H W Haskell

THEORIE

DER

TRANSFORMATIONSGRUPPEN

ZWEITER ABSCHNITT

UNTER MITWIRKUNG VON PROF. DR. FRIEDRICH ENGEL

BEARBEITET

VON

SOPHUS LIE,

PROFESSOR DER GEOMETRIE AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1890

Vorrede.

Ursprünglich war beabsichtigt, den zweiten und den dritten Abschnitt der Theorie der Transformationsgruppen in einem Bande zu vereinigen (s. S. VII der Vorrede zum ersten Abschnitt); schliesslich hat sich das doch als unthunlich herausgestellt, deshalb erscheint hiermit der zweite Abschnitt als ein besonderer Band; der dritte und letzte Abschnitt wird erst später folgen, ihm soll dann auch ein Sachregister über das ganze Werk beigegeben werden, in ihm wird sich zugleich Gelegenheit finden, *Schurs* neuere sehr wichtige Untersuchungen zu berücksichtigen.

Der vorliegende zweite Abschnitt enthält die Theorie der Berührungstransformationen und der Gruppen von solchen Transformationen; er zerfällt in fünf Abtheilungen: in den beiden ersten werden der Begriff und die Eigenschaften der Berührungstransformationen entwickelt, die dritte Abtheilung beschäftigt sich mit den infinitesimalen Berührungstransformationen, die beiden letzten schliesslich geben die Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen von Berührungstransformationen. Uebrigens vergleiche man die Einleitungen zu den einzelnen Abtheilungen.

Um dem Leser das Verständniss möglichst zu erleichtern, sind verschiedene Vorkehrungen getroffen.

Vor allen Dingen muss erwähnt werden, dass in den beiden ersten Abtheilungen des gegenwärtigen Abschnitts, also in den Kapiteln 1—13 (S. 1—249) die Ergebnisse des ersten Abschnitts überhaupt nicht benutzt werden; es wird also auch solchen Lesern, welche den ersten Abschnitt gar nicht kennen, möglich sein, diese beiden ersten Abtheilungen zu verstehen.

Ferner wird in den Kapiteln 1 und 3 der Begriff der Berührungstransformationen zunächst für die beiden einfachsten Fälle, für die Ebene und für den gewöhnlichen Raum entwickelt, erst von Kapitel 4 an bewegen sich die Untersuchungen im Raume von beliebig vielen Dimensionen.

Entwickelungen, die man beim erstmaligen Lesen überschlagen kann, ohne das Verständniss des Folgenden zu beeinträchtigen, sind wie im ersten Abschnitte durch kleineren Druck gekennzeichnet.

Schliesslich mag noch auf die beiden Kapitel 23 und 24 aufmerksam gemacht werden; dieselben erscheinen ganz besonders geeignet, in die allgemeine Theorie der Gruppen von Berührungstransformationen einzuführen, da sie die wichtigsten Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene behandeln und da zu ihrem Verständniss nur erforderlich ist, dass man sich mit dem hauptsächlichsten Inhalte der Kapitel 1, 14, 15, 18 und 21 bekannt gemacht hat.

Wie im ersten so sind auch im zweiten Abschnitt die darin eingeführten neuen Begriffe und die dargestellten neuen Theorien fast durchweg *Lie*s Eigenthum; die wenigen Ausnahmen sind jedesmal ausdrücklich hervorgehoben. Desgleichen rühren die neueingeführten Benennungen fast ohne Ausnahme von *Lie* her. Die Mitwirkung *Engel*s hat sich auf den zweiten Abschnitt in demselben Masse erstreckt wie auf den ersten.

Zum Schlusse noch einige besondere Bemerkungen.

Bei der Begründung, welche in Kapitel 4 und 5 für die Theorie der Berührungstransformationen des Raums von $n + 1$ Dimensionen gegeben wird, ist in der Hauptsache der Gedankengang befolgt, welcher *Lie* seinerzeit zuerst zu den betreffenden Sätzen über Berührungstransformationen geführt hat. Aus diesem Grunde ist *A. Mayer*s schöne und einfache Begründung des Hauptsatzes aus der Theorie der Berührungstransformationen nicht aufgenommen worden.

