kreisfläche die Variable ϱ alle Werthe von 0 bis $2R < 1$, die Variable τ alle Werthe von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ annehmen, während alle übrigen Werthe durch die Bedingung, dass der Punkt x, y nicht über den Rand der Fläche hinaus gehe, ausgeschlossen werden sollen. Der unter der Quadratwurzel vorkommende Logarithmus werde für die Kreisfläche eindeutig bestimmt durch die Gleichung: $-\,ln\,(R+x+yi) = -\,ln\,\varrho - \tau i$; indem man unter $ln\,\varrho$ den bestimmten reellen Werth versteht, den man durch Integration von $d\,ln\,\xi = \xi^{-1}d\xi$ auf directem Wege zwischen den Grenzen 1 und ϱ erhält. Trennt man dann in der Gleichung für $u + vi$ die reellen Theile von den rein imaginären, so folgt für jedes ϱ und τ, das einem Punkte der Kreisfläche angehört, indem $-\,ln\,\varrho$ immer positiv ist:

$$u = \left[ln^2\varrho + \tau^2\right]^{\frac{1}{4}} \sin\left[\tfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\tfrac{\tau}{ln\,\varrho}\right)\right], \qquad v = -\left[ln^2\varrho + \tau^2\right]^{\frac{1}{4}} \cos\left[\tfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\tfrac{\tau}{ln\,\varrho}\right)\right],$$

wobei unter arctg mit reellem Argumente α immer derjenige Werth verstanden ist, den man durch Integration von $d\,\mathrm{arctang}\,\alpha = (1+\alpha^2)^{-1}d\alpha$ auf directem Wege zwischen den Grenzen 0 und α erhält, und wobei ferner die in beiden Ausdrücken vorkommende vierte Wurzel stets positiv genommen werden soll. Damit sind denn die beiden Functionen u und v für die Kreisfläche, den Rand einbegriffen, vollständig eindeutig bestimmt.

Zunächst ist nun klar, dass die Function u mit ihren sämmtlichen Derivirten von angebbarer Ordnung im Innern der Kreisfläche bis in jede endliche Nähe zum Rande einwerthig und stetig ist, und dass die zweiten Derivirten der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügen. Von den beiden Punkten: $x = -R$, $y = 0$ und $x = -R+1$, $y = 0$: um die herum die verschiedenen Zweige der ursprünglichen Function $u + vi$ in einander übergehen, liegt ja der erste auf dem Rande, der zweite, der Bedingung $R < \frac{1}{2}$ gemäss, vollständig ausserhalb des Kreises. Keiner dieser Punkte kann also vom Punkte x, y umlaufen werden, da dessen Bewegung auf die Kreisfläche, den Rand einbegriffen, beschränkt wurde. Die Function u ist aber nicht nur im Innern, sondern auch noch auf dem Rande des Kreises allenthalben einwerthig und stetig. Für alle Theile des Randes, denen von Null verschiedene Werthe der Grösse ϱ zugehören, zeigt dies die definirende Formel unmittelbar. Um das Verhalten der Function u für den Randpunkt $\varrho = 0$ zu erkennen, führe man durch die Gleichung

$$\xi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{ln\, \varrho}\right)$$

in den Ausdruck für u an Stelle der Variable ϱ eine neue Variable ξ ein. Es wird dann

$$u = \left[\frac{\tau^2}{\sin^2(2\xi)}\right]^{\frac{1}{4}} \sin\xi,$$

und da für verschwindendes ϱ die Variable ξ immer gegen Null convergirt, welchen Werth auch τ besitzen mag, ferner für verschwindendes ξ die Function u ebenfalls immer gegen Null convergirt, welchen Werth auch τ besitzen mag, so folgt, dass u in dem Randpunkte $\varrho = 0$ den bestimmten Werth Null besitzt, und dass demnach die Function u für die ganze Kreisfläche, den Rand einbegriffen, durchweg einwerthig und stetig ist.

Für diese Function u bilde man jetzt das Integral

$$U_F = \int\int \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} \partial x \partial y = \int\int \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2\right\} \varrho \partial \varrho \partial \tau,$$

und dehne es über die Fläche F des Kreises aus. Da dieses Integral nur positive Elemente besitzt, so wird man das Unendlichwerden desselben bewiesen haben, wenn man zeigt, dass es über einen bestimmten Theil F' von F ausgedehnt schon unendlich wird. Zu dem Ende verstehe man unter τ_1 eine positive Zahl, die zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegend, sowohl von 0 wie von $\frac{\pi}{2}$ endlich verschieden ist, unter ϱ_2 den Radiusvector des Punktes der Kreisperipherie, dem der Werth $\tau=\tau_1$ zugehört, $(\varrho_2=2R\cos\tau_1)$, unter ϱ_1 eine von Null verschiedene positive Zahl, die kleiner als ϱ_2 gewählt ist. Das durch die Radiivectoren $\tau=\tau_1$, $\tau=-\tau_1$ und durch die Kreise $\varrho=\varrho_1$, $\varrho=\varrho_2$ begrenzte Stück F' der Ebene bildet dann einen Theil der Fläche F, wie klein auch ϱ_1 als positive Zahl angenommen sein mag. Da ferner

$$\frac{\partial u}{\partial\varrho}=\frac{1}{2}\left[ln^2\varrho+\tau^2\right]^{-\frac{3}{4}}\left\{\frac{ln\,\varrho}{\varrho}\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{ln\,\varrho}\right)\right]-\frac{\tau}{\varrho}\cos\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{ln\,\varrho}\right)\right]\right\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\frac{1}{2}\left[ln^2\varrho+\tau^2\right]^{-\frac{3}{4}}\left\{\tau\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{ln\,\varrho}\right)\right]+ln\,\varrho\cos\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{ln\,\varrho}\right)\right]\right\}$$

ist, so ergiebt sich als Werth des obigen Integrals, wenn man es nur über den fixirten Theil F' von F ausdehnt, und dem entsprechend seinen Werth durch $U_{F'}$ bezeichnet:

$$U_{F'}=\frac{1}{4}\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\frac{d\varrho}{\varrho}\int_{-\tau_1}^{+\tau_1}\frac{d\tau}{\sqrt{ln^2\varrho+\tau^2}},$$

und hieraus weiter nach Ausführung der Integration, indem man zur Abkürzung $-ln\,\varrho_1=\alpha$, $-ln\,\varrho_2=\beta$ setzt:

$$U_{F'}=\frac{\tau_1}{2}\,ln\left[\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\tau_1^2}}{\beta+\sqrt{\beta^2+\tau_1^2}}\right]+\frac{\alpha}{2}\,ln\left[\frac{\tau_1+\sqrt{\alpha^2+\tau_1^2}}{\alpha}\right]-\frac{\beta}{2}\,ln\left[\frac{\tau_1+\sqrt{\beta^2+\tau_1^2}}{\beta}\right],$$

wobei die vorkommenden Quadratwurzeln sämmtlich positiv, die Logarithmen rein reell zu nehmen sind. Lässt man nun ϱ_1 kleiner und kleiner werden, so wächst die positive Zahl α über alle Grenzen. Von den drei Theilen, aus denen die rechte Seite der letzten Gleichung besteht, ändert sich der dritte dadurch nicht, weil die positive Zahl β von ϱ_1 unabhängig ist, der Werth des zweiten Theiles convergirt für unbegrenzt wachsendes α gegen die feste Grenze $\frac{\tau_1}{2}$, und der immer positive Werth des ersten wächst mit α zugleich über alle Grenzen. In Folge dessen erhält das Integral $U_{F'}$ für verschwindendes ϱ_1 keinen angebbaren Werth, indem es über alle Grenzen wächst, und es wird daher um so mehr das Integral U_F, da es über die ganze Kreisfläche auszudehnen ist, keinen angebbaren Werth erhalten.

Damit ist bewiesen, dass selbst wenn die Function $f(t)$, mit der eine Function u am Rande übereinstimmt, allenthalben stetig ist, daraus noch lange nicht das Endlichsein des über die Kreisfläche auszudehnenden Integrals U_F geschlossen werden darf. Alle in neuerer Zeit gemachten Versuche, die Zulässigkeit des *Dirichlet*schen Princips zu beweisen unter der Annahme, dass zu einer allenthalben stetigen Randfunction $f(t)$ auch immer ein endlicher Werth des Integrals U_F gehöre, sind demnach als verfehlt zu betrachten, da sie sich auf eine falsche Voraussetzung stützen. Nirgendwo in seinen Schriften giebt *Riemann* zu einer solchen Annahme Veranlassung: das einzige Mal, wo er verlangt, dass von fest gegebenen Randwerthen aus eine Function α in's Innere einer Fläche so stetig fortgesetzt werden soll, dass das Integral $\Omega(\alpha)$ einen endlichen Werth erhält (*Dissertation, art. 19. pag. 26*), stellt er ausdrücklich die Bedingung, dass in allen Begrenzungspunkten ein Werth gegeben sei, der sich für eine unendlich kleine Ortsänderung um eine unendlich kleine Grösse von derselben Ordnung ändert.

Würzburg, 1. Mai 1871.

ZWEITER TEIL

DAS SYSTEM DER FUNKTIONEN

SINT UT SUNT AUT NON SINT

Inhaltsverzeichnis zum zweiten Teil.

Erster Abschnitt.

Einleitende Betrachtungen.

Zweiter Abschnitt.

Untersuchung der zu einer gewöhnlichen Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right)$ gehörigen Funktionen.

Dritter Abschnitt.

Untersuchung der zu einer gemischten Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktionen.

Vierter Abschnitt.

Untersuchung der zu der ausgezeichneten Charakteristik gehörigen Funktionen.

Fünfter Abschnitt.

Theorie der A-Funktionen.

Sechster Abschnitt.

Theorie der F-Funktionen.

Siebenter Abschnitt.

Erzeugung der Riemann'schen Thetafunktion.

Achter Abschnitt.

Darstellung von Elementarfunktionen durch die Riemann'sche Thetafunktion.

Erster Abschnitt.

Einleitende Betrachtungen.

1.

Eine Funktion $W = W(z)$ der komplexen Veränderlichen z von der im Fundamentalsatze (s. Seite 182 des ersten Teiles) charakterisierten Art ist bis auf eine additive Konstante bestimmt, sobald für sie die p Faktorenpaare A_ν, B_ν, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, im Rahmen der Bedingungen $\bmod A_\nu = 1$, $\bmod B_\nu = 1$ und die Konstanten $\mathfrak{L}, \mathfrak{C}$ sowie die zu uneigentlichen Faktorenpaaren A, B gehörigen Konstanten $\mathfrak{A}$ im Rahmen der Bedingungen:

$$\left\{\begin{aligned} &(1-B_\nu)\mathfrak{A}_\nu - (1-A_\nu)\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{C}_\nu, \qquad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,} \\ &\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\mathfrak{C}_\nu + 2\pi i\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_\sigma = 0 \end{aligned}\right.$$

festgelegt sind.

Jedes Größensystem $\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_p \\ B_1 \cdots B_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, dessen $2p$ Größen A_ν, B_ν, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, den Bedingungen $\bmod A_\nu = 1$, $\bmod B_\nu = 1$ genügen, soll eine Charakteristik genannt werden, und dementsprechend möge von einer Funktion W, welche die p Größenpaare A_ν, B_ν, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, als Faktorenpaare besitzt, gesagt werden, daß sie zu der Charakteristik $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ gehöre. Besitzt eine solche Funktion W nicht für jeden Punkt der Fläche T'' denselben Wert, so gehört sie nur zu einer Charakteristik $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$; denn da eine solche Funktion für keinen Teil der Begrenzung von T'' konstant ist, so können ihre Werte längs der Begrenzung nur einem Gleichungensysteme von der Form (S.) genügen. Besitzt dagegen eine Funktion W für jeden Punkt von T'' denselben Wert, so kann sie als zu jeder Charakteristik $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ gehörig betrachtet werden; denn nach dem Fundamentalsatze wird die allgemeinste zu irgend einer Charakteristik $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ gehörige Funktion W, bei der die Größen $\mathfrak{L}, \mathfrak{C}$ und die zu uneigentlichen Faktorenpaaren A, B gehörigen Größen $\mathfrak{A}$ sämtlich den Wert Null besitzen, durch eine willkürliche Konstante C repräsentiert.

Eine Charakteristik $\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_p \\ B_1 \cdots B_p \end{pmatrix}$, bei der die p Faktorenpaare A_ν, B_ν, ${}_{\nu=1,2,\cdots,p}$, nicht sämtlich uneigentliche sind, soll eine gewöhnliche oder eine gemischte Charakteristik genannt werden, je nachdem die p Faktorenpaare sämtlich oder nur zum Teil eigentliche sind; die Charakteristik $\begin{pmatrix} 1 \cdots 1 \\ 1 \cdots 1 \end{pmatrix}$ dagegen, bei der die p Faktorenpaare sämtlich uneigentliche sind, möge die zur Zahl p gehörige ausgezeichnete Charakteristik heißen.

Zwei Charakteristiken $\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_p \\ B_1 \cdots B_p \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \bar{A}_1 \cdots \bar{A}_p \\ \bar{B}_1 \cdots \bar{B}_p \end{pmatrix}$, zwischen deren Elementen für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ die Beziehungen $A_\nu \bar{A}_\nu = 1$, $B_\nu \bar{B}_\nu = 1$ bestehen, sollen reziproke Charakteristiken genannt werden. Da $\mathrm{mod}\, A_\nu = 1$, $\mathrm{mod}\, B_\nu = 1$ ist, so sind je zwei entsprechende Elemente reziproker Charakteristiken nicht nur reziproke, sondern zugleich auch konjugierte Zahlen. In dem besonderen Falle, wo die $2p$ Faktoren A, B sämtlich zweite Einheitswurzeln sind, und demgemäß für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ aus den Beziehungen $A_\nu \bar{A}_\nu = 1$, $B_\nu \bar{B}_\nu = 1$ die Beziehungen $\bar{A}_\nu = A_\nu$, $\bar{B}_\nu = B_\nu$ folgen, ist die Charakteristik $\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_p \\ B_1 \cdots B_p \end{pmatrix}$ zu sich selbst reziprok. Unter den zur Zahl p gehörigen Charakteristiken kommen im ganzen 2^{2p} zu sich selbst reziproke Charakteristiken vor; man erhält dieselben, wenn man in dem Symbole $\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_p \\ B_1 \cdots B_p \end{pmatrix}$ an Stelle des Systems der $2p$ Buchstaben $A_1, \cdots, A_p$; $B_1, \cdots, B_p$ der Reihe nach die 2^{2p} Variationen der Elemente $+1$, -1 zur $2p^{\text{ten}}$ Klasse mit Wiederholung treten läßt.

2.

Die im letzten Abschnitt des ersten Teiles gewonnene, auf zwei zu den reziproken Charakteristiken $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \end{pmatrix}$ gehörige Funktionen W, $\overline{W}$ sich beziehende allgemeine Fundamentalformel (F.) soll jetzt, indem man bei den Charakteristiken $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \end{pmatrix}$ die eigentlichen und die uneigentlichen Faktorenpaare unterscheidet, in die für die spätere Verwendung geeignetste Gestalt gebracht werden.

Man nehme, unter $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ irgend eine den Bedingungen $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_\mathfrak{p}$, $\lambda_{\mathfrak{p}+1} < \lambda_{\mathfrak{p}+2} < \cdots < \lambda_p$ genügende Permutation der Zahlen $1, 2, \cdots, p$ verstehend, an, daß bei der Charakteristik $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdots A_p \\ B_1 \cdots B_p \end{pmatrix}$ $A_{\lambda_1}, B_{\lambda_1}; \cdots; A_{\lambda_\mathfrak{p}}, B_{\lambda_\mathfrak{p}}$ eigentliche, $A_{\lambda_{\mathfrak{p}+1}}, B_{\lambda_{\mathfrak{p}+1}}; \cdots; A_{\lambda_p}, B_{\lambda_p}$ uneigentliche Faktorenpaare seien. Dementsprechend sind bei der zu dieser Charakteristik reziproken Charakteristik $\begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \cdots \bar{A}_p \\ \bar{B}_1 \cdots \bar{B}_p \end{pmatrix}$ $\bar{A}_{\lambda_1}, \bar{B}_{\lambda_1}; \cdots; \bar{A}_{\lambda_\mathfrak{p}}, \bar{B}_{\lambda_\mathfrak{p}}$ eigentliche, $\bar{A}_{\lambda_{\mathfrak{p}+1}}, \bar{B}_{\lambda_{\mathfrak{p}+1}}; \cdots;$ $\bar{A}_{\lambda_p}, \bar{B}_{\lambda_p}$ uneigentliche Faktorenpaare. Die Grenzfälle $\mathfrak{p} = p$ und $\mathfrak{p} = 0$ sollen nicht ausgeschlossen sein; der erstere ist dahin zu interpretieren, daß die p Faktorenpaare A, B und damit auch die p Faktorenpaare $\bar{A}, \bar{B}$ sämtlich eigentliche sind, der letztere dahin, daß die p Faktorenpaare A, B und damit auch die p Faktorenpaare $\bar{A}, \bar{B}$ sämtlich uneigentliche sind. Trennt man jetzt eine jede der beiden auf der rechten Seite der Fundamentalformel (F.) in der ersten Zeile stehenden Summen so in zwei Teile, daß der erste die den Werten $\nu = \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\mathfrak{p}$, der zweite die den Werten $\nu = \lambda_{\mathfrak{p}+1}, \lambda_{\mathfrak{p}+2}, \cdots, \lambda_p$ entsprechenden Glieder enthält, beachtet, daß für $\nu = \lambda_{\mathfrak{p}+1}, \lambda_{\mathfrak{p}+2}, \cdots, \lambda_p$ $A_\nu = \bar{A}_\nu = 1$, $B_\nu = \bar{B}_\nu = 1$, $\mathfrak{E}_\nu = \bar{\mathfrak{E}}_\nu = 0$, auch daß $\bar{\mathfrak{E}}_1 + \bar{\mathfrak{E}}_2 + \cdots + \bar{\mathfrak{E}}_{\lambda_\nu} = \bar{\mathfrak{E}}_{\lambda_1} + \bar{\mathfrak{E}}_{\lambda_2} + \cdots + \bar{\mathfrak{E}}_{\lambda_\nu}$ ist, und bringt, indem man für $\nu = \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\mathfrak{p}$ zur Abkürzung

$$D_\nu = 2 - A_\nu - B_\nu, \qquad \bar{D}_\nu = 2 - \bar{A}_\nu - \bar{B}_\nu,$$

$$\mathcal{A}_\nu = \frac{1}{D_\nu} + (1 - A_\nu)\frac{\bar{A}_\nu B_\nu}{2 D_\nu \bar{D}_\nu}, \qquad \bar{\mathcal{A}}_\nu = \frac{1}{\bar{D}_\nu} + (1 - \bar{A}_\nu)\frac{A_\nu \bar{B}_\nu}{2 D_\nu \bar{D}_\nu},$$

$$\mathcal{B}_\nu = -\frac{1}{D_\nu} + (1 - B_\nu)\frac{\bar{A}_\nu B_\nu}{2 D_\nu \bar{D}_\nu}, \qquad \bar{\mathcal{B}}_\nu = -\frac{1}{\bar{D}_\nu} + (1 - \bar{B}_\nu)\frac{A_\nu \bar{B}_\nu}{2 D_\nu \bar{D}_\nu},$$

setzt, die Größen $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu, \bar{\mathfrak{A}}_\nu, \bar{\mathfrak{B}}_\nu, {}_{\nu = \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\mathfrak{p}}$, auf Grund des im letzten Abschnitt des ersten Teiles Bemerkten in die durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{A}_\nu = \mathcal{A}_\nu \mathfrak{E}_\nu + (1 - A_\nu)\mathfrak{K}_\nu, \qquad \bar{\mathfrak{A}}_\nu = \bar{\mathcal{A}}_\nu \bar{\mathfrak{E}}_\nu + (1 - \bar{A}_\nu)\bar{\mathfrak{K}}_\nu,$$

$$\mathfrak{B}_\nu = \mathcal{B}_\nu \mathfrak{E}_\nu + (1 - B_\nu)\mathfrak{K}_\nu, \qquad \bar{\mathfrak{B}}_\nu = \bar{\mathcal{B}}_\nu \bar{\mathfrak{E}}_\nu + (1 - \bar{B}_\nu)\bar{\mathfrak{K}}_\nu$$

bestimmte Form, so nimmt die Fundamentalformel schließlich die Gestalt:

$$\text{(F.)}\quad \begin{aligned} \int\limits_{\mathfrak{R}}^{+} W d\bar{W} = &\sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \left(\bar{\mathfrak{E}}_{\lambda_\nu}\mathfrak{K}_{\lambda_\nu} - \mathfrak{E}_{\lambda_\nu}\bar{\mathfrak{K}}_{\lambda_\nu} - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{E}_{\lambda_\nu}\bar{\mathfrak{E}}_{\lambda_\nu}\right) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \mathfrak{E}_{\lambda_\nu}\left(\bar{\mathfrak{E}}_{\lambda_1} + \bar{\mathfrak{E}}_{\lambda_2} + \cdots + \bar{\mathfrak{E}}_{\lambda_\nu}\right) \\ &+ \sum_{\nu=\mathfrak{p}+1}^{\nu=p} \left(\mathfrak{A}_{\lambda_\nu}\bar{\mathfrak{B}}_{\lambda_\nu} - \mathfrak{B}_{\lambda_\nu}\bar{\mathfrak{A}}_{\lambda_\nu}\right) \\ &+ 4\pi^2 \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma}\left(\bar{\mathfrak{L}}_{\varkappa_\sigma} + \bar{\mathfrak{L}}_{\varkappa_{\sigma+1}} + \cdots + \bar{\mathfrak{L}}_{\varkappa_s}\right) - 2\pi^2 \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma \bar{\mathfrak{L}}_\sigma \\ &- 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \left(\mathfrak{L}_\sigma \bar{c}_{\sigma 0} - \bar{\mathfrak{L}}_\sigma c_{\sigma 0}\right) - 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\sum_{\mu=1}^{\mu=m_\sigma} \mu\left(\mathfrak{L}_{\sigma\mu}\bar{c}_{\sigma\mu} - \bar{\mathfrak{L}}_{\sigma\mu} c_{\sigma\mu}\right) = 0 \end{aligned}$$

an. In dem Grenzfalle $\mathfrak{p} = p$ fällt die auf der rechten Seite dieser Formel in der zweiten Zeile stehende Summe weg, in dem Grenzfalle $\mathfrak{p} = 0$ dagegen fallen die in der ersten Zeile stehenden Summen weg und zugleich ist in jedem dieser beiden Fälle allgemein $\lambda_\nu = \nu$.

3.

Die dem Punkte ∞ der Z-Ebene entsprechenden Punkte $\infty_1, \infty_2, \cdots, \infty_q$ der Fläche T' sind im ersten Teile, in Art. 3 des fünften Abschnittes, mit $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_q$, die zugehörigen Ordnungszahlen mit $\nu_1 - 1, \nu_2 - 1, \cdots, \nu_q - 1$ bezeichnet worden. Im Anschlusse daran wurden die im Endlichen gelegenen Windungspunkte $z = \alpha_1, z = \alpha_2, \cdots, z = \alpha_r$ der Fläche T' mit $\mathscr{P}_{q+1}, \mathscr{P}_{q+2}, \cdots, \mathscr{P}_{q+r}$, die zugehörigen Ordnungszahlen mit $\nu_{q+1} - 1, \nu_{q+2} - 1, \cdots, \nu_{q+r} - 1$ bezeichnet. Weiter wurden dann zu den aufgezählten $q + r$ Punkten noch irgend t nicht auf der Begrenzung gelegene Punkte $z = \varepsilon_1, z = \varepsilon_2, \cdots, z = \varepsilon_t$ der Fläche T' hinzugenommen und mit $\mathscr{P}_{q+r+1}, \mathscr{P}_{q+r+2}, \cdots, \mathscr{P}_s$, $s = q + r + t$, bezeichnet. In den Fällen, wo eine Unterscheidung der Punkte α, ε nicht nötig war, wurde der kürzeren Darstellung wegen für diese Punkte eine einheitliche, durch die Gleichungen $\alpha_1 = a_{q+1}$, $\alpha_2 = a_{q+2}, \cdots$, $\alpha_r = a_{q+r}$; $\varepsilon_1 = a_{q+r+1}$, $\varepsilon_2 = a_{q+r+2}, \cdots, \varepsilon_t = a_{q+r+t}$ bestimmte Bezeichnung verwendet; zugleich wurde dann der Punkt $\mathscr{P}_{q+r+\tau}$ $(\tau = 1, 2, \cdots, t)$, dem der Wert $z = \varepsilon_\tau = a_{q+r+\tau}$ entspricht, als ein 0-facher Windungspunkt angesehen und demgemäß ihm die Ordnungszahl $\nu_{q+r+\tau} - 1$, wobei $\nu_{q+r+\tau} = 1$ ist, zugelegt.

Mit Rücksicht auf die folgenden Untersuchungen empfiehlt es sich eine neue Bezeichnung einzuführen. Die den Punkten $\infty_1, \infty_2, \cdots, \infty_q$ zukommenden Ordnungszahlen sollen von jetzt an mit $\iota_1 - 1, \iota_2 - 1, \cdots, \iota_q - 1$, die den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ zukommenden Ordnungszahlen mit $\mu_1 - 1, \mu_2 - 1, \cdots, \mu_r - 1$ beziehungsweise bezeichnet werden. Zwischen den Zahlen ι, μ und den Zahlen n, w bestehen dann die Beziehungen:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \iota_\varkappa = n, \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} (\iota_\varkappa - 1) + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (\mu_\varrho - 1) = w.$$

Ferner bezeichne man, unter σ irgend eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, s$ verstehend, den σ^{ten} der s Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ mit η, sodaß also η, wenn σ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, q$ ist, das Zeichen ∞_σ, wenn σ eine Zahl aus der Reihe $q + 1, \cdots, q + r$ ist, das Zeichen $\alpha_{\sigma-q}$, endlich, wenn σ eine Zahl aus der Reihe $q + r + 1, \cdots, s$ ist, das Zeichen $\varepsilon_{\sigma-q-r}$ vertritt. Ist im folgenden, zur Unterscheidung dieser drei Fälle, η durch ∞_σ oder durch $\alpha_{\sigma-q}$ oder endlich durch $\varepsilon_{\sigma-q-r}$ zu ersetzen, so soll der einfacheren Schreibweise wegen, wenn dadurch kein Mißverständnis zu befürchten steht, der bei den Zeichen $\infty_\sigma, \alpha_{\sigma-q}, \varepsilon_{\sigma-q-r}$ sowie bei den zugehörigen Zeichen $\iota_\sigma, \mu_{\sigma-q}$ stehende Index unterdrückt, also statt $\infty_\sigma, \alpha_{\sigma-q}, \varepsilon_{\sigma-q-r}, \iota_\sigma, \mu_{\sigma-q}$ einfacher $\infty, \alpha, \varepsilon, \iota, \mu$ geschrieben werden. Endlich mögen noch, der neu eingeführten Bezeichnung entsprechend, die der Zahl σ zugeordneten, am Schlusse des ersten Teiles, in Art. 3 des siebenten Abschnittes, definierten Funktionen ζ_σ, $F_\sigma(\zeta)$, $\bar{F}_\sigma(\zeta)$ des in seiner Bewegung auf das Gebiet des Punktes η beschränkten Punktes ζ von jetzt an mit ζ_η,

$F_\eta(\zeta)$, $\bar{F}_\eta(\zeta)$ bezeichnet werden. Die zu Anfang des eben genannten Artikels angeschriebenen Gleichungen nehmen dann die Form:

$$F_\eta(\zeta) = W(\zeta) - \left(\mathfrak{L}_\sigma \ln \frac{1}{\zeta_\eta} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{\zeta_\eta} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{\zeta_\eta^2} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{\zeta_\eta^{m_\sigma}}\right) = c_{\sigma 0} + c_{\sigma 1}\zeta_\eta + c_{\sigma 2}\zeta_\eta^2 + \cdots,$$

$$\bar{F}_\eta(\zeta) = \bar{W}(\zeta) - \left(\bar{\mathfrak{L}}_\sigma \ln \frac{1}{\zeta_\eta} + \frac{\bar{\mathfrak{L}}_{\sigma 1}}{\zeta_\eta} + \frac{\bar{\mathfrak{L}}_{\sigma 2}}{\zeta_\eta^2} + \cdots + \frac{\bar{\mathfrak{L}}_{\sigma m_\sigma}}{\zeta_\eta^{m_\sigma}}\right) = \bar{c}_{\sigma 0} + \bar{c}_{\sigma 1}\zeta_\eta + \bar{c}_{\sigma 2}\zeta_\eta^2 + \cdots$$

an, wobei $\zeta_\eta = \zeta_\infty = \zeta^{-\frac{1}{\iota}}$, $\zeta = \zeta_\infty^{-\iota}$ oder $\zeta_\eta = \zeta_\alpha = (\zeta - \alpha)^{\frac{1}{\mu}}$, $\zeta = \alpha + \zeta_\alpha^\mu$ oder endlich $\zeta_\eta = \zeta_\varepsilon = \zeta - \varepsilon$, $\zeta = \varepsilon + \zeta_\varepsilon$ ist, je nachdem η den Punkt ∞ mit der Ordnungszahl $\iota - 1$ oder den Punkt α mit der Ordnungszahl $\mu - 1$ oder endlich den Punkt ε vertritt, und man hat dann, den in dem eben genannten Artikel für $c_{\sigma n}$, $\bar{c}_{\sigma n}$, ${}_{n>0}$, gewonnenen Gleichungen entsprechend, hier:

$$c_{\sigma n} = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n F_\eta(\zeta)}{d\zeta_\eta^n}\right)_0, \qquad \bar{c}_{\sigma n} = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n \bar{F}_\eta(\zeta)}{d\zeta_\eta^n}\right)_0, \qquad {\scriptstyle \sigma = 1, 2, \cdots, s, \atop n = 1, 2, 3, \cdots,}$$

wobei der angehängte Index 0 bedeutet, daß der Grenzwert der zwischen den runden Klammern stehenden n^{ten} Derivierten für $\lim \zeta_\eta = 0$ zu nehmen ist. Unterscheidet man jetzt in bezug auf η die drei soeben erwähnten Fälle, so kann man in den vorstehenden Formeln die Größe ζ durch die Größe ζ_η ausdrücken und demgemäß

$$\text{für } \eta = \infty \left\{ \left(\frac{d^n F_\eta(\zeta)}{d\zeta_\eta^n}\right)_0 = \left(\frac{d^n F_\infty(\zeta_\infty^{-\iota})}{d\zeta_\infty^n}\right)_0, \qquad \left(\frac{d^n \bar{F}_\eta(\zeta)}{d\zeta_\eta^n}\right)_0 = \left(\frac{d^n \bar{F}_\infty(\zeta_\infty^{-\iota})}{d\zeta_\infty^n}\right)_0, \right.$$

$$\text{für } \eta = \alpha \left\{ \left(\frac{d^n F_\eta(\zeta)}{d\zeta_\eta^n}\right)_0 = \left(\frac{d^n F_\alpha(\alpha + \zeta_\alpha^\mu)}{d\zeta_\alpha^n}\right)_0, \qquad \left(\frac{d^n \bar{F}_\eta(\zeta)}{d\zeta_\eta^n}\right)_0 = \left(\frac{d^n \bar{F}_\alpha(\alpha + \zeta_\alpha^\mu)}{d\zeta_\alpha^n}\right)_0, \right.$$

$$\text{für } \eta = \varepsilon \left\{ \left(\frac{d^n F_\eta(\zeta)}{d\zeta_\eta^n}\right)_0 = \left(\frac{d^n F_\varepsilon(\varepsilon + \zeta_\varepsilon)}{d\zeta_\varepsilon^n}\right)_0, \qquad \left(\frac{d^n \bar{F}_\eta(\zeta)}{d\zeta_\eta^n}\right)_0 = \left(\frac{d^n \bar{F}_\varepsilon(\varepsilon + \zeta_\varepsilon)}{d\zeta_\varepsilon^n}\right)_0 \right.$$

setzen. In dem letzten dieser drei Fälle, wo η einer der Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ ist, stellen die auf den rechten Seiten der beiden Gleichungen stehenden Ausdrücke die Werte dar, welche die nach ζ genommenen n^{ten} Derivierten von $F_\varepsilon(\zeta)$, $\bar{F}_\varepsilon(\zeta)$ für $\zeta = \varepsilon$ besitzen. Man kann daher auch, wie im folgenden immer geschehen soll,

$$\text{für } \eta = \varepsilon \left\{ \left(\frac{d^n F_\eta(\zeta)}{d\zeta_\eta^n}\right)_0 = \left(\frac{d^n F_\varepsilon(\zeta)}{d\zeta^n}\right)_{\zeta = \varepsilon}, \qquad \left(\frac{d^n \bar{F}_\eta(\zeta)}{d\zeta_\eta^n}\right)_0 = \left(\frac{d^n \bar{F}_\varepsilon(\zeta)}{d\zeta^n}\right)_{\zeta = \varepsilon}, \right. \qquad {\scriptstyle n = 1, 2, 3, \cdots}$$

setzen.

Zweiter Abschnitt.

Untersuchung der zu einer gewöhnlichen Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktionen.

1.

Es bezeichne $\binom{A}{B} = \binom{A_1 \cdots A_p}{B_1 \cdots B_p}$ irgend eine gewöhnliche, also nur aus eigentlichen Faktorenpaaren zusammengesetzte, Charakteristik, $\binom{\bar{A}}{\bar{B}} = \binom{\bar{A}_1 \cdots \bar{A}_p}{\bar{B}_1 \cdots \bar{B}_p}$ die zu ihr reziproke Charakteristik. Der im ersten Teile gewonnene Fundamentalsatz liefert dann die sämtlichen zu den Charakteristiken $\binom{A}{B}$, $\binom{\bar{A}}{\bar{B}}$ beziehungsweise gehörigen Funktionen W, $\overline{W}$, wenn man — unter Beibehaltung der im ersten Teile, in Art. 1 des siebenten Abschnittes, angewandten Bezeichnungsweise für die zu zwei allgemeinen Funktionen W, $\overline{W}$ gehörigen Konstanten — das eine Mal an Stelle des Systems der $s + m_1 + \cdots + m_s + p$ Konstanten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{C}$, das andere Mal an Stelle des Systems der $s + m_1 + \cdots + m_s + p$ Konstanten $\overline{\mathfrak{L}}$, $\overline{\mathfrak{C}}$ ein jedes die Gleichungen $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{C}_\nu + 2\pi i \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \overline{\mathfrak{C}}_\nu + 2\pi i \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s} \overline{\mathfrak{L}}_\sigma = 0$ nicht verletzende System von $s + m_1 + \cdots + m_s + p$ Werten treten läßt und zu jeder so erhaltenen Funktion noch eine willkürliche Konstante addiert.

Die nächste Aufgabe besteht nun darin, aus den zu den Charakteristiken $\binom{A}{B}$, $\binom{\bar{A}}{\bar{B}}$ beziehungsweise gehörigen Funktionen gewisse einfachste Funktionen, aus denen die allgemeinsten Funktionen W, $\overline{W}$ sich linear zusammensetzen lassen, und die daher als Elementarfunktionen anzusehen sind, herauszugreifen und die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen mit Hilfe der in Art. 2 des vorhergehenden Abschnittes aufgestellten Fundamentalformel (F.) zu ermitteln. Da im vorliegenden Falle ein jedes Faktorenpaar A_ν, B_ν ein eigentliches, also $\mathfrak{p} = p$ und dementsprechend $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\cdots$, $\lambda_p = p$ ist, so tritt, wenn man noch die Größen $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\overline{\mathfrak{A}}_\nu$, $\overline{\mathfrak{B}}_\nu$ für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ in die durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{A}_\nu = \mathcal{A}_\nu \mathfrak{C}_\nu + (1-A_\nu)\mathfrak{K}_\nu, \qquad \overline{\mathfrak{A}}_\nu = \overline{\mathcal{A}}_\nu \overline{\mathfrak{C}}_\nu + (1-\overline{A}_\nu)\overline{\mathfrak{K}}_\nu,$$

$$\mathfrak{B}_\nu = \mathcal{B}_\nu \mathfrak{C}_\nu + (1-B_\nu)\mathfrak{K}_\nu, \qquad \overline{\mathfrak{B}}_\nu = \overline{\mathcal{B}}_\nu \overline{\mathfrak{C}}_\nu + (1-\overline{B}_\nu)\overline{\mathfrak{K}}_\nu$$

bestimmte Form bringt — wobei zur Abkürzung

$$\mathcal{A}_\nu = \frac{1}{D_\nu} + (1-A_\nu)\frac{\overline{A}_\nu B_\nu}{2D_\nu \overline{D}_\nu}, \qquad \overline{\mathcal{A}}_\nu = \frac{1}{\overline{D}_\nu} + (1-\overline{A}_\nu)\frac{A_\nu \overline{B}_\nu}{2D_\nu \overline{D}_\nu},$$

$$\mathcal{B}_\nu = -\frac{1}{D_\nu} + (1-B_\nu)\frac{\overline{A}_\nu B_\nu}{2D_\nu \overline{D}_\nu}, \qquad \overline{\mathcal{B}}_\nu = -\frac{1}{\overline{D}_\nu} + (1-\overline{B}_\nu)\frac{A_\nu \overline{B}_\nu}{2D_\nu \overline{D}_\nu},$$

$$D_\nu = 2 - A_\nu - B_\nu, \qquad \overline{D}_\nu = 2 - \overline{A}_\nu - \overline{B}_\nu$$

gesetzt ist — an Stelle der allgemeinen Fundamentalformel (F.) hier die Formel:

$$(\mathrm{F}_1.)\qquad \begin{aligned} \int\limits_{\mathfrak{N}}^{+} W d\overline{W} = & \sum_{\nu=1}^{\nu=p} (\overline{\mathfrak{C}}_\nu \mathfrak{K}_\nu - \mathfrak{C}_\nu \overline{\mathfrak{K}}_\nu - \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}_\nu \overline{\mathfrak{C}}_\nu) + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{C}_\nu(\overline{\mathfrak{C}}_1 + \overline{\mathfrak{C}}_2 + \cdots + \overline{\mathfrak{C}}_\nu) \\ & + 4\pi^2 \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma}(\overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_\sigma} + \overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_\sigma+1} + \cdots + \overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_s}) - 2\pi^2 \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma \overline{\mathfrak{L}}_\sigma \\ & - 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} (\mathfrak{L}_\sigma \bar{c}_{\sigma 0} - \overline{\mathfrak{L}}_\sigma c_{\sigma 0}) - 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \sum_{\mu=1}^{\mu=m_\sigma} \mu(\mathfrak{L}_{\sigma\mu} \bar{c}_{\sigma\mu} - \overline{\mathfrak{L}}_{\sigma\mu} c_{\sigma\mu}) = 0. \end{aligned}$$

2.

Der Fundamentalsatz liefert nun zu den Charakteristiken $\binom{A}{B}$, $\binom{\overline{A}}{\overline{B}}$, wenn man zunächst die Konstanten $\mathfrak{L}$, $\overline{\mathfrak{L}}$ sämtlich mit der Null zusammenfallen läßt und dann an Stelle des Systems der $2p$ Konstanten $\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_p, \overline{\mathfrak{C}}_1, \cdots, \overline{\mathfrak{C}}_p$ irgend welche die Gleichungen:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{C}_\nu = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \overline{\mathfrak{C}}_\nu = 0$$

nicht verletzende Systeme von $2p$ Werten setzt, Funktionen W, $\overline{W}$, welche für keinen Punkt der Fläche T'' unstetig werden. Solche Funktionen mögen allenthalben endliche Funktionen genannt und im folgenden durch $w|z|$, $\overline{w}|z|$ oder durch w^z, $\overline{w}^z$ oder noch einfacher durch w, $\overline{w}$ bezeichnet werden. Gewisse dieser Funktionen w, $\overline{w}$ sollen jetzt als Elementarfunktionen aufgestellt und allenthalben endliche Elementarfunktionen genannt werden.

Man bezeichne zunächst, unter ϱ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, p$, unter $\delta_{\varrho\nu}$ $(\nu=1,2,\cdots,p)$ eine Größe, die für $\nu = \varrho$ den Wert 1, für $\nu \neq \varrho$ den Wert 0 besitzt, verstehend, mit $w_\varrho|z|$, $\overline{w}_\varrho|z|$ zwei spezielle allenthalben endliche, je eine willkürliche, später zu bestimmende, additive Konstante c_ϱ beziehungsweise $\bar{c}_\varrho$ enthaltende Funktionen, bei denen die Konstanten $\mathfrak{C}_\nu$, $\bar{\mathfrak{C}}_\nu$, $\nu=1,2,\cdots,p$, die speziellen, mit $\mathfrak{C}_{\varrho\nu}$, $\bar{\mathfrak{C}}_{\varrho\nu}$, $\nu=1,2,\cdots,p$, zu bezeichnenden, durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{C}_{\varrho\nu}=(1-\delta_{\varrho\nu}p)\frac{\pi i}{p}, \qquad \bar{\mathfrak{C}}_{\varrho\nu}=(1-\delta_{\varrho\nu}p)\frac{\pi i}{p},$$

bestimmten Werte besitzen, und bezeichne bei diesen Funktionen die an Stelle der Größen $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{K}_\nu$, $\bar{\mathfrak{A}}_\nu$, $\bar{\mathfrak{B}}_\nu$, $\bar{\mathfrak{K}}_\nu$ stehenden Größen mit $\mathfrak{A}_{\varrho\nu}$, $\mathfrak{B}_{\varrho\nu}$, $\mathfrak{K}_{\varrho\nu}$, $\bar{\mathfrak{A}}_{\varrho\nu}$, $\bar{\mathfrak{B}}_{\varrho\nu}$, $\bar{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}$, sodaß also für $\varrho=1,2,\cdots,p$:

$$(1.)\quad \begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu\{w_\varrho|z|^+=A_\nu w_\varrho|z|^-+\mathfrak{A}_{\varrho\nu}, && \bar{w}_\varrho|z|^+=\bar{A}_\nu\bar{w}_\varrho|z|^-+\bar{\mathfrak{A}}_{\varrho\nu},\\
&\text{längs } b_\nu\{w_\varrho|z|^+=B_\nu w_\varrho|z|^-+\mathfrak{B}_{\varrho\nu}, && \bar{w}_\varrho|z|^+=\bar{B}_\nu\bar{w}_\varrho|z|^-+\bar{\mathfrak{B}}_{\varrho\nu}, \qquad \nu=1,2,\cdots,p,\\
&\text{längs } c_\nu\{w_\varrho|z|^+=\quad w_\varrho|z|^-+(1-\delta_{\varrho\nu}p)\frac{\pi i}{p}, && \bar{w}_\varrho|z|^+=\quad\bar{w}_\varrho|z|^-+(1-\delta_{\varrho\nu}p)\frac{\pi i}{p},\\
&\text{längs } l_\sigma\{w_\varrho|z|^+=\quad w_\varrho|z|^-, && \bar{w}_\varrho|z|^+=\quad\bar{w}_\varrho|z|^-, \qquad \sigma=1,2,\cdots,s,
\end{aligned}$$

ist und die Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ mit den Größen $\mathfrak{K}$, $\bar{\mathfrak{K}}$ durch die Gleichungen:

$$(2.)\quad \begin{aligned}
&\mathfrak{A}_{\varrho\nu}=\mathcal{A}_\nu(1-\delta_{\varrho\nu}p)\frac{\pi i}{p}+(1-A_\nu)\mathfrak{K}_{\varrho\nu}, && \bar{\mathfrak{A}}_{\varrho\nu}=\bar{\mathcal{A}}_\nu(1-\delta_{\varrho\nu}p)\frac{\pi i}{p}+(1-\bar{A}_\nu)\bar{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu},\\
&\mathfrak{B}_{\varrho\nu}=\mathcal{B}_\nu(1-\delta_{\varrho\nu}p)\frac{\pi i}{p}+(1-B_\nu)\mathfrak{K}_{\varrho\nu}, && \bar{\mathfrak{B}}_{\varrho\nu}=\bar{\mathcal{B}}_\nu(1-\delta_{\varrho\nu}p)\frac{\pi i}{p}+(1-\bar{B}_\nu)\bar{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu},
\end{aligned}$$

verknüpft sind. Die Größen $\mathfrak{K}_{\varrho\nu}$, $\bar{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}$ hängen von den in w_ϱ, $\bar{w}_\varrho$ beziehungsweise enthaltenen willkürlichen additiven Konstanten c_ϱ, $\bar{c}_\varrho$ ab, und zwar in der Weise, daß beim Übergang von c_ϱ in $c_\varrho+k_\varrho$ die Größe $\mathfrak{K}_{\varrho\nu}$ in $\mathfrak{K}_{\varrho\nu}+k_\varrho$, beim Übergang von $\bar{c}_\varrho$ in $\bar{c}_\varrho+\bar{k}_\varrho$ die Größe $\bar{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}$ in $\bar{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}+\bar{k}_\varrho$ übergeht. Infolgedessen kann man die Werte der in w_ϱ, $\bar{w}_\varrho$ beziehungsweise enthaltenen, bis jetzt noch willkürlichen additiven Konstanten c_ϱ, $\bar{c}_\varrho$ immer und nur auf eine Weise so wählen, daß für $\varrho=1,2,\cdots,p$:

$$(3.)\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\mathfrak{K}_{\varrho\nu}=\left(\varrho-\frac{p+1}{2}\right)\pi i, \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\bar{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}=\left(\varrho-\frac{p+1}{2}\right)\pi i$$

ist, und es sind dann zugleich, nach dem Fundamentalsatz, die Funktionen w_ϱ, $\bar{w}_\varrho$, also auch die zu ihnen gehörigen Größen $\mathfrak{K}_{\varrho\nu}$, $\bar{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}$, $\nu=1,2,\cdots,p$, vollständig bestimmt.

Die so gewonnenen vollständig bestimmten allenthalben endlichen Funktionen $w_1|z|,\cdots,w_p|z|$; $\bar{w}_1|z|,\cdots,\bar{w}_p|z|$ *sollen die zu den Charakteristiken* $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\bar{A}\\\bar{B}\end{pmatrix}$ *beziehungsweise gehörigen allenthalben endlichen Elementarfunktionen genannt werden.*

Die Summe der p Funktionen $w_1,\cdots,w_p$ besitzt, ebenso wie die Summe der p Funktionen $\bar{w}_1,\cdots,\bar{w}_p$, für jeden Punkt z der Fläche T'' den Wert Null. Zum Beweise dieser Behauptung beachte man, daß die den allenthalben endlichen Funktionen:

$$w=w_1+w_2+\cdots+w_p, \qquad \bar{w}=\bar{w}_1+\bar{w}_2+\cdots+\bar{w}_p$$

zukommenden charakteristischen Konstanten $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{C}_\nu$, $\overline{\mathfrak{A}}_\nu$, $\overline{\mathfrak{B}}_\nu$, $\overline{\mathfrak{C}}_\nu$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, auf Grund der Beziehungen (1.) und (2.) durch die für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ geltenden Gleichungen:

$$\mathfrak{A}_\nu = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{A}_{\varrho\nu} = (1-A_\nu)\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{K}_{\varrho\nu}, \qquad \overline{\mathfrak{A}}_\nu = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \overline{\mathfrak{A}}_{\varrho\nu} = (1-\overline{A}_\nu)\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu},$$

$$\mathfrak{B}_\nu = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{B}_{\varrho\nu} = (1-B_\nu)\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{K}_{\varrho\nu}, \qquad \overline{\mathfrak{B}}_\nu = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \overline{\mathfrak{B}}_{\varrho\nu} = (1-\overline{B}_\nu)\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu},$$

$$\mathfrak{C}_\nu = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} (1-\delta_{\varrho\nu}p)\frac{\pi i}{p} = 0, \qquad \overline{\mathfrak{C}}_\nu = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} (1-\delta_{\varrho\nu}p)\frac{\pi i}{p} = 0,$$

bestimmt sind. Aus $\mathfrak{C}_\nu = 0$, $\overline{\mathfrak{C}}_\nu = 0$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, ergibt sich nun zunächst, nach dem am Schlusse des Fundamentalsatzes Bemerkten, daß für alle Punkte der Fläche T'' sowohl die Funktion w denselben, mit C zu bezeichnenden, als auch die Funktion $\overline{w}$ denselben, mit $\overline{C}$ zu bezeichnenden, Wert besitzt. Um die Werte der Konstanten C, $\overline{C}$ zu bestimmen, beachte man, daß aus $w = C$, $\overline{w} = \overline{C}$ die für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ geltenden Beziehungen:

$$\mathfrak{A}_\nu = (1-A_\nu)C,\ \ \mathfrak{B}_\nu = (1-B_\nu)C, \qquad \overline{\mathfrak{A}}_\nu = (1-\overline{A}_\nu)\overline{C},\ \ \overline{\mathfrak{B}}_\nu = (1-\overline{B}_\nu)\overline{C}$$

folgen, und vergleiche die so für $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\overline{\mathfrak{A}}_\nu$, $\overline{\mathfrak{B}}_\nu$ erhaltenen Ausdrücke mit den oben für diese Größen gewonnenen. Man erhält dann:

$$C = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{K}_{\varrho\nu}, \qquad \overline{C} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}, \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\cdots,p)}$$

und schließlich, indem man sowohl die p aus der ersten, wie die p aus der zweiten Gleichung für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ hervorgehenden speziellen Gleichungen zu einander addiert und die Gleichungen (3.) berücksichtigt,

$$pC = \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{K}_{\varrho\nu} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\left(\varrho - \frac{p+1}{2}\right)\pi i = 0, \qquad p\overline{C} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\left(\varrho - \frac{p+1}{2}\right)\pi i = 0.$$

Damit ist aber bewiesen, daß für jeden Punkt z der Fläche T'', wie oben behauptet wurde, die Beziehungen:

$$(4.) \qquad w_1|z| + w_2|z| + \cdots + w_p|z| = 0, \qquad \overline{w}_1|z| + \overline{w}_2|z| + \cdots + \overline{w}_p|z| = 0$$

bestehen.

Es soll jetzt untersucht werden, ob von den beiden soeben erhaltenen Beziehungen die erste die einzige zwischen den Elementarfunktionen $w_1, \cdots, w_p$, die zweite die einzige zwischen den Elementarfunktionen $\overline{w}_1, \cdots, w_p$ bestehende lineare Beziehung ist. Zu dem Ende bilde man, unter c_ν, $\bar{c}_\nu$, ${\scriptstyle \nu=0,1,2,\cdots,p}$, unbestimmte Konstanten verstehend, die allenthalben endlichen Funktionen:

$$w = c_0 + c_1 w_1 + \cdots + c_p w_p, \qquad \overline{w} = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 \overline{w}_1 + \cdots + \bar{c}_p \overline{w}_p$$

und stelle sich die Aufgabe, die Konstanten $c, \bar{c}$ in allgemeinster Weise so zu bestimmen, daß für jeden Punkt z der Fläche T'' die Gleichungen $w = 0$, $\bar{w} = 0$ bestehen. Sollen aber die Funktionen w, $\bar{w}$ für jeden Punkt z der Fläche T'' den Wert Null besitzen, so müssen vor allem die ihnen zukommenden, durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{C}_\nu = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} c_\varrho (1 - \delta_{\varrho\nu} p) \frac{\pi i}{p} = \frac{\pi i}{p} \left(\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} c_\varrho - p c_\nu \right), \qquad \overline{\mathfrak{C}}_\nu = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \bar{c}_\varrho (1 - \delta_{\varrho\nu} p) \frac{\pi i}{p} = \frac{\pi i}{p} \left(\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \bar{c}_\varrho - p \bar{c}_\nu \right), \quad {\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p}$$

bestimmten Konstanten $\mathfrak{C}_\nu$, $\overline{\mathfrak{C}}_\nu$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, sämtlich den Wert Null besitzen, oder, was dasselbe, es müssen die Größen $c_1, \cdots, c_p$, $\bar{c}_1, \cdots, \bar{c}_p$ den $2p$ Gleichungen:

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} c_\varrho - p c_\nu = 0, \qquad \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \bar{c}_\varrho - p \bar{c}_\nu = 0, \qquad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,}$$

oder den damit äquivalenten Gleichungen:

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_p = c, \qquad \bar{c}_1 = \bar{c}_2 = \cdots = \bar{c}_p = \bar{c},$$

bei denen c, $\bar{c}$ unbestimmte Konstanten bezeichnen, genügen. Läßt man dementsprechend in den die Funktionen w, $\bar{w}$ definierenden Gleichungen an Stelle einer jeden der Größen $c_1, \cdots, c_p$ die Konstante c, an Stelle einer jeden der Größen $\bar{c}_1, \cdots, \bar{c}_p$ die Konstante $\bar{c}$ treten, so wird $w = c_0 + c(w_1 + \cdots + w_p)$, $\bar{w} = \bar{c}_0 + \bar{c}(\bar{w}_1 + \cdots + \bar{w}_p)$, und man erkennt unter Beachtung der Gleichungen (4.) schließlich, daß die Funktionen w, $\bar{w}$ dann, aber auch nur dann, für jeden Punkt z der Fläche T'', wie verlangt wurde, den Wert Null erhalten, wenn

$$c_0 = 0, \ c_1 = c_2 = \cdots = c_p, \qquad \bar{c}_0 = 0, \ \bar{c}_1 = \bar{c}_2 = \cdots = \bar{c}_p$$

gesetzt wird. Damit ist aber gezeigt, daß von den beiden unter (4.) aufgestellten Beziehungen die erste die einzige zwischen den Funktionen $w_1, \cdots, w_p$, die zweite die einzige zwischen den Funktionen $\bar{w}_1, \cdots, \bar{w}_p$ bestehende lineare Beziehung ist, und es ist damit zugleich bewiesen, daß je $p-1$ der Funktionen $w_1, \cdots, w_p$ und ebenso je $p-1$ der Funktionen $\bar{w}_1, \cdots, \bar{w}_p$ linear unabhängig sind.

Die allgemeinsten allenthalben endlichen Funktionen $w|z|$, $\bar{w}|z|$ werden, wenn man unter $\mathfrak{C}_\nu$, $\overline{\mathfrak{C}}_\nu$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, den Bedingungen:

$$(5.) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{C}_\nu = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \overline{\mathfrak{C}}_\nu = 0$$

genügende unbestimmte, unter C, $\overline{C}$ keinen Bedingungen unterworfene Konstanten versteht, durch die Gleichungen:

$$(6.) \qquad w|z| = C - \frac{1}{\pi i} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{C}_\varrho w_\varrho |z|, \qquad \bar{w}|z| = \overline{C} - \frac{1}{\pi i} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \overline{\mathfrak{C}}_\varrho \bar{w}_\varrho |z|$$

dargestellt. Die Richtigkeit dieser Behauptung erkennt man auf Grund des Fundamentalsatzes, wenn man beachtet, daß die durch diese Gleichungen definierten allenthalben endlichen Funktionen w, $\overline{w}$, wie aus den Relationen:

$$-\frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\mathfrak{C}_\varrho(1-\delta_{\varrho\nu}p)\frac{\pi i}{p}=\mathfrak{C}_\nu,\qquad -\frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\overline{\mathfrak{C}}_\varrho(1-\delta_{\varrho\nu}p)\frac{\pi i}{p}=\overline{\mathfrak{C}}_\nu,\qquad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,}$$

folgt, so beschaffen sind, daß für jedes ν aus der Reihe $1, 2, \cdots, p$

$$\text{längs } c_\nu\{\, w|z|^+ = w|z|^- + \mathfrak{C}_\nu,\qquad \overline{w}|z|^+ = \overline{w}|z|^- + \overline{\mathfrak{C}}_\nu$$

ist, und daß diese Funktionen zudem die willkürlichen additiven Konstanten C, $\overline{C}$ enthalten. Die Gleichungen (6.) kann man aber auch, unter $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ zwei weitere unbestimmte Konstanten verstehend, mit Hilfe der Gleichungen (4.) in die Gleichungen:

$$(7.)\qquad w|z| = C-\frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}(\mathfrak{C}_\varrho-\mathfrak{D})w_\varrho|z|,\qquad \overline{w}|z| = \overline{C}-\frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}(\overline{\mathfrak{C}}_\varrho-\overline{\mathfrak{D}})\overline{w}_\varrho|z|$$

überführen, und die bei diesen Gleichungen als Koeffizienten auftretenden Größen $\mathfrak{C}_\varrho-\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{C}}_\varrho-\overline{\mathfrak{D}}$, ${\scriptstyle \varrho=1,2,\cdots,p}$, repräsentieren dann, da die Größen $\mathfrak{C}$, $\overline{\mathfrak{C}}$ nur den Gleichungen (5.) zu genügen haben, keinen Bedingungen unterworfene Konstanten. Setzt man, unter $\varkappa$ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, p$ verstehend, in den Gleichungen (7.) speziell $\mathfrak{D}=\mathfrak{C}_\varkappa$, $\overline{\mathfrak{D}}=\overline{\mathfrak{C}}_\varkappa$, so liefert die erste derselben die Darstellung der unter (6.) definierten allgemeinsten Funktion w durch die $p-1$ linear unabhängigen Funktionen $w_1, \cdots, w_{\varkappa-1}$, $w_{\varkappa+1}, \cdots, w_p$, und entsprechend die zweite die Darstellung der unter (6.) definierten allgemeinsten Funktion $\overline{w}$ durch die $p-1$ linear unabhängigen Funktionen $\overline{w}_1, \cdots, \overline{w}_{\varkappa-1}$, $\overline{w}_{\varkappa+1}, \cdots, \overline{w}_p$.

Die p^2 Konstanten $\mathfrak{K}_{\varrho\nu}$, ${\scriptstyle \varrho,\nu=1,2,\cdots,p}$, des Funktionensystems $w_1|z|, \cdots, w_p|z|$ sind mit den p^2 Konstanten $\overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}$, ${\scriptstyle \varrho,\nu=1,2,\cdots,p}$, des Funktionensystems $\overline{w}_1|z|, \cdots, \overline{w}_p|z|$ durch einfache Gleichungen verknüpft. Um dieselben zu erhalten, beziehe man die am Ende von Art. 1 aufgestellte, auf irgend zwei allgemeine zu den Charakteristiken $\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}\overline{A}\\\overline{B}\end{smallmatrix}\right)$ gehörige Funktionen W, $\overline{W}$ sich beziehende, Fundamentalformel (F_1.), unter ϱ, σ irgend zwei Zahlen aus der Reihe $1, 2, \cdots, p$ verstehend, auf die Elementarfunktionen $w_\varrho|z|$, $\overline{w}_\sigma|z|$, ersetze also in der Formel (F_1.) die darin vorkommenden Konstanten der Funktionen W, $\overline{W}$ durch die entsprechenden Konstanten der Funktionen w_ϱ, $\overline{w}_\sigma$. Man erhält so zunächst die Gleichung:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p}(\overline{\mathfrak{C}}_{\sigma\nu}\mathfrak{K}_{\varrho\nu}-\mathfrak{C}_{\varrho\nu}\overline{\mathfrak{K}}_{\sigma\nu}-\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}_{\varrho\nu}\overline{\mathfrak{C}}_{\sigma\nu})+\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\mathfrak{C}_{\varrho\nu}(\overline{\mathfrak{C}}_{\sigma1}+\overline{\mathfrak{C}}_{\sigma2}+\cdots+\overline{\mathfrak{C}}_{\sigma\nu})=0,$$

und weiter dann, indem man an Stelle der Konstanten $\mathfrak{C}$, $\overline{\mathfrak{C}}$ ihre durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{C}_{\varrho\nu}=(1-\delta_{\varrho\nu}p)\frac{\pi i}{p},\qquad \overline{\mathfrak{C}}_{\sigma\nu}=(1-\delta_{\sigma\nu}p)\frac{\pi i}{p},\qquad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,}$$

bestimmten Werte treten läßt, den allen Gliedern gemeinsamen Faktor πi entfernt und die Summationen nach ν unter Beachtung der Gleichungen (3.), der Bedeutung der Zeichen $\delta_{\varrho\nu}, \delta_{\sigma\nu}, \; {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,}$ und insbesondere der Relation $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}(\delta_{\sigma 1}+\delta_{\sigma 2}+\cdots+\delta_{\sigma\nu})=p-\sigma+1$ ausführt, die Gleichung:

$$-\mathfrak{K}_{\varrho\sigma}+\overline{\mathfrak{K}}_{\sigma\varrho}+[2(\delta_{\sigma 1}+\delta_{\sigma 2}+\cdots+\delta_{\sigma\varrho})-\delta_{\sigma\varrho}-1]\frac{\pi i}{2}=0.$$

Unterscheidet man jetzt in bezug auf die Zahlen σ, ϱ die drei Fälle $\sigma=\varrho, \sigma<\varrho, \sigma>\varrho$ und beachtet, daß der auf der linken Seite der letzten Gleichung zwischen den eckigen Klammern stehende Ausdruck für $\sigma=\varrho$ den Wert 0, für $\sigma<\varrho$ den Wert 1, für $\sigma>\varrho$ den Wert -1 besitzt, so erhält man schließlich die gewünschten Gleichungen:

$$(8.)\qquad \underset{\varrho=1,2,\cdots,p}{\mathfrak{K}_{\varrho\varrho}=\overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\varrho}}, \qquad \underset{\varrho,\sigma=1,2,\cdots,p,\quad \sigma\neq\varrho,}{\mathfrak{K}_{\varrho\sigma}=\overline{\mathfrak{K}}_{\sigma\varrho}\pm\frac{\pi i}{2}}, \quad \text{je nachdem } \sigma \lessgtr \varrho \text{ ist.}$$

Diese Gleichungen liefern die Werte der Konstanten $\overline{\mathfrak{K}}$, sobald man die Werte der Konstanten $\mathfrak{K}$ als bekannt voraussetzt, wie umgekehrt.

In dem besonderen Falle, wo die Charakteristik $\binom{A}{B}$ zu sich selbst reziprok ist, also die Gleichung $\binom{\bar{A}}{\bar{B}}=\binom{A}{B}$ besteht, und demgemäß für $\varrho, \sigma=1,2,\cdots,p$ $\bar{w}_\sigma=w_\sigma$, $\overline{\mathfrak{K}}_{\sigma\varrho}=\mathfrak{K}_{\sigma\varrho}$ ist, reduzieren sich die p^2 unter (8.) aufgestellten Gleichungen auf die $\frac{p(p-1)}{2}$ Gleichungen:

$$\mathfrak{K}_{\varrho\sigma}=\mathfrak{K}_{\sigma\varrho}+\frac{\pi i}{2}, \qquad {\scriptstyle \varrho,\sigma=1,2,\cdots,p,\; \sigma<\varrho,}$$

sodaß also die Gleichungen (8.) für jedes Funktionensystem $w_1, \cdots, w_p$, welches zu einer zu sich selbst reziproken Charakteristik gehört, $\frac{p(p-1)}{2}$ Beziehungen zwischen den p^2 ihm zukommenden Konstanten $\mathfrak{K}$ liefern.

Bei den vorstehenden Untersuchungen ist zwar für p der Wert 1 nicht ausgeschlossen, es kann jedoch in diesem Falle von Funktionen $w, \bar{w}$ im eigentlichen Sinne nicht die Rede sein, da die für $p=1$ auftretenden einzigen Elementarfunktionen $w_1, \bar{w}_1$ den Gleichungen (4.) zufolge, für jeden Punkt z der Fläche T'' den Wert Null besitzen, und dementsprechend die durch die Gleichungen (6.) bestimmten allgemeinsten allenthalben endlichen Funktionen $w, \bar{w}$ sich für $p=1$ auf willkürliche Konstanten $C, \bar{C}$ reduzieren.

3.

Nachdem im vorhergehenden Artikel die zu den Charakteristiken $\binom{A}{B}$, $\binom{\bar{A}}{\bar{B}}$ gehörigen allenthalben endlichen Elementarfunktionen definiert und untersucht worden sind, sollen jetzt weiter gewisse zu den genannten Charakteristiken gehörige Funktionen W, $\overline{W}$, welche nur für einen der Punkte $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_s$ entweder logarithmisch unendlich oder algebraisch unendlich werden, als Elementarfunktionen aufgestellt und logarithmisch unendlich werdende beziehungsweise algebraisch unendlich werdende Elementarfunktionen genannt werden.

Um zunächst die logarithmisch unendlich werdenden Elementarfunktionen zu erhalten, verstehe man unter σ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, s$ und bezeichne, unter Beachtung der in Art. 3 des ersten Abschnittes gemachten Festsetzungen, den σ^{ten} der s Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ mit η und dementsprechend die zu ihm führende Linie l_σ jetzt mit l_η. Der Fundamentalsatz liefert dann zu den Charakteristiken $\binom{A}{B}$, $\binom{\bar{A}}{\bar{B}}$ zwei, je eine willkürliche additive Konstante c beziehungsweise $\bar{c}$ enthaltende, Funktionen W, $\overline{W}$, die in der Fläche T'' nur für den Punkt η unstetig werden wie $\ln \frac{1}{z_\eta}$, wenn man

$$\mathfrak{L}_\sigma = 1, \qquad \overline{\mathfrak{L}}_\sigma = 1,$$
$$\mathfrak{C}_\nu = -\frac{2\pi i}{p}, \qquad \overline{\mathfrak{C}}_\nu = -\frac{2\pi i}{p}, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p,$$

setzt, allen übrigen $s + m_1 + \cdots + m_s - 1$ Größen $\mathfrak{L}$ sowie allen übrigen $s + m_1 + \cdots + m_s - 1$ Größen $\overline{\mathfrak{L}}$ dagegen den Wert Null zulegt. Die so gewonnenen speziellen Funktionen W, $\overline{W}$ bezeichne man nun, die Bestimmung der additiven Konstanten c, $\bar{c}$ sich vorbehaltend, mit $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$; die bei ihnen an Stelle der Größen $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{K}_\nu$, $\overline{\mathfrak{A}}_\nu$, $\overline{\mathfrak{B}}_\nu$, $\overline{\mathfrak{K}}_\nu$ stehenden Größen mit $\underset{0}{\mathfrak{A}}{}_\nu^{(\eta)}$, $\underset{0}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta)}$, $\underset{0}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta)}$, $\underset{0}{\overline{\mathfrak{A}}}{}_\nu^{(\eta)}$, $\underset{0}{\overline{\mathfrak{B}}}{}_\nu^{(\eta)}$, $\underset{0}{\overline{\mathfrak{K}}}{}_\nu^{(\eta)}$ beziehungsweise. Für das Gebiet des Punktes η lassen sich dann diese Funktionen darstellen durch Gleichungen von der Form:

$$(1_0.)\quad \underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right| = \ln\frac{1}{z_\eta} + c_{\sigma 0}^{(0)} + c_{\sigma 1}^{(0)} z_\eta + c_{\sigma 2}^{(0)} z_\eta^2 + \cdots, \qquad \underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right| = \ln\frac{1}{z_\eta} + \bar{c}_{\sigma 0}^{(0)} + \bar{c}_{\sigma 1}^{(0)} z_\eta + \bar{c}_{\sigma 2}^{(0)} z_\eta^2 + \cdots,$$

wobei die $c^{(0)}$, $\bar{c}^{(0)}$ von z unabhängige Größen bezeichnen. Zugleich sind die Werte von $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{P}^-$ in der Weise verknüpft, daß

$$(2_0.)\quad \begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \left\{ \underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = A_\nu \underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^- + \underset{0}{\mathfrak{A}}{}_\nu^{(\eta)}, \right. && \underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = \bar{A}_\nu \underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^- + \underset{0}{\overline{\mathfrak{A}}}{}_\nu^{(\eta)},\\
&\text{längs } b_\nu \left\{ \underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = B_\nu \underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^- + \underset{0}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta)}, \right. && \underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = \bar{B}_\nu \underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^- + \underset{0}{\overline{\mathfrak{B}}}{}_\nu^{(\eta)}, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p,\\
&\text{längs } c_\nu \left\{ \underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = \underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^- - \frac{2\pi i}{p}, \right. && \underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = \underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^- - \frac{2\pi i}{p},\\
&\text{längs } l_\eta \left\{ \underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = \underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^- + 2\pi i, \right. && \underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = \underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^- + 2\pi i,
\end{aligned}$$

längs einer jeden der $s-1$ übrigen Linien l dagegen $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = \underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^-$, $\underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = \underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^-$ ist. Dabei sind die Größen $\underset{0}{\mathfrak{A}}{}^{(\eta)}$, $\underset{0}{\mathfrak{B}}{}^{(\eta)}$, $\underset{0}{\overline{\mathfrak{A}}}{}^{(\eta)}$, $\underset{0}{\overline{\mathfrak{B}}}{}^{(\eta)}$ mit den Größen $\underset{0}{\mathfrak{K}}{}^{(\eta)}$, $\underset{0}{\overline{\mathfrak{K}}}{}^{(\eta)}$ durch die Gleichungen:

$$
(3_0.)\qquad
\begin{aligned}
\underset{0}{\mathfrak{A}}{}_\nu^{(\eta)} &= -\mathcal{A}_\nu \frac{2\pi i}{p} + (1-A_\nu)\underset{0}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta)}, &\qquad \underset{0}{\overline{\mathfrak{A}}}{}_\nu^{(\eta)} &= -\mathcal{A}_\nu \frac{2\pi i}{p} + (1-\bar{A}_\nu)\underset{0}{\overline{\mathfrak{K}}}{}_\nu^{(\eta)},\\
\underset{0}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta)} &= -\mathcal{B}_\nu \frac{2\pi i}{p} + (1-B_\nu)\underset{0}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta)}, &\qquad \underset{0}{\overline{\mathfrak{B}}}{}_\nu^{(\eta)} &= -\mathcal{B}_\nu \frac{2\pi i}{p} + (1-\bar{B}_\nu)\underset{0}{\overline{\mathfrak{K}}}{}_\nu^{(\eta)},
\end{aligned}
$$

verknüpft, und es sollen jetzt schließlich die Werte der noch unbestimmten additiven Konstanten $c, \bar{c}$ so gewählt werden, daß

$$
(4_0.)\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \underset{0}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta)} = 0, \qquad\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \underset{0}{\overline{\mathfrak{K}}}{}_\nu^{(\eta)} = 0
$$

ist.

Die jetzt vollständig bestimmten Funktionen $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$, $\underset{0}{\bar{P}}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$ *sollen die zu den Charakteristiken* $\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\bar{A}\\ \bar{B}\end{pmatrix}$ *gehörigen, auf den Punkt* η *sich beziehenden, logarithmisch unendlich werdenden Elementarfunktionen genannt werden.*

Die bei diesen Elementarfunktionen auftretenden Konstanten $\mathfrak{K}, \overline{\mathfrak{K}}$ lassen sich durch die Werte, welche die $2p$ Elementarfunktionen $w, \bar{w}$ für den Punkt η besitzen, ausdrücken. Um diese Ausdrücke zu erhalten, beziehe man die Fundamentalformel (F_1.) auf die Elementarfunktionen $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$, $w_\varrho|z|$, lasse also in der Formel (F_1.), nachdem man bei ihr den Summationsbuchstaben σ, um Verwechslungen mit der zu Anfang dieses Artikels eingeführten festen Zahl σ vorzubeugen, durch τ ersetzt und zur Darstellung der Funktion $w_\varrho|z|$ für das Gebiet des Punktes η die Gleichung $\bar{w}_\varrho|z| = \bar{c}_{\sigma 0} + c_{\sigma 1} z_\eta + \bar{c}_{\sigma 2} z_\eta^2 + \cdots$, bei der speziell $\bar{c}_{\sigma 0} = \bar{w}_\varrho|\eta|$ ist, aufgestellt hat, an Stelle der darin vorkommenden Konstanten der Funktionen $W, \overline{W}$ die entsprechenden Konstanten der Funktionen $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$, $\bar{w}_\varrho|z|$ treten. Man erhält so zunächst die Gleichung:

$$
\begin{gathered}
\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{(1-\delta_{\varrho\nu}p)\frac{\pi i}{p}\underset{0}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta)} + \frac{2\pi i}{p}\overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu} + (1-\delta_{\varrho\nu}p)\frac{\pi i}{p}\frac{\pi i}{p}\right\}\\
-\frac{2\pi i}{p}\frac{\pi i}{p}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\Big[(1-\delta_{\varrho 1}p) + (1-\delta_{\varrho 2}p) + \cdots + (1-\delta_{\varrho\nu}p)\Big] - 2\pi i\,\bar{c}_{\sigma 0} = 0
\end{gathered}
$$

und weiter dann, indem man die Summationen nach ν unter Beachtung der in diesem Artikel unter (4_0.) an erster Stelle sowie der im vorhergehenden Artikel unter (3.) an zweiter Stelle stehenden Gleichung und insbesondere der Relation $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}(\delta_{\varrho 1}+\delta_{\varrho 2}+\cdots+\delta_{\varrho\nu}) = p-\varrho+1$ ausführt, auch $\bar{c}_{\sigma 0}$, der schon oben aufgestellten Gleichung $\bar{c}_{\sigma 0} = \bar{w}_\varrho|\eta|$ gemäß, durch $\bar{w}_\varrho|\eta|$ ersetzt, die für $\varrho = 1, 2, \cdots, p$ geltende Beziehung:

$$
-\pi i\,\underset{0}{\mathfrak{K}}{}_\varrho^{(\eta)} - 2\pi i\,\bar{w}_\varrho|\eta| = 0.
$$

Beachtet man nun noch, daß die Charakteristiken $\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\bar{A}\\ \bar{B}\end{pmatrix}$ gleichberechtigt sind, und daß bei der Vertauschung von $\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix}\bar{A}\\ \bar{B}\end{pmatrix}$ $\underset{0}{\mathfrak{K}}{}_\varrho^{(\eta)}$ in $\underset{0}{\overline{\mathfrak{K}}}{}_\varrho^{(\eta)}$, $w_\varrho|\eta|$ in $w_\varrho|\eta|$ übergeht, so erhält man, wenn man noch den Buchstaben ϱ in neuer Bezeichnung durch ν ersetzt, schließlich die Gleichungen:

$$(5_0.)\qquad \underset{0}{\mathfrak{K}}_\nu^{(\eta)} = -2\bar{w}_\nu|\eta|, \qquad \underset{0}{\bar{\mathfrak{K}}}_\nu^{(\eta)} = -2w_\nu|\eta|, \qquad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p.}$$

Es sollen jetzt die zu den Charakteristiken $\binom{A}{B}$, $\binom{\bar{A}}{\bar{B}}$ gehörigen algebraisch unendlich werdenden Elementarfunktionen aufgestellt werden. Man verstehe zu dem Ende unter σ wieder eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, s$, unter m eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, m_\sigma$ und bezeichne den σ^{ten} der s Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ auch hier wieder mit η. Der Fundamentalsatz liefert dann zu den Charakteristiken $\binom{A}{B}, \binom{\bar{A}}{\bar{B}}$ zwei, je eine willkürliche additive Konstante c beziehungsweise $\bar{c}$ enthaltende, Funktionen W, $\overline{W}$, die in der Fläche T'' nur für den Punkt η unstetig werden wie $\frac{1}{z_\eta^m}$, wenn man

$$\mathfrak{L}_{\sigma m} = 1, \qquad \bar{\mathfrak{L}}_{\sigma m} = 1,$$
$$\mathfrak{C}_\nu = 0, \qquad \bar{\mathfrak{C}}_\nu = 0, \qquad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,}$$

setzt, allen übrigen $s+m_1+\cdots+m_s-1$ Größen $\mathfrak{L}$ sowie allen übrigen $s+m_1+\cdots+m_s-1$ Größen $\bar{\mathfrak{L}}$ dagegen den Wert Null zulegt. Die so gewonnenen speziellen Funktionen W, $\overline{W}$ bezeichne man nun, die Bestimmung der additiven Konstanten c, $\bar{c}$ sich vorbehaltend, mit $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{m}{\bar{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$; die bei ihnen an Stelle der Größen $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{K}_\nu$, $\bar{\mathfrak{A}}_\nu$, $\bar{\mathfrak{B}}_\nu$, $\bar{\mathfrak{K}}_\nu$ stehenden Größen mit $\underset{m}{\mathfrak{A}}_\nu^{(\eta)}$, $\underset{m}{\mathfrak{B}}_\nu^{(\eta)}$, $\underset{m}{\mathfrak{K}}_\nu^{(\eta)}$, $\underset{m}{\bar{\mathfrak{A}}}_\nu^{(\eta)}$, $\underset{m}{\bar{\mathfrak{B}}}_\nu^{(\eta)}$, $\underset{m}{\bar{\mathfrak{K}}}_\nu^{(\eta)}$ beziehungsweise. Für das Gebiet des Punktes η lassen sich dann diese Funktionen darstellen durch Gleichungen von der Form:

$$(1_m.)\quad \underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right| = \frac{1}{z_\eta^m} + c_{\sigma 0}^{(m)} + c_{\sigma 1}^{(m)} z_\eta + c_{\sigma 2}^{(m)} z_\eta^2 + \cdots, \qquad \underset{m}{\bar{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right| = \frac{1}{z_\eta^m} + \bar{c}_{\sigma 0}^{(m)} + \bar{c}_{\sigma 1}^{(m)} z_\eta + \bar{c}_{\sigma 2}^{(m)} z_\eta^2 + \cdots,$$

wobei die $c^{(m)}$, $\bar{c}^{(m)}$ von z unabhängige Größen bezeichnen. Zugleich sind die Werte von $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{m}{\bar{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathscr{P}^+$, $\mathscr{P}^-$ in der Weise verknüpft, daß

$$(2_m.)\quad \begin{array}{llll}
\text{längs } a_\nu \Big\{ \underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = A_\nu \underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^- + \underset{m}{\mathfrak{A}}_\nu^{(\eta)}, & \underset{m}{\bar{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = \bar{A}_\nu \underset{m}{\bar{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^- + \underset{m}{\bar{\mathfrak{A}}}_\nu^{(\eta)}, & \\
\text{längs } b_\nu \Big\{ \underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = B_\nu \underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^- + \underset{m}{\mathfrak{B}}_\nu^{(\eta)}, & \underset{m}{\bar{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = \bar{B}_\nu \underset{m}{\bar{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^- + \underset{m}{\bar{\mathfrak{B}}}_\nu^{(\eta)}, & {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,} \\
\text{längs } c_\nu \Big\{ \underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = \underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^-, & \underset{m}{\bar{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = \underset{m}{\bar{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^-, & \\
\text{längs } l_{\sigma'} \Big\{ \underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = \underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^-, & \underset{m}{\bar{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = \underset{m}{\bar{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^-, & {\scriptstyle \sigma'=1,2,\cdots,s,}
\end{array}$$

ist. Dabei sind die Größen $\underset{m}{\mathfrak{A}}^{(\eta)}$, $\underset{m}{\mathfrak{B}}^{(\eta)}$, $\underset{m}{\bar{\mathfrak{A}}}^{(\eta)}$, $\underset{m}{\bar{\mathfrak{B}}}^{(\eta)}$ mit den Größen $\underset{m}{\mathfrak{K}}^{(\eta)}$, $\underset{m}{\bar{\mathfrak{K}}}^{(\eta)}$ durch die Gleichungen:

$$(3_m.)\qquad \begin{aligned} \underset{m}{\mathfrak{A}}{}_\nu^{(\eta)} &= (1 - A_\nu)\,\underset{m}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta)}, & \underset{m}{\overline{\mathfrak{A}}}{}_\nu^{(\eta)} &= (1 - \bar{A}_\nu)\,\underset{m}{\overline{\mathfrak{K}}}{}_\nu^{(\eta)}, \\ \underset{m}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta)} &= (1 - B_\nu)\,\underset{m}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta)}, & \underset{m}{\overline{\mathfrak{B}}}{}_\nu^{(\eta)} &= (1 - \bar{B}_\nu)\,\underset{m}{\overline{\mathfrak{K}}}{}_\nu^{(\eta)}, \end{aligned}$$

verknüpft, und es sollen jetzt schließlich die Werte der noch unbestimmten additiven Konstanten c, $\bar{c}$ so gewählt werden, daß

$$(4_m.)\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \underset{m}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta)} = 0, \qquad\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \underset{m}{\overline{\mathfrak{K}}}{}_\nu^{(\eta)} = 0$$

ist.

Die jetzt vollständig bestimmten Funktionen $\underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\underset{m}{\bar{P}}\left|{\eta \atop z}\right|$ *sollen die zu den Charakteristiken* $\binom{A}{B}$, $\binom{\bar{A}}{\bar{B}}$ *gehörigen, auf den Punkt* η *sich beziehenden, von der Ordnung* m *algebraisch unendlich werdenden Elementarfunktionen genannt werden.*

Die bei diesen Elementarfunktionen auftretenden Konstanten $\mathfrak{K}$, $\overline{\mathfrak{K}}$ lassen sich durch die Werte, welche die nach z_η genommenen m^{ten} Derivierten der $2p$ Elementarfunktionen w, $\bar{w}$ für den Punkt η besitzen, ausdrücken. Um diese Ausdrücke zu erhalten, beziehe man die Fundamentalformel $(\mathrm{F}_1.)$ auf die Elementarfunktionen $\underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\bar{w}_\varrho|z|$, lasse also in der Formel $(\mathrm{F}_1.)$, nachdem man bei ihr den Summationsbuchstaben σ, um Verwechslungen mit der oben eingeführten festen Zahl σ vorzubeugen, durch τ ersetzt und zur Darstellung der Funktion $\bar{w}_\varrho|z|$ für das Gebiet des Punktes η die Gleichung $\bar{w}_\varrho|z| = \bar{c}_{\sigma 0} + \bar{c}_{\sigma 1} z_\eta + \bar{c}_{\sigma 2} z_\eta^2 + \cdots$, bei der $\bar{c}_{\sigma 0} = \bar{w}_\varrho|\eta|$, $\bar{c}_{\sigma\mu} = \frac{1}{\mu!}\left(\frac{d^\mu \bar{w}_\varrho|\zeta|}{d\zeta_\eta^\mu}\right)_0$, ${\scriptstyle \mu = 1, 2, 3, \cdots}$, ist, aufgestellt hat, an Stelle der darin vorkommenden Konstanten der Funktionen W, $\overline{W}$ die entsprechenden Konstanten der Funktionen $\underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\bar{w}_\varrho|z|$ treten. Man erhält so zunächst die Gleichung:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{(1 - \delta_{\varrho\nu} p)\frac{\pi i}{p}\,\underset{m}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta)}\right\} - 2\pi i m \bar{c}_{\sigma m} = 0,$$

und weiter dann, indem man die Summation nach ν unter Beachtung der unter $(4_m.)$ an erster Stelle stehenden Gleichung ausführt, auch $\bar{c}_{\sigma m}$ durch den ihm auf Grund der soeben für $\bar{c}_{\sigma\mu}$ aufgestellten Gleichung entsprechenden Wert ersetzt, die für $\varrho = 1, 2, \cdots, p$ geltende Beziehung:

$$-\pi i\,\underset{m}{\mathfrak{K}}{}_\varrho^{(\eta)} - 2\pi i\,\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m \bar{w}_\varrho|\zeta|}{d\zeta_\eta^m}\right)_0 = 0.$$

Beachtet man nun noch, daß die Charakteristiken $\binom{A}{B}$, $\binom{\bar{A}}{\bar{B}}$ gleichberechtigt sind, und daß bei der Vertauschung von $\binom{A}{B}$ mit $\binom{\bar{A}}{\bar{B}}$ $\underset{m}{\mathfrak{K}}{}_\varrho^{(\eta)}$ in $\underset{m}{\overline{\mathfrak{K}}}{}_\varrho^{(\eta)}$, $\bar{w}_\varrho|z|$ in $w_\varrho|z|$ übergeht, so erhält man, wenn man noch den Buchstaben ϱ in neuer Bezeichnung durch ν ersetzt, die Gleichungen:

$$(5_{m}.)\qquad \mathfrak{K}^{(\eta)}_{m\,\nu} = -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m \overline{w}_\nu|\zeta|}{d\zeta_\eta^m}\right)_0, \qquad \overline{\mathfrak{K}}^{(\eta)}_{m\,\nu} = -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m w_\nu|\zeta|}{d\zeta_\eta^m}\right)_0, \qquad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,}$$

und schließlich, indem man unter Beachtung der in Art. 3 des ersten Abschnittes gemachten Festsetzungen in bezug auf den Punkt η, insoferne dieser entweder einer der Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ oder einer der Punkte $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ oder endlich einer der Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$ sein kann, drei Fälle unterscheidet, die Gleichungen:

$$(6_{m}.)\qquad \begin{aligned}
\mathfrak{K}^{(\varepsilon)}_{m\,\nu} &= -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m \overline{w}_\nu|\zeta|}{d\zeta^m}\right)_{\zeta=\varepsilon}, & \overline{\mathfrak{K}}^{(\varepsilon)}_{m\,\nu} &= -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m w_\nu|\zeta|}{d\zeta^m}\right)_{\zeta=\varepsilon},\\
\mathfrak{K}^{(\alpha)}_{m\,\nu} &= -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m \overline{w}_\nu|\alpha+\zeta_\alpha^\mu|}{d\zeta_\alpha^m}\right)_0, & \overline{\mathfrak{K}}^{(\alpha)}_{m\,\nu} &= -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m w_\nu|\alpha+\zeta_\alpha^\mu|}{d\zeta_\alpha^m}\right)_0, \qquad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}\\
\mathfrak{K}^{(\infty)}_{m\,\nu} &= -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m \overline{w}_\nu|\zeta_\infty^{-1}|}{d\zeta_\infty^m}\right)_0, & \overline{\mathfrak{K}}^{(\infty)}_{m\,\nu} &= -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m w_\nu|\zeta_\infty^{-1}|}{d\zeta_\infty^m}\right)_0.
\end{aligned}$$

4.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß die allgemeinste zu der angenommenen Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion W von der im Fundamentalsatze beschriebenen Art sich aus den in den beiden vorhergehenden Artikeln definierten Elementarfunktionen linear zusammensetzen läßt. Zu dem Ende bezeichne man die s Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ in der vorliegenden Reihenfolge mit $\eta_1, \cdots, \eta_s$, die zu ihnen beziehungsweise gehörigen Größen $z_1, \cdots, z_s$, der in Art. 3 des ersten Abschnitts gemachten Festsetzung entsprechend, mit $z_{\eta_1}, \cdots, z_{\eta_s}$, bilde alsdann mit Hilfe von $p+s$ der Bedingung $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\mathfrak{C}_\nu + 2\pi i \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_\sigma = 0$ genügenden Konstanten $\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_p, \mathfrak{L}_1, \cdots, \mathfrak{L}_s$, der $m_1 + \cdots + m_s$ beliebigen Konstanten $\mathfrak{L}_{\sigma 1}, \cdots, \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}$, ${\scriptstyle \sigma=1,2,\cdots,s,}$ sowie der willkürlichen Konstante C die Funktion:

$$W(z) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\left(\mathfrak{L}_\sigma \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_\sigma\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_{\sigma 1}\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta_\sigma\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}\underset{m_\sigma}{P}\left|\begin{matrix}\eta_\sigma\\ z\end{matrix}\right|\right) - \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\mathfrak{C}_\varrho w_\varrho|z| + C$$

und untersuche, wie diese Funktion $W(z)$ sich in der Fläche T'' verhält.

Unter Beachtung des Verhaltens der in dem Ausdrucke für $W(z)$ vorkommenden Elementarfunktionen erkennt man nun, daß $W(z)$ eine in der Fläche T'' einwertige Funktion der komplexen Veränderlichen z ist, die für jeden von den Punkten $\eta_1, \cdots, \eta_s$ verschiedenen Punkt z der Fläche T'' stetig ist, für den Punkt η_σ ${\scriptstyle (\sigma=1,2,\cdots,s)}$ dagegen in derselben Weise unstetig wird wie die Funktion:

$$f_\sigma(z_{\eta_\sigma}) = \mathfrak{L}_\sigma \ln\frac{1}{z_{\eta_\sigma}} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{z_{\eta_\sigma}} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{z^2_{\eta_\sigma}} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{z^{m_\sigma}_{\eta_\sigma}},$$

sodaß also die Differenz $W(z) - f_\sigma(z_{\eta_\sigma})$ für den Punkt η_σ stetig bleibt, und deren Werte in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ in der Weise verknüpft sind, daß

$$\text{(S.)}\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \{\, W(z)^+ = A_\nu W(z)^- + \mathfrak{A}_\nu\,, \\ &\text{längs } b_\nu \{\, W(z)^+ = B_\nu W(z)^- + \mathfrak{B}_\nu\,, && \nu = 1, 2, \ldots, p, \\ &\text{längs } c_\nu \{\, W(z)^+ = W(z)^- + \mathfrak{C}_\nu\,, \\ &\text{längs } l_\sigma \{\, W(z)^+ = W(z)^- + 2\pi i \mathfrak{L}_\sigma\,, && \sigma = 1, 2, \ldots, s, \end{aligned}$$

ist, wobei

$$\mathfrak{A}_\nu = \mathcal{A}_\nu \mathfrak{C}_\nu + (1 - A_\nu)\mathfrak{K}_\nu\,,$$
$$\mathfrak{B}_\nu = \mathcal{B}_\nu \mathfrak{C}_\nu + (1 - B_\nu)\mathfrak{K}_\nu$$

ist und der Wert der Konstante $\mathfrak{K}_\nu$ durch die Gleichung:

$$\mathfrak{K}_\nu = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \Big(\mathfrak{L}_\sigma \underset{0}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta_\sigma)} + \mathfrak{L}_{\sigma 1} \underset{1}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta_\sigma)} + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma} \underset{m_\sigma}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta_\sigma)}\Big) - \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{C}_\varrho \mathfrak{K}_{\varrho\nu} + C$$

geliefert wird. Die Funktion $W(z)$ stellt daher eine zu der angenommenen Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion W von der im Fundamentalsatze beschriebenen Art dar, und zwar die allgemeinste derartige Funktion W, da die ihr zukommenden $p + m_1 + \cdots + m_s + s$ in den Funktionen f_σ und den Gleichungen (S.) auftretenden Konstanten $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}$ unbestimmte, nur der Bedingung $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{C}_\nu + 2\pi i \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0$ unterworfene Größen sind, und sie außerdem noch die willkürliche additive Konstante C enthält. Damit ist aber bewiesen, daß jede zu der angenommenen Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion W von der im Fundamentalsatze beschriebenen Art sich aus den definierten Elementarfunktionen linear zusammensetzen läßt, oder, was dasselbe, daß man aus dem Ausdrucke:

$$W(z) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\Big(\mathfrak{L}_\sigma \underset{0}{P}\Big|{}^{\eta_\sigma}_{z}\Big| + \mathfrak{L}_{\sigma 1} \underset{1}{P}\Big|{}^{\eta_\sigma}_{z}\Big| + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma} \underset{m_\sigma}{P}\Big|{}^{\eta_\sigma}_{z}\Big|\Big) - \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{C}_\varrho w_\varrho|z| + C$$

die sämtlichen zu der angenommenen Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktionen W erhält, und zwar jede nur einmal, wenn man darin an Stelle des von den Konstanten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{C}$ und der Konstante C gebildeten Systems von $p + m_1 + \cdots + m_s + s + 1$ Konstanten ein jedes die Gleichung $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{C}_\nu + 2\pi i \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0$ nicht verletzende System von $p + m_1 + \cdots + m_s + s + 1$ Werten treten läßt.

Jetzt ist auch der Augenblick gekommen, um den Begriff der Elementarfunktion von gewissen ihm noch anhaftenden Beschränkungen zu befreien und damit zugleich den Begriff der allgemeinsten zu der angenommenen Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktion W zu erweitern.

Zunächst erinnere man sich daran, daß die ursprüngliche Fläche T durch Einführung von $3p$ Schnitten a, b, c in eine einfach zusammenhängende Fläche T' verwandelt wurde, und daß dann, nach Markierung der unendlich fernen Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$, der im Endlichen gelegenen Windungspunkte $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ sowie der beliebig im Innern von T' angenommenen Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$, aus dieser Fläche T' die den bisherigen Untersuchungen zu Grunde liegende Fläche T'' durch Einführung der $s = q + r + t$, den Punkt $\mathfrak{P}_0$ mit den s genannten Punkten beziehungsweise verbindenden Schnitte $l_1, l_2, \cdots, l_s$ gebildet wurde. Ein Blick auf die im Fundamentalsatz vorkommenden Gleichungen (S.) zeigt nun, daß die Schnitte l nur zu dem Zwecke eingeführt wurden, um für die zu bildende allgemeine Funktion W eine Fläche, eben die Fläche T'', zu gewinnen, in der sie einwertig ist. Liegt aber eine Funktion W vor, für welche die zu den Schnitten $l_{\sigma_1}, l_{\sigma_2}, \cdots, l_{\sigma_\mu}$ beziehungsweise gehörigen Konstanten $\mathfrak{L}_{\sigma_1}, \mathfrak{L}_{\sigma_2}, \cdots, \mathfrak{L}_{\sigma_\mu}$ mit der Null zusammenfallen, und dementsprechend längs eines jeden dieser μ Schnitte l die Gleichung $W^+ = W^-$ besteht, so ist diese Funktion W auch noch in der aus T'' durch Aufhebung der μ Schnitte l hervorgehenden Fläche einwertig, und es können daher, wenn diese Funktion W für sich allein betrachtet wird, die Schnitte $l_{\sigma_1}, l_{\sigma_2}, \cdots, l_{\sigma_\mu}$ als überflüssig weggelassen werden.

Die in Art. 2 definierte allenthalben endliche Elementarfunktion $w_\varrho\left|z\right|$ $(\varrho = 1, 2, \cdots, p)$ und die in Art. 3 definierte algebraisch unendlich werdende Elementarfunktion $\underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}$ gehören nun zu denjenigen Funktionen W, bei welchen $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_2 = \cdots = \mathfrak{L}_s = 0$ ist, und sie sind daher schon in der Fläche T' einwertig. Die in Art. 3 definierte, auf den, dort mit η bezeichneten, σ^{ten} der Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ sich beziehende, logarithmisch unendlich werdende Elementarfunktion $\underset{0}{P}\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}$ dagegen ist eine Funktion W, bei der die Größen $\mathfrak{L}_1, \cdots, \mathfrak{L}_s$ durch die Gleichungen $\mathfrak{L}_1 = 0, \cdots, \mathfrak{L}_{\sigma-1} = 0, \mathfrak{L}_\sigma = 1, \mathfrak{L}_{\sigma+1} = 0, \cdots, \mathfrak{L}_s = 0$ bestimmt sind, und sie ist daher zwar nicht in der Fläche T', wohl aber in einer Fläche einwertig, welche aus T' durch Ziehen nur eines, den der positiven Seite von c_p und der negativen Seite von c_1 gemeinsam angehörigen Punkt mit dem Punkte η verbindenden Schnittes l_η hervorgeht.

Bei der Definition der Elementarfunktionen $\underset{0}{P}\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}$, $\underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}$ wurde unter η der σ^{te} der s Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$, unter m eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, m_\sigma$ verstanden. Beachtet man nun, daß in dem Fundamentalsatze t, ebenso wie $m_1, m_2, \cdots, m_s$ unbestimmte positive ganze Zahlen bedeuten, weiter auch, daß die Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_t$ t beliebig im Innern von T' angenommene, von den Punkten $\infty_1, \cdots, \infty_q, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ verschiedene Punkte sind, und berücksichtigt das vorher über die Bedeutung der Schnitte l Gesagte, so erkennt man, daß man bei Zugrundelegung der ursprünglichen Fläche T' zu jedem im Innern von T' gelegenen Punkt η Elementarfunktionen $\underset{0}{P}\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}$, $\underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}$, einerlei welche positive ganze Zahl unter m verstanden wird, in der früher angegebenen Weise definieren kann, wenn man nur, sobald es sich um die Definition einer Elementarfunktion $P\left|{\eta \atop z}\right|$ handelt, in die Fläche T'' einen durch keinen der Punkte ∞, a hindurchgehenden Schnitt l_η einführt, welcher den der positiven Seite von c_p und der negativen Seite von c_1 gemeinsam angehörigen Punkt mit dem Punkte η verbindet.

Um schließlich auch noch zu irgend einem Punkte η, welcher der Begrenzung von T'' angehört, also an einem oder an zweien der Schnitte a, b, c liegt, Elementarfunktionen $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$ zu definieren, führe man zunächst, nachdem man noch in dem Falle, wo es sich um die Definition von $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$ handelt, den der positiven Seite von c_p und der negativen Seite von c_1 gemeinsam angehörigen Punkt mit dem Punkte η durch einen Schnitt l_η verbunden hat, am Schnittsystem beim Punkte η, ohne jedoch den Charakter des Schnittsystems zu ändern und ohne einen Schnitt über den Punkt η hinüberzuschieben, eine solche Deformation aus, daß der Punkt η an keinem der Schnitte a, b, c mehr liegt. Durch diese Deformation geht dann aus dem Schnittsystem ein neues Schnittsystem hervor, das an Stelle des kleinen der Deformation unterzogenen Teiles t_1 des ursprünglichen Schnittsystems einen davon verschiedenen Teil t_2 enthält, sich im übrigen jedoch mit dem ursprünglichen vollständig deckt, und es geht zugleich damit aus der ursprünglichen Fläche T'' eine neue Fläche T' hervor, für welche der Punkt η ein im Innern gelegener Punkt ist. Unter Zugrundelegung dieser neuen Fläche T' bestimme man jetzt zu dem Punkte η Elementarfunktionen $P\left|{\eta \atop z}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$ in der vorher angegebenen Weise und kehre endlich, indem man diese Funktionen mit Hilfe der Gleichungen (2_0.), (2_m.) auf die im ersten Teile, in Art. 3 des fünften Abschnittes, angegebene Weise über den Schnitteil t_2 hinüber in das von t_1 und t_2 begrenzte Gebiet als Funktionen von z stetig fortsetzt, zur ursprünglichen Fläche T'' zurück. Die so für die ursprüngliche Fläche T'' gewonnenen Funktionen sollen dann als die zum Punkte η der Begrenzung von T'' gehörigen Elementarfunktionen $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$ angesehen werden, da sie, wie aus ihrer Entstehung hervorgeht, im wesentlichen dieselben Eigenschaften besitzen, wie die zu einem im Innern von T'' gelegenen Punkt η gehörigen Elementarfunktionen $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$. Daß man zu dem Begrenzungspunkte η immer dieselben Elementarfunktionen $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$ erhält, welche von den zulässigen neuen Flächen T' man auch für ihre Bildung benutzen mag, zeigt ein Blick auf die Gleichungen (1_0.)—(5_0.) und (1_m.)—(5_m.).

Nachdem so der Begriff der Elementarfunktion von den ihm zu Anfang noch anhaftenden Beschränkungen befreit worden ist, kann man jetzt auch den Begriff der allgemeinsten zu der angenommenen Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktion W in der Weise erweitern, daß man in dem vorher für W gewonnenen Ausdrucke:

$$W(z) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \Big(\mathfrak{L}_\sigma \underset{0}{P}\Big|\begin{matrix}\eta_\sigma\\ z\end{matrix}\Big| + \mathfrak{L}_{\sigma 1} \underset{1}{P}\Big|\begin{matrix}\eta_\sigma\\ z\end{matrix}\Big| + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma} \underset{m_\sigma}{P}\Big|\begin{matrix}\eta_\sigma\\ z\end{matrix}\Big| \Big) - \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{C}_\varrho w_\varrho \big|z\big| + C,$$

bei dem $\eta_1, \cdots, \eta_s$ die $s = q + r + t$ Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ beziehungsweise vertreten, $t, m_1, \cdots, m_s$ unbestimmte positive ganze Zahlen bezeichnen und die Konstanten $\mathfrak{L}, \mathfrak{C}, C$ nur der Gleichung $\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{C}_\nu + 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0$ zu genügen haben, unter $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ t von den Punkten ∞, α verschiedene beliebige Punkte der Fläche T' versteht, die also teilweise oder auch alle an der Begrenzung der Fläche T' liegen können, wenn nur diese Punkte als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen. Zugleich kommen, wenn es sich um die Funktion $W(z)$ allein handelt, nur so viele Linien l_η in Betracht, als es unter den Größen $\mathfrak{L}_1, \cdots, \mathfrak{L}_s$ von Null verschiedene gibt, oder, was dasselbe, nur so viele Linien l_η, als in dem Ausdrucke für $W(z)$ Funktionen $\underset{0}{P}\Big|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\Big|$ wirklich vorkommen, und es sind diese Linien l_η, die zu den einzelnen Funktionen $\underset{0}{P}\Big|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\Big|$ im Rahmen der vorher genannten Bedingung willkürlich gezogen werden können, wenn sie bei der Funktion $W(z)$ zusammen auftreten, nur noch der Bedingung zu unterwerfen, daß sie getrennt verlaufen. Die aus der Fläche T' durch Einführung der für die Funktion $W(z)$ in Betracht kommenden Linien l entstandene Fläche, in der die Funktion $W(z)$ einwertig ist, soll wieder T'' genannt werden, und es kann dann der für die frühere Fläche T'' mit Rücksicht auf die Darstellung der Funktion $W(z)$ durch Potenzreihen aufgestellte Begriff des Gebietes eines Punktes sofort auf diese neue Fläche T'' übertragen werden.

Die im vorstehenden angestellten Betrachtungen und gemachten Festsetzungen beziehen sich auf die zu irgend einer gewöhnlichen Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktionen $W(z)$ und gelten daher auch für die zu der reziproken Charakteristik $\binom{\overline{A}}{\overline{B}}$ gehörigen Funktionen $\overline{W}(z)$. Werden aber zwei auf dasselbe Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_s$ sich beziehende Funktionen $W(z)$, $\overline{W}(z)$ zusammen betrachtet, so muß für beide eine und dieselbe Fläche T'' zu Grunde gelegt werden und zwar eine solche, welche aus T' dadurch hervorgeht, daß man zu jedem Punkte η, für den wenigstens eine der beiden Funktionen $\underset{0}{P}\Big|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\Big|$, $\underset{0}{\overline{P}}\Big|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\Big|$ in $W(z)$, $\overline{W}(z)$ wirklich vorkommt, eine Linie l_η zieht.

Es soll jetzt zum Schlusse dieser Betrachtungen noch gezeigt werden, daß die in Art. 1 dieses Abschnittes aufgestellte, unter der Voraussetzung, daß die Punkte $\eta_1, \cdots, \eta_s$, auf welche sich die Funktionen $W(z)$, $\overline{W}(z)$ beziehen, sämtlich im Innern von T' liegen, geltende Fundamentalformel (F_1.) sich ohne weiteres auf den Fall übertragen läßt, wo die in dem Punktsystem $(\eta_1, \cdots, \eta_s) = (\infty_1, \cdots, \infty_q, \ \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \ \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t)$ vorkommenden

Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ teilweise oder auch sämtlich Punkte der Begrenzung von T' sind, wenn nur diese Punkte als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen. Zu dem Ende führe man zunächst am Schnittsystem bei jedem der Begrenzung von T' angehörigen Punkte η, ohne jedoch den Charakter des Schnittsystems zu ändern, eine solche Deformation aus, daß kein Punkt η mehr an einem der Schnitte a, b, c liegt, und setze gleichzeitig die Funktionen $W(z)$, $\bar{W}(z)$, diesen Deformationen folgend, mit Hilfe der ihr Verhalten an den Querschnitten charakterisierenden Gleichungen (S.) (s. Seite 185 des ersten Teiles) auf die im ersten Teile, in Art. 3 des fünften Abschnitts, angegebene Weise als Funktionen von z stetig fort. Da nun für die hierdurch entstehenden neuen Funktionen $W(z)$, $\bar{W}(z)$, welche zu der aus der ursprünglichen Fläche T' durch die gemachten Deformationen entstandenen, die Punkte $\eta_1, \cdots, \eta_s$ als innere Punkte enthaltenden neuen Fläche T' gehören, ohne weiteres die Fundamentalformel gilt, und die in dieser Formel auftretenden Konstanten von den bei den ursprünglichen Funktionen $W(z)$, $\bar{W}(z)$ vorkommenden entsprechenden Konstanten nicht verschieden sind, so gilt die Fundamentalformel auch für die ursprünglichen Funktionen $W(z)$, $\bar{W}(z)$.

5.

Es sollen jetzt mit Hilfe der Fundamentalformel (F_1.) gewisse zwischen den Elementarfunktionen $\underset{0}{P}, \underset{0}{\bar{P}}, \underset{m}{P}, \underset{m}{\bar{P}}$ bestehende Beziehungen abgeleitet werden. Man verstehe zu dem Ende unter σ_1, σ_2 irgend zwei voneinander verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2, \cdots, s$, bezeichne den σ_1-ten der s Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ mit η_1, den σ_2-ten mit η_2 und beachte, daß die auf diese Punkte η_1, η_2 sich beziehenden Elementarfunktionen $\underset{0}{P}, \underset{0}{\bar{P}}, \underset{m}{P}, \underset{m}{\bar{P}}$ sich für das Gebiet des Punktes η_1 durch Gleichungen von der Form:

$$\underset{0}{P}\begin{vmatrix}\eta_1\\ z\end{vmatrix} = \ln\frac{1}{z_{\eta_1}} + c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_1 0} + c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_1 1}\, z_{\eta_1} + c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_1 2}\, z^2_{\eta_1} + \cdots, \qquad \underset{0}{\bar{P}}\begin{vmatrix}\eta_1\\ z\end{vmatrix} = \ln\frac{1}{z_{\eta_1}} + \bar{c}^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_1 0} + \bar{c}^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_1 1}\, z_{\eta_1} + \bar{c}^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_1 2}\, z^2_{\eta_1} + \cdots,$$

$$\underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta_1\\ z\end{vmatrix} = \frac{1}{z^m_{\eta_1}} + c^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_1 0} + c^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_1 1}\, z_{\eta_1} + c^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_1 2}\, z^2_{\eta_1} + \cdots, \qquad \underset{m}{\bar{P}}\begin{vmatrix}\eta_1\\ z\end{vmatrix} = \frac{1}{z^m_{\eta_1}} + \bar{c}^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_1 0} + \bar{c}^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_1 1}\, z_{\eta_1} + \bar{c}^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_1 2}\, z^2_{\eta_1} + \cdots,$$

$$\underset{0}{P}\begin{vmatrix}\eta_2\\ z\end{vmatrix} = c^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_1 0} + c^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_1 1}\, z_{\eta_1} + c^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_1 2}\, z^2_{\eta_1} + \cdots, \qquad \underset{0}{\bar{P}}\begin{vmatrix}\eta_2\\ z\end{vmatrix} = \bar{c}^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_1 0} + \bar{c}^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_1 1}\, z_{\eta_1} + \bar{c}^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_1 2}\, z^2_{\eta_1} + \cdots,$$

$$\underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta_2\\ z\end{vmatrix} = c^{(m\,\sigma_2)}_{\sigma_1 0} + c^{(m\,\sigma_2)}_{\sigma_1 1}\, z_{\eta_1} + c^{(m\,\sigma_2)}_{\sigma_1 2}\, z^2_{\eta_1} + \cdots, \qquad \underset{m}{\bar{P}}\begin{vmatrix}\eta_2\\ z\end{vmatrix} = \bar{c}^{(m\,\sigma_2)}_{\sigma_1 0} + \bar{c}^{(m\,\sigma_2)}_{\sigma_1 1}\, z_{\eta_1} + \bar{c}^{(m\,\sigma_2)}_{\sigma_1 2}\, z^2_{\eta_1} + \cdots,$$

für das Gebiet des Punktes η_2 dagegen durch Gleichungen von der Form:

$$\underset{0}{P}\begin{vmatrix}\eta_1\\ z\end{vmatrix} = c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_2 0} + c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_2 1}\, z_{\eta_2} + c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_2 2}\, z^2_{\eta_2} + \cdots, \qquad \underset{0}{\bar{P}}\begin{vmatrix}\eta_1\\ z\end{vmatrix} = \bar{c}^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_2 0} + \bar{c}^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_2 1}\, z_{\eta_2} + \bar{c}^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_2 2}\, z^2_{\eta_2} + \cdots,$$

$$\underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta_1\\ z\end{vmatrix} = c^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_2 0} + c^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_2 1}\, z_{\eta_2} + c^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_2 2}\, z^2_{\eta_2} + \cdots, \qquad \underset{m}{\bar{P}}\begin{vmatrix}\eta_1\\ z\end{vmatrix} = \bar{c}^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_2 0} + \bar{c}^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_2 1}\, z_{\eta_2} + \bar{c}^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_2 2}\, z^2_{\eta_2} + \cdots,$$

$$\underset{0}{P}\left|{\eta_2 \atop z}\right| = \ln\frac{1}{z_{\eta_2}} + c^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_2\,0} + c^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_2\,1}\, z_{\eta_2} + c^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_2\,2}\, z^2_{\eta_2} + \cdots, \qquad \underset{0}{\bar P}\left|{\eta_2 \atop z}\right| = \ln\frac{1}{z_{\eta_2}} + \bar c^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_2\,0} + \bar c^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_2\,1}\, z_{\eta_2} + \bar c^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_2\,2}\, z^2_{\eta_2} + \cdots,$$

$$\underset{m}{P}\left|{\eta_2 \atop z}\right| = \frac{1}{z^m_{\eta_2}} + c^{(m\,\sigma_2)}_{\sigma_2\,0} + c^{(m\,\sigma_2)}_{\sigma_2\,1}\, z_{\eta_2} + c^{(m\,\sigma_2)}_{\sigma_2\,2}\, z^2_{\eta_2} + \cdots, \qquad \underset{m}{\bar P}\left|{\eta_2 \atop z}\right| = \frac{1}{z^m_{\eta_2}} + \bar c^{(m\,\sigma_2)}_{\sigma_2\,0} + \bar c^{(m\,\sigma_2)}_{\sigma_2\,1}\, z_{\eta_2} + \bar c^{(m\,\sigma_2)}_{\sigma_2\,2}\, z^2_{\eta_2} + \cdots,$$

darstellen lassen, wobei die c, $\bar c$ von z unabhängige Größen bezeichnen. Aus der Fundamentalformel $(\mathrm{F}_1.)$ erhält man dann, unter Benutzung der Relationen $(4_0.)$, $(4_m.)$ des Art. 3 dieses Abschnittes:

$$\begin{array}{rlll}
\text{I.)} & \text{für } W = \underset{0}{P}\left|{\eta_1 \atop z}\right|,\ \bar W = \underset{0}{\bar P}\left|{\eta_1 \atop z}\right| & \text{die Gleichung:} & c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_1\,0} = \bar c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_1\,0}, \\
\text{II.)} & \text{für } W = \underset{0}{P}\left|{\eta_1 \atop z}\right|,\ \bar W = \underset{n}{\bar P}\left|{\eta_1 \atop z}\right| & \text{die Gleichung:} & n\, c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_1\,n} = \bar c^{(n\,\sigma_1)}_{\sigma_1\,0}, \\
\text{III.)} & \text{für } W = \underset{m}{P}\left|{\eta_1 \atop z}\right|,\ \bar W = \underset{n}{\bar P}\left|{\eta_1 \atop z}\right| & \text{die Gleichung:} & n\, c^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_1\,n} = m\, \bar c^{(n\,\sigma_1)}_{\sigma_1\,m}, \\
\text{IV.)} & \text{für } W = \underset{0}{P}\left|{\eta_1 \atop z}\right|,\ \bar W = \underset{0}{\bar P}\left|{\eta_2 \atop z}\right| & \text{die Gleichung:} & c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_2\,0} = \bar c^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_1\,0} \pm \pi i, \\
\text{V.)} & \text{für } W = \underset{0}{P}\left|{\eta_1 \atop z}\right|,\ \bar W = \underset{n}{\bar P}\left|{\eta_2 \atop z}\right| & \text{die Gleichung:} & n\, c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_2\,n} = \bar c^{(n\,\sigma_2)}_{\sigma_1\,0}, \\
\text{VI.)} & \text{für } W = \underset{m}{P}\left|{\eta_1 \atop z}\right|,\ \bar W = \underset{n}{\bar P}\left|{\eta_2 \atop z}\right| & \text{die Gleichung:} & n\, c^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_2\,n} = m\, \bar c^{(n\,\sigma_2)}_{\sigma_1\,m},
\end{array}$$

wobei in der unter IV.) stehenden Gleichung das positive oder negative Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Schnitte c, l_{η_1}, l_{η_2} bei einem negativen Umlauf um $\mathfrak{P}_0$ in der Reihenfolge $c_1, \cdots, c_p, l_{\eta_1}, l_{\eta_2}$ oder in der Reihenfolge $c_1, \cdots, c_p, l_{\eta_2}, l_{\eta_1}$ überschritten werden. Ersetzt man jetzt in den gewonnenen Gleichungen die Größen c, $\bar c$ durch die ihnen auf Grund der in Art. 3 des ersten Abschnittes gemachten Festsetzungen entsprechenden Ausdrücke, so ergeben sich die gewünschten Beziehungen:

$$\text{(I.)} \qquad \left[\underset{0}{P}\left|{\eta_1 \atop \zeta}\right| - \ln\frac{1}{\zeta_{\eta_1}}\right]_{\zeta=\eta_1} = \left[\underset{0}{\bar P}\left|{\eta_1 \atop \zeta}\right| - \ln\frac{1}{\zeta_{\eta_1}}\right]_{\zeta=\eta_1},$$

$$\text{(II.)} \qquad \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^n}{d\zeta^n_{\eta_1}}\left[\underset{0}{P}\left|{\eta_1 \atop \zeta}\right| - \ln\frac{1}{\zeta_{\eta_1}}\right]\right)_0 = \left[\underset{n}{\bar P}\left|{\eta_1 \atop \zeta}\right| - \frac{1}{\zeta^n_{\eta_1}}\right]_{\zeta=\eta_1},$$

$$\text{(III.)} \qquad \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^n}{d\zeta^n_{\eta_1}}\left[\underset{m}{P}\left|{\eta_1 \atop \zeta}\right| - \frac{1}{\zeta^m_{\eta_1}}\right]\right)_0 = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m}{d\zeta^m_{\eta_1}}\left[\underset{n}{\bar P}\left|{\eta_1 \atop \zeta}\right| - \frac{1}{\zeta^n_{\eta_1}}\right]\right)_0,$$

$$\text{(IV.)} \qquad \underset{0}{P}\left|{\eta_1 \atop \eta_2}\right| = \underset{0}{\bar P}\left|{\eta_2 \atop \eta_1}\right| \pm \pi i,$$

$$\text{(V.)} \qquad \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^n}{d\zeta^n_{\eta_2}}\underset{0}{P}\left|{\eta_1 \atop \zeta}\right|\right)_0 = \underset{n}{\bar P}\left|{\eta_2 \atop \eta_1}\right|,$$

$$\text{(VI.)} \qquad \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^n}{d\zeta^n_{\eta_2}}\underset{m}{P}\left|{\eta_1 \atop \zeta}\right|\right)_0 = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m}{d\zeta^m_{\eta_1}}\underset{n}{\bar P}\left|{\eta_2 \atop \zeta}\right|\right)_0,$$

wobei in der unter (IV.) stehenden Gleichung das positive oder negative Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Schnitte c, l_{η_1}, l_{η_2} bei einem negativen Umlauf um $\mathfrak{P}_0$ in der Reihenfolge $c_1, \cdots, c_p, l_{\eta_1}, l_{\eta_2}$ oder in der Reihenfolge $c_1, \cdots, c_p, l_{\eta_2}, l_{\eta_1}$ überschritten werden.

Nach den im vorhergehenden Artikel gemachten Ausführungen gelten die Formeln (I.)—(VI.) für irgend zwei Punkte η_1, η_2 der Fläche T''; nur müssen diese Punkte η_1, η_2, wenn sie beide der Begrenzung von T'' angehören, als Punkte der Fläche T' betrachtet getrennt liegen. Für die Formeln (I.), (II.), (III.) kommt in der Fläche T'' nur ein einziger, den der positiven Seite von c_p und der negativen Seite von c_1 gemeinsam angehörigen Punkt mit dem Punkte η_1 verbindender Schnitt l_{η_1} in Betracht; für die Formeln (IV.), (V.), (VI.) dagegen muß der genannte Punkt sowohl mit dem Punkte η_1 durch einen Schnitt l_{η_1} wie mit dem Punkte η_2 durch einen Schnitt l_{η_2} verbunden sein.

Die Formeln (I.)—(VI.) stellen Beziehungen dar zwischen den zu irgend einer gewöhnlichen Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktionen P und den zur reziproken Charakteristik $\binom{\bar{A}}{B}$ gehörigen Funktionen $\bar{P}$, und es gehen demnach, da auch umgekehrt $\binom{A}{B}$ zu $\binom{\bar{A}}{B}$ reziprok ist, aus den Formeln (I.)—(VI.) richtige Formeln hervor, wenn man darin durchweg die Zeichen P, $\bar{P}$ vertauscht.

Mit Hilfe der gewonnenen Formeln soll zunächst den die Funktionen $\underset{0}{P}\left|{\eta_1 \atop z}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{\eta_1 \atop z}\right|$ für das Gebiet des Punktes η_1 darstellenden Gleichungen:

$$\underset{0}{P}\left|{\eta_1 \atop z}\right| = \ln\frac{1}{z_{\eta_1}} + \left[\underset{0}{P}\left|{\eta_1 \atop \zeta}\right| - \ln\frac{1}{\zeta_{\eta_1}}\right]_{\zeta=\eta_1} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n}{d\zeta_{\eta_1}^n}\left[\underset{0}{P}\left|{\eta_1 \atop \zeta}\right| - \ln\frac{1}{\zeta_{\eta_1}}\right]\right)_0 z_{\eta_1}^n,$$

$$\underset{m}{P}\left|{\eta_1 \atop z}\right| = \frac{1}{z_{\eta_1}^m} + \left[\underset{m}{P}\left|{\eta_1 \atop \zeta}\right| - \frac{1}{\zeta_{\eta_1}^m}\right]_{\zeta=\eta_1} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n}{d\zeta_{\eta_1}^n}\left[\underset{m}{P}\left|{\eta_1 \atop \zeta}\right| - \frac{1}{\zeta_{\eta_1}^m}\right]\right)_0 z_{\eta_1}^n$$

und ebenso den die genannten Funktionen für das Gebiet des Punktes η_2 darstellenden Gleichungen:

$$\underset{0}{P}\left|{\eta_1 \atop z}\right| = \underset{0}{P}\left|{\eta_1 \atop \eta_2}\right| + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n}{d\zeta_{\eta_2}^n}\underset{0}{P}\left|{\eta_1 \atop \zeta}\right|\right)_0 z_{\eta_2}^n,$$

$$\underset{m}{P}\left|{\eta_1 \atop z}\right| = \underset{m}{P}\left|{\eta_1 \atop \eta_2}\right| + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n}{d\zeta_{\eta_2}^n}\underset{m}{P}\left|{\eta_1 \atop \zeta}\right|\right)_0 z_{\eta_2}^n$$

eine neue, für die späteren Untersuchungen nötige Gestalt dadurch gegeben werden, daß man bei den hier an erster Stelle aufgestellten Gleichungen die Koeffizienten von $z_{\eta_1}^n$ durch die ihnen auf Grund der Formeln (II.), (III.) entsprechenden Ausdrücke, bei den an zweiter Stelle aufgestellten Gleichungen die Koeffizienten von $z_{\eta_2}^n$ durch die ihnen auf Grund der Formeln (V.), (VI.) entsprechenden Ausdrücke ersetzt. Es ergeben sich dann zur Darstellung der Funktionen $\underset{0}{P}\left|{\eta_1 \atop z}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{\eta_1 \atop z}\right|$ für das Gebiet des Punktes η_1 die Gleichungen:

$$(1.)\qquad \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right| = \ln\frac{1}{z_{\eta_1}} + \Big[\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ \zeta\end{matrix}\right| - \ln\frac{1}{\zeta_{\eta_1}}\Big]_{\zeta=\eta_1} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\Big[\underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ \zeta\end{matrix}\right| - \frac{1}{\zeta^n_{\eta_1}}\Big]_{\zeta=\eta_1} z^n_{\eta_1},$$

$$(2.)\qquad \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right| = \frac{1}{z^m_{\eta_1}} + \Big[\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ \zeta\end{matrix}\right| - \frac{1}{\zeta^m_{\eta_1}}\Big]_{\zeta=\eta_1} + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{d^m}{d\zeta^m_{\eta_1}}\Big[\underset{n}{\overline{P}}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ \zeta\end{matrix}\right| - \frac{1}{\zeta^n_{\eta_1}}\Big]\right)_0 z^n_{\eta_1},$$

für das Gebiet des Punktes η_2 dagegen die Gleichungen:

$$(3.)\qquad \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right| = \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\end{matrix}\right| + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\eta_2\\ \eta_1\end{matrix}\right| z^n_{\eta_2},$$

$$(4.)\qquad \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right| = \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\end{matrix}\right| + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{d^m}{d\zeta^m_{\eta_1}}\underset{n}{\overline{P}}\left|\begin{matrix}\eta_2\\ \zeta\end{matrix}\right|\right)_0 z^n_{\eta_2}.$$

Dem oben Gesagten entsprechend gehen aus den Gleichungen (1.)—(4.) vier weitere Gleichungen hervor, wenn man darin durchweg die Zeichen P, P vertauscht.

Nach dem früher Bemerkten kann eine jede der drei Formeln (IV.)—(VI.) unabhängig von den beiden anderen auf irgend zwei Punkte η_1, η_2 der Fläche T'' bezogen werden. Man verstehe jetzt unter η, z irgend zwei Punkte der Fläche T'', verbinde dieselben in vorher angegebener Weise durch Schnitte l_η, l_z mit dem gemeinsamen Ausgangspunkt der Schnitte c, lasse alsdann bei der Formel (IV.) an Stelle des Punktepaares η_1, η_2 das Punktepaar η, z, bei der Formel (V.) dagegen an Stelle des Punktepaares η_1, η_2 das Punktepaar z, η treten und vertausche endlich noch in der so aus (V.) entstehenden Formel die Zeichen P, $\overline{P}$, indem man gleichzeitig den Buchstaben n durch den Buchstaben m ersetzt. Es ergeben sich dann die für irgend zwei Punkte η, z der Fläche T'' geltenden Gleichungen:

$$(5.)\qquad \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right| = \underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{matrix}z\\ \eta\end{matrix}\right| \pm \pi i,$$

$$(6.)\qquad \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right| = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m}{d\zeta^m_\eta}\underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{matrix}z\\ \zeta\end{matrix}\right|\right)_0,$$

wobei in der unter (5.) stehenden Gleichung das positive oder negative Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Schnitte c, l bei einem negativen Umlauf um ihren gemeinsamen Ausgangspunkt $\mathfrak{P}_0$ in der Reihenfolge $c_1, c_2, \cdots, c_p, l_\eta, l_z$ oder in der Reihenfolge $c_1, c_2, \cdots, c_p, l_z, l_\eta$ überschritten werden. Aus diesen Gleichungen sollen jetzt weitere Schlüsse gezogen werden.

Die in $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$, $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$, $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$, $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$ vorkommenden Buchstaben η, z bezeichnen irgend zwei Punkte der Fläche T'' und zugleich die diesen Punkten zukommenden Werte von $x+yi$. Man kann daher eine jede dieser vier Größen nicht nur, wie es bisher ausschließlich geschehen ist, bei festgehaltenem Punkte η als Funktion des in T'' beweglichen Punktes z, sondern auch bei festgehaltenem Punkte z als Funktion des in T''

beweglichen Punktes η ansehen. Bei jeder dieser Funktionen soll die zwischen den senkrechten Strichen an der unteren Stelle stehende Größe das Argument, die an der oberen Stelle stehende Größe der Parameter der Funktion genannt werden. Beachtet man nun, daß eine jede dieser Funktionen eine Funktion der bei ihr als Argument auftretenden komplexen Veränderlichen ist, und daß $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$, unter Festhaltung des Punktes z und des Schnittes l_z als Funktion des beweglichen Punktes η betrachtet, sich, wie die Gleichung (5.) zeigt, von der Funktion $\underset{0}{\bar{P}}\left|\begin{smallmatrix}z\\ \eta\end{smallmatrix}\right|$ der komplexen Veränderlichen η nur um eine additive Konstante unterscheidet, wenn nur für jede Lage von η der Anfangspunkt des Schnittes l_η auf derselben Seite des Schnittes l_z liegt, so erkennt man zunächst, daß die Funktion $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ nicht nur eine Funktion der bei ihr als Argument auftretenden komplexen Veränderlichen z, sondern auch eine Funktion der bei ihr als Parameter auftretenden komplexen Veränderlichen η ist, und daß die Eigenschaften von $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ als Funktion des Parameters η ohne Mühe aus den bekannten Eigenschaften von $\underset{0}{\bar{P}}\left|\begin{smallmatrix}z\\ \eta\end{smallmatrix}\right|$ als Funktion des Argumentes η abgeleitet werden können.

Man fasse jetzt die Gleichung (6.) ins Auge, drücke die auf ihrer rechten Seite vorkommende Größe $\underset{0}{\bar{P}}\left|\begin{smallmatrix}z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right|$ auf Grund der aus (5.) nach Ersetzung von η durch ζ hervorgehenden Gleichung $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right| = \underset{0}{\bar{P}}\left|\begin{smallmatrix}z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| \pm \pi i$ durch die Größe $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ aus und verbinde die so entstehende neue Gleichung mit der Gleichung (6.). Man erhält dann die Doppelgleichung:

$$(7.)\qquad \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right| = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m}{d\zeta_\eta^m}\underset{0}{\bar{P}}\left|\begin{matrix}z\\ \zeta\end{matrix}\right|\right)_0 = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m}{d\zeta_\eta^m}\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\zeta\\ z\end{matrix}\right|\right)_0,$$

und schließlich, indem man in bezug auf den Punkt η, insoferne dieser entweder ein beliebiger von den Punkten α, ∞ verschiedener Punkt ε der Fläche T'' oder einer der Punkte $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ oder endlich einer der Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$ sein kann, drei Fälle unterscheidet und die in Art. 3 des ersten Abschnittes gemachten Festsetzungen beachtet, die drei Doppelgleichungen:

$$(8.)\qquad \begin{aligned}
\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right| &= \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^m\underset{0}{\bar{P}}\left|\begin{matrix}z\\ \varepsilon\end{matrix}\right|}{d\varepsilon^m} &&= \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^m\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|}{d\varepsilon^m},\\
\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\alpha\\ z\end{matrix}\right| &= \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m\underset{0}{\bar{P}}\left|\begin{matrix}z\\ \alpha+\zeta_\alpha^u\end{matrix}\right|}{d\zeta_\alpha^m}\right)_0 &&= \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\alpha+\zeta_\alpha^u\\ z\end{matrix}\right|}{d\zeta_\alpha^m}\right)_0,\\
\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\infty\\ z\end{matrix}\right| &= \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m\underset{0}{\bar{P}}\left|\begin{matrix}z\\ \zeta_\infty^{-v}\end{matrix}\right|}{d\zeta_\infty^m}\right)_0 &&= \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\zeta_\infty^{-v}\\ z\end{matrix}\right|}{d\zeta_\infty^m}\right)_0.
\end{aligned}$$

Dem früher Bemerkten entsprechend gehen aus den Gleichungen (8.) drei weitere

Gleichungen hervor, wenn man darin durchweg die Zeichen P, $\bar{P}$ vertauscht. Aus der ersten der drei Gleichungen (8.), die für jeden von den Punkten α, ∞ verschiedenen Punkt ε der Fläche T' gilt, erkennt man nun, daß die Funktion $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$, ebenso wie die Funktion $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$, nicht nur eine Funktion der bei ihr als Argument auftretenden komplexen Veränderlichen z, sondern auch eine Funktion der bei ihr als Parameter auftretenden komplexen Veränderlichen η ist, und daß die Eigenschaften von $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$ als Funktion des Parameters η aus den bekannten Eigenschaften von $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}z\\ \eta\end{matrix}\right|$ als Funktion des Argumentes η abgeleitet werden können. Die genannte Gleichung lehrt weiter aber auch, daß man die Elementarfunktionen $\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$, $\underset{2}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$, $\cdots$ aus der Funktion $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$ als primärer durch sukzessives Derivieren nach dem Parameter η erhalten kann.

6.

Die Untersuchungen des Art. 4 haben gezeigt, daß der Ausdruck:

$$\begin{aligned} W(z) = & \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\left(\mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)}\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)}\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{m_\tau}^{(\varepsilon_\tau)}\underset{m_\tau}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right|\right) \\ & + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\left(\mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)}\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_1^{(\alpha_\varrho)}\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{n_\varrho}^{(\alpha_\varrho)}\underset{n_\varrho}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|\right) \\ & + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\left(\mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)}\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_1^{(\infty_\varkappa)}\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{p_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)}\underset{p_\varkappa}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|\right) - \frac{1}{\pi i}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p}\mathfrak{C}_\sigma w_\sigma|z| + C, \end{aligned}$$

bei dem $m_1, \cdots, m_t, n_1, \cdots, n_r, p_1, \cdots, p_q$ unbestimmte positive ganze Zahlen, die Buchstaben $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{C}$, C unbestimmte, nur der Bedingung:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\mathfrak{C}_\nu + 2\pi i\left(\sum_{\tau=1}^{\tau=t}\mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)}\right) = 0$$

unterworfene Konstanten bezeichnen, der sich also von dem in Art. 4 für $W(z)$ aufgestellten Ausdrucke nur durch die Bezeichnung unterscheidet, die allgemeinste zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion W darstellt. Das Verhalten dieser Funktion $W = W(z)$ für die Punkte ε, α, ∞ ist von der Art, daß

$$\text{für das Gebiet des Punktes } \varepsilon_\tau \left\{ W(z) = \mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)}\ln\frac{1}{z-\varepsilon_\tau} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau}\mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)}\frac{1}{(z-\varepsilon_\tau)^\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}c_\lambda^{(\varepsilon_\tau)}(z-\varepsilon_\tau)^\lambda, \right. \qquad \tau = 1, 2, \cdots, t,$$

$$\text{für das Gebiet des Punktes } \alpha_\varrho \left\{ W(z) = \mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)}\ln\frac{1}{(z-\alpha_\varrho)^{\frac{1}{\mu_\varrho}}} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho}\mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)}\frac{1}{(z-\alpha_\varrho)^{\frac{\lambda}{\mu_\varrho}}} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}(z-\alpha_\varrho)^{\frac{\lambda}{\mu_\varrho}}, \right. \qquad \varrho = 1, 2, \cdots, r,$$

$$\text{für das Gebiet des Punktes } \infty_\varkappa \left\{ W(z) = \mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)}\ln z^{\frac{1}{\iota_\varkappa}} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p_\varkappa}\mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\varkappa)} z^{\frac{\lambda}{\iota_\varkappa}} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}c_\lambda^{(\infty_\varkappa)}\frac{1}{z^{\frac{\lambda}{\iota_\varkappa}}}, \right. \qquad \varkappa = 1, 2, \cdots, q,$$

ist, während für das Gebiet eines von den Punkten ε, α, ∞ verschiedenen Punktes $z=a$

$$W(z)=c_0^{(a)}+c_1^{(a)}(z-a)+c_2^{(a)}(z-a)^2+\cdots$$

ist. Dabei bezeichnen $c^{(\varepsilon)}$, $c^{(\alpha)}$, $c^{(\infty)}$, $c^{(a)}$ von z unabhängige Größen. Was dagegen das Verhalten der Funktion $W(z)$ längs der Schnitte a, b, c, l betrifft, so ist, dem in Art. 4 Ausgeführten entsprechend, hier

$$\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \{\, W(z)^+ = A_\nu W(z)^- + \mathfrak{A}_\nu, \\
&\text{längs } b_\nu \{\, W(z)^+ = B_\nu W(z)^- + \mathfrak{B}_\nu, && \nu=1,2,\cdots,p, \\
&\text{längs } c_\nu \{\, W(z)^+ = W(z)^- + \mathfrak{C}_\nu, \\
&\text{längs } l_\eta \{\, W(z)^+ = W(z)^- + 2\pi i\mathfrak{L}_0^{(\eta)}, && \eta=\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t,\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\infty_1,\cdots,\infty_q,
\end{aligned}$$

wobei

$$\mathfrak{A}_\nu=\mathcal{A}_\nu\mathfrak{C}_\nu+(1-A_\nu)\mathfrak{K}_\nu,$$
$$\mathfrak{B}_\nu=\mathcal{B}_\nu\mathfrak{C}_\nu+(1-B_\nu)\mathfrak{K}_\nu$$

ist, und der Wert der Konstante $\mathfrak{K}_\nu$ durch die Gleichung:

$$\mathfrak{K}_\nu=\sum_{\tau=1}^{\tau=t}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m_\tau}\mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)}\mathfrak{K}_{\nu\,\lambda}^{(\varepsilon_\tau)}+\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n_\varrho}\mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)}\mathfrak{K}_{\nu\,\lambda}^{(\alpha_\varrho)}+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=p_\varkappa}\mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\varkappa)}\mathfrak{K}_{\nu\,\lambda}^{(\infty_\varkappa)}-\frac{1}{\pi i}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p}\mathfrak{C}_\sigma\mathfrak{K}_{\sigma\nu}+C$$

geliefert wird.

Man betrachte jetzt die n^{te} Derivierte $\frac{d^nW}{dz^n}$ der Funktion $W=W(z)$. Um ihre Eigenschaften zu ermitteln, deriviere man die soeben aufgestellten Gleichungen, welche das Verhalten der Funktion $W(z)$ für die Punkte ε_τ, α_ϱ, $\infty_\varkappa$, a und längs der Begrenzung von T'' charakterisieren, n-mal nach z. Man findet auf diese Weise, wenn man noch das mit irgend einer Größe g gebildete Produkt $g(g-1)\cdots(g-n+1)$ von n Faktoren zur Abkürzung durch $(g|n)$ bezeichnet, daß

für das Gebiet des Punktes ε_τ $(\tau=1,2,\cdots,t)$ die Gleichung:

$$\frac{d^nW}{dz^n}=\mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)}(-1)^n\frac{(n-1)!}{(z-\varepsilon_\tau)^n}+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau}\mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)}\frac{(-\lambda|n)}{(z-\varepsilon_\tau)^{\lambda+n}}+\sum_{\lambda=n}^{\lambda=\infty}c_\lambda^{(\varepsilon_\tau)}(\lambda|n)(z-\varepsilon_\tau)^{\lambda-n}.$$

für das Gebiet des Punktes α_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots,r)$ die Gleichung:

$$\frac{d^nW}{dz^n}=\mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)}\frac{(-1)^n}{\mu_\varrho}\frac{(n-1)!}{(z-\alpha_\varrho)^n}+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho}\mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)}\frac{\left(-\frac{\lambda}{\mu_\varrho}\middle|n\right)}{(z-\alpha_\varrho)^{\frac{\lambda}{\mu_\varrho}+n}}+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}\left(\frac{\lambda}{\mu_\varrho}\middle|n\right)(z-\alpha_\varrho)^{\frac{\lambda}{\mu_\varrho}-n},$$

für das Gebiet des Punktes $\infty_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots,q)$ die Gleichung:

$$\frac{d^nW}{dz^n}=\mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)}\frac{(-1)^{n-1}}{\iota_\varkappa}\frac{(n-1)!}{z^n}+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p_\varkappa}\mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\varkappa)}\left(\frac{\lambda}{\iota_\varkappa}\middle|n\right)z^{\frac{\lambda}{\iota_\varkappa}-n}+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}c_\lambda^{(\infty_\varkappa)}\frac{\left(-\frac{\lambda}{\iota_\varkappa}\middle|n\right)}{z^{\frac{\lambda}{\iota_\varkappa}+n}},$$

für das Gebiet des von den Punkten ε, α, ∞ verschiedenen Punktes $z = a$ die Gleichung:

$$\frac{d^n W}{dz^n} = c_n^{(a)}(n|n) + c_{n+1}^{(a)}(n+1|n)(z-a) + c_{n+2}^{(a)}(n+2|n)(z-a)^2 + \cdots$$

besteht, und daß

$$\text{(S.)}\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \left\{ \frac{d^n W^+}{dz^n} = A_\nu \frac{d^n W^-}{dz^n}, \right. \\ &\text{längs } b_\nu \left\{ \frac{d^n W^+}{dz^n} = B_\nu \frac{d^n W^-}{dz^n}, \right. \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p, \\ &\text{längs } c_\nu \left\{ \frac{d^n W^+}{dz^n} = \frac{d^n W^-}{dz^n}, \right. \\ &\text{längs } l_\eta \left\{ \frac{d^n W^+}{dz^n} = \frac{d^n W^-}{dz^n}, \right. \qquad \eta = \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \infty_1, \cdots, \infty_q, \end{aligned}$$

ist. Die so gewonnenen Gleichungen zeigen, daß die in der Fläche T'' einwertige Funktion $\frac{d^n W}{dz^n}$ eine zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion W ist, und $\frac{d^n W}{dz^n}$ kann daher, nach Art. 4, durch Elementarfunktionen dargestellt werden.

Um diese Darstellung zu erhalten, beachte man zunächst, daß die Funktion $\frac{d^n W}{dz^n}$, wie die für sie an erster Stelle gewonnenen Gleichungen zeigen,

für den Punkt ε_τ $(\tau = 1, 2, \cdots, t)$ unstetig wird wie die Funktion:

$$W^{(\varepsilon_\tau)}(z) = (-1)^n (n-1)!\, \mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)} P_n \left| {\varepsilon_\tau \atop z} \right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau} (-\lambda\,|\,n)\, \mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)} P_{n+\lambda} \left| {\varepsilon_\tau \atop z} \right|,$$

für den Punkt α_ϱ $(\varrho = 1, 2, \cdots, r)$ unstetig wird wie die Funktion:

$$W^{(\alpha_\varrho)}(z) = \frac{(-1)^n}{\mu_\varrho}(n-1)!\, \mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)} P_{n\mu_\varrho} \left| {\alpha_\varrho \atop z} \right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho} \left(-\frac{\lambda}{\mu_\varrho}\middle|\, n\right) \mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)} P_{n\mu_\varrho+\lambda} \left| {\alpha_\varrho \atop z} \right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1} \left(\frac{\lambda}{\mu_\varrho}\middle|\, n\right) c_\lambda^{(\alpha_\varrho)} P_{n\mu_\varrho-\lambda} \left| {\alpha_\varrho \atop z} \right|,$$

für den Punkt $\infty_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, q)$ stetig ist oder aber unstetig wird wie die Funktion:

$$W^{(\infty_\varkappa)}(z) = \sum_{\lambda=n\iota_\varkappa+1}^{\lambda=p_\varkappa} \left(\frac{\lambda}{\iota_\varkappa}\middle|\, n\right) \mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\varkappa)} P_{\lambda-n\iota_\varkappa} \left| {\infty_\varkappa \atop z} \right|,$$

je nachdem $p_\varkappa < n\iota_\varkappa + 1$ oder $p_\varkappa \geqq n\iota_\varkappa + 1$ ist,

endlich für jeden von den Punkten ε, α, ∞ verschiedenen Punkt $z = a$ stetig ist. Man erkennt dann, daß der aus $\frac{d^n W}{dz^n}$ und den Funktionen $W^{(\varepsilon_\tau)}(z)$, $\tau = 1, 2, \cdots, t$, $W^{(\alpha_\varrho)}(z)$, $\varrho = 1, 2, \cdots, r$, sowie den etwa zu $\frac{d^n W}{dz^n}$ im eben angegebenen Sinne gehörigen Funktionen $W^{(\infty_\varkappa)}(z)$ gebildete Ausdruck:

$$\frac{d^n W}{dz^n} - \sum_{\tau=1}^{\tau=t} W^{(\varepsilon_\tau)}(z) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} W^{(\alpha_\varrho)}(z) - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}{}' W^{(\infty_\varkappa)}(z)$$

— bei welchem der an dem letzten Summenzeichen stehende Akzent andeuten soll, daß bei der Summation diejenigen, der Reihe $1, 2, \cdots, q$ angehörigen, Werte von $\varkappa$ auszuschließen sind, für welche etwa $p_\varkappa < n \iota_\varkappa + 1$ ist — eine zur Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right)$ gehörige allenthalben endliche Funktion $w|z|$ darstellt. Zur Bestimmung dieser Funktion $w|z|$ verstehe man unter η irgend einen Punkt der von den Punkten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ und denjenigen der Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$, für welche $\frac{d^n W}{dz^n}$ etwa unstetig wird, gebildeten Reihe und beachte, daß für die diesem Punkte entsprechende Funktion $W^{(\eta)}(z)$, wie aus den durch die Gleichungen $(2_m.)$, $(3_m.)$, $(4_m.)$ des Art. 3 fixierten Eigenschaften der zu ihrer Bildung ausschließlich benutzten algebraisch unendlich werdenden Elementarfunktionen $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\z\end{smallmatrix}\right|$ folgt,

$$(\mathrm{S}^{(\eta)}.)\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \left\{ W^{(\eta)}(z)^+ = A_\nu W^{(\eta)}(z)^- + (1-A_\nu)\mathfrak{K}_\nu^{(\eta)}, \right.\\ &\text{längs } b_\nu \left\{ W^{(\eta)}(z)^+ = B_\nu W^{(\eta)}(z)^- + (1-B_\nu)\mathfrak{K}_\nu^{(\eta)}, \right.\\ &\text{längs } c_\nu \left\{ W^{(\eta)}(z)^+ = W^{(\eta)}(z)^-, \right. \end{aligned} \qquad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,}$$

ist, wobei die $\mathfrak{K}_\nu^{(\eta)}$ Konstanten bezeichnen, und daß zudem für diese Konstanten, wie speziell aus der Gleichung $(4_m.)$ folgt, die Beziehung:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{K}_\nu^{(\eta)} = 0$$

besteht. Man erkennt dann, bei Beachtung der für $\frac{d^n W}{dz^n}$ gewonnenen, unter (S.) an dritter Stelle sich findenden Gleichung, daß für die allenthalben endliche Funktion $w|z|$ längs eines jeden der Schnitte $c_1, c_2, \cdots, c_p$ die Gleichung $w|z|^+ = w|z|^-$ besteht. Daraus folgt aber, daß die Funktion $w|z|$ für alle Punkte der Fläche T'' den gleichen, mit c zu bezeichnenden, Wert besitzt, oder, was dasselbe, daß

$$\frac{d^n W}{dz^n} = \sum_{\tau=1}^{\tau=t} W^{(\varepsilon_\tau)}(z) + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} W^{(\alpha_\varrho)}(z) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}{}' W^{(\infty_\varkappa)}(z) + c$$

ist. Um den Wert der Konstante c zu bestimmen, vergleiche man das unter (S.) charakterisierte Verhalten der auf der linken Seite der eben gewonnenen Gleichung stehenden Funktion $\frac{d^n W}{dz^n}$ längs der Schnitte a_ν, b_ν mit dem aus den Gleichungen $(\mathrm{S}^{(\eta)}.)$ sich ergebenden Verhalten des auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Ausdrucks längs derselben Schnitte. Man erhält dann weiter die für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ geltende Gleichung:

$$0 = \sum_{\tau=1}^{\tau=t} \mathfrak{K}_\nu^{(\varepsilon_\tau)} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \mathfrak{K}_\nu^{(\alpha_\varrho)} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}{}' \mathfrak{K}_\nu^{(\infty_\varkappa)} + c$$

und endlich, indem man die aus ihr für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ hervorgehenden Gleichungen addiert und die schon oben aufgestellte, für $\eta = \varepsilon_\tau$ ${\scriptstyle (\tau=1,2,\cdots,t)}$, $\eta = \alpha_\varrho$ ${\scriptstyle (\varrho=1,2,\cdots,r)}$ sowie für $\eta = \infty_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots,q)$, wenn dem Punkte $\infty_\varkappa$ eine Funktion $W^{(\infty_\varkappa)}(z)$ entspricht, bestehende Beziehung $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{K}_\nu^{(\eta)} = 0$ beachtet, die Gleichung $0 = pc$ und damit für c den Wert 0. Trägt man jetzt den Wert von c in die für $\frac{d^n W}{dz^n}$ gewonnene Gleichung ein und ersetzt zugleich die in ihr vorkommenden Funktionen $W^{(\varepsilon_\iota)}(z)$, $W^{(\alpha_\varrho)}(z)$, $W^{(\infty_\varkappa)}(z)$ durch die ihnen entsprechenden Ausdrücke, so gelangt man schließlich, wenn man noch die von $W^{(\alpha_\varrho)}(z)$ herstammenden Glieder ordnet, zu der Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{d^n W(z)}{dz^n} = &\sum_{\tau=1}^{\tau=t}\left\{(-1)^n(n-1)!\,\mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\iota)} \underset{n}{P}\left|{\varepsilon_\tau \atop z}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau}(-\lambda\,|\,n)\,\mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\iota)} \underset{n+\lambda}{P}\left|{\varepsilon_\tau \atop z}\right|\right\}\\ \text{(D.)}\qquad &+\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\left\{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1}\left(\frac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\,\middle|\,n\right)c_{n\mu_\varrho-\lambda}^{(\alpha_\varrho)} \underset{\lambda}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop z}\right| + \frac{(-1)^n}{\mu_\varrho}(n-1)!\,\mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)} \underset{n\mu_\varrho}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop z}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho}\left(-\frac{\lambda}{\mu_\varrho}\,\middle|\,n\right)\mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)} \underset{n\mu_\varrho+\lambda}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop z}\right|\right\}\\ &+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}{}'\left\{\sum_{\lambda=n\iota_\varkappa+1}^{\lambda=p_\varkappa}\left(\frac{\lambda}{\iota_\varkappa}\,\middle|\,n\right)\mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\varkappa)} \underset{\lambda-n\iota_\varkappa}{P}\left|{\infty_\varkappa \atop z}\right|\right\},\end{aligned}$$

welche die gewünschte Darstellung der n^{ten} Derivierten der Funktion $W(z)$ durch Elementarfunktionen enthält. Mit Hilfe dieser Gleichung (D.) sollen jetzt die n^{ten} Derivierten der Elementarfunktionen $w_\tau|z|$, $\underset{0}{P}\left|{\varepsilon \atop z}\right|$, $\underset{0}{P}\left|{\alpha_\sigma \atop z}\right|$, $\underset{0}{P}\left|{\infty_\tau \atop z}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{\varepsilon \atop z}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{\alpha_\sigma \atop z}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{\infty_\tau \atop z}\right|$ durch Elementarfunktionen dargestellt werden.

Man setze, unter τ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, p$ verstehend, in dem mit $W(z)$ bezeichneten Ausdrucke die Größen $\mathfrak{L}$ sämtlich der Null gleich, ebenso die Konstante C, dagegen $\mathfrak{C}_\sigma = (1-\delta_{\tau\sigma}p)\frac{\pi i}{p}$, $\sigma=1,2,\cdots,p$; dann geht $W(z)$ in $w_\tau|z|$ über, an Stelle der Entwicklung der Funktion $W(z)$ für das Gebiet des Punktes α_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots,r)$, aus der die in der Gleichung (D.) vorkommenden Größen $c^{(\alpha_\varrho)}$ zu entnehmen sind, tritt die Entwicklung:

$$w_\tau|z| = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}(z-\alpha_\varrho)^{\frac{\lambda}{\mu_\varrho}}, \qquad \text{wobei} \qquad \underset{\lambda=1,2,3,\cdots}{c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}} = \frac{1}{\lambda!}\left(\frac{d^\lambda w_\tau|\zeta|}{d\zeta_{\alpha_\varrho}^\lambda}\right)_0 = -\frac{1}{2\lambda}\underset{\lambda}{\overline{\mathfrak{K}}_\tau^{(\alpha_\varrho)}},$$

und die Gleichung (D.) liefert, wenn man sie auf diese spezielle Funktion $W(z) = w_\tau|z|$ bezieht, für die n^{te} Derivierte der Funktion $w_\tau|z|$ die Darstellung:

$$\text{(D}_1.\text{)}\qquad \frac{d^n w_\tau|z|}{dz^n} = -\frac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1}\frac{\left(\frac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\,\middle|\,n\right)}{n\mu_\varrho-\lambda}\underset{n\mu_\varrho-\lambda}{\overline{\mathfrak{K}}_\tau^{(\alpha_\varrho)}} \underset{\lambda}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop z}\right|. \qquad (\tau=1,2,\cdots,p).$$

Man verstehe jetzt unter η einen der drei Punkte ε_ι, α_σ, ∞_τ — wobei σ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, r$, τ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, q$ bezeichnen soll — und setze in dem mit $W(z)$ bezeichneten Ausdrucke die Größe $\mathfrak{L}_0^{(\eta)}$ der Eins, alle übrigen Größen $\mathfrak{L}$ sowie die Konstante C der Null gleich, dagegen $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2 = \cdots = \mathfrak{C}_p = -\frac{2\pi i}{p}$; dann geht $W(z)$ in $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\z\end{matrix}\right|$ über und an Stelle der Entwicklung der Funktion $W(z)$ für das Gebiet des Punktes α_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots,r)$ tritt, den Gleichungen (3.) und (1.) des Art. 5 gemäß, die Entwicklung:

$$\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\z\end{matrix}\right| = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}(z-\alpha_\varrho)^{\frac{\lambda}{\mu_\varrho}}, \quad \text{wobei} \quad \underset{\lambda=1,2,3,\cdots}{c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}} = \frac{1}{\lambda}\,\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\\eta\end{matrix}\right|,$$

wenn der Punkt α_ϱ von dem Punkte η verschieden ist, dagegen die Entwicklung:

$$\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\z\end{matrix}\right| = \ln\frac{1}{(z-\alpha_\varrho)^{\frac{1}{\mu_\varrho}}} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}(z-\alpha_\varrho)^{\frac{\lambda}{\mu_\varrho}}, \quad \text{wobei} \quad \underset{\lambda=1,2,3,\cdots}{c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}} = \frac{1}{\lambda}\left(\underset{\lambda}{\overline{P}}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\\zeta\end{matrix}\right| - \frac{1}{\zeta_{\alpha_\varrho}^{\lambda}}\right)_{\zeta=\alpha_\varrho},$$

wenn der Punkt α_ϱ sich mit dem Punkte η deckt, was übrigens nur in dem Falle, wo η der Punkt α_σ ist, vorkommen kann. Unterscheidet man jetzt in bezug auf den Punkt η, insoferne dieser entweder der Punkt ε_1 oder der Punkt α_σ oder der Punkt ∞_τ sein kann, drei Fälle und bezieht die Gleichung (D.), indem man zugleich den Buchstaben ε_1, der einen beliebigen von den Punkten $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\infty_1,\cdots,\infty_q$ verschiedenen Punkt der Fläche T'' bezeichnet, durch ε ersetzt, der Reihe nach auf die speziellen Funktionen $W(z)=\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\z\end{matrix}\right|$, $W(z)=\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\z\end{matrix}\right|$, $W(z)=\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\z\end{matrix}\right|$, so erhält man

für die n^{te} Derivierte der Funktion $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\z\end{matrix}\right|$ die Darstellung:

$$(\mathrm{D}_2.)\qquad \frac{d^n \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\z\end{matrix}\right|}{dz^n} = (-1)^n(n-1)!\,\underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\z\end{matrix}\right| + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1}\frac{\left(\dfrac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle|\,n\right)}{n\mu_\varrho-\lambda}\,\underset{n\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\\varepsilon\end{matrix}\right|\,\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\z\end{matrix}\right|,$$

für die n^{te} Derivierte der Funktion $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\z\end{matrix}\right|$ die Darstellung:

$$(\mathrm{D}_3.)\qquad \frac{d^n \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\z\end{matrix}\right|}{dz^n} = \frac{(-1)^n}{\mu_\sigma}(n-1)!\,\underset{n\mu_\sigma}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\z\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\sigma-1}\frac{\left(\dfrac{n\mu_\sigma-\lambda}{\mu_\sigma}\middle|\,n\right)}{n\mu_\sigma-\lambda}\left(\underset{n\mu_\sigma-\lambda}{\overline{P}}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\\zeta\end{matrix}\right| - \frac{1}{\zeta_{\alpha_\sigma}^{n\mu_\sigma-\lambda}}\right)_{\zeta=\alpha_\sigma}\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\z\end{matrix}\right|$$
$$+\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}{}'\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1}\frac{\left(\dfrac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle|\,n\right)}{n\mu_\varrho-\lambda}\,\underset{n\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\\alpha_\sigma\end{matrix}\right|\,\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\z\end{matrix}\right|, \qquad (\sigma=1,2,\cdots,r)$$

für die n^{te} Derivierte der Funktion $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\z\end{matrix}\right|$ die Darstellung:

$$(\mathrm{D}_4.)\qquad \frac{d^n \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\z\end{matrix}\right|}{dz^n} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1}\frac{\left(\dfrac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle|\,n\right)}{n\mu_\varrho-\lambda}\,\underset{n\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\\infty_\tau\end{matrix}\right|\,\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\z\end{matrix}\right|, \qquad (\tau=1,2,\cdots,q).$$

Dabei soll der auf der rechten Seite der Formel ($\mathrm{D}_3.$) an dem Summenzeichen stehende Akzent andeuten, daß bei der Summation für den Index ϱ der Wert σ auszuschließen ist.

Man verstehe jetzt unter η wiederum einen der drei Punkte ε_1, α_σ, ∞_τ, unter m im ersten Falle die Zahl m_1, im zweiten Falle die Zahl n_σ, im dritten Falle die Zahl p_τ, und setze in dem mit $W(z)$ bezeichneten Ausdrucke die Größe $\mathfrak{L}_m^{(\eta)}$ der Eins, alle übrigen Größen $\mathfrak{L}$ sowie die Größen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_p, C$ der Null gleich; dann geht $W(z)$ in $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$ über und an Stelle der Entwicklung der Funktion $W(z)$ für das Gebiet des Punktes α_ϱ $(\varrho = 1, 2, \cdots, r)$ tritt, den Gleichungen (4.) und (2.) des Art. 5 gemäß, die Entwicklung:

$$\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right| = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}(z-\alpha_\varrho)^{\frac{\lambda}{\mu_\varrho}}, \qquad \text{wobei} \quad \underset{\lambda=1,2,3,\cdots}{c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}} = \frac{1}{(m-1)!\,\lambda}\left(\frac{d^m}{d\zeta_\eta^m}\,\underset{\lambda}{\overline{P}}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{matrix}\right|\right)_0,$$

wenn der Punkt α_ϱ von dem Punkte η verschieden ist, dagegen die Entwicklung:

$$\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right| = \frac{1}{(z-\alpha_\varrho)^{\frac{m}{\mu_\varrho}}} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}(z-\alpha_\varrho)^{\frac{\lambda}{\mu_\varrho}}, \qquad \text{wobei} \quad \underset{\lambda=1,2,3,\cdots}{c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}} = \frac{1}{(m-1)!\,\lambda}\left(\frac{d^m}{d\zeta_{\alpha_\varrho}^m}\left[\underset{\lambda}{\overline{P}}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{matrix}\right| - \frac{1}{\zeta_{\alpha_\varrho}^\lambda}\right]\right)_0,$$

wenn der Punkt α_ϱ sich mit dem Punkte η deckt, was übrigens nur in dem Falle, wo η der Punkt α_σ ist, vorkommen kann. Unterscheidet man jetzt in bezug auf den Punkt η, insoferne dieser entweder der Punkt ε_1 oder der Punkt α_σ oder der Punkt ∞_τ sein kann, drei Fälle und bezieht die Gleichung (D.), indem man zugleich den Buchstaben ε_1, der einen beliebigen von den Punkten $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \infty_1, \cdots, \infty_q$ verschiedenen Punkt der Fläche T'' bezeichnet, durch ε ersetzt, der Reihe nach auf die speziellen Funktionen $W(z) = \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|$, $W(z) = \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\ z\end{matrix}\right|$, $W(z) = \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\ z\end{matrix}\right|$, so erhält man

für die n^{te} Derivierte der Funktion $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|$ die Darstellung:

$$(\mathrm{D}_5.)\quad \frac{d^n\,\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|}{dz^n} = (-m\,|\,n)\,\underset{n+m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right| + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\,\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1}{}' \frac{\left(\frac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\,\middle|\,n\right)}{n\mu_\varrho-\lambda}\left(\frac{d^m}{d\varepsilon^m}\,\underset{n\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \varepsilon\end{matrix}\right|\right)\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|,$$

für die n^{te} Derivierte der Funktion $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\ z\end{matrix}\right|$ die Darstellung:

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}_6.)\quad \frac{d^n\,\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\ z\end{matrix}\right|}{dz^n} = {}&\left(-\frac{m}{\mu_\sigma}\,\middle|\,n\right)\underset{n\mu_\sigma+m}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\ z\end{matrix}\right| + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\sigma-1}{}' \frac{\left(\frac{n\mu_\sigma-\lambda}{\mu_\sigma}\,\middle|\,n\right)}{n\mu_\sigma-\lambda}\left(\frac{d^m}{d\zeta_{\alpha_\sigma}^m}\left[\underset{n\mu_\sigma-\lambda}{\overline{P}}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\ \zeta\end{matrix}\right| - \frac{1}{\zeta_{\alpha_\sigma}^{n\mu_\sigma-\lambda}}\right]\right)_0\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\ z\end{matrix}\right|\\ &+ \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}{}'\,\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1}{}' \frac{\left(\frac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\,\middle|\,n\right)}{n\mu_\varrho-\lambda}\left(\frac{d^m}{d\zeta_{\alpha_\sigma}^m}\,\underset{n\mu_\varrho-\lambda}{\overline{P}}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{matrix}\right|\right)_0\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|, \qquad (\sigma=1,2,\cdots,r)\end{aligned}$$

für die n^{te} Derivierte der Funktion $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\ z\end{matrix}\right|$ die Darstellung:

$$(\mathrm{D}_7.)\quad \frac{d^n\,\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\ z\end{matrix}\right|}{dz^n} = \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\,\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1}{}' \frac{\left(\frac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\,\middle|\,n\right)}{n\mu_\varrho-\lambda}\left(\frac{d^m}{d\zeta_{\infty_\tau}^m}\,\underset{n\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{matrix}\right|\right)_0\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|, \qquad (\tau=1,2,\cdots,q)$$

wenn $m < n\iota_\tau + 1$ ist, dagegen die Darstellung:

$$(\mathrm{D}_7'.)\quad \frac{d^n \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\ z\end{matrix}\right|}{dz^n} = \left(\frac{m}{\iota_\tau}\middle| n\right) \underset{m-n\iota_\tau}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\ z\end{matrix}\right| + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1}\frac{\left(\frac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle| n\right)}{n\mu_\varrho-\lambda}\left(\frac{d^m}{d\zeta_{\infty_\tau}^m}\underset{n\mu_\varrho-\lambda}{\overline{P}}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{matrix}\right|\right)_0 \underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|, \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, q)$$

wenn $m \geqq n\iota_\tau + 1$ ist.

Dabei soll der auf der rechten Seite der Formel (D_6.) an dem Summenzeichen stehende Akzent andeuten, daß bei der Summation für den Index ϱ der Wert σ auszuschließen ist. Was den Buchstaben m betrifft, so vertritt derselbe bei der Formel (D_5.) die Zahl m_1, bei der Formel (D_6.) die Zahl n_σ, endlich bei den Formeln (D_7.), (D_7'.) die Zahl p_τ, und es kann daher, insoferne m_1, n_σ, p_τ unbestimmte positive ganze Zahlen sind, in den aufgestellten Formeln unter m irgend eine positive ganze Zahl verstanden werden.

Nachdem so die n^{ten} Derivierten der zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Elementarfunktionen durch Elementarfunktionen dargestellt sind, läßt sich jetzt die Funktion $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|$, indem man die im vorhergehenden Artikel unter (8.) für sie aufgestellte Gleichung:

$$(8_1.)\qquad \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right| = \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^m \underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{matrix}z\\ \varepsilon\end{matrix}\right|}{d\varepsilon^m}$$

mit den Formeln (D_2.), (D_3.), (D_4.) der Reihe nach verbindet, durch Elementarfunktionen mit dem Argumente ε darstellen. Um diese Darstellung zu erhalten, beachte man, daß die Formel (D_2.) für irgend zwei von den Punkten $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \infty_1, \cdots, \infty_q$ verschiedene Punkte ε, z der Fläche T' gilt, wenn nur diese Punkte als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen, daß dagegen die Formeln (D_3.), (D_4.) für jeden von den Punkten $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \infty_1, \cdots, \infty_q$ verschiedenen Punkt z der Fläche T' gelten. Ersetzt man daraufhin bei den genannten drei Formeln in neuer Bezeichnung den Buchstaben z durch den Buchstaben ε und gleichzeitig den, nur bei der Formel (D_2.) vorkommenden, Buchstaben ε durch den Buchstaben z, weiter dann den Buchstaben n durch den Buchstaben m und vertauscht endlich noch durchweg die Zeichen P, $\overline{P}$, so erhält man zunächst drei Gleichungen, deren linke Seiten von den Größen:

$$\frac{d^m \underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{matrix}z\\ \varepsilon\end{matrix}\right|}{d\varepsilon^m}, \qquad \frac{d^m \underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\ \varepsilon\end{matrix}\right|}{d\varepsilon^m}, \qquad \frac{d^m \underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\ \varepsilon\end{matrix}\right|}{d\varepsilon^m}$$

beziehungsweise gebildet werden. Führt man nun noch an Stelle dieser Größen auf Grund der oben aufgestellten Gleichung (8_1.) die Größen:

$$(m-1)!\,\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|, \qquad (m-1)!\,\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ \alpha_\sigma\end{matrix}\right|, \qquad (m-1)!\,\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ \infty_\tau\end{matrix}\right|$$

beziehungsweise ein, so erhält man schließlich die drei Gleichungen:

$$(\mathrm{E}_z.)\qquad \underset{m}{P}\left|{\varepsilon \atop z}\right| = (-1)^m\, \underset{m}{\bar{P}}\left|{z \atop \varepsilon}\right| + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\varrho-1}\frac{\left(\dfrac{m\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle| m\right)}{m\mu_\varrho-\lambda}\,\underset{m\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop z}\right|\,\underset{\lambda}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop \varepsilon}\right|,$$

$$(\mathrm{E}_\alpha.)\qquad \underset{m}{P}\left|{\varepsilon \atop \alpha_\sigma}\right| = \frac{(-1)^m}{\mu_\sigma}\,\underset{m\mu_\sigma}{\bar{P}}\left|{\alpha_\sigma \atop \varepsilon}\right| + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\sigma-1}\frac{\left(\dfrac{m\mu_\sigma-\lambda}{\mu_\sigma}\middle| m\right)}{m\mu_\sigma-\lambda}\left(\underset{m\mu_\sigma-\lambda}{P}\left|{\alpha_\sigma \atop \zeta}\right| - \frac{1}{\zeta_{\alpha_\sigma}^{m\mu_\sigma-\lambda}}\right)_{\zeta=\alpha_\sigma}\underset{\lambda}{P}\left|{\alpha_\sigma \atop \varepsilon}\right|$$

$$+\frac{1}{(m-1)!}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}{}'\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\varrho-1}\frac{\left(\dfrac{m\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle| m\right)}{m\mu_\varrho-\lambda}\,\underset{m\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop \alpha_\sigma}\right|\,\underset{\lambda}{\bar{P}}\left|{\alpha_\varrho \atop \varepsilon}\right|, \qquad (\sigma=1,2,\cdots,r)$$

$$(\mathrm{E}_\infty.)\qquad \underset{m}{P}\left|{\varepsilon \atop \infty_\tau}\right| = \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\varrho-1}\frac{\left(\dfrac{m\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle| m\right)}{m\mu_\varrho-\lambda}\,\underset{m\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop \infty_\tau}\right|\,\underset{\lambda}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop \varepsilon}\right|, \qquad (\tau=1,2,\cdots,q)$$

von denen die erste für irgend zwei von den Punkten $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \infty_1, \cdots, \infty_q$ verschiedene Punkte ε, z der Fläche T' gilt, wenn nur diese Punkte als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen, die zweite und dritte dagegen für jeden von den Punkten $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \infty_1, \cdots, \infty_q$ verschiedenen Punkt ε der Fläche T' gilt. Der auf der rechten Seite der Formel ($\mathrm{E}_\alpha.$) an dem Summenzeichen stehende Akzent soll andeuten, daß bei der Summation für den Index ϱ der Wert σ auszuschließen ist.

Jetzt ist man auch imstande, das Verhalten der Funktionen $\underset{m}{P}\left|{\varepsilon \atop z}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{\varepsilon \atop \alpha_\sigma}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{\varepsilon \atop \infty_\tau}\right|$ als Funktionen des Parameters ε vollständig zu charakterisieren. Zunächst zeigt die Gleichung ($8_1.$), daß diese Funktionen, als Funktionen des Parameters ε betrachtet, zur Charakteristik $\left(\frac{\bar{A}}{\bar{B}}\right)$ gehörige Funktionen $\overline{W}(\varepsilon)$ sind, die nur algebraisch unendlich werden, und bei denen überdies die Konstanten $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{C}}$ sämtlich den Wert Null besitzen. Als Funktionen $\overline{W}(\varepsilon)$ müssen sie sich aber nach Früherem durch zur Charakteristik $\left(\frac{\bar{A}}{\bar{B}}\right)$ gehörige Elementarfunktionen mit dem Argumente ε darstellen lassen, und diese Darstellungen werden eben durch die Gleichungen ($\mathrm{E}_z.$), ($\mathrm{E}_\alpha.$), ($\mathrm{E}_\infty.$) beziehungsweise geliefert. Aus der Gleichung ($\mathrm{E}_z.$) erkennt man dann weiter, daß die Funktion $\underset{m}{P}\left|{\varepsilon \atop z}\right|$ als Funktion von ε unendlich wird wie $\frac{(-1)^m}{(\varepsilon-z)^m}$, wenn der in der Fläche T' bewegliche Punkt ε sich dem festen Punkte z unbegrenzt nähert, und daß diese Funktion im übrigen nur dann noch unendlich werden kann, und bei nicht spezieller Lage des Punktes z auch stets unendlich wird, wenn der Punkt ε sich einem der Punkte $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ unbegrenzt nähert. Was dagegen die Funktionen $\underset{m}{P}\left|{\varepsilon \atop \alpha_\sigma}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{\varepsilon \atop \infty_\tau}\right|$ betrifft, so können dieselben, wie die Gleichungen ($\mathrm{E}_\alpha.$), ($\mathrm{E}_\infty.$) zeigen, nur dann unendlich werden, wenn der Punkt ε sich einem der Punkte $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ unbegrenzt nähert. Beachtet man nun noch, daß die drei in Rede stehenden Funktionen sich auf Grund der Gleichung (8_1.) von den nach ε genommenen m^{ten} Derivierten der drei Funktionen $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}z\\ \varepsilon\end{matrix}\right|$, $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\ \varepsilon\end{matrix}\right|$, $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\ \varepsilon\end{matrix}\right|$ beziehungsweise nur um einen Zahlenfaktor unterscheiden, und daß eine jede dieser drei Derivierten gegen Null konvergiert, wenn der Punkt ε dem Punkte $\infty_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, q)$ unbegrenzt zustrebt, so erkennt man endlich noch, daß die Funktionen $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|$, $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ \alpha_\sigma\end{matrix}\right|$, $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ \infty_\tau\end{matrix}\right|$ stets gegen Null konvergieren, wenn der Punkt ε irgend einem der Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$ unbegrenzt zustrebt. Das eigentümliche Verhalten der Funktion $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|$ beim Anrücken des Punktes ε gegen einen Punkt α oder einen Punkt ∞ steht im Einklange mit der aus den Gleichungen (8.) sich ergebenden Tatsache, daß die Elementarfunktion $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|$ nicht in die Elementarfunktionen $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\alpha\\ z\end{matrix}\right|$, $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\infty\\ z\end{matrix}\right|$ übergeht, wenn man den Punkt ε dem Punkte α beziehungsweise dem Punkte ∞ unbegrenzt zustreben läßt.

7.

Man lasse jetzt in dem zu Anfang des vorhergehenden Artikels aufgestellten Ausdrucke an Stelle einer jeden der $t+r+q$ Konstanten $\mathfrak{L}_0$ und der p Konstanten $\mathfrak{C}$ die Null treten. Der dadurch entstehende Ausdruck:

$$\begin{aligned} W(z) = & \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\left(\mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)}\,\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{m_\tau}^{(\varepsilon_\tau)}\,\underset{m_\tau}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right|\right) \\ & + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\left(\mathfrak{L}_1^{(\alpha_\varrho)}\,\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{n_\varrho}^{(\alpha_\varrho)}\,\underset{n_\varrho}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|\right) \\ & + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\left(\mathfrak{L}_1^{(\infty_\varkappa)}\,\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{p_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)}\,\underset{p_\varkappa}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|\right) + C, \end{aligned}$$

bei dem $m_1, \cdots, m_t, n_1, \cdots, n_r, p_1, \cdots, p_q$ unbestimmte positive ganze Zahlen bezeichnen, und die Konstanten $\mathfrak{L}$, C keinen Bedingungen unterworfen sind, stellt dann die allgemeinste zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion W dar, welche in je zwei zu einem der Schnitte c, l gehörigen entsprechenden Punkten $\mathscr{P}^+$, $\mathscr{P}^-$ denselben Wert besitzt. Infolgedessen ist die Funktion $W(z)$ schon in der aus T''' durch Aufhebung der Schnitte l entstehenden Fläche T'' einwertig, und es darf daher für die Untersuchung dieser Funktion die Fläche T'' zu Grunde gelegt werden. Noch möge für das Folgende vorausgesetzt werden, daß für $\varrho = 1, 2, \cdots, r$ $n_\varrho > \mu_\varrho$ ist; dadurch wird die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beschränkt, da man von dem Falle, wo $n_\varrho > \mu_\varrho$, also etwa $n_\varrho = \mu_\varrho + g$ ist, zu dem Falle, wo $n_\varrho \overline{<} \mu_\varrho$, also etwa $n_\varrho = \mu_\varrho + 1 - h$ ist, auch dadurch übergehen kann, daß man den Konstanten $\mathfrak{L}^{(a_\varrho)}_{\mu_\varrho+g}$, $\mathfrak{L}^{(a_\varrho)}_{\mu_\varrho+g-1}$, $\cdots$, $\mathfrak{L}^{(a_\varrho)}_{\mu_\varrho+2-h}$ den Wert Null erteilt.

Die definierte Funktion $W(z)$ läßt sich nun auch durch die Derivierte einer zu der Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right)$ gehörigen Funktion W und p ausgezeichnete Funktionen $W(z)$ der hier betrachteten Art linear darstellen. Um diese Darstellung zu erhalten, setze man zunächst voraus, daß keiner der Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ der Begrenzung von T' angehöre, und verstehe unter a einen im Innern von T' gelegenen, von den Punkten ε, α, ∞ verschiedenen Punkt, bilde alsdann das Produkt:

$$\Phi(z) = W(z)\, \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|$$

der Funktion $W(z)$ und der zur Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}\bar{A}\\\bar{B}\end{smallmatrix}\right)$ gehörigen, ebenfalls in T' einwertigen Elementarfunktion $\underset{1}{P}\left|\begin{smallmatrix}a\\z\end{smallmatrix}\right|$ und bestimme den Wert J des in positiver Richtung über die von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c gebildete Begrenzung $\mathfrak{R}$ der Fläche T' zu erstreckenden Integrals $\int \Phi(z)dz$, indem man in derselben Weise vorgeht, wie es im ersten Teile, in Art. 1 des siebenten Abschnittes, zu ähnlichem Zwecke geschehen ist. Man erhält dann für J zunächst die Gleichung:

$$J = \int\limits_{\mathfrak{R}}^{+} \Phi(z)dz = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int\limits_{[a_\nu^+, b_\nu^+, c_\nu^+]}^{+} \left(\Phi(z)^+ - \Phi(z)^-\right)dz,$$

und schließlich, indem man beachtet, daß für $\nu = 1, 2, \cdots, p$, nachdem man noch zur Abkürzung

$$\mathfrak{K}_\nu = \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau} \mathfrak{L}^{(\varepsilon_\tau)}_\lambda \underset{\lambda}{\mathfrak{K}}{}^{(\varepsilon_\tau)}_\nu + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho} \mathfrak{L}^{(a_\varrho)}_\lambda \underset{\lambda}{\mathfrak{K}}{}^{(a_\varrho)}_\nu + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p_\varkappa} \mathfrak{L}^{(\infty_\varkappa)}_\lambda \underset{\lambda}{\mathfrak{K}}{}^{(\infty_\varkappa)}_\nu + C$$

gesetzt hat,

$$\text{längs } a_\nu \left\{ W(z)^+ = A_\nu W(z)^- + (1-A_\nu)\mathfrak{K}_\nu, \quad \underset{1}{\bar{P}}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^+ = \bar{A}_\nu \underset{1}{\bar{P}}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^- - 2(1-\bar{A}_\nu)\frac{dw_\nu|a|}{da},\right.$$

$$\text{längs } b_\nu \left\{ W(z)^+ = B_\nu W(z)^- + (1-B_\nu)\mathfrak{K}_\nu, \quad \underset{1}{\bar{P}}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^+ = \bar{B}_\nu \underset{1}{\bar{P}}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^- - 2(1-\bar{B}_\nu)\frac{dw_\nu|a|}{da},\right.$$

$$\text{längs } c_\nu \left\{ W(z)^+ = \quad W(z)^-, \quad \underset{1}{\bar{P}}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^+ = \quad \underset{1}{\bar{P}}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^-,\right.$$

ist, und daß daher die Werte von $\Phi(z)$ in je zwei zu einem der Schnitte a, b, c gehörigen entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ in der Weise verknüpft sind, daß

$$\text{längs } a_\nu \left\{ \Phi(z)^+ = \Phi(z)^- - 2\frac{dw_\nu|a|}{da}\left(W(z)^+ - W(z)^-\right) + \mathfrak{K}_\nu \left(\underset{1}{\bar{P}}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^+ - \underset{1}{\bar{P}}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^-\right),\right.$$

$$\text{längs } b_\nu \left\{ \Phi(z)^+ = \Phi(z)^- - 2\frac{dw_\nu|a|}{da}\left(W(z)^+ - W(z)^-\right) + \mathfrak{K}_\nu \left(\underset{1}{\bar{P}}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^+ - \underset{1}{\bar{P}}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^-\right),\right.$$

$$\text{längs } c_\nu \left\{ \Phi(z)^+ = \Phi(z)^-\right.$$

ist, die Gleichung:

$$J = -2 \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \frac{dw_\nu|a|}{da} \int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} W(z)\,dz + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{K}_\nu \int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix} a \\ z \end{matrix}\right| dz.$$

Das Integral J ist aber auch gleich der Summe der auf die Punkte $\eta = \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$; $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$; $\infty_1, \cdots, \infty_q$; a sich beziehenden Integrale $\int\limits_{(\eta)}^{+} \Phi(z)dz$ und kann daher auch auf Grund der Gleichung:

$$J = \sum_{\tau=1}^{\tau=t} \int\limits_{(\varepsilon_\tau)}^{+} \Phi(z)\,dz + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \int\limits_{(\alpha_\varrho)}^{+} \Phi(z)\,dz + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \int\limits_{(\infty_\varkappa)}^{+} \Phi(z)\,dz + \int\limits_{(a)}^{+} \Phi(z)\,dz$$

ausgewertet werden. Zu dem Ende hat man das Folgende zu beachten.

1.) Ist ε einer der Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_t$, so gelten für das Gebiet dieses Punktes ε die Entwicklungen (vergl. Art. 6 u. Art. 5):

$$W(z) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \frac{\mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon)}}{z_\varepsilon^\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} c_\lambda^{(\varepsilon)} z_\varepsilon^\lambda, \qquad \underset{1}{P}\left|\begin{matrix} a \\ z \end{matrix}\right| = \frac{d\, \underset{0}{P}\left|\begin{matrix} \varepsilon \\ a \end{matrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda'=1}^{\lambda'=\infty} \frac{1}{\lambda'} \frac{d\, \underset{\lambda'}{P}\left|\begin{matrix} \varepsilon \\ a \end{matrix}\right|}{da} z_\varepsilon^{\lambda'},$$

wobei $z_\varepsilon = z - \varepsilon$ ist, und es tritt daher in der durch Multiplikation dieser Entwicklungen sich ergebenden Entwicklung der Funktion $\Phi(z)$ für das Gebiet des Punktes ε die Potenz z_ε^{-1} mit dem Koeffizienten:

$$\mathfrak{L}_1^{(\varepsilon)} \frac{d\, \underset{0}{P}\left|\begin{matrix} \varepsilon \\ a \end{matrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m-1} \frac{1}{\lambda} \mathfrak{L}_{\lambda+1}^{(\varepsilon)} \frac{d\, \underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix} \varepsilon \\ a \end{matrix}\right|}{da}$$

auf. Dieses Glied ist wegen $dz = dz_\varepsilon$ das einzige, welches bei der Auswertung des auf den Punkt ε sich beziehenden Integrals in Betracht kommt, und man erhält dementsprechend:

$$\int\limits_{(\varepsilon)}^{+} \Phi(z)\,dz = 2\pi i \left\{ \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon)} \frac{d\, \underset{0}{P}\left|\begin{matrix} \varepsilon \\ a \end{matrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m-1} \frac{1}{\lambda} \mathfrak{L}_{\lambda+1}^{(\varepsilon)} \frac{d\, \underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix} \varepsilon \\ a \end{matrix}\right|}{da} \right\}.$$

2.) Ist α einer der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, so gelten für das Gebiet dieses Punktes α die Entwicklungen (vergl. Art. 6 u. Art. 5):

$$W(z) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha)}}{z_\alpha^\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} c_\lambda^{(\alpha)} z_\alpha^\lambda, \qquad \underset{1}{P}\left|\begin{matrix} a \\ z \end{matrix}\right| = \frac{d\, \underset{0}{P}\left|\begin{matrix} \alpha \\ a \end{matrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda'=1}^{\lambda'=\infty} \frac{1}{\lambda'} \frac{d\, \underset{\lambda'}{P}\left|\begin{matrix} \alpha \\ a \end{matrix}\right|}{da} z_\alpha^{\lambda'},$$

wobei $z_\alpha = (z-\alpha)^{\frac{1}{\mu}}$ ist, und es tritt daher in der durch Multiplikation dieser Entwicklungen sich ergebenden Entwicklung der Funktion $\Phi(z)$ für das Gebiet des Punktes α die Potenz $z_\alpha^{-\mu}$ mit dem Koeffizienten:

$$\mathfrak{L}_\mu^{(\alpha)} \frac{d\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\alpha\\ a\end{matrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-\mu} \frac{1}{\lambda}\, \mathfrak{L}_{\lambda+\mu}^{(\alpha)} \frac{d\,\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha\\ a\end{matrix}\right|}{da}$$

auf. Dieses Glied ist wegen $dz = \mu z_\alpha^{\mu-1} dz_\alpha$ das einzige, welches bei der Auswertung des auf den Punkt α sich beziehenden Integrals in Betracht kommt, und man erhält dementsprechend:

$$\int\limits_{(\alpha)}^{+} \Phi(z)\,dz = 2\pi i \left\{ \mu\, \mathfrak{L}_\mu^{(\alpha)} \frac{d\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\alpha\\ a\end{matrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-\mu} \frac{\mu}{\lambda}\, \mathfrak{L}_{\lambda+\mu}^{(\alpha)} \frac{d\,\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha\\ a\end{matrix}\right|}{da} \right\}.$$

3.) Ist ∞ einer der Punkte $\infty_1, \infty_2, \cdots, \infty_q$, so gelten für das Gebiet dieses Punktes ∞ die Entwicklungen (vergl. Art. 6 u. Art. 5):

$$W(z) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} \frac{\mathfrak{L}_\lambda^{(\infty)}}{z_\infty^\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} c_\lambda^{(\infty)} z_\infty^\lambda, \qquad \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}a\\ z\end{matrix}\right| = \frac{d\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\infty\\ a\end{matrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda'=1}^{\lambda'=\infty} \frac{1}{\lambda'} \frac{d\,\underset{\lambda'}{P}\left|\begin{matrix}\infty\\ a\end{matrix}\right|}{da} z_\infty^{\lambda'},$$

wobei $z_\infty = z^{-\frac{1}{\iota}}$ ist, und es tritt daher in der durch Multiplikation dieser Entwicklungen sich ergebenden Entwicklung der Funktion $\Phi(z)$ für das Gebiet des Punktes ∞ die Potenz z_∞^ι mit dem Koeffizienten:

$$c_\iota^{(\infty)} \frac{d\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\infty\\ a\end{matrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota} \frac{1}{\lambda}\, c_{\iota-\lambda}^{(\infty)} \frac{d\,\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\infty\\ a\end{matrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda=\iota+1}^{\lambda=\iota+p} \frac{1}{\lambda}\, \mathfrak{L}_{\lambda-\iota}^{(\infty)} \frac{d\,\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\infty\\ a\end{matrix}\right|}{da}$$

auf. Dieses Glied ist wegen $dz = -\iota z_\infty^{-\iota-1} dz_\infty$ das einzige, welches bei der Auswertung des auf den Punkt ∞ sich beziehenden Integrals in Betracht kommt, und man erhält dementsprechend:

$$\int\limits_{(\infty)}^{+} \Phi(z)\,dz = -2\pi i \left\{ \iota\, c_\iota^{(\infty)} \frac{d\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\infty\\ a\end{matrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota} \frac{\iota}{\lambda}\, c_{\iota-\lambda}^{(\infty)} \frac{d\,\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\infty\\ a\end{matrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda=\iota+1}^{\lambda=\iota+p} \frac{\iota}{\lambda}\, \mathfrak{L}_{\lambda-\iota}^{(\infty)} \frac{d\,\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\infty\\ a\end{matrix}\right|}{da} \right\}.$$

4.) Für das Gebiet des Punktes a endlich gelten die Entwicklungen:

$$W(z) = W(a) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} c_\lambda^{(a)} z_a^\lambda, \qquad \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}a\\ z\end{matrix}\right| = \frac{1}{z_a} + \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} \bar{c}_{\lambda'}^{(a)} z_a^{\lambda'},$$

wobei $z_a = z - a$ ist, während die c, $\bar{c}$ von z freie Konstanten bezeichnen, und es tritt daher in der durch Multiplikation dieser Entwicklungen sich ergebenden Entwicklung der Funktion $\Phi(z)$ für das Gebiet des Punktes a die Potenz z_a^{-1} mit dem Koeffizienten $W(a)$ auf. Dieses Glied ist wegen $dz = dz_a$ das einzige, welches bei der Auswertung des auf den Punkt a sich beziehenden Integrals in Betracht kommt, und man erhält dementsprechend:

$$\int\limits_{(a)}^{+} \Phi(z)\,dz = 2\pi i\, W(a).$$

Unter Benutzung der vier im vorstehenden gewonnenen Resultate erhält man jetzt aus der oben für J aufgestellten neuen Gleichung die Gleichung:

$$\begin{aligned}
J = \; & 2\pi i \sum_{\tau=1}^{\tau=t}{}' \left\{ \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)} \frac{d\, P\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_\tau\\ a\end{smallmatrix}\right|_0}{da} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau-1}{}' \frac{1}{\lambda}\,\mathfrak{L}_{\lambda+1}^{(\varepsilon_\tau)} \frac{d\, P\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_\tau\\ a\end{smallmatrix}\right|_\lambda}{da} \right\} \\
& + 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}{}' \left\{ \mu_\varrho \mathfrak{L}_{\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} \frac{d\, P\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ a\end{smallmatrix}\right|_0}{da} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho-\mu_\varrho}{}' \frac{\mu_\varrho}{\lambda}\,\mathfrak{L}_{\lambda+\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} \frac{d\, P\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ a\end{smallmatrix}\right|_\lambda}{da} \right\} \\
& - 2\pi i \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}{}' \left\{ \iota_\varkappa c_{\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)} \frac{d\, P\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ a\end{smallmatrix}\right|_0}{da} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota_\varkappa}{}' \frac{\iota_\varkappa}{\lambda}\, c_{\iota_\varkappa-\lambda}^{(\infty_\varkappa)} \frac{d\, P\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ a\end{smallmatrix}\right|_\lambda}{da} + \sum_{\lambda=\iota_\varkappa+1}^{\lambda=\iota_\varkappa+p_\varkappa}{}' \frac{\iota_\varkappa}{\lambda}\,\mathfrak{L}_{\lambda-\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)} \frac{d\, P\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ a\end{smallmatrix}\right|_\lambda}{da} \right\} \\
& + 2\pi i\, W(a).
\end{aligned}$$

Setzt man nun die beiden für J erhaltenen Ausdrücke einander gleich, läßt bei der entstehenden Gleichung in neuer Bezeichnung zunächst an Stelle des Buchstabens z den Buchstaben ζ, hierauf an Stelle des Buchstabens a den Buchstaben z treten und löst alsdann die Gleichung nach $W(z)$ auf, so erhält man für die Funktion $W(z)$ die für jeden von den Punkten ε, α, ∞ verschiedenen inneren Punkt z der Fläche T'' geltende Darstellung:

$$\begin{aligned}
W(z) = & - \sum_{\tau=1}^{\tau=t}{}' \left\{ \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)} \frac{d\, P\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|_0}{dz} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau-1}{}' \frac{1}{\lambda}\,\mathfrak{L}_{\lambda+1}^{(\varepsilon_\tau)} \frac{d\, P\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|_\lambda}{dz} \right\} \\
& - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}{}' \left\{ \mu_\varrho \mathfrak{L}_{\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} \frac{d\, P\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ z\end{smallmatrix}\right|_0}{dz} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho-\mu_\varrho}{}' \frac{\mu_\varrho}{\lambda}\,\mathfrak{L}_{\lambda+\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} \frac{d\, P\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ z\end{smallmatrix}\right|_\lambda}{dz} \right\} \\
& + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}{}' \left\{ \iota_\varkappa c_{\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)} \frac{d\, P\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|_0}{dz} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota_\varkappa}{}' \frac{\iota_\varkappa}{\lambda}\, c_{\iota_\varkappa-\lambda}^{(\infty_\varkappa)} \frac{d\, P\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|_\lambda}{dz} + \sum_{\lambda=\iota_\varkappa+1}^{\lambda=\iota_\varkappa+p_\varkappa}{}' \frac{\iota_\varkappa}{\lambda}\,\mathfrak{L}_{\lambda-\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)} \frac{d\, P\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|_\lambda}{dz} \right\} \\
& - \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=p}{}' \frac{d\, w_\nu|z}{dz} \int\limits_{[a_\nu^\pm,\, b_\nu^\pm]}^{+} W(\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=p}{}' \mathfrak{K}_\nu \int\limits_{[a_\nu^\pm,\, b_\nu^\pm]}^{+} \bar{P}\left|\begin{smallmatrix} z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right|_1 d\zeta.
\end{aligned}$$

Die hierbei auftretenden Konstanten $c_0^{(\infty_\varkappa)}, c_1^{(\infty_\varkappa)}, \cdots, c_{\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)}$ sind, wie aus 3.) erhellt, die Koeffizienten, welche in der Entwicklung der Funktion $W(z)$ für das Gebiet des Punktes $\infty_\varkappa$ den Potenzen $z_{\infty_\varkappa}^0, z_{\infty_\varkappa}^1, \cdots, z_{\infty_\varkappa}^{\iota_\varkappa}$ beziehungsweise zukommen. Nach der zu Anfang der

Untersuchung gemachten, auf den Übergang von dem der Ableitung der Formel zu Grunde gelegten Falle $n_\varrho > \mu_\varrho$ $(\varrho = 1, 2, \cdots, r)$ zu dem Falle $n_\varrho \gtreqless \mu_\varrho$ sich beziehenden Bemerkung sind bei dem zu einem bestimmten Index ϱ gehörigen Gliede der auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung in der zweiten Zeile stehenden Summe, wenn $n_\varrho = \mu_\varrho$ ist, alle Terme bis auf den ersten, wenn dagegen $n_\varrho < \mu_\varrho$ ist, alle Terme überhaupt zu unterdrücken, sodaß also für $n_\varrho < \mu_\varrho$ das ganze Glied in Wegfall kommt.

Die auf der rechten Seite der für $W(z)$ gewonnenen Gleichung vorkommenden, über die beiden Seiten der Schnitte a_ν, b_ν zu erstreckenden Integrale sollen jetzt unter der, für die Herleitung dieser Gleichung gemachten, Voraussetzung, daß die Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ sowie der zu Anfang mit a bezeichnete Punkt z im Innern der Fläche T'' liegen, näher untersucht werden. Eine für diese Untersuchung nötige Hilfsformel möge zunächst abgeleitet werden.

Man beziehe die für jeden Punkt z der Fläche T'' geltende Formel (E_z.) des vorhergehenden Artikels auf einen Begrenzungspunkt $z = \zeta$, multipliziere alsdann linke und rechte Seite mit $d\zeta$ und integriere in positiver Richtung über die beiden Seiten der Schnitte a_ν, b_ν, indem man beachtet, daß für $m = 1, 2, 3, \cdots$

$$\overset{+}{\int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}} \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\zeta\\ \varepsilon\end{matrix}\right| d\zeta = \frac{1}{(m-1)!} \overset{+}{\int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}} \frac{d^m \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ \zeta\end{matrix}\right|}{d\zeta^m}\, d\zeta$$

ist, und daß sich als Wert des hier rechts stehenden Integrals für $m = 1$ die der Funktion $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|$ längs c_ν zukommende Konstante $\mathfrak{C}_\nu = -\frac{2\pi i}{p}$, für $m = 2, 3, \cdots$ die der Funktion $\frac{d^{m-1} \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|}{dz^{m-1}}$ längs c_ν zukommende Konstante $\mathfrak{C}_\nu = 0$ ergibt, daß also der Wert des links stehenden Integrals für $m = 1, 2, 3, \cdots$ durch $-\delta_{m1}\frac{2\pi i}{p}$ dargestellt werden kann, wenn man unter δ_{m1} eine Größe versteht, die für $m = 1$ den Wert 1, für $m = 2, 3, \cdots$ den Wert 0 besitzt. Man erhält dann die erwähnte, für jeden von den Punkten α, ∞ verschiedenen inneren Punkt ε der Fläche T'' geltende Hilfsformel:

$$\text{(II.)} \qquad \overset{+}{\int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}} \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ \zeta\end{matrix}\right| d\zeta = \delta_{m1}\frac{2\pi i}{p} + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\varrho-1} \frac{\left(\frac{m\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle| m\right)}{m\mu_\varrho-\lambda}\left(\overset{+}{\int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}} \underset{m\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{matrix}\right| d\zeta\right) \underset{\lambda}{\bar{P}}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \varepsilon\end{matrix}\right|.$$

Was nun das an erster Stelle zu untersuchende, nur von den Punkten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ abhängige, Integral $\overset{+}{\int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}} W(\zeta)\, d\zeta$ $(\nu = 1, 2, \cdots, p)$ betrifft, so erhält man für dasselbe, wenn man die darin vorkommende Größe $W(\zeta)$ auf Grund der zu Anfang dieses Artikels aufgestellten, die Funktion $W(z)$ für jeden Punkt z der Fläche T'' definierenden Gleichung durch den ihr entsprechenden Ausdruck ersetzt, zunächst die Gleichung:

$$(1.)\quad \int\limits_{[a_\nu^\pm,\, b_\nu^\pm]}^{+} W(\zeta)\,d\zeta = \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\sum_{m=1}^{m=m_\tau} \mathfrak{L}_m^{(\varepsilon_\tau)} \int\limits_{[a_\nu^\pm,\, b_\nu^\pm]}^{+} P_m\left|{\varepsilon_\tau \atop \zeta}\right| d\zeta + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{m=1}^{m=n_\varrho} \mathfrak{L}_m^{(\alpha_\varrho)} \int\limits_{[a_\nu^\pm,\, b_\nu^\pm]}^{+} P_m\left|{\alpha_\varrho \atop \zeta}\right| d\zeta + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{m=1}^{m=p_\varkappa} \mathfrak{L}_m^{(\infty_\varkappa)} \int\limits_{[a_\nu^\pm,\, b_\nu^\pm]}^{+} P_m\left|{\infty_\varkappa \atop \zeta}\right| d\zeta$$

und schließlich, wenn man das auf der rechten Seite an erster Stelle stehende Integral auf Grund der Hilfsformel (II.) durch Elementarfunktionen mit dem Argumente ε_τ darstellt, die Gleichung:

$$(2.)\qquad \int\limits_{[a_\nu^\pm,\, b_\nu^\pm]}^{+} W(\zeta)\,d\zeta = K_\nu^{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)},$$

wobei zur Abkürzung

$$(3.)\quad \begin{aligned} K_\nu^{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)} = {} & \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\sum_{m=1}^{m=m_\tau}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\varrho-1} \frac{\mathfrak{L}_m^{(\varepsilon_\tau)}}{(m-1)!}\, \frac{\left(\dfrac{m\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle| m\right)}{m\mu_\varrho-\lambda} \Bigg(\int\limits_{[a_\nu^\pm,\, b_\nu^\pm]}^{+} P_{m\mu_\varrho-\lambda}\left|{\alpha_\varrho \atop \zeta}\right| d\zeta\Bigg) P_\lambda\left|{\alpha_\varrho \atop \varepsilon_\tau}\right| \\ & + \frac{2\pi i}{p}\sum_{\tau=1}^{\tau=t}\mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{m=1}^{m=n_\varrho} \mathfrak{L}_m^{(\alpha_\varrho)} \int\limits_{[a_\nu^\pm,\, b_\nu^\pm]}^{+} P_m\left|{\alpha_\varrho \atop \zeta}\right| d\zeta + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{m=1}^{m=p_\varkappa} \mathfrak{L}_m^{(\infty_\varkappa)} \int\limits_{[a_\nu^\pm,\, b_\nu^\pm]}^{+} P_m\left|{\infty_\varkappa \atop \zeta}\right| d\zeta \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Das an zweiter Stelle zu untersuchende, nur von dem Punkte z abhängige, Integral $\int\limits_{[a_\sigma^\pm,\, b_\sigma^\pm]}^{+} P_1\left|{z \atop \zeta}\right| d\zeta$ $(\sigma=1,2,\cdots,p)$ läßt sich durch Elementarfunktionen mit dem Argumente z darstellen. Um diese Darstellung zu erhalten, lasse man in der Hilfsformel (II.) an Stelle des Punktes ε den Punkt z, an Stelle des Buchstaben ν den Buchstaben σ treten, setze alsdann $m=1$ und vertausche endlich durchweg die Zeichen P, P. Man gewinnt auf diese Weise die Gleichung:

$$(1'.)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{[a_\sigma^\pm,\, b_\sigma^\pm]}^{+} P_1\left|{z \atop \zeta}\right| d\zeta = W^{(\sigma)}(z),$$

wobei zur Abkürzung

$$(2'.)\qquad W^{(\sigma)}(z) = \frac{1}{p} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu_\varrho-1}\frac{1}{\mu_\varrho}\Bigg(\int\limits_{[a_\sigma^\pm,\, b_\sigma^\pm]}^{+} P_{\mu_\varrho-\lambda}\left|{\alpha_\varrho \atop \zeta}\right| d\zeta\Bigg) P_\lambda\left|{\alpha_\varrho \atop z}\right|$$

gesetzt ist. Die durch die letzte Gleichung für jeden Punkt z der Fläche T'' definierte Funktion $W^{(\sigma)}(z)$ ist eine zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion $W(z)$ von der in diesem Artikel betrachteten Art, die nur für die Punkte $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ unstetig und zwar algebraisch unendlich wird, und deren Werte in je zwei zu einem der Schnitte a, b, c gehörigen entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-$ in der Weise verknüpft sind, daß

$$(3'.)\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \{\; W^{(\sigma)}(z)^+ = A_\nu W^{(\sigma)}(z)^- + (1-A_\nu)\,\mathfrak{K}_\nu^{(\sigma)}, \\ &\text{längs } b_\nu \{\; W^{(\sigma)}(z)^+ = B_\nu W^{(\sigma)}(z)^- + (1-B_\nu)\,\mathfrak{K}_\nu^{(\sigma)}, \\ &\text{längs } c_\nu \{\; W^{(\sigma)}(z)^+ = W^{(\sigma)}(z)^-, \end{aligned} \qquad {\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p,}$$

ist, wobei zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_\nu^{(\sigma)} &= \frac{1}{p} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu_\varrho-1} \frac{1}{\mu_\varrho} \Bigg(\int\limits_{[a_\sigma^\pm,\, b_\sigma^\pm]}^{+} \underset{\mu_\varrho-\lambda}{P} \left| {\alpha_\varrho \atop \zeta} \right| d\zeta \Bigg) \underset{\lambda}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\alpha_\varrho)} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{[a_\sigma^\pm,\, b_\sigma^\pm]}^{+} \left\{ \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu_\varrho-1} \frac{1}{\mu_\varrho} \underset{\lambda}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\alpha_\varrho)} \underset{\mu_\varrho-\lambda}{\bar{P}} \left| {\alpha_\varrho \atop \zeta} \right| \right\} d\zeta \end{aligned}$$

gesetzt ist. Das in der letzten Zeile stehende Integral kann ausgewertet werden, indem man die zwischen den geschweiften Klammern stehende Größe auf Grund der Formel:

$$\frac{d\bar{w}_\nu|\zeta|}{d\zeta} = -\frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu_\varrho-1} \frac{1}{\mu_\varrho} \underset{\lambda}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\alpha_\varrho)} \underset{\mu_\varrho-\lambda}{\bar{P}} \left| {\alpha_\varrho \atop \zeta} \right|$$

durch die Größe $-2\frac{d\bar{w}_\nu|\zeta|}{d\zeta}$ ersetzt und alsdann die Integration ausführt; man erhält so für das Integral den Wert $-2(1-\delta_{\nu\sigma}p)\frac{\pi i}{p}$ und erkennt nun schließlich, daß

$$(4'.)\qquad \mathfrak{K}_\nu^{(\sigma)} = \delta_{\nu\sigma}$$

ist, daß also $\mathfrak{K}_\nu^{(\sigma)}$ nur dann einen von Null verschiedenen Wert und zwar den Wert 1 besitzt, wenn $\nu = \sigma$ ist. Die soeben aufgestellte, bei der Auswertung des Integrals benutzte Formel geht aus der Formel (D_1.) des Art. 6 hervor, indem man bei dieser an Stelle der Zeichen w, $\bar{\mathfrak{K}}$, P die Zeichen $\bar{w}$, $\mathfrak{K}$, $\bar{P}$ treten läßt, alsdann $n = 1$, $\tau = \nu$, $z = \zeta$ setzt und endlich noch an Stelle des Summationsbuchstabens λ einen neuen Summationsbuchstaben λ' vermittels der Gleichung $\lambda = \mu_\varrho - \lambda'$ einführt.

Mit Hilfe der Gleichungen (2.) und (1'.) kann man jetzt der vorher für $W(z)$ gewonnenen Gleichung die Gestalt:

$$(\text{D}.)\qquad W(z) = \frac{dW^*(z)}{dz} + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{K}_\nu W^{(\nu)}(z)$$

geben, wobei $W^*(z)$ durch die Gleichung:

$$W^*(z) = -\sum_{\tau=1}^{\tau=t}\left\{ \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)} \underset{0}{P}\begin{vmatrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{vmatrix} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau-1} \frac{1}{\lambda}\,\mathfrak{L}_{\lambda+1}^{(\varepsilon_\tau)} \underset{\lambda}{P}\begin{vmatrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{vmatrix}\right\}$$

$$-\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\left\{\mu_\varrho\,\mathfrak{L}_{\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} \underset{0}{P}\begin{vmatrix}\alpha_\varrho\\ z\end{vmatrix} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho-\mu_\varrho} \frac{\mu_\varrho}{\lambda}\,\mathfrak{L}_{\lambda+\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} \underset{\lambda}{P}\begin{vmatrix}\alpha_\varrho\\ z\end{vmatrix}\right\}$$

$$+\sum_{\kappa=1}^{\kappa=q}\left\{ \iota_\kappa\, C_{\iota_\kappa}^{(\infty_\kappa)} \underset{0}{P}\begin{vmatrix}\infty_\kappa\\ z\end{vmatrix} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota_\kappa} \frac{\iota_\kappa}{\lambda}\, C_{\iota_\kappa-\lambda}^{(\infty_\kappa)} \underset{\lambda}{P}\begin{vmatrix}\infty_\kappa\\ z\end{vmatrix} + \sum_{\lambda=\iota_\kappa+1}^{\lambda=\iota_\kappa+p_\kappa} \frac{\iota_\kappa}{\lambda}\,\mathfrak{L}_{\lambda-\iota_\kappa}^{(\infty_\kappa)} \underset{\lambda}{P}\begin{vmatrix}\infty_\kappa\\ z\end{vmatrix}\right\}$$

$$-\frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p} K_\nu^{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)}\, w_\nu|z|$$

— bei der $K_\nu^{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)}$ die unter (3.) definierte Größe bezeichnet — $W^{(\nu)}(z)$ $(\nu = 1, 2, \cdots, p)$ durch die Gleichung:

$$W^{(\nu)}(z) = \frac{1}{p} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu_\varrho-1} \frac{1}{\mu_\varrho}\left(\int_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} \underset{\mu_\varrho-\lambda}{P}\begin{vmatrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{vmatrix} d\zeta\right) \underset{\lambda}{P}\begin{vmatrix}\alpha_\varrho\\ z\end{vmatrix},$$

endlich $\mathfrak{K}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots, p)$ durch die schon früher aufgestellte Gleichung:

$$\mathfrak{K}_\nu = \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau} \mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)}\, \underset{\lambda}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\varepsilon_\tau)} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho} \mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)}\, \underset{\lambda}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\alpha_\varrho)} + \sum_{\kappa=1}^{\kappa=q}\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p_\kappa} \mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\kappa)}\, \underset{\lambda}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\infty_\kappa)} + C$$

bestimmt ist. Trotzdem die Gleichung (D.), zur Vereinfachung der Untersuchung, nur für den Fall abgeleitet worden ist, daß die Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ sowie der Punkt z im Innern der Fläche T'' liegen, gilt sie auch noch, wenn die genannten Punkte teilweise oder sämtlich der Begrenzung von T' angehören. Unter der, die Allgemeinheit der Untersuchung nur scheinbar beschränkenden, Voraussetzung, daß die unbestimmten Konstanten $\mathfrak{L}^{(\varepsilon_\tau)}$ $(\tau = 1, 2, \cdots, t)$ durch eine Lagenänderung der Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_t$ nicht beeinflußt werden, ändert sich nämlich der Wert des Ausdruckes:

$$W(z) - \frac{dW^*(z)}{dz} - \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{K}_\nu\, W^{(\nu)}(z),$$

bei dem $W(z)$ die zu Anfang dieses Artikels aufgestellte lineare Verbindung von Elementarfunktionen vertritt, als Funktion der $t+1$ in T'' frei beweglichen Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t, z$ betrachtet, stetig, wenn einer dieser Punkte durch stetige Bewegung in einen Punkt der Begrenzung von T'' übergeht, und es kann daher der in Rede stehende Ausdruck, da er der Gleichung (D.) gemäß immer den Wert Null besitzt, wenn die genannten Punkte im Innern der Fläche T'' liegen, nicht einen von Null verschiedenen Wert haben, wenn diese Punkte teilweise oder sämtlich der Begrenzung von T'' angehören.

Aus der so für jede Lage der Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t, z$ als richtig bewiesenen Gleichung (D.) erkennt man nun schließlich, daß die allgemeinste zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion $W(z)$, welche in je zwei zu einem der Schnitte c, l gehörigen entsprechenden Punkten $\mathcal{S}^+, \mathcal{S}^-$ denselben Wert besitzt, sich, entsprechend der zu Anfang des Artikels aufgestellten Behauptung, durch die Derivierte einer zu derselben Charakteristik gehörigen Funktion W, eben der Funktion $W^*(z)$, und die p ausgezeichneten, mit der Funktion $W(z)$ gleichartigen Funktionen $W^{(1)}(z), \cdots, W^{(p)}(z)$ linear darstellen läßt. Dabei ist noch besonders hervorzuheben, daß diese p ausgezeichneten Funktionen $W^{(1)}(z), \cdots, W^{(p)}(z)$ durchaus selbständige, von der darzustellenden Funktion $W(z)$ unabhängige Gebilde sind, während andererseits die Funktion $W^*(z)$ in engster Beziehung zu der Funktion $W(z)$ steht.

Läßt man in der zu Anfang dieses Artikels aufgestellten, die Funktion $W(z)$ definierenden Gleichung und dementsprechend auch in der Gleichung (D.) die Größen $\mathfrak{L}$ sämtlich mit der Null zusammenfallen und setzt zudem noch $C = 1$, so wird $W(z) = 1$ und zugleich reduziert sich die Gleichung (D.) auf die Gleichung:

$$1 = \frac{d}{dz}\left\{\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} P\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa \\ z\end{matrix}\right|_{t_\varkappa}\right\} + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} W^{(\nu)}(z).$$

Zum Schlusse dieses Artikels sollen jetzt noch kurz diejenigen speziellen zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktionen W betrachtet werden, deren Werte in je zwei entsprechenden Punkten $\mathcal{S}^+, \mathcal{S}^-$ der Begrenzung von T'' in der Weise verknüpft sind, daß

$$\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \{ W^+ = A_\nu W^-, \\
&\text{längs } b_\nu \{ W^+ = B_\nu W^-, \qquad\qquad \nu=1,2,\cdots,p, \\
&\text{längs } c_\nu \{ W^+ = W^-, \\
&\text{längs } l_\sigma \{ W^+ = W^-, \qquad\qquad \sigma=1,2,\cdots,s,
\end{aligned}$$

ist. Eine jede solche Funktion W möge eine zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige F-Funktion genannt und mit $F(z)$ bezeichnet werden. Dieser Definition zufolge ist die Gesamtheit der zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen F-Funktionen identisch mit der Gesamtheit derjenigen Funktionen $W(z)$ von der zu Anfang dieses Artikels definierten Art, bei denen die das Verhalten an den Schnitten a, b bestimmenden Konstanten $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_p$ sämtlich den Wert Null besitzen.

Die Derivierte $\frac{dW}{dz}$ einer jeden zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktion W ist, wie aus den zu Anfang des Art. 6 angestellten Untersuchungen hervorgeht, eine zu derselben Charakteristik gehörige F-Funktion. Daß aber auch umgekehrt eine jede zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige F-Funktion sich mit der Derivierten einer zu derselben Charakteristik gehörigen Funktion W deckt, erkennt man, wenn man beachtet, daß die vorher gewonnene Gleichung (D.) sich für eine Funktion $W(z) = F(z)$ auf die Gleichung

$$(\mathrm{D}'.)\qquad F(z) = \frac{dW^*(z)}{dz}$$

reduziert. Die Gesamtheit der zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen F-Funktionen ist also auch identisch mit der Gesamtheit der Derivierten $\frac{dW}{dz}$ der zu derselben Charakteristik gehörigen Funktionen W.

Aus dem soeben gewonnenen Resultate folgt nun schließlich noch, daß das mit einer Funktion $F(z)$ gebildete, von einem Punkte z_0 bis zu einem Punkte z über eine ganz im Innern der Fläche T'' verlaufende Kurve erstreckte Integral $\int_{z_0}^{z} F(z)dz$ eine zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion W ist, und daß diese Funktion W, nachdem man $F(z)$ durch Elementarfunktionen ausgedrückt und zu dem so erhaltenen Ausdrucke $W(z)$ von der zu Anfang dieses Artikels definierten Art den ihm entsprechenden Ausdruck $W^*(z)$ gebildet hat, durch die Gleichung:

$$(\mathrm{D}''.)\qquad \int_{z_0}^{z} F(z)dz = W^*(z) - W^*(z_0)$$

geliefert wird.

Auf die Theorie der zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen F-Funktionen soll ausführlicher erst im sechsten Abschnitt eingegangen werden.

8.

Der zu Anfang des Art. 6 aufgestellte Ausdruck:

$$\begin{aligned} W(z) = {} & \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\left(\mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)}\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)}\,\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{m_\tau}^{(\varepsilon_\tau)}\,\underset{m_\tau}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right|\right) \\ & + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\left(\mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)}\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_1^{(\alpha_\varrho)}\,\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{n_\varrho}^{(\alpha_\varrho)}\,\underset{n_\varrho}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|\right) \\ & + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\left(\mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)}\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_1^{(\infty_\varkappa)}\,\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{p_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)}\,\underset{p_\varkappa}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|\right) - \frac{1}{\pi i}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p}\mathfrak{C}_\sigma w_\sigma\big|z\big| + C, \end{aligned}$$

bei dem $m_1, \cdots, m_t, n_1, \cdots, n_r, p_1, \cdots, p_q$ unbestimmte positive ganze Zahlen, die Buchstaben $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{C}$, C unbestimmte, nur der Bedingung:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{C}_\nu + 2\pi i \left(\sum_{\tau=1}^{\tau=t} \mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)} \right) = 0$$

unterworfene Konstanten bezeichnen, stellt die allgemeinste zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion W dar. Auf Grund des im vorhergehenden Artikel gewonnenen Resultats ist man jetzt imstande, das mit dieser Funktion $W(z)$ gebildete, von einem Punkte z_0 bis zu einem Punkte z über eine ganz im Innern der Fläche T''' verlaufende Kurve erstreckte Integral $\int\limits_{z_0}^{z} W(z)dz$ durch das Produkt $z\,W(z)$ und Elementarfunktionen linear darzustellen. Man braucht dazu nur auf das Integral das Verfahren der teilweisen Integration anzuwenden und in der so sich ergebenden Gleichung:

$$\int\limits_{z_0}^{z} W(z)\,dz = z\,W(z) - z_0\,W(z_0) - \int\limits_{z_0}^{z} z\frac{dW(z)}{dz}\,dz$$

das rechtsstehende, auf die zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige F-Funktion $z\frac{dW(z)}{dz}$ sich beziehende Integral mit Hilfe der Formel (D″.) des vorhergehenden Artikels durch Elementarfunktionen auszudrücken.

Nach den zu Anfang des Art. 6 angestellten Untersuchungen besteht

1.) für das Gebiet des Punktes ε_τ $(\tau=1,2,\cdots,t)$ die Gleichung:

$$\frac{dW(z)}{dz} = -\frac{\mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)}}{z-\varepsilon_\tau} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau} \frac{\lambda\,\mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)}}{(z-\varepsilon_\tau)^{\lambda+1}} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \lambda\,c_\lambda^{(\varepsilon_\tau)}(z-\varepsilon_\tau)^{\lambda-1},$$

und damit auch, da $z\frac{dW(z)}{dz} = \varepsilon_\tau\frac{dW(z)}{dz} + (z-\varepsilon_\tau)\frac{dW(z)}{dz}$ ist, die Gleichung:

$$z\frac{dW(z)}{dz} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau+1} \frac{\mathfrak{L}_\lambda'^{(\varepsilon_\tau)}}{(z-\varepsilon_\tau)^\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} c_\lambda'^{(\varepsilon_\tau)}(z-\varepsilon_\tau)^\lambda,$$

wobei

$$\mathfrak{L}_1'^{(\varepsilon_\tau)} = -\varepsilon_\tau\,\mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)} - \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)}, \qquad \mathfrak{L}_\lambda'^{(\varepsilon_\tau)} = -(\lambda-1)\,\varepsilon_\tau\,\mathfrak{L}_{\lambda-1}^{(\varepsilon_\tau)} - \lambda\,\mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)}, \quad {\scriptstyle \lambda=2,3,\cdots,m_\tau+1},$$

ist, wenn man noch unter $\mathfrak{L}_{m_\tau+1}^{(\varepsilon_\tau)}$ die Null versteht;

2.) für das Gebiet des Punktes α_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots,r)$ die Gleichung:

$$\frac{dW(z)}{dz} = -\frac{\mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)}}{\mu_\varrho(z-\alpha_\varrho)} - \frac{1}{\mu_\varrho}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho} \frac{\lambda\,\mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)}}{(z-\alpha_\varrho)^{\frac{\lambda}{\mu_\varrho}+1}} + \frac{1}{\mu_\varrho}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \lambda\,c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}(z-\alpha_\varrho)^{\frac{\lambda}{\mu_\varrho}-1},$$

und damit auch, da $z\frac{dW(z)}{dz} = \alpha_\varrho \frac{dW(z)}{dz} + (z-\alpha_\varrho)\frac{dW(z)}{dz}$ ist, die Gleichung:

$$z\frac{dW(z)}{dz} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho+\mu_\varrho} \frac{\mathfrak{L}_\lambda'^{(\alpha_\varrho)}}{(z-\alpha_\varrho)^{\frac{\lambda}{\mu_\varrho}}} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} c_\lambda'^{(\alpha_\varrho)} (z-\alpha_\varrho)^{\frac{\lambda}{\mu_\varrho}},$$

wobei

$$\mu_\varrho \mathfrak{L}_{\mu_\varrho}'^{(\alpha_\varrho)} = -\alpha_\varrho \mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)} - \mu_\varrho \mathfrak{L}_{\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)}, \qquad \mu_\varrho \mathfrak{L}_\lambda'^{(\alpha_\varrho)} = -(\lambda-\mu_\varrho)\alpha_\varrho \mathfrak{L}_{\lambda-\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} - \lambda \mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)}, \quad {\scriptstyle \lambda=1,2,\cdots,\mu_\varrho-1,\mu_\varrho+1,\cdots,n_\varrho+\mu_\varrho}$$

ist, wenn man noch jede Größe $\mathfrak{L}_\chi^{(\alpha_\varrho)}$, deren Index χ nicht der Reihe $0, 1, 2, \cdots, n_\varrho$ angehört, als mit der Null identisch ansieht;

3.) für das Gebiet des Punktes $\infty_\varkappa$ ${\scriptstyle (\varkappa=1,2,\cdots,q)}$ die Gleichung:

$$\frac{dW(z)}{dz} = \frac{\mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)}}{\iota_\varkappa z} + \frac{1}{\iota_\varkappa}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p_\varkappa}{}' \lambda \mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\varkappa)} z^{\frac{\lambda}{\iota_\varkappa}-1} - \frac{1}{\iota_\varkappa}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}{}' \frac{\lambda c_\lambda^{(\infty_\varkappa)}}{z^{\frac{\lambda}{\iota_\varkappa}+1}},$$

und damit auch die Gleichung:

$$z\frac{dW(z)}{dz} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p_\varkappa}{}' \mathfrak{L}_\lambda'^{(\infty_\varkappa)} z^{\frac{\lambda}{\iota_\varkappa}} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}{}' \frac{c_\lambda'^{(\infty_\varkappa)}}{z^{\frac{\lambda}{\iota_\varkappa}}},$$

wobei

$$\iota_\varkappa \mathfrak{L}_\lambda'^{(\infty_\varkappa)} = \lambda \mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\varkappa)}, \qquad {\scriptstyle \lambda=1,2,\cdots,p_\varkappa}$$

$$\iota_\varkappa c_0'^{(\infty_\varkappa)} = \mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)}, \qquad \iota_\varkappa c_\lambda'^{(\infty_\varkappa)} = -\lambda c_\lambda^{(\infty_\varkappa)}, \qquad {\scriptstyle \lambda=1,2,3,\cdots}$$

ist;

4.) für das Gebiet des von den Punkten ε, α, ∞ verschiedenen Punktes $z=a$ die Gleichung:

$$\frac{dW(z)}{dz} = c_1^{(a)} + 2c_2^{(a)}(z-a) + 3c_3^{(a)}(z-a)^2 + \cdots,$$

und damit auch, da $z\frac{dW(z)}{dz} = a\frac{dW(z)}{dz} + (z-a)\frac{dW(z)}{dz}$ ist, die Gleichung:

$$z\frac{dW(z)}{dz} = c_0'^{(a)} + c_1'^{(a)}(z-a) + c_2'^{(a)}(z-a)^2 + \cdots,$$

wobei $c_\lambda'^{(a)} = (\lambda+1)a c_{\lambda+1}^{(a)} + \lambda c_\lambda^{(a)}$, ${\scriptstyle \lambda=0,1,2,\cdots}$, ist.

Aus dem so ermittelten Verhalten der zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen F-Funktion $z\frac{dW(z)}{dz}$ ergibt sich nun zunächst, daß

$$\begin{aligned} z\frac{dW(z)}{dz} = {} & \sum_{\tau=1}^{\tau=t}{}' \left\{ \mathfrak{L}_1'^{(\varepsilon_\tau)} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_2'^{(\varepsilon_\tau)} \underset{2}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{m_\tau+1}'^{(\varepsilon_\tau)} \underset{m_\tau+1}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right| \right\} \\ & + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}{}' \left\{ \mathfrak{L}_1'^{(\alpha_\varrho)} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_2'^{(\alpha_\varrho)} \underset{2}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{n_\varrho+\mu_\varrho}'^{(\alpha_\varrho)} \underset{n_\varrho+\mu_\varrho}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| \right\} \\ & + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}{}' \left\{ \mathfrak{L}_1'^{(\infty_\varkappa)} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_2'^{(\infty_\varkappa)} \underset{2}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{p_\varkappa}'^{(\infty_\varkappa)} \underset{p_\varkappa}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right| \right\} + C', \end{aligned}$$

ist, und weiter dann, da der jetzt für $z\dfrac{dW(z)}{dz}$ gewonnene Ausdruck von derselben Art ist, wie der den Untersuchungen des vorhergehenden Artikels zu Grunde gelegte Ausdruck, daß diese F-Funktion sich der Gleichung (D'.) des genannten Artikels gemäß in die Form $\dfrac{dW^*(z)}{dz}$ bringen läßt, wobei dann $W^*(z)$ durch die Gleichung:

$$\begin{aligned}
W^*(z) = & -\sum_{\tau=1}^{\tau=t}\left\{ \mathfrak{L}_1^{\prime(\varepsilon_\tau)} \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau} \frac{1}{\lambda}\mathfrak{L}_{\lambda+1}^{\prime(\varepsilon_\tau)} \underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right|\right\} \\
& -\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\left\{ \mu_\varrho \mathfrak{L}_{\mu_\varrho}^{\prime(\alpha_\varrho)} \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho} \frac{\mu_\varrho}{\lambda}\mathfrak{L}_{\lambda+\mu_\varrho}^{\prime(\alpha_\varrho)} \underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|\right\} \\
& +\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\left\{ \iota_\varkappa\, c_{\iota_\varkappa}^{\prime(\infty_\varkappa)} \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota_\varkappa} \frac{\iota_\varkappa}{\lambda} c_{\iota_\varkappa-\lambda}^{\prime(\infty_\varkappa)} \underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=\iota_\varkappa+1}^{\lambda=\iota_\varkappa+p_\varkappa} \frac{\iota_\varkappa}{\lambda}\mathfrak{L}_{\lambda-\iota_\varkappa}^{\prime(\infty_\varkappa)} \underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|\right\} \\
& -\frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p} K_\nu^{\prime(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)}\, w_\nu|z|
\end{aligned}$$

bestimmt ist. Die hier auftretende Konstante $K_\nu^{\prime(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)}$ wird der Formel (3.) des Art. 7 gemäß durch die Gleichung:

$$\begin{aligned}
K_\nu^{\prime(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)} = & \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\ \sum_{m=1}^{m=m_\tau+1}\ \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\varrho-1} \frac{\mathfrak{L}_m^{\prime(\varepsilon_\tau)}}{(m-1)!}\, \frac{\left(\dfrac{m\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\Big| m\right)}{m\mu_\varrho-\lambda} \left(\int\limits_{[a_\nu^\pm,\, b_\nu^\pm]}^{+} \underset{m\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{matrix}\right| d\zeta\right) \underset{\lambda}{\overline{P}}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \varepsilon_\tau\end{matrix}\right| \\
& + \frac{2\pi i}{p}\sum_{\tau=1}^{\tau=t}\mathfrak{L}_1^{\prime(\varepsilon_\tau)} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\ \sum_{m=1}^{m=n_\varrho+\mu_\varrho} \mathfrak{L}_m^{\prime(\alpha_\varrho)} \int\limits_{[a_\nu^\pm,\, b_\nu^\pm]}^{+} \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{matrix}\right| d\zeta + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\ \sum_{m=1}^{m=p_\varkappa} \mathfrak{L}_m^{\prime(\infty_\varkappa)} \int\limits_{[a_\nu^\pm,\, b_\nu^\pm]}^{+} \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ \zeta\end{matrix}\right| d\zeta
\end{aligned}$$

geliefert, während die Konstanten $\mathfrak{L}'$, c' aus den oben unter 1.), 2.), 3.) aufgestellten Gleichungen:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{L}_1^{\prime(\varepsilon_\tau)} = -\,\varepsilon_\tau \mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)} - \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)}, & \mathfrak{L}_\lambda^{\prime(\varepsilon_\tau)} = -(\lambda-1)\,\varepsilon_\tau\,\mathfrak{L}_{\lambda-1}^{(\varepsilon_\tau)} - \lambda\mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)}, & \lambda=2,3,\cdots,m_\tau+1 \\
\mu_\varrho \mathfrak{L}_{\mu_\varrho}^{\prime(\alpha_\varrho)} = -\,\alpha_\varrho \mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)} - \mu_\varrho \mathfrak{L}_{\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)}, & \mu_\varrho \mathfrak{L}_\lambda^{\prime(\alpha_\varrho)} = -(\lambda-\mu_\varrho)\,\alpha_\varrho \mathfrak{L}_{\lambda-\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} - \lambda\mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)}, & \lambda=1,2,\cdots,\mu_\varrho-1,\mu_\varrho+1,\cdots,n_\varrho+\mu_\varrho \\
 & \iota_\varkappa \mathfrak{L}_\lambda^{\prime(\infty_\varkappa)} = \lambda\mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\varkappa)}, & \lambda=1,2,\cdots,p_\varkappa \\
\iota_\varkappa c_0^{\prime(\infty_\varkappa)} = \mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)}, & \iota_\varkappa c_\lambda^{\prime(\infty_\varkappa)} = -\lambda c_\lambda^{(\infty_\varkappa)}, & \lambda=1,2,\cdots,\iota_\varkappa
\end{array}$$

sich ergeben, wenn man dabei die Größe $\mathfrak{L}_{m_\tau+1}^{(\varepsilon_\tau)}$ und jede Größe $\mathfrak{L}_\chi^{(\alpha_\varrho)}$, deren Index χ nicht der Reihe $0, 1, 2, \cdots, n_\varrho$ angehört, als mit der Null identisch ansieht.

Nachdem so die der Funktion $z\dfrac{dW(z)}{dz}$ entsprechende, mit ihr durch die Gleichung $z\dfrac{dW(z)}{dz} = \dfrac{dW^*(z)}{dz}$ verknüpfte Funktion $W^*(z)$ durch Elementarfunktionen dargestellt ist, gehe man auf die zu Anfang des Artikels aufgestellte Gleichung:

$$\int_{z_0}^{z} W(z)\,dz = z\,W(z) - z_0\,W(z_0) - \int_{z_0}^{z} z\,\frac{d\,W(z)}{dz}\,dz$$

zurück, ersetze in dem auf ihrer rechten Seite stehenden Integrale die Funktion $z\frac{d\,W(z)}{dz}$ durch $\frac{d\,W^*(z)}{dz}$ und führe die vorgeschriebene Integration aus. Man erhält dann schließlich die Gleichung:

$$\int_{z_0}^{z} W(z)dz = z\,W(z) - z_0\,W(z_0) - W^*(z) + W^*(z_0)$$

und damit auch, wenn man noch an Stelle der Funktion $W^*(z)$ den ihr entsprechenden, vorher aufgestellten Ausdruck einführt, die gewünschte Darstellung des Integrals $\int_{z_0}^{z} W(z)dz$ durch das Produkt $z\,W(z)$ und Elementarfunktionen.

Dritter Abschnitt.

Untersuchung der zu einer gemischten Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktionen.

1.

Es bezeichne $\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_p \\ B_1 \cdots B_p \end{pmatrix}$ irgend eine gemischte, also aus eigentlichen und uneigentlichen Faktorenpaaren zusammengesetzte, Charakteristik. Die eigentlichen Faktorenpaare seien A_{λ_1}, B_{λ_1}; $\cdots$; $A_{\lambda_\mathfrak{p}}$, $B_{\lambda_\mathfrak{p}}$, die uneigentlichen $A_{\lambda_{\mathfrak{p}+1}}$, $B_{\lambda_{\mathfrak{p}+1}}$; $\cdots$; A_{λ_p}, B_{λ_p}; dabei bedeutet $\mathfrak{p}$ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, p-1$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ eine den Bedingungen $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_\mathfrak{p}$, $\lambda_{\mathfrak{p}+1} < \lambda_{\mathfrak{p}+2} < \cdots < \lambda_p$ genügende Permutation der Zahlen $1, 2, \cdots, p$. Für die folgenden Untersuchungen möge nun, ausschließlich der einfacheren Schreibweise wegen, der spezielle Fall, wo $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2, \cdots, \lambda_p = p$ ist, zu Grunde gelegt werden; es empfiehlt sich dieses um so mehr, als man, wie am Schlusse dieses Abschnittes ausgeführt werden soll, von den für diesen speziellen Fall erhaltenen Resultaten ohne Mühe zu den dem allgemeinen Falle entsprechenden übergehen kann.

Der eben gemachten Festsetzung gemäß soll also in diesem Abschnitte unter $\binom{A}{B}$ die Charakteristik $\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_\mathfrak{p} & 1 \cdots 1 \\ B_1 \cdots B_\mathfrak{p} & 1 \cdots 1 \end{pmatrix}$, bei der $A_1, B_1; \cdots; A_\mathfrak{p}, B_\mathfrak{p}$ irgend welche eigentliche Faktorenpaare sind, unter $\binom{\bar{A}}{\bar{B}}$ die zu ihr reziproke Charakteristik $\begin{pmatrix} \bar{A}_1 \cdots \bar{A}_\mathfrak{p} & 1 \cdots 1 \\ \bar{B}_1 \cdots \bar{B}_\mathfrak{p} & 1 \cdots 1 \end{pmatrix}$ verstanden werden. Der im ersten Teile gewonnene Fundamentalsatz liefert dann die sämtlichen zu den Charakteristiken $\binom{A}{B}$, $\binom{\bar{A}}{\bar{B}}$ beziehungsweise gehörigen Funktionen W, $\overline{W}$, wenn man — unter Beibehaltung der im ersten Teile, in Art. 1 des siebenten Abschnittes, angewandten Bezeichnungsweise für die zu zwei allgemeinen Funktionen W, $\overline{W}$ gehörigen Konstanten — das eine Mal an Stelle des Systems der $s + m_1 + \cdots + m_s$ Konstanten $\mathfrak{L}$, der $\mathfrak{p}$ Konstanten $\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_\mathfrak{p}$ und der $p - \mathfrak{p}$ Konstanten $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, \mathfrak{A}_p$, das andere Mal an Stelle des Systems der $s + m_1 + \cdots + m_s$ Konstanten $\overline{\mathfrak{L}}$, der $\mathfrak{p}$ Konstanten $\overline{\mathfrak{C}}_1, \cdots, \overline{\mathfrak{C}}_\mathfrak{p}$ und der $p - \mathfrak{p}$ Konstanten $\overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, \overline{\mathfrak{A}}_p$ ein jedes die Gleichungen $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \mathfrak{C}_\nu + 2\pi i \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \overline{\mathfrak{C}}_\nu + 2\pi i \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s} \overline{\mathfrak{L}}_\sigma = 0$ nicht verletzende System von $s + m_1 + \cdots + m_s + p$

Werten treten läßt und zu jeder so erhaltenen Funktion noch eine willkürliche Konstante addiert. Die Konstanten $\mathfrak{C}_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, \mathfrak{C}_p, \overline{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, \overline{\mathfrak{C}}_p$ fallen hier, da für jedes ν aus der Reihe $\mathfrak{p}+1, \cdots, p$ sowohl A_ν, B_ν wie $\bar{A}_\nu, \bar{B}_\nu$ ein uneigentliches Faktorenpaar ist, sämtlich mit der Null zusammen.

Die nächste Aufgabe besteht nun darin, aus den zu den Charakteristiken $\binom{A}{B}, \binom{\bar{A}}{\bar{B}}$ beziehungsweise gehörigen Funktionen gewisse einfachste Funktionen, aus denen die allgemeinsten Funktionen $W, \overline{W}$ sich linear zusammensetzen lassen, und die daher als Elementarfunktionen anzusehen sind, herauszugreifen und die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen mit Hilfe der in Art. 2 des ersten Abschnittes aufgestellten Fundamentalformel (F.) zu ermitteln. Da im vorliegenden Falle $\lambda_1 = 1, \cdots, \lambda_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, $\lambda_{\mathfrak{p}+1} = \mathfrak{p}+1, \cdots, \lambda_p = p$ ist, so tritt, wenn man noch die Größen $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu, \overline{\mathfrak{A}}_\nu, \overline{\mathfrak{B}}_\nu$ für $\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$ in die durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{A}_\nu = \mathcal{A}_\nu \mathfrak{C}_\nu + (1-A_\nu)\mathfrak{K}_\nu, \qquad \overline{\mathfrak{A}}_\nu = \overline{\mathcal{A}}_\nu \overline{\mathfrak{C}}_\nu + (1-\bar{A}_\nu)\overline{\mathfrak{K}}_\nu,$$

$$\mathfrak{B}_\nu = \mathcal{B}_\nu \mathfrak{C}_\nu + (1-B_\nu)\mathfrak{K}_\nu, \qquad \overline{\mathfrak{B}}_\nu = \overline{\mathcal{B}}_\nu \overline{\mathfrak{C}}_\nu + (1-\bar{B}_\nu)\overline{\mathfrak{K}}_\nu$$

bestimmte Form bringt — wobei zur Abkürzung

$$\mathcal{A}_\nu = \frac{1}{D_\nu} + (1-A_\nu)\frac{\bar{A}_\nu B_\nu}{2D_\nu \bar{D}_\nu}, \qquad \overline{\mathcal{A}}_\nu = \frac{1}{\bar{D}_\nu} + (1-\bar{A}_\nu)\frac{A_\nu \bar{B}_\nu}{2D_\nu \bar{D}_\nu},$$

$$\mathcal{B}_\nu = -\frac{1}{D_\nu} + (1-B_\nu)\frac{\bar{A}_\nu B_\nu}{2D_\nu \bar{D}_\nu}, \qquad \overline{\mathcal{B}}_\nu = -\frac{1}{\bar{D}_\nu} + (1-\bar{B}_\nu)\frac{A_\nu \bar{B}_\nu}{2D_\nu \bar{D}_\nu},$$

$$D_\nu = 2 - A_\nu - B_\nu, \qquad \bar{D}_\nu = 2 - \bar{A}_\nu - \bar{B}_\nu$$

gesetzt ist — an Stelle der allgemeinen Fundamentalformel (F.) hier die Formel:

$$(\mathrm{F}_2.) \quad \begin{aligned} \int\limits_{\mathfrak{R}}^{+} W\,d\overline{W} = &\sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} (\overline{\mathfrak{C}}_\nu \mathfrak{K}_\nu - \mathfrak{C}_\nu \overline{\mathfrak{K}}_\nu - \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}_\nu \overline{\mathfrak{C}}_\nu) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \mathfrak{C}_\nu(\overline{\mathfrak{C}}_1 + \overline{\mathfrak{C}}_2 + \cdots + \overline{\mathfrak{C}}_\nu) \\ &+ \sum_{\nu=\mathfrak{p}+1}^{\nu=p} (\mathfrak{A}_\nu \overline{\mathfrak{B}}_\nu - \mathfrak{B}_\nu \overline{\mathfrak{A}}_\nu) \\ &+ 4\pi^2 \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma}(\overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_\sigma} + \overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_{\sigma+1}} + \cdots + \overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_s}) - 2\pi^2 \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma \overline{\mathfrak{L}}_\sigma \\ &- 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} (\mathfrak{L}_\sigma \bar{c}_{\sigma 0} - \overline{\mathfrak{L}}_\sigma c_{\sigma 0}) - 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \sum_{\mu=1}^{\mu=m_\sigma} \mu(\mathfrak{L}_{\sigma\mu}\bar{c}_{\sigma\mu} - \overline{\mathfrak{L}}_{\sigma\mu} c_{\sigma\mu}) = 0. \end{aligned}$$

2.

Der Fundamentalsatz liefert nun zu den Charakteristiken $\binom{A}{B}, \binom{\bar{A}}{\bar{B}}$, wenn man zunächst die Konstanten $\mathfrak{L}, \overline{\mathfrak{L}}$ sämtlich mit der Null zusammenfallen läßt und dann an

Stelle des Systems der $2p$ Konstanten $\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, \mathfrak{A}_p$; $\overline{\mathfrak{C}}_1, \cdots, \overline{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{p}}, \overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, \overline{\mathfrak{A}}_p$ irgend welche die Gleichungen:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \mathfrak{C}_\nu = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \overline{\mathfrak{C}}_\nu = 0$$

nicht verletzende Systeme von $2p$ Werten setzt, Funktionen W, $\overline{W}$, welche für keinen Punkt der Fläche T'' unstetig werden. Solche Funktionen mögen allenthalben endliche Funktionen genannt und im folgenden durch $w|z|$, $\overline{w}|z|$ oder durch w^z, $\overline{w}^z$ oder noch einfacher durch w, $\overline{w}$ bezeichnet werden. Gewisse dieser Funktionen w, $\overline{w}$ sollen jetzt als Elementarfunktionen aufgestellt und allenthalben endliche Elementarfunktionen genannt werden.

Man bezeichne zunächst, unter ϱ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, p$, unter $\delta_{\varrho\nu}$ $(\nu=1,2,\cdots,p)$ eine Größe, die für $\nu=\varrho$ den Wert 1, für $\nu \neq \varrho$ den Wert 0 besitzt, verstehend, mit $w_\varrho|z|$, $\overline{w}_\varrho|z|$ zwei spezielle allenthalben endliche, je eine willkürliche, später zu bestimmende, additive Konstante c_ϱ, beziehungsweise $\overline{c}_\varrho$, enthaltende Funktionen, bei denen die Konstanten $\mathfrak{C}_\nu$, $\overline{\mathfrak{C}}_\nu$, $_{\nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p}}$, und $\mathfrak{A}_\nu$, $\overline{\mathfrak{A}}_\nu$, $_{\nu=\mathfrak{p}+1,\cdots,p}$, die speziellen mit $\mathfrak{C}_{\varrho\nu}$, $\overline{\mathfrak{C}}_{\varrho\nu}$, $_{\nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p}}$, und $\mathfrak{A}_{\varrho\nu}$, $\overline{\mathfrak{A}}_{\varrho\nu}$, $_{\nu=\mathfrak{p}+1,\cdots,p}$, beziehungsweise zu bezeichnenden, durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{C}_{\varrho\nu} = \left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\varrho\nu'} - \delta_{\varrho\nu}\mathfrak{p}\right)\frac{\pi i}{\mathfrak{p}}, \qquad \overline{\mathfrak{C}}_{\varrho\nu} = \left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\varrho\nu'} - \delta_{\varrho\nu}\mathfrak{p}\right)\frac{\pi i}{\mathfrak{p}}, \qquad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p},}$$

$$\mathfrak{A}_{\varrho\nu} = \delta_{\varrho\nu}\pi i, \qquad \overline{\mathfrak{A}}_{\varrho\nu} = \delta_{\varrho\nu}\pi i, \qquad {\scriptstyle \nu=\mathfrak{p}+1,\cdots,p,}$$

bestimmten Werte besitzen, bemerke dazu, daß $\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\varrho\nu'}$ für $\varrho = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$ den Wert 1, für $\varrho = \mathfrak{p}+1, \cdots, p$ den Wert 0 hat, und bezeichne dann weiter bei diesen Funktionen die an Stelle der Größen $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{K}_\nu$, $\overline{\mathfrak{A}}_\nu$, $\overline{\mathfrak{B}}_\nu$, $\overline{\mathfrak{K}}_\nu$, $_{\nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p}}$, stehenden Größen mit $\mathfrak{A}_{\varrho\nu}$, $\mathfrak{B}_{\varrho\nu}$, $\mathfrak{K}_{\varrho\nu}$, $\overline{\mathfrak{A}}_{\varrho\nu}$, $\overline{\mathfrak{B}}_{\varrho\nu}$, $\overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}$, $_{\nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p}}$, die an Stelle der Größen $\mathfrak{B}_\nu$, $\overline{\mathfrak{B}}_\nu$, $_{\nu=\mathfrak{p}+1,\cdots,p}$, stehenden Größen mit $\mathfrak{K}_{\varrho\nu}$, $\overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}$, $_{\nu=\mathfrak{p}+1,\cdots,p}$, sodaß also für $\varrho = 1, 2, \cdots, p$:

$$(1.)\quad \left.\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \{ w_\varrho|z|^+ = A_\nu w_\varrho|z|^- + \mathfrak{A}_{\varrho\nu}, && \overline{w}_\varrho|z|^+ = \overline{A}_\nu \overline{w}_\varrho|z|^- + \overline{\mathfrak{A}}_{\varrho\nu},\\
&\text{längs } b_\nu \{ w_\varrho|z|^+ = B_\nu w_\varrho|z|^- + \mathfrak{B}_{\varrho\nu}, && \overline{w}_\varrho|z|^+ = \overline{B}_\nu \overline{w}_\varrho|z|^- + \overline{\mathfrak{B}}_{\varrho\nu},\\
&\text{längs } c_\nu \{ w_\varrho|z|^+ = w_\varrho|z|^- + \Big(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\varrho\nu'} - \delta_{\varrho\nu}\mathfrak{p}\Big)\frac{\pi i}{\mathfrak{p}}, && \overline{w}_\varrho|z|^+ = \overline{w}_\varrho|z|^- + \Big(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\varrho\nu'} - \delta_{\varrho\nu}\mathfrak{p}\Big)\frac{\pi i}{\mathfrak{p}},
\end{aligned}\right\} {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p},}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \{ w_\varrho|z|^+ = w_\varrho|z|^- + \delta_{\varrho\nu}\pi i, && \overline{w}_\varrho|z|^+ = \overline{w}_\varrho|z|^- + \delta_{\varrho\nu}\pi i,\\
&\text{längs } b_\nu \{ w_\varrho|z|^+ = w_\varrho|z|^- + \mathfrak{K}_{\varrho\nu}, && \overline{w}_\varrho|z|^+ = \overline{w}_\varrho|z|^- + \overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu},\\
&\text{längs } c_\nu \{ w_\varrho|z|^+ = w_\varrho|z|^-, && \overline{w}_\varrho|z|^+ = \overline{w}_\varrho|z|^-,
\end{aligned}\right\} {\scriptstyle \nu=\mathfrak{p}+1,\cdots,p,}$$

$$\text{längs } l_\sigma \{ w_\varrho|z|^+ = w_\varrho|z|^-, \qquad \overline{w}_\varrho|z|^+ = \overline{w}_\varrho|z|^-, \qquad {\scriptstyle \sigma=1,2,\cdots,s,}$$

ist und die Größen $\mathfrak{A}_{\varrho\nu}$, $\mathfrak{B}_{\varrho\nu}$ $\overline{\mathfrak{A}}_{\varrho\nu}$, $\overline{\mathfrak{B}}_{\varrho\nu}$, ${}_{\nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p}}$, mit den Größen $\mathfrak{K}_{\varrho\nu}$, $\overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}$, ${}_{\nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p}}$, durch die Gleichungen:

$$\text{(2.)}\quad \begin{aligned} \mathfrak{A}_{\varrho\nu} &= \mathcal{A}_\nu\Big(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu'}-\delta_{\varrho\nu}\mathfrak{p}\Big)\frac{\pi i}{\mathfrak{p}}+(1-A_\nu)\mathfrak{K}_{\varrho\nu}, & \overline{\mathfrak{A}}_{\varrho\nu} &= \mathcal{A}_\nu\Big(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu'}-\delta_{\varrho\nu}\mathfrak{p}\Big)\frac{\pi i}{\mathfrak{p}}+(1-\overline{A}_\nu)\overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}, \\ \mathfrak{B}_{\varrho\nu} &= \mathcal{B}_\nu\Big(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu'}-\delta_{\varrho\nu}\mathfrak{p}\Big)\frac{\pi i}{\mathfrak{p}}+(1-B_\nu)\mathfrak{K}_{\varrho\nu}, & \overline{\mathfrak{B}}_{\varrho\nu} &= \overline{\mathcal{B}}_\nu\Big(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu'}-\delta_{\varrho\nu}\mathfrak{p}\Big)\frac{\pi i}{\mathfrak{p}}+(1-\overline{B}_\nu)\overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}, \end{aligned}$$

verknüpft sind. Die Größen $\mathfrak{K}_{\varrho\nu}$, $\overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}$, ${}_{\nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p}}$, hängen von den in w_ϱ, $\overline{w}_\varrho$ beziehungsweise enthaltenen willkürlichen additiven Konstanten c_ϱ, $\overline{c}_\varrho$ ab, und zwar in der Weise, daß beim Übergang von c_ϱ in $c_\varrho+k_\varrho$ die Größe $\mathfrak{K}_{\varrho\nu}$ in $\mathfrak{K}_{\varrho\nu}+k_\varrho$, beim Übergang von $\overline{c}_\varrho$ in $\overline{c}_\varrho+\overline{k}_\varrho$ die Größe $\overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}$ in $\overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}+\overline{k}_\varrho$ übergeht. Infolgedessen kann man die Werte der in w_ϱ, $\overline{w}_\varrho$ beziehungsweise enthaltenen, bis jetzt noch willkürlichen additiven Konstanten c_ϱ, $\overline{c}_\varrho$ immer und nur auf eine Weise so wählen, daß für $\varrho=1,2,\cdots,p$:

$$\text{(3.)}\quad \sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}}\mathfrak{K}_{\varrho\nu}=\Big(\varrho-\frac{\mathfrak{p}+1}{2}\Big)\pi i\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu'}, \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}}\overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}=\Big(\varrho-\frac{\mathfrak{p}+1}{2}\Big)\pi i\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu'}$$

ist, und es sind dann zugleich, nach dem Fundamentalsatz, die Funktionen w_ϱ, $\overline{w}_\varrho$, also auch die zu ihnen gehörigen Größen $\mathfrak{K}_{\varrho\nu}$, $\overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}$, ${}_{\nu=1,2,\cdots,p}$, vollständig bestimmt.

Die so gewonnenen vollständig bestimmten allenthalben endlichen Funktionen $w_1|z|,\cdots,w_p|z|$; $\overline{w}_1|z|,\cdots,\overline{w}_p|z|$ *sollen die zu den Charakteristiken* $\binom{A}{B}$, $\binom{\overline{A}}{\overline{B}}$ *beziehungsweise gehörigen allenthalben endlichen Elementarfunktionen genannt werden.*

Die Summe der $\mathfrak{p}$ Funktionen $w_1, w_2, \cdots, w_\mathfrak{p}$ besitzt, ebenso wie die Summe der $\mathfrak{p}$ Funktionen $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \cdots, \overline{w}_\mathfrak{p}$, für jeden Punkt z der Fläche T'' den Wert Null. Zum Beweise dieser Behauptung beachte man, daß die den allenthalben endlichen Funktionen:

$$w=w_1+w_2+\cdots+w_\mathfrak{p}, \qquad \overline{w}=\overline{w}_1+\overline{w}_2+\cdots+\overline{w}_\mathfrak{p}$$

zukommenden charakteristischen Konstanten $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{C}_\nu$, $\overline{\mathfrak{A}}_\nu$, $\overline{\mathfrak{B}}_\nu$, $\overline{\mathfrak{C}}_\nu$, ${}_{\nu=1,2,\cdots,p}$, auf Grund der Beziehungen (1.) und (2.) durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_\nu &= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}}\mathfrak{A}_{\varrho\nu}=(1-A_\nu)\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}}\mathfrak{K}_{\varrho\nu}, & \overline{\mathfrak{A}}_\nu &= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}}\overline{\mathfrak{A}}_{\varrho\nu}=(1-\overline{A}_\nu)\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}}\overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}, \\ \mathfrak{B}_\nu &= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}}\mathfrak{B}_{\varrho\nu}=(1-B_\nu)\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}}\mathfrak{K}_{\varrho\nu}, & \overline{\mathfrak{B}}_\nu &= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}}\overline{\mathfrak{B}}_{\varrho\nu}=(1-\overline{B}_\nu)\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}}\overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}, \\ \mathfrak{C}_\nu &= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}}\Big(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu'}-\delta_{\varrho\nu}\mathfrak{p}\Big)\frac{\pi i}{\mathfrak{p}}=0, & \overline{\mathfrak{C}}_\nu &= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}}\Big(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu'}-\delta_{\varrho\nu}\mathfrak{p}\Big)\frac{\pi i}{\mathfrak{p}}=0, \end{aligned}\right\}\ {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p},}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_\nu &= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu}\pi i=0, & \overline{\mathfrak{A}}_\nu &= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu}\pi i=0, \\ \mathfrak{B}_\nu &= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}}\mathfrak{K}_{\varrho\nu}, & \overline{\mathfrak{B}}_\nu &= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}}\overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}, \\ \mathfrak{C}_\nu &= 0, & \overline{\mathfrak{C}}_\nu &= 0, \end{aligned}\right\}\ {\scriptstyle \nu=\mathfrak{p}+1,\cdots,p,}$$

bestimmt sind. Aus $\mathfrak{C}_\nu = 0$, $\overline{\mathfrak{C}}_\nu = 0$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p}}$, und $\mathfrak{A}_\nu = 0$, $\overline{\mathfrak{A}}_\nu = 0$, ${\scriptstyle \nu=\mathfrak{p}+1,\cdots,p}$, ergibt sich nun zunächst, nach dem am Schlusse des Fundamentalsatzes Bemerkten, daß für alle Punkte der Fläche T'' sowohl die Funktion w denselben, mit C zu bezeichnenden, als auch die Funktion $\overline{w}$ denselben, mit $\overline{C}$ zu bezeichnenden, Wert besitzt. Um die Werte der Konstanten C, $\overline{C}$ zu bestimmen, beachte man, daß aus $w = C$, $\overline{w} = \overline{C}$ die für $\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$ geltenden Beziehungen:

$$\mathfrak{A}_\nu = (1-A_\nu)C,\ \mathfrak{B}_\nu = (1-B_\nu)C, \qquad \overline{\mathfrak{A}}_\nu = (1-\overline{A}_\nu)\overline{C},\ \overline{\mathfrak{B}}_\nu = (1-\overline{B}_\nu)\overline{C}$$

folgen, und vergleiche die so für $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\overline{\mathfrak{A}}_\nu$, $\overline{\mathfrak{B}}_\nu$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p}}$, erhaltenen Ausdrücke mit den oben für diese Größen gewonnenen. Man erhält dann:

$$C = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}} \mathfrak{K}_{\varrho\nu}, \qquad \overline{C} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}} \overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}, \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p})}$$

und schließlich, indem man sowohl die $\mathfrak{p}$ aus der ersten, wie die $\mathfrak{p}$ aus der zweiten Gleichung für $\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$ hervorgehenden speziellen Gleichungen zu einander addiert und die Gleichungen (3.) berücksichtigt,

$$\mathfrak{p}C = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}} \mathfrak{K}_{\varrho\nu} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}} \left(\varrho - \frac{\mathfrak{p}+1}{2}\right)\pi i \sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\varrho\nu'} = 0, \qquad \mathfrak{p}\overline{C} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}} \overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}} \left(\varrho - \frac{\mathfrak{p}+1}{2}\right)\pi i \sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\varrho\nu'} = 0.$$

Damit ist aber bewiesen, daß für jeden Punkt z der Fläche T'', wie oben behauptet wurde, die Beziehungen:

$$(4.) \qquad w_1|z| + w_2|z| + \cdots + w_{\mathfrak{p}}|z| = 0, \qquad \overline{w}_1|z| + \overline{w}_2|z| + \cdots + \overline{w}_{\mathfrak{p}}|z| = 0$$

bestehen.

Es soll jetzt untersucht werden, ob von den beiden soeben erhaltenen Beziehungen die erste die einzige zwischen den Elementarfunktionen $w_1, \cdots, w_p$, die zweite die einzige zwischen den Elementarfunktionen $\overline{w}_1, \cdots, \overline{w}_p$ bestehende lineare Beziehung ist. Zu dem Ende bilde man, unter c_ν, $\overline{c}_\nu$, ${\scriptstyle \nu=0,1,2,\cdots,p}$, unbestimmte Konstanten verstehend, die allenthalben endlichen Funktionen:

$$w = c_0 + c_1 w_1 + \cdots + c_p w_p, \qquad \overline{w} = \overline{c}_0 + \overline{c}_1 \overline{w}_1 + \cdots + \overline{c}_p \overline{w}_p$$

und stelle sich die Aufgabe, die Konstanten c, $\overline{c}$ in allgemeinster Weise so zu bestimmen, daß für jeden Punkt z der Fläche T'' die Gleichungen $w = 0$, $\overline{w} = 0$ bestehen. Sollen aber die Funktionen w, $\overline{w}$ für jeden Punkt z der Fläche T'' den Wert Null besitzen, so müssen vor allem die ihnen zukommenden, durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{C}_\nu = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} c_\varrho \left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\varrho\nu'} - \delta_{\varrho\nu}\mathfrak{p}\right)\frac{\pi i}{\mathfrak{p}} = \frac{\pi i}{\mathfrak{p}}\left(\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}} c_\varrho - \mathfrak{p}c_\nu\right), \quad \overline{\mathfrak{C}}_\nu = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \overline{c}_\varrho \left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\varrho\nu'} - \delta_{\varrho\nu}\mathfrak{p}\right)\frac{\pi i}{\mathfrak{p}} = \frac{\pi i}{\mathfrak{p}}\left(\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}} \overline{c}_\varrho - \mathfrak{p}\overline{c}_\nu\right),$$
$${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p}}$$

bestimmten Konstanten $\mathfrak{C}_\nu, \overline{\mathfrak{C}}_\nu$, ${}_{\nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p}}$, sämtlich den Wert Null besitzen, oder, was dasselbe, es müssen die Größen $c_1, \cdots, c_\mathfrak{p}, \bar{c}_1, \cdots, \bar{c}_\mathfrak{p}$ den $2\mathfrak{p}$ Gleichungen:

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}} c_\varrho - \mathfrak{p} c_\nu = 0, \qquad \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}} \bar{c}_\varrho - \mathfrak{p} \bar{c}_\nu = 0, \qquad {}_{\nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p}},$$

oder den damit äquivalenten Gleichungen:

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_\mathfrak{p} = c, \qquad \bar{c}_1 = \bar{c}_2 = \cdots = \bar{c}_\mathfrak{p} = \bar{c},$$

bei denen $c, \bar{c}$ unbestimmte Konstanten bezeichnen, genügen; es müssen weiter aber auch die den Funktionen $w, \bar{w}$ zukommenden, durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{A}_\nu = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} c_\varrho \delta_{\varrho\nu} \pi i = c_\nu \pi i, \qquad \overline{\mathfrak{A}}_\nu = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \bar{c}_\varrho \delta_{\varrho\nu} \pi i = \bar{c}_\nu \pi i, \qquad {}_{\nu=\mathfrak{p}+1,\cdots,p},$$

bestimmten Konstanten $\mathfrak{A}_\nu, \overline{\mathfrak{A}}_\nu$, ${}_{\nu=\mathfrak{p}+1,\cdots,p}$, sämtlich den Wert Null besitzen, oder, was dasselbe, es muß

$$c_{\mathfrak{p}+1} = 0,\ c_{\mathfrak{p}+2} = 0,\ \cdots,\ c_p = 0, \qquad \bar{c}_{\mathfrak{p}+1} = 0,\ \bar{c}_{\mathfrak{p}+2} = 0,\ \cdots,\ \bar{c}_p = 0$$

sein. Läßt man dementsprechend in den die Funktionen $w, \bar{w}$ definierenden Gleichungen an Stelle einer jeden der Größen $c_1, \cdots, c_\mathfrak{p}$ die Konstante c, an Stelle einer jeden der Größen $\bar{c}_1, \cdots, \bar{c}_\mathfrak{p}$ die Konstante $\bar{c}$, endlich an Stelle einer jeden der Größen $c_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, c_p$, $\bar{c}_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, \bar{c}_p$ die Null treten, so wird $w = c_0 + c(w_1 + \cdots + w_\mathfrak{p})$, $\bar{w} = \bar{c}_0 + \bar{c}(\bar{w}_1 + \cdots + \bar{w}_\mathfrak{p})$, und man erkennt unter Beachtung der Gleichungen (4.) schließlich, daß die Funktionen $w, \bar{w}$ dann, aber auch nur dann, für jeden Punkt z der Fläche T''', wie verlangt wurde, den Wert Null erhalten, wenn

$$c_0 = 0,\ c_1 = c_2 = \cdots = c_\mathfrak{p}, \qquad \bar{c}_0 = 0,\ \bar{c}_1 = \bar{c}_2 = \cdots = \bar{c}_\mathfrak{p},$$

$$c_{\mathfrak{p}+1} = 0,\ c_{\mathfrak{p}+2} = 0,\ \cdots,\ c_p = 0, \qquad \bar{c}_{\mathfrak{p}+1} = 0,\ \bar{c}_{\mathfrak{p}+2} = 0,\ \cdots,\ \bar{c}_p = 0$$

gesetzt wird. Damit ist aber gezeigt, daß von den beiden unter (4.) aufgestellten Beziehungen die erste die einzige zwischen den Funktionen $w_1, \cdots, w_p$, die zweite die einzige zwischen den Funktionen $\bar{w}_1, \cdots, \bar{w}_p$ bestehende lineare Beziehung ist, und es ist damit zugleich bewiesen, daß je $\mathfrak{p} - 1$ der Funktionen $w_1, \cdots, w_\mathfrak{p}$ zusammen mit den Funktionen $w_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, w_p$ und ebenso je $\mathfrak{p} - 1$ der Funktionen $\bar{w}_1, \cdots, \bar{w}_\mathfrak{p}$ zusammen mit den Funktionen $\bar{w}_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, \bar{w}_p$ ein System von $p - 1$ linear unabhängigen Funktionen bilden.

Die allgemeinsten allenthalben endlichen Funktionen $w|z|, \bar{w}|z|$ werden, wenn man unter $\mathfrak{C}_\nu, \overline{\mathfrak{C}}_\nu$, ${}_{\nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p}}$, den Bedingungen:

$$(5.) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \mathfrak{C}_\nu = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \overline{\mathfrak{C}}_\nu = 0$$

genügende unbestimmte, unter C, $\overline{C}$, $\mathfrak{A}_\nu$, $\overline{\mathfrak{A}}_\nu$, $\nu=\mathfrak{p}+1,\cdots,p$, keinen Bedingungen unterworfene Konstanten versteht, durch die Gleichungen:

$$(6.)\quad w|z| = C - \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}} \mathfrak{C}_\varrho w_\varrho|z| + \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=\mathfrak{p}+1}^{\varrho=p} \mathfrak{A}_\varrho w_\varrho|z|,\quad \overline{w}|z| = \overline{C} - \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}} \overline{\mathfrak{C}}_\varrho \overline{w}_\varrho|z| + \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=\mathfrak{p}+1}^{\varrho=p} \overline{\mathfrak{A}}_\varrho \overline{w}_\varrho|z|$$

dargestellt. Die Richtigkeit dieser Behauptung erkennt man auf Grund des Fundamentalsatzes, wenn man beachtet, daß die durch diese Gleichungen definierten allenthalben endlichen Funktionen w, $\overline{w}$, wie aus den Relationen:

$$-\frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}} \mathfrak{C}_\varrho\left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu'} - \delta_{\varrho\nu}\mathfrak{p}\right)\frac{\pi i}{\mathfrak{p}} = \mathfrak{C}_\nu,\quad -\frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}} \overline{\mathfrak{C}}_\varrho\left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu'} - \delta_{\varrho\nu}\mathfrak{p}\right)\frac{\pi i}{\mathfrak{p}} = \overline{\mathfrak{C}}_\nu,\quad \nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p},$$

$$\frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=\mathfrak{p}+1}^{\varrho=p} \mathfrak{A}_\varrho\delta_{\varrho\nu}\pi i = \mathfrak{A}_\nu,\qquad \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=\mathfrak{p}+1}^{\varrho=p} \overline{\mathfrak{A}}_\varrho\delta_{\varrho\nu}\pi i = \overline{\mathfrak{A}}_\nu,\qquad \nu=\mathfrak{p}+1,\cdots,p,$$

folgt, so beschaffen sind, daß

$$\text{längs } c_\nu\left\{w|z|^+ = w|z|^- + \mathfrak{C}_\nu,\quad \overline{w}|z|^+ = \overline{w}|z|^- + \overline{\mathfrak{C}}_\nu,\right.\qquad \nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p},$$

$$\text{längs } a_\nu\left\{w|z|^+ = w|z|^- + \mathfrak{A}_\nu,\quad \overline{w}|z|^+ = \overline{w}|z|^- + \overline{\mathfrak{A}}_\nu,\right.\qquad \nu=\mathfrak{p}+1,\cdots,p,$$

ist, und daß diese Funktionen zudem die willkürlichen additiven Konstanten C, $\overline{C}$ enthalten. Die Gleichungen (6.) kann man aber auch, unter $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ zwei weitere unbestimmte Konstanten verstehend, mit Hilfe der Gleichungen (4.) in die Gleichungen:

$$(7.)\quad w|z| = C - \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}}(\mathfrak{C}_\varrho - \mathfrak{D})w_\varrho|z| + \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=\mathfrak{p}+1}^{\varrho=p}\mathfrak{A}_\varrho w_\varrho|z|,\quad \overline{w}|z| = \overline{C} - \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}}(\overline{\mathfrak{C}}_\varrho - \overline{\mathfrak{D}})\overline{w}_\varrho|z| + \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=\mathfrak{p}+1}^{\varrho=p}\overline{\mathfrak{A}}_\varrho \overline{w}_\varrho|z|$$

überführen, und die bei diesen Gleichungen als Koeffizienten auftretenden Größen $\mathfrak{C}_\varrho - \mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{C}}_\varrho - \overline{\mathfrak{D}}$, $\varrho=1,2,\cdots,\mathfrak{p}$, repräsentieren dann, da die Größen $\mathfrak{C}$, $\overline{\mathfrak{C}}$ nur den Gleichungen (5.) zu genügen haben, keinen Bedingungen unterworfene Konstanten. Setzt man, unter $\varkappa$ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$ verstehend, in den Gleichungen (7.) speziell $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_\varkappa$, $\overline{\mathfrak{D}} = \overline{\mathfrak{C}}_\varkappa$, so liefert die erste derselben die Darstellung der unter (6.) definierten allgemeinsten Funktion w durch die $p-1$ linear unabhängigen Funktionen $w_1, \cdots, w_{\varkappa-1}$, $w_{\varkappa+1}, \cdots, w_\mathfrak{p}, w_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, w_p$, und entsprechend die zweite die Darstellung der unter (6.) definierten allgemeinsten Funktion $\overline{w}$ durch die $p-1$ linear unabhängigen Funktionen $\overline{w}_1, \cdots, \overline{w}_{\varkappa-1}, \overline{w}_{\varkappa+1}, \cdots, \overline{w}_\mathfrak{p}, \overline{w}_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, \overline{w}_p$.

Die p^2 Konstanten $\mathfrak{K}_{\varrho\nu}$, $\varrho,\nu=1,2,\cdots,p$, des Funktionensystems $w_1|z|, \cdots, w_p|z|$ sind mit den p^2 Konstanten $\overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu}$, $\varrho,\nu=1,2,\cdots,p$, des Funktionensystems $\overline{w}_1|z|, \cdots, \overline{w}_p|z|$ durch einfache Beziehungen verknüpft. Um dieselben zu erhalten, beziehe man die am Ende von Art. 1 aufgestellte, auf irgend zwei allgemeine zu den Charakteristiken $\binom{A}{B}$, $\binom{\overline{A}}{\overline{B}}$ gehörige Funktionen W, $\overline{W}$ sich beziehende, Fundamentalformel (F_2.), unter ϱ, σ irgend zwei Zahlen aus der Reihe $1, 2, \cdots, p$ verstehend, auf die Elementarfunktionen $w_\varrho|z|$, $w_\sigma|z|$, ersetze also in der Formel $(F_2.)$ die darin vorkommenden Konstanten der Funktionen W, $\overline{W}$ durch die entsprechenden Konstanten der Funktionen w_ϱ, $\overline{w}_\sigma$. Man erhält so zunächst die Gleichung:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}}\left(\overline{\mathfrak{C}}_{\sigma\nu}\mathfrak{K}_{\varrho\nu}-\mathfrak{C}_{\varrho\nu}\overline{\mathfrak{K}}_{\sigma\nu}-\tfrac{1}{2}\mathfrak{C}_{\varrho\nu}\overline{\mathfrak{C}}_{\sigma\nu}\right)+\sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}}\mathfrak{C}_{\varrho\nu}(\overline{\mathfrak{C}}_{\sigma 1}+\overline{\mathfrak{C}}_{\sigma 2}+\cdots+\overline{\mathfrak{C}}_{\sigma\nu}) \\ &+\sum_{\nu=\mathfrak{p}+1}^{\nu=p}(\delta_{\varrho\nu}\pi i\overline{\mathfrak{K}}_{\sigma\nu}-\mathfrak{K}_{\varrho\nu}\delta_{\sigma\nu}\pi i)\end{aligned}\right\}=0,$$

und weiter dann, indem man an Stelle der Konstanten $\mathfrak{C}$, $\overline{\mathfrak{C}}$ ihre durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{C}_{\varrho\nu}=\left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu'}-\delta_{\varrho\nu}\mathfrak{p}\right)\frac{\pi i}{\mathfrak{p}},\qquad \overline{\mathfrak{C}}_{\sigma\nu}=\left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\sigma\nu'}-\delta_{\sigma\nu}\mathfrak{p}\right)\frac{\pi i}{\mathfrak{p}},\qquad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p},}$$

bestimmten Werte treten läßt, den allen Gliedern gemeinsamen Faktor πi entfernt und die Summationen nach ν unter Beachtung der Gleichungen (3.), der Bedeutung der Zeichen $\delta_{\varrho\nu}$, $\delta_{\sigma\nu}$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, und insbesondere der Relation $\sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}}(\delta_{\sigma 1}+\delta_{\sigma 2}+\cdots+\delta_{\sigma\nu})=(\mathfrak{p}-\sigma+1)\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\sigma\nu'}$ ausführt, die Gleichung:

$$-\mathfrak{K}_{\varrho\sigma}+\overline{\mathfrak{K}}_{\sigma\varrho}+\left[2(\delta_{\sigma 1}+\delta_{\sigma 2}+\cdots+\delta_{\sigma\varrho})\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu'}-\delta_{\sigma\varrho}\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu'}-\left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu'}\right)\left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\sigma\nu'}\right)\right]\frac{\pi i}{2}=0.$$

Unterscheidet man jetzt in bezug auf die Zahlen σ, ϱ die 3 Fälle $\sigma=\varrho$, $\sigma<\varrho$, $\sigma>\varrho$ und beachtet, daß der auf der linken Seite der letzten Gleichung zwischen den eckigen Klammern stehende Ausdruck für $\sigma=\varrho$ den Wert 0, für $\sigma<\varrho$ den Wert $\left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu'}\right)\left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\sigma\nu'}\right)$, für $\sigma>\varrho$ den Wert $-\left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu'}\right)\left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\sigma\nu'}\right)$ besitzt, so erhält man schließlich die gewünschten Gleichungen:

$$(8.)\qquad \underset{\varrho=1,2,\cdots,p,}{\mathfrak{K}_{\varrho\varrho}=\overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\varrho},}\qquad \underset{\varrho,\,\sigma=1,2,\cdots,p,\ \sigma\neq\varrho,}{\mathfrak{K}_{\varrho\sigma}=\overline{\mathfrak{K}}_{\sigma\varrho}\pm\left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu'}\right)\left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\sigma\nu'}\right)\frac{\pi i}{2},}\ \text{je nachdem } \sigma\lessgtr\varrho \text{ ist;}$$

das darin vorkommende Produkt $\left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\varrho\nu'}\right)\left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\sigma\nu'}\right)$ hat nur dann einen von Null verschiedenen Wert und zwar den Wert 1, wenn ϱ und σ beide der Zahlenreihe $1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$ angehören. Diese Gleichungen liefern die Werte der Konstanten $\overline{\mathfrak{K}}$, sobald man die Werte der Konstanten $\mathfrak{K}$ als bekannt voraussetzt, wie umgekehrt.

In dem besonderen Falle, wo die Charakteristik $\binom{A}{B}$ zu sich selbst reziprok ist, also die Gleichung $\binom{\overline{A}}{\overline{B}}=\binom{A}{B}$ besteht, und demgemäß für $\varrho, \sigma=1, 2, \cdots, p$ $\overline{w}_\sigma=w_\sigma$,

$\bar{\mathfrak{K}}_{\sigma\varrho} = \mathfrak{K}_{\sigma\varrho}$ ist, reduzieren sich die p^2 unter (8.) aufgestellten Gleichungen auf die $\frac{p(p-1)}{2}$ Gleichungen:

$$\mathfrak{K}_{\varrho\sigma} = \mathfrak{K}_{\sigma\varrho} + \left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\varrho\nu'}\right)\left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\sigma\nu'}\right)\frac{\pi i}{2}, \qquad \begin{matrix} \varrho, \sigma = 1, 2, \cdots, p, \\ \sigma < \varrho, \end{matrix}$$

sodaß also die Gleichungen (8.) für jedes Funktionensystem $w_1, \cdots, w_p$, welches zu einer zu sich selbst reziproken Charakteristik gehört, $\frac{p(p-1)}{2}$ Beziehungen zwischen den p^2 ihm zukommenden Konstanten $\mathfrak{K}$ liefern.

3.

Nachdem im vorhergehenden Artikel die zu den Charakteristiken $\binom{A}{B}$, $\binom{\bar{A}}{\bar{B}}$ gehörigen allenthalben endlichen Elementarfunktionen definiert und untersucht worden sind, sollen jetzt weiter gewisse zu den genannten Charakteristiken gehörige Funktionen W, $\bar{W}$, welche nur für einen der Punkte $\mathscr{P}_1, \cdots, \mathscr{P}_s$ entweder logarithmisch unendlich oder algebraisch unendlich werden, als Elementarfunktionen aufgestellt und logarithmisch unendlich werdende beziehungsweise algebraisch unendlich werdende Elementarfunktionen genannt werden.

Um zunächst die logarithmisch unendlich werdenden Elementarfunktionen zu erhalten, verstehe man unter σ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, s$ und bezeichne, unter Beachtung der in Art. 3 des ersten Abschnittes gemachten Festsetzungen, den σ^{ten} der s Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ mit η und dementsprechend die zu ihm führende Linie l_σ jetzt mit l_η. Der Fundamentalsatz liefert dann zu den Charakteristiken $\binom{A}{B}$, $\binom{\bar{A}}{\bar{B}}$ zwei, je eine willkürliche additive Konstante c beziehungsweise $\bar{c}$ enthaltende, Funktionen W, $\bar{W}$, die in der Fläche T'' nur für den Punkt η unstetig werden wie $\ln\frac{1}{z_\eta}$, wenn man

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L}_\sigma = 1, && \bar{\mathfrak{L}}_\sigma = 1, && \\ &\mathfrak{C}_\nu = -\frac{2\pi i}{\mathfrak{p}}, && \bar{\mathfrak{C}}_\nu = -\frac{2\pi i}{\mathfrak{p}}, && \nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}, \\ &\mathfrak{A}_\nu = 0, && \bar{\mathfrak{A}}_\nu = 0, && \nu = \mathfrak{p}+1, \cdots, p, \end{aligned}$$

setzt, allen übrigen $s + m_1 + \cdots + m_s - 1$ Größen $\mathfrak{L}$ sowie allen übrigen $s + m_1 + \cdots + m_s - 1$ Größen $\bar{\mathfrak{L}}$ dagegen den Wert Null zulegt. Die so gewonnenen speziellen Funktionen W, $\bar{W}$ bezeichne man nun, die Bestimmung der additiven Konstanten c, $\bar{c}$ sich vorbehaltend, mit $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\underset{0}{\bar{P}}\left|{\eta \atop z}\right|$; die bei ihnen an Stelle der Größen $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{K}_\nu, \bar{\mathfrak{A}}_\nu, \bar{\mathfrak{B}}_\nu, \bar{\mathfrak{K}}_\nu$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p}}$, stehenden Größen mit $\underset{0}{\mathfrak{A}}{}_\nu^{(\eta)}, \underset{0}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta)}, \underset{0}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta)}, \underset{0}{\bar{\mathfrak{A}}}{}_\nu^{(\eta)}, \underset{0}{\bar{\mathfrak{B}}}{}_\nu^{(\eta)}, \underset{0}{\bar{\mathfrak{K}}}{}_\nu^{(\eta)}$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p}}$, die an Stelle der Größen $\mathfrak{B}_\nu, \bar{\mathfrak{B}}_\nu$, ${\scriptstyle \nu=\mathfrak{p}+1,\cdots,p}$, stehenden Größen mit $\underset{0}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta)}, \underset{0}{\bar{\mathfrak{K}}}{}_\nu^{(\eta)}$, ${\scriptstyle \nu=\mathfrak{p}+1,\cdots,p}$, beziehungsweise.

Für das Gebiet des Punktes η lassen sich dann diese Funktionen darstellen durch Gleichungen von der Form:

$$(1_0.)\qquad \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right| = \ln\frac{1}{z_\eta} + c^{(0)}_{\sigma 0} + c^{(0)}_{\sigma 1} z_\eta + c^{(0)}_{\sigma 2} z_\eta^2 + \cdots,\qquad \underset{0}{\bar P}\left|{\eta \atop z}\right| = \ln\frac{1}{z_\eta} + \bar c^{(0)}_{\sigma 0} + \bar c^{(0)}_{\sigma 1} z_\eta + \bar c^{(0)}_{\sigma 2} z_\eta^2 + \cdots,$$

wobei die $c^{(0)}$, $\bar c^{(0)}$ von z unabhängige Größen bezeichnen. Zugleich sind die Werte von $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\underset{0}{\bar P}\left|{\eta \atop z}\right|$ in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ in der Weise verknüpft, daß

$$(2_0.)\qquad \begin{array}{lll}
\text{längs } a_\nu \Big\{ \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = A_\nu \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^- + \underset{0}{\mathfrak{A}}{}^{(\eta)}_\nu, & \underset{0}{\bar P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \bar A_\nu \underset{0}{\bar P}\left|{\eta \atop z}\right|^- + \underset{0}{\bar{\mathfrak{A}}}{}^{(\eta)}_\nu, & \\
\text{längs } b_\nu \Big\{ \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = B_\nu \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^- + \underset{0}{\mathfrak{B}}{}^{(\eta)}_\nu, & \underset{0}{\bar P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \bar B_\nu \underset{0}{\bar P}\left|{\eta \atop z}\right|^- + \underset{0}{\bar{\mathfrak{B}}}{}^{(\eta)}_\nu, & \nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}, \\
\text{längs } c_\nu \Big\{ \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^- - \frac{2\pi i}{\mathfrak{p}}, & \underset{0}{\bar P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \underset{0}{\bar P}\left|{\eta \atop z}\right|^- - \frac{2\pi i}{\mathfrak{p}}, & \\
\text{längs } a_\nu \Big\{ \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^-, & \underset{0}{\bar P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \underset{0}{\bar P}\left|{\eta \atop z}\right|^-, & \\
\text{längs } b_\nu \Big\{ \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^- + \underset{0}{\mathfrak{K}}{}^{(\eta)}_\nu, & \underset{0}{\bar P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \underset{0}{\bar P}\left|{\eta \atop z}\right|^- + \underset{0}{\bar{\mathfrak{K}}}{}^{(\eta)}_\nu, & \nu = \mathfrak{p}+1, \cdots, p, \\
\text{längs } c_\nu \Big\{ \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^-, & \underset{0}{\bar P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \underset{0}{\bar P}\left|{\eta \atop z}\right|^-, & \\
\text{längs } l_\eta \Big\{ \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^- + 2\pi i, & \underset{0}{\bar P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \underset{0}{\bar P}\left|{\eta \atop z}\right|^- + 2\pi i, &
\end{array}$$

längs einer jeden der $s-1$ übrigen Linien l dagegen $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^-$, $\underset{0}{\bar P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \underset{0}{\bar P}\left|{\eta \atop z}\right|^-$ ist. Dabei sind die Größen $\underset{0}{\mathfrak{A}}{}^{(\eta)}_\nu$, $\underset{0}{\mathfrak{B}}{}^{(\eta)}_\nu$, $\underset{0}{\bar{\mathfrak{A}}}{}^{(\eta)}_\nu$, $\underset{0}{\bar{\mathfrak{B}}}{}^{(\eta)}_\nu$, $\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$, mit den Größen $\underset{0}{\mathfrak{K}}{}^{(\eta)}_\nu$, $\underset{0}{\bar{\mathfrak{K}}}{}^{(\eta)}_\nu$, $\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$, durch die Gleichungen:

$$(3_0.)\qquad \begin{array}{ll}
\underset{0}{\mathfrak{A}}{}^{(\eta)}_\nu = -\mathcal{A}_\nu \frac{2\pi i}{\mathfrak{p}} + (1 - A_\nu)\underset{0}{\mathfrak{K}}{}^{(\eta)}_\nu, & \underset{0}{\bar{\mathfrak{A}}}{}^{(\eta)}_\nu = \mathcal{A}_\nu \frac{2\pi i}{\mathfrak{p}} + (1 - \bar A_\nu)\underset{0}{\bar{\mathfrak{K}}}{}^{(\eta)}_\nu, \\
\underset{0}{\mathfrak{B}}{}^{(\eta)}_\nu = -\mathcal{B}_\nu \frac{2\pi i}{\mathfrak{p}} + (1 - B_\nu)\underset{0}{\mathfrak{K}}{}^{(\eta)}_\nu, & \underset{0}{\bar{\mathfrak{B}}}{}^{(\eta)}_\nu = -\mathcal{B}_\nu \frac{2\pi i}{\mathfrak{p}} + (1 - \bar B_\nu)\underset{0}{\bar{\mathfrak{K}}}{}^{(\eta)}_\nu
\end{array}$$

verknüpft, und es sollen jetzt schließlich die Werte der noch unbestimmten additiven Konstanten c, $\bar c$ so gewählt werden, daß

$$(4_0.)\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \underset{0}{\mathfrak{K}}{}^{(\eta)}_\nu = 0,\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \underset{0}{\bar{\mathfrak{K}}}{}^{(\eta)}_\nu = 0$$

ist.

Die jetzt vollständig bestimmten Funktionen $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\underset{0}{\bar P}\left|{\eta \atop z}\right|$ *sollen die zu den Charakteristiken* $\binom{A}{B}$, $\binom{\bar A}{\bar B}$ *gehörigen, auf den Punkt* η *sich beziehenden, logarithmisch unendlich werdenden Elementarfunktionen genannt werden.*

Die bei diesen Elementarfunktionen auftretenden Konstanten $\mathfrak{K}$, $\overline{\mathfrak{K}}$ lassen sich durch die Werte, welche die $2p$ Elementarfunktionen w, $\overline{w}$ für den Punkt η besitzen, ausdrücken. Um diese Ausdrücke zu erhalten, beziehe man die Fundamentalformel $(F_2.)$ auf die Elementarfunktionen $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\overline{w}_\varrho|z|$, lasse also in der Formel $(F_2.)$, nachdem man bei ihr den Summationsbuchstaben σ, um Verwechslungen mit der zu Anfang dieses Artikels eingeführten festen Zahl σ vorzubeugen, durch τ ersetzt und zur Darstellung der Funktion $\overline{w}_\varrho|z|$ für das Gebiet des Punktes η die Gleichung $\overline{w}_\varrho|z| = \bar{c}_{\sigma 0} + \bar{c}_{\sigma 1} z_\eta + \bar{c}_{\sigma 2} z_\eta^2 + \cdots$, bei der speziell $\bar{c}_{\sigma 0} = \overline{w}_\varrho|\eta|$ ist, aufgestellt hat, an Stelle der darin vorkommenden Konstanten der Funktionen W, $\overline{W}$ die entsprechenden Konstanten der Funktionen $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\overline{w}_\varrho|z|$ treten. Man erhält so zunächst die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \left\{ \left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\varrho\nu'} - \delta_{\varrho\nu}\mathfrak{p} \right) \frac{\pi i}{\mathfrak{p}} \underset{0}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta)} + \frac{2\pi i}{\mathfrak{p}} \overline{\mathfrak{K}}_{\varrho\nu} + \left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\varrho\nu'} - \delta_{\varrho\nu}\mathfrak{p} \right) \frac{\pi i}{\mathfrak{p}} \frac{\pi i}{\mathfrak{p}} \right\} \\ \displaystyle -\frac{2\pi i}{\mathfrak{p}} \frac{\pi i}{\mathfrak{p}} \sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \left[\left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\varrho\nu'} - \delta_{\varrho 1}\mathfrak{p} \right) + \left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\varrho\nu'} - \delta_{\varrho 2}\mathfrak{p} \right) + \cdots + \left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\varrho\nu'} - \delta_{\varrho\nu}\mathfrak{p} \right) \right] \\ \displaystyle -\sum_{\nu=\mathfrak{p}+1}^{\nu=p} \underset{0}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta)} \delta_{\varrho\nu} \pi i - 2\pi i \bar{c}_{\sigma 0} \end{array}\right\} = 0,$$

und weiter dann, indem man die Summationen nach ν unter Beachtung der in diesem Artikel unter $(4_0.)$ an erster Stelle sowie der im vorhergehenden Artikel unter (3.) an zweiter Stelle stehenden Gleichung und insbesondere der Relation $\sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} (\delta_{\varrho 1} + \delta_{\varrho 2} + \cdots + \delta_{\varrho\nu}) = (\mathfrak{p} - \varrho + 1) \sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\varrho\nu'}$ ausführt, auch $\bar{c}_{\sigma 0}$, der schon oben aufgestellten Gleichung $\bar{c}_{\sigma 0} = \overline{w}_\varrho|\eta|$ gemäß, durch $\overline{w}_\varrho|\eta|$ ersetzt, die für $\varrho = 1, 2, \cdots, p$ geltende Beziehung:

$$-\pi i \underset{0}{\mathfrak{K}}{}_\varrho^{(\eta)} - 2\pi i \overline{w}_\varrho|\eta| = 0.$$

Beachtet man nun noch, daß die Charakteristiken $\binom{A}{B}$, $\binom{\bar{A}}{\bar{B}}$ gleichberechtigt sind, und daß bei der Vertauschung von $\binom{A}{B}$ mit $\binom{\bar{A}}{\bar{B}}$ $\underset{0}{\mathfrak{K}}{}_\varrho^{(\eta)}$ in $\underset{0}{\overline{\mathfrak{K}}}{}_\varrho^{(\eta)}$, $\overline{w}_\varrho|\eta|$ in $w_\varrho|\eta|$ übergeht, so erhält man, wenn man noch den Buchstaben ϱ in neuer Bezeichnung durch ν ersetzt, schließlich die Gleichungen:

$$(5_0.) \qquad \underset{0}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta)} = -2\overline{w}_\nu|\eta|, \qquad \underset{0}{\overline{\mathfrak{K}}}{}_\nu^{(\eta)} = -2w_\nu|\eta|, \qquad {\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p.}$$

Es sollen jetzt die zu den Charakteristiken $\binom{A}{B}$, $\binom{\bar{A}}{\bar{B}}$ gehörigen algebraisch unendlich werdenden Elementarfunktionen aufgestellt werden. Man verstehe zu dem Ende unter σ wieder eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, s$, unter m eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, m_\sigma$ und bezeichne den σ^{ten} der s Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ auch hier wieder mit η. Der Fundamentalsatz liefert dann zu den Charakteristiken $\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}\bar{A}\\\bar{B}\end{smallmatrix}\right)$ zwei, je eine willkürliche additive Konstante c beziehungsweise $\bar{c}$ enthaltende, Funktionen W, $\overline{W}$, die in der Fläche T'' nur für den Punkt η unstetig werden wie $\frac{1}{z_\eta^m}$, wenn man

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{L}_{\sigma m} = 1, & \overline{\mathfrak{L}}_{\sigma m} = 1, & \\ \mathfrak{C}_\nu \;\, = 0, & \overline{\mathfrak{C}}_\nu \;\, = 0, & \nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}, \\ \mathfrak{A}_\nu \;\, = 0, & \overline{\mathfrak{A}}_\nu \;\, = 0, & \nu = \mathfrak{p}+1, \cdots, p, \end{array}$$

setzt, allen übrigen $s + m_1 + \cdots + m_s - 1$ Größen $\mathfrak{L}$ sowie allen übrigen $s + m_1 + \cdots + m_s - 1$ Größen $\overline{\mathfrak{L}}$ dagegen den Wert Null zulegt. Die so gewonnenen speziellen Funktionen W, $\overline{W}$ bezeichne man nun, die Bestimmung der additiven Konstanten c, $\bar{c}$ sich vorbehaltend, mit $\underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}$, $\underset{m}{\overline{P}}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}$; die bei ihnen an Stelle der Größen $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{K}_\nu$, $\overline{\mathfrak{A}}_\nu$, $\overline{\mathfrak{B}}_\nu$, $\overline{\mathfrak{K}}_\nu$, $\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$, stehenden Größen mit $\underset{m}{\mathfrak{A}}{}_\nu^{(\eta)}$, $\underset{m}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta)}$, $\underset{m}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta)}$, $\underset{m}{\overline{\mathfrak{A}}}{}_\nu^{(\eta)}$, $\underset{m}{\overline{\mathfrak{B}}}{}_\nu^{(\eta)}$, $\underset{m}{\overline{\mathfrak{K}}}{}_\nu^{(\eta)}$, $\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$, die an Stelle der Größen $\mathfrak{B}_\nu$, $\overline{\mathfrak{B}}_\nu$, $\nu = \mathfrak{p}+1, \cdots, p$, stehenden Größen mit $\underset{m}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta)}$, $\underset{m}{\overline{\mathfrak{K}}}{}_\nu^{(\eta)}$, $\nu = \mathfrak{p}+1, \cdots, p$, beziehungsweise. Für das Gebiet des Punktes η lassen sich dann diese Funktionen darstellen durch Gleichungen von der Form:

$$(1_m.)\quad \underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix} = \frac{1}{z_\eta^m} + c_{\sigma 0}^{(m)} + c_{\sigma 1}^{(m)} z_\eta + c_{\sigma 2}^{(m)} z_\eta^2 + \cdots, \qquad \underset{m}{\overline{P}}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix} = \frac{1}{z_\eta^m} + \bar{c}_{\sigma 0}^{(m)} + \bar{c}_{\sigma 1}^{(m)} z_\eta + \bar{c}_{\sigma 2}^{(m)} z_\eta^2 + \cdots,$$

wobei die $c^{(m)}$, $\bar{c}^{(m)}$ von z unabhängige Größen bezeichnen. Zugleich sind die Werte von $\underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}$, $\underset{m}{\overline{P}}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}$ in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathscr{P}^+$, $\mathscr{P}^-$ in der Weise verknüpft, daß

$$(2_m.)\quad \begin{array}{l} \left.\begin{array}{lll} \text{längs } a_\nu \Big\{ \underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^+ = A_\nu \underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^- + \underset{m}{\mathfrak{A}}{}_\nu^{(\eta)}, & \underset{m}{\overline{P}}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^+ = \bar{A}_\nu \underset{m}{\overline{P}}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^- + \underset{m}{\overline{\mathfrak{A}}}{}_\nu^{(\eta)}, \\ \text{längs } b_\nu \Big\{ \underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^+ = B_\nu \underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^- + \underset{m}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta)}, & \underset{m}{\overline{P}}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^+ = \bar{B}_\nu \underset{m}{\overline{P}}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^- + \underset{m}{\overline{\mathfrak{B}}}{}_\nu^{(\eta)}, \\ \text{längs } c_\nu \Big\{ \underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^+ = \underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^-, & \underset{m}{\overline{P}}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^+ = \underset{m}{\overline{P}}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^-, \end{array}\right\} \nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}, \\[2ex] \left.\begin{array}{lll} \text{längs } a_\nu \Big\{ \underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^+ = \underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^-, & \underset{m}{\overline{P}}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^+ = \underset{m}{\overline{P}}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^-, \\ \text{längs } b_\nu \Big\{ \underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^+ = \underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^- + \underset{m}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta)}, & \underset{m}{\overline{P}}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^+ = \underset{m}{\overline{P}}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^- + \underset{m}{\overline{\mathfrak{K}}}{}_\nu^{(\eta)}, \\ \text{längs } c_\nu \Big\{ \underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^+ = \underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^-, & \underset{m}{\overline{P}}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^+ = \underset{m}{\overline{P}}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^-, \end{array}\right\} \nu = \mathfrak{p}+1, \cdots, p, \\[2ex] \quad\text{längs } l_{\sigma'} \Big\{ \underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^+ = \underset{m}{P}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^-, \quad \underset{m}{\overline{P}}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^+ = \underset{m}{\overline{P}}\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}^-, \qquad \sigma' = 1, 2, \cdots, s, \end{array}$$

ist. Dabei sind die Größen $\underset{m}{\mathfrak{A}}{}^{(\eta)}_{\nu}$, $\underset{m}{\mathfrak{B}}{}^{(\eta)}_{\nu}$, $\underset{m}{\overline{\mathfrak{A}}}{}^{(\eta)}_{\nu}$, $\underset{m}{\overline{\mathfrak{B}}}{}^{(\eta)}_{\nu}$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p}}$, mit den Größen $\underset{m}{\mathfrak{K}}{}^{(\eta)}_{\nu}$, $\underset{m}{\overline{\mathfrak{K}}}{}^{(\eta)}_{\nu}$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p}}$, durch die Gleichungen:

$$(3_m.)\qquad \begin{aligned} \underset{m}{\mathfrak{A}}{}^{(\eta)}_{\nu} &= (1-A_\nu)\,\underset{m}{\mathfrak{K}}{}^{(\eta)}_{\nu}, & \underset{m}{\overline{\mathfrak{A}}}{}^{(\eta)}_{\nu} &= (1-\overline{A}_\nu)\,\underset{m}{\overline{\mathfrak{K}}}{}^{(\eta)}_{\nu}, \\ \underset{m}{\mathfrak{B}}{}^{(\eta)}_{\nu} &= (1-B_\nu)\,\underset{m}{\mathfrak{K}}{}^{(\eta)}_{\nu}, & \underset{m}{\overline{\mathfrak{B}}}{}^{(\eta)}_{\nu} &= (1-\overline{B}_\nu)\,\underset{m}{\overline{\mathfrak{K}}}{}^{(\eta)}_{\nu}, \end{aligned}$$

verknüpft, und es sollen jetzt schließlich die Werte der noch unbestimmten additiven Konstanten c, $\bar{c}$ so gewählt werden, daß

$$(4_m.)\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \underset{m}{\mathfrak{K}}{}^{(\eta)}_{\nu} = 0, \qquad\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \underset{m}{\overline{\mathfrak{K}}}{}^{(\eta)}_{\nu} = 0$$

ist.

Die jetzt vollständig bestimmten Funktionen $\underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\underset{m}{\overline{P}}\left|{\eta \atop z}\right|$ *sollen die zu den Charakteristiken* $\binom{A}{B}$, $\binom{\overline{A}}{\overline{B}}$ *gehörigen, auf den Punkt* η *sich beziehenden, von der Ordnung* m *algebraisch unendlich werdenden Elementarfunktionen genannt werden.*

Die bei diesen Elementarfunktionen auftretenden Konstanten $\mathfrak{K}$, $\overline{\mathfrak{K}}$ lassen sich durch die Werte, welche die nach z_η genommenen m^{ten} Derivierten der $2p$ Elementarfunktionen w, $\overline{w}$ für den Punkt η besitzen, ausdrücken. Um diese Ausdrücke zu erhalten, beziehe man die Fundamentalformel (F_2.) auf die Elementarfunktionen $\underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\overline{w}_\varrho|z|$, lasse also in der Formel (F_2.), nachdem man bei ihr den Summationsbuchstaben σ, um Verwechslungen mit der oben eingeführten festen Zahl σ vorzubeugen, durch τ ersetzt und zur Darstellung der Funktion $\overline{w}_\varrho|z|$ für das Gebiet des Punktes η die Gleichung $\overline{w}_\varrho|z| = \bar{c}_{\sigma 0} + c_{\sigma 1} z_\eta + \bar{c}_{\sigma 2} z_\eta^2 + \cdots$, bei der $\bar{c}_{\sigma 0} = \overline{w}_\varrho|\eta|$, $\bar{c}_{\sigma\mu} = \frac{1}{\mu!}\left(\frac{d^\mu \overline{w}_\varrho|\zeta|}{d\zeta_\eta^\mu}\right)_0$, ${\scriptstyle \mu=1,2,3,\cdots}$, ist, aufgestellt hat, an Stelle der darin vorkommenden Konstanten der Funktionen W, $\overline{W}$ die entsprechenden Konstanten der Funktionen $\underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\overline{w}_\varrho|z|$ treten. Man erhält so zunächst die Gleichung:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \left\{ \left(\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\varrho\nu'} - \delta_{\varrho\nu}\mathfrak{p} \right) \frac{\pi i}{\mathfrak{p}} \underset{m}{\mathfrak{K}}{}^{(\eta)}_{\nu} \right\} - \sum_{\nu=\mathfrak{p}+1}^{\nu=p} \underset{m}{\mathfrak{K}}{}^{(\eta)}_{\nu} \delta_{\varrho\nu} \pi i - 2\pi i m \bar{c}_{\sigma m} = 0,$$

und weiter dann, indem man die Summationen nach ν unter Beachtung der unter (4_m.) an erster Stelle stehenden Gleichung ausführt, auch $\bar{c}_{\sigma m}$ durch den ihm auf Grund der soeben für $\bar{c}_{\sigma\mu}$ aufgestellten Gleichung entsprechenden Wert ersetzt, die für $\varrho = 1, 2, \cdots, p$ geltende Beziehung:

$$-\pi i \underset{m}{\mathfrak{K}}{}^{(\eta)}_{\varrho} - 2\pi i \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d^m \overline{w}_\varrho|\zeta|}{d\zeta_\eta^m} \right)_0 = 0.$$

Beachtet man nun noch, daß die Charakteristiken $\binom{A}{B}$, $\binom{\overline{A}}{\overline{B}}$ gleichberechtigt sind, und daß bei der Vertauschung von $\binom{A}{B}$ mit $\binom{\bar{A}}{\bar{B}}$ $\underset{m}{\mathfrak{K}}{}_{\varrho}^{(\eta)}$ in $\underset{m}{\overline{\mathfrak{K}}}{}_{\varrho}^{(\eta)}$, $\overline{w}_{\varrho}|z|$ in $w_{\varrho}|z|$ übergeht, so erhält man, wenn man noch den Buchstaben ϱ in neuer Bezeichnung durch ν ersetzt, die Gleichungen:

$$(5_{m\cdot})\qquad \underset{m}{\mathfrak{K}}{}_{\nu}^{(\eta)} = -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m \overline{w}_{\nu}|\zeta|}{d\zeta_{\eta}^{m}}\right)_0, \qquad \underset{m}{\overline{\mathfrak{K}}}{}_{\nu}^{(\eta)} = -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m w_{\nu}|\zeta|}{d\zeta_{\eta}^{m}}\right)_0, \qquad \nu=1,2,\cdots,p,$$

und schließlich, indem man unter Beachtung der in Art. 3 des ersten Abschnittes gemachten Festsetzungen in bezug auf den Punkt η, insoferne dieser entweder einer der Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ oder einer der Punkte $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ oder endlich einer der Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$ sein kann, drei Fälle unterscheidet, die Gleichungen:

$$(6_{m\cdot})\qquad \begin{aligned}
&\underset{m}{\mathfrak{K}}{}_{\nu}^{(\varepsilon)} = -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m \overline{w}_{\nu}|\zeta|}{d\zeta^{m}}\right)_{\zeta=\varepsilon}, &&\underset{m}{\overline{\mathfrak{K}}}{}_{\nu}^{(\varepsilon)} = -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m w_{\nu}|\zeta|}{d\zeta^{m}}\right)_{\zeta=\varepsilon},\\
&\underset{m}{\mathfrak{K}}{}_{\nu}^{(\alpha)} = -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m \overline{w}_{\nu}|\alpha+\zeta_{\alpha}^{u}|}{d\zeta_{\alpha}^{m}}\right)_0, &&\underset{m}{\overline{\mathfrak{K}}}{}_{\nu}^{(\alpha)} = -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m w_{\nu}|\alpha+\zeta_{\alpha}^{u}|}{d\zeta_{\alpha}^{m}}\right)_0, \qquad \nu=1,2,\cdots,p,\\
&\underset{m}{\mathfrak{K}}{}_{\nu}^{(\infty)} = -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m \overline{w}_{\nu}|\zeta_{\infty}^{-1}|}{d\zeta_{\infty}^{m}}\right)_0, &&\underset{m}{\overline{\mathfrak{K}}}{}_{\nu}^{(\infty)} = -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m w_{\nu}|\zeta_{\infty}^{-1}|}{d\zeta_{\infty}^{m}}\right)_0.
\end{aligned}$$

4.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß die allgemeinste zu der angenommenen Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion W von der im Fundamentalsatze beschriebenen Art sich aus den in den beiden vorhergehenden Artikeln definierten Elementarfunktionen linear zusammensetzen läßt. Zu dem Ende bezeichne man die s Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ in der vorliegenden Reihenfolge mit $\eta_1, \cdots, \eta_s$, die zu ihnen beziehungsweise gehörigen Größen $z_1, \cdots, z_s$, der in Art. 3 des ersten Abschnittes gemachten Festsetzung entsprechend, mit $z_{\eta_1}, \cdots, z_{\eta_s}$, bilde alsdann mit Hilfe von $p+s$ der Bedingung $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \mathfrak{C}_{\nu} + 2\pi i \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_{\sigma} = 0$ genügenden Konstanten $\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, \mathfrak{A}_p$, $\mathfrak{L}_1, \cdots, \mathfrak{L}_s$, der $m_1 + \cdots + m_s$ beliebigen Konstanten $\mathfrak{L}_{\sigma 1}, \cdots, \mathfrak{L}_{\sigma m_{\sigma}}$, $\sigma=1,2,\cdots,s$, sowie der willkürlichen Konstante C die Funktion:

$$W(z) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\left(\mathfrak{L}_{\sigma} \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_{\sigma}\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_{\sigma 1} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta_{\sigma}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_{\sigma}} \underset{m_{\sigma}}{P}\left|\begin{matrix}\eta_{\sigma}\\ z\end{matrix}\right|\right) - \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}} \mathfrak{C}_{\varrho} w_{\varrho}|z| + \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=\mathfrak{p}+1}^{\varrho=p} \mathfrak{A}_{\varrho} w_{\varrho}|z| + C$$

und untersuche, wie diese Funktion $W(z)$ sich in der Fläche T'' verhält.

Unter Beachtung des Verhaltens der in dem Ausdrucke für $W(z)$ vorkommenden Elementarfunktionen erkennt man nun, daß $W(z)$ eine in der Fläche T'' einwertige Funktion der komplexen Veränderlichen z ist, die für jeden von den Punkten $\eta_1, \cdots, \eta_s$

verschiedenen Punkt z der Fläche T'' stetig ist, für den Punkt η_σ $(\sigma=1,2,\cdots,s)$ dagegen in derselben Weise unstetig wird wie die Funktion:

$$f_\sigma(z_{\eta_\sigma}) = \mathfrak{L}_\sigma \ln \frac{1}{z_{\eta_\sigma}} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{z_{\eta_\sigma}} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{z^2_{\eta_\sigma}} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{z^{m_\sigma}_{\eta_\sigma}},$$

sodaß also die Differenz $W(z) - f_\sigma(z_{\eta_\sigma})$ für den Punkt η_σ stetig bleibt, und deren Werte in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathscr{P}^+$, $\mathscr{P}^-$ in der Weise verknüpft sind, daß

$$\text{(S.)}\qquad \begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \{\, W(z)^+ = A_\nu W(z)^- + \mathfrak{A}_\nu,\\
&\text{längs } b_\nu \{\, W(z)^+ = B_\nu W(z)^- + \mathfrak{B}_\nu,\\
&\text{längs } c_\nu \{\, W(z)^+ = W(z)^- + \mathfrak{C}_\nu,
\end{aligned}\right\} \qquad \nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p},\\
&\left.\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \{\, W(z)^+ = W(z)^- + \mathfrak{A}_\nu,\\
&\text{längs } b_\nu \{\, W(z)^+ = W(z)^- + \mathfrak{K}_\nu,\\
&\text{längs } c_\nu \{\, W(z)^+ = W(z)^-,
\end{aligned}\right\} \qquad \nu = \mathfrak{p}+1, \cdots, p,\\
&\text{längs } l_\sigma \{\, W(z)^+ = W(z)^- + 2\pi i \mathfrak{L}_\sigma, \qquad \sigma = 1, 2, \cdots, s,
\end{aligned}$$

ist, wobei für $\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$:

$$\mathfrak{A}_\nu = \mathscr{A}_\nu \mathfrak{C}_\nu + (1 - A_\nu)\mathfrak{K}_\nu,$$
$$\mathfrak{B}_\nu = \mathscr{B}_\nu \mathfrak{C}_\nu + (1 - B_\nu)\mathfrak{K}_\nu$$

ist, und der Wert der Konstante $\mathfrak{K}_\nu$ für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ durch die Gleichung:

$$\mathfrak{K}_\nu = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \left(\mathfrak{L}_\sigma \underset{0}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta_\sigma)} + \mathfrak{L}_{\sigma 1} \underset{1}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta_\sigma)} + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma} \underset{m_\sigma}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\eta_\sigma)} \right) - \frac{1}{\pi i} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}} \mathfrak{C}_\varrho \mathfrak{K}_{\varrho\nu} + \frac{1}{\pi i} \sum_{\varrho=\mathfrak{p}+1}^{\varrho=p} \mathfrak{A}_\varrho \mathfrak{K}_{\varrho\nu} + C \sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\nu\nu'}$$

geliefert wird. Die Funktion $W(z)$ stellt daher eine zu der angenommenen Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion W von der im Fundamentalsatze beschriebenen Art dar, und zwar die allgemeinste derartige Funktion W, da die ihr zukommenden $p + m_1 + \cdots + m_s + s$ in den Funktionen f_σ und den Gleichungen (S.) auftretenden Konstanten $\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, \mathfrak{A}_p$, $\mathfrak{L}$ unbestimmte, nur der Bedingung $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \mathfrak{C}_\nu + 2\pi i \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0$ unterworfene Größen sind, und sie außerdem noch die willkürliche additive Konstante C enthält. Damit ist aber bewiesen, daß jede zu der angenommenen Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion W von der im Fundamentalsatze beschriebenen Art sich aus den definierten Elementarfunktionen linear zusammensetzen läßt, oder, was dasselbe, daß man aus dem Ausdrucke:

$$W(z) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \left(\mathfrak{L}_\sigma \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_\sigma \\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_{\sigma 1} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta_\sigma \\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma} \underset{m_\sigma}{P}\left|\begin{matrix}\eta_\sigma \\ z\end{matrix}\right| \right) - \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \mathfrak{C}_\varrho w_\varrho|z| + \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=\mathfrak{p}+1}^{\nu=p} \mathfrak{A}_\varrho w_\varrho|z| + C$$

die sämtlichen zu der angenommenen Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktionen W erhält, und zwar jede nur einmal, wenn man darin an Stelle des von den Konstanten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ und der Konstante C gebildeten Systems von $p + m_1 + \cdots + m_s + s + 1$ Konstanten ein jedes die Gleichung $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \mathfrak{C}_\nu + 2\pi i \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0$ nicht verletzende System von $p + m_1 + \cdots + m_s + s + 1$ Werten treten läßt.

In derselben Weise, wie es in Art. 4 des vorhergehenden Abschnittes an der entsprechenden Stelle geschehen ist, kann man jetzt hier unter wörtlicher Wiederholung des dort Gesagten den Begriff der Elementarfunktion von den ihm noch anhaftenden Beschränkungen befreien und damit den Begriff der allgemeinsten zu der angenommenen Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktion W in der Weise erweitern, daß man in dem soeben für W gewonnenen Ausdrucke $W(z)$, bei dem $\eta_1, \cdots, \eta_s$ die $s = q + r + t$ Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ beziehungsweise vertreten, $t, m_1, \cdots, m_s$ unbestimmte positive ganze Zahlen bezeichnen und die Konstanten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$, C nur der Gleichung $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \mathfrak{C}_\nu + 2\pi i \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0$ zu genügen haben, unter $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ t von den Punkten ∞, α verschiedene beliebige Punkte der Fläche T'' versteht, die also teilweise oder auch alle an der Begrenzung der Fläche T'' liegen können, wenn nur diese Punkte als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen. Zugleich kommen, wenn es sich um die Funktion $W(z)$ allein handelt, nur so viele Linien l_η in Betracht, als es unter den Größen $\mathfrak{L}_1, \cdots, \mathfrak{L}_s$ von Null verschiedene gibt, oder, was dasselbe, nur so viele Linien l_η, als in dem Ausdrucke für $W(z)$ Funktionen $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta \\ z\end{matrix}\right|$ wirklich vorkommen, und es sind diese Linien l_η, die zu den einzelnen Funktionen $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta \\ z\end{matrix}\right|$ im Rahmen der in Art. 4 des vorhergehenden Abschnittes genannten Bedingung willkürlich gezogen werden können, wenn sie bei der Funktion $W(z)$ zusammen auftreten, nur noch der Bedingung zu unterwerfen, daß sie getrennt verlaufen. Die aus der Fläche T'' durch Einführung der für die Funktion $W(z)$ in Betracht kommenden Linien l entstandene Fläche, in der die Funktion $W(z)$ einwertig ist, soll wieder T''' genannt werden, und es kann dann der für die frühere Fläche T''' mit Rücksicht auf die Darstellung der Funktion $W(z)$ durch Potenzreihen aufgestellte Begriff des Gebietes eines Punktes sofort auf diese neue Fläche T''' übertragen werden.

Die im vorstehenden angestellten Betrachtungen und gemachten Festsetzungen beziehen sich auf die zu irgend einer gemischten Charakteristik $\binom{A}{B} = \binom{A_1 \cdots A_\mathfrak{p} \;\; 1 \cdots 1}{B_1 \cdots B_\mathfrak{p} \;\; 1 \cdots 1}$

gehörigen Funktionen $W(z)$ und gelten daher auch für die zu der reziproken Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}\bar{A}\\ \bar{B}\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\bar{A}_1 & \cdots & \bar{A}_p & 1 & \cdots & 1\\ \bar{B}_1 & \cdots & \bar{B}_p & 1 & \cdots & 1\end{smallmatrix}\right)$ gehörigen Funktionen $\overline{W}(z)$. Werden aber zwei auf dasselbe Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_s$ sich beziehende Funktionen $W(z)$, $\overline{W}(z)$ zusammen betrachtet, so muß für beide eine und dieselbe Fläche T'' zu Grunde gelegt werden und zwar eine solche, welche aus T' dadurch hervorgeht, daß man zu jedem Punkte η, für den wenigstens eine der beiden Funktionen $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{0}{\overline{P}}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ in $W(z)$, $\overline{W}(z)$ wirklich vorkommt, eine Linie l_η zieht.

Schließlich kann man auch noch die am Schlusse von Art. 4 des vorhergehenden Abschnittes in bezug auf die Fundamentalformel (F_1.) angestellten Betrachtungen wörtlich auf die Fundamentalformel (F_2.) übertragen, also zeigen, daß die Fundamentalformel (F_2.) auch dann gilt, wenn unter den Punkten $\eta_1, \cdots, \eta_s$, auf welche sich die Funktionen $W(z)$, $\overline{W}(z)$ beziehen, Punkte der Begrenzung von T' vorkommen; nur müssen diese Punkte als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen.

5.

Es handelt sich jetzt darum, für die zu den gemischten Charakteristiken $\left(\begin{smallmatrix}A\\ B\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}A_1 & \cdots & A_p & 1 & \cdots & 1\\ B_1 & \cdots & B_p & 1 & \cdots & 1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}\bar{A}\\ \bar{B}\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\bar{A}_1 & \cdots & \bar{A}_p & 1 & \cdots & 1\\ \bar{B}_1 & \cdots & \bar{B}_p & 1 & \cdots & 1\end{smallmatrix}\right)$ gehörigen Elementarfunktionen $\underset{0}{P}$, $\underset{0}{\overline{P}}$, $\underset{m}{P}$, $\underset{m}{\overline{P}}$ dieselben Untersuchungen anzustellen, wie sie in Art. 5 des vorhergehenden Abschnittes für die zu den gewöhnlichen Charakteristiken $\left(\begin{smallmatrix}A\\ B\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}\bar{A}\\ \bar{B}\end{smallmatrix}\right)$ gehörigen Elementarfunktionen $\underset{0}{P}$, $\underset{0}{\overline{P}}$, $\underset{m}{P}$, $\underset{m}{\overline{P}}$ durchgeführt worden sind. Zu dem Ende bezeichne man wieder, unter σ_1, σ_2 irgend zwei voneinander verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2, \cdots, s$ verstehend, den σ_1^{ten} der s Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ mit η_1, den σ_2^{ten} mit η_2, beachte, daß die Gleichungen, welche die auf diese Punkte η_1, η_2 sich beziehenden Elementarfunktionen $\underset{0}{P}$, $\underset{0}{\overline{P}}$, $\underset{m}{P}$, $\underset{m}{\overline{P}}$ für die Gebiete eben dieser Punkte darstellen, genau dieselbe Form haben wie die zu Anfang des genannten Artikels aufgestellten Gleichungen, und lasse dann an Stelle des in der Fundamentalformel (F_2.) vorkommenden allgemeinen Funktionenpaares W, $\overline{W}$ die den sechs ebendort gewählten speziellen Funktionenpaaren hier entsprechenden Funktionenpaare treten. Man erhält dann Relationen zwischen den Größen $c, \bar{c}$ von genau derselben Form, wie die im genannten Artikel erhaltenen sie besitzen, und erkennt so zunächst, daß die Gleichungen (I.)—(VI.) in Art. 5 des vorhergehenden Abschnitts auch für die zu den gemischten Charakteristiken $\left(\begin{smallmatrix}A\\ B\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}\bar{A}\\ \bar{B}\end{smallmatrix}\right)$ gehörigen Elementarfunktionen $\underset{0}{P}$, $\underset{0}{\overline{P}}$, $\underset{m}{P}$, $\underset{m}{\overline{P}}$ gelten. Beachtet man dann noch, daß die Gleichungen (I.)—(VI.) die einzige Grundlage für alle weiteren in dem genannten Artikel angestellten Untersuchungen bilden, so erkennt man schließlich, daß die sämtlichen dort erhaltenen Resultate, vor allem die Gleichungen (1.)—(8.), auch für die zu den gemischten Charakteristiken $\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}A_1\cdots A_{\mathfrak{p}}\;1\cdots 1\\B_1\cdots B_{\mathfrak{p}}\;1\cdots 1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}\bar A\\\bar B\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\bar A_1\cdots \bar A_{\mathfrak{p}}\;1\cdots 1\\\bar B_1\cdots B_{\mathfrak{p}}\;1\cdots 1\end{smallmatrix}\right)$ gehörigen Elementarfunktionen $\underset{0}{P}, \underset{0}{\bar P}, \underset{m}{P}, \underset{m}{\bar P}$ gelten.

6.