Die Ueberschrift des Kapitels 13 bedarf einer Erklärung, welche leider in dem Kapitel selbst nicht gegeben ist. Es muss daher an dieser Stelle erläutert werden, was unter der „Zusammensetzung einer Functionengruppe" zu verstehen ist.

Im ersten Abschnitt haben wir den Begriff der Zusammensetzung einer r-gliedrigen Transformationsgruppe eingeführt und haben gesagt, dass die Zusammensetzung einer solchen Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ durch die Constanten $c_{i\varkappa s}$ in den Relationen:

$$X_i(X_\varkappa(f)) - X_\varkappa(X_i(f)) = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} X_s f$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

bestimmt wird. Der Begriff der Zusammensetzung einer r-gliedrigen Functionengruppe ist nun vollständig analog; wir sagen einfach, dass die Zusammensetzung einer solchen Functionengruppe:

$$\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$$

durch die Functionen $\Omega_{i\varkappa}$ in den Relationen:

$$(\varphi_i \varphi_\varkappa)_{xp} = \Omega_{i\varkappa}(\varphi_1 \cdots \varphi_r) \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

bestimmt ist. Für diese Auffassung kann der Inhalt des Kapitels 13 kurz folgendermassen bezeichnet werden: *Erstens* wird darin entschieden, unter welchen Bedingungen r^2 vorgelegte Functionen:

$$\Omega_{i\varkappa}(\varphi_1 \cdots \varphi_r)$$

die Zusammensetzung einer r-gliedrigen Functionengruppe:

$$\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$$

bestimmen können und *zweitens* wird darin eine Methode entwickelt um alle r-gliedrigen Functionengruppen von gegebener Zusammensetzung zu bestimmen.

Leipzig, im Januar 1890.

Inhaltsverzeichniss.

Zweiter Abschnitt.

Theorie der Berührungstransformationen und der Gruppen von Berührungstransformationen.

Abtheilung I.

Seite

Begriff der Berührungstransformationen . . . . 1—176

Kap. 1. Die Berührungstransformationen in der Ebene 1

„ 2. Einige Definitionen und allgemeine Sätze 35

„ 3. Die Berührungstransformationen des gewöhnlichen Raumes . . . 44

„ 4. Verallgemeinerung des Problems der Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung 77

„ 5. Die Berührungstransformationen in beliebig vielen Veränderlichen 114

„ 6. Bestimmung aller Berührungstransformationen ohne Integration. Charakteristische Eigenschaften derselben 146

„ 7. Das Poissonsche Theorem, die Jacobische Identität und die Jacobische Integrationsmethode 171

Abtheilung II.

Invariantentheorie der Berührungstransformationen 176—249

Kap. 8. Functionengruppen und ihre ausgezeichneten Functionen. 178

„ 9. Die kanonischen Formen und die invarianten Eigenschaften der Functionengruppen 193

„ 10. Erledigung eines allgemeinen Transformationsproblems 207

„ 11. Homogene Functionengruppen und ihre ausgezeichneten Functionen 213

„ 12. Die kanonischen Formen und die invarianten Eigenschaften der homogenen Functionengruppen. Erledigung eines allgemeinen Transformationsproblems 220

„ 13. Die Zusammensetzung einer Functionengruppe 233

Abtheilung III.

Infinitesimale Berührungstransformationen. . . . . 250—292

Kap. 14. Die Form der infinitesimalen Berührungstransformationen 250

„ 15. Rechnungen mit infinitesimalen Berührungstransformationen . . . 265

„ 16. Verallgemeinerung der Theorie der homogenen Functionengruppen. Auffassung der Functionengruppen als unendlicher Transformationsgruppen 282

Abtheilung IV.

Seite

Allgemeine Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen von Berührungstransformationen . . . . 292—388

Kap. 17. Beweis der Existenz von Gruppen mit gegebener Zusammensetzung 294

„ 18. Allgemeines über endliche continuirliche Gruppen von Berührungstransformationen 298

„ 19. Die dualistische der adjungirten Gruppe 327

„ 20. Bestimmung aller Gruppen von Berührungstransformationen, welche eine gegebene Zusammensetzung haben 336

„ 21. Reducible und irreducible Gruppen von Berührungstransformationen 369

„ 22. Erweiterung der Berührungstransformationen und der Gruppen von solchen. Differentialinvarianten derartiger Gruppen 378

Abtheilung V.

Specielle Untersuchungen über Gruppen von Berührungstransformationen . . . . 389—554

Kap. 23. Bestimmung aller irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene 389

„ 24. Nähere Besprechung der irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene 434

„ 25. Eine Klasse von irreducibeln Berührungstransformationsgruppen des $(n+1)$-fach ausgedehnten Raumes 461

„ 26. Allgemeines über die Bestimmung von endlichen continuirlichen Berührungstransformationsgruppen des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ . . . 523

Zweiter Abschnitt.

Theorie der Berührungstransformationen und der Gruppen von Berührungstransformationen.

Abtheilung I.

Begriff der Berührungstransformationen.

In dieser ersten Abtheilung soll der allgemeine Begriff der *Berührungstransformationen* eingeführt und sollen die hervorragendsten Eigenschaften dieser Transformationen abgeleitet werden.

Will man in das Wesen dieser wichtigen Transformationen tiefer eindringen, so ist es nothwendig oder jedenfalls wünschenswerth, dass man sich des Zusammenhangs bewusst ist, welcher zwischen der Theorie der Berührungstransformationen und der Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung besteht. Aus diesem Grunde ist in den Kapiteln 4 und 7 die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in aller Kürze dargestellt. Dabei legen wir das Hauptgewicht auf die Entwickelung der Begriffe; wir suchen diese *Begriffe* in ihrer *wahren Allgemeinheit* zu geben. Eine vollständige Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung wird keineswegs gegeben, wenn auch von der Theorie der partiellen Differentialgleichungen mehr gebracht wird, als streng genommen erforderlich sein würde.

Um das Verständniss des äusserst wichtigen, aber abstrakten Kapitels 4 zu erleichtern, entwickeln wir zuerst in Kapitel 1 kurz die Theorie der Berührungstransformationen einer Ebene und ebenso in Kapitel 3 die Theorie der Berührungstransformationen des dreifach ausgedehnten Raumes.

Kapitel 1.

Die Berührungstransformationen in der Ebene.

Wir entwickeln in diesem Kapitel den Begriff der Berührungstransformationen einer Ebene und leiten eine Reihe von einfachen Sätzen über derartige Transformationen ab. Unsere Einsicht in das

Wesen der Berührungstransformationen wird dabei besonders gefördert durch die Einführung eines andern wichtigen Begriffs, welcher die Begriffe: Punkt und Curve der Ebene als Specialfälle und zwar als einzige Specialfälle umfasst.

§ 1.

In zwei Veränderlichen sei eine Transformation:

$$(1) \qquad x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y)$$

vorgelegt; x, y und x_1, y_1 mögen in ein und derselben Ebene, in ein und demselben rechtwinkligen Coordinatensysteme als die Coordinaten zweier Punkte gedeutet werden, so dass also die Transformation (1) als eine Operation erscheint, welche den Punkt mit den Coordinaten x, y in einen Punkt mit den Coordinaten x_1, y_1 überführt.

Bei dieser Auffassung werden alle Punkte einer Curve: $y - \varphi(x) = 0$ von der Transformation (1) in die Punkte einer neuen Curve übergeführt, oder kürzer: es geht jede Curve: $y - \varphi(x) = 0$ in eine neue Curve über. Die Gleichung dieser neuen Curve ergiebt sich, wenn man vermöge (1) die Veränderlichen x, y aus $y - \varphi(x) = 0$ fortschafft; sie kann offenbar im Allgemeinen die analoge Form: $y_1 - \varphi_1(x_1) = 0$ erhalten; von den Fällen, wo dies nicht möglich ist, sehen wir hier ab.

Zu jedem Punkte x, y der Curve: $y - \varphi(x) = 0$ gehört ein gewisser Werth des Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

und zu dem entsprechenden Punkte: $x_1 = X$, $y_1 = Y$ der transformirten Curve: $y_1 - \varphi_1(x_1) = 0$ gehört ein gewisser Werth des Differentialquotienten:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = y_1'.$$

Zwischen den Grössen y_1' und y' besteht ein Zusammenhang, den wir entwickeln wollen.