Die Untersuchungen des Art. 4 haben gezeigt, daß der Ausdruck:

$$\begin{aligned} W(z) = &\sum_{\tau=1}^{\tau=t}\left(\mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)}\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_\tau\\z\end{smallmatrix}\right| + \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)}\underset{1}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_\tau\\z\end{smallmatrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{m_\tau}^{(\varepsilon_\tau)}\underset{m_\tau}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_\tau\\z\end{smallmatrix}\right|\right)\\ &+\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\left(\mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)}\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\z\end{smallmatrix}\right| + \mathfrak{L}_1^{(\alpha_\varrho)}\underset{1}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\z\end{smallmatrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{n_\varrho}^{(\alpha_\varrho)}\underset{n_\varrho}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\z\end{smallmatrix}\right|\right)\\ &+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\left(\mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)}\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\z\end{smallmatrix}\right| + \mathfrak{L}_1^{(\infty_\varkappa)}\underset{1}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\z\end{smallmatrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{p_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)}\underset{p_\varkappa}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\z\end{smallmatrix}\right|\right)\\ &-\frac{1}{\pi i}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=\mathfrak{p}}\mathfrak{C}_\sigma w_\sigma|z| + \frac{1}{\pi i}\sum_{\sigma=\mathfrak{p}+1}^{\sigma=p}\mathfrak{A}_\sigma w_\sigma|z| + C, \end{aligned}$$

bei dem $m_1, \cdots, m_t,\ n_1, \cdots, n_r,\ p_1, \cdots, p_q$ unbestimmte positive ganze Zahlen, die Buchstaben $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$, C unbestimmte, nur der Bedingung:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}}\mathfrak{C}_\nu + 2\pi i\left(\sum_{\tau=1}^{\tau=t}\mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)}\right) = 0$$

unterworfene Konstanten bezeichnen, der sich also von dem in Art. 4 für $W(z)$ aufgestellten Ausdrucke nur durch die Bezeichnung unterscheidet, die allgemeinste zu der angenommenen Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}A_1\cdots A_{\mathfrak{p}}\;1\cdots 1\\B_1\cdots B_{\mathfrak{p}}\;1\cdots 1\end{smallmatrix}\right)$ gehörige Funktion W darstellt. Das Verhalten dieser Funktion $W = W(z)$ für die Punkte $\varepsilon, \alpha, \infty$ ist von der Art, daß

für das Gebiet des Punktes ε_τ $\left\{ W(z) = \mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)}\ln\frac{1}{z-\varepsilon_\tau} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau}\mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)}\frac{1}{(z-\varepsilon_\tau)^\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}c_\lambda^{(\varepsilon_\tau)}(z-\varepsilon_\tau)^\lambda, \right.$ $\quad \tau=1,2,\cdots,t,$

für das Gebiet des Punktes α_ϱ $\left\{ W(z) = \mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)}\ln\frac{1}{(z-\alpha_\varrho)^{\frac{1}{\mu_\varrho}}} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho}\mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)}\frac{1}{(z-\alpha_\varrho)^{\frac{\lambda}{\mu_\varrho}}} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}(z-\alpha_\varrho)^{\frac{\lambda}{\mu_\varrho}}, \right.$ $\quad \varrho=1,2,\cdots,r,$

für das Gebiet des Punktes $\infty_\varkappa$ $\left\{ W(z) = \mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)}\ln z^{\frac{1}{\nu_\varkappa}} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p_\varkappa}\mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\varkappa)} z^{\frac{\lambda}{\nu_\varkappa}} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}c_\lambda^{(\infty_\varkappa)}\frac{1}{z^{\frac{\lambda}{\nu_\varkappa}}}, \right.$ $\quad \varkappa=1,2,\cdots,q,$

ist, während für das Gebiet eines von den Punkten $\varepsilon, \alpha, \infty$ verschiedenen Punktes $z=a$

$$W(z) = c_0^{(a)} + c_1^{(a)}(z-a) + c_2^{(a)}(z-a)^2 + \cdots.$$

ist. Dabei bezeichnen $c^{(\varepsilon)}$, $c^{(\alpha)}$, $c^{(\infty)}$, $c^{(a)}$ von z unabhängige Größen. Was dagegen das Verhalten der Funktion $W(z)$ längs der Schnitte a, b, c, l betrifft, so ist, dem in Art. 4 Ausgeführten entsprechend, hier

$$\left.\begin{array}{ll} \text{längs } a_\nu \{ & W(z)^+ = A_\nu W(z)^- + \mathfrak{A}_\nu, \\ \text{längs } b_\nu \{ & W(z)^+ = B_\nu W(z)^- + \mathfrak{B}_\nu, \\ \text{längs } c_\nu \{ & W(z)^+ = W(z)^- + \mathfrak{C}_\nu, \end{array}\right\} \qquad \nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p},$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{längs } a_\nu \{ & W(z)^+ = W(z)^- + \mathfrak{A}_\nu, \\ \text{längs } b_\nu \{ & W(z)^+ = W(z)^- + \mathfrak{K}_\nu, \\ \text{längs } c_\nu \{ & W(z)^+ = W(z)^-, \end{array}\right\} \qquad \nu = \mathfrak{p}+1, \cdots, p,$$

$$\text{längs } l_\eta \{ \; W(z)^+ = W(z)^- + 2\pi i \mathfrak{L}_0^{(\eta)}, \qquad \eta = \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \infty_1, \cdots, \infty_q$$

wobei für $\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$:

$$\mathfrak{A}_\nu = \mathcal{A}_\nu \mathfrak{C}_\nu + (1 - A_\nu)\mathfrak{K}_\nu,$$

$$\mathfrak{B}_\nu = \mathcal{B}_\nu \mathfrak{C}_\nu + (1 - B_\nu)\mathfrak{K}_\nu$$

ist, und der Wert der Konstante $\mathfrak{K}_\nu$ für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ durch die Gleichung:

$$\mathfrak{K}_\nu = \sum_{\tau=1}^{\tau=t} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m_\tau} \mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)} \underset{\lambda}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\varepsilon_\tau)} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n_\varrho} \mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)} \underset{\lambda}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\alpha_\varrho)} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=p_\varkappa} \mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\varkappa)} \underset{\lambda}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\infty_\varkappa)}$$

$$- \frac{1}{\pi i} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\mathfrak{p}} \mathfrak{C}_\sigma \mathfrak{K}_{\sigma\nu} + \frac{1}{\pi i} \sum_{\sigma=\mathfrak{p}+1}^{\sigma=p} \mathfrak{A}_\sigma \mathfrak{K}_{\sigma\nu} + C \sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\nu\nu'}$$

geliefert wird.

Aus dem Vorstehenden erkennt man nun, daß das Verhalten der n^{ten} Derivierten $\frac{d^n W}{dz^n}$ der Funktion $W = W(z)$ für die Gebiete der Punkte ε_τ, α_ϱ, $\infty_\varkappa$, a und längs der Begrenzung von T'' durch Gleichungen charakterisiert wird, welche genau dieselbe Form haben wie die in Art. 6 des vorhergehenden Abschnittes an der entsprechenden Stelle aufgestellten, trotzdem die Größen $A_{\mathfrak{p}+1}$, $B_{\mathfrak{p}+1}$; $\cdots$; A_p, B_p hier sämtlich den Wert 1 besitzen. Daraus folgt aber zunächst, daß die in der Fläche T'' einwertige Funktion $\frac{d^n W}{dz^n}$ eine zur Charakteristik $\left(\frac{A}{B}\right)$ gehörige Funktion W ist, und weiter dann — da die in dem genannten Artikel an der entsprechenden Stelle gemachten Schlüsse sich mit geringen, durch die hier vorkommenden uneigentlichen Faktorenpaare $A_{\mathfrak{p}+1}$, $B_{\mathfrak{p}+1}$; $\cdots$; A_p, B_p bedingten, Modifikationen auf den vorliegenden Fall übertragen lassen — daß die dort erhaltene Gleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{d^n W(z)}{dz^n} = & \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\left\{(-1)^n(n-1)!\,\mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)}\,\underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau}(-\lambda|n)\,\mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)}\,\underset{n+\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right|\right\} \\
\text{(D.)}\qquad & + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\left\{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1}\left(\frac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle| n\right) c^{(\alpha_\varrho)}_{n\mu_\varrho-\lambda}\,\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \frac{(-1)^n}{\mu_\varrho}(n-1)!\,\mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)}\,\underset{n\mu_\varrho}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho}\left(-\frac{\lambda}{\mu_\varrho}\middle| n\right)\mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)}\,\underset{n\mu_\varrho+\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|\right\} \\
& + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}{}'\left\{\sum_{\lambda=n\iota_\varkappa+1}^{\lambda=p_\varkappa}\left(\frac{\lambda}{\iota_\varkappa}\middle| n\right)\mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\varkappa)}\,\underset{\lambda-n\iota_\varkappa}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|\right\},
\end{aligned}$$

welche die Darstellung der n^{ten} Derivierten der zu einer gewöhnlichen Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktion $W(z)$ durch Elementarfunktionen enthält, auch im vorliegenden Falle, wo $W(z)$ zu der gemischten Charakteristik $\binom{A}{B} = \begin{pmatrix}A_1\cdots A_\mathfrak{p} & 1\cdots 1\\ B_1\cdots B_\mathfrak{p} & 1\cdots 1\end{pmatrix}$ gehört, die Darstellung von $\frac{d^n W(z)}{dz^n}$ durch Elementarfunktionen liefert. Beachtet man nun noch, daß die den Elementarfunktionen $w_\tau|z|$, $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|$, $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\ z\end{matrix}\right|$, $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\ z\end{matrix}\right|$, $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|$, $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\ z\end{matrix}\right|$, $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\ z\end{matrix}\right|$ beziehungsweise zukommenden Größen $c^{(\alpha_\varrho)}$ sich hier genau so ausdrücken lassen wie in Art. 6 des vorhergehenden Abschnittes, so erkennt man schließlich, daß die dort abgeleiteten Gleichungen (D_1.)—(D_7'.) und damit zugleich die auf Grund dieser Gleichungen ebendort abgeleiteten Gleichungen (E_ε.), (E_α.), (E_∞.) sowie die im Anschlusse an diese letzteren Gleichungen gemachten Bemerkungen auch im vorliegenden Falle, wo $\binom{A}{B} = \begin{pmatrix}A_1\cdots A_\mathfrak{p} & 1\cdots 1\\ B_1\cdots B_\mathfrak{p} & 1\cdots 1\end{pmatrix}$, $\binom{\bar A}{B} = \begin{pmatrix}\bar A_1\cdots \bar A_\mathfrak{p} & 1\cdots 1\\ B_1\cdots B_\mathfrak{p} & 1\cdots 1\end{pmatrix}$ ist, gelten.

7.

Man lasse jetzt in dem zu Anfang des vorhergehenden Artikels aufgestellten Ausdrucke an Stelle einer jeden der $t+r+q$ Konstanten $\mathfrak{L}_0$, der $\mathfrak{p}$ Konstanten $\mathfrak{C}$ und der $p-\mathfrak{p}$ Konstanten $\mathfrak{A}$ die Null treten. Der dadurch entstehende Ausdruck:

$$\begin{aligned}
W(z) = & \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\left(\mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)}\,\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{m_\tau}^{(\varepsilon_\tau)}\,\underset{m_\tau}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right|\right) \\
& + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\left(\mathfrak{L}_1^{(\alpha_\varrho)}\,\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{n_\varrho}^{(\alpha_\varrho)}\,\underset{n_\varrho}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|\right) \\
& + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\left(\mathfrak{L}_1^{(\infty_\varkappa)}\,\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{p_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)}\,\underset{p_\varkappa}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|\right) + C,
\end{aligned}$$

bei dem $m_1, \cdots, m_t$, $n_1, \cdots, n_r$, $p_1, \cdots, p_q$ unbestimmte positive ganze Zahlen bezeichnen, und die Konstanten $\mathfrak{L}$, C keinen Bedingungen unterworfen sind, stellt dann die allgemeinste zur Charakteristik $\binom{A}{B} = \begin{pmatrix}A_1\cdots A_\mathfrak{p} & 1\cdots 1\\ B_1\cdots B_\mathfrak{p} & 1\cdots 1\end{pmatrix}$ gehörige Funktion W dar, welche in je zwei zu einem der Schnitte $c_1, \cdots, c_\mathfrak{p}$, $a_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, a_p$ oder der $t+r+q$ Schnitte l

gehörigen entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ denselben Wert besitzt. Infolgedessen ist die Funktion $W(z)$ schon in der aus T'' durch Aufhebung der Schnitte l entstehenden Fläche T' einwertig, und es darf daher für die Untersuchung dieser Funktion die Fläche T' zu Grunde gelegt werden. Noch möge für das Folgende vorausgesetzt werden, daß für $\varrho = 1, 2, \cdots, r$ $n_\varrho > \mu_\varrho$ ist; dadurch wird die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beschränkt, da man von dem Falle, wo $n_\varrho > \mu_\varrho$, etwa $n_\varrho = \mu_\varrho + g$ ist, zu dem Falle, wo $n_\varrho \lesseqgtr \mu_\varrho$, etwa $n_\varrho = \mu_\varrho + 1 - h$ ist, auch dadurch übergehen kann, daß man den Konstanten $\mathfrak{L}^{(\alpha_\varrho)}_{\mu_\varrho+g}$, $\mathfrak{L}^{(\alpha_\varrho)}_{\mu_\varrho+g-1}$, $\cdots$, $\mathfrak{L}^{(\alpha_\varrho)}_{\mu_\varrho+2-h}$ den Wert Null erteilt.

Die definierte Funktion $W(z)$ läßt sich nun auch durch die Derivierte einer zu der Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktion W und p ausgezeichnete Funktionen $W(z)$ der hier betrachteten Art linear darstellen. Um diese Darstellung zu erhalten, setze man zunächst voraus, daß keiner der Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ der Begrenzung von T' angehöre, und verstehe unter a einen im Innern von T' gelegenen, von den Punkten ε, α, ∞ verschiedenen Punkt, bilde alsdann das Produkt:

$$\Phi(z) = W(z)\, \overline{P}_1\left|\begin{matrix} a \\ z \end{matrix}\right|$$

der Funktion $W(z)$ und der zur Charakteristik $\binom{\overline{A}}{\overline{B}}$ gehörigen, ebenfalls in T' einwertigen Elementarfunktion $\overline{P}_1\left|\begin{matrix} a \\ z \end{matrix}\right|$ und bestimme den Wert J des in positiver Richtung über die von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c gebildete Begrenzung $\mathfrak{R}$ der Fläche T' zu erstreckenden Integrals $\int \Phi(z)\,dz$, indem man in derselben Weise vorgeht, wie es im ersten Teile, in Art. 1 des siebenten Abschnittes, zu ähnlichem Zwecke geschehen ist. Man erhält dann für J zunächst die Gleichung:

$$J = \int\limits_{\mathfrak{R}}^{+} \Phi(z)\,dz = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int\limits_{[a_\nu^+,\, b_\nu^+,\, c_\nu^+]}^{+} \left(\Phi(z)^+ - \Phi(z)^-\right) dz,$$

und schließlich, indem man beachtet, daß hier, nachdem man noch für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ zur Abkürzung

$$\mathfrak{K}_\nu = \sum_{\tau=1}^{\tau=t} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau} \mathfrak{L}^{(\varepsilon_\tau)}_\lambda \mathfrak{K}^{(\varepsilon_\tau)}_{\nu\,\lambda} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho} \mathfrak{L}^{(\alpha_\varrho)}_\lambda \mathfrak{K}^{(\alpha_\varrho)}_{\nu\,\lambda} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p_\varkappa} \mathfrak{L}^{(\infty_\varkappa)}_\lambda \mathfrak{K}^{(\infty_\varkappa)}_{\nu\,\lambda} + C \sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\nu\nu'},$$

gesetzt hat,

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{längs } a_\nu \Big\{\, W(z)^+ = A_\nu W(z)^- + (1-A_\nu)\mathfrak{K}_\nu, & \overline{P}_1\left|\begin{matrix} a \\ z \end{matrix}\right|^+ = \overline{A}_\nu \overline{P}_1\left|\begin{matrix} a \\ z \end{matrix}\right|^- - 2(1-\overline{A}_\nu)\dfrac{dw_\nu|a|}{da}, \\
\text{längs } b_\nu \Big\{\, W(z)^+ = B_\nu W(z)^- + (1-B_\nu)\mathfrak{K}_\nu, & \overline{P}_1\left|\begin{matrix} a \\ z \end{matrix}\right|^+ = \overline{B}_\nu \overline{P}_1\left|\begin{matrix} a \\ z \end{matrix}\right|^- - 2(1-\overline{B}_\nu)\dfrac{dw_\nu|a|}{da}, \\
\text{längs } c_\nu \Big\{\, W(z)^+ = \quad W(z)^-, & \overline{P}_1\left|\begin{matrix} a \\ z \end{matrix}\right|^+ = \quad \overline{P}_1\left|\begin{matrix} a \\ z \end{matrix}\right|^-,
\end{array}\right\}\ \nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p},$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \Big\{\, W(z)^+ = W(z)^-, && \underset{1}{\bar P}\left|{a \atop z}\right|^{+} = \underset{1}{\bar P}\left|{a \atop z}\right|^{-},\\
&\text{längs } b_\nu \Big\{\, W(z)^+ = W(z)^- + \mathfrak{K}_\nu, && \underset{1}{\bar P}\left|{a \atop z}\right|^{+} = \underset{1}{\bar P}\left|{a \atop z}\right|^{-} - 2\,\frac{d w_\nu|a|}{d a},\\
&\text{längs } c_\nu \Big\{\, W(z)^+ = W(z)^-, && \underset{1}{\bar P}\left|{a \atop z}\right|^{+} = \underset{1}{\bar P}\left|{a \atop z}\right|^{-},
\end{aligned}\right\}\ \nu = \mathfrak{p}+1, \cdots, p,$$

ist, und daß daher die Werte von $\Phi(z)$ in je zwei zu einem der Schnitte a, b, c gehörigen entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ in der Weise verknüpft sind, daß

$$\left.\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \Big\{\, \Phi(z)^+ = \Phi(z)^- - 2\,\frac{d w_\nu|a|}{d a}\Big(W(z)^+ - W(z)^-\Big) + \mathfrak{K}_\nu\Big(\underset{1}{\bar P}\left|{a \atop z}\right|^{+} - \underset{1}{\bar P}\left|{a \atop z}\right|^{-}\Big),\\
&\text{längs } b_\nu \Big\{\, \Phi(z)^+ = \Phi(z)^- - 2\,\frac{d w_\nu|a|}{d a}\Big(W(z)^+ - W(z)^-\Big) + \mathfrak{K}_\nu\Big(\underset{1}{\bar P}\left|{a \atop z}\right|^{+} - \underset{1}{\bar P}\left|{a \atop z}\right|^{-}\Big),\\
&\text{längs } c_\nu \Big\{\, \Phi(z)^+ = \Phi(z)^-,
\end{aligned}\right\}\ \nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p},$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \Big\{\, \Phi(z)^+ = \Phi(z)^-,\\
&\text{längs } b_\nu \Big\{\, \Phi(z)^+ = \Phi(z)^- - 2\,\frac{d w_\nu|a|}{d a}\, W(z)^+ + \mathfrak{K}_\nu \underset{1}{\bar P}\left|{a \atop z}\right|^{+} + 2\,\frac{d w_\nu|a|}{d a}\,\mathfrak{K}_\nu,\\
&\text{längs } c_\nu \Big\{\, \Phi(z)^+ = \Phi(z)^-,
\end{aligned}\right\}\ \nu = \mathfrak{p}+1, \cdots, p,$$

ist, die Gleichung:

$$J = -2\sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \frac{d w_\nu|a|}{d a} \int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} W(z)\,dz - 2\sum_{\nu=\mathfrak{p}+1}^{\nu=p} \frac{d w_\nu|a|}{d a} \int\limits_{b_\nu^+}^{+} W(z)\,dz$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \mathfrak{K}_\nu \int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} \underset{1}{\bar P}\left|{a \atop z}\right| dz + \sum_{\nu=\mathfrak{p}+1}^{\nu=p} \mathfrak{K}_\nu \int\limits_{b_\nu^+}^{+} \underset{1}{\bar P}\left|{a \atop z}\right| dz.$$

Das Integral J ist aber auch gleich der Summe der auf die Punkte $\eta = \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$; $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$; $\infty_1, \cdots, \infty_q$; a sich beziehenden Integrale $\int\limits_{(\eta)}^{+} \Phi(z)\,dz$ und kann daher auch auf Grund der Gleichung:

$$J = \sum_{\tau=1}^{\tau=t} \int\limits_{(\varepsilon_\tau)}^{+} \Phi(z)\,dz + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \int\limits_{(\alpha_\varrho)}^{+} \Phi(z)\,dz + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \int\limits_{(\infty_\varkappa)}^{+} \Phi(z)\,dz + \int\limits_{(a)}^{+} \Phi(z)\,dz$$

ausgewertet werden. Man erhält dann, wie ein Blick auf die in Art. 7 des vorhergehenden Abschnittes an der entsprechenden Stelle durchgeführten Untersuchungen zeigt, für J, genau so wie in dem genannten Artikel, die Gleichung:

$$
\begin{aligned}
J = \;& 2\pi i \sum_{\tau=1}^{\tau=t} \left\{ \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)} \frac{d P_0\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_\tau\\ a\end{smallmatrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau-1}{}' \frac{1}{\lambda}\, \mathfrak{L}_{\lambda+1}^{(\varepsilon_\tau)} \frac{d P_\lambda\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_\tau\\ a\end{smallmatrix}\right|}{da} \right\} \\
& + 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \left\{ \mu_\varrho \mathfrak{L}_{\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} \frac{d P_0\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ a\end{smallmatrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho-\mu_\varrho}{}' \frac{\mu_\varrho}{\lambda}\, \mathfrak{L}_{\lambda+\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} \frac{d P_\lambda\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ a\end{smallmatrix}\right|}{da} \right\} \\
& - 2\pi i \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \left\{ \iota_\varkappa\, c_{\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)} \frac{d P_0\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ a\end{smallmatrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota_\varkappa}{}' \frac{\iota_\varkappa}{\lambda}\, c_{\iota_\varkappa-\lambda}^{(\infty_\varkappa)} \frac{d P_\lambda\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ a\end{smallmatrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda=\iota_\varkappa+1}^{\lambda=\iota_\varkappa+p_\varkappa}{}' \frac{\iota_\varkappa}{\lambda}\, \mathfrak{L}_{\lambda-\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)} \frac{d P_\lambda\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ a\end{smallmatrix}\right|}{da} \right\} \\
& + 2\pi i\, W(a).
\end{aligned}
$$

Setzt man nun die beiden für J erhaltenen Ausdrücke einander gleich, läßt bei der entstehenden Gleichung in neuer Bezeichnung zunächst an Stelle des Buchstabens z den Buchstaben ζ, hierauf an Stelle des Buchstabens a den Buchstaben z treten und löst alsdann die Gleichung nach $W(z)$ auf, so erhält man für die Funktion $W(z)$ die für jeden von den Punkten ε, α, ∞ verschiedenen inneren Punkt z der Fläche T' geltende Darstellung:

$$
\begin{aligned}
W(z) = & - \sum_{\tau=1}^{\tau=t} \left\{ \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)} \frac{d P_0\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau-1}{}' \frac{1}{\lambda}\, \mathfrak{L}_{\lambda+1}^{(\varepsilon_\tau)} \frac{d P_\lambda\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz} \right\} \\
& - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \left\{ \mu_\varrho \mathfrak{L}_{\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} \frac{d P_0\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho-\mu_\varrho}{}' \frac{\mu_\varrho}{\lambda}\, \mathfrak{L}_{\lambda+\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} \frac{d P_\lambda\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz} \right\} \\
& + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \left\{ \iota_\varkappa\, c_{\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)} \frac{d P_0\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota_\varkappa}{}' \frac{\iota_\varkappa}{\lambda}\, c_{\iota_\varkappa-\lambda}^{(\infty_\varkappa)} \frac{d P_\lambda\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz} + \sum_{\lambda=\iota_\varkappa+1}^{\lambda=\iota_\varkappa+p_\varkappa}{}' \frac{\iota_\varkappa}{\lambda}\, \mathfrak{L}_{\lambda-\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)} \frac{d P_\lambda\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz} \right\} \\
& - \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \frac{d w_\nu|z|}{dz} \int\limits_{[a_\nu^\pm,\, b_\nu^\pm]}^{+} W(\zeta)\, d\zeta - \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=\mathfrak{p}+1}^{\nu=p} \frac{d w_\nu|z|}{dz} \int\limits_{b_\nu^+}^{+} W(\zeta)\, d\zeta \\
& + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \mathfrak{K}_\nu \int\limits_{[a_\nu^\pm,\, b_\nu^\pm]}^{+} P_1\left|\begin{smallmatrix}z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=\mathfrak{p}+1}^{\nu=p} \mathfrak{K}_\nu \int\limits_{b_\nu^+}^{+} \overline{P}_1\left|\begin{smallmatrix}z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| d\zeta.
\end{aligned}
$$

Die hierbei auftretenden Konstanten $c_0^{(\infty_\varkappa)}, c_1^{(\infty_\varkappa)}, \cdots, c_{\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)}$ sind die Koeffizienten, welche in der Entwicklung der Funktion $W(z)$ für das Gebiet des Punktes $\infty_\varkappa$ den Potenzen $z_{\infty_\varkappa}^0, z_{\infty_\varkappa}^1, \cdots, z_{\infty_\varkappa}^{\iota_\varkappa}$ beziehungsweise zukommen. Nach der zu Anfang der Untersuchung gemachten, auf den Übergang von dem der Ableitung der Formel zu Grunde gelegten Falle $n_\varrho > \mu_\varrho$ $(\varrho = 1, 2, \cdots, r)$ zu dem Falle $n_\varrho \gtreqless \mu_\varrho$ sich beziehenden Bemerkung sind bei dem zu einem bestimmten Index ϱ gehörigen Gliede der auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung in der zweiten Zeile stehenden Summe, wenn $n_\varrho = \mu_\varrho$ ist, alle Terme bis auf den ersten, wenn dagegen $n_\varrho < \mu_\varrho$ ist, alle Terme überhaupt zu unterdrücken, sodaß also für $n_\varrho < \mu_\varrho$ das ganze Glied in Wegfall kommt.

Die auf der rechten Seite der für $W(z)$ gewonnenen Gleichung vorkommenden Integrale sollen jetzt unter der, für die Herleitung dieser Gleichung gemachten, Voraussetzung, daß die Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ sowie der zu Anfang mit a bezeichnete Punkt z im Innern der Fläche T'' liegen, näher untersucht werden. Zwei für diese Untersuchung nötige Hilfsformeln mögen zunächst abgeleitet werden.

Man beziehe die nach Art. 6 auch im vorliegenden Falle für jeden Punkt z der Fläche T'' geltende Formel (E_2.) des Art. 6 des vorhergehenden Abschnittes auf einen Begrenzungspunkt $z = \zeta$, multipliziere linke und rechte Seite mit $d\zeta$ und integriere das eine Mal, unter ν eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$ verstehend, in positiver Richtung über die beiden Seiten der Schnitte a_ν, b_ν, das andere Mal, unter ν eine Zahl aus der Reihe $\mathfrak{p}+1, \cdots, p$ verstehend, in positiver Richtung über die positive Seite des Schnittes b_ν. Beachtet man nun, daß im ersten Falle für $m = 1, 2, 3, \cdots$

$$\int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\zeta\\ \varepsilon\end{matrix}\right| d\zeta = \frac{1}{(m-1)!} \int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} \frac{d^m \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ \zeta\end{matrix}\right|}{d\zeta^m}\, d\zeta \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p})$$

ist, und daß sich als Wert des hier rechts stehenden Integrals für $m = 1$ die der Funktion $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|$ längs c_ν zukommende Konstante $\mathfrak{C}_\nu = -\frac{2\pi i}{\mathfrak{p}}$, für $m = 2, 3, \cdots$ die der Funktion $\frac{d^{m-1} \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|}{dz^{m-1}}$ längs c_ν zukommende Konstante $\mathfrak{C}_\nu = 0$ ergibt, daß also der Wert des links stehenden Integrals für $m = 1, 2, 3, \cdots$ durch $-\delta_{m1}\frac{2\pi i}{\mathfrak{p}}$ dargestellt werden kann, wenn man unter δ_{m1} eine Größe versteht, die für $m = 1$ den Wert 1, für $m = 2, 3, \cdots$ den Wert 0 besitzt, so erhält man die für jeden von den Punkten α, ∞ verschiedenen inneren Punkt ε der Fläche T'' geltende Hilfsformel:

$$(\mathrm{H}_1.) \qquad \int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ \zeta\end{matrix}\right| d\zeta = \delta_{m1}\frac{2\pi i}{\mathfrak{p}} + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\varrho-1} \frac{\left(\frac{m\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\,\middle|\, m\right)}{m\mu_\varrho-\lambda}\left(\int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} \underset{m\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{matrix}\right| d\zeta\right) \underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \varepsilon\end{matrix}\right|.$$
$$(\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p})$$

Beachtet man dann weiter, daß im zweiten Falle für $m = 1, 2, 3, \cdots$

$$\int\limits_{b_\nu^+}^{+} \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\zeta\\ \varepsilon\end{matrix}\right| d\zeta = \frac{1}{(m-1)!} \int\limits_{b_\nu^+}^{+} \frac{d^m \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ \zeta\end{matrix}\right|}{d\zeta^m}\, d\zeta \qquad (\nu = \mathfrak{p}+1, \cdots, p)$$

ist, und daß der Wert des hier rechts stehenden Integrals für $m=1$ der Differenz $\mathfrak{C}_\nu - \mathfrak{A}_\nu$ der der Funktion $P\Big|{\varepsilon \atop z}\Big|_0$ längs c_ν, a_ν beziehungsweise zukommenden Konstanten $\mathfrak{C}_\nu = 0$, $\mathfrak{A}_\nu = 0$, für $m = 2, 3, \cdots$ der Differenz der der Funktion $\dfrac{d^{m-1} P\Big|{\varepsilon \atop z}\Big|_0}{dz^{m-1}}$ längs c_ν, a_ν beziehungsweise zukommenden Konstanten $\mathfrak{C}_\nu = 0$, $\mathfrak{A}_\nu = 0$ gleich ist, daß also das links stehende Integral für $m = 1, 2, 3, \cdots$ den Wert 0 besitzt, so erhält man die für jeden von den Punkten α, ∞ verschiedenen inneren Punkt ε der Fläche T' geltende Hilfsformel:

$$(\mathrm{H}_2.)\qquad \int\limits_{b_\nu^+}^{+} P_m\Big|{\varepsilon \atop \zeta}\Big|\, d\zeta = \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\varrho-1}\frac{\left(\frac{m\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\Big| m\right)}{m\mu_\varrho-\lambda}\left(\int\limits_{b_\nu^+}^{+} P_{m\mu_\varrho-\lambda}\Big|{\alpha_\varrho \atop \zeta}\Big|\, d\zeta\right)\bar{P}_\lambda\Big|{\alpha_\varrho \atop \varepsilon}\Big|.$$
$$(\nu = \mathfrak{p}+1, \cdots, p)$$

Was nun die an erster Stelle zu untersuchenden, nur von den Punkten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ abhängigen, Integrale $\int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} W(\zeta)\, d\zeta$ $(\nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p})$, $\int\limits_{b_\nu^+}^{+} W(\zeta)\, d\zeta$ $(\nu=\mathfrak{p}+1,\cdots,p)$ betrifft, so erhält man, wenn man die darin vorkommende Größe $W(\zeta)$ auf Grund der zu Anfang dieses Artikels aufgestellten, die Funktion $W(z)$ für jeden Punkt z der Fläche T' definierenden Gleichung durch den ihr entsprechenden Ausdruck ersetzt, für das erste Integral die Gleichung:

$$(1_1.)\quad \int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} W(\zeta)\, d\zeta = \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\sum_{m=1}^{m=m_\tau}\mathfrak{L}_m^{(\varepsilon_\tau)}\int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} P_m\Big|{\varepsilon_\tau \atop \zeta}\Big|\, d\zeta + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{m=1}^{m=n_\varrho}\mathfrak{L}_m^{(\alpha_\varrho)}\int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} P_m\Big|{\alpha_\varrho \atop \zeta}\Big|\, d\zeta + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{m=1}^{m=p_\varkappa}\mathfrak{L}_m^{(\infty_\varkappa)}\int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} P_m\Big|{\infty_\varkappa \atop \zeta}\Big|\, d\zeta,$$
$$(\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p})$$

für das zweite Integral die Gleichung:

$$(1_2.)\quad \int\limits_{b_\nu^+}^{+} W(\zeta)\, d\zeta = \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\sum_{m=1}^{m=m_\tau}\mathfrak{L}_m^{(\varepsilon_\tau)}\int\limits_{b_\nu^+}^{+} P_m\Big|{\varepsilon_\tau \atop \zeta}\Big|\, d\zeta + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{m=1}^{m=n_\varrho}\mathfrak{L}_m^{(\alpha_\varrho)}\int\limits_{b_\nu^+}^{+} P_m\Big|{\alpha_\varrho \atop \zeta}\Big|\, d\zeta + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{m=1}^{m=p_\varkappa}\mathfrak{L}_m^{(\infty_\varkappa)}\int\limits_{b_\nu^+}^{+} P_m\Big|{\infty_\varkappa \atop \zeta}\Big|\, d\zeta,$$
$$(\nu = \mathfrak{p}+1, \cdots, p)$$

und schließlich, wenn man bei jeder dieser beiden Gleichungen das auf ihrer rechten Seite an erster Stelle stehende Integral auf Grund der Hilfsformeln $(\mathrm{H}_1.)$, $(\mathrm{H}_2.)$ beziehungsweise durch Elementarfunktionen mit dem Argument ε_τ darstellt, die Gleichungen:

$$(2_1.)\quad \int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} W(\zeta)\, d\zeta = K_\nu^{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)}, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p})$$

$$(2_2.)\quad \int\limits_{b_\nu^+}^{+} W(\zeta)\, d\zeta = K_\nu^{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)}, \qquad (\nu = \mathfrak{p}+1, \cdots, p)$$

wobei zur Abkürzung für $\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$

$$(3_1.)\quad \begin{aligned} K_\nu^{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)} = &\sum_{\tau=1}^{\tau=t}\sum_{m=1}^{m=m_\tau}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\varrho-1} \frac{\mathfrak{L}_m^{(\varepsilon_\tau)}}{(m-1)!}\,\frac{\left(\frac{m\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\Big| m\right)}{m\mu_\varrho-\lambda}\left(\int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} P_{m\mu_\varrho-\lambda}\left|{\alpha_\varrho \atop \zeta}\right| d\zeta\right)\bar{P}_\lambda\left|{\alpha_\varrho \atop \varepsilon_\tau}\right| \\ &+\frac{2\pi i}{\mathfrak{p}}\sum_{\tau=1}^{\tau=t}\mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{m=1}^{m=n_\varrho}\mathfrak{L}_m^{(\alpha_\varrho)}\int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} P_m\left|{\alpha_\varrho \atop \zeta}\right| d\zeta + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{m=1}^{m=p_\varkappa}\mathfrak{L}_m^{(\infty_\varkappa)}\int\limits_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} P_m\left|{\infty_\varkappa \atop \zeta}\right| d\zeta, \end{aligned}$$

für $\nu = \mathfrak{p}+1, \cdots, p$ dagegen

$$(3_2.)\quad \begin{aligned} K_\nu^{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)} = &\sum_{\tau=1}^{\tau=t}\sum_{m=1}^{m=m_\tau}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\varrho-1} \frac{\mathfrak{L}_m^{(\varepsilon_\tau)}}{(m-1)!}\,\frac{\left(\frac{m\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\Big| m\right)}{m\mu_\varrho-\lambda}\left(\int\limits_{b_\nu^+}^{+} P_{m\mu_\varrho-\lambda}\left|{\alpha_\varrho \atop \zeta}\right| d\zeta\right)\bar{P}_\lambda\left|{\alpha_\varrho \atop \varepsilon_\tau}\right| \\ &+\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{m=1}^{m=n_\varrho}\mathfrak{L}_m^{(\alpha_\varrho)}\int\limits_{b_\nu^+}^{+} P_m\left|{\alpha_\varrho \atop \zeta}\right| d\zeta + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{m=1}^{m=p_\varkappa}\mathfrak{L}_m^{(\infty_\varkappa)}\int\limits_{b_\nu^+}^{+} P_m\left|{\infty_\varkappa \atop \zeta}\right| d\zeta \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Die an zweiter Stelle zu untersuchenden, nur von dem Punkte z abhängigen, Integrale $\int\limits_{[a_\sigma^\pm, b_\sigma^\pm]}^{+} \bar{P}_1\left|{z \atop \zeta}\right| d\zeta \;(\sigma = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p})$, $\int\limits_{b_\sigma^+}^{+} \bar{P}_1\left|{z \atop \zeta}\right| d\zeta \;(\sigma = \mathfrak{p}+1, \cdots, p)$ lassen sich durch Elementarfunktionen mit dem Argumente z darstellen. Um diese Darstellungen zu erhalten, lasse man in den Hilfsformeln ($\mathrm{H}_1.$), ($\mathrm{H}_2.$) an Stelle des Punktes ε den Punkt z, an Stelle des Buchstabens ν den Buchstaben σ treten, setze alsdann $m = 1$ und vertausche endlich durchweg die Zeichen P, $\bar{P}$. Man gewinnt auf diese Weise die Gleichungen:

$$(1_1'.)\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{[a_\sigma^\pm, b_\sigma^\pm]}^{+} \bar{P}_1\left|{z \atop \zeta}\right| d\zeta = W^{(\sigma)}(z), \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}) \qquad (1_2'.)\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b_\sigma^+}^{+} \bar{P}_1\left|{z \atop \zeta}\right| d\zeta = W^{(\sigma)}(z), \quad (\sigma = \mathfrak{p}+1, \cdots, p)$$

wobei zur Abkürzung

$$(2_1'.)\quad W^{(\sigma)}(z) = \frac{1}{\mathfrak{p}} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu_\varrho-1}\frac{1}{\mu_\varrho}\left(\int\limits_{[a_\sigma^\pm, b_\sigma^\pm]}^{+} \bar{P}_{\mu_\varrho-\lambda}\left|{\alpha_\varrho \atop \zeta}\right| d\zeta\right) P_\lambda\left|{\alpha_\varrho \atop z}\right|, \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p})$$

$$(2_2'.)\quad W^{(\sigma)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu_\varrho-1}\frac{1}{\mu_\varrho}\left(\int\limits_{b_\sigma^+}^{+} \bar{P}_{\mu_\varrho-\lambda}\left|{\alpha_\varrho \atop \zeta}\right| d\zeta\right) P_\lambda\left|{\alpha_\varrho \atop z}\right| \quad (\sigma = \mathfrak{p}+1, \cdots, p)$$

gesetzt ist. Die durch die Gleichung ($2_1'.$) zu $\sigma = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$, durch die Gleichung ($2_2'.$) zu $\sigma = \mathfrak{p}+1, \cdots, p$ für jeden Punkt z der Fläche T' definierte Funktion $W^{(\sigma)}(z)$ ist eine zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion $W(z)$ von der in diesem Artikel betrachteten Art, die nur für die Punkte $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ unstetig und zwar algebraisch unendlich wird, und deren Werte in je zwei zu einem der Schnitte a, b, c gehörigen entsprechenden Punkten $\mathfrak{P}^+, \mathfrak{P}^-$ in der Weise verknüpft sind, daß

$$
(3'.)\quad
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \{ W^{(\sigma)}(z)^+ = A_\nu W^{(\sigma)}(z)^- + (1-A_\nu)\,\mathfrak{K}_\nu^{(\sigma)},\\
&\text{längs } b_\nu \{ W^{(\sigma)}(z)^+ = B_\nu W^{(\sigma)}(z)^- + (1-B_\nu)\,\mathfrak{K}_\nu^{(\sigma)},\\
&\text{längs } c_\nu \{ W^{(\sigma)}(z)^+ = \quad W^{(\sigma)}(z)^-,
\end{aligned}\right\} \quad \nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p},\\
&\left.\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \{ W^{(\sigma)}(z)^+ = \quad W^{(\sigma)}(z)^-,\\
&\text{längs } b_\nu \{ W^{(\sigma)}(z)^+ = \quad W^{(\sigma)}(z)^- + \mathfrak{K}_\nu^{(\sigma)},\\
&\text{längs } c_\nu \{ W^{(\sigma)}(z)^+ = \quad W^{(\sigma)}(z)^-,
\end{aligned}\right\} \quad \nu = \mathfrak{p}+1, \cdots, p,
\end{aligned}
$$

ist, wobei zur Abkürzung

für $\sigma = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{K}_\nu^{(\sigma)} &= \frac{1}{\mathfrak{p}} \sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\nu\nu'} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu_\varrho-1} \frac{1}{\mu_\varrho} \left(\int\limits_{[a_\sigma^\pm, b_\sigma^\pm]}^{+} \overline{P}_{\mu_\varrho-\lambda} \begin{vmatrix} \alpha_\varrho \\ \zeta \end{vmatrix} d\zeta \right) \mathfrak{K}_{\nu\,\lambda}^{(\alpha_\varrho)}\\
&= \frac{1}{\mathfrak{p}} \sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\nu\nu'} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{[a_\sigma^\pm, b_\sigma^\pm]}^{+} \left\{ \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu_\varrho-1} \frac{1}{\mu_\varrho} \mathfrak{K}_{\nu\,\lambda}^{(\alpha_\varrho)}\, \overline{P}_{\mu_\varrho-\lambda} \begin{vmatrix} \alpha_\varrho \\ \zeta \end{vmatrix} \right\} d\zeta
\end{aligned}
$$

für $\sigma = \mathfrak{p}+1, \cdots, p$:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{K}_\nu^{(\sigma)} &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu_\varrho-1} \frac{1}{\mu_\varrho} \left(\int\limits_{b_\sigma^+}^{+} \overline{P}_{\mu_\varrho-\lambda} \begin{vmatrix} \alpha_\varrho \\ \zeta \end{vmatrix} d\zeta \right) \mathfrak{K}_{\nu\,\lambda}^{(\alpha_\varrho)}\\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b_\sigma^+}^{+} \left\{ \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu_\varrho-1} \frac{1}{\mu_\varrho} \mathfrak{K}_{\nu\,\lambda}^{(\alpha_\varrho)}\, \overline{P}_{\mu_\varrho-\lambda} \begin{vmatrix} \alpha_\varrho \\ \zeta \end{vmatrix} \right\} d\zeta
\end{aligned}
$$

$\nu = 1, 2, \cdots, p$

gesetzt ist. Die in der letzten Zeile stehenden Integrale können ausgewertet werden, indem man bei jedem von ihnen die zwischen den geschweiften Klammern stehende Größe auf Grund der Formel:

$$
\frac{d\overline{w}_\nu|\zeta|}{d\zeta} = -\frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu_\varrho-1} \frac{1}{\mu_\varrho} \mathfrak{K}_{\nu\,\lambda}^{(\alpha_\varrho)}\, \overline{P}_{\mu_\varrho-\lambda} \begin{vmatrix} \alpha_\varrho \\ \zeta \end{vmatrix}
$$

durch die Größe $-2\frac{d\overline{w}_\nu|\zeta|}{d\zeta}$ ersetzt und alsdann die Integration ausführt; man erhält so für das links stehende Integral den Wert $-2\left(\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\nu\nu'} - \delta_{\nu\sigma}\mathfrak{p}\right)\frac{\pi i}{\mathfrak{p}}$, für das rechts stehende den Wert $2\delta_{\nu\sigma}\pi i$ und erkennt nun schließlich, daß für $\sigma = 1, 2, \cdots, p$; $\nu = 1, 2, \cdots, p$:

$$
(4'.)\qquad \mathfrak{K}_\nu^{(\sigma)} = \delta_{\nu\sigma}
$$

ist, daß also $\mathfrak{K}_\nu^{(\sigma)}$ nur dann einen von Null verschiedenen Wert und zwar den Wert 1 besitzt, wenn $\nu = \sigma$ ist. Die soeben aufgestellte, bei der Auswertung der Integrale benutzte Formel geht aus der nach Art. 6 auch im vorliegenden Falle geltenden Formel (D_1.) des Art. 6 des vorhergehenden Abschnittes hervor, indem man bei dieser an Stelle der Zeichen w, $\overline{\mathfrak{K}}$, P die Zeichen $\overline{w}$, $\mathfrak{K}$, $\overline{P}$ treten läßt, alsdann $n=1$, $\tau=\nu$, $z=\zeta$

setzt und endlich noch an Stelle des Summationsbuchstabens λ einen neuen Summationsbuchstaben λ' vermittels der Gleichung $\lambda = \mu_\varrho - \lambda'$ einführt.

Mit Hilfe der Gleichungen $(2_1.)$, $(2_2.)$ und $(1'_1.)$, $(1'_2.)$ kann man jetzt der vorher für $W(z)$ erhaltenen Gleichung die Gestalt:

$$\text{(D.)} \qquad W(z) = \frac{dW^*(z)}{dz} + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{K}_\nu W^{(\nu)}(z)$$

geben, wobei $W^*(z)$ durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} W^*(z) = &- \sum_{\tau=1}^{\tau=t} \left\{ \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)} \underset{0}{P} \begin{vmatrix} \varepsilon_\tau \\ z \end{vmatrix} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau-1} \frac{1}{\lambda} \mathfrak{L}_{\lambda+1}^{(\varepsilon_\tau)} \underset{\lambda}{P} \begin{vmatrix} \varepsilon_\tau \\ z \end{vmatrix} \right\} \\ &- \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \left\{ \mu_\varrho \mathfrak{L}_{\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} \underset{0}{P} \begin{vmatrix} \alpha_\varrho \\ z \end{vmatrix} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho-\mu_\varrho} \frac{\mu_\varrho}{\lambda} \mathfrak{L}_{\lambda+\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} \underset{\lambda}{P} \begin{vmatrix} \alpha_\varrho \\ z \end{vmatrix} \right\} \\ &+ \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \left\{ \iota_\varkappa c_{\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)} \underset{0}{P} \begin{vmatrix} \infty_\varkappa \\ z \end{vmatrix} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota_\varkappa} \frac{\iota_\varkappa}{\lambda} c_{\iota_\varkappa-\lambda}^{(\infty_\varkappa)} \underset{\lambda}{P} \begin{vmatrix} \infty_\varkappa \\ z \end{vmatrix} + \sum_{\lambda=\iota_\varkappa+1}^{\lambda=\iota_\varkappa+p_\varkappa} \frac{\iota_\varkappa}{\lambda} \mathfrak{L}_{\lambda-\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)} \underset{\lambda}{P} \begin{vmatrix} \infty_\varkappa \\ z \end{vmatrix} \right\} \\ &- \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} K_\nu^{(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t)} w_\nu |z| \end{aligned}$$

— bei der $K_\nu^{(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t)}$ für $\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$ die unter $(3_1.)$, für $\nu = \mathfrak{p}+1, \cdots, p$ die unter $(3_2.)$ definierte Größe bezeichnet — $W^{(\nu)}(z)$ für $\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$ durch die erste, für $\nu = \mathfrak{p}+1, \cdots, p$ durch die zweite der Gleichungen:

$$\underset{(\nu=1,2,\cdots,\mathfrak{p})}{W^{(\nu)}(z) = \frac{1}{\mathfrak{p}} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu_\varrho-1} \frac{1}{\mu_\varrho} \left(\int_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} \underset{\mu_\varrho-\lambda}{\overline{P}} \begin{vmatrix} \alpha_\varrho \\ \zeta \end{vmatrix} d\zeta \right) \underset{\lambda}{P} \begin{vmatrix} \alpha_\varrho \\ z \end{vmatrix}}, \quad \underset{(\nu=\mathfrak{p}+1,\cdots,p)}{W^{(\nu)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu_\varrho-1} \frac{1}{\mu_\varrho} \left(\int_{b_\nu^+}^{+} \underset{\mu_\varrho-\lambda}{\overline{P}} \begin{vmatrix} \alpha_\varrho \\ \zeta \end{vmatrix} d\zeta \right) \underset{\lambda}{P} \begin{vmatrix} \alpha_\varrho \\ z \end{vmatrix}},$$

endlich $\mathfrak{K}_\nu$ $_{(\nu=1,2,\cdots,p)}$ durch die schon früher aufgestellte Gleichung:

$$\mathfrak{K}_\nu = \sum_{\tau=1}^{\tau=t} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau} \mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)} \underset{\lambda}{\mathfrak{K}_\nu^{(\varepsilon_\tau)}} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho} \mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)} \underset{\lambda}{\mathfrak{K}_\nu^{(a_\varrho)}} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p_\varkappa} \mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\varkappa)} \underset{\lambda}{\mathfrak{K}_\nu^{(\infty_\varkappa)}} + C \sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}} \delta_{\nu\nu'}$$

bestimmt ist. Trotzdem die Gleichung (D.), zur Vereinfachung der Untersuchung, nur für den Fall abgeleitet worden ist, daß die Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ sowie der Punkt z im Innern der Fläche T'' liegen, gilt sie auch noch, wenn die genannten Punkte teilweise oder sämtlich der Begrenzung von T'' angehören. Unter der, die Allgemeinheit der Untersuchung nur scheinbar beschränkenden, Voraussetzung, daß die unbestimmten Konstanten $\mathfrak{L}^{(\varepsilon_\tau)}$ $_{(\tau=1,2,\cdots,t)}$ durch eine Lagenänderung der Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_t$ nicht beeinflußt werden, ändert sich nämlich der Wert des Ausdruckes:

$$W(z) - \frac{dW^*(z)}{dz} - \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{K}_\nu W^{(\nu)}(z),$$

bei dem $W(z)$ die zu Anfang dieses Artikels angeschriebene lineare Verbindung von Elementarfunktionen vertritt, als Funktion der $t+1$ in T' frei beweglichen Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$, z betrachtet, stetig, wenn einer dieser Punkte durch stetige Bewegung in einen Punkt der Begrenzung von T' übergeht, und es kann daher der in Rede stehende Ausdruck, da er der Gleichung (D.) gemäß immer den Wert Null besitzt, wenn die genannten Punkte im Innern der Fläche T' liegen, nicht einen von Null verschiedenen Wert haben, wenn diese Punkte teilweise oder sämtlich der Begrenzung von T' angehören.

Aus der so für jede Lage der Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$, z als richtig bewiesenen Gleichung (D.) erkennt man nun schließlich, daß die allgemeinste zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion $W(z)$, welche in je zwei zu einem der Schnitte $c_1, \cdots, c_\mathfrak{p}$, $a_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, a_p$ oder der $t+r+q$ Schnitte l gehörigen entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ denselben Wert besitzt, sich, entsprechend der zu Anfang des Artikels aufgestellten Behauptung, durch die Derivierte einer zu derselben Charakteristik gehörigen Funktion W, eben der Funktion $W^*(z)$, und die p ausgezeichneten, mit der Funktion $W(z)$ gleichartigen Funktionen $W^{(1)}(z), \cdots, W^{(p)}(z)$ linear darstellen läßt. Dabei ist noch besonders hervorzuheben, daß diese p ausgezeichneten Funktionen $W^{(1)}(z), \cdots, W^{(p)}(z)$ durchaus selbständige, von der darzustellenden Funktion $W(z)$ unabhängige Gebilde sind, während andererseits die Funktion $W^*(z)$ in engster Beziehung zu der Funktion $W(z)$ steht.

Läßt man in der zu Anfang dieses Artikels aufgestellten, die Funktion $W(z)$ definierenden Gleichung und dementsprechend auch in der Gleichung (D.) die Größen $\mathfrak{L}$ sämtlich mit der Null zusammenfallen und setzt zudem noch $C=1$, so wird $W(z)=1$ und zugleich reduziert sich die Gleichung (D.) auf die Gleichung:

$$1 = \frac{d}{dz}\left\{\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} P_{\iota_\varkappa}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|\right\} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} W^{(\nu)}(z).$$

Zum Schlusse dieses Artikels sollen jetzt noch kurz diejenigen speziellen zur Charakteristik $\binom{A}{B}=\binom{A_1\cdots A_\mathfrak{p}\;1\cdots 1}{B_1\cdots B_\mathfrak{p}\;1\cdots 1}$ gehörigen Funktionen W betrachtet werden, deren Werte in je zwei entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-$ der Begrenzung von T'' in der Weise verknüpft sind, daß

$$\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu\{\, W^+ = A_\nu W^-, \\
&\text{längs } b_\nu\{\, W^+ = B_\nu W^-, \qquad\qquad \nu=1,2,\cdots,p,\\
&\text{längs } c_\nu\{\, W^+ = \quad W^-, \\
&\text{längs } l_\sigma\{\, W^+ = \quad W^-, \qquad\qquad \sigma=1,2,\cdots,s,
\end{aligned}$$

ist. Eine jede solche Funktion W möge eine zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige F-Funktion genannt und mit $F(z)$ bezeichnet werden. Dieser Definition zufolge ist die Gesamtheit der zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen F-Funktionen identisch mit der Gesamtheit derjenigen Funktionen $W(z)$ von der zu Anfang dieses Artikels definierten Art, bei denen die das Verhalten an den Schnitten $a_1, b_1; \cdots; a_\mathfrak{p}, b_\mathfrak{p}; b_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, b_p$ bestimmenden Konstanten $\mathfrak{K}_1, \cdots, \mathfrak{K}_\mathfrak{p}, \mathfrak{K}_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, \mathfrak{K}_p$ sämtlich den Wert Null besitzen.

Die Derivierte $\frac{dW}{dz}$ einer jeden zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktion W ist, wie aus dem zu Anfang des Art. 6 Bemerkten hervorgeht, eine zu derselben Charakteristik gehörige F-Funktion. Daß aber auch umgekehrt eine jede zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige F-Funktion sich mit der Derivierten einer zu derselben Charakteristik gehörigen Funktion W deckt, erkennt man, wenn man beachtet, daß die vorher gewonnene Gleichung (D.) sich für eine Funktion $W(z) = F(z)$ auf die Gleichung:

$$\text{(D'.)} \qquad F(z) = \frac{dW^*(z)}{dz}$$

reduziert. Die Gesamtheit der zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen F-Funktionen ist also auch identisch mit der Gesamtheit der Derivierten $\frac{dW}{dz}$ der zu derselben Charakteristik gehörigen Funktionen W.

Aus dem soeben gewonnenen Resultate folgt nun schließlich noch, daß das mit einer Funktion $F(z)$ gebildete, von einem Punkte z_0 bis zu einem Punkte z über eine ganz im Innern der Fläche T'' verlaufende Kurve erstreckte Integral $\int\limits_{z_0}^{z} F(z)\,dz$ eine zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion W ist, und daß diese Funktion W, nachdem man $F(z)$ durch Elementarfunktionen ausgedrückt und zu dem so erhaltenen Ausdrucke $W(z)$ von der zu Anfang dieses Artikels definierten Art den ihm entsprechenden Ausdruck $W^*(z)$ gebildet hat, durch die Gleichung:

$$\text{(D''.)} \qquad \int\limits_{z_0}^{z} F(z)\,dz = W^*(z) - W^*(z_0)$$

geliefert wird.

Auf die Theorie der zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen F-Funktionen soll ausführlicher erst im sechsten Abschnitt eingegangen werden.

8.

Der zu Anfang des Art. 6 aufgestellte Ausdruck:

$$\begin{aligned} W(z) = & \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\left(\mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)} \underset{0}{P}\left|{}^{\varepsilon_\tau}_{z}\right| + \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)} \underset{1}{P}\left|{}^{\varepsilon_\tau}_{z}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{m_\tau}^{(\varepsilon_\tau)} \underset{m_\tau}{P}\left|{}^{\varepsilon_\tau}_{z}\right|\right) \\ & + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\left(\mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)} \underset{0}{P}\left|{}^{\alpha_\varrho}_{z}\right| + \mathfrak{L}_1^{(\alpha_\varrho)} \underset{1}{P}\left|{}^{\alpha_\varrho}_{z}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{n_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} \underset{n_\varrho}{P}\left|{}^{\alpha_\varrho}_{z}\right|\right) \\ & + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\left(\mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)} \underset{0}{P}\left|{}^{\infty_\varkappa}_{z}\right| + \mathfrak{L}_1^{(\infty_\varkappa)} \underset{1}{P}\left|{}^{\infty_\varkappa}_{z}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{p_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)} \underset{p_\varkappa}{P}\left|{}^{\infty_\varkappa}_{z}\right|\right) \\ & - \frac{1}{\pi i}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=\mathfrak{p}} \mathfrak{C}_\sigma w_\sigma|z| + \frac{1}{\pi i}\sum_{\sigma=\mathfrak{p}+1}^{\sigma=p} \mathfrak{A}_\sigma w_\sigma|z| + C, \end{aligned}$$

bei dem $m_1, \cdots, m_t, n_1, \cdots, n_r, p_1, \cdots, p_q$ unbestimmte positive ganze Zahlen, die Buchstaben $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$, C unbestimmte, nur der Bedingung:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\mathfrak{p}} \mathfrak{C}_\nu + 2\pi i\left(\sum_{\tau=1}^{\tau=t} \mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)}\right) = 0$$

unterworfene Konstanten bezeichnen, stellt die allgemeinste zu der angenommenen Charakteristik $\binom{A}{B} = \binom{A_1 \cdots A_\mathfrak{p}\ 1 \cdots 1}{B_1 \cdots B_\mathfrak{p}\ 1 \cdots 1}$ gehörige Funktion W dar. Auf Grund des im vorhergehenden Artikel gewonnenen Resultats ist man jetzt imstande, das mit dieser Funktion $W(z)$ gebildete, von einem Punkte z_0 bis zu einem Punkte z über eine ganz im Innern der Fläche T'' verlaufende Kurve erstreckte Integral $\int\limits_{z_0}^{z} W(z)dz$ durch das Produkt $zW(z)$ und Elementarfunktionen linear darzustellen. Man braucht dazu nur auf das Integral das Verfahren der teilweisen Integration anzuwenden und in der so sich ergebenden Gleichung:

$$\int\limits_{z_0}^{z} W(z)dz = zW(z) - z_0 W(z_0) - \int\limits_{z_0}^{z} z\frac{dW(z)}{dz}dz$$

das rechtsstehende, auf die zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige F-Funktion $z\frac{dW(z)}{dz}$ sich beziehende Integral mit Hilfe der Formel (D''.) des vorhergehenden Artikels durch Elementarfunktionen auszudrücken.

In derselben Weise schließend, wie es in Art. 8 des vorhergehenden Abschnittes an der entsprechenden Stelle geschehen ist, gelangt man hier unter wörtlicher Wiederholung des dort Gesagten zu der die erwähnte Darstellung liefernden Gleichung:

$$\int\limits_{z_0}^{z} W(z)dz = zW(z) - z_0 W(z_0) - W^*(z) + W^*(z_0).$$

In dieser Gleichung vertritt $W^*(z)$ den Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
W^*(z) = & -\sum_{\tau=1}^{\tau=t}\left\{ \mathfrak{L}_1'^{(\varepsilon_\tau)}\, \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau} \frac{1}{\lambda}\, \mathfrak{L}_{\lambda+1}'^{(\varepsilon_\tau)}\, \underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right|\right\} \\
& -\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\left\{\mu_\varrho \mathfrak{L}_{\mu_\varrho}'^{(\alpha_\varrho)}\, \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho} \frac{\mu_\varrho}{\lambda}\, \mathfrak{L}_{\lambda+\mu_\varrho}'^{(\alpha_\varrho)}\, \underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|\right\} \\
& +\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\left\{\iota_\varkappa\, c_{\iota_\varkappa}'^{(\infty_\varkappa)}\, \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota_\varkappa} \frac{\iota_\varkappa}{\lambda}\, c_{\iota_\varkappa-\lambda}'^{(\infty_\varkappa)}\, \underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=\iota_\varkappa+1}^{\lambda=\iota_\varkappa+p_\varkappa} \frac{\iota_\varkappa}{\lambda}\, \mathfrak{L}_{\lambda-\iota_\varkappa}'^{(\infty_\varkappa)}\, \underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|\right\} \\
& -\frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p} K_\nu'^{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)}\, w_\nu|z|,
\end{aligned}
$$

bei dem zur Abkürzung für $\nu = 1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$

$$
\begin{aligned}
K_\nu'^{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)} = & \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\sum_{m=1}^{m=m_\tau+1}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\varrho-1} \frac{\mathfrak{L}_m'^{(\varepsilon_\tau)}}{(m-1)!}\, \frac{\left(\frac{m\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\Big| m\right)}{m\mu_\varrho-\lambda} \left(\int_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} \underset{m\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{matrix}\right| d\zeta\right) \underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \varepsilon_\tau\end{matrix}\right| \\
& + \frac{2\pi i}{\mathfrak{p}}\sum_{\tau=1}^{\tau=t}\mathfrak{L}_1'^{(\varepsilon_\tau)} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{m=1}^{m=n_\varrho+\mu_\varrho} \mathfrak{L}_m'^{(\alpha_\varrho)} \int_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{matrix}\right| d\zeta + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{m=1}^{m=p_\varkappa} \mathfrak{L}_m'^{(\infty_\varkappa)} \int_{[a_\nu^\pm, b_\nu^\pm]}^{+} \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ \zeta\end{matrix}\right| d\zeta,
\end{aligned}
$$

für $\nu = \mathfrak{p}+1, \cdots, p$ dagegen

$$
\begin{aligned}
K_\nu'^{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)} = & \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\sum_{m=1}^{m=m_\tau+1}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\varrho-1} \frac{\mathfrak{L}_m'^{(\varepsilon_\tau)}}{(m-1)!}\, \frac{\left(\frac{m\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\Big| m\right)}{m\mu_\varrho-\lambda} \left(\int_{b_\nu^+}^{+} \underset{m\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{matrix}\right| d\zeta\right) \underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \varepsilon_\tau\end{matrix}\right| \\
& + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{m=1}^{m=n_\varrho+\mu_\varrho} \mathfrak{L}_m'^{(\alpha_\varrho)} \int_{b_\nu^+}^{+} \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{matrix}\right| d\zeta + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{m=1}^{m=p_\varkappa} \mathfrak{L}_m'^{(\infty_\varkappa)} \int_{b_\nu^+}^{+} \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ \zeta\end{matrix}\right| d\zeta
\end{aligned}
$$

gesetzt ist, während die Konstanten $\mathfrak{L}'$, c' aus den Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{L}_1'^{(\varepsilon_\tau)} = -\varepsilon_\tau \mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)} - \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)}, && \mathfrak{L}_\lambda'^{(\varepsilon_\tau)} = -(\lambda-1)\varepsilon_\tau\, \mathfrak{L}_{\lambda-1}^{(\varepsilon_\tau)} - \lambda \mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)}, && {\scriptstyle \lambda=2,3,\cdots,m_\tau+1} \\
&\mu_\varrho \mathfrak{L}_{\mu_\varrho}'^{(\alpha_\varrho)} = -\alpha_\varrho \mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)} - \mu_\varrho \mathfrak{L}_{\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)}, && \mu_\varrho \mathfrak{L}_\lambda'^{(\alpha_\varrho)} = -(\lambda-\mu_\varrho)\alpha_\varrho \mathfrak{L}_{\lambda-\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} - \lambda \mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)}, && {\scriptstyle \lambda=1,2,\cdots,\mu_\varrho-1,\mu_\varrho+1,\cdots,n_\varrho+\mu_\varrho} \\
& && \iota_\varkappa \mathfrak{L}_\lambda'^{(\infty_\varkappa)} = \lambda \mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\varkappa)}, && {\scriptstyle \lambda=1,2,\cdots,p_\varkappa} \\
&\iota_\varkappa c_0'^{(\infty_\varkappa)} = \mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)}, && \iota_\varkappa c_\lambda'^{(\infty_\varkappa)} = -\lambda c_\lambda^{(\infty_\varkappa)}, && {\scriptstyle \lambda=1,2,\cdots,\iota_\varkappa}
\end{aligned}
$$

sich ergeben, wenn man dabei die Größe $\mathfrak{L}_{m_\tau+1}^{(\varepsilon_\tau)}$ und jede Größe $\mathfrak{L}_\chi^{(\alpha_\varrho)}$, deren Index χ nicht der Reihe $0, 1, 2, \cdots, n_\varrho$ angehört, als mit der Null identisch ansieht und unter

$c_1^{(\infty_\varkappa)}, c_2^{(\infty_\varkappa)}, \cdots, c_{t_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)}$ die Koeffizienten versteht, welche in der Entwicklung der Funktion $W(z)$ für das Gebiet des Punktes $\infty_\varkappa$ den Potenzen $z_{\infty_\varkappa}^1, z_{\infty_\varkappa}^2, \cdots, z_{\infty_\varkappa}^{t_\varkappa}$ beziehungsweise zukommen.

Damit ist die Theorie der zu der gemischten Charakteristik $\binom{A}{B} = \begin{pmatrix} A_1 \cdots A_\mathfrak{p} & 1 \cdots 1 \\ B_1 \cdots B_\mathfrak{p} & 1 \cdots 1 \end{pmatrix}$ gehörigen Funktionen soweit entwickelt, wie es im vorhergehenden Abschnitte für die zu einer gewöhnlichen Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktionen geschehen ist. Die in diesem Abschnitte angestellten Untersuchungen und erhaltenen Resultate lassen sich nun unmittelbar auf den Fall übertragen, wo statt der gemischten Charakteristik $\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_\mathfrak{p} & 1 \cdots 1 \\ B_1 \cdots B_\mathfrak{p} & 1 \cdots 1 \end{pmatrix}$ die gemischte Charakteristik $\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_p \\ B_1 \cdots B_p \end{pmatrix}$, bei der $A_{\lambda_1}, B_{\lambda_1}; \cdots; A_{\lambda_\mathfrak{p}}, B_{\lambda_\mathfrak{p}}$ eigentliche, $A_{\lambda_{\mathfrak{p}+1}} = 1, B_{\lambda_{\mathfrak{p}+1}} = 1; \cdots; A_{\lambda_p} = 1, B_{\lambda_p} = 1$ uneigentliche Faktorenpaare sind, vorliegt. Man braucht zu dem Ende nur an allen denjenigen Stellen, wo aus der Zahlenreihe $1, 2, \cdots, p$ die Zahlenreihe $1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$ oder die Zahlenreihe $\mathfrak{p}+1, \mathfrak{p}+2, \cdots, p$ herausgegriffen wird, die Zahlenreihe $1, 2, \cdots, \mathfrak{p}$ durch die Zahlenreihe $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\mathfrak{p}$, die Zahlenreihe $\mathfrak{p}+1, \mathfrak{p}+2, \cdots, p$ durch die Zahlenreihe $\lambda_{\mathfrak{p}+1}, \lambda_{\mathfrak{p}+2}, \cdots, \lambda_p$ zu ersetzen.

Vierter Abschnitt.

Untersuchung der zu der ausgezeichneten Charakteristik gehörigen Funktionen.

1.

Die ausgezeichnete, nach früherer Definition nur aus uneigentlichen Faktorenpaaren zusammengesetzte, Charakteristik $\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_p \\ B_1 \cdots B_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdots 1 \\ 1 \cdots 1 \end{pmatrix}$ ist mit der zu ihr reziproken Charakteristik $\begin{pmatrix} \bar{A}_1 \cdots \bar{A}_p \\ \bar{B}_1 \cdots \bar{B}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdots 1 \\ 1 \cdots 1 \end{pmatrix}$ identisch, also eine zu sich selbst reziproke Charakteristik. Auf Grund des im ersten Teile gewonnenen Fundamentalsatzes erhält man die sämtlichen zur Charakteristik $\begin{pmatrix} 1 \cdots 1 \\ 1 \cdots 1 \end{pmatrix}$ gehörigen Funktionen W, wenn man an Stelle des Systems der $s + m_1 + \cdots + m_s$ Konstanten $\mathfrak{L}$ und der p Konstanten $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_p$ ein jedes die Gleichung $\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0$*) nicht verletzende System von $s + m_1 + \cdots + m_s + p$ Werten treten läßt und zu jeder so erhaltenen Funktion noch eine willkürliche Konstante C addiert. Die Konstanten $\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_p$ fallen hier, da für jedes ν aus der Reihe $1, 2, \cdots, p$ A_ν, B_ν ein uneigentliches Faktorenpaar ist, sämtlich mit der Null zusammen.

Zunächst sollen nun, um auch im vorliegenden Falle ein System von Elementarfunktionen zu erhalten, aus den zur Charakteristik $\begin{pmatrix} 1 \cdots 1 \\ 1 \cdots 1 \end{pmatrix}$ gehörigen Funktionen W gewisse spezielle Funktionen herausgegriffen und, unter Beibehaltung der im ersten Teile, in Art. 1 des siebenten Abschnittes, angewandten Bezeichnungsweise, mit Hilfe der in Art. 2 des ersten Abschnittes aufgestellten Fundamentalformel (F.) untersucht werden. Da im vorliegenden Falle ein jedes Faktorenpaar A_ν, B_ν ein uneigentliches, also $\mathfrak{p} = 0$ und dementsprechend $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\cdots$, $\lambda_p = p$ ist, so tritt an Stelle der allgemeinen Fundamentalformel (F.) hier die Formel:

*) Riemann, B., Theorie der Abelschen Funktionen. I, Art. 3. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 88—144; S. 104, 105.)

$$
(\mathrm{F}_3.)\quad
\begin{aligned}
\int_{\mathfrak{R}}^{+} W d\overline{W} = {} & \sum_{\nu=1}^{\nu=p} (\mathfrak{A}_\nu \overline{\mathfrak{B}}_\nu - \mathfrak{B}_\nu \overline{\mathfrak{A}}_\nu) \\
& + 4\pi^2 \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma} (\overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_\sigma} + \overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_{\sigma+1}} + \cdots + \overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_s}) - 2\pi^2 \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma \overline{\mathfrak{L}}_\sigma \\
& - 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} (\mathfrak{L}_\sigma \bar{c}_{\sigma 0} - \overline{\mathfrak{L}}_\sigma c_{\sigma 0}) - 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \sum_{\mu=1}^{\mu=m_\sigma} \mu (\mathfrak{L}_{\sigma\mu} \bar{c}_{\sigma\mu} - \overline{\mathfrak{L}}_{\sigma\mu} c_{\sigma\mu}) = 0 .
\end{aligned}
$$

Wegen $\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma} = 0$, $\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_\sigma} = 0$ hat die Summe $\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_{\varkappa_{\sigma+\omega}} (\overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_{\sigma+\omega}} + \overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_{\sigma+1+\omega}} + \cdots + \overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_{s+\omega}})$, wenn man die dabei auftretenden Größen $\mathfrak{L}_{\varkappa_{s+g}}$, $\overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_{s+g}}$ durch die Gleichungen $\mathfrak{L}_{\varkappa_{s+g}} = \mathfrak{L}_{\varkappa_g}$, $\overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_{s+g}} = \overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_g}$ definiert, für $\omega = 1, 2, 3, \ldots$ denselben Wert wie die Summe $\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma} (\overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_\sigma} + \overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_{\sigma+1}} + \cdots + \overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_s})$, und man kann daher bei der vorstehenden Formel die Komplexion $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_s$ durch eine ihrer zyklischen Permutationen ersetzen.

2.

Der Fundamentalsatz liefert nun zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$, wenn man zunächst die Konstanten $\mathfrak{L}$ sämtlich mit der Null zusammenfallen läßt und dann an Stelle des Systems der p Konstanten $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_p$ irgend welche Systeme von p Werten setzt, Funktionen W, welche für keinen Punkt der Fläche T'' unstetig werden. Solche Funktionen mögen allenthalben endliche Funktionen genannt und im folgenden durch $u|z|$ oder durch u^z oder noch einfacher durch u bezeichnet werden. Gewisse dieser Funktionen u sollen jetzt als Elementarfunktionen aufgestellt und allenthalben endliche Elementarfunktionen genannt werden.

Man bezeichne zunächst, unter ϱ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, p$, unter $\delta_{\varrho\nu}$ $(\nu=1,2,\cdots,p)$ eine Größe, die für $\nu = \varrho$ den Wert 1, für $\nu \neq \varrho$ den Wert 0 besitzt, verstehend, mit $u_\varrho|z|$ eine spezielle allenthalben endliche, eine willkürliche, später zu bestimmende, additive Konstante c_ϱ enthaltende Funktion, bei der die Konstanten $\mathfrak{A}_\nu$, $\nu=1,2,\cdots,p$, die speziellen, mit $\mathfrak{A}_{\varrho\nu}$, $\nu=1,2,\cdots,p$, zu bezeichnenden, durch die Gleichungen $\mathfrak{A}_{\varrho\nu} = \delta_{\varrho\nu}\pi i$, $\nu=1,2,\cdots,p$, bestimmten Werte besitzen, und bezeichne bei dieser Funktion die an Stelle der Größen $\mathfrak{B}_\nu$, $\nu=1,2,\cdots,p$, stehenden Größen mit $a_{\varrho\nu}$, $\nu=1,2,\cdots,p$, sodaß also für $\varrho = 1, 2, \cdots, p$:

$$
(1.)\quad
\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \; \{ u_\varrho|z|^+ = u_\varrho|z|^- + \delta_{\varrho\nu}\pi i, \\
&\text{längs } b_\nu \; \{ u_\varrho|z|^+ = u_\varrho|z|^- + a_{\varrho\nu}, \qquad \nu=1,2,\cdots,p, \\
&\text{längs } c_\nu \; \{ u_\varrho|z|^+ = u_\varrho|z|^-, \\
&\text{längs } l_\sigma \; \{ u_\varrho|z|^+ = u_\varrho|z|^-, \qquad \sigma=1,2,\cdots,s,
\end{aligned}
$$

ist. Wählt man nun noch den Wert der in u_ϱ enthaltenen willkürlichen additiven Konstante c_ϱ so, daß für $\varrho = 1, 2, \cdots, p$:

$$(2.)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \iota_\varkappa u_\varrho|\infty_\varkappa| = 0$$

ist, so ist damit zugleich, nach dem Fundamentalsatz, die Funktion u_ϱ vollständig bestimmt.

*Die so gewonnenen vollständig bestimmten allenthalben endlichen Funktionen $u_1|z|, \cdots, u_p|z|$ sollen die zur Charakteristik $\begin{pmatrix}1 \cdots 1\\ 1 \cdots 1\end{pmatrix}$ gehörigen allenthalben endlichen Elementarfunktionen genannt werden.**)

Die p Elementarfunktionen $u_1, \cdots, u_p$ sind linear unabhängig. Zum Beweise dieser Behauptung bilde man aus ihnen und den unbestimmten Konstanten $c_0, c_1, \cdots, c_p$ die allenthalben endliche Funktion $u = c_0 + c_1 u_1 + \cdots + c_p u_p$ und stelle sich die Aufgabe, die Konstanten c in allgemeinster Weise so zu bestimmen, daß für jeden Punkt z der Fläche T'' die Gleichung $u = 0$ besteht. Soll aber die Funktion u für jeden Punkt z der Fläche T'' den Wert Null besitzen, so können, da dann die ihr zukommenden, durch die Gleichungen $\mathfrak{A}_\nu = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} c_\varrho \delta_{\varrho\nu} \pi i = c_\nu \pi i,\ {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p},$ bestimmten Konstanten $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_p$ sämtlich mit der Null zusammenfallen müssen, die Größen $c_1, \cdots, c_p$ nicht von Null verschieden sein, und es kann weiter auch c_0 nicht von Null verschieden sein, da für $c_1 = \cdots = c_p = 0$ der mit u bezeichnete Ausdruck sich auf c_0 reduziert. Damit ist bewiesen, daß eine Gleichung von der Form $0 = c_0 + c_1 u_1 + \cdots + c_p u_p$ nur dann für jeden Punkt z der Fläche T'' bestehen kann, wenn die Konstanten $c_0, c_1, \cdots, c_p$ sämtlich den Wert Null besitzen, oder, was dasselbe, daß die Funktionen $u_1, \cdots, u_p$ linear unabhängig sind.

Die allgemeinste allenthalben endliche Funktion $u|z|$ wird, wenn man unter $C, \mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_p$ keinen Bedingungen unterworfene Konstanten versteht, durch die Gleichung:

$$(3.)\qquad u|z| = C + \frac{1}{\pi i} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{A}_\varrho u_\varrho|z|$$

dargestellt. Die Richtigkeit dieser Behauptung erkennt man auf Grund des Fundamentalsatzes, wenn man beachtet, daß die durch diese Gleichung definierte allenthalben endliche Funktion u, wie aus der Relation $\frac{1}{\pi i} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{A}_\varrho \delta_{\varrho\nu} \pi i = \mathfrak{A}_\nu$ folgt, so beschaffen ist, daß längs $a_\nu \{u|z|^+ = u|z|^- + \mathfrak{A}_\nu,\ {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p},$ ist, und daß diese Funktion zudem die willkürliche additive Konstante C enthält.**)

*) Riemann, B., Theorie der Abelschen Funktionen. I, Art. 4; II, Art. 18. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 88—144; S. 105; S. 129.)

**) Riemann, B., Theorie der Abelschen Funktionen. I, Art. 4. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 88—144; S. 105, 106.)

Zwischen den p^2 Konstanten $a_{\varrho\sigma}$, $\varrho, \sigma = 1, 2, \cdots, p$, des Funktionensystems $u_1|z|, \cdots, u_p|z|$ bestehen die $\frac{p(p-1)}{2}$ Beziehungen:

$$a_{\varrho\sigma} = a_{\sigma\varrho}, \qquad \varrho, \sigma = 1, 2, \cdots, p, \; \sigma < \varrho. \tag{4.}$$

Um dieselben zu erhalten, beziehe man die am Ende von Art. 1 aufgestellte, auf irgend zwei allgemeine zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörige Funktionen W, $\overline{W}$ sich beziehende, Fundamentalformel (F_3.), unter ϱ, σ irgend zwei Zahlen aus der Reihe $1, 2, \cdots, p$ verstehend, auf die Elementarfunktionen $u_\varrho|z|$, $u_\sigma|z|$, ersetze also in der Formel (F_3.) die darin vorkommenden Konstanten der Funktionen W, $\overline{W}$ durch die entsprechenden Konstanten der Funktionen u_ϱ, u_σ. Man erhält so zunächst die Gleichung:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} (\delta_{\varrho\nu} \pi i a_{\sigma\nu} - a_{\varrho\nu} \delta_{\sigma\nu} \pi i) = 0$$

und weiter dann, indem man die Summation nach ν ausführt, die für $\varrho, \sigma = 1, 2, \cdots, p$ geltende Gleichung $a_{\varrho\sigma} = a_{\sigma\varrho}$.*)

Die durch die Gleichung (3.) definierte allgemeinste allenthalben endliche Funktion:

$$u = C + \frac{1}{\pi i} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{A}_\varrho u_\varrho$$

ist so beschaffen, daß für $\nu = 1, 2, \cdots, p$:

$$\text{längs } a_\nu \{u^+ = u^- + \mathfrak{A}_\nu, \qquad \text{längs } b_\nu \{u^+ = u^- + \mathfrak{B}_\nu$$

ist, wobei $\mathfrak{B}_\nu$ durch die Gleichung:

$$\mathfrak{B}_\nu = \frac{1}{\pi i} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{A}_\varrho a_{\varrho\nu}$$

dargestellt wird. Entsprechend der im ersten Teile am Schlusse von Art. 6 des sechsten Abschnitts gewonnenen Gleichung besteht daher hier, wenn man den reellen Teil der Funktion u mit $u^{(1)}$, den lateralen Teil mit $u^{(2)} i$ und die zu $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ konjugierten Größen mit $\widetilde{\mathfrak{A}}_\nu$, $\widetilde{\mathfrak{B}}_\nu$ beziehungsweise bezeichnet, die Gleichung:

$$i \iint_{T''} \left\{ \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y}\right)^2 \right\} \partial x \partial y = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{ \widetilde{\mathfrak{A}}_\nu \mathfrak{B}_\nu - \widetilde{\mathfrak{B}}_\nu \mathfrak{A}_\nu \right\}.$$

Das auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Integral kann nur dann den Wert Null annehmen, wenn u sich auf eine Konstante reduziert, oder, was dasselbe, wenn die in dem Ausdruck für u vorkommenden unbestimmten Konstanten $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_p$ sämtlich der Null gleichgesetzt werden. Sind die Größen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_p$ nicht sämtlich

*) Riemann, B., Theorie der Abelschen Funktionen. II, Art. 20. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 88—144; S. 130, 131.)

der Null gleich, so sind auch die ihnen entsprechenden Größen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \cdots, \mathfrak{B}_p$ nicht sämtlich der Null gleich, da im anderen Falle die auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehende Summe und damit auch das Integral den Wert Null haben würde, ohne daß die Größen $\mathfrak{A}$ sämtlich verschwinden. Das System der p Gleichungen $0 = \sum\limits_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{A}_\varrho a_{\varrho\nu}$, ${}_{\nu=1,2,\cdots,p}$, hat daher nur die eine Lösung $\mathfrak{A}_1 = 0$, $\mathfrak{A}_2 = 0, \cdots, \mathfrak{A}_p = 0$, oder, was dasselbe, die Determinante $\sum \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{pp}$ der p^2 Größen $a_{\varrho\nu}$, ${}_{\varrho,\nu=1,2,\cdots,p}$, besitzt einen von Null verschiedenen Wert.

Man setze jetzt, unter $x_1, x_2, \cdots, x_p$ irgend p reelle Größen verstehend, $\mathfrak{A}_\nu = x_\nu i$, ${}_{\nu=1,2,\cdots,p}$; dann wird $\widetilde{\mathfrak{A}}_\nu = -x_\nu i$, $\mathfrak{B}_\nu = \frac{1}{\pi}\sum\limits_{\varrho=1}^{\varrho=p} x_\varrho a_{\varrho\nu}$, $\widetilde{\mathfrak{B}}_\nu = \frac{1}{\pi}\sum\limits_{\varrho=1}^{\varrho=p} x_\varrho \widetilde{a}_{\varrho\nu}$, wobei $\widetilde{a}_{\varrho\nu}$ die zu $a_{\varrho\nu} = a'_{\varrho\nu} + a''_{\varrho\nu} i$ konjugierte Größe $a'_{\varrho\nu} - a''_{\varrho\nu} i$ bezeichnet, und es geht dementsprechend die letzte außerhalb des Textes stehende Gleichung, wenn man noch ihre linke und rechte Seite mit $\frac{\pi i}{2}$ multipliziert, über in die Gleichung:

$$-\frac{\pi}{2}\iint\limits_{T''} \left\{\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y}\right)^2\right\} \partial x \,\partial y = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\sum_{\nu=1}^{\nu=p} a'_{\varrho\nu} x_\varrho x_\nu .$$

Das auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Integral ist niemals negativ und kann nach vorher Bemerktem nur dann den Wert Null annehmen, wenn die Größen $x_1, x_2, \cdots, x_p$ sämtlich der Null gleich gesetzt werden. Infolgedessen hat der auf ihrer rechten Seite stehende Ausdruck nur für $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \cdots, x_p = 0$ den Wert Null, für jedes von $0, 0, \cdots, 0$ verschiedene Wertesystem $x_1, x_2, \cdots, x_p$ dagegen einen negativen Wert. Daraus ergibt sich nun schließlich, daß die mit den reellen Teilen $a'_{\varrho\nu}$ der p^2 Größen $a_{\varrho\nu}$, ${}_{\varrho,\nu=1,2,\cdots,p}$, gebildete Determinante $\sum \pm a'_{11} a'_{22} \cdots a'_{pp}$, deren Elemente wegen $a_{\varrho\nu} = a_{\nu\varrho}$, ${}_{\varrho,\nu=1,2,\cdots,p}$, durch die Beziehungen $a'_{\varrho\nu} = a'_{\nu\varrho}$, ${}_{\varrho,\nu=1,2,\cdots,p}$, verknüpft sind, einen von Null verschiedenen Wert besitzt, und daß die Form $\sum\limits_{\varrho=1}^{\varrho=p}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} a'_{\varrho\nu} x_\varrho x_\nu$ eine negative quadratische Form ist.*)

Infolge des Nichtverschwindens der Determinante $\sum \pm a'_{11} a'_{22} \cdots a'_{pp}$ läßt sich ein System $(e) = e_1 | e_2 | \cdots | e_p$ von p Größen immer und nur auf eine Weise mit Hilfe von $2p$ reellen Größen $\varkappa, \lambda$ in die durch die Gleichungen:

$$e_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \varkappa_\nu a_{1\nu} + \lambda_1 \pi i,\; e_2 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \varkappa_\nu a_{2\nu} + \lambda_2 \pi i,\; \cdots,\; e_p = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \varkappa_\nu a_{p\nu} + \lambda_p \pi i$$

bestimmte Gestalt bringen. Zum Beweise dieser Behauptung hat man nur zu beachten, daß für reelle $\varkappa, \lambda$ das aufgestellte System von p Gleichungen, wenn man noch den

*) Riemann, B., Theorie der Abelschen Funktionen. II, Art. 21. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 88—144; S. 131, 132.)

reellen Teil von e_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots,p)$ durch e'_ϱ, den lateralen durch $e''_\varrho i$ bezeichnet, mit dem Systeme der $2p$ Gleichungen:

$$e'_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \varkappa_\nu a'_{1\nu}, \qquad e'_2 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \varkappa_\nu a'_{2\nu}, \qquad \cdots, \quad e'_p = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \varkappa_\nu a'_{p\nu},$$

$$e''_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \varkappa_\nu a''_{1\nu} + \lambda_1\pi, \quad e''_2 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \varkappa_\nu a''_{2\nu} + \lambda_2\pi, \quad \cdots, \quad e''_p = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \varkappa_\nu a''_{p\nu} + \lambda_p\pi$$

äquivalent ist, und daß diese letzteren Gleichungen für jede der $2p$ Unbekannten $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_p, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ einen bestimmten, reellen Wert liefern.*)

Zwei Größensysteme $(e) = e_1|e_2|\cdots|e_p$, $(\bar{e}) = \bar{e}_1|\bar{e}_2|\cdots|\bar{e}_p$, die in solcher Beziehung zueinander stehen, daß die dem ersten zukommenden Größen $\varkappa, \lambda$ sich von den dem zweiten zukommenden entsprechenden Größen $\bar{\varkappa}, \bar{\lambda}$ nur um ganze Zahlen unterscheiden, oder, was dasselbe, deren Elemente durch p Gleichungen von der Form $e_\varrho = \bar{e}_\varrho + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} g_\nu a_{\varrho\nu} + h_\varrho \pi i$, $\varrho=1,2,\cdots,p$, bei denen die Buchstaben g, h ganze Zahlen bezeichnen, verknüpft sind, sollen nach Riemann kongruente Systeme genannt werden. Sind zwei Systeme (e), $(\bar{e})$ kongruent, so soll diese Beziehung durch $e_1|e_2|\cdots|e_p \equiv \bar{e}_1|\bar{e}_2|\cdots|\bar{e}_p$ oder kürzer durch $(e)\equiv(\bar{e})$ angedeutet werden.

3.

Nachdem im vorhergehenden Artikel die zur Charakteristik $\binom{1\cdots1}{1\cdots1}$ gehörigen allenthalben endlichen Funktionen W definiert und untersucht worden sind, sollen jetzt zunächst solche zur Charakteristik $\binom{1\cdots1}{1\cdots1}$ gehörige Funktionen W betrachtet werden, welche zwar unendlich, aber nur logarithmisch unendlich werden. Auf Grund des Fundamentalsatzes erhält man die sämtlichen zur Charakteristik $\binom{1\cdots1}{1\cdots1}$ gehörigen, nur logarithmisch unendlich werdenden Funktionen W, und zwar jede nur einmal, wenn man die $m_1+\cdots+m_s$ Konstanten $\mathfrak{L}_{\sigma 1}, \cdots, \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}$, $\sigma=1,2,\cdots,s$, sämtlich mit der Null zusammenfallen läßt, weiter dann an Stelle des Systems der s Konstanten $\mathfrak{L}_1, \cdots, \mathfrak{L}_s$ ein jedes von $0, \cdots, 0$ verschiedene, die Gleichung $\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0$ nicht verletzende System von s Werten und unabhängig davon an Stelle des Systems der p Konstanten $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_p$ ein jedes System von p Werten treten läßt, endlich noch zu jeder so erhaltenen Funktion eine willkürliche Konstante C addiert. Unter den zur Charakteristik $\binom{1\cdots1}{1\cdots1}$ gehörigen Funktionen W gibt es also keine, welche nur für einen der Punkte $\mathscr{P}_1, \cdots, \mathscr{P}_s$ logarith-

*) Riemann, B., Theorie der Abelschen Funktionen. I, Art. 15. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 88—144; S. 125, 126.)

misch unendlich wird; wohl aber gibt es solche, die für zwei dieser Punkte logarithmisch unendlich werden.*) Die einfachste derartige Funktion soll jetzt aufgestellt und näher untersucht werden.

Man verstehe unter σ, σ' irgend zwei Zahlen aus der Reihe $1, 2, \cdots, s$ und bezeichne, unter Beachtung der in Art. 3 des ersten Abschnittes gemachten Festsetzungen, den σ^{ten} der s Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ mit η, den σ'^{ten} mit η' und dementsprechend die zu den Punkten η, η' führenden Linien $l_\sigma, l_{\sigma'}$ jetzt mit $l_\eta, l_{\eta'}$ beziehungsweise. Der Fundamentalsatz liefert dann zur Charakteristik $\begin{pmatrix}1 \cdots 1\\ 1 \cdots 1\end{pmatrix}$ eine, die willkürliche additive Konstante c enthaltende, Funktion W, die in der Fläche T'' nur für die Punkte η, η' unstetig wird, und zwar für den Punkt η wie $\ln \frac{1}{z_\eta}$, für den Punkt η' wie $-\ln \frac{1}{z_{\eta'}}$, wenn man $\mathfrak{L}_\sigma = 1$, $\mathfrak{L}_{\sigma'} = -1$ setzt, allen übrigen $s + m_1 + \cdots + m_s - 2$ Größen $\mathfrak{L}$ dagegen sowie den p Größen $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_p$ den Wert Null zulegt. Die so gewonnene spezielle Funktion W bezeichne man nun, die Bestimmung der additiven Konstante c sich vorbehaltend, mit $\Pi\begin{vmatrix}\eta\eta'\\ z\end{vmatrix}$, die bei ihr an Stelle der Größe $\mathfrak{B}_\nu$ stehende Größe mit $\mathfrak{B}_\nu^{(\eta,\eta')}$. Für das Gebiet des Punktes η läßt sich dann diese Funktion durch eine Gleichung von der Form:

$$(1.)\qquad \Pi\begin{vmatrix}\eta\eta'\\ z\end{vmatrix} = \ln\frac{1}{z_\eta} + c_{\sigma 0} + c_{\sigma 1} z_\eta + c_{\sigma 2} z_\eta^2 + \cdots,$$

für das Gebiet des Punktes η' dagegen durch eine Gleichung von der Form:

$$(1'.)\qquad \Pi\begin{vmatrix}\eta\eta'\\ z\end{vmatrix} = -\ln\frac{1}{z_{\eta'}} + c_{\sigma' 0} + c_{\sigma' 1} z_{\eta'} + c_{\sigma' 2} z_{\eta'}^2 + \cdots$$

darstellen, wobei die c von z unabhängige Größen bezeichnen. Zugleich sind die Werte der Funktion $\Pi\begin{vmatrix}\eta\eta'\\ z\end{vmatrix}$ in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathfrak{P}^+, \mathfrak{P}^-$ in der Weise verknüpft, daß

$$(2.)\qquad \begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \Big\{ \Pi\begin{vmatrix}\eta\eta'\\ z\end{vmatrix}^+ = \Pi\begin{vmatrix}\eta\eta'\\ z\end{vmatrix}^-,\\
&\text{längs } b_\nu \Big\{ \Pi\begin{vmatrix}\eta\eta'\\ z\end{vmatrix}^+ = \Pi\begin{vmatrix}\eta\eta'\\ z\end{vmatrix}^- + \mathfrak{B}_\nu^{(\eta,\eta')}, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p,\\
&\text{längs } c_\nu \Big\{ \Pi\begin{vmatrix}\eta\eta'\\ z\end{vmatrix}^+ = \Pi\begin{vmatrix}\eta\eta'\\ z\end{vmatrix}^-,\\
&\text{längs } l_\eta \Big\{ \Pi\begin{vmatrix}\eta\eta'\\ z\end{vmatrix}^+ = \Pi\begin{vmatrix}\eta\eta'\\ z\end{vmatrix}^- + 2\pi i,\\
&\text{längs } l_{\eta'} \Big\{ \Pi\begin{vmatrix}\eta\eta'\\ z\end{vmatrix}^+ = \Pi\begin{vmatrix}\eta\eta'\\ z\end{vmatrix}^- - 2\pi i,
\end{aligned}$$

längs einer jeden der $s-2$ übrigen Linien l dagegen $\Pi\begin{vmatrix}\eta\eta'\\ z\end{vmatrix}^+ = \Pi\begin{vmatrix}\eta\eta'\\ z\end{vmatrix}^-$ ist. Von den in den

*) Riemann, B., Theorie der Abelschen Funktionen. I, Art. 4. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 88—144; S. 106.)

Gleichungen (1.), (1'.), (2.) vorkommenden Konstanten sind die Konstanten $c_{\sigma 0}$, $c_{\sigma' 0}$ die einzigen, welche von der in $\Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta\eta'\\ z\end{smallmatrix}\right|$ enthaltenen willkürlichen additiven Konstante c abhängen, und zwar geht beim Übergang von c in $c+k$ die Größe $c_{\sigma 0}$ in $c_{\sigma 0}+k$, die Größe $c_{\sigma' 0}$ in $c_{\sigma' 0}+k$ über. Infolgedessen kann man den Wert der in $\Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta\eta'\\ z\end{smallmatrix}\right|$ enthaltenen, bis jetzt noch willkürlichen additiven Konstante c immer und nur auf eine Weise so wählen, daß

(3.) $$c_{\sigma 0}=0$$

ist, und es ist dann zugleich die Funktion $\Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta\eta'\\ z\end{smallmatrix}\right|$ vollständig bestimmt, einerlei welche zwei Punkte aus der Reihe $\infty_1, \cdots, \infty_q$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ man auch unter η, η' verstehen mag.

Die p bei der Funktion $\Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta\eta'\\ z\end{smallmatrix}\right|$ auftretenden Konstanten $\mathfrak{B}_\nu^{(\eta,\eta')}$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, lassen sich durch die Werte, welche die p Elementarfunktionen u für die Punkte η, η' besitzen, ausdrücken. Um diese Ausdrücke zu erhalten, beziehe man die Fundamentalformel (F_3.) auf die Funktionen $\Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta\eta'\\ z\end{smallmatrix}\right|$, $u_\varrho|z|$, lasse also in der Formel (F_3.), nachdem man bei ihr den Summationsbuchstaben σ, um Verwechslungen mit den zu Anfang dieses Artikels eingeführten festen Zahlen σ, σ' vorzubeugen, durch τ ersetzt und zur Darstellung der Funktion $u_\varrho|z|$ für die Gebiete der Punkte η, η' die Gleichungen $u_\varrho|z|=\bar{c}_{\sigma 0}+\bar{c}_{\sigma 1}z_\eta+\bar{c}_{\sigma 2}z_\eta^2+\cdots$, $u_\varrho|z|=\bar{c}_{\sigma' 0}+\bar{c}_{\sigma' 1}z_{\eta'}+\bar{c}_{\sigma' 2}z_{\eta'}^2+\cdots$, bei denen speziell $\bar{c}_{\sigma 0}=u_\varrho|\eta|$, $\bar{c}_{\sigma' 0}=u_\varrho|\eta'|$ ist, aufgestellt hat, an Stelle der darin vorkommenden Konstanten der Funktionen $W, \overline{W}$ die entsprechenden Konstanten der Funktionen $\Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta\eta'\\ z\end{smallmatrix}\right|$, $u_\varrho|z|$ treten. Man erhält so zunächst die Gleichung:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left(-\mathfrak{B}_\nu^{(\eta,\eta')}\delta_{\varrho\nu}\pi i\right)-2\pi i\bar{c}_{\sigma 0}+2\pi i\bar{c}_{\sigma' 0}=0$$

und weiter dann, indem man die Summation nach ν ausführt und $\bar{c}_{\sigma 0}$, $\bar{c}_{\sigma' 0}$, den schon oben aufgestellten Gleichungen $\bar{c}_{\sigma 0}=u_\varrho|\eta|$, $\bar{c}_{\sigma' 0}=u_\varrho|\eta'|$ gemäß, durch $u_\varrho|\eta|$, $u_\varrho|\eta'|$ beziehungsweise ersetzt, die für $\varrho=1,2,\cdots,p$ geltende Beziehung:

$$-\mathfrak{B}_\varrho^{(\eta,\eta')}\pi i-2\pi i u_\varrho|\eta|+2\pi i u_\varrho|\eta'|=0.$$

Ersetzt man nun noch den Buchstaben ϱ in neuer Bezeichnung durch ν, so erhält man schließlich die Gleichungen:

(4.) $$\mathfrak{B}_\nu^{(\eta,\eta')}=-2\left(u_\nu|\eta|-u_\nu|\eta'|\right), \qquad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p.}$$

Man verstehe jetzt unter $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ irgend drei Zahlen aus der Reihe $1, 2, \cdots, s$ und bezeichne den σ_1^{ten} der s Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ mit η_1, den σ_2^{ten}

mit η_2, den σ_3^{ten} mit η_3. Die zu diesen drei Punkten η führenden Linien $l_{\sigma_1}, l_{\sigma_2}, l_{\sigma_3}$ mögen bei einem negativen Umlauf um den gemeinsamen Mündungspunkt $\mathfrak{P}_0$ der Schnitte c, l in der durch die Permutation τ_2, τ_3 der Zahlen σ_2, σ_3 charakterisierten Reihenfolge $l_{\sigma_1}, l_{\tau_2}, l_{\tau_3}$ überschritten werden. Bildet man dann die zu den Punktepaaren η_1, η_2; η_1, η_3 gehörigen Funktionen $\Pi\begin{vmatrix}\eta_1\,\eta_2\\ z\end{vmatrix}$, $\Pi\begin{vmatrix}\eta_1\,\eta_3\\ z\end{vmatrix}$ und bezieht die in Art. 1 aufgestellte Fundamentalformel (F_3.) auf diese beiden Funktionen, läßt also in der Formel (F_3.) an Stelle der darin vorkommenden Konstanten der Funktionen $W, \overline{W}$ die entsprechenden Konstanten der Funktionen $\Pi\begin{vmatrix}\eta_1\,\eta_2\\ z\end{vmatrix}$, $\Pi\begin{vmatrix}\eta_1\,\eta_3\\ z\end{vmatrix}$ treten, so erhält man unter Beachtung des am Schlusse von Art. 1 Bemerkten zunächst die Gleichung:

$$\left\{\begin{aligned}&4\pi^2[\mathfrak{L}_{\sigma_1}(\overline{\mathfrak{L}}_{\sigma_1}+\overline{\mathfrak{L}}_{\tau_2}+\overline{\mathfrak{L}}_{\tau_3})+\mathfrak{L}_{\tau_2}(\overline{\mathfrak{L}}_{\tau_2}+\overline{\mathfrak{L}}_{\tau_3})+\mathfrak{L}_{\tau_3}\overline{\mathfrak{L}}_{\tau_3}]-2\pi^2[\mathfrak{L}_{\sigma_1}\overline{\mathfrak{L}}_{\sigma_1}+\mathfrak{L}_{\sigma_2}\overline{\mathfrak{L}}_{\sigma_2}+\mathfrak{L}_{\sigma_3}\overline{\mathfrak{L}}_{\sigma_3}]\\&-2\pi i[\mathfrak{L}_{\sigma_1}\bar{c}_{\sigma_1 0}-\overline{\mathfrak{L}}_{\sigma_1}c_{\sigma_1 0}+\mathfrak{L}_{\sigma_2}\bar{c}_{\sigma_2 0}-\overline{\mathfrak{L}}_{\sigma_3}c_{\sigma_3 0}]\end{aligned}\right\}=0,$$

wobei

$$\mathfrak{L}_{\sigma_1}=1,\quad \mathfrak{L}_{\sigma_2}=-1,\quad \mathfrak{L}_{\sigma_3}=0;\qquad c_{\sigma_1 0}=0,\quad c_{\sigma_3 0}=\Pi\begin{vmatrix}\eta_1\,\eta_2\\ \eta_3\end{vmatrix},$$

$$\overline{\mathfrak{L}}_{\sigma_1}=1,\quad \overline{\mathfrak{L}}_{\sigma_2}=0,\quad \overline{\mathfrak{L}}_{\sigma_3}=-1;\qquad \bar{c}_{\sigma_1 0}=0,\quad \bar{c}_{\sigma_2 0}=\Pi\begin{vmatrix}\eta_1\,\eta_3\\ \eta_2\end{vmatrix},$$

ist, und schließlich nach einfachen Überlegungen die Gleichung:

$$\Pi\begin{vmatrix}\eta_1\,\eta_2\\ \eta_3\end{vmatrix}=\Pi\begin{vmatrix}\eta_1\,\eta_3\\ \eta_2\end{vmatrix}\mp\pi i, \tag{5.}$$

bei der auf der rechten Seite das negative oder positive Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Schnitte $l_{\sigma_1}, l_{\sigma_2}, l_{\sigma_3}$ bei einem negativen Umlauf um den gemeinsamen Mündungspunkt $\mathfrak{P}_0$ der Schnitte c, l in der Reihenfolge $l_{\sigma_1}, l_{\sigma_2}, l_{\sigma_3}$ oder in der Reihenfolge $l_{\sigma_1}, l_{\sigma_3}, l_{\sigma_2}$ überschritten werden.

Bei der Definition der Funktion $\Pi\begin{vmatrix}\eta\,\eta'\\ z\end{vmatrix}$ wurde unter η der σ^{te}, unter η' der σ'^{te} der Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ verstanden. Beachtet man nun, daß in dem Fundamentalsatze t eine unbestimmte positive ganze Zahl bedeutet, und daß die Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ t beliebig im Innern von T'' angenommene, von den Punkten $\infty_1, \cdots, \infty_q$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ verschiedene Punkte sind, so erkennt man, daß man bei Zugrundelegung der ursprünglichen Fläche T'' zu je zwei im Innern von T'' gelegenen Punkten η, η' eine Funktion $\Pi\begin{vmatrix}\eta\,\eta'\\ z\end{vmatrix}$ in der früher angegebenen Weise definieren kann, sobald man nur in die Fläche T'' zwei durch keinen der Punkte ∞, α hindurchgehende Schnitte $l_\eta, l_{\eta'}$ eingeführt hat, welche den der positiven Seite von c_p und der negativen Seite von c_1 gemeinsam angehörigen Punkt mit den Punkten η, η' verbinden.

Weiter kann man dann durch Betrachtungen, die den in Art. 4 des zweiten Abschnittes für die Funktion $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ angestellten ganz ähnlich sind, zeigen, daß eine Funktion $\Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta\eta'\\ z\end{smallmatrix}\right|$ mit den oben angegebenen charakteristischen Eigenschaften auch in dem Falle existiert, wo einer der Punkte η, η' der Begrenzung von T' angehört, und auch noch in dem Falle, wo die Punkte η, η' beide der Begrenzung von T' angehören, wenn nur diese beiden Punkte als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen.

Schließlich läßt sich durch die am Ende von Art. 4 des zweiten Abschnittes angewandte Schlußweise auch noch zeigen, daß die soeben abgeleitete Formel (5.) ohne weiteres auf den Fall übertragen werden kann, wo die Punkte η_1, η_2, η_3 teilweise oder sämtlich der Begrenzung von T' angehören, wenn nur diese Punkte als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen. Die von der Formel (5.) sich nur durch die Bezeichnung unterscheidende Formel:

$$(\bar{5}.)\qquad \Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right| = \Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| \mp \pi i$$

— bei der auf der rechten Seite das negative oder positive Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Schnitte l_η, l_ζ, l_z bei einem negativen Umlauf um den gemeinsamen Mündungspunkt $\mathfrak{P}_0$ der Schnitte c, l in der Reihenfolge l_η, l_ζ, l_z oder in der Reihenfolge l_η, l_z, l_ζ überschritten werden — gilt dementsprechend für irgend drei Punkte η, ζ, z der Fläche T', wenn nur diese Punkte als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen. Aus der Formel $(\bar{5}.)$ erkennt man nun, daß die Funktion $\Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ nicht nur bei festgehaltenem Punktepaare η, ζ eine Funktion der komplexen Veränderlichen z, sondern auch bei festgehaltenem Punktepaare η, z eine Funktion der komplexen Veränderlichen ζ ist, und daß die Eigenschaften von $\Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ als Funktion von ζ ohne Mühe aus den bekannten Eigenschaften von $\Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right|$ als Funktion von ζ abgeleitet werden können.

4.

Von der im vorhergehenden Artikel definierten Funktion Π ausgehend kann man jetzt in folgender Weise eine Funktion bilden, die nur für einen Punkt der Fläche T' logarithmisch unendlich wird.

Man verstehe (s. Fig. 1) unter η irgend einen im Innern der Fläche T' gelegenen, unter ζ einen der positiven Seite b_ϱ^+ des Schnittes b_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots,p)$ angehörigen Punkt, bezeichne mit b_ϱ' denjenigen Teil des Schnittes b_ϱ, dessen positive Seite sich von $\mathfrak{t}_\varrho$ bis ζ erstreckt, mit b_ϱ'' den noch übrigen Teil des Schnittes b_ϱ, dessen positive Seite sich also von ζ bis $\mathfrak{r}_\varrho$ erstreckt, ziehe nach den Punkten η, ζ von dem der positiven Seite von c_p

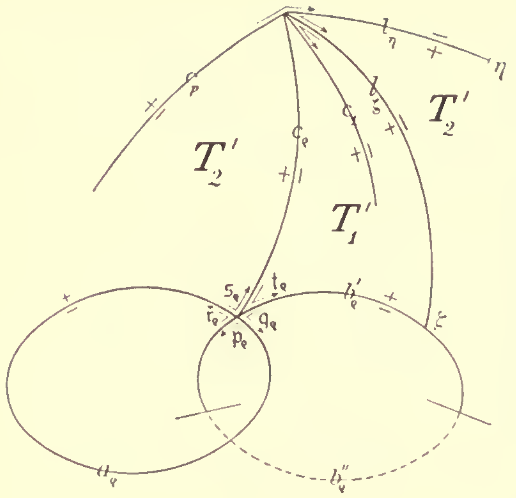


Fig. 1.

und der negativen Seite von c_1 gemeinsam angehörigen Punkte aus zwei Schnitte l_η, l_ζ in der Weise, daß die Schnitte c, l bei einem negativen Umlauf um ihren gemeinsamen Mündungspunkt $\mathfrak{P}_0$ in der Reihenfolge $c_1, c_2, \cdots, c_p, l_\eta, l_\zeta$ überschritten werden, und denke sich alsdann nach Anleitung des vorhergehenden Artikels die zu dem Punktepaare η, ζ gehörige Funktion $\Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ gebildet. Da der Punkt ζ der Begrenzung von T' angehört, wird durch den Schnitt l_ζ die den Schnitt l_η enthaltende, einfach zusammenhängende Fläche T' in zwei einfach zusammenhängende Flächenstücke zerlegt, von denen das eine, mit T_1' zu bezeichnende, durch die positive Seite von l_ζ, die beiden Seiten der Schnitte $a_1, b_1, c_1; \cdots; a_{\varrho-1}, b_{\varrho-1}, c_{\varrho-1}$, die negative Seite von c_ϱ und die positive von b_ϱ', das andere, mit T_2' zu bezeichnende, dagegen durch die negative Seite von l_ζ, die positive von b_ϱ'', die negativen Seiten von a_ϱ, b_ϱ, die positiven von a_ϱ, c_ϱ und die beiden Seiten der Schnitte $a_{\varrho+1}, b_{\varrho+1}, c_{\varrho+1}; \cdots; a_p, b_p, c_p$; l_η begrenzt ist. Zu der die Schnitte l_η, l_ζ enthaltenden Fläche T' definiere man jetzt eine neue Funktion $\underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{smallmatrix}\eta\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ dadurch, daß man

$$\text{(1.)}\qquad \begin{aligned}&\text{für jeden Punkt } z \text{ von } T_1' \left\{\underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{smallmatrix}\eta\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right| = \Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right| + 2\pi i,\right.\\ &\text{für jeden Punkt } z \text{ von } T_2' \left\{\underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{smallmatrix}\eta\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right| = \Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|\right.\end{aligned}$$

setzt. Da diese Funktion $\underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{smallmatrix}\eta\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ von z in irgend zwei zum Schnitte l_ζ gehörigen entsprechenden Punkten $\mathfrak{P}^+, \mathfrak{P}^-$ denselben Wert besitzt, so ist sie auch noch in der nur den Schnitt l_η enthaltenden Fläche T' einwertig, und es soll daher bei der Betrachtung dieser Funktion der Schnitt l_ζ als überflüssig weggelassen werden. Bezogen auf die von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c und des Schnittes l_η begrenzte, mit T'' zu bezeichnende, Fläche besitzt nun die Funktion $\underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{smallmatrix}\eta\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ die folgenden Eigenschaften. Für jeden Punkt z der Fläche T'', der eine solche Lage hat, daß die Punkte z, η, ζ als Punkte der ursprünglichen Fläche T betrachtet getrennt liegen, ist sie einwertig und stetig, für den Punkt η wird sie unstetig wie $\ln\frac{1}{z_\eta}$, für den Punkt ζ dagegen unstetig wie $-\ln\frac{1}{z-\zeta}$; zudem sind ihre, allgemein mit $\underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{smallmatrix}\eta\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+$, $\underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{smallmatrix}\eta\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|^-$ zu bezeichnenden, Werte in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathfrak{P}^+, \mathfrak{P}^-$ in der Weise verknüpft, daß

$$
\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \left\{ \underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right|^{+} = \underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right|^{-}, \right. && \nu=1,2,\cdots,p,\\
&\text{längs } b_\nu \left\{ \underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right|^{+} = \underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right|^{-} - 2(u_\nu^\eta - u_\nu^\zeta), \right. && \nu=1,2,\cdots,\varrho-1,\varrho+1,\cdots,p,\\
&\text{längs } b'_\varrho \left\{ \underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right|^{+} = \underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right|^{-} - 2(u_\varrho^\eta - u_\varrho^\zeta) + 2\pi i, \right. &&\\
(2.)\quad &\text{längs } b''_\varrho \left\{ \underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right|^{+} = \underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right|^{-} - 2(u_\varrho^\eta - u_\varrho^\zeta), \right. &&\\
&\text{längs } c_\nu \left\{ \underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right|^{+} = \underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right|^{-} - \delta_{\varrho\nu} 2\pi i, \right. && \nu=1,2,\cdots,p,\\
&\text{längs } l_\eta \left\{ \underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right|^{+} = \underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right|^{-} + 2\pi i \right. &&
\end{aligned}
$$

ist.

Die Funktion $\underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right|$ läßt sich in einheitlicher Weise durch eine Funktion Π mit dem Argumente ζ darstellen. Zu dem Ende braucht man nur bei einer jeden der beiden zur Definition von $\underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right|$ aufgestellten Gleichungen die auf der rechten Seite vorkommende Funktion $\Pi\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right|$ nach Hinzunahme eines dritten Schnittes l_z mit Hilfe der Formel ($\bar{5}$.) durch die Funktion $\Pi\left|\begin{matrix}\eta z\\ \zeta\end{matrix}\right|$ auszudrücken. Die Formel ($\bar{5}$.) liefert nun, wenn z ein Punkt von T_1' ist, die Gleichung $\Pi\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right| = \Pi\left|\begin{matrix}\eta z\\ \zeta\end{matrix}\right| - \pi i$, da in diesem Falle die drei Schnitte l bei einem negativen Umlauf um den Punkt $\mathfrak{P}_0$ unter allen Umständen in der Reihenfolge l_η, l_ζ, l_z überschritten werden; sie liefert andererseits, wenn z ein Punkt von T_2' ist und der Schnitt l_z von dem der positiven Seite von l_η und der negativen Seite von l_ζ gemeinsam angehörigen Punkte aus gezogen wird, die Gleichung $\Pi\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right| = \Pi\left|\begin{matrix}\eta z\\ \zeta\end{matrix}\right| + \pi i$, da in diesem Falle die drei Schnitte l bei einem negativen Umlauf um den Punkt $\mathfrak{P}_0$ in der Reihenfolge l_η, l_z, l_ζ überschritten werden. Eliminiert man jetzt mit Hilfe dieser Gleichungen die Größe $\Pi\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right|$ aus den genannten Definitionsgleichungen, so erkennt man, daß für jede Lage des Punktes z die Gleichung:

$$
(3.)\qquad \underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right| = \Pi\left|\begin{matrix}\eta z\\ \zeta\end{matrix}\right| + \pi i
$$

besteht, wenn nur der Schnitt l_z so gezogen ist, daß bei einem negativen Umlauf um den Punkt $\mathfrak{P}_0$ die Schnitte c, l in der Reihenfolge $c_1, c_2, \cdots, c_p, l_\eta, l_z$ überschritten werden. Daraus folgt aber das für die weitere Untersuchung im Auge zu behaltende Resultat, daß die Funktion $\underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{matrix}\eta\zeta\\ z\end{matrix}\right|$ für jeden Punkt ζ von b_ϱ^+ mit der Funktion $\Pi\left|\begin{matrix}\eta z\\ \zeta\end{matrix}\right| + \pi i$

der komplexen Veränderlichen ζ übereinstimmt und dementsprechend*) in der vorher eingeführten, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c und des Schnittes l_η begrenzten Fläche T''' eine stetige Funktion des Punktepaares ζ, z ist, wenn nur die Punkte ζ, z als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen, und der Punkt z von dem Punkte η verschieden ist.

Es soll jetzt das über die positive Seite des Schnittes b_ϱ in positiver Richtung zu erstreckende Integral $-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{b_\varrho^+}^{+} \underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{matrix}\eta\,\zeta\\ z\end{matrix}\right| du_\varrho^\zeta$ betrachtet werden. Man erkennt zunächst, daß dieses Integral für dasjenige Punktgebiet G, welches alle Punkte z der Fläche T''' mit Ausnahme der am Schnitte b_ϱ gelegenen Punkte und des Punktes $\mathfrak{s}_\varrho$ umfaßt, eine Funktion:

$$J_\varrho\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right| = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{b_\varrho^+}^{+} \underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{matrix}\eta\,\zeta\\ z\end{matrix}\right| du_\varrho^\zeta$$

der komplexen Veränderlichen z liefert, welche für jeden von η verschiedenen Punkt z von G einwertig und stetig ist, für den Punkt η dagegen unstetig wird wie $\ln\frac{1}{z_\eta}$, da $\underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{matrix}\eta\,\zeta\\ z\end{matrix}\right| - \ln\frac{1}{z_\eta}$ für $z=\eta$ stetig bleibt und $-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{b_\varrho^+}^{+} du_\varrho^\zeta = 1$ ist, und es ist daher jetzt nur noch zu untersuchen, was das Integral für die nicht dem Gebiet G angehörigen Punkte z von T''' darstellt.

Es möge unter z' ein auf der positiven oder negativen Seite des Schnittes b_ϱ gelegener, aber von den Punkten $\mathfrak{p}_\varrho$, $\mathfrak{q}_\varrho$, $\mathfrak{r}_\varrho$, $\mathfrak{t}_\varrho$ verschiedener Punkt verstanden und um ihn als Mittelpunkt eine Kreisfläche abgegrenzt werden von so kleinem Radius δ, daß diese Fläche weder einen Windungspunkt α noch den Punkt η enthält, und ihre Peripherie, ebenso wie die Peripherie jeder kleineren konzentrischen Kreisfläche, mit dem Schnitte b_ϱ nur zwei Punkte $\mathfrak{m}_\varrho$, $\mathfrak{n}_\varrho$ gemeinsam hat, dagegen durch keinen Punkt eines der übrigen Schnitte a, b, c, l_η hindurchgeht. Dabei soll die Bezeichnung so gewählt sein, daß ein den Punkt z' in positivem Sinne umkreisender Punkt an der Stelle $\mathfrak{m}_\varrho$ von b_ϱ^+ nach b_ϱ^- übertritt. Beim Schnitte b_ϱ führe man nun an Stelle des Stückes $\mathfrak{m}_\varrho\mathfrak{n}_\varrho$ denjenigen Kreisbogen $\widehat{\mathfrak{m}_\varrho\mathfrak{n}_\varrho}$, welcher vom Punkte z' durch das Schnittstück $\mathfrak{m}_\varrho\mathfrak{n}_\varrho$ getrennt ist, als neues Schnittstück ein, bezeichne den so geänderten Schnitt b_ϱ mit $\bar{b}_\varrho$, die durch diese Schnittänderung aus T''' hervorgehende neue Fläche

*) Vgl. Hartogs, F., Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten. Mathematische Annalen 62 (1906), S. 1—88; S. 12.

mit T'' und verstehe unter G dasjenige Punktgebiet, welches alle Punkte der Fläche T'' mit Ausnahme der am Schnitte $\bar{b}_\varrho$ gelegenen Punkte und des Punktes $\mathfrak{s}_\varrho$ umfaßt. Das mit der zu T'' gehörigen Funktion $\underset{\varrho}{\Pi}\left|{\eta\zeta \atop z}\right|$ gebildete Integral $-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\bar{b}_\varrho^+}^{+}\underset{\varrho}{\Pi}\left|{\eta\zeta \atop z}\right| du_\varrho^\zeta$ liefert dann für das Gebiet $\bar{G}$ eine Funktion der komplexen Veränderlichen z, welche für jeden von η verschiedenen Punkt z von G einwertig und stetig ist. Da dieses Integral aber, wie die Gleichung (3.) zeigt, für jeden Punkt z des Punktgebietes G, der nicht zugleich dem durch das Schnittstück $\mathfrak{m}_\varrho\mathfrak{n}_\varrho$ und das Kreisbogenschnittstück $\widehat{\mathfrak{m}_\varrho\mathfrak{n}_\varrho}$ begrenzten Flächenstücke angehört, denselben Wert $J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right|$ besitzt wie das ursprüngliche über den Schnitt b_ϱ erstreckte Integral, und jeder solche Punkt z auch dem Gebiete G angehört, so liefert es zugleich die stetige Fortsetzung von $J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right|$ als Funktion der komplexen Veränderlichen z über das Schnittstück $\mathfrak{m}_\varrho\mathfrak{n}_\varrho$ hinüber bis in jede Nähe des Kreisbogenschnittstückes $\widehat{\mathfrak{m}_\varrho\mathfrak{n}_\varrho}$ und speziell für den am Schnittstück $\overline{\mathfrak{m}_\varrho\mathfrak{n}_\varrho}$ gelegenen Punkt $z=z'$ den dieser stetigen Fortsetzung entsprechenden Wert $J_\varrho\left|{\eta \atop z'}\right|$ der Funktion $J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right|$, sodaß also $J_\varrho\left|{\eta \atop z'}\right|$ durch die Gleichung:

$$J_\varrho\left|{\eta \atop z'}\right| = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\bar{b}_\varrho^+}^{+}\underset{\varrho}{\Pi}\left|{\eta\zeta \atop z'}\right| du_\varrho^\zeta$$

bestimmt ist. Scheidet man nun aus dem auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Integrale denjenigen Teil aus, welcher sich auf das Kreisbogenschnittstück $\widehat{\mathfrak{m}_\varrho\mathfrak{n}_\varrho}$ bezieht, und beachtet, daß dieser ausgeschiedene Teil mit gegen Null konvergierendem δ selbst gegen Null konvergiert, so erkennt man, daß man die Größe $J_\varrho\left|{\eta \atop z'}\right|$ auch durch die Gleichung:

$$J_\varrho\left|{\eta \atop z'}\right| = \lim_{\delta=0}\left\{-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathfrak{t}_\varrho}^{\mathfrak{m}_\varrho^+}\underset{\varrho}{\Pi}\left|{\eta\zeta \atop z'}\right| du_\varrho^\zeta - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathfrak{n}_\varrho^+}^{\mathfrak{r}_\varrho}\underset{\varrho}{\Pi}\left|{\eta\zeta \atop z'}\right| du_\varrho^\zeta\right\}$$

definieren kann, aber auch, da jedes der beiden hier auftretenden Integrale für $\lim\delta=0$ unabhängig von dem anderen konvergiert, den in der Theorie der bestimmten Integrale üblichen Festsetzungen gemäß, durch die Gleichung:

$$J_\varrho\left|{\eta \atop z'}\right| = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{b_\varrho^+}^{+}\underset{\varrho}{\Pi}\left|{\eta\zeta \atop z'}\right| du_\varrho^\zeta.$$

In ähnlicher Weise läßt sich weiter zeigen, daß das ursprüngliche, über b_ϱ^+ erstreckte Integral auch in dem Falle, wo z einer der Punkte $\mathfrak{p}_\varrho$, $\mathfrak{q}_\varrho$, $\mathfrak{r}_\varrho$, $\mathfrak{s}_\varrho$, $\mathfrak{t}_\varrho$ ist, den der stetigen Fortsetzung von $J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right|$ als Funktion der komplexen Veränderlichen z entsprechenden Wert dieser Funktion liefert. Man hat dabei nur zu beachten, daß die auf der rechten Seite der Gleichung (3.) stehende Funktion $\Pi\left|{\eta z \atop \zeta}\right|$ als Funktion von ζ in je zwei zum Schnitte a_ϱ oder zum Schnitte c_ϱ gehörigen entsprechenden Punkten denselben Wert besitzt, und daß daher der Wert des in Rede stehenden, auf einen Punkt z des Gebietes G bezogenen Integrals durch eine stetige Deformation des Schnittsystems an der gemeinsamen Mündungsstelle der Schnitte a_ϱ, b_ϱ, c_ϱ keine Änderung erleidet, wenn nur bei dieser Deformation keiner dieser Schnitte bis zum Punkte z vorgeschoben oder über diesen Punkt hinübergeschoben wird.

Die bisherigen Untersuchungen haben ergeben, daß durch die Gleichung:

$$(1'.)\qquad J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right| = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{b_\varrho^+}^{+} \Pi_\varrho\left|{\eta\zeta \atop z}\right| du_\varrho^\zeta$$

eine in der Fläche T'' einwertige Funktion der komplexen Veränderlichen z geliefert wird, welche für jeden von η verschiedenen Punkt z von T'' stetig ist, für den Punkt η dagegen unstetig wird wie $\ln\frac{1}{z_\eta}$. Was nun das Verhalten der Funktion $J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right|$ längs der Begrenzung von T'' betrifft, so sind, wie sich auf Grund der Gleichungen (2.) in sogleich anzugebender Weise ergibt, ihre, allgemein mit $J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right|^+$, $J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right|^-$ zu bezeichnenden, Werte in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathscr{P}^+$, $\mathscr{P}^-$ in der Weise verknüpft, daß

$$(2'.)\qquad \begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \Big\{ J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right|^+ = J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right|^-, && \nu=1,2,\cdots,p,\\
&\text{längs } b_\nu \Big\{ J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right|^+ = J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right|^- - 2u_\nu^\eta - \frac{2}{\pi i}\int\limits_{b_\varrho^+}^{+} u_\nu^\zeta du_\varrho^\zeta, && \nu=1,2,\cdots,\varrho-1,\varrho+1,\cdots,p,\\
&\text{längs } b_\varrho \Big\{ J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right|^+ = J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right|^- - 2u_\varrho^\eta + 2u_\varrho^z + 2a_{\varrho\varrho} + \pi i, &&\\
&\text{längs } c_\nu \Big\{ J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right|^+ = J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right|^- - \delta_{\varrho\nu} 2\pi i, && \nu=1,2,\cdots,p,\\
&\text{längs } l_\eta \Big\{ J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right|^+ = J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right|^- + 2\pi i &&
\end{aligned}$$

ist. Von diesen Gleichungen entsteht die erste, zweite, vierte und fünfte, indem man die entsprechende unter (2.) stehende Gleichung links und rechts mit $-\frac{1}{\pi i}du_\varrho^\zeta$ multipliziert und alsdann, unter Beachtung der Gleichung $-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{b_\varrho^+}^{+} du_\varrho^\zeta = 1$, über b_ϱ^+ in positiver Richtung integriert. Zu der dritten Gleichung dagegen gelangt man auf folgende Weise.

Zunächst ergibt sich nach dem vorher über die Definition von $J_\varrho\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z'\end{smallmatrix}\right|$ Gesagten für die Differenz der Werte $J_\varrho\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+$, $J_\varrho\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^-$ von $J_\varrho\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ in irgend zwei zum Schnitte b_ϱ gehörigen entsprechenden Punkten z^+, z^- die Gleichung:

$$J_\varrho\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ - J_\varrho\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^- = -\frac{1}{\pi i}\lim_{\delta'=0}\left\{\int_{\mathfrak{t}_\varrho}^{\mathfrak{m}_\varrho^+}\left(\underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{smallmatrix}\eta\,\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ - \underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{smallmatrix}\eta\,\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|^-\right)du_\varrho^\zeta + \int_{\mathfrak{n}_\varrho^+}^{\mathfrak{r}_\varrho}\left(\underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{smallmatrix}\eta\,\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ - \underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{smallmatrix}\eta\,\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|^-\right)du_\varrho^\zeta\right\}.$$

Zu jedem bei dem ersten der beiden hier rechts stehenden Integrale in Betracht kommenden Punkte ζ hat nun das Punktepaar z^+, z^- eine solche Lage, daß es zu dem von ζ bis $\mathfrak{r}_\varrho$ sich erstreckenden, im Anfang dieses Artikels mit b''_ϱ bezeichneten Teile des Schnittes b_ϱ gehört; zu jedem bei dem zweiten Integrale in Betracht kommenden Punkte ζ dagegen hat es eine solche Lage, daß es zu dem von $\mathfrak{t}_\varrho$ bis ζ sich erstreckenden, im Anfang mit b'_ϱ bezeichneten Teile des Schnittes b_ϱ gehört. Infolgedessen kann man die Differenz $\underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{smallmatrix}\eta\,\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ - \underset{\varrho}{\Pi}\left|\begin{smallmatrix}\eta\,\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|^-$ bei dem ersten Integrale, auf Grund der vierten unter (2.) stehenden Gleichung, durch $-2(u_\varrho^\eta - u_\varrho^\zeta)$, bei dem zweiten Integrale, auf Grund der dritten unter (2.) stehenden Gleichung, durch $-2(u_\varrho^\eta - u_\varrho^\zeta) + 2\pi i$ ersetzen. Man erhält dann, wenn man zugleich noch zur Grenze übergeht, die Gleichung:

$$J_\varrho\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ - J_\varrho\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^- = -\frac{1}{\pi i}\left\{\int_{\mathfrak{t}_\varrho}^{z^+}\left[-2(u_\varrho^\eta - u_\varrho^\zeta)\right]du_\varrho^\zeta + \int_{z^+}^{\mathfrak{r}_\varrho}\left[-2(u_\varrho^\eta - u_\varrho^\zeta) + 2\pi i\right]du_\varrho^\zeta\right\}$$

und schließlich, indem man die rechts vorgeschriebenen Integrationen ausführt und die Relationen $u_\varrho^{\mathfrak{t}_\varrho} = u_\varrho^{\mathfrak{r}_\varrho} + \pi i$, $u_\varrho^{z^+} = u_\varrho^{z^-} + a_{\varrho\varrho}$ beachtet, die gewünschte, das Verhalten von $J_\varrho\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ längs des Schnittes b_ϱ charakterisierende Gleichung:

$$J_\varrho\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ - J_\varrho\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|^- = -2u_\varrho^\eta + 2u_\varrho^{z^-} + 2a_{\varrho\varrho} + \pi i.$$

Daß diese Gleichung erhalten bleibt, wenn der Punkt z^+ sich mit dem Punkte $\mathfrak{t}_\varrho$ oder dem Punkte $\mathfrak{r}_\varrho$ deckt, erkennt man ohne Mühe.

In der Funktion $J_\varrho\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ $(\varrho=1,2,\cdots,p)$ besitzt man jetzt eine Funktion, die nur für einen Punkt der Fläche T'' logarithmisch unendlich wird, und damit eine Funktion von der zu Anfang dieses Artikels verlangten Art, bei der jedoch, wie die Gleichungen (2'.) zeigen, der Schnitt b_ϱ eine Ausnahmestellung einnimmt. Um diesen Nachteil zu beseitigen, definiere man zur Fläche T'' eine neue Funktion, $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$, durch die Gleichung:

$$\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right| = \frac{1}{p}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\left\{J_\varrho\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right| + \frac{1}{p\pi i}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p}\int_{b_\sigma^+}^{+} J_\varrho\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ \zeta\end{smallmatrix}\right|du_\sigma^\zeta - \frac{2}{p\pi i}\int_{b_\varrho^+}^{+} u_\varrho^\zeta\,du_\varrho^\zeta\right\},$$

indem man beachtet, daß bei der Funktion $J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right|$ η einen im Innern der Fläche T' gelegenen Punkt bezeichnet, und daß diese Funktion $J_\varrho\left|{\eta \atop z}\right|$ für jeden von η verschiedenen Punkt der Fläche T'', also insbesondere auch für jeden zu einem Schnitte b gehörigen Punkt $z = \zeta'$ stetig ist. Die definierte Funktion $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$ ist eine in T'' einwertige Funktion der komplexen Veränderlichen z, welche für jeden von η verschiedenen Punkt z der Fläche T'' stetig ist, für den Punkt η dagegen unstetig wird wie $\ln \frac{1}{z_\eta}$, sodaß $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$ sich für das Gebiet des Punktes η darstellen läßt durch eine Gleichung von der Form:

$$(1_0.) \qquad \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right| = \ln \frac{1}{z_\eta} + c_0^{(0)} + c_1^{(0)} z_\eta + c_2^{(0)} z_\eta^2 + \cdots,$$

wobei die c von z unabhängige Größen bezeichnen, und deren, allgemein mit $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^+$, $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^-$ zu bezeichnenden, Werte in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{P}^-$ in der Weise verknüpft sind, daß

$$(2_0.) \qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \left\{ \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^-, \right. \\ &\text{längs } b_\nu \left\{ \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^- + \frac{2}{p} u_\nu^{z-} - 2u_\nu^\eta - \frac{2k_\nu}{p} + \frac{a_{\nu\nu}}{p}, \right. \qquad {\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p,} \\ &\text{längs } c_\nu \left\{ \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^- - \frac{2\pi i}{p}, \right. \\ &\text{längs } l_\eta \left\{ \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|^- + 2\pi i \right. \end{aligned}$$

ist. Dabei vertritt $2k_\nu$ die durch die Gleichung:

$$(2_0'.) \qquad 2k_\nu = \frac{2}{\pi i} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}{}' \int_{b_\varrho^+}^{+} u_\nu^\zeta \, du_\varrho^\zeta - \pi i - a_{\nu\nu} \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \cdots, p)}$$

bestimmte Größe; der Akzent an dem Summenzeichen soll andeuten, daß bei der Summation der Wert $\varrho = \nu$ ausgeschlossen ist. Man erkennt schließlich aber auch noch, unter Beachtung der Relation $\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int_{b_\nu^+}^{+} du_\nu^z = -p\pi i$, daß für die Funktion $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$ die Gleichung:

$$(3_0.) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int_{b_\nu^+}^{+} \left(\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right| - \frac{2}{p} u_\nu^z \right) du_\nu^z = 0$$

besteht.

Die gewonnene Funktion $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, *die zugleich auch, wie aus dem Fundamentalsatze folgt, durch die soeben genannten Eigenschaften vollständig bestimmt ist, soll die zur Charakte-*

ristik $\binom{1\cdots 1}{1\cdots 1}$ *gehörige, auf den Punkt* η *sich beziehende, logarithmisch unendlich werdende Elementarfunktion genannt werden.*

Mit Rücksicht auf die späteren Untersuchungen soll jetzt noch gezeigt werden, daß die Gleichungen $(2_0'.)$ und $(3_0.)$ sich so umformen lassen, daß in ihnen nur noch Integrale, deren Integrationswege vollständig von den Schnitten $b_1, b_2, \cdots, b_p$ losgelöst sind, vorkommen. Zu dem Ende drücke man die in den genannten Gleichungen stehenden, auf die positiven Seiten der Schnitte b sich beziehenden Integrale durch Integrale aus, welche sich auf die negativen Seiten dieser Schnitte beziehen, indem man beachtet, daß für $\varrho = 1, 2, \cdots, p$ längs $b_\varrho \{ u_\nu^{z+} = u_\nu^{z-} + a_{\nu\varrho}$ ist, und daß die zweite unter $(2_0.)$ aufgestellte, auf den Schnitt b_ν $(\nu=1,2,\cdots,p)$ sich beziehende Gleichung in die Form:

$$P\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}_0^+ - \frac{2}{p}u_\nu^{z+} = P\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}_0^- - 2u_\nu^\eta - \frac{2k_\nu}{p} - \frac{a_{\nu\nu}}{p}$$

gebracht werden kann. Die Gleichungen $(2_0'.)$, $(3_0.)$ gehen dann zunächst über in die Gleichungen:

$$2k_\nu = -\frac{2}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}{}' \int_{b_\varrho^-}^{+} u_\nu^\zeta\, du_\varrho^\zeta - 2\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}{}' a_{\nu\varrho} - \pi i - a_{\nu\nu}, \qquad (\nu=1,2,\cdots,p)$$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int_{b_\nu^-}^{+} P\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}_0 du_\nu^z - \pi i\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left(2u_\nu^\eta + \frac{2k_\nu}{p} + \frac{a_{\nu\nu}}{p}\right) = 0.$$

Der Integrationsweg des in der ersten dieser beiden Gleichungen vorkommenden Integrals $\int_{b_\varrho^-}^{+} u_\nu^\zeta du_\varrho^\zeta$ $(\varrho=1,2,\cdots,\nu-1,\nu+1,\cdots,p)$ führt von einem Punkte auf der negativen Seite des Schnittes a_ϱ zu dem entsprechenden Punkte auf der positiven Seite, während der Integrationsweg des in der zweiten Gleichung vorkommenden Integrals $\int_{b_\nu^-}^{+} P\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}_0 du_\nu^z$ $(\nu=1,2,\cdots,p)$ von einem Punkte auf der negativen Seite des Schnittes a_ν zu dem entsprechenden Punkte auf der positiven Seite führt. Da aber das Integralelement $u_\nu^\zeta du_\varrho^\zeta$ $(\varrho \neq \nu)$ für je zwei zum Schnitte a_ϱ gehörige entsprechende Punkte ζ^+, ζ^-, das Integralelement $P\begin{vmatrix}\eta\\z\end{vmatrix}_0 du_\nu^z$ für je zwei zum Schnitte a_ν gehörige entsprechende Punkte z^+, z^- denselben Wert besitzt, so kommt für keines der beiden in Rede stehenden Integrale der seinen Integrationsweg treffende Schnitt a_ϱ beziehungsweise a_ν in Betracht, und es können daher ihre Integrationswege auch als in sich zurücklaufende angesehen werden. Dementsprechend kann man die Integrationswege der sämtlichen in den letzten beiden Gleichungen vorkommenden Integrale, ohne daß diese Integrale eine Wertänderung erleiden, durch Deformation vollständig von den Schnitten b loslösen, wenn nur allgemein, also für $\nu = 1, 2, \cdots, p$, die von dem Integrationswege b_ν^- und dem neuen Integrationswege β_ν begrenzte Ringfläche, von Teilen des Schnittes a_ν abgesehen, keinen Teil eines der noch übrigen Schnitte a, b, c, l und auch nicht den Punkt η enthält. Man gewinnt so schließlich die mit den Gleichungen $(2_0'.)$, $(3_0.)$ äquivalenten Gleichungen:

$$[2_0'.] \qquad 2k_\nu = -\frac{2}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}{}' \int\limits_{\beta_\varrho}^{+} u_\nu^\zeta \, du_\varrho^\zeta - 2\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}{}' a_{\nu\varrho} - \pi i - a_{\nu\nu}, \qquad (\nu=1,2,\cdots,p)$$

$$[3_0.] \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int\limits_{\beta_\nu}^{+} \underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right| du_\nu^z - \pi i \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left(2u_\nu^\eta + \frac{2k_\nu}{p} + \frac{a_{\nu\nu}}{p}\right) = 0,$$

wenn man noch bei der Linie β_ν $(\nu=1,2,\cdots,p)$ als die positive Richtung des Durchlaufens diejenige ansieht, welche zu der ins Innere der eben erwähnten Ringfläche gerichteten Normalen so liegt, wie die positive Richtung der Yi-Achse zur positiven Richtung der X-Achse.

5.

Es sollen jetzt die einfachsten zur Charakteristik $\binom{1\cdots1}{1\cdots1}$ gehörigen, nur algebraisch unendlich werdenden Funktionen W aufgestellt und näher untersucht werden. Zu dem Ende verstehe man unter σ wieder eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, s$, unter m eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, m_\sigma$ und bezeichne den σ^{ten} der s Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ auch hier wieder mit η. Der Fundamentalsatz liefert dann zu der Charakteristik $\binom{1\cdots1}{1\cdots1}$ eine, die willkürliche additive Konstante c enthaltende, Funktion W, die in der Fläche T'' nur für den Punkt η unstetig wird wie $\frac{1}{z_\eta^m}$, wenn man $\mathfrak{L}_{\sigma m} = 1$ setzt, allen übrigen $s + m_1 + \cdots + m_s - 1$ Größen $\mathfrak{L}$ dagegen sowie den p Größen $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_p$ den Wert Null zulegt. Die so gewonnene spezielle Funktion W bezeichne man nun, die Bestimmung der additiven Konstante c sich vorbehaltend, mit $\underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, die bei ihr an Stelle der Größe $\mathfrak{B}_\nu$ stehende Größe mit $\underset{m}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta)}$. Für das Gebiet des Punktes η läßt sich dann diese Funktion darstellen durch eine Gleichung von der Form:

$$(1_m.) \qquad \underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right| = \frac{1}{z_\eta^m} + c_{\sigma 0}^{(m)} + c_{\sigma 1}^{(m)} z_\eta + c_{\sigma 2}^{(m)} z_\eta^2 + \cdots,$$

wobei die $c^{(m)}$ von z unabhängige Größen bezeichnen. Zugleich sind die Werte der Funktion $\underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$ in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ in der Weise verknüpft, daß

$$(2_m.)\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \left\{ P_m\left|{\eta \atop z}\right|^+ = P_m\left|{\eta \atop z}\right|^-, \right. \\ &\text{längs } b_\nu \left\{ P_m\left|{\eta \atop z}\right|^+ = P_m\left|{\eta \atop z}\right|^- + \underset{m}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta)}, \right. \qquad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,} \\ &\text{längs } c_\nu \left\{ P_m\left|{\eta \atop z}\right|^+ = P_m\left|{\eta \atop z}\right|^-, \right. \\ &\text{längs } l_{\sigma'} \left\{ P_m\left|{\eta \atop z}\right|^+ = P_m\left|{\eta \atop z}\right|^-, \right. \qquad {\scriptstyle \sigma'=1,2,\cdots,s,} \end{aligned}$$

ist. Die in $P_m\left|{\eta \atop z}\right|$ enthaltene, bis jetzt noch willkürliche additive Konstante c bestimme man nun schließlich dadurch, daß man für die Funktion $P_m\left|{\eta \atop z}\right|$ das Bestehen der Gleichung:

$$(3_m.)\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int_{b_\nu^+}^{+} P_m\left|{\eta \atop z}\right| du_\nu^z = 0$$

fordert.

Die so vollständig bestimmte Funktion $P_m\left|{\eta \atop z}\right|$ *soll die zur Charakteristik* $\left({1\cdots 1 \atop 1\cdots 1}\right)$ *gehörige, auf den Punkt* η *sich beziehende, von der Ordnung* m *algebraisch unendlich werdende Elementarfunktion genannt werden.**)

Durch dasselbe Verfahren, welches im vorhergehenden Artikel zur Umformung der Gleichungen $(2_0'.)$, $(3_0.)$ benutzt wurde, läßt sich auch die Gleichung $(3_m.)$ so umformen, daß in ihr nur noch Integrale, deren Integrationswege vollständig von den Schnitten $b_1, b_2, \cdots, b_p$ losgelöst sind, vorkommen. Zu dem Ende gebe man ihr mit Hilfe der zweiten unter $(2_m.)$ aufgestellten Gleichung zunächst die Gestalt:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int_{b_\nu^-}^{+} P_m\left|{\eta \atop z}\right| du_\nu^z + \pi i \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \underset{m}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta)} = 0$$

und führe dann die Integrationswege der in dieser Gleichung vorkommenden Integrale, indem man beachtet, daß das Integralelement $P_m\left|{\eta \atop z}\right| du_\nu^z$ ${\scriptstyle (\nu=1,2,\cdots,p)}$ für je zwei zum Schnitte a_ν gehörige entsprechende Punkte z^+, z^- denselben Wert besitzt, durch Deformation in Integrationswege $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$ von der im vorhergehenden Artikel charakterisierten Art über. Man erhält so schließlich die mit der Gleichung $(3_m.)$ äquivalente Gleichung:

$$[3_m.]\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int_{\beta_\nu}^{+} P_m\left|{\eta \atop z}\right| du_\nu^z + \pi i \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \underset{m}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta)} = 0,$$

wenn man noch bei der Linie β_ν ${\scriptstyle (\nu=1,2,\cdots,p)}$ die positive Richtung des Durchlaufens in der am Ende des vorhergehenden Artikels angegebenen Weise definiert.

*) Riemann, B., Theorie der Abelschen Funktionen. I, Art. 4. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 88—144; S. 106.)

Die p bei der Funktion $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$ auftretenden Konstanten $\underset{m}{\mathfrak{B}}_\nu^{(\eta)}$, $\nu=1,2,\cdots,p$, lassen sich durch die Werte, welche die nach z_η genommenen m^{ten} Derivierten der p Elementarfunktionen u für den Punkt η besitzen, ausdrücken. Um diese Ausdrücke zu erhalten, beziehe man die Fundamentalformel (F_3.) auf die Elementarfunktionen $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$, $u_\varrho|z|$, lasse also in der Formel (F_3.), nachdem man bei ihr den Summationsbuchstaben σ, um Verwechslungen mit der oben eingeführten festen Zahl σ vorzubeugen, durch τ ersetzt und zur Darstellung der Funktion $u_\varrho|z|$ für das Gebiet des Punktes η die Gleichung $u_\varrho|z| = \bar{c}_{\sigma 0} + \bar{c}_{\sigma 1} z_\eta + \bar{c}_{\sigma 2} z_\eta^2 + \cdots$, bei der $\bar{c}_{\sigma 0} = u_\varrho|\eta|$, $\bar{c}_{\sigma\mu} = \frac{1}{\mu!}\left(\frac{d^\mu u_\varrho|\zeta|}{d\zeta_\eta^\mu}\right)_0$, $\mu=1,2,3,\cdots$, ist, aufgestellt hat, an Stelle der darin vorkommenden Konstanten der Funktionen W, $\overline{W}$ die entsprechenden Konstanten der Funktionen $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$, $u_\varrho|z|$ treten. Man erhält so zunächst die Gleichung:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left(-\underset{m}{\mathfrak{B}}_\nu^{(\eta)}\delta_{\varrho\nu}\pi i\right) - 2\pi i m \bar{c}_{\sigma m} = 0$$

und weiter dann, indem man die Summation nach ν ausführt und $\bar{c}_{\sigma m}$ durch den ihm auf Grund der soeben für $\bar{c}_{\sigma\mu}$ aufgestellten Gleichung entsprechenden Wert ersetzt, die für $\varrho = 1, 2, \cdots, p$ geltende Beziehung:

$$-\underset{m}{\mathfrak{B}}_\varrho^{(\eta)}\pi i - 2\pi i\,\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m u_\varrho|\zeta|}{d\zeta_\eta^m}\right)_0 = 0.$$

Ersetzt man nun noch den Buchstaben ϱ in neuer Bezeichnung durch ν, so erhält man die Gleichungen:

$$(4_m.)\qquad \underset{m}{\mathfrak{B}}_\nu^{(\eta)} = -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m u_\nu|\zeta|}{d\zeta_\eta^m}\right)_0, \qquad \nu=1,2,\cdots,p,$$

und schließlich, indem man unter Beachtung der in Art. 3 des ersten Abschnittes gemachten Festsetzungen in bezug auf den Punkt η, insoferne dieser entweder einer der Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ oder einer der Punkte $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ oder endlich einer der Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$ sein kann, drei Fälle unterscheidet, die Gleichungen:

$$(5_m.)\qquad \begin{aligned}
\underset{m}{\mathfrak{B}}_\nu^{(\varepsilon)} &= -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m u_\nu|\zeta|}{d\zeta^m}\right)_{\zeta=\varepsilon},\\
\underset{m}{\mathfrak{B}}_\nu^{(\alpha)} &= -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m u_\nu|\alpha+\zeta_\alpha^\mu|}{d\zeta_\alpha^m}\right)_0, \qquad \nu=1,2,\cdots,p.\\
\underset{m}{\mathfrak{B}}_\nu^{(\infty)} &= -\frac{2}{(m-1)!}\left(\frac{d^m u_\nu|\zeta_\infty^{-1}|}{d\zeta_\infty^m}\right)_0.
\end{aligned}$$

6.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß die allgemeinste zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörige Funktion W von der im Fundamentalsatze beschriebenen Art sich aus den in den vorhergehenden Artikeln definierten Elementarfunktionen linear zusammensetzen läßt. Zu dem Ende bezeichne man die s Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ in der vorliegenden Reihenfolge mit $\eta_1, \cdots, \eta_s$, die zu ihnen beziehungsweise gehörigen Größen $z_1, \cdots, z_s$, der in Art. 3 des ersten Abschnitts gemachten Festsetzung entsprechend, mit $z_{\eta_1}, \cdots, z_{\eta_s}$, bilde alsdann mit Hilfe von s der Bedingung $\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0$ genügenden Konstanten $\mathfrak{L}_1, \cdots, \mathfrak{L}_s$, der $m_1 + \cdots + m_s$ beliebigen Konstanten $\mathfrak{L}_{\sigma 1}, \cdots, \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}$, $\sigma = 1, 2, \cdots, s$, der p beliebigen Konstanten $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_p$, sowie der willkürlichen Konstante C die Funktion:

$$W(z) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\left(\mathfrak{L}_\sigma \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_\sigma \\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_{\sigma 1} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta_\sigma \\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma} \underset{m_\sigma}{P}\left|\begin{matrix}\eta_\sigma \\ z\end{matrix}\right|\right) + \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{A}_\varrho u_\varrho |z| + C$$

und untersuche, wie diese Funktion $W(z)$ sich in der Fläche T'' verhält.

Unter Beachtung des Verhaltens der in dem Ausdrucke für $W(z)$ vorkommenden Elementarfunktionen erkennt man nun, daß $W(z)$ eine in der Fläche T'' einwertige Funktion der komplexen Veränderlichen z ist, die für jeden von den Punkten $\eta_1, \cdots, \eta_s$ verschiedenen Punkt z der Fläche T'' stetig ist, für den Punkt η_σ $(\sigma = 1, 2, \cdots, s)$ dagegen in derselben Weise unstetig wird wie die Funktion:

$$f_\sigma(z_{\eta_\sigma}) = \mathfrak{L}_\sigma \ln \frac{1}{z_{\eta_\sigma}} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{z_{\eta_\sigma}} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{z_{\eta_\sigma}^2} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{z_{\eta_\sigma}^{m_\sigma}},$$

sodaß also die Differenz $W(z) - f_\sigma(z_{\eta_\sigma})$ für den Punkt η_σ stetig bleibt, und deren Werte in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathscr{P}^+$, $\mathscr{P}^-$ in der Weise verknüpft sind, daß

$$\text{(S.)}\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \{\; W(z)^+ = W(z)^- + \mathfrak{A}_\nu, \\ &\text{längs } b_\nu \{\; W(z)^+ = W(z)^- + \mathfrak{B}_\nu, \qquad\qquad \nu = 1, 2, \cdots, p, \\ &\text{längs } c_\nu \{\; W(z)^+ = W(z)^-, \\ &\text{längs } l_\sigma \{\; W(z)^+ = W(z)^- + 2\pi i \mathfrak{L}_\sigma, \qquad\qquad \sigma = 1, 2, \cdots, s, \end{aligned}$$

ist, wobei der Wert der Konstante $\mathfrak{B}_\nu$, wenn man noch zur Erzielung einer einheitlichen Schreibweise die Größe $-2u_\nu^\eta - \frac{2k_\nu}{p} + \frac{a_{\nu\nu}}{p}$ mit $\underset{0}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta)}$ bezeichnet, durch die Gleichung:

$$\mathfrak{B}_\nu = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\left(\mathfrak{L}_\sigma \underset{0}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta_\sigma)} + \mathfrak{L}_{\sigma 1} \underset{1}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta_\sigma)} + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma} \underset{m_\sigma}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta_\sigma)}\right) + \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{A}_\varrho a_{\varrho\nu}$$

geliefert wird. Die Funktion $W(z)$ stellt daher eine zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörige

Funktion W von der im Fundamentalsatze beschriebenen Art dar, und zwar die allgemeinste derartige Funktion W, da die ihr zukommenden $p + m_1 + \cdots + m_s + s$ in den Funktionen f_σ und den Gleichungen (S.) auftretenden Konstanten $\mathfrak{A}, \mathfrak{L}$ unbestimmte, nur der Bedingung $\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0$ unterworfene Größen sind, und sie außerdem noch die willkürliche additive Konstante C enthält. Damit ist aber bewiesen, daß jede zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörige Funktion W von der im Fundamentalsatze beschriebenen Art sich aus den definierten Elementarfunktionen linear zusammensetzen läßt, oder, was dasselbe, daß man aus dem Ausdrucke:

$$W(z) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \left(\mathfrak{L}_\sigma \underset{0}{P} \left| {\eta_\sigma \atop z} \right| + \mathfrak{L}_{\sigma 1} \underset{1}{P} \left| {\eta_\sigma \atop z} \right| + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma} \underset{m_\sigma}{P} \left| {\eta_\sigma \atop z} \right| \right) + \frac{1}{\pi i} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{A}_\varrho u_\varrho |z| + C$$

die sämtlichen zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörigen Funktionen W erhält, und zwar jede nur einmal, wenn man darin an Stelle des von den Konstanten $\mathfrak{L}, \mathfrak{A}$ und der Konstante C gebildeten Systems von $p + m_1 + \cdots + m_s + s + 1$ Konstanten ein jedes die Gleichung $\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma = 0$ nicht verletzende System von $p + m_1 + \cdots + m_s + s + 1$ Werten treten läßt.

In ähnlicher Weise, wie es in Art. 4 des zweiten Abschnittes an der entsprechenden Stelle geschehen ist, kann man jetzt hier den Begriff der Elementarfunktion von den ihm noch anhaftenden Beschränkungen befreien und damit zugleich den Begriff der allgemeinsten zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörigen Funktion W erweitern.

Zunächst erkennt man, daß eine Funktion W, für welche die zu den Schnitten $l_{\sigma_1}, l_{\sigma_2}, \cdots, l_{\sigma_\mu}$ beziehungsweise gehörigen Konstanten $\mathfrak{L}_{\sigma_1}, \mathfrak{L}_{\sigma_2}, \cdots, \mathfrak{L}_{\sigma_\mu}$ mit der Null zusammenfallen und dementsprechend längs eines jeden dieser μ Schnitte l die Gleichung $W^+ = W^-$ besteht, auch noch in der aus T'' durch Aufhebung der μ Schnitte l hervorgehenden Fläche einwertig ist, und daß daher, wenn diese Funktion W für sich allein betrachtet wird, die Schnitte $l_{\sigma_1}, l_{\sigma_2}, \cdots, l_{\sigma_\mu}$ als überflüssig weggelassen werden können. Was speziell die in Art. 2 definierte allenthalben endliche Elementarfunktion $u_\varrho |z|$ $(\varrho = 1, 2, \cdots, p)$ und die in Art. 5 definierte algebraisch unendlich werdende Elementarfunktion $\underset{m}{P} \left| {\eta \atop z} \right|$ betrifft, so sind diese, da bei jeder von ihnen $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_2 = \cdots = \mathfrak{L}_s = 0$ ist, schon in der Fläche T' einwertig. Die in Art. 4 definierte, nicht zu den Funktionen W gehörige, logarithmisch unendlich werdende Elementarfunktion $\underset{0}{P} \left| {\eta \atop z} \right|$ ist dagegen nicht in der Fläche T' einwertig, wohl aber in einer, auch bei der Definition von $\underset{0}{P} \left| {\eta \atop z} \right|$ zu Grunde gelegten, Fläche, welche aus T'' durch Ziehen nur eines, den der positiven Seite von c_p und der negativen Seite von c_1 gemeinsam angehörigen Punkt mit dem Punkte η verbindenden, Schnittes l_η hervorgeht.

Man erkennt weiter aber auch, daß man bei Zugrundelegung der ursprünglichen Fläche T'' zu jedem im Innern von T'' gelegenen Punkt η eine Elementarfunktion $\underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, einerlei welche positive ganze Zahl unter m verstanden wird, in der früher angegebenen Weise definieren kann — die Elementarfunktion $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$ ist ja schon gleich bei ihrer Einführung auf einen beliebigen im Innern von T'' gelegenen Punkt η bezogen worden — und es handelt sich jetzt schließlich noch darum, auch zu irgend einem Punkte η, welcher der Begrenzung von T'' angehört, also an einem oder an zweien der Schnitte a, b, c liegt, Elementarfunktionen $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$ zu definieren.

Es sei also η ein der Begrenzung von T'' angehöriger Punkt. Man führe dann, nachdem man noch in dem Falle, wo es sich um die Definition von $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$ handelt, den der positiven Seite von c_p und der negativen Seite von c_1 gemeinsam angehörigen Punkt mit dem Punkte η durch einen Schnitt l_η verbunden hat, am Schnittsystem beim Punkte η, ohne jedoch den Charakter des Schnittsystems zu ändern und ohne einen Schnitt über den Punkt η hinüberzuschieben, eine solche Deformation aus, daß der Punkt η an keinem der Schnitte a, b, c mehr liegt. Durch diese Deformation geht dann aus dem Schnittsystem ein neues Schnittsystem hervor, das an Stelle des kleinen der Deformation unterzogenen Teiles t_1 des ursprünglichen Schnittsystems einen davon verschiedenen Teil t_2 enthält, sich im übrigen jedoch mit dem ursprünglichen vollständig deckt, und es geht zugleich damit aus der ursprünglichen Fläche T'' eine neue Fläche T' hervor, für welche der Punkt η ein im Innern gelegener Punkt ist. Unter Zugrundelegung dieser neuen Fläche T' bestimme man jetzt zu dem Punkte η Elementarfunktionen $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$ in der vorher angegebenen Weise und kehre endlich, indem man diese Funktionen mit Hilfe der Gleichungen $(2_0.)$, $(2_m.)$ auf die im ersten Teile, in Art. 3 des fünften Abschnitts, angegebene Weise über den Schnitteil t_2 hinüber in das von t_1 und t_2 begrenzte Gebiet als Funktionen von z stetig fortsetzt, zur ursprünglichen Fläche T'' zurück. Die so für die ursprüngliche Fläche T'' gewonnenen Funktionen sollen dann als die zum Punkte η der Begrenzung von T'' gehörigen Elementarfunktionen $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$ angesehen werden, da sie, wie aus ihrer Entstehung hervorgeht, im wesentlichen dieselben Eigenschaften besitzen, wie die zu einem im Innern von T'' gelegenen Punkt η gehörigen Elementarfunktionen $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$. Daß man zu dem Begrenzungspunkte η immer dieselben Elementarfunktionen $\underset{0}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|$ erhält, welche von den zulässigen neuen Flächen T'' man auch für ihre Bildung benutzen mag, zeigt ein Blick auf die Gleichungen $[2'_0.]$, $[3_0.]$, $[3_m.]$.