Ist $x + dx$, $y + dy$ ein Punkt der Curve: $y - \varphi(x) = 0$, welcher dem Punkte x, y derselben unendlich benachbart ist, so besteht die Gleichung: $dy - y'dx = 0$; für den entsprechenden Punkt $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$ der transformirten Curve gilt ebenso: $dy_1 - y_1'dx_1 = 0$. Drücken wir in dieser letzten Gleichung x_1 und y_1 vermöge (1) durch x und y aus, so bekommen wir:

$$dY - y_1'dX = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - y_1'\frac{\partial X}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - y_1'\frac{\partial X}{\partial y}\right)dy = 0.$$

Nun aber sind dx und dy unter der gemachten Voraussetzung nur durch die Relation: $dy - y'dx = 0$ verknüpft und sonst ganz willkürlich; folglich muss die eben gefundene Gleichung zwischen dx und dy die Form: $dy - y'dx = 0$ erhalten können; es muss also eine solche Grösse ϱ geben, dass die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - y_1'\frac{\partial X}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - y_1'\frac{\partial X}{\partial y}\right) dy = \varrho(dy - y'dx)$$

für alle Werthe von dx und dy besteht. Durch Vergleichung der Coefficienten von dx und dy erhalten wir hieraus:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial y} - y_1'\dfrac{\partial X}{\partial y} = \varrho, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} - y_1'\dfrac{\partial X}{\partial x} = -\varrho y', \end{cases}$$

mithin durch Wegschaffung von ϱ und Auflösung nach y_1':

$$(3) \qquad y_1' = \frac{\dfrac{\partial Y}{\partial x} + y'\dfrac{\partial Y}{\partial y}}{\dfrac{\partial X}{\partial x} + y'\dfrac{\partial X}{\partial y}},$$

eine sehr bekannte Formel.

Wir haben hiermit y_1' durch x, y, y' ausgedrückt; da nun die Gleichung (3) offenbar nach y' auflösbar ist, so lässt sich mit Hülfe von (1) auch umgekehrt y' durch x_1, y_1, y_1' ausdrücken; wir sehen also, dass die Gleichungen (1) und (3) zusammengenomen:

$$(4) \qquad \begin{cases} x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y) \\ y_1' = \dfrac{\dfrac{\partial Y}{\partial x} + y'\dfrac{\partial Y}{\partial y}}{\dfrac{\partial X}{\partial x} + y'\dfrac{\partial X}{\partial y}} = P(x, y, y') \end{cases}$$

eine Transformation in den drei Veränderlichen x, y, y' darstellen.

Die Transformation (1) transformirt zugleich mit x und y auch die Grösse y' und zwar so, wie es die Transformation (4) angiebt. Wir sagen deshalb, dass die Transformation (4) in den Veränderlichen x, y, y' aus der Transformation (1) durch *Erweiterung* entstanden ist, und wir bezeichnen (4) einfach *als die zu* (1) *gehörige erweiterte Transformation.*

Ihrer Herleitung zufolge ist die erweiterte Transformation (4) so beschaffen, dass eine Identität von der Form:

$$(5) \qquad dY - PdX \equiv \varrho(dy - y'dx)$$

besteht, wo ϱ den Werth:

$$\varrho = \frac{\dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial Y}{\partial y} - \dfrac{\partial X}{\partial y}\dfrac{\partial Y}{\partial x}}{\dfrac{\partial X}{\partial x} + y'\dfrac{\partial X}{\partial y}}$$

besitzt und demnach eine ganz bestimmte Function von x, y, y' ist. Hierin liegt, dass die Transformation (4) die *Pfaffsche* Gleichung: $dy - y'dx = 0$ invariant lässt. Ausserdem zeigen die obigen Entwickelungen, dass bei gegebenen $X(x, y)$ und $Y(x, y)$ die Grössen ϱ und P durch die Identität (5) eindeutig als Functionen von x, y, y' bestimmt sind; also können wir sagen:

Die zu (1) *gehörige erweiterte Transformation* (4) *ist die einzige Transformation von der Form:*

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y), \quad y_1' = \Pi(x, y, y'), \tag{6}$$

welche die Pfaffsche Gleichung: $dy - y'dx = 0$ *invariant lässt.*

Die Tangente der Curve: $y - \varphi(x) = 0$ im Punkte x, y ist durch die zu diesem Punkte gehörigen Werthe von x, y, y' bestimmt, ihre Gleichung ist ja:

$$\mathfrak{y} - y = y'(\mathfrak{x} - x).$$

Die Tangente der transformirten Curve im Punkte: $x_1 = X$, $y_1 = Y$ lautet:

$$\mathfrak{y} - y_1 = y_1'(\mathfrak{x} - x_1),$$

wo der Werth von y_1' aus (4) zu entnehmen ist. Hieraus folgt, *dass alle Curven, welche mit der Curve:* $y - \varphi(x) = 0$ *den Punkt* x, y *und die zugehörige Tangente gemein haben, bei der Transformation* (1) *in solche Curven übergehen, welche mit der Curve:* $y_1 - \varphi_1(x_1) = 0$ *den Punkt:* $x_1 = X$, $y_1 = Y$ *und die zugehörige Tangente gemein haben.* Kürzer ausgedrückt: *Die Transformation* (1) *verwandelt solche Curven der Ebene, welche sich in einem gemeinsamen Punkte berühren, in Curven, die sich in einem gemeinsamen Punkte berühren.*

Das System der beiden Grössen x, y wird in der Ebene durch einen Punkt dargestellt. Nehmen wir noch die dritte Grösse y' hinzu, so erhalten wir zu dem Punkte x, y eine gewisse hindurchgehende Gerade zugeordnet, nämlich die gemeinsame Tangente:

$$\mathfrak{y} - y = y'(\mathfrak{x} - x) \tag{7}$$

aller Curven, welche durch den Punkt x, y hindurchgehen und für welche die Grösse $\frac{dy}{dx}$ in diesem Punkte gerade den Werth y' hat. Es liegt daher nahe den Punkt x, y im Verein mit der hindurchgehenden Geraden (7) als das geometrische Bild des Werthsystems x, y, y' aufzufassen. Die so definirte Figur, also den *Inbegriff des Punktes* x, y *und der hindurchgehenden Geraden* (7) bezeichnen wir als ein *Linienelement* oder noch kürzer als ein *Element* der Ebene x, y. Die Grössen x, y, y' fassen wir als die *Coordinaten* dieses Linienelementes auf.

Nach Einführung des Begriffes Linienelement können wir die Transformation (4) als eine *Linienelement*transformation der Ebene x, y bezeichnen im Gegensatz zu der Transformation (1), welche eine *Punkt*transformation dieser Ebene ist. Da überdies (4) die zu (1) gehörige erweiterte Transformation ist, so sehen wir:

Satz 1. *Jede Punkttransformation:*

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y) \tag{1}$$

der Ebene x, y bestimmt eine Transformation der Linienelemente dieser Ebene; der analytische Ausdruck dieser letzteren Transformation ist die zu (1) *gehörige erweiterte:*

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y), \quad y_1' = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x} + y' \frac{\partial Y}{\partial y}}{\frac{\partial X}{\partial x} + y' \frac{\partial X}{\partial y}}, \tag{4}$$

welche dadurch charakterisirt ist, dass sie die Pfaffsche Gleichung: $dy - y'dx = 0$ invariant lässt.

Wählen wir die Punkttransformation (1) ganz allgemein, so wird doch die Linienelementtransformation (4) keine allgemeine, sie besitzt vielmehr offenbar die folgenden beiden besonderen Eigenschaften: *Erstens* verwandelt sie solche Linienelemente, welche den Punkt gemein haben, stets in Linienelemente mit gemeinsamem Punkt und *zweitens* lässt sie nach Satz 1 die *Pfaff*sche Gleichung:

$$dy - y'dx = 0$$

invariant.