Nachdem so der Begriff der Elementarfunktion von den ihm zu Anfang noch anhaftenden Beschränkungen befreit worden ist, kann man jetzt auch den Begriff der allgemeinsten zu der Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörigen Funktion W in der Weise erweitern, daß man in dem vorher für W genommenen Ausdrucke:

$$W(z) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\left(\mathfrak{L}_\sigma \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_\sigma\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_{\sigma 1}\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta_\sigma\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}\underset{m_\sigma}{P}\left|\begin{matrix}\eta_\sigma\\ z\end{matrix}\right|\right) + \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\mathfrak{A}_\varrho u_\varrho|z| + C,$$

bei dem $\eta_1, \cdots, \eta_s$ die $s = q + r + t$ Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ beziehungsweise vertreten, $t, m_1, \cdots, m_s$ unbestimmte positive ganze Zahlen bezeichnen und die Konstanten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{A}$, C nur der Gleichung $\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_\sigma = 0$ zu genügen haben, unter $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ t von den Punkten ∞, α verschiedene beliebige Punkte der Fläche T' versteht, die also teilweise oder auch alle an der Begrenzung der Fläche T'' liegen können, wenn nur diese Punkte als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen. Zugleich kommen, wenn es sich um die Funktion $W(z)$ allein handelt, nur so viele Linien l_η in Betracht, als es unter den Größen $\mathfrak{L}_1, \cdots, \mathfrak{L}_s$ von Null verschiedene gibt, oder, was dasselbe, nur so viele Linien l_η, als in dem Ausdrucke für $W(z)$ Funktionen $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$ wirklich vorkommen, und es sind diese Linien l_η, die zu den einzelnen Funktionen $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$ im Rahmen der vorher genannten Bedingung willkürlich gezogen werden können, wenn sie bei der Funktion $W(z)$ zusammen auftreten, nur noch der Bedingung zu unterwerfen, daß sie getrennt verlaufen. Die aus der Fläche T' durch Einführung der für die Funktion $W(z)$ in Betracht kommenden Linien l entstandene Fläche, in der die Funktion $W(z)$ einwertig ist, soll wieder T''' genannt werden, und es kann dann der für die frühere Fläche T''' mit Rücksicht auf die Darstellung der Funktion $W(z)$ durch Potenzreihen aufgestellte Begriff des Gebietes eines Punktes sofort auf diese neue Fläche T''' übertragen werden.

7.

Für die folgenden Untersuchungen lege man wieder die ursprüngliche Fläche T''' zu Grunde, bezeichne die s Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ in der vorliegenden Reihenfolge mit $\eta'_1, \cdots, \eta'_s$ und bilde zur Fläche T''' mit Hilfe von irgend welchen Konstanten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{A}$, C, $\overline{\mathfrak{L}}$, $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{C}$ die Funktionen:

$$\Omega(z) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\left(\mathfrak{L}_\sigma \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta'_\sigma\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_{\sigma 1}\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta'_\sigma\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}\underset{m_\sigma}{P}\left|\begin{matrix}\eta'_\sigma\\ z\end{matrix}\right|\right) + \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\mathfrak{A}_\varrho u_\varrho|z| + C,$$

$$\overline{\Omega}(z) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\left(\overline{\mathfrak{L}}_\sigma \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta'_\sigma\\ z\end{matrix}\right| + \overline{\mathfrak{L}}_{\sigma 1}\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta'_\sigma\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \overline{\mathfrak{L}}_{\sigma m_\sigma}\underset{m_\sigma}{P}\left|\begin{matrix}\eta'_\sigma\\ z\end{matrix}\right|\right) + \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\overline{\mathfrak{A}}_\varrho u_\varrho|z| + \overline{C}.$$

Für das Gebiet des — in der Figur 17 auf Seite 154 des ersten Teiles mit $\mathscr{P}_\sigma$ bezeichneten — Punktes η'_σ $(\sigma=1,2,\cdots,s)$ bestehen dann, bei Verwendung der im ersten Teile ausschließlich benutzten einheitlichen Bezeichnungsweise, die Darstellungen:

$$\text{(R.)}\quad \begin{aligned} \Omega(z) &= \mathfrak{L}_\sigma \ln\frac{1}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{z_\sigma^{m_\sigma}} + c_{\sigma 0} + c_{\sigma 1}z_\sigma + c_{\sigma 2}z_\sigma^2 + \cdots + c_{\sigma n}z_\sigma^n + \cdots,\\ \overline{\Omega}(z) &= \overline{\mathfrak{L}}_\sigma \ln\frac{1}{z_\sigma} + \frac{\overline{\mathfrak{L}}_{\sigma 1}}{z_\sigma} + \frac{\overline{\mathfrak{L}}_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \cdots + \frac{\overline{\mathfrak{L}}_{\sigma m_\sigma}}{z_\sigma^{m_\sigma}} + \bar{c}_{\sigma 0} + \bar{c}_{\sigma 1}z_\sigma + \bar{c}_{\sigma 2}z_\sigma^2 + \cdots + \bar{c}_{\sigma n}z_\sigma^n + \cdots, \end{aligned}$$

wobei für $\sigma = 1, 2, \cdots, q$ $z_\sigma = z^{-\frac{1}{r_\sigma}}$, für $\sigma = q+1, q+2, \cdots, s$ $z_\sigma = (z-a_\sigma)^{\frac{1}{r_\sigma}}$ ist, und die $c, \bar{c}$ von z unabhängige Größen bezeichnen. Was dagegen das Verhalten der Funktionen $\Omega = \Omega(z)$, $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}(z)$ längs der Schnitte a, b, c, l betrifft, so ist

$$\text{(S.)}\quad \begin{array}{lll} \text{längs } a_\nu\{\Omega^+ = \Omega^- + \mathfrak{A}_\nu, & \overline{\Omega}^+ = \overline{\Omega}^- + \overline{\mathfrak{A}}_\nu, & \\ \text{längs } b_\nu\{\Omega^+ = \Omega^- + \frac{2}{p}\mathfrak{S}\,u_\nu^{z^-} + \mathfrak{B}_\nu, & \overline{\Omega}^+ = \overline{\Omega}^- + \frac{2}{p}\overline{\mathfrak{S}}\,u_\nu^{z^-} + \overline{\mathfrak{B}}_\nu, & {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,} \\ \text{längs } c_\nu\{\Omega^+ = \Omega^- - \frac{2\pi i}{p}\mathfrak{S}, & \overline{\Omega}^+ = \overline{\Omega}^- - \frac{2\pi i}{p}\overline{\mathfrak{S}}, & \\ \text{längs } l_\sigma\,\{\Omega^+ = \Omega^- + 2\pi i\mathfrak{L}_\sigma, & \overline{\Omega}^+ = \overline{\Omega}^- + 2\pi i\overline{\mathfrak{L}}_\sigma, & {\scriptstyle \sigma=1,2,\cdots,s,} \end{array}$$

wobei zur Abkürzung

$$\mathfrak{S} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_\sigma, \qquad \overline{\mathfrak{S}} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\overline{\mathfrak{L}}_\sigma$$

gesetzt ist, und die Werte der Konstanten $\mathfrak{B}_\nu, \overline{\mathfrak{B}}_\nu$, wenn man noch zur Erzielung einer einheitlichen Schreibweise die Größe $-2u_\nu^\eta - \frac{2k_\nu}{p} + \frac{a_{\nu\nu}}{p}$ wieder mit $\underset{0}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta)}$ bezeichnet, durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{B}_\nu = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\left(\mathfrak{L}_\sigma \underset{0}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta'_\sigma)} + \mathfrak{L}_{\sigma 1}\underset{1}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta'_\sigma)} + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}\underset{m_\sigma}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta'_\sigma)}\right) + \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\mathfrak{A}_\varrho a_{\varrho\nu},$$

$$\overline{\mathfrak{B}}_\nu = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\left(\overline{\mathfrak{L}}_\sigma \underset{0}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta'_\sigma)} + \overline{\mathfrak{L}}_{\sigma 1}\underset{1}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta'_\sigma)} + \cdots + \overline{\mathfrak{L}}_{\sigma m_\sigma}\underset{m_\sigma}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\eta'_\sigma)}\right) + \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\overline{\mathfrak{A}}_\varrho a_{\varrho\nu}$$

geliefert werden. In dem besonderen Falle, wo die Konstanten $\mathfrak{L}, \overline{\mathfrak{L}}$ den Bedingungen $\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_\sigma = 0$, $\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\overline{\mathfrak{L}}_\sigma = 0$ genügen, oder, was dasselbe, die Größen $\mathfrak{S}, \overline{\mathfrak{S}}$ beide den Wert Null haben, sind $\Omega(z)$, $\overline{\Omega}(z)$ zwei zur Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}1 & \cdots & 1\\ 1 & \cdots & 1\end{smallmatrix}\right)$ gehörige Funktionen W.

Man betrachte nun das über die Begrenzung $\mathfrak{R}$ der schon im ersten Teile, in

Art. 5 des sechsten Abschnittes, benutzten einfach zusammenhängenden Fläche T^* in der, durch die Pfeile markierten, positiven Richtung erstreckte Integral $\int\limits_{\mathfrak{R}}^{+} \Omega \frac{d\,\overline{\Omega}}{dz} dz$. Dieses Integral besitzt den Wert Null, da die hinter dem Integralzeichen stehende Funktion $\Omega \frac{d\,\overline{\Omega}}{dz}$ der komplexen Veränderlichen z für jeden Punkt der Fläche T^* einwertig und stetig ist, und es besteht daher die Gleichung:

$$\int\limits_{\mathfrak{R}}^{+} \Omega \frac{d\,\overline{\Omega}}{dz} dz = 0.$$

Zerlegt man nun das auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Integral in die den einzelnen Stücken der Begrenzung $\mathfrak{R}$ entsprechenden Teile und bezeichnet den Komplex der auf die Schnitte a, b, c, l' sich beziehenden Integrale, nachdem man zuvor noch bei jedem dieser Schnitte die auf die positive und die auf die negative Seite desselben sich beziehenden Integrale in der in dem eben genannten Artikel beschriebenen Weise vereinigt hat, mit J_1, den Komplex der auf die Kreislinien k' sich beziehenden Integrale mit J_2, so kann man die vorstehende Gleichung durch die Gleichungen:

$$J_1 + J_2 = 0,\quad J_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int\limits_{[a_\nu^+,\, b_\nu^+,\, c_\nu^+]}^{+} \{\Omega^+ d\,\overline{\Omega}^+ - \Omega^- d\,\overline{\Omega}^-\} + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \int\limits_{l'^+_{\varkappa_\sigma}}^{+} \{\Omega^+ d\,\overline{\Omega}^+ - \Omega^- d\,\overline{\Omega}^-\},\quad J_2 = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \int\limits_{k'_\sigma} \Omega\, d\,\overline{\Omega}$$

ersetzen.

Um die mit J_1 bezeichnete Integralsumme, bei der $d\,\overline{\Omega}^+ = \frac{d\,\overline{\Omega}^+}{dz} dz$, $d\,\overline{\Omega}^- = \frac{d\,\overline{\Omega}^-}{dz} dz$ ist, auszuwerten, beachte man, daß für $\nu = 1, 2, \cdots, p$; $\sigma = 1, 2, \cdots, s$:

$$\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \left\{ \Omega^+ d\,\overline{\Omega}^+ = \Omega^- d\,\overline{\Omega}^- + \mathfrak{A}_\nu d\,\overline{\Omega}^+, \right.\\
&\text{längs } b_\nu \left\{ \Omega^+ d\,\overline{\Omega}^+ = \Omega^- d\,\overline{\Omega}^- + \mathfrak{B}_\nu d\,\overline{\Omega}^+ + \frac{2}{p}\,\mathfrak{S}\,\Omega^- du_\nu^{\bar{z}} + \frac{2}{p}\,\mathfrak{S}\, u_\nu^{\bar{z}-} d\,\overline{\Omega}^+, \right.\\
&\text{längs } c_\nu \left\{ \Omega^+ d\,\overline{\Omega}^+ = \Omega^- d\,\overline{\Omega}^- - \frac{2\pi i}{p}\,\mathfrak{S}\, d\,\overline{\Omega}^+, \right.\\
&\text{längs } l'_{\varkappa_\sigma} \left\{ \Omega^+ d\,\overline{\Omega}^+ = \Omega^- d\,\overline{\Omega}^- + 2\pi i\, \mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma} d\,\overline{\Omega}^+ \right.
\end{aligned}$$

ist, und reduziere mit Hilfe dieser Relationen die zwischen den geschweiften Klammern stehenden Ausdrücke. Man erhält dann für J_1 zunächst die Gleichung:

$$\begin{aligned}
J_1 = &\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{ \mathfrak{A}_\nu \int\limits_{a_\nu^+}^{+} d\,\overline{\Omega}^+ + \mathfrak{B}_\nu \int\limits_{b_\nu^+}^{+} d\,\overline{\Omega}^+ - \frac{2\pi i}{p}\,\mathfrak{S} \int\limits_{c_\nu^+}^{+} d\,\overline{\Omega}^+ \right\}\\
&+ \frac{2}{p}\,\mathfrak{S} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int\limits_{b_\nu^+}^{+} \Omega^- du_\nu^{\bar{z}} + \frac{2}{p}\,\mathfrak{S} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int\limits_{b_\nu^+}^{+} u_\nu^{\bar{z}-} d\,\overline{\Omega}^+ + 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma} \int\limits_{l'^+_{\varkappa_\sigma}}^{+} d\,\overline{\Omega}^+
\end{aligned}$$

und schließlich, indem man die mit Hilfe der Relationen (S.) sich ergebenden Gleichungen:

$$\int\limits_{a_\nu^+}^{+} d\overline{\Omega}^+ = \overline{\Omega}_{\mathfrak{z}_\nu} \;\; - \overline{\Omega}_{\mathfrak{q}_\nu} = \frac{2}{p}\mathfrak{S}\, u_\nu^{\mathfrak{p}_\nu} + \overline{\mathfrak{B}}_\nu,$$

$$\int\limits_{b_\nu^+}^{+} d\overline{\Omega}^+ = \overline{\Omega}_{\mathfrak{r}_\nu} \;\; - \overline{\Omega}_{\mathfrak{t}_\nu} = -\frac{2\pi i}{p}\overline{\mathfrak{S}} - \overline{\mathfrak{A}}_\nu,$$

$$\int\limits_{c_\nu^+}^{+} d\overline{\Omega}^+ = \overline{\Omega}_{\mathfrak{k}_{\nu+1}} - \overline{\Omega}_{\mathfrak{z}_\nu} = \overline{\Omega}_{\mathfrak{k}_1} - \overline{\Omega}_{\mathfrak{p}_\nu} - \frac{2}{p}\mathfrak{S}\, u_\nu^{\mathfrak{p}_\nu} - \overline{\mathfrak{A}}_\nu - \overline{\mathfrak{B}}_\nu - \nu\frac{2\pi i}{p}\overline{\mathfrak{S}},$$

$$\int\limits_{l'^+_{\varkappa_\sigma}}^{+} d\overline{\Omega}^+ = \overline{\Omega}_{\mathfrak{l}_{\sigma+1}} - \overline{\Omega}_{\mathfrak{n}_{\varkappa_\sigma}} = \overline{\Omega}_{\mathfrak{k}_1} - 2\pi i(\overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_\sigma} + \overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_{\sigma+1}} + \cdots + \overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_s}) - \overline{\Omega}_{\mathfrak{m}_{\varkappa_\sigma}},$$

— bei denen $\mathfrak{m}_{\varkappa_\sigma}$ den der Linie $k'_{\varkappa_\sigma}$ und der negativen Seite des Schnittes $l_{\varkappa_\sigma}$, $\mathfrak{n}_{\varkappa_\sigma}$ den der Linie $k'_{\varkappa_\sigma}$ und der positiven Seite des Schnittes $l_{\varkappa_\sigma}$ gemeinsam angehörigen Punkt der Begrenzung $\mathfrak{R}$ von T^* bezeichnet (s. Fig. 19 auf S. 187 des ersten Teiles) und die für $\nu = p$, $\sigma = s$ auftretenden Zeichen $\mathfrak{k}_{p+1}$, $\mathfrak{l}_{s+1}$ als gleichbedeutend mit den Zeichen $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{k}_1$ beziehungsweise anzusehen sind — benutzt und beachtet, daß

$$\int\limits_{b_\nu^+}^{+} \Omega^- du_\nu^z = \int\limits_{b_\nu^+}^{+} \Omega^+ du_\nu^z - \frac{2}{p}\mathfrak{S}\int\limits_{b_\nu^+}^{+} u_\nu^{z-} du_\nu^z - \mathfrak{B}_\nu\int\limits_{b_\nu^+}^{+} du_\nu^z$$

$$= \int\limits_{b_\nu^+}^{+} \Omega\, du_\nu^z + \frac{1}{p}\mathfrak{S}\pi i(2u_\nu^{\mathfrak{p}_\nu} + \pi i) + \mathfrak{B}_\nu \pi i,$$

$$\int\limits_{b_\nu^+}^{+} u_\nu^{z-} d\overline{\Omega}^+ = \int\limits_{b_\nu^+}^{+} u_\nu^{z+} d\overline{\Omega}^+ - a_{\nu\nu}\int\limits_{b_\nu^+}^{+} d\overline{\Omega}^+ = u_\nu^{\mathfrak{r}_\nu}\overline{\Omega}_{\mathfrak{r}_\nu} - u_\nu^{\mathfrak{t}_\nu}\overline{\Omega}_{\mathfrak{t}_\nu} - \int\limits_{b_\nu^+}^{+} \overline{\Omega}^+ du_\nu^z - a_{\nu\nu}\int\limits_{b_\nu^+}^{+} d\overline{\Omega}^+$$

$$= -\overline{\Omega}_{\mathfrak{p}_\nu}\pi i - \frac{2}{p}\overline{\mathfrak{S}}\pi i(2u_\nu^{\mathfrak{p}_\nu} + \pi i) - \overline{\mathfrak{A}}_\nu u_\nu^{\mathfrak{p}_\nu} - \overline{\mathfrak{A}}_\nu \pi i - \overline{\mathfrak{B}}_\nu \pi i - \int\limits_{b_\nu^+}^{+} \overline{\Omega}\, du_\nu^z$$

ist, die Gleichung:

$$J_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left\{\mathfrak{A}_\nu\overline{\mathfrak{B}}_\nu - \mathfrak{B}_\nu\overline{\mathfrak{A}}_\nu + \frac{2}{p}\left(\overline{\mathfrak{S}}\mathfrak{A}_\nu - \mathfrak{S}\overline{\mathfrak{A}}_\nu\right)u_\nu^{\mathfrak{p}_\nu}\right\} - 2\pi^2\,\mathfrak{S}\overline{\mathfrak{S}}$$

$$+ \frac{2}{p}\overline{\mathfrak{S}}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int\limits_{b_\nu^+}^{+} \Omega\, du_\nu^z - \frac{2}{p}\mathfrak{S}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int\limits_{b_\nu^+}^{+} \overline{\Omega}\, du_\nu^z$$

$$+ 4\pi^2\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma}(\overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_\sigma} + \overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_{\sigma+1}} + \cdots + \overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_s}) - 2\pi i\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma}\overline{\Omega}_{\mathfrak{m}_{\varkappa_\sigma}}.$$

Was dann weiter die mit J_2 bezeichnete Integralsumme betrifft, so hängt deren Wert ausschließlich von dem durch die Gleichungen (R.) charakterisierten Verhalten der Funktionen Ω, $\overline{\Omega}$ für die Punkte η_1', $\cdots$, η_s' ab. Nun verhalten sich aber die Funktionen Ω, $\overline{\Omega}$ für den Punkt η_σ' $(\sigma=1,2,\cdots,s)$ genau so wie die im ersten Teile, in Art. 1 des siebenten Abschnittes, aufgestellten Funktionen W, $\overline{W}$, und es bleiben daher die dort zur Auswertung der auf die Funktionen W, $\overline{W}$ sich beziehenden Integralsumme J_2 durchgeführten Untersuchungen richtig, wenn man darin allenthalben die Buchstaben W, $\overline{W}$ durch die Buchstaben Ω, $\overline{\Omega}$ beziehungsweise ersetzt. Dementsprechend ergibt sich für die hier vorliegende Integralsumme J_2 die Gleichung:

$$J_2 = 2\pi i\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_\sigma\overline{\Omega}_{\mathfrak{m}_\sigma} - 2\pi^2\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_\sigma\overline{\mathfrak{L}}_\sigma - 2\pi i\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}(\mathfrak{L}_\sigma\bar{c}_{\sigma 0}-\overline{\mathfrak{L}}_\sigma c_{\sigma 0}) - 2\pi i\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\sum_{\mu=1}^{\mu=m_\sigma}\mu(\mathfrak{L}_{\sigma\mu}\bar{c}_{\sigma\mu}-\overline{\mathfrak{L}}_{\sigma\mu}c_{\sigma\mu}).$$

Die so für J_1, J_2 gewonnenen Ausdrücke trage man nun in die Gleichung $J_1+J_2=0$ ein. Man erhält dann schließlich die Formel:

$$(\mathrm{F}_3'.)\qquad\begin{aligned}\int\limits_{\mathfrak{R}}^{+}\Omega\,d\overline{\Omega} = &\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\Big\{\mathfrak{A}_\nu\overline{\mathfrak{B}}_\nu-\mathfrak{B}_\nu\overline{\mathfrak{A}}_\nu+\frac{2}{p}\big(\overline{\mathfrak{S}}\mathfrak{A}_\nu-\mathfrak{S}\overline{\mathfrak{A}}_\nu\big)\,u_\nu^{\mathfrak{p}_\nu}\Big\}-2\pi^2\mathfrak{S}\overline{\mathfrak{S}}\\ &+\frac{2}{p}\,\overline{\mathfrak{S}}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int\limits_{b_\nu^+}^{+}\Omega\,du_\nu^z-\frac{2}{p}\,\mathfrak{S}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int\limits_{b_\nu^+}^{+}\overline{\Omega}\,du_\nu^z\\ &+4\pi^2\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma}(\overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_\sigma}+\overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_{\sigma+1}}+\cdots+\overline{\mathfrak{L}}_{\varkappa_s})-2\pi^2\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_\sigma\overline{\mathfrak{L}}_\sigma\\ &-2\pi i\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}(\mathfrak{L}_\sigma\bar{c}_{\sigma 0}-\overline{\mathfrak{L}}_\sigma c_{\sigma 0})-2\pi i\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\sum_{\mu=1}^{\mu=m_\sigma}\mu(\mathfrak{L}_{\sigma\mu}\bar{c}_{\sigma\mu}-\overline{\mathfrak{L}}_{\sigma\mu}c_{\sigma\mu})=0.\end{aligned}$$

In dem schon vorher erwähnten besonderen Falle, wo die Größen $\mathfrak{S}$, $\overline{\mathfrak{S}}$ beide den Wert Null haben und dementsprechend Ω, $\overline{\Omega}$ zwei zur Charakteristik $\binom{1\cdots 1}{1\cdots 1}$ gehörige Funktionen W sind, reduziert sich diese Formel auf die in Art. 1 dieses Abschnittes aufgestellte Formel (F_3.).

Das in der Formel (F_3'.) vorkommende Aggregat:

$$\frac{2}{p}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\big(\overline{\mathfrak{S}}\mathfrak{A}_\nu-\mathfrak{S}\overline{\mathfrak{A}}_\nu\big)\,u_\nu^{\mathfrak{p}_\nu}-2\pi^2\mathfrak{S}\overline{\mathfrak{S}}+\frac{2}{p}\,\overline{\mathfrak{S}}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int\limits_{b_\nu^+}^{+}\Omega\,du_\nu^z-\frac{2}{p}\,\mathfrak{S}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int\limits_{b_\nu^+}^{+}\overline{\Omega}\,du_\nu^z$$

läßt sich, indem man darin an Stelle der Funktionen Ω, $\overline{\Omega}$ die ihnen entsprechenden Ausdrücke einsetzt und die Gleichungen ($2_0'$.), (3_0.), (3_m.) von Art. 4, 5 berücksichtigt, in den Ausdruck:

$$\frac{1}{p}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\{(\overline{\mathfrak{S}}\mathfrak{A}_\nu-\mathfrak{S}\overline{\mathfrak{A}}_\nu)(2k_\nu-a_{\nu\nu})\}-2\pi^2\mathfrak{S}\overline{\mathfrak{S}}-2\pi i(C\overline{\mathfrak{S}}-\overline{C}\mathfrak{S})$$

überführen, wobei $2k_\nu$ $_{(\nu=1,2,\cdots,p)}$ die bei der Definition von $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ eingeführte, der Gleichung $[2'_0.]$ zufolge von der Lage des Punktes $\mathfrak{p}_\nu$ $_{(\nu=1,2,\cdots,p)}$ in der Fläche T unabhängige Größe bezeichnet. Daraus folgt aber, daß das genannte Aggregat und damit auch die Formel $(\mathrm{F}'_3.)$ von der Lage des Punktes $\mathfrak{p}_\nu$ $_{(\nu=1,2,\cdots,p)}$ in der Fläche T vollständig unabhängig ist.

Die Formel $(\mathrm{F}'_3.)$ läßt sich ohne weiteres auf den Fall übertragen, wo die in dem Punktsysteme $(\eta'_1, \cdots, \eta'_s) = (\infty_1, \cdots, \infty_q, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t)$ vorkommenden Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ teilweise oder auch sämtlich Punkte der Begrenzung von T' sind, wenn nur diese Punkte als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen. Um dieses einzusehen, führe man zunächst am Schnittsystem bei jedem der Begrenzung von T' angehörigen Punkte η', ohne jedoch den Charakter des Schnittsystems zu ändern, eine solche Deformation aus, daß kein Punkt η' mehr an einem der Schnitte a, b, c liegt, und setze gleichzeitig die Funktionen $\Omega(z)$, $\overline{\Omega}(z)$, diesen Deformationen folgend, mit Hilfe der ihr Verhalten an den Querschnitten charakterisierenden Gleichungen (S.) auf die im ersten Teile, in Art. 3 des fünften Abschnittes, angegebene Weise, unter Beachtung der Gleichungen $[2'_0.]$, $[3_0.]$, $[3_m.]$, als Funktionen von z stetig fort. Da nun für die so geänderten Funktionen $\Omega(z)$, $\overline{\Omega}(z)$, welche zu der aus der ursprünglichen Fläche T' durch die gemachten Deformationen entstandenen, die Punkte $\eta'_1, \cdots, \eta'_s$ als innere Punkte enthaltenden neuen Fläche T' gehören, ohne weiteres die Fundamentalformel $(\mathrm{F}'_3.)$ gilt, und die in dieser Formel auftretenden Konstanten, wie die Gleichungen $[2'_0.]$, $[3_0.]$, $[3_m.]$ zeigen, von den bei den ursprünglichen Funktionen $\Omega(z)$, $\overline{\Omega}(z)$ vorkommenden entsprechenden Konstanten nicht verschieden sind, so gilt die Formel $(\mathrm{F}'_3.)$ auch für die ursprünglichen Funktionen $\Omega(z)$, $\overline{\Omega}(z)$.

Es sollen jetzt mit Hilfe der Formel $(\mathrm{F}'_3.)$ gewisse zwischen den Elementarfunktionen $\underset{0}{P}$, $\underset{m}{P}$ bestehende Beziehungen abgeleitet werden. Man verstehe zu dem Ende unter σ_1, σ_2 irgend zwei voneinander verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2, \cdots, s$, bezeichne den $\sigma_1$ten Punkt des Punktsystems $(\eta'_1, \cdots, \eta'_s) = (\infty_1, \cdots, \infty_q, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t)$ mit η_1, den $\sigma_2$ten mit η_2 und beachte, daß die auf diese Punkte η_1, η_2 sich beziehenden Elementarfunktionen $\underset{0}{P}$, $\underset{m}{P}$ sich für das Gebiet des Punktes η_1 durch Gleichungen von der Form:

$$\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right| = \ln\frac{1}{z_{\eta_1}} + c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_1 0} + c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_1 1}\, z_{\eta_1} + c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_1 2}\, z^2_{\eta_1} + \cdots,$$

$$\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right| = \frac{1}{z^m_{\eta_1}} + c^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_1 0} + c^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_1 1}\, z_{\eta_1} + c^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_1 2}\, z^2_{\eta_1} + \cdots,$$

$$\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_2\\ z\end{matrix}\right| = c^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_1 0} + c^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_1 1}\, z_{\eta_1} + c^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_1 2}\, z^2_{\eta_1} + \cdots,$$

$$\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta_2\\ z\end{matrix}\right| = c^{(m\,\sigma_2)}_{\sigma_1 0} + c^{(m\,\sigma_2)}_{\sigma_1 1}\, z_{\eta_1} + c^{(m\,\sigma_2)}_{\sigma_1 2}\, z^2_{\eta_1} + \cdots,$$

für das Gebiet des Punktes η_2 dagegen durch Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned}
\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right| &= \qquad\quad c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_2 0} + c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_2 1}\, z_{\eta_2} + c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_2 2}\, z^2_{\eta_2} + \cdots,\\
\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right| &= \qquad\quad c^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_2 0} + c^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_2 1}\, z_{\eta_2} + c^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_2 2}\, z^2_{\eta_2} + \cdots,\\
\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_2\\ z\end{matrix}\right| &= \ln\frac{1}{z_{\eta_2}} + c^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_2 0} + c^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_2 1}\, z_{\eta_2} + c^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_2 2}\, z^2_{\eta_2} + \cdots,\\
\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta_2\\ z\end{matrix}\right| &= \frac{1}{z^m_{\eta_2}} + c^{(m\,\sigma_2)}_{\sigma_2 0} + c^{(m\,\sigma_2)}_{\sigma_2 1}\, z_{\eta_2} + c^{(m\,\sigma_2)}_{\sigma_2 2}\, z^2_{\eta_2} + \cdots,
\end{aligned}$$

darstellen lassen, wobei die c von z unabhängige Größen bezeichnen. Aus der Formel $(F'_3.)$ erhält man dann, unter Benutzung der Relationen $(3_0.)$, $(3_m.)$:

$$\begin{array}{lllll}
\text{I.)} & \text{für } \Omega = \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right|, & \overline{\Omega} = \underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right| & \text{die Gleichung:} & n\,c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_1 n} = c^{(n\,\sigma_1)}_{\sigma_1 0},\\
\text{II.)} & \text{für } \Omega = \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right|, & \overline{\Omega} = \underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right| & \text{die Gleichung:} & n\,c^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_1 n} = m\,c^{(n\,\sigma_1)}_{\sigma_1 m},\\
\text{III.)} & \text{für } \Omega = \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right|, & \overline{\Omega} = \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_2\\ z\end{matrix}\right| & \text{die Gleichung:} & c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_2 0} = c^{(0\,\sigma_2)}_{\sigma_1 0} \pm \pi i,\\
\text{IV.)} & \text{für } \Omega = \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right|, & \overline{\Omega} = \underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\eta_2\\ z\end{matrix}\right| & \text{die Gleichung:} & n\,c^{(0\,\sigma_1)}_{\sigma_2 n} = c^{(n\,\sigma_2)}_{\sigma_1 0},\\
\text{V.)} & \text{für } \Omega = \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right|, & \overline{\Omega} = \underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\eta_2\\ z\end{matrix}\right| & \text{die Gleichung:} & n\,c^{(m\,\sigma_1)}_{\sigma_2 n} = m\,c^{(n\,\sigma_2)}_{\sigma_1 m},
\end{array}$$

wobei in der unter III.) stehenden Gleichung das positive oder negative Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Schnitte c, l_{η_1}, l_{η_2} bei einem negativen Umlauf um $\mathfrak{P}_0$ in der Reihenfolge $c_1, \cdots, c_p, l_{\eta_1}, l_{\eta_2}$ oder in der Reihenfolge $c_1, \cdots, c_p, l_{\eta_2}, l_{\eta_1}$ überschritten werden. Ersetzt man jetzt in den gewonnenen Gleichungen die Größen c durch die ihnen auf Grund der in Art. 3 des ersten Abschnittes gemachten Festsetzungen entsprechenden Ausdrücke, so ergeben sich die gewünschten Beziehungen:

$$\text{(I.)}\qquad \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^n}{d\zeta^n_{\eta_1}}\left[\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ \zeta\end{matrix}\right| - \ln\frac{1}{\zeta_{\eta_1}}\right]\right)_0 = \left[\underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ \zeta\end{matrix}\right| - \frac{1}{\zeta^n_{\eta_1}}\right]_{\zeta=\eta_1},$$

$$\text{(II.)}\qquad \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^n}{d\zeta^n_{\eta_1}}\left[\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ \zeta\end{matrix}\right| - \frac{1}{\zeta^m_{\eta_1}}\right]\right)_0 = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m}{d\zeta^m_{\eta_1}}\left[\underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ \zeta\end{matrix}\right| - \frac{1}{\zeta^n_{\eta_1}}\right]\right)_0,$$

$$\text{(III.)}\qquad \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\end{matrix}\right| = \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_2\\ \eta_1\end{matrix}\right| \pm \pi i,$$

$$\text{(IV.)}\qquad \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^n}{d\zeta^n_{\eta_2}}\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ \zeta\end{matrix}\right|\right)_0 = \underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\eta_2\\ \eta_1\end{matrix}\right|,$$

$$\text{(V.)}\qquad \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^n}{d\zeta^n_{\eta_2}}\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ \zeta\end{matrix}\right|\right)_0 = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m}{d\zeta^m_{\eta_1}}\underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\eta_2\\ \zeta\end{matrix}\right|\right)_0,$$

wobei in der unter (III.) stehenden Gleichung das positive oder negative Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Schnitte c, l_{η_1}, l_{η_2} bei einem negativen Umlauf um $\mathfrak{S}_0$ in der Reihenfolge $c_1, \cdots, c_p, l_{\eta_1}, l_{\eta_2}$ oder in der Reihenfolge $c_1, \cdots, c_p, l_{\eta_2}, l_{\eta_1}$ überschritten werden.

Nach dem vorher Bemerkten gelten die Formeln (I.)—(V.) für irgend zwei Punkte η_1, η_2 der Fläche T'; nur müssen diese Punkte η_1, η_2, wenn sie beide der Begrenzung von T' angehören, als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen. Für die Formeln (I.), (II.) kommt in der Fläche T'' nur ein einziger, den der positiven Seite von c_p und der negativen Seite von c_1 gemeinsam angehörigen Punkt mit dem Punkte η_1 verbindender Schnitt l_{η_1} in Betracht; für die Formeln (III.), (IV.), (V.) dagegen muß der genannte Punkt sowohl mit dem Punkte η_1 durch einen Schnitt l_{η_1} wie mit dem Punkte η_2 durch einen Schnitt l_{η_2} verbunden sein.

Die Formeln (I.)—(V.) entsprechen genau den in Art. 5 des zweiten Abschnittes für die zu irgend zwei reziproken gewöhnlichen Charakteristiken $\binom{A}{B}$, $\binom{\bar A}{\bar B}$ beziehungsweise gehörigen Elementarfunktionen $\underset{0}{P}$, $\underset{m}{P}$, $\underset{0}{P}$, $\underset{m}{P}$ abgeleiteten Formeln (II.)—(VI.), insoferne die hier zu Grunde liegende ausgezeichnete Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ zu sich selbst reziprok ist. Auf dieselbe Weise, wie in dem genannten Artikel ausschließlich auf Grund der Formeln (II.)—(VI.) die Gleichungen (1.)—(8.) abgeleitet worden sind, kann man jetzt hier ausschließlich auf Grund der Formeln (I.)—(V.) die den Gleichungen (1.)—(8.) entsprechenden Gleichungen ableiten, und diese werden sich nach dem eben Bemerkten von jenen nur dadurch unterscheiden, daß durchweg $\underset{0}{P}$, $\underset{m}{P}$ durch $\underset{0}{P}$, $\underset{m}{P}$ ersetzt ist. Man kann daher die genannten Gleichungen (1.)—(8.) mit der erwähnten Modifikation direkt hierher übertragen. Es ergeben sich dann zur Darstellung der Funktionen $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right|$, $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right|$ für das Gebiet des Punktes η_1 die Gleichungen:

$$(1.)\qquad \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right| = \ln\frac{1}{z_{\eta_1}} + \left[\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ \zeta\end{matrix}\right| - \ln\frac{1}{\zeta_{\eta_1}}\right]_{\zeta=\eta_1} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left[\underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ \zeta\end{matrix}\right| - \frac{1}{\zeta_{\eta_1}^n}\right]_{\zeta=\eta_1} z_{\eta_1}^n,$$

$$(2.)\qquad \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right| = \frac{1}{z_{\eta_1}^m} + \left[\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ \zeta\end{matrix}\right| - \frac{1}{\zeta_{\eta_1}^m}\right]_{\zeta=\eta_1} + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{d^m}{d\zeta_{\eta_1}^m}\left[\underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ \zeta\end{matrix}\right| - \frac{1}{\zeta_{\eta_1}^n}\right]\right)_0 z_{\eta_1}^n,$$

für das Gebiet des Punktes η_2 dagegen die Gleichungen:

$$(3.)\qquad \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right| = \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\end{matrix}\right| + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\eta_2\\ \eta_1\end{matrix}\right| z_{\eta_2}^n,$$

$$(4.)\qquad \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right| = \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\end{matrix}\right| + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{d^m}{d\zeta_{\eta_1}^m}\underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\eta_2\\ \zeta\end{matrix}\right|\right)_0 z_{\eta_2}^n;$$

weiter dann die Gleichungen:

$$(5.)\qquad \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right| = \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}z\\ \eta\end{matrix}\right| \pm \pi i,$$

$$(6.)\qquad \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right| = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m}{d\zeta_\eta^m}\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}z\\ \zeta\end{matrix}\right|\right)_0,$$

— wobei in der unter (5.) stehenden Gleichung das positive oder negative Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Schnitte c, l bei einem negativen Umlauf um ihren gemeinsamen Ausgangspunkt $\mathscr{P}_0$ in der Reihenfolge $c_1, \cdots, c_p, l_\eta, l_z$ oder in der Reihenfolge $c_1, \cdots, c_p, l_z, l_\eta$ überschritten werden — und schließlich noch die Doppelgleichung:

$$(7.)\qquad \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right| = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m}{d\zeta_\eta^m}\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}z\\ \zeta\end{matrix}\right|\right)_0 = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m}{d\zeta_\eta^m}\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\zeta\\ z\end{matrix}\right|\right)_0,$$

sowie das mit dieser äquivalente System der drei Doppelgleichungen:

$$(8.)\qquad \begin{aligned}
\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right| &= \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^m\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}z\\ \varepsilon\end{matrix}\right|}{d\varepsilon^m} &&= \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^m\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|}{d\varepsilon^m},\\
\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\alpha\\ z\end{matrix}\right| &= \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}z\\ \alpha+\zeta_\alpha^\mu\end{matrix}\right|}{d\zeta_\alpha^m}\right)_0 &&= \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\alpha+\zeta_\alpha^\mu\\ z\end{matrix}\right|}{d\zeta_\alpha^m}\right)_0,\\
\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\infty\\ z\end{matrix}\right| &= \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}z\\ \zeta_\infty^{-\iota}\end{matrix}\right|}{d\zeta_\infty^m}\right)_0 &&= \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^m\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\zeta_\infty^{-\iota}\\ z\end{matrix}\right|}{d\zeta_\infty^m}\right)_0.
\end{aligned}$$

Die Gleichung (5.) zeigt, daß die Funktion $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$ nicht nur eine Funktion der bei ihr als Argument auftretenden komplexen Veränderlichen z, sondern auch eine Funktion der bei ihr als Parameter auftretenden komplexen Veränderlichen η ist, und daß die Eigenschaften von $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$ als Funktion des Parameters η ohne Mühe aus den bekannten Eigenschaften von $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}z\\ \eta\end{matrix}\right|$ als Funktion des Argumentes η abgeleitet werden können. Aus der ersten der drei Gleichungen (8.), die für jeden von den Punkten α, ∞ verschiedenen Punkt ε der Fläche T'' gilt, folgt dann weiter, daß auch die Funktion $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$ nicht nur eine Funktion der bei ihr als Argument auftretenden komplexen Veränderlichen z, sondern auch eine Funktion der bei ihr als Parameter auftretenden komplexen Veränderlichen η ist, und daß die Eigenschaften von $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$ als Funktion des Parameters η aus den bekannten Eigenschaften von $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}z\\ \eta\end{matrix}\right|$ als Funktion des Argumentes η abgeleitet werden können. Die genannte Gleichung zeigt schließlich aber auch noch, daß man die Elementarfunktionen $\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$, $\underset{2}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$, $\cdots$ aus der Funktion $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$ als primärer durch sukzessives Derivieren nach dem Parameter η erhalten kann.

8.

Die in den Gleichungen $(2_{0\cdot})$ des Art. 4 vorkommende Konstante $2k_\nu$ $(\nu=1,2,\cdots,p)$ hängt, wie ein Blick auf die sie definierende Gleichung:

$$2k_\nu = \frac{2}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}{}' \int_{b_\varrho^+}^{+} u_\nu^\xi \, d u_\varrho^\xi - \pi i - a_{\nu\nu} \qquad (\nu=1,2,\cdots,p)$$

zeigt, nur von der Beschaffenheit der vorgegebenen $(2p+1)$-fach zusammenhängenden Fläche T und von dem Charakter des zur Verwandlung dieser Fläche in eine einfach zusammenhängende Fläche T' benutzten Querschnittsystems ab. Die Art dieser Abhängigkeit zu ermitteln, ist das Ziel der folgenden Untersuchungen.

Man verbinde in der von den beiden Seiten der Schnitte a_ν, b_ν, c_ν, $\nu=1,2,\cdots,p$, begrenzten Fläche T' den der negativen Seite von c_1 und der positiven Seite von c_p gemeinsam angehörigen Punkt mit den Punkten $\infty_1, \cdots, \infty_q, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ durch Schnitte $l_{\infty_1}, \cdots, l_{\infty_q}, l_{\alpha_1}, \cdots, l_{\alpha_r}$ in der Weise, daß die Schnitte c, l bei einem negativen Umlauf um ihren gemeinsamen Ausgangspunkt $\mathscr{P}_0$ in der Reihenfolge $c_1, c_2, \cdots, c_p, l_{\infty_1}, \cdots, l_{\infty_q}, l_{\alpha_1}, \cdots, l_{\alpha_r}$ überschritten werden, und bezeichne die so entstehende, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c, l begrenzte, einfach zusammenhängende Fläche mit T''. Im Innern dieser Fläche T'' fixiere man nun einen Punkt M und grenze um ihn als Mittelpunkt zunächst eine ganz im Innern von T'' liegende Kreisfläche K_0 vom Radius R_0 und hierauf eine ebenfalls noch ganz im Innern von T'' liegende Kreisfläche K mit einem Radius $R > R_0$ ab, verstehe alsdann, nachdem man die Peripherien dieser Kreisflächen mit k_0, k bezeichnet hat (s. Fig. 2), unter e, ε zwei auf k fest angenommene Punkte, unter z, ζ zwei im Innern der Kreisfläche K frei bewegliche Punkte und verbinde den der negativen Seite von c_1 und der positiven Seite von l_{α_r} gemeinsam angehörigen, mit z_0 zu bezeichnenden, Punkt sowohl mit dem Punkte z durch einen den Punkt e enthaltenden Schnitt l_z wie mit dem Punkte ζ durch einen den Punkt ε enthaltenden Schnitt l_ζ in der Weise, daß die Schnitte c, l bei einem negativen Umlauf um ihren gemeinsamen Aus-

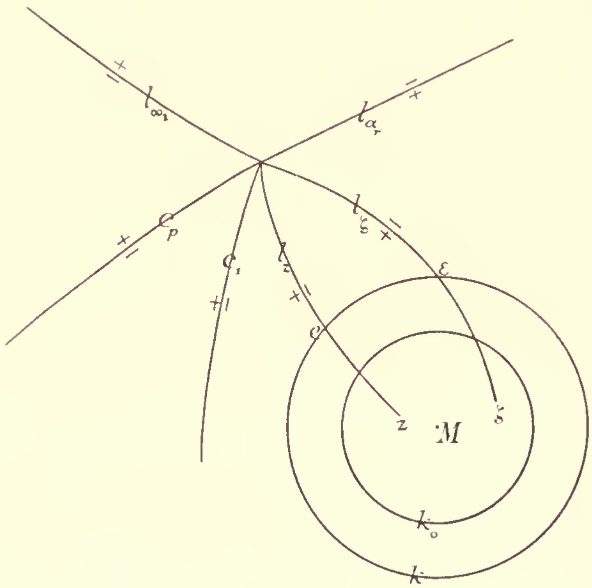


Fig. 2.

gangspunkt in der Reihenfolge $c_1, \cdots, c_p, l_{\infty_1}, \cdots, l_{\infty_q}, l_{\alpha_1}, \cdots, l_{\alpha_r}, l_\zeta, l_z$ überschritten werden, und die Peripherie k mit dem Schnitt l_z nur den Punkt e, mit dem Schnitt l_ζ nur den Punkt ε gemeinsam hat. Ändern die Punkte z, ζ in der Kreisfläche K ihre Lage, so sollen von den zu ihnen führenden Schnitten l_z, l_ζ nur die in K fallenden, mit $l_{ez}, l_{\varepsilon\zeta}$ zu bezeichnenden, Stücke sich ändern. Die aus K durch Einführung der Schnitte l_z, l_ζ entstehende, von der Linie k und den beiden Seiten der Schnittstücke $l_{ez}, l_{\varepsilon\zeta}$ begrenzte, Fläche werde mit $K_{l_z l_\zeta}$ bezeichnet, und dementsprechend möge die aus $K_{l_z l_\zeta}$ durch Aufhebung des Schnittes l_ζ entstehende Fläche mit K_{l_z}, die aus $K_{l_z l_\zeta}$ durch Aufhebung des Schnittes l_z entstehende Fläche mit K_{l_ζ} bezeichnet werden.

Auf die definierte Fläche $K_{l_z l_\zeta}$ sollen jetzt die beiden Ausdrücke:

$$\underset{0}{P}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta \end{matrix}\right| - \ln \frac{1}{\zeta - z}, \qquad \underset{0}{P}\left|\begin{matrix} \zeta \\ z \end{matrix}\right| - \ln \frac{1}{z - \zeta}$$

bezogen werden. Da $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta \end{matrix}\right|, \underset{0}{P}\left|\begin{matrix} \zeta \\ z \end{matrix}\right|$ infolge der eben gemachten Festsetzungen bestimmte, durch die Beziehung:

$$(1) \qquad \underset{0}{P}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta \end{matrix}\right| = \underset{0}{P}\left|\begin{matrix} \zeta \\ z \end{matrix}\right| - \pi i$$

verknüpfte Größen sind, hat man nur noch die beiden Logarithmen zu definieren. Zu dem Ende verstehe man unter $\ln \frac{1}{\varepsilon - e}$ irgend einen der unbegrenzt vielen diesem Ausdrucke zukommenden, nur um ganze Vielfache von $2\pi i$ sich unterscheidenden, Werte, bestimme alsdann den Wert von $\ln \frac{1}{e - \varepsilon}$ durch die Gleichung:

$$(2.) \qquad \ln \frac{1}{\varepsilon - e} = \ln \frac{1}{e - \varepsilon} - \pi i$$

und definiere endlich die Funktionen $\ln \frac{1}{\zeta - z}, \ln \frac{1}{z - \zeta}$ für die Fläche $K_{l_z l_\zeta}$ durch die Gleichungen:

$$(3.) \quad \ln \frac{1}{\zeta - z} = \ln \frac{1}{\varepsilon - e} + \int_e^z \frac{dz}{\varepsilon - z} - \int_\varepsilon^\zeta \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \qquad (4.) \quad \ln \frac{1}{z - \zeta} = \ln \frac{1}{e - \varepsilon} - \int_e^z \frac{dz}{z - \varepsilon} - \int_\varepsilon^\zeta \frac{d\zeta}{z - \zeta},$$

bei denen der Integrationsweg von e bis z sich mit dem Schnittstücke l_{ez}, der Integrationsweg von ε bis ζ sich mit dem Schnittstücke $l_{\varepsilon\zeta}$ decken soll. Damit sind dann auch die beiden oben aufgestellten Ausdrücke vollständig bestimmt, und es besteht zugleich, infolge der durch Verbindung der Gleichungen (2.), (3.), (4.) sich ergebenden Beziehung:

$$(5.) \qquad \ln \frac{1}{\zeta - z} = \ln \frac{1}{z - \zeta} - \pi i$$

und der unter (1.) stehenden Beziehung, zwischen ihnen die Gleichung:

$$(6.) \qquad \underset{0}{P}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta \end{matrix}\right| - \ln \frac{1}{\zeta - z} = \underset{0}{P}\left|\begin{matrix} \zeta \\ z \end{matrix}\right| - \ln \frac{1}{z - \zeta}.$$

Der auf der linken Seite der letzten Gleichung stehende Ausdruck:

$$\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix} z \\ \zeta \end{smallmatrix}\right| - \ln \frac{1}{\zeta - z}$$

ist, der ursprünglichen Definition der Elementarfunktion $\underset{0}{P}$ gemäß, bei festgehaltenem z eine in K_{l_z} einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen ζ, die für je zwei zum Schnittstücke $l_{\varepsilon z}$ gehörige entsprechende Punkte ζ^+, ζ^- denselben Wert besitzt, und deren Derivierte nach ζ die Größe $\underset{1}{P}\left|\begin{smallmatrix} \zeta \\ z \end{smallmatrix}\right| + \frac{1}{\zeta - z}$ ist; er ist aber auch, wie die Gleichung (6.) zeigt, bei festgehaltenem ζ eine in K_{l_ζ} einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen z, die für je zwei zum Schnittstücke $l_{\varepsilon\zeta}$ gehörige entsprechende Punkte z^+, z^- denselben Wert besitzt, und deren Derivierte nach z die Größe $\underset{1}{P}\left|\begin{smallmatrix} z \\ \zeta \end{smallmatrix}\right| - \frac{1}{\zeta - z}$ ist. Infolgedessen stellt der in Rede stehende Ausdruck eine schon innerhalb der ursprünglichen, schnittfreien, Fläche K einwertige und stetige Funktion der beiden komplexen Veränderlichen ζ, z dar, welche die Größe $\left(\underset{1}{P}\left|\begin{smallmatrix} \zeta \\ z \end{smallmatrix}\right| + \frac{1}{\zeta - z}\right) d\zeta + \left(\underset{1}{P}\left|\begin{smallmatrix} z \\ \zeta \end{smallmatrix}\right| - \frac{1}{\zeta - z}\right) dz$ als vollständiges Differential besitzt, und er liefert dementsprechend für $\zeta = z$ eine innerhalb K und daher auch in der ganzen Fläche K_0 einwertige und stetige, durch die Gleichung:

$$\mathfrak{F}_0(z) = \lim_{\zeta = z} \left(\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix} z \\ \zeta \end{smallmatrix}\right| - \ln \frac{1}{\zeta - z}\right)$$

definierte Funktion $\mathfrak{F}_0(z)$ der komplexen Veränderlichen z, deren Derivierte durch die Gleichung:

$$\frac{d\mathfrak{F}_0(z)}{dz} = \lim_{\zeta = z} \left[\left(\underset{1}{P}\left|\begin{smallmatrix} \zeta \\ z \end{smallmatrix}\right| + \frac{1}{\zeta - z}\right) + \left(\underset{1}{P}\left|\begin{smallmatrix} z \\ \zeta \end{smallmatrix}\right| - \frac{1}{\zeta - z}\right)\right] = \lim_{\zeta = z}\left[\underset{1}{P}\left|\begin{smallmatrix} \zeta \\ z \end{smallmatrix}\right| + \underset{1}{P}\left|\begin{smallmatrix} z \\ \zeta \end{smallmatrix}\right|\right]$$

bestimmt ist.

Es soll jetzt untersucht werden, wie die auf der rechten Seite der für $\frac{d\mathfrak{F}_0(z)}{dz}$ gewonnenen Gleichung stehende, mit $f(z)$ zu bezeichnende, Größe:

$$f(z) = \lim_{\zeta = z}\left[\underset{1}{P}\left|\begin{smallmatrix} \zeta \\ z \end{smallmatrix}\right| + \underset{1}{P}\left|\begin{smallmatrix} z \\ \zeta \end{smallmatrix}\right|\right]$$

sich verhält, wenn z sich in der ursprünglichen Fläche T' frei bewegt. Zu dem Ende beachte man, daß der Ausdruck $\underset{1}{P}\left|\begin{smallmatrix} \zeta \\ z \end{smallmatrix}\right| + \underset{1}{P}\left|\begin{smallmatrix} z \\ \zeta \end{smallmatrix}\right|$, auf irgend zwei Punkte z, ζ einer aus T' durch Ausscheidung der Punkte α, ∞ entstehenden Fläche bezogen, bei festgehaltenem z eine einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen ζ, bei festgehaltenem ζ eine einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen z ist. Man erkennt dann zunächst, daß die für $\lim \zeta = z$ aus diesem Ausdruck hervorgehende Größe $f(z)$ eine für jeden von den Punkten α, ∞ verschiedenen Punkt der Fläche T' einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen z ist.

Um weiter das Verhalten der Funktion $f(z)$ für den Punkt $\alpha = \alpha_\varrho$ $(\varrho = 1, 2, \cdots, r)$ mit der Ordnungszahl $\mu - 1 = \mu_\varrho - 1$ zu erkennen, verstehe man unter z, ζ zwei dem Gebiete des Punktes α angehörige Punkte und beachte, daß für jede zulässige Lage von ζ die Entwicklung:

$$\underset{1}{P}\left|{}^{\zeta}_{z}\right| + \underset{1}{P}\left|{}^{z}_{\zeta}\right| = \underset{1}{P}\left|{}^{z}_{\alpha}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} \frac{1}{\mu} \underset{\lambda}{P}\left|{}^{\alpha}_{z}\right| \frac{1}{\zeta_\alpha^{\mu-\lambda}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1}{\mu} \underset{\mu+n}{P}\left|{}^{\alpha}_{z}\right| + \frac{1}{n} \frac{d \underset{n}{P}\left|{}^{\alpha}_{z}\right|}{dz} \right) \zeta_\alpha^{n}$$

gilt, und daß daher für jeden dem Gebiete des Punktes α angehörigen Punkt z die Funktion $f(z)$ durch die Gleichung:

$$f(z) = \underset{1}{P}\left|{}^{z}_{\alpha}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} \frac{1}{\mu} \underset{\lambda}{P}\left|{}^{\alpha}_{z}\right| \frac{1}{z_\alpha^{\mu-\lambda}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1}{\mu} \underset{\mu+n}{P}\left|{}^{\alpha}_{z}\right| + \frac{1}{n} \frac{d \underset{n}{P}\left|{}^{\alpha}_{z}\right|}{dz} \right) z_\alpha^{n}$$

dargestellt wird. Multipliziert man nun diese Gleichung mit $z - \alpha$ oder, was dasselbe, mit z_α^μ, läßt alsdann den Punkt z gegen den Punkt α rücken und geht zur Grenze über, so erhält man, unter Berücksichtigung des Verhaltens der Funktionen $\underset{1}{P}\left|{}^{z}_{\alpha}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{}^{\alpha}_{z}\right|$, $m = 1, 2, 3, \cdots$, für den Punkt α, die Gleichung:

$$\lim_{z=\alpha} \{(z-\alpha) f(z)\} = -\frac{1}{\mu} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} \frac{1}{\mu} = \frac{\mu-1}{\mu}$$

und erkennt, daß die Funktion $f(z)$ sich für das Gebiet des Punktes α durch eine Gleichung von der Form:

$$f(z) = \frac{\mu-1}{\mu} \frac{1}{z-\alpha} + \frac{c_1}{(z-\alpha)^{\frac{\mu-1}{\mu}}} + \cdots + \frac{c_{\mu-2}}{(z-\alpha)^{\frac{2}{\mu}}} + \frac{c_{\mu-1}}{(z-\alpha)^{\frac{1}{\mu}}} + c_\mu + c_{\mu+1}(z-\alpha)^{\frac{1}{\mu}} + c_{\mu+2}(z-\alpha)^{\frac{2}{\mu}} + \cdots,$$

bei der die c von z unabhängige Größen bezeichnen, darstellen läßt.

Um endlich das Verhalten der Funktion $f(z)$ für den Punkt $\infty = \infty_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, q)$ mit der Ordnungszahl $\iota - 1 = \iota_\varkappa - 1$ zu erkennen, verstehe man unter z, ζ zwei dem Gebiete des Punktes ∞ angehörige Punkte und beachte, daß für jede zulässige Lage von ζ die Entwicklung:

$$\underset{1}{P}\left|{}^{\zeta}_{z}\right| + \underset{1}{P}\left|{}^{z}_{\zeta}\right| = \underset{1}{P}\left|{}^{z}_{\infty}\right| + \sum_{n=1}^{n=\iota} \frac{1}{n} \frac{d \underset{n}{P}\left|{}^{\infty}_{z}\right|}{dz} \zeta_\infty^{n} + \sum_{n=\iota+1}^{n=\infty} \left(-\frac{1}{\iota} \underset{n-\iota}{P}\left|{}^{\infty}_{z}\right| + \frac{1}{n} \frac{d \underset{n}{P}\left|{}^{\infty}_{z}\right|}{dz} \right) \zeta_\infty^{n}$$

gilt, und daß daher für jeden dem Gebiete des Punktes ∞ angehörigen Punkt z die Funktion $f(z)$ durch die Gleichung:

$$f(z) = \underset{1}{P}\left|{}^{z}_{\infty}\right| + \sum_{n=1}^{n=\iota} \frac{1}{n} \frac{d \underset{n}{P}\left|{}^{\infty}_{z}\right|}{dz} z_\infty^{n} + \sum_{n=\iota+1}^{n=\infty} \left(-\frac{1}{\iota} \underset{n-\iota}{P}\left|{}^{\infty}_{z}\right| + \frac{1}{n} \frac{d \underset{n}{P}\left|{}^{\infty}_{z}\right|}{dz} \right) z_\infty^{n}$$

dargestellt wird. Multipliziert man nun diese Gleichung mit z, oder, was dasselbe, mit $z_\infty^{-\iota}$, läßt alsdann den Punkt z gegen den Punkt ∞ rücken und geht zur Grenze über, so erhält man, unter Berücksichtigung des Verhaltens der Funktionen $\underset{1}{P}\begin{vmatrix} z \\ \infty \end{vmatrix}$, $\underset{m}{P}\begin{vmatrix} \infty \\ z \end{vmatrix}$, ${}_{m=1,2,3,\cdots}$, für den Punkt ∞, die Gleichung:

$$\lim_{z=\infty}\{z f(z)\} = \frac{1}{\iota} + \sum_{n=1}^{n=\iota} \frac{1}{n}\,\frac{n}{\iota} = \frac{\iota+1}{\iota}$$

und erkennt, daß die Funktion $f(z)$ sich für das Gebiet des Punktes ∞ durch eine Gleichung von der Form:

$$f(z) = \frac{\iota+1}{\iota}\,\frac{1}{z} + c_1\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{\iota+1}{\iota}} + c_2\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{\iota+2}{\iota}} + \cdots,$$

bei der die c von z unabhängige Größen bezeichnen, darstellen läßt.

Es ist jetzt noch das Verhalten der Funktion $f(z)$ längs der Schnitte a, b, c zu ermitteln. Zu dem Ende verstehe man unter s_ν ${}_{(\nu=1,2,\cdots,p)}$ einen der drei Schnitte a_ν, b_ν, c_ν und bezeichne ein zu ihm gehöriges Paar entsprechender Punkte mit z^+, z^-, die Werte der Funktion $f(z)$ in diesen Punkten mit $f(z)^+$, $f(z)^-$. Der Definition der Funktion $f(z)$ gemäß ist dann, wenn man unter ζ^+, ζ^- ein zweites zum Schnitte s_ν gehöriges Paar entsprechender Punkte versteht,

$$f(z)^+ - f(z)^- = \lim_{\zeta=z}\left(\underset{1}{P}\begin{vmatrix} \zeta^+ \\ z^+ \end{vmatrix} + \underset{1}{P}\begin{vmatrix} z^+ \\ \zeta^+ \end{vmatrix} - \underset{1}{P}\begin{vmatrix} \zeta^- \\ z^- \end{vmatrix} - \underset{1}{P}\begin{vmatrix} z^- \\ \zeta^- \end{vmatrix}\right).$$

Führt man nun den vorgeschriebenen Grenzübergang aus, indem man beachtet, daß der hinter dem Limeszeichen stehende Ausdruck mit dem Ausdruck:

$$\left(\underset{1}{P}\begin{vmatrix} \zeta^+ \\ z^+ \end{vmatrix} - \underset{1}{P}\begin{vmatrix} \zeta^+ \\ z^- \end{vmatrix}\right) + \left(\underset{1}{P}\begin{vmatrix} \zeta^+ \\ z^- \end{vmatrix} - \underset{1}{P}\begin{vmatrix} \zeta^- \\ z^- \end{vmatrix}\right) + \left(\underset{1}{P}\begin{vmatrix} z^+ \\ \zeta^+ \end{vmatrix} - \underset{1}{P}\begin{vmatrix} z^+ \\ \zeta^- \end{vmatrix}\right) + \left(\underset{1}{P}\begin{vmatrix} z^+ \\ \zeta^- \end{vmatrix} - \underset{1}{P}\begin{vmatrix} z^- \\ \zeta^- \end{vmatrix}\right)$$

gleichwertig ist, und daß nach früherem die vier Differenzen, aus denen sich dieser letzte Ausdruck zusammensetzt, sämtlich den Wert Null besitzen, wenn s_ν mit a_ν oder mit c_ν identisch ist, dagegen die Werte:

$$-2\frac{du_\nu^{\zeta^+}}{d\zeta^+}, \qquad \frac{2}{p}\,\frac{du_\nu^{\zeta^-}}{d\zeta^-}, \qquad -2\frac{du_\nu^{z^+}}{dz^+}, \qquad \frac{2}{p}\,\frac{du_\nu^{z^-}}{dz^-}$$

beziehungsweise, wenn s_ν mit b_ν identisch ist, so erkennt man schließlich, daß

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu\ \{f(z)^+ = f(z)^-, \\ &\text{längs } b_\nu\ \{f(z)^+ = f(z)^- - 4\,\frac{p-1}{p}\,\frac{du_\nu^z}{dz}, \qquad {}_{\nu=1,2,\cdots,p,} \\ &\text{längs } c_\nu\ \{f(z)^+ = f(z)^-, \end{aligned}$$

ist.

Man definiere nun zu der am Anfang dieses Artikels eingeführten einfach zusammenhängenden Fläche T'' eine Funktion $F(z)$ durch die Gleichung:

$$\text{(I.)} \qquad F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz,$$

bei der das auf der rechten Seite stehende Integral von dem der negativen Seite von c_1 und der positiven Seite von l_{α_r} gemeinsam angehörigen Punkte z_0 auf irgend einem in T'' verlaufenden, aber keinen der Punkte α, ∞ enthaltenden Wege bis zum Punkte z zu erstrecken ist. Aus den soeben ermittelten Eigenschaften der Funktion $f(z)$ folgt dann, daß $F(z)$ eine in T'' einwertige Funktion der komplexen Veränderlichen z ist, welche für jeden von den Punkten α, ∞ verschiedenen Punkt dieser Fläche stetig ist, dagegen für den Punkt α_ϱ $(\varrho = 1, 2, \cdots, r)$ unstetig wird wie $-\frac{\mu_\varrho - 1}{\mu_\varrho} \ln \frac{1}{z - \alpha_\varrho}$, für den Punkt $\infty_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, q)$ unstetig wird wie $\frac{\iota_\varkappa + 1}{\iota_\varkappa} \ln z$, und deren Werte $F(z)^+$, $F(z)^-$ in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten z^+, z^- in der Weise verknüpft sind, daß

$$\text{(S.)} \qquad \begin{array}{lll}
\text{längs } a_\nu & \{ F(z)^+ = F(z)^- + \mathfrak{A}_\nu, & \\
\text{längs } b_\nu & \{ F(z)^+ = F(z)^- - 4\,\frac{p-1}{p}\, u_\nu^{z^-} + \mathfrak{B}_\nu, & \nu = 1, 2, \cdots, p, \\
\text{längs } c_\nu & \{ F(z)^+ = F(z)^- + 4\,\frac{p-1}{p}\, \pi i, & \\
\text{längs } l_{\alpha_\varrho} & \{ F(z)^+ = F(z)^- - (\mu_\varrho - 1) 2\pi i, & \varrho = 1, 2, \cdots r, \\
\text{längs } l_{\infty_\varkappa} & \{ F(z)^+ = F(z)^- + (\iota_\varkappa + 1) 2\pi i, & \varkappa = 1, 2, \cdots, q,
\end{array}$$

ist, wobei $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\nu = 1, 2, \cdots, p$, von z unabhängige Größen bezeichnen. Daß längs c_ν die Gleichung $F(z)^+ = F(z)^- + 4\,\frac{p-1}{p}\pi i$ besteht, ergibt sich unmittelbar, wenn man das Integral $\int f(z)\, dz$ vom Punkte $\mathfrak{t}_\nu$ längs der Begrenzung von T'' in positiver Richtung bis zum Punkte $\mathfrak{s}_\nu$ (s. Fig. 17 auf S. 154 des ersten Teiles) erstreckt und das Verhalten der Funktion $F(z)$ längs der Schnitte a_ν, b_ν berücksichtigt.

Die Funktion $F(z)$ läßt sich durch eine lineare Verbindung von Elementarfunktionen darstellen. Zu dem Ende beachte man, daß der Ausdruck:

$$F(z) + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (\mu_\varrho - 1) \, \underset{0}{P} \Big|{}^{\alpha_\varrho}_{z}\Big| - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} (\iota_\varkappa + 1) \, \underset{0}{P} \Big|{}^{\infty_\varkappa}_{z}\Big|$$

eine in der ganzen Fläche T'' einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen z darstellt, welche in je zwei zu einem der Schnitte c, l gehörigen entsprechenden Punkten z^+, z^- denselben Wert besitzt, und deren Werte in je zwei zu einem der Schnitte a, b gehörigen entsprechenden Punkten z^+, z^- sich nur um eine längs des betreffenden Schnittes konstante Größe unterscheiden. Eine Funktion mit diesen Eigenschaften ist aber eine zur Charakteristik $\binom{1\cdots 1}{1\cdots 1}$ gehörige, allenthalben endliche Funktion W, und als solche kann sie durch einen Ausdruck von der Form:

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} c_\sigma u_\sigma|z| + c,$$

bei dem die c von z unabhängige Größen bezeichnen, dargestellt werden. Daraus folgt dann schließlich, daß die durch die Gleichung:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

für die ganze Fläche T'' definierte Funktion $F(z)$, der aufgestellten Behauptung entsprechend, durch eine Gleichung von der Form:

$$\text{(II.)}\qquad F(z) = -\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}(\mu_\varrho - 1)\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}(\iota_\varkappa + 1)\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} c_\sigma u_\sigma|z| + c$$

dargestellt werden kann. Bestimmt man nun auf Grund dieser Darstellung das Verhalten von $F(z)$ längs der Schnitte a, b, c, l und vergleicht die so sich ergebenden Relationen mit den dieses Verhalten ebenfalls charakterisierenden Relationen (S.), so gelangt man zu den für $\nu = 1, 2, \ldots, p$ geltenden Gleichungen:

$$\text{(S'.)}\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{A}_\nu = c_\nu \pi i,\\ &\mathfrak{B}_\nu = 2\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}(\mu_\varrho - 1)u_\nu^{\alpha_\varrho} - 2\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}(\iota_\varkappa + 1)\,u_\nu^{\infty_\varkappa} + (2p-2)\left(\frac{2k_\nu}{p} - \frac{a_{\nu\nu}}{p}\right) + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} c_\sigma a_{\sigma\nu}, \end{aligned}$$

welche die $2p$ Größen $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu,\ {}_{\nu=1,2,\cdots,p}$, durch die p zunächst noch nicht näher bekannten Größen $c_\nu,\ {}_{\nu=1,2,\cdots,p}$, ausdrücken.

Eine zweite Bestimmung der Größen $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu,\ {}_{\nu=1,2,\cdots,p}$, durch die zugleich auch die bis jetzt noch unbekannten Größen $c_\nu,\ {}_{\nu=1,2,\cdots,p}$, bestimmt werden, erhält man durch die folgenden Betrachtungen.

Man verstehe (s. Fig. 3) unter ζ irgend einen Punkt der Fläche T'', unter z einen der positiven oder der negativen Seite von a_ν oder b_ν angehörigen Punkt, ziehe alsdann von dem der negativen Seite von c_1 und der positiven Seite von l_{α_r} gemeinsam angehörigen Punkte z_0 zum Punkte z einen Schnitt l_z und denke sich die auf den Punkt z sich beziehende Funktion $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}z\\ \zeta\end{matrix}\right|$ gebildet. Durch den Schnitt l_z wird die Fläche T''

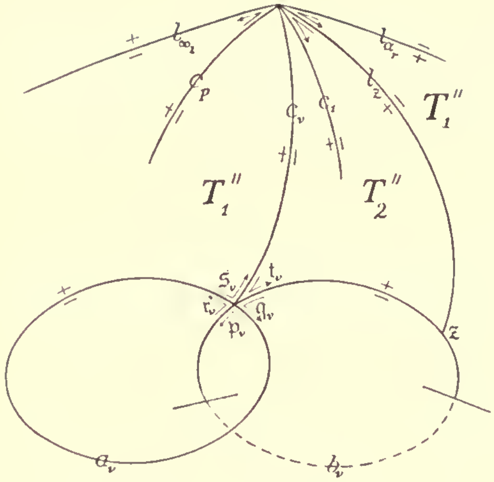


Fig. 3.

in zwei Teile zerlegt, von denen der eine, mit T_1'' zu bezeichnende, an die negative Seite von l_z, der andere, mit T_2'' zu bezeichnende, an die positive Seite von l_z anstößt. Nun definiere man zu der den Schnitt l_z enthaltenden Fläche T'' eine neue Funktion $\underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{smallmatrix} z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right|$ dadurch, daß man

$$\text{für jeden Punkt } \zeta \text{ von } T_1'' \left\{\underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{smallmatrix} z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| = \underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix} z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right|,\right.$$

$$\text{für jeden Punkt } \zeta \text{ von } T_2'' \left\{\underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{smallmatrix} z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| = \underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix} z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| - 2\pi i\right.$$

setzt. Da die so definierte Funktion $\underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{smallmatrix} z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right|$ von ζ in irgend zwei zum Schnitte l_z gehörigen entsprechenden Punkten ζ^+, ζ^- denselben Wert besitzt, so ist sie auch noch in der ursprünglichen, den Schnitt l_z nicht enthaltenden, Fläche T'' einwertig, und es soll daher bei der Betrachtung dieser Funktion der Schnitt l_z als überflüssig weggelassen werden. Die dadurch auf die ursprüngliche Fläche T'' bezogene Funktion $\underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{smallmatrix} z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right|$ ist nun für jeden Punkt ζ dieser Fläche T'', der eine solche Lage hat, daß die Punkte ζ, z als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen, einwertig und stetig, für den Punkt $\zeta = z$ dagegen wird sie unstetig wie $\ln\frac{1}{\zeta - z}$. Verbindet man jetzt nach Einführung eines den Punkt z_0 mit dem Punkte ζ verbindenden Schnittes l_ζ die erste der beiden die Funktion $\underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{smallmatrix} z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right|$ definierenden Gleichungen mit der für jeden Punkt ζ von T_1'' geltenden Gleichung $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix} z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| = \underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix} \zeta\\ z\end{smallmatrix}\right| - \pi i$, die zweite mit der für jeden Punkt ζ von T_2'' geltenden Gleichung $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix} z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| = \underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix} \zeta\\ z\end{smallmatrix}\right| + \pi i$, so erkennt man weiter, daß für jede Lage des Punktes ζ die Gleichung:

$$\underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{smallmatrix} z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| = \underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix} \zeta\\ z\end{smallmatrix}\right| - \pi i$$

besteht, und damit zugleich, daß $\underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{smallmatrix} z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right|$ eine stetige Funktion des Punktepaares z, ζ ist, wenn nur die Punkte z, ζ als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen. Was endlich die, allgemein mit $\underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{smallmatrix} z\\ \zeta^+\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{smallmatrix} z\\ \zeta^-\end{smallmatrix}\right|$ zu bezeichnenden, Werte der Funktion $\underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{smallmatrix} z\\ \zeta\end{smallmatrix}\right|$ in je zwei entsprechenden Punkten ζ^+, ζ^- der Begrenzung von T'' betrifft, so soll hier nur das Folgende bemerkt werden. Liegt der Punkt z am Schnitte a_ν, und wird dann der von b_ν^- bis z sich erstreckende Teil des Schnittes a_ν mit a'_ν, der von z bis b_ν^+ sich erstreckende Teil mit a''_ν bezeichnet, so ist, der Definition der Funktion $\underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta \end{matrix}\right|$ zufolge,

$$\text{längs } a'_\nu \left\{ \underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta+ \end{matrix}\right| = \underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta- \end{matrix}\right|, \right.$$

$$\text{längs } a''_\nu \left\{ \underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta+ \end{matrix}\right| = \underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta- \end{matrix}\right| + 2\pi i. \right.$$

Liegt dagegen der Punkt z am Schnitte b_ν, und wird dann der von a_ν^- bis z sich erstreckende Teil des Schnittes b_ν mit b'_ν, der von z bis a_ν^+ sich erstreckende Teil mit b''_ν bezeichnet, so ist

$$\text{längs } b'_\nu \left\{ \underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta+ \end{matrix}\right| = \underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta- \end{matrix}\right| + \frac{2}{p}\, u_\nu^{\zeta} - 2u_\nu^{z} - \frac{2k_\nu}{p} + \frac{a_{\nu\nu}}{p}, \right.$$

$$\text{längs } b''_\nu \left\{ \underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta+ \end{matrix}\right| = \underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta- \end{matrix}\right| + \frac{2}{p}\, u_\nu^{\zeta-} - 2u_\nu^{z} - \frac{2k_\nu}{p} + \frac{a_{\nu\nu}}{p} - 2\pi i. \right.$$

Man grenze jetzt in T'' ein den Punkt z enthaltendes Flächenstück S dadurch ab, daß man die Endpunkte eines den Punkt z enthaltenden Teiles s des Linienzuges $b_\nu^+ a_\nu^- b_\nu^- a_\nu^+$ durch eine im Innern von T'' verlaufende Kurve verbindet (s. Fig. 4). Das abgegrenzte Flächenstück soll im übrigen so beschaffen sein, daß keine zwei seiner Punkte übereinander liegen. Weiter verstehe man unter ζ irgend einen von z verschiedenen Punkt des Flächenstücks S, bezeichne mit ϱ, φ die Polarkoordinaten des Punktes ζ in bezug auf ein Polarkoordinatensystem mit dem Punkt z als Pol und dem durch z in der positiven Richtung der X-Achse gezogenen Strahl als Polarachse und setze:

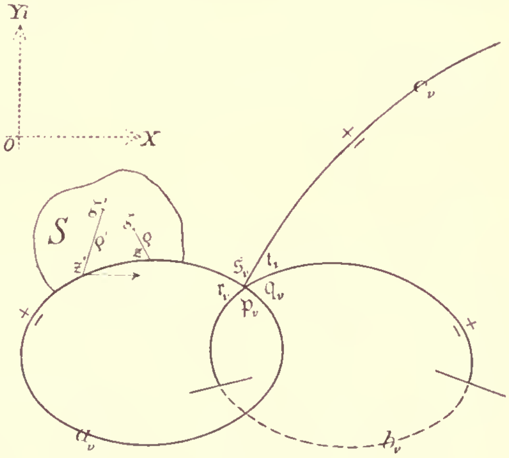


Fig. 4.

$$\widetilde{\ln}\, \frac{1}{\zeta - z} = -\ln \varrho - \varphi i, \quad \ln \frac{1}{z - \zeta} = -\ln \varrho - \varphi i + \pi i,$$

indem man zugleich die Bedingung stellt, daß bei stetig sich änderndem ζ, z die Größe φ sich von dem zu $\zeta = \zeta'$, $z = z'$ gehörigen, unter den zulässigen Werten beliebig gewählten Anfangswerte φ' aus ebenfalls stetig ändert, also nirgendwo um ein ganzes Vielfaches von 2π springt. Dementsprechend stellt dann der Ausdruck $\underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta \end{matrix}\right| - \widetilde{\ln}\, \frac{1}{\zeta - z}$ nicht nur bei festgehaltenem z eine in S allenthalben einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen ζ dar, die als Derivierte nach ζ die Größe $\underset{1}{P}\left|\begin{matrix} \zeta \\ z \end{matrix}\right| + \frac{1}{\zeta - z}$ besitzt, sondern auch, da die Beziehung:

$$\underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta \end{matrix}\right| - \widetilde{\ln}\,\frac{1}{\zeta - z} = \underset{0}{P}\left|\begin{matrix} \zeta \\ z \end{matrix}\right| - \widetilde{\ln}\,\frac{1}{z - \zeta}$$

besteht, bei festgehaltenem ζ eine einwertige und stetige Funktion der in ihrer Bewegung auf die Linie s beschränkten komplexen Veränderlichen z, die als Derivierte nach z die Größe $\underset{1}{P}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta \end{matrix}\right| - \frac{1}{\zeta - z}$ besitzt. Der in Rede stehende Ausdruck stellt daher auch eine einwertige und stetige Funktion der beiden komplexen Veränderlichen ζ, z dar, welche die Größe $\left(\underset{1}{P}\left|\begin{matrix} \zeta \\ z \end{matrix}\right| + \frac{1}{\zeta - z}\right) d\zeta + \left(\underset{1}{P}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta \end{matrix}\right| - \frac{1}{\zeta - z}\right) dz$ als vollständiges Differential besitzt, und er liefert demgemäß für $\zeta = z$ eine durch den Ausdruck:

$$\lim_{\zeta = z}\left(\underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta \end{matrix}\right| - \widetilde{\ln}\,\frac{1}{\zeta - z}\right)$$

dargestellte, einwertige und stetige Funktion der in ihrer Bewegung auf die Linie s beschränkten komplexen Veränderlichen z, welche die Größe:

$$\lim_{\zeta = z}\left(\underset{1}{P}\left|\begin{matrix} \zeta \\ z \end{matrix}\right| + \underset{1}{P}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta \end{matrix}\right|\right)$$

zur Derivierten hat. Diese Derivierte stimmt aber mit der Derivierten der früher definierten, ebenfalls längs s einwertigen und stetigen Funktion $F(z)$ überein, und es besteht daher für jeden Punkt z der Linie s die Gleichung:

$$F(z) = C + \lim_{\zeta = z}\left(\underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta \end{matrix}\right| - \widetilde{\ln}\,\frac{1}{\zeta - z}\right),$$

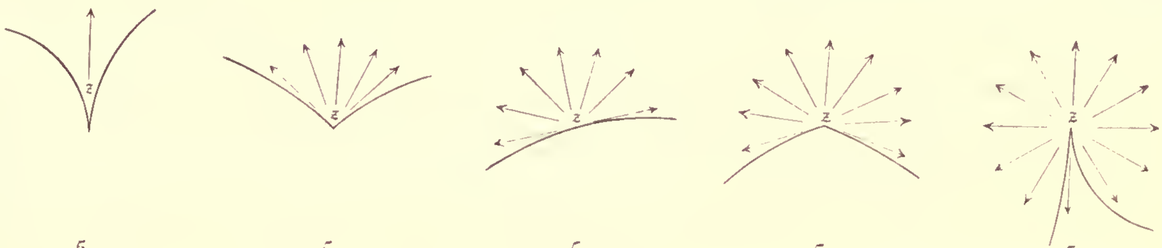
bei der C eine von z unabhängige Größe ist.

Der auf der rechten Seite der gewonnenen Gleichung stehende Limes ist unabhängig von der Art und Weise, wie ζ gegen z konvergiert, und man kann daher den Punkt ζ auch auf einer beliebig gewählten algebraischen Kurve gegen den Punkt z anrücken lassen. In diesem Falle hat der laterale Teil $-\varphi i$ von $\widetilde{\ln}\,\frac{1}{\zeta - z} = -\ln\varrho - \varphi i$ eine bestimmte Größe $-\tau i$ zur Grenze, und es kann dementsprechend die in Rede stehende Gleichung durch die Gleichung:

$$F(z) = C + \lim_{\zeta = z}\left(\underset{0}{\widetilde{P}}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta \end{matrix}\right| + \ln\varrho\right) + \tau i$$

ersetzt werden. Die Größe $\tau = \lim_{\zeta = z}\varphi$ ist durch die Richtung bestimmt, gegen welche die Richtung des Radiusvektors $\overline{z\zeta}$ konvergiert, wenn ζ auf der gewählten Bahnkurve gegen den Punkt z anrückt. Diese Richtung möge durch einen von z ausgehenden Speer markiert werden. Faßt man die Totalität der für das Anrücken von ζ möglichen

Bahnkurven ins Auge, so wird dadurch im Punkte z, wenn er nicht etwa die in Figur 5_a dargestellte Lage hat, ein Büschel von ∞^1 Speeren bestimmt (s. die Figuren 5_b, 5_c, 5_d, 5_e).



5_a. 5_b. 5_c. 5_d. 5_e.

Von diesen Speeren soll derjenige, welcher dem Anrücken eines auf s in positivem Sinne sich bewegenden Punktes ζ entspricht, als Anfangsspeer, derjenige, welcher dem Anrücken eines auf s in negativem Sinne sich bewegenden Punktes ζ entspricht, als Endspeer bezeichnet werden. Dreht sich ein Speer, ohne aus dem Büschel herauszutreten, um einen bestimmten, in Bogenmaß gemessenen, positiven oder negativen Winkel, so ändert sich die Größe τ um denselben Betrag. Demnach wird τ stets eine negative Änderung $-\varepsilon$ $(0<\varepsilon\overline{<}2\pi)$ erfahren, wenn ein Speer sich vom Anfangsspeer aus über die Speere des Büschels zum Endspeer dreht. Der durch Figur 5_a dargestellte besondere Fall entspricht dem Werte $\varepsilon = 0$. Nachdem so der zu einem Punkte z der Linie s gehörige Büschel von Speeren hinreichend charakterisiert ist, ordne man jedem Punkte z der Linie s in der angegebenen Weise einen Büschel von Speeren zu. Innerhalb der dadurch zur Linie s bestimmten Mannigfaltigkeit von ∞^2 Speeren läßt sich jeder Speer in jeden anderen durch stetige Lagenänderung überführen; auch ist, wenn innerhalb dieser Mannigfaltigkeit ein Speer irgendwie seine Lage ändert, die dieser Änderung entsprechende Änderung der Größe τ immer gleich der Gesamtdrehung des Speeres.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß die Funktion $F(z)$ sich für jeden der positiven oder der negativen Seite von a_ν oder b_ν angehörigen Punkt z, nachdem man den Wert von $\widetilde{\ln}\frac{1}{\zeta - z}$ passend bestimmt hat, durch eine Gleichung von der Form:

$$F(z) = C + \lim_{\zeta = z}\left(\tilde{P}_{0}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta \end{matrix}\right| - \widetilde{\ln}\frac{1}{\zeta - z}\right)$$

darstellen läßt, wobei C eine von z unabhängige Größe ist.

Zu dem Ende zerlege man das aus b_ν^+, a_ν^-, b_ν^-, a_ν^+ bestehende, von $\mathfrak{t}_\nu$ über $\mathfrak{r}_\nu$, $\mathfrak{p}_\nu$, $\mathfrak{q}_\nu$ bis $\mathfrak{z}_\nu$ (s. Fig. 6) sich erstreckende Stück der Begrenzung von T'' in Teile $s_1, s_2, \cdots, s_m$, die so klein seien, daß sich zu ihnen Flächenstücke $S_1, S_2, \cdots, S_m$ von der früher beschriebenen Art abgrenzen lassen. Dabei sollen je zwei aufeinander folgende Flächenstücke $S_{\mu-1}$, S_μ längs einer beliebig kleinen Linie $l_{\mu-1,\mu}$, welche von dem den

Linien $s_{\mu-1}$, s_μ gemeinsamen, mit $z_{\mu-1,\mu}$ zu bezeichnenden, Punkte ausgeht, aneinander stoßen. Es möge nun allgemein ein in S_μ frei beweglicher Punkt mit ζ_μ, ein in seiner Bewegung auf die Linie $l_{\mu-1,\mu}$ beschränkter Punkt mit $\zeta_{\mu-1,\mu}$, endlich ein in seiner Bewegung auf die Linie s_μ beschränkter Punkt mit z_μ bezeichnet werden. Die Funktion $F(z)$ läßt sich dann auf Grund des vorher erhaltenen Resultats für jeden Punkt z_1 der Linie s_1 durch eine Gleichung von der Form:

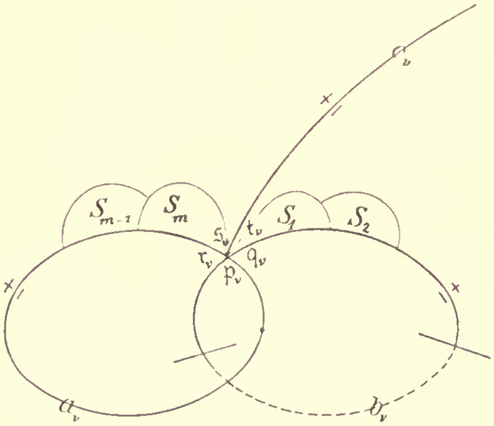


Fig. 6.

$$F(z_1) = C_1 + \lim_{\zeta_1 = z_1} \left(\underset{0}{\widetilde{P}} \Big|_{\zeta_1}^{z_1} - \widetilde{\ln}\, \frac{1}{\zeta_1 - z_1} \right),$$

für jeden Punkt z_2 der Linie s_2 durch eine Gleichung von der Form:

$$F(z_2) = C_2 + \lim_{\zeta_2 = z_2} \left(\underset{0}{\widetilde{P}} \Big|_{\zeta_2}^{z_2} - \widetilde{\ln}\, \frac{1}{\zeta_2 - z_2} \right)$$

darstellen, wobei C_1 eine von z_1, C_2 eine von z_2 unabhängige Größe ist. Läßt man nun die Punkte z_1, z_2 mit dem Punkte $z_{1,2}$, die Punkte ζ_1, ζ_2 mit dem Punkte $\zeta_{1,2}$ zusammenfallen, so wird $F(z_1) = F(z_2)$, $\underset{0}{\widetilde{P}} \Big|_{\zeta_1}^{z_1} = \underset{0}{\widetilde{P}} \Big|_{\zeta_2}^{z_2}$; dagegen braucht der Wert von $\widetilde{\ln}\, \frac{1}{\zeta_1 - z_1}$ sich mit dem unabhängig von ihm definierten Werte von $\widetilde{\ln}\, \frac{1}{\zeta_2 - z_2}$ nicht zu decken, sondern er kann sich davon um ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden. Daraus folgt, daß sich die Konstanten C_1, C_2 auch nur um ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden können, und man erkennt zugleich, daß man den Anfangswert des in der zweiten Gleichung vorkommenden $\widetilde{\ln}\, \frac{1}{\zeta_2 - z_2}$ so bestimmen kann, daß $C_2 = C_1$ wird, oder, was dasselbe, daß man die Funktion $F(z)$ für jeden Punkt z der Linie $s_1 + s_2$ durch eine Gleichung von der Form:

$$F(z) = C + \lim_{\zeta = z} \left(\underset{0}{\widetilde{P}} \Big|_{\zeta}^{z} - \widetilde{\ln}\, \frac{1}{\zeta - z} \right)$$

darstellen kann, wobei C eine längs der ganzen Linie $s_1 + s_2$ konstante Größe ist. Erweitert man nun die Fläche $S_1 + S_2$ durch sukzessives Hinzunehmen der Flächenstücke $S_3, S_4, \cdots, S_m$ zu der Fläche $S_1 + S_2 + \cdots + S_m$ und wendet jedesmal die eben beim Übergang von S_1 zu $S_1 + S_2$ benutzte Schlußweise an, so erkennt man schließlich, daß die Funktion $F(z)$ sich für jeden Punkt z der Linie $s_1 + s_2 + \cdots + s_m$ oder, was dasselbe, für jeden der positiven oder der negativen Seite von a_ν oder b_ν angehörigen Punkt z durch eine Gleichung von der Form:

$$F(z) = C + \lim_{\zeta = z} \left(\widetilde{P} \Big|_{0}^{z} \Big|_{\zeta} - \widetilde{\ln} \frac{1}{\zeta - z} \right)$$

darstellen läßt, wobei C eine längs $b_\nu^+ \, a_\nu^- \, b_\nu^- \, a_\nu^+$ konstante Größe bezeichnet, und mit Rücksicht auf die Entstehung dieser Gleichung daran festzuhalten ist, daß der Punkt ζ, wenn z auf s_μ $(\mu = 1, 2, \cdots, m)$ liegt, in seiner Bewegung auf das Flächenstück S_μ beschränkt ist.

Gehört der Punkt z der Linie s_μ, der Punkt ζ also dem Flächenstück S_μ an, und bringt man alsdann die soeben gewonnene Gleichung, nachdem man $\widetilde{\ln} \frac{1}{\zeta - z} = - \ln \varrho - \varphi i$ gesetzt hat, in die Form:

$$F(z) = C + \lim_{\zeta = z} \left(\widetilde{P} \Big|_{0}^{z} \Big|_{\zeta} + \ln \varrho \right) + \tau i$$

— wobei $\tau = \lim\limits_{\zeta = z} \varphi$ durch die Richtung bestimmt ist, gegen welche die Richtung des Radiusvektors $\overline{z\zeta}$ konvergiert, wenn ζ auf irgend einer Bahnkurve gegen den Punkt z anrückt —, so kann man in derselben Weise, wie es bei der vorhergehenden Untersuchung geschehen ist, jedem Punkte z von s_μ $(\mu = 1, 2, \cdots, p)$ und damit auch jedem der positiven oder der negativen Seite von a_ν oder b_ν angehörigen Punkte z einen die verschiedenen Grenzrichtungen markierenden Büschel von Speeren zuordnen. Zu dem Punkte $z_{\mu-1,\mu}$ $(\mu = 2, 3, \cdots, m)$ ergeben sich, da man diesen Punkt sowohl als Punkt der Linie $s_{\mu-1}$ wie als Punkt der Linie s_μ ansehen kann, zunächst zwei, einen gemeinsamen Speer besitzende, Büschel von Speeren; der durch Zusammenfassen dieser beiden Büschel entstehende Büschel ist als der zum Punkte $z_{\mu-1,\mu}$ gehörige Büschel zu betrachten. Auch für einen solchen Büschel gilt der Satz, daß bei der Drehung eines Speeres innerhalb des Büschels die Größe τ eine dieser Drehung gleiche Änderung erfährt. Innerhalb der jetzt zu dem Linienzug $b_\nu^+ \, a_\nu^- \, b_\nu^- \, a_\nu^+$ bestimmten Mannigfaltigkeit von ∞^2 Speeren läßt sich jeder Speer in jeden anderen durch stetige Lagenänderung überführen; auch ist, wenn innerhalb dieser Mannigfaltigkeit ein Speer irgendwie seine Lage ändert, die dieser Änderung entsprechende Änderung der Größe τ immer gleich der Gesamtdrehung des Speeres.

Auf Grund der zuletzt gewonnenen, die Funktion $F(z)$ für jeden der positiven oder der negativen Seite von a_ν oder b_ν angehörigen Punkt darstellenden Gleichung läßt sich jetzt das Verhalten der Funktion $F(z)$ sowohl längs des Schnittes a_ν wie längs des Schnittes b_ν in folgender Weise bestimmen.

Man verstehe unter z^+, z^- irgend ein zum Schnitt a_ν gehöriges Paar entsprechender Punkte, unter ζ^+, ζ^- ein zweites Paar entsprechender Begrenzungspunkte, welches zu dem von $z^\pm$ bis b_ν^+ sich erstreckenden, ebenso wie früher mit a_ν'' zu bezeichnenden, Teil des Schnittes a_ν gehört. Bezeichnet man dann denjenigen Wert von τ, welcher dem zum Punkte z^+ gehörigen Endspeer entspricht, mit τ_e^+, denjenigen, welcher dem zum Punkte z^- gehörigen Anfangsspeer entspricht, mit τ_a^-, so lassen sich die Werte $F(z)^+$, $F(z)^-$ der Funktion $F(z)$ für die Punkte z^+, z^- darstellen durch die Gleichungen:

$$F(z)^+ = C + \lim_{\zeta^+ = z^+}\left(\underset{0}{\widetilde{P}}\Big|_{\zeta^+}^{z^+}\Big| + \ln\varrho\right) + \tau_e^+ i,$$

$$F(z)^- = C + \lim_{\zeta^- = z^-}\left(\underset{0}{\widetilde{P}}\Big|_{\zeta^-}^{z^-}\Big| + \ln\varrho\right) + \tau_a^- i.$$

Hieraus erhält man durch Subtraktion, indem man beachtet, daß nach früher Bewiesenem

$$\text{längs } a_\nu''\left\{\underset{0}{\widetilde{P}}\Big|_{\zeta^+}^{z^+}\Big| = \underset{0}{\widetilde{P}}\Big|_{\zeta^-}^{z^+}\Big| + 2\pi i\right.$$

ist, zunächst die Gleichung:

$$F(z)^+ - F(z)^- = \lim_{\zeta = z}\left(\underset{0}{\widetilde{P}}\Big|_{\zeta^-}^{z^+}\Big| - \underset{0}{\widetilde{P}}\Big|_{\zeta^-}^{z^-}\Big|\right) + (\tau_e^+ - \tau_a^- + 2\pi)i$$

und weiter dann, da

$$\underset{0}{\widetilde{P}}\Big|_{\zeta^-}^{z^+}\Big| - \underset{0}{\widetilde{P}}\Big|_{\zeta^-}^{z^-}\Big| = \underset{0}{P}\Big|_{z^+}^{\zeta^-}\Big| - \underset{0}{P}\Big|_{z^-}^{\zeta^-}\Big| = 0$$

ist, die Gleichung:

$$F(z)^+ - F(z)^- = (\tau_e^+ - \tau_a^- + 2\pi)i.$$

Die Differenz $\tau_e^+ - \tau_a^-$ bleibt ungeändert, wenn man das Punktepaar z^+, z^- durch Verschiebung längs des Schnittes a_ν in das Punktepaar $\mathfrak{q}_\nu$, $\mathfrak{p}_\nu$ überführt; es ist also $\tau_e^+ - \tau_a^- = \tau_e^{\mathfrak{q}_\nu} - \tau_a^{\mathfrak{p}_\nu}$, wobei $\tau_e^{\mathfrak{q}_\nu}$ denjenigen Wert von τ bezeichnet, welcher dem zum Punkte $\mathfrak{q}_\nu$ gehörigen Endspeer entspricht, $\tau_a^{\mathfrak{p}_\nu}$ denjenigen, welcher dem zum Punkte $\mathfrak{p}_\nu$ gehörigen Anfangsspeer entspricht. Diese letztere Differenz ist aber gleich der Gesamtdrehung eines Speeres, welcher innerhalb der zur Linie b_ν^- gehörigen Speermannigfaltigkeit von dem Anfangsspeer des Punktes $\mathfrak{p}_\nu$ in den, mit ihm gleichgerichteten, Endspeer des Punktes $\mathfrak{q}_\nu$ übergeführt wird, und sie ist daher ein nur von dem Verlauf des Schnittes b_ν abhängiges, mit $\mathfrak{g}_\nu 2\pi$ zu bezeichnendes, ganzes Vielfaches von 2π. Es ergibt sich so schließlich, daß

$$\text{längs } a_\nu\left\{F(z)^+ = F(z)^- + (\mathfrak{g}_\nu + 1)2\pi i\right.$$

ist.

Um das Verhalten der Funktion $F(z)$ längs des Schnittes b_ν zu bestimmen, verstehe man jetzt unter z^+, z^- irgend ein zu diesem Schnitte gehöriges Paar entsprechender Punkte, unter ζ^+, ζ^- ein zweites Paar entsprechender Begrenzungspunkte, welches zu dem von $z^\pm$ bis a_ν^+ sich erstreckenden, ebenso wie früher mit b_ν'' zu bezeichnenden, Teil des Schnittes b_ν gehört. Bezeichnet man dann denjenigen Wert von τ, welcher dem zum Punkte z^+ gehörigen Anfangsspeer entspricht, mit τ_a^+, denjenigen, welcher dem zum

Punkte z^- gehörigen Endspeer entspricht, mit τ_e^-, so lassen sich die Werte $F(z)^+$, $F(z)^-$ der Funktion $F(z)$ für die Punkte z^+, z^- darstellen durch die Gleichungen:

$$F(z)^+ = C + \lim_{\zeta^+ = z^+}\left(\widetilde{P}\Big|_0^{z^+}\Big|_{\zeta^+} + \ln\varrho\right) + \tau_a^+ i,$$

$$F(z)^- = C + \lim_{\zeta^- = z^-}\left(\widetilde{P}\Big|_0^{z^-}\Big|_{\zeta^-} + \ln\varrho\right) + \tau_e^- i.$$

Hieraus erhält man durch Subtraktion, indem man beachtet, daß nach früher Bewiesenem

$$\text{längs } b_\nu''\left\{\widetilde{P}\Big|_0^{z^+}\Big|_{\zeta^+} = \widetilde{P}\Big|_0^{z^+}\Big|_{\zeta^-} + \frac{2}{p}\,u_\nu^{\overleftarrow{z^-}} - 2u_\nu^{z^+} - \frac{2k_\nu}{p} + \frac{a_{\nu\nu}}{p} - 2\pi i\right.$$

ist, zunächst die Gleichung:

$$F(z)^+ - F(z)^- = \lim_{\zeta = z}\left(\widetilde{P}\Big|_0^{z^+}\Big|_{\zeta} - \widetilde{P}\Big|_0^{z^-}\Big|_{\zeta}\right) + \frac{2}{p}\,u_\nu^{z^-} - 2u_\nu^{z^+} - \frac{2k_\nu}{p} + \frac{a_{\nu\nu}}{p} - (\tau_e^- - \tau_a^+ + 2\pi)i$$

und weiter dann, da

$$\widetilde{P}\Big|_0^{z^+}\Big|_{\zeta^-} - \widetilde{P}\Big|_0^{z^-}\Big|_{\zeta^-} = P\Big|_0^{\zeta^-}\Big|_{z^+} - P\Big|_0^{\zeta^-}\Big|_{z^-} = \frac{2}{p}\,u_\nu^{z^-} - 2u_\nu^{\overleftarrow{z^-}} - \frac{2k_\nu}{p} + \frac{a_{\nu\nu}}{p},$$

auch $u_\nu^{z^+} = u_\nu^{z^-} + a_{\nu\nu}$ ist, die Gleichung:

$$F(z)^+ - F(z)^- = -4\,\frac{p-1}{p}\,u_\nu^{z^-} - \frac{4k_\nu}{p} - 2\,\frac{p-1}{p}\,a_{\nu\nu} - (\tau_e^- - \tau_a^+ + 2\pi)i.$$

Die Differenz $\tau_e^- - \tau_a^+$ bleibt ungeändert, wenn man das Punktepaar z^+, z^- durch Verschiebung längs des Schnittes b_ν in das Punktepaar $\mathfrak{r}_\nu$, $\mathfrak{p}_\nu$ überführt; es ist also $\tau_e^- - \tau_a^+ = \tau_e^{\mathfrak{p}_\nu} - \tau_a^{\mathfrak{r}_\nu}$, wobei $\tau_e^{\mathfrak{p}_\nu}$ denjenigen Wert von τ bezeichnet, welcher dem zum Punkte $\mathfrak{p}_\nu$ gehörigen Endspeer entspricht, $\tau_a^{\mathfrak{r}_\nu}$ denjenigen, welcher dem zum Punkte $\mathfrak{r}_\nu$ gehörigen Anfangsspeer entspricht. Diese letztere Differenz ist aber gleich der Gesamtdrehung eines Speeres, welcher innerhalb der zur Linie a_ν^- gehörigen Speermannigfaltigkeit von dem Anfangsspeer des Punktes $\mathfrak{r}_\nu$ in den, mit ihm gleichgerichteten, Endspeer des Punktes $\mathfrak{p}_\nu$ übergeführt wird, und sie ist daher ein nur von dem Verlauf des Schnittes a_ν abhängiges, mit $\mathfrak{h}_\nu 2\pi$ zu bezeichnendes, ganzes Vielfaches von 2π. Es ergibt sich so schließlich, daß

$$\text{längs } b_\nu\left\{F(z)^+ = F(z)^- - 4\,\frac{p-1}{p}\,u_\nu^{z^-} - \frac{4k_\nu}{p} - 2\,\frac{p-1}{p}\,a_{\nu\nu} - (\mathfrak{h}_\nu + 1)2\pi i\right.$$

ist.

Nachdem jetzt das Verhalten der Funktion $F(z)$ längs der Schnitte a_ν, b_ν von neuem bestimmt ist, vergleiche man die gewonnenen Relationen mit den unter (S.) stehenden, dieses Verhalten ebenfalls charakterisierenden ursprünglichen Relationen.

Es ergeben sich dann für die dort vorkommenden, auf Seite 123 durch die Gleichungen:

$$(\mathrm{S}'.)\qquad \begin{aligned}&\mathfrak{A}_\nu = c_\nu \pi i,\\ &\mathfrak{B}_\nu = 2\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}(\mu_\varrho - 1)u_\nu^{\alpha_\varrho} - 2\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}(\iota_\varkappa+1)u_\nu^{\infty_\varkappa} + (2p-2)\left(\frac{2k_\nu}{p} - \frac{a_{\nu\nu}}{p}\right) + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} c_\sigma a_{\sigma\nu}\end{aligned}$$

bestimmten Konstanten $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ hier die Gleichungen:

$$(\mathrm{S}''.)\qquad \begin{aligned}&\mathfrak{A}_\nu = (\mathfrak{g}_\nu + 1)2\pi i,\\ &\mathfrak{B}_\nu = -\frac{4k_\nu}{p} - 2\frac{p-1}{p}a_{\nu\nu} - (\mathfrak{h}_\nu+1)2\pi i.\end{aligned}$$

Leitet man nun aus den beiden jetzt für $\mathfrak{A}_\nu$ vorhandenen Darstellungen die, die bisher noch nicht näher bekannten Größen c bestimmende, Relation:

$$c_\nu = 2(\mathfrak{g}_\nu + 1) \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\cdots,p)}$$

ab, trägt die so für die Größen c gewonnenen Werte in die zweite unter (S'.) stehende Gleichung ein und setzt alsdann die beiden für $\mathfrak{B}_\nu$ vorhandenen Ausdrücke einander gleich, so erhält man schließlich die für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ geltende Gleichung:

$$2k_\nu = -\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}(\mu_\varrho - 1)u_\nu^{\alpha_\varrho} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}(\iota_\varkappa+1)u_\nu^{\infty_\varkappa} - \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p}(\mathfrak{g}_\sigma+1)a_{\sigma\nu} - (\mathfrak{h}_\nu+1)\pi i,$$

welche die Art der Abhängigkeit der Konstante $2k_\nu$ ${\scriptstyle(\nu=1,2,\cdots,p)}$ von der Beschaffenheit der vorgegebenen $(2p+1)$-fach zusammenhängenden Fläche T und von dem Charakter des zur Verwandlung dieser Fläche in eine einfach zusammenhängende Fläche T'' benutzten Querschnittsystems deutlich erkennen läßt.

9.

Es soll jetzt eine allgemeine Formel abgeleitet werden, welche die n^{te} Derivierte einer beliebigen linearen Verbindung von zur Charakteristik $\binom{1\cdots 1}{1\cdots 1}$ gehörigen Elementarfunktionen durch ebensolche Elementarfunktionen darzustellen gestattet.

Man lege wieder die ursprüngliche Fläche T'' zu Grunde, bezeichne die s Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ in der vorliegenden Reihenfolge mit $\eta_1, \cdots, \eta_s$ und bilde zur Fläche T'' mit Hilfe von irgend s den Bedingungen $m'_{q+\varrho} \geqq n\mu_\varrho - 1$, ${\scriptstyle \varrho=1,2,\cdots,r}$, genügenden ganzen Zahlen $m'_1, \cdots, m'_s$ und irgend welchen Konstanten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{A}$, C die Funktion:

$$\Omega(z) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\left(\mathfrak{L}_\sigma \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta_\sigma\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_{\sigma 1}\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta_\sigma\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m'_\sigma}\underset{m'_\sigma}{P}\left|\begin{matrix}\eta_\sigma\\ z\end{matrix}\right|\right) + \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\mathfrak{A}_\varrho u_\varrho|z| + C.$$

Zu derselben Fläche T'' definiere man dann, indem man unter a irgend einen im

Innern dieser Fläche gelegenen Punkt versteht, eine zweite, mit $\overline{\Omega}(z)$ zu bezeichnende, Funktion durch die Gleichung:

$$\overline{\Omega}(z) = \frac{d^n P\left|\begin{smallmatrix} a \\ z \end{smallmatrix}\right|_0}{d z^n},$$

wähle die Radien der im ersten Teile, in Art. 5 des sechsten Abschnittes, zur Abgrenzung der Fläche T^* benutzten Kreislinien $k'_1, \cdots, k'_s$ so, daß auch die Fläche T^* den Punkt a in ihrem Innern enthält, und betrachte das über die Begrenzung $\mathfrak{R}$ von T^* in positiver Richtung erstreckte Integral:

$$J = \int_{\mathfrak{R}}^{+} \Omega \frac{d\overline{\Omega}}{dz} dz.$$

Die hinter dem Integralzeichen stehende Funktion $\Omega \frac{d\overline{\Omega}}{dz}$ ist eine in der Fläche T^* einwertige und mit Ausnahme des Punktes a auch stetige Funktion der komplexen Veränderlichen z. Infolgedessen ist das in Rede stehende Integral auch gleich dem auf den Punkt a sich beziehenden Integral $\int_{(a)}^{+} \Omega \frac{d\overline{\Omega}}{dz} dz$ oder auch, da die Funktionen $\Omega(z)$ und $\frac{d\overline{\Omega}(z)}{dz} - (-1)^{n+1} \frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$ für den Punkt a stetig sind, gleich dem den Wert $(-1)^{n+1} 2\pi i \frac{d^n \Omega(a)}{da^n}$ besitzenden Integrale $(-1)^{n+1} n! \int_{(a)}^{+} \frac{\Omega(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$. Es besteht demnach die Gleichung:

$$J = (-1)^{n+1} 2\pi i \frac{d^n \Omega(a)}{da^n}.$$

Man zerlege nun das Integral J in die den einzelnen Stücken der Begrenzung $\mathfrak{R}$ entsprechenden Teile und bezeichne den Komplex der auf die Schnitte a, b, c, l' sich beziehenden Integrale, nachdem man zuvor noch bei jedem dieser Schnitte die auf die positive und die auf die negative Seite desselben sich beziehenden Integrale in der in dem oben genannten Artikel beschriebenen Weise vereinigt hat, mit J_1, den Komplex der auf die Kreislinien k' sich beziehenden Integrale mit J_2. Es ergeben sich dann zunächst die Gleichungen:

$$J = J_1 + J_2, \quad J_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int_{[a_\nu^+, b_\nu^+, c_\nu^+]}^{+} \{\Omega^+ d\overline{\Omega}^+ - \Omega^- d\overline{\Omega}^-\} + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \int_{l'^+_{\varkappa_\sigma}}^{+} \{\Omega^+ d\overline{\Omega}^+ - \Omega^- d\overline{\Omega}^-\}, \quad J_2 = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \int_{k'_\sigma}^{+} \Omega\, d\overline{\Omega}.$$

Um die mit J_1 bezeichnete Integralsumme, bei der $d\overline{\Omega}^+ = \frac{d\overline{\Omega}^+}{dz} dz$, $d\overline{\Omega}^- = \frac{d\overline{\Omega}^-}{dz} dz$ ist, auszuwerten, beachte man, daß für $\nu = 1, 2, \cdots, p$; $\sigma = 1, 2, \cdots, s$:

$$(\mathrm{S.})\quad \begin{array}{ll} \text{längs } a_\nu\ \{\Omega^+ = \Omega^- + \mathfrak{A}_\nu, & \overline{\Omega}^+ = \overline{\Omega}^-, \\ \text{längs } b_\nu\ \{\Omega^+ = \Omega^- + \frac{2}{p}\,\mathfrak{S}\,u_\nu^{z-} + \mathfrak{B}_\nu, & \overline{\Omega}^+ = \overline{\Omega}^- + \frac{2}{p}\,\frac{d^n u_\nu}{dz^n}, \\ \text{längs } c_\nu\ \{\Omega^+ = \Omega^- - \frac{2\pi i}{p}\,\mathfrak{S}, & \overline{\Omega}^+ = \overline{\Omega}^-, \\ \text{längs } l'_{\varkappa_\sigma}\ \{\Omega^+ = \Omega^- + 2\pi i\,\mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma}, & \overline{\Omega}^+ = \overline{\Omega}^- \end{array}$$

ist — wobei zur Abkürzung

$$\mathfrak{S} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma$$

gesetzt ist, und der Wert der Konstante $\mathfrak{B}_\nu$, wenn man noch zur Erzielung einer einheitlichen Schreibweise die Größe $-2u_\nu^{\eta} - \frac{2k_\nu}{p} + \frac{a_{\nu\nu}}{p}$ wieder mit $\underset{0}{\mathfrak{B}_\nu^{(\eta)}}$ bezeichnet, durch die Gleichung:

$$\mathfrak{B}_\nu = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\Big(\mathfrak{L}_\sigma \underset{0}{\mathfrak{B}_\nu^{(\eta)}} + \mathfrak{L}_{\sigma 1} \underset{1}{\mathfrak{B}_\nu^{(\eta)}} + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m'_\sigma} \underset{m'_\sigma}{\mathfrak{B}_\nu^{(\eta)}}\Big) + \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{A}_\varrho a_{\varrho\nu}$$

geliefert wird — und daß dementsprechend für $\nu = 1, 2, \cdots, p$; $\sigma = 1, 2, \cdots, s$:

$$\begin{array}{l} \text{längs } a_\nu\ \{\Omega^+ d\overline{\Omega}^+ = \Omega^- d\overline{\Omega}^- + \mathfrak{A}_\nu d\overline{\Omega}^+, \\ \text{längs } b_\nu\ \{\Omega^+ d\overline{\Omega}^+ = \Omega^- d\overline{\Omega}^- + \mathfrak{B}_\nu d\overline{\Omega}^+ + \frac{2}{p}\,\mathfrak{S}\,u_\nu^{z-}\,d\overline{\Omega}^+ + \frac{2}{p}\,\Omega^- d\left(\frac{d^n u_\nu}{dz^n}\right), \\ \text{längs } c_\nu\ \{\Omega^+ d\overline{\Omega}^+ = \Omega^- d\overline{\Omega}^- - \frac{2\pi i}{p}\,\mathfrak{S}\,d\overline{\Omega}^+, \\ \text{längs } l'_{\varkappa_\sigma}\ \{\Omega^+ d\overline{\Omega}^+ = \Omega^- d\overline{\Omega}^- + 2\pi i\,\mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma} d\overline{\Omega}^+ \end{array}$$

ist. Reduziert man alsdann mit Hilfe dieser letzteren Relationen die auf der rechten Seite der für J_1 gewonnenen Gleichung zwischen den geschweiften Klammern stehenden Ausdrücke, so erhält man für J_1 zunächst die Gleichung:

$$\begin{aligned} J_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\Big\{\mathfrak{A}_\nu \int_{a_\nu^+}^{+} d\overline{\Omega}^+ + \mathfrak{B}_\nu \int_{b_\nu^+}^{+} d\overline{\Omega}^+ - \frac{2\pi i}{p}\,\mathfrak{S}\int_{c_\nu^+}^{+} d\overline{\Omega}^+\Big\} \\ + \frac{2}{p}\,\mathfrak{S}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int_{b_\nu^+}^{+} u_\nu^{z-}\,d\overline{\Omega}^+ + \frac{2}{p}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int_{b_\nu^+}^{+} \Omega^- d\left(\frac{d^n u_\nu}{dz^n}\right) + 2\pi i\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma}\int_{l'^+_{\varkappa_\sigma}}^{+} d\overline{\Omega}^+ \end{aligned}$$

und schließlich, indem man die mit Hilfe der Relationen (S.) sich ergebenden Gleichungen:

$$\int\limits_{a_\nu^+}^{+} d\overline{\Omega}^+ = \overline{\Omega}_{\mathfrak{z}_\nu} - \overline{\Omega}_{\mathfrak{q}_\nu} = \frac{2}{p}\left(\frac{d^n u_\nu}{dz^n}\right)_{\mathfrak{p}_\nu},$$

$$\int\limits_{b_\nu^+}^{+} d\overline{\Omega}^+ = \overline{\Omega}_{\mathfrak{r}_\nu} - \overline{\Omega}_{\mathfrak{t}_\nu} = 0,$$

$$\int\limits_{c_\nu^+}^{+} d\overline{\Omega}^+ = \overline{\Omega}_{\mathfrak{k}_{\nu+1}} - \overline{\Omega}_{\mathfrak{z}_\nu} = \overline{\Omega}_{\mathfrak{k}_1} - \overline{\Omega}_{\mathfrak{r}_\nu},$$

$$\int\limits_{l_{\varkappa_\sigma}'^+}^{+} d\overline{\Omega}^+ = \overline{\Omega}_{\mathfrak{l}_{\sigma+1}} - \overline{\Omega}_{\mathfrak{n}_{\varkappa_\sigma}} = \overline{\Omega}_{\mathfrak{k}_1} - \overline{\Omega}_{\mathfrak{m}_{\varkappa_\sigma}},$$

— bei denen die für $\nu = p$, $\sigma = s$ auftretenden Zeichen $\mathfrak{k}_{p+1}$, $\mathfrak{l}_{s+1}$ als gleichbedeutend mit den Zeichen $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{k}_1$ beziehungsweise anzusehen sind — benutzt und beachtet, daß

$$\int\limits_{b_\nu^+}^{+} u_\nu^{z-} d\overline{\Omega}^+ = \int\limits_{b_\nu^+}^{+} u_\nu^{z+} d\overline{\Omega}^+ - a_{\nu\nu}\int\limits_{b_\nu^+}^{+} d\overline{\Omega}^+ = u_\nu^{\mathfrak{r}_\nu}\overline{\Omega}_{\mathfrak{r}_\nu} - u_\nu^{\mathfrak{t}_\nu}\overline{\Omega}_{\mathfrak{t}_\nu} - \int\limits_{b_\nu^+}^{+} \overline{\Omega}^+ du_\nu^z$$

$$= -\pi i\,\overline{\Omega}_{\mathfrak{r}_\nu} - \int\limits_{b_\nu^+}^{+} \overline{\Omega}\, du_\nu^z,$$

$$\int\limits_{b_\nu^+}^{+} \Omega^- d\left(\frac{d^n u_\nu}{dz^n}\right) = -\int\limits_{b_\nu^-}^{+} \Omega^- d\left(\frac{d^n u_\nu}{dz^n}\right) = \Omega_{\mathfrak{p}_\nu}\left(\frac{d^n u_\nu}{dz^n}\right)_{\mathfrak{p}_\nu} - \Omega_{\mathfrak{q}_\nu}\left(\frac{d^n u_\nu}{dz^n}\right)_{\mathfrak{q}_\nu} + \int\limits_{b_\nu^-}^{+} \frac{d\Omega^-}{dz}\,\frac{d^n u_\nu^z}{dz^n}\,dz$$

$$= -\mathfrak{A}_\nu\left(\frac{d^n u_\nu}{dz^n}\right)_{\mathfrak{p}_\nu} + (-1)^{n+1}\int\limits_{b_\nu^-}^{+} \frac{d^n\Omega^-}{dz^n}\, du_\nu^z$$

$$= -\mathfrak{A}_\nu\left(\frac{d^n u_\nu}{dz^n}\right)_{\mathfrak{p}_\nu} + (-1)^n\int\limits_{b_\nu^+}^{+} \frac{d^n\Omega^+}{dz^n}\, du_\nu^z + (-1)^{n+1}\frac{2}{p}\,\mathfrak{S}\int\limits_{b_\nu^+}^{+} \frac{d^n u_\nu}{dz^n}\, du_\nu^z$$

ist, die Gleichung:

$$J_1 = -\frac{2}{p}\,\mathfrak{S}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int\limits_{b_\nu^+}^{+} \overline{\Omega}\, du_\nu^z + (-1)^n\frac{2}{p}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int\limits_{b_\nu^+}^{+} \frac{d^n\Omega}{dz^n}\, du_\nu^z$$

$$+ (-1)^{n+1}\frac{4}{p^2}\,\mathfrak{S}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int\limits_{b_\nu^+}^{+} \frac{d^n u_\nu}{dz^n}\, du_\nu^z - 2\pi i\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\mathfrak{L}_{\varkappa_\sigma}\overline{\Omega}_{\mathfrak{m}_{\varkappa_\sigma}}.$$

Zur Auswertung der mit J_2 bezeichneten Integralsumme beachte man, daß sich die Funktionen Ω, $\overline{\Omega}$ für das Gebiet des Punktes η_σ $(\sigma=1,2,\cdots,s)$ durch Gleichungen von der Form:

$$(\mathrm{R.})\quad \begin{aligned} \Omega(z) &= \mathfrak{L}_\sigma \ln\frac{1}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{z_\sigma} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m'_\sigma}}{z_\sigma^{m'_\sigma}} + c_{\sigma 0} + c_{\sigma 1} z_\sigma + c_{\sigma 2} z_\sigma^2 + \cdots + c_{\sigma n} z_\sigma^n + \cdots, \\ \overline{\Omega}(z) &= \overline{\mathfrak{L}}_\sigma \ln\frac{1}{z_\sigma} + \frac{\overline{\mathfrak{L}}_{\sigma 1}}{z_\sigma} + \frac{\overline{\mathfrak{L}}_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \cdots + \frac{\overline{\mathfrak{L}}_{\sigma m'_\sigma}}{z_\sigma^{m'_\sigma}} + \bar{c}_{\sigma 0} + \bar{c}_{\sigma 1} z_\sigma + \bar{c}_{\sigma 2} z_\sigma^2 + \cdots + \bar{c}_{\sigma n} z_\sigma^n + \cdots \end{aligned}$$

darstellen lassen, wobei für $\sigma=1,2,\cdots,q$ $z_\sigma = z^{-\frac{1}{\nu_\sigma}}$, für $\sigma=q+1, q+2,\cdots,s$ $z_\sigma=(z-a_\sigma)^{\frac{1}{\nu_\sigma}}$ ist, die $\mathfrak{L}$, c, $\overline{\mathfrak{L}}$, $\bar{c}$ von z unabhängige Größen bezeichnen und speziell $\mathfrak{L}_\sigma, \mathfrak{L}_{\sigma 1}, \cdots, \mathfrak{L}_{\sigma m'_\sigma}$ die bei der Bildung von $\Omega(z)$ benutzten Konstanten sind. Da nun der Wert von J_2 ausschließlich von dem durch die Gleichungen (R.) charakterisierten Verhalten der Funktionen Ω, $\overline{\Omega}$ für die Punkte $\eta_1, \cdots, \eta_s$ abhängt, und diese Gleichungen (R.) genau dieselbe Form haben wie die Gleichungen (R.), welche das Verhalten der im ersten Teile, in Art. 1 des siebenten Abschnittes, aufgestellten Funktionen W, $\overline{W}$ charakterisieren, so bleiben die dort zur Auswertung der auf die Funktionen W, $\overline{W}$ sich beziehenden Integralsumme J_2 durchgeführten Untersuchungen richtig, wenn man darin allenthalben die Buchstaben W, $\overline{W}$ durch die Buchstaben Ω, $\overline{\Omega}$ beziehungsweise ersetzt, und es ergibt sich dementsprechend für die hier vorliegende Integralsumme J_2 die Gleichung:

$$J_2 = 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma \overline{\Omega}_{\mathfrak{m}_\sigma} - 2\pi^2 \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma \overline{\mathfrak{L}}_\sigma - 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} (\mathfrak{L}_\sigma \bar{c}_{\sigma 0} - \overline{\mathfrak{L}}_\sigma c_{\sigma 0}) - 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}{}' \sum_{\mu=1}^{\mu=m'_\sigma} \mu(\mathfrak{L}_{\sigma\mu} \bar{c}_{\sigma\mu} - \overline{\mathfrak{L}}_{\sigma\mu} c_{\sigma\mu}).$$

Trägt man jetzt die für J_1, J_2 gewonnenen Ausdrücke in die Gleichung $J = J_1 + J_2$ ein und eliminiert aus der so entstehenden Gleichung und der zu Anfang für J gewonnenen Gleichung die Größe J, so erhält man die Formel:

$$\begin{aligned} \frac{d^n \Omega(a)}{da^n} &= (-1)^{n+1} \pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \mathfrak{L}_\sigma \overline{\mathfrak{L}}_\sigma + (-1)^n \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} (\mathfrak{L}_\sigma \bar{c}_{\sigma 0} - \overline{\mathfrak{L}}_\sigma c_{\sigma 0}) + (-1)^n \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}{}' \sum_{\mu=1}^{\mu=m'_\sigma} \mu (\mathfrak{L}_{\sigma\mu} \bar{c}_{\sigma\mu} - \overline{\mathfrak{L}}_{\sigma\mu} c_{\sigma\mu}) \\ &\quad + (-1)^n \frac{\mathfrak{S}}{p\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=p}{}' \int_{b_\nu^+}^{+} \overline{\Omega}(z)\, du_\nu^z - \frac{1}{p\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=p}{}' \int_{b_\nu^+}^{+} \frac{d^n \Omega(z)}{dz^n}\, du_\nu^z \\ &\quad + \frac{2\mathfrak{S}}{p^2 \pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=p}{}' \int_{b_\nu^+}^{+} \frac{d^n u_\nu^z}{dz^n}\, du_\nu^z. \end{aligned}$$

Um dieser Formel eine für die Anwendung bequemere Gestalt zu geben, führe man mit Rücksicht darauf, daß

$$(\eta_1, \cdots, \eta_q;\ \eta_{q+1}, \cdots, \eta_{q+r};\ \eta_{q+r+1}, \cdots, \eta_{q+r+t}) = (\infty_1, \cdots, \infty_q;\ \alpha_1, \cdots, \alpha_r;\ \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t)$$

ist, für die in den Gleichungen (R.) vorkommenden Konstanten $\mathfrak{L}$, c, $\overline{\mathfrak{L}}$, $\bar{c}$, m' eine neue Bezeichnung ein, indem man

$$\text{für } \sigma=1,2,3,\cdots,q \quad \begin{cases} \mathfrak{L}_\sigma=\mathfrak{L}_0^{(\infty_\sigma)}, & \mathfrak{L}_{\sigma\mu}=\mathfrak{L}_\mu^{(\infty_\sigma)}, & c_{\sigma\mu}=c_\mu^{(\infty_\sigma)}, \\ \overline{\mathfrak{L}}_\sigma=\overline{\mathfrak{L}}_0^{(\infty_\sigma)}, & \overline{\mathfrak{L}}_{\sigma\mu}=\overline{\mathfrak{L}}_\mu^{(\infty_\sigma)}, & \bar{c}_{\sigma\mu}=\bar{c}_\mu^{(\infty_\sigma)}, \end{cases} \quad m'_\sigma=p_\sigma,$$

$$\text{für } \sigma=q+1,q+2,\cdots,q+r \quad \begin{cases} \mathfrak{L}_\sigma=\mathfrak{L}_0^{(\alpha_{\sigma-q})}, & \mathfrak{L}_{\sigma\mu}=\mathfrak{L}_\mu^{(\alpha_{\sigma-q})}, & c_{\sigma\mu}=c_\mu^{(\alpha_{\sigma-q})}, \\ \overline{\mathfrak{L}}_\sigma=\overline{\mathfrak{L}}_0^{(\alpha_{\sigma-q})}, & \overline{\mathfrak{L}}_{\sigma\mu}=\overline{\mathfrak{L}}_\mu^{(\alpha_{\sigma-q})}, & \bar{c}_{\sigma\mu}=\bar{c}_\mu^{(\alpha_{\sigma-q})}, \end{cases} \quad m'_\sigma=n_{\sigma-q},$$

$$\text{für } \sigma=q+r+1,\cdots,q+r+t \begin{cases} \mathfrak{L}_\sigma=\mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_{\sigma-q-r})}, & \mathfrak{L}_{\sigma\mu}=\mathfrak{L}_\mu^{(\varepsilon_{\sigma-q-r})}, & c_{\sigma\mu}=c_\mu^{(\varepsilon_{\sigma-q-r})}, \\ \overline{\mathfrak{L}}_\sigma=\overline{\mathfrak{L}}_0^{(\varepsilon_{\sigma-q-r})}, & \overline{\mathfrak{L}}_{\sigma\mu}=\overline{\mathfrak{L}}_\mu^{(\varepsilon_{\sigma-q-r})}, & \bar{c}_{\sigma\mu}=\bar{c}_\mu^{(\varepsilon_{\sigma-q-r})}, \end{cases} \quad m'_\sigma=m_{\sigma-q-r},$$

setzt, und bringe dementsprechend die zu Anfang des Artikels aufgestellte, die Funktion $\Omega(z)$ definierende Gleichung in die Gestalt:

$$\begin{aligned} \Omega(z)= & \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\left(\mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)} \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{m_\tau}^{(\varepsilon_\tau)} \underset{m_\tau}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right|\right) \\ & +\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\left(\mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)} \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_1^{(\alpha_\varrho)} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{n_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} \underset{n_\varrho}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|\right) \\ & +\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\left(\mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)} \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_1^{(\infty_\varkappa)} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{p_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)} \underset{p_\varkappa}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|\right) + \frac{1}{\pi i}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p}\mathfrak{A}_\sigma u_\sigma|z| + C. \end{aligned}$$

Nun beachte man, daß die Funktion $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}a\\ z\end{matrix}\right|$, deren n^{te} Derivierte nach z ebendort mit $\overline{\Omega}(z)$ bezeichnet wurde, der Gleichung (3.) des Art. 7 zufolge für das Gebiet des Punktes η_σ $(\sigma=1,2,\cdots,s)$ dargestellt wird durch die Gleichung:

$$\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}a\\ z\end{matrix}\right| = \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}a\\ \eta_\sigma\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{1}{\lambda}\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\eta_\sigma\\ a\end{matrix}\right| z_{\eta_\sigma}^\lambda,$$

und daß daher

für das Gebiet des Punktes ε_τ $(\tau=1,2,\cdots,t)$ die Gleichungen:

$$\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}a\\ z\end{matrix}\right| = \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}a\\ \varepsilon_\tau\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{1}{\lambda}\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ a\end{matrix}\right|(z-\varepsilon_\tau)^\lambda, \qquad \overline{\Omega}(z)=\sum_{\lambda=n}^{\lambda=\infty}\frac{1}{\lambda}\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ a\end{matrix}\right|(\lambda\,|\,n)(z-\varepsilon_\tau)^{\lambda-n},$$

für das Gebiet des Punktes α_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots,r)$ die Gleichungen:

$$\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}a\\ z\end{matrix}\right| = \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}a\\ \alpha_\varrho\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{1}{\lambda}\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ a\end{matrix}\right|(z-\alpha_\varrho)^{\frac{\lambda}{\mu_\varrho}}, \quad \overline{\Omega}(z)=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{1}{\lambda}\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ a\end{matrix}\right|\left(\frac{\lambda}{\mu_\varrho}\,\middle|\,n\right)(z-\alpha_\varrho)^{\frac{\lambda}{\mu_\varrho}-n},$$

für das Gebiet des Punktes $\infty_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots,q)$ die Gleichungen:

$$\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}a\\ z\end{matrix}\right| = \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}a\\ \infty_\varkappa\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{1}{\lambda}\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ a\end{matrix}\right|\frac{1}{z^{\frac{\lambda}{\iota_\varkappa}}}, \qquad \overline{\Omega}(z)=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{1}{\lambda}\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ a\end{matrix}\right|\left(-\frac{\lambda}{\iota_\varkappa}\,\middle|\,n\right)\frac{1}{z^{\frac{\lambda}{\iota_\varkappa}+n}}$$

bestehen. Man erkennt dann, daß alle Konstanten $\overline{\mathfrak{L}}^{(\varepsilon)}$, $\overline{\mathfrak{L}}^{(\infty)}$ und auch alle außer den Konstanten $\overline{\mathfrak{L}}_\lambda^{(\alpha_\varrho)}$, ${\varrho = 1, 2, \cdots, r \atop \lambda = 1, 2, \cdots, n\mu_\varrho - 1}$, noch vorkommenden Konstanten $\overline{\mathfrak{L}}^{(\alpha)}$ sowie die Konstanten $\bar{c}_\lambda^{(\infty_\varkappa)}$, ${\varkappa = 1, 2, \cdots, q \atop \lambda = 0, 1, 2, \cdots, n\iota_\varkappa}$, den Wert Null haben, und daß sich dementsprechend die vorher gewonnene Formel — wenn man noch das auf ihrer rechten Seite hinter dem ersten Integralzeichen stehende $\overline{\Omega}(z) = \dfrac{d^n \underset{0}{P}\left|{a \atop z}\right|}{dz^n}$ auf Grund der in Art. 7 unter (8.) an erster Stelle stehenden Gleichung durch $(n-1)!\ \underset{n}{P}\left|{z \atop a}\right|$ ersetzt — auf die Formel:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^n \Omega(a)}{da^n} = \ & (-1)^n \sum_{\tau=1}^{\tau=t} \left\{ \mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)}\, \bar{c}_0^{(\varepsilon_\tau)} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau} \lambda\, \mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)}\, \bar{c}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)} \right\} \\
& + (-1)^n \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \left\{ \mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)}\, \bar{c}_0^{(\alpha_\varrho)} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho} \lambda\, \mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)}\, \bar{c}_\lambda^{(\alpha_\varrho)} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1} (n\mu_\varrho - \lambda)\, \overline{\mathfrak{L}}_{n\mu_\varrho-\lambda}^{(\alpha_\varrho)}\, c_{n\mu_\varrho-\lambda}^{(\alpha_\varrho)} \right\} \\
& + (-1)^n \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}{}' \left\{ \sum_{\lambda=n\iota_\varkappa+1}^{\lambda=p_\varkappa} \lambda\, \mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\varkappa)}\, \bar{c}_\lambda^{(\infty_\varkappa)} \right\} \\
& + (-1)^n \frac{(n-1)!\,\mathfrak{S}}{p\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int_{b_\nu^+}^{+} \underset{n}{P}\left|{z \atop a}\right| du_\nu^z - \frac{1}{p\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int_{b_\nu^+}^{+} \frac{d^n \Omega(z)}{dz^n}\, du_\nu^z \\
& + \frac{2\mathfrak{S}}{p^2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int_{b_\nu^+}^{+} \frac{d^n u_\nu^z}{dz^n}\, du_\nu^z
\end{aligned}
$$

reduziert. Dabei soll der in der dritten Zeile an dem Summenzeichen stehende Akzent andeuten, daß bei der Summation diejenigen, der Reihe $1, 2, \cdots, q$ angehörigen, Werte von $\varkappa$ auszuschließen sind, für welche etwa $p_\varkappa < n\iota_\varkappa + 1$ ist. Die in der vierten und fünften Zeile vorkommende Größe $\mathfrak{S}$ ist, der neuen Bezeichnung entsprechend, bestimmt durch die Gleichung:

$$
\mathfrak{S} = \sum_{\tau=1}^{\tau=t} \mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)}.
$$

In die letzte Formel trage man jetzt für die darin noch vorkommenden Größen c, $\overline{\mathfrak{L}}$ ihre aus den vorher für $\overline{\Omega}(z)$ aufgestellten Entwicklungen unter Beachtung der Relation $(g+n\,|\,n) = (-1)^n \dfrac{g+n}{g}(-g\,|\,n)$ sich ergebenden, durch die Gleichungen:

$$
\bar{c}_0^{(\varepsilon_\tau)} = (n-1)!\ \underset{n}{P}\left|{\varepsilon_\tau \atop a}\right|, \qquad \underset{\lambda = 1, 2, 3, \cdots}{\lambda\, \bar{c}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)} = (-1)^n (-\lambda\,|\,n) \underset{n+\lambda}{P}\left|{\varepsilon_\tau \atop a}\right|},
$$

$$
\bar{c}_0^{(\alpha_\varrho)} = \frac{(n-1)!}{\mu_\varrho} \underset{n\mu_\varrho}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop a}\right|, \qquad \underset{\lambda = 1, 2, 3, \cdots}{\lambda\, \bar{c}_\lambda^{(\alpha_\varrho)} = (-1)^n \left(-\frac{\lambda}{\mu_\varrho}\,\middle|\, n\right) \underset{n\mu_\varrho+\lambda}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop a}\right|}, \qquad \underset{\lambda = 1, 2, 3, \cdots}{\overline{\mathfrak{L}}_{n\mu_\varrho-\lambda}^{(\alpha_\varrho)} = (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{n\mu_\varrho - \lambda}{\mu_\varrho}\,\middle|\, n\right)}{n\mu_\varrho - \lambda} \underset{\lambda}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop a}\right|},
$$

$$
\underset{\lambda = n\iota_\varkappa+1,\ n\iota_\varkappa+2, \cdots}{\lambda\, \bar{c}_\lambda^{(\infty_\varkappa)} = (-1)^n \left(\frac{\lambda}{\iota_\varkappa}\,\middle|\, n\right) \underset{\lambda-n\iota_\varkappa}{P}\left|{\infty_\varkappa \atop a}\right|}
$$

bestimmten Werte ein. Läßt man dann noch bei der entstandenen Formel in neuer Bezeichnung an Stelle des Buchstabens z den Buchstaben ζ und hierauf an Stelle des Buchstabens a den Buchstaben z treten, so erhält man schließlich die für jeden inneren Punkt z der Fläche T'' geltende Formel:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^n\,\Omega(z)}{dz^n} = {} & \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\left\{(-1)^n(n-1)!\,\mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)}\underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau}(-\lambda\,|\,n)\,\mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)}\underset{n+\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right|\right\}\\
& + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\left\{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1}\left(\frac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\,\Big|\,n\right)c_{n\mu_\varrho-\lambda}^{(\alpha_\varrho)}\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \frac{(-1)^n}{\mu_\varrho}(n-1)!\,\mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)}\underset{n\mu_\varrho}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho}\left(-\frac{\lambda}{\mu_\varrho}\,\Big|\,n\right)\mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)}\underset{n\mu_\varrho+\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|\right\}\\
(\mathrm{D}_0.)\qquad & + {\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}}'\left\{\sum_{\lambda=n\iota_\varkappa+1}^{\lambda=p_\varkappa}\left(\frac{\lambda}{\iota_\varkappa}\,\Big|\,n\right)\mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\varkappa)}\underset{\lambda-n\iota_\varkappa}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|\right\}\\
& + (-1)^n\frac{(n-1)!\,\mathfrak{S}}{p\pi i}{\sum_{\nu=1}^{\nu=p}}'\int_{b_\nu^+}^{+}\underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\zeta\\ z\end{matrix}\right|du_\nu^\zeta - \frac{1}{p\pi i}{\sum_{\nu=1}^{\nu=p}}'\int_{b_\nu^+}^{+}\frac{d^n\,\Omega(\zeta)}{d\zeta^n}\,du_\nu^\zeta\\
& + \frac{2\mathfrak{S}}{p^2\pi i}{\sum_{\nu=1}^{\nu=p}}'\int_{b_\nu^+}^{+}\frac{d^n u_\nu^\zeta}{d\zeta^n}\,du_\nu^\zeta,
\end{aligned}
$$

welche die gewünschte Darstellung der n^{ten} Derivierten des zuletzt für $\Omega(z)$ aufgestellten Ausdruckes durch Elementarfunktionen enthält. Die hierbei auftretenden Konstanten $c_1^{(\alpha_\varrho)}, c_2^{(\alpha_\varrho)}, \cdots, c_{n\mu_\varrho-1}^{(\alpha_\varrho)}$ sind die Koeffizienten, welche in der Entwicklung der Funktion $\Omega(z)$ für das Gebiet des Punktes α_ϱ den Potenzen $z_{\alpha_\varrho}^1, z_{\alpha_\varrho}^2, \cdots, z_{\alpha_\varrho}^{n\mu_\varrho-1}$ beziehungsweise zukommen.

10.

Die im vorhergehenden Artikel gewonnene Formel $(\mathrm{D}_0.)$ kann, da bei ihr die Schnitte l nicht mehr in Betracht kommen, auf die Fläche T' bezogen werden und gilt dann, ihrer Ableitung gemäß, für jeden von den Punkten $\infty, \alpha, \varepsilon$ verschiedenen inneren Punkt z der Fläche T', aber nicht, wie leicht zu erkennen ist, für jeden Punkt z der Begrenzung dieser Fläche; sie läßt sich jedoch so modifizieren, daß sie auch noch gilt, wenn der Punkt z ein Punkt der Begrenzung von T' ist. Um diese Modifikation zu erhalten, sollen zunächst die auf ihrer rechten Seite an erster Stelle stehenden Integrale einer eingehenden Untersuchung unterzogen werden.

Da die Funktion $\underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\zeta\\ z\end{matrix}\right|$ und damit zugleich auch die Funktion $\underset{n}{P}\left|\begin{matrix}\zeta\\ z\end{matrix}\right|\frac{du_\sigma^\zeta}{d\zeta}$, einerlei welche Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, p$ unter σ verstanden wird, als Funktion der beiden komplexen Veränderlichen ζ, z stetig ist, wenn ζ einen zum Schnitte b_σ gehörigen

Punkt, z einen weder zum Schnitte b_σ gehörigen noch mit dem Punkte $\mathfrak{s}_\sigma$ zusammenfallenden Punkt der Fläche T' bezeichnet, so wird durch die Gleichung:

$$(1.)\qquad J_n^{(\sigma)}(z) = \frac{(n-1)!}{\pi i}\int\limits_{b_\sigma^+}^{+} \underset{n}{P}\begin{vmatrix}\zeta\\ z\end{vmatrix} du_\sigma^\zeta$$

eine für jeden weder zum Schnitte b_σ gehörigen noch mit $\mathfrak{s}_\sigma$ zusammenfallenden Punkt der Fläche T' einwertige und stetige Funktion $J_n^{(\sigma)}(z)$ der komplexen Veränderlichen z definiert. Die Funktion $J_n^{(\sigma)}(z)$ kann aber auch durch die Gleichung:

$$(2.)\qquad J_n^{(\sigma)}(z) = -\frac{(n-1)!}{\pi i}\int\limits_{b_\sigma^-}^{+} \underset{n}{P}\begin{vmatrix}\zeta\\ z\end{vmatrix} du_\sigma^\zeta - \frac{2}{p\pi i}\int\limits_{b_\sigma^-}^{+}\frac{d^n u_\sigma^\zeta}{d\zeta^n}\, du_\sigma^\zeta$$

definiert werden, da die Werte der Funktion $\underset{n}{P}\begin{vmatrix}\zeta\\ z\end{vmatrix}\frac{du_\sigma^\zeta}{d\zeta}$ in je zwei zum Schnitte b_σ gehörigen entsprechenden Punkten ζ^+, ζ^-, wie leicht zu sehen ist, durch die Gleichung $\underset{n}{P}\begin{vmatrix}\zeta^+\\ z\end{vmatrix}\frac{du_\sigma^\zeta}{d\zeta} = \underset{n}{P}\begin{vmatrix}\zeta^-\\ z\end{vmatrix}\frac{du_\sigma^\zeta}{d\zeta} + \frac{2}{p(n-1)!}\frac{d^n u_\sigma^\zeta}{d\zeta^n}\frac{du_\sigma^\zeta}{d\zeta}$ verknüpft sind. Beachtet man nun, daß für die auf den rechten Seiten der Gleichungen (1.), (2.) stehenden Integrale die Schnitte a_σ, c_σ nicht in Betracht kommen, da jede der Funktionen $\underset{n}{P}\begin{vmatrix}\zeta\\ z\end{vmatrix}\frac{du_\sigma^\zeta}{d\zeta}$ und $\frac{d^n u_\sigma^\zeta}{d\zeta^n}\frac{du_\sigma^\zeta}{d\zeta}$ sowohl für je zwei zum Schnitte a_σ wie für je zwei zum Schnitte c_σ gehörige entsprechende Punkte ζ^+, ζ^- denselben Wert besitzt, und daß daher die Integrationswege der in Rede stehenden Integrale auch als in sich zurücklaufende angesehen und dementsprechend, ohne daß diese Integrale eine Wertänderung erleiden, durch Deformation vollständig von dem Schnitte b_σ losgelöst werden können, so erkennt man weiter, daß die Gleichungen (1.), (2.) durch die Gleichungen:

$$[1.]\qquad J_n^{(\sigma)}(z) = \frac{(n-1)!}{\pi i}\int\limits_{\beta_\sigma}^{+} \underset{n}{P}\begin{vmatrix}\zeta\\ z\end{vmatrix} du_\sigma^\zeta,$$

$$[2.]\qquad J_n^{(\sigma)}(z) = -\frac{(n-1)!}{\pi i}\int\limits_{\gamma_\sigma}^{+} \underset{n}{P}\begin{vmatrix}\zeta\\ z\end{vmatrix} du_\sigma^\zeta - \frac{2}{p\pi i}\int\limits_{\gamma_\sigma}^{+}\frac{d^n u_\sigma^\zeta}{d\zeta^n}\, du_\sigma^\zeta$$

ersetzt werden können, wenn nur die neuen Integrationswege β_σ, γ_σ den folgenden Bedingungen genügen. Die von dem Integrationswege b_σ^+ und dem neuen Integrationswege β_σ begrenzte Ringfläche soll, von Teilen der Schnitte a_σ, c_σ abgesehen, keinen Teil eines der noch übrigen Schnitte a, b, c und weder den Punkt z noch einen der Punkte α enthalten; ebenso soll die von dem Integrationswege b_σ^- und dem neuen

Integrationswege γ_σ begrenzte Ringfläche, von Teilen des Schnittes a_σ abgesehen, keinen Teil eines der noch übrigen Schnitte a, b, c und weder den Punkt z noch einen der Punkte α enthalten; endlich hat man sowohl bei der Linie β_σ wie bei der Linie γ_σ als die positive Richtung des Durchlaufens diejenige anzusehen, welche zu der ins Innere der entsprechenden, eben erwähnten Ringfläche gerichteten Normalen so liegt wie die positive Richtung der Yi-Achse zur positiven Richtung der X-Achse. Die Gleichung [1.], die im Gegensatz zur Gleichung (1.) nicht versagt, wenn der Punkt z in einen der Punkte von b_σ^- rückt, liefert nun die der Stetigkeit entsprechenden Werte der Funktion $J_n^{(\sigma)}(z)$ für diese früher ausgeschlossenen Punkte; ebenso liefert die Gleichung [2.], die im Gegensatz zur Gleichung (1.) nicht versagt, wenn der Punkt z in einen der Punkte von b_σ^+ oder in den Punkt $\mathfrak{s}_\sigma$ rückt, die der Stetigkeit entsprechenden Werte der Funktion $J_n^{(\sigma)}(z)$ für diese früher ausgeschlossenen Punkte; und die so vervollständigte Funktion $J_n^{(\sigma)}(z)$ ist dann eine für jeden Punkt der Fläche T' einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen z.

Die Werte der jetzt für die ganze Fläche T' definierten Funktion $J_n^{(\sigma)}(z)$ in je zwei zu einem der Schnitte a, b, c gehörigen entsprechenden Punkten z^+, z^- sind in der Weise verknüpft, daß

$$\text{längs } a_\nu \left\{ J_n^{(\sigma)}(z)^+ = J_n^{(\sigma)}(z)^-, \right. \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p,$$

$$\text{längs } b_\nu \left\{ J_n^{(\sigma)}(z)^+ = J_n^{(\sigma)}(z)^- - \frac{2}{\pi i} \int_{b_\sigma^+}^{+} \frac{d^n u_\nu^\zeta}{d\zeta^n}\, du_\sigma^\zeta, \right. \qquad \nu = 1, 2, \cdots, \sigma-1, \sigma+1, \cdots, p,$$

$$\text{längs } b_\sigma \left\{ J_n^{(\sigma)}(z)^+ = J_n^{(\sigma)}(z)^- + (-1)^n\, 2\, \frac{d^n u_\sigma^z}{dz^n} - \frac{2}{\pi i} \int_{b_\sigma^+}^{+} \frac{d^n u_\sigma^\zeta}{d\zeta^n}\, du_\sigma^\zeta, \right.$$

$$\text{längs } c_\nu \left\{ J_n^{(\sigma)}(z)^+ = J_n^{(\sigma)}(z)^-, \right. \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p,$$

ist. Die Richtigkeit der ersten, zweiten und vierten dieser Gleichungen erkennt man unmittelbar, indem man beachtet, daß die Funktion $J_n^{(\sigma)}(z)$ für jeden nicht zum Schnitte b_σ gehörigen und auch nicht mit dem Punkte $\mathfrak{s}_\sigma$ zusammenfallenden Punkt z der Fläche T' durch die Gleichung (1.) bestimmt wird, und daß längs $a_\nu \left\{ P_n\left|\begin{smallmatrix}\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = P_n\left|\begin{smallmatrix}\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|^-\right.$, längs $b_\nu \left\{ P_n\left|\begin{smallmatrix}\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = P_n\left|\begin{smallmatrix}\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|^- - \frac{2}{(n-1)!}\frac{d^n u_\nu^\zeta}{d\zeta^n}\right.$, längs $c_\nu \left\{ P_n\left|\begin{smallmatrix}\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = P_n\left|\begin{smallmatrix}\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|^-\right.$ ist. Um dagegen die an dritter Stelle aufgeführte Gleichung zu gewinnen, hat man vor allem zu berücksichtigen, daß die auf ihrer linken Seite stehende Größe $J_n^{(\sigma)}(z)^+$ durch die Gleichung [2.], die auf ihrer rechten Seite stehende Größe $J_n^{(\sigma)}(z)^-$ durch die Gleichung [1.] bestimmt wird, und daß längs $b_\sigma \left\{ P_n\left|\begin{smallmatrix}\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|^+ = P_n\left|\begin{smallmatrix}\zeta\\ z\end{smallmatrix}\right|^- - \frac{2}{(n-1)!}\frac{d^n u_\sigma^\zeta}{d\zeta^n}\right.$ ist. Man erhält dann für die in der genannten Gleichung vorkommenden Größen $J_n^{(\sigma)}(z)^+$, $J_n^{(\sigma)}(z)^-$ die Gleichungen:

$$J_n^{(\sigma)}(z)^+ = -\frac{(n-1)!}{\pi i}\int\limits_{\gamma_\sigma}^{+} P_n\left|\begin{matrix}\zeta\\ z\end{matrix}\right|^+ du_\sigma^\zeta - \frac{2}{p\pi i}\int\limits_{\gamma_\sigma}^{+}\frac{d^n u_\sigma^\zeta}{d\zeta^n}\,du_\sigma^\zeta$$

$$= -\frac{(n-1)!}{\pi i}\int\limits_{\gamma_\sigma}^{+} P_n\left|\begin{matrix}\zeta\\ z\end{matrix}\right|^- du_\sigma^\zeta + \frac{2(p-1)}{p\pi i}\int\limits_{\gamma_\sigma}^{+}\frac{d^n u_\sigma^\zeta}{d\zeta^n}\,du_\sigma^\zeta,$$

$$J_n^{(\sigma)}(z)^- = \frac{(n-1)!}{\pi i}\int\limits_{\beta_\sigma}^{+} P_n\left|\begin{matrix}\zeta\\ z\end{matrix}\right|^- du_\sigma^\zeta,$$

und demnach für die Differenz $J_n^{(\sigma)}(z)^+ - J_n^{(\sigma)}(z)^-$ zunächst die Gleichung:

$$J_n^{(\sigma)}(z)^+ - J_n^{(\sigma)}(z)^- = -\frac{(n-1)!}{\pi i}\left\{\int\limits_{\beta_\sigma}^{+} P_n\left|\begin{matrix}\zeta\\ z\end{matrix}\right|^- du_\sigma^\zeta + \int\limits_{\gamma_\sigma}^{+} P_n\left|\begin{matrix}\zeta\\ z\end{matrix}\right|^- du_\sigma^\zeta\right\} + \frac{2(p-1)}{p\pi i}\int\limits_{\gamma_\sigma}^{+}\frac{d^n u_\sigma^\zeta}{d\zeta^n}\,du_\sigma^\zeta.$$

Aus der von β_σ und b_σ^+ begrenzten Ringfläche sowohl wie aus der von γ_σ und b_σ^- begrenzten Ringfläche denke man sich nun die in sie fallenden Teile der Schnitte a_σ, c_σ entfernt und bezeichne die so schnittfrei gewordenen Ringflächen mit R_1, R_2 beziehungsweise. Die auf den Punkt z^- von b_σ^- bezogene Größe $P_n\left|\begin{matrix}\zeta\\ z\end{matrix}\right|^- \frac{du_\sigma^\zeta}{d\zeta}$ ist dann, bei festgehaltenem z^- als Funktion des Punktes ζ betrachtet, eine in der Ringfläche R_1 einwertige und mit Ausnahme des dem Punkte z^- entsprechenden Punktes z^+ von b_σ^+ auch stetige Funktion der komplexen Veränderlichen ζ, ebenso aber eine in der Ringfläche R_2 einwertige und mit Ausnahme des Punktes z^- auch stetige Funktion der komplexen Veränderlichen ζ, und zudem gilt für je zwei zu dem, die Ringfläche R_1 von der Ringfläche R_2 trennenden, Schnitte b_σ gehörige entsprechende Punkte ζ^+, ζ^- die Gleichung $P_n\left|\begin{matrix}\zeta+\\ z-\end{matrix}\right|\frac{du_\sigma^\zeta}{d\zeta} = P_n\left|\begin{matrix}\zeta-\\ z-\end{matrix}\right|\frac{du_\sigma^\zeta}{d\zeta} + \frac{2}{p(n-1)!}\frac{d^n u_\sigma^\zeta}{d\zeta^n}\frac{du_\sigma^\zeta}{d\zeta}$. Definiert man nunmehr für die aus den Ringflächen R_1, R_2 sich zusammensetzende Ringfläche $R_1 + R_2$ eine Funktion $F(\zeta)$ der komplexen Veränderlichen ζ, indem man

$$\text{für jeden Punkt } \zeta \text{ von } R_1 \left\{ F(\zeta) = P_n\left|\begin{matrix}\zeta\\ z\end{matrix}\right|^- \frac{du_\sigma^\zeta}{d\zeta},\right.$$

$$\text{für jeden Punkt } \zeta \text{ von } R_2 \left\{ F(\zeta) = P_n\left|\begin{matrix}\zeta\\ z\end{matrix}\right|^- \frac{du_\sigma^\zeta}{d\zeta} + \frac{2}{p(n-1)!}\frac{d^n u_\sigma^\zeta}{d\zeta^n}\frac{du_\sigma^\zeta}{d\zeta}\right.$$

setzt, so hat diese Funktion $F(\zeta)$ in je zwei zum Schnitte b_σ gehörigen entsprechenden Punkten ζ^+, ζ^- denselben Wert und sie ist daher, wenn man noch die aus der Fläche $R_1 + R_2$ durch Aufhebung des Schnittes b_σ hervorgehende, ausschließlich von den Linien β_σ, γ_σ begrenzte Ringfläche mit R bezeichnet, eine Funktion der komplexen Veränderlichen ζ, welche für jeden von dem Punkte $\zeta = z = z^{\pm}$ verschiedenen Punkt der Fläche R einwertig und stetig ist, für den Punkt $\zeta = z = z^{\pm}$ dagegen in der Weise unstetig wird, daß die Differenz $F(\zeta) - \frac{(-1)^n}{(\zeta - z)^n} \frac{du_\sigma^\zeta}{d\zeta}$ für diesen Punkt stetig bleibt. Demgemäß besitzt das um den Punkt $\zeta = z$ in negativer Richtung erstreckte Integral $\int\limits_{(z)}^{-}\left[F(\zeta) - \frac{(-1)^n}{(\zeta - z)^n} \frac{du_\sigma^\zeta}{d\zeta}\right] d\zeta$ den Wert Null, oder, was dasselbe, es besteht die Gleichung:

$$\int\limits_{(z)}^{-} F(\zeta)\, d\zeta = (-1)^n \int\limits_{(z)}^{-} \frac{\frac{du_\sigma^\zeta}{d\zeta}}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta = (-1)^{n-1} \frac{2\pi i}{(n-1)!} \frac{d^n u_\sigma^z}{dz^n}.$$

Mit dem hier links stehenden Integrale stimmt aber, infolge der eben angeführten Eigenschaften der auf die Fläche R bezogenen Funktion $F(\zeta)$, das über die, von den Linien β_σ, γ_σ gebildete, Begrenzung der Fläche R erstreckte Integral $\int F(\zeta)\, d\zeta$ dem Werte nach überein, wenn man dabei die Integrationsrichtung so wählt, daß sie zu der ins Innere der Fläche R gerichteten Normalen ebenso liegt wie die positive Richtung der Yi-Achse zur positiven Richtung der X-Achse, oder, was dasselbe, daß die Begrenzungslinien β_σ, γ_σ in der vorher für sie festgesetzten positiven Richtung durchlaufen werden, und es besteht daher auch die Gleichung:

$$\int\limits_{\beta_\sigma}^{+} F(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{\gamma_\sigma}^{+} F(\zeta)\, d\zeta = (-1)^{n-1} \frac{2\pi i}{(n-1)!} \frac{d^n u_\sigma^z}{dz^n}.$$

Ersetzt man nun in jedem der beiden auf der linken Seite dieser Gleichung stehenden Integrale die Größe $F(\zeta)$ durch den ihr auf Grund ihrer Definition entsprechenden Ausdruck, so erhält man die Gleichung:

$$\left\{\int\limits_{\beta_\sigma}^{+} P_n \left|\begin{matrix}\zeta\\ z\end{matrix}\right|^{-} du_\sigma^\zeta + \int\limits_{\gamma_\sigma}^{+} P_n \left|\begin{matrix}\zeta\\ z\end{matrix}\right|^{-} du_\sigma^\zeta\right\} + \frac{2}{p(n-1)!} \int\limits_{\gamma_\sigma}^{+} \frac{d^n u_\sigma^\zeta}{d\zeta^n}\, du_\sigma^\zeta = (-1)^{n-1} \frac{2\pi i}{(n-1)!} \frac{d^n u_\sigma^z}{dz^n},$$

und diese Gleichung liefert dann schließlich durch passende Verbindung mit der vorher für $J_n^{(\sigma)}(z)^+ - J_n^{(\sigma)}(z)^-$ erhaltenen Gleichung die Gleichung:

$$J_n^{(\sigma)}(z)^+ - J_n^{(\sigma)}(z)^- = (-1)^n 2 \frac{d^n u_\sigma^z}{dz^n} + \frac{2}{\pi i} \int\limits_{\gamma_\sigma}^{+} \frac{d^n u_\sigma^\zeta}{d\zeta^n}\, du_\sigma^\zeta.$$

Damit ist aber, da $\int\limits_{\gamma_\sigma}^{+} \frac{d^n u_\sigma^\zeta}{d\zeta^n}\, du_\sigma^\zeta = -\int\limits_{b_\sigma^+}^{+} \frac{d^n u_\sigma^\zeta}{d\zeta^n}\, du_\sigma^\zeta$ ist, die gewünschte, das Verhalten von $J_n^{(\sigma)}(z)$ längs des Schnittes b_σ charakterisierende, Gleichung gewonnen.

Aus den Funktionen $J_n^{(1)}(z), \cdots, J_n^{(p)}(z)$ bilde man nun durch Addition und darauffolgende Multiplikation mit $\frac{1}{p}$ die Funktion:

$$S_n(z) = \frac{1}{p}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} J_n^{(\sigma)}(z).$$

Die so definierte Funktion $S_n(z)$ ist eine in der Fläche T' einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen z, deren Werte in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten z^+, z^- in der Weise verknüpft sind, daß

$$(S.)\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \left\{ S_n(z)^+ = S_n(z)^-, \right. \\ &\text{längs } b_\nu \left\{ S_n(z)^+ = S_n(z)^- + (-1)^n \frac{2}{p}\frac{d^n u_\nu^z}{dz^n} - \frac{2}{p\pi i}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p}\int_{b_\sigma^+}^{+} \frac{d^n u_\nu^\zeta}{d\zeta^n}\, du_\sigma^\zeta, \right. \\ &\text{längs } c_\nu \left\{ S_n(z)^+ = S_n(z)^-, \right. \end{aligned} \qquad \nu=1,2,\cdots,p,$$

ist, und es besteht zudem auf Grund der Definition der Funktion $J_n^{(\sigma)}(z)$ $(\sigma=1,2,\cdots,p)$ für jeden weder zu einem der Schnitte $b_1, \cdots, b_p$ gehörigen noch mit einem der Punkte $\mathfrak{s}_1, \cdots, \mathfrak{s}_p$ zusammenfallenden Punkt z der Fläche T' die Gleichung:

$$S_n(z) = \frac{(n-1)!}{p\pi i}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p}\int_{b_\sigma^+}^{+} P_n\left|\begin{matrix}\zeta\\ z\end{matrix}\right| du_\sigma^\zeta,$$

für jeden der negativen Seite eines Schnittes b angehörigen Punkt $z = z'$ der Fläche T' die Gleichung:

$$S_n(z') = \frac{(n-1)!}{p\pi i}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p}\int_{b_\sigma^-}^{+} P_n\left|\begin{matrix}\zeta\\ z'\end{matrix}\right| du_\sigma^\zeta,$$

für jeden der positiven Seite eines Schnittes b angehörigen oder mit einem Punkte $\mathfrak{s}$ zusammenfallenden Punkt $z = z''$ der Fläche T' die Gleichung:

$$S_n(z'') = -\frac{(n-1)!}{p\pi i}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p}\int_{\gamma_\sigma}^{+} P_n\left|\begin{matrix}\zeta\\ z''\end{matrix}\right| du_\sigma^\zeta - \frac{2}{p^2\pi i}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p}\int_{\gamma_\sigma}^{+}\frac{d^n u_\sigma^\zeta}{d\zeta^n}\, du_\sigma^\zeta.$$

Aus dieser letzten Gleichung erhält man noch unter Beachtung der Gleichung $(3_m.)$ des Art. 5 die Gleichung:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int_{b_\nu^+}^{+} S_n(z)\, du_\nu^z = \frac{2}{p}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int_{\gamma_\nu}^{+}\frac{d^n u_\nu^\zeta}{d\zeta^n}\, du_\nu^\zeta$$

oder, da $\int\limits_{\gamma_\nu}^{+} \frac{d^n u_\nu^\zeta}{d\zeta^n}\, du_\nu^\zeta = -\int\limits_{b_\nu^+}^{+} \frac{d^n u_\nu^\zeta}{d\zeta^n}\, du_\nu^\zeta$ ist, die Gleichung:

$$(\Sigma.)\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p}{}' \int\limits_{b_\nu^+}^{+} \left(S_n(z) + \frac{2}{p}\frac{d^n u_\nu^z}{dz^n}\right) du_\nu^z = 0.$$

Eine Funktion $\bar{S}(z)$ der komplexen Veränderlichen z, welche für jeden Punkt z der Fläche T'' einwertig und stetig ist und den Gleichungen (S.) genügt, kann sich, wie aus dem Fundamentalsatze folgt, von der Funktion $S_n(z)$ nur um eine additive Konstante c unterscheiden; genügt sie außerdem noch der Gleichung $(\Sigma.)$, so ergibt sich für c der Wert Null. Die Funktion $S_n(z)$ ist also auch durch die soeben genannten Eigenschaften vollständig bestimmt.

Führt man jetzt schließlich bei der Formel $(D_0.)$ für die auf ihrer rechten Seite an erster Stelle stehende Integralsumme die Funktion $S_n(z)$ mit Hilfe der vorher für sie aufgestellten Gleichung ein, so geht diese Formel über in die Formel:

$$(D.)\qquad \begin{aligned} \frac{d^n\Omega(z)}{dz^n} = & \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\left\{(-1)^n(n-1)!\,\mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)}\, P_n\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau}{}'(-\lambda|n)\,\mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)}\, P_{n+\lambda}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right|\right\} \\ & + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}{}'\left\{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1}{}'\left(\frac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle|n\right) c_{n\mu_\varrho-\lambda}^{(\alpha_\varrho)}\, P_\lambda\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \frac{(-1)^n}{\mu_\varrho}(n-1)!\,\mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)}\, P_{n\mu_\varrho}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho}{}'\left(-\frac{\lambda}{\mu_\varrho}\middle|n\right)\mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)}\, P_{n\mu_\varrho+\lambda}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|\right\} \\ & + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}{}'\left\{\sum_{\lambda=n\iota_\varkappa+1}^{\lambda=p_\varkappa}{}'\left(\frac{\lambda}{\iota_\varkappa}\middle|n\right)\mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\varkappa)}\, P_{\lambda-n\iota_\varkappa}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|\right\} \\ & + (-1)^n\,\mathfrak{S}\,S_n(z) - \frac{1}{p\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}{}'\int\limits_{b_\nu^+}^{+}\frac{d^n\Omega(\zeta)}{d\zeta^n}\,du_\nu^\zeta + \frac{2\mathfrak{S}}{p^2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}{}'\int\limits_{b_\nu^+}^{+}\frac{d^n u_\nu^\zeta}{d\zeta^n}\,du_\nu^\zeta, \end{aligned}$$

und diese neue Formel gilt für jeden von den Punkten ∞, α, ε verschiedenen Punkt z der Fläche T'', da die Differenz ihrer linken und rechten Seite eine in der Fläche T'' einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen z ist, welche für jeden inneren Punkt z und daher auch für jeden Punkt z der Begrenzung den Wert Null besitzt.

In bezug auf die am Schlusse der Formel (D.) stehende Integralsumme möge hier noch bemerkt werden, daß sie immer den Wert Null besitzt, wenn n eine gerade Zahl ist. Wendet man nämlich auf das hinter dem Summenzeichen stehende, über b_ν^+ erstreckte Integral das Verfahren der teilweisen Integration $(n-1)$-mal hintereinander an, so erhält man die Gleichung:

$$\int\limits_{b_\nu^+}^{+}\frac{d^n u_\nu^\zeta}{d\zeta^n}\frac{du_\nu^\zeta}{d\zeta}\,d\zeta = (-1)^{n-1}\int\limits_{b_\nu^+}^{+}\frac{du_\nu^\zeta}{d\zeta}\frac{d^n u_\nu^\zeta}{d\zeta^n}\,d\zeta, \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\cdots,p)}$$

die, wenn n eine gerade Zahl ist, für das in Rede stehende Integral und damit auch für die genannte Integralsumme den Wert Null liefert.

11.

Mit Hilfe der Formel (D.) sollen jetzt die n^{ten} Derivierten der Elementarfunktionen $u_\tau|z|$, $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\sigma\\ z\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\iota\\ z\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\sigma\\ z\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|$ dargestellt werden.

Man setze, unter τ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, p$ verstehend, in dem zuletzt für $\Omega(z)$ aufgestellten Ausdrucke die Größen $\mathfrak{L}$ sämtlich der Null gleich, ebenso die Konstante C, dagegen $\mathfrak{A}_\sigma = \delta_{\tau\sigma}\pi i$, ${\scriptstyle \sigma=1,2,\cdots,p}$; dann geht $\Omega(z)$ in $u_\tau|z|$ über, an Stelle der Entwicklung der Funktion $\Omega(z)$ für das Gebiet des Punktes α_ϱ ${\scriptstyle(\varrho=1,2,\cdots,r)}$, aus der die in der Formel (D.) vorkommenden Größen $c^{(\alpha_\varrho)}$ zu entnehmen sind, tritt die Entwicklung:

$$u_\tau|z| = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} c_\lambda^{(\alpha_\varrho)} z_{\alpha_\varrho}^\lambda, \qquad \text{wobei} \qquad \underset{\lambda=1,2,3,\cdots}{c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}} = \frac{1}{\lambda!}\left(\frac{d^\lambda u_\tau|\zeta|}{d\zeta_{\alpha_\varrho}^\lambda}\right)_0 = -\frac{1}{2\lambda}\underset{\lambda}{\mathfrak{B}}_\tau^{(\alpha_\varrho)},$$

und die Formel (D.) liefert, wenn man sie auf diese spezielle Funktion $\Omega(z) = u_\tau|z|$ bezieht und beachtet, daß bei dieser Funktion die Größe $\mathfrak{S}$ den Wert Null besitzt, für die n^{te} Derivierte der Funktion $u_\tau|z|$ die Darstellung:

$$(\mathrm{D}_1.) \qquad \frac{d^n u_\tau|z|}{dz^n} = -\frac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}{}' \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1}{}' \frac{\left(\frac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\Big| n\right)}{n\mu_\varrho-\lambda}\underset{n\mu_\varrho-\lambda}{\mathfrak{B}}_\tau^{(\alpha_\varrho)}\underset{\lambda}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ z\end{smallmatrix}\right| - \frac{1}{p\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}{}'\int_{b_\nu^+}^{+}\frac{d^n u_\tau^\zeta}{d\zeta^n}\,du_\nu^\zeta. \qquad {\scriptstyle(\tau=1,2,\ \ ,p)}$$

Man verstehe jetzt unter η einen der drei Punkte ε_1, α_σ, ∞_τ — wobei σ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, r$, τ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, q$ bezeichnen soll — und setze in dem mit $\Omega(z)$ bezeichneten Ausdrucke die Größe $\underset{0}{\mathfrak{L}}^{(\eta)}$ der Eins, alle übrigen Größen $\mathfrak{L}$ sowie die Größen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_p$, C der Null gleich; dann geht $\Omega(z)$ in $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$, die Integralsumme $\sum_{\nu=1}^{\nu=p}{}'\int_{b_\nu^+}^{+}\frac{d^n\Omega(\zeta)}{d\zeta^n}\,du_\nu^\zeta$ in $\sum_{\nu=1}^{\nu=p}{}'\int_{b_\nu^+}^{+}\frac{d^n \underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ \zeta\end{smallmatrix}\right|}{d\zeta^n}\,du_\nu^\zeta$ oder, da auf Grund der in Art. 7 unter (8.) an erster Stelle stehenden Gleichung $\frac{d^n \underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ \zeta\end{smallmatrix}\right|}{d\zeta^n} = (n-1)!\,\underset{n}{P}\left|\begin{smallmatrix}\zeta\\ \eta\end{smallmatrix}\right|$ ist, in $p\pi i\, S_n(\eta)$ über, die zu $\Omega(z)$ gehörige Größe $\mathfrak{S}$ erhält den Wert 1 und an Stelle der Entwicklung der Funktion $\Omega(z)$ für das Gebiet des Punktes α_ϱ ${\scriptstyle(\varrho=1,2,\cdots,r)}$ tritt, den Gleichungen (3.) und (1.) des Art. 7 gemäß, die Entwicklung:

$$\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right| = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}{}' c_\lambda^{(\alpha_\varrho)} z_{\alpha_\varrho}^\lambda, \qquad \text{wobei} \qquad \underset{\lambda=1,2,3,\cdots}{c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}} = \frac{1}{\lambda}\underset{\lambda}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ \eta\end{smallmatrix}\right|,$$

wenn der Punkt α_ϱ von dem Punkte η verschieden ist, dagegen die Entwicklung:

$$\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right| = \ln\frac{1}{z_{\alpha_\varrho}} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}{}' c_\lambda^{(\alpha_\varrho)} z_{\alpha_\varrho}^\lambda, \qquad \text{wobei} \qquad \underset{\lambda=1,2,3,\cdots}{c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}} = \frac{1}{\lambda}\left(\underset{\lambda}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| - \frac{1}{\zeta_{\alpha_\varrho}^\lambda}\right)_{\zeta=\alpha_\varrho},$$

wenn der Punkt α_ϱ sich mit dem Punkte η deckt, was übrigens nur in dem Falle, wo η der Punkt α_σ ist, vorkommen kann. Unterscheidet man jetzt in bezug auf η die drei Fälle $\eta = \varepsilon_1$, $\eta = \alpha_\sigma$, $\eta = \infty_\tau$, und bezieht die Formel (D.), indem man zugleich den Buchstaben ε_1, der einen beliebigen von den Punkten $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, $\infty_1, \cdots, \infty_q$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche T'' bezeichnet, durch ε ersetzt, der Reihe nach auf die speziellen Funktionen $\Omega(z) = \underset{0}{P}\left|{\varepsilon \atop z}\right|$, $\Omega(z) = \underset{0}{P}\left|{\alpha_\sigma \atop z}\right|$, $\Omega(z) = \underset{0}{P}\left|{\infty_\tau \atop z}\right|$, so erhält man

für die n^{te} Derivierte der Funktion $\underset{0}{P}\left|{\varepsilon \atop z}\right|$ die Darstellung:

$$(\mathrm{D}_2.) \qquad \frac{d^n \underset{0}{P}\left|{\varepsilon \atop z}\right|}{dz^n} = (-1)^n (n-1)!\, \underset{n}{P}\left|{\varepsilon \atop z}\right| + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1} \frac{\left(\frac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle| n\right)}{n\mu_\varrho-\lambda}\, \underset{n\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop \varepsilon}\right| \underset{\lambda}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop z}\right|$$

$$+ (-1)^n S_n(z) - S_n(\varepsilon) + \frac{2}{p^2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int_{b_\nu^+}^{+} \frac{d^n u_\nu^\zeta}{d\zeta^n}\, du_\nu^\zeta,$$

für die n^{te} Derivierte der Funktion $\underset{0}{P}\left|{\alpha_\sigma \atop z}\right|$ die Darstellung:

$$(\mathrm{D}_3.) \qquad \frac{d^n \underset{0}{P}\left|{\alpha_\sigma \atop z}\right|}{dz^n} = \frac{(-1)^n}{\mu_\sigma}(n-1)!\, \underset{n\mu_\sigma}{P}\left|{\alpha_\sigma \atop z}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\sigma-1} \frac{\left(\frac{n\mu_\sigma-\lambda}{\mu_\sigma}\middle| n\right)}{n\mu_\sigma-\lambda} \left(\underset{n\mu_\sigma-\lambda}{P}\left|{\alpha_\sigma \atop \zeta}\right| - \frac{1}{\zeta_{\alpha_\sigma}^{n\mu_\sigma-\lambda}}\right)_{\zeta=\alpha_\sigma} \underset{\lambda}{P}\left|{\alpha_\sigma \atop z}\right|$$

$$+ \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}{}' \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1} \frac{\left(\frac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle| n\right)}{n\mu_\varrho-\lambda}\, \underset{n\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop \alpha_\sigma}\right| \underset{\lambda}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop z}\right|$$

$$+ (-1)^n S_n(z) - S_n(\alpha_\sigma) + \frac{2}{p^2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int_{b_\nu^+}^{+} \frac{d^n u_\nu^\zeta}{d\zeta^n}\, du_\nu^\zeta, \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, r)$$

für die n^{te} Derivierte der Funktion $\underset{0}{P}\left|{\infty_\tau \atop z}\right|$ die Darstellung:

$$(\mathrm{D}_4.) \qquad \frac{d^n \underset{0}{P}\left|{\infty_\tau \atop z}\right|}{dz^n} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1} \frac{\left(\frac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle| n\right)}{n\mu_\varrho-\lambda}\, \underset{n\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop \infty_\tau}\right| \underset{\lambda}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop z}\right|$$

$$+ (-1)^n S_n(z) - S_n(\infty_\tau) + \frac{2}{p^2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int_{b_\nu^+}^{+} \frac{d^n u_\nu^\zeta}{d\zeta^n}\, du_\nu^\zeta. \qquad (\tau = 1, 2, \cdots, q)$$

Dabei soll der auf der rechten Seite der Formel (D_3.) an dem Summenzeichen stehende Akzent andeuten, daß bei der Summation für den Index ϱ der Wert σ auszuschließen ist.

Man verstehe jetzt unter η wiederum einen der drei Punkte ε_1, α_σ, ∞_τ, unter m im ersten Falle die Zahl m_1, im zweiten Falle die Zahl n_σ, im dritten Falle die Zahl p_τ und setze in dem zuletzt für $\Omega(z)$ aufgestellten Ausdrucke die Größe $\mathfrak{L}_m^{(\eta)}$ der Eins, alle übrigen Größen $\mathfrak{L}$ sowie die Größen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_p$, C der Null gleich; dann geht $\Omega(z)$ in $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$ über, die zugehörige Größe $\mathfrak{S}$ erhält den Wert Null und an Stelle der Entwicklung der Funktion $\Omega(z)$ für das Gebiet des Punktes α_ϱ $\scriptstyle(\varrho=1,2,\cdots,r)$ tritt, den Gleichungen (4.) und (2.) des Art. 7 gemäß, die Entwicklung:

$$\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right| = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}\, z_{\alpha_\varrho}^\lambda, \qquad \text{wobei} \quad \underset{\lambda=1,2,3,\cdots}{c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}} = \frac{1}{(m-1)!\,\lambda}\left(\frac{d^m}{d\zeta_\eta^m}\,\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{matrix}\right|\right)_0,$$

wenn der Punkt α_ϱ von dem Punkte η verschieden ist, dagegen die Entwicklung:

$$\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right| = \frac{1}{z_{\alpha_\varrho}^m} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}\, z_{\alpha_\varrho}^\lambda, \qquad \text{wobei} \quad \underset{\lambda=1,2,3,\cdots}{c_\lambda^{(\alpha_\varrho)}} = \frac{1}{(m-1)!\,\lambda}\left(\frac{d^m}{d\zeta_{\alpha_\varrho}^m}\left[\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{matrix}\right| - \frac{1}{\zeta_{\alpha_\varrho}^\lambda}\right]\right)_0,$$

wenn der Punkt α_ϱ sich mit dem Punkte η deckt, was übrigens nur in dem Falle, wo η der Punkt α_σ ist, vorkommen kann. Unterscheidet man jetzt in bezug auf η die drei Fälle $\eta = \varepsilon_1$, $\eta = \alpha_\sigma$, $\eta = \infty_\tau$ und bezieht die Formel (D.), indem man zugleich den Buchstaben ε_1, der einen beliebigen von den Punkten $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, $\infty_1, \cdots, \infty_q$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche T' bezeichnet, durch ε ersetzt, der Reihe nach auf die speziellen Funktionen $\Omega(z) = \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|$, $\Omega(z) = \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\ z\end{matrix}\right|$, $\Omega(z) = \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\ z\end{matrix}\right|$, so erhält man

für die n^{te} Derivierte der Funktion $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|$ die Darstellung:

$$\text{(D}_5.) \quad \frac{d^n\,\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|}{dz^n} = (-m\,|\,n)\,\underset{n+m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right| + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\;\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1}\frac{\left(\dfrac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\,\Big|\,n\right)}{n\mu_\varrho-\lambda}\left(\frac{d^m}{d\varepsilon^m}\,\underset{n\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \varepsilon\end{matrix}\right|\right)\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|$$
$$-\frac{1}{p\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int_{b_\nu^+}^{+}\frac{d^n\,\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ \zeta\end{matrix}\right|}{d\zeta^n}\,du_\nu^\zeta,$$

für die n^{te} Derivierte der Funktion $\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\ z\end{matrix}\right|$ die Darstellung:

$$\text{(D}_6.) \quad \frac{d^n\,\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\ z\end{matrix}\right|}{dz^n} = \left(-\frac{m}{\mu_\sigma}\,\Big|\,n\right)\underset{n\mu_\sigma+m}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\ z\end{matrix}\right| + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\sigma-1}\frac{\left(\dfrac{n\mu_\sigma-\lambda}{\mu_\sigma}\,\Big|\,n\right)}{n\mu_\sigma-\lambda}\left(\frac{d^m}{d\zeta_{\alpha_\sigma}^m}\left[\underset{n\mu_\sigma-\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\ \zeta\end{matrix}\right| - \frac{1}{\zeta_{\alpha_\sigma}^{n\mu_\sigma-\lambda}}\right]\right)_0\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\ z\end{matrix}\right|$$
$$+\frac{1}{(m-1)!}\sideset{}{'}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\;\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1}\frac{\left(\dfrac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\,\Big|\,n\right)}{n\mu_\varrho-\lambda}\left(\frac{d^m}{d\zeta_{\alpha_\sigma}^m}\,\underset{n\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{matrix}\right|\right)_0\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|$$
$$-\frac{1}{p\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int_{b_\nu^+}^{+}\frac{d^n\,\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\sigma\\ \zeta\end{matrix}\right|}{d\zeta^n}\,du_\nu^\zeta, \qquad {\scriptstyle(\sigma=1,2,\cdots,r)}$$

für die n^{te} Derivierte der Funktion $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|$ die Darstellung:

$$(\mathrm{D}_7.)\quad \frac{d^n \underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz^n} = \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1}\frac{\left(\frac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle| n\right)}{n\mu_\varrho-\lambda}\left(\frac{d^m}{d\zeta_{\infty_\tau}^m}\underset{n\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{smallmatrix}\right|\right)_0 \underset{\lambda}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ z\end{smallmatrix}\right|$$
$$-\frac{1}{p\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int_{b_\nu^+}^{+}\frac{d^n \underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ \zeta\end{smallmatrix}\right|}{d\zeta^n}\,du_\nu^\zeta, \qquad (\tau=1,2,\cdots,q)$$

wenn $m < n\iota_\tau + 1$ ist, dagegen die Darstellung:

$$(\mathrm{D}'_7.)\quad \frac{d^n \underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz^n} = \left(\frac{m}{\iota_\tau}\middle| n\right)\underset{m-n\iota_\tau}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right| + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1}\frac{\left(\frac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle| n\right)}{n\mu_\varrho-\lambda}\left(\frac{d^m}{d\zeta_{\infty_\tau}^m}\underset{n\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{smallmatrix}\right|\right)_0 \underset{\lambda}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ z\end{smallmatrix}\right|$$
$$-\frac{1}{p\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int_{b_\nu^+}^{+}\frac{d^n \underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ \zeta\end{smallmatrix}\right|}{d\zeta^n}\,du_\nu^\zeta, \qquad (\tau=1,2,\cdots,q)$$

wenn $m \geqq n\iota_\tau + 1$ ist.

Dabei soll der auf der rechten Seite der Formel ($\mathrm{D}_6.$) an dem Summenzeichen stehende Akzent andeuten, daß bei der Summation für den Index ϱ der Wert σ auszuschließen ist. Was den Buchstaben m betrifft, so vertritt derselbe bei der Formel ($\mathrm{D}_5.$) die Zahl m_1, bei der Formel ($\mathrm{D}_6.$) die Zahl n_σ, endlich bei den Formeln ($\mathrm{D}_7.$), ($\mathrm{D}'_7.$) die Zahl p_τ, und es kann daher, insoferne m_1, n_σ, p_τ unbestimmte positive ganze Zahlen sind, in den aufgestellten Formeln unter m irgend eine positive ganze Zahl verstanden werden.

Die auf der rechten Seite der Formel ($\mathrm{D}_5.$) vorkommende Integralsumme, bei der, ebenso wie bei der Formel ($\mathrm{D}_2.$), ε einen beliebigen von den Punkten $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \infty_1, \cdots, \infty_q$ verschiedenen inneren Punkt der Fläche T' bezeichnet, kann, da für jeden solchen Punkt ε auf Grund der Definition der Funktion $S_n(z)$:

$$S_n(\varepsilon) = \frac{(n-1)!}{p\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int_{b_\nu^+}^{+}\underset{n}{P}\left|\begin{smallmatrix}\zeta\\ \varepsilon\end{smallmatrix}\right| du_\nu^\zeta, \qquad \frac{d^m S_n(\varepsilon)}{d\varepsilon^m} = \frac{(n-1)!}{p\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\int_{b_\nu^+}^{+}\frac{d^m \underset{n}{P}\left|\begin{smallmatrix}\zeta\\ \varepsilon\end{smallmatrix}\right|}{d\varepsilon^m}\,du_\nu^\zeta,$$

und der Formel (V.) des Art. 7 gemäß $(n-1)!\,\dfrac{d^m \underset{n}{P}\left|\begin{smallmatrix}\zeta\\ \varepsilon\end{smallmatrix}\right|}{d\varepsilon^m} = (m-1)!\,\dfrac{d^n \underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \zeta\end{smallmatrix}\right|}{d\zeta^n}$ ist, durch $\dfrac{p\pi i}{(m-1)!}\,\dfrac{d^m S_n(\varepsilon)}{d\varepsilon^m}$ ersetzt werden, und es tritt dann an Stelle der Formel ($\mathrm{D}_5.$) die Formel:

$$[\mathrm{D}_5.]\quad \frac{d^n \underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz^n} = (-m\,|\,n)\underset{n+m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right| + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1}\frac{\left(\frac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle| n\right)}{n\mu_\varrho-\lambda}\left(\frac{d^m}{d\varepsilon^m}\underset{n\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ \varepsilon\end{smallmatrix}\right|\right)\underset{\lambda}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ z\end{smallmatrix}\right|$$
$$-\frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^m S_n(\varepsilon)}{d\varepsilon^m}.$$

Die Formeln (D_2.), [D_5.] gelten ihrer Ableitung gemäß für jeden von den Punkten α, ∞ verschiedenen inneren Punkt ε der Fläche T'. Da jedoch bei jeder dieser beiden Formeln die Differenz der linken und rechten Seite bei festem z eine in der Fläche T' einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen ε ist, welche für jeden inneren Punkt ε und daher auch für jeden Punkt ε der Begrenzung den Wert Null besitzt, so gelten diese Formeln auch noch für jeden an der Begrenzung von T' gelegenen Punkt ε; nur müssen, wenn z ebenfalls an der Begrenzung liegt, die Punkte ε, z als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen.

Es soll jetzt schließlich noch die n^{te} Derivierte der Funktion $S_m(z)$ dargestellt werden. Zu dem Ende ersetze man bei der Gleichung:

$$\frac{d^n S_m(z)}{dz^n} = \frac{(m-1)!}{p\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int\limits_{b_\nu^+}^{+} \frac{d^n \underset{m}{P}\begin{vmatrix}\zeta\\z\end{vmatrix}}{dz^n}\, du_\nu^\zeta,$$

welche für jeden von den Punkten α, ∞ verschiedenen inneren Punkt z der Fläche T' gilt, die hinter dem Integralzeichen stehende Derivierte durch den ihr auf Grund der Formel [D_5.] entsprechenden Ausdruck. Man erhält dann die Formel:

$$(\text{D}_8.)\qquad \frac{d^n S_m(z)}{dz^n} = (-1)^n S_{n+m}(z) + \frac{1}{p\pi i} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\mu_\varrho-1} \frac{\left(\dfrac{n\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle| n\right)}{n\mu_\varrho-\lambda} \left(\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int\limits_{b_\nu^+}^{+} \frac{d^m \underset{n\mu_\varrho-\lambda}{P}\begin{vmatrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{vmatrix}}{d\zeta^m}\, du_\nu^\zeta\right) \underset{\lambda}{P}\begin{vmatrix}\alpha_\varrho\\z\end{vmatrix}$$
$$- \frac{1}{p\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int\limits_{b_\nu^+}^{+} \frac{d^m S_n(\zeta)}{d\zeta^m}\, du_\nu^\zeta,$$

die ihrer Ableitung gemäß für jeden von den Punkten α, ∞ verschiedenen inneren Punkt z der Fläche T' gilt, die aber auch noch — da die Differenz ihrer linken und rechten Seite eine in der Fläche T' einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen z ist, welche für jeden inneren Punkt z und daher auch für jeden Punkt z der Begrenzung den Wert Null besitzt — für jeden an der Begrenzung von T' gelegenen Punkt z gilt.

Nachdem so die n^{ten} Derivierten der zur Charakteristik $\binom{1\,\cdots\,1}{1\,\cdots\,1}$ gehörigen Elementarfunktionen dargestellt sind, läßt sich jetzt die Funktion $\underset{m}{P}\begin{vmatrix}\varepsilon\\z\end{vmatrix}$, indem man die in Art. 7 unter (8.) für sie aufgestellte Gleichung:

$$(8_1.)\qquad \underset{m}{P}\begin{vmatrix}\varepsilon\\z\end{vmatrix} = \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^m \underset{0}{P}\begin{vmatrix}z\\ \varepsilon\end{vmatrix}}{d\varepsilon^m}$$

mit den Formeln (D_2.), (D_3.), (D_4.) der Reihe nach verbindet, durch Elementarfunktionen mit dem Argumente ε und durch die Funktion $S_m(\varepsilon)$ darstellen. Um diese Darstellung zu erhalten, beachte man, daß die Formel $(\mathrm{D}_2.)$ für irgend zwei von den Punkten α, ∞ verschiedene Punkte ε, z der Fläche T' gilt, wenn nur diese Punkte als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen, daß dagegen die Formeln $(\mathrm{D}_3.)$, $(\mathrm{D}_4.)$ für jeden von den Punkten α, ∞ verschiedenen Punkt z der Fläche T' gelten. Ersetzt man daraufhin bei den genannten drei Formeln in neuer Bezeichnung den Buchstaben z durch den Buchstaben ε und gleichzeitig den, nur bei der Formel $(\mathrm{D}_2.)$ vorkommenden, Buchstaben ε durch den Buchstaben z, endlich den Buchstaben n durch den Buchstaben m, so erhält man zunächst drei Gleichungen, deren linke Seiten von den Größen:

$$\frac{d^m \underset{0}{P}\left|{}^{z}_{\varepsilon}\right|}{d\varepsilon^m}, \qquad \frac{d^m \underset{0}{P}\left|{}^{\alpha_\sigma}_{\varepsilon}\right|}{d\varepsilon^m}, \qquad \frac{d^m \underset{0}{P}\left|{}^{\infty_\tau}_{\varepsilon}\right|}{d\varepsilon^m}$$

beziehungsweise gebildet werden. Führt man nun noch an Stelle dieser Größen auf Grund der vorstehenden Gleichung $(8_1.)$ die Größen:

$$(m-1)!\,\underset{m}{P}\left|{}^{\varepsilon}_{z}\right|, \qquad (m-1)!\,\underset{m}{P}\left|{}^{\varepsilon}_{\alpha_\sigma}\right|, \qquad (m-1)!\,\underset{m}{P}\left|{}^{\varepsilon}_{\infty_\tau}\right|$$

beziehungsweise ein, so erhält man schließlich die drei Gleichungen:

$$(\mathrm{E}_z.)\quad \underset{m}{P}\left|{}^{\varepsilon}_{z}\right| = (-1)^m \underset{m}{P}\left|{}^{z}_{\varepsilon}\right| + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\varrho-1}\frac{\left(\frac{m\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\Big|m\right)}{m\mu_\varrho-\lambda}\underset{m\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|{}^{\alpha_\varrho}_{z}\right|\underset{\lambda}{P}\left|{}^{\alpha_\varrho}_{\varepsilon}\right|$$
$$+\frac{(-1)^m}{(m-1)!}S_m(\varepsilon) - \frac{1}{(m-1)!}S_m(z) + \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{2}{p^2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}{}'\int_{b_\nu^+}^{+}\frac{d^m u_\nu^\zeta}{d\zeta^m}\,du_\nu^\zeta,$$

$$(\mathrm{E}_\alpha.)\quad \underset{m}{P}\left|{}^{\varepsilon}_{\alpha_\sigma}\right| = \frac{(-1)^m}{\mu_\sigma}\underset{m\mu_\sigma}{P}\left|{}^{\alpha_\sigma}_{\varepsilon}\right| + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\sigma-1}\frac{\left(\frac{m\mu_\sigma-\lambda}{\mu_\sigma}\Big|m\right)}{m\mu_\sigma-\lambda}\left(\underset{m\mu_\sigma-\lambda}{P}\left|{}^{\alpha_\sigma}_{\zeta}\right| - \frac{1}{\zeta_{\alpha_\sigma}^{m\mu_\sigma-\lambda}}\right)_{\zeta=\alpha_\sigma}\underset{\lambda}{P}\left|{}^{\alpha_\sigma}_{\varepsilon}\right|$$
$$+\frac{1}{(m-1)!}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}{}'\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\varrho-1}\frac{\left(\frac{m\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\Big|m\right)}{m\mu_\varrho-\lambda}\underset{m\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|{}^{\alpha_\varrho}_{\alpha_\sigma}\right|\underset{\lambda}{P}\left|{}^{\alpha_\varrho}_{\varepsilon}\right|$$
$$+\frac{(-1)^m}{(m-1)!}S_m(\varepsilon) - \frac{1}{(m-1)!}S_m(\alpha_\sigma) + \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{2}{p^2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}{}'\int_{b_\nu^+}^{+}\frac{d^m u_\nu^\zeta}{d\zeta^m}\,du_\nu^\zeta, \qquad (\sigma=1,2,\cdots,r)$$

$$(\mathrm{E}_\infty.)\quad \underset{m}{P}\left|{}^{\varepsilon}_{\infty_\tau}\right| = \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\varrho-1}\frac{\left(\frac{m\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\Big|m\right)}{m\mu_\varrho-\lambda}\underset{m\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|{}^{\alpha_\varrho}_{\infty_\tau}\right|\underset{\lambda}{P}\left|{}^{\alpha_\varrho}_{\varepsilon}\right|$$
$$+\frac{(-1)^m}{(m-1)!}S_m(\varepsilon) - \frac{1}{(m-1)!}S_m(\infty_\tau) + \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{2}{p^2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}{}'\int_{b_\nu^+}^{+}\frac{d^m u_\nu^\zeta}{d\zeta^m}\,du_\nu^\zeta, \qquad (\tau=1,2,\cdots,q)$$

von denen die erste für irgend zwei von den Punkten α, ∞ verschiedene Punkte ε, z der Fläche T' gilt, wenn nur diese Punkte als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen, die zweite und dritte dagegen für jeden von den Punkten α, ∞ verschiedenen Punkt ε der Fläche T' gilt. Der auf der rechten Seite der Formel (E_α.) an dem Summenzeichen stehende Akzent soll andeuten, daß bei der Summation für den Index ϱ der Wert σ auszuschließen ist.

Jetzt ist man auch imstande, das Verhalten der Funktionen $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \alpha_\sigma\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \infty_\tau\end{smallmatrix}\right|$ als Funktionen des Parameters ε vollständig zu charakterisieren. Aus der Gleichung (E_z.) erkennt man, daß die Funktion $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|$ als Funktion von ε unendlich wird wie $\frac{(-1)^m}{(\varepsilon - z)^m}$, wenn der in der Fläche T' bewegliche Punkt ε sich dem festen Punkte z unbegrenzt nähert, und daß diese Funktion im übrigen nur dann noch unendlich werden kann, und bei nicht spezieller Lage des Punktes z auch stets unendlich wird, wenn der Punkt ε sich einem der Punkte $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ unbegrenzt nähert. Was dagegen die Funktionen $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \alpha_\sigma\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \infty_\tau\end{smallmatrix}\right|$ betrifft, so können dieselben, wie die Gleichungen (E_α.), (E_∞.) zeigen, nur dann unendlich werden, wenn der Punkt ε sich einem der Punkte $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ unbegrenzt nähert. Beachtet man nun noch, daß die drei in Rede stehenden Funktionen sich auf Grund der Gleichung (8_1.) von den nach ε genommenen m^{ten} Derivierten der drei Funktionen $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}z\\ \varepsilon\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\sigma\\ \varepsilon\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ \varepsilon\end{smallmatrix}\right|$ beziehungsweise nur um einen Zahlenfaktor unterscheiden, und daß eine jede dieser drei Derivierten gegen Null konvergiert, wenn der Punkt ε dem Punkte $\infty_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, q)$ unbegrenzt zustrebt, so erkennt man endlich noch, daß die Funktionen $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \alpha_\sigma\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \infty_\tau\end{smallmatrix}\right|$ stets gegen Null konvergieren, wenn der Punkt ε irgend einem der Punkte $\infty_1, \cdots, \infty_q$ unbegrenzt zustrebt. Das eigentümliche Verhalten der Funktion $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|$ beim Anrücken des Punktes ε gegen einen Punkt α oder einen Punkt ∞ steht im Einklange mit der aus den Gleichungen (8.) sich ergebenden Tatsache, daß die Elementarfunktion $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|$ nicht in die Elementarfunktionen $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ z\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty\\ z\end{smallmatrix}\right|$ übergeht, wenn man den Punkt ε dem Punkte α beziehungsweise dem Punkte ∞ unbegrenzt zustreben läßt.

12.

Man lasse jetzt bei dem der Formel (D.) des Art. 10 zu Grunde liegenden, in Art. 9 aufgestellten Ausdrucke $\Omega(z)$ an Stelle einer jeden der $t + r + q$ Konstanten $\mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_1)}, \cdots, \mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_t)}$, $\mathfrak{L}_0^{(\alpha_1)}, \cdots, \mathfrak{L}_0^{(\alpha_r)}$, $\mathfrak{L}_0^{(\infty_1)}, \cdots, \mathfrak{L}_0^{(\infty_q)}$ und der p Konstanten $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_p$ die Null treten. Der dadurch entstehende Ausdruck:

$$W(z) = \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\left(\mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{m_\tau}^{(\varepsilon_\tau)} \underset{m_\tau}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right|\right)$$
$$+ \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\left(\mathfrak{L}_1^{(\alpha_\varrho)} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{n_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} \underset{n_\varrho}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|\right)$$
$$+ \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\left(\mathfrak{L}_1^{(\infty_\varkappa)} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{p_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)} \underset{p_\varkappa}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|\right) + C,$$

bei dem $m_1, \cdots, m_t, n_1, \cdots, n_r, p_1, \cdots, p_q$ unbestimmte positive ganze Zahlen bezeichnen, und die Konstanten $\mathfrak{L}$, C keinen Bedingungen unterworfen sind, stellt dann die allgemeinste zur Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}1 \cdots 1\\ 1 \cdots 1\end{smallmatrix}\right)$ gehörige Funktion W dar, welche in je zwei zu einem der Schnitte a, l gehörigen entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ denselben Wert besitzt, und zwar ist speziell, wenn für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ zur Abkürzung

$$\mathfrak{B}_\nu = \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau} \mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)} \underset{\lambda}{\mathfrak{B}_\nu^{(\varepsilon_\tau)}} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho} \mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)} \underset{\lambda}{\mathfrak{B}_\nu^{(\alpha_\varrho)}} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p_\varkappa} \mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\varkappa)} \underset{\lambda}{\mathfrak{B}_\nu^{(\infty_\varkappa)}}$$

gesetzt wird,

$$(\mathrm{S.})\quad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \{\, W(z)^+ = W(z)^-, \\ &\text{längs } b_\nu \{\, W(z)^+ = W(z)^- + \mathfrak{B}_\nu, \qquad {\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p,} \\ &\text{längs } c_\nu \{\, W(z)^+ = W(z)^-, \\ &\text{längs } l_\eta \{\, W(z)^+ = W(z)^-, \qquad {\scriptstyle \eta = \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \infty_1, \cdots, \infty_q.} \end{aligned}$$

Infolgedessen ist die Funktion $W(z)$ schon in der aus T'' durch Aufhebung der Schnitte l entstehenden Fläche T' einwertig, und es darf daher für die Untersuchung dieser Funktion die Fläche T' zu Grunde gelegt werden. Noch möge für das Folgende vorausgesetzt werden, daß für $\varrho = 1, 2, \cdots, r$ $n_\varrho > \mu_\varrho$ ist; dadurch wird die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beschränkt, da man von dem Falle, wo $n_\varrho > \mu_\varrho$, etwa $n_\varrho = \mu_\varrho + g$ ist, zu dem Falle, wo $n_\varrho \overline{\gtrless} \mu_\varrho$, etwa $n_\varrho = \mu_\varrho + 1 - h$ ist, auch dadurch übergehen kann, daß man den Konstanten $\mathfrak{L}_{\mu_\varrho+g}^{(\alpha_\varrho)}, \mathfrak{L}_{\mu_\varrho+g-1}^{(\alpha_\varrho)}, \cdots, \mathfrak{L}_{\mu_\varrho+2-h}^{(\alpha_\varrho)}$ den Wert Null erteilt.

Die definierte Funktion $W(z)$ läßt sich nun auch durch die Derivierte einer zur Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}1 \cdots 1\\ 1 \cdots 1\end{smallmatrix}\right)$ gehörigen Funktion W und p ausgezeichnete Funktionen $W(z)$ der hier betrachteten Art linear darstellen. Zu dieser Darstellung gelangt man durch dasselbe Verfahren, welches in Art. 7 des dritten Abschnittes zu dem gleichen Zwecke angewandt wurde. Ein Blick auf die dort durchgeführten Untersuchungen zeigt aber, daß die hier verlangte Darstellung aus der dort erhaltenen unmittelbar hervorgeht, wenn man darin $\mathfrak{p} = 0$ setzt, also die beiden dort vorkommenden $\mathfrak{p}$-gliedrigen Summen unterdrückt, weiter dann, entsprechend der in diesem Abschnitte für die p

allenthalben endlichen Elementarfunktionen gewählten Bezeichnung, $w_\nu|z|$ durch $u_\nu|z|$ ersetzt und an Stelle der Konstante $\mathfrak{K}_\nu$ die eben definierte Konstante $\mathfrak{B}_\nu$ treten läßt, endlich noch bei $\overline{P}_1$ den Horizontalstrich wegläßt. Man erhält dann für die Funktion $W(z)$ die für jeden von den Punkten $\varepsilon, \alpha, \infty$ verschiedenen inneren Punkt z der Fläche T'' geltende Darstellung:

$$W(z) = -\sum_{\tau=1}^{\tau=t}\left\{\mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)}\frac{d\,P_0\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right|}{dz} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau-1}\frac{1}{\lambda}\mathfrak{L}_{\lambda+1}^{(\varepsilon_\tau)}\frac{d\,P_\lambda\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right|}{dz}\right\}$$

$$-\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\left\{\mu_\varrho\mathfrak{L}_{\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)}\frac{d\,P_0\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|}{dz} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho-\mu_\varrho}\frac{\mu_\varrho}{\lambda}\mathfrak{L}_{\lambda+\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)}\frac{d\,P_\lambda\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|}{dz}\right\}$$

$$+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\left\{\iota_\varkappa c_{\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)}\frac{d\,P_0\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|}{dz} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota_\varkappa}\frac{\iota_\varkappa}{\lambda}c_{\iota_\varkappa-\lambda}^{(\infty_\varkappa)}\frac{d\,P_\lambda\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|}{dz} + \sum_{\lambda=\iota_\varkappa+1}^{\lambda=\iota_\varkappa+p_\varkappa}\frac{\iota_\varkappa}{\lambda}\mathfrak{L}_{\lambda-\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)}\frac{d\,P_\lambda\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|}{dz}\right\}$$

$$-\frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\frac{du_\nu|z|}{dz}\int\limits_{b_\nu^+}^{+}W(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\mathfrak{B}_\nu\int\limits_{b_\nu^+}^{+}P_1\left|\begin{matrix}z\\ \zeta\end{matrix}\right|d\zeta.$$

Die hierbei auftretenden Konstanten $c_0^{(\infty_\varkappa)}, c_1^{(\infty_\varkappa)}, \cdots, c_{\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)}$ sind die Koeffizienten, welche in der Entwicklung der Funktion $W(z)$ für das Gebiet des Punktes $\infty_\varkappa$ den Potenzen $z_{\infty_\varkappa}^0, z_{\infty_\varkappa}^1, \cdots, z_{\infty_\varkappa}^{\iota_\varkappa}$ beziehungsweise zukommen. Nach der zu Anfang der Untersuchung gemachten, auf den Übergang von dem der Ableitung der Formel zu Grunde gelegten Falle $n_\varrho > \mu_\varrho$ $(\varrho = 1, 2, \cdots, r)$ zu dem Falle $n_\varrho \gtreqless \mu_\varrho$ sich beziehenden Bemerkung sind bei dem zu einem bestimmten Index ϱ gehörigen Gliede der auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung in der zweiten Zeile stehenden Summe, wenn $n_\varrho = \mu_\varrho$ ist, alle Terme bis auf den ersten, wenn dagegen $n_\varrho < \mu_\varrho$ ist, alle Terme überhaupt zu unterdrücken, sodaß also für $n_\varrho < \mu_\varrho$ das ganze Glied in Wegfall kommt.

Die auf der rechten Seite der für $W(z)$ gewonnenen Gleichung vorkommenden, über die positive Seite des Schnittes b_ν zu erstreckenden Integrale sollen jetzt unter der, für die Herleitung dieser Gleichung gemachten, Voraussetzung, daß die Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ sowie der Punkt z im Innern der Fläche T'' liegen, näher untersucht werden. Um zunächst eine für diese Untersuchung nötige Hilfsformel zu erhalten, beziehe man die für jeden Punkt z der Fläche T'' geltende Formel (E_z.) des vorhergehenden Artikels auf einen Punkt $z = \zeta$ von b_ν^+, multipliziere alsdann linke und rechte Seite mit $d\zeta$ und integriere in positiver Richtung über die positive Seite des Schnittes b_ν, indem man beachtet, daß für $m = 1, 2, 3, \cdots$

$$\int\limits_{b_\nu^+}^{+}P_m\left|\begin{matrix}\zeta\\ \varepsilon\end{matrix}\right|d\zeta = \frac{1}{(m-1)!}\int\limits_{b_\nu^+}^{+}\frac{d^m\,P_0\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ \zeta\end{matrix}\right|}{d\zeta^m}\,d\zeta$$

ist, und daß der Wert des hier rechts stehenden Integrals für $m=1$ der Differenz $\mathfrak{C}_\nu - \mathfrak{A}_\nu$ der der Funktion $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|$ längs c_ν, a_ν beziehungsweise zukommenden Konstanten $\mathfrak{C}_\nu = -\frac{2\pi i}{p}$, $\mathfrak{A}_\nu = 0$, für $m = 2, 3, \cdots$ der Differenz der der Funktion $\dfrac{d^{m-1}\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz^{m-1}}$ längs c_ν, a_ν beziehungsweise zukommenden Konstanten $\mathfrak{C}_\nu = 0$, $\mathfrak{A}_\nu = 0$ gleich ist, daß also der Wert des links stehenden Integrals für $m = 1, 2, 3, \cdots$ durch $-\delta_{m1}\frac{2\pi i}{p}$ dargestellt werden kann. Man erhält dann die erwähnte, für jeden von den Punkten α, ∞ verschiedenen inneren Punkt ε der Fläche T'' geltende Hilfsformel:

$$\text{(H.)}\quad \int\limits_{b_\nu^+}^{+} \underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| d\zeta = \delta_{m1}\frac{2\pi i}{p} + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\varrho-1}\frac{\left(\frac{m\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle| m\right)}{m\mu_\varrho-\lambda}\left(\int\limits_{b_\nu^+}^{+}\underset{m\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| d\zeta\right)\underset{\lambda}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ \varepsilon\end{smallmatrix}\right| - \frac{1}{(m-1)!}\int\limits_{b_\nu^+}^{+} S_m(\zeta)\,d\zeta.$$
$$(\nu = 1, 2, \cdots, p)$$

Was nun das an erster Stelle zu untersuchende, nur von den Punkten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ abhängige, Integral $\int\limits_{b_\nu^+}^{+} W(\zeta)\,d\zeta$ $(\nu = 1, 2, \cdots, p)$ betrifft, so erhält man für dasselbe, wenn man die darin vorkommende Größe $W(\zeta)$ auf Grund der zu Anfang dieses Artikels aufgestellten, die Funktion $W(z)$ für jeden Punkt z der Fläche T'' definierenden Gleichung durch den ihr entsprechenden Ausdruck ersetzt, zunächst die Gleichung:

$$(1.)\quad \int\limits_{b_\nu^+}^{+} W(\zeta)\,d\zeta = \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\sum_{m=1}^{m=m_\tau}\mathfrak{L}_m^{(\varepsilon_\tau)}\int\limits_{b_\nu^+}^{+}\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_\tau\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| d\zeta + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{m=1}^{m=n_\varrho}\mathfrak{L}_m^{(\alpha_\varrho)}\int\limits_{b_\nu^+}^{+}\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| d\zeta + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{m=1}^{m=p_\varkappa}\mathfrak{L}_m^{(\infty_\varkappa)}\int\limits_{b_\nu^+}^{+}\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| d\zeta,$$
$$(\nu = 1, 2, \cdots, p)$$

und schließlich, wenn man das auf der rechten Seite an erster Stelle stehende Integral auf Grund der Hilfsformel (H.) durch Elementarfunktionen mit dem Argumente ε_τ ausdrückt, die Gleichung:

$$(2.)\quad \int\limits_{b_\nu^+}^{+} W(\zeta)\,d\zeta = K_\nu^{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)},$$

wobei zur Abkürzung

$$(3.)\quad \begin{aligned} K_\nu^{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)} = {} & \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\sum_{m=1}^{m=m_\tau}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\varrho-1}\frac{\mathfrak{L}_m^{(\varepsilon_\tau)}}{(m-1)!}\frac{\left(\frac{m\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle| m\right)}{m\mu_\varrho-\lambda}\left(\int\limits_{b_\nu^+}^{+}\underset{m\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| d\zeta\right)\underset{\lambda}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ \varepsilon_\tau\end{smallmatrix}\right| \\ & + \frac{2\pi i}{p}\sum_{\tau=1}^{\tau=t}\mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)} - \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\sum_{m=1}^{m=m_\tau}\frac{\mathfrak{L}_m^{(\varepsilon_\tau)}}{(m-1)!}\int\limits_{b_\nu^+}^{+} S_m(\zeta)\,d\zeta \\ & + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{m=1}^{m=n_\varrho}\mathfrak{L}_m^{(\alpha_\varrho)}\int\limits_{b_\nu^+}^{+}\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| d\zeta + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{m=1}^{m=p_\varkappa}\mathfrak{L}_m^{(\infty_\varkappa)}\int\limits_{b_\nu^+}^{+}\underset{m}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| d\zeta \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Das an zweiter Stelle zu untersuchende, nur von dem Punkte z abhängige, Integral $\int\limits_{b_\sigma^+}^{+} P\left|\begin{smallmatrix} z \\ \zeta \end{smallmatrix}\right|_1 d\zeta$ $(\sigma=1,2,\cdots,p)$ läßt sich durch Elementarfunktionen mit dem Argumente z darstellen. Um diese Darstellung zu erhalten, lasse man in der Hilfsformel (H.) an Stelle des Punktes ε den Punkt z, an Stelle des Buchstabens ν den Buchstaben σ treten und setze $m=1$. Man gewinnt auf diese Weise die Gleichung:

$$(1'.)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b_\sigma^+}^{+} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix} z \\ \zeta \end{matrix}\right| d\zeta = W^{(\sigma)}(z),$$

wobei zur Abkürzung

$$(2'.)\qquad W^{(\sigma)}(z) = \frac{1}{p} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu_\varrho-1}\frac{1}{\mu_\varrho}\left(\int\limits_{b_\sigma^+}^{+}\underset{\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho \\ \zeta\end{matrix}\right| d\zeta\right)\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho \\ z\end{matrix}\right| - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b_\sigma^+}^{+} S_1(\zeta)\,d\zeta$$

gesetzt ist. Die durch die letzte Gleichung für jeden Punkt z der Fläche T' definierte Funktion $W^{(\sigma)}(z)$ ist eine zur Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}1 & \cdots & 1\\ 1 & \cdots & 1\end{smallmatrix}\right)$ gehörige Funktion $W(z)$ von der in diesem Artikel betrachteten Art, die nur für die Punkte $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ unstetig und zwar algebraisch unendlich wird, und deren Werte in je zwei zu einem der Schnitte a, b, c gehörigen entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-$ in der Weise verknüpft sind, daß

$$(3'.)\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \{\, W^{(\sigma)}(z)^+ = W^{(\sigma)}(z)^-, \\ &\text{längs } b_\nu \{\, W^{(\sigma)}(z)^+ = W^{(\sigma)}(z)^- + \mathfrak{B}_\nu^{(\sigma)}, \\ &\text{längs } c_\nu \{\, W^{(\sigma)}(z)^+ = W^{(\sigma)}(z)^-, \end{aligned}\qquad \nu=1,2,\cdots,p,$$

ist, wobei zur Abkürzung

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_\nu^{(\sigma)} &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu_\varrho-1}\frac{1}{\mu_\varrho}\left(\int\limits_{b_\sigma^+}^{+}\underset{\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho \\ \zeta\end{matrix}\right| d\zeta\right)\underset{\lambda}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\alpha_\varrho)} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b_\sigma^+}^{+}\left\{\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu_\varrho-1}\frac{1}{\mu_\varrho}\underset{\lambda}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\alpha_\varrho)}\underset{\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho \\ \zeta\end{matrix}\right|\right\} d\zeta\end{aligned}$$

gesetzt ist. Das in der letzten Zeile stehende Integral kann ausgewertet werden, indem man die zwischen den geschweiften Klammern stehende Größe auf Grund der Formel:

$$\frac{du_\nu|\zeta|}{d\zeta} = -\frac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu_\varrho-1}\frac{1}{\mu_\varrho}\underset{\lambda}{\mathfrak{B}}{}_\nu^{(\alpha_\varrho)}\underset{\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho \\ \zeta\end{matrix}\right| - \frac{1}{p\pi i}\sum_{\nu'=1}^{\nu'=p}\int\limits_{b_{\nu'}^+}^{+}\frac{du_\nu^{\zeta'}}{d\zeta'}\,du_{\nu'}^{\zeta'}$$

durch die Größe $-2\frac{du_\nu|\zeta|}{d\zeta}-2c$ ersetzt — wobei c das auf der rechten Seite der vorstehenden Formel hinter dem letzten Minuszeichen stehende Schlußglied vertritt, also eine von ζ freie Größe ist — und alsdann die Integration ausführt; man erhält so für das Integral den Wert $2\delta_{\nu\sigma}\pi i$ und erkennt nun schließlich, daß

(4'.) $$\mathfrak{B}_\nu^{(\sigma)} = \delta_{\nu\sigma}$$

ist, daß also $\mathfrak{B}_\nu^{(\sigma)}$ nur dann einen von Null verschiedenen Wert und zwar den Wert 1 besitzt, wenn $\nu=\sigma$ ist. Die soeben aufgestellte, bei der Auswertung des Integrals benutzte Formel geht aus der Formel (D_1.) des Art. 11 hervor, indem man bei dieser zunächst in neuer Bezeichnung ν durch ν', ζ durch ζ' ersetzt, alsdann $n=1$, $\tau=\nu$, $z=\zeta$ setzt und endlich noch an Stelle des Summationsbuchstabens λ einen neuen Summationsbuchstaben λ' vermittels der Gleichung $\lambda=\mu_\varrho-\lambda'$ einführt.

Mit Hilfe der Gleichungen (2.) und (1'.) kann man jetzt der vorher für $W(z)$ erhaltenen Gleichung die Gestalt:

(D.) $$W(z) = \frac{dW^*(z)}{dz} + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{B}_\nu W^{(\nu)}(z)$$

geben, wobei $W^*(z)$ durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} W^*(z) = &-\sum_{\tau=1}^{\tau=t}\left\{\quad \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)} \underset{0}{P}\left|{\varepsilon_\tau \atop z}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau-1} \frac{1}{\lambda}\mathfrak{L}_{\lambda+1}^{(\varepsilon_\tau)} \underset{\lambda}{P}\left|{\varepsilon_\tau \atop z}\right|\right\} \\ &-\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\left\{\mu_\varrho \mathfrak{L}_{\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} \underset{0}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop z}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho-\mu_\varrho} \frac{\mu_\varrho}{\lambda}\mathfrak{L}_{\lambda+\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} \underset{\lambda}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop z}\right|\right\} \\ &+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\left\{\iota_\varkappa\, c_{\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)} \underset{0}{P}\left|{\infty_\varkappa \atop z}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota_\varkappa} \frac{\iota_\varkappa}{\lambda} c_{\iota_\varkappa-\lambda}^{(\infty_\varkappa)} \underset{\lambda}{P}\left|{\infty_\varkappa \atop z}\right| + \sum_{\lambda=\iota_\varkappa+1}^{\lambda=\iota_\varkappa+p_\varkappa} \frac{\iota_\varkappa}{\lambda}\mathfrak{L}_{\lambda-\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)} \underset{\lambda}{P}\left|{\infty_\varkappa \atop z}\right|\right\} \\ &-\frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p} K_\nu^{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)} u_\nu|z| \end{aligned}$$

— bei der $K_\nu^{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)}$ die unter (3.) definierte Größe bezeichnet —, $W^{(\nu)}(z)$ $(\nu=1,2,\cdots,p)$ durch die Gleichung:

$$W^{(\nu)}(z) = \frac{1}{p} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu_\varrho-1}\frac{1}{\mu_\varrho}\left(\int_{b_\nu^+}^{+} \underset{\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop \zeta}\right| d\zeta\right) \underset{\lambda}{P}\left|{\alpha_\varrho \atop z}\right| - \frac{1}{2\pi i}\int_{b_\nu^+}^{+} S_1(\zeta)\, d\zeta,$$

endlich $\mathfrak{B}_\nu$ $(\nu=1,2,\cdots,p)$ durch die schon früher aufgestellte Gleichung:

$$\mathfrak{B}_\nu = \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau}\mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)} \underset{\lambda}{\mathfrak{B}_\nu^{(\varepsilon_\tau)}} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho}\mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)} \underset{\lambda}{\mathfrak{B}_\nu^{(\alpha_\varrho)}} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p_\varkappa}\mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\varkappa)} \underset{\lambda}{\mathfrak{B}_\nu^{(\infty_\varkappa)}}$$

bestimmt ist. Trotzdem die Gleichung (D.), zur Vereinfachung der Untersuchung, nur für den Fall abgeleitet worden ist, daß die Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ sowie der Punkt z im Innern der Fläche T' liegen, gilt sie auch noch, wenn die genannten Punkte teilweise oder sämtlich der Begrenzung von T' angehören. Unter der, die Allgemeinheit der Untersuchung nur scheinbar beschränkenden, Voraussetzung, daß die unbestimmten Konstanten $\mathfrak{L}^{(\varepsilon_\tau)}$ $(\tau=1,2,\cdots,t)$ durch eine Lagenänderung der Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_t$ nicht beeinflußt werden, ändert sich nämlich der Wert des Ausdruckes:

$$W(z) - \frac{d\,W^*(z)}{dz} - \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{B}_\nu W^{(\nu)}(z),$$

bei dem $W(z)$ die zu Anfang dieses Artikels aufgestellte lineare Verbindung von Elementarfunktionen vertritt, als Funktion der $t+1$ in T' frei beweglichen Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t, z$ betrachtet, stetig, wenn einer dieser Punkte durch stetige Bewegung in einen Punkt der Begrenzung von T' übergeht, und es kann daher der in Rede stehende Ausdruck, da er der Gleichung (D.) gemäß immer den Wert Null besitzt, wenn die genannten Punkte im Innern der Fläche T' liegen, nicht einen von Null verschiedenen Wert haben, wenn diese Punkte teilweise oder sämtlich der Begrenzung von T' angehören.

Infolge der das Verhalten der Funktionen $W(z)$, $W^{(\sigma)}(z)$ längs der Begrenzung von T' charakterisierenden Gleichungen (S.), (3'.), (4'.) hat die Funktion $W(z) - \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} \mathfrak{B}_\sigma W^{(\sigma)}(z)$ und damit auch die nach Gleichung (D.) mit ihr identische Funktion $\frac{d\,W^*(z)}{dz}$ in irgend zwei zum Schnitte b_ν gehörigen entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ denselben Wert, sodaß also längs $b_\nu \left\{ \frac{d\,W^*(z)^+}{dz} = \frac{d\,W^*(z)^-}{dz} \right.$ ist. Andererseits ergibt sich aus dem die Funktion $W^*(z)$ definierenden Ausdrucke, daß längs $b_\nu \left\{ \frac{d\,W^*(z)^+}{dz} = \frac{d\,W^*(z)^-}{dz} + \frac{2}{p}\left(-\sum_{\tau=1}^{\tau=t} \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)} - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \mu_\varrho \mathfrak{L}_{\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \iota_\varkappa c_{\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)} \right) \frac{d u_\nu^z}{dz} \right.$ ist. Vergleicht man diese beiden Resultate und beachtet, daß $\frac{d u_\nu^z}{dz}$ nicht für jeden zum Schnitte b_ν gehörigen Punkt z den Wert Null haben kann, so erkennt man, daß die Relation:

$$-\sum_{\tau=1}^{\tau=t} \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)} - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \mu_\varrho \mathfrak{L}_{\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \iota_\varkappa c_{\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)} = 0$$

besteht, und daß daher die Funktion $W^*(z)$ eine zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörige Funktion W ist.

Aus der Gleichung (D.) erkennt man nun schließlich, daß die allgemeinste zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörige Funktion $W(z)$, welche in je zwei zu einem der Schnitte a, l gehörigen entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ denselben Wert besitzt, sich, entsprechend der zu Anfang des Artikels aufgestellten Behauptung, durch die Derivierte einer ebenfalls zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörigen Funktion W, eben der Funktion $W^*(z)$, und die p ausgezeichneten, mit der Funktion $W(z)$ gleichartigen Funktionen $W^{(1)}(z); \cdots, W^{(p)}(z)$ linear darstellen läßt. Dabei ist noch besonders hervorzuheben, daß diese p ausgezeichneten Funktionen $W^{(1)}(z), \cdots, W^{(p)}(z)$ durchaus selbständige, von der darzustellenden Funktion $W(z)$ unabhängige Gebilde sind, während andererseits die Funktion $W^*(z)$ in engster Beziehung zu der Funktion $W(z)$ steht.

Läßt man in der zu Anfang dieses Artikels aufgestellten, die Funktion $W(z)$ definierenden Gleichung und dementsprechend auch in der Gleichung (D.) die Größen $\mathfrak{L}$ sämtlich mit der Null zusammenfallen und setzt zudem noch $C = 1$, so wird $W(z) = 1$ und zugleich reduziert sich die Gleichung (D.) auf die Gleichung:

$$1 = \frac{d}{dz}\left\{\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} P_{t_\varkappa}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa \\ z\end{matrix}\right|\right\}.$$

Zum Schlusse dieses Artikels sollen jetzt noch kurz diejenigen speziellen zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörigen Funktionen W betrachtet werden, deren Werte in je zwei entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ der Begrenzung von T'' in der Weise verknüpft sind, daß

$$\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \{\, W^+ = W^-, \\
&\text{längs } b_\nu \{\, W^+ = W^-, \qquad\qquad {\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p,} \\
&\text{längs } c_\nu \{\, W^+ = W^-, \\
&\text{längs } l_\sigma \{\, W^+ = W^-, \qquad\qquad {\scriptstyle \sigma = 1, 2, \cdots, s,}
\end{aligned}$$

ist, und die daher schon in der ursprünglichen, keinen der Schnitte a, b, c, l enthaltenden Fläche T' einwertig sind. Eine jede solche Funktion möge eine A-Funktion genannt und mit $A(z)$ bezeichnet werden. Dieser Definition zufolge ist die Gesamtheit der A-Funktionen identisch mit der Gesamtheit derjenigen Funktionen $W(z)$ von der zu Anfang dieses Artikels definierten Art, bei denen die das Verhalten an den Schnitten b bestimmenden Konstanten $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \cdots, \mathfrak{B}_p$ sämtlich den Wert Null besitzen.

Die Derivierte $\frac{dW}{dz}$ einer jeden zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörigen Funktion W ist — wie aus der Formel (D.) des Art. 10 folgt, wenn man darin $\mathfrak{S} = 0$, $n = 1$ setzt und beachtet, daß für $\mathfrak{S} = 0$ der zugehörige Ausdruck $\Omega(z)$ die allgemeinste zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörige Funktion W darstellt — eine ebenfalls zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörige Funktion W und zwar eine A-Funktion, da sie zudem in je zwei entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ der Begrenzung von T'' denselben Wert besitzt. Daß aber auch umgekehrt eine jede A-Funktion sich mit der Derivierten einer zur

Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörigen Funktion W deckt, erkennt man, wenn man beachtet, daß die vorher gewonnene Gleichung (D.) sich für eine Funktion $W(z) = A(z)$ auf die Gleichung:

(D'.) $$A(z) = \frac{dW^*(z)}{dz}$$

reduziert. Die Gesamtheit der A-Funktionen ist also auch identisch mit der Gesamtheit der Derivierten $\frac{dW}{dz}$ der zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörigen Funktion W.

Aus dem soeben gewonnenen Resultate folgt nun schließlich noch, daß das mit einer Funktion $A(z)$ gebildete, von einem Punkte z_0 bis zu einem Punkte z über eine ganz im Innern der Fläche T'' verlaufende Kurve erstreckte Integral $\int_{z_0}^{z} A(z)\,dz$ eine zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörige Funktion W ist, und daß diese Funktion W, nachdem man $A(z)$ durch Elementarfunktionen ausgedrückt und zu dem so erhaltenen Ausdrucke $W(z)$ von der zu Anfang dieses Artikels definierten Art den ihm entsprechenden Ausdruck $W^*(z)$ gebildet hat, durch die Gleichung:

(D''.) $$\int_{z_0}^{z} A(z)\,dz = W^*(z) - W^*(z_0)$$

geliefert wird.

Auf die Theorie der A-Funktionen soll ausführlicher erst im nächsten Abschnitt eingegangen werden.

13.

Die Untersuchungen des Art. 6 haben gezeigt, daß der Ausdruck:

$$\begin{aligned} W(z) = & \sum_{\tau=1}^{\tau=t} \left(\mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)} \, P_0 \Big|_z^{\varepsilon_\tau} + \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)} \, P_1 \Big|_z^{\varepsilon_\tau} + \cdots + \mathfrak{L}_{m_\tau}^{(\varepsilon_\tau)} \, P_{m_\tau} \Big|_z^{\varepsilon_\tau} \right) \\ & + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \left(\mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)} \, P_0 \Big|_z^{\alpha_\varrho} + \mathfrak{L}_1^{(\alpha_\varrho)} \, P_1 \Big|_z^{\alpha_\varrho} + \cdots + \mathfrak{L}_{n_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} \, P_{n_\varrho} \Big|_z^{\alpha_\varrho} \right) \\ & + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \left(\mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)} \, P_0 \Big|_z^{\infty_\varkappa} + \mathfrak{L}_1^{(\infty_\varkappa)} \, P_1 \Big|_z^{\infty_\varkappa} + \cdots + \mathfrak{L}_{p_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)} \, P_{p_\varkappa} \Big|_z^{\infty_\varkappa} \right) + \frac{1}{\pi i} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} \mathfrak{A}_\sigma u_\sigma |z| + C, \end{aligned}$$

bei dem $m_1, \cdots, m_t, n_1, \cdots, n_r, p_1, \cdots, p_q$ unbestimmte positive ganze Zahlen, die Buchstaben $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{A}$, C unbestimmte, nur der Bedingung:

$$\sum_{\tau=1}^{\tau=t} \mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)} = 0$$

unterworfene Konstanten bezeichnen, die allgemeinste zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörige Funktion W darstellt. Auf Grund des im vorhergehenden Artikel gewonnenen Resultats ist man jetzt imstande, das mit dieser Funktion $W(z)$ gebildete, von einem Punkte z_0 bis zu einem Punkte z über eine ganz im Innern der Fläche T'' verlaufende Kurve erstreckte Integral $\int\limits_{z_0}^{z} W(z)\,dz$ durch das Produkt $z\,W(z)$ und Elementarfunktionen linear darzustellen. Man braucht dazu nur auf das Integral das Verfahren der teilweisen Integration anzuwenden und in der so sich ergebenden Gleichung:

$$\int\limits_{z_0}^{z} W(z)\,dz = z\,W(z) - z_0\,W(z_0) - \int\limits_{z_0}^{z} z\,\frac{d\,W(z)}{dz}\,dz$$

das rechtsstehende, auf die A-Funktion $z\,\frac{d\,W(z)}{dz}$ sich beziehende Integral mit Hilfe der Formel (D″.) des vorhergehenden Artikels durch Elementarfunktionen auszudrücken.

In derselben Weise schließend, wie es in Art. 8 des zweiten Abschnittes an der entsprechenden Stelle geschehen ist, gelangt man hier unter fast wörtlicher Wiederholung des dort Gesagten zu der die erwähnte Darstellung liefernden Gleichung:

$$\int\limits_{z_0}^{z} W(z)\,dz = z\,W(z) - z_0\,W(z_0) - W^*(z) + W^*(z_0).$$

In dieser Gleichung vertritt $W^*(z)$ den Ausdruck:

$$\begin{aligned} W^*(z) = &- \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\left\{\quad \mathfrak{L}_1^{\prime\,(\varepsilon_\tau)}\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\tau}\frac{1}{\lambda}\,\mathfrak{L}_{\lambda+1}^{\prime\,(\varepsilon_\tau)}\;\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\tau\\ z\end{matrix}\right|\right\}\\ &- \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\left\{\mu_\varrho\,\mathfrak{L}_{\mu_\varrho}^{\prime\,(\alpha_\varrho)}\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varrho}\frac{\mu_\varrho}{\lambda}\,\mathfrak{L}_{\lambda+\mu_\varrho}^{\prime\,(\alpha_\varrho)}\;\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ z\end{matrix}\right|\right\}\\ &+ \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\left\{\iota_\varkappa\,c_{\iota_\varkappa}^{\prime\,(\infty_\varkappa)}\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota_\varkappa}\frac{\iota_\varkappa}{\lambda}\,c_{\iota_\varkappa-\lambda}^{\prime\,(\infty_\varkappa)}\;\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\lambda=\iota_\varkappa+1}^{\lambda=\iota_\varkappa+p_\varkappa}\frac{\iota_\varkappa}{\lambda}\,\mathfrak{L}_{\lambda-\iota_\varkappa}^{\prime\,(\infty_\varkappa)}\;\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|\right\}\\ &- \frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p} K_\nu^{\prime\,(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)}\,u_\nu|z|, \end{aligned}$$

bei dem zur Abkürzung für $\nu = 1, 2, \cdots, p$:

$$\begin{aligned} K_\nu^{\prime\,(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)} = &\sum_{\tau=1}^{\tau=t}\;\sum_{m=1}^{m=m_\tau+1}\;\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\;\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\mu_\varrho-1}\;\frac{\mathfrak{L}_m^{\prime\,(\varepsilon_\tau)}}{(m-1)!}\,\frac{\left(\frac{m\mu_\varrho-\lambda}{\mu_\varrho}\middle|m\right)}{m\mu_\varrho-\lambda}\left(\int\limits_{b_\nu^+}^{+}\underset{m\mu_\varrho-\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{matrix}\right|d\zeta\right)\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \varepsilon_\tau\end{matrix}\right|\\ &+ \frac{2\pi i}{p}\sum_{\tau=1}^{\tau=t}\mathfrak{L}_1^{\prime\,(\varepsilon_\tau)} - \sum_{\tau=1}^{\tau=t}\;\sum_{m=1}^{m=m_\tau+1}\frac{\mathfrak{L}_m^{\prime\,(\varepsilon_\tau)}}{(m-1)!}\int\limits_{b_\nu^+}^{+}S_m(\zeta)\,d\zeta\\ &+ \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\;\sum_{m=1}^{m=n_\varrho+\mu_\varrho}\mathfrak{L}_m^{\prime\,(\alpha_\varrho)}\int\limits_{b_\nu^+}^{+}\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho\\ \zeta\end{matrix}\right|d\zeta + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\;\sum_{m=1}^{m=p_\varkappa}\mathfrak{L}_m^{\prime\,(\infty_\varkappa)}\int\limits_{b_\nu^+}^{+}\underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ \zeta\end{matrix}\right|d\zeta \end{aligned}$$

gesetzt ist, während die Konstanten $\mathfrak{L}'$, c' aus den Gleichungen:

$$\mathfrak{L}_1'^{(\varepsilon_\tau)} = -\varepsilon_\tau \mathfrak{L}_0^{(\varepsilon_\tau)} - \mathfrak{L}_1^{(\varepsilon_\tau)}, \qquad \mathfrak{L}_\lambda'^{(\varepsilon_\tau)} = -(\lambda - 1)\,\varepsilon_\tau\, \mathfrak{L}_{\lambda-1}^{(\varepsilon_\tau)} - \lambda \mathfrak{L}_\lambda^{(\varepsilon_\tau)}, \qquad {\scriptstyle \lambda = 2, 3, \cdots, m_\tau + 1}$$

$$\mu_\varrho \mathfrak{L}_{\mu_\varrho}'^{(\alpha_\varrho)} = -\alpha_\varrho \mathfrak{L}_0^{(\alpha_\varrho)} - \mu_\varrho \mathfrak{L}_{\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)}, \qquad \mu_\varrho \mathfrak{L}_\lambda'^{(\alpha_\varrho)} = -(\lambda - \mu_\varrho)\,\alpha_\varrho \mathfrak{L}_{\lambda-\mu_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} - \lambda \mathfrak{L}_\lambda^{(\alpha_\varrho)}, \qquad {\scriptstyle \lambda = 1, 2, \cdots, \mu_\varrho - 1, \mu_\varrho + 1, \cdots, n_\varrho + \mu_\varrho}$$

$$\iota_\varkappa \mathfrak{L}_\lambda'^{(\infty_\varkappa)} = \lambda \mathfrak{L}_\lambda^{(\infty_\varkappa)}, \qquad {\scriptstyle \lambda = 1, 2, \cdots, p_\varkappa}$$

$$\iota_\varkappa c_0'^{(\infty_\varkappa)} = \mathfrak{L}_0^{(\infty_\varkappa)}, \qquad \iota_\varkappa c_\lambda'^{(\infty_\varkappa)} = -\lambda c_\lambda^{(\infty_\varkappa)}, \qquad {\scriptstyle \lambda = 1, 2, \cdots, \iota_\varkappa}$$

sich ergeben, wenn man dabei die Größe $\mathfrak{L}_{m_\tau+1}^{(\varepsilon_\tau)}$ und jede Größe $\mathfrak{L}_\chi^{(\alpha_\varrho)}$, deren Index χ nicht der Reihe $0, 1, 2, \cdots, n_\varrho$ angehört, als mit der Null identisch ansieht und unter $c_1^{(\infty_\varkappa)}, c_2^{(\infty_\varkappa)}, \cdots, c_{\iota_\varkappa}^{(\infty_\varkappa)}$ die Koeffizienten versteht, welche in der Entwicklung der Funktion $W(z)$ für das Gebiet des Punktes $\infty_\varkappa$ den Potenzen $z_{\infty_\varkappa}^1, z_{\infty_\varkappa}^2, \cdots, z_{\infty_\varkappa}^{\iota_\varkappa}$ beziehungsweise zukommen.

Fünfter Abschnitt.

Theorie der A-Funktionen.

1.

Es sollen jetzt die am Ende von Art. 12 des vorhergehenden Abschnittes definierten und mit $A(z)$ bezeichneten, speziellen zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörigen Funktionen W einer genauen Betrachtung unterzogen werden.

Man fixiere in der ursprünglichen Fläche T'' irgend s Punkte $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \cdots, \eta^{(s)}$, die nur der Bedingung zu genügen haben, daß sie als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen, und ordne ihnen die positiven ganzen Zahlen $m_1, m_2, \cdots, m_s$ beziehungsweise zu. Für den Fall, daß irgend welche dieser Punkte an der Begrenzung von T'' liegen, führe man am Schnittsystem bei diesen Punkten, ohne jedoch den Charakter des Schnittsystems zu ändern und ohne einen Schnitt über einen der Punkte η hinüberzuschieben, eine solche Deformation aus, daß die sämtlichen Punkte η im Innern der dadurch entstehenden neuen Fläche T'' liegen. Nach dem im vorhergehenden Abschnitt zu Anfang des Art. 12 Bemerkten ist dann in dem mit den willkürlichen Konstanten $\mathfrak{L}, C$ gebildeten Ausdruck:

$$W(z) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \left(\mathfrak{L}_{\sigma 1} \underset{1}{P} \left| \begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ z \end{matrix} \right| + \mathfrak{L}_{\sigma 2} \underset{2}{P} \left| \begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ z \end{matrix} \right| + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma} \underset{m_\sigma}{P} \left| \begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ z \end{matrix} \right| \right) + C,$$

bei dem die P zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörige Elementarfunktionen bezeichnen, jede zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörige Funktion W enthalten, welche in der Fläche T'' einwertig ist, in je zwei zu einem der Schnitte a, c gehörigen entsprechenden Punkten $\mathscr{P}^+, \mathscr{P}^-$ denselben Wert besitzt, für jeden von den Punkten η verschiedenen Punkt z der Fläche T'' stetig ist und für den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ $(\sigma = 1, 2, \cdots, s)$ höchstens von der Ordnung m_σ unendlich wird. Auf Grund der Gleichungen $(2_{m}.)$, $(4_{m}.)$ von Art. 5 des vorhergehenden Abschnittes sind die Werte dieser Funktion in je zwei zum Schnitte b_ν $(\nu=1,2,\cdots,p)$ gehörigen entsprechenden Punkten $\mathscr{S}^+$, $\mathscr{S}^-$ in der Weise verknüpft, daß

$$\text{längs } b_\nu \left\{ W(z)^+ = W(z)^- - 2\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\sigma} \frac{\mathfrak{L}_{\sigma\lambda}}{(\lambda-1)!}\left(\frac{d^\lambda u_\nu}{dz_\sigma^\lambda}\right)_0\right.$$

ist, wobei, der einfacheren Schreibweise wegen, $z_{\eta^{(\sigma)}}$ durch z_σ ersetzt ist.

Sollen nun zur Fläche T A-Funktionen existieren, die für jeden von den Punkten η verschiedenen Punkt z dieser Fläche stetig sind und für den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ $(\sigma=1,2,\cdots,s)$ höchstens von der Ordnung m_σ unendlich werden, so muß sich das System der p Gleichungen:

$$(1.)\qquad \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\left\{\mathfrak{L}_{\sigma 1}\left(\frac{du_\nu}{dz_\sigma}\right)_0 + \frac{1}{1!}\mathfrak{L}_{\sigma 2}\left(\frac{d^2u_\nu}{dz_\sigma^2}\right)_0 + \cdots + \frac{1}{(m_\sigma-1)!}\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}\left(\frac{d^{m_\sigma}u_\nu}{dz_\sigma^{m_\sigma}}\right)_0\right\} = 0, \qquad \nu=1,2,\cdots,p,$$

durch Größen $\mathfrak{L}$, welche nicht sämtlich den Wert Null besitzen, befriedigen lassen, da nur in diesem Falle auch längs eines jeden der p Schnitte $b\,\{\,W(z)^+ = W(z)^-$ ist, und es wird dann die allgemeinste zu einem solchen Systeme von Größen $\mathfrak{L}$ gehörige Funktion $A(z)$ der genannten Art durch die Gleichung:

$$(2.)\qquad A(z) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\left(\mathfrak{L}_{\sigma 1}\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(\sigma)}\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_{\sigma 2}\underset{2}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(\sigma)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}\underset{m_\sigma}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(\sigma)}\\ z\end{matrix}\right|\right) + C,$$

bei der C eine willkürliche Konstante bezeichnet, geliefert.

Betrachtet man bei einer Funktion $A(z)$ der in Rede stehenden Art den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ $(\sigma=1,2,\cdots,s)$, für den sie unendlich von der Ordnung $\overline{m}_\sigma(\infty^{\overline{m}_\sigma})$, $\overline{m}_\sigma \leqq m_\sigma$, werden möge, als äquivalent mit m_σ ∞^1-Punkten, so kommen der Funktion $A(z)$ im ganzen $\overline{m} = m_1 + \cdots + m_s$ ∞^1-Punkte zu, und die Zahl m soll dann die Ordnung der Funktion $A(z)$ genannt werden. Um die Frage zu entscheiden, ob die in der Fläche T einwertige Funktion $A(z)$ auch für Punkte dieser Fläche den Wert Null haben kann, nehme man — indem man beachtet, daß solche Punkte, wie aus dem Verhalten der Funktion $A(z)$ in den Punkten $\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(s)}$ folgt, nur in endlicher Anzahl auftreten können, und daß jedem solchen Punkte eine ganze Zahl als Ordnungszahl für das Nullwerden zukommt — an, daß $A(z)$ für die Punkte $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \cdots, \varepsilon^{(t)}$ der Fläche T null werde und speziell für den Punkt $\varepsilon^{(\tau)}$ $(\tau=1,2,\cdots,t)$ null von der Ordnung $n_\tau(0^{\overline{n}_\tau})$, sodaß ihr also, wenn man den Punkt $\varepsilon^{(\tau)}$ als äquivalent mit $\overline{n}_\tau$ 0^1-Punkten betrachtet, im ganzen $n = n_1 + \cdots + n_t$ 0^1-Punkte zukommen. Bezieht man alsdann die Funktion $A(z)$ auf die Fläche T', nachdem man zuvor noch, wenn nötig, das Schnittsystem durch Deformation so geändert hat, daß die Punkte η, ε sämtlich im Innern der Fläche T' liegen, und erstreckt das mit der Funktion $A(z)$ und ihrer Derivierten $A'(z)$ gebildete Integral $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{A'(z)}{A(z)}dz$ in positiver Richtung über die ganze Begrenzung der Fläche T', so erhält man als Wert dieses

Integrals das eine Mal, indem man beachtet, daß die Funktion $\frac{A'(z)}{A(z)}$ in je zwei entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ der Begrenzung denselben Wert besitzt, die Null, das andere Mal durch Reduktion auf die, sämtlich im Innern der Fläche T'' gelegenen, Punkte ε, η die Differenz $\bar{n}-m$ und erkennt so schließlich, daß die Gleichung $\bar{n}=m$ besteht, oder, was dasselbe, daß bei der Funktion $A(z)$ die Anzahl $\bar{n}$ der 0^1-Punkte sich mit der Anzahl m der ∞^1-Punkte deckt. Dem Vorstehenden entsprechend soll nun das Punktsystem $\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \cdots, \eta^{(2)}, \cdots\cdot, \eta^{(s)}, \cdots, \eta^{(s)}$, welches allgemein den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ m_σ-mal enthält, das System der ∞^1-Punkte, das Punktsystem $\varepsilon^{(1)}, \cdots, \varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \cdots, \varepsilon^{(2)}, \cdots\cdot, \varepsilon^{(t)}, \cdots, \varepsilon^{(t)}$, welches allgemein den Punkt $\varepsilon^{(\tau)}$ $\bar{n}_\tau$-mal enthält, das System der 0^1-Punkte von $A(z)$ genannt werden.

Die aus einer Funktion $A(z)$ von der Ordnung m durch Subtraktion einer beliebigen Konstante c entstehende Funktion $A(z)-c$ ist ebenfalls eine A-Funktion von der Ordnung m und besitzt daher auch $\bar{m}$ 0^1-Punkte. Nennt man nun einen Punkt, für den die Funktion $A(z)-c$ null von der Ordnung $p\,(0^p)$ wird, einen p-fachen c-Punkt der Funktion $A(z)$ und betrachtet ihn als äquivalent mit p einfachen c-Punkten, so erkennt man, daß die Anzahl der einfachen c-Punkte der Funktion $A(z)$, welchen Wert die Konstante c auch haben mag, ebenfalls gleich der Ordnung $\bar{m}$ dieser Funktion ist.

2.

Die im vorhergehenden Artikel betrachtete Gruppe von A-Funktionen ist durch die in T'' fixierten s Punkte $\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(s)}$ und die ihnen beziehungsweise zugeordneten positiven ganzen Zahlen $m_1, \cdots, m_s$ vollständig bestimmt. Die notwendige und zugleich hinreichende Bedingung für ihre Existenz ist die, daß das oben aufgestellte System der p Gleichungen (1.) sich durch Größen $\mathfrak{L}$, die nicht sämtlich den Wert Null besitzen, befriedigen läßt. Es soll jetzt gezeigt werden, daß diese Bedingung durch eine andere ersetzt werden kann.

Man bilde das Punktsystem $\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \cdots, \eta^{(2)}, \cdots\cdot, \eta^{(s)}, \cdots, \eta^{(s)}$, welches allgemein den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ m_σ-mal enthält, bezeichne seine $m=m_1+\cdots+m_s$ Punkte ohne Rücksicht auf die Reihenfolge durch $\eta_1, \cdots, \eta_m$ und verstehe unter $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ ein System von irgend m Punkten der Fläche T''. Nun ändere man, wenn nötig, das Schnittsystem durch Deformation so, daß die Punkte η, ε sämtlich im Innern der Fläche T'' liegen, und definiere zur Fläche T'' mit Hilfe der auf einen beliebigen inneren Punkt η von T'' sich beziehenden, zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörigen Elementarfunktion $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$ eine neue Funktion $\Theta\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$ durch die Gleichung:

$$\Theta\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right| = e^{-\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|}.$$

Die Funktion $\Theta\left|{\eta \atop z}\right|$ ist dann eine in T' allenthalben einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen z, die für jeden von η verschiedenen Punkt z einen nicht mit der Null zusammenfallenden Wert besitzt, für den Punkt η dagegen 0^1 wird, und deren Werte in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ auf Grund der Gleichungen $(2_0.)$ von Art. 4 des vorhergehenden Abschnitts in der Weise verknüpft sind, daß

$$\text{längs } a_\nu \left\{ \Theta\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \Theta\left|{\eta \atop z}\right|^- , \right.$$

$$\text{längs } b_\nu \left\{ \Theta\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \Theta\left|{\eta \atop z}\right|^- e^{-\frac{2}{p}u_\nu^{z-} + 2u_\nu^{\eta} + \frac{2k_\nu}{p} - \frac{a_{\nu\nu}}{p}}, \right. \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p,$$

$$\text{längs } c_\nu \left\{ \Theta\left|{\eta \atop z}\right|^+ = \Theta\left|{\eta \atop z}\right|^- e^{\frac{2\pi i}{p}}, \right.$$

ist. Bildet man jetzt unter Benutzung der unbestimmten Konstanten $g_1, \cdots, g_p$, C, $c \neq 0$, den Ausdruck:

$$C\,\frac{\Theta\left|{\varepsilon_1 \atop z}\right| \Theta\left|{\varepsilon_2 \atop z}\right| \cdots \Theta\left|{\varepsilon_m \atop z}\right|}{\Theta\left|{\eta_1 \atop z}\right| \Theta\left|{\eta_2 \atop z}\right| \cdots \Theta\left|{\eta_m \atop z}\right|}\, e^{-2\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} g_\nu u_\nu^z},$$

so ist, wie mit Hilfe des Fundamentalsatzes leicht erkannt wird, in diesem Ausdruck, wenn man ihn als Funktion des Punktes z von T' betrachtet und die Punkte ε unbestimmt läßt, jede in T' einwertige Funktion von z enthalten, welche das System $\eta_1, \cdots, \eta_m$ oder auch nur einen Teil desselben als System der ∞^1-Punkte besitzt, für jeden nicht in dem Systeme der ∞^1-Punkte vorkommenden Punkt stetig ist, gleich oft 0^1 wie ∞^1 wird, und in je zwei zu einem der Schnitte a, b, c gehörigen entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-$ Werte annimmt, die sich nur durch einen längs des betreffenden Schnittes konstanten Faktor, den sogenannten Schnittfaktor, unterscheiden. Beachtet man dann noch, daß das System der ∞^1-Punkte einer jeden A-Funktion, welche der in Rede stehenden Gruppe angehört, in dem Punktsysteme $\eta_1, \cdots, \eta_m$ enthalten ist, und daß eine A-Funktion, als Funktion des Punktes z von T' betrachtet, in je zwei zu einem der Schnitte a, b, c gehörigen entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-$ den gleichen Wert, also die Eins als Schnittfaktor besitzt, so erkennt man weiter, daß der aufgestellte Ausdruck auch jede der in Rede stehenden A-Funktionen enthalten muß. Nun wird aber dieser Ausdruck, der für jeden Schnitt c schon die Eins als Schnittfaktor besitzt, nur dann auch für jeden der Schnitte a, b die Eins als Schnittfaktor besitzen, wenn die Größen $g_1, \cdots, g_p$ sämtlich ganze Zahlen sind und außerdem noch für $\varrho = 1, 2, \cdots, p$ das Aggregat:

$$2\sum_{\mu=1}^{\mu=m} u_\varrho^{\varepsilon_\mu} - 2\sum_{\mu=1}^{\mu=m} u_\varrho^{\eta_\mu} - 2\sum_{\nu=1}^{\nu=p} g_\nu a_{\varrho\nu}$$

ein ganzes, etwa mit $h_\varrho 2\pi i$ zu bezeichnendes, Vielfaches von $2\pi i$ ist, oder, was dasselbe, wenn die Kongruenz (s. Seite 89):

$$(1'.)\qquad \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=m} u^{\varepsilon_\mu}\right) \equiv \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=m} u^{\eta_\mu}\right)$$

besteht. Daraus folgt dann schließlich, daß A-Funktionen, welche das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ oder auch nur einen Teil desselben als System der ∞^1-Punkte besitzen, dann, aber auch nur dann existieren, wenn sich die Kongruenz (1'.) durch ein mit $\eta_1, \cdots, \eta_m$ nicht identisches Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ befriedigen läßt, und daß die allgemeinste zu einem solchen Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ gehörige Funktion $A(z)$ der genannten Art durch die Gleichung:

$$(2'.)\qquad A(z) = C\,\frac{\Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_1\\ z\end{matrix}\right|\Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_2\\ z\end{matrix}\right|\cdots\Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_m\\ z\end{matrix}\right|}{\Theta\left|\begin{matrix}\eta_1\\ z\end{matrix}\right|\Theta\left|\begin{matrix}\eta_2\\ z\end{matrix}\right|\cdots\Theta\left|\begin{matrix}\eta_m\\ z\end{matrix}\right|}\, e^{-2\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} g_\nu u_\nu^z},$$

bei der die g die durch die Kongruenz (1'.) als Faktoren der a eindeutig bestimmten ganzen Zahlen sind, und C eine willkürliche Konstante bedeutet, geliefert wird.

Hat ein der Kongruenz (1'.) genügendes Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ mit dem Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ keinen Punkt gemeinsam, so ist das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ das System der ∞^1-Punkte, das Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ das System der 0^1-Punkte der zugehörigen durch die Gleichung (2'.) bestimmten Funktion $A(z)$, und diese Funktion ist dann von der Ordnung m. Hat dagegen ein solches Punktsystem mit dem Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ einen etwa $m - \bar{m}$ Punkte enthaltenden Teil gemeinsam, so bilden, wie aus der Gleichung (2'.) folgt, die nach Entfernung dieses gemeinsamen Teiles noch übrigen $\bar{m}$ Punkte η das System der ∞^1-Punkte, die noch übrigen $\bar{m}$ Punkte ε das System der 0^1-Punkte der zugehörigen Funktion $A(z)$, und diese Funktion ist dann von der Ordnung $\bar{m}$.

Das Hauptresultat der in diesem Abschnitte bis jetzt durchgeführten Untersuchungen kann man nun in folgender Weise aussprechen:

„Zu einem beliebig in der Fläche T' angenommenen Punktsysteme $\eta_1, \cdots, \eta_m = \eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \cdots, \eta^{(2)}, \cdots, \eta^{(s)}, \cdots, \eta^{(s)}$, das den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ $(\sigma=1,2,\cdots,s)$ m_σ-mal enthalten möge, existieren A-Funktionen, welchen das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ oder auch nur ein Teil desselben als System der ∞^1-Punkte zukommt, dann, aber auch nur dann, wenn sich das System der p Gleichungen (1.) *durch Größen $\mathfrak{L}$, welche nicht sämtlich den Wert Null besitzen, befriedigen läßt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn sich die Kongruenz* (1'.) *durch ein mit $\eta_1, \cdots, \eta_m$ nicht identisches Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ befriedigen läßt.“*)*

*) Vgl. Riemann, B., Theorie der Abelschen Funktionen. I, Art. 5; II, Art. 26. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 88–144; S. 107—109; S. 139—140.)

3.

Die bisherigen Untersuchungen haben ergeben, daß die allenthalben endlichen Funktionen u und ihre Derivierten für die Theorie der A-Funktionen von fundamentaler Bedeutung sind. Mit Rücksicht hierauf sollen zunächst die genannten Derivierten, die nach dem am Ende von Art. 12 des vorhergehenden Abschnittes Bemerkten selbst zu den A-Funktionen gehören, einer eingehenden Betrachtung unterzogen werden.

Die allgemeinste Funktion u wird nach Art. 2 des vorhergehenden Abschnittes durch die Gleichung:

$$u^z = c_0 + c_1 u_1^z + c_2 u_2^z + \cdots + c_p u_p^z$$

geliefert, wenn man dabei unter $c_0, c_1, \cdots, c_p$ unbestimmte Konstanten versteht. Der durch $c_1 = 0$, $c_2 = 0, \cdots, c_p = 0$ charakterisierte Grenzfall $u^z = c_0$ ist im folgenden immer ausgeschlossen. Da die Funktion u^z sich infolge ihrer Stetigkeit für das Gebiet irgend eines Punktes η von T'' durch die Gleichung:

$$u^z = u^\eta + \left(\frac{du}{dz_\eta}\right)_0 z_\eta + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2u}{dz_\eta^2}\right)_0 z_\eta^2 + \cdots$$

darstellen läßt, so ergeben sich, wenn man in bezug auf die Lage des Punktes η, insoferne dieser Punkt ein von den Punkten ∞, α verschiedener Punkt η oder ein $(\iota-1)$-facher Windungspunkt ∞ oder ein $(\mu-1)$-facher Windungspunkt α sein kann, drei Fälle unterscheidet, für die Funktion u^z und ihre Derivierte die folgenden Darstellungen:

1.) für das Gebiet eines von den Punkten ∞, α verschiedenen Punktes η ist

$$u^z = u^\eta + \left(\frac{du}{dz}\right)_{z=\eta}(z-\eta) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_{z=\eta}(z-\eta)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3u}{dz^3}\right)_{z=\eta}(z-\eta)^3 + \cdots,$$

$$\frac{du}{dz} = \left(\frac{du}{dz}\right)_{z=\eta} + \frac{1}{1!}\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_{z=\eta}(z-\eta) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^3u}{dz^3}\right)_{z=\eta}(z-\eta)^2 + \cdots;$$

2.) für das Gebiet eines $(\iota-1)$-fachen Windungspunktes ∞ ist

$$u^z = u^\infty + \left(\frac{du}{dz_\infty}\right)_0 \frac{1}{z^{\frac{1}{\iota}}} + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2u}{dz_\infty^2}\right)_0 \frac{1}{z^{\frac{2}{\iota}}} + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3u}{dz_\infty^3}\right)_0 \frac{1}{z^{\frac{3}{\iota}}} + \cdots,$$

$$\frac{du}{dz} = -\frac{1}{\iota}\left(\frac{du}{dz_\infty}\right)_0 \frac{1}{z^{\frac{\iota+1}{\iota}}} - \frac{1}{1!\,\iota}\left(\frac{d^2u}{dz_\infty^2}\right)_0 \frac{1}{z^{\frac{\iota+2}{\iota}}} - \frac{1}{2!\,\iota}\left(\frac{d^3u}{dz_\infty^3}\right)_0 \frac{1}{z^{\frac{\iota+3}{\iota}}} - \cdots;$$

3.) für das Gebiet eines $(\mu-1)$-fachen Windungspunktes α ist

$$u^z = u^\alpha + \left(\frac{du}{dz_\alpha}\right)_0 (z-\alpha)^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + \frac{1}{(\mu-1)!}\left(\frac{d^{\mu-1}u}{dz_\alpha^{\mu-1}}\right)_0 (z-\alpha)^{\frac{\mu-1}{\mu}} + \frac{1}{\mu!}\left(\frac{d^\mu u}{dz_\alpha^\mu}\right)_0 (z-\alpha)^{\frac{\mu}{\mu}} + \frac{1}{(\mu+1)!}\left(\frac{d^{\mu+1}u}{dz_\alpha^{\mu+1}}\right)_0 (z-\alpha)^{\frac{\mu+1}{\mu}} + \cdots,$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{du}{dz_\alpha}\right)_0 \frac{1}{(z-\alpha)^{\frac{\mu-1}{\mu}}} + \cdots + \frac{1}{(\mu-2)!\,\mu}\left(\frac{d^{\mu-1}u}{dz_\alpha^{\mu-1}}\right)_0 \frac{1}{(z-\alpha)^{\frac{1}{\mu}}} + \frac{1}{\mu!}\left(\frac{d^\mu u}{dz_\alpha^\mu}\right)_0 + \frac{1}{\mu!\,\mu}\left(\frac{d^{\mu+1}u}{dz_\alpha^{\mu+1}}\right)_0 (z-\alpha)^{\frac{1}{\mu}} + \cdots.$$

Diese Darstellungen lassen erkennen, daß die in T einwertige Funktion:

$$\frac{du}{dz} = c_1 \frac{du_1}{dz} + c_2 \frac{du_2}{dz} + \cdots + c_p \frac{du_p}{dz},$$

welche infolge der vorher über die Konstanten c gemachten Festsetzung nicht allenthalben denselben Wert besitzen kann, nur für die im Endlichen gelegenen Windungspunkte $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ unendlich werden kann und zwar algebraisch unendlich, und daß sie speziell für den Punkt α_ϱ $(\varrho = 1, 2, \cdots, r)$ höchstens von der Ordnung $\mu_\varrho - 1$ unendlich werden kann, aber nur dann von dieser Ordnung unendlich wird, wenn $\left(\frac{du}{dz_{\alpha_\varrho}}\right)_0$ von Null verschieden ist. Beachtet man dann noch, daß nach Art. 3 des ersten Abschnittes die Beziehung $\sum\limits_{\varrho=1}^{\varrho=r} (\mu_\varrho - 1) = n + q + 2p - 2$ besteht, so ergibt sich zunächst, daß $\frac{du}{dz}$ eine A-Funktion ist, deren Ordnung die Zahl $n + q + 2p - 2$ nicht übersteigt.

Es soll jetzt bewiesen werden, daß die Ordnung von $\frac{du}{dz}$ nur dann unter $n+q+2p-2$ liegen kann, oder, was dasselbe, daß nur dann eine der r Größen $\left(\frac{du}{dz_{\alpha_1}}\right)_0, \cdots, \left(\frac{du}{dz_{\alpha_r}}\right)_0$ den Wert Null besitzen kann, wenn die in $\frac{du}{dz}$ enthaltenen unbestimmten Konstanten $c_1, \cdots, c_p$ einer gewissen Bedingung genügen. Zu dem Ende bilde man, unter η irgend einen Punkt der Fläche T verstehend, die Gleichung:

$$\left(\frac{du}{dz_\eta}\right)_0 = c_1 \left(\frac{du_1}{dz_\eta}\right)_0 + c_2 \left(\frac{du_2}{dz_\eta}\right)_0 + \cdots + c_p \left(\frac{du_p}{dz_\eta}\right)_0$$

und beachte, daß die Forderung $\left(\frac{du}{dz_\eta}\right)_0 = 0$ nur dann keine Bedingung für die Konstanten c liefern würde, wenn die p Größen $\left(\frac{du_1}{dz_\eta}\right)_0, \cdots, \left(\frac{du_p}{dz_\eta}\right)_0$ sämtlich den Wert Null hätten. Besäßen aber diese p Größen sämtlich den Wert Null, so würde die zur Charakteristik $\begin{pmatrix} 1 \cdots 1 \\ 1 \cdots 1 \end{pmatrix}$ gehörige Funktion $w = \underset{1}{P}\left|\begin{matrix} \eta \\ z \end{matrix}\right|$ auf Grund der Formeln $(2_m.)$, $(4_m.)$ von Art. 5 des vorhergehenden Abschnittes für jeden der Schnitte a, b, c die Null als Schnittkonstante besitzen, also eine A-Funktion sein, und es könnte durch sie, da sie von der Ordnung 1 ist, die $(2p+1)$-fach zusammenhängende Fläche T auf eine zur Repräsentation der Werte von w gewählte W-Ebene abgebildet werden. Da eine solche Abbildung unmöglich ist, so können die p Größen $\left(\frac{du_1}{dz_\eta}\right)_0, \cdots, \left(\frac{du_p}{dz_\eta}\right)_0$ nicht sämtlich den Wert Null besitzen, und es zieht daher die Gleichung $\left(\frac{du}{dz_\eta}\right)_0 = 0$ stets eine Bedingung für die Konstanten c nach sich. Damit ist aber, da an Stelle des, beliebig in T gewählten, Punktes η auch der Punkt α_ϱ $(\varrho = 1, 2, \cdots, r)$ gesetzt werden kann, bewiesen, daß im allgemeinen, das heißt, wenn die Konstanten $c_1, \cdots, c_p$ nicht besonderen Bedingungen genügen, die r Größen $\left(\frac{du}{dz_{\alpha_\varrho}}\right)_0$, $\varrho=1,2,\cdots,r$, sämtlich von Null verschieden sind, oder, was dasselbe, daß der Funktion $\frac{du}{dz}$ im allgemeinen die Zahl $n+q+2p-2$ als Ordnungszahl zukommt.

Ist die Funktion $\frac{du}{dz}$ von der Ordnung $n+q+2p-2$, besitzt sie also das den Punkt α_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots,r)$ $(\mu_\varrho-1)$-mal enthaltende Punktsystem $\alpha_1,\cdots,\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_r$ als System der ∞^1 Punkte, so kommen ihr auch $n+q+2p-2$ 0^1-Punkte zu. Beachtet man nun, daß nach dem soeben für die Größe $\left(\frac{du}{dz_\eta}\right)_0$ Bewiesenen im allgemeinen, das heißt, wenn die Konstanten $c_1,\cdots,c_p$ nicht besonderen Bedingungen genügen, keine der q Größen $\left(\frac{du}{dz_{\varkappa_1}}\right)_0,\cdots,\left(\frac{du}{dz_{\varkappa_q}}\right)_0$ mit der Null zusammenfallen kann, so erkennt man auf Grund der unter 2.) für $\frac{du}{dz}$ aufgestellten Entwicklung, daß im allgemeinen unter den $n+q+2p-2$ 0^1-Punkten der Funktion $\frac{du}{dz}$ der Punkt $\infty_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots,q)$ nur $(\iota_\varkappa+1)$-mal auftritt, also von den $n+q+2p-2$ 0^1-Punkten nur $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}(\iota_\varkappa+1)=n+q$ Punkte unendlich ferne Punkte der Fläche T sind, und dementsprechend das mit $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{2p-2}$ zu bezeichnende System der $2p-2$ noch übrigen 0^1-Punkte keinen der Punkte $\infty_1,\cdots,\infty_q$ enthält.

Ist dagegen die Funktion $\frac{du}{dz}$ von der Ordnung $n+q+2p-2-t$, besitzt sie also nur einen, $n+q+2p-2-t$ Punkte umfassenden, Teil des den Punkt α_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots,r)$ $(\mu_\varrho-1)$-mal enthaltenden Punktsystems $\alpha_1,\cdots,\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_r$ als System der ∞^1-Punkte, so setzt sich das, ebenfalls $n+q+2p-2-t$ Punkte enthaltende, System ihrer 0^1-Punkte aus dem den Punkt $\infty_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots,q)$ $(\iota_\varkappa+1)$-mal enthaltenden Punktsystem $\infty_1,\cdots,\infty_1,\cdots,\infty_q,\cdots,\infty_q$ und einem, mit $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{2p-2-t}$ zu bezeichnenden, Systeme von $2p-2-t$ Punkten, von denen unter Umständen noch einige oder auch alle unendlich ferne Punkte der Fläche T sein können, zusammen. Im vorliegenden Falle ergänze man nun das Punktsystem $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{2p-2-t}$ dadurch zu einem System von $2p-2$ Punkten $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{2p-2}$, daß man zu ihm dasjenige, t Punkte enthaltende, System, welches von dem oben aufgestellten Systeme $\alpha_1,\cdots,\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_r$ nach Wegnahme der $n+q+2p-2-t$ ∞^1-Punkte der Funktion $\frac{du}{dz}$ noch übrig bleibt, hinzunimmt.

In jedem der beiden soeben betrachteten Fälle soll nun das zur Funktion $\frac{du}{dz}$ definierte Punktsystem $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{2p-2}$, insoferne durch dasselbe die Funktion $\frac{du}{dz}$ bis auf einen von z freien Faktor bestimmt ist, das System der charakteristischen Punkte der Funktion $\frac{du}{dz}$ genannt werden.*) Wie die zu Anfang für $\frac{du}{dz}$ aufgestellten Entwicklungen

*) Vgl. Riemann, B., Theorie der Abelschen Funktionen. I, Art. 10. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 88—144; S. 117—118.)

zeigen, werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein Punkt η der Fläche T — einerlei ob dieser Punkt ein von den Punkten ∞, α verschiedener Punkt oder einer der Punkte ∞ oder endlich einer der Punkte α ist — in dem Systeme der charakteristischen Punkte einer Funktion $\frac{du}{dz}$ zum mindesten m-mal vorkommt, durch die Gleichungen:

$$\left(\frac{du}{dz_\eta}\right)_0 = 0, \ \left(\frac{d^2u}{dz_\eta^2}\right)_0 = 0, \cdots, \left(\frac{d^m u}{dz_\eta^m}\right)_0 = 0$$

dargestellt.

Nach den vorstehenden Untersuchungen gehören die Funktionen $\frac{du}{dz}$ zur Gruppe derjenigen A-Funktionen, welche das den Punkt α_ϱ $(\varrho = 1, 2, \cdots, r)$ $(\mu_\varrho - 1)$-mal enthaltende Punktsystem $\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_r$ oder auch nur einen Teil desselben als System der ∞^1-Punkte besitzen, und zwar gehören sie speziell zu jener Untergruppe, die von denjenigen Funktionen der Gruppe gebildet wird, bei welchen das den Punkt $\infty_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, q)$ $(\iota_\varkappa + 1)$-mal enthaltende Punktsystem $\infty_1, \cdots, \infty_1, \cdots, \infty_q, \cdots, \infty_q$ als Bestandteil des Systems der 0^1-Punkte auftritt. Beachtet man dann noch, daß das mit irgend einer zur definierten Untergruppe gehörigen Funktion $A(z)$ gebildete, über einen ganz in T' verlaufenden Weg erstreckte Integral $\int\limits_{z'}^{z} A(z)\,dz$ eine in T' einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen z ist, und zwar eine Funktion u^z, da seine Werte in je zwei zu einem der Schnitte a, b, c gehörigen entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ sich nur um eine längs des betreffenden Schnittes konstante Größe unterscheiden, so erkennt man schließlich, daß die soeben definierte Untergruppe außer den Funktionen $\frac{du}{dz}$ keine weiteren Funktionen mehr enthält.

Nachdem jetzt ermittelt ist, welche Stellung die Funktionen $\frac{du}{dz}$ unter den A-Funktionen einnehmen, lassen sich die Systeme der charakteristischen Punkte der Funktionen $\frac{du}{dz}$ auch einheitlich definieren; man hat dazu nur die gegen Ende des Art. 2 angestellten Betrachtungen, speziell die Kongruenz (1'.), auf die Funktionen $\frac{du}{dz}$ zu beziehen. Es ergibt sich dann, daß die Gesamtheit der den Funktionen $\frac{du}{dz}$ zukommenden Systeme der charakteristischen Punkte mit der Gesamtheit der Lösungssysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{2p-2}$ der Kongruenz:

$$\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} (\iota_\varkappa + 1)\, u^{\infty_\varkappa} + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=2p-2} u^{\varepsilon_\sigma}\right) \equiv \left(\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (\mu_\varrho - 1)\, u^{\alpha_\varrho}\right)$$

oder der mit ihr äquivalenten Kongruenz:

$$\left(\sum_{\sigma=1}^{\sigma=2p-2} u^{\varepsilon_\sigma}\right) \equiv \left(\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (\mu_\varrho - 1)\, u^{\alpha_\varrho} - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} (\iota_\varkappa + 1)\, u^{\infty_\varkappa}\right)$$

identisch ist.

Bilden zwei Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$; $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_{m'}'$ $(m+m'=2p-2)$ zusammen das System der charakteristischen Punkte einer Funktion $\frac{du}{dz}$, so soll jedes der beiden ein zu dem anderen gehöriges Restpunktsystem einer Funktion $\frac{du}{dz}$ genannt werden.

4.

Für die weitere Untersuchung der A-Funktionen bedarf man eines auf Systeme linearer Gleichungen sich beziehenden Hilfssatzes. Dieser soll jetzt aufgestellt werden.

Gegeben sei ein rechteckiges Schema, eine sogenannte Matrix:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pm} \end{Vmatrix}$$

von mp Größen $a_{\varkappa\mu}$, ${}_{\mu=1,2,\cdots,m}^{\varkappa=1,2,\cdots,p}$. Wählt man, unter q eine ganze, keine der Zahlen m, p übersteigende Zahl verstehend, bei dieser Matrix irgend q Horizontalreihen aus und bei diesen irgend q Vertikalreihen, so wird dadurch ein quadratisches Schema von Größen a bestimmt, dessen Determinante eine q-reihige Determinante der Matrix genannt werden soll. Unter dem Range $\mathfrak{r}$ der Matrix ist dann nach Herrn Frobenius*) diejenige größte ganze Zahl $\mathfrak{r}$ zu verstehen, für welche die entsprechenden, $\mathfrak{r}$-reihigen, Determinanten der Matrix nicht sämtlich den Wert Null haben. Diese Zahl $\mathfrak{r}$ kann höchstens gleich der kleineren der beiden Zahlen m, p sein, da q-reihige Determinanten der Matrix, für die q größer als die kleinere der beiden Zahlen m, p ist, überhaupt nicht existieren. Ist $\mathfrak{r}$ um $\mathfrak{g}$ Einheiten kleiner als die kleinere der beiden Zahlen m, p, so haben der Definition der Zahl $\mathfrak{r}$ zufolge die den Werten $q = \mathfrak{r}+1, \mathfrak{r}+2, \cdots, \mathfrak{r}+\mathfrak{g}$ entsprechenden q-reihigen Determinanten der Matrix sämtlich den Wert Null.

Irgend s Systeme von je m konstanten Größen:

$$\begin{matrix} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \cdots, & x_m^{(1)} \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & \cdots, & x_m^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^{(s)}, & x_2^{(s)}, & \cdots, & x_m^{(s)} \end{matrix}$$

heißen linear unabhängig, wenn die mit Hilfe von s unbestimmten Größen $c^{(1)}, c^{(2)}, \cdots, c^{(s)}$ gebildeten m Gleichungen:

$$c^{(1)}x_1^{(1)} + c^{(2)}x_1^{(2)} + \cdots + c^{(s)}x_1^{(s)} = 0,\ c^{(1)}x_2^{(1)} + c^{(2)}x_2^{(2)} + \cdots + c^{(s)}x_2^{(s)} = 0,\ \cdots,\ c^{(1)}x_m^{(1)} + c^{(2)}x_m^{(2)} + \cdots + c^{(s)}x_m^{(s)} = 0$$

*) Frobenius, G., Über homogene totale Differentialgleichungen. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 86, S. 1.)

nur für $c^{(1)}=0,\ c^{(2)}=0,\cdots,c^{(s)}=0$ bestehen können. Lassen sich dagegen diese Gleichungen durch ein von $0, 0, \cdots, 0$ verschiedenes Größensystem $c^{(1)}, c^{(2)}, \cdots, c^{(s)}$ befriedigen — für $s > m$ ist dies immer möglich —, so werden die s Systeme der Größen x linear abhängig genannt. Ist in diesem letzteren Falle speziell $c^{(\sigma)} \neq 0$, so läßt sich eine jede der m Größen $x_1^{(\sigma)}, x_2^{(\sigma)}, \cdots, x_m^{(\sigma)}$ durch die $s-1$ mit ihr in derselben Vertikalreihe stehenden Größen x mit Hilfe derselben $s-1$ Größen $d^{(\varrho)} = -\frac{c^{(\varrho)}}{c^{(\sigma)}}$, $\varrho = 1, 2, \cdots, \sigma-1, \sigma+1, \cdots, s$, in der durch die Gleichung:

$$x_\mu^{(\sigma)} = d^{(1)} x_\mu^{(1)} + \cdots + d^{(\sigma-1)} x_\mu^{(\sigma-1)} + d^{(\sigma+1)} x_\mu^{(\sigma+1)} + \cdots + d^{(s)} x_\mu^{(s)} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m)$$

bestimmten Form linear ausdrücken, und es soll dann gesagt werden, daß das σ^{te} System der Größen x sich aus den $s-1$ übrigen Systemen linear zusammensetzen lasse.

Nach diesen Vorbereitungen kann man jetzt den erwähnten Hilfssatz in folgender Weise aussprechen:

Hilfssatz. Die nachstehenden fünf auf die beiden Gleichungensysteme:

$$(\mathrm{G}_1.) \qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=m} a_{\varkappa\mu} x_\mu = 0, \qquad \varkappa = 1, 2, \cdots, p,$$

$$(\mathrm{G}_2.) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} a_{\varkappa\mu} y_\varkappa = 0, \qquad \mu = 1, 2, \cdots, m,$$

sich beziehenden Aussagen sind gleichwertig, insofern aus irgend einer von ihnen als Voraussetzung jede der vier anderen abgeleitet werden kann.

I.) Der Rang der Matrix der Größen a ist gleich $\mathfrak{r}$.

II.) Das Gleichungensystem (G$_1$.) besitzt $m-\mathfrak{r}$, von $0, 0, \cdots, 0$ verschiedene, linear unabhängige Lösungssysteme $x_1^{(\sigma)}, x_2^{(\sigma)}, \cdots, x_m^{(\sigma)}$, $\sigma = 1, 2, \cdots, m-\mathfrak{r}$, und das allgemeinste Lösungssystem läßt sich aus ihnen mit Hilfe von $m-\mathfrak{r}$ unbestimmten Konstanten linear zusammensetzen.

III.) Das Gleichungensystem (G$_2$.) besitzt $p-\mathfrak{r}$, von $0, 0, \cdots, 0$ verschiedene, linear unabhängige Lösungssysteme $y_1^{(\tau)}, y_2^{(\tau)}, \cdots, y_p^{(\tau)}$, $\tau = 1, 2, \cdots, p-\mathfrak{r}$, und das allgemeinste Lösungssystem läßt sich aus ihnen mit Hilfe von $p-\mathfrak{r}$ unbestimmten Konstanten linear zusammensetzen.

IV.) Aus den Gleichungen (G$_1$.) lassen sich $\mathfrak{r}$ herausgreifen, die voneinander unabhängig sind, und jede der $p-\mathfrak{r}$ übrigen Gleichungen ist eine Folge derselben.

V.) Aus den Gleichungen (G$_2$.) lassen sich $\mathfrak{r}$ herausgreifen, die voneinander unabhängig sind, und jede der $m-\mathfrak{r}$ übrigen Gleichungen ist eine Folge derselben.

Für den Beweis dieses Satzes möge auf die unter dem Texte zitierte Arbeit des Herrn Frobenius*) verwiesen werden.

*) Frobenius, G., Über das Pfaffsche Problem. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 82, S. 236.) Vergleiche auch: Weber, E. v., Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. (Leipzig, Teubner 1900, S. 15.)

5.

Nach dem am Ende des Art. 2 ausgesprochenen Resultate existieren zu einem beliebig in T angenommenen Punktsysteme $\eta_1, \cdots, \eta_m = \eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(s)}, \cdots, \eta^{(s)}$, das den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ $(\sigma = 1, 2, \cdots, s)$ m_σ-mal enthält, Funktionen $A(z)$, welchen das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ oder auch nur ein Teil desselben als System der ∞^1-Punkte zukommt, dann, aber auch nur dann, wenn sich das System der p Gleichungen:

$$(\mathrm{G}_1.)\quad \begin{array}{l} \mathfrak{L}_{11}\left(\frac{du_1}{dz_1}\right)_0 + \cdots + \frac{1}{(m_1-1)!}\mathfrak{L}_{1m_1}\left(\frac{d^{m_1}u_1}{dz_1^{m_1}}\right)_0 + \cdots + \mathfrak{L}_{s1}\left(\frac{du_1}{dz_s}\right)_0 + \cdots + \frac{1}{(m_s-1)!}\mathfrak{L}_{sm_s}\left(\frac{d^{m_s}u_1}{dz_s^{m_s}}\right)_0 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{L}_{11}\left(\frac{du_p}{dz_1}\right)_0 + \cdots + \frac{1}{(m_1-1)!}\mathfrak{L}_{1m_1}\left(\frac{d^{m_1}u_p}{dz_1^{m_1}}\right)_0 + \cdots + \mathfrak{L}_{s1}\left(\frac{du_p}{dz_s}\right)_0 + \cdots + \frac{1}{(m_s-1)!}\mathfrak{L}_{sm_s}\left(\frac{d^{m_s}u_p}{dz_s^{m_s}}\right)_0 = 0 \end{array}$$

— bei dem der einfacheren Schreibweise wegen für $\sigma = 1, 2, \cdots s$ $z_{\eta^{(\sigma)}}$ durch z_σ ersetzt ist — durch Größen $\mathfrak{L}$, welche nicht sämtlich den Wert Null besitzen, befriedigen läßt. Dies ist nach dem im vorhergehenden Artikel aufgestellten Hilfssatze dann, aber auch nur dann möglich, wenn der, mit $\Re_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ zu bezeichnende, Rang der Matrix:

$$\left\|\begin{matrix} \left(\frac{du_1}{dz_1}\right)_0 \cdots \left(\frac{d^{m_1}u_1}{dz_1^{m_1}}\right)_0 \cdots\cdots \left(\frac{du_1}{dz_s}\right)_0 \cdots \left(\frac{d^{m_s}u_1}{dz_s^{m_s}}\right)_0 \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdots\cdots \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdots\cdots \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ \left(\frac{du_p}{dz_1}\right)_0 \cdots \left(\frac{d^{m_1}u_p}{dz_1^{m_1}}\right)_0 \cdots\cdots \left(\frac{du_p}{dz_s}\right)_0 \cdots \left(\frac{d^{m_s}u_p}{dz_s^{m_s}}\right)_0 \end{matrix}\right\|$$

— oder, wie im folgenden der Kürze wegen, in Übertragung des Begriffes „Rang" von der Matrix auf das ihr zu Grunde liegende Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$, gesagt werden soll, der Rang des Punktsystems $\eta_1, \cdots, \eta_m$ — der weder über p noch über m liegen, aber auch, nach dem in Art. 3 über die Größen $\left(\frac{du_1}{dz_\eta}\right)_0, \cdots, \left(\frac{du_p}{dz_\eta}\right)_0$ Bewiesenen nicht gleich Null sein kann, kleiner als m ist. Für $m = p+1, p+2, \cdots$ ist immer $\Re_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m) < m$, wie auch das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ von Anfang an gewählt sein mag; für $m \overline{\gtrless} p$ dagegen wird, wie die spätere eingehende Untersuchung zeigt, durch die Forderung, daß der Rang $\Re_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ kleiner als m sei, zugleich eine Beziehung zwischen den Punkten des Punktsystems gefordert.

Die sämtlichen zu dem Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ etwa existierenden Funktionen $A(z)$ werden nach Art. 1 durch die Gleichung:

$$A(z) = C + \mathfrak{L}_{11} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(1)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{1m_1} \underset{m_1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(1)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots\cdot + \mathfrak{L}_{s1} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(s)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{sm_s} \underset{m_s}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(s)}\\ z\end{matrix}\right|$$

geliefert, wenn man darin, unter C eine willkürliche Konstante verstehend, an Stelle von $\mathfrak{L}_{11}, \cdots, \mathfrak{L}_{1m_1}, \cdots\cdot, \mathfrak{L}_{s1}, \cdots, \mathfrak{L}_{sm_s}$ ein jedes von $0, \cdots, 0, \cdots\cdot, 0, \cdots, 0$ verschiedene, das Gleichungensystem $(\mathrm{G}_1.)$ befriedigende Größensystem treten läßt. Irgend k dieser Funktionen $A(z)$:

$$A^{(1)}(z) = C^{(1)} + \mathfrak{L}^{(1)}_{11} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(1)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}^{(1)}_{1m_1} \underset{m_1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(1)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots\cdot + \mathfrak{L}^{(1)}_{s1} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(s)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}^{(1)}_{sm_s} \underset{m_s}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(s)}\\ z\end{matrix}\right|,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A^{(k)}(z) = C^{(k)} + \mathfrak{L}^{(k)}_{11} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(1)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}^{(k)}_{1m_1} \underset{m_1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(1)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots\cdot + \mathfrak{L}^{(k)}_{s1} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(s)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}^{(k)}_{sm_s} \underset{m_s}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(s)}\\ z\end{matrix}\right|$$

sollen linear unabhängig genannt werden, wenn der Ausdruck:

$$\lambda^{(1)} A^{(1)}(z) + \lambda^{(2)} A^{(2)}(z) + \cdots + \lambda^{(k)} A^{(k)}(z)$$

für kein von $0, \cdots, 0$ verschiedenes Konstantensystem $\lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(k)}$ in T allenthalben denselben Wert besitzt. Existiert dagegen ein von $0, \cdots, 0$ verschiedenes Konstantensystem $\lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(k)}$, für das der soeben aufgestellte Ausdruck in T allenthalben denselben, mit λ zu bezeichnenden, Wert besitzt, sodaß also die Gleichung:

$$\lambda^{(1)} A^{(1)}(z) + \lambda^{(2)} A^{(2)}(z) + \cdots + \lambda^{(k)} A^{(k)}(z) = \lambda$$

besteht, so sollen die k Funktionen linear abhängig heißen. Aus diesen Definitionen folgt, daß die k Funktionen $A^{(1)}(z), \cdots, A^{(k)}(z)$ dann, aber auch nur dann linear unabhängig sind, wenn die k bei ihnen auftretenden Konstantensysteme $\mathfrak{L}^{(\varkappa)}_{11}, \cdots, \mathfrak{L}^{(\varkappa)}_{1m_1}, \cdots\cdot, \mathfrak{L}^{(\varkappa)}_{s1}, \cdots, \mathfrak{L}^{(\varkappa)}_{sm_s}$, ${\scriptstyle \varkappa=1,2,\cdots,k}$, im Sinne der im vorhergehenden Artikel gegebenen Definition linear unabhängig sind.

Da die Funktionen $\frac{du}{dz}$ nach den Untersuchungen des Art. 3 zur Gruppe derjenigen A-Funktionen gehören, bei denen an Stelle des allgemeinen Punktsystems $\eta_1, \cdots, \eta_m$ das spezielle den Punkt α_ϱ ${\scriptstyle(\varrho=1,2,\cdots,r)}$ $(\mu_\varrho - 1)$-mal enthaltende Punktsystem $\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \cdots\cdot, \alpha_r, \cdots, \alpha_r$ steht, so können die soeben aufgestellten Definitionen unmittelbar auf die Funktionen $\frac{du}{dz}$ übertragen werden. Aus diesen Definitionen folgt hier, daß die m mit irgend welchen Konstanten c gebildeten Funktionen $\frac{du}{dz}$:

$$\frac{du^{(1)}}{dz} = c_1^{(1)} \frac{du_1}{dz} + \cdots + c_p^{(1)} \frac{du_p}{dz},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{du^{(m)}}{dz} = c_1^{(m)} \frac{du_1}{dz} + \cdots + c_p^{(m)} \frac{du_p}{dz}$$

dann, aber auch nur dann linear unabhängig sind, wenn die m bei ihnen auftretenden Konstantensysteme $c_1^{(\mu)}, \cdots, c_p^{(\mu)}$, ${\scriptstyle \mu=1,2,\cdots,m}$, linear unabhängig sind.

Nach diesen Vorbereitungen soll jetzt das Gleichungensystem $(G_1.)$ unter der, den Wert $m=1$ ausschließenden, Voraussetzung diskutiert werden, daß der Rang $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ des Punktsystems $\eta_1, \cdots, \eta_m$, der weder über p noch über m liegen, aber auch nicht den Wert Null haben kann, kleiner als m ist, da nur dann, wie schon vorher bemerkt wurde, das Gleichungensystem $(G_1.)$ sich durch Größen $\mathfrak{L}$, die nicht sämtlich mit der Null zusammenfallen, befriedigen läßt. Dabei soll der Fall, wo $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m) = p$ ist, von dem Falle, wo $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m) < p$ ist, unterschieden werden.

Erster Fall: *Der Rang* $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ *des Punktsystems* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *ist gleich* p.

Dieser erste Fall kann, da die gemachte Voraussetzung $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m) < m$ hier in $p < m$ übergeht, nur für $m = p+1, p+2, \cdots$ auftreten; er liegt, wie aus dem im folgenden unter III.) Gesagten hervorgeht, immer vor, wenn $m > 2p-2$ ist, also unter allen Umständen für $p = 1$.

In diesem ersten Falle ergibt sich nun durch Anwendung des im vorhergehenden Artikel aufgestellten Hilfssatzes auf das Gleichungensystem $(G_1.)$, daß die folgenden fünf Aussagen gleichwertig sind, insofern aus irgend einer von ihnen als Voraussetzung jede der vier anderen abgeleitet werden kann.

I.) *Der Rang* $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ *des Punktsystems* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *ist gleich* p.

II.) *Das Gleichungensystem* $(G_1.)$ *besitzt* $m-p$, *von* $0, \cdots, 0, \cdots, 0, \cdots, 0$ *verschiedene, linear unabhängige Lösungssysteme* $\mathfrak{L}_{11}^{(\varkappa)}, \cdots, \mathfrak{L}_{1m_1}^{(\varkappa)}, \cdots, \mathfrak{L}_{s1}^{(\varkappa)}, \cdots, \mathfrak{L}_{sm_s}^{(\varkappa)}$, ${\scriptstyle \varkappa=1,2,\cdots,m-p}$, *und das allgemeinste Lösungssystem läßt sich aus ihnen mit Hilfe von* $m-p$ *unbestimmten Konstanten linear zusammensetzen: oder, was dasselbe, es gibt* $m-p$ *linear unabhängige Funktionen* $A(z)$:

$$A^{(\varkappa)}(z) = C^{(\varkappa)} + \mathfrak{L}_{11}^{(\varkappa)} P_1 \left|\begin{matrix}\eta^{(1)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{1m_1}^{(\varkappa)} P_{m_1} \left|\begin{matrix}\eta^{(1)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{s1}^{(\varkappa)} P_1 \left|\begin{matrix}\eta^{(s)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{sm_s}^{(\varkappa)} P_{m_s} \left|\begin{matrix}\eta^{(s)}\\ z\end{matrix}\right|, \quad {\scriptstyle \varkappa=1,2,\cdots,m-p,}$$

welchen das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *oder auch nur ein Teil desselben als System der* ∞^1*-Punkte zukommt, und die allgemeinste derartige Funktion* $A(z)$ *läßt sich aus ihnen mit Hilfe von* $m-p+1$ *unbestimmten Konstanten* $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(m-p)}$ *linear zusammensetzen in der Form:*

$$A(z) = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)} A^{(1)}(z) + \lambda^{(2)} A^{(2)}(z) + \cdots + \lambda^{(m-p)} A^{(m-p)}(z).$$

III.) *Das Gleichungensystem:*

$$
(\mathrm{G}_2.)\qquad
\begin{array}{l}
c_1\left(\frac{du_1}{dz_1}\right)_0 + c_2\left(\frac{du_2}{dz_1}\right)_0 + \cdots + c_p\left(\frac{du_p}{dz_1}\right)_0 = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
c_1\left(\frac{d^{m_1}u_1}{dz_1^{m_1}}\right)_0 + c_2\left(\frac{d^{m_1}u_2}{dz_1^{m_1}}\right)_0 + \cdots + c_p\left(\frac{d^{m_1}u_p}{dz_1^{m_1}}\right)_0 = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
c_1\left(\frac{du_1}{dz_s}\right)_0 + c_2\left(\frac{du_2}{dz_s}\right)_0 + \cdots + c_p\left(\frac{du_p}{dz_s}\right)_0 = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
c_1\left(\frac{d^{m_s}u_1}{dz_s^{m_s}}\right)_0 + c_2\left(\frac{d^{m_s}u_2}{dz_s^{m_s}}\right)_0 + \cdots + c_p\left(\frac{d^{m_s}u_p}{dz_s^{m_s}}\right)_0 = 0
\end{array}
$$

kann nur durch $c_1 = 0,\ c_2 = 0, \cdots,\ c_p = 0$ *befriedigt werden, oder, was dasselbe, es gibt keine Funktion* $\frac{du}{dz}$, *bei der das Punktsystem* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *in dem Systeme der charakteristischen Punkte enthalten ist.*

IV.) *Die* p *Gleichungen* $(\mathrm{G}_1.)$ *sind voneinander unabhängig.*

V.) *Aus den Gleichungen* $(\mathrm{G}_2.)$ *lassen sich* p *herausgreifen, die voneinander unabhängig sind, und jede der* $m-p$ *übrigen Gleichungen ist eine Folge derselben.*

Die allgemeinste zu dem Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörige Funktion $A(z)$ enthält nach II.) $m-p+1$ wesentliche willkürliche Konstanten linear homogen.*) In Übereinstimmung hiermit folgt aus IV.), daß sich von den m Größen $\mathfrak{L}$ $m-p$ angeben lassen, die von Anfang an willkürlich gewählt werden können und durch die dann die p übrigen Größen $\mathfrak{L}$ eindeutig bestimmt sind.

Zweiter Fall: *Der Rang* $\mathfrak{R}_{\left|\substack{1\\1}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ *des Punktsystems* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *ist kleiner als* p.

Dieser zweite Fall kann, wie aus dem im folgenden unter III.) Gesagten hervorgeht, nur dann auftreten, wenn $m \gtreqless 2p-2$ ist, also unter keinen Umständen für $p=1$; er liegt für $p>1$, der gemachten Voraussetzung $\mathfrak{R}_{\left|\substack{1\\1}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m) < m$ zufolge, immer vor, wenn $m < p+1$ ist.

In diesem zweiten Falle ergibt sich nun durch Anwendung des im vorhergehenden Artikel aufgestellten Hilfssatzes auf das Gleichungensystem $(\mathrm{G}_1.)$, daß die folgenden fünf Aussagen gleichwertig sind, insofern aus irgend einer von ihnen als Voraussetzung jede der vier anderen abgeleitet werden kann.

I.) *Der Rang* $\mathfrak{R}_{\left|\substack{1\\1}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ *des Punktsystems* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *ist gleich* $\mathfrak{r}$.

II.) *Das Gleichungensystem* $(\mathrm{G}_1.)$ *besitzt* $m-\mathfrak{r}$, *von* $0, \cdots, 0, \cdots, 0, \cdots, 0$ *verschiedene, linear unabhängige Lösungssysteme* $\mathfrak{L}_{11}^{(\varkappa)}, \cdots, \mathfrak{L}_{1m_1}^{(\varkappa)}, \cdots, \mathfrak{L}_{s1}^{(\varkappa)}, \cdots, \mathfrak{L}_{sm_s}^{(\varkappa)}$, ${\scriptstyle \varkappa=1,2,\cdots,m-\mathfrak{r}}$, *und das all-*

*) Riemann, B., Theorie der Abelschen Funktionen. I, Art. 5. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 88—144; S. 108.)

gemeinste Lösungssystem läßt sich aus ihnen mit Hilfe von $m-\mathfrak{r}$ unbestimmten Konstanten linear zusammensetzen; oder, was dasselbe, es gibt $m-\mathfrak{r}$ linear unabhängige Funktionen $A(z)$:

$$A^{(\varkappa)}(z) = C^{(\varkappa)} + \mathfrak{L}_{11}^{(\varkappa)} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(1)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{1m_1}^{(\varkappa)} \underset{m_1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(1)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{s1}^{(\varkappa)} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(s)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{sm_s}^{(\varkappa)} \underset{m_s}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(s)}\\ z\end{matrix}\right|, \qquad \varkappa = 1, 2, \cdots, m-\mathfrak{r},$$

welchen das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ oder auch nur ein Teil desselben als System der ∞^1-Punkte zukommt, und die allgemeinste derartige Funktion $A(z)$ läßt sich aus ihnen mit Hilfe von $m-\mathfrak{r}+1$ unbestimmten Konstanten $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(m-\mathfrak{r})}$ linear zusammensetzen in der Form:

$$A(z) = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)} A^{(1)}(z) + \lambda^{(2)} A^{(2)}(z) + \cdots + \lambda^{(m-\mathfrak{r})} A^{(m-\mathfrak{r})}(z).$$

III.) *Das Gleichungensystem $(G_2.)$ besitzt $p-\mathfrak{r}$, von $0, \cdots, 0$ verschiedene, linear unabhängige Lösungssysteme $c_1^{(\tau)}, c_2^{(\tau)}, \cdots, c_p^{(\tau)}$, $\tau = 1, 2, \cdots, p-\mathfrak{r}$, und das allgemeinste Lösungssystem läßt sich aus ihnen mit Hilfe von $p-\mathfrak{r}$ unbestimmten Konstanten linear zusammensetzen; oder, was dasselbe, es gibt $p-\mathfrak{r}$ linear unabhängige Funktionen $\frac{du}{dz}$:*

$$\frac{du^{(\tau)}}{dz} = c_1^{(\tau)} \frac{du_1}{dz} + c_2^{(\tau)} \frac{du_2}{dz} + \cdots + c_p^{(\tau)} \frac{du_p}{dz}, \qquad \tau = 1, 2, \cdots, p-\mathfrak{r},$$

bei welchen das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ in dem Systeme der charakteristischen Punkte enthalten ist, und die allgemeinste derartige Funktion $\frac{du}{dz}$ läßt sich aus ihnen mit Hilfe von $p-\mathfrak{r}$ unbestimmten Konstanten $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(p-\mathfrak{r})}$ linear zusammensetzen in der Form:

$$\frac{du}{dz} = \lambda^{(1)} \frac{du^{(1)}}{dz} + \lambda^{(2)} \frac{du^{(2)}}{dz} + \cdots + \lambda^{(p-\mathfrak{r})} \frac{du^{(p-\mathfrak{r})}}{dz}.$$

IV.) *Aus den Gleichungen $(G_1.)$ lassen sich $\mathfrak{r}$ herausgreifen, die voneinander unabhängig sind, und jede der $p-\mathfrak{r}$ übrigen Gleichungen ist eine Folge derselben.*

V.) *Aus den Gleichungen $(G_2.)$ lassen sich $\mathfrak{r}$ herausgreifen, die voneinander unabhängig sind, und jede der $m-\mathfrak{r}$ übrigen Gleichungen ist eine Folge derselben.*

Die allgemeinste zu dem Punktsysteme $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörige Funktion $A(z)$ enthält nach II.) $m-\mathfrak{r}+1$ wesentliche willkürliche Konstanten linear homogen.*) In Übereinstimmung hiermit folgt aus IV.), daß sich von den m Größen $\mathfrak{L}$ $m-\mathfrak{r}$ angeben lassen, die von Anfang an willkürlich gewählt werden können und durch die dann die $\mathfrak{r}$ übrigen Größen $\mathfrak{L}$ eindeutig bestimmt sind.

Setzt man in den letzten fünf, unter der Voraussetzung $\mathfrak{r} < p$ gemachten, Aussagen $\mathfrak{r} = p$, so gelangt man bei richtiger Interpretation wieder zu den fünf auf den ersten Fall sich beziehenden Aussagen.

*) Roch, G., Über die Anzahl der willkürlichen Konstanten in algebraischen Funktionen. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 64, S. 372.)

6.

Von besonderem Interesse sind diejenigen A-Funktionen, welche nur für einen einzigen Punkt η der Fläche T unendlich werden, also das den Punkt η m-mal enthaltende Punktsystem $\overset{1}{\eta}, \overset{2}{\eta}, \cdots, \overset{m}{\eta}$ oder auch nur einen Teil desselben als System der ∞^1-Punkte besitzen. Nach den Untersuchungen des vorhergehenden Artikels existieren Funktionen $A(z)$ von dieser Art dann, aber auch nur dann, wenn der Rang $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\overset{1}{\eta}, \cdots, \overset{m}{\eta})$ des aufgestellten Punktsystems eine unter m liegende Zahl $\mathfrak{r}$ ist, und zwar gibt es dann immer $m-\mathfrak{r}$ linear unabhängige Funktionen $A(z)$:

$$A^{(\varkappa)}(z) = C^{(\varkappa)} + \mathfrak{L}_1^{(\varkappa)} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_2^{(\varkappa)} \underset{2}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_m^{(\varkappa)} \underset{m}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|, \qquad {\scriptstyle \varkappa = 1, 2, \cdots, m-\mathfrak{r},}$$

welchen das Punktsystem $\overset{1}{\eta}, \overset{2}{\eta}, \cdots, \overset{m}{\eta}$ oder auch nur ein Teil desselben als System der ∞^1-Punkte zukommt, und die allgemeinste derartige Funktion $A(z)$ läßt sich aus ihnen mit Hilfe von $m-\mathfrak{r}+1$ unbestimmten Konstanten $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(m-\mathfrak{r})}$ linear zusammensetzen in der Form:

$$A(z) = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)} A^{(1)}(z) + \lambda^{(2)} A^{(2)}(z) + \cdots + \lambda^{(m-\mathfrak{r})} A^{(m-\mathfrak{r})}(z).$$

Aus dem soeben aufgestellten Systeme der $m-\mathfrak{r}$ linear unabhängigen Funktionen $A^{(1)}(z), \cdots, A^{(m-\mathfrak{r})}(z)$ erhält man wieder ein System von $m-\mathfrak{r}$ linear unabhängigen Funktionen $A(z)$ der in Rede stehenden Art, wenn man darin, unter μ, ν irgend zwei Zahlen aus der Reihe $1, 2, \cdots, m-\mathfrak{r}$, unter c eine beliebige Konstante verstehend, $A^{(\mu)}(z)$ durch $A^{(\mu)}(z) + c\,A^{(\nu)}(z)$ ersetzt, und man kann dann für den Fall, daß die Funktionen $A^{(\mu)}(z), A^{(\nu)}(z)$ dieselbe Ordnung $\overline{m} \overset{<}{=} m$ haben — also die Größen $\mathfrak{L}_{\overline{m}}^{(\mu)}, \mathfrak{L}_{\overline{m}}^{(\nu)}$ von Null verschieden sind, die Größen $\mathfrak{L}_{\overline{m}+1}^{(\mu)}, \cdots, \mathfrak{L}_m^{(\mu)}; \mathfrak{L}_{\overline{m}+1}^{(\nu)}, \cdots, \mathfrak{L}_m^{(\nu)}$ dagegen den Wert Null besitzen — die Ordnung von $A^{(\mu)}(z) + c\,A^{(\nu)}(z)$, indem man c durch die Gleichung $\mathfrak{L}_{\overline{m}}^{(\mu)} + c\,\mathfrak{L}_{\overline{m}}^{(\nu)} = 0$ bestimmt, kleiner als $\overline{m}$ machen. Von dem ursprünglichen Systeme $A^{(1)}(z), \cdots, A^{(m-\mathfrak{r})}(z)$ ausgehend kann man nun durch wiederholte Anwendung dieses Reduktionsverfahrens, indem man zunächst bei den Funktionen von der höchsten Ordnung beginnt, zu einem Systeme $\widetilde{A}^{(1)}(z), \cdots, \widetilde{A}^{(m-\mathfrak{r})}(z)$ von $m-\mathfrak{r}$ linear unabhängigen Funktionen $A(z)$ der in Rede stehenden Art gelangen, bei dem keine zwei Funktionen die gleiche Ordnung besitzen. Haben aber die so gewonnenen Funktionen $\widetilde{A}$ die — jedenfalls der Reihe $1, 2, \cdots, m$ angehörigen — Ordnungszahlen $\widetilde{m}_1, \cdots, \widetilde{m}_{m-\mathfrak{r}}$ beziehungsweise, so muß auch die Ordnungszahl $\overline{m}$ irgend einer Funktion $A(z)$ der in Rede stehenden Art, da jede solche Funktion sich aus den Funktionen $\widetilde{A}$ mit Hilfe von $m-\mathfrak{r}+1$ passend gewählten Konstanten $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(m-\mathfrak{r})}$ linear zusammensetzen läßt in der Form:

$$A(z) = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}\widetilde{A}^{(1)}(z) + \lambda^{(2)}\widetilde{A}^{(2)}(z) + \cdots + \lambda^{(m-\mathfrak{r})}\widetilde{A}^{(m-\mathfrak{r})}(z),$$

sich mit einer der Zahlen $\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, \cdots, \widetilde{m}_{m-\mathfrak{r}}$ decken, oder, was dasselbe, es gibt unter den Zahlen $1, 2, \cdots, m$ gerade $\mathfrak{r} = \Re_{\left|{1 \atop 1}\right|}(\overset{1}{\eta}, \cdots, \overset{m}{\eta})$ Zahlen, die nicht als Ordnungszahlen bei den Funktionen $A(z)$ der in Rede stehenden Art auftreten können.

Eine positive ganze Zahl n soll eine zum Punkte η der Fläche T gehörige Lückenzahl genannt werden, wenn unter den nur im Punkte η unendlich werdenden A-Funktionen keine von der Ordnung n sich befindet, also keine, die im Punkte η ∞^n wird. Die Zahl 1 ist unter allen Umständen eine Lückenzahl, da nach dem in Art. 3 Bewiesenen A-Funktionen von der Ordnung 1 nicht existieren. Dagegen ist eine über 1 liegende Zahl n nur dann eine zum Punkte η gehörige Lückenzahl, wenn die Differenz $\Re_{\left|{1 \atop 1}\right|}(\overset{1}{\eta}, \cdots, \overset{n}{\eta}) - \Re_{\left|{1 \atop 1}\right|}(\overset{1}{\eta}, \cdots, \overset{n-1}{\eta})$, die der Definition des Begriffes „Rang" zufolge nur den Wert 1 oder den Wert 0 haben kann, den Wert 1 besitzt, da nach dem soeben Bewiesenen $\Re_{\left|{1 \atop 1}\right|}(\overset{1}{\eta}, \cdots, \overset{\mu}{\eta})$ die Anzahl der in der Reihe $1, 2, \cdots, \mu$ vorkommenden, zum Punkte η gehörigen Lückenzahlen ist. Beachtet man nun, daß p der größte Wert ist, den die mit wachsendem μ niemals abnehmende Größe $\Re_{\left|{1 \atop 1}\right|}(\overset{1}{\eta}, \cdots, \overset{\mu}{\eta})$ annehmen kann, und daß diese Größe, nach dem im vorhergehenden Artikel beim ersten Falle Bemerkten, jedenfalls für $\mu = 2p - 1$ den Wert p besitzt, so erkennt man schließlich, daß es im ganzen p zum Punkte η gehörige Lückenzahlen gibt, daß diese sämtlich in der Reihe $1, 2, \cdots, 2p-1$ enthalten sind, und daß von ihnen in der Reihe $1, 2, \cdots, \mu$, ${}_{\mu < 2p-1}$, gerade $\Re_{\left|{1 \atop 1}\right|}(\overset{1}{\eta}, \cdots, \overset{\mu}{\eta})$ vorkommen.*)

7.

Die in Art. 5 für die Diskussion des Gleichungensystems (G_1.) gemachte Voraussetzung, daß der Rang $\Re_{\left|{1 \atop 1}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ des Punktsystems $\eta_1, \cdots, \eta_m$ eine unter m liegende Zahl $\mathfrak{r}$ ist, deckt sich nach dem am Ende des Art. 2 ausgesprochenen Resultate mit der Forderung, daß die Kongruenz:

$$\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=m} u^{\varepsilon_\mu}\right) \equiv \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=m} u^{\eta_\mu}\right)$$

sich durch ein mit $\eta_1, \cdots, \eta_m$ nicht identisches Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ befriedigen läßt, oder — wie im folgenden der Kürze wegen gesagt werden soll — daß das Punkt-

*) Vgl. Weierstrass, K., Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transzendenten. (Mathematische Werke, Bd. IV, S. 211—225.)

system $\eta_1, \cdots, \eta_m$ ein ersetzbares Punktsystem ist. Zwei durch die aufgestellte Kongruenz verknüpfte Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$; $\eta_1, \cdots, \eta_m$ sollen äquivalente Punktsysteme heißen.

Um die sämtlichen mit dem vorgegebenen Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ äquivalenten, von $\eta_1, \cdots, \eta_m$ verschiedenen Punktsysteme zu erhalten, hat man nur für jede zu dem Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ im Sinne des Art. 1 gehörige Funktion $A(z)$ das System der 0^1-Punkte aufzustellen und zu ihm dasjenige Punktsystem hinzuzufügen, welches von dem Punktsysteme $\eta_1, \cdots, \eta_m$ nach Wegnahme des Systems der ∞^1-Punkte der Funktion $A(z)$ noch übrig bleibt. Man erhält auf diese Weise die sämtlichen in Rede stehenden Punktsysteme, und auch jedes nur einmal, wenn man bei der Durchführung des angegebenen Verfahrens jede Funktion $A(z)$ ausschließt, die sich von einer schon in Betracht gezogenen Funktion $A(z)$ nur um einen konstanten Faktor unterscheidet.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein Punkt ε der Fläche T — einerlei ob dieser Punkt in dem Punktsysteme $\eta_1, \cdots, \eta_m$ enthalten ist oder nicht — in einem mit $\eta_1, \cdots, \eta_m$ äquivalenten Punktsysteme zum mindesten ν-mal vorkommt, werden durch ein System von ν homogenen linearen Gleichungen zwischen den in der allgemeinsten hierher gehörigen Funktion $A(z) = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)} A^{(1)}(z) + \lambda^{(2)} A^{(2)}(z) + \cdots + \lambda^{(m-\mathfrak{r})} A^{(m-\mathfrak{r})}(z)$ auftretenden $m - \mathfrak{r} + 1$ Konstanten $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(m-\mathfrak{r})}$ dargestellt. Dementsprechend kann man für die Bildung eines mit $\eta_1, \cdots, \eta_m$ äquivalenten Punktsystems $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ die $m - \mathfrak{r}$ Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}}$ beliebig wählen; denn diese Wahl zieht nach dem soeben Bemerkten ein System von nur $m - \mathfrak{r}$ homogenen linearen Gleichungen zwischen den $m - \mathfrak{r} + 1$ Konstanten $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(m-\mathfrak{r})}$ nach sich. Die $\mathfrak{r}$ noch fehlenden, das gewählte System $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}}$ zu einem mit $\eta_1, \cdots, \eta_m$ äquivalenten Systeme ergänzenden Punkte $\varepsilon_{m-\mathfrak{r}+1}, \cdots, \varepsilon_m$ werden aber nur dann eindeutig bestimmt sein, wenn durch das erwähnte System von $m - \mathfrak{r}$ Gleichungen die $m - \mathfrak{r} + 1$ Größen $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(m-\mathfrak{r})}$ bis auf einen allen gemeinsamen Faktor bestimmt sind, oder, was dasselbe, wenn die Matrix der $(m - \mathfrak{r})(m - \mathfrak{r} + 1)$ in diesen Gleichungen als Koeffizienten der λ auftretenden Größen den Rang $m - \mathfrak{r}$ besitzt.

Es soll jetzt bewiesen werden, daß durch die Wahl der Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}}$ die $\mathfrak{r}$ noch fehlenden Punkte $\varepsilon_{m-\mathfrak{r}+1}, \cdots, \varepsilon_m$ im allgemeinen eindeutig bestimmt sind. Zu dem Ende grenze man in der Fläche T $m - \mathfrak{r}$ keinen der Punkte $\eta_1, \cdots, \eta_m$ enthaltende Bereiche $B_1, \cdots, B_{m-\mathfrak{r}}$ ab, bilde mit Hilfe der $m - \mathfrak{r}$ schon benutzten linear unabhängigen Funktionen $A^{(1)}(z), \cdots, A^{(m-\mathfrak{r})}(z)$ die Determinante:

$$\begin{vmatrix} A^{(1)}(\varepsilon_1) & \cdots & A^{(m-\mathfrak{r})}(\varepsilon_1) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ A^{(1)}(\varepsilon_{m-\mathfrak{r}}) & \cdots & A^{(m-\mathfrak{r})}(\varepsilon_{m-\mathfrak{r}}) \end{vmatrix}$$

und stelle sich die Frage, ob diese Determinante für je $m - \mathfrak{r}$ den Bereichen $B_1, \cdots, B_{m-\mathfrak{r}}$

beziehungsweise angehörige Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}}$ den Wert Null besitzen kann. Wäre dies möglich, so würde die Determinante, als Funktion des in T beweglichen Punktes ε_1 betrachtet, für jeden dem Bereiche B_1 angehörigen Punkt ε_1 und folglich für jeden Punkt ε_1 von T den Wert Null besitzen, wie auch die Punkte $\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}}$ innerhalb der Bereiche $B_2, \cdots, B_{m-\mathfrak{r}}$ gewählt sind, und es würden dann wegen der Linearunabhängigkeit der Funktionen $A^{(1)}(z), \cdots, A^{(m-\mathfrak{r})}(z)$ auch die zu den Elementen $A^{(1)}(\varepsilon_1), \cdots, A^{(m-\mathfrak{r})}(\varepsilon_1)$ gehörigen $(m-\mathfrak{r}-1)$-reihigen Unterdeterminanten für jede Lage der Punkte $\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}}$ innerhalb der Bereiche $B_2, \cdots, B_{m-\mathfrak{r}}$ den Wert Null besitzen. Nimmt man dann speziell die zu dem Elemente $A^{(1)}(\varepsilon_1)$ gehörige $(m-\mathfrak{r}-1)$-reihige Unterdeterminante, wendet dieselbe Schlußweise an und fährt so fort, so gelangt man schließlich zu dem sinnlosen Resultate, daß die Funktion $A^{(m-\mathfrak{r})}(z)$ für jeden dem Bereiche $B_{m-\mathfrak{r}}$ angehörigen Punkt $z = \varepsilon_{m-\mathfrak{r}}$ und folglich für jeden Punkt z von T den Wert Null besitzt. Damit ist aber zunächst bewiesen, daß die aufgestellte Determinante nicht für je $m-\mathfrak{r}$ den Bereichen $B_1, \cdots, B_{m-\mathfrak{r}}$ beziehungsweise angehörige Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}}$, wie klein diese Bereiche auch sein mögen, den Wert Null besitzen kann. Wählt man jetzt $m-\mathfrak{r}$ den Bereichen $B_1, \cdots, B_{m-\mathfrak{r}}$ beziehungsweise angehörige Punkte $\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{m-\mathfrak{r}}$ von der Art, daß die aufgestellte Determinante nicht verschwindet, wenn man gleichzeitig $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}} = \bar{\varepsilon}_{m-\mathfrak{r}}$ setzt, so lassen sich, da dieselbe, als Funktion der $m-\mathfrak{r}$ Veränderlichen $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}}$ betrachtet, für $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}} = \bar{\varepsilon}_{m-\mathfrak{r}}$ stetig ist, in T $m-\mathfrak{r}$ diese Punkte beziehungsweise enthaltende Gebiete $G_1, \cdots, G_{m-\mathfrak{r}}$ von der Art abgrenzen, daß die Determinante für je $m-\mathfrak{r}$ diesen Gebieten beziehungsweise angehörige Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}}$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Beachtet man dann noch, daß durch die auf irgend ein solches Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}}$ bezogenen $m-\mathfrak{r}$ Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)} A^{(1)}(\varepsilon_1) \quad + \cdots + \lambda^{(m-\mathfrak{r})} A^{(m-\mathfrak{r})}(\varepsilon_1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)} A^{(1)}(\varepsilon_{m-\mathfrak{r}}) + \cdots + \lambda^{(m-\mathfrak{r})} A^{(m-\mathfrak{r})}(\varepsilon_{m-\mathfrak{r}}) \end{aligned}$$

die Größen $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(m-\mathfrak{r})}$ bis auf einen allen gemeinsamen Faktor bestimmt sind, so erkennt man die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung, daß durch die Wahl der Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}}$ die $\mathfrak{r}$ noch fehlenden, das angenommene System $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}}$ zu einem mit $\eta_1, \cdots, \eta_m$ äquivalenten Systeme ergänzenden Punkte $\varepsilon_{m-\mathfrak{r}+1}, \cdots, \varepsilon_m$ im allgemeinen eindeutig bestimmt sind.