Man überzeugt sich leicht, dass diese beiden Eigenschaften zusammen nur den Transformationen von der Form (4) zukommen. In der That, jede Linienelementtransformation, welche die erste jener zwei Eigenschaften besitzt, hat augenscheinlich die Gestalt:

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y), \quad y_1' = \Pi(x, y, y'); \tag{6}$$

lässt aber eine Transformation von dieser Art die Pfaffsche Gleichung: $dy - y'dx = 0$ invariant, so ist sie nach S. 4 die zu

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y)$$

extended

gehörige erweiterte Transformation, sie besitzt also die Form (4).

Wir sehen hieraus, dass die Transformationen von der Form (4) *durch ihre vorhin angegebenen beiden Eigenschaften vollständig definirt sind.*

Nun liegt auf der Hand, dass die zweite der genannten beiden Eigenschaften keine Folge der ersten ist; dagegen ist keineswegs unmittelbar klar, ob nicht etwa die erste Eigenschaft eine Folge der zweiten ist; es wäre ja denkbar, dass die erweiterten Punkttransformationen (4) die einzigen Transformationen in x, y, y' wären, welche die

Pfaffsche Gleichung: $dy - y'dx = 0$ invariant lassen. Wir werden zeigen, dass eine solche Vermuthung der Wahrheit *nicht* entspricht, dass es vielmehr ausser den erweiterten Punkttransformationen (4) noch unbegränzt viele Transformationen in x, y, y' giebt, welche jene Pfaffsche Gleichung invariant lassen. Es ist naturgemäss für diese Transformationen und für die erweiterten Punkttransformationen eine gemeinsame Benennung zu benutzen. *Wir bezeichnen daher jede Transformation in x, y, y', welche die Pfaffsche Gleichung:*

$$dy - y'dx = 0$$

*invariant lässt, als eine Berührungstransformation**) *der Ebene x, y.* Die erweiterten Punkttransformationen (4) können einfach als diejenigen Berührungstransformationen charakterisirt werden, welche Linienelemente mit demselben Punkte stets wieder in Linienelemente mit demselben Punkte überführen.

§ 2.

Unsere nächste Aufgabe ist jetzt, alle Transformationen in x, y, y' zu bestimmen, welche Berührungstransformationen der Ebene x, y sind.

Wir betrachten eine beliebige Berührungstransformation:

$$(8) \qquad x_1 = X(x, y, y'), \qquad y_1 = Y(x, y, y'), \qquad y_1' = P(x, y, y').$$

Da dieselbe die Pfaffsche Gleichung: $dy - y'dx = 0$ invariant lässt, so befriedigt sie eine Identität von der Form:

$$dY - PdX \equiv \varrho(dy - y'dx),$$

wo ϱ eine Function von x, y, y' bezeichnet.

Die Function ϱ kann nicht identisch verschwinden; die Identität:

$$dY - PdX \equiv 0$$

würde nämlich die folgenden drei:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - P\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} - P\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial y'} - P\frac{\partial X}{\partial y'} \equiv 0$$

nach sich ziehen; folglich wären alle zweireihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial y'} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y'} \end{vmatrix}$$

identisch null, so dass X, Y keine unabhängigen Functionen von x, y, y' wären und die Gleichungen (8) gar keine Transformation darstellten.

*) Sophus Lie, Göttinger Nachrichten Februar 1870 und October 1872; Comptes rendus de l'Académie des sciences, Paris, October 1870; Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania 1870—1873; Mathematische Annalen Bd. V und Bd. VIII.

Denken wir uns jetzt aus den Gleichungen (8) unsrer Berührungstransformation y_1' und y' weggeschafft, so müssen wir mindestens eine Relation zwischen x, y, x_1, y_1 allein erhalten; es ist aber auch denkbar, dass sich zwei unabhängige Relationen dieser Art ergeben.