Aus den vorstehenden Untersuchungen ergibt sich jetzt als Resultat, daß die beiden Aussagen:

a.) *Das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ besitzt als Rang $\mathfrak{R}_{\left|\substack{1\\1}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ die unter m liegende Zahl $\mathfrak{r}$;*

b.) *Das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ ist ersetzbar; für die Bildung eines mit ihm äquivalenten Punktsystems können $m-\mathfrak{r}$ Punkte beliebig gewählt werden und es sind durch die*

Wahl von $m-\mathfrak{r}$ Punkten die $\mathfrak{r}$ noch fehlenden Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt; gleichwertig sind, insoferne nicht nur, wie schon bewiesen, aus der ersten als Voraussetzung die zweite folgt, sondern auch umgekehrt aus dieser jene. Denn, besäße das unter b.) charakterisierte Punktsystem eine von $\mathfrak{r}$ verschiedene, wegen der Ersetzbarkeit des Punktsystems jedenfalls unter m liegende, Zahl $\bar{\mathfrak{r}}$ als Rang, so könnten, im Widerspruche mit dem über das Punktsystem Vorausgesetzten, für die Bildung eines mit ihm äquivalenten Punktsystems $m-\bar{\mathfrak{r}}$, die $\bar{\mathfrak{r}}$ noch fehlenden Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmende Punkte beliebig gewählt werden.

Das soeben ausgesprochene Resultat läßt zugleich erkennen, daß ein jedes mit einem Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ vom Range $\mathfrak{r}<m$ äquivalente Punktsystem ebenfalls den Rang $\mathfrak{r}$ besitzt. Man hat dazu nur zu beachten, daß die für ein solches Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ geltende Aussage b.) auf jedes mit ihm äquivalente Punktsystem übertragen werden kann, und daß daher, wegen der Gleichwertigkeit der Aussagen a.) und b.), die Aussage a.) auch für jedes mit $\eta_1, \cdots, \eta_m$ äquivalente Punktsystem gilt.

8.

Mit Rücksicht auf die Ausnahmestellung, welche die in Art. 5 betrachteten zum zweiten Falle gehörigen Punktsysteme, nach dem dort unter III.) Gesagten, gegenüber den zum ersten Falle gehörigen Punktsystemen einnehmen, sollen in diesem Artikel die zum zweiten Falle gehörigen Punktsysteme noch einer besonderen Betrachtung unterzogen werden.

Zu dem Ende nehme man an, daß das den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ $(\sigma=1,2,\cdots,s)$ m_σ-mal enthaltende Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m = \eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(s)}, \cdots, \eta^{(s)}$ zum zweiten Falle gehöre, oder, was dasselbe, daß sein Rang $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ eine unter m und p liegende Zahl $\mathfrak{r}$ sei. Die Zahl m kann dann nach dem beim zweiten Falle Bemerkten nicht größer als $2p-2$ sein.

Ist zunächst $m=2p-2$, so muß $p-\mathfrak{r}=1$ sein, da sonst nach dem beim zweiten Falle unter III.) Gesagten zum mindesten zwei linear unabhängige Funktionen $\frac{du}{dz}$ existieren würden, denen das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_{2p-2}$ als System der charakteristischen Punkte zukäme, während doch nach dem in Art. 3 Bemerkten zwei Funktionen $\frac{du}{dz}$, denen dasselbe Punktsystem als System der charakteristischen Punkte zukommt, sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden können. Ein zum zweiten Falle gehöriges System von $2p-2$ Punkten besitzt daher stets den Rang $p-1$. Auch erkennt man ohne Mühe, daß die Gesamtheit der den Funktionen $\frac{du}{dz}$ zukommenden Systeme der charakteristischen Punkte mit der Gesamtheit der den Rang $p-1$ besitzenden Systeme von $2p-2$ Punkten identisch ist, und daß daher, weil je zwei der zuerst genannten Punktsysteme, wie ein Blick auf die am Ende von Art. 3 aufgestellte Kongruenz zeigt, äquivalent sind, auch je zwei der zuletzt genannten Punktsysteme äquivalent sind.

Für die ganze noch folgende Untersuchung soll jetzt vorausgesetzt werden, daß $m < 2p-2$, also etwa $m = 2p-2-m'$ sei. Es gibt dann nach dem beim zweiten Falle unter III.) Gesagten $p-\mathfrak{r}$, dort mit $\frac{du^{(1)}}{dz}, \cdots, \frac{du^{(p-\mathfrak{r})}}{dz}$ bezeichnete, linear unabhängige Funktionen $\frac{du}{dz}$, bei welchen das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ einen Bestandteil des Systems der charakteristischen Punkte bildet, und die allgemeinste derartige Funktion $\frac{du}{dz}$ setzt sich aus ihnen mit Hilfe von $p-\mathfrak{r}$ unbestimmten Konstanten $\lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(p-\mathfrak{r})}$ zusammen in der Form $\frac{du}{dz} = \lambda^{(1)}\frac{du^{(1)}}{dz} + \cdots + \lambda^{(p-\mathfrak{r})}\frac{du^{(p-\mathfrak{r})}}{dz}$. Ist speziell $\mathfrak{r} = p-1$, so ist — da sich dann die soeben für die allgemeinste hier in Betracht kommende Funktion $\frac{du}{dz}$ aufgestellte Gleichung auf $\frac{du}{dz} = \lambda^{(1)}\frac{du^{(1)}}{dz}$ reduziert — das von der Funktion $\frac{du^{(1)}}{dz}$ herkommende, mit $\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'}$ zu bezeichnende, Restpunktsystem (siehe die Definition am Schlusse von Art. 3) das einzige zu $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörige Restpunktsystem einer Funktion $\frac{du}{dz}$ und folglich ein nicht ersetzbares Punktsystem oder, was dasselbe, ein Punktsystem vom Range m'. Ist dagegen $\mathfrak{r} < p-1$, so gibt es außer dem Systeme $\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'}$, welches von der ersten der vorher aufgestellten Funktionen $\frac{du^{(1)}}{dz}, \cdots, \frac{du^{(p-\mathfrak{r})}}{dz}$ herkommt, noch unbegrenzt viele zu $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörige Restpunktsysteme von Funktionen $\frac{du}{dz}$; ein jedes dieser Restpunktsysteme ist auf Grund der am Schlusse von Art. 3 aufgestellten Kongruenz ein mit $\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'}$ äquivalentes Punktsystem, wie umgekehrt, sodaß also die Gesamtheit der zu $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörigen Restpunktsysteme von Funktionen $\frac{du}{dz}$ mit der Gesamtheit der mit $\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'}$ äquivalenten Punktsysteme identisch ist. Nach dem am Schlusse von Art. 7 Bewiesenen besitzen daher die zu $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörigen Restpunktsysteme von Funktionen $\frac{du}{dz}$ sämtlich den gleichen, mit $\mathfrak{r}'$ zu bezeichnenden, Rang. Zur Bestimmung dieser, jedenfalls unter m' liegenden, Rangzahl $\mathfrak{r}'$ hat man vor allem zu beachten, daß ein zu $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehöriges Restpunktsystem einer Funktion $\frac{du}{dz}$, der Definition gemäß, erst dann festgelegt ist, wenn man bei der aufgestellten Funktion $\frac{du}{dz} = \lambda^{(1)}\frac{du^{(1)}}{dz} + \cdots + \lambda^{(p-\mathfrak{r})}\frac{du^{(p-\mathfrak{r})}}{dz}$ die $p-\mathfrak{r}$ willkürlichen Konstanten λ bis auf einen allen gemeinsamen Faktor bestimmt hat, und daß man dementsprechend für die Bildung eines derartigen zu $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörigen Restpunktsystems jedenfalls $p-\mathfrak{r}-1$ Punkte beliebig wählen kann, da diese Wahl ein System von nur $p-\mathfrak{r}-1$ homogenen linearen Gleichungen zwischen den $p-\mathfrak{r}$ Konstanten λ nach sich zieht. Das zu bildende Restpunktsystem wird aber durch Wahl von $p-\mathfrak{r}-1$ Punkten nur dann eindeutig bestimmt sein, wenn die Matrix der $(p-\mathfrak{r})(p-\mathfrak{r}-1)$ in diesen Gleichungen als Koeffizienten der λ auftretenden Größen den Rang $p-\mathfrak{r}-1$ besitzt. Daß dieses im allgemeinen der Fall ist, erkennt man, wenn man dieselbe Schlußweise anwendet wie in Art. 7 an der entsprechenden Stelle. Für die Bildung eines zu $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörigen Restpunktsystems einer Funktion $\frac{du}{dz}$ oder, was dasselbe, eines mit $\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'}$ äquivalenten Punktsystems können also $p-\mathfrak{r}-1 = m'-(m'-p+\mathfrak{r}+1)$ Punkte beliebig gewählt werden, und es sind durch diese Wahl die $m'-p+\mathfrak{r}+1$ noch fehlenden Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt. Das aber ist nach dem in Art. 7 ausgesprochenen Resultate nur möglich, wenn die dem Systeme $\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'}$ zukommende, vorher mit $\mathfrak{r}'$ bezeichnete, Rangzahl sich mit der Zahl $m'-p+\mathfrak{r}+1$ deckt, sodaß also $\mathfrak{r}' = m'-p+\mathfrak{r}+1$ oder auch, da die Beziehung $m' = 2p-2-m$ besteht, $\mathfrak{r}' = p-m+\mathfrak{r}-1$ ist. Trotzdem die letzte Gleichung unter den Voraussetzungen $\mathfrak{r} < m < 2p-2$, $\mathfrak{r} < p-1$ abgeleitet worden ist, gilt sie auch noch unter den Voraussetzungen $\mathfrak{r} < m < 2p-2$, $\mathfrak{r} = p-1$, da sie dann, in Übereinstimmung mit dem vorher Gefundenen, für $\mathfrak{r}'$ den Wert $2p-2-m = m'$ liefert. Unter Benutzung der Relation $m+m' = 2p-2$ kann man ihr die drei Formen*):

$$m'-\mathfrak{r}' = p-1-\mathfrak{r}, \qquad m-\mathfrak{r} = p-1-\mathfrak{r}',$$
$$m'-2\mathfrak{r}' = m-2\mathfrak{r}$$

geben; das System dieser drei Gleichungen steht im Einklang mit der Tatsache, daß jedes zu $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörige Restpunktsystem einer Funktion $\frac{du}{dz}$ das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ selbst wieder als Restpunktsystem einer Funktion $\frac{du}{dz}$ besitzt.

Aus den vorstehenden Untersuchungen ergibt sich jetzt schließlich als Resultat, daß unter der Voraussetzung $m < 2p-2$ die drei Aussagen:

a.) *Das Punktsystem* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *besitzt als Rang* $\mathfrak{R}_{\|1\|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ *die unter* m *und* p *liegende Zahl* $\mathfrak{r}$;

b.) *Das Punktsystem* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *ist ersetzbar und es gehört zu ihm mindestens ein Restpunktsystem einer Funktion* $\frac{du}{dz}$; *jedes derartige zu* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *gehörige Restpunktsystem besitzt den Rang* $p-m+\mathfrak{r}-1$;

c.) *Das Punktsystem* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *ist ersetzbar und es gehört zu ihm mindestens ein Restpunktsystem einer Funktion* $\frac{du}{dz}$; *für die Bildung eines derartigen zu* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *gehörigen Restpunktsystems können* $p-\mathfrak{r}-1$ *Punkte beliebig gewählt werden und es sind durch die*

*) Brill, A. und Noether, M., Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie. (Mathematische Annalen, Bd. 7, S. 269.)

Wahl von $p - \mathfrak{r} - 1$ Punkten die $p - m + \mathfrak{r} - 1$ noch fehlenden Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt;

gleichwertig sind, insofern aus irgend einer von ihnen als Voraussetzung jede der beiden anderen abgeleitet werden kann. Da, wie schon bewiesen, aus a.) als Voraussetzung jede der beiden Aussagen b.) und c.) folgt, und diese letzteren nach dem in Art. 7 ausgesprochenen Resultate gleichwertig sind, so hat man zum vollständigen Beweise der aufgestellten Behauptung nur noch zu zeigen, daß aus c.) als Voraussetzung die Aussage a.) folgt. Dieses aber ist der Fall; denn, besäße das unter c.) charakterisierte Punktsystem eine von $\mathfrak{r}$ verschiedene, wegen der Ersetzbarkeit des Punktsystems jedenfalls unter m und wegen der Existenz von mindestens einem Restpunktsystem einer Funktion $\frac{du}{dz}$ auch unter p liegende, Zahl $\bar{\mathfrak{r}}$ als Rang, so könnten, im Widerspruch mit dem über das Punktsystem Vorausgesetzten, für die Bildung eines zu ihm gehörigen Restpunktsystems einer Funktion $\frac{du}{dz}$ $p - \bar{\mathfrak{r}} - 1$, die $p - m + \bar{\mathfrak{r}} - 1$ noch fehlenden Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmende Punkte beliebig gewählt werden.

9.

Jede A-Funktion läßt sich auf unbegrenzt viele Weisen als ein Quotient darstellen, dessen Zähler und Nenner die ersten Derivierten von zwei zu irgend einer Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktionen W sind, und man kann, wenn es sich um die Bildung eines solchen Quotienten handelt, die Derivierte einer beliebigen Funktion W zum Nenner nehmen. Eine ausgezeichnete Darstellung von dieser Art erhält man, wenn man speziell die Derivierte irgend einer allenthalben endlichen Funktion u zum Nenner nimmt. Zur Gewinnung dieser Darstellung soll hier ein Verfahren angewendet werden, das auch im allgemeinen Falle zum Ziele führt.

Gegeben sei eine Funktion $A(z)$, welche das den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ $(\sigma=1,2,\cdots,s)$ m_σ-mal enthaltende Punktsystem $\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \cdots, \eta^{(2)}, \cdots, \eta^{(s)}, \cdots, \eta^{(s)}$ als System der ∞^1-Punkte besitzen möge. Diese Funktion ist nach Art. 1 durch eine Gleichung von der Form:

$$A(z) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \left(\mathfrak{L}_{\sigma 1} \underset{1}{P} \left| \begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ z \end{matrix} \right| + \mathfrak{L}_{\sigma 2} \underset{2}{P} \left| \begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ z \end{matrix} \right| + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma} \underset{m_\sigma}{P} \left| \begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ z \end{matrix} \right| \right) + C,$$

darstellbar, wobei dann zwischen den Konstanten $\mathfrak{L}$ die p Beziehungen:

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \left\{ \mathfrak{L}_{\sigma 1} \left(\frac{du_\nu}{dz_\sigma}\right)_0 + \frac{1}{1!} \mathfrak{L}_{\sigma 2} \left(\frac{d^2 u_\nu}{dz_\sigma^2}\right)_0 + \cdots + \frac{1}{(m_\sigma - 1)!} \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma} \left(\frac{d^{m_\sigma} u_\nu}{dz_\sigma^{m_\sigma}}\right)_0 \right\} = 0, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p,$$

bestehen. Sollten von den Punkten $\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(s)}$ einer oder mehrere an der Begrenzung von T'' liegen, so ändere man das Schnittsystem durch Deformation so, daß die Punkte η sämtlich in das Innere der Fläche T'' zu liegen kommen. Nun verstehe man unter a einen im Innern von T' gelegenen, von den Punkten η, α, ∞ verschiedenen Punkt, bilde alsdann das Produkt:

$$\Phi(z) = A(z) \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|$$

der Funktion $A(z)$ und der zur Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörigen, ebenfalls in T' einwertigen Elementarfunktion $\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|$ und bestimme den Wert J des mit dieser Funktion $\Phi(z)$ und irgend einer allenthalben endlichen Funktion u^z gebildeten, in positiver Richtung über die von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c gebildete Begrenzung $\mathfrak{R}$ der Fläche T' zu erstreckenden Integrals $\int \Phi(z)\,du^z$, indem man in derselben Weise vorgeht, wie es im ersten Teile, in Art. 1 des siebenten Abschnittes, zu ähnlichem Zwecke geschehen ist. Man erhält dann für J zunächst die Gleichung:

$$J = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int\limits_{[a_\nu^+,\, b_\nu^+,\, c_\nu^+]}^{+} \left(\Phi(z)^+ - \Phi(z)^-\right) du^z$$

und schließlich, indem man beachtet, daß für $\nu = 1, 2, \cdots, p$:

$$\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \Big\{ A(z)^+ = A(z)^-, && \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^+ = \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^-,\\
&\text{längs } b_\nu \Big\{ A(z)^+ = A(z)^-, && \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^+ = \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^- - 2\,\frac{du_\nu|a|}{da},\\
&\text{längs } c_\nu \Big\{ A(z)^+ = A(z)^-, && \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^+ = \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^-
\end{aligned}$$

ist, und daß daher die Werte von $\Phi(z)$ in je zwei zu einem der Schnitte a, b, c gehörigen entsprechenden Punkten $\mathscr{P}^+$, $\mathscr{P}^-$ in der Weise verknüpft sind, daß

$$\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \Big\{ \Phi(z)^+ = \Phi(z)^-,\\
&\text{längs } b_\nu \Big\{ \Phi(z)^+ = \Phi(z)^- - 2\,\frac{du_\nu|a|}{da}\,A(z)^-, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p,\\
&\text{längs } c_\nu \Big\{ \Phi(z)^+ = \Phi(z)^-
\end{aligned}$$

ist, die Gleichung:

$$J = -2 \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \frac{du_\nu|a|}{da} \int\limits_{b_\nu^+}^{+} A(z)\,du^z.$$

Das Integral J ist aber auch gleich der Summe der auf die einzelnen in T' gelegenen Unstetigkeitspunkte $\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(s)}$, a von $\Phi(z)$ sich beziehenden Integrale $\int\limits_{(\eta^{(\sigma)})}^{+} \Phi(z)\,du^z$, ${\scriptstyle \sigma = 1, 2, \cdots, s}$, $\int\limits_{(a)}^{+} \Phi(z)\,du^z$ und kann daher auch auf Grund der Gleichung:

$$J = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \int_{(\eta^{(\sigma)})}^{+} \Phi(z)\,du^z + \int_{(a)}^{+} \Phi(z)\,du^z$$

ausgewertet werden. Zu dem Ende hat man das Folgende zu beachten.

1.) Für das Gebiet des Punktes $\eta^{(\sigma)}$ $(\sigma=1,2,\cdots,s)$ gelten die Entwicklungen (vgl. Art. 7 u. Art. 2 des vorhergehenden Abschnittes):

$$A(z) = \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{z_\sigma^{m_\sigma}} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{z_\sigma} + c_{\sigma 0} + c_{\sigma 1} z_\sigma + c_{\sigma 2} z_\sigma^2 + c_{\sigma 3} z_\sigma^3 + \cdots,$$

$$\underset{1}{P}\left|\begin{matrix} a \\ z\end{matrix}\right| = \frac{d\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(\sigma)} \\ a\end{matrix}\right|}{da} + \frac{1}{1}\,\frac{d\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(\sigma)} \\ a\end{matrix}\right|}{da}\, z_\sigma + \frac{1}{2}\,\frac{d\underset{2}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(\sigma)} \\ a\end{matrix}\right|}{da}\, z_\sigma^2 + \frac{1}{3}\,\frac{d\underset{3}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(\sigma)} \\ a\end{matrix}\right|}{da}\, z_\sigma^3 + \cdots,$$

$$\frac{du}{dz_\sigma} = \left(\frac{du}{dz_\sigma}\right)_0 + \frac{1}{1!}\left(\frac{d^2u}{dz_\sigma^2}\right)_0 z_\sigma + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^3u}{dz_\sigma^3}\right)_0 z_\sigma^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^4u}{dz_\sigma^4}\right)_0 z_\sigma^3 + \cdots,$$

und es gilt daher für das Gebiet dieses Punktes auch die Entwicklung:

$$A(z)\,\frac{du}{dz_\sigma} = \frac{\mathfrak{L}'_{\sigma m_\sigma}}{z_\sigma^{m_\sigma}} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}'_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \frac{\mathfrak{L}'_{\sigma 1}}{z_\sigma} + c'_{\sigma 0} + c'_{\sigma 1} z_\sigma + c'_{\sigma 2} z_\sigma^2 + c'_{\sigma 3} z_\sigma^3 + \cdots,$$

wobei

$$\mathfrak{L}'_{\sigma,\lambda+1} = \sum_{\mu=1}^{\mu=m_\sigma-\lambda} \frac{\mathfrak{L}_{\sigma,\lambda+\mu}}{(\mu-1)!}\left(\frac{d^\mu u}{dz_\sigma^\mu}\right)_0, \qquad \lambda=0,1,2,\cdots,m_\sigma-1,$$

ist. Daraus folgt dann weiter, daß in der durch Multiplikation dieser Entwicklung mit der Entwicklung der Funktion $\underset{1}{P}\left|\begin{matrix} a \\ z\end{matrix}\right|$ sich ergebenden Entwicklung von $\Phi(z)\,\frac{du}{dz_\sigma}$ die Potenz z_σ^{-1} mit dem Koeffizienten:

$$\mathfrak{L}'_{\sigma 1}\,\frac{d\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(\sigma)} \\ a\end{matrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\sigma-1} \frac{1}{\lambda}\,\mathfrak{L}'_{\sigma,\lambda+1}\,\frac{d\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(\sigma)} \\ a\end{matrix}\right|}{da}$$

auftritt. Dieses Glied ist aber das einzige, welches bei der Auswertung des auf den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ sich beziehenden Integrals in Betracht kommt, und man erhält dementsprechend:

$$\int_{(\eta^{(\sigma)})}^{+} \Phi(z)\,du^z = \int_{(\eta^{(\sigma)})}^{+} \Phi(z)\,\frac{du}{dz_\sigma}\,dz_\sigma = 2\pi i\left\{\mathfrak{L}'_{\sigma 1}\,\frac{d\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(\sigma)} \\ a\end{matrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\sigma-1} \frac{1}{\lambda}\,\mathfrak{L}'_{\sigma,\lambda+1}\,\frac{d\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(\sigma)} \\ a\end{matrix}\right|}{da}\right\}.$$

2.) Für das Gebiet des Punktes a gelten die Entwicklungen:

$$A(z) = A(a) + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n (z-a)^n, \qquad \underset{1}{P}\left|\begin{matrix} a \\ z\end{matrix}\right| = \frac{1}{z-a} + \sum_{n=0}^{n=\infty} c'_n (z-a)^n, \qquad \frac{du}{dz} = \frac{du^a}{da} + \sum_{n=1}^{n=\infty} c''_n (z-a)^n,$$

und es tritt daher in der durch Multiplikation dieser drei Entwicklungen sich ergebenden Entwicklung von $\Phi(z)\,\frac{du}{dz}$ die Potenz $(z-a)^{-1}$ mit dem Koeffizienten $A(a)\,\frac{du^a}{da}$ auf. Dieses

Glied ist aber das einzige, welches bei der Auswertung des auf den Punkt a sich beziehenden Integrals in Betracht kommt, und man erhält dementsprechend:

$$\int\limits_{(a)}^{+} \Phi(z)\, du^z = \int\limits_{(a)}^{+} \Phi(z)\, \frac{du}{dz}\, dz = 2\pi i\, A(a)\, \frac{du^a}{da} \cdot$$

Unter Benutzung der beiden soeben gewonnenen Resultate erhält man jetzt aus der letzten für J aufgestellten Gleichung die Gleichung:

$$J = 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \left\{ \mathfrak{L}'_{\sigma 1} \frac{d P_0 \left| \begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ a \end{matrix} \right|}{da} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\sigma-1} \frac{1}{\lambda}\, \mathfrak{L}'_{\sigma,\lambda+1} \frac{d P_\lambda \left| \begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ a \end{matrix} \right|}{da} \right\} + 2\pi i\, A(a)\, \frac{du^a}{da} \cdot$$

Setzt man nun die beiden für J erhaltenen Ausdrücke einander gleich, läßt bei der entstehenden Gleichung in neuer Bezeichnung zunächst an Stelle des Buchstabens z den Buchstaben ζ, hierauf an Stelle des Buchstabens a den Buchstaben z treten und löst alsdann die Gleichung nach $A(z)\frac{du}{dz}$ auf, so erhält man, wenn man schließlich noch die $\mathfrak{L}'$ durch die ihnen entsprechenden Ausdrücke ersetzt, die für jeden von den Punkten η, α, ∞ verschiedenen inneren Punkt z der Fläche T' geltende Gleichung:

$$A(z)\frac{du}{dz} = -\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \left\{ \left[\sum_{\mu=1}^{\mu=m_\sigma} \frac{\mathfrak{L}_{\sigma\mu}}{(\mu-1)!} \left(\frac{d^\mu u}{dz_\sigma^\mu}\right)_0 \right] \frac{d P_0 \left| \begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ z \end{matrix} \right|}{dz} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\sigma-1} \frac{1}{\lambda} \left[\sum_{\mu=1}^{\mu=m_\sigma-\lambda} \frac{\mathfrak{L}_{\sigma,\lambda+\mu}}{(\mu-1)!} \left(\frac{d^\mu u}{dz_\sigma^\mu}\right)_0 \right] \frac{d P_\lambda \left| \begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ z \end{matrix} \right|}{dz} \right\}$$

$$- \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \frac{d u_\nu |z|}{dz} \int\limits_{b_\nu^+}^{+} A(\zeta)\, du^\zeta,$$

welche nach Division durch $\frac{du}{dz}$ für die Funktion $A(z)$ die erwähnte ausgezeichnete Darstellung liefert. Trotzdem diese Gleichung, zur Vereinfachung der Untersuchung, nur für den Fall abgeleitet worden ist, daß der Punkt z im Innern der Fläche T' liegt, gilt sie auch noch, wenn z der Begrenzung von T' angehört. Es ändert sich nämlich die Differenz der linken und rechten Seite, als Funktion des in T' frei beweglichen Punktes z betrachtet, stetig, wenn dieser Punkt durch stetige Bewegung in einen Punkt der Begrenzung von T' übergeht, und es kann daher diese Differenz, da sie der erhaltenen Gleichung gemäß immer den Wert Null besitzt, wenn z im Innern der Fläche T' liegt, nicht einen von Null verschiedenen Wert haben, wenn z der Begrenzung von T' angehört.

Eine besondere Betrachtung verdient der Fall, wo der Rang $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(s)},\cdots,\eta^{(s)})$ des den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ $_{(\sigma=1,2,\cdots,s)}$ m_σ-mal enthaltenden Systems $\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(s)},\cdots,\eta^{(s)}$ der ∞^1-Punkte der Funktion $A(z)$ kleiner als p ist, oder, was dasselbe, wo Funktionen

$\frac{du}{dz}$ existieren, bei denen das Punktsystem $\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(s)}, \cdots, \eta^{(s)}$ in dem System der charakteristischen Punkte enthalten ist. Läßt man nämlich in diesem Falle an Stelle der in der gewonnenen Formel vorkommenden allgemeinen Funktion $\frac{du}{dz}$ eine der soeben genannten speziellen Funktionen $\frac{du}{dz}$ treten, so nimmt die Formel, da nach dem in Art. 3 Bemerkten für jede derartige Funktion $\frac{du}{dz}$ die $m_1 + \cdots + m_s$ Gleichungen:

$$\left(\frac{du}{dz_\sigma}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2u}{dz_\sigma^2}\right)_0 = 0, \quad \cdots, \quad \left(\frac{d^{m_\sigma}u}{dz_\sigma^{m_\sigma}}\right)_0 = 0, \qquad {\scriptstyle \sigma=1,2,\cdots,s,}$$

bestehen, die einfachere Gestalt:

$$A(z)\frac{du}{dz} = -\frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\frac{du_\nu|z|}{dz}\int_{b_\nu^+}^{+} A(\zeta)\,du$$

an, und man erkennt nun, daß jede Funktion $A(z)$ der in Rede stehenden Art sich als Quotient zweier Funktionen $\frac{du}{dz}$ darstellen läßt.*) Da andererseits aber auch der Quotient irgend zweier nicht nur durch einen konstanten Faktor sich unterscheidenden Funktionen $\frac{du}{dz}$, wie aus dem in Art. 5 beim ersten und zweiten Falle unter III.) Gesagten hervorgeht, eine Funktion $A(z)$ der in Rede stehenden Art ist, so erkennt man schließlich, daß die Gesamtheit der Funktionen $A(z)$, bei welchen das System $\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(s)}, \cdots, \eta^{(s)}$ der ∞^1-Punkte als Rang $\mathfrak{R}_{\left|{1 \atop 1}\right|}(\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(s)}, \cdots, \eta^{(s)})$ eine unter p liegende Zahl besitzt, identisch ist mit der Gesamtheit derjenigen Funktionen, welche Quotienten zweier nicht nur durch einen konstanten Faktor sich unterscheidenden Funktionen $\frac{du}{dz}$ sind.

10.

Es sollen jetzt diejenigen ausgezeichneten Funktionen $A(z)$ untersucht werden, welchen das den Punkt α_ϱ ${\scriptstyle (\varrho=1,2,\cdots,r)}$ $(\mu_\varrho - 1)$-mal und den Punkt $\infty_\varkappa$ ${\scriptstyle (\varkappa=1,2,\cdots,q)}$ $h\iota_\varkappa$-mal enthaltende Punktsystem $\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_r, \infty_1, \cdots, \infty_1, \cdots, \infty_q, \cdots, \infty_q$ oder auch nur ein Teil desselben als System der ∞^1-Punkte zukommt. Dabei bedeutet h eine Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \cdots$. Der in Art. 12 des vorhergehenden Abschnittes aufgestellten Formel (D.) gemäß ist jede derartige Funktion $A(z) = A_h^{(\infty)}(z)$ durch eine mit konstanten, der Bedingung $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} c_{\varkappa 0} = 0$ genügenden Größen c gebildete Gleichung von der Form:

$$A_h^{(\infty)}(z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} c_\nu \frac{du_\nu}{dz} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} c_{\varkappa 0}\frac{d\overset{}{\underset{0}{P}}\left|{\infty_\varkappa \atop z}\right|}{dz} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=(h+1)\iota_\varkappa} c_{\varkappa\lambda}\frac{d\underset{\lambda}{P}\left|{\infty_\varkappa \atop z}\right|}{dz}$$

*) Vgl. Riemann, B., Theorie der Abelschen Funktionen. I, Art. 10. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 88—144; S. 117—118.)

oder von der damit äquivalenten Form:

$$\text{(I.)}\qquad A_h^{(\infty)}(z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} c_\nu \frac{du_\nu}{dz} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} c_{\varkappa 0}\left(\frac{dP\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|_0}{dz} - \frac{1}{n}\sum_{\varkappa'=1}^{\varkappa'=q} \iota_{\varkappa'} \frac{dP\left|\begin{smallmatrix}\infty_{\varkappa'}\\ z\end{smallmatrix}\right|_0}{dz}\right) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=(h+1)\iota_\varkappa} c_{\varkappa\lambda}\frac{dP\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|_\lambda}{dz}$$

darstellbar. Da aber auch umgekehrt, wie aus den in Art. 11 des vorhergehenden Abschnittes aufgestellten Formeln (D_1.), (D_4.), (D_7.), (D'_7.) folgt, diese Gleichung, welche Werte man auch den c im Rahmen der genannten Bedingung zulegen mag, — von dem Falle, wo $c_1 = \cdots = c_p = 0$, $c_{\varkappa\lambda} = 0$, ${}_{\varkappa=1,2,\cdots,q}^{\lambda\neq\iota_\varkappa}$, $c_{1\iota_1} = \cdots = c_{q\iota_q} = C$ ist, also die rechte Seite sich wegen der nach Art. 12 des vorhergehenden Abschnitts bestehenden Relation $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\frac{dP\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|_{\iota_\varkappa}}{dz} = 1$ auf die Konstante C reduziert, abgesehen — stets eine Funktion der in Rede stehenden Art liefert, so stellt der auf ihrer rechten Seite stehende Ausdruck bei unbestimmten, nur der Bedingung $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} c_{\varkappa 0} = 0$ unterworfenen Konstanten c die allgemeinste Funktion $A_h^{(\infty)}(z)$ dar.

Die Ordnung einer Funktion $A_h^{(\infty)}(z)$ übersteigt nicht die Zahl $H = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}(\mu_\varrho - 1) + h\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\iota_\varkappa = n + q + 2p - 2 + hn$. Ist die Funktion $A_h^{(\infty)}(z)$ von der Ordnung H, besitzt sie also das vorher charakterisierte Punktsystem als System der ∞^1-Punkte, so kommen ihr auch H 0^1-Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_H$ zu. Ist die Funktion $A_h^{(\infty)}(z)$ dagegen von der Ordnung $H - t$, besitzt sie also nur einen, $H - t$ Punkte umfassenden, Teil des vorher charakterisierten Punktsystems als System der ∞^1-Punkte, so kommen ihr auch nur $H - t$ 0^1-Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{H-t}$ zu. In diesem letzteren Falle ergänze man nun das Punktsystem $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{H-t}$ dadurch zu einem System von H Punkten, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_H$, daß man zu ihm dasjenige, t Punkte enthaltende, System, welches von dem zu Anfang dieses Artikels charakterisierten Systeme nach Wegnahme der $H - t$ ∞^1-Punkte der Funktion $A_h^{(\infty)}(z)$ noch übrig bleibt, hinzunimmt. In jedem der beiden soeben betrachteten Fälle soll das zur Funktion $A_h^{(\infty)}(z)$ definierte Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_H$, insoferne durch dasselbe die Funktion $A_h^{(\infty)}(z)$ bis auf einen von z freien Faktor bestimmt ist, das System der charakteristischen Punkte der Funktion $A_h^{(\infty)}(z)$ genannt werden.

Die Systeme der charakteristischen Punkte der Funktionen $A_h^{(\infty)}(z)$ lassen sich einheitlich definieren; man hat dazu nur die gegen Ende des Art. 2 angestellten Betrachtungen, speziell die Kongruenz (1'.), auf die Funktionen $A_h^{(\infty)}(z)$ zu beziehen. Es ergibt sich dann, daß die Gesamtheit der den Funktionen $A_h^{(\infty)}(z)$ zukommenden Systeme der charakteristischen Punkte mit der Gesamtheit der Lösungssysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_H$ der Kongruenz:

$$\left(\sum_{\sigma=1}^{\sigma=H} u^{\varepsilon_\sigma}\right) \equiv \left(\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}(\mu_\varrho - 1)u^{a_\varrho} + h\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\iota_\varkappa u^{\infty_\varkappa}\right)$$

identisch ist. Da der Rang $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_r, \infty_1, \cdots, \infty_1, \cdots, \infty_q, \cdots, \infty_q)$ des zu Anfang dieses Artikels charakterisierten Punktsystems wegen $H > 2p - 2$ gleich p ist, so kann man, nach dem in Art. 7 Bewiesenen, für die Bildung eines Systems $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_H$ der charakteristischen Punkte einer Funktion $A_h^{(\infty)}(z)$ $H - p$ Punkte beliebig wählen und es sind durch die Wahl von $H - p$ Punkten die p noch fehlenden Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt.

Mit $A_{-1}^{(\infty)}(z)$ bezeichne man unterschiedslos jede Funktion $A(z)$, welche das den Punkt α_ϱ $_{(\varrho=1,2,\cdots,r)}$ $(\mu_\varrho - 1)$-mal enthaltende Punktsystem $\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_r$ oder auch nur einen Teil desselben als System der ∞^1-Punkte besitzt, und bei welcher das den Punkt $\infty_\varkappa$ $_{(\varkappa=1,2,\cdots,q)}$ $\iota_\varkappa$-mal enthaltende Punktsystem $\infty_1, \cdots, \infty_1, \cdots, \infty_q, \cdots, \infty_q$ als Bestandteil des Systems der 0^1-Punkte auftritt. Man erkennt dann, in ähnlicher Weise wie vorher schließend, zunächst, daß die allgemeinste derartige Funktion durch die Gleichung:

$$A_{-1}^{(\infty)}(z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=p}{}' c_\nu \frac{du_\nu}{dz} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}{}' c_{\varkappa 0} \left(\frac{d P\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|_0}{dz} - \frac{1}{n} \sum_{\varkappa'=1}^{\varkappa'=q}{}' \iota_{\varkappa'} \frac{d P\left|\begin{smallmatrix}\infty_{\varkappa'}\\ z\end{smallmatrix}\right|_0}{dz} \right)$$

geliefert wird, wenn man unter den c unbestimmte, nur der Bedingung $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}{}' c_{\varkappa 0} = 0$ unterworfene Konstanten versteht, weiter auch, daß die Ordnung einer Funktion $A_{-1}^{(\infty)}(z)$ die Zahl $n + q + 2p - 2$ nicht übersteigt und daß zu jeder Funktion $A_{-1}^{(\infty)}(z)$ ein System von $q + 2p - 2$ Punkten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{q+2p-2}$ als System der charakteristischen Punkte gehört, endlich noch, daß die Gesamtheit der den Funktionen $A_{-1}^{(\infty)}(z)$ zukommenden Systeme der charakteristischen Punkte mit der Gesamtheit der Lösungssysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{q+2p-2}$ der Kongruenz:

$$\left(\sum_{\sigma=1}^{\sigma=q+2p-2} u^{\varepsilon_\sigma} \right) \equiv \left(\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (\mu_\varrho - 1) u^{\alpha_\varrho} - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \iota_\varkappa u^{\infty_\varkappa} \right)$$

identisch ist und daß man für die Bildung eines derartigen Punktsystems $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{q+2p-2}$ gerade $q + p - 2$ Punkte beliebig wählen kann.

Der zu Anfang dieses Artikels unter (I.) für die Funktion $A_h^{(\infty)}(z)$ $_{(h=0,1,2,\cdots)}$ aufgestellte Ausdruck läßt sich durch eine lineare Verbindung der $H - p + h + 2$ speziellen, im folgenden der Kürze wegen als Fundamentalfunktionen zu bezeichnenden, Funktionen:

$$\frac{du_\nu}{dz}, \qquad z^m, \qquad z^m \left(\frac{d P\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|_0}{dz} - \frac{1}{n} \sum_{\tau'=1}^{\tau'=q}{}' \iota_{\tau'} \frac{d P\left|\begin{smallmatrix}\infty_{\tau'}\\ z\end{smallmatrix}\right|_0}{dz} \right), \qquad z^m \frac{d P\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|_\sigma}{dz}$$

$\nu = 1, 2, \cdots, p,$ $\qquad m = 1, 2, \cdots, h,$ $\qquad m = 0, 1, 2, \cdots, h+1,\ \tau = 1, 2, \cdots, q,$ $\qquad m = 0, 1, 2, \cdots, h,\ \tau = 1, 2, \cdots, q,\ \sigma = 1, 2, \cdots, \iota_\tau - 1,$

— von denen die an dritter Stelle aufgeführten durch die $h+2$ Relationen:

$$\sum_{\tau=1}^{\tau=q}\iota_\tau z^m\left(\frac{dP_0\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\ z\end{matrix}\right|}{dz}-\frac{1}{n}\sum_{\tau'=1}^{\tau'=q}\iota_{\tau'}\frac{dP_0\left|\begin{matrix}\infty_{\tau'}\\ z\end{matrix}\right|}{dz}\right)=0,\qquad {\scriptstyle m=0,\,1,\,2,\,\cdots,\,h+1,}$$

verknüpft sind — ersetzen. Die beiden hierzu nötigen Hilfsformeln erhält man auf folgende Weise. Zunächst beziehe man die in Art. 12 des vorhergehenden Abschnittes aufgestellte Formel (D.) auf die Funktion $W(z)=z^{m-1}$ $({\scriptstyle m=1,2,3,\cdots})$; es ergibt sich dann die Gleichung:

$$z^{m-1}=\frac{1}{m}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\frac{dP_{m\iota_\varkappa}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|}{dz}.$$

Weiter beziehe man die Formel (D.) auf die Funktion $W(z)=z^m\left(\frac{dP_0\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\ z\end{matrix}\right|}{dz}-\frac{1}{n}\sum_{\tau'=1}^{\tau'=q}\iota_{\tau'}\frac{dP_0\left|\begin{matrix}\infty_{\tau'}\\ z\end{matrix}\right|}{dz}\right)$ $\left({\scriptstyle m=1,2,\cdots,h+1 \atop \tau=1,2,\cdots,q}\right)$; es ergibt sich dann, wenn man noch die soeben abgeleitete Gleichung berücksichtigt, eine Gleichung von der Gestalt:

$$\begin{aligned}z^m\left(\frac{dP_0\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\ z\end{matrix}\right|}{dz}-\frac{1}{n}\sum_{\tau'=1}^{\tau'=q}\iota_{\tau'}\frac{dP_0\left|\begin{matrix}\infty_{\tau'}\\ z\end{matrix}\right|}{dz}\right)&=\sum_{\nu=1}^{\nu=p}k_\nu^{(m)}\frac{du_\nu}{dz}+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}k_{\varkappa 0}^{(m)}\left(\frac{dP_0\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|}{dz}-\frac{1}{n}\sum_{\varkappa'=1}^{\varkappa'=q}\iota_{\varkappa'}\frac{dP_0\left|\begin{matrix}\infty_{\varkappa'}\\ z\end{matrix}\right|}{dz}\right)\\ &\quad+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\iota_\varkappa-1}k_{\varkappa\lambda}^{(m)}\frac{dP_\lambda\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|}{dz}-\frac{z^{m-1}}{n}+\frac{1}{m\iota_\tau}\frac{dP_{m\iota_\tau}\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\ z\end{matrix}\right|}{dz},\end{aligned}\qquad (\mathrm{G}_0^{(m)}.)\ {\scriptstyle m=1,2,\cdots,h+1}$$

wobei die $k^{(m)}$ von den ganzen Zahlen m,τ abhängige, der Bedingung $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}k_{\varkappa 0}^{(m)}=0$ genügende Konstanten bezeichnen. Endlich beziehe man die Formel (D.) auf die Funktion $W(z)=z^m\frac{dP_\sigma\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\ z\end{matrix}\right|}{dz}$ $\left(\begin{smallmatrix}m=1,2,\cdots,h\\ \tau=1,2,\cdots,q\\ \sigma=1,2,\cdots,\iota_\tau-1\end{smallmatrix}\right)$; es ergibt sich dann eine Gleichung von der Gestalt:

$$\begin{aligned}z^m\frac{dP_\sigma\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\ z\end{matrix}\right|}{dz}&=\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\bar{k}_\nu^{(m)}\frac{du_\nu}{dz}+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\bar{k}_{\varkappa 0}^{(m)}\left(\frac{dP_0\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|}{dz}-\frac{1}{n}\sum_{\varkappa'=1}^{\varkappa'=q}\iota_{\varkappa'}\frac{dP_0\left|\begin{matrix}\infty_{\varkappa'}\\ z\end{matrix}\right|}{dz}\right)\\ &\quad+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m\iota_\varkappa-1}\bar{k}_{\varkappa\lambda}^{(m)}\frac{dP_\lambda\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa\\ z\end{matrix}\right|}{dz}+\frac{\sigma}{m\iota_\tau+\sigma}\frac{dP_{m\iota_\tau+\sigma}\left|\begin{matrix}\infty_\tau\\ z\end{matrix}\right|}{dz},\end{aligned}\qquad (\mathrm{G}_\sigma^{(m)}.)\ {\scriptstyle m=1,2,\cdots,h \atop \sigma=1,2,\cdots,\iota_\tau-1}$$

wobei die $\bar{k}^{(m)}$ von den ganzen Zahlen m,σ,τ abhängige, der Bedingung $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\bar{k}_{\varkappa 0}^{(m)}=0$ genügende Konstanten bezeichnen.

Für jedes τ aus der Reihe $1, 2, \cdots, q$ kann man jetzt linear ausdrücken:

mit Hilfe der Gleichung $(G_0^{(h+1)}.)$ die Funktion $\dfrac{d\, P_{(h+1)\iota_\tau}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}$

durch Fundamentalfunktionen und die Funktionen $\dfrac{d P_\lambda\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}$, ${\scriptstyle \varkappa=1,2,\cdots,q \atop \lambda=\iota_\varkappa,\iota_\varkappa+1,\cdots,(h+1)\iota_\varkappa-1}$,

mit Hilfe der Gleichungen $(G_\sigma^{(h)}.)$, ${\scriptstyle \sigma=\iota_\tau-1,\cdots,2,1,0}$, die Funktionen $\dfrac{d\, P_{h\iota_\tau+\sigma}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}$, ${\scriptstyle \sigma=\iota_\tau-1,\cdots,2,1,0}$,

durch Fundamentalfunktionen und die Funktionen $\dfrac{d P_\lambda\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}$, ${\scriptstyle \varkappa=1,2,\cdots,q \atop \lambda=\iota_\varkappa,\iota_\varkappa+1,\cdots,h\iota_\varkappa-1}$,

mit Hilfe der Gleichungen $(G_\sigma^{(h-1)}.)$, ${\scriptstyle \sigma=\iota_\tau-1,\cdots,2,1,0}$, die Funktionen $\dfrac{d\, P_{(h-1)\iota_\tau+\sigma}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}$, ${\scriptstyle \sigma=\iota_\tau-1,\cdots,2,1,0}$,

durch Fundamentalfunktionen und die Funktionen $\dfrac{d P_\lambda\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}$, ${\scriptstyle \varkappa=1,2,\cdots,q \atop \lambda=\iota_\varkappa,\iota_\varkappa+1,\cdots,(h-1)\iota_\varkappa-1}$,

. . . .

. . . .

mit Hilfe der Gleichungen $(G_\sigma^{(1)}.)$, ${\scriptstyle \sigma=\iota_\tau-1,\cdots,2,1,0}$ die Funktionen $\dfrac{d\, P_{\iota_\tau+\sigma}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}$, ${\scriptstyle \sigma=\iota_\tau-1,\cdots,2,1,0}$,

durch Fundamentalfunktionen allein.

Man erkennt so, daß der zu Anfang dieses Artikels unter (I.) für die Funktion $A_h^{(\infty)}(z)$ ${\scriptstyle (h=0,1,2,\cdots)}$ aufgestellte Ausdruck sich in der Tat, wie behauptet wurde, durch eine lineare — mit konstanten, den Bedingungen $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} l_{\varkappa 0}^{(m)} = 0$, ${\scriptstyle m=0,1,2,\cdots,h+1}$, genügenden Größen l gebildete — Verbindung:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} l_\nu \frac{du_\nu}{dz} + \sum_{m=0}^{m=h} l^{(m)} z^m + \sum_{m=0}^{m=h+1}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} l_{\varkappa 0}^{(m)} z^m \left(\frac{d P_0\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz} - \frac{1}{n}\sum_{\varkappa'=1}^{\varkappa'=q}\iota_{\varkappa'}\frac{d P_0\left|\begin{smallmatrix}\infty_{\varkappa'}\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}\right) + \sum_{m=0}^{m=h}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota_\varkappa-1} l_{\varkappa\lambda}^{(m)} z^m \frac{d P_\lambda\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}$$

der $H-p+h+2$ Fundamentalfunktionen ersetzen läßt, und damit zugleich, nachdem man noch zur Abkürzung

$$\sum_{m=0}^{m=h} l^{(m)} z^m = \overset{h}{g}(z), \qquad \sum_{m=0}^{m=h+1} l_{\varkappa 0}^{(m)} z^m = \overset{h+1}{g}_{\varkappa 0}(z), \qquad \sum_{m=0}^{m=h} l_{\varkappa\lambda}^{(m)} z^m = \overset{h}{g}_{\varkappa\lambda}(z)$$

gesetzt hat, daß jede Funktion $A_h^{(\infty)}(z)$ sich auch durch eine Gleichung von der Form:

$$\text{(II.)}\quad A_h^{(\infty)}(z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} l_\nu \frac{du_\nu}{dz} + \overset{h}{g}(z) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\overset{h+1}{g}_{\varkappa 0}(z)\left(\frac{d P_0\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz} - \frac{1}{n}\sum_{\varkappa'=1}^{\varkappa'=q}\iota_{\varkappa'}\frac{d P_0\left|\begin{smallmatrix}\infty_{\varkappa'}\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}\right) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota_\varkappa-1}\overset{h}{g}_{\varkappa\lambda}(z)\frac{d P_\lambda\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}$$

darstellen läßt, wobei $\overset{h}{g}(z)$, $\overset{h+1}{g}_{\varkappa 0}(z)$, $\overset{h}{g}_{\varkappa\lambda}(z)$ ganze rationale Funktionen von z, deren Grade die Zahlen $h, h+1, h$ beziehungsweise nicht übersteigen, bezeichnen und speziell die Funktionen $\overset{h+1}{g}_{\varkappa 0}(z)$, $\varkappa = 1, 2, \cdots, q$, wegen $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} l_{\varkappa 0}^{(m)} = 0$, $m = 0, 1, 2, \cdots, h+1$, durch die identische Gleichung $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \overset{h+1}{g}_{\varkappa 0}(z) = 0$ verknüpft sind. Die Gleichung (II.) geht, von der Bezeichnung der Konstanten abgesehen, in die früher aufgestellte, die Funktion $A_{-1}^{(\infty)}(z)$ definierende Gleichung über, wenn man $h = -1$ setzt und die dann auftretenden Zeichen $\overset{-1}{g}(z)$, $\overset{-1}{g}_{\varkappa\lambda}(z)$ als mit der Null identisch ansieht.

Der auf der rechten Seite der Gleichung (II.) stehende Ausdruck kann durch einen andern ersetzt werden, bei dem die auftretenden ganzen rationalen Funktionen keiner Bedingung mehr unterworfen sind. Man braucht dazu nur in der bei ihm an dritter Stelle stehenden Summe, unter Beachtung der identischen Gleichung $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \overset{h+1}{g}_{\varkappa 0}(z) = 0$, die Funktion $\overset{h+1}{g}_{q 0}(z)$ durch $-\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=q-1} \overset{h+1}{g}_{\varkappa 0}(z)$ zu ersetzen. An Stelle der Gleichung (II.) tritt dann die Gleichung:

$$\text{(II'.)}\quad A_h^{(\infty)}(z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} l_\nu \frac{du_\nu}{dz} + \overset{h}{g}(z) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q-1} \overset{h+1}{g}_{\varkappa 0}(z) \left(\frac{d\,\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa \\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz} - \frac{d\,\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_q \\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz} \right) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota_\varkappa-1} \overset{h}{g}_{\varkappa\lambda}(z) \frac{d\,\underset{\lambda}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa \\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}.$$

Nun liefert aber diese Gleichung (II'.), dem Verhalten ihrer rechten Seite für die Punkte $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \infty_1, \cdots, \infty_q$ zufolge, welche Werte man auch den p Konstanten $l_1, \cdots, l_p$ und den $(h+1) + (q-1)(h+2) + (n-q)(h+1) = H - 2p + 1$ in den ganzen Funktionen $g(z)$ vorkommenden Konstanten $l^{(m)}$ zulegen mag — von dem Falle, wo alle außer $l^{(0)}$ noch vorkommenden Konstanten den Wert Null besitzen oder, was dasselbe, die rechte Seite sich auf eine Konstante, $l^{(0)}$, reduziert, abgesehen — stets eine Funktion $A_h^{(\infty)}(z)$, und man erkennt so schließlich, daß der auf ihrer rechten Seite stehende Ausdruck bei unbestimmten Konstanten l die allgemeinste Funktion $A_h^{(\infty)}(z)$ darstellt. Dem in Art. 5 am Schlusse des ersten Falles Bemerkten entsprechend sind daher die in dem Ausdrucke vorkommenden $H-p+1$ willkürlichen Konstanten l zugleich wesentliche willkürliche Konstanten oder, was dasselbe, der in Rede stehende Ausdruck kann nur dann für jeden Punkt z der Fläche T den Wert Null haben, wenn die $H-p+1$ Konstanten l sämtlich mit der Null zusammenfallen. Da hierbei h irgend eine Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \cdots$ bedeutet, so kann auch eine Gleichung von der allgemeineren Form:

$$0 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} l_\nu \frac{du_\nu}{dz} + g(z) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q-1} g_{\varkappa 0}(z) \left(\frac{d\,\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa \\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz} - \frac{d\,\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_q \\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz} \right) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota_\varkappa-1} g_{\varkappa\lambda}(z) \frac{d\,\underset{\lambda}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa \\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz},$$

bei der $l_1, l_2, \cdots, l_p$ Konstanten, $g(z)$, $g_{\varkappa 0}(z)$, $g_{\varkappa\lambda}(z)$ irgend welche ganze rationale Funktionen von z bezeichnen, nur dann für jeden Punkt z der Fläche T bestehen, wenn die Konstanten l und die Funktionen g sämtlich mit der Null identisch sind.

Jede A-Funktion läßt sich bei hinreichend groß gewählter Zahl h $(h=-1,0,1,2,\cdots)$ als Quotient zweier Funktionen $A_h^{(\infty)}(z)$ darstellen. Zum Beweise dieser Behauptung nehme man an, daß die darzustellende Funktion $A(z)$ das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ als System der ∞^1-Punkte besitze, und beachte, daß für die Bildung eines Systems der charakteristischen Punkte einer Funktion $A_h^{(\infty)}(z)$ $H - p = n + q + p - 2 + hn$ Punkte beliebig gewählt werden können und daß daher, wenn man unter h die kleinste der Bedingung:

$$n + q + p - 2 + hn \geqq m$$

genügende Zahl aus der Reihe $-1, 0, 1, 2, \cdots$ versteht, zu dieser Zahl h Funktionen $A_h^{(\infty)}(z)$ existieren, bei denen das System $\eta_1, \cdots, \eta_m$ in dem System der charakteristischen Punkte enthalten ist. Bildet man nun das Produkt $A(z)\,A_h^{(\infty)}(z)$ aus der darzustellenden Funktion $A(z)$ und irgend einer dieser Funktionen $A_h^{(\infty)}(z)$, so ist dasselbe eine A-Funktion, welche für $h > -1$ das den Punkt α_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots,r)$ $(\mu_\varrho - 1)$-mal und den Punkt $\infty_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots,q)$ $h\iota_\varkappa$-mal enthaltende Punktsystem $\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \cdots\cdot, \alpha_r, \cdots, \alpha_r$, $\infty_1, \cdots, \infty_1, \cdots\cdot, \infty_q, \cdots, \infty_q$ oder einen Teil desselben als System der ∞^1-Punkte besitzt, für $h = -1$ dagegen das den Punkt α_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots,r)$ $(\mu_\varrho - 1)$-mal enthaltende Punktsystem $\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \cdots\cdot, \alpha_r, \cdots, \alpha_r$ oder einen Teil desselben als System der ∞^1-Punkte und das den Punkt $\infty_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots,q)$ $\iota_\varkappa$-mal enthaltende Punktsystem $\infty_1, \cdots, \infty_1, \cdots\cdot, \infty_q, \cdots, \infty_q$ als Bestandteil des Systems der 0^1-Punkte besitzt. Das Produkt $A(z)\,A_h^{(\infty)}(z)$ ist daher im einen wie im anderen Falle eine, mit $\widetilde{A}_h^{(\infty)}(z)$ zu bezeichnende, Funktion $A_h^{(\infty)}(z)$, oder, was dasselbe, es besteht die Gleichung:

$$A(z) = \frac{\widetilde{A}_h^{(\infty)}(z)}{A_h^{(\infty)}(z)}.$$

Damit ist aber der Beweis für die aufgestellte Behauptung erbracht.

11.

Man bezeichne zur Abkürzung die n Größen:

$$1, \qquad \underset{\varkappa=1,2,\cdots,q-1,}{\frac{d\,P_0\Big|_z^{\infty_\varkappa}}{dz} - \frac{d\,P_0\Big|_z^{\infty_q}}{dz}}, \qquad \underset{\varkappa=1,2,\cdots,q,}{\frac{d\,P_1\Big|_z^{\infty_\varkappa}}{dz}, \frac{d\,P_2\Big|_z^{\infty_\varkappa}}{dz}, \cdots, \frac{d\,P_{\iota_\varkappa-1}\Big|_z^{\infty_\varkappa}}{dz}},$$

in der vorliegenden Reihenfolge mit $A_1, A_2, \cdots, A_n$. Jede A-Funktion läßt sich dann als homogene lineare Funktion dieser n Größen mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten darstellen und zwar nur auf eine Weise. Die Richtigkeit dieser Behauptung erkennt man folgendermaßen.

Die darzustellende Funktion $A = A(z)$ möge das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ als System der ∞^1-Punkte besitzen, und die Bezeichnung sei so gewählt, daß $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_\mu$ $(\mu \overline{\gtreqless} m)$ die im Endlichen gelegenen Punkte des Punktsystems $\eta_1, \cdots, \eta_m$ sind. Bildet man alsdann das Produkt gA aus der Funktion A und der ganzen rationalen Funktion $g = (z-\eta_1)(z-\eta_2) \cdots (z-\eta_\mu)$ von z, so ist dasselbe, wenn man noch in dem Falle, wo keiner der Punkte $\eta_1, \cdots, \eta_m$ im Endlichen gelegen ist, unter g die Eins versteht, eine A-Funktion, welche für keinen im Endlichen gelegenen Punkt der Fläche T unendlich wird, also eine Funktion $A_h^{(\infty)}(z)$ von spezieller Art. Das Produkt gA läßt sich daher auf Grund der Gleichung (II'.) des Art. 10 darstellen durch eine Gleichung von der Form:

$$gA = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} l_\sigma \frac{du_\sigma}{dz} + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} g_\nu A_\nu,$$

wobei $l_1, \cdots, l_p$ Konstanten, $g_1, \cdots, g_n$ ganze rationale Funktionen von z bezeichnen.

Man beachte jetzt, daß die Funktion $z\frac{du_\varrho}{dz}$ $(\varrho = 1, 2, \cdots, p)$ eine Funktion $A_0^{(\infty)}(z)$ ist, bei der das Punktsystem $\infty_1, \cdots, \infty_q$ als Bestandteil des Systems der 0^1-Punkte auftritt, und daß infolgedessen für diese Funktion, der Formel (I.) des Art. 10 gemäß, eine Gleichung von der Form:

$$z\frac{du_\varrho}{dz} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} c_\sigma^{(\varrho)} \frac{du_\sigma}{dz} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} c_{\varkappa 0}^{(\varrho)} \left(\frac{d\,P\Big|_0^{\infty_\varkappa}{}_{z}}{dz} - \frac{1}{n} \sum_{\varkappa'=1}^{\varkappa'=q} \iota_{\varkappa'} \frac{d\,P\Big|_0^{\infty_{\varkappa'}}{}_{z}}{dz} \right) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota_\varkappa - 1} c_{\varkappa\lambda}^{(\varrho)} \frac{d\,P\Big|_\lambda^{\infty_\varkappa}{}_{z}}{dz}$$

besteht, bei der die $c^{(\varrho)}$ der Bedingung $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} c_{\varkappa 0}^{(\varrho)} = 0$ genügende Konstanten bezeichnen. Ersetzt man dann noch auf der rechten Seite dieser Gleichung $c_{q0}^{(\varrho)}$ durch $-\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q-1} c_{\varkappa 0}^{(\varrho)}$ und führt die Größen $A_2, A_3, \cdots, A_n$ ein, so erkennt man, daß sich die Funktion $z\frac{du_\varrho}{dz}$ $(\varrho = 1, 2, \cdots, p)$ durch eine Gleichung von der Form:

$$z\frac{du_\varrho}{dz} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} c_\sigma^{(\varrho)} \frac{du_\sigma}{dz} + \sum_{\nu=2}^{\nu=n} d_\nu^{(\varrho)} A_\nu,$$

bei der die $c^{(\varrho)}$, $d^{(\varrho)}$ Konstanten bezeichnen, darstellen läßt.

Die oben für gA gewonnene Gleichung fasse man nun mit den p aus der letzten Gleichung für $\varrho = 1, 2, \cdots, p$ hervorgehenden Gleichungen zu dem Systeme von $p+1$ Gleichungen:

$$\begin{array}{rcl}
l_1 \dfrac{du_1}{dz} + \cdots + & l_p \dfrac{du_p}{dz} + \left(\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} g_\nu A_\nu - gA\right) & = 0, \\[2ex]
\left(c_1^{(1)} - z\right) \dfrac{du_1}{dz} + \cdots + & c_p^{(1)} \dfrac{du_p}{dz} + \sum\limits_{\nu=2}^{\nu=n} d_\nu^{(1)} A_\nu & = 0, \\[1ex]
\cdots & \cdots & \cdots \\[1ex]
c_1^{(p)} \dfrac{du_1}{dz} + \cdots + & \left(c_p^{(p)} - z\right) \dfrac{du_p}{dz} + \sum\limits_{\nu=2}^{\nu=n} d_\nu^{(p)} A_\nu & = 0
\end{array}$$

zusammen. Da diese Gleichungen in bezug auf die $p+1$ Größen $\frac{du_1}{dz}, \cdots, \frac{du_p}{dz}$, 1 homogen linear sind, so muß die Determinante des Systems verschwinden. Es besteht also die Gleichung:

$$\begin{vmatrix}
l_1 & \cdots & l_p & \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} g_\nu A_\nu - gA \\
c_1^{(1)} - z & \cdots & c_p^{(1)} & \sum\limits_{\nu=2}^{\nu=n} d_\nu^{(1)} A_\nu \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
c_1^{(p)} & \cdots & c_p^{(p)} - z & \sum\limits_{\nu=2}^{\nu=n} d_\nu^{(p)} A_\nu
\end{vmatrix} = 0$$

und damit auch, wenn man noch die aus der Determinante nach Wegnahme der ersten Horizontalreihe und der letzten Vertikalreihe übrig bleibende Determinante p^{ten} Grades, die eine ganze rationale Funktion der Veränderlichen z vom p^{ten} Grade ist, mit g' bezeichnet, die Gleichung:

$$A = \frac{(-1)^p}{gg'} \begin{vmatrix}
l_1 & \cdots & l_p & \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} g_\nu A_\nu \\
c_1^{(1)} - z & \cdots & c_p^{(1)} & \sum\limits_{\nu=2}^{\nu=n} d_\nu^{(1)} A_\nu \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
c_1^{(p)} & \cdots & c_p^{(p)} - z & \sum\limits_{\nu=2}^{\nu=n} d_\nu^{(p)} A_\nu
\end{vmatrix},$$

oder, was dasselbe, nachdem man noch zur Abkürzung

$$r_1 = \frac{g_1}{g}, \qquad r_\nu = \frac{(-1)^p}{gg'} \begin{vmatrix}
l_1 & \cdots & l_p & g_\nu \\
c_1^{(1)} - z & \cdots & c_p^{(1)} & d_\nu^{(1)} \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
c_1^{(p)} & \cdots & c_p^{(p)} - z & d_\nu^{(p)}
\end{vmatrix}, \qquad {\scriptstyle \nu = 2, 3, \cdots, n,}$$

gesetzt hat, die Gleichung:

$$A = r_1 A_1 + r_2 A_2 + \cdots + r_n A_n,$$

welche die Funktion $A = A(z)$ als homogene lineare Funktion der n Größen $A_1, A_2, \cdots, A_n$ mit rationalen Funktionen $r_1, r_2, \cdots, r_n$ von z als Koeffizienten darstellt.

Die so für die Funktion A erhaltene Darstellung ist zugleich die einzige dieser Art. Gäbe es nämlich für die Funktion A noch eine zweite derartige, etwa durch die Gleichung $A = r_1' A_1 + r_2' A_2 + \cdots + r_n' A_n$ repräsentierte Darstellung, so würde durch Subtraktion dieser Gleichung von der zuerst erhaltenen, wenn man noch das System der dann auftretenden rationalen Funktionen $r_1 - r_1', r_2 - r_2', \cdots, r_n - r_n'$ in ein System $\frac{\bar{g}_1}{G}, \frac{\bar{g}_2}{G}, \cdots, \frac{\bar{g}_n}{G}$ von Quotienten ganzer Funktionen mit gemeinschaftlichem Nenner überführt, die Gleichung $0 = \bar{g}_1 A_1 + \bar{g}_2 A_2 + \cdots + \bar{g}_n A_n$ entstehen, bei der, da die rationalen Funktionen $r_1 - r_1', r_2 - r_2', \cdots, r_n - r_n'$ der Voraussetzung gemäß nicht sämtlich mit der Null zusammenfallen, wenigstens eine der ganzen Funktionen $\bar{g}$ nicht mit der Null identisch wäre. Das aber ist nach dem in Art. 10 auf Seite 195 Bewiesenen nicht möglich. Es läßt sich also in der Tat, wie zu Anfang dieses Artikels behauptet wurde, eine A-Funktion immer und nur auf eine Weise als homogene lineare Funktion der n Größen $A_1, A_2, \cdots, A_n$ mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten darstellen.

Man verstehe jetzt unter z irgend einen im Endlichen gelegenen Punkt der Z-Ebene, über dem kein Windungspunkt der Fläche T sich befindet, bezeichne die n ihm entsprechenden Punkte der Fläche T in irgend einer Reihenfolge mit $z_1, z_2, \cdots, z_n$, die zugehörigen Werte der Größe $A_{\nu\,(\nu=1,2,\cdots,n)}$ mit $A_\nu(z_1), A_\nu(z_2), \cdots, A_\nu(z_n)$ beziehungsweise, bilde die Determinante:

$$|A_\nu(z_\mu)| = \begin{vmatrix} A_1(z_1) & \cdots & A_n(z_1) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ A_1(z_n) & \cdots & A_n(z_n) \end{vmatrix}$$

und stelle sich die Frage, ob diese Determinante vielleicht für jeden der gestellten Bedingung genügenden Wert von z mit der Null zusammenfallen kann. Zur Beantwortung dieser Frage nehme man an, daß die Determinante für einen solchen Wert z' von z verschwinde, also $|A_\nu(z_\mu')| = 0$ sei. Dann läßt sich ein von $0, 0, \cdots, 0$ verschiedenes Konstantensystem $k_1, k_2, \cdots, k_n$ von der Art bestimmen, daß die Funktion $k_1 A_1 + k_2 A_2 + \cdots + k_n A_n$ für jeden der n Punkte $z_1', z_2', \cdots, z_n'$ den Wert Null besitzt. Infolgedessen wird der mit dieser Funktion als Zähler und der Funktion $z - z'$ als Nenner gebildete Quotient für keinen der n Punkte $z_1', z_2', \cdots, z_n'$ unendlich, besitzt also ausschließlich das den Punkt $\alpha_{\varrho\,(\varrho=1,2,\cdots,r)}$ $(\mu_\varrho - 1)$-mal enthaltende Punktsystem $\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_r$ oder nur einen Teil desselben als System der ∞^1-Punkte. Da dieser Quotient zudem aber auch das den Punkt $\infty_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots,q)$ $\iota_\varkappa$-mal enthaltende Punktsystem $\infty_1,\cdots,\infty_1,\cdots,\infty_q,\cdots,\infty_q$ als Bestandteil des Systems der 0^1-Punkte besitzt, so ist er eine Funktion $A_{-1}^{(\infty)}(z)$, und man erhält daher, wenn man den in Art. 10 für die allgemeinste Funktion $A_{-1}^{(\infty)}(z)$ gewonnenen Ausdruck, unter gleichzeitiger Ersetzung von c_{q0} durch $-\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=q-1} c_{\varkappa 0}$ und der dann auftretenden $q-1$ Funktionen $\dfrac{d\,P\Big|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\\ 0\end{smallmatrix}}{dz}-\dfrac{d\,P\Big|\begin{smallmatrix}\infty_q\\ z\\ 0\end{smallmatrix}}{dz}$, $\varkappa=1,2,\cdots,q-1$, durch die ihnen beziehungsweise entsprechenden Größen $A_2, A_3,\cdots,A_q$, herübernimmt, zunächst die Gleichung:

$$\frac{k_1A_1+k_2A_2+\cdots+k_nA_n}{z-z'}=\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}c_\varrho\frac{du_\varrho}{dz}+\sum_{\nu=2}^{\nu=q}c_{\nu-1,0}A_\nu,$$

bei der die c von z freie Größen bezeichnen. Multipliziert man nun linke und rechte Seite dieser Gleichung mit $z-z'$, ersetzt die p dann auftretenden Größen $z\dfrac{du_\varrho}{dz}$, $\varrho=1,2,\cdots,p$, auf Grund der vorher gewonnenen Gleichung:

$$z\frac{du_\varrho}{dz}=\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p}c_\sigma^{(\varrho)}\frac{du_\sigma}{dz}+\sum_{\nu=2}^{\nu=n}d_\nu^{(\varrho)}A_\nu$$

durch die ihnen entsprechenden Ausdrücke und ordnet nach den Größen $\dfrac{du_1}{dz},\dfrac{du_2}{dz},\cdots,\dfrac{du_p}{dz}$, $A_1, A_2,\cdots,A_n$, so erhält man weiter, wenn man noch beachtet, daß $A_1=1$ ist, die für jeden Punkt z der Fläche T geltende Gleichung:

$$0=\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p}\left[\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}c_\varrho(c_\sigma^{(\varrho)}-\delta_{\varrho\sigma}z')\right]\frac{du_\sigma}{dz}-k_1+\sum_{\nu=2}^{\nu=q}\left[c_{\nu-1,0}(z-z')+\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}c_\varrho d_\nu^{(\varrho)}-k_\nu\right]A_\nu+\sum_{\nu=q+1}^{\nu=n}\left[\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}c_\varrho d_\nu^{(\varrho)}-k_\nu\right]A_\nu.$$

Besteht aber diese Gleichung für jeden Punkt z der Fläche T, so müssen nach dem in Art. 10 auf Seite 195 Bewiesenen die Koeffizienten der Größen $\dfrac{du_1}{dz},\dfrac{du_2}{dz},\cdots,\dfrac{du_p}{dz}$, $1, A_2,\cdots,A_n$ sämtlich mit der Null identisch sein, oder, was dasselbe, es muß

$$1.)\quad\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}c_\varrho(c_\sigma^{(\varrho)}-\delta_{\varrho\sigma}z')=0,\quad \sigma=1,2,\cdots,p,$$

$$2.)\ k_1=0\qquad 3.)\ c_{\nu-1,0}=0,\quad \nu=2,3,\cdots,q,\qquad 4.)\ \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}c_\varrho d_\nu^{(\varrho)}-k_\nu=0,\quad \nu=2,3,\cdots,n,$$

sein. Beachtet man nun, daß die Konstanten $k_1, k_2,\cdots,k_n$, der zu Anfang gemachten Festsetzung gemäß, nicht sämtlich mit der Null zusammenfallen, so erkennt man aus den Gleichungen 2.) und 4.), daß auch die Größen $c_1,\cdots,c_p$ nicht sämtlich mit der Null zusammenfallen können, und weiter aus den p unter 1.) stehenden, in bezug auf die Größen $c_1,\cdots,c_p$ homogenen linearen Gleichungen, daß die Determinante dieser Gleichungen den Wert Null haben muß. Damit ist aber bewiesen, daß die Determinante

$|A_\nu(z_\mu)|$ für einen der gestellten Bedingung genügenden Wert $z = z'$ nur dann verschwinden kann, wenn die Determinante:

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} c_1^{(1)} - z & \cdots & c_1^{(p)} \\ \cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ c_p^{(1)} & \cdots & c_p^{(p)} - z \end{vmatrix}$$

für $z = z'$ verschwindet. Die aufgeworfene Frage ist also in verneinendem Sinne zu beantworten. Die Determinante $|A_\nu(z_\mu)|$ kann nur für eine endliche Anzahl von Punktsystemen $z_1, \cdots, z_n$ der Fläche T den Wert Null besitzen.

Ein System von n A-Funktionen soll ein Basissystem genannt werden, wenn sich jede A-Funktion als homogene lineare Funktion der n Funktionen des Systems mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten darstellen läßt. Nach dem zu Anfang dieses Artikels Bewiesenen ist $A_1, \cdots, A_n$ ein solches System. Wie man alle überhaupt existierenden Basissysteme erhalten kann, zeigt die folgende Untersuchung.

Man verstehe unter $A'_1, \cdots, A'_n$ ein System von irgend n A-Funktionen und denke sich die n Gleichungen:

(1.) $$A'_\nu = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} r_{\nu\sigma} A_\sigma, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, n,$$

gebildet, welche diese Funktionen als homogene lineare Funktionen der n Größen $A_1, \cdots, A_n$ mit rationalen Funktionen $r_{\nu\sigma}$, $\nu, \sigma = 1, 2, \cdots, n$, von z als Koeffizienten darstellen. Verschwindet dann die Determinante $|r_{\nu\sigma}|$ des Systems dieser Gleichungen nicht identisch, so ist $A'_1, \cdots, A'_n$ ein Basissystem, da die Auflösung des Gleichungensystems für jede der Funktionen $A_1, \cdots, A_n$ und damit zugleich auch für jede beliebige Funktion $A = A(z)$ — insoferne eine A-Funktion mit den Größen $A_1, \cdots, A_n$ immer durch eine Gleichung von der Form $A = r_1 A_1 + \cdots + r_n A_n$ mit rationalen Funktionen r von z als Koeffizienten verknüpft ist — eine homogene lineare Funktion der Größen $A'_1, \cdots, A'_n$ mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten liefert. Ist umgekehrt das System $A'_1, \cdots, A'_n$ ein Basissystem, besteht also ein Gleichungensystem von der Form:

(1'.) $$A_\varkappa = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} r'_{\varkappa\nu} A'_\nu, \qquad \varkappa = 1, 2, \cdots, n,$$

mit rationalen Funktionen $r'_{\varkappa\nu}$, $\varkappa, \nu = 1, 2, \cdots, n$, von z als Koeffizienten, und trägt man alsdann in dieses System an Stelle der Größen A'_ν die ihnen auf Grund der Gleichungen (1.) entsprechenden Ausdrücke ein, so müssen in dem dadurch entstehenden Systeme:

$$0 = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \left(\sum_{\nu=1}^{\nu=n} r'_{\varkappa\nu} r_{\nu\sigma} - \delta_{\varkappa\sigma} \right) A_\sigma, \qquad \varkappa = 1, 2, \cdots, n,$$

die in runde Klammern eingeschlossenen rationalen Funktionen von z nach früher

Bewiesenem sämtlich mit der Null identisch sein, und es kann daher, wegen der hieraus sich ergebenden Beziehung $|r'_{\varkappa\nu}|\,|r_{\nu\sigma}|=1$ zwischen den Determinanten $|r'_{\varkappa\nu}|$, $|r_{\nu\sigma}|$, die Determinante $|r_{\nu\sigma}|$ nicht identisch verschwinden. Man erkennt so, daß das System $A'_1, \cdots, A'_n$ dann, aber auch nur dann ein Basissystem ist, wenn die ihm entsprechende Determinante $|r_{\nu\sigma}|$ nicht identisch verschwindet, und daß man alle überhaupt existierenden Basissysteme $A'_1, \cdots, A'_n$ erhält, wenn man in dem Gleichungensysteme (1.) an Stelle des Systems der n^2 Koeffizienten $r_{\nu\sigma}$, ${\scriptstyle \nu,\sigma=1,2,\cdots,n}$, ein jedes System von n^2 rationalen Funktionen treten läßt, für welches die Determinante $|r_{\nu\sigma}|$ nicht identisch verschwindet.

Zwischen den Funktionen $A'_1, \cdots, A'_n$ besteht nur dann eine Relation von der Form $g'_1A'_1+\cdots+g'_nA'_n=0$ mit ganzen rationalen nicht sämtlich mit der Null identischen Funktionen von z als Koeffizienten, wenn die aus der Gleichung $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} g'_\nu A'_\nu=0$ durch Elimination der Größen $A'_1, \cdots, A'_n$ vermittelst der Gleichungen (1.) hervorgehende Gleichung $\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=n}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} g'_\nu r_{\nu\sigma}\right)A_\sigma=0$ oder, was nach früher Bewiesenem auf dasselbe hinauskommt, das Gleichungensystem $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} g'_\nu r_{\nu\sigma}=0$, ${\scriptstyle \sigma=1,2,\cdots,n}$, sich durch ganze rationale nicht sämtlich mit der Null identische Funktionen $g'_1, \cdots, g'_n$ befriedigen läßt. Dieses aber ist nur dann der Fall, wenn die Determinante $|r_{\nu\sigma}|$ identisch verschwindet, oder, was dasselbe, wenn $A'_1, \cdots, A'_n$ kein Basissystem ist. Daraus folgt insbesondere, daß die Darstellung einer beliebigen Funktion $A=A(z)$ durch die n Funktionen $A'_1, \cdots, A'_n$ eines Basissystems in der Form $A=r'_1A'_1+\cdots+r'_nA'_n$, bei der die r' rationale Funktionen von z bezeichnen, nur auf eine Weise möglich ist.

Mit Hilfe der Gleichungen (1.) soll jetzt noch ein drittes Kriterium zur Entscheidung der Frage abgeleitet werden, ob die n Funktionen $A'_1, \cdots, A'_n$ ein Basissystem bilden oder nicht. Zu dem Ende bezeichne man mit $z_1, \cdots, z_n$ die irgend einem Werte von z entsprechenden n übereinander liegenden Punkte der Fläche T, mit $A_\sigma(z_\mu)$, $A'_\nu(z_\mu)$ ${\scriptstyle (\mu=1,2,\cdots,n)}$ die Werte der Funktionen A_σ, A'_ν für den Punkt z_μ und setze zur Abkürzung

$$|A_\sigma(z_\mu)|=\begin{vmatrix} A_1(z_1) & \cdots & A_n(z_1)\\ \cdot & \cdots & \cdot \\ A_1(z_n) & \cdots & A_n(z_n)\end{vmatrix}, \qquad |A'_\nu(z_\mu)|=\begin{vmatrix} A'_1(z_1) & \cdots & A'_n(z_1)\\ \cdot & \cdots & \cdot \\ A'_1(z_n) & \cdots & A'_n(z_n)\end{vmatrix}.$$

Beachtet man dann, daß zwischen den auf irgend einen Wert von z bezogenen Determinanten $|A_\sigma(z_\mu)|$, $|A'_\nu(z_\mu)|$ und der Determinante $|r_{\nu\sigma}|$ des Gleichungensystems (1.), wegen $A'_\nu(z_\mu)=\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=n} r_{\nu\sigma}A_\sigma(z_\mu)$, die Gleichung:

$$|A'_\nu(z_\mu)|=|r_{\nu\sigma}|\,|A_\sigma(z_\mu)|$$

besteht, und daß nach früher Bewiesenem die Determinante $|A_\sigma(z_\mu)|$ nur für eine endliche Anzahl von Punktsystemen $z_1, \cdots, z_n$ der Fläche T den Wert Null besitzen kann, so erkennt man, daß die Determinante $|A'_\nu(z_\mu)|$ dann aber auch nur dann nicht für jedes Punktsystem $z_1, \cdots, z_n$ der Fläche T den Wert Null besitzt, wenn die Determinante $|r_{\nu\sigma}|$ nicht identisch verschwindet, oder, was dasselbe, wenn $A'_1, \cdots, A'_n$ ein Basissystem ist.

Die in diesem Artikel erhaltenen Resultate kann man jetzt schließlich dahin zusammenfassen, daß die vier Aussagen:

1.) *Die Funktionen $A'_1, \cdots, A'_n$ bilden ein Basissystem;*

2.) *Die Determinante $|r_{\nu\sigma}|$ des die Funktionen $A'_1, \cdots, A'_n$ durch die Funktionen $A_1, \cdots, A_n$ darstellenden Gleichungensystems $A'_\nu = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} r_{\nu\sigma} A_\sigma$, $\nu = 1, 2, \cdots, n$, verschwindet nicht identisch;*

3.) *Zwischen den Funktionen $A'_1, \cdots, A'_n$ besteht keine Relation von der Form $g'_1 A'_1 + \cdots + g'_n A'_n = 0$ mit ganzen rationalen, nicht sämtlich mit der Null identischen Funktionen g' von z als Koeffizienten;*

4.) *Die Determinante $|A'_\nu(z_\mu)|$ besitzt nicht für jedes Punktsystem $z_1, \cdots, z_n$ der Fläche T den Wert Null;*

gleichwertig sind, insoferne aus irgend einer von ihnen als Voraussetzung jede der drei anderen abgeleitet werden kann.

12.

Nach den im vorhergehenden Artikel durchgeführten Untersuchungen stellt der Ausdruck:

$$\bar{A}(z) = \frac{g_1(z)}{G(z)} A_1(z) + \frac{g_2(z)}{G(z)} A_2(z) + \cdots + \frac{g_n(z)}{G(z)} A_n(z),$$

bei dem $A_1(z), A_2(z), \cdots, A_n(z)$ die zu Anfang des Artikels definierten Funktionen, $g_1(z), g_2(z), \cdots, g_n(z), G(z)$ unbestimmte ganze rationale Funktionen von z bezeichnen, die allgemeinste A-Funktion dar. Es soll jetzt gezeigt werden, daß man bei diesem Ausdrucke die Funktionen g auf unbegrenzt viele Weisen so bestimmen kann, daß die n aus ihm durch Potenzierung sich ergebenden A-Funktionen:

$$1, \ \bar{A}(z), \ \bar{A}^2(z), \ \cdots, \ \bar{A}^{n-1}(z)$$

ein Basissystem bilden, einerlei welche ganze rationale Funktion von z man auch unter $G(z)$ verstehen mag.

Da zugleich mit $1, \bar{A}(z), \bar{A}^2(z), \cdots, \bar{A}^{n-1}(z)$ immer auch die n aus der Funktion:

$$A(z) = g_1(z) A_1(z) + g_2(z) A_2(z) + \cdots + g_n(z) A_n(z)$$

durch Potenzierung sich ergebenden A-Funktionen:

$$A'_1(z) = 1, \ A'_2(z) = A(z), \ A'_3(z) = A^2(z), \cdots, A'_n(z) = A^{n-1}(z)$$

ein Basissystem bilden, wie umgekehrt, so kommt es nur darauf an zu zeigen, daß man die Funktionen g auf unbegrenzt viele Weisen so bestimmen kann, daß die n Funktionen $A_1'(z)$, $A_2'(z)$, $\cdots$, $A_n'(z)$ ein Basissystem bilden. Zu dem Ende beachte man, daß nach dem am Schlusse des vorhergehenden Artikels aufgestellten Satze die Funktionen $A_1'(z)$, $A_2'(z)$, $\cdots$, $A_n'(z)$ dann aber auch nur dann ein Basissystem bilden werden, wenn nicht für jedes System übereinander liegender, also demselben Werte von z entsprechender, Punkte $z_1, z_2, \cdots, z_n$ der Fläche T die Determinante:

$$|A_\nu'(z_\mu)| = \begin{vmatrix} 1 & A(z_1) & \cdots & A^{n-1}(z_1) \\ 1 & A(z_2) & \cdots & A^{n-1}(z_2) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & A(z_n) & \cdots & A^{n-1}(z_n) \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{\substack{i,k \\ i<k}}^{1,2,\cdots,n} [A(z_i) - A(z_k)]$$

den Wert Null hat oder, was dasselbe, unter den n Größen:

$$\begin{aligned} A(z_1) &= g_1(z) A_1(z_1) + g_2(z) A_2(z_1) + \cdots + g_n(z) A_n(z_1), \\ A(z_2) &= g_1(z) A_1(z_2) + g_2(z) A_2(z_2) + \cdots + g_n(z) A_n(z_2), \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A(z_n) &= g_1(z) A_1(z_n) + g_2(z) A_2(z_n) + \cdots + g_n(z) A_n(z_n) \end{aligned}$$

gleiche sich befinden. Um ein Basissystem der in Rede stehenden Art zu erhalten, genügt es also, nach Wahl eines Punktes $z = z'$ der Z-Ebene die Funktionen $g_1(z)$, $g_2(z)$, $\cdots$, $g_n(z)$ so zu bestimmen, daß für $z = z'$ keine zwei der Größen $A(z_1)$, $A(z_2)$, $\cdots$, $A(z_n)$ denselben Wert annehmen. Als Punkt z' wähle man nun einen im Endlichen gelegenen Punkt der Z-Ebene, über dem n getrennte Punkte $z_1', z_2', \cdots, z_n'$ der Fläche T sich befinden und für den zugleich die Determinante:

$$|A_\nu(z_\mu)| = \begin{vmatrix} A_1(z_1) & \cdots & A_n(z_1) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ A_1(z_n) & \cdots & A_n(z_n) \end{vmatrix}$$

— die nach dem im vorhergehenden Artikel Bewiesenen nur für eine endliche Anzahl von Punktsystemen $z_1, z_2, \cdots, z_n$ der Fläche T verschwinden kann — einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Versteht man alsdann unter $a_1, a_2, \cdots, a_n$, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ irgend $2n$ durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 A_1(z_1') + a_2 A_2(z_1') + \cdots + a_n A_n(z_1'), \\ b_2 &= a_1 A_1(z_2') + a_2 A_2(z_2') + \cdots + a_n A_n(z_2'), \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_n &= a_1 A_1(z_n') + a_2 A_2(z_n') + \cdots + a_n A_n(z_n') \end{aligned}$$

verknüpfte Größen, unter $\bar{g}_1(z), \bar{g}_2(z), \cdots, \bar{g}_n(z)$ unbestimmte ganze rationale Funktionen und setzt:

$$g_1(z) = a_1 + (z-z')\bar{g}_1(z), \quad g_2(z) = a_2 + (z-z')\bar{g}_2(z), \quad \cdots, \quad g_n(z) = a_n + (z-z')\bar{g}_n(z),$$

so wird die mit diesen Funktionen g gebildete Funktion:

$$A(z) = g_1(z)\,A_1(z) + g_2(z)\,A_2(z) + \cdots + g_n(z)\,A_n(z)$$

für die Punkte $z_1', z_2', \cdots, z_n'$ die Werte:

$$A(z_1') = b_1, \;\; A(z_2') = b_2, \;\; \cdots, \;\; A(z_n') = b_n$$

annehmen, und es werden daher die aus ihr durch Potenzierung entstehenden Funktionen $1, A(z), A^2(z), \cdots, A^{n-1}(z)$ und damit auch die Funktionen $1, \bar{A}(z), \bar{A}^2(z), \cdots, \bar{A}^{n-1}(z)$ immer ein Basissystem bilden, wenn man nur die Größen $a_1, a_2, \cdots, a_n$ so wählt, daß keine zwei der ihnen entsprechenden Größen $b_1, b_2, \cdots, b_n$ einander gleich werden.

Durch das im Vorstehenden auseinandergesetzte Verfahren kann aber auch jede Funktion:

$$\bar{A}(z) = \frac{g_1(z)}{G(z)}\,A_1(z) + \frac{g_2(z)}{G(z)}\,A_2(z) + \cdots + \frac{g_n(z)}{G(z)}\,A_n(z),$$

deren Potenzen $1, \bar{A}(z), \bar{A}^2(z), \cdots, \bar{A}^{n-1}(z)$ ein Basissystem bilden, erhalten werden. Um dies einzusehen, beachte man, daß zugleich mit $1, \bar{A}(z), \bar{A}^2(z), \cdots, \bar{A}^{n-1}(z)$ auch die Potenzen $1, A(z), A^2(z), \cdots, A^{n-1}(z)$ der Funktion:

$$A(z) = g_1(z)\,A_1(z) + g_2(z)\,A_2(z) + \cdots + g_n(z)\,A_n(z)$$

ein Basissystem bilden, und daß daher diese Funktion $A(z)$ für unbegrenzt viele Systeme von getrennten übereinander liegenden Punkten $z_1, z_2, \cdots, z_n$ der Fläche T Werte $A(z_1), A(z_2), \cdots, A(z_n)$ besitzt, von denen keine zwei einander gleich sind. Aus diesen Systemen kann man also auch ein, etwa dem Punkte $z = z'$ der Z-Ebene entsprechendes, System $z_1', z_2', \cdots, z_n'$ herausgreifen, für welches nicht nur das zugehörige Wertesystem $b_1 = A(z_1'), b_2 = A(z_2'), \cdots, b_n = A(z_n')$ der Funktion $A(z)$ keine gleichen Größen enthält, sondern auch die Determinante $|A_\nu(z_\mu')|$ von Null verschieden ist. Setzt man alsdann noch $g_1(z') = a_1, g_2(z') = a_2, \cdots, g_n(z') = a_n$, so sind die hier definierten Größen $a_1, a_2, \cdots, a_n$, $b_1, b_2, \cdots, b_n$, durch die n vorher aufgestellten Gleichungen:

$$b_\nu = a_1\,A_1(z_\nu') + a_2\,A_2(z_\nu') + \cdots + a_n\,A_n(z_\nu'), \qquad {\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, n,}$$

verknüpft, und der Quotient $\frac{g_\nu(z) - a_\nu}{z - z'} = \bar{g}_\nu(z)$ ist eine ganze rationale Funktion von z.

Man nehme jetzt eine Funktion $\bar{A}(z)$, deren Potenzen $1, \bar{A}(z), \bar{A}^2(z), \cdots, \bar{A}^{n-1}(z)$ ein Basissystem bilden. Irgend eine A-Funktion läßt sich dann immer und nur auf eine Weise durch eine Gleichung von der Form:

$$A(z) = r_0(z) + r_1(z)\,\bar{A}(z) + r_2(z)\,\bar{A}^2(z) + \cdots + r_{n-1}(z)\,\bar{A}^{n-1}(z)$$

darstellen, wobei die r rationale Funktionen von z bezeichnen. Daraus folgt speziell, daß zwischen den Potenzen 1, $\bar{A}(z)$, $\bar{A}^2(z)$, $\cdots$, $\bar{A}^{n-1}(z)$, $\bar{A}^n(z)$ der Funktion $\bar{A}(z)$ eine und nur eine Gleichung von der Form:

$$\bar{A}^n(z) = \bar{r}_0(z) + \bar{r}_1(z)\bar{A}(z) + \bar{r}_2(z)\bar{A}^2(z) + \cdots + \bar{r}_{n-1}(z)\bar{A}^{n-1}(z)$$

mit rationalen Funktionen $\bar{r}$ als Koeffizienten besteht, und diese Gleichung besitzt alsdann für irgend einen Wert von z die zu den n entsprechenden Punkten z_1, z_2, $\cdots$, z_n der Fläche T gehörigen Werte $\bar{A}(z_1)$, $\bar{A}(z_2)$, $\cdots$, $\bar{A}(z_n)$ der Funktion $\bar{A}(z)$ als Lösungen.*) Damit ist aber die Möglichkeit gegeben, allgemein den Punkt $\mathfrak{P}$ der Fläche T durch Angabe des ihm entsprechenden Wertepaares $(z, \bar{A})$ zu fixieren — eine Aufgabe, die der Algebra zufällt und für deren Behandlung auf das vorzügliche Werk der Herren K. Hensel und G. Landsberg „Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale (Leipzig, Teubner, 1902)" verwiesen werden möge.

*) Vgl. Riemann, B., Theorie der Abelschen Funktionen. I, Art. 5. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 88—144; S. 107—109.)

Sechster Abschnitt.

Theorie der F-Funktionen.

1.

Es sollen jetzt die am Ende von Art. 7 des zweiten Abschnittes definierten, mit $F(z)$ bezeichneten, speziellen zu irgend einer gewöhnlichen Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktionen W zugleich mit den am Ende von Art. 7 des dritten Abschnittes definierten, ebenfalls mit $F(z)$ bezeichneten, speziellen zu irgend einer gemischten Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktionen W einer genauen Betrachtung unterzogen werden.

Man verstehe unter $\binom{A}{B} = \binom{A_1 \cdots A_p}{B_1 \cdots B_p}$ irgend eine von $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ verschiedene Charakteristik, bei der $A_{\lambda_1}, B_{\lambda_1}; \cdots; A_{\lambda_\mathfrak{p}}, B_{\lambda_\mathfrak{p}}$ eigentliche, $A_{\lambda_{\mathfrak{p}+1}} = 1$, $B_{\lambda_{\mathfrak{p}+1}} = 1; \cdots; A_{\lambda_p} = 1$, $B_{\lambda_p} = 1$ uneigentliche Faktorenpaare sein mögen. Dabei bezeichnet $\mathfrak{p}$ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, p$ und $\lambda_1, \cdots, \lambda_\mathfrak{p}, \lambda_{\mathfrak{p}+1}, \cdots, \lambda_p$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \cdots, p$. Ist $\mathfrak{p}$ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, p-1$, so ist die Charakteristik $\binom{A}{B}$ eine gemischte; ist dagegen $\mathfrak{p} = p$, so ist die Charakteristik $\binom{A}{B}$ eine gewöhnliche. Nun fixiere man in der ursprünglichen Fläche T' irgend s Punkte $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \cdots, \eta^{(s)}$, die nur der Bedingung zu genügen haben, daß sie als Punkte der Fläche T betrachtet getrennt liegen, und ordne ihnen die positiven ganzen Zahlen $m_1, m_2, \cdots, m_s$ beziehungsweise zu. Für den Fall, daß irgend welche dieser Punkte an der Begrenzung von T' liegen, führe man am Schnittsystem bei diesen Punkten, ohne jedoch den Charakter des Schnittsystems zu ändern und ohne einen Schnitt über einen der Punkte η hinüberzuschieben, eine solche Deformation aus, daß die sämtlichen Punkte η im Innern der dadurch entstehenden neuen Fläche T' liegen. Nach dem im dritten Abschnitte zu Anfang des Art. 7 Bemerkten ist dann in dem mit den willkürlichen Konstanten $\mathfrak{L}$, C gebildeten Ausdruck:

$$W(z) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \left(\mathfrak{L}_{\sigma 1} \underset{1}{P} \left| \begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ z \end{matrix} \right| + \mathfrak{L}_{\sigma 2} \underset{2}{P} \left| \begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ z \end{matrix} \right| + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma} \underset{m_\sigma}{P} \left| \begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ z \end{matrix} \right| \right) + C,$$

bei dem die P zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Elementarfunktionen bezeichnen, jede zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion W enthalten, welche in der Fläche T'' einwertig ist, in je zwei zu einem der Schnitte $c_{\lambda_1}, \cdots, c_{\lambda_\mathfrak{p}}, a_{\lambda_{\mathfrak{p}+1}}, \cdots, a_{\lambda_p}$ gehörigen entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-$ denselben Wert besitzt, für jeden von den Punkten η verschiedenen Punkt z der Fläche T'' stetig ist und für den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ $(\sigma=1,2,\cdots,s)$ höchstens von der Ordnung m_σ unendlich wird. Auf Grund der Gleichungen $(2_m.)$, $(3_m.)$, $(5_m.)$ von Art. 3 des dritten Abschnittes sind die Werte dieser Funktion in je zwei entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+. \mathcal{P}^-$ der Begrenzung von T'' in der Weise verknüpft, daß

$$\left.\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \{\; W(z)^+ = A_\nu W(z)^- + (1-A_\nu)\,\mathfrak{K}_\nu, \\ &\text{längs } b_\nu \{\; W(z)^+ = B_\nu W(z)^- + (1-B_\nu)\,\mathfrak{K}_\nu, \\ &\text{längs } c_\nu \{\; W(z)^+ = \quad\; W(z)^-, \end{aligned}\right\} \qquad \nu=\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\mathfrak{p},$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \{\; W(z)^+ = \quad W(z)^-, \\ &\text{längs } b_\nu \{\; W(z)^+ = \quad W(z)^- + \mathfrak{K}_\nu, \\ &\text{längs } c_\nu \{\; W(z)^+ = \quad W(z)^-, \end{aligned}\right\} \qquad \nu=\lambda_{\mathfrak{p}+1},\lambda_{\mathfrak{p}+2},\cdots,\lambda_p,$$

ist. Dabei vertritt $\mathfrak{K}_\nu$ den durch die Gleichung:

$$\mathfrak{K}_\nu = -2\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\sigma}\frac{\mathfrak{L}_{\sigma\lambda}}{(\lambda-1)!}\left(\frac{d^\lambda w_\nu}{dz_\sigma^\lambda}\right)_0 + C\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\nu\lambda_{\nu'}} \qquad (\nu=1,2,\cdots,p)$$

bestimmten Ausdruck, bei dem, der einfacheren Schreibweise wegen, $z_{\eta^{(\sigma)}}$ durch z_σ ersetzt ist.

Sollen nun für die Fläche T'' zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige F-Funktionen existieren, die für jeden von den Punkten η verschiedenen Punkt z dieser Fläche stetig sind und für den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ $(\sigma=1,2,\cdots,s)$ höchstens von der Ordnung m_σ unendlich werden, so muß sich das Gleichungensystem $\mathfrak{K}_1=0,\ \mathfrak{K}_2=0,\ \cdots,\ \mathfrak{K}_p=0$ oder, was dasselbe, das System der p Gleichungen:

$$-2\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\sigma}\frac{\mathfrak{L}_{\sigma\lambda}}{(\lambda-1)!}\left(\frac{d^\lambda \overline{w}_\nu}{dz_\sigma^\lambda}\right)_0 + C\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\nu\lambda_{\nu'}} = 0, \qquad \nu=1,2,\cdots,p,$$

durch Größen $\mathfrak{L}$, welche nicht sämtlich den Wert Null besitzen, befriedigen lassen, da nur in diesem Falle der für $W(z)$ aufgestellte Ausdruck eine F-Funktion mit den genannten Eigenschaften liefert. Beachtet man aber, daß durch Addition der $\mathfrak{p}$ Gleichungen, welche aus der vorstehenden, auf beliebiges ν sich beziehenden, Gleichung hervorgehen, wenn man darin der Reihe nach an Stelle von ν die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\mathfrak{p}$ treten läßt, wegen $\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}}\overline{w}_{\lambda_\varrho}=0$, $\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mathfrak{p}}\sum_{\nu'=1}^{\nu'=\mathfrak{p}}\delta_{\lambda_\varrho\lambda_{\nu'}}=\mathfrak{p}$, die Gleichung $C\mathfrak{p}=0$ folgt, so erkennt man, daß F-Funktionen der genannten Art dann, aber auch nur dann existieren, wenn sich das System der p Gleichungen:

$$(1.)\qquad \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\left\{\mathfrak{L}_{\sigma 1}\left(\frac{d\overline{w}_\nu}{dz_\sigma}\right)_0+\frac{1}{1!}\,\mathfrak{L}_{\sigma 2}\left(\frac{d^2\overline{w}_\nu}{dz_\sigma^2}\right)_0+\cdots+\frac{1}{(m_\sigma-1)!}\,\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}\left(\frac{d^{m_\sigma}\overline{w}_\nu}{dz_\sigma^{m_\sigma}}\right)_0\right\}=0,\qquad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,}$$

durch Größen $\mathfrak{L}$, welche nicht sämtlich den Wert Null besitzen, befriedigen läßt, und daß zugleich die zu einem solchen Systeme von Größen $\mathfrak{L}$ gehörige einzige Funktion $F(z)$ der genannten Art durch die Gleichung:

$$(2.)\qquad F(z)=\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\left(\mathfrak{L}_{\sigma 1}\underset{1}{P}\left|{}^{\eta^{(\sigma)}}_{z}\right|+\mathfrak{L}_{\sigma 2}\underset{2}{P}\left|{}^{\eta^{(\sigma)}}_{z}\right|+\cdots+\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}\underset{m_\sigma}{P}\left|{}^{\eta^{(\sigma)}}_{z}\right|\right)$$

geliefert wird.

Betrachtet man bei einer Funktion $F(z)$ der in Rede stehenden Art den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ ${\scriptstyle (\sigma=1,2,\cdots,s)}$, für den sie unendlich von der Ordnung $\overline{m}_\sigma(\infty^{\overline{m}_\sigma})$, ${\scriptstyle \overline{m}_\sigma\leqq m_\sigma}$, werden möge, als äquivalent mit $\overline{m}_\sigma$ ∞^1-Punkten, so kommen der Funktion $F(z)$ im ganzen $\overline{m}=\overline{m}_1+\cdots+\overline{m}_s$ ∞^1-Punkte zu, und die Zahl $\overline{m}$ soll dann die Ordnung der Funktion $F(z)$ genannt werden. Um die Frage zu entscheiden, ob die in der Fläche T'' einwertige Funktion $F(z)$ auch für Punkte dieser Fläche den Wert Null haben kann, nehme man — indem man beachtet, daß solche Punkte, wie aus dem Verhalten der Funktion $F(z)$ in den Punkten $\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(s)}$ folgt, nur in endlicher Anzahl auftreten können, und daß jedem solchen Punkte eine ganze Zahl als Ordnungszahl für das Nullwerden zukommt — an, daß $F(z)$ für die Punkte $\varepsilon^{(1)},\cdots,\varepsilon^{(t)}$ der Fläche T'' null werde und speziell für den Punkt $\varepsilon^{(\tau)}$ ${\scriptstyle (\tau=1,2,\cdots,t)}$ null von der Ordnung $\overline{n}_\tau(0^{\overline{n}_\tau})$, sodaß ihr also, wenn man den Punkt $\varepsilon^{(\tau)}$ als äquivalent mit $\overline{n}_\tau$ 0^1-Punkten betrachtet, im ganzen $\overline{n}=\overline{n}_1+\cdots+\overline{n}_t$ 0^1-Punkte zukommen. Ändert man alsdann, wenn nötig, das Schnittsystem durch Deformation so, daß die Punkte η, ε sämtlich im Innern der Fläche T'' liegen, und erstreckt das mit der Funktion $F(z)$ und ihrer Derivierten $F'(z)$ gebildete Integral $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{F'(z)}{F(z)}\,dz$ in positiver Richtung über die ganze Begrenzung der Fläche T'', so erhält man als Wert dieses Integrals das eine Mal, indem man beachtet, daß die Funktion $\frac{F'(z)}{F(z)}$ in je zwei entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ der Begrenzung denselben Wert besitzt, die Null, das andere Mal durch Reduktion auf die, sämtlich im Innern der Fläche T'' gelegenen, Punkte ε, η die Differenz $\overline{n}-\overline{m}$ und erkennt so schließlich, daß die Gleichung $\overline{n}=\overline{m}$ besteht, oder, was dasselbe, daß bei der Funktion $F(z)$ die Anzahl $\overline{n}$ der 0^1-Punkte sich mit der Anzahl $\overline{m}$ der ∞^1-Punkte deckt. Dem Vorstehenden entsprechend soll nun das Punktsystem $\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(1)},\eta^{(2)},\cdots,\eta^{(2)},\cdots\cdot,\eta^{(s)},\cdots,\eta^{(s)}$, welches allgemein den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ $\overline{m}_\sigma$-mal enthält, das System der ∞^1-Punkte, das

Punktsystem $\varepsilon^{(1)}, \cdots, \varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \cdots, \varepsilon^{(2)}, \cdots\cdot, \varepsilon^{(t)}, \cdots, \varepsilon^{(t)}$, welches allgemein den Punkt $\varepsilon^{(\tau)}$ n_τ-mal enthält, das System der 0^1-Punkte von $F(z)$ genannt werden.

2.

Die im vorhergehenden Artikel betrachtete Gruppe von zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen F-Funktionen ist durch die in T' fixierten s Punkte $\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(s)}$ und die ihnen beziehungsweise zugeordneten positiven ganzen Zahlen $m_1, \cdots, m_s$ vollständig bestimmt. Die notwendige und zugleich hinreichende Bedingung für ihre Existenz ist die, daß das vorher aufgestellte System der p Gleichungen (1.) sich durch Größen $\mathfrak{L}$, die nicht sämtlich den Wert Null besitzen, befriedigen läßt. Es soll jetzt gezeigt werden, daß diese Bedingung durch eine andere ersetzt werden kann.

Man bilde das Punktsystem $\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \cdots, \eta^{(2)}, \cdots\cdot, \eta^{(s)}, \cdots, \eta^{(s)}$, welches allgemein den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ m_σ-mal enthält, bezeichne seine $m = m_1 + \cdots + m_s$ Punkte ohne Rücksicht auf die Reihenfolge durch $\eta_1, \cdots, \eta_m$ und verstehe unter $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ ein System von irgend m Punkten der Fläche T'. Bestimmt man nun für $\nu = 1, 2, \cdots, p$, indem man beachtet, daß die Größen A_ν, B_ν den Modul 1 besitzen, reelle Größen a_ν, b_ν im Rahmen der Bedingungen $-1 < a_\nu \gtreqless 0$, $0 \leqq b_\nu < 1$ durch die Gleichungen:

$$A_\nu = e^{-a_\nu 2\pi i}, \qquad B_\nu = e^{b_\nu 2\pi i}, \qquad {\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p,}$$

und setzt, nachdem man zuvor noch, wenn nötig, das Schnittsystem durch Deformation so geändert hat, daß die Punkte η, ε sämtlich im Innern der Fläche T' liegen, aus den den Punkten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$, $\eta_1, \cdots, \eta_m$ entsprechenden, in Art. 2 des vorhergehenden Abschnittes definierten Funktionen Θ unter Benutzung der soeben eingeführten Größen $a_1, \cdots, a_p$ und der unbestimmten Konstanten $g_1, \cdots, g_p$, C, $c \neq 0$, den Ausdruck:

$$C \frac{\Theta\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_1\\ z\end{smallmatrix}\right| \Theta\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_2\\ z\end{smallmatrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_m\\ z\end{smallmatrix}\right|}{\Theta\left|\begin{smallmatrix}\eta_1\\ z\end{smallmatrix}\right| \Theta\left|\begin{smallmatrix}\eta_2\\ z\end{smallmatrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{smallmatrix}\eta_m\\ z\end{smallmatrix}\right|} e^{-2\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}(a_\nu + g_\nu) u_\nu^z}$$

zusammen, so ist, wie mit Hilfe des Fundamentalsatzes leicht erkannt wird, in diesem Ausdruck, wenn man ihn als Funktion des Punktes z von T' betrachtet und die Punkte ε unbestimmt läßt, jede in T' einwertige Funktion von z enthalten, welche das System $\eta_1, \cdots, \eta_m$ oder auch nur einen Teil desselben als System der ∞^1-Punkte besitzt, für jeden nicht in dem Systeme der ∞^1-Punkte vorkommenden Punkt stetig ist, gleich oft 0^1 wie ∞^1 wird, und in je zwei zu einem der Schnitte a, b, c gehörigen entsprechenden Punkten $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ Werte annimmt, die sich nur durch einen längs des betreffenden Schnittes konstanten Faktor, den sogenannten Schnittfaktor, unterscheiden.

Beachtet man dann noch, daß das System der ∞^1-Punkte einer jeden F-Funktion, welche der in Rede stehenden Gruppe angehört, in dem Punktsysteme $\eta_1, \cdots, \eta_m$ enthalten ist, und daß eine F-Funktion, als Funktion des Punktes z von T'' betrachtet, für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ längs a_ν die Größe $e^{-a_\nu 2\pi i}$, längs b_ν die Größe $e^{b_\nu 2\pi i}$, längs c_ν die Eins als Schnittfaktor besitzt, so erkennt man weiter, daß der aufgestellte Ausdruck auch jede der in Rede stehenden F-Funktionen enthält. Nun wird aber dieser Ausdruck, der für jeden Schnitt c die Eins als Schnittfaktor besitzt, nur dann für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ längs a_ν die Größe $e^{-a_\nu 2\pi i}$, längs b_ν die Größe $e^{b_\nu 2\pi i}$ als Schnittfaktor besitzen, wenn die Größen $g_1, \cdots, g_p$ sämtlich ganze Zahlen sind und außerdem noch für $\varrho = 1, 2, \cdots, p$ das Aggregat:

$$2\sum_{\mu=1}^{\mu=m} u_\varrho^{\varepsilon_\mu} - 2\sum_{\mu=1}^{\mu=m} u_\varrho^{\eta_\mu} - 2\sum_{\nu=1}^{\nu=p}(a_\nu + g_\nu)\, a_{\varrho\nu}$$

sich von $b_\varrho 2\pi i$ um ein ganzes, etwa mit $h_\varrho 2\pi i$ zu bezeichnendes, Vielfaches von $2\pi i$ unterscheidet, also die p Gleichungen:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=m} u_\varrho^{\varepsilon_\mu} = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} u_\varrho^{\eta_\mu} + \sum_{\nu=1}^{\nu=p}(a_\nu + g_\nu)\, a_{\varrho\nu} + (b_\varrho + h_\varrho)\pi i, \qquad \varrho = 1, 2, \cdots, p,$$

bestehen, oder, was dasselbe, wenn die Kongruenz (s. Seite 89):

$$(1'.) \qquad \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=m} u^{\varepsilon_\mu}\right) \equiv \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=m} u^{\eta_\mu} + \left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right|\right)$$

— bei der $\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=m} u^{\eta_\mu} + \left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right|\right)$ das System $\sum_{\mu=1}^{\mu=m} u_1^{\eta_\mu} + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} a_\nu a_{1\nu} + b_1\pi i \,|\cdots|\, \sum_{\mu=1}^{\mu=m} u_p^{\eta_\mu} + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} a_\nu a_{p\nu} + b_p\pi i$ vertreten soll — erfüllt ist. Daraus folgt dann schließlich, daß F-Funktionen, welche das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ oder auch nur einen Teil desselben als System der ∞^1-Punkte besitzen, dann, aber auch nur dann existieren, wenn sich die Kongruenz (1'.) durch ein Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ befriedigen läßt, und daß die allgemeinste zu einem solchen Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ gehörige Funktion $F(z)$ der genannten Art durch die Gleichung:

$$(2'.) \qquad F(z) = C\, \frac{\Theta\left|\begin{matrix} \varepsilon_1 \\ z \end{matrix}\right| \Theta\left|\begin{matrix} \varepsilon_2 \\ z \end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix} \varepsilon_m \\ z \end{matrix}\right|}{\Theta\left|\begin{matrix} \eta_1 \\ z \end{matrix}\right| \Theta\left|\begin{matrix} \eta_2 \\ z \end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix} \eta_m \\ z \end{matrix}\right|}\, e^{-2\sum_{\nu=1}^{\nu=p}(a_\nu + g_\nu)\, u_\nu^z},$$

bei der die g die durch die Kongruenz (1'.) als Faktoren der $a_{\varrho\nu}$ eindeutig bestimmten ganzen Zahlen sind und C eine willkürliche Konstante bedeutet, geliefert wird.

Hat ein der Kongruenz (1'.) genügendes Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ mit dem Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ keinen Punkt gemeinsam, so ist das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ das System der ∞^1-Punkte, das Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ das System der 0^1-Punkte der zugehörigen durch die Gleichung (2'.) bestimmten Funktion $F(z)$, und diese Funktion ist dann von der Ordnung m. Hat dagegen ein solches Punktsystem mit dem Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$

einen etwa $m - m$ Punkte enthaltenden Teil gemeinsam, so bilden, wie aus der Gleichung (2'.) folgt, die nach Entfernung dieses gemeinsamen Teiles noch übrigen $\bar{m}$ Punkte η das System der ∞^1-Punkte, die noch übrigen m Punkte ε das System der 0^1-Punkte der zugehörigen Funktion $F(z)$, und diese Funktion ist dann von der Ordnung $\bar{m}$.

Das Hauptresultat der in diesem Abschnitte bis jetzt durchgeführten Untersuchungen kann man nun in folgender Weise aussprechen:

„Zu einem beliebig in der Fläche T' angenommenen Punktsysteme $\eta_1, \cdots, \eta_m = \eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \cdots, \eta^{(2)}, \cdots, \eta^{(s)}, \cdots, \eta^{(s)}$, das den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ $(\sigma = 1, 2, \cdots, s)$ m_σ-mal enthalten möge, existieren zur Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right)$ gehörige F-Funktionen, welchen das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ oder auch nur ein Teil desselben als System der ∞^1-Punkte zukommt, dann, aber auch nur dann, wenn sich das System der p Gleichungen (1.) durch Größen $\mathfrak{L}$, welche nicht sämtlich den Wert Null besitzen, befriedigen läßt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn sich die Kongruenz (1'.) durch ein Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ befriedigen läßt.“

3.

Die Untersuchungen des Art. 1 haben ergeben, daß die Derivierten derjenigen allenthalben endlichen Funktionen $\bar{w}$, welche zu der zur angenommenen Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right)$ reziproken Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}\bar{A}\\\bar{B}\end{smallmatrix}\right)$ gehören, für die Theorie der zur Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right)$ gehörigen F-Funktionen von fundamentaler Bedeutung sind. Mit Rücksicht hierauf sollen zunächst die genannten Derivierten, die nach dem am Ende von Art. 7 des dritten Abschnittes Bemerkten zur Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}\bar{A}\\\bar{B}\end{smallmatrix}\right)$ gehörige F-Funktionen sind, einer eingehenden Betrachtung unterzogen werden.

Die allgemeinste zur Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}\bar{A}\\\bar{B}\end{smallmatrix}\right)$ gehörige Funktion $\bar{w}$ wird nach Art. 2 des dritten Abschnittes durch die Gleichung:

$$\bar{w}^z = c_0 + c_1 \bar{w}_1^z + c_2 \bar{w}_2^z + \cdots + c_p \bar{w}_p^z$$

geliefert, wenn man dabei unter $c_0, c_1, \cdots, c_p$ unbestimmte Konstanten versteht. Der durch $c_{\lambda_1} = c_{\lambda_2} = \cdots = c_{\lambda_\nu}$, $c_{\lambda_{\nu+1}} = 0$, $c_{\lambda_{\nu+2}} = 0$, $\cdots$, $c_{\lambda_p} = 0$ charakterisierte Grenzfall $\bar{w}^z = c_0$ ist im folgenden immer ausgeschlossen. Da die Funktion $\bar{w}^z$ sich infolge ihrer Stetigkeit für das Gebiet irgend eines Punktes η von T' durch die Gleichung:

$$\bar{w}^z = \bar{w}^\eta + \left(\frac{d\bar{w}}{dz_\eta}\right)_0 z_\eta + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2\bar{w}}{dz_\eta^2}\right)_0 z_\eta^2 + \cdots\cdot$$

darstellen läßt, so ergeben sich, wenn man in bezug auf die Lage des Punktes η, insoferne dieser Punkt ein von den Punkten ∞, α verschiedener Punkt η oder ein $(\iota-1)$-facher Windungspunkt ∞ oder ein $(\mu-1)$-facher Windungspunkt α sein kann, drei Fälle unterscheidet, für die Funktion $\overline{w}^z$ und ihre Derivierte die folgenden Darstellungen:

1.) für das Gebiet eines von den Punkten ∞, α verschiedenen Punktes η ist

$$\overline{w}^z = \overline{w}^\eta + \left(\frac{d\overline{w}}{dz}\right)_{z=\eta}(z-\eta) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2\overline{w}}{dz^2}\right)_{z=\eta}(z-\eta)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3\overline{w}}{dz^3}\right)_{z=\eta}(z-\eta)^3 + \cdots,$$

$$\frac{d\overline{w}}{dz} = \left(\frac{d\overline{w}}{dz}\right)_{z=\eta} + \frac{1}{1!}\left(\frac{d^2\overline{w}}{dz^2}\right)_{z=\eta}(z-\eta) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^3\overline{w}}{dz^3}\right)_{z=\eta}(z-\eta)^2 + \cdots,$$

2.) für das Gebiet eines $(\iota-1)$-fachen Windungspunktes ∞ ist

$$\overline{w}^z = \overline{w}^\infty + \left(\frac{d\overline{w}}{dz_\infty}\right)_0 \frac{1}{z^{\frac{1}{\iota}}} + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2\overline{w}}{dz_\infty^2}\right)_0 \frac{1}{z^{\frac{2}{\iota}}} + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3\overline{w}}{dz_\infty^3}\right)_0 \frac{1}{z^{\frac{3}{\iota}}} + \cdots,$$

$$\frac{d\overline{w}}{dz} = -\frac{1}{\iota}\left(\frac{d\overline{w}}{dz_\infty}\right)_0 \frac{1}{z^{\frac{\iota+1}{\iota}}} - \frac{1}{1!\,\iota}\left(\frac{d^2\overline{w}}{dz_\infty^2}\right)_0 \frac{1}{z^{\frac{\iota+2}{\iota}}} - \frac{1}{2!\,\iota}\left(\frac{d^3\overline{w}}{dz_\infty^3}\right)_0 \frac{1}{z^{\frac{\iota+3}{\iota}}} - \cdots,$$

3.) für das Gebiet eines $(\mu-1)$-fachen Windungspunktes α ist

$$\overline{w}^z = \overline{w}^\alpha + \left(\frac{d\overline{w}}{dz_\alpha}\right)_0 (z-\alpha)^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + \frac{1}{(\mu-1)!}\left(\frac{d^{\mu-1}\overline{w}}{dz_\alpha^{\mu-1}}\right)_0 (z-\alpha)^{\frac{\mu-1}{\mu}} + \frac{1}{\mu!}\left(\frac{d^\mu\overline{w}}{dz_\alpha^\mu}\right)_0 (z-\alpha)^{\frac{\mu}{\mu}} + \frac{1}{(\mu+1)!}\left(\frac{d^{\mu+1}\overline{w}}{dz_\alpha^{\mu+1}}\right)_0 (z-\alpha)^{\frac{\mu+1}{\mu}} + \cdots,$$

$$\frac{d\overline{w}}{dz} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{d\overline{w}}{dz_\alpha}\right)_0 \frac{1}{(z-\alpha)^{\frac{\mu-1}{\mu}}} + \cdots + \frac{1}{(\mu-2)!\,\mu}\left(\frac{d^{\mu-1}\overline{w}}{dz_\alpha^{\mu-1}}\right)_0 \frac{1}{(z-\alpha)^{\frac{1}{\mu}}} + \frac{1}{\mu!}\left(\frac{d^\mu\overline{w}}{dz_\alpha^\mu}\right)_0 + \frac{1}{\mu!\,\mu}\left(\frac{d^{\mu+1}\overline{w}}{dz_\alpha^{\mu+1}}\right)_0 (z-\alpha)^{\frac{1}{\mu}} + \cdots.$$

Diese Darstellungen lassen erkennen, daß die in T' einwertige Funktion:

$$\frac{d\overline{w}}{dz} = c_1\frac{d\overline{w}_1}{dz} + c_2\frac{d\overline{w}_2}{dz} + \cdots + c_p\frac{d\overline{w}_p}{dz},$$

welche infolge der vorher über die Konstanten c gemachten Festsetzung nicht allenthalben denselben Wert besitzen kann, nur für die im Endlichen gelegenen Windungspunkte $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ unendlich werden kann und zwar algebraisch unendlich, und daß sie speziell für den Punkt α_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots,r)$ höchstens von der Ordnung $\mu_\varrho-1$ unendlich werden kann. Beachtet man dann noch, daß nach Art. 3 des ersten Abschnittes die Beziehung $\sum\limits_{\varrho=1}^{\varrho=r}(\mu_\varrho-1) = n+q+2p-2$ besteht, so ergibt sich zunächst, daß $\frac{d\overline{w}}{dz}$ eine zur Charakteristik $\left(\frac{A}{B}\right)$ gehörige F-Funktion ist, deren Ordnung die Zahl $n+q+2p-2$ nicht übersteigt.

Ist die Funktion $\frac{d\overline{w}}{dz}$ von der Ordnung $n+q+2p-2$, besitzt sie also das den Punkt α_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots,r)$ $(\mu_\varrho-1)$-mal enthaltende Punktsystem $\alpha_1,\cdots,\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_r$ als System der ∞^1-Punkte, so kommen ihr auch $n+q+2p-2$ 0^1-Punkte zu. Unter diesen Punkten tritt, wie man auf Grund der unter 2.) für $\frac{d\overline{w}}{dz}$ aufgestellten Entwicklung erkennt, der Punkt $\infty_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots,q)$ mindestens $(\iota_\varkappa+1)$-mal auf, und es setzt sich daher das System der

$n+q+2p-2$ 0^1-Punkte der Funktion $\frac{d\overline{w}}{dz}$ aus dem den Punkt $\infty_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots,q)$ $(\iota_\varkappa+1)$-mal enthaltenden Systeme $\infty_1, \cdots, \infty_1, \cdots\cdot, \infty_q, \cdots, \infty_q$ von $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}(\iota_\varkappa+1)=n+q$ Punkten und einem Systeme $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{2p-2}$ von $2p-2$ Punkten zusammen.

Ist dagegen die Funktion $\frac{d\overline{w}}{dz}$ von der Ordnung $n+q+2p-2-t$, besitzt sie also nur einen, $n+q+2p-2-t$ Punkte umfassenden, Teil des den Punkt α_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots,r)$ $(\mu_\varrho-1)$-mal enthaltenden Punktsystems $\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \cdots\cdot, \alpha_r, \cdots, \alpha_r$ als System der ∞^1-Punkte, so setzt sich das, ebenfalls $n+q+2p-2-t$ Punkte enthaltende, System ihrer 0^1-Punkte aus dem den Punkt $\infty_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots,q)$ $(\iota_\varkappa+1)$-mal enthaltenden Punktsystem $\infty_1, \cdots, \infty_1, \cdots\cdot, \infty_q, \cdots, \infty_q$ und einem, mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{2p-2-t}$ zu bezeichnenden, Systeme von $2p-2-t$ Punkten zusammen. Im vorliegenden Falle ergänze man nun das Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{2p-2-t}$ dadurch zu einem System von $2p-2$ Punkten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{2p-2}$, daß man zu ihm dasjenige, t Punkte enthaltende, System, welches von dem oben aufgestellten System $\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \cdots\cdot, \alpha_r, \cdots, \alpha_r$ nach Wegnahme der $n+q+2p-2-t$ ∞^1-Punkte der Funktion $\frac{d\overline{w}}{dz}$ noch übrig bleibt, hinzunimmt.

In jedem der beiden soeben betrachteten Fälle soll nun das zur Funktion $\frac{d\overline{w}}{dz}$ definierte Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{2p-2}$, insoferne durch dasselbe die Funktion $\frac{d\overline{w}}{dz}$ bis auf einen von z freien Faktor bestimmt ist, das System der charakteristischen Punkte der Funktion $\frac{d\overline{w}}{dz}$ genannt werden. Wie die zu Anfang für $\frac{d\overline{w}}{dz}$ aufgestellten Entwicklungen zeigen, werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein Punkt η der Fläche T'' — einerlei ob dieser Punkt ein von den Punkten ∞, α verschiedener Punkt oder einer der Punkte ∞ oder endlich einer der Punkte α ist — in dem Systeme der charakteristischen Punkte einer Funktion $\frac{d\overline{w}}{dz}$ zum mindesten m-mal vorkommt, durch die Gleichungen:

$$\left(\frac{d\overline{w}}{dz_\eta}\right)_0=0, \quad \left(\frac{d^2\overline{w}}{dz_\eta^2}\right)_0=0, \quad \cdots, \quad \left(\frac{d^m\overline{w}}{dz_\eta^m}\right)_0=0$$

dargestellt.

Nach den vorstehenden Untersuchungen gehören die Funktionen $\frac{d\overline{w}}{dz}$ zur Gruppe derjenigen auf die Charakteristik $\left(\frac{\bar{A}}{B}\right)$ sich beziehenden F-Funktionen, welche das den Punkt α_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots,r)$ $(\mu_\varrho-1)$-mal enthaltende Punktsystem $\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \cdots\cdot, \alpha_r, \cdots, \alpha_r$ oder auch nur einen Teil desselben als System der ∞^1-Punkte besitzen, und zwar gehören sie speziell zu jener Untergruppe, die von denjenigen Funktionen der Gruppe gebildet wird, bei welchen das den Punkt $\infty_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots,q)$ $(\iota_\varkappa+1)$-mal enthaltende Punktsystem $\infty_1, \cdots, \infty_1, \cdots\cdot, \infty_q, \cdots, \infty_q$ als Bestandteil des Systems der 0^1-Punkte auftritt. Beachtet man dann noch, daß das mit irgend einer zur definierten Untergruppe gehörigen

Funktion $F(z)$ gebildete, über einen ganz in T' verlaufenden Weg erstreckte Integral $\int_{z'}^{z} F(z)\,dz$ eine in T' einwertige und stetige, zur Charakteristik $\left(\frac{\bar{A}}{\bar{B}}\right)$ gehörige Funktion W der komplexen Veränderlichen z und zwar eine Funktion $\bar{w}^z$ ist, so erkennt man schließlich, daß die soeben definierte Untergruppe außer den Funktionen $\frac{d\bar{w}}{dz}$ keine weiteren Funktionen mehr enthält.

Nachdem jetzt ermittelt ist, welche Stellung die Funktionen $\frac{d\bar{w}}{dz}$ unter den zur Charakteristik $\left(\frac{\bar{A}}{\bar{B}}\right)$ gehörigen F-Funktionen einnehmen, lassen sich die Systeme der charakteristischen Punkte der Funktionen $\frac{d\bar{w}}{dz}$ auch einheitlich definieren; man hat dazu nur die gegen Ende des Art. 2 angestellten Betrachtungen, speziell die Kongruenz (1'.), auf die Funktionen $\frac{d\bar{w}}{dz}$ zu beziehen. Es ergibt sich dann — wenn man noch für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ unter $\bar{a}_\nu$, $\bar{b}_\nu$ die im Rahmen der Bedingungen $-1 < \bar{a}_\nu \lesseqgtr 0$, $0 \leqq \bar{b}_\nu < 1$ durch die Gleichungen $\bar{A}_\nu = e^{-\bar{a}_\nu 2\pi i}$, $\bar{B}_\nu = e^{\bar{b}_\nu 2\pi i}$ bestimmten reellen Größen versteht —, daß die Gesamtheit der Systeme der charakteristischen Punkte, welche den auf die Charakteristik $\left(\frac{\bar{A}}{\bar{B}}\right)$ sich beziehenden Funktionen $\frac{d\bar{w}}{dz}$ zukommen, mit der Gesamtheit der Lösungssysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{2p-2}$ der Kongruenz:

$$\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} (\iota_\varkappa + 1)\, u^{\infty_\varkappa} + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=2p-2} u^{\varepsilon_\sigma}\right) \equiv \left(\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (\mu_\varrho - 1)\, u^{\alpha_\varrho} + \left|\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right|\right)$$

oder der mit ihr äquivalenten Kongruenz:

$$\left(\sum_{\sigma=1}^{\sigma=2p-2} u^{\varepsilon_\sigma}\right) \equiv \left(\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (\mu_\varrho - 1)\, u^{\alpha_\varrho} - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} (\iota_\varkappa + 1)\, u^{\infty_\varkappa} + \left|\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right|\right)$$

identisch ist.

Bilden zwei Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$; $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_{m'}'$ $(m+m'=2p-2)$ zusammen das System der charakteristischen Punkte einer Funktion $\frac{d\bar{w}}{dz}$, so soll jedes der beiden ein zu dem anderen gehöriges Restpunktsystem einer Funktion $\frac{d\bar{w}}{dz}$ genannt werden.

4.

Nach dem am Ende des Art. 2 ausgesprochenen Resultate existieren zu einem beliebig in T' angenommenen Punktsysteme $\eta_1, \cdots, \eta_m = \eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(s)}, \cdots, \eta^{(s)}$, das den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ $(\sigma=1,2,\cdots,s)$ m_σ-mal enthält, zur Charakteristik $\left(\frac{A}{B}\right)$ gehörige F-Funktionen, welchen das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ oder auch nur ein Teil desselben als System der ∞^1-Punkte zukommt, dann, aber auch nur dann, wenn sich das System der p Gleichungen:

$$
(\mathrm{G}_1.)\quad
\begin{cases}
\mathfrak{L}_{11}\left(\dfrac{d\bar w_1}{dz_1}\right)_0 + \cdots + \dfrac{1}{(m_1-1)!}\mathfrak{L}_{1m_1}\left(\dfrac{d^{m_1}\bar w_1}{dz_1^{m_1}}\right)_0 + \cdots\cdot + \mathfrak{L}_{s1}\left(\dfrac{d\bar w_1}{dz_s}\right)_0 + \cdots + \dfrac{1}{(m_s-1)!}\mathfrak{L}_{sm_s}\left(\dfrac{d^{m_s}\bar w_1}{dz_s^{m_s}}\right)_0 = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathfrak{L}_{11}\left(\dfrac{d\bar w_p}{dz_1}\right)_0 + \cdots + \dfrac{1}{(m_1-1)!}\mathfrak{L}_{1m_1}\left(\dfrac{d^{m_1}\bar w_p}{dz_1^{m_1}}\right)_0 + \cdots\cdot + \mathfrak{L}_{s1}\left(\dfrac{d\bar w_p}{dz_s}\right)_0 + \cdots + \dfrac{1}{(m_s-1)!}\mathfrak{L}_{sm_s}\left(\dfrac{d^{m_s}\bar w_p}{dz_s^{m_s}}\right)_0 = 0
\end{cases}
$$

— bei dem der einfacheren Schreibweise wegen für $\sigma = 1, 2, \cdots, s$ $z_{\eta^{(\sigma)}}$ durch z_σ ersetzt ist — durch Größen $\mathfrak{L}$, welche nicht sämtlich den Wert Null besitzen, befriedigen läßt. Dies ist nach dem in Art. 4 des vorhergehenden Abschnittes aufgestellten Hilfssatze dann, aber auch nur dann möglich, wenn der, mit $\mathfrak{R}_{\left|{A \atop B}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ zu bezeichnende, Rang der Matrix:

$$
\left\|\begin{matrix}
\left(\dfrac{d\bar w_1}{dz_1}\right)_0 \cdots \left(\dfrac{d^{m_1}\bar w_1}{dz_1^{m_1}}\right)_0 \cdots\cdot \left(\dfrac{d\bar w_1}{dz_s}\right)_0 \cdots \left(\dfrac{d^{m_s}\bar w_1}{dz_s^{m_s}}\right)_0\\
\cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot\\
\cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot\\
\left(\dfrac{d\bar w_p}{dz_1}\right)_0 \cdots \left(\dfrac{d^{m_1}\bar w_p}{dz_1^{m_1}}\right)_0 \cdots\cdot \left(\dfrac{d\bar w_p}{dz_s}\right)_0 \cdots \left(\dfrac{d^{m_s}\bar w_p}{dz_s^{m_s}}\right)_0
\end{matrix}\right\|
$$

— oder, wie im folgenden der Kürze wegen, in Übertragung des Begriffes „Rang“ von der Matrix auf das ihr zu Grunde liegende Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$, gesagt werden soll, der Rang des Punktsystems $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gegenüber der Charakteristik $\left({A \atop B}\right)$ — der weder über m noch, wegen der durch die Gleichung $\bar w_{\lambda_1} + \bar w_{\lambda_2} + \cdots + \bar w_{\lambda_\nu} = 0$ charakterisierten Linearabhängigkeit der Funktionen $\bar w_1, \cdots, \bar w_p$, über $p-1$ liegen kann, kleiner als m ist. Für $m = p, p+1, \cdots$ ist immer $\mathfrak{R}_{\left|{A \atop B}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m) < m$, wie auch das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ von Anfang an gewählt sein mag; für $m < p$ dagegen wird, wie die spätere eingehende Untersuchung zeigt, durch die Forderung, daß der Rang $\mathfrak{R}_{\left|{A \atop B}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ kleiner als m sei, zugleich eine Beziehung zwischen den Punkten des Punktsystems gefordert.

Die sämtlichen zu dem Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ etwa existierenden Funktionen $F(z)$ der in Rede stehenden Art werden nach Art. 1 durch die Gleichung:

$$F(z) = \mathfrak{L}_{11}\underset{1}{P}\left|{\eta^{(1)} \atop z}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{1m_1}\underset{m_1}{P}\left|{\eta^{(1)} \atop z}\right| + \cdots\cdot + \mathfrak{L}_{s1}\underset{1}{P}\left|{\eta^{(s)} \atop z}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{sm_s}\underset{m_s}{P}\left|{\eta^{(s)} \atop z}\right|$$

geliefert, wenn man darin an Stelle von $\mathfrak{L}_{11}, \cdots, \mathfrak{L}_{1m_1}, \cdots\cdot, \mathfrak{L}_{s1}, \cdots, \mathfrak{L}_{sm_s}$ ein jedes von $0, \cdots, 0, \cdots\cdot, 0, \cdots, 0$ verschiedene, das Gleichungensystem $(\mathrm{G}_1.)$ befriedigende Größensystem treten läßt. Irgend k dieser Funktionen $F(z)$:

$$
\begin{gathered}
F^{(1)}(z) = \mathfrak{L}_{11}^{(1)}\underset{1}{P}\left|{\eta^{(1)} \atop z}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{1m_1}^{(1)}\underset{m_1}{P}\left|{\eta^{(1)} \atop z}\right| + \cdots\cdot + \mathfrak{L}_{s1}^{(1)}\underset{1}{P}\left|{\eta^{(s)} \atop z}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{sm_s}^{(1)}\underset{m_s}{P}\left|{\eta^{(s)} \atop z}\right|,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
F^{(k)}(z) = \mathfrak{L}_{11}^{(k)}\underset{1}{P}\left|{\eta^{(1)} \atop z}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{1m_1}^{(k)}\underset{m_1}{P}\left|{\eta^{(1)} \atop z}\right| + \cdots\cdot + \mathfrak{L}_{s1}^{(k)}\underset{1}{P}\left|{\eta^{(s)} \atop z}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{sm}^{(k)}\underset{m_s}{P}\left|{\eta^{(s)} \atop z}\right|
\end{gathered}
$$

sollen linear unabhängig genannt werden, wenn der Ausdruck:

$$\lambda^{(1)} F^{(1)}(z) + \lambda^{(2)} F^{(2)}(z) + \cdots + \lambda^{(k)} F^{(k)}(z)$$

für kein von $0, \cdots, 0$ verschiedenes Konstantensystem $\lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(k)}$ in T' allenthalben den Wert Null besitzt. Existiert dagegen ein von $0, \cdots, 0$ verschiedenes Konstantensystem $\lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(k)}$, für das der soeben aufgestellte Ausdruck in T' allenthalben den Wert Null besitzt, sodaß also die Gleichung:

$$\lambda^{(1)} F^{(1)}(z) + \lambda^{(2)} F^{(2)}(z) + \cdots + \lambda^{(k)} F^{(k)}(z) = 0$$

besteht, so sollen die k Funktionen linear abhängig heißen. Aus diesen Definitionen folgt, daß die k Funktionen dann, aber auch nur dann linear unabhängig sind, wenn die k bei ihnen auftretenden Konstantensysteme $\mathfrak{L}_{11}^{(\varkappa)}, \cdots, \mathfrak{L}_{1m_1}^{(\varkappa)}, \cdots, \mathfrak{L}_{s1}^{(\varkappa)}, \cdots, \mathfrak{L}_{sm_s}^{(\varkappa)},$ $\varkappa = 1, 2, \cdots, k$, im Sinne der in Art. 4 des vorhergehenden Abschnittes gegebenen Definition linear unabhängig sind.

Da die Funktionen $\frac{d\overline{w}}{dz}$ nach den Untersuchungen des Art. 3 zur Gruppe derjenigen auf die Charakteristik $\left(\frac{\bar{A}}{\bar{B}}\right)$ sich beziehenden F-Funktionen gehören, bei denen an Stelle des allgemeinen Punktsystems $\eta_1, \cdots, \eta_m$ das spezielle den Punkt α_ϱ $(\varrho = 1, 2, \cdots, r)$ $(\mu_\varrho - 1)$-mal enthaltende Punktsystem $\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_r$ steht, so können die soeben aufgestellten Definitionen unmittelbar auf die Funktionen $\frac{d\overline{w}}{dz}$ übertragen werden. Aus diesen Definitionen folgt hier, daß die m mit irgend welchen Konstanten c gebildeten Funktionen $\frac{d\overline{w}}{dz}$:

$$\frac{d\overline{w}^{(1)}}{dz} = c_1^{(1)} \frac{d\overline{w}_1}{dz} + \cdots + c_p^{(1)} \frac{d\overline{w}_p}{dz},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\overline{w}^{(m)}}{dz} = c_1^{(m)} \frac{d\overline{w}_1}{dz} + \cdots + c_p^{(m)} \frac{d\overline{w}_p}{dz}$$

jedenfalls dann linear abhängig sind, wenn die m bei ihnen auftretenden Konstantensysteme $c_1^{(\mu)}, \cdots, c_p^{(\mu)},$ $\mu = 1, 2, \cdots, m$, linear abhängig sind.

Nach diesen Vorbereitungen soll jetzt das Gleichungensystem $(G_1.)$ unter der Voraussetzung diskutiert werden, daß der Rang $\mathfrak{R}_{\left|\frac{A}{B}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ des Punktsystems $\eta_1, \cdots, \eta_m$, der weder über $p-1$ noch über m liegen kann, kleiner als m ist, da nur dann, wie schon vorher bemerkt wurde, das Gleichungensystem $(G_1.)$ sich durch Größen $\mathfrak{L}$, die nicht sämtlich mit der Null zusammenfallen, befriedigen läßt. Dabei soll der Fall, wo $\mathfrak{R}_{\left|\frac{A}{B}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m) = p-1$ ist, von dem Falle, wo $\mathfrak{R}_{\left|\frac{A}{B}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m) < p-1$ ist, unterschieden werden.

Erster Fall: *Der Rang* $\mathfrak{R}_{\left|\substack{A\\B}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ *des Punktsystems* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *ist gleich* $p-1$.

Dieser erste Fall kann, da die gemachte Voraussetzung $\mathfrak{R}_{\left|\substack{A\\B}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m) < m$ hier in $p-1 < m$ übergeht, nur für $m = p, p+1, \cdots$ auftreten; er liegt, wie aus dem im folgenden unter III.) Gesagten hervorgeht, immer vor, wenn $m > 2p-2$ ist, also unter allen Umständen für $p = 1$.

In diesem ersten Falle ergibt sich nun durch Anwendung des in Art. 4 des vorhergehenden Abschnittes aufgestellten Hilfssatzes auf das Gleichungensystem $(\mathrm{G}_1.)$, daß die folgenden fünf Aussagen gleichwertig sind, insofern aus irgend einer von ihnen als Voraussetzung jede der vier anderen abgeleitet werden kann.

I.) *Der Rang* $\mathfrak{R}_{\left|\substack{A\\B}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ *des Punktsystems* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *ist gleich* $p-1$.

II.) *Das Gleichungensystem* $(\mathrm{G}_1.)$ *besitzt* $m-p+1$, *von* $0, \cdots, 0, \cdots\cdot, 0, \cdots, 0$ *verschiedene, linear unabhängige Lösungssysteme* $\mathfrak{L}_{11}^{(\varkappa)}, \cdots, \mathfrak{L}_{1m_1}^{(\varkappa)}, \cdots\cdot, \mathfrak{L}_{s1}^{(\varkappa)}, \cdots, \mathfrak{L}_{sm_s}^{(\varkappa)}$, $\varkappa = 1, 2, \cdots, m-p+1$, *und das allgemeinste Lösungssystem läßt sich aus ihnen mit Hilfe von* $m-p+1$ *unbestimmten Konstanten linear zusammensetzen; oder, was dasselbe, es gibt* $m-p+1$ *linear unabhängige zur Charakteristik* $\binom{A}{B}$ *gehörige Funktionen* $F(z)$:

$$F^{(\varkappa)}(z) = \mathfrak{L}_{11}^{(\varkappa)} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(1)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{1m_1}^{(\varkappa)} \underset{m_1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(1)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots\cdot + \mathfrak{L}_{s1}^{(\varkappa)} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(s)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{sm_s}^{(\varkappa)} \underset{m_s}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(s)}\\ z\end{matrix}\right|, \qquad \varkappa = 1, 2, \cdots, m-p+1,$$

welchen das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *oder auch nur ein Teil desselben als System der* ∞^1-*Punkte zukommt, und die allgemeinste derartige Funktion* $F(z)$ *läßt sich aus ihnen mit Hilfe von* $m-p+1$ *unbestimmten Konstanten* $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(m-p+1)}$ *linear zusammensetzen in der Form:*

$$F(z) = \lambda^{(1)} F^{(1)}(z) + \lambda^{(2)} F^{(2)}(z) + \cdots + \lambda^{(m-p+1)} F^{(m-p+1)}(z).$$

III.) *Das Gleichungensystem:*

$$(\mathrm{G}_2.)\qquad \begin{array}{c} c_1\left(\dfrac{d\overline{w}_1}{dz_1}\right)_0 + c_2\left(\dfrac{d\overline{w}_2}{dz_1}\right)_0 + \cdots + c_p\left(\dfrac{d\overline{w}_p}{dz_1}\right)_0 = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ c_1\left(\dfrac{d^{m_1}\overline{w}_1}{dz_1^{m_1}}\right)_0 + c_2\left(\dfrac{d^{m_1}\overline{w}_2}{dz_1^{m_1}}\right)_0 + \cdots + c_p\left(\dfrac{d^{m_1}\overline{w}_p}{dz_1^{m_1}}\right)_0 = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ c_1\left(\dfrac{d\overline{w}_1}{dz_s}\right)_0 + c_2\left(\dfrac{d\overline{w}_2}{dz_s}\right)_0 + \cdots + c_p\left(\dfrac{d\overline{w}_p}{dz_s}\right)_0 = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ c_1\left(\dfrac{d^{m_s}\overline{w}_1}{dz_s^{m_s}}\right)_0 + c_2\left(\dfrac{d^{m_s}\overline{w}_2}{dz_s^{m_s}}\right)_0 + \cdots + c_p\left(\dfrac{d^{m_s}\overline{w}_p}{dz_s^{m_s}}\right)_0 = 0 \end{array}$$

kann nur durch $c_{\lambda_1} = \cdots = c_{\lambda_\mathfrak{p}}$, $c_{\lambda_{\mathfrak{p}+1}} = 0, \cdots, c_{\lambda_p} = 0$ *befriedigt werden, oder, was dasselbe,* *es gibt keine zur Charakteristik* $\binom{\bar A}{\bar B}$ *gehörige Funktion* $\frac{d\bar w}{dz}$, *bei der das Punktsystem* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *in dem Systeme der charakteristischen Punkte enthalten ist.*

IV.) *Aus den Gleichungen* (G_1.) *lassen sich* $p-1$ *herausgreifen, die voneinander unabhängig sind, und die eine dann noch übrige Gleichung ist eine Folge derselben.*

V.) *Aus den Gleichungen* (G_2.) *lassen sich* $p-1$ *herausgreifen, die voneinander unabhängig sind, und jede der* $m-p+1$ *übrigen Gleichungen ist eine Folge derselben.*

Die allgemeinste zu dem Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörige, auf die Charakteristik $\binom{A}{B}$ sich beziehende Funktion $F(z)$ enthält nach II.) $m-p+1$ wesentliche willkürliche Konstanten linear homogen. In Übereinstimmung hiermit folgt aus IV.), daß sich von den m Größen $\mathfrak{L}$ $m-p+1$ angeben lassen, die von Anfang an willkürlich gewählt werden können und durch die dann die $p-1$ übrigen Größen $\mathfrak{L}$ eindeutig bestimmt sind.

Zweiter Fall: *Der Rang* $\mathfrak{R}_{\left|\substack{A\\B}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ *des Punktsystems* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *ist kleiner als* $p-1$.

Dieser zweite Fall kann, wie aus dem im folgenden unter III.) Gesagten hervorgeht, nur dann auftreten, wenn $m \gtreqless 2p-2$ ist, also unter keinen Umständen für $p=1$; er liegt für $p>1$, der gemachten Voraussetzung $\mathfrak{R}_{\left|\substack{A\\B}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m) < m$ zufolge, immer vor, wenn $m<p$ ist.

In diesem zweiten Falle ergibt sich nun durch Anwendung des in Art. 4 des vorhergehenden Abschnittes aufgestellten Hilfssatzes auf das Gleichungensystem (G_1.), daß die folgenden fünf Aussagen gleichwertig sind, insofern aus irgend einer von ihnen als Voraussetzung jede der vier anderen abgeleitet werden kann.

I.) *Der Rang* $\mathfrak{R}_{\left|\substack{A\\B}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ *des Punktsystems* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *ist gleich* $\mathfrak{r}$.

II.) *Das Gleichungensystem* (G_1.) *besitzt* $m-\mathfrak{r}$, *von* $0, \cdots, 0, \cdots, 0, \cdots, 0$ *verschiedene, linear unabhängige Lösungssysteme* $\mathfrak{L}_{11}^{(\varkappa)}, \cdots, \mathfrak{L}_{1m_1}^{(\varkappa)}, \cdots, \mathfrak{L}_{s1}^{(\varkappa)}, \cdots, \mathfrak{L}_{sm_s}^{(\varkappa)}$, $\varkappa=1,2,\cdots,m-\mathfrak{r}$, *und das allgemeinste Lösungssystem läßt sich aus ihnen mit Hilfe von* $m-\mathfrak{r}$ *unbestimmten Konstanten linear zusammensetzen; oder, was dasselbe, es gibt* $m-\mathfrak{r}$ *linear unabhängige zur Charakteristik* $\binom{A}{B}$ *gehörige Funktionen* $F(z)$:

$$F^{(\varkappa)}(z) = \mathfrak{L}_{11}^{(\varkappa)} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(1)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{1m_1}^{(\varkappa)} \underset{m_1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(1)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{s1}^{(\varkappa)} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(s)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{sm_s}^{(\varkappa)} \underset{m_s}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(s)}\\ z\end{matrix}\right|, \qquad \varkappa=1,2,\cdots,m-\mathfrak{r},$$

welchen das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *oder auch nur ein Teil desselben als System der* ∞^1-*Punkte zukommt, und die allgemeinste derartige Funktion* $F(z)$ *läßt sich aus ihnen mit Hilfe von* $m-\mathfrak{r}$ *unbestimmten Konstanten* $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(m-\mathfrak{r})}$ *linear zusammensetzen in der Form:*

$$F(z) = \lambda^{(1)}F^{(1)}(z) + \lambda^{(2)}F^{(2)}(z) + \cdots + \lambda^{(m-\mathfrak{r})}F^{(m-\mathfrak{r})}(z).$$

III.) *Das Gleichungensystem* (G_2.) *besitzt außer dem Lösungssysteme* $c_{\lambda_1} = c_{\lambda_2} = \cdots = c_{\lambda_\nu} = 1$, $c_{\lambda_{\nu+1}} = 0, \cdots, c_{\lambda_p} = 0$ $p-1-\mathfrak{r}$, *von* $0, \cdots, 0$ *verschiedene Lösungssysteme* $c_1^{(\tau)}, \cdots, c_p^{(\tau)}$, $\tau = 1, 2, \cdots, p-1-\mathfrak{r}$, *die zusammen mit ihm eine Gesamtheit von* $p-\mathfrak{r}$ *linear unabhängigen Lösungssystemen bilden, und das allgemeinste Lösungssystem läßt sich aus diesen mit Hilfe von* $p-\mathfrak{r}$ *unbestimmten Konstanten linear zusammensetzen; oder, was dasselbe, es gibt* $p-1-\mathfrak{r}$ *linear unabhängige zur Charakteristik* $\left(\begin{smallmatrix}\bar{A}\\ \bar{B}\end{smallmatrix}\right)$ *gehörige Funktionen* $\frac{d\bar{w}}{dz}$:

$$\frac{d\bar{w}^{(\tau)}}{dz} = c_1^{(\tau)}\frac{d\bar{w}_1}{dz} + c_2^{(\tau)}\frac{d\bar{w}_2}{dz} + \cdots + c_p^{(\tau)}\frac{d\bar{w}_p}{dz}, \qquad \tau = 1, 2, \cdots, p-1-\mathfrak{r},$$

bei welchen das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *in dem Systeme der charakteristischen Punkte enthalten ist, und die allgemeinste derartige Funktion* $\frac{d\bar{w}}{dz}$ *läßt sich aus ihnen mit Hilfe von* $p-1-\mathfrak{r}$ *unbestimmten Konstanten* $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(p-1-\mathfrak{r})}$ *linear zusammensetzen in der Form:*

$$\frac{d\bar{w}}{dz} = \lambda^{(1)}\frac{d\bar{w}^{(1)}}{dz} + \lambda^{(2)}\frac{d\bar{w}^{(2)}}{dz} + \cdots + \lambda^{(p-1-\mathfrak{r})}\frac{d\bar{w}^{(p-1-\mathfrak{r})}}{dz}.$$

IV.) *Aus den Gleichungen* (G_1.) *lassen sich* $\mathfrak{r}$ *herausgreifen, die voneinander unabhängig sind, und jede der* $p-\mathfrak{r}$ *übrigen Gleichungen ist eine Folge derselben.*

V.) *Aus den Gleichungen* (G_2.) *lassen sich* $\mathfrak{r}$ *herausgreifen, die voneinander unabhängig sind, und jede der* $m-\mathfrak{r}$ *übrigen Gleichungen ist eine Folge derselben.*

Die allgemeinste zu dem Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörige, auf die Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}A\\ B\end{smallmatrix}\right)$ sich beziehende Funktion $F(z)$ enthält nach II.) $m-\mathfrak{r}$ wesentliche willkürliche Konstanten linear homogen. In Übereinstimmung hiermit folgt aus IV.), daß sich von den m Größen $\mathfrak{L}$ $m-\mathfrak{r}$ angeben lassen, die von Anfang an willkürlich gewählt werden können und durch die dann die $\mathfrak{r}$ übrigen eindeutig bestimmt sind.

Setzt man in den letzten fünf, unter der Voraussetzung $\mathfrak{r} < p-1$ gemachten, Aussagen $\mathfrak{r} = p-1$, so gelangt man bei richtiger Interpretation wieder zu den fünf auf den ersten Fall sich beziehenden Aussagen.

5.

Von besonderem Interesse sind diejenigen zur Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}A\\ B\end{smallmatrix}\right)$ gehörigen F-Funktionen, welche nur für einen einzigen Punkt η der Fläche T' unendlich werden, also das den Punkt η m-mal enthaltende Punktsystem $\overset{1}{\eta}, \overset{2}{\eta}, \cdots, \overset{m}{\eta}$ oder auch nur einen Teil desselben als System der ∞^1-Punkte besitzen. Nach den Untersuchungen des vorhergehenden Artikels existieren Funktionen $F(z)$ von dieser Art dann, aber auch nur dann, wenn der Rang $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}A\\ B\end{smallmatrix}\right|}(\overset{1}{\eta}, \cdots, \overset{m}{\eta})$ des aufgestellten Punktsystems eine unter m

liegende Zahl $\mathfrak{r}$ ist, und zwar gibt es dann immer $m-\mathfrak{r}$ linear unabhängige Funktionen $F(z)$:

$$F^{(\varkappa)}(z) = \mathfrak{L}_1^{(\varkappa)} \underset{1}{P}\left|{\eta \atop z}\right| + \mathfrak{L}_2^{(\varkappa)} \underset{2}{P}\left|{\eta \atop z}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_m^{(\varkappa)} \underset{m}{P}\left|{\eta \atop z}\right|, \qquad \varkappa = 1, 2, \cdots, m-\mathfrak{r}$$

welchen das Punktsystem $\overset{1}{\eta}, \overset{2}{\eta}, \cdots, \overset{m}{\eta}$ oder auch nur ein Teil desselben als System der ∞^1-Punkte zukommt, und die allgemeinste derartige Funktion $F(z)$ läßt sich aus ihnen mit Hilfe von $m-\mathfrak{r}$ unbestimmten Konstanten $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(m-\mathfrak{r})}$ linear zusammensetzen in der Form:

$$F(z) = \lambda^{(1)} F^{(1)}(z) + \lambda^{(2)} F^{(2)}(z) + \cdots + \lambda^{(m-\mathfrak{r})} F^{(m-\mathfrak{r})}(z).$$

Aus dem soeben aufgestellten Systeme der $m-\mathfrak{r}$ linear unabhängigen Funktionen $F^{(1)}(z)$, $\cdots$, $F^{(m-\mathfrak{r})}(z)$ erhält man wieder ein System von $m-\mathfrak{r}$ linear unabhängigen Funktionen $F(z)$ der in Rede stehenden Art, wenn man darin, unter μ, ν irgend zwei Zahlen aus der Reihe $1, 2, \cdots, m-\mathfrak{r}$, unter c eine beliebige Konstante verstehend, $F^{(\mu)}(z)$ durch $F^{(\mu)}(z) + cF^{(\nu)}(z)$ ersetzt, und man kann dann für den Fall, daß die Funktionen $F^{(\mu)}(z)$, $F^{(\nu)}(z)$ dieselbe Ordnung $\overline{m} \lesseqgtr m$ haben — also die Größen $\mathfrak{L}_{\overline{m}}^{(\mu)}$, $\mathfrak{L}_{\overline{m}}^{(\nu)}$ von Null verschieden sind, die Größen $\mathfrak{L}_{\overline{m}+1}^{(\mu)}, \cdots, \mathfrak{L}_m^{(\mu)}$; $\mathfrak{L}_{\overline{m}+1}^{(\nu)}, \cdots, \mathfrak{L}_m^{(\nu)}$ dagegen den Wert Null besitzen — die Ordnung von $F^{(\mu)}(z) + cF^{(\nu)}(z)$, indem man c durch die Gleichung $\mathfrak{L}_{\overline{m}}^{(\mu)} + c\,\mathfrak{L}_{\overline{m}}^{(\nu)} = 0$ bestimmt, kleiner als $\overline{m}$ machen. Von dem ursprünglichen Systeme $F^{(1)}(z), \cdots, F^{(m-\mathfrak{r})}(z)$ ausgehend kann man nun durch wiederholte Anwendung dieses Reduktionsverfahrens, indem man zunächst bei den Funktionen von der höchsten Ordnung beginnt, zu einem Systeme $\widetilde{F}^{(1)}(z), \cdots$, $\widetilde{F}^{(m-\mathfrak{r})}(z)$ von $m-\mathfrak{r}$ linear unabhängigen Funktionen $F(z)$ der in Rede stehenden Art gelangen, bei dem keine zwei Funktionen die gleiche Ordnung besitzen. Haben aber die so gewonnenen Funktionen $\widetilde{F}$ die — jedenfalls der Reihe $1, 2, \cdots, m$ angehörigen — Ordnungszahlen $\widetilde{m}_1, \cdots, \widetilde{m}_{m-\mathfrak{r}}$ beziehungsweise, so muß auch die Ordnungszahl $\overline{m}$ irgend einer Funktion $F(z)$ der in Rede stehenden Art, da ja jede solche Funktion sich aus den Funktionen $\widetilde{F}$ mit Hilfe von $m-\mathfrak{r}$ passend gewählten Konstanten $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(m-\mathfrak{r})}$ linear zusammensetzen läßt in der Form:

$$F(z) = \lambda^{(1)} \widetilde{F}^{(1)}(z) + \lambda^{(2)} \widetilde{F}^{(2)}(z) + \cdots + \lambda^{(m-\mathfrak{r})} \widetilde{F}^{(m-\mathfrak{r})}(z),$$

sich mit einer der Zahlen $\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, \cdots, \widetilde{m}_{m-\mathfrak{r}}$ decken, oder, was dasselbe, es gibt unter den Zahlen $1, 2, \cdots, m$ gerade $\mathfrak{r} = \mathfrak{N}_{\left|{A \atop B}\right|}(\overset{1}{\eta}, \cdots, \overset{m}{\eta})$ Zahlen, die nicht als Ordnungszahlen bei den Funktionen $F(z)$ der in Rede stehenden Art auftreten können.

Eine positive ganze Zahl n soll gegenüber der Charakteristik $\binom{A}{B}$ eine zum Punkte η der Fläche T'' gehörige Lückenzahl genannt werden, wenn unter den nur im Punkte η unendlich werdenden zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen F-Funktionen keine von der Ordnung n sich befinden, also keine, die im Punkte η ∞^n wird. Eine Zahl n ist nur dann gegenüber der Charakteristik $\binom{A}{B}$ eine zum Punkte η gehörige Lückenzahl, wenn die Differenz $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right|}(\overset{1}{\eta}, \cdots, \overset{n}{\eta}) - \mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right|}(\overset{1}{\eta}, \cdots, \overset{n-1}{\eta})$, die der Definition des Begriffes „Rang" zufolge nur den Wert 1 oder den Wert 0 haben kann, den Wert 1 besitzt, da nach dem soeben Bewiesenen $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right|}(\overset{1}{\eta}, \cdots, \overset{\mu}{\eta})$ die Anzahl der in der Reihe $1, 2, \cdots, \mu$ vorkommenden, zum Punkte η gehörigen Lückenzahlen ist. Beachtet man nun, daß $p-1$ der größte Wert ist, den die mit wachsendem μ niemals abnehmende Größe $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right|}(\overset{1}{\eta}, \cdots, \overset{\mu}{\eta})$ annehmen kann, und daß diese Größe, nach dem im vorhergehenden Artikel beim ersten Falle Bemerkten, jedenfalls für $\mu = 2p-1$ den Wert $p-1$ besitzt, so erkennt man schließlich, daß es im ganzen gegenüber der Charakteristik $\binom{A}{B}$ $p-1$ zum Punkte η gehörige Lückenzahlen gibt, daß diese sämtlich in der Reihe $1, 2, \cdots, 2p-1$ enthalten sind, und daß von ihnen in der Reihe $1, 2, \cdots, \mu$, ${\scriptstyle \mu < 2p-1}$, gerade $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right|}(\overset{1}{\eta}, \cdots, \overset{\mu}{\eta})$ vorkommen.

6.

Die in Art. 4 für die Diskussion des Gleichungensystems (G_1.) gemachte Voraussetzung, daß der Rang $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ des Punktsystems $\eta_1, \cdots, \eta_m$ eine unter m liegende Zahl $\mathfrak{r}$ ist, deckt sich nach dem am Ende des Art. 2 ausgesprochenen Resultate mit der Forderung, daß die Kongruenz:

$$\text{(C.)} \qquad \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=m} u^{\varepsilon_\mu}\right) \equiv \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=m} u^{\eta_\mu} + \left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right|\right)$$

sich durch ein Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ befriedigen läßt.

Um die sämtlichen der Kongruenz (C.) genügenden Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ zu erhalten, hat man nur für jede zu dem Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ im Sinne des Art. 1 gehörige Funktion $F(z)$ das System der 0^1-Punkte aufzustellen und zu ihm dasjenige Punktsystem hinzuzufügen, welches von dem Punktsysteme $\eta_1, \cdots, \eta_m$ nach Wegnahme des Systems der ∞^1-Punkte der Funktion $F(z)$ noch übrig bleibt. Man erhält auf diese Weise die sämtlichen in Rede stehenden Punktsysteme, und auch jedes nur einmal, wenn man bei der Durchführung des angegebenen Verfahrens jede Funktion $F(z)$ ausschließt, die sich von einer schon in Betracht gezogenen Funktion $F(z)$ nur um einen konstanten Faktor unterscheidet. Ist speziell $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m) = m-1$, so unterscheiden sich, wie aus dem in Art. 4 unter I.) und II.) Gesagten zu ersehen ist, je zwei zu dem Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörige Funktionen $F(z)$ nur um einen konstanten Faktor, und es gibt daher in diesem Falle nur ein einziges der Kongruenz (C.) genügendes Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$. Für die folgenden Untersuchungen soll dieser spezielle Fall ausgeschlossen sein, also vorausgesetzt werden, daß der Rang $\mathfrak{R}_{\left|\frac{A}{B}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ eine unter $m-1$ liegende Zahl $\mathfrak{r}$ ist.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein Punkt ε der Fläche T'' — einerlei ob dieser Punkt in dem Punktsysteme $\eta_1, \cdots, \eta_m$ enthalten ist oder nicht — in einem der Kongruenz (C.) genügenden Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ zum mindesten ν-mal vorkommt, werden durch ein System von ν homogenen linearen Gleichungen zwischen den in der allgemeinsten Funktion $F(z) = \lambda^{(1)} F^{(1)}(z) + \lambda^{(2)} F^{(2)}(z) + \cdots + \lambda^{(m-\mathfrak{r})} F^{(m-\mathfrak{r})}(z)$ auftretenden $m-\mathfrak{r}$ Konstanten $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(m-\mathfrak{r})}$ dargestellt. Dementsprechend kann man für die Bildung eines der Kongruenz (C.) genügenden Punktsystems $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ die $m-\mathfrak{r}-1$ Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}-1}$ beliebig wählen; denn diese Wahl zieht nach dem soeben Bemerkten ein System von nur $m-\mathfrak{r}-1$ homogenen linearen Gleichungen zwischen den $m-\mathfrak{r}$ Konstanten $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(m-\mathfrak{r})}$ nach sich. Die $\mathfrak{r}+1$ noch fehlenden, das gewählte System $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}-1}$ zu einem der Kongruenz (C.) genügenden Systeme ergänzenden Punkte $\varepsilon_{m-\mathfrak{r}}, \cdots, \varepsilon_m$ werden aber nur dann eindeutig bestimmt sein, wenn durch das erwähnte System von $m-\mathfrak{r}-1$ Gleichungen die $m-\mathfrak{r}$ Größen $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(m-\mathfrak{r})}$ bis auf einen allen gemeinsamen Faktor bestimmt sind, oder, was dasselbe, wenn die Matrix der $(m-\mathfrak{r}-1)(m-\mathfrak{r})$ in diesen Gleichungen als Koeffizienten der λ auftretenden Größen den Rang $m-\mathfrak{r}-1$ besitzt.

Es soll jetzt bewiesen werden, daß durch die Wahl der Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}-1}$ die $\mathfrak{r}+1$ noch fehlenden Punkte $\varepsilon_{m-\mathfrak{r}}, \cdots, \varepsilon_m$ im allgemeinen eindeutig bestimmt sind. Zu dem Ende grenze man in der Fläche T'' $m-\mathfrak{r}-1$ keinen der Punkte $\eta_1, \cdots, \eta_m$ enthaltende Bereiche $B_1, \cdots, B_{m-\mathfrak{r}-1}$ ab und bilde mit Hilfe der $m-\mathfrak{r}-1$ schon benutzten linear unabhängigen Funktionen $F^{(1)}(z), \cdots, F^{(m-\mathfrak{r}-1)}(z)$ die Determinante:

$$\begin{vmatrix} F^{(1)}(\varepsilon_1) & \cdots & F^{(m-\mathfrak{r}-1)}(\varepsilon_1) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ F^{(1)}(\varepsilon_{m-\mathfrak{r}-1}) & \cdots & F^{(m-\mathfrak{r}-1)}(\varepsilon_{m-\mathfrak{r}-1}) \end{vmatrix}.$$

Durch dieselbe Schlußweise, die in Art. 7 des vorhergehenden Abschnittes an der entsprechenden Stelle angewendet wurde, erkennt man dann zunächst, daß die aufgestellte Determinante nicht für je $m-\mathfrak{r}-1$ den Bereichen $B_1, \cdots, B_{m-\mathfrak{r}-1}$ beziehungsweise angehörige Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}-1}$, wie klein diese Bereiche auch sein mögen, den Wert Null besitzen kann. Wählt man jetzt $m-\mathfrak{r}-1$ den Bereichen $B_1, \cdots, B_{m-\mathfrak{r}-1}$ beziehungsweise angehörige Punkte $\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{m-\mathfrak{r}-1}$ von der Art, daß die aufgestellte Determinante nicht verschwindet, wenn man gleichzeitig $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}-1} = \bar{\varepsilon}_{m-\mathfrak{r}-1}$ setzt, so lassen sich, da dieselbe, als Funktion der $m-\mathfrak{r}-1$ Veränderlichen $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}-1}$ betrachtet, für $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}-1} = \bar{\varepsilon}_{m-\mathfrak{r}-1}$ stetig ist, in T' $m-\mathfrak{r}-1$ diese Punkte beziehungsweise enthaltende Gebiete $G_1, \cdots, G_{m-\mathfrak{r}-1}$ von der Art abgrenzen, daß die Determinante für je $m-\mathfrak{r}-1$ diesen Gebieten beziehungsweise angehörige Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}-1}$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Beachtet man dann noch, daß durch die auf irgend ein solches Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}-1}$ bezogenen $m-\mathfrak{r}-1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda^{(1)} F^{(1)}(\varepsilon_1) \qquad + \lambda^{(2)} F^{(2)}(\varepsilon_1) \qquad + \cdots + \lambda^{(m-\mathfrak{r})} F^{(m-\mathfrak{r})}(\varepsilon_1), \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
0 &= \lambda^{(1)} F^{(1)}(\varepsilon_{m-\mathfrak{r}-1}) + \lambda^{(2)} F^{(2)}(\varepsilon_{m-\mathfrak{r}-1}) + \cdots + \lambda^{(m-\mathfrak{r})} F^{(m-\mathfrak{r})}(\varepsilon_{m-\mathfrak{r}-1})
\end{aligned}$$

die Größen $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(m-\mathfrak{r})}$ bis auf einen allen gemeinsamen Faktor bestimmt sind, so erkennt man die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung, daß durch die Wahl der Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}-1}$ die $\mathfrak{r}+1$ noch fehlenden, das angenommene System $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m-\mathfrak{r}-1}$ zu einem der Kongruenz (C.) genügenden Systeme ergänzenden Punkte $\varepsilon_{m-\mathfrak{r}}, \cdots, \varepsilon_m$ im allgemeinen eindeutig bestimmt sind.

Nimmt man jetzt zu dem Resultate der vorstehenden, unter der Voraussetzung $\mathfrak{r} < m-1$ durchgeführten Untersuchungen das schon vorher für den Fall $\mathfrak{r} = m-1$ erhaltene Resultat hinzu, so erkennt man, daß die beiden Aussagen:

a.) *Das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ besitzt als Rang $\mathfrak{R}_{\left|\substack{A\\B}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ die unter m liegende Zahl $\mathfrak{r}$;*

b.) *Die auf das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ bezogene Kongruenz (C.) läßt sich durch ein Punktsystem befriedigen; für die Bildung eines derartigen Punktsystems können $m-\mathfrak{r}-1$ Punkte beliebig gewählt werden und es sind durch die Wahl von $m-\mathfrak{r}-1$ Punkten die $\mathfrak{r}+1$ noch fehlenden Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt;*

gleichwertig sind, insoferne nicht nur, wie schon bewiesen, aus der ersten als Voraussetzung die zweite folgt, sondern auch umgekehrt aus dieser jene. Denn, besäße das unter b.) charakterisierte Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ eine von $\mathfrak{r}$ verschiedene, wegen der Lösbarkeit der Kongruenz (C.) jedenfalls unter m liegende, Zahl $\bar{\mathfrak{r}}$ als Rang, so könnten, im Widerspruche mit dem über das Punktsystem Vorausgesetzten, für die Bildung eines der Kongruenz (C.) genügenden Punktsystems $m-\bar{\mathfrak{r}}-1$, die $\bar{\mathfrak{r}}+1$ noch fehlenden Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmende Punkte beliebig gewählt werden.

Ist der Rang $\mathfrak{R}_{\left|\substack{A\\B}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ eine unter m liegende Zahl $\mathfrak{r}$, so existiert mindestens ein Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$, welches der auf das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ bezogenen Kongruenz (C.) genügt. Jedes weitere dieser Kongruenz etwa noch genügende Punktsystem $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_m'$ ist dann auf Grund der im vorhergehenden Abschnitte zu Anfang des Art. 7 gegebenen Definition ein mit $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ äquivalentes Punktsystem wie umgekehrt, sodaß also die Gesamtheit der die Kongruenz (C.) befriedigenden Punktsysteme — auch wenn diese Gesamtheit für $\mathfrak{r} = m - 1$ nur aus dem einzigen Systeme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ besteht — mit der Gesamtheit der mit $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ äquivalenten Punktsysteme identisch ist. Nach dem am Schlusse des genannten Art. 7 Bewiesenen besitzen daher die der Kongruenz (C.) genügenden Punktsysteme sämtlich den gleichen, mit $\mathfrak{r}'$ zu bezeichnenden, Rang $\Re_{\left|{1 \atop 1}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m)$. Zur Bestimmung dieser Rangzahl $\mathfrak{r}'$ hat man nur zu beachten, daß nach dem vorher ausgesprochenen Resultate für die Bildung eines der Kongruenz (C.) genügenden Punktsystems $m - \mathfrak{r} - 1$ Punkte beliebig gewählt werden können und daß durch die Wahl von $m - \mathfrak{r} - 1$ Punkten die $\mathfrak{r} + 1$ noch fehlenden im allgemeinen eindeutig bestimmt sind. Es ergibt sich dann aus der im genannten Art. 7 bewiesenen Gleichwertigkeit der ebendort gemachten Aussagen a.) und b.), daß jedenfalls für $\mathfrak{r} < m - 1$ die Gleichung $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} + 1$ besteht. Diese Gleichung gilt aber auch noch für $\mathfrak{r} = m - 1$, da sie dann, der Nichtersetzbarkeit des Punktsystems $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ entsprechend, für $\mathfrak{r}'$ den Wert m liefert. Es besteht also für je zwei durch die Kongruenz (C.) verknüpfte Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$; $\eta_1, \cdots, \eta_m$ die Beziehung:

$$\Re_{\left|{1 \atop 1}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m) = \Re_{\left|{A \atop B}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m) + 1.$$

7.

Mit Rücksicht auf die Ausnahmestellung, welche die in Art. 4 betrachteten zum zweiten Falle gehörigen Punktsysteme, nach dem dort unter III.) Gesagten, gegenüber den zum ersten Falle gehörigen Punktsystemen einnehmen, sollen in diesem Artikel die zum zweiten Falle gehörigen Punktsysteme noch einer besonderen Betrachtung unterzogen werden.

Zu dem Ende nehme man an, daß das den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ $(\sigma = 1, 2, \cdots, s)$ m_σ-mal enthaltende Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m = \eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(s)}, \cdots, \eta^{(s)}$ zum zweiten Falle gehöre, oder, was dasselbe, daß sein Rang $\Re_{\left|{A \atop B}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ eine unter m und $p - 1$ liegende Zahl $\mathfrak{r}$ sei. Die Zahl m kann dann nach dem beim zweiten Falle Bemerkten nicht größer als $2p - 2$ sein.

Ist zunächst $m = 2p - 2$, so muß $p - 1 - \mathfrak{r} = 1$ sein, da sonst nach dem beim zweiten Falle unter III.) Gesagten zum mindesten zwei linear unabhängige Funktionen $\frac{d\overline{w}}{dz}$ existieren würden, denen das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_{2p-2}$ als System der charakteristischen Punkte zukäme, während doch nach dem in Art. 3 Bemerkten zwei Funktionen $\frac{d\overline{w}}{dz}$, denen dasselbe Punktsystem als System der charakteristischen Punkte zukommt, sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden können. Ein zum zweiten Falle gehöriges System von $2p - 2$ Punkten besitzt daher stets den Rang $p - 2$. Auch erkennt man ohne Mühe, daß die Gesamtheit der den Funktionen $\frac{d\overline{w}}{dz}$ zukommenden

Systeme der charakteristischen Punkte mit der Gesamtheit der gegenüber der Charakteristik $\binom{A}{B}$ den Rang $p-2$ besitzenden Systeme von $2p-2$ Punkten identisch ist, und daß daher, weil je zwei der zuerst genannten Punktsysteme, wie ein Blick auf die am Ende von Art. 3 aufgestellte Kongruenz zeigt, äquivalent sind, auch je zwei der zuletzt genannten Punktsysteme äquivalent sind.

Für die ganze noch folgende Untersuchung soll jetzt vorausgesetzt werden, daß $m < 2p-2$, also etwa $m = 2p-2-m'$ sei. Es gibt dann nach dem beim zweiten Falle unter III.) Gesagten $p-1-\mathfrak{r}$, dort mit $\frac{d\bar{w}^{(1)}}{dz}, \cdots, \frac{d\bar{w}^{(p-1-\mathfrak{r})}}{dz}$ bezeichnete, linear unabhängige zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktionen $\frac{d\bar{w}}{dz}$, bei welchen das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ einen Bestandteil des Systems der charakterisierten Punkte bildet, und die allgemeinste derartige Funktion $\frac{d\bar{w}}{dz}$ setzt sich aus ihnen mit Hilfe von $p-1-\mathfrak{r}$ unbestimmten Konstanten $\lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(p-1-\mathfrak{r})}$ zusammen in der Form $\frac{d\bar{w}}{dz} = \lambda^{(1)}\frac{d\bar{w}^{(1)}}{dz} + \cdots + \lambda^{(p-1-\mathfrak{r})}\frac{d\bar{w}^{(p-1-\mathfrak{r})}}{dz}$. Ist speziell $\mathfrak{r} = p-2$, so ist — da sich dann die soeben für die allgemeinste hier in Betracht kommende Funktion $\frac{d\bar{w}}{dz}$ aufgestellte Gleichung auf $\frac{d\bar{w}}{dz} = \lambda^{(1)}\frac{d\bar{w}^{(1)}}{dz}$ reduziert — das von der Funktion $\frac{d\bar{w}^{(1)}}{dz}$ herkommende, mit $\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'}$ zu bezeichnende, Restpunktsystem (siehe die Definition am Schlusse von Art. 3) das einzige zu $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörige Restpunktsystem einer Funktion $\frac{d\bar{w}}{dz}$ und folglich ein nicht ersetzbares Punktsystem, oder, was dasselbe, ein Punktsystem vom Range $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'}) = m'$. Ist dagegen $\mathfrak{r} < p-2$, so gibt es außer dem Systeme $\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'}$, welches von der ersten der vorher aufgestellten Funktionen $\frac{d\bar{w}^{(1)}}{dz}, \cdots, \frac{d\bar{w}^{(p-1-\mathfrak{r})}}{dz}$ herkommt, noch unbegrenzt viele zu $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörige Restpunktsysteme von Funktionen $\frac{d\bar{w}}{dz}$; ein jedes dieser Restpunktsysteme ist auf Grund der am Schlusse von Art. 3 aufgestellten Kongruenz ein mit $\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'}$ äquivalentes Punktsystem, wie umgekehrt, sodaß also die Gesamtheit der zu $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörigen Restpunktsysteme von Funktionen $\frac{d\bar{w}}{dz}$ mit der Gesamtheit der mit $\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'}$ äquivalenten Punktsysteme identisch ist. Nach dem im vorhergehenden Abschnitte am Schlusse von Art. 7 Bewiesenen besitzen daher die zu $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörigen Restpunktsysteme von Funktionen $\frac{d\bar{w}}{dz}$ sämtlich den gleichen, mit $\mathfrak{r}'$ zu bezeichnenden, Rang $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'})$. Zur Bestimmung dieser, jedenfalls unter m' liegenden, Rangzahl $\mathfrak{r}'$ hat man vor allem zu beachten, daß ein zu $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehöriges Restpunktsystem einer Funktion $\frac{d\bar{w}}{dz}$, der Definition gemäß, erst dann festgelegt ist, wenn man bei der aufgestellten Funktion $\frac{d\bar{w}}{dz} = \lambda^{(1)}\frac{d\bar{w}^{(1)}}{dz} + \cdots + \lambda^{(p-1-\mathfrak{r})}\frac{d\bar{w}^{(p-1-\mathfrak{r})}}{dz}$ die $p-1-\mathfrak{r}$ willkürlichen Konstanten λ bis auf einen allen gemeinsamen Faktor bestimmt hat, und daß man dementprechend für die Bildung eines zu $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörigen Restpunktsystems einer Funktion $\frac{d\overline{w}}{dz}$ jedenfalls $p-2-\mathfrak{r}$ Punkte beliebig wählen kann, da diese Wahl ein System von nur $p-2-\mathfrak{r}$ homogenen linearen Gleichungen zwischen den $p-1-\mathfrak{r}$ Konstanten λ nach sich zieht. Das zu bildende Restpunktsystem wird aber durch Wahl von $p-2-\mathfrak{r}$ Punkten nur dann eindeutig bestimmt sein, wenn die Matrix der $(p-1-\mathfrak{r})\,(p-2-\mathfrak{r})$ in diesen Gleichungen als Koeffizienten der λ auftretenden Größen den Rang $p-2-\mathfrak{r}$ besitzt. Daß dieses im allgemeinen der Fall ist, erkennt man, wenn man dieselbe Schlußweise anwendet wie in Art. 6 an der entsprechenden Stelle. Für die Bildung eines zu $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörigen Restpunktsystems einer Funktion $\frac{d\overline{w}}{dz}$, oder, was dasselbe, eines mit $\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'}$ äquivalenten Punktsystems können also $p-2-\mathfrak{r} = m'-(m'-p+\mathfrak{r}+2)$ Punkte beliebig gewählt werden, und es sind durch diese Wahl die $m'-p+\mathfrak{r}+2$ noch fehlenden Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt. Das aber ist nach dem in Art. 7 des vorhergehenden Abschnittes ausgesprochenen Resultate nur möglich, wenn die dem Systeme $\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'}$ zukommende, mit $\mathfrak{r}'$ bezeichnete, Rangzahl $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'})$ sich mit der Zahl $m'-p+\mathfrak{r}+2$ deckt, sodaß also $\mathfrak{r}' = m'-p+\mathfrak{r}+2$ oder auch, da die Beziehung $m' = 2p-2-m$ besteht, $\mathfrak{r}' = p-m+\mathfrak{r}$ ist. Trotzdem die letzte Gleichung unter den Voraussetzungen $\mathfrak{r} < m < 2p-2$, $\mathfrak{r} < p-2$ abgeleitet worden ist, gilt sie auch noch unter den Voraussetzungen $\mathfrak{r} < m < 2p-2$, $\mathfrak{r} = p-2$, da sie dann, in Übereinstimmung mit dem vorher Gefundenen, für $\mathfrak{r}'$ den Wert $2p-2-m = m'$ liefert. Unter Benutzung der Relation $m+m' = 2p-2$ kann man ihr die drei Formen:

$$m'-\mathfrak{r}' = p-2-\mathfrak{r}, \qquad\qquad m-\mathfrak{r} = p-\mathfrak{r}',$$
$$m'-2\mathfrak{r}' = m-2\mathfrak{r}-2$$

geben. Es besteht demnach für jedes zu $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörige Restpunktsystem $\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'}$ einer Funktion $\frac{d\overline{w}}{dz}$ die Gleichung:

$$m'-2\,\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'}) = m-2\,\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)-2.$$

Aus den vorstehenden Untersuchungen ergibt sich jetzt schließlich als Resultat, daß unter der Voraussetzung $m < 2p-2$ die drei Aussagen:

a.) *Das Punktsystem* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *besitzt als Rang* $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ *die unter* m *und* $p-1$ *liegende Zahl* $\mathfrak{r}$;

b.) *Die auf das Punktsystem* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *bezogene Kongruenz* (C.) *ist lösbar und es gehört zu* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *mindestens ein Restpunktsystem einer Funktion* $\frac{d\overline{w}}{dz}$; *jedes derartige zu* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *gehörige Restpunktsystem* $\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'}$ *besitzt als Rang* $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'})$ *die Zahl* $p-m+\mathfrak{r}$;

c.) *Die auf das Punktsystem* $\eta_1, \cdots, \eta_m$ *bezogene Kongruenz* (C.) *ist lösbar und es gehört zu*

$\eta_1, \cdots, \eta_m$ mindestens ein Restpunktsystem einer Funktion $\frac{d\bar{w}}{dz}$; für die Bildung eines derartigen zu $\eta_1, \cdots, \eta_m$ gehörigen Restpunktsystems $\eta'_1, \cdots, \eta'_{m'}$ können $p - \mathfrak{r} - 2$ Punkte beliebig gewählt werden und es sind durch die Wahl von $p - \mathfrak{r} - 2$ Punkten die $p - m + \mathfrak{r}$ noch fehlenden Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt;

gleichwertig sind, insofern aus irgend einer von ihnen als Voraussetzung jede der beiden anderen abgeleitet werden kann. Da, wie schon bewiesen, aus a.) als Voraussetzung jede der beiden Aussagen b.) und c.) folgt und diese letzteren nach dem in Art. 7 des vorhergehenden Abschnittes ausgesprochenen Resultate gleichwertig sind, so hat man zum vollständigen Beweise der aufgestellten Behauptung nur noch zu zeigen, daß aus c.) als Voraussetzung die Aussage a.) folgt. Dieses aber ist der Fall; denn, besäße das unter c.) charakterisierte Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ eine von $\mathfrak{r}$ verschiedene, wegen der Lösbarkeit der auf dieses Punktsystem bezogenen Kongruenz (C.) jedenfalls unter m und wegen der Existenz von mindestens einem Restpunktsystem einer Funktion $\frac{d\bar{w}}{dz}$ auch unter $p-1$ liegende, Zahl $\bar{\mathfrak{r}}$ als Rang $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_m)$, so könnten, im Widerspruch mit dem über das Punktsystem Vorausgesetzten, für die Bildung eines zu ihm gehörigen Restpunktsystems einer Funktion $\frac{d\bar{w}}{dz}$ $p - \mathfrak{r} - 2$, die $p - m + \bar{\mathfrak{r}}$ noch fehlenden Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmende Punkte beliebig gewählt werden.

8.

Jede F-Funktion läßt sich auf unbegrenzt viele Weisen als ein Quotient darstellen, dessen Zähler und Nenner die ersten Derivierten von zwei zu passend gewählten Charakteristiken gehörigen Funktionen W sind, und man kann, wenn es sich um die Bildung eines solchen Quotienten handelt, die Derivierte einer beliebigen Funktion W zum Nenner nehmen. Eine ausgezeichnete Darstellung von dieser Art erhält man, wenn man speziell die Derivierte irgend einer allenthalben endlichen Funktion, deren Charakteristik zur Charakteristik der darzustellenden F-Funktion reziprok ist, zum Nenner nimmt. Zur Gewinnung dieser Darstellung soll hier ein Verfahren angewendet werden, das auch im allgemeinen Falle zum Ziele führt.

Gegeben sei eine zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion $F(z)$, welche das den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ $(\sigma = 1, 2, \cdots, s)$ m_σ-mal enthaltende Punktsystem $\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \cdots, \eta^{(2)}, \cdots\cdots, \eta^{(s)}, \cdots, \eta^{(s)}$ als System der ∞^1-Punkte besitzen möge. Diese Funktion ist nach Art. 1 durch eine Gleichung von der Form:

$$F(z) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \left(\mathfrak{L}_{\sigma 1} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(\sigma)}\\ z\end{matrix}\right| + \mathfrak{L}_{\sigma 2} \underset{2}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(\sigma)}\\ z\end{matrix}\right| + \cdots + \mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma} \underset{m_\sigma}{P}\left|\begin{matrix}\eta^{(\sigma)}\\ z\end{matrix}\right| \right),$$

darstellbar, wobei dann zwischen den Konstanten $\mathfrak{L}$ die p Beziehungen:

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}\left\{\mathfrak{L}_{\sigma 1}\left(\frac{d\bar{w}_\nu}{dz_\sigma}\right)_0+\frac{1}{1!}\mathfrak{L}_{\sigma 2}\left(\frac{d^2\bar{w}_\nu}{dz_\sigma^2}\right)_0+\cdots+\frac{1}{(m_\sigma-1)!}\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}\left(\frac{d^{m_\sigma}\bar{w}_\nu}{dz_\sigma^{m_\sigma}}\right)_0\right\}=0, \qquad \nu=1,2,\cdots,p,$$

bestehen. Sollten von den Punkten $\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(s)}$ einer oder mehrere an der Begrenzung von T'' liegen, so ändere man das Schnittsystem durch Deformation so, daß die Punkte η sämtlich in das Innere der Fläche T' zu liegen kommen. Nun verstehe man unter a einen im Innern von T' gelegenen, von den Punkten η, a, ∞ verschiedenen Punkt, bilde alsdann das Produkt:

$$\Phi(z)=F(z)\,\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|$$

der Funktion $F(z)$ und der zur Charakteristik $\binom{1\cdots 1}{1\cdots 1}$ gehörigen, ebenfalls in T' einwertigen Elementarfunktion $\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|$ und bestimme den Wert J des mit dieser Funktion $\Phi(z)$ und irgend einer, zu der zur angenommenen Charakteristik $\binom{A}{B}$ reziproken Charakteristik $\binom{\bar{A}}{\bar{B}}$ gehörigen, allenthalben endlichen Funktion $\bar{w}^z$ gebildeten, in positiver Richtung über die von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c gebildete Begrenzung $\mathfrak{R}$ der Fläche T' zu erstreckenden Integrals $\int\Phi(z)\,d\bar{w}^z$, indem man in derselben Weise vorgeht, wie es im ersten Teile, in Art. 1 des siebenten Abschnittes, zu ähnlichem Zwecke geschehen ist. Man erhält dann für J zunächst die Gleichung:

$$J=\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left\{\int_{a_\nu^+}^{+}\left(\Phi(z)^+-A_\nu\Phi(z)^-\right)d\bar{w}^+ +\int_{b_\nu^+}^{+}\left(\Phi(z)^+-B_\nu\Phi(z)^-\right)d\bar{w}^+ +\int_{c_\nu^+}^{+}\left(\Phi(z)^+-\Phi(z)^-\right)d\bar{w}^+\right\}$$

und schließlich, indem man beachtet, daß für $\nu=1, 2, \cdots, p$:

$$\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu\left\{F(z)^+=A_\nu F(z)^-,\right. && \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^+=\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^-,\\
&\text{längs } b_\nu\left\{F(z)^+=B_\nu F(z)^-,\right. && \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^+=\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^- -2\frac{du_\nu|a|}{da},\\
&\text{längs } c_\nu\left\{F(z)^+=\quad F(z)^-,\right. && \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^+=\underset{1}{P}\left|\begin{matrix}a\\z\end{matrix}\right|^-
\end{aligned}$$

ist, und daß daher die Werte von $\Phi(z)$ in je zwei zu einem der Schnitte a, b, c gehörigen entsprechenden Punkten $\mathfrak{P}^+, \mathfrak{P}^-$ in der Weise verknüpft sind, daß

$$\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu\left\{\Phi(z)^+=A_\nu\Phi(z)^-,\right.\\
&\text{längs } b_\nu\left\{\Phi(z)^+=B_\nu\Phi(z)^- -2\frac{du_\nu|a|}{da}F(z)^+,\right. && \nu=1,2,\cdots,p,\\
&\text{längs } c_\nu\left\{\Phi(z)^+=\quad\Phi(z)^-,\right.
\end{aligned}$$

ist, die Gleichung:

$$J = -2\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \frac{du_\nu|a|}{da} \int_{b_\nu^+}^{+} F(z)\, d\bar{w}^z.$$

Das Integral J ist aber auch gleich der Summe der auf die einzelnen in T'' gelegenen Unstetigkeitspunkte $\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(s)}$, a von $\Phi(z)$ sich beziehenden Integrale $\int_{(\eta^{(\sigma)})}^{+} \Phi(z)\, d\bar{w}^z$, $\sigma = 1, 2, \cdots, s$, $\int_{(a)}^{+} \Phi(z)\, d\bar{w}^z$ und kann daher auch auf Grund der Gleichung:

$$J = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \int_{(\eta^{(\sigma)})}^{+} \Phi(z)\, d\bar{w}^z + \int_{(a)}^{+} \Phi(z)\, d\bar{w}^z$$

ausgewertet werden. Zu dem Ende hat man das Folgende zu beachten.

1.) Für das Gebiet des Punktes $\eta^{(\sigma)}$ $(\sigma = 1, 2, \cdots, s)$ gelten die Entwicklungen (vgl. Art. 7 des vierten und Art. 2 des dritten Abschnittes):

$$F(z) = \frac{\mathfrak{L}_{\sigma m_\sigma}}{z_\sigma^{m_\sigma}} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \frac{\mathfrak{L}_{\sigma 1}}{z_\sigma} + c_{\sigma 0} + c_{\sigma 1} z_\sigma + c_{\sigma 2} z_\sigma^2 + c_{\sigma 3} z_\sigma^3 + \cdots,$$

$$\underset{1}{P}\left|\begin{matrix} a \\ z \end{matrix}\right| = \frac{d\, \underset{0}{P}\left|\begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ a \end{matrix}\right|}{da} + \frac{1}{1}\, \frac{d\, \underset{1}{P}\left|\begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ a \end{matrix}\right|}{da} z_\sigma + \frac{1}{2}\, \frac{d\, \underset{2}{P}\left|\begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ a \end{matrix}\right|}{da} z_\sigma^2 + \frac{1}{3}\, \frac{d\, \underset{3}{P}\left|\begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ a \end{matrix}\right|}{da} z_\sigma^3 + \cdots,$$

$$\frac{d\bar{w}}{dz_\sigma} = \left(\frac{d\bar{w}}{dz_\sigma}\right)_0 + \frac{1}{1!}\left(\frac{d^2\bar{w}}{dz_\sigma^2}\right)_0 z_\sigma + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^3\bar{w}}{dz_\sigma^3}\right)_0 z_\sigma^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^4\bar{w}}{dz_\sigma^4}\right)_0 z_\sigma^3 + \cdots,$$

und es gilt daher für das Gebiet dieses Punktes auch die Entwicklung:

$$F(z)\,\frac{d\bar{w}}{dz} = \frac{\mathfrak{L}'_{\sigma m_\sigma}}{z_\sigma^{m_\sigma}} + \cdots + \frac{\mathfrak{L}'_{\sigma 2}}{z_\sigma^2} + \frac{\mathfrak{L}'_{\sigma 1}}{z_\sigma} + c'_{\sigma 0} + c'_{\sigma 1} z_\sigma + c'_{\sigma 2} z_\sigma^2 + c'_{\sigma 3} z_\sigma^3 + \cdots,$$

wobei

$$\mathfrak{L}'_{\sigma, \lambda+1} = \sum_{\mu=1}^{\mu = m_\sigma - \lambda} \frac{\mathfrak{L}_{\sigma, \lambda+\mu}}{(\mu-1)!}\left(\frac{d^\mu \bar{w}}{dz_\sigma^\mu}\right)_0, \qquad \lambda = 0, 1, 2, \cdots, m_\sigma - 1,$$

ist. Daraus folgt dann weiter, daß in der durch Multiplikation dieser Entwicklung mit der Entwicklung der Funktion $\underset{1}{P}\left|\begin{matrix} a \\ z \end{matrix}\right|$ sich ergebenden Entwicklung von $\Phi(z)\frac{d\bar{w}}{dz_\sigma}$ die Potenz z_σ^{-1} mit dem Koeffizienten:

$$\mathfrak{L}'_{\sigma 1}\, \frac{d\underset{0}{P}\left|\begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ a \end{matrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda = m_\sigma - 1} \frac{1}{\lambda}\, \mathfrak{L}'_{\sigma, \lambda+1}\, \frac{d\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ a \end{matrix}\right|}{da}$$

auftritt. Dieses Glied ist aber das einzige, welches bei der Auswertung des auf den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ sich beziehenden Integrals in Betracht kommt, und man erhält dementsprechend:

$$\int_{(\eta^{(\sigma)})}^{+} \Phi(z)\, d\bar{w}^z = \int_{(\eta^{(\sigma)})}^{+} \Phi(z)\, \frac{d\bar{w}}{dz_\sigma}\, dz_\sigma = 2\pi i \left\{ \mathfrak{L}'_{\sigma 1}\, \frac{d\underset{0}{P}\left|\begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ a \end{matrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda = m_\sigma - 1} \frac{1}{\lambda}\, \mathfrak{L}'_{\sigma, \lambda+1}\, \frac{d\underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ a \end{matrix}\right|}{da} \right\}.$$

2.) Für das Gebiet des Punktes a gelten die Entwicklungen:

$$F(z) = F(a) + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n (z-a)^n, \qquad \underset{1}{P}\left|\begin{matrix} a \\ z \end{matrix}\right| = \frac{1}{z-a} + \sum_{n=0}^{n=\infty} c'_n (z-a)^n, \qquad \frac{d\overline{w}}{dz} = \frac{d\overline{w}^a}{da} + \sum_{n=1}^{n=\infty} c''_n (z-a)^n,$$

und es tritt daher in der durch Multiplikation dieser drei Entwicklungen sich ergebenden Entwicklung von $\Phi(z)\frac{d\overline{w}}{dz}$ die Potenz $(z-a)^{-1}$ mit dem Koeffizienten $F(a)\frac{d\overline{w}^{(a)}}{da}$ auf. Dieses Glied ist aber das einzige, welches bei der Auswertung des auf den Punkt a sich beziehenden Integrals in Betracht kommt, und man erhält dementsprechend:

$$\int_{(a)}^{+} \Phi(z)\, d\overline{w}^z = \int_{(a)}^{+} \Phi(z) \frac{d\overline{w}}{dz}\, dz = 2\pi i\, F(a) \frac{d\overline{w}^a}{da}.$$

Unter Benutzung der beiden soeben gewonnenen Resultate erhält man jetzt aus der letzten für J aufgestellten Gleichung die Gleichung:

$$J = 2\pi i \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \left\{ \mathfrak{L}'_{\sigma 1} \frac{d \underset{0}{P}\left|\begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ a \end{matrix}\right|}{da} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\sigma - 1} \frac{1}{\lambda} \mathfrak{L}'_{\sigma, \lambda+1} \frac{d \underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ a \end{matrix}\right|}{da} \right\} + 2\pi i\, F(a) \frac{d\overline{w}^a}{da}.$$

Setzt man nun die beiden für J erhaltenen Ausdrücke einander gleich, läßt bei der entstehenden Gleichung in neuer Bezeichnung zunächst an Stelle des Buchstabens z den Buchstaben ζ, hierauf an Stelle des Buchstabens a den Buchstaben z treten und löst alsdann die Gleichung nach $F(z)\frac{d\overline{w}}{dz}$ auf, so erhält man, wenn man schließlich noch die $\mathfrak{L}'$ durch die ihnen entsprechenden Ausdrücke ersetzt, die für jeden von den Punkten η, a, ∞ verschiedenen inneren Punkt z der Fläche T' geltende Gleichung:

$$F(z)\frac{d\overline{w}}{dz} = -\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}{}' \left\{ \left[\sum_{\mu=1}^{\mu=m_\sigma}{}' \frac{\mathfrak{L}_{\sigma\mu}}{(\mu-1)!} \left(\frac{d^\mu \overline{w}}{dz_\sigma^\mu}\right)_0 \right] \frac{d \underset{0}{P}\left|\begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ z \end{matrix}\right|}{dz} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\sigma-1}{}' \frac{1}{\lambda} \left[\sum_{\mu=1}^{\mu=m_\sigma-\lambda}{}' \frac{\mathfrak{L}_{\sigma,\lambda+\mu}}{(\mu-1)!} \left(\frac{d^\mu \overline{w}}{dz_\sigma^\mu}\right)_0 \right] \frac{d \underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix} \eta^{(\sigma)} \\ z \end{matrix}\right|}{dz} \right\}$$

$$- \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=p}{}' \frac{du_\nu|z|}{dz} \int_{b_\nu^+}^{+} F(\zeta)\, d\overline{w}^\zeta,$$

welche nach Division durch $\frac{d\overline{w}}{dz}$ für die Funktion $F(z)$ die erwähnte ausgezeichnete Darstellung liefert. Trotzdem diese Gleichung, zur Vereinfachung der Untersuchung, nur für den Fall abgeleitet worden ist, daß der Punkt z im Innern der Fläche T' liegt, gilt sie auch noch, wenn z der Begrenzung von T' angehört. Es ändert sich nämlich die Differenz der linken und rechten Seite, als Funktion des in T' frei beweglichen Punktes z betrachtet, stetig, wenn dieser Punkt durch stetige Bewegung in einen Punkt der Begrenzung von T' übergeht, und es kann daher diese Differenz, da sie der erhaltenen Gleichung gemäß immer den Wert Null besitzt, wenn z im Innern der Fläche T' liegt, nicht einen von Null verschiedenen Wert haben, wenn z der Begrenzung von T' angehört.

Eine besondere Betrachtung verdient der Fall, wo der Rang $\mathfrak{R}_{\left|\substack{A\\B}\right|}(\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(s)},\cdots,\eta^{(s)})$ des den Punkt $\eta^{(\sigma)}$ $(\sigma=1,2,\cdots,s)$ m_σ-mal enthaltenden Systems $\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(s)},\cdots,\eta^{(s)}$ der ∞^1-Punkte der Funktion $F(z)$ kleiner als $p-1$ ist, oder, was dasselbe, wo Funktionen $\frac{d\overline{w}}{dz}$ existieren, bei denen das Punktsystem $\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(s)},\cdots,\eta^{(s)}$ in dem System der charakteristischen Punkte enthalten ist. Läßt man nämlich in diesem Falle an Stelle der in der gewonnenen Formel vorkommenden allgemeinen Funktion $\frac{d\overline{w}}{dz}$ eine der soeben genannten speziellen Funktionen $\frac{d\overline{w}}{dz}$ treten, so nimmt die Formel, da nach dem in Art. 3 Bemerkten für jede derartige Funktion $\frac{d\overline{w}}{dz}$ die $m_1+\cdots+m_s$ Gleichungen:

$$\left(\frac{d\overline{w}}{dz_0}\right)_0=0,\quad \left(\frac{d^2\overline{w}}{dz_0^2}\right)_0=0,\quad\cdots,\quad \left(\frac{d^{m_\sigma}\overline{w}}{dz_\sigma^{m_\sigma}}\right)_0=0, \qquad \sigma=1,2,\cdots,s,$$

bestehen, die einfachere Gestalt:

$$F(z)\frac{d\overline{w}}{dz}=-\frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\frac{du_\nu|z|}{dz}\int_{b_\nu^+}^{+}F(\zeta)\,d\overline{w}^\zeta$$

an, und man erkennt nun, daß jede Funktion $F(z)$ der in Rede stehenden Art sich als Quotient mit einer Funktion $\frac{du}{dz}$ als Zähler und einer Funktion $\frac{d\overline{w}}{dz}$ als Nenner darstellen läßt. Da andererseits aber auch jeder derartige Quotient, wie aus dem in Art. 4 beim ersten und zweiten Falle unter III.) Gesagten unmittelbar hervorgeht, eine Funktion $F(z)$ der in Rede stehenden Art ist, so erkennt man schließlich, daß die Gesamtheit der Funktionen $F(z)$, bei welchen das System $\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(s)},\cdots,\eta^{(s)}$ der ∞^1-Punkte als Rang $\mathfrak{R}_{\left|\substack{A\\B}\right|}(\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(s)},\cdots,\eta^{(s)})$ eine unter $p-1$ liegende Zahl besitzt, identisch ist mit der Gesamtheit derjenigen Funktionen, welche Quotienten mit einer Funktion $\frac{du}{dz}$ als Zähler und einer Funktion $\frac{d\overline{w}}{dz}$ als Nenner sind.

9.

Es sollen jetzt diejenigen ausgezeichneten zur Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right)$ gehörigen Funktionen $F(z)$ untersucht werden, welchen das den Punkt α_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots,r)$ $(\mu_\varrho-1)$-mal und den Punkt $\infty_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots,q)$ $h\iota_\varkappa$-mal enthaltende Punktsystem $\alpha_1,\cdots,\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_r,$ $\infty_1,\cdots,\infty_1,\cdots,\infty_q,\cdots,\infty_q$ oder auch nur ein Teil desselben als System der ∞^1-Punkte zukommt. Dabei bedeutet h eine Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \cdots$. Der in Art. 7 des dritten Abschnittes aufgestellten Formel (D.) gemäß ist jede derartige Funktion $F(z) = F_h^{(\infty)}(z)$ durch eine Gleichung von der Form:

$$(1.)\qquad F_h^{(\infty)}(z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} c_\nu \frac{dw_\nu}{dz} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=(h+1)\iota_\varkappa} c_{\varkappa\lambda} \frac{dP\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa \\ z\end{smallmatrix}\right|_{\lambda}}{dz},$$

bei der die c Konstanten bezeichnen, darstellbar. Da aber auch umgekehrt, wie aus den in Art. 6 des zweiten Abschnittes aufgestellten Formeln (D_1.), (D_4.), (D_7.), (D_7'.) folgt, diese Gleichung, welche Werte man auch den c zulegen mag, — von dem Falle, wo $c_{\lambda_1} = \cdots = c_{\lambda_\mathfrak{p}}$, $c_{\lambda_{\mathfrak{p}+1}} = \cdots = c_{\lambda_p} = 0$ $(\mathfrak{p} \gtreqless p)$, $c_{\varkappa\lambda} = 0$, ${\lambda = 0, 1, 2, \cdots, (h+1)\iota_\varkappa, \atop \varkappa = 1, 2, \cdots, q,}$ ist, also die rechte Seite sich wegen $w_{\lambda_1}|z| + \cdots + w_{\lambda_\mathfrak{p}}|z| = 0$ auf die Null reduziert, abgesehen — stets eine Funktion der in Rede stehenden Art liefert, so stellt der auf ihrer rechten Seite stehende Ausdruck bei unbestimmten Konstanten c die allgemeinste Funktion $F_h^{(\infty)}(z)$ dar, und diese Eigenschaft wird wegen $\frac{dw_{\lambda_1}}{dz} + \cdots + \frac{dw_{\lambda_\mathfrak{p}}}{dz} = 0$ nicht aufgehoben, wenn man eine der $\mathfrak{p}$ Konstanten $c_{\lambda_1}, \cdots, c_{\lambda_\mathfrak{p}}$ mit der Null zusammenfallen läßt.

Die Ordnung einer Funktion $F_h^{(\infty)}(z)$ übersteigt nicht die Zahl $H = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (\mu_\varrho - 1) + h \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \iota_\varkappa$ $= n + q + 2p - 2 + hn$. Ist die Funktion $F_h^{(\infty)}(z)$ von der Ordnung H, besitzt sie also das vorher charakterisierte Punktsystem als System der ∞^1-Punkte, so kommen ihr auch H 0^1-Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_H$ zu. Ist die Funktion $F_h^{(\infty)}(z)$ dagegen von der Ordnung $H - t$, besitzt sie also nur einen, $H - t$ Punkte umfassenden, Teil des vorher charakterisierten Punktsystems als System der ∞^1-Punkte, so kommen ihr auch nur $H - t$ 0^1-Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{H-t}$ zu. In diesem letzteren Falle ergänze man nun das Punktsystem $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{H-t}$ dadurch zu einem System von H Punkten, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_H$, daß man zu ihm dasjenige, t Punkte enthaltende, System, welches von dem zu Anfang dieses Artikels charakterisierten Systeme nach Wegnahme der $H - t$ ∞^1-Punkte der Funktion $F_h^{(\infty)}(z)$ noch übrig bleibt, hinzunimmt. In jedem der beiden soeben betrachteten Fälle soll das zur Funktion $F_h^{(\infty)}(z)$ definierte Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_H$, insoferne durch dasselbe die Funktion $F_h^{(\infty)}(z)$ bis auf einen von z freien Faktor bestimmt ist, das System der charakteristischen Punkte der Funktion $F_h^{(\infty)}(z)$ genannt werden.

Die Systeme der charakteristischen Punkte der Funktionen $F_h^{(\infty)}(z)$ lassen sich einheitlich definieren; man hat dazu nur die gegen Ende des Art. 2 angestellten Betrachtungen, speziell die Kongruenz (1'.), auf die Funktionen $F_h^{(\infty)}(z)$ zu beziehen. Es ergibt sich dann, daß die Gesamtheit der den Funktionen $F_h^{(\infty)}(z)$ zukommenden Systeme der charakteristischen Punkte mit der Gesamtheit der Lösungssysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_H$ der Kongruenz:

$$\left(\sum_{\sigma=1}^{\sigma=H} u^{\varepsilon_\sigma}\right) \equiv \left(\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (\mu_\varrho - 1)\, u^{a_\varrho} + h \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \iota_\varkappa u^{\infty_\varkappa} + \left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right|\right)$$

identisch ist. Da der Rang $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right|}(\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_r, \infty_1, \cdots, \infty_1, \cdots, \infty_q, \cdots, \infty_q)$ des zu Anfang dieses Artikels charakterisierten Punktsystems wegen $H > 2p-2$ gleich $p-1$ ist, so kann man, nach dem in Art. 6 Bewiesenen, für die Bildung eines Systems $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_H$ der charakteristischen Punkte einer Funktion $F_h^{(\infty)}(z)$ $H-(p-1)-1 = H-p$ Punkte beliebig wählen und es sind durch die Wahl von $H-p$ Punkten die p noch fehlenden Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt.

Mit $F_{-1}^{(\infty)}(z)$ bezeichne man unterschiedslos jede Funktion $F(z)$, welche das den Punkt α_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots,r)$ $(\mu_\varrho - 1)$-mal enthaltende Punktsystem $\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_r$ oder auch nur einen Teil desselben als System der ∞^1-Punkte besitzt, und bei welcher das den Punkt $\infty_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots,q)$ $\iota_\varkappa$-mal enthaltende Punktsystem $\infty_1, \cdots, \infty_1, \cdots, \infty_q, \cdots, \infty_q$ als Bestandteil des Systems der 0^1-Punkte auftritt. Man erkennt dann, in ähnlicher Weise wie vorher schließend, zunächst, daß die allgemeinste derartige Funktion durch die Gleichung:

$$F_{-1}^{(\infty)}(z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} c_\nu \frac{dw_\nu}{dz} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} c_{\varkappa 0} \frac{d\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz},$$

oder auch, wegen $\frac{dw_{\lambda_1}}{dz} + \cdots + \frac{dw_{\lambda_p}}{dz} = 0$, durch die Gleichung:

$$F_{-1}^{(\infty)}(z) = \sum_{\nu=2}^{\nu=p} c_{\lambda_\nu} \frac{dw_{\lambda_\nu}}{dz} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} c_{\varkappa 0} \frac{d\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}$$

geliefert wird, wenn man im einen wie im anderen Falle unter den c unbestimmte Konstanten versteht, weiter auch, daß die Ordnung einer Funktion $F_{-1}^{(\infty)}(z)$ die Zahl $n+q+2p-2$ nicht übersteigt und daß zu jeder Funktion $F_{-1}^{(\infty)}(z)$ ein System von $q+2p-2$ Punkten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{q+2p-2}$ als System der charakteristischen Punkte gehört, endlich noch, daß die Gesamtheit der den Funktionen $F_{-1}^{(\infty)}(z)$ zukommenden Systeme der charakteristischen Punkte mit der Gesamtheit der Lösungssysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{q+2p-2}$ der Kongruenz:

$$\left(\sum_{\sigma=1}^{\sigma=q+2p-2} u^{\varepsilon_\sigma}\right) \equiv \left(\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (\mu_\varrho - 1) u^{\alpha_\varrho} - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \iota_\varkappa u^{\infty_\varkappa} + \left|\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right|\right)$$

identisch ist und daß man für die Bildung eines derartigen Punktsystems $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{q+2p-2}$ gerade $q+p-2$ Punkte beliebig wählen kann.

Der zu Anfang dieses Artikels für die Funktion $F_h^{(\infty)}(z)$ $(h=0,1,2,\cdots)$ aufgestellte Ausdruck läßt sich durch eine homogene lineare Verbindung der $H-p+2$ speziellen, im folgenden der Kürze wegen als Fundamentalfunktionen zu bezeichnenden, Funktionen:

$$\frac{dw_\nu}{dz}, \quad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,} \qquad z^m \frac{d\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}, \quad {\scriptstyle m=0,1,2,\cdots,h+1,\ \tau=1,2,\cdots,q,} \qquad z^m \frac{d\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz} \quad {\scriptstyle m=0,1,2,\cdots,h,\ \tau=1,2,\cdots,q,\ \sigma=1,2,\cdots,\iota_\tau-1,}$$

— von denen die an erster Stelle aufgeführten durch die Relation $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\frac{dw_{\lambda_\nu}}{dz}=0$ verknüpft sind — ersetzen. Die beiden hierzu nötigen Hilfsformeln erhält man auf folgende Weise. Zunächst beziehe man die in Art. 7 des dritten Abschnittes aufgestellte Formel (D.) auf die Funktion $W(z)=z^m\frac{dP_0\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}$ $\binom{m=1,2,\cdots,h+1}{\tau=1,2,\cdots,q}$; es ergibt sich dann eine Gleichung von der Gestalt:

$$(\mathrm{G}_0^{(m)}.)\quad {\scriptstyle m=1,2,\cdots,h+1}\qquad z^m\frac{dP_0\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}=\sum_{\nu=1}^{\nu=p}k_\nu^{(m)}\frac{dw_\nu}{dz}+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m\iota_\varkappa-1}k_{\varkappa\lambda}^{(m)}\frac{dP_\lambda\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}+\frac{1}{m\iota_\tau}\frac{dP_{m\iota_\tau}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz},$$

wobei die $k^{(m)}$ von den ganzen Zahlen m, τ abhängige Konstanten bezeichnen. Weiter beziehe man die Formel (D.) auf die Funktion $W(z)=z^m\frac{dP_\sigma\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}\left(\begin{smallmatrix}m=1,2,\cdots,h\\ \tau=1,2,\cdots,q\\ \sigma=1,2,\cdots,\iota_\tau-1\end{smallmatrix}\right)$; es ergibt sich dann eine Gleichung von der Gestalt:

$$(\mathrm{G}_\sigma^{(m)}.)\quad {\scriptstyle m=1,2,\cdots,h \atop \sigma=1,2,\cdots,\iota_\tau-1}\qquad z^m\frac{dP_\sigma\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}=\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\bar{k}_\nu^{(m)}\frac{dw_\nu}{dz}+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m\iota_\varkappa-1}\bar{k}_{\varkappa\lambda}^{(m)}\frac{dP_\lambda\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}+\frac{\sigma}{m\iota_\tau+\sigma}\frac{dP_{m\iota_\tau+\sigma}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz},$$

wobei die $\bar{k}^{(m)}$ von den ganzen Zahlen m, σ, τ abhängige Konstanten bezeichnen.

Für jedes τ aus der Reihe $1,2,\cdots,q$ kann man jetzt homogen linear ausdrücken:

mit Hilfe der Gleichung $(\mathrm{G}_0^{(h+1)}.)$ die Funktion $\frac{dP_{(h+1)\iota_\tau}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}$

durch Fundamentalfunktionen und die Funktionen $\frac{dP_\lambda\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}$, ${\scriptstyle \varkappa=1,2,\cdots,q \atop \lambda=\iota_\varkappa,\iota_\varkappa+1,\cdots,(h+1)\iota_\varkappa-1}$,

mit Hilfe der Gleichungen $(\mathrm{G}_\sigma^{(h)}.)$, ${\scriptstyle\sigma=\iota_\tau-1,\cdots,2,1,0}$, die Funktionen $\frac{dP_{h\iota_\tau+\sigma}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}$, ${\scriptstyle\sigma=\iota_\tau-1,\cdots,2,1,0}$,

durch Fundamentalfunktionen und die Funktionen $\frac{dP_\lambda\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}$, ${\scriptstyle \varkappa=1,2,\cdots,q \atop \lambda=\iota_\varkappa,\iota_\varkappa+1,\cdots,h\iota_\varkappa-1}$,

mit Hilfe der Gleichungen $(\mathrm{G}_\sigma^{(h-1)}.)$, ${\scriptstyle\sigma=\iota_\tau-1,\cdots,2,1,0}$, die Funktionen $\frac{dP_{(h-1)\iota_\tau+\sigma}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}$, ${\scriptstyle\sigma=\iota_\tau-1,\cdots,2,1,0}$,

durch Fundamentalfunktionen und die Funktionen $\frac{dP_\lambda\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}$, ${\scriptstyle \varkappa=1,2,\cdots,q \atop \lambda=\iota_\varkappa,\iota_\varkappa+1,\cdots,(h-1)\iota_\varkappa-1}$,

. . . .

. . . .

mit Hilfe der Gleichungen $(\mathrm{G}_\sigma^{(1)}.)$, ${\scriptstyle\sigma=\iota_\tau-1,\cdots,2,1,0}$, die Funktionen $\frac{dP_{\iota_\tau+\sigma}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\tau\\ z\end{smallmatrix}\right|}{dz}$, ${\scriptstyle\sigma=\iota_\tau-1,\cdots,2,1,0}$,

durch Fundamentalfunktionen allein.

Man erkennt so, daß der zu Anfang des Artikels für die Funktion $F_h^{(\infty)}(z)$ $(h=0,1,2,\cdots)$ aufgestellte Ausdruck sich in der Tat, wie behauptet wurde, durch eine homogene lineare Verbindung:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} l_\nu \frac{dw_\nu}{dz} + \sum_{m=0}^{m=h+1} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} l_{\varkappa 0}^{(m)} z^m \frac{dP\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa \\ z\end{smallmatrix}\right.}{dz} + \sum_{m=0}^{m=h} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota_\varkappa-1} l_{\varkappa\lambda}^{(m)} z^m \frac{d\underset{\lambda}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa \\ z\end{smallmatrix}\right.}{dz}$$

der $H-p+2$ Fundamentalfunktionen ersetzen läßt, und damit zugleich, nachdem man noch zur Abkürzung

$$\sum_{m=0}^{m=h+1} l_{\varkappa 0}^{(m)} z^m = \overset{h+1}{g_{\varkappa 0}}(z), \qquad \sum_{m=0}^{m=h} l_{\varkappa\lambda}^{(m)} z^m = \overset{h}{g_{\varkappa\lambda}}(z)$$

gesetzt hat, daß jede Funktion $F_h^{(\infty)}(z)$ sich auch durch eine Gleichung von der Form:

$$\text{(II.)} \qquad F_h^{(\infty)}(z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} l_\nu \frac{dw_\nu}{dz} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \overset{h+1}{g_{\varkappa 0}}(z) \frac{d\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa \\ z\end{smallmatrix}\right.}{dz} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota_\varkappa-1} \overset{h}{g_{\varkappa\lambda}}(z) \frac{d\underset{\lambda}{P}\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varkappa \\ z\end{smallmatrix}\right.}{dz}$$

darstellen läßt, wobei $\overset{h+1}{g_{\varkappa 0}}(z)$, $\overset{h}{g_{\varkappa\lambda}}(z)$ ganze rationale Funktionen von z, deren Grade die Zahlen $h+1$, h beziehungsweise nicht übersteigen, bezeichnen. Die Gleichung (II.) geht, von der Bezeichnung der Konstanten abgesehen, in die früher aufgestellte, die Funktion $F_{-1}^{(\infty)}(z)$ definierende Gleichung über, wenn man $h=-1$ setzt und das dann auftretende Zeichen $\overset{-1}{g_{\varkappa\lambda}}(z)$ als mit der Null identisch ansieht. Nun liefert aber die Gleichung (II.), dem Verhalten ihrer rechten Seite für die Punkte $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \infty_1, \cdots, \infty_q$ zufolge, welche Werte man auch den p Konstanten $l_1, \cdots, l_p$ und den $q(h+2)+(n-q)(h+1)$ $= H-2p+2$ in den ganzen Funktionen $g(z)$ vorkommenden Konstanten $l^{(m)}$ zulegen mag — von dem Falle, wo $l_{\lambda_1} = l_{\lambda_2} = \cdots = l_{\lambda_\nu}$ ist und alle außerdem noch vorkommenden Konstanten den Wert Null besitzen oder, was dasselbe, die rechte Seite sich auf die Null reduziert, abgesehen — stets eine Funktion $F_h^{(\infty)}(z)$, und man erkennt so schließlich, daß der auf ihrer rechten Seite stehende Ausdruck bei unbestimmten Konstanten l die allgemeinste Funktion $F_h^{(\infty)}(z)$ darstellt. Die in diesem Ausdrucke vorkommenden $H-p+2$ willkürlichen Konstanten müssen sich daher, dem in Art. 4 am Schlusse des ersten Falles Bemerkten entsprechend, auf $H-p+1$ wesentliche willkürliche Konstanten reduzieren lassen. In der Tat kann man, da die Funktionen $\frac{dw_\nu}{dz}$, $\nu=1,2,\cdots,p$, durch die Gleichung $\frac{dw_{\lambda_1}}{dz} + \frac{dw_{\lambda_2}}{dz} + \cdots + \frac{dw_{\lambda_\nu}}{dz} = 0$ verknüpft sind, eine der willkürlichen Konstanten $l_{\lambda_1}, l_{\lambda_2}, \cdots, l_{\lambda_\nu}$, ohne die Allgemeinheit des Ausdruckes zu beschränken, mit der Null zusammenfallen lassen. Zugleich erkennt man, daß der in Rede stehende Ausdruck nur dann für jeden Punkt z der Fläche T' den Wert Null haben kann, wenn $l_{\lambda_1} = l_{\lambda_2} = \cdots = l_{\lambda_\nu}$ ist und die

$H-p+2-\mathfrak{p}$ übrigen Konstanten l sämtlich mit der Null zusammenfallen, oder auch, da hierbei h irgend eine Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \cdots$ bedeutet, daß eine Gleichung von der allgemeineren Form:

$$0=\sum_{\nu=1}^{\nu=p} l_\nu \frac{d w_\nu}{d z}+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} g_{\varkappa 0}(z) \frac{d \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa \\ z\end{matrix}\right|}{d z}+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\iota_\varkappa-1} g_{\varkappa \lambda}(z) \frac{d \underset{\lambda}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa \\ z\end{matrix}\right|}{d z},$$

bei der $l_1, l_2, \cdots, l_p$ Konstanten, $g_{\varkappa 0}(z)$, $g_{\varkappa\lambda}(z)$ irgend welche ganze rationale Funktionen von z bezeichnen, nur dann für jeden Punkt z von T' bestehen kann, wenn $l_{\lambda_1}=l_{\lambda_2}=\cdots=l_{\lambda_\mathfrak{p}}$ ist und die übrigen $p-\mathfrak{p}$ Konstanten l sowie die Funktionen g sämtlich mit der Null identisch sind.

Jede zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige F-Funktion läßt sich bei hinreichend groß gewählter Zahl h $(h=-1,0,1,2,\cdots)$ als Quotient mit einer Funktion $F_h^{(\infty)}(z)$ als Zähler und einer Funktion $A_h^{(\infty)}(z)$ als Nenner darstellen. Zum Beweise dieser Behauptung nehme man an, daß die darzustellende Funktion $F(z)$ das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ als System der ∞^1-Punkte besitze, und beachte, daß für die Bildung eines Systems der charakteristischen Punkte einer Funktion $A_h^{(\infty)}(z)$ $H-p=n+q+p-2+hn$ Punkte beliebig gewählt werden können und daß daher, wenn man unter h die kleinste der Bedingung:

$$n+q+p-2+hn \geqq m$$

genügende Zahl aus der Reihe $-1, 0, 1, 2, \cdots$ versteht, zu dieser Zahl h Funktionen $A_h^{(\infty)}(z)$ existieren, bei denen das System $\eta_1, \cdots, \eta_m$ in dem System der charakteristischen Punkte enthalten ist. Bildet man nun das Produkt $F(z) A_h^{(\infty)}(z)$ aus der darzustellenden Funktion $F(z)$ und irgend einer dieser Funktionen $A_h^{(\infty)}(z)$, so ist dasselbe eine F-Funktion, welche für $h>-1$ das den Punkt α_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots r)$ $(\mu_\varrho-1)$-mal und den Punkt $\infty_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots,q)$ $h\iota_\varkappa$-mal enthaltende Punktsystem $\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \cdots\cdot, \alpha_r, \cdots, \alpha_r, \infty_1, \cdots, \infty_1, \cdots\cdot, \infty_q, \cdots, \infty_q$ oder einen Teil desselben als System der ∞^1-Punkte besitzt, für $h=-1$ dagegen das den Punkt α_ϱ $(\varrho=1,2,\cdots,r)$ $(\mu_\varrho-1)$-mal enthaltende Punktsystem $\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \cdots\cdot, \alpha_r, \cdots, \alpha_r$ oder einen Teil desselben als System der ∞^1-Punkte und das den Punkt $\infty_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots,q)$ $\iota_\varkappa$-mal enthaltende Punktsystem $\infty_1, \cdots, \infty_1, \cdots\cdot, \infty_q, \cdots, \infty_q$ als Bestandteil des Systems der 0^1-Punkte besitzt. Das in Rede stehende Produkt $F(z) A_h^{(\infty)}(z)$ ist daher im einen wie im anderen Falle eine, mit $\widetilde{F}_h^{(\infty)}(z)$ zu bezeichnende, Funktion $F_h^{(\infty)}(z)$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, es besteht die Gleichung:

$$F(z)=\frac{\widetilde{F}_h^{(\infty)}(z)}{A_h^{(\infty)}(z)}.$$

Damit ist aber der Beweis für die aufgestellte Behauptung erbracht.

10.

Man bezeichne zur Abkürzung die n Größen:

$$\frac{d P_0\Big|_z^{\infty_\varkappa}}{dz}, \qquad \frac{d P_1\Big|_z^{\infty_\varkappa}}{dz}, \; \frac{d P_2\Big|_z^{\infty_\varkappa}}{dz}, \; \cdots, \; \frac{d P_{\iota_\varkappa - 1}\Big|_z^{\infty_\varkappa}}{dz},$$
$$\varkappa = 1, 2, \cdots, q, \qquad\qquad \varkappa = 1, 2, \cdots, q,$$

in der vorliegenden Reihenfolge mit $F_1, F_2, \cdots, F_n$. Jede zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige F-Funktion läßt sich dann als homogene lineare Funktion dieser n Größen mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten darstellen und zwar nur auf eine Weise. Die Richtigkeit dieser Behauptung erkennt man folgendermaßen.

Die darzustellende Funktion $F = F(z)$ möge das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_m$ als System der ∞^1-Punkte besitzen, und die Bezeichnung sei so gewählt, daß $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_\mu$ $(\mu \gtreqless m)$ die im Endlichen gelegenen Punkte des Punktsystems $\eta_1, \cdots, \eta_m$ sind. Bildet man alsdann das Produkt gF aus der Funktion F und der ganzen rationalen Funktion $g = (z - \eta_1)(z - \eta_2) \cdots (z - \eta_\mu)$ von z, so ist dasselbe, wenn man noch im dem Falle, wo keiner der Punkte $\eta_1, \cdots, \eta_m$ im Endlichen gelegen ist, unter g die Eins versteht, eine zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige F-Funktion, welche für keinen im Endlichen gelegenen Punkt der Fläche T' unendlich wird, also eine Funktion $F_h^{(\infty)}(z)$ von spezieller Art. Das Produkt gF läßt sich daher auf Grund der Gleichung (II.) des Art. 9 darstellen durch eine Gleichung von der Form:

$$gF = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} l_\sigma \frac{dw_\sigma}{dz} + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} g_\nu F_\nu,$$

wobei $l_1, \cdots, l_p$ Konstanten, $g_1, \cdots, g_n$ ganze rationale Funktionen von z bezeichnen.

Man beachte jetzt, daß die Funktion $z\frac{dw_\varrho}{dz}$ $(\varrho = 1, 2, \cdots, p)$ eine Funktion $F_0^{(\infty)}(z)$ ist, bei der das Punktsystem $\infty_1, \cdots, \infty_q$ als Bestandteil des Systems der 0^1-Punkte auftritt, und daß sich infolgedessen diese Funktion, der Formel (I.) des Art. 9 gemäß, durch eine Gleichung von der Form:

$$z\frac{dw_\varrho}{dz} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} c_\sigma^{(\varrho)} \frac{dw_\sigma}{dz} + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\nu^{(\varrho)} F_\nu$$

darstellen läßt, bei der die $c^{(\varrho)}$, $d^{(\varrho)}$ Konstanten bezeichnen, und bei der auch, wegen $\frac{dw_{\lambda_1}}{dz} + \cdots + \frac{dw_{\lambda_\nu}}{dz} = 0$, die Konstante $c_{\lambda_1}^{(\varrho)}$ der Null gleichgesetzt werden darf.

Die oben für gF gewonnene Gleichung fasse man nun mit den p aus der letzten Gleichung für $\varrho = 1, 2, \cdots, p$ hervorgehenden Gleichungen zu dem Systeme von $p+1$ Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
l_1 \frac{dw_1}{dz} + \cdots + \quad & l_p \frac{dw_p}{dz} + \left(\sum_{\nu=1}^{\nu=n} g_\nu F_\nu - gF\right) = 0, \\
(c_1^{(1)} - z)\frac{dw_1}{dz} + \cdots + \quad & c_p^{(1)} \frac{dw_p}{dz} + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\nu^{(1)} F_\nu \qquad = 0, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
c_1^{(p)} \frac{dw_1}{dz} + \cdots + (c_p^{(p)} & - z) \frac{dw_p}{dz} + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\nu^{(p)} F_\nu \qquad = 0
\end{aligned}
$$

zusammen. Da diese Gleichungen in bezug auf die $p+1$ Größen $\frac{dw_1}{dz}, \cdots, \frac{dw_p}{dz}, 1$ homogen linear sind, so muß die Determinante des Systems verschwinden. Es besteht also die Gleichung:

$$
\begin{vmatrix}
l_1 & \cdots l_p & \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} g_\nu F_\nu - gF \\
c_1^{(1)} - z & \cdots c_p^{(1)} & \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} d_\nu^{(1)} F_\nu \\
. & \cdots . & . \\
c_1^{(p)} & \cdots c_p^{(p)} - z & \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} d_\nu^{(p)} F_\nu
\end{vmatrix} = 0
$$

und damit auch, wenn man noch die aus der Determinante nach Wegnahme der ersten Horizontalreihe und der letzten Vertikalreihe übrig bleibende Determinante p^{ten} Grades, die eine ganze rationale Funktion der Veränderlichen z vom p^{ten} Grade ist, mit g' bezeichnet, die Gleichung:

$$
F = \frac{(-1)^p}{gg'}
\begin{vmatrix}
l_1 & \cdots l_p & \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} g_\nu F_\nu \\
c_1^{(1)} - z & \cdots c_p^{(1)} & \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} d_\nu^{(1)} F_\nu \\
. & \cdots . & . \\
c_1^{(p)} & \cdots c_p^{(p)} - z & \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} d_\nu^{(p)} F_\nu
\end{vmatrix}
$$

oder, was dasselbe, nachdem man noch zur Abkürzung

$$
r_\nu = \frac{(-1)^p}{gg'}
\begin{vmatrix}
l_1 & \cdots l_p & g_\nu \\
c_1^{(1)} - z & \cdots c_p^{(1)} & d_\nu^{(1)} \\
. & \cdots . & . \\
c_1^{(p)} & \cdots c_p^{(p)} - z & d_\nu^{(p)}
\end{vmatrix}, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, n,
$$

gesetzt hat, die Gleichung:

$$
F = r_1 F_1 + r_2 F_2 + \cdots + r_n F_n,
$$

welche die Funktion $F = F(z)$ als homogene lineare Funktion der n Größen $F_1, F_2, \cdots, F_n$ mit rationalen Funktionen $r_1, r_2, \cdots, r_n$ von z als Koeffizienten darstellt.

Die so für die Funktion F erhaltene Darstellung ist zugleich die einzige dieser Art. Gäbe es nämlich für die Funktion F noch eine zweite derartige, etwa durch die Gleichung $F = r_1' F_1 + r_2' F_2 + \cdots + r_n' F_n$ repräsentierte Darstellung, so würde durch Subtraktion dieser Gleichung von der zuerst erhaltenen, wenn man noch das System der dann auftretenden rationalen Funktionen $r_1 - r_1', r_2 - r_2', \cdots, r_n - r_n'$ in ein System $\frac{\bar{g}_1}{G}, \frac{\bar{g}_2}{G}, \cdots, \frac{\bar{g}_n}{G}$ von Quotienten ganzer Funktionen mit gemeinschaftlichem Nenner überführt, die Gleichung $0 = \bar{g}_1 F_1 + \bar{g}_2 F_2 + \cdots + \bar{g}_n F_n$ entstehen, bei der, da die rationalen Funktionen $r_1 - r_1', r_2 - r_2', \cdots, r_n - r_n'$ der Voraussetzung gemäß nicht sämtlich mit der Null zusammenfallen, wenigstens eine der ganzen Funktionen $\bar{g}$ nicht mit der Null identisch wäre. Das aber ist nach dem in Art. 9 auf Seite 237 Bewiesenen nicht möglich. Es läßt sich also in der Tat, wie zu Anfang dieses Artikels behauptet wurde, eine zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige F-Funktion immer und nur auf eine Weise als homogene lineare Funktion der n Größen $F_1, F_2, \cdots, F_n$ mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten darstellen.

Man verstehe jetzt unter z irgend einen im Endlichen gelegenen Punkt der Z-Ebene, über dem kein Windungspunkt der Fläche T sich befindet, bezeichne die n ihm entsprechenden Punkte der Fläche T' in irgend einer Reihenfolge mit $z_1, z_2, \cdots, z_n$, die zugehörigen Werte der Größe F_ν $_{(\nu=1,2,\cdots,n)}$ mit $F_\nu(z_1), F_\nu(z_2), \cdots, F_\nu(z_n)$ beziehungsweise, bilde die Determinante:

$$|F_\nu(z_\mu)| = \begin{vmatrix} F_1(z_1) & \cdots & F_n(z_1) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ F_1(z_n) & \cdots & F_n(z_n) \end{vmatrix}$$

und stelle sich die Frage, ob diese Determinante vielleicht für jeden der gestellten Bedingung genügenden Wert von z mit der Null zusammenfallen kann. Zur Beantwortung dieser Frage nehme man an, daß die Determinante für einen solchen Wert z' von z verschwinde, also $|F_\nu(z_\mu')| = 0$ sei. Dann läßt sich ein von $0, 0, \cdots, 0$ verschiedenes Konstantensystem $k_1, k_2, \cdots, k_n$ von der Art bestimmen, daß die Funktion $k_1 F_1 + k_2 F_2 + \cdots + k_n F_n$ für jeden der n Punkte $z_1', z_2', \cdots, z_n'$ den Wert Null besitzt. Infolgedessen wird der mit dieser Funktion als Zähler und der Funktion $z - z'$ als Nenner gebildete Quotient für keinen der n Punkte $z_1', z_2', \cdots, z_n'$ unendlich, besitzt also ausschließlich das den Punkt α_ϱ $_{(\varrho=1,2,\cdots,r)}$ $(\mu_\varrho - 1)$-mal enthaltende Punktsystem $\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_r$ oder nur einen Teil desselben als System der ∞^1-Punkte. Da dieser Quotient zudem aber auch das den Punkt $\infty_\varkappa$ $_{(\varkappa=1,2,\cdots,q)}$ $\iota_\varkappa$-mal enthaltende Punktsystem $\infty_1, \cdots, \infty_1, \cdots, \infty_q, \cdots, \infty_q$ als Bestandteil des Systems der 0^1-Punkte besitzt, so ist er eine Funktion $F_{-1}^{(\infty)}(z)$, und man erhält daher, wenn man den in Art. 9 für die allgemeinste Funktion $F_{-1}^{(\infty)}(z)$ gewonnenen Ausdruck herübernimmt, zunächst die Gleichung:

$$\frac{k_1 F_1 + k_2 F_2 + \cdots + k_n F_n}{z - z'} = \sum_{\varrho=2}^{\varrho=p} c_{\lambda_\varrho} \frac{d w_{\lambda_\varrho}}{dz} + \sum_{\nu=1}^{\nu=q} c_{\nu 0} F_\nu,$$

bei der die c von z freie Größen bezeichnen. Multipliziert man nun linke und rechte Seite dieser Gleichung mit $z - z'$, ersetzt die $p-1$ dann auftretenden Größen $z\frac{dw_{\lambda_\varrho}}{dz}$, ${\scriptstyle \varrho=2,3,\cdots,p}$, auf Grund der vorher gewonnenen Gleichung:

$$z \frac{d w_{\lambda_\varrho}}{dz} = \sum_{\sigma=2}^{\sigma=p} c_{\lambda_\sigma}^{(\lambda_\varrho)} \frac{d w_{\lambda_\sigma}}{dz} + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\nu^{(\lambda_\varrho)} F_\nu \qquad (\varrho=1,2,\cdots,p)$$

durch die ihnen entsprechenden Ausdrücke und ordnet nach den Größen $\frac{dw_{\lambda_2}}{dz}, \frac{dw_{\lambda_3}}{dz}, \cdots, \frac{dw_{\lambda_p}}{dz}$, $F_1, F_2, \cdots, F_n$, so erhält man weiter die für jeden Punkt z der Fläche T' geltende Gleichung:

$$0 = \sum_{\sigma=2}^{\sigma=p} \left[\sum_{\varrho=2}^{\varrho=p} c_{\lambda_\varrho}(c_{\lambda_\sigma}^{(\lambda_\varrho)} - \delta_{\varrho\sigma} z')\right] \frac{dw_{\lambda_\sigma}}{dz} + \sum_{\nu=1}^{\nu=q}\left[c_{\nu 0}(z-z') + \sum_{\varrho=2}^{\varrho=p} c_{\lambda_\varrho} d_\nu^{(\lambda_\varrho)} - k_\nu\right] F_\nu + \sum_{\nu=q+1}^{\nu=n}\left[\sum_{\varrho=2}^{\varrho=p} c_{\lambda_\varrho} d_\nu^{(\lambda_\varrho)} - k_\nu\right] F_\nu.$$

Besteht aber diese Gleichung für jeden Punkt z der Fläche T', so müssen nach dem in Art. 9 auf Seite 237 Bewiesenen die Koeffizienten der Größen $\frac{dw_{\lambda_2}}{dz}, \frac{dw_{\lambda_3}}{dz}, \cdots, \frac{dw_{\lambda_p}}{dz}$, $F_1, F_2, \cdots, F_n$ sämtlich mit der Null identisch sein, oder, was dasselbe, es muß

$$1.)\quad \sum_{\varrho=2}^{\varrho=p} c_{\lambda_\varrho}(c_{\lambda_\sigma}^{(\lambda_\varrho)} - \delta_{\varrho\sigma} z') = 0, \quad {\scriptstyle \sigma=2,3,\cdots,p},$$

$$2.)\quad c_{\nu 0} = 0, \quad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,q}, \qquad\qquad 3.)\quad \sum_{\varrho=2}^{\varrho=p} c_{\lambda_\varrho} d_\nu^{(\lambda_\varrho)} - k_\nu = 0, \quad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,n},$$

sein. Beachtet man nun, daß die Konstanten $k_1, k_2, \cdots, k_n$, der zu Anfang gemachten Festsetzung gemäß, nicht sämtlich mit der Null zusammenfallen, so erkennt man aus den Gleichungen 3.), daß auch die Größen $c_{\lambda_2}, c_{\lambda_3}, \cdots, c_{\lambda_p}$ nicht sämtlich mit der Null zusammenfallen können, und weiter aus den $p-1$ unter 1.) stehenden, in bezug auf die Größen $c_{\lambda_2}, c_{\lambda_3}, \cdots, c_{\lambda_p}$ homogenen linearen Gleichungen, daß die Determinante dieser Gleichungen den Wert Null haben muß. Damit ist aber bewiesen, daß die Determinante $|F_\nu(z_\mu)|$ für einen der gestellten Bedingung genügenden Wert $z = z'$ nur dann verschwinden kann, wenn die Determinante:

$$\varDelta(z) = \begin{vmatrix} c_{\lambda_2}^{(\lambda_2)} - z & \cdots & c_{\lambda_2}^{(\lambda_p)} \\ \cdot & & \cdots \\ c_{\lambda_p}^{(\lambda_2)} & \cdots & c_{\lambda_p}^{(\lambda_p)} - z \end{vmatrix}$$

für $z = z'$ verschwindet. Die aufgeworfene Frage ist also in verneinendem Sinne zu beantworten. Die Determinante $|F_\nu(z_\mu)|$ kann nur für eine endliche Anzahl von Punktsystemen $z_1, \cdots, z_n$ der Fläche T' den Wert Null besitzen.

Ein System von n zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen F-Funktionen soll ein Basissystem genannt werden, wenn sich jede zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige F-Funktion als homogene lineare Funktion der n Funktionen des Systems mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten darstellen läßt. Nach dem zu Anfang dieses Artikels Bewiesenen ist $F_1, \cdots, F_n$ ein solches System. Wie man alle überhaupt existierenden Basissysteme erhalten kann, zeigt die folgende Untersuchung.

Man verstehe unter $F'_1, \cdots, F'_n$ ein System von irgend n zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen F-Funktionen und denke sich die n Gleichungen:

$$(1.)\qquad F'_\nu = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} r_{\nu\sigma} F_\sigma, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, n,$$

gebildet, welche diese Funktionen als homogene lineare Funktionen der n Größen $F_1, \cdots, F_n$ mit rationalen Funktionen $r_{\nu\sigma}$, ${\scriptstyle \nu,\sigma = 1, 2, \cdots, n}$, von z als Koeffizienten darstellen. Verschwindet dann die Determinante $|r_{\nu\sigma}|$ des Systems dieser Gleichungen nicht identisch, so ist $F'_1, \cdots, F'_n$ ein Basissystem, da die Auflösung des Gleichungensystems für jede der Funktionen $F_1, \cdots, F_n$ und damit zugleich auch für jede beliebige zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion $F = F(z)$ — insoferne eine F-Funktion mit den Größen $F_1, \cdots, F_n$ immer durch eine Gleichung von der Form $F = r_1 F_1 + \cdots + r_n F_n$ mit rationalen Funktionen r von z als Koeffizienten verknüpft ist — eine homogene lineare Funktion der Größen $F'_1, \cdots, F'_n$ mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten liefert. Ist umgekehrt das System $F'_1, \cdots, F'_n$ ein Basissystem, besteht also ein Gleichungensystem von der Form:

$$(1'.)\qquad F_\varkappa = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} r'_{\varkappa\nu} F'_\nu, \qquad \varkappa = 1, 2, \cdots, n,$$

mit rationalen Funktionen $r'_{\varkappa\nu}$, ${\scriptstyle \varkappa,\nu = 1, 2, \cdots, n}$, von z als Koeffizienten, und trägt man alsdann in dieses System an Stelle der Größen F'_ν die ihnen auf Grund der Gleichungen (1.) entsprechenden Ausdrücke ein, so müssen in dem dadurch entstehenden Systeme:

$$0 = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \left(\sum_{\nu=1}^{\nu=n} r'_{\varkappa\nu} r_{\nu\sigma} - \delta_{\varkappa\sigma} \right) F_\sigma, \qquad \varkappa = 1, 2, \cdots, n,$$

die in runde Klammern eingeschlossenen rationalen Funktionen von z nach früher Bewiesenem sämtlich mit der Null identisch sein, und es kann daher, wegen der hieraus sich ergebenden Beziehung $|r'_{\varkappa\nu}|\,|r_{\nu\sigma}| = 1$ zwischen den Determinanten $|r'_{\varkappa\nu}|$, $|r_{\nu\sigma}|$, die

Determinante $|r_{\nu\sigma}|$ nicht identisch verschwinden. Man erkennt so, daß das System $F'_1, \cdots, F'_n$ dann, aber auch nur dann ein Basissystem ist, wenn die ihm entsprechende Determinante $|r_{\nu\sigma}|$ nicht identisch verschwindet, und daß man alle überhaupt existierenden Basissysteme $F'_1, \cdots, F'_n$ erhält, wenn man in dem Gleichungensysteme (1.) an Stelle des Systems der n^2 Koeffizienten $r_{\nu\sigma}$, ${\scriptstyle \nu,\sigma=1,2,\cdots,n}$, ein jedes System von n^2 rationalen Funktionen treten läßt, für welches die Determinante $|r_{\nu\sigma}|$ nicht identisch verschwindet.

Zwischen den Funktionen $F'_1, \cdots, F'_n$ besteht nur dann eine Relation von der Form $g'_1 F'_1 + \cdots + g'_n F'_n = 0$ mit ganzen rationalen nicht sämtlich mit der Null identischen Funktionen von z als Koeffizienten, wenn die aus der Gleichung $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} g'_\nu F'_\nu = 0$ durch Elimination der Größen $F'_1, \cdots, F'_n$ vermittels der Gleichungen (1.) hervorgehende Gleichung $\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=n}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} g'_\nu r_{\nu\sigma}\right) F_\sigma = 0$ oder, was nach früher Bewiesenem auf dasselbe hinauskommt, das Gleichungensystem $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} g'_\nu r_{\nu\sigma} = 0$, ${\scriptstyle \sigma=1,2,\cdots,n}$, sich durch ganze rationale nicht sämtlich mit der Null identische Funktionen $g'_1, \cdots, g'_n$ befriedigen läßt. Dieses aber ist nur dann der Fall, wenn die Determinante $|r_{\nu\sigma}|$ identisch verschwindet, oder, was dasselbe, wenn $F'_1, \cdots, F'_n$ kein Basissystem ist. Daraus folgt insbesondere, daß die Darstellung einer beliebigen zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Funktion $F = F(z)$ durch die n Funktionen $F'_1, \cdots, F'_n$ eines Basissystems in der Form $F = r'_1 F'_1 + \cdots + r'_n F'_n$, bei der die r' rationale Funktionen von z bezeichnen, nur auf eine Weise möglich ist.

Mit Hilfe der Gleichungen (1.) soll jetzt noch ein drittes Kriterium zur Entscheidung der Frage abgeleitet werden, ob die n Funktionen $F'_1, \cdots, F'_n$ ein Basissystem bilden oder nicht. Zu dem Ende bezeichne man mit $z_1, \cdots, z_n$ die irgend einem Werte von z entsprechenden n übereinander liegenden Punkte der Fläche T', mit $F_\sigma(z_\mu)$, $F'_\nu(z_\mu)$ ${\scriptstyle (\mu=1,2,\cdots,n)}$ die Werte der Funktionen F_σ, F'_ν für den Punkt z_μ und setze zur Abkürzung

$$|F_\sigma(z_\mu)| = \begin{vmatrix} F_1(z_1) & \cdots & F_n(z_1) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ F_1(z_n) & \cdots & F_n(z_n) \end{vmatrix}, \qquad |F'_\nu(z_\mu)| = \begin{vmatrix} F'_1(z_1) & \cdots & F'_n(z_1) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ F'_1(z_n) & \cdots & F'_n(z_n) \end{vmatrix}.$$

Beachtet man dann, daß zwischen den auf irgend einen Wert von z bezogenen Determinanten $|F_\sigma(z_\mu)|$, $|F'_\nu(z_\mu)|$ und der Determinante $|r_{\nu\sigma}|$ des Gleichungensystems (1.), wegen $F'_\nu(z_\mu) = \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=n} r_{\nu\sigma} F_\sigma(z_\mu)$, die Gleichung:

$$|F'_\nu(z_\mu)| = |r_{\nu\sigma}|\,|F_\sigma(z_\mu)|$$

besteht, und daß nach früher Bewiesenem die Determinante $|F_\sigma(z_\mu)|$ nur für eine endliche Anzahl von Punktsystemen $z_1, \cdots, z_n$ der Fläche T' den Wert Null besitzen kann, so erkennt man, daß die Determinante $|F'_\nu(z_\mu)|$ dann, aber auch nur dann nicht für jedes Punktsystem $z_1, \cdots, z_n$ der Fläche T' den Wert Null besitzt, wenn die Determinante $|r_{\nu\sigma}|$ nicht identisch verschwindet, oder, was dasselbe, wenn $F'_1, \cdots, F'_n$ ein Basissystem ist.

Die in diesem Artikel erhaltenen Resultate kann man jetzt schließlich dahin zusammenfassen, daß die vier Aussagen:

1.) *Die Funktionen* $F'_1, \cdots, F'_n$ *bilden ein Basissystem;*

2.) *Die Determinante* $|r_{\nu\sigma}|$ *des die Funktionen* $F'_1, \cdots, F'_n$ *durch die Funktionen* $F_1, \cdots, F_n$ *darstellenden Gleichungensystems* $F'_\nu = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} r_{\nu\sigma} F_\sigma, \; {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,n},$ *verschwindet nicht identisch;*

3.) *Zwischen den Funktionen* $F'_1, \cdots, F'_n$ *besteht keine Relation von der Form* $g'_1 F'_1 + \cdots + g'_n F'_n = 0$ *mit ganzen rationalen, nicht sämtlich mit der Null identischen Funktionen* g' *von* z *als Koeffizienten;*

4.) *Die Determinante* $|F'_\nu(z_\mu)|$ *besitzt nicht für jedes Punktsystem* $z_1, \cdots, z_n$ *der Fläche* T' *den Wert Null;*

gleichwertig sind, insoferne aus irgend einer von ihnen als Voraussetzung jede der drei anderen abgeleitet werden kann.

Siebenter Abschnitt.

Erzeugung der Riemann'schen Thetafunktion.

1.

Es soll zunächst die Frage beantwortet werden, ob die mit Hilfe eines beliebig angenommenen Größensystems $w_1 \mid w_2 \mid \cdots \mid w_p$ gebildete, auf die Fläche T'' bezogene Kongruenz:

$$\text{(C.)} \qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_1^{\varepsilon_\mu} \Big| \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_2^{\varepsilon_\mu} \Big| \cdots \Big| \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_p^{\varepsilon_\mu} \equiv w_1 \mid w_2 \mid \cdots \mid w_p$$

lösbar ist oder, mit anderen Worten, ob ein diese Kongruenz befriedigendes Punktsystem $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p$ existiert.

Zu dem Ende bringe man, nachdem man im Innern der Fläche T'' irgend p Punkte $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p$ gewählt hat, das Größensystem $w_1 \mid w_2 \mid \cdots \mid w_p$ in die durch die Gleichung:

$$w_1 \mid \cdots \mid w_p = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_1^{\eta_\mu} + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} (a_\nu + g'_\nu) a_{1\nu} + (b_1 + h'_1)\pi i \Big| \cdots \Big| \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_p^{\eta_\mu} + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} (a_\nu + g'_\nu) a_{p\nu} + (b_p + h'_p)\pi i$$

bestimmte Gestalt, bei der die a, b den Bedingungen $-1 < a_\nu \overline{\leq} 0$, $0 \leq b_\nu < 1$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, genügende reelle Größen, die g', h' ganze Zahlen bezeichnen. Das ist nach Früherem (vgl. S. 89) immer und nur auf eine Weise möglich. Führt man alsdann die so für die w gewonnenen Ausdrücke in die Kongruenz (C.) ein, so läßt sich dieselbe unter Benutzung der schon auf Seite 211 angewandten Bezeichnungsweise durch die Kongruenz:

$$\text{(C'.)} \qquad \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varepsilon_\mu}\right) \equiv \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\eta_\mu} + \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}\right)$$

ersetzen. Jetzt sind zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder fallen die $2p$ Größen a_ν, b_ν, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, sämtlich mit der Null zusammen, dann besitzt die Kongruenz (C'.) wenigstens die eine Lösung $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = (\eta_1, \cdots, \eta_p)$; oder es fallen die Größen a, b nicht sämtlich mit der Null zusammen, dann ist für $A_\nu = e^{-a_\nu 2\pi i}$, $B_\nu = e^{b_\nu 2\pi i}$ der Rang

$\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_p) < p - 1$ und es besitzt die Kongruenz (C'.) nach dem auf Seite 224 aufgestellten Satze wenigstens eine Lösung $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$. Damit ist aber bewiesen, daß die Kongruenz (C.), wie auch das Größensystem $w_1 | w_2 | \cdots | w_p$ beschaffen sein mag, immer wenigstens eine Lösung $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ besitzt.

Zwei Lösungen der Kongruenz (C.), die sich nur durch die Reihenfolge ihrer Punkte unterscheiden, sollen als identisch angesehen werden. Liegt von den Punkten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ einer Lösung der Kongruenz (C.) irgend einer an einem Schnitte a_ν, b_ν oder c_ν $(\nu = 1, 2, \cdots, p)$ und ersetzt man alsdann diesen Punkt durch den ihm entsprechenden, der anderen Seite des betreffenden Schnittes angehörigen, Punkt, so entsteht wiederum eine Lösung der Kongruenz (C.); auch diese soll als identisch mit der ursprünglichen angesehen werden.

Eine Lösung $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ der Kongruenz (C.) ist nun, wie nach den soeben gemachten Festsetzungen aus dem in Art. 7 des fünften Abschnittes erhaltenen Resultate folgt, zugleich die einzige, wenn $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = p$ ist. In dem Falle $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) < p$ dagegen besitzt die Kongruenz (C.), wie ebenfalls aus dem in Art. 7 des fünften Abschnittes erhaltenen Resultate folgt, unbegrenzt viele Lösungen, und diese werden durch die mit $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ äquivalenten Punktsysteme $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ geliefert.

Die auf der linken Seite der Kongruenz (C.) stehenden Funktionswerte $u_\varrho^{\varepsilon_\mu}$, $\mu, \varrho = 1, 2, \cdots, p$, lassen sich durch Integrale darstellen, indem man unter Benutzung von irgend p im Innern der Fläche T' gewählten Punkten $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_p$

$$u_\varrho^{\varepsilon_\mu} = u_\varrho^{\varkappa_\mu} + \int\!\!\!/_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu} du_\varrho, \qquad \mu, \varrho = 1, 2, \cdots, p,$$

setzt. Dabei soll der dem Integralzeichen beigefügte Strich andeuten, daß der von $\varkappa_\mu$ bis ε_μ sich erstreckende Integrationsweg die Begrenzung von T' nicht schneiden darf; hierdurch ist dann zugleich die Unabhängigkeit des Integralwertes vom Integrationsweg gesichert. Führt man nun diese Integrale in die Kongruenz (C.) ein, so nimmt dieselbe die Form:

$$\text{(C''.)} \qquad \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int\!\!\!/_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu} du\right) \equiv (w)$$

an.

Unter der Voraussetzung, daß $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ eine Lösung der Kongruenz (C.) ist, oder, was dasselbe, daß das Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ die Kongruenz (C''.) befriedigt, soll jetzt bewiesen werden, daß man die von den Punkten $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_p$ bis zu den Punkten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ beziehungsweise sich erstreckenden, in der Fläche T'' verlaufenden Integrationswege durch andere, die Begrenzung von T' schneidende, von der Art ersetzen kann, daß die Gleichung:

$$\text{(G.)} \qquad \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu} du\right) = (w)$$

erfüllt wird. Zu dem Ende möge zunächst das Folgende festgesetzt werden. Geht man auf irgend einem Wege vom Punkte $\varkappa_\mu$ zum Punkte ε_μ und überschreitet man dabei irgend einen der Schnitte a, b $\mathfrak{m}$-mal von der negativen auf die positive Seite und $\mathfrak{m}'$-mal von der positiven auf die negative Seite, so soll die Differenz $\mathfrak{m}-\mathfrak{m}'$ die dem Wege in bezug auf den betreffenden Schnitt zukommende charakteristische Zahl genannt werden. Nun beachte man, daß das Größensystem $w_1|\cdots|w_p$ sich auf Grund der Kongruenz (C''.) immer und nur auf eine Weise durch eine Gleichung von der Form:

$$w_1|\cdots|w_p = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_1^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu} du_1 - \sum_{\nu=1}^{\nu=p} g_\nu a_{1\nu} - h_1\pi i \Big| \cdots \Big| \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_p^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu} du_p - \sum_{\nu=1}^{\nu=p} g_\nu a_{p\nu} - h_p\pi i,$$

bei der die g, h ganze Zahlen bezeichnen, darstellen läßt. Man erkennt dann, daß die Gleichung (G.) immer dadurch, aber auch nur dadurch, befriedigt werden kann, daß man als Integrationswege solche p, von den Punkten $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_p$ bis zu den Punkten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ beziehungsweise sich erstreckende, Wege wählt, deren charakteristische Zahlen allgemein in bezug auf den Schnitt a_ν die Zahl h_ν, in bezug auf den Schnitt b_ν die Zahl g_ν als Summe besitzen.

Nach dem soeben Bewiesenen ist eine Lösung $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ der Kongruenz (C''.) immer auch eine Lösung der Gleichung (G.). Da aber auch umgekehrt jede Lösung der Gleichung (G.) die Kongruenz (C''.) befriedigt, so sind die Lösungen der Gleichung (G.) identisch mit den Lösungen der Kongruenz (C''.). Verbindet man dieses Resultat mit dem vorher für die Lösungen der Kongruenz (C''.) oder (C.) erhaltenen, so ergibt sich schließlich als Resultat der Untersuchungen dieses Artikels der folgende Satz:

„Die Gleichung:

$$\text{(G.)} \qquad \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu} du\right) = (w)$$

besitzt immer wenigstens eine Lösung $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$. *Diese Lösung ist zugleich die einzige, wenn* $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = p$ *ist; dagegen existieren unbegrenzt viele Lösungen der Gleichung* (G.), *wenn* $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) < p$ *ist, und diese werden durch die mit* $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ *äquivalenten Punktsysteme* $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ *geliefert."*

2.

Man betrachte jetzt in der Gleichung (G.) des vorhergehenden Artikels, der man auch die Form:

$$(G.)\qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_1^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int\limits_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu} du_1 \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_p^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int\limits_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu} du_p = w_1 \,|\, \cdots \,|\, w_p$$

geben kann, die Größen $w_1, w_2, \cdots, w_p$ als unabhängige komplexe Veränderliche und ordne zur Erzielung einer kürzeren Ausdrucksweise dem Wertsysteme $w_1 = w_1^{(1)} + w_1^{(2)} i, \cdots, w_p = w_p^{(1)} + w_p^{(2)} i$ denjenigen Punkt (w) eines $2p$-dimensionalen Raumes W, der die $2p$ reellen Größen $w_1^{(1)}, w_1^{(2)}; \cdots; w_p^{(1)}, w_p^{(2)}$ zu Koordinaten hat, als Korrespondenten zu. Der Gesamtheit der Wertsysteme $w_1, \cdots, w_p$ entspricht dann die Gesamtheit der Punkte (w) des Raumes W. In diesem Raume W fasse man nun diejenigen, mit $(\overline{w})$ zu bezeichnenden, Punkte ins Auge, denen mehr als eine Lösung $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ der Gleichung (G.) entspricht. Die Gesamtheit dieser Punkte $(\overline{w})$ wird durch die Gleichung (G.) geliefert, wenn man darin unter Beschränkung der Integrationswege auf die Fläche T' an Stelle von $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ ein jedes der Bedingung $\mathfrak{R}_{\left|{1 \atop 1}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) < p$ genügende Punktsystem treten läßt und zu jedem so erhaltenen Systeme (w) noch jedes System zusammengehöriger Periodizitätsmoduln hinzufügt. Da die sämtlichen Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ der charakterisierten Art aber auch aus der Kongruenz (vgl. Seite 171 u. Seite 132):

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_1^{\varepsilon_\mu} \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_p^{\varepsilon_\mu} \equiv -\sum_{\mu=p+1}^{\mu=2p-2} u_1^{\varepsilon_\mu} - 2k_1 \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, -\sum_{\mu=p+1}^{\mu=2p-2} u_p^{\varepsilon_\mu} - 2k_p$$

erhalten werden, wenn man darin an Stelle von $\varepsilon_{p+1}, \cdots, \varepsilon_{2p-2}$ ein jedes $p-2$ Punkte enthaltende Punktsystem treten läßt, so bilden die definierten Punkte $(\overline{w})$ in dem $2p$-dimensionalen Raume W eine Mannigfaltigkeit $\overline{W}$ von nur $2p-4$ Dimensionen. Von jedem Punkte (w) der nach Ausscheidung dieser Mannigfaltigkeit $\overline{W}$ übrigbleibenden, mit $W - \overline{W}$ zu bezeichnenden, $2p$-dimensionalen Mannigfaltigkeit kann man zu jedem andern Punkte (w') derselben auf einem ganz innerhalb $W - \overline{W}$ verlaufenden Wege gelangen; auch kann man von jedem Punkte $(\overline{w})$ der Mannigfaltigkeit $\overline{W}$ zu jedem Punkte (w) der Mannigfaltigkeit $W - \overline{W}$ auf einem Wege gelangen, der von dem Anfangspunkt $(\overline{w})$ abgesehen nur Punkte von $W - \overline{W}$ enthält.

Nach diesen Festsetzungen soll jetzt die durch die Gleichung (G.) bestimmte Abhängigkeit der Größen $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ von den Größen $w_1, \cdots, w_p$ für den Fall, daß der Punkt (w) dem Bereiche $W - \overline{W}$ angehört, näher untersucht werden. Zur Vereinfachung dieser Untersuchung denke man sich die in der Gleichung (G.) vorkommenden, bisher ganz willkürlichen Punkte $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_p$ im Innern der Fläche T' so gewählt, daß $\mathfrak{R}_{\left|{1 \atop 1}\right|}(\varkappa_1, \cdots, \varkappa_p) = p$

ist und daß zudem unter diesen Punkten weder zusammenfallende noch Punkte α, ∞ vorkommen. Für ein solches Punktsystem ist dann immer die Determinante $\sum \pm \frac{du_1^{\varkappa_1}}{d\varkappa_1} \cdots \frac{du_p^{\varkappa_p}}{d\varkappa_p}$ von Null verschieden, und der dem Größensysteme:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_1^{\varkappa_\mu} \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_p^{\varkappa_\mu} = w_1^{(0)} \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, w_p^{(0)}$$

entsprechende Punkt $(w^{(0)})$ gehört dem Bereiche $W - \overline{W}$ an.

Ein zweiter Punkt (w') des Bereiches $W - \overline{W}$ werde dadurch gewonnen, daß man in T' p der Bedingung $\mathfrak{N}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p') = p$ genügende, voneinander verschiedene Punkte $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ wählt, diese mit den Punkten $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_p$ beziehungsweise durch Kurven $k_1', \cdots, k_p'$ verbindet und unter Benutzung dieser Kurven als Integrationswege

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_1^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu'} du_1 \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_p^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu'} du_p = w_1' \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, w_p'$$

setzt. Man grenze nun in der Fläche T' allgemein zum Punkte ε_μ' das ihm entsprechende Gebiet G_μ ab, verstehe unter ε_μ irgend einen Punkt von G_μ, unter k_μ eine von $\varkappa_\mu$ über ε_μ' nach ε_μ führende, zwischen $\varkappa_\mu$ und ε_μ' mit k_μ' sich deckende, zwischen ε_μ' und ε_μ ganz in G_μ verlaufende Kurve und setze unter Benutzung dieser Kurven $k_1, \cdots, k_p$ als Integrationswege

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_1^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu} du_1 \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_p^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu} du_p = w_1 \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, w_p.$$

Die p so definierten, von dem Verlauf des zwischen ε_μ' und ε_μ liegenden Teils der Kurve k_μ ${\scriptstyle (\mu=1,2,\cdots,p)}$ unabhängigen Größen $w_1, \cdots, w_p$ sind dann einwertige und stetige Funktionen der p in ihrer Bewegung auf die Gebiete $G_1, \cdots, G_p$ beschränkten komplexen Veränderlichen $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$, die zudem für $\varepsilon_1 = \varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p = \varepsilon_p'$ die Werte $w_1', \cdots, w_p'$ annehmen.

Auf Grund der aufgestellten, die Größen w' und w definierenden Gleichungen lassen sich umgekehrt aber auch die Größen ε als Funktionen der Größen w darstellen. Zu dem Ende bilde man durch Subtraktion der vorletzten Gleichung von der letzten die neue Gleichung:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varepsilon_\mu'}^{\varepsilon_\mu}\!\!\!\!\!/\; du_1 \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varepsilon_\mu'}^{\varepsilon_\mu}\!\!\!\!\!/\; du_p = w_1 - w_1' \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, w_p - w_p',$$

bei der der Strich am Integralzeichen andeuten soll, daß dem Integrationsweg von ε_μ' bis ε_μ die Bedingung auferlegt ist, ganz in G_μ zu verlaufen, beachte, daß nach Art. 3 des fünften Abschnittes für jeden Punkt ε_μ des Gebietes G_μ ${\scriptstyle (\mu=1,2,\cdots,p)}$ die Entwicklungen:

$$\int_{\varepsilon'_\mu}^{\varepsilon_\mu} d u_\varrho = \left(\frac{d u_\varrho^{\varepsilon_\mu}}{d z_\mu}\right)_0 z_\mu + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n u_\varrho^{\varepsilon_\mu}}{d z_\mu^n}\right)_0 z_\mu^n, \qquad \varrho = 1, 2, \cdots, p,$$

bestehen, wobei $z_\mu = \varepsilon_\mu - \varepsilon'_\mu$ oder $z_\mu = (\varepsilon_\mu - \alpha)^{\frac{1}{\nu}}$ oder endlich $z_\mu = \varepsilon_\mu^{-\frac{1}{\iota}}$ ist, je nachdem ε'_μ ein gewöhnlicher Punkt der Fläche T oder ein Punkt α mit der Ordnungszahl $\nu - 1$ oder endlich ein Punkt ∞ mit der Ordnungszahl $\iota - 1$ ist, und ersetze die gewonnene Gleichung nach Einführung dieser Entwicklungen durch das Gleichungensystem:

$$(\mathfrak{G}_1.) \quad \begin{aligned} &\left(\frac{d u_1^{\varepsilon_1}}{d z_1}\right)_0 z_1 + \cdots + \left(\frac{d u_1^{\varepsilon_p}}{d z_p}\right)_0 z_p + \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n u_1^{\varepsilon_\mu}}{d z_\mu^n}\right)_0 z_\mu^n = w_1 - w'_1, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\left(\frac{d u_p^{\varepsilon_1}}{d z_1}\right)_0 z_1 + \cdots + \left(\frac{d u_p^{\varepsilon_p}}{d z_p}\right)_0 z_p + \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n u_p^{\varepsilon_\mu}}{d z_\mu^n}\right)_0 z_\mu^n = w_p - w'_p. \end{aligned}$$

Da $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_p) = p$ ist und zudem keine zwei der Punkte $\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_p$ sich decken, so hat die aus den Koeffizienten von $z_1, \cdots, z_p$ gebildete Determinante $\sum \pm \left(\frac{d u_1^{\varepsilon_1}}{d z_1}\right)_0 \cdots \left(\frac{d u_p^{\varepsilon_p}}{d z_p}\right)_0$ einen von Null verschiedenen Wert, und es lassen sich daher nach bekanntem Satze die Größen $z_1, \cdots, z_p$ für hinreichend kleine Werte der Moduln der Differenzen $w_1 - w'_1, \cdots, w_p - w'_p$ immer und nur auf eine Weise durch Gleichungen von der Form:

$$(\mathfrak{G}_2.) \quad \begin{aligned} z_1 &= \sum_{n_1=0}^{n_1=\infty} \cdots \sum_{n_p=0}^{n_p=\infty} c^{(1)}_{n_1 \cdots n_p} (w_1 - w'_1)^{n_1} \cdots (w_p - w'_p)^{n_p}, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_p &= \sum_{n_1=0}^{n_1=\infty} \cdots \sum_{n_p=0}^{n_p=\infty} c^{(p)}_{n_1 \cdots n_p} (w_1 - w'_1)^{n_1} \cdots (w_p - w'_p)^{n_p}, \end{aligned}$$

darstellen, bei denen die Koeffizienten c nur von den Punkten $\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_p$ abhängen, speziell die p Koeffizienten $c^{(1)}_{0 \cdots 0}, \cdots, c^{(p)}_{0 \cdots 0}$ sämtlich den Wert Null besitzen und die Koeffizienten der linearen Glieder durch die p^2 Gleichungen:

$$c^{(\mu)}_{n_1 \cdots n_{\varrho-1} n_\varrho n_{\varrho+1} \cdots n_p} = \frac{\alpha_\varrho^{(\mu)}}{\Delta_0}, \qquad \begin{matrix} \mu = 1, 2, \cdots, p, \\ \varrho = 1, 2, \cdots, p, \end{matrix}$$
$$(n_1 = \cdots = n_{\varrho-1} = 0,\ n_\varrho = 1,\ n_{\varrho+1} = \cdots = n_p = 0)$$

bestimmt sind, wenn mit $\alpha_\varrho^{(\mu)}$ die Adjunkte des Elementes $\left(\frac{d u_\varrho^{\varepsilon_\mu}}{d z_\mu}\right)_0$ in der Determinante $\Delta_0 = \sum \pm \left(\frac{d u_1^{\varepsilon_1}}{d z_1}\right)_0 \cdots \left(\frac{d u_p^{\varepsilon_p}}{d z_p}\right)_0$ bezeichnet wird. Der Wert des aufgestellten, durch $n_\varrho = 1$

charakterisierten, Koeffizienten $c^{(\mu)}$ ist zugleich, wie aus $(\mathfrak{G}_2.)$ folgt, der Wert $\left(\frac{\partial z_\mu}{\partial w_\varrho}\right)_{w=w'}$ der Derivierte $\frac{\partial z_\mu}{\partial w_\varrho}$ für $w_1 | \cdots | w_p = w'_1 | \cdots | w'_p$.

Die Darstellungen $(\mathfrak{G}_2.)$ gelten für alle Punkte (w) des durch die Bedingungen:

$$\operatorname{mod}[w_1 - w'_1] \overline{\gtrless} M, \;\cdots,\; \operatorname{mod}[w_p - w'_p] \overline{\gtrless} M$$

bestimmten Bereiches, wenn nur die positive Zahl M so klein gewählt ist, daß keines der den Punkten (w) des Bereiches entsprechenden Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ die Bedingung $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = p$ verletzt oder zusammenfallende Punkte enthält. Man erkennt aus diesen Darstellungen, daß jedem innerhalb des für sie festgelegten Bereiches von (w') nach (w) führenden Wege ein bestimmtes System von p in der Fläche T von $\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_p$ nach $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ beziehungsweise führenden und punktweise eindeutig einander zugeordneten Wegen entspricht.

Die vorstehenden Betrachtungen bleiben in Kraft, wenn man als Punkte $\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon_p$ die Punkte $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_p$ wählt und zugleich für $\mu = 1, 2, \cdots, p$ die von $\varkappa_\mu$ nach ε'_μ führende Kurve k'_μ sich auf den Punkt $\varkappa_\mu$ reduziert denkt, sodaß dann an Stelle der die Größen $w'_1, \cdots, w'_p$ definierenden Gleichung die Gleichung:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_1^{\varkappa_\mu} \Big| \cdots \Big| \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_p^{\varkappa_\mu} = w_1^{(0)} \Big| \cdots \Big| w_p^{(0)}$$

tritt.

Für die soeben beendete Untersuchung war das gewählte Punktsystem $\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_p$ nicht nur der Bedingung $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_p) = p$ unterworfen, sondern auch noch der weiteren, daß keine zwei seiner Punkte zusammenfallen. Im folgenden soll nun diese Untersuchung auf den Fall ausgedehnt werden, wo das im Rahmen der Bedingung $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_p) = p$ gewählte Punktsystem $\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_p$ zusammenfallende Punkte enthält. Man wird sich dabei, der einfacheren Darstellung wegen, auf den speziellen Fall beschränken, wo das Punktsystem $\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_p$ nur eine Gruppe zusammenfallender Punkte enthält, und zudem diese Gruppe durch die Punkte $\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_s$ $(1 < s \overline{\gtrless} p)$ gebildet wird.

Die durchzuführende Untersuchung deckt sich bis zur Gewinnung des Gleichungensystems $(\mathfrak{G}_1.)$ vollständig mit der früheren. Die ϱ^{te} Gleichung des so erhaltenen Systems $(\mathfrak{G}_1.)$ kann man aber, da im vorliegenden Falle die Punkte $\varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_s$ mit ε'_1 identisch sind und infolgedessen für $\varrho = 1, 2, \cdots, p$ und jede positive ganze Zahl n

$$\left(\frac{d^n u_\varrho^{\varepsilon_1}}{d z_1^n}\right)_0 = \left(\frac{d^n u_\varrho^{\varepsilon_2}}{d z_2^n}\right)_0 = \cdots = \left(\frac{d^n u_\varrho^{\varepsilon_s}}{d z_s^n}\right)_0$$

ist, auch in die Form:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n u_\varrho^{\varepsilon_1}}{d z_1^n}\right)_0(z_1^n+\cdots+z_s^n)+\sum_{\mu=s+1}^{\mu=p}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n u_\varrho^{\varepsilon_\mu}}{d z_\mu^n}\right)_0 z_\mu^n = w_\varrho - w_\varrho'$$

bringen. Führt man alsdann an Stelle der s Größen $z_1, z_2, \cdots, z_s$ s neue Größen $t_1, t_2, \cdots, t_s$ vermittels der Gleichungen:

$$\text{(T.)}\qquad z_1+\cdots+z_s=1!\,t_1,\quad z_1^2+\cdots+z_s^2=2!\,t_2,\quad\cdot\;\cdot\;\cdot,\quad z_1^s+\cdots+z_s^s=s!\,t_s$$

ein, so erhält man, wenn man noch beachtet, daß dadurch die Summe $z_1^n+\cdots+z_s^n$ $(n=s+1,\, s+2,\cdots)$ in eine ganze rationale Funktion der s Größen $t_1, \cdots, t_s$ übergeht, an Stelle von $(\mathfrak{G}_1.)$ das neue System:

$$(\bar{\mathfrak{G}}_1.)\qquad \begin{aligned}&\left(\frac{d u_\varrho^{\varepsilon_1}}{d z_1}\right)_0 t_1+\left(\frac{d^2 u_\varrho^{\varepsilon_1}}{d z_1^2}\right)_0 t_2+\cdots+\left(\frac{d^s u_\varrho^{\varepsilon_1}}{d z_1^s}\right)_0 t_s+\left(\frac{d u_\varrho^{\varepsilon_{s+1}}}{d z_{s+1}}\right)_0 z_{s+1}+\cdots+\left(\frac{d u_\varrho^{\varepsilon_p}}{d z_p}\right)_0 z_p\\ &+g_\varrho^{(2)}(t_1,\cdots,t_s,z_{s+1},\cdots,z_p)+\cdots+g_\varrho^{(n)}(t_1,\cdots,t_s,z_{s+1},\cdots,z_p)+\cdots\; = w_\varrho-w_\varrho',\end{aligned}$$

$$\varrho=1,2,\cdots,p,$$

wobei für $n=2,3,\cdots$ $g_\varrho^{(n)}(t_1,\cdots,t_s,z_{s+1},\cdots,z_p)$ eine homogene ganze rationale Funktion n^{ten} Grades der p Argumente bezeichnet. Da $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_1',\varepsilon_{s+1}',\cdots,\varepsilon_p')=p$ ist und zudem die Punkte $\varepsilon_1', \varepsilon_{s+1}', \cdots, \varepsilon_p'$ sämtlich voneinander verschieden sind, so hat die aus den Koeffizienten von $t_1,\cdots,t_s,z_{s+1},\cdots,z_p$ gebildete Determinante $\sum\pm\left(\frac{d u_1^{\varepsilon_1}}{d z_1}\right)_0\cdots\left(\frac{d^s u_s^{\varepsilon_1}}{d z_1^s}\right)_0\left(\frac{d u_{s+1}^{\varepsilon_{s+1}}}{d z_{s+1}}\right)_0\cdots\left(\frac{d u_p^{\varepsilon_p}}{d z_p}\right)_0$ einen von Null verschiedenen Wert, und es lassen sich daher die Größen $t_1,\cdots,t_s,z_{s+1},\cdots,z_p$ für hinreichend kleine Werte der Moduln der Differenzen $w_1-w_1', \cdots, w_p-w_p'$ immer und nur auf eine Weise durch Gleichungen von der Form:

$$(\bar{\mathfrak{G}}_2.)\qquad\begin{aligned}t_1\;&=\sum_{n_1=0}^{n_1=\infty}\cdots\sum_{n_p=0}^{n_p=\infty}\bar{c}^{(1)}_{n_1\cdots n_p}(w_1-w_1')^{n_1}\cdots(w_p-w_p')^{n_p},\\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ t_s\;&=\sum_{n_1=0}^{n_1=\infty}\cdots\sum_{n_p=0}^{n_p=\infty}\bar{c}^{(s)}_{n_1\cdots n_p}(w_1-w_1')^{n_1}\cdots(w_p-w_p')^{n_p},\\ z_{s+1}&=\sum_{n_1=0}^{n_1=\infty}\cdots\sum_{n_p=0}^{n_p=\infty}\bar{c}^{(s+1)}_{n_1\cdots n_p}(w_1-w_1')^{n_1}\cdots(w_p-w_p')^{n_p}.\\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ z_p\;&=\sum_{n_1=0}^{n_1=\infty}\cdots\sum_{n_p=0}^{n_p=\infty}\bar{c}^{(p)}_{n_1\cdots n_p}(w_1-w_1')^{n_1}\cdots(w_p-w_p')^{n_p}\end{aligned}$$

darstellen, bei denen die Koeffizienten $\bar{c}$ nur von den Punkten $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ abhängen, speziell die p Koeffizienten $\bar{c}_{0\ldots 0}^{(1)}, \cdots, \bar{c}_{0\ldots 0}^{(p)}$ sämtlich den Wert Null besitzen und die Koeffizienten der linearen Glieder durch die p^2 Gleichungen:

$$\bar{c}^{(\mu)}_{n_1 \cdots n_{\varrho-1} n_\varrho n_{\varrho+1} \cdots n_p} = \frac{\bar{\alpha}^{(\mu)}_\varrho}{\bar{\Delta}_0}, \qquad \begin{matrix} \mu = 1, 2, \cdots, p, \\ \varrho = 1, 2, \cdots, p, \end{matrix}$$
$$(n_1 = \cdots = n_{\varrho-1} = 0,\ n_\varrho = 1,\ n_{\varrho+1} = \cdots = n_p = 0)$$

bestimmt sind, wenn mit $\bar{\alpha}^{(\mu)}_\varrho$ die Adjunkte des der ϱ^{ten} Horizontalreihe und der μ^{ten} Vertikalreihe gemeinsamen Elements in der Determinante:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \left(\frac{d u_1^{\varepsilon_1}}{d z_1}\right)_0 & \left(\frac{d^2 u_1^{\varepsilon_1}}{d z_1^2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d^s u_1^{\varepsilon_1}}{d z_1^s}\right)_0 & \left(\frac{d u_1^{\varepsilon_{s+1}}}{d z_{s+1}}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d u_1^{\varepsilon_p}}{d z_p}\right)_0 \\ \left(\frac{d u_2^{\varepsilon_1}}{d z_1}\right)_0 & \left(\frac{d^2 u_2^{\varepsilon_1}}{d z_1^2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d^s u_2^{\varepsilon_1}}{d z_1^s}\right)_0 & \left(\frac{d u_2^{\varepsilon_{s+1}}}{d z_{s+1}}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d u_2^{\varepsilon_p}}{d z_p}\right)_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \left(\frac{d u_p^{\varepsilon_1}}{d z_1}\right)_0 & \left(\frac{d^2 u_p^{\varepsilon_1}}{d z_1^2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d^s u_p^{\varepsilon_1}}{d z_1^s}\right)_0 & \left(\frac{d u_p^{\varepsilon_{s+1}}}{d z_{s+1}}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d u_p^{\varepsilon_p}}{d z_p}\right)_0 \end{vmatrix}$$

bezeichnet wird. Der Wert des aufgestellten, durch $n_\varrho = 1$ charakterisierten, Koeffizienten $\bar{c}^{(\mu)}$ ist zugleich, wie aus ($\mathfrak{G}_2$.) folgt, der Wert $\left(\frac{\partial t_\mu}{\partial w_\varrho}\right)_{w = w'}$ der Derivierte $\frac{\partial t_\mu}{\partial w_\varrho}$ oder der Wert $\left(\frac{\partial z_\mu}{\partial w_\varrho}\right)_{w = w'}$ der Derivierte $\frac{\partial z_\mu}{\partial w_\varrho}$ für $w_1 | \cdots | w_p = w_1' | \cdots | w_p'$, je nachdem μ der Zahlenreihe $1, 2, \cdots, s$ oder der Zahlenreihe $s+1, s+2, \cdots, p$ angehört. Die Darstellungen ($\mathfrak{G}_2$.) zusammen mit den die Größen t definierenden Gleichungen (T.) lassen erkennen, daß jedem innerhalb des für diese Darstellungen in Betracht kommenden Konvergenzgebietes von (w') nach (w) führenden Wege ein bestimmtes System von p in der Fläche T von $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_1', \varepsilon_{s+1}', \cdots, \varepsilon_p'$ nach $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s, \varepsilon_{s+1}, \cdots, \varepsilon_p$ beziehungsweise führenden und punktweise eindeutig einander zugeordneten Wegen entspricht.

Man gehe jetzt in dem Bereiche $W - \overline{W}$ von dem früher definierten Punkte $(w^{(0)})$ auf irgend einem Wege $\mathfrak{W}$ zu einem andern Punkte $(w^{(1)})$ und mache zunächst die Voraussetzung, daß für keinen zwischen $(w^{(0)})$ und $(w^{(1)})$ gelegenen Punkt (w) dieses Weges $\mathfrak{W}$ das ihm auf Grund der Gleichung (G.) entsprechende Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ zusammenfallende Punkte enthält. Bewegt sich dann der Punkt (w) auf dem Wege $\mathfrak{W}$ vom Anfangspunkt $(w^{(0)})$ bis zum Endpunkt $(w^{(1)})$, so durchlaufen, wie aus den soeben erhaltenen Resultaten folgt, die korrespondierenden Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ gleichzeitig ein bestimmtes

System $\mathfrak{S}$ von p, von $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_p$ beziehungsweise ausgehenden und punktweise eindeutig einander zugeordneten, Wegen, deren Endpunkte $\varepsilon_1^{(1)}, \cdots, \varepsilon_p^{(1)}$ die zum Punkte $(w^{(1)})$ gehörige Lösung der Gleichung (G.) bilden. Geht man auf irgend einem andern, die für $\mathfrak{W}$ gestellten Bedingungen ebenfalls erfüllenden Wege von $(w^{(0)})$ nach $(w^{(1)})$, so werden als Endpunkte der ihm entsprechenden Wege der Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ wieder die Punkte $\varepsilon_1^{(1)}, \cdots, \varepsilon_p^{(1)}$, sei es in der früheren oder unter Umständen auch in einer anderen Reihenfolge, auftreten. Geht dagegen der in $W - \overline{W}$ von $(w^{(0)})$ bis $(w^{(1)})$ verlaufende Weg $\mathfrak{W}$ durch einen oder mehrere Punkte (w), für die das entsprechende Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ zusammenfallende Punkte enthält, so kann man einem solchen Wege $\mathfrak{W}$ mehrere Systeme $\mathfrak{S}$ von p, von $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_p$ beziehungsweise ausgehenden, Wegen zuordnen; immer aber werden die p Wege eines jeden dieser Systeme $\mathfrak{S}$ als Endpunkte die Punkte $\varepsilon_1^{(1)}, \cdots, \varepsilon_p^{(1)}$ in einer gewissen Reihenfolge besitzen.

Auf Grund der Ergebnisse dieses Artikels kann jetzt die Frage nach der durch die Gleichung (G.) bestimmten Abhängigkeit der Größen $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ von den Größen $w_1, \cdots, w_p$ für den Fall, daß der Punkt (w) dem Bereiche $W - \overline{W}$ angehört, durch den folgenden Satz beantwortet werden:

„*Die durch die Gleichung* (G.) *mit den Größen* $w_1, \cdots, w_p$ *verknüpften Größen* $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ *sind im Bereich* $W - \overline{W}$ *p-wertige Funktionen der komplexen Veränderlichen* $w_1, \cdots, w_p$, *jedoch p-wertige Funktionen von der Art, daß die p, durch Punkte der Fläche T repräsentierten, Werte* $\varepsilon_1^{(1)}, \cdots, \varepsilon_p^{(1)}$, *welche diese Funktionen bei analytischer Fortsetzung auf einem innerhalb* $W - \overline{W}$ *vom Punkte* $(w^{(0)})$ *zum Punkte* $(w^{(1)})$ *führenden Wege nach vorhergegangener Wahl eines der zum Punkt* $(w^{(0)})$ *gehörigen Wertsysteme, etwa* $\varepsilon_1 = \varkappa_1, \cdots, \varepsilon_p = \varkappa_p$, *als Ausgangssystem annehmen, bei Zugrundelegung eines anderen, dieselben Bedingungen erfüllenden Weges höchstens eine Änderung ihrer Reihenfolge erfahren.*“

Aus diesem Satze soll jetzt zum Schlusse noch eine wichtige Folgerung gezogen werden. Es sei $S(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ eine in der ganzen Fläche T' einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$, die zudem für jede Permutation $\nu_1, \cdots, \nu_p$ der Zahlen $1, 2, \cdots, p$ der Gleichung $S(\varepsilon_{\nu_1}, \cdots, \varepsilon_{\nu_p}) = S(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ genügt, und es werde im Anschluß an die Gleichung (G.)

$$\text{(G}'.) \qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_1^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu}{}' du_1 \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_p^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu}{}' du_p = w_1 \,|\, \cdots \,|\, w_p,$$

gesetzt, wobei die den Integralzeichen beigefügten Striche andeuten sollen, daß die Integrationswege die Begrenzung von T' nicht schneiden dürfen. Die zu den so definierten Größen w gehörigen Punkte (w) erfüllen einen bestimmten, mit $\{W\}$ zu bezeichnenden, Teil des zu Anfang definierten $2p$-dimensionalen Raumes W, und entsprechend erfüllen diejenigen Punkte (w) des Raumes $\{W\}$, welche durch die Gleichung $(G'.)$ geliefert werden, wenn man darin an Stelle von $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ ein jedes der Bedingung $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = p$ genügende Punktsystem treten läßt, einen, mit $\{W - \overline{W}\}$ zu bezeichnenden, Teil des ebenfalls zu Anfang definierten Bereichs $W - \overline{W}$. Bezieht man nun die Funktion $S(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ mit Hilfe der Gleichung $(G'.)$ auf den Raum $\{W\}$ und wendet den vorher gewonnenen Satz an, so erkennt man, daß $S(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$, als Funktion der Veränderlichen $w_1, \cdots, w_p$ betrachtet, eine in dem ganzen Bereiche $\{W - \overline{W}\}$ einwertige und stetige Funktion $E(w_1, \cdots, w_p)$ der komplexen Veränderlichen $w_1, \cdots, w_p$ ist, deren Wert für einen beliebigen Punkt (w) des Bereiches $\{W - \overline{W}\}$ durch die Gleichung $E(w_1, \cdots, w_p) = S(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ geliefert wird, wenn dabei $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ die dem Punkte (w) entsprechende Lösung der Gleichung $(G'.)$ bezeichnet.

Um die Derivierte $\frac{\partial E}{\partial w_\varrho}$ zu erhalten, hat man die folgenden Überlegungen anzustellen. Man verstehe unter (w') irgend einen Punkt des Bereichs $\{W - \overline{W}\}$, unter $(\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p')$ die ihm entsprechende Lösung der Gleichung $(G'.)$ und beachte, daß die Funktion $S(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ sich für eine gewisse Umgebung der Punkte $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ durch eine Gleichung von der Form:

$$S(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = \sum_{m_1=0}^{m_1=\infty} \cdots \sum_{m_p=0}^{m_p=\infty} e_{m_1 \cdots m_p} z_1^{m_1} \cdots z_p^{m_p}$$

darstellen läßt, bei der die Koeffizienten e nur von den Punkten $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ abhängen und z_μ $(\mu = 1, 2, \cdots, p)$ die auf Seite 250 für einen beliebigen Punkt ε_μ' definierte Größe ist.

Ist nun zunächst das Punktsystem $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ von der Art, daß keine zwei seiner Punkte sich decken, so gelten für hinreichend kleine Werte der Moduln der Differenzen $w_1 - w_1', \cdots, w_p - w_p'$ die schon früher aufgestellten Entwicklungen $(\mathfrak{G}_2.)$, und man erhält dann auf Grund der Gleichung:

$$\frac{\partial E}{\partial w_\varrho} = \frac{\partial S}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial w_\varrho} + \frac{\partial S}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial w_\varrho} + \cdots + \frac{\partial S}{\partial z_p}\frac{\partial z_p}{\partial w_\varrho},$$

wenn man noch den Wert von $\frac{\partial S}{\partial z_\mu}$ für $w_1 \,|\, \cdots \,|\, w_p = w_1' \,|\, \cdots \,|\, w_p'$ oder, was dasselbe, für $z_1 = 0, \cdots, z_p = 0$ mit $\left(\frac{\partial S}{\partial z_\mu}\right)_0$ bezeichnet und das früher im Anschluß an die Gleichung $(\mathfrak{G}_2.)$ über $\left(\frac{\partial z_\mu}{\partial w_\varrho}\right)_{w = w'}$ Gesagte beachtet, die Derivierte $\frac{\partial E}{\partial w_\varrho}$ für den Punkt (w') des Bereichs $\{W - \overline{W}\}$ dargestellt durch die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial w_\varrho}\right)_{w=w'} = \frac{1}{\varDelta_0}\begin{vmatrix} \left(\frac{du_1^{\varepsilon_1}}{dz_1}\right)_0 & \left(\frac{du_1^{\varepsilon_2}}{dz_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{du_1^{\varepsilon_p}}{dz_p}\right)_0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \left(\frac{du_{\varrho-1}^{\varepsilon_1}}{dz_1}\right)_0 & \left(\frac{du_{\varrho-1}^{\varepsilon_2}}{dz_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{du_{\varrho-1}^{\varepsilon_p}}{dz_p}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial S}{\partial z_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial S}{\partial z_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial S}{\partial z_p}\right)_0 \\ \left(\frac{du_{\varrho+1}^{\varepsilon_1}}{dz_1}\right)_0 & \left(\frac{du_{\varrho+1}^{\varepsilon_2}}{dz_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{du_{\varrho+1}^{\varepsilon_p}}{dz_p}\right)_0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \left(\frac{du_p^{\varepsilon_1}}{dz_1}\right)_0 & \left(\frac{du_p^{\varepsilon_2}}{dz_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{du_p^{\varepsilon_p}}{dz_p}\right)_0 \end{vmatrix},$$

bei der $\varDelta_0 = \sum \pm \left(\frac{du_1^{\varepsilon_1}}{dz_1}\right)_0 \cdots \left(\frac{du_p^{\varepsilon_p}}{dz_p}\right)_0$ ist.

Enthält dagegen das Punktsystem $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ zusammenfallende Punkte, so wird man in der vorher für S aufgestellten Gleichung bei jeder in dem Punktsysteme enthaltenen Gruppe zusammenfallender Punkte an Stelle der diesen Punkten entsprechenden Größen z_σ Größen t der früher definierten Art einführen und beachten, daß diese Größen t sich durch Reihen darstellen lassen, die nach Potenzen von $w_1 - w_1', \cdots, w_p - w_p'$ mit positiven ganzzahligen Exponenten fortschreiten. Zur Erläuterung des weiter einzuschlagenden Verfahrens kann man sich wieder auf den speziellen Fall beschränken, wo das Punktsystem $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ nur eine Gruppe zusammenfallender Punkte enthält, und zudem diese Gruppe durch die Punkte $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_s'$ $(1 < s \leqq p)$ gebildet wird. In diesem Falle besteht die Gleichung:

$$\frac{\partial E}{\partial w_\varrho} = \frac{\partial S}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial w_\varrho} + \cdots + \frac{\partial S}{\partial t_s}\frac{\partial t_s}{\partial w_\varrho} + \frac{\partial S}{\partial z_{s+1}}\frac{\partial z_{s+1}}{\partial w_\varrho} + \cdots + \frac{\partial S}{\partial z_p}\frac{\partial z_p}{\partial w_\varrho},$$

und man erhält auf Grund derselben, wenn man noch die Werte von $\frac{\partial S}{\partial t_\mu}$ $(\mu = 1, 2, \cdots, s)$, $\frac{\partial S}{\partial z_\mu}$ $(\mu = s+1, \cdots, p)$ für $w_1 \mid \cdots \mid w_p = w_1' \mid \cdots \mid w_p'$ oder, was dasselbe, für $t_1 = 0, \cdots, t_s = 0$, $z_{s+1} = 0, \cdots, z_p = 0$ mit $\left(\frac{\partial S}{\partial t_\mu}\right)_0$, $\left(\frac{\partial S}{\partial z_\mu}\right)_0$ beziehungsweise bezeichnet und das früher im Anschluß an die Gleichung ($\mathfrak{G}_2$.) über $\left(\frac{\partial t_\mu}{\partial w_\varrho}\right)_{w=w'}$ $(\mu = 1, 2, \cdots, s)$, $\left(\frac{\partial z_\mu}{\partial w_\varrho}\right)_{w=w'}$ $(\mu = s+1, \cdots, p)$ Gesagte beachtet, die Derivierte $\frac{\partial E}{\partial w_\varrho}$ für den Punkt (w') des Bereichs $\{W - \overline{W}\}$ dargestellt durch die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial w_\varrho}\right)_{w=w'} = \frac{1}{\Delta_0} \begin{vmatrix} \left(\frac{d u_1^{\varepsilon_1}}{d z_1}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d^s u_1^{\varepsilon_1}}{d z_1^s}\right)_0 & \left(\frac{d u_1^{\varepsilon_{s+1}}}{d z_{s+1}}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d u_1^{\varepsilon_p}}{d z_p}\right)_0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \left(\frac{d u_{\varrho-1}^{\varepsilon_1}}{d z_1}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d^s u_{\varrho-1}^{\varepsilon_1}}{d z_1^s}\right)_0 & \left(\frac{d u_{\varrho-1}^{\varepsilon_{s+1}}}{d z_{s+1}}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d u_{\varrho-1}^{\varepsilon_p}}{d z_p}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial S}{\partial t_1}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial S}{\partial t_s}\right)_0 & \left(\frac{\partial S}{\partial z_{s+1}}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial S}{\partial z_p}\right)_0 \\ \left(\frac{d u_{\varrho+1}^{\varepsilon_1}}{d z_1}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d^s u_{\varrho+1}^{\varepsilon_1}}{d z_1^s}\right)_0 & \left(\frac{d u_{\varrho+1}^{\varepsilon_{s+1}}}{d z_{s+1}}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d u_{\varrho+1}^{\varepsilon_p}}{d z_p}\right)_0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \left(\frac{d u_p^{\varepsilon_1}}{d z_1}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d^s u_p^{\varepsilon_1}}{d z_1^s}\right)_0 & \left(\frac{d u_p^{\varepsilon_{s+1}}}{d z_{s+1}}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d u_p^{\varepsilon_p}}{d z_p}\right)_0 \end{vmatrix},$$

bei der $\Delta_0 = \sum \pm \left(\frac{d u_1^{\varepsilon_1}}{d z_1}\right)_0 \cdots \left(\frac{d^s u_s^{\varepsilon_1}}{d z_1^s}\right)_0 \left(\frac{d u_{s+1}^{\varepsilon_{s+1}}}{d z_{s+1}}\right)_0 \cdots \left(\frac{d u_p^{\varepsilon_p}}{d z_p}\right)_0$ ist. — Setzt man in der erhaltenen Gleichung $s = 1$ und dementsprechend $t_1 = z_1$, $\left(\frac{\partial S}{\partial t_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial S}{\partial z_1}\right)_0$, so erhält man wieder die vorher abgeleitete Gleichung, welche sich auf den Fall bezieht, wo die Punkte $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ sämtlich voneinander verschieden sind.

3.

Man grenze in der Fläche T' p keinen der Punkte α, ∞ enthaltende Bereiche $B_1, \cdots, B_p$ ab. Durch Betrachtungen, welche den in Art. 7 des fünften Abschnittes in bezug auf die Determinante $\sum \pm A^{(1)}(\varepsilon_1) \cdots A^{(m-\tau)}(\varepsilon_{m-\tau})$ angestellten ganz ähnlich sind, läßt sich dann zeigen, daß die Determinante:

$$\Delta(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = \begin{vmatrix} \frac{d u_1^{\varepsilon_1}}{d \varepsilon_1} & \cdots & \frac{d u_1^{\varepsilon_p}}{d \varepsilon_p} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{d u_p^{\varepsilon_1}}{d \varepsilon_1} & \cdots & \frac{d u_p^{\varepsilon_p}}{d \varepsilon_p} \end{vmatrix}$$

nicht für je p den Bereichen $B_1, \cdots, B_p$ beziehungsweise angehörige Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ den Wert Null besitzen kann. Wählt man jetzt p den Bereichen $B_1, \cdots, B_p$ beziehungsweise angehörige Punkte $\bar\varepsilon_1, \cdots, \bar\varepsilon_p$ von der Art, daß die aufgestellte Determinante nicht verschwindet, wenn man gleichzeitig $\varepsilon_1 = \bar\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p = \bar\varepsilon_p$ setzt, so lassen sich, da dieselbe, als Funktion der p Veränderlichen $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ betrachtet, für $\varepsilon_1 = \bar\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p = \bar\varepsilon_p$ stetig ist, in T'' p diese Punkte beziehungsweise enthaltende Gebiete $G_1, \cdots, G_p$ von der Art abgrenzen, daß die aufgestellte Determinante für jedes dem System $G_1, \cdots, G_p$ angehörige Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt.

Es sei nun $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ irgend ein dem Systeme $G_1, \cdots, G_p$ angehöriges Punktsystem. Mit diesen Punkten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ verbinde man den der positiven Seite von c_p und der negativen Seite von c_1 gemeinsam angehörigen Punkt durch Schnitte $l_{\varepsilon_1}, \cdots, l_{\varepsilon_p}$ und bilde alsdann zu der dadurch aus T' hervorgehenden Fläche T'', unter Benutzung einer im Folgenden erst zu bestimmenden, nur von $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ abhängigen Größe $\Delta(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ die Funktion:

$$L\left|{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \atop z}\right| = -\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \underset{0}{P}\left|{\varepsilon_\varrho \atop z}\right| + \Delta(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p). \tag{1.}$$

Die so zu den Punkten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ definierte Funktion $L\left|{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \atop z}\right|$ ist dann eine in T'' einwertige Funktion der komplexen Veränderlichen z, welche für jeden von $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ verschiedenen Punkt z der Fläche T'' stetig ist, für den Punkt ε_ϱ $\scriptstyle(\varrho=1,2,\cdots,p)$ unstetig wird wie $\ln(z-\varepsilon_\varrho)$ und deren, allgemein mit L^+, L^- zu bezeichnenden, Werte in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten $\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-$ in der Weise verknüpft sind, daß

$$\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \{ L^+ = L^-, \\
&\text{längs } b_\nu \{ L^+ = L^- - 2\left(u_\nu^z - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} u_\nu^{\varepsilon_\varrho} - k_\nu\right) - a_{\nu\nu}, \\
&\text{längs } c_\nu \{ L^+ = L^- + 2\pi i, && \scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p, \\
&\text{längs } l_{\varepsilon_\varrho} \{ L^+ = L^- - 2\pi i, && \scriptstyle \varrho=1,2,\cdots,p,
\end{aligned}$$

ist. Betrachtet man die letzten Gleichungen und speziell das Verhalten der Funktion $L\left|{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \atop z}\right|$ längs des Schnittes b_ν $\scriptstyle(\nu=1,2,\cdots,p)$, so wird man auf die Frage geführt, ob es nicht möglich ist, die Größe $\Delta(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ als Funktion der komplexen Veränderlichen $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ so zu bestimmen, daß die Funktion $L\left|{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \atop z}\right|$ der $p+1$ Größen $z, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ eine nur von den p Größen:

$$u_1^z - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} u_1^{\varepsilon_\varrho} - k_1,\ u_2^z - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} u_2^{\varepsilon_\varrho} - k_2, \cdots, u_p^z - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} u_p^{\varepsilon_\varrho} - k_p$$

abhängige Funktion wird, oder, was dasselbe, so, daß die Funktion $L\left|{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \atop z}\right|$ der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial L}{\partial z} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\left(\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} c_\varrho^{(\sigma)} \frac{d u_\sigma^z}{dz}\right)\frac{\partial L}{\partial \varepsilon_\varrho} = 0 \tag{2.}$$

genügt, bei der die $c_\varrho^{(\sigma)}$, $\scriptstyle \varrho,\sigma=1,2,\cdots,p$, die durch die Gleichungen:

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} c_\varrho^{(\sigma)} \frac{d u_\nu^{\varepsilon_\varrho}}{d\varepsilon_\varrho} = \delta_{\sigma\nu} \qquad \scriptstyle \sigma,\nu=1,2,\cdots,p \tag{3.}$$

oder durch die damit äquivalenten Gleichungen:

$$(3'.)\qquad \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} c_\varrho^{(\sigma)} \frac{d u_\sigma^{\varepsilon_\nu}}{d\varepsilon_\nu} = \delta_{\varrho\nu} \qquad {\scriptstyle \varrho,\,\nu=1,2,\cdots,p}$$

bestimmten p^2 Funktionen der komplexen Veränderlichen $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ bezeichnen. Die Äquivalenz der beiden Forderungen erkennt man, wenn man beachtet, daß jede der p Größen $u_\nu^z - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} u_\nu^{\varepsilon_\varrho} - k_\nu$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung (2.) ist, und daß jede Funktion von partikulären Lösungen wieder eine Lösung der Differentialgleichung (2.) bildet; weiter aber auch beachtet, daß die p genannten Größen, als Funktionen von $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ betrachtet, die von Null verschiedene Größe $(-1)^p \varDelta(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ als Funktionaldeterminante besitzen, also durch keine Relation verknüpft sind, und daß jede Lösung der Differentialgleichung (2.) als Funktion von irgend p unabhängigen partikulären Lösungen dargestellt werden kann. Ersetzt man jetzt noch in der Differentialgleichung (2.) die Funktion L durch den auf der rechten Seite der Gleichung (1.) stehenden Ausdruck, so erhält man schließlich zur Bestimmung der Funktion $\varDelta = \varDelta(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ die Differentialgleichung:

$$(4.)\qquad -\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix} z \\ \varepsilon_\varrho \end{matrix}\right| + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} c_\varrho^{(\sigma)} \left(-\underset{1}{P}\left|\begin{matrix} \varepsilon_\varrho \\ z \end{matrix}\right| + \frac{\partial \varDelta}{\partial \varepsilon_\varrho}\right) \frac{d u_\sigma^z}{dz} = 0 .$$

Das in der gewonnenen Differentialgleichung vorkommende zweigliedrige Aggregat:

$$\mathfrak{A}(z) = -\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix} z \\ \varepsilon_\varrho \end{matrix}\right| - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} c_\varrho^{(\sigma)} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix} \varepsilon_\varrho \\ z \end{matrix}\right| \frac{d u_\sigma^z}{dz}$$

ist eine in T' einwertige Funktion der komplexen Veränderlichen z, die, wie unmittelbar zu sehen, in je zwei entsprechenden Punkten $\mathscr{P}^+$, $\mathscr{P}^-$ eines Schnittes a_ν oder c_ν ${\scriptstyle (\nu=1,2,\cdots,p)}$ denselben Wert besitzt, die aber auch, da

$$\text{längs } b_\nu \begin{cases} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix} z \\ \varepsilon \end{matrix}\right|^+ = \underset{1}{P}\left|\begin{matrix} z \\ \varepsilon \end{matrix}\right|^- + \frac{2}{p}\frac{d u_\nu^z}{dz}, \quad \underset{1}{P}\left|\begin{matrix} \varepsilon \\ z \end{matrix}\right|^+ = \underset{1}{P}\left|\begin{matrix} \varepsilon \\ z \end{matrix}\right|^- - 2\frac{d u_\nu^\varepsilon}{d\varepsilon}, \\ \mathfrak{A}(z)^+ = \mathfrak{A}(z)^- - 2\frac{d u_\nu^z}{dz} + 2\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p}\left(\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} c_\varrho^{(\sigma)} \frac{d u_\nu^{\varepsilon_\varrho}}{d\varepsilon_\varrho}\right)\frac{d u_\sigma^z}{dz}, \end{cases}$$

ist, und die hierbei in runde Klammern eingeschlossene Summe nach (3.) den Wert $\delta_{\sigma\nu}$ hat, in je zwei entsprechenden Punkten $\mathscr{P}^+$, $\mathscr{P}^-$ eines Schnittes b_ν ${\scriptstyle (\nu=1,2,\cdots,p)}$ denselben Wert besitzt. Die Funktion $\mathfrak{A}(z)$ ist also eine A-Funktion. Beachtet man dann noch, daß für den Punkt $z = \varepsilon_\varrho$ ${\scriptstyle (\varrho=1,2,\cdots,p)}$ das erste Glied des Aggregats $\mathfrak{A}(z)$ unendlich wird wie $\frac{1}{z-\varepsilon_\varrho}$, das zweite Glied wie $-\left(\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} c_\varrho^{(\sigma)} \frac{d u_\sigma^{\varepsilon_\varrho}}{d\varepsilon_\varrho}\right)\frac{1}{z-\varepsilon_\varrho}$, also wegen (3'.) wie $-\frac{1}{z-\varepsilon_\varrho}$, und daß daher die Funktion $\mathfrak{A}(z)$ für den Punkt $z = \varepsilon_\varrho$ $_{(\varrho=1,2,\cdots,p)}$ stetig ist, daß sie dagegen das den Punkt α_ϱ $_{(\varrho=1,2,\cdots,r)}$ $(\mu_\varrho - 1)$-mal enthaltende Punktsystem $\alpha_1, \cdots, \alpha_1; \cdots; \alpha_r, \cdots, \alpha_r$ oder auch nur einen Teil desselben als System der ∞^1-Punkte und das den Punkt $\infty_\varkappa$ $_{(\varkappa=1,2,\cdots,q)}$ $(\iota_\varkappa+1)$-mal enthaltende Punktsystem $\infty_1, \cdots, \infty_1; \cdots; \infty_q, \cdots, \infty_q$ als Bestandteil des Systems der 0^1-Punkte besitzt, so erkennt man (s. Seite 171), daß $\mathfrak{A}(z)$ eine Funktion $\frac{du}{dz}$ ist, und daß daher eine Gleichung von der Form:

$$\mathfrak{A}(z) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} K_\sigma \frac{du_\sigma^z}{dz}$$

besteht, bei der die K_σ, $_{\sigma=1,2,\cdots,p}$, von z freie, also nur von $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ abhängige Größen bezeichnen. Aus dieser Gleichung geht, wenn man $\mathfrak{A}(z)$ durch seinen Ausdruck ersetzt, die Gleichung:

$$(5.)\qquad -\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix} z \\ \varepsilon_\varrho \end{matrix}\right| - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} c_\varrho^{(\sigma)} \underset{1}{P}\left|\begin{matrix} \varepsilon_\varrho \\ z \end{matrix}\right| \frac{du_\sigma^z}{dz} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} K_\sigma \frac{du_\sigma^z}{dz}$$

hervor, und die Subtraktion dieser letzteren Gleichung von der Gleichung (4.) liefert dann die mit der Differentialgleichung (4.) äquivalente Differentialgleichung:

$$(6.)\qquad \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p}\left(\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} c_\varrho^{(\sigma)} \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_\varrho} + K_\sigma\right)\frac{du_\sigma^z}{dz} = 0.$$

Genügt aber eine Funktion $A = A(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ dieser Differentialgleichung, so genügt sie, da die p Funktionen $\frac{du_\sigma^z}{dz}$, $_{\sigma=1,2,\cdots,p}$, linearunabhängig sind, auch dem Systeme der p Differentialgleichungen:

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} c_\varrho^{(\sigma)} \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_\varrho} + K_\sigma = 0, \qquad {\scriptstyle \sigma=1,2,\cdots,p}$$

oder dem damit äquivalenten, durch Auflösung nach den Größen $\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_\nu}$, $_{\nu=1,2,\cdots,p}$, unter Beachtung der Relationen (3'.) entstehenden, Systeme der p Differentialgleichungen:

$$(7.)\qquad \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_\nu} = -\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} K_\sigma \frac{du_\sigma^{\varepsilon_\nu}}{d\varepsilon_\nu}, \qquad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,}$$

wie umgekehrt.

Damit ist bewiesen, daß die Forderung, die in (1.) vorkommende Größe $A(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ in der zu Anfang angegebenen Weise zu bestimmen, sich mit der Forderung deckt, das System der p Differentialgleichungen (7.), bei dem $K_1, K_2, \cdots, K_p$, die durch die Gleichung (5.) vollständig bestimmten Funktionen von $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ bezeichnen, zu integrieren.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß eine Funktion $A = A(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ existiert, welche dem Systeme der p Differentialgleichungen (7.) genügt. Zu dem Ende hat man die rechte Seite der unter (7.) stehenden Gleichung in eine andere Form zu bringen.

Man lasse in der Gleichung (5.) z gegen ε_ν konvergieren und gehe zur Grenze über. Es ergibt sich so, unter Berücksichtigung von (3'.), für den auf der rechten Seite von (7.) stehenden Ausdruck die Gleichung:

$$-\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} K_\sigma \frac{du_\sigma^{\varepsilon_\nu}}{d\varepsilon_\nu} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}{}' P\Big|_1^{\varepsilon_\nu}_{\varepsilon_\varrho}\Big| + \lim_{z=\varepsilon_\nu}\Big\{ P\Big|_1^{z}_{\varepsilon_\nu}\Big| + P\Big|_1^{\varepsilon_\nu}_{z}\Big| \Big(\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} c_\nu^{(\sigma)} \frac{du_\sigma^z}{dz}\Big)\Big\},$$

wobei der am Summenzeichen stehende Akzent andeuten soll, daß bei der Summation für den Index ϱ der Wert ν auszuschließen ist. Beachtet man dann, daß für das Gebiet des Punktes ε_ν die Entwicklung $\frac{du_\sigma^z}{dz} = \frac{du_\sigma^{\varepsilon_\nu}}{d\varepsilon_\nu} + \frac{d^2 u_\sigma^{\varepsilon_\nu}}{d\varepsilon_\nu^2}(z-\varepsilon_\nu) + \cdots$, also auch die Entwicklung:

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} c_\nu^{(\sigma)} \frac{du_\sigma^z}{dz} = 1 + (z-\varepsilon_\nu) \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} c_\nu^{(\sigma)} \frac{d^2 u_\sigma^{\varepsilon_\nu}}{d\varepsilon_\nu^2} + \cdots,$$

besteht, und daß

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} c_\nu^{(\sigma)} \frac{d^2 u_\sigma^{\varepsilon_\nu}}{d\varepsilon_\nu^2} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon_\nu} \ln \varDelta(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p), \quad \lim_{z=\varepsilon_\nu}\Big\{ P\Big|_1^{\varepsilon_\nu}_{z}\Big| (z-\varepsilon_\nu)\Big\} = 1$$

ist, so erkennt man zunächst, daß man der Gleichung (7.) auch die Form:

$$(8.)\qquad \frac{\partial \varDelta}{\partial\varepsilon_\nu} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}{}' P\Big|_1^{\varepsilon_\nu}_{\varepsilon_\varrho}\Big| + \lim_{z=\varepsilon_\nu}\Big(P\Big|_1^{\varepsilon_\nu}_{z}\Big| + P\Big|_1^{z}_{\varepsilon_\nu}\Big|\Big) + \frac{\partial}{\partial\varepsilon_\nu} \ln \varDelta(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$$

geben kann. Der hier auf der rechten Seite stehende Limes deckt sich aber mit dem Werte, welchen die in Art. 8 des vierten Abschnittes (s. Seite 119, 123, 132) definierte, zu der ebendort durch die Gleichung:

$$(9.)\qquad F(z) = -\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (\mu_\varrho - 1)\, P\Big|_0^{\alpha_\varrho}_{z}\Big| + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} (\iota_\varkappa + 1)\, P\Big|_0^{\infty_\varkappa}_{z}\Big| + 2\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} (\mathfrak{g}_\sigma + 1)\, u_\sigma\big| z\big| + c$$

dargestellten Funktion $F(z)$ als Derivierte gehörige Funktion $f(z)$ für $z = \varepsilon_\nu$ besitzt. Ersetzt man dementsprechend auf der rechten Seite der Gleichung (8.) diesen Limes durch $\frac{\partial F(\varepsilon_\nu)}{\partial\varepsilon_\nu}$, so erhält man schließlich das mit dem Systeme (7.) äquivalente System:

$$(10.)\qquad \frac{\partial \varDelta}{\partial\varepsilon_\nu} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon_\nu}\Big\{ \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}{}' P\Big|_0^{\varepsilon_\nu}_{\varepsilon_\varrho}\Big| + F(\varepsilon_\nu) + \ln \varDelta(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)\Big\}, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p,$$

und erkennt dann sofort, daß die allgemeinste dem Systeme der p Differentialgleichungen (7.) genügende Funktion $\varDelta$ durch die Gleichung:

$$(11.)\qquad \varDelta(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = \sum_{\nu=1}^{\nu=p-1} \sum_{\varrho=\nu+1}^{\varrho=p} P\Big|_0^{\varepsilon_\nu}_{\varepsilon_\varrho}\Big| + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} F(\varepsilon_\nu) + \ln \varDelta(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) + c',$$

bei der c' eine von $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ unabhängige Größe bezeichnet, dargestellt wird.

Den so für $\varDelta(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ erhaltenen Ausdruck führe man nun, nachdem man $F(\varepsilon_\nu)$ durch den ihm auf Grund der Gleichung (9.) entsprechenden Ausdruck ersetzt hat, in die die Funktion $L\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z\end{matrix}\right|$ definierende Gleichung (1.) ein. Man erhält dann schließlich für die Funktion $L\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z\end{matrix}\right|$ die Gleichung:

$$(12.)\qquad L\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z\end{matrix}\right| = -\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\varrho \\ z\end{matrix}\right| - \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}(\mu_\varrho - 1)\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\alpha_\varrho \\ \varepsilon_\nu\end{matrix}\right| + \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}(\iota_\varkappa + 1)\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\infty_\varkappa \\ \varepsilon_\nu\end{matrix}\right|$$
$$+ \ln \varDelta(\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_p) + \sum_{\nu=1}^{\nu=p-1}\sum_{\varrho=\nu+1}^{\varrho=p} \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\nu \\ \varepsilon_\varrho\end{matrix}\right| + 2\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}(\mathfrak{g}_\sigma + 1)u_\sigma^{\varepsilon_\nu} + \bar{c},$$

bei der $\bar{c}$ eine von z, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ freie Konstante bezeichnet.

4.

Man definiere jetzt mit Hilfe der soeben gewonnenen Funktion L eine neue Funktion G der $p+1$ Größen z, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$, indem man

$$(13.)\qquad G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z\end{matrix}\right| = e^{L\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z\end{matrix}\right| - \bar{c}}$$

oder, was dasselbe,

$$(14.)\quad G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z\end{matrix}\right| = \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \\ z\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_p \\ z\end{matrix}\right| \frac{\left(\Theta\left|\begin{matrix}\alpha_1 \\ \varepsilon_1\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\alpha_1 \\ \varepsilon_p\end{matrix}\right|\right)^{\mu_1 - 1} \cdots \left(\Theta\left|\begin{matrix}\alpha_r \\ \varepsilon_1\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\alpha_r \\ \varepsilon_p\end{matrix}\right|\right)^{\mu_r - 1}}{\left(\Theta\left|\begin{matrix}\infty_1 \\ \varepsilon_1\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\infty_1 \\ \varepsilon_p\end{matrix}\right|\right)^{\iota_1 + 1} \cdots \left(\Theta\left|\begin{matrix}\infty_q \\ \varepsilon_1\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\infty_q \\ \varepsilon_p\end{matrix}\right|\right)^{\iota_q + 1}} \; \frac{\begin{vmatrix} \frac{du_1^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} & \frac{du_1^{\varepsilon_2}}{d\varepsilon_2} & \cdots & \frac{du_1^{\varepsilon_p}}{d\varepsilon_p} \\ \frac{du_2^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} & \frac{du_2^{\varepsilon_2}}{d\varepsilon_2} & \cdots & \frac{du_2^{\varepsilon_p}}{d\varepsilon_p} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{du_p^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} & \frac{du_p^{\varepsilon_2}}{d\varepsilon_2} & \cdots & \frac{du_p^{\varepsilon_p}}{d\varepsilon_p} \end{vmatrix}}{\left\{\begin{matrix} \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2\end{matrix}\right| \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \\ \varepsilon_3\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \\ \varepsilon_p\end{matrix}\right| \\ \times\, \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_2 \\ \varepsilon_3\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_2 \\ \varepsilon_p\end{matrix}\right| \\ \times \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ \times\, \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_{p-1} \\ \varepsilon_p\end{matrix}\right| \end{matrix}\right\}} \, e^{2\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=p}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}(\mathfrak{g}_\sigma + 1)u_\sigma^{\varepsilon_\nu}}$$

setzt, wobei Θ die in Art. 2 des fünften Abschnittes definierte, der Relation $\Theta\left|\begin{matrix}\eta_1 \\ \eta_2\end{matrix}\right| = -\Theta\left|\begin{matrix}\eta_2 \\ \eta_1\end{matrix}\right|$ genügende, Funktion ist, und lasse alsdann die den Punkten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ zu Anfang des vorhergehenden Artikels auferlegte Bedingung fallen, betrachte also jeden dieser Punkte, ebenso wie z, als einen in T' frei beweglichen Punkt.

Als Funktion des Punktes z hat nun G die folgenden Eigenschaften. G ist eine in T' allenthalben einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen z, die in dem Falle $\mathfrak{N}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = p$ die p Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ als 0^1-Punkte besitzt, in dem Falle $\mathfrak{N}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) < p$ dagegen in der ganzen Fläche T' den Wert Null hat, und deren Werte in je zwei entsprechenden Punkten z^+, z^- der Begrenzung von T' in der Weise verknüpft sind, daß

$$\text{(S.)}\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \Big\{ G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p\\ z^+\end{matrix}\right| = G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p\\ z^-\end{matrix}\right|,\\ &\text{längs } b_\nu \Big\{ G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p\\ z^+\end{matrix}\right| = G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p\\ z^-\end{matrix}\right| e^{-2\left(u_\nu^{z^-} - \sum\limits_{\varrho=1}^{\varrho=p} u_\nu^{\varepsilon_\varrho} - k_\nu\right) - a_{\nu\nu}}, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p,\\ &\text{längs } c_\nu \Big\{ G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p\\ z^+\end{matrix}\right| = G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p\\ z^-\end{matrix}\right|, \end{aligned}$$

ist.

Als Funktion des Punktes ε_σ $(\sigma=1,2,\cdots,p)$ dagegen hat G die folgenden Eigenschaften. G ist eine in T' allenthalben einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen ε_σ, die in dem Falle, wo $\mathfrak{N}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{\sigma-1}, \varepsilon_{\sigma+1}, \cdots, \varepsilon_p) = p - 1$ ist und z, auch nach Aufhebung der Schnitte a, b, c, mit keinem dieser Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{\sigma-1}, \varepsilon_{\sigma+1}, \cdots, \varepsilon_p$ zusammenfällt, den Punkt z und die $p-1$ Punkte des zu $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{\sigma-1}, \varepsilon_{\sigma+1}, \cdots, \varepsilon_p$ gehörigen Restpunktsystems einer Funktion $\frac{du}{dz}$ als 0^1-Punkte besitzt, in jedem anderen Falle dagegen in der ganzen Fläche T' den Wert Null hat, und deren Werte in je zwei entsprechenden Punkten ε_σ^+, ε_σ^- der Begrenzung von T' in der Weise verknüpft sind, daß

$$\text{(S}_{\sigma}\text{.)}\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \Big\{ G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{\sigma-1}\ \varepsilon_\sigma^+\ \varepsilon_{\sigma+1} \cdots \varepsilon_p\\ z\end{matrix}\right| = G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{\sigma-1}\ \varepsilon_\sigma^-\ \varepsilon_{\sigma+1} \cdots \varepsilon_p\\ z\end{matrix}\right|,\\ &\text{längs } b_\nu \Big\{ G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{\sigma-1}\ \varepsilon_\sigma^+\ \varepsilon_{\sigma+1} \cdots \varepsilon_p\\ z\end{matrix}\right| = G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{\sigma-1}\ \varepsilon_\sigma^-\ \varepsilon_{\sigma+1} \cdots \varepsilon_p\\ z\end{matrix}\right| e^{+2\left(u_\nu^{z} - \sum\limits_{\varrho=1}^{\varrho=\sigma-1} u_\nu^{\varepsilon_\varrho} - u_\nu^{\varepsilon_\sigma^-} - \sum\limits_{\varrho=\sigma+1}^{\varrho=p} u_\nu^{\varepsilon_\varrho} - k_\nu\right) - a_{\nu\nu}},\\ &\text{längs } c_\nu \Big\{ G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{\sigma-1}\ \varepsilon_\sigma^+\ \varepsilon_{\sigma+1} \cdots \varepsilon_p\\ z\end{matrix}\right| = G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{\sigma-1}\ \varepsilon_\sigma^-\ \varepsilon_{\sigma+1} \cdots \varepsilon_p\\ z\end{matrix}\right|, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p, \end{aligned}$$

ist. Für die Ableitung der zweiten unter $(\mathrm{S}_{\sigma}.)$ stehenden Relation, der man auch die Form:

$$G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{\sigma-1}\ \varepsilon_\sigma^-\ \varepsilon_{\sigma+1} \cdots \varepsilon_p\\ z\end{matrix}\right| = G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{\sigma-1}\ \varepsilon_\sigma^+\ \varepsilon_{\sigma+1} \cdots \varepsilon_p\\ z\end{matrix}\right| e^{-2\left(u_\nu^{z} - \sum\limits_{\varrho=1}^{\varrho=\sigma-1} u_\nu^{\varepsilon_\varrho} - u_\nu^{\varepsilon_\sigma^+} - \sum\limits_{\varrho=\sigma+1}^{\varrho=p} u_\nu^{\varepsilon_\varrho} - k_\nu\right) - a_{\nu\nu}}$$

geben kann, ist die im vierten Abschnitt am Schlusse des Art. 8 aufgestellte Gleichung zu benutzen.

Man verstehe jetzt unter $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ p beliebig gewählte Punkte der Fläche T', verbinde diese Punkte durch p Kurven $k_1', \cdots, k_p'$, welche die Schnitte a, b, c beliebig oft schneiden dürfen, mit den in Art. 1 angenommenen Punkten $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_p$ beziehungsweise und bezeichne mit $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ irgend p diesen Kurven beziehungsweise angehörige Punkte. Mit Hilfe der für $\sigma = 1, 2, \cdots, p$ geltenden Gleichungen $(\mathrm{S}_\sigma.)$ läßt sich dann die durch die Gleichung (14.) zunächst nur für die Fläche T' definierte Funktion G bei festgehaltenem z als Funktion der komplexen Veränderlichen $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ von der Stelle $(\varkappa_1, \cdots, \varkappa_p)$ bis zur Stelle $(\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p')$ den Kurven $k_1', \cdots, k_p'$ entlang fortsetzen. In dem speziellen Falle, wo die Kurven $k_1', \cdots, k_p'$ vollständig in der Fläche T' verlaufen oder nur irgendwelche der Schnitte c schneiden, ist der durch diese analytische Fortsetzung für die Stelle $(\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p')$ sich ergebende Wert mit $G\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_1' \cdots \varepsilon_p' \\ z\end{smallmatrix}\right|$ identisch. Überschreitet dagegen der Punkt ε_σ $(\sigma = 1, 2, \cdots, p)$ bei seiner Bewegung auf der Kurve k_σ' von $\varkappa_\sigma$ bis ε_σ' den Schnitt a_ν $\mathfrak{m}_{\sigma\nu}$-mal von der negativen auf die positive Seite und $\mathfrak{m}_{\sigma\nu}'$-mal von der positiven auf die negative Seite, den Schnitt b_ν $\mathfrak{n}_{\sigma\nu}$-mal von der negativen auf die positive Seite und $\mathfrak{n}_{\sigma\nu}'$-mal von der positiven auf die negative Seite, sodaß also, nach der in Art. 1 aufgestellten Definition, der Kurve k_σ' in bezug auf den Schnitt a_ν die charakteristische Zahl $\mathfrak{m}_{\sigma\nu} - \mathfrak{m}_{\sigma\nu}'$, in bezug auf den Schnitt b_ν die charakteristische Zahl $\mathfrak{n}_{\sigma\nu} - \mathfrak{n}_{\sigma\nu}'$ zukommt, so erhält man auf Grund der Gleichungen $(\mathrm{S}_\sigma.)$, nachdem man noch zur Abkürzung

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p}(\mathfrak{m}_{\sigma\nu} - \mathfrak{m}_{\sigma\nu}') = h_\nu, \qquad \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p}(\mathfrak{n}_{\sigma\nu} - \mathfrak{n}_{\sigma\nu}') = g_\nu$$

gesetzt hat, bei analytischer Fortsetzung der Funktion G längs der Kurven $k_1', \cdots, k_p'$ für die Stelle $(\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p')$ den Wert:

$$G\left\{\begin{smallmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{smallmatrix}\right\}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_1' \cdots \varepsilon_p' \\ z\end{smallmatrix}\right| = G\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_1' \cdots \varepsilon_p' \\ z\end{smallmatrix}\right| e^{-2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu\left(u_\mu^{z} - \sum\limits_{\varrho=1}^{\varrho=p} u_\mu^{\varepsilon_\varrho'} - k_\mu\right) - \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g_\mu g_{\mu'}}. \tag{15.}$$

Das Symbol $\left\{\begin{smallmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{smallmatrix}\right\}$ soll die Charakteristik des Kurvensystems $k_1', \cdots, k_p'$ genannt werden. Zu jedem Kurvensysteme $k_1', \cdots, k_p'$ gehört nur eine Charakteristik, während umgekehrt ein vorgegebenes Symbol $\left\{\begin{smallmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{smallmatrix}\right\}$ unbegrenzt vielen Kurvensystemen als Charakteristik zukommt. Auf Grund der Gleichung (15.) erkennt man, daß die Werte $G\left\{\begin{smallmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{smallmatrix}\right\}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_1' \cdots \varepsilon_p' \\ z\end{smallmatrix}\right|$, $G\left\{\begin{smallmatrix} g_1 + g_1' \cdots g_p + g_p' \\ h_1 + h_1' \cdots h_p + h_p' \end{smallmatrix}\right\}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_1' \cdots \varepsilon_p' \\ z\end{smallmatrix}\right|$, welche man erhält, wenn man die Funktion G von der Stelle $(\varkappa_1, \cdots, \varkappa_p)$ bis zur Stelle $(\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p')$ das eine Mal längs eines Kurvensystems mit der Charakteristik $\left\{\begin{smallmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{smallmatrix}\right\}$, das andere Mal längs eines Kurvensystems mit der Charakteristik $\left\{\begin{smallmatrix} g_1 + g_1' \cdots g_p + g_p' \\ h_1 + h_1' \cdots h_p + h_p' \end{smallmatrix}\right\}$ analytisch fortsetzt, durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} G\left\{\begin{smallmatrix} g_1 + g_1' \cdots g_p + g_p' \\ h_1 + h_1' \cdots h_p + h_p' \end{smallmatrix}\right\}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_1' \cdots \varepsilon_p' \\ z\end{smallmatrix}\right| &= G\left\{\begin{smallmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{smallmatrix}\right\}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_1' \cdots \varepsilon_p' \\ z\end{smallmatrix}\right| \\ &\quad \times e^{-2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu'\left(u_\mu^{z} - \sum\limits_{\varrho=1}^{\varrho=p} u_\mu^{\varepsilon_\varrho'} - k_\mu + \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} g_{\mu'} a_{\mu\mu'} + h_\mu \pi i\right) - \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g_\mu' g_{\mu'}'} \end{aligned} \tag{16.}$$

verknüpft sind.

Die Funktion $G\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z\end{smallmatrix}\right|$ erfüllt auf Grund der Gleichungen (2.), (13.) für je $p+1$ von α, ∞ verschiedene, der Bedingung $\varDelta(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) \neq 0$ genügende Punkte $z, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial G}{\partial z} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \left(\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} c_\varrho^{(\sigma)} \frac{du_\sigma^z}{dz} \right) \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_\varrho} = 0$$

oder, was dasselbe, die Differentialgleichung:

$$(17.)\qquad \frac{1}{\varDelta} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial G}{\partial z} & \dfrac{\partial G}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \dfrac{\partial G}{\partial \varepsilon_p} \\ -\dfrac{du_1^z}{dz} & \dfrac{du_1^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} & \cdots & \dfrac{du_1^{\varepsilon_p}}{d\varepsilon_p} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -\dfrac{du_p^z}{dz} & \dfrac{du_p^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} & \cdots & \dfrac{du_p^{\varepsilon_p}}{d\varepsilon_p} \end{vmatrix} = 0,$$

bei der $\varDelta = \sum \pm \frac{du_1^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} \cdots \frac{du_p^{\varepsilon_p}}{d\varepsilon_p}$ ist. Diese Gleichung soll jetzt in eine andere Form gebracht werden.

Man verstehe unter $z', \varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ irgend $p+1$ nur der Bedingung $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p') = p$ unterworfene Punkte der Fläche T'' und nehme, der einfacheren Darstellung wegen, an, daß das Punktsystem $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ nur eine Gruppe zusammenfallender Punkte enthält und daß zudem diese Gruppe durch die Punkte $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_s'$ $(1 < s \leqq p)$ gebildet wird. Für eine gewisse Umgebung der Punkte $z', \varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ gilt dann die Entwicklung:

$$G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z\end{matrix}\right| = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{m_1=0}^{m_1=\infty} \cdots \sum_{m_p=0}^{m_p=\infty} e_{m m_1 \cdots m_p} \zeta^m z_1^{m_1} \cdots z_p^{m_p},$$

bei der die Koeffizienten e nur von den Punkten $z', \varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ abhängen, $\zeta = z - z'$ oder $\zeta = (z-\alpha)^{\frac{1}{\nu}}$ oder endlich $\zeta = z^{-\frac{1}{\iota}}$ ist, je nachdem z' ein gewöhnlicher Punkt der Fläche T'' oder ein Punkt α mit der Ordnungszahl $\nu - 1$ oder ein Punkt ∞ mit der Ordnungszahl $\iota - 1$ ist, und allgemein z_μ $(\mu = 1, 2, \cdots, p)$ die auf Seite 250 für einen beliebigen Punkt ε_μ' definierte Größe ist. Da die Funktion $G\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z\end{smallmatrix}\right|$ für jede Permutation $\nu_1, \cdots, \nu_p$ der Zahlen $1, 2, \cdots, p$ der Gleichung $G\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_{\nu_1} \cdots \varepsilon_{\nu_p} \\ z\end{smallmatrix}\right| = G\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z\end{smallmatrix}\right|$ genügt, so kann man in die soeben für $G\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z\end{smallmatrix}\right|$ aufgestellte Entwicklung an Stelle der den Punkten $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_s'$ entsprechenden Größen $z_1, \cdots, z_s$ die in Art. 2 durch die Gleichungen (T.) definierten Größen $t_1, \cdots, t_s$ einführen, und man erhält auf diese Weise eine Gleichung von der Form:

$$G\left|{}^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_p}_{z}\right| = \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{m_1=0}^{m_1=\infty}\cdots\sum_{m_p=0}^{m_p=\infty}\bar{e}_{m m_1\cdots m_p}\zeta^m t_1^{m_1}\cdots t_s^{m_s} z_{s+1}^{m_{s+1}}\cdots z_p^{m_p},$$

bei der die Koeffizienten $\bar{e}$ nur von den Punkten $z', \varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ abhängen. Beachtet man nun, daß auf Grund dieser Gleichung

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial G}{\partial \zeta}\frac{d\zeta}{dz},$$

$$\frac{\partial G}{\partial z_\varrho} = \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=s}\frac{\partial G}{\partial t_\mu}\frac{\partial t_\mu}{\partial z_\varrho}\right)\frac{dz_\varrho}{d\varepsilon_\varrho}, \qquad \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_\varrho} = \frac{\partial G}{\partial z_\varrho}\frac{dz_\varrho}{d\varepsilon_\varrho},$$
$$\varrho = 1, 2, \cdots, s, \qquad \varrho = s+1, s+2, \cdots, p,$$

ist, daß entsprechend, wenn man

$$u_\sigma^{\varepsilon_1} + u_\sigma^{\varepsilon_2} + \cdots + u_\sigma^{\varepsilon_p} = w_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, p)$$

setzt und die Größe w_σ, wie es schon in Art. 2 geschehen ist, als Funktion von $t_1, \cdots, t_s, z_{s+1}, \cdots, z_p$ betrachtet, für $\sigma = 1, 2, \cdots, p$ die Gleichungen:

$$\frac{du_\sigma^z}{dz} = \frac{du_\sigma^z}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz},$$

$$\frac{du_\sigma^{\varepsilon_\varrho}}{d\varepsilon_\varrho} = \frac{\partial w_\sigma}{\partial \varepsilon_\varrho} = \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=s}\frac{\partial w_\sigma}{\partial t_\mu}\frac{\partial t_\mu}{\partial z_\varrho}\right)\frac{dz_\varrho}{d\varepsilon_\varrho}, \qquad \frac{du_\sigma^{\varepsilon_\varrho}}{d\varepsilon_\varrho} = \frac{du_\sigma^{\varepsilon_\varrho}}{dz_\varrho}\frac{dz_\varrho}{d\varepsilon_\varrho},$$
$$\varrho = 1, 2, \cdots, s, \qquad \varrho = s+1, s+2, \cdots, p,$$

bestehen, und führt die so gewonnenen Ausdrücke in die Gleichung (17.) ein, so geht diese Gleichung, nach Unterdrückung des von Null verschiedenen Faktors $\frac{d\zeta}{dz}$, über in die Gleichung:

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial \zeta} & \frac{\partial G}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial G}{\partial t_s} & \frac{\partial G}{\partial z_{s+1}} & \cdots & \frac{\partial G}{\partial z_p} \\ -\frac{du_1^z}{d\zeta} & \frac{\partial w_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial t_s} & \frac{du_1^{\varepsilon_{s+1}}}{dz_{s+1}} & \cdots & \frac{du_1^{\varepsilon_p}}{dz_p} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -\frac{du_p^z}{d\zeta} & \frac{\partial w_p}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial w_p}{\partial t_s} & \frac{du_p^{\varepsilon_{s+1}}}{dz_{s+1}} & \cdots & \frac{du_p^{\varepsilon_p}}{dz_p} \end{vmatrix} = 0,$$

bei der $\Delta = \sum \pm \frac{\partial w_1}{\partial t_1}\cdots\frac{\partial w_s}{\partial t_s}\frac{du_{s+1}^{\varepsilon_{s+1}}}{dz_{s+1}}\cdots\frac{du_p^{\varepsilon_p}}{dz_p}$ ist.

Nachdem so die Differentialgleichung (17.) in eine andere Form gebracht ist, lasse man die Punkte $z, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ sich den Punkten $z', \varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ beziehungsweise unbegrenzt nähern, und beachte, daß dann jede der Größen $\zeta, t_1, \cdots, t_s, z_{s+1}, \cdots, z_p$ gegen Null, die Größe $\frac{\partial w_\sigma}{\partial t_\mu}\binom{\sigma=1,2,\cdots,p}{\mu=1,2,\cdots,s}$ auf Grund der Gleichungen ($\mathfrak{G}_1$.) des Art. 2 gegen $\left(\frac{d^\mu u_\sigma^{\varepsilon_1}}{dz_1^\mu}\right)_0$ konvergiert. Bezeichnet man nun noch die Grenzwerte der mit $\zeta, t_1, \cdots, t_s, z_{s+1}, \cdots, z_p$

sich stetig ändernden Größen $\frac{\partial G}{\partial \zeta}$, $\frac{\partial G}{\partial t_\mu}$ $(\mu=1,2,\cdots,s)$, $\frac{\partial G}{\partial z_\varrho}$ $(\varrho=s+1,\cdots,p)$ durch $\left(\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right)_0$, $\left(\frac{\partial G}{\partial t_\mu}\right)_0$, $\left(\frac{\partial G}{\partial z_\varrho}\right)_0$ beziehungsweise, so erhält man aus der vorstehenden Gleichung die Gleichung:

$$(18.)\qquad \frac{1}{\varDelta_0}\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right)_0 & \left(\frac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial G}{\partial t_s}\right)_0 & \left(\frac{\partial G}{\partial z_{s+1}}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial G}{\partial z_p}\right)_0 \\ -\left(\frac{du_1^z}{d\zeta}\right)_0 & \left(\frac{du_1^{\varepsilon_1}}{dz_1}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d^s u_1^{\varepsilon_1}}{dz_1^s}\right)_0 & \left(\frac{du_1^{\varepsilon_{s+1}}}{dz_{s+1}}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{du_1^{\varepsilon_p}}{dz_p}\right)_0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -\left(\frac{du_p^z}{d\zeta}\right)_0 & \left(\frac{du_p^{\varepsilon_1}}{dz_1}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d^s u_p^{\varepsilon_1}}{dz_1^s}\right)_0 & \left(\frac{du_p^{\varepsilon_{s+1}}}{dz_{s+1}}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{du_p^{\varepsilon_p}}{dz_p}\right)_0 \end{vmatrix} = 0,$$

bei der $\varDelta_0$ die Determinante $\sum \pm \left(\frac{du_1^{\varepsilon_1}}{dz_1}\right)_0 \cdots \left(\frac{d^s u_s^{\varepsilon_1}}{dz_1^s}\right)_0 \left(\frac{du_{s+1}^{\varepsilon_{s+1}}}{dz_{s+1}}\right)_0 \cdots \left(\frac{du_p^{\varepsilon_p}}{dz_p}\right)_0$ bezeichnet, die wegen $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p') = p$ von Null verschieden ist. — Die erhaltene Gleichung gilt auch noch für den Fall $s=1$, oder was dasselbe, für den Fall, daß die Punkte $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ sämtlich voneinander verschieden sind; t_1 ist dann mit z_1 identisch und an Stelle von $\left(\frac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0$ tritt $\left(\frac{\partial G}{\partial z_1}\right)_0$.

Die gewonnene Gleichung (18.) enthält die Gleichung (17.) als speziellen Fall. Sind nämlich die Punkte $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ sämtlich voneinander verschieden und befindet sich zudem unter den Punkten z', ε_1', $\cdots$, ε_p' keiner der Punkte α, ∞, so ist $\zeta = z - z'$, $z_\mu = \varepsilon_\mu - \varepsilon_\mu'$ $(\mu=1,2,\cdots,p)$, und die Gleichung (18.) geht, wenn man noch bei den Größen z', $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ die Akzente unterdrückt, über in die Gleichung (17.).

Schließlich möge noch bemerkt werden, daß die Gleichung (17.) und daher auch die aus ihr abgeleitete Gleichung (18.) in Kraft bleibt, wenn man darin unter G den durch die Gleichung (15.) definierten Ausdruck $G\left\{\begin{matrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{matrix}\right\}\left|\begin{matrix} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z \end{matrix}\right|$ versteht.

5.

Die im vorhergehenden Artikel für irgend einen Punkt z der Fläche T' und p in der Fläche T frei bewegliche Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ definierte Funktion G der Größen $z, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ soll jetzt auf Grund der Gleichung:

$$(\text{G.})\qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_1^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu} du_1 \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_p^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu} du_p = w_1 \,|\, \cdots \,|\, w_p,$$

bei der $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_p$ die in Art. 2 charakterisierten, der Bedingung $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varkappa_1, \cdots, \varkappa_p) = p$ genügenden Punkte der Fläche T' sind, als Funktion der $p+1$ Veränderlichen $z, w_1, \cdots, w_p$ betrachtet werden, und es möge dementsprechend

(19.) $$G = E(z, w_1, \cdots, w_p)$$

gesetzt werden.

Mit Hilfe der in Art. 2 gewonnenen Resultate läßt sich zunächst das Verhalten von E als Funktion der Veränderlichen $w_1, \cdots, w_p$ in dem durch die Gleichung (G.) unter Hinzunahme der Bedingung $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = p$ definierten, schon früher mit $W - \overline{W}$ bezeichneten Bereiche feststellen. Bei dieser Untersuchung wird man zweckmäßig von dem durch die Gleichung:

(G'.) $$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_1^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu}\!\!\! du_1 \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_p^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu}\!\!\! du_p = w_1 \,|\, \cdots \,|\, w_p$$

unter Hinzunahme der Bedingung $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = p$ definierten, einen Teil des Bereiches $W - \overline{W}$ bildenden Bereiche $\{W - \overline{W}\}$ ausgehen. Man erkennt unmittelbar, daß für einen beliebigen Punkt (w) dieses Bereiches $\{W - \overline{W}\}$ der Wert der Funktion E durch die Gleichung:

(20.) $$E(z, w_1, \cdots, w_p) = G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p\\ z\end{matrix}\right|$$

geliefert wird, wenn $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ die dem Punkte (w) entsprechende Lösung der Gleichung (G'.) bezeichnet. Beachtet man dann, daß der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck in bezug auf die Größen $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ eine Funktion $S(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ von der in Art. 2 charakterisierten Art ist, so erkennt man weiter, daß $E(z, w_1, \cdots, w_p)$ in dem Bereiche $\{W - \overline{W}\}$ eine allenthalben einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen $w_1, \cdots, w_p$ ist und daß die Derivierte $\frac{\partial E}{\partial w_\varrho}$ $(\varrho = 1, 2, \cdots, p)$ für den Punkt (w') des Bereiches $\{W - \overline{W}\}$ dargestellt wird durch die der Schlußformel des Art. 2 entsprechende Formel:

(21.) $$\left(\frac{\partial E(z, w_1, \cdots, w_p)}{\partial w_\varrho}\right)_{w=w'} = \frac{1}{\Delta_0}\begin{vmatrix}
\left(\frac{du_1^{\varepsilon_1}}{dz_1}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d^s u_1^{\varepsilon_1}}{dz_1^s}\right)_0 & \left(\frac{du_1^{\varepsilon_{s+1}}}{dz_{s+1}}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{du_1^{\varepsilon_p}}{dz_p}\right)_0 \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\left(\frac{du_{\varrho-1}^{\varepsilon_1}}{dz_1}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d^s u_{\varrho-1}^{\varepsilon_1}}{dz_1^s}\right)_0 & \left(\frac{du_{\varrho-1}^{\varepsilon_{s+1}}}{dz_{s+1}}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{du_{\varrho-1}^{\varepsilon_p}}{dz_p}\right)_0 \\
\left(\frac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial G}{\partial t_s}\right)_0 & \left(\frac{\partial G}{\partial z_{s+1}}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial G}{\partial z_p}\right)_0 \\
\left(\frac{du_{\varrho+1}^{\varepsilon_1}}{dz_1}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d^s u_{\varrho+1}^{\varepsilon_1}}{dz_1^s}\right)_0 & \left(\frac{du_{\varrho+1}^{\varepsilon_{s+1}}}{dz_{s+1}}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{du_{\varrho+1}^{\varepsilon_p}}{dz_p}\right)_0 \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\left(\frac{du_p^{\varepsilon_1}}{dz_1}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d^s u_p^{\varepsilon_1}}{dz_1^s}\right)_0 & \left(\frac{du_p^{\varepsilon_{s+1}}}{dz_{s+1}}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{du_p^{\varepsilon_p}}{dz_p}\right)_0
\end{vmatrix},$$

bei der zur Abkürzung G an Stelle von $G\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z\end{smallmatrix}\right|$ steht und im übrigen, der einfacheren Darstellung wegen, wieder angenommen ist, daß die dem Punkte (w') entsprechende Lösung $(\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p')$ der Gleichung (G'.) nur eine Gruppe zusammenfallender Punkte enthält und daß zudem diese Gruppe durch die Punkte $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_s'$ $(1 < s \leqq p)$ gebildet wird.

Man gehe jetzt zu dem durch die Gleichung (G.) unter Hinzunahme der Bedingung $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = p$ definierten, den Bereich $\{W - \overline{W}\}$ als Teil enthaltenden Bereich $W - \overline{W}$ über, nehme also an, daß die in der Gleichung (G.) vorkommenden Integrationswege die Begrenzung der Fläche T'' überschreiten dürfen. Geht man dann in $W - \overline{W}$ von dem dem Bereich $\{W - \overline{W}\}$ angehörigen durch die Gleichung:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_1^{\varkappa_\mu} \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_p^{\varkappa_\mu} = w_1^{(0)} \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, w_p^{(0)}$$

definierten Punkt $(w^{(0)})$ auf irgend einem Wege $\mathfrak{W}$ zu einem anderen Punkt (w) des Bereichs $W - \overline{W}$, bezeichnet das diesem Punkt (w) auf Grund der Gleichung (G.) entsprechende, von dem Wege $\mathfrak{W}$ völlig unabhängige Punktsystem mit $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$, versteht unter $g_1, \cdots, g_p$, $h_1, \cdots, h_p$ die durch die Gleichungen:

$$\text{(G.)}\quad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_1^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu} du_1 - \sum_{\nu=1}^{\nu=p} g_\nu a_{1\nu} - h_1 \pi i \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_p^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu} du_p - \sum_{\nu=1}^{\nu=p} g_\nu a_{p\nu} - h_p \pi i = w_1 \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, w_p$$

eindeutig bestimmten ganzen Zahlen und setzt die Funktion E auf irgend einem innerhalb $W - \overline{W}$ von $(w^{(0)})$ bis (w) verlaufenden Wege $\mathfrak{W}$ im Anschluß an die entsprechende, in Art. 4 ausführlich behandelte, Fortsetzung der Funktion G analytisch fort, so erhält man den Wert der Funktion E für den Punkt (w) dargestellt durch die Gleichung:

$$\text{(22.)}\qquad E(z, w_1, \cdots, w_p) = G\begin{Bmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{Bmatrix} \left|\begin{matrix} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z \end{matrix}\right|.$$

Beachtet man dann, daß der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende, durch die Gleichung (15.) des Art. 4 bestimmte Ausdruck in bezug auf die Größen $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ eine Funktion $S(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ von der in Art. 2 charakterisierten Art ist, so erkennt man, daß $E(z, w_1, \cdots, w_p)$ in dem Bereiche $W - \overline{W}$ eine einwertige und bei endlichen $w_1, \cdots, w_p$ auch stetige Funktion der komplexen Veränderlichen $w_1, \cdots, w_p$ ist und daß die Derivierte $\frac{\partial E}{\partial w_\varrho}$ $(\varrho = 1, 2, \cdots, p)$ für irgend einen dem Bereiche $W - \overline{W}$ angehörigen Punkt (w'), dem auf Grund der letzten Gleichung (G.) das Punktsystem $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ und die ganzen Zahlen $g_1', \cdots, g_p'$, $h_1', \cdots, h_p'$ entsprechen mögen, durch die Gleichung (21.) dargestellt wird, wenn man darin unter G den Ausdruck $G\begin{Bmatrix} g_1' \cdots g_p' \\ h_1' \cdots h_p' \end{Bmatrix}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z\end{smallmatrix}\right|$ versteht und im übrigen, der einfacheren Darstellung wegen, auch hier wieder annimmt, daß die dem Punkte (w') entsprechende Lösung $(\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p')$ der Gleichung (G.) nur eine Gruppe zusammenfallender Punkte enthält und daß zudem diese Gruppe durch die Punkte $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_s'$ $(1 < s \overline{\gtrless} p)$ gebildet wird. Daß die Derivierte $\frac{\partial E}{\partial z}$ sich mit der nach z genommenen Derivierte des die rechte Seite der Gleichung (22.) bildenden Ausdrucks deckt, leuchtet unmittelbar ein.

Die Gleichung (22.) bestimmt zusammen mit der ihr unmittelbar vorangehenden Gleichung (G.) den Wert der Funktion $E(z, w_1, \cdots, w_p)$ für jeden dem Bereich $W - \overline{W}$ angehörigen Punkt $w_1, \cdots, w_p$. Läßt man, unter $g_1', \cdots, g_p'$, $h_1', \cdots, h_p'$ irgendwelche ganze Zahlen verstehend, an Stelle des Punktes $w_1, \cdots, w_p$ den ebenfalls dem Bereich $W - \overline{W}$ angehörigen Punkt $w_1 - \sum_{\nu=1}^{\nu=p} g_1' a_{1\nu} - h_1' \pi i, \cdots, w_p - \sum_{\nu=1}^{\nu=p} g_1' a_{p\nu} - h_p' \pi i$ treten, so ändert sich, wie die letzte Gleichung (G.) zeigt, das auf der rechten Seite der Gleichung (22.) stehende Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ nicht, dagegen geht für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ g_ν in $g_\nu + g_\nu'$, h_ν in $h_\nu + h_\nu'$ über, und man erkennt dann, daß infolge der Gleichung (16.) zwischen der linken Seite der so entstandenen neuen Gleichung und der linken Seite der Gleichung (22.) die Beziehung:

$$
(23.)\qquad E\Big(z, w_1 - \sum_{\nu=1}^{\nu=p} g_\nu' a_{1\nu} - h_1' \pi i, \cdots, w_p - \sum_{\nu=1}^{\nu=p} g_\nu' a_{p\nu} - h_p' \pi i\Big) = E(z, w_1, \cdots, w_p) \times e^{-2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu' (u_\mu^z - w_\mu - k_\mu) - \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g_\mu' g_{\mu'}'}
$$

besteht.

Die Funktion $E(z, w_1, \cdots, w_p)$ genügt für jeden Punkt $z', w_1', \cdots, w_p'$ des aus der Fläche T'' und dem Bereich $W - \overline{W}$ bestehenden Gebietes $[T'', W - \overline{W}]$ der Differentialgleichung:

$$
(24.)\qquad \left(\frac{\partial E(z, w_1', \cdots, w_p')}{\partial \zeta}\right)_0 + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \left(\frac{\partial E(z', w_1, \cdots, w_p)}{\partial w_\varrho}\right)_{w = w'} \left(\frac{d u_\varrho^z}{d \zeta}\right)_0 = 0
$$

bei der $\zeta = z - z'$ oder $\zeta = (z - \alpha)^{\frac{1}{\nu}}$ oder endlich $\zeta = z^{-\frac{1}{\iota}}$ ist, je nachdem z' ein gewöhnlicher Punkt der Fläche T'' oder ein Punkt α mit der Ordnungszahl $\nu - 1$ oder ein Punkt ∞ mit der Ordnungszahl $\iota - 1$ ist. Man erhält diese Gleichung, wenn man in der Gleichung (18.) die auf der linken Seite stehende Determinante nach den Elementen der ersten Vertikalreihe entwickelt und die für $\varrho = 1, 2, \cdots, p$ geltende Gleichung (21.) beachtet. Diese Gleichungen beziehen sich zwar nur auf den speziellen Fall, wo die dem Punkte (w') entsprechende Lösung $(\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p')$ der Gleichung (G.) nur eine Gruppe zusammenfallender Punkte enthält und zudem diese Gruppe durch die Punkte $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_s'$ $(1 < s \overline{\gtrless} p)$ gebildet wird. Man erkennt aber ohne Mühe, daß die bei irgend einer anderen Beschaffenheit der in Rede stehenden Lösung $(\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p')$ an Stelle der Gleichungen (18.) und

(21.) tretenden Gleichungen, in angegebener Weise verbunden, stets wieder die Gleichung (24.) liefern.

Die Resultate der in diesem Artikel durchgeführten Untersuchungen lassen sich jetzt in den folgenden Satz zusammenfassen:

„*Die durch die Gleichung* (22.) *in Verbindung mit der Gleichung* (G.) *für jeden Punkt* $z, w_1, \cdots, w_p$ *des Gebietes* $[T', W-\overline{W}]$ *ihrem Werte nach vollständig bestimmte Funktion* $E(z, w_1, \cdots, w_p)$ *ist in diesem Gebiete eine einwertige und bei endlichen* $w_1, \cdots, w_p$ *auch stetige Funktion der* $p+1$ *komplexen Veränderlichen* $z, w_1, \cdots, w_p$, *die in derselben Ausdehnung der Differentialgleichung* (24.) *genügt und beim Übergang des Systems* $w_1, \cdots, w_p$ *in ein zu ihm kongruentes System sich der Gleichung* (23.) *entsprechend ändert.*“

6.

Durch die Untersuchungen des vorhergehenden Artikels ist das Verhalten der Funktion $E(z, w_1, \cdots, w_p)$ in dem aus dem $2p$-dimensionalen Raume W durch Ausscheidung der $(2p-4)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\overline{W}$ entstehenden Bereich $W-\overline{W}$ festgestellt. Die Mannigfaltigkeit $\overline{W}$ selbst ist durch die Gleichung (G.) unter Hinzunahme der Bedingung $\Re_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) < p$ definiert. Für jeden Punkt $(\overline{w})$ dieser Mannigfaltigkeit $\overline{W}$ besitzt die Funktion $E(z, w_1, \cdots, w_p)$ auf Grund der in Art. 4 aufgeführten Eigenschaften der Funktion G den Wert Null, und es gelten infolgedessen die für den Bereich $W-\overline{W}$ abgeleiteten Gleichungen (22.) und (23.) auch noch für die Mannigfaltigkeit $\overline{W}$, also für jeden Punkt des Raumes W. Es soll jetzt bewiesen werden, daß die im Bereich $W-\overline{W}$ allenthalben stetige Funktion $E(z, w_1, \cdots, w_p)$ auch noch für jeden der Mannigfaltigkeit $\overline{W}$ angehörigen Punkt $(w)=(\overline{w})$ des Raumes W stetig ist, oder, was dasselbe, daß der Ausdruck $E(z, \overline{w}_1+h_1, \cdots, \overline{w}_p+h_p)$, bei dem $h_1, \cdots, h_p$ irgend welche ihren Moduln nach eine positive Größe H nicht überschreitende komplexe Größen bezeichnen, mit H gegen Null konvergiert.

Man denke sich in der Mannigfaltigkeit $\overline{W}$ irgend einen Punkt $(\overline{w})$ fixiert. Das ihm entsprechende Wertsystem sei $\overline{w}_1, \cdots, \overline{w}_p$. Zu diesem Wertsysteme gehören, auf Grund der Definition der Mannigfaltigkeit $\overline{W}$, unbegrenzt viele Lösungen $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ der Gleichung (G.). Irgend eine dieser Lösungen bezeichne man mit $(\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_p)$; es besteht dann die Gleichung:

$$(25.)\qquad (\overline{w}) = \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\bar{\varepsilon}_\mu} du\right)$$

und es ist zugleich $\Re_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_p) < p$ oder, was dasselbe, es existieren unbegrenzt viele

Funktionen $\frac{du}{dz}$, bei denen das Punktsystem $\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_p$ in dem Systeme der charakteristischen Punkte enthalten ist. Man greife eine dieser Funktionen heraus und bezeichne das ihr zukommende System der charakteristischen Punkte mit $\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_p, \eta_1, \cdots, \eta_{p-2}$.

Es soll nun zunächst ein ausgezeichneter, den Punkt $(\bar{w})$ im Innern enthaltender Teil des $2p$-dimensionalen Raumes W abgegrenzt werden. Man wähle im Innern der Fläche T' $p+1$ Punktsysteme $\acute{a}_1^{(\nu)}, \cdots, \acute{a}_p^{(\nu)}$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p+1}$, von der Art, daß unter den $p(p+1)$ Punkten dieser Systeme weder zusammenfallende noch Punkte α, ∞ noch auch Punkte des vorher bestimmten Systems $\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_p, \eta_1, \cdots, \eta_{p-2}$ vorkommen und daß zudem für $\nu = 1, 2, \cdots, p+1$ $\Re_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\acute{a}_1^{(\nu)}, \cdots, \acute{a}_p^{(\nu)}) = p$ ist. Infolge dieser Wahl lassen sich im Innern der Fläche T' um die $p(p+1)$ Punkte $\acute{a}_\mu^{(\nu)}$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p+1 \atop \mu=1,2,\cdots,p}$, als Mittelpunkte $p(p+1)$, denselben Radius r besitzende, vollständig getrennt liegende und keinen der Punkte $\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_p$, $\eta_1, \cdots, \eta_{p-2}$ enthaltende Kreisflächen $K_\mu^{(\nu)}$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p+1 \atop \mu=1,2,\cdots,p}$, abgrenzen. Setzt man alsdann, unter $h_1, \cdots, h_p$ veränderliche komplexe Größen verstehend,

$$(26.)\qquad -\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\int_{\acute{a}_\mu^{(\nu)}}^{a_\mu^{(\nu)}} du_1 \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, -\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\int_{\acute{a}_\mu^{(\nu)}}^{a_\mu^{(\nu)}} du_p = h_1 \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, h_p \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\cdots,p+1)}$$

und beachtet, daß nach dem auf Seite 250 Bewiesenen für hinreichend kleine Werte der Moduln von $h_1, \cdots, h_p$ die Entwicklungen:

$$(27.)\qquad \begin{aligned} a_1^{(\nu)} - \acute{a}_1^{(\nu)} &= \sum_{n_1=0}^{n_1=\infty}\cdots\sum_{n_p=0}^{n_p=\infty} c_{n_1\cdots n_p}^{(\nu 1)} h_1^{n_1}\cdots h_p^{n_p}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_p^{(\nu)} - \acute{a}_p^{(\nu)} &= \sum_{n_1=0}^{n_1=\infty}\cdots\sum_{n_p=0}^{n_p=\infty} c_{n_1\cdots n_p}^{(\nu p)} h_1^{n_1}\cdots h_p^{n_p} \end{aligned} \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\cdots,p+1)}$$

bestehen, bei denen die Koeffizienten $c^{(\nu\mu)}$ nur von den festen Punkten $\acute{a}^{(\nu)}$ abhängen, und speziell die p Koeffizienten $c_{0\cdots 0}^{(\nu 1)}, \cdots, c_{0\cdots 0}^{(\nu p)}$ sämtlich den Wert Null besitzen, so erkennt man, daß sich eine positive Zahl H' von der Art angeben läßt, daß nicht nur in dem ganzen durch die Bedingungen $\operatorname{mod} h_1 \overline{\gtrless} H', \cdots, \operatorname{mod} h_p \overline{\gtrless} H'$ definierten Gebiete die vorstehenden Entwicklungen gelten, sondern auch die dadurch als Funktionen der komplexen Veränderlichen $h_1, \cdots, h_p$ dargestellten Größen $a^{(\nu)} - \acute{a}^{(\nu)}$ die Bedingungen $\operatorname{mod}[a_1^{(\nu)} - \acute{a}_1^{(\nu)}] \overline{\gtrless} r, \cdots, \operatorname{mod}[a_p^{(\nu)} - \acute{a}_p^{(\nu)}] \overline{\gtrless} r$ erfüllen, oder, was dasselbe, die den Größen $a_\mu^{(\nu)}$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p+1 \atop \mu=1,2,\cdots,p}$ entsprechenden Punkte $a_\mu^{(\nu)}$ in den Kreisflächen $K_\mu^{(\nu)}$ beziehungsweise liegen.

Versteht man jetzt unter H eine der Bedingung $H < H'$ genügende positive veränderliche Größe und bezeichnet mit R_H dasjenige Gebiet des $2p$-dimensionalen

Raumes W, welches nur die den Bedingungen $\mod h_1 \lesseqgtr H, \cdots, \mod h_p \lesseqgtr H$ genügenden Punkte $(\overline{w}+h)$ enthält, so ist damit ein den Punkt $(\overline{w})$ im Innern enthaltender Teil des $2p$-dimensionalen Raumes W bestimmt, dessen sämtliche Punkte durch die folgenden charakteristischen Eigenschaften ausgezeichnet sind. Das irgend einem Punkte $(\overline{w}+h)$ entsprechende Größensystem (h) läßt sich immer und nur auf eine Weise in die durch die Gleichung:

$$(28.)\qquad (h) = \left(-\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\acute{a}_\mu^{(\nu)}}^{a_\mu^{(\nu)}} du\right) \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\cdots,p+1)}$$

bestimmte Form bringen, wobei der Punkt $a_\mu^{(\nu)}$ in der Kreisfläche $K_\mu^{(\nu)}$ liegt, auch der von $\acute{a}_\mu^{(\nu)}$ nach $a_\mu^{(\nu)}$ führende Integrationsweg, wie durch den Strich am Integralzeichen angedeutet sein soll, ganz in $K_\mu^{(\nu)}$ verläuft, und zudem die, immer der Bedingung $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(a_1^{(\nu)}, \cdots, a_p^{(\nu)}) = p$ genügenden, Punkte $a_1^{(\nu)}, \cdots, a_p^{(\nu)}$ sich den Punkten $\acute{a}_1^{(\nu)}, \cdots, \acute{a}_p^{(\nu)}$ beziehungsweise unbegrenzt nähern, wenn die positive Zahl H und damit auch die Größen $h_1, \cdots, h_p$ gegen Null konvergieren.

Das irgend einem Punkte $(\overline{w}+h)$ des Gebietes R_H entsprechende Wertsystem $\overline{w}_1 + h_1 \,|\cdots|\, \overline{w}_p + h_p$ läßt sich nach Art. 1 immer in der durch die Gleichung:

$$(29.)\qquad (\overline{w}+h) = \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu} du\right)$$

bestimmten Form darstellen und zwar nur auf eine Weise oder auf unbegrenzt viele Weisen, je nachdem bei einer solchen Darstellung $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = p$ oder $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) < p$ ist. Durch die Gleichung (29.) wird also der Totalität der Punkte $(\overline{w}+h)$ des Gebietes R_H eine mit E_H zu bezeichnende Totalität von Punktsystemen $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ zugeordnet. Nimmt die veränderliche positive Größe H ab, so treten zugleich Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ aus der Totalität E_H aus.

Zu jedem in T' liegenden System von p Punkten existiert unter den $p+1$ zu Anfang konstruierten Kreisflächensystemen $K_1^{(\nu)}, \cdots, K_p^{(\nu)}$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p+1}$, wenigstens eines, welches keinen dieser Punkte enthält. Es lassen sich daher die sämtlichen in E_H enthaltenen Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ derart in $p+1$ Gruppen $\mathsf{E}_H^{(\nu)}$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p+1}$, ordnen, daß die Gruppe $\mathsf{E}_H^{(\nu)}$ ausschließlich Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ enthält, welche außerhalb des Kreisflächensystems $K_1^{(\nu)}, \cdots, K_p^{(\nu)}$ liegen, und es ist damit die Untersuchung der in E_H enthaltenen Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ auf die Untersuchung der in der Gruppe $\mathsf{E}_H^{(\nu)}$ enthaltenen Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ zurückgeführt.

Man eliminiere nun, unter ν eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, p+1$ verstehend, aus den Gleichungen (25.), (28.), (29.) die Größen $\overline{w}$, h und bringe die so entstehende Gleichung in die Form:

$$(30.)\qquad \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu} du + \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\int_{\varkappa_\mu}^{a_\mu^{(\nu)}} du\right) = \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\int_{\varkappa_\mu}^{\bar{\varepsilon}_\mu} du + \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\int_{\varkappa_\mu}^{a'^{(\nu)}_\mu} du\right).$$

Da diese Gleichung die Kongruenz:

$$(31.)\qquad \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varepsilon_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u^{a_\mu^{(\nu)}}\right) \equiv \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\bar{\varepsilon}_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u^{a'^{(\nu)}_\mu}\right)$$

nach sich zieht, so existiert nach Früherem zur Fläche T eine Funktion $A(z)$, welche für den Fall, daß die beiden Punktsysteme $\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_p, a'^{(\nu)}_1, \cdots, a'^{(\nu)}_p$ und $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p, a'^{(\nu)}_1, \cdots, a'^{(\nu)}_p$ keinen Punkt gemeinsam haben, das erste Punktsystem als System der ∞^1-Punkte, das zweite als System der 0^1-Punkte besitzt, welche dagegen für den Fall, daß die beiden Punktsysteme einen Teil gemeinsam haben, das von dem ersten Punktsysteme nach Entfernung des gemeinsamen Teils übrigbleibende Punktsystem als System der ∞^1-Punkte, das von dem zweiten Punktsysteme nach Entfernung des gemeinsamen Teils übrigbleibende Punktsystem als System der 0^1-Punkte besitzt. Diese, bis auf einen konstanten Faktor bestimmte, Funktion $A(z)$ kann man nach dem in Art. 9 des fünften Abschnitts erhaltenen Resultate unter Verwendung der zu Anfang dieses Artikels gewählten, das Punktsystem $\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_p, \eta_1, \cdots, \eta_{p-2}$ als System der charakteristischen Punkte besitzenden Funktion $\frac{du}{dz}$ durch eine Gleichung von der Form:

$$(32.)\qquad A(z) = \frac{\displaystyle\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\mathfrak{L}_\mu \frac{d\underset{0}{P}\left|\begin{matrix} a'^{(\nu)}_\mu \\ z\end{matrix}\right|}{dz} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} c_\mu \frac{du_\mu}{dz}}{\dfrac{du}{dz}}$$

darstellen, bei der $\mathfrak{L}_1, \cdots, \mathfrak{L}_p, c_1, \cdots, c_p$ von z unabhängige, der Bedingung $\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\mathfrak{L}_\mu = 0$ unterworfene Größen bezeichnen. Die $2p$ Konstanten $\mathfrak{L}_1, \cdots, \mathfrak{L}_p, c_1, \cdots, c_p$ sind in dem Falle, wo das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_{p-2}, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ keine zusammenfallenden Punkte enthält, durch die $3p-1$ Gleichungen:

$$(33.)\qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\mathfrak{L}_\mu = 0, \qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\mathfrak{L}_\mu\left(\frac{d\underset{0}{P}\left|\begin{matrix} a'^{(\nu)}_\mu \\ z\end{matrix}\right|}{dz_{\eta_\lambda}}\right)_0 + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} c_\mu\left(\frac{du^z_\mu}{dz_{\eta_\lambda}}\right)_0 = 0, \qquad {\scriptstyle \lambda=1,2,\cdots,p-2,}$$

$$(34.)\qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \mathfrak{L}_\mu \frac{d \underset{0}{P}\begin{vmatrix} \acute{a}_\mu^{(\nu)} \\ a_\varrho^{(\nu)} \end{vmatrix}}{d a_\varrho^{(\nu)}} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} c_\mu \frac{d u_\mu^{a_\varrho^{(\nu)}}}{d a_\varrho^{(\nu)}} = 0, \qquad \varrho=1,2,\cdots,p,$$

$$(35.)\qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \mathfrak{L}_\mu \left(\frac{d \underset{0}{P}\begin{vmatrix} \acute{a}_\mu^{(\nu)} \\ z \end{vmatrix}}{d z_{\varepsilon_\varrho}} \right)_0 + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} c_\mu \left(\frac{d u_\mu^z}{d z_{\varepsilon_\varrho}} \right)_0 = 0, \qquad \varrho=1,2,\cdots,p,$$

verknüpft, wobei jedoch zu beachten ist, daß für $\sigma = 1, 2, \cdots, p$ an Stelle der σ^{ten} Gleichung des Systems (34.) die Gleichung $\mathfrak{L}_\sigma = 0$ tritt, wenn der Punkt $a_\sigma^{(\nu)}$ mit dem Punkt $\acute{a}_\sigma^{(\nu)}$ zusammenfällt. Befinden sich dagegen in dem Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_{p-2}, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ Gruppen zusammenfallender Punkte, kommt also etwa ein Punkt ξ s-mal vor, so treten in den Gleichungensystemen (33.), (35.) an Stelle der s dieser Gruppe entsprechenden Gleichungen die s Gleichungen:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \mathfrak{L}_\mu \left(\frac{d^\sigma \underset{0}{P}\begin{vmatrix} \acute{a}_\mu^{(\nu)} \\ z \end{vmatrix}}{d z_\xi^\sigma} \right)_0 + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} c_\mu \left(\frac{d^\sigma u_\mu^z}{d z_\xi^\sigma} \right)_0 = 0, \qquad \sigma=1,2,\cdots,s,$$

und es sollen zugleich, wenn der Punkt ξ s'-mal $(0 \leqq s' \leqq s)$ im Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ vorkommt, die s' den Werten $\sigma = 1, 2, \cdots, s'$ entsprechenden Gleichungen dem Systeme (35.), die übrigen $s - s'$ dem Systeme (33.) zugeteilt werden. Welche Form aber auch im einzelnen Falle die $2p-1$ Gleichungen (33.) und (35.) haben mögen, sie sind wegen $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(a_1^{(\nu)}, \cdots, a_p^{(\nu)}) = p$ immer linear unabhängig und bestimmen daher, dem vorher Bemerkten entsprechend, die $2p$ Konstanten $\mathfrak{L}$, c bis auf einen konstanten Faktor. Um diese Konstanten vollständig zu bestimmen, sollen sie, nachdem man sie mit Hilfe ihrer Moduln $\overline{\mathfrak{L}}$, $\bar{c}$ in die Form $\mathfrak{L}_\mu = \overline{\mathfrak{L}}_\mu e^{\varphi_\mu i}$, $c_\mu = \bar{c}_\mu e^{\psi_\mu i}$ gesetzt hat, schließlich noch den Bedingungen:

$$(36.)\qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \overline{\mathfrak{L}}_\mu + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \bar{c}_\mu = 2p, \qquad\qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \varphi_\mu + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \psi_\mu \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

unterworfen werden.

Die Moduln $\overline{\mathfrak{L}}$ der Größen $\mathfrak{L}$ können durch Verkleinerung der positiven Größe H so klein gemacht werden, wie man will. Um dieses einzusehen, beachte man zunächst, daß für die in der ϱ^{ten} Gleichung des Systems (34.) vorkommenden Derivierten von $\underset{0}{P}$ die Entwicklungen:

$$\frac{d \underset{0}{P}\begin{vmatrix} \acute{a}_\varrho^{(\nu)} \\ a_\varrho^{(\nu)} \end{vmatrix}}{d a_\varrho^{(\nu)}} = -\frac{1}{a_\varrho^{(\nu)} - \acute{a}_\varrho^{(\nu)}} + e_{\varrho 0}^{(\nu)} + e_{\varrho 1}^{(\nu)} (a_\varrho^{(\nu)} - \acute{a}_\varrho^{(\nu)}) + e_{\varrho 2}^{(\nu)} (a_\varrho^{(\nu)} - \acute{a}_\varrho^{(\nu)})^2 + \cdots,$$

$$\frac{d \underset{0}{P}\begin{vmatrix} \acute{a}_\mu^{(\nu)} \\ a_\varrho^{(\nu)} \end{vmatrix}}{d a_\varrho^{(\nu)}} \underset{(\mu \neq \varrho)}{=} e_{\mu\varrho 0}^{(\nu)} + e_{\mu\varrho 1}^{(\nu)} (a_\varrho^{(\nu)} - \acute{a}_\varrho^{(\nu)}) + e_{\mu\varrho 2}^{(\nu)} (a_\varrho^{(\nu)} - \acute{a}_\varrho^{(\nu)})^2 + \cdots$$

gelten, wobei die Koeffizienten $e^{(\nu)}_{\varrho n}$ nur von der Größe $\acute{a}^{(\nu)}_\varrho$, die Koeffizienten $e^{(\nu)}_{\mu\varrho n}$ nur von den Größen $\acute{a}^{(\nu)}_\mu$, $\acute{a}^{(\nu)}_\varrho$ abhängen, und daß daher, wenn $a^{(\nu)}_\varrho$ gegen $\acute{a}^{(\nu)}_\varrho$ konvergiert, der die linke Seite der genannten Gleichung bildende Ausdruck:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \mathfrak{L}_\mu \frac{d \mathop{P}\limits_0 \left|\begin{matrix}\acute{a}^{(\nu)}_\mu \\ a^{(\nu)}_\varrho\end{matrix}\right|}{d a^{(\nu)}_\varrho} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} c_\mu \frac{d u_\mu^{a^{(\nu)}_\varrho}}{d a^{(\nu)}_\varrho}$$

bei dem wegen $\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \overline{\mathfrak{L}}_\mu + \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \bar{c}_\mu = 2p$ keiner der Koeffizienten $\mathfrak{L}$, c seinem Modul nach die Zahl $2p$ überschreiten kann, unendlich werden würde wie $-\frac{\mathfrak{L}_\varrho}{a^{(\nu)}_\varrho - \acute{a}^{(\nu)}_\varrho}$, also nicht den Wert Null behalten könnte, wenn nicht die Größe $\mathfrak{L}_\varrho$ zugleich mit $a^{(\nu)}_\varrho - \acute{a}^{(\nu)}_\varrho$ gegen Null konvergieren würde. Beachtet man nun noch, daß man durch Verkleinerung der positiven Größe H die Größen $h_1, \cdots, h_p$ und damit auch, den Gleichungen (27.) zufolge, die p Größen mod $(a^{(\nu)}_\varrho - \acute{a}^{(\nu)}_\varrho)$, $\varrho = 1, 2, \cdots, p$, so klein machen kann, wie man will, so erkennt man schließlich, daß man nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Zahl δ die Größe H stets so klein nehmen kann, daß die Moduln $\overline{\mathfrak{L}}_1, \cdots, \overline{\mathfrak{L}}_p$ für alle in Betracht kommenden Wertsysteme $h_1, \cdots, h_p$ unter δ liegen.

Nach diesen Vorbereitungen soll jetzt das Verhalten des auf der rechten Seite der Gleichung (14.) stehenden Ausdrucks:

$$(37.)\qquad Q(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = \frac{\left(\Theta\left|\begin{matrix}\alpha_1\\ \varepsilon_1\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\alpha_1\\ \varepsilon_p\end{matrix}\right|\right)^{\mu_1-1} \cdots \left(\Theta\left|\begin{matrix}\alpha_r\\ \varepsilon_1\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\alpha_r\\ \varepsilon_p\end{matrix}\right|\right)^{\mu_r-1}}{\left(\Theta\left|\begin{matrix}\infty_1\\ \varepsilon_1\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\infty_1\\ \varepsilon_p\end{matrix}\right|\right)^{\iota_1+1} \cdots \left(\Theta\left|\begin{matrix}\infty_q\\ \varepsilon_1\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\infty_q\\ \varepsilon_p\end{matrix}\right|\right)^{\iota_q+1}} \; \frac{\left|\begin{matrix} \frac{du_1^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} & \frac{du_1^{\varepsilon_2}}{d\varepsilon_2} & \cdots & \frac{du_1^{\varepsilon_p}}{d\varepsilon_p} \\ \frac{du_2^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} & \frac{du_2^{\varepsilon_2}}{d\varepsilon_2} & \cdots & \frac{du_2^{\varepsilon_p}}{d\varepsilon_p} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{du_p^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} & \frac{du_p^{\varepsilon_2}}{d\varepsilon_2} & \cdots & \frac{du_p^{\varepsilon_p}}{d\varepsilon_p} \end{matrix}\right|}{\left\{\begin{matrix} \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{matrix}\right| \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_3\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_p\end{matrix}\right| \\ \times \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_2\\ \varepsilon_p\end{matrix}\right| \\ \times \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ \times \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_{p-1}\\ \varepsilon_p\end{matrix}\right| \end{matrix}\right\}}$$

für die der Gruppe $\mathsf{E}^{(\nu)}_H$ angehörigen Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ untersucht werden. Es empfiehlt sich, diese Untersuchung zunächst für diejenigen der Gruppe $\mathsf{E}^{(\nu)}_H$ angehörigen Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ durchzuführen, welche weder Punkte α, ∞ noch zusammenfallende Punkte enthalten. Zu dem Ende beachte man, daß man für jedes dieser unbegrenzt vielen Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ dem Gleichungensystem (35.) die Gestalt:

$$(35'.)\qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \mathfrak{L}_\mu \frac{d\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix} d_\mu^{(\nu)} \\ \varepsilon_\varrho \end{matrix}\right|}{d\varepsilon_\varrho} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} c_\mu \frac{du_\mu^{\varepsilon_\varrho}}{d\varepsilon_\varrho} = 0, \qquad \varrho = 1, 2, \cdots, p,$$

geben kann, daß hieraus die für $\varkappa = 1, 2, \cdots, p$ geltende Gleichung:

$$(38.)\qquad c_\varkappa \begin{vmatrix} \frac{du_1^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} & \cdots & \frac{du_1^{\varepsilon_p}}{d\varepsilon_p} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{du_p^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} & \cdots & \frac{du_p^{\varepsilon_p}}{d\varepsilon_p} \end{vmatrix} = -\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \mathfrak{L}_\mu \begin{vmatrix} \frac{du_1^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} & \frac{du_1^{\varepsilon_2}}{d\varepsilon_2} & \cdots & \frac{du_1^{\varepsilon_p}}{d\varepsilon_p} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{du_{\varkappa-1}^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} & \frac{du_{\varkappa-1}^{\varepsilon_2}}{d\varepsilon_2} & \cdots & \frac{du_{\varkappa-1}^{\varepsilon_p}}{d\varepsilon_p} \\ \frac{d\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix} d_\mu^{(\nu)} \\ \varepsilon_1 \end{matrix}\right|}{d\varepsilon_1} & \frac{d\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix} d_\mu^{(\nu)} \\ \varepsilon_2 \end{matrix}\right|}{d\varepsilon_2} & \cdots & \frac{d\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix} d_\mu^{(\nu)} \\ \varepsilon_p \end{matrix}\right|}{d\varepsilon_p} \\ \frac{du_{\varkappa+1}^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} & \frac{du_{\varkappa+1}^{\varepsilon_2}}{d\varepsilon_2} & \cdots & \frac{du_{\varkappa+1}^{\varepsilon_p}}{d\varepsilon_p} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{du_p^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} & \frac{du_p^{\varepsilon_2}}{d\varepsilon_2} & \cdots & \frac{du_p^{\varepsilon_p}}{d\varepsilon_p} \end{vmatrix}$$

folgt und daß durch passende Verbindung der Gleichungen (37.), (38.) die Gleichung:

$$(39.)\quad c_\varkappa Q(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = -\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \mathfrak{L}_\mu \frac{\left(\Theta\left|\begin{matrix}\alpha_1\\ \varepsilon_1\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\alpha_1\\ \varepsilon_p\end{matrix}\right|\right)^{\mu_1-1} \cdots \left(\Theta\left|\begin{matrix}\alpha_r\\ \varepsilon_1\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\alpha_r\\ \varepsilon_p\end{matrix}\right|\right)^{\mu_r-1}}{\left(\Theta\left|\begin{matrix}\infty_1\\ \varepsilon_1\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\infty_1\\ \varepsilon_p\end{matrix}\right|\right)^{\iota_1+1} \cdots \left(\Theta\left|\begin{matrix}\infty_q\\ \varepsilon_1\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\infty_q\\ \varepsilon_p\end{matrix}\right|\right)^{\iota_q+1}} \; \frac{\begin{vmatrix} \frac{du_1^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} & \cdots & \frac{du_1^{\varepsilon_p}}{d\varepsilon_p} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{d\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix} d_\mu^{(\nu)} \\ \varepsilon_1 \end{matrix}\right|}{d\varepsilon_1} & \cdots & \frac{d\,\underset{0}{P}\left|\begin{matrix} d_\mu^{(\nu)} \\ \varepsilon_p \end{matrix}\right|}{d\varepsilon_p} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{du_p^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} & \cdots & \frac{du_p^{\varepsilon_p}}{d\varepsilon_p} \end{vmatrix}}{\left\{\begin{matrix} \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{matrix}\right| \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_3\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_p\end{matrix}\right| \\ \times \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_2\\ \varepsilon_p\end{matrix}\right| \\ \times \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ \times \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_{p-1}\\ \varepsilon_p\end{matrix}\right| \end{matrix}\right\}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, p)$$

entsteht. Die auf der rechten Seite dieser Gleichung als Faktor von $\mathfrak{L}_\mu$ stehende, mit $F_\mu^{(\varkappa)}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ zu bezeichnende, Funktion der komplexen Veränderlichen $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ wird bei völlig frei in T' beweglichen Punkten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ nur dann unendlich, wenn irgend welche der Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ sich dem festen Punkte $d_\mu^{(\nu)}$ unbegrenzt nähern, und sie hat daher für jedes der hier in Betracht kommenden Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$, die, als der Gruppe $\mathsf{E}_H^{(\nu)}$ angehörig, sämtlich außerhalb der mit dem festen Radius r um den Punkt $\acute{a}_\mu^{(\nu)}$ abgegrenzten Kreisfläche $K_\mu^{(\nu)}$ liegen, einen endlichen Wert. Dementsprechend läßt sich eine positive Zahl $\mathfrak{P}^{(\varkappa)}$ von der Art angeben, daß für jedes dieser Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ die Beziehung mod $F_\mu^{(\varkappa)}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) < \mathfrak{P}^{(\varkappa)}$ $(\mu = 1, 2, \cdots, p)$ besteht, und die Gleichung (39.) liefert dann für mod $Q(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ die für $\varkappa = 1, 2, \cdots, p$ geltende Beziehung:

$$\bar{c}_\varkappa \bmod Q(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) < \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \overline{\mathfrak{L}}_\mu\right) \mathfrak{P}^{(\varkappa)}. \tag{40.}$$

Durch Addition der p aus dieser für $\varkappa = 1, 2, \cdots, p$ hervorgehenden Ungleichungen erhält man endlich unter Benutzung der Gleichung $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \bar{c}_\varkappa = 2p - \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \overline{\mathfrak{L}}_\mu$, die Beziehung:

$$\left(2p - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \overline{\mathfrak{L}}_\mu\right) \bmod Q(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) < \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \overline{\mathfrak{L}}_\mu\right)\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \mathfrak{P}^{(\varkappa)}\right). \tag{41.}$$

Beachtet man nun, daß nach vorher Bewiesenem durch Verkleinerung von H die Größen $\overline{\mathfrak{L}}$ so klein gemacht werden können, wie man will, so erkennt man aus der zuletzt gewonnenen Beziehung, daß der Wert von $Q(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ zugleich mit H für alle der Gruppe $\mathsf{E}_H^{(\nu)}$ angehörigen Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ der charakterisierten Art gleichmäßig gegen Null konvergiert.

Die noch übrigen der Gruppe $\mathsf{E}_H^{(\nu)}$ angehörigen Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ unterscheiden sich von den eben betrachteten dadurch, daß sie Punkte α, ∞ oder zusammenfallende Punkte enthalten. Zu einer und derselben Art mögen diejenigen dieser Punktsysteme gerechnet werden, welche das den Punkt α_ϱ $(\varrho = 1, 2, \cdots, r)$ m_ϱ-mal und den Punkt $\infty_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, q)$ $n_\varkappa$-mal enthaltende Punktsystem $\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_r, \infty_1, \cdots, \infty_1, \cdots, \infty_q, \cdots, \infty_q$ als Bestandteil besitzen und bei denen der noch übrige, keinen der Punkte α, ∞ mehr enthaltende, Teil aus t Gruppen zusammenfallender Punkte mit den Häufigkeitszahlen $s_1, \cdots, s_t$ beziehungsweise besteht. Dabei ist dann $m_1 + \cdots + m_r + n_1 + \cdots + n_q + s_1 + \cdots + s_t = p$. Die Zahlen m, n können auch sämtlich den Wert 0, die Zahlen s sämtlich den Wert 1 haben; ausgeschlossen ist nur das, die schon vorher betrachtete Art von Punktsystemen $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ charakterisierende, Wertsystem $m_1 = 0, \cdots, m_r = 0$, $n_1 = 0, \cdots, n_q = 0$, $s_1 = 1, \cdots, s_t = 1$. Daß die Anzahl der so unterschiedenen Arten eine endliche ist, leuchtet unmittelbar ein.

Die vorher durchgeführte Untersuchung läßt sich nun mit geringen Änderungen auf jede der eben unterschiedenen Arten von zur Gruppe $\mathsf{E}_H^{(\nu)}$ gehörigen Punktsystemen übertragen. Wird auch der Ausdruck $Q(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ für die Punktsysteme einer solchen Art zunächst unbestimmt, so liefert er doch, indem man jedes derartige Punktsystem als Grenze eines Systems der vorher betrachteten Art auffaßt und unter Zuhilfenahme von Reihenentwicklungen zur Grenze übergeht, einen bestimmten für die betreffende Art charakteristischen Ausdruck, bei dem an Stelle der ursprünglichen Determinante $\sum \pm \frac{du_1^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} \cdots \frac{du_p^{\varepsilon_p}}{d\varepsilon_p}$ eine Determinante steht, deren ϱ^{te} Zeile die $m_1 + \cdots + m_r + n_1 + \cdots + n_q + s_1 + \cdots + s_t = p$ Elemente $\left(\frac{du_\varrho}{dz_{\alpha_1}}\right)_0 \cdots \left(\frac{d^{m_1} u_\varrho}{dz_{\alpha_1}^{m_1}}\right)_0 \cdots\cdot \left(\frac{du_\varrho}{dz_{\alpha_r}}\right)_0 \cdots \left(\frac{d^{m_r} u_\varrho}{dz_{\alpha_r}^{m_r}}\right)_0 \left(\frac{du_\varrho}{dz_{\infty_1}}\right)_0 \cdots \left(\frac{d^{n_1} u_\varrho}{dz_{\infty_1}^{n_1}}\right)_0 \cdots\cdot \left(\frac{du_\varrho}{dz_{\infty_q}}\right)_0 \cdots \left(\frac{d^{n_q} u_\varrho}{dz_{\infty_q}^{n_q}}\right)_0 \frac{du_\varrho^{\xi_1}}{d\xi_1} \cdots \frac{d^{s_1} u_\varrho^{\xi_1}}{d\xi_1^{s_1}} \cdots\cdot \frac{du_\varrho^{\xi_t}}{d\xi_t} \cdots \frac{d^{s_t} u_\varrho^{\xi_t}}{d\xi_t^{s_t}}$ in der angegebenen Reihenfolge enthält. Für diese Determinante ergibt sich aber aus dem im vorliegenden Falle an Stelle des Gleichungssystems (35.) tretenden System die der Gleichung (38.) entsprechende Gleichung, und es entsteht dann durch Verbindung dieser letzteren Gleichung mit dem für $Q(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ ermittelten Ausdruck die im vorliegenden Falle an Stelle von (39.) tretende Gleichung. Von ihr aus gelangt man durch die früher angewandte Schlußweise schließlich wieder zu den Beziehungen (40.), (41.) und damit zu dem Resultat, daß der Wert von $Q(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ zugleich mit H für alle der Gruppe $\mathsf{E}_H^{(\nu)}$ angehörigen Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ der hier betrachteten allgemeinen Art und daher auch, da die Anzahl der unterschiedenen Arten eine endliche ist, für alle der Gruppe $\mathsf{E}_H^{(\nu)}$ überhaupt angehörigen Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ gleichmäßig gegen Null konvergiert.

Da die vorstehende Untersuchung für jede der $p+1$ Gruppen $\mathsf{E}_H^{(\nu)}$, ${\scriptstyle \nu = 1, 2, \cdots, p+1}$, gilt, so ist damit auch bewiesen, daß der Wert von $Q(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ zugleich mit H für alle der Totalität E_H angehörigen Punktsysteme $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ gleichmäßig gegen Null konvergiert. Beachtet man dann noch, daß die Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ mit den Größen $\overline{w}_1 + h_1, \cdots, \overline{w}_p + h_p$ durch die Gleichung (29.) oder, was dasselbe, durch eine Gleichung von der Form:

$$\overline{w}_1 + h_1 \,|\cdots|\, \overline{w}_p + h_p = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_1^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu}\!\!\!\!\!\!\int du_1 - \sum_{\nu=1}^{\nu=p} g'_\nu a_{1\nu} - h'_1 \pi i \,|\cdots|\, \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_p^{\varkappa_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu}\!\!\!\!\!\!\int du_p - \sum_{\nu=1}^{\nu=p} g'_\nu a_{p\nu} - h'_p \pi i,$$

bei der die g', h' ganze Zahlen bezeichnen, verknüpft sind, und daß dementsprechend auf Grund der Gleichungen (22.), (15.), (14.), (37.) die Beziehung:

$$(42.) \qquad E(z, \overline{w}_1 + h_1, \cdots, \overline{w}_p + h_p) = \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \\ z\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_p \\ z\end{matrix}\right| Q(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)\, e^{2\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=p} \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} (\mathfrak{g}_\sigma + 1)\, u_\sigma^{\varepsilon_\nu}}$$
$$\times\, e^{-2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g'_\mu \left(u_\mu^z - \sum\limits_{\varrho=1}^{\varrho=p} u_\mu^{\varepsilon_\varrho} - k_\mu\right) - \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g'_\mu g'_{\mu'}}$$

besteht, so erkennt man schließlich, daß auch der Ausdruck $E(z, \overline{w}_1 + h_1, \cdots, \overline{w}_p + h_p)$, bei dem $h_1, \cdots, h_p$ irgend welche ihren Moduln nach die positive Größe H nicht überschreitende komplexe Größen bezeichnen, mit H gegen Null konvergiert, oder, was dasselbe, daß die im Bereich $W-\overline{W}$ durchweg stetige Funktion $E(z, w_1, \cdots, w_p)$ auch noch für jeden der Mannigfaltigkeit $\overline{W}$ angehörigen Punkt $(w)=(\overline{w})$ des Raumes W stetig ist.

Im Anschluß an die vorstehende Untersuchung möge hier noch bemerkt werden, daß die für irgend einen von den Punkten α, ∞ verschiedenen Punkt z der Fläche T' gebildete Derivierte $\frac{\partial E(z, w_1, \cdots, w_p)}{\partial z}$ als Funktion von $w_1, \cdots, w_p$ betrachtet ebenfalls für jeden der Mannigfaltigkeit $\overline{W}$ angehörigen Punkt $(w)=(\overline{w})$ des Raumes W stetig ist. Man erkennt dieses ohne Mühe, wenn man beachtet, daß der aus der Gleichung (42.) für die Derivierte $\frac{\partial E(z, \overline{w}_1+h_1, \cdots, \overline{w}_p+h_p)}{\partial z}$ sich ergebende Ausdruck die Größe $Q(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ als Faktor enthält, also ebensowie $E(z, \overline{w}_1+h_1, \cdots, \overline{w}_p+h_p)$ mit H gegen Null konvergiert, und daß die Derivierte $\frac{\partial E(z, \overline{w}_1, \cdots, \overline{w}_p)}{\partial z}$ wegen der für jeden Punkt z der Fläche T' geltenden Gleichung $E(z, \overline{w}_1, \cdots, \overline{w}_p)=0$ den Wert Null hat.

7.

Man verstehe unter $v_1, \cdots, v_p$ p unabhängige komplexe Veränderliche und ordne zur Erzielung einer kürzeren Ausdrucksweise dem Wertsysteme $v_1 = v_1^{(1)}+v_1^{(2)}i, \cdots, v_p = v_p^{(1)}+v_p^{(2)}i$ denjenigen Punkt (v) eines $2p$-dimensionalen Raumes V, der die $2p$ reellen Größen $v_1^{(1)}, v_1^{(2)}; \cdots; v_p^{(1)}, v_p^{(2)}$ zu Koordinaten hat, als Korrespondenten zu. Der Gesamtheit der Wertsysteme $v_1, \cdots, v_p$ entspricht dann die Gesamtheit der Punkte (v) des Raumes V. Das System $(v)=v_1 \,|\, \cdots \,|\, v_p$ kann man nach Wahl eines Punktes z der Fläche T' immer in der durch die Gleichung:

$$v_1 \,|\, \cdots \,|\, v_p = u_1^z - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_1^{\varkappa_\mu} - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu} du_1 - k_1 \,|\, \cdots \,|\, u_p^z - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_p^{\varkappa_\mu} - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \int_{\varkappa_\mu}^{\varepsilon_\mu} du_p - k_p \tag{43.}$$

oder, was dasselbe, in der durch die Kongruenz:

$$(v) \equiv \left(u^z - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varepsilon_\mu} - k\right) \tag{43'.}$$

bestimmten Form darstellen, bei der $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ Punkte der Fläche T' bezeichnen. Diese Darstellung ist zugleich die einzige, wenn $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)=p$ ist; für $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)<p$ dagegen existieren unbegrenzt viele Darstellungen, und diese werden durch die mit $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ äquivalenten Punktsysteme geliefert. Auf Grund der verschiedenen Darstellungen von (v), die entstehen, wenn man für z andere und andere Punkte der Fläche T' wählt, sollen nun in bezug auf das System (v) die folgenden beiden Fälle unterschieden werden.

Erster Fall: *Das System* (v) *ist so beschaffen, daß eine Darstellung*

$$(v) \equiv \left(u^{z} - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varepsilon_\mu} - k\right)$$

existiert, bei der $\mathfrak{N}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = p$ *ist.*

Liegt dieser Fall vor und fällt zudem keiner der Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ mit dem Punkte z zusammen, so besteht auch für jede andere Darstellung $(v) \equiv \left(u^{z'} - \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varepsilon'_\mu} - k\right)$ die Beziehung $\mathfrak{N}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_p) = p$ und keiner der Punkte $\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_p$ fällt mit dem Punkte z' zusammen. Wäre nämlich $\mathfrak{N}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_p) < p$, das Punktsystem $\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_p$ also ein ersetzbares, so ließe sich ein den Punkt z' enthaltendes Punktsystem $z', \bar{\varepsilon}_2, \cdots, \bar{\varepsilon}_p$ von der Art bestimmen, daß die Kongruenz $\left(\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varepsilon'_\mu}\right) \equiv \left(u^{z'} + \sum\limits_{\mu=2}^{\mu=p} u^{\bar{\varepsilon}_\mu}\right)$ erfüllt ist, und es würde sich dann aus dieser Kongruenz und den beiden in Rede stehenden Darstellungen von (v) durch Elimination der Größen ε', v die Kongruenz $\left(\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varepsilon_\mu}\right) \equiv \left(u^{z} + \sum\limits_{\mu=2}^{\mu=p} u^{\bar{\varepsilon}_\mu}\right)$ ergeben. Eine Kongruenz derselben Art und zwar die Kongruenz $\left(\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varepsilon_\mu}\right) \equiv \left(u^{z} + \sum\limits_{\mu=2}^{\mu=p} u^{\varepsilon'_\mu}\right)$ würde man, welchen Wert $\mathfrak{N}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_p)$ auch haben mag, durch Elimination der Größen v aus den beiden in Rede stehenden Darstellungen von (v) erhalten, wenn ein Punkt ε', etwa ε'_1, mit dem Punkte z' zusammenfiele. Jede der beiden letzten Kongruenzen steht aber, da keiner der Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ mit dem Punkte z zusammenfällt, im Widerspruch mit der Voraussetzung $\mathfrak{N}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = p$, da diese das Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ als ein nicht ersetzbares charakterisiert.

Fällt dagegen bei der für (v) vorausgesetzten Darstellung einer der Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$, etwa ε_1, mit dem Punkte z zusammen und ist $(v) \equiv \left(u^{z'} - \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varepsilon'_\mu} - k\right)$ irgend eine zweite Darstellung, so besteht, wie durch Elimination der Größen v aus den beiden Darstellungen sich ergibt, die Kongruenz $\left(\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varepsilon'_\mu}\right) \equiv \left(u^{z'} + \sum\limits_{\mu=2}^{\mu=p} u^{\varepsilon_\mu}\right)$. Nun beachte man, daß nach der Voraussetzung $\mathfrak{N}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = p$, also $\mathfrak{N}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p) = p-1$ ist und daß infolgedessen $\mathfrak{N}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(z', \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p)$ nur dann einen unter p liegenden Wert und zwar den Wert $p-1$ hat, wenn z' ein Punkt des zu $\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p$ gehörigen einzigen Restpunktsystems $\eta_1, \cdots, \eta_{p-1}$ einer Funktion $\frac{du}{dz}$ ist. Aus der letzten Kongruenz erkennt man dann, daß für alle Darstellungen $(v) \equiv \left(u^{z'} - \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varepsilon'_\mu} - k\right)$ des Systems (v), bei denen z' mit keinem der

Punkte $\eta_1, \cdots, \eta_{p-1}$ zusammenfällt, die Beziehung $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p') = p$ besteht und das Punktsystem $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ mit dem Punktsystem $z', \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p$ identisch ist, daß dagegen, wenn z' sich mit einem der Punkte $\eta_1, \cdots, \eta_{p-1}$ deckt, $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p') = p-1$ ist.

Zweiter Fall: *Das System (v) ist so beschaffen, daß nur Darstellungen*

$$(v) \equiv \left(u^z - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varepsilon_\mu} - k\right)$$

existieren, bei denen $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) < p$ ist.

Ein jedes zum zweiten Fall gehörige System (v) soll im folgenden mit $(\bar{v})$ bezeichnet werden. Die diesen Systemen entsprechenden Punkte $(\bar{v})$ bilden im $2p$-dimensionalen Raume V eine Mannigfaltigkeit von nur $2p-4$ Dimensionen, wie man unmittelbar aus dem zu Anfang des Art. 2 über die Mannigfaltigkeit $\overline{W}$ Bemerkten erkennt. Die nach Ausscheidung der Mannigfaltigkeit $\overline{V}$ übrigbleibende $2p$-dimensionale Mannigfaltigkeit soll mit $V - \overline{V}$ bezeichnet werden.

Nach diesen Vorbereitungen gehe man jetzt auf die für jeden Punkt (w) des Raumes W geltende Gleichung (22.), bei der die Größen $w_1, \cdots, w_p$, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ durch die ihr vorangehende Gleichung (G.) verknüpft sind, zurück und führe darin an Stelle der Größen $w_1, \cdots, w_p$ Größen $v_1, \cdots, v_p$ vermittels der Gleichung:

$$w_1 | \cdots | w_p = u_1^z - v_1 - k_1 | \cdots | u_p^z - v_p - k_p \tag{44.}$$

ein. Man erhält dann die Gleichung:

$$G\begin{Bmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{Bmatrix} \left| \begin{matrix} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z \end{matrix} \right| = E(z, w_1, \cdots, w_p) = E(z, u_1^z - v_1 - k_1, \cdots, u_p^z - v_p - k_p) = F(z, v_1, \cdots, v_p), \tag{45.}$$

bei der die Größen $v_1, \cdots, v_p$ mit den Größen $z, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ durch die Gleichung:

$$v_1 | \cdots | v_p = u_1^z - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_1^{\varepsilon_\mu} + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} g_\nu a_{1\nu} + h_1 \pi i - k_1 | \cdots | u_p^z - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_p^{\varepsilon_\mu} + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} g_\nu a_{p\nu} + h_p \pi i - k_p \tag{46.}$$

verknüpft sind. Die so entstandene Größe $F(z, v_1, \cdots, v_p)$ soll jetzt als Funktion der $p+1$ unabhängigen Veränderlichen $z, v_1, \cdots, v_p$ näher untersucht werden.

Die Größe $F(z, v_1, \cdots, v_p)$ ist für jedes System $v_1, \cdots, v_p$ von z unabhängig. Für den Beweis dieser Behauptung hat man die folgenden Möglichkeiten zu unterscheiden.

Es liege zunächst ein zum ersten Falle gehöriges System (v) von der Art vor, daß bei jeder der Gleichung (46.) entsprechenden Darstellung des Systems (v) $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = p$ ist, oder, was dasselbe, daß für jedes z das dem Systeme (v) auf Grund der Gleichung (44.) entsprechende System (w) dem Bereich $W - \overline{W}$ angehört. Beachtet man dann, daß nach dem am Schlusse von Art. 5 ausgesprochenen Satze für jeden Punkt $z', w_1, \cdots, w_p$ des Gebietes $[T', W - \overline{W}]$ die Größe $E(z', w_1, \cdots, w_p)$ eine Funktion der $p+1$ komplexen Veränderlichen $z', w_1, \cdots, w_p$ ist und der Differentialgleichung (24.) genügt, so erkennt man, daß die auf Grund der Gleichungen (44.), (45.) gebildete Derivierte:

$$\left(\frac{\partial F(z, v_1, \cdots, v_p)}{\partial \zeta}\right)_0 = \left(\frac{\partial E(z, w_1, \cdots, w_p)}{\partial \zeta}\right)_0 + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \frac{\partial E(z', w_1, \cdots, w_p)}{\partial w_\varrho} \left(\frac{du_\varrho^z}{d\zeta}\right)_0$$

für jeden Punkt z' der Fläche T' den Wert Null besitzt, oder, was dasselbe, daß die Funktion $F(z, v_1, \cdots, v_p)$ für jedes System (v) der in Rede stehenden Art von z unabhängig ist.

Liegt dagegen ein zum ersten Falle gehöriges System (v) von der Art vor, daß nicht bei jeder der Gleichung (46.) entsprechenden Darstellung des Systems (v) $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = p$ ist, so fällt nach dem beim ersten Falle an zweiter Stelle Bemerkten in der Gleichung (46.) entweder einer der Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ mit dem Punkte z zusammen oder es ist $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) < p$, sodaß also für jedes dem Systeme (v) entsprechende Punktsystem $z, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ die Größe G, welche in der die Funktion F definierenden Gleichung (45.) vorkommt, den Wert Null hat. Es besteht daher für jeden Punkt z der Fläche T' die Gleichung $F(z, v_1, \cdots, v_p) = 0$ und es ist demnach die Funktion $F(z, v_1, \cdots, v_p)$ auch für jedes System (v) der jetzt in Rede stehenden Art von z unabhängig.

Liegt endlich ein zum zweiten Falle gehöriges System $(v) = (\overline{v})$ vor, so gehört, wie auch z gewählt sein mag, das ihm auf Grund der Gleichung (44.) entsprechende System (w) immer dem Bereiche $\overline{W}$ an und es besteht demnach, da für jedes System $(\overline{w})$ $E(z, \overline{w}_1, \cdots, \overline{w}_p) = 0$ ist, für jedes System $(\overline{v})$ die Gleichung $F(z, \overline{v}_1, \cdots, \overline{v}_p) = 0$.

Damit ist bewiesen, daß die Größe $F(z, v_1, \cdots, v_p)$ eine nur von den Größen $v_1, \cdots, v_p$ abhängige, mit $G(v_1 | \cdots | v_p)$ zu bezeichnende, Funktion ist, und es kann daher jetzt die Gleichung (45.) durch die Gleichung:

$$(47.) \qquad G\begin{Bmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{Bmatrix} \left| \begin{matrix} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z \end{matrix} \right| = E(z, w_1, \cdots, w_p) = E(z, u_1^z - v_1 - k_1, \cdots, u_p^z - v_p - k_p) = G(v_1 | \cdots | v_p)$$

ersetzt werden. Für die so definierte Funktion $G(v_1 | \cdots | v_p)$ ergeben sich nun die folgenden Eigenschaften.

Die Funktion $G(v_1 | \cdots | v_p)$ ist, da $E(z, w_1, \cdots, w_p)$ für jeden Punkt $z, w_1, \cdots, w_p$ des Gebietes $[T', W]$ einwertig und bei endlichen $w_1, \cdots, w_p$ auch stetig ist, für jeden Punkt (v) des Raumes V einwertig und bei endlichen $v_1, \cdots, v_p$ auch stetig. Ist speziell $(v) = (\overline{v})$, gehört also der Punkt (v) der Mannigfaltigkeit V an, so besteht nach dem soeben für $F(z, \overline{v}_1, \cdots, \overline{v}_p)$ Bewiesenen die Gleichung $G(\overline{v}_1 | \cdots | \overline{v}_p) = 0$.

Die Funktion $\bar{G}(v_1|\cdots|v_p)$ besitzt für jeden Punkt (v) der Mannigfaltigkeit $V-\bar{V}$ Derivierten nach $v_1, \cdots, v_p$. Zu einem solchen Punkte (v) kann man nämlich nach dem beim ersten Falle Bemerkten immer auf unbegrenzt viele Weisen einen Punkt z der Fläche T' von der Art wählen, daß der dem Punkte (v) auf Grund der Gleichung $(w) = (u^z - v - k)$ entsprechende Punkt (w) der Mannigfaltigkeit $W - \bar{W}$ angehört und demnach die durch die Substitution $(w) = (u^z - v - k)$ in $\bar{G}(v_1|\cdots|v_p)$ übergehende Funktion $E(z, w_1, \cdots, w_p)$ Derivierten nach $w_1, \cdots, w_p$ besitzt, deren Werte durch die Formel (21.) geliefert werden. Es besitzt also auch $\bar{G}(v_1|\cdots|v_p)$ für den in Rede stehenden Punkt (v) von $V-\bar{V}$ Derivierten nach $v_1, \cdots, v_p$, die durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial \bar{G}(v_1|\cdots|v_p)}{\partial v_\varrho} = -\frac{\partial E(z, w_1, \cdots, w_p)}{\partial w_\varrho}, \qquad \varrho = 1, 2, \cdots, p, \tag{48.}$$

geliefert werden.

Die auf irgend einen Punkt (v) der Mannigfaltigkeit $V-\bar{V}$ bezogenen Derivierten $\frac{\partial \bar{G}}{\partial v_1}, \cdots, \frac{\partial \bar{G}}{\partial v_p}$ konvergieren, wenn der Punkt (v), ohne aus $V-\bar{V}$ herauszutreten, gegen einen Punkt $(\bar{v})$ von $\bar{V}$ anrückt, sämtlich gegen Null. Zum Beweise dieser Behauptung beachte man zunächst, daß die Größe $\bar{G}(v_1|\cdots|v_p)$ durch die Substitution $(v) = (u^z - w - k)$ in $E(z, w_1, \cdots, w_p)$ übergeht, und daß infolgedessen für jeden Punkt (v) von $V-\bar{V}$ und jeden von den Punkten a, ∞ verschiedenen Punkt z der Fläche T' die Gleichung:

$$\frac{\partial E(z, w_1, \cdots, w_p)}{\partial z} = \frac{\partial \bar{G}(v_1|\cdots|v_p)}{\partial v_1}\frac{du_1}{dz} + \cdots + \frac{\partial \bar{G}(v_1|\cdots|v_p)}{\partial v_p}\frac{du_p}{dz}$$

besteht. Nun wähle man im Innern von T' irgend p untereinander und von den Punkten a, ∞ verschiedene, der Bedingung $\mathfrak{N}_{\left|{1 \atop 1}\right|}(z^{(1)}, \cdots, z^{(p)}) = p$ genügende Punkte $z^{(1)}, z^{(2)}, \cdots, z^{(p)}$, setze für $\varrho = 1, 2, \cdots, p$ zur Abkürzung $(u^{z^{(\varrho)}} - v - k) = (w^{(\varrho)})$, $E(z^{(\varrho)}, w_1^{(\varrho)}, \cdots, w_p^{(\varrho)}) = E^{(\varrho)}$, lasse alsdann in der aufgestellten Gleichung an Stelle des Punktes z der Reihe nach die Punkte $z^{(1)}, \cdots, z^{(p)}$ treten und löse endlich das so entstehende System von p Gleichungen nach den Größen $\frac{\partial \bar{G}}{\partial v_1}, \cdots, \frac{\partial \bar{G}}{\partial v_p}$ als Unbekannten auf. Man erhält dann die für $\varrho = 1, 2, \cdots, p$ geltende Gleichung:

$$\frac{\partial \bar{G}(v_1|\cdots|v_p)}{\partial v_\varrho} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \frac{du_1^{z^{(1)}}}{dz^{(1)}} & \cdots & \frac{du_{\varrho-1}^{z^{(1)}}}{dz^{(1)}} & \frac{\partial E^{(1)}}{\partial z^{(1)}} & \frac{du_{\varrho+1}^{z^{(1)}}}{dz^{(1)}} & \cdots & \frac{du_p^{z^{(1)}}}{dz^{(1)}} \\ \frac{du_1^{z^{(2)}}}{dz^{(2)}} & \cdots & \frac{du_{\varrho-1}^{z^{(2)}}}{dz^{(2)}} & \frac{\partial E^{(2)}}{\partial z^{(2)}} & \frac{du_{\varrho+1}^{z^{(2)}}}{dz^{(2)}} & \cdots & \frac{du_p^{z^{(2)}}}{dz^{(2)}} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{du_1^{z^{(p)}}}{dz^{(p)}} & \cdots & \frac{du_{\varrho-1}^{z^{(p)}}}{dz^{(p)}} & \frac{\partial E^{(p)}}{\partial z^{(p)}} & \frac{du_{\varrho+1}^{z^{(p)}}}{dz^{(p)}} & \cdots & \frac{du_p^{z^{(p)}}}{dz^{(p)}} \end{vmatrix}, \tag{49.}$$

bei der $\Delta = \sum \pm \frac{du_1^{z^{(1)}}}{dz^{(1)}} \frac{du_2^{z^{(2)}}}{dz^{(2)}} \cdots \frac{du_p^{z^{(p)}}}{dz^{(p)}}$ ist. Läßt man jetzt unter Festhaltung der gewählten Punkte $z^{(1)}, \cdots, z^{(p)}$ den Punkt (v) in der Mannigfaltigkeit $V - V$ gegen einen Punkt $(\bar{v})$ von $\bar{V}$ anrücken, so rücken die ihm auf Grund der Gleichungen $(w^{(\varrho)}) = (u^{z^{(\varrho)}} - v - k)$, $\varrho = 1, 2, \cdots, p$, entsprechenden Punkte $(w^{(1)}), \cdots, (w^{(p)})$ gegen bestimmte Punkte $(\bar{w}^{(1)}), \cdots, (\bar{w}^{(p)})$ der Mannigfaltigkeit $\overline{W}$ an, zugleich konvergieren die Größen $\frac{\partial E^{(1)}}{\partial z^{(1)}}, \cdots, \frac{\partial E^{(p)}}{\partial z^{(p)}}$, nach dem am Schlusse von Art. 6 Bemerkten, sämtlich gegen Null, und es konvergiert daher auf Grund der Gleichung (49.) auch die Derivierte $\frac{\partial \bar{G}}{\partial v_\varrho}$ $(\varrho = 1, 2, \cdots, p)$ gegen Null. Damit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen.

Die Funktion $\bar{G}(v_1 | \cdots | v_p)$ genügt infolge der für $E(z, w_1, \cdots, w_p)$ geltenden Beziehung (23.) der Gleichung:

$$(50.)\quad \bar{G}\left(v_1 + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} g'_\nu a_{1\nu} + h'_1 \pi i \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, v_p + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} g'_\nu a_{p\nu} + h'_p \pi i\right) = \bar{G}(v_1 | \cdots | v_p) e^{-2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g'_\mu v_\mu - \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g'_\mu g'_{\mu'}},$$

bei der $g'_1, \cdots, g'_p, h'_1, \cdots, h'_p$ irgend welche ganze Zahlen bezeichnen. Aus ihr ergeben sich, wenn man das eine Mal $h'_\varrho = 1$, das andere Mal $g'_\varrho = 1$ setzt und jedesmal den $2p - 1$ übrigen ganzen Zahlen g', h' den Wert Null gibt, die speziellen Relationen:

$$(50_1.)\quad \bar{G}(v_1 | \cdots | v_\varrho + \pi i | \cdots | v_p) = \bar{G}(v_1 | \cdots | v_\varrho | \cdots | v_p), \qquad \varrho = 1, 2, \cdots, p,$$

$$(50_2.)\quad \bar{G}(v_1 + a_{1\varrho} | \cdots | v_\varrho + a_{\varrho\varrho} | \cdots | v_p + a_{p\varrho}) = \bar{G}(v_1 | \cdots | v_\varrho | \cdots | v_p) e^{-2v_\varrho - a_{\varrho\varrho}}, \qquad \varrho = 1, 2, \cdots, p.$$

Auf Grund der bis jetzt ermittelten Eigenschaften von $\bar{G}(v_1 | \cdots | v_p)$ erkennt man nun, unter Beachtung des analytischen Charakters der $(2p-4)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\bar{V}$, zunächst, daß $\bar{G}(v'_1 | \cdots | v'_{\varrho-1} | v_\varrho | v'_{\varrho+1} | \cdots | v'_p)$ $(\varrho = 1, 2, \cdots, p)$, wie auch die Werte $v'_1, \cdots, v'_{\varrho-1}, v'_{\varrho+1}, \cdots, v'_p$ gewählt sein mögen, eine einwertige und bei endlichem v_ϱ auch stetige Funktion der komplexen Veränderlichen v_ϱ ist und daß daher nach einem von Herrn F. Hartogs bewiesenen Satze*) $\bar{G}(v_1 | \cdots | v_p)$ eine einwertige und bei endlichen v auch stetige Funktion der p unabhängigen komplexen Veränderlichen $v_1, \cdots, v_p$ ist. Da die Funktion $\bar{G}(v_1 | \cdots | v_p)$ aber auch, nach $(50_1.)$, in bezug auf jede der Veränderlichen $v_1, \cdots, v_p$ die Periode πi besitzt, so läßt sie sich für alle endlichen v immer und nur auf eine Weise in der durch die Gleichung:

$$(51.)\quad \bar{G}(v_1 | \cdots | v_p) = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} A_{m_1 \cdots m_p} e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu v_\mu}$$

---

*) Vgl. Hartogs, F., Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten. Mathematische Annalen 62 (1906), S. 1—88; S. 12.

bestimmten Form darstellen, bei der die A von $v_1, \cdots, v_p$ unabhängige Größen bezeichnen. Zur Bestimmung der Konstante $A_{m_1 \cdots m_p}$ führe man die für G gewonnene p-fach unendliche Reihe in die Gleichung (50.) ein und lasse auf der rechten Seite der dadurch entstehenden Gleichung im allgemeinen Glied der Reihe an Stelle der Zahlen $m_1, \cdots, m_p$ die Zahlen $m_1 + g_1', \cdots, m_p + g_p'$ treten, indem man beachtet, daß dadurch der Wert der Reihe nicht geändert wird. Man erhält dann, da die Koeffizienten von $e^{2m_1 v_1 + \cdots + 2m_p v_p}$ auf der linken und rechten Seite dieser Gleichung denselben Wert haben müssen, die für irgend $2p$ ganze Zahlen $m_1, \cdots, m_p, g_1', \cdots, g_p'$ geltende Beziehung:

$$A_{m_1 \cdots m_p} e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu g'_{\mu'}} = A_{m_1 + g_1' \cdots m_p + g_p'} e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g'_\mu g'_{\mu'}}.$$

und weiter, wenn man $g_1' = -m_1, \cdots, g_p' = -m_p$ setzt, die Gleichung:

$$A_{m_1 \cdots m_p} = A_{0 \cdots 0}\, e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'}}. \tag{52.}$$

Trägt man den so für $A_{m_1 \cdots m_p}$ gewonnenen Ausdruck in die Gleichung (51.) ein und setzt

$$\vartheta(v_1 | \cdots | v_p) = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu v_\mu}, \tag{53.}$$

so erhält man schließlich, wenn man noch zur Abkürzung die Indizes bei $A_{0 \cdots 0}$ unterdrückt, für $G(v_1 | \cdots | v_p)$ die Gleichung:

$$\overline{G}(v_1 | \cdots | v_p) = A\,\vartheta(v_1 | \cdots | v_p), \tag{54.}$$

bei der also A eine von den Größen $v_1, \cdots, v_p$ unabhängige Konstante bezeichnet.

Geht man jetzt auf die Gleichung (47.) zurück, ersetzt darin zunächst $G(v_1 | \cdots | v_p)$ durch den soeben dafür erhaltenen Ausdruck, alsdann die Größen $v_1, \cdots, v_p$ durch die ihnen auf Grund der Gleichung (46.) entsprechenden Funktionen von $z, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$, und läßt zugleich die ganzen Zahlen g, h sämtlich mit der Null zusammenfallen, indem man beachtet, daß dadurch $G\left\{\begin{matrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{matrix}\right\} \left|\begin{matrix} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z \end{matrix}\right|$ in $G\left|\begin{matrix} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z \end{matrix}\right|$ übergeht, so erhält man schließlich die Gleichung:

$$G\left|\begin{matrix} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ z \end{matrix}\right| = A\,\vartheta\left(u_1^z - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_1^{\varepsilon_\mu} - k_1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, u_p^z - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_p^{\varepsilon_\mu} - k_p\right), \tag{55.}$$

bei der dann A eine von den Punkten $z, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ unabhängige, also nur von der Beschaffenheit der vorgegebenen $(2p+1)$-fach zusammenhängenden Fläche T und von dem Charakter des zur Verwandlung dieser Fläche in eine einfach zusammenhängende

Fläche T' benutzten Querschnittsystems abhängige Konstante bezeichnet. Damit ist aber die Riemann'sche Thetafunktion gewonnen.

Riemann hat die nach ihm benannte Funktion $\vartheta(u_1 - e_1 | \cdots | u_p - e_p)$ unmittelbar dadurch erhalten, daß er in eine p-fach unendliche Reihe von der Form (53.), zu der schon die Untersuchungen von Weierstrass*) geführt hatten, an Stelle von $a_{\mu\mu'}$ $(\mu, \mu' = 1, 2, \cdots, p)$ die der Funktion u_μ für den Schnitt $b_{\mu'}$ zukommende Konstante, an Stelle von v_μ $(\mu = 1, 2, \cdots, p)$ die mit der beliebigen Konstante e_μ gebildete Funktion $u_\mu - e_\mu$ einführte, und hat dann die Theorie dieser Funktion in der zweiten Abteilung seiner „Theorie der Abel'schen Functionen"**) sowie in seiner Arbeit „Über das Verschwinden der Theta-Functionen"***) entwickelt. Eine ausführliche Darstellung dieser Theorie wurde von G. Rost†) gegeben.

Die Bedeutung der Riemann'schen Thetafunktion liegt darin, daß man mit ihrer Hilfe die sämtlichen in dieser Arbeit gewonnenen, bis jetzt nur durch ihre Eigenschaften definierten Funktionen in ihrem ganzen Umfang durch die p Elementarfunktionen $u_1, u_2, \cdots, u_p$ und deren Derivierten darstellen kann. Um diese Darstellungen zu gewinnen, genügt es, die zu der ausgezeichneten Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ gehörige Elementarfunktion $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|$ und die zu einer beliebigen Charakteristik $\binom{A_1 \cdots A_p}{B_1 \cdots B_p}$ gehörigen Elementarfunktionen $w_1, \cdots, w_p$, $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|$ darzustellen, da aus einer Funktion $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|$ die noch übrigen zu derselben Charakteristik gehörigen Elementarfunktionen $\underset{1}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|$, $\underset{2}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|$, $\cdots$ durch Derivation erhalten werden können. Die Darstellung der genannten Elementarfunktionen soll im folgenden Abschnitt durchgeführt werden. Auf die Darstellung der A-Funktionen und der F-Funktionen bei vorgegebenem System der ∞^1-Punkte und teilweise vorgegebenem System der 0^1-Punkte durch Quotienten von Produkten gleich vieler Thetafunktionen soll dagegen nicht eingegangen werden, da schon Riemann††) die Theorie dieser Darstellungen in allgemeinen Zügen gegeben hat, auch solche Darstellungen vielfach von seinen Nachfolgern durchgeführt worden sind.

---

*) Vgl. Weierstrass, C., Zur Theorie der Abel'schen Functionen. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 47, S. 289—306, S. 304.)

**) Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 127—142.

***) Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 212—224.

†) Rost, G., Theorie der Riemann'schen Thetafunction. (Leipzig, Teubner 1901.)

††) Riemann, B., Theorie der Abelschen Functionen. II, Art. 26 und 27. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 88—144; S. 139—142.)

Achter Abschnitt.

Darstellung von Elementarfunktionen durch die Riemann'sche Thetafunktion.

1.

Es soll zunächst die zu der ausgezeichneten Charakteristik $\binom{1\cdots 1}{1\cdots 1}$ gehörige Elementarfunktion $\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|$ mit Hilfe der Riemann'schen Thetafunktion dargestellt werden. Zu dem Ende bilde man, unter z, ζ zwei beliebige Punkte, unter $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ irgend p der Bedingung $\mathfrak{N}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\ 1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = p$ genügende Punkte der Fläche T'' verstehend, das eine Mal auf Grund der die Funktion G definierenden Gleichung (14.), das andere Mal auf Grund der Gleichung (55.) des vorhergehenden Abschnittes den Quotienten der Funktionen $G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p\\ z\end{matrix}\right|$, $G\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p\\ \zeta\end{matrix}\right|$ und setze die beiden so sich ergebenden Ausdrücke einander gleich. Man erhält dann, unter Verwendung der Abkürzung $\vartheta((v))$ an Stelle von $\vartheta(v_1|\cdots|v_p)$, die für jede Lage der Punkte $z, \zeta, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ geltende Gleichung:

$$(1.)\qquad \frac{\Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_1\\ z\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_p\\ z\end{matrix}\right|}{\Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_1\\ \zeta\end{matrix}\right| \cdots \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon_p\\ \zeta\end{matrix}\right|} = \frac{\vartheta\left(\left(u^z - \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varepsilon_\mu} - k\right)\right)}{\vartheta\left(\left(u^\zeta - \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varepsilon_\mu} - k\right)\right)}$$

und weiter aus dieser durch Logarithmieren, unter Beachtung der Beziehung $\ln \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right| = -\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right|$, die Gleichung:

$$(2.)\qquad -\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\varrho\\ \zeta\end{matrix}\right| = \ln \vartheta\left(\left(u^z - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varepsilon_\mu} - k\right)\right) - \ln \vartheta\left(\left(u^\zeta - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\varepsilon_\mu} - k\right)\right).$$

Dabei hat man sich den der positiven Seite von c_p und der negativen Seite von c_1 gemeinsam angehörigen Punkt mit den Punkten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ durch Schnitte $l_{\varepsilon_1}, \cdots, l_{\varepsilon_p}$ verbunden zu denken (vgl. Fig. 17 auf Seite 154 des ersten Teiles) und die beiden Logarithmen so zu bestimmen, daß die auf der rechten Seite stehende Differenz sich für $z = \zeta$ auf Null reduziert. Multipliziert man nun linke und rechte Seite der letzten Gleichung mit $-\frac{1}{p\pi i}\,du_\nu^\zeta$, integriert alsdann nach ζ über b_ν^- in positiver Richtung und summiert nach ν von 1 bis p, so erhält man, unter Beachtung der Relation $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\overset{+}{\int\limits_{b_\nu^-}} du_\nu^\zeta = p\pi i$ und der auf Seite 101 stehenden Relation:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\overset{+}{\int\limits_{b_\nu^-}} \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right| du_\nu^\varepsilon - \pi i \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left(2\,u_\nu^\eta + \frac{2k_\nu}{p} + \frac{a_{\nu\nu}}{p}\right) = 0\,,$$

die Gleichung:

$$(3.)\quad \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_\varrho\\ z\end{matrix}\right| - \frac{1}{p}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left(2\,u_\nu^{\varepsilon_\varrho} + \frac{2k_\nu}{p} + \frac{a_{\nu\nu}}{p}\right) = -\ln\vartheta\left(\left(u^z - \sum_{\mu=1}^{\mu=p}u^{\varepsilon_\mu} - k\right)\right) + \frac{1}{p\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\overset{+}{\int\limits_{b_\nu^-}}\ln\vartheta\left(\left(u^\zeta - \sum_{\mu=1}^{\mu=p}u^{\varepsilon_\mu} - k\right)\right)du_\nu^\zeta$$

und schließlich aus dieser, indem man die Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ mit einem und demselben Punkte ε der Fläche T', der auch einer der Punkte α, ∞ sein darf, zusammenfallen läßt, die gewünschte, die zur Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}1 & \cdots & 1\\ 1 & \cdots & 1\end{smallmatrix}\right)$ gehörige Elementarfunktion $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|$ darstellende Gleichung:

$$(4.)\quad \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right| = -\frac{1}{p}\ln\vartheta((u^z - pu^\varepsilon - k)) + \frac{1}{p^2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\overset{+}{\int\limits_{b_\nu^-}}\ln\vartheta((u^\zeta - pu^\varepsilon - k))\,du_\nu^\zeta + \frac{1}{p}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left(2\,u_\nu^\varepsilon + \frac{2k_\nu}{p} + \frac{a_{\nu\nu}}{p}\right)\cdot$$

Eine zweite Darstellung für die in Rede stehende Funktion $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|$ erhält man, indem man den der positiven Seite von c_p und der negativen Seite von c_1 gemeinsam angehörigen Punkt auch noch mit dem Punkte z durch einen Schnitt l_z verbindet, alsdann mit Hilfe der Relation $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right| = \underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}z\\ \varepsilon\end{smallmatrix}\right| \pm \pi i$ (vgl. Formel (5.) auf Seite 116) die Funktion $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}z\\ \varepsilon\end{smallmatrix}\right|$ in die eben gewonnene Gleichung einführt und schließlich die Buchstaben z, ε miteinander vertauscht. Man gelangt auf diese Weise zu der Gleichung:

$$(5.)\quad \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right| = -\frac{1}{p}\ln\vartheta((u^\varepsilon - pu^z - k)) + \frac{1}{p^2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\overset{+}{\int\limits_{b_\nu^-}}\ln\vartheta((u^\zeta - pu^z - k))\,du_\nu^\zeta + \frac{1}{p}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left(2\,u_\nu^z + \frac{2k_\nu}{p} + \frac{a_{\nu\nu}}{p}\right) \pm \pi i,$$

bei der auf der rechten Seite das positive oder negative Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Schnitte c, l bei einem negativen Umlauf um ihren gemeinsamen Ausgangspunkt $\mathfrak{P}_0$ in der Reihenfolge $c_1, \cdots, c_p, l_\varepsilon, l_z$ oder in der Reihenfolge $c_1, \cdots, c_p, l_z, l_\varepsilon$ überschritten werden.

Bezieht man die zuletzt gewonnene Gleichung das eine Mal auf einen Punkt ε_1, das andere Mal auf einen Punkt ε_2 der Fläche T', setzt zugleich voraus, daß die Schnitte l_{ε_1}, l_{ε_2} beide entweder von dem der positiven Seite von c_p und der negativen Seite von l_z gemeinsam angehörigen Punkte oder von dem der negativen Seite von c_1 und der positiven Seite von l_z gemeinsam angehörigen Punkte ausgehen, und subtrahiert die beiden so erhaltenen Gleichungen, so entsteht die Gleichung:

$$(6.)\qquad \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_1\\ z\end{matrix}\right| - \underset{0}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_2\\ z\end{matrix}\right| = -\frac{1}{p}\ln\vartheta((u^{\varepsilon_1}-pu^z-k)) + \frac{1}{p}\ln\vartheta((u^{\varepsilon_2}-pu^z-k))$$

und weiter aus dieser durch Derivation nach ε_1 die Gleichung:

$$(7.)\qquad \underset{1}{P}\left|\begin{matrix}\varepsilon_1\\ z\end{matrix}\right| = -\frac{1}{p}\,\frac{\partial\ln\vartheta((u^{\varepsilon_1}-pu^z-k))}{\partial\varepsilon_1},$$

und man erkennt nun, daß die Funktion $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_1\\ z\end{smallmatrix}\right| - \underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_2\\ z\end{smallmatrix}\right|$ der drei Veränderlichen ε_1, ε_2, z mit der von Riemann*) am Schlusse von Art. 25 seiner Theorie der Abel'schen Funktionen definierten Funktion $\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, die Funktion $\underset{1}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_1\\ z\end{smallmatrix}\right|$ der beiden Veränderlichen ε_1, z mit der ebendort definierten Funktion $t(\varepsilon_1)$ identisch ist.

Was schließlich die Funktion $\Theta\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|$ betrifft, so erhält man für sie auf Grund der Gleichung (4.) unter Beachtung der Beziehung $\ln\Theta\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right| = -\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|$ die Darstellung:

$$(8.)\qquad \Theta\left|\begin{matrix}\varepsilon\\ z\end{matrix}\right| = e^{\frac{1}{p^2\pi i}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\int_{b_\nu^-}^{+}\ln\frac{\vartheta((u^z-pu^\varepsilon-k))}{\vartheta((u^\zeta-pu^\varepsilon-k))}\,du_\nu^\zeta - \frac{1}{p}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\left(2u_\nu^\varepsilon+\frac{2k_\nu}{p}+\frac{a_{\nu\nu}}{p}\right)}.$$

2.

Für die Darstellung der zu einer beliebigen Charakteristik $\binom{A}{B} = \binom{A_1\cdots A_p}{B_1\cdots B_p}$ gehörigen Elementarfunktionen empfiehlt sich die Einführung der mit irgend $2p$ reellen Größen $g_1, \cdots, g_p$, $h_1, \cdots, h_p$ gebildeten allgemeineren p-fach unendlichen Reihe:

$$\vartheta\begin{bmatrix}g\\ h\end{bmatrix}(v_1|\cdots|v_p) = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty}\cdots\sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}a_{\mu\mu'}(m_\mu+g_\mu)(m_{\mu'}+g_{\mu'}) + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(m_\mu+g_\mu)(v_\mu+h_\mu\pi i)},$$

die mit der auf Seite 286 unter (53.) definierten einfacheren Reihe durch die Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix}g\\ h\end{bmatrix}(v_1|\cdots|v_p) = \vartheta\left(v_1+\sum_{\nu=1}^{\nu=p}g_\nu a_{1\nu}+h_1\pi i\,\middle|\cdots\middle|\,v_p+\sum_{\nu=1}^{\nu=p}g_\nu a_{p\nu}+h_p\pi i\right)e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}a_{\mu\mu'}g_\mu g_{\mu'} + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}g_\mu(v_\mu+h_\mu\pi i)}$$

*) Riemann, B., Theorie der Abelschen Functionen. II, Art. 25. (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 88—144; S. 139.). In der die Funktion $t(\varepsilon_1)$ darstellenden Gleichung fehlt hinter dem Gleichheitszeichen das Minuszeichen.

verknüpft ist und in sie übergeht, wenn die Größen g, h sämtlich der Null gleichgesetzt werden, sodaß also $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right](v_1|\cdots|v_p) = \vartheta(v_1|\cdots|v_p)$ ist. Die durch die neue Reihe definierte Funktion $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right](v_1|\cdots|v_p)$ genügt den Gleichungen:

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right](v_1|\cdots|v_\varrho+\pi i|\cdots|v_p) = \vartheta\left[\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right](v_1|\cdots|v_\varrho|\cdots|v_p)\,e^{2g_\varrho\pi i}, \qquad \varrho=1,2,\cdots,p,$$

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right](v_1+a_{1\varrho}|\cdots|v_\varrho+a_{\varrho\varrho}|\cdots|v_p+a_{p\varrho}) = \vartheta\left[\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right](v_1|\cdots|v_\varrho|\cdots|v_p)\,e^{-2v_\varrho-a_{\varrho\varrho}-2h_\varrho\pi i}, \quad \varrho=1,2,\cdots,p.$$

Da, wie die Gleichung (55.) zeigt, $\vartheta\left(\left(u^z-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}u^{\varepsilon_\mu}-k\right)\right)$ als Funktion von z betrachtet entweder nur für die p Punkte $z=\varepsilon_1,\cdots,z=\varepsilon_p$ verschwindet, und zwar 0^1 wird, oder identisch verschwindet, je nachdem $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p)$ gleich p oder kleiner als p ist, und jedes Größensystem (e) nach Früherem sich der Kongruenz:

$$(e)\equiv\left(-\sum_{\mu=1}^{\mu=p}u^{\varepsilon_\mu}-k\right)$$

entsprechend darstellen läßt, so wird die Funktion $\vartheta((u^z+e))$ entweder nur für p Punkte, $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p$, verschwinden, und zwar 0^1 werden, oder identisch verschwinden, je nachdem die aufgestellte Kongruenz nur eine Lösung oder mehr als eine Lösung $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p$ besitzt. Beachtet man nun die vorstehende, die Funktion $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right]((v))$ mit der Funktion $\vartheta((v))$ verknüpfende Gleichung und bezeichnet das System $v_1+\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}g_\nu a_{1\nu}+h_1\pi i|\cdots|v_p+\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}g_\nu a_{p\nu}+h_p\pi i$ zur Abkürzung mit $\left(v+\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|\right)$, so erkennt man weiter, daß die Funktion $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right]((u^z+e))$ entweder nur für p Punkte, $\zeta_1,\cdots,\zeta_p$, verschwindet, und zwar 0^1 wird, oder identisch verschwindet, je nachdem die Kongruenz:

$$\left(e+\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|\right)\equiv\left(-\sum_{\mu=1}^{\mu=p}u^{\zeta_\mu}-k\right)$$

nur eine Lösung oder mehr als eine Lösung $\zeta_1,\cdots,\zeta_p$ besitzt.

Es soll nun in diesem Artikel gezeigt werden, wie man die Ausdrücke für die zu einer Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right)$ gehörigen allenthalben endlichen Elementarfunktionen $w_1,\cdots,w_p$ erhalten kann. Dabei wird man zweckmäßig von den folgenden Erwägungen ausgehen.

Ist w eine zur Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right)$, u eine zur Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}1\cdots1\\1\cdots1\end{smallmatrix}\right)$ gehörige allenthalben endliche Funktion und sind $\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(2p-2)}$; $\varepsilon^{(1)},\cdots,\varepsilon^{(2p-2)}$ die ihren Derivierten $\frac{dw}{dz}$, $\frac{du}{dz}$ beziehungsweise zukommenden Systeme der charakteristischen Punkte, so ist der mit $\frac{dw}{dz}$ als Zähler und $\frac{du}{dz}$ als Nenner gebildete Quotient $Q(z)$ eine zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige F-Funktion, welche für den Fall, daß die beiden genannten Punktsysteme keinen Punkt gemeinsam haben, das Punktsystem $\varepsilon^{(1)}, \cdots, \varepsilon^{(2p-2)}$ als System der ∞^1-Punkte, das Punktsystem $\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(2p-2)}$ als System der 0^1-Punkte besitzt, welche dagegen für den Fall, daß die beiden Punktsysteme einen Teil gemeinsam haben, das von dem Punktsystem $\varepsilon^{(1)}, \cdots, \varepsilon^{(2p-2)}$ nach Entfernung des gemeinsamen Teils übrigbleibende Punktsystem als System der ∞^1-Punkte, das von dem Punktsystem $\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(2p-2)}$ nach Entfernung des gemeinsamen Teils übrigbleibende Punktsystem als System der 0^1-Punkte besitzt. Infolgedessen läßt sich die Funktion $Q(z)$, wenn die beiden genannten Punktsysteme nicht von spezieller Art sind, bis auf einen von z unabhängigen Faktor durch den Quotienten zweier Produkte von je zwei Thetafunktionen darstellen.

Im Anschluß an die vorstehenden Erwägungen wähle man jetzt im Innern der Fläche T'' $p-1$ Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-1}$ so, daß $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-1}) = p-1$ ist und daß zudem unter diesen Punkten weder zusammenfallende Punkte noch Punkte a, ∞ vorkommen, beachte, daß durch die Gleichung:

$$\frac{du}{dz} = C \begin{vmatrix} \frac{du_1^z}{dz} & \cdots & \frac{du_p^z}{dz} \\ \frac{du_1^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} & \cdots & \frac{du_p^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{du_1^{\varepsilon_{p-1}}}{d\varepsilon_{p-1}} & \cdots & \frac{du_p^{\varepsilon_{p-1}}}{d\varepsilon_{p-1}} \end{vmatrix},$$

bei der C eine willkürliche Konstante bedeutet, die allgemeinste Funktion $\frac{du}{dz}$ dargestellt wird, welche das gewählte Punktsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-1}$ als Bestandteil des Systems der charakteristischen Punkte besitzt, und bezeichne das zu $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-1}$ gehörige, gegenüber der Charakteristik $\binom{1 \cdots 1}{1 \cdots 1}$ ebenfalls den Rang $p-1$ besitzende, Restpunktsystem der Funktion $\frac{du}{dz}$ mit $\varepsilon_p, \cdots, \varepsilon_{2p-2}$. Die so bestimmten $2p-2$ Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-1}, \varepsilon_p, \cdots, \varepsilon_{2p-2}$ sind stets durch die Kongruenz (vgl. Seite 171 u. Seite 132):

$$\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=p-1} u^{\varepsilon_\mu} + k\right) \equiv \left(-\sum_{\mu=p}^{\mu=2p-2} u^{\varepsilon_\mu} - k\right)$$

verknüpft. Versteht man dann unter z' irgend einen von $\varepsilon_p, \cdots, \varepsilon_{2p-2}$, unter z'' irgend einen von $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-1}$ verschiedenen Punkt der Fläche T'', so verschwindet $\vartheta\left(\left(u^z - u^{z'} - \sum_{\mu=1}^{\mu=p-1} u^{\varepsilon_\mu} - k\right)\right)$, als Funktion von z betrachtet, nur für die p Punkte $z', \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-1}$, $\vartheta\left(\left(u^z - u^{z''} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p-1} u^{\varepsilon_\mu} + k\right)\right)$ nur für die p Punkte $z'', \varepsilon_p, \cdots, \varepsilon_{2p-2}$.

Weiter bestimme man für $\nu = 1, 2, \cdots, p$, indem man beachtet, daß die Größen A_ν, B_ν den Modul 1 besitzen, reelle Größen g_ν, h_ν im Rahmen der Bedingungen $0 \leqq g_\nu < 1$, $0 \leqq h_\nu < 1$ durch die Gleichungen:

$$A_\nu = e^{g_\nu 2\pi i}, \qquad B_\nu = e^{-h_\nu 2\pi i}$$

und wähle alsdann im Innern der Fläche T' ein weder zusammenfallende Punkte noch Punkte α, ∞ enthaltendes Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_{p-1}$, das der Bedingung $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_{p-1}) = p-1$ genügt und für das zudem $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right]\left(\left(\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p-1} u^{\eta_\mu} + k\right)\right) \neq 0$ ist. Dabei ist zu beachten, daß $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right]\left(\left(\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p-1} u^{\eta_\mu} + k\right)\right)$ oder der sich davon nur um einen weder null noch unendlich werdenden Faktor unterscheidende Ausdruck $\vartheta\left(\left(\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p-1} u^{\eta_\mu} + k + \left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|\right)\right)$ nicht für jedes System $\eta_1, \cdots, \eta_{p-1}$ den Wert Null haben kann, da sonst, wegen $\vartheta((-v)) = \vartheta((v))$, auch $\vartheta\left(\left(-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p-1} u^{\eta_\mu} - k - \left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|\right)\right)$ für jedes System $\eta_1, \cdots, \eta_{p-1}$ den Wert Null haben würde und dementsprechend die Funktion $\vartheta\left(\left(u^z - \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\eta_\mu} - k - \left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|\right)\right)$, wie auch die p Punkte $\eta_1, \cdots, \eta_p$ gewählt sein mögen, jedenfalls für diese Punkte, aber wegen der Unmöglichkeit der Kongruenz $\left(\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\eta_\mu} + k + \left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|\right) \equiv \left(\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\eta_\mu} + k\right)$ nicht nur für diese Punkte verschwinden würde, also eine identisch verschwindende Funktion wäre — im Widerspruch mit der Tatsache, daß das System $\left(\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} u^{\eta_\mu}\right)$ durch passende Verfügung über die Punkte $\eta_1, \cdots, \eta_p$ einem beliebigen Systeme (w) kongruent gemacht werden kann. Zugleich erkennt man, daß die Punkte $\eta_1, \cdots, \eta_{p-1}$ auf unbegrenzt viele Weisen den aufgestellten Bedingungen $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_{p-1}) = p-1$, $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right]\left(\left(\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p-1} u^{\eta_\mu} + k\right)\right) \neq 0$ entsprechend gewählt werden können. Die Bedingung $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_{p-1}) = p-1$ zieht die für $\varkappa = 1, 2, \cdots, p-1$ geltende Gleichung $\mathfrak{R}_{\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right|}(\eta_1, \cdots, \eta_{\varkappa-1}, \eta_{\varkappa+1}, \cdots, \eta_{p-1}) = p-2$ nach sich, und es lassen sich daher die vorher eingeführten Punkte z', z'' im Rahmen der ihnen schon früher auferlegten Bedingungen und der weiteren Bedingungen $z' \neq \eta_1, \cdots, \eta_{p-1}$; $z'' \neq \eta_1, \cdots, \eta_{p-1}$ auf unbegrenzt viele Weisen so wählen, daß keine der $p-1$ Funktionen $\vartheta\left(\left(u^z - u^{z'} - u^{z''} + u^{\eta_\varkappa} - \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p-1} u^{\eta_\mu} - k\right)\right)$, $\varkappa = 1, 2, \cdots, p-1$, identisch verschwindet. Aus der Ungleichung $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right]\left(\left(\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p-1} u^{\eta_\mu} + k\right)\right) \neq 0$ dagegen folgt, daß für $\varkappa = 1, 2, \cdots, p-1$ die Funktion $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right]\left(\left(u^z - u^{\eta_\varkappa} + \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p-1} u^{\eta_\mu} + k\right)\right)$ für $z = \eta_\varkappa$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt und daß daher keine der $p-1$ Funktionen $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]\left(\left(u^z - u^{\eta_\varkappa} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p-1} u^{\eta_\mu} + k\right)\right)$, ${\scriptstyle \varkappa=1,2,\cdots,p-1}$, identisch verschwindet.

Auf Grund des Vorstehenden erkennt man jetzt, daß die mit Hilfe der gewählten $2p$ Punkte $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-1}, \eta_1, \cdots, \eta_{p-1}, z', z''$ gebildeten $p-1$ Gleichungen:

$$\frac{d w^{(\varkappa)}}{dz} = \frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]\left(\left(u^z - u^{\eta_\varkappa} + \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p-1} u^{\eta_\mu} + k\right)\right) \vartheta\left(\left(u^z - u^{z'} - u^{z''} + u^{\eta_\varkappa} - \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p-1} u^{\eta_\mu} - k\right)\right)}{\vartheta\left(\left(u^z - u^{z'} - \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p-1} u^{\varepsilon_\mu} - k\right)\right) \vartheta\left(\left(u^z - u^{z''} + \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p-1} u^{\varepsilon_\mu} + k\right)\right)} \begin{vmatrix} \frac{du_1^z}{dz} & \cdots & \frac{du_p^z}{dz} \\ \frac{du_1^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} & \cdots & \frac{du_p^{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{du_1^{\varepsilon_{p-1}}}{d\varepsilon_{p-1}} & \cdots & \frac{du_p^{\varepsilon_{p-1}}}{d\varepsilon_{p-1}} \end{vmatrix},$$
$${\scriptstyle \varkappa=1,2,\cdots,p-1,}$$

$p-1$ zur Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right)$ gehörige Funktionen $\frac{dw}{dz}$ bestimmen, deren $\varkappa^{\text{te}}$ das Punktsystem $\eta_1, \cdots, \eta_{\varkappa-1}, \eta_{\varkappa+1}, \cdots, \eta_{p-1}$ als Bestandteil des Systems der charakteristischen Punkte enthält. Diese $p-1$ Funktionen $\frac{dw^{(1)}}{dz}, \cdots, \frac{dw^{(p-1)}}{dz}$ sind zudem linear unabhängig; denn der mit den unbestimmten Konstanten $l^{(1)}, \cdots, l^{(p-1)}$ gebildete Ausdruck $l^{(1)}\frac{dw^{(1)}}{dz} + \cdots + l^{(p-1)}\frac{dw^{(p-1)}}{dz}$ kann, da für $z = \eta_\varkappa$ ${\scriptstyle (\varkappa=1,2,\cdots,p-1)}$ die $p-2$ Funktionen $\frac{dw^{(1)}}{dz}, \cdots, \frac{dw^{(\varkappa-1)}}{dz}, \frac{dw^{(\varkappa+1)}}{dz}, \cdots, \frac{dw^{(p-1)}}{dz}$ sämtlich den Wert Null besitzen, die Funktion $\frac{dw^{(\varkappa)}}{dz}$ dagegen einen von Null verschiedenen Wert hat, nur dann in T' allenthalben den Wert Null besitzen, wenn $l^{(1)} = \cdots = l^{(p-1)} = 0$ ist. Infolgedessen bilden die $p-1$ aus ihnen durch Integration entstehenden Funktionen:

$$w^{(1)} = \int\!\!\!\int_{z_0}^{z} \frac{dw^{(1)}}{dz} dz, \quad \cdots, \quad w^{(\varkappa)} = \int\!\!\!\int_{z_0}^{z} \frac{dw^{(\varkappa)}}{dz} dz, \quad \cdots, \quad w^{(p-1)} = \int\!\!\!\int_{z_0}^{z} \frac{dw^{(p-1)}}{dz} dz,$$

wobei z_0 den der positiven Seite von c_p und der negativen Seite von c_1 gemeinsam angehörigen, früher mit $\mathfrak{k}_1$ bezeichneten, Punkt, z einen beliebigen Punkt der Fläche T'' bezeichnen soll (vgl. Fig. 4 auf Seite 93 des ersten Teiles), ein System von $p-1$ linear unabhängigen, zur Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right)$ gehörigen allenthalben endlichen Funktionen w, und es läßt sich daher die zu derselben Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right)$ gehörige allenthalben endliche Elementarfunktion w_ϱ ${\scriptstyle (\varrho=1,2,\cdots,p)}$ durch eine Gleichung von der Form:

$$w_\varrho = c_\varrho^{(0)} + c_\varrho^{(1)} w^{(1)} + \cdots + c_\varrho^{(p-1)} w^{(p-1)}$$

bei der die $c_\varrho^{(\varkappa)}$, ${\scriptstyle \varkappa=0,1,2,\cdots,p-1}$, Konstanten bedeuten, darstellen.

Die Bestimmung der p Konstanten $c_\varrho^{(\varkappa)}$, ${\scriptstyle \varkappa=0,1,2,\cdots,p-1}$, möge hier noch für den Fall durchgeführt werden, daß die Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right)$ eine gewöhnliche ist, also die p Faktorenpaare A_ν, B_ν, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, sämtlich eigentliche sind. Unter dieser Voraussetzung bestehen (vgl. Seite 7), wenn man die bei der Funktion $w^{(\varkappa)}$ an Stelle der Größen $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{E}_\nu$, $\mathfrak{K}_\nu$ stehenden Größen mit $\mathfrak{A}_\nu^{(\varkappa)}$, $\mathfrak{B}_\nu^{(\varkappa)}$, $\mathfrak{E}_\nu^{(\varkappa)}$, $\mathfrak{K}_\nu^{(\varkappa)}$ bezeichnet und zur Abkürzung

$$D_\nu = 2 - A_\nu - B_\nu, \qquad \bar{D}_\nu = 2 - \bar{A}_\nu - \bar{B}_\nu,$$

$$\mathcal{A}_\nu = \frac{1}{D_\nu} + (1 - A_\nu)\frac{\bar{A}_\nu B_\nu}{2 D_\nu \bar{D}_\nu}, \qquad \mathcal{B}_\nu = -\frac{1}{D_\nu} + (1 - B_\nu)\frac{\bar{A}_\nu B_\nu}{2 D_\nu \bar{D}_\nu},$$

setzt, für $\varkappa = 1, 2, \cdots, p-1$; $\nu = 1, 2, \cdots, p$ die Beziehungen:

$$\mathfrak{A}_\nu^{(\varkappa)} = \mathcal{A}_\nu \mathfrak{E}_\nu^{(\varkappa)} + (1 - A_\nu)\mathfrak{K}_\nu^{(\varkappa)}, \qquad \mathfrak{B}_\nu^{(\varkappa)} = \mathcal{B}_\nu \mathfrak{E}_\nu^{(\varkappa)} + (1 - B_\nu)\mathfrak{K}_\nu^{(\varkappa)},$$

$$\mathfrak{A}_\nu^{(\varkappa)} + \mathfrak{B}_\nu^{(\varkappa)} = \frac{\bar{A}_\nu B_\nu}{2\bar{D}_\nu}\mathfrak{E}_\nu^{(\varkappa)} + D_\nu \mathfrak{K}_\nu^{(\varkappa)},$$

$$\mathfrak{K}_\nu^{(\varkappa)} = \frac{\mathfrak{A}_\nu^{(\varkappa)} + \mathfrak{B}_\nu^{(\varkappa)}}{D_\nu} - \frac{\bar{A}_\nu B_\nu}{2 D_\nu \bar{D}_\nu}\mathfrak{E}_\nu^{(\varkappa)}.$$

Nun erhält man auf Grund der Figur 4 (Seite 93 des ersten Teiles), bei welcher für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ der der negativen Seite von c_ν und der positiven Seite von b_ν gemeinsam angehörige Punkt mit $\mathfrak{t}_\nu$ bezeichnet ist,

$$\mathfrak{E}_\nu^{(\varkappa)} = (1 - B_\nu)\int_{b_\nu^-}^{+} dw^{(\varkappa)} + (1 - A_\nu)\int_{a_\nu^-}^{+} dw^{(\varkappa)},$$

$$w_{\mathfrak{t}_\nu}^{(\varkappa)} = \mathfrak{E}_1^{(\varkappa)} + \mathfrak{E}_2^{(\varkappa)} + \cdots + \mathfrak{E}_{\nu-1}^{(\varkappa)} + \int_{c_\nu^-}^{+} dw^{(\varkappa)},$$

$$\mathfrak{A}_\nu^{(\varkappa)} = (1 - A_\nu)\, w_{\mathfrak{t}_\nu}^{(\varkappa)} + \mathfrak{E}_\nu^{(\varkappa)} + A_\nu B_\nu \int_{b_\nu^-}^{+} dw^{(\varkappa)}, \qquad \mathfrak{B}_\nu^{(\varkappa)} = (1 - B_\nu)\, w_{\mathfrak{t}_\nu}^{(\varkappa)} - B_\nu \mathfrak{E}_\nu^{(\varkappa)} - A_\nu B_\nu \int_{a_\nu^-}^{+} dw^{(\varkappa)},$$

und schließlich, unter Beachtung der vorher für $\mathfrak{K}_\nu^{(\varkappa)}$ abgeleiteten Gleichung,

$$\mathfrak{K}_\nu^{(\varkappa)} = w_{\mathfrak{t}_\nu}^{(\varkappa)} + \frac{1 - B_\nu}{D_\nu}\mathfrak{E}_\nu^{(\varkappa)} - \frac{\bar{A}_\nu B_\nu}{2 D_\nu \bar{D}_\nu}\mathfrak{E}_\nu^{(\varkappa)} + \frac{A_\nu B_\nu}{D_\nu}\left(\int_{b_\nu^-}^{+} dw^{(\varkappa)} - \int_{a_\nu^-}^{+} dw^{(\varkappa)}\right).$$

Nachdem so die der Funktion $w^{(\varkappa)}$ ${\scriptstyle (\varkappa=1,2,\cdots,p-1)}$ zukommenden charakteristischen Konstanten $\mathfrak{A}_\nu^{(\varkappa)}$, $\mathfrak{B}_\nu^{(\varkappa)}$, $\mathfrak{E}_\nu^{(\varkappa)}$, $\mathfrak{K}_\nu^{(\varkappa)}$, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, bestimmt sind, gehe man auf die Gleichung:

$$w_\varrho = c_\varrho^{(0)} + c_\varrho^{(1)} w^{(1)} + \cdots + c_\varrho^{(p-1)} w^{(p-1)}$$

zurück und drücke, indem man beachtet, daß längs $c_\nu \left\{ w_\varrho^+ = w_\varrho^- + (1 - \delta_{\varrho\nu} p)\frac{\pi i}{p}\right.$ ist, die der

Funktion w_ϱ für die Schnitte c zukommenden Konstanten durch die den Funktionen $w^{(1)}, \cdots, w^{(p-1)}$ für diese Schnitte zukommenden, soeben gewonnenen Konstanten $\mathfrak{C}$ aus. Man erhält so zur Bestimmung der $p-1$ Konstanten $c_\varrho^{(\varkappa)}$, ${\scriptstyle \varkappa=1,2,\cdots,p-1}$, die $p-1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi i}{p} &= c_\varrho^{(1)}\,\mathfrak{C}_1^{(1)} \quad + \cdots + c_\varrho^{(p-1)}\,\mathfrak{C}_1^{(p-1)},\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
\frac{\pi i}{p} &= c_\varrho^{(1)}\,\mathfrak{C}_{\varrho-1}^{(1)} + \cdots + c_\varrho^{(p-1)}\,\mathfrak{C}_{\varrho-1}^{(p-1)},\\
\frac{\pi i}{p} &= c_\varrho^{(1)}\,\mathfrak{C}_{\varrho+1}^{(1)} + \cdots + c_\varrho^{(p-1)}\,\mathfrak{C}_{\varrho+1}^{(p-1)},\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
\frac{\pi i}{p} &= c_\varrho^{(1)}\,\mathfrak{C}_p^{(1)} \quad + \cdots + c_\varrho^{(p-1)}\,\mathfrak{C}_p^{(p-1)},
\end{aligned}$$

und der Wert der noch übrigen Konstante $c_\varrho^{(0)}$ wird dann durch die aus der Gleichung:

$$\mathfrak{K}_{\varrho\nu} = c_\varrho^{(0)} + c_\varrho^{(1)}\,\mathfrak{K}_\nu^{(1)} + \cdots + c_\varrho^{(p-1)}\,\mathfrak{K}_\nu^{(p-1)}$$

durch Summation nach ν von 1 bis p unter Beachtung der Relation $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{K}_{\varrho\nu} = \left(\varrho - \frac{p+1}{2}\right)\pi i$ (s. Seite 8) entstehende Gleichung:

$$\left(\varrho - \frac{p+1}{2}\right)\pi i = p\,c_\varrho^{(0)} + c_\varrho^{(1)} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{K}_\nu^{(1)} + \cdots + c_\varrho^{(p-1)} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{K}_\nu^{(p-1)}$$

geliefert.

Auf ganz ähnliche Weise läßt sich die Bestimmung der p Konstanten $c_\varrho^{(\varkappa)}$, ${\scriptstyle \varkappa=0,1,2,\cdots,p-1}$, durchführen, wenn die Charakteristik $\binom{A}{B}$ eine gemischte ist, also unter den p Faktorenpaaren A_ν, B_ν, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, auch uneigentliche vorkommen.

3.

Es soll jetzt noch gezeigt werden, wie man die zu einer Charakteristik $\binom{A}{B} = \binom{A_1 \cdots A_p}{B_1 \cdots B_p}$ gehörige Elementarfunktion $\underset{0}{P}\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ z\end{smallmatrix}\right|$ darstellen kann. Dabei möge der Einfachheit wegen vorausgesetzt werden, daß die Charakteristik $\binom{A}{B}$ eine gewöhnliche ist, also die p Faktorenpaare A_ν, B_ν, ${\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p}$, sämtlich eigentliche sind.

Um diese Darstellung zu erhalten, bestimme man für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ reelle Größen g_ν, h_ν im Rahmen der Bedingungen $0 \leqq g_\nu < 1$, $0 \leqq h_\nu < 1$ durch die Gleichungen:

(1.) $$A_\nu = e^{g_\nu 2\pi i}, \qquad\qquad B_\nu = e^{-h_\nu 2\pi i},$$

verstehe unter ε einen im Innern der Fläche T' beliebig gewählten, von den Punkten α, ∞ verschiedenen Punkt, unter z einen in der Fläche T' frei beweglichen Punkt und setze:

$$F\begin{vmatrix}\varepsilon\\z\end{vmatrix} = \frac{\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u^z - pu^\varepsilon - k))}{\vartheta((u^z - pu^\varepsilon - k))}\begin{vmatrix}\frac{du_1^z}{dz} & \frac{du_2^z}{dz} & \cdots & \frac{du_p^z}{dz}\\ \frac{du_1^\varepsilon}{d\varepsilon} & \frac{du_2^\varepsilon}{d\varepsilon} & \cdots & \frac{du_p^\varepsilon}{d\varepsilon}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \frac{d^{p-1}u_1^\varepsilon}{d\varepsilon^{p-1}} & \frac{d^{p-1}u_2^\varepsilon}{d\varepsilon^{p-1}} & \cdots & \frac{d^{p-1}u_p^\varepsilon}{d\varepsilon^{p-1}}\end{vmatrix}. \tag{2.}$$

Die so definierte Funktion $F\begin{vmatrix}\varepsilon\\z\end{vmatrix}$ ist, als Funktion von z betrachtet, eine zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige F-Funktion, welche das den Punkt α_ϱ $_{(\varrho=1,2,\cdots,r)}$ $(\mu_\varrho - 1)$-mal enthaltende Punktsystem $\varepsilon, \alpha_1, \cdots, \alpha_1, \cdots\cdot, \alpha_r, \cdots, \alpha_r$ oder auch nur einen Teil desselben als System der ∞^1-Punkte, das den Punkt $\infty_\varkappa$ $_{(\varkappa=1,2,\cdots,q)}$ $(\iota_\varkappa + 1)$-mal enthaltende Punktsystem $\infty_1, \cdots, \infty_1, \cdots\cdot, \infty_q, \cdots, \infty_q$ als Bestandteil des Systems der 0^1-Punkte besitzt und speziell für den Punkt $z = \varepsilon$ unendlich wird wie $-\frac{f(\varepsilon)}{z-\varepsilon}$, wobei

$$f(\varepsilon) = (-1)^p p\,\frac{\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u^\varepsilon - pu^\varepsilon - k))}{\left(\frac{d^p\vartheta((u^z - pu^\varepsilon - k))}{dz^p}\right)_{z=\varepsilon}}\begin{vmatrix}\frac{du_1^\varepsilon}{d\varepsilon} & \frac{du_2^\varepsilon}{d\varepsilon} & \cdots & \frac{du_p^\varepsilon}{d\varepsilon}\\ \frac{d^2u_1^\varepsilon}{d\varepsilon^2} & \frac{d^2u_2^\varepsilon}{d\varepsilon^2} & \cdots & \frac{d^2u_p^\varepsilon}{d\varepsilon^2}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \\ \frac{d^pu_1^\varepsilon}{d\varepsilon^p} & \frac{d^pu_2^\varepsilon}{d\varepsilon^p} & \cdots & \frac{d^pu_p^\varepsilon}{d\varepsilon^p}\end{vmatrix} \tag{3.}$$

ist.

Verbindet man nun in der Fläche T' den der positiven Seite von c_p und der negativen Seite von c_1 gemeinsam angehörigen Punkt mit dem Punkte ε durch einen Schnitt l_ε (vgl. Fig. 17 auf Seite 154 des ersten Teiles), bezeichnet die dadurch aus T' entstehende Fläche mit T'' und bildet, unter z_0 den der positiven Seite von l_ε und der negativen Seite von c_1 gemeinsam angehörigen, früher mit $\mathfrak{k}_1$ bezeichneten, Punkt, unter z einen beliebigen Punkt der Fläche T'' verstehend, die Gleichung:

$$P\begin{vmatrix}\varepsilon\\z\end{vmatrix} = \frac{1}{f(\varepsilon)}\int\!\!\!\!/_{z_0}^{z} F\begin{vmatrix}\varepsilon\\z\end{vmatrix} dz, \tag{4.}$$

— bei der der Strich am Integralzeichen andeuten soll, daß dem Integrationsweg die Bedingung auferlegt ist, ganz in T'' zu verlaufen —, so wird die durch diese Gleichung definierte Funktion $P\begin{vmatrix}\varepsilon\\z\end{vmatrix}$ infolge der vorher angegebenen Eigenschaften von $F\begin{vmatrix}\varepsilon\\z\end{vmatrix}$

eine in T'' einwertige, zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Funktion W sein, welche für jeden von ε verschiedenen Punkt z stetig ist, für den Punkt ε dagegen unstetig wird wie $\ln\frac{1}{z-\varepsilon}$, und deren Werte in je zwei entsprechenden Punkten $\mathscr{P}^+, \mathscr{P}^-$ der Begrenzung von T'' in der Weise verknüpft sind, daß

$$(5.)\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \ \left\{P\Big|_z^\varepsilon\right|^+ = A_\nu P\Big|_z^\varepsilon\Big|^- + \mathfrak{A}_\nu,\\ &\text{längs } b_\nu \ \left\{P\Big|_z^\varepsilon\right|^+ = B_\nu P\Big|_z^\varepsilon\Big|^- + \mathfrak{B}_\nu,\\ &\text{längs } c_\nu \ \left\{P\Big|_z^\varepsilon\right|^+ = P\Big|_z^\varepsilon\Big|^- + \mathfrak{C}_\nu,\\ &\text{längs } l_\varepsilon \ \left\{P\Big|_z^\varepsilon\right|^+ = P\Big|_z^\varepsilon\Big|^- + 2\pi i, \end{aligned} \qquad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,}$$

ist, wobei zwischen den Konstanten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ die Beziehungen:

$$(5'.)\qquad (1-B_\nu)\mathfrak{A}_\nu - (1-A_\nu)\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{C}_\nu, \quad {\scriptstyle \nu=1,2,\cdots,p,} \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\mathfrak{C}_\nu + 2\pi i = 0$$

bestehen. Nach der zu Anfang gemachten Voraussetzung ist A_ν, B_ν ${\scriptstyle (\nu=1,2,\cdots,p)}$ immer ein eigentliches Faktorenpaar, und man kann daher unter Verwendung der früher definierten, auch im vorhergehenden Artikel benutzten Größen $D_\nu, \bar{D}_\nu, \mathcal{A}_\nu, \mathcal{B}_\nu$ für $\nu = 1, 2, \cdots, p$

$$(6.)\qquad \mathfrak{A}_\nu = \mathcal{A}_\nu \mathfrak{C}_\nu + (1-A_\nu)\mathfrak{K}_\nu, \qquad \mathfrak{B}_\nu = \mathcal{B}_\nu\mathfrak{C}_\nu + (1-B_\nu)\mathfrak{K}_\nu$$

setzen. Beachtet man dann, daß die Konstanten $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{C}_\nu$ auf Grund der schon vorher erwähnten Figur 17, bei welcher der der negativen Seite von c_ν und der positiven Seite von b_ν gemeinsam angehörige Punkt mit $\mathfrak{t}_\nu$ bezeichnet ist, für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ durch die Gleichungen:

$$(7.)\qquad \begin{gathered} \mathfrak{C}_\nu = (1-B_\nu)\int_{b_\nu^-}^{+} dP\Big|_z^\varepsilon\Big| + (1-A_\nu)\int_{a_\nu^-}^{+} dP\Big|_z^\varepsilon\Big|,\\ P\Big|_{\mathfrak{t}_\nu}^\varepsilon\Big| = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \cdots + \mathfrak{C}_{\nu-1} + \int_{c_\nu^-}^{+} dP\Big|_z^\varepsilon\Big|,\\ \mathfrak{A}_\nu = (1-A_\nu)P\Big|_{\mathfrak{t}_\nu}^\varepsilon\Big| + \mathfrak{C}_\nu + A_\nu B_\nu\int_{b_\nu^-}^{+} dP\Big|_z^\varepsilon\Big|, \qquad \mathfrak{B}_\nu = (1-B_\nu)P\Big|_{\mathfrak{t}_\nu}^\varepsilon\Big| - B_\nu\mathfrak{C}_\nu - A_\nu B_\nu\int_{a_\nu^-}^{+} dP\Big|_z^\varepsilon\Big| \end{gathered}$$

bestimmt sind, und führt die so für $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ gewonnenen Ausdrücke in die aus den beiden Gleichungen (6.) durch Addition folgende Gleichung:

$$\mathfrak{K}_\nu = \frac{\mathfrak{A}_\nu + \mathfrak{B}_\nu}{D_\nu} - \frac{\bar{A}_\nu B_\nu}{2 D_\nu \bar{D}_\nu} \mathfrak{C}_\nu$$

ein, so erhält man zur Bestimmung von $\mathfrak{K}_\nu$ die Gleichung:

$$\mathfrak{K}_\nu = P\left|{\varepsilon \atop \mathfrak{t}_\nu}\right| + \frac{1 - B_\nu}{D_\nu} \mathfrak{C}_\nu - \frac{\bar{A}_\nu B_\nu}{2 D_\nu \bar{D}_\nu} \mathfrak{C}_\nu + \frac{A_\nu B_\nu}{D_\nu}\left(\int\limits_{b_\nu^-}^{+} dP\left|{\varepsilon \atop z}\right| - \int\limits_{a_\nu^-}^{+} dP\left|{\varepsilon \atop z}\right|\right). \tag{8.}$$

Man erkennt jetzt ohne Mühe, daß der aus der Funktion $P\left|{\varepsilon \atop z}\right|$ und den zur Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen allenthalben endlichen Elementarfunktionen $w_1|z|, \cdots, w_p|z|$ mit Hilfe der Größen $\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_p$ gebildete Ausdruck $P\left|{\varepsilon \atop z}\right| + \frac{1}{\pi i}\sum\limits_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{C}_\varrho w_\varrho|z|$ sich von der darzustellenden Funktion $\underset{0}{P}\left|{\varepsilon \atop z}\right|$ nur um eine additive Konstante unterscheiden kann (vgl. Seite 17, Art. 4), oder, was dasselbe, daß eine Gleichung von der Form:

$$\underset{0}{P}\left|{\varepsilon \atop z}\right| = P\left|{\varepsilon \atop z}\right| + \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{C}_\varrho w_\varrho|z| + C \tag{9.}$$

besteht. Zur Bestimmung der Konstante C beachte man, daß auf Grund der letzten Gleichung zwischen der zur Funktion $\underset{0}{P}\left|{\varepsilon \atop z}\right|$ gehörigen Konstante $\underset{0}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\varepsilon)}$ (s. Seite 14) und den zu den Funktionen $P\left|{\varepsilon \atop z}\right|$, $w_1|z|, \cdots, w_p|z|$ gehörigen Konstanten $\mathfrak{K}_\nu, \mathfrak{K}_{1\nu}, \cdots, \mathfrak{K}_{p\nu}$ (s. Seite 8) die Gleichung:

$$\underset{0}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\varepsilon)} = \mathfrak{K}_\nu + \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{C}_\varrho \mathfrak{K}_{\varrho\nu} + C \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\cdots,p)} \tag{10.}$$

besteht, und bilde unter Berücksichtigung der Relationen $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \underset{0}{\mathfrak{K}}{}_\nu^{(\varepsilon)} = 0$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{K}_{\varrho\nu} = \left(\varrho - \frac{p+1}{2}\right)\pi i$ die Summe der aus dieser Gleichung für $\nu = 1, 2, \cdots, p$ hervorgehenden Gleichungen. Man erhält dann die Gleichung:

$$0 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \mathfrak{K}_\nu + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\left(\varrho - \frac{p+1}{2}\right)\mathfrak{C}_\varrho + pC \tag{11.}$$

und schließlich, indem man den hieraus für C sich ergebenden Wert in die Gleichung (9.) einsetzt, für die zu der gewöhnlichen Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörige Elementarfunktion $\underset{0}{P}\left|{\varepsilon \atop z}\right|$ die Darstellung:

$$\underset{0}{P}\left|{\varepsilon \atop z}\right| = P\left|{\varepsilon \atop z}\right| + \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{C}_\varrho w_\varrho|z| - \frac{1}{p}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p}\left(\varrho - \frac{p+1}{2}\right)\mathfrak{C}_\varrho - \frac{1}{p}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\mathfrak{K}_\nu, \tag{12.}$$

wobei $P\left|{\varepsilon \atop z}\right|$ der durch die Gleichungen (4.), (3.), (2.) bestimmte Ausdruck ist und die $2p$, von dem Punkte ε abhängigen, Konstanten $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{K}$ durch die Gleichungen (7.), (8.) geliefert werden.

Deriviert man die Gleichung (12.) m-mal nach z und beachtet, daß die m^{te} Derivierte von $\underset{0}{P}\left|{\varepsilon \atop z}\right|$ mit $(m-1)!\ \underset{m}{P}\left|{z \atop \varepsilon}\right|$ übereinstimmt, so erhält man die Gleichung:

$$(m-1)!\ \underset{m}{P}\left|{z \atop \varepsilon}\right| = \frac{1}{f(\varepsilon)} \frac{d^{m-1} F\left|{\varepsilon \atop z}\right|}{dz^{m-1}} + \frac{1}{\pi i} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{C}_\varrho \frac{d^m w_\varrho|z|}{dz^m}.$$

Aus ihr folgt durch Vertauschung der Buchstaben ε, z die Gleichung:

$$(m-1)!\ \underset{m}{P}\left|{\varepsilon \atop z}\right| = \frac{1}{f(z)} \frac{d^{m-1} F\left|{z \atop \varepsilon}\right|}{d\varepsilon^{m-1}} + \frac{1}{\pi i} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{C}'_\varrho \frac{d^m w_\varrho|\varepsilon|}{d\varepsilon^m},$$

bei der $\mathfrak{C}'_\varrho$ diejenige Größe bezeichnet, welche aus dem der Größe $\mathfrak{C}_\varrho$ nach (7.) entsprechenden Ausdruck hervorgeht, wenn man den Integrationsbuchstaben z in neuer Bezeichnung durch ζ ersetzt und alsdann an Stelle von ε die Veränderliche z treten läßt.

Man erkennt unmittelbar, daß man durch das in diesem Artikel angewandte Verfahren auch die Darstellung der zu einer gemischten Charakteristik $\binom{A}{B}$ gehörigen Elementarfunktionen $\underset{0}{P}\left|{\varepsilon \atop z}\right|$, $\underset{m}{P}\left|{\varepsilon \atop z}\right|$ erhalten kann.