Der zweite Fall kann nur eintreten, wenn X und Y von y' frei sind, wenn also (8) die Form hat:

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y), \quad y_1' = P(x, y, y').$$

Diese Transformation aber lässt nach S. 4 die Pfaffsche Gleichung: $dy - y'dx = 0$ dann und nur dann invariant, wenn sie aus der Punkttransformation:

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y)$$

durch Erweiterung entstanden ist. Also:

Satz 2. *Jede Berührungstransformation:*

$$(8) \qquad x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y')$$

der Ebene x, y, aus deren Gleichungen zwei unabhängige Relationen zwischen x, y, x_1, y_1 allein folgen, besitzt die Form:

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y), \quad y_1' = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x} + y'\frac{\partial Y}{\partial y}}{\frac{\partial X}{\partial x} + y'\frac{\partial X}{\partial y}}$$

und ist daher eine erweiterte Punkttransformation dieser Ebene.

Betrachten wir nunmehr den Fall, dass sich aus den Gleichungen (8) unsrer Berührungstransformation blos eine Relation zwischen x, y, x_1, y_1 allein ergiebt, etwa die folgende:

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0.$$

Es ist klar, dass in diesem Falle aus (8) nur eine einzige von y' und y_1' freie Relation zwischen dx, dy, dx_1, dy_1 folgen kann, nämlich die Relation:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} dy_1 = 0.$$

Nun aber soll (8) eine Berührungstransformation der Ebene x, y sein, es soll also eine Gleichung von der Form:

$$dy_1 - y_1' dx_1 - \varrho(x, y, y')\{dy - y'dx\} = 0$$

bestehen. Drücken wir in derselben, was unter der gemachten Voraussetzung möglich ist, y_1' und y' vermöge (8) durch x, y, x_1, y_1 aus, so erhalten wir eine von y' und y_1' freie Relation zwischen dx, dy, dx_1, dy_1, welche mit der vorhin gefundenen identisch sein muss. Mit andern Worten: es müssen die Gleichungen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} : \frac{\partial \Omega}{\partial y} : \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} : \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = \varrho y' : -\varrho : -y_1' : 1$$

eine Folge der Transformationsgleichungen (8) sein. Dabei ist es leicht nachzuweisen, dass unter den Differentialquotienten von Ω keiner vermöge (8) verschwindet; andernfalls verschwänden nämlich alle vier Differentialquotienten von Ω, und das ist offenbar unmöglich.

Wir ersehen hieraus, dass die drei Gleichungen:

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} + y' \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + y_1' \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = 0$$

vermöge (8) identisch bestehen; da aber dieselben von einander unabhängig sind, so muss das von ihnen gebildete Gleichungensystem mit (8) äquivalent sein. Also:

Jede Berührungstransformation der Ebene xy, aus deren Gleichungen (8) *nur* e i n e *Relation $\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$ zwischen x, y, x_1, y_1 allein folgt, wird bestimmt durch die drei Gleichungen:*

$$\Omega = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} + y' \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + y_1' \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = 0. \tag{8'}$$

Ist umgekehrt irgend eine Function Ω von x, y, x_1, y_1 vorgelegt, welche so beschaffen ist, dass die drei Gleichungen (8′) sowohl nach x_1, y_1, y_1' als nach x, y, y' auflösbar sind, so definiren diese drei Gleichungen eine Berührungstransformation der Ebene x, y. In der That, vermöge der Transformation (8′) verwandelt sich die Gleichung:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} dy_1 = 0$$

in:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}\{dy_1 - y_1' dx_1\} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\{dy - y' dx\} = 0,$$

also lässt die Transformation (8′) wirklich die Pfaffsche Gleichung: $dy - y'dx = 0$ invariant. Die zugehörige Function $\varrho(x, y, y')$ hat den Werth:

$$\varrho = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y}}{\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}}.$$

Wünscht man daher zu entscheiden, ob ein vorgelegtes Gleichungensystem von der Form (8′) eine Berührungstransformation bestimmt, so hat man nur festzustellen, ob sich dasselbe sowohl nach x_1, y_1, y_1' als nach x, y, y' auflösen lässt.

Soll das Gleichungensystem (8′) diese beiden Auflösungen zulassen, so ist jedenfalls nothwendig, dass die vier Veränderlichen x, y, x_1, y_1 sämmtlich in Ω vorkommen. Ist diese Bedingung erfüllt, so wird (8′)

jedenfalls die Grössen x_1, y_1, y_1' als Functionen von x, y, y' bestimmen, sobald die beiden Gleichungen:

$$\Omega = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} + y' \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0$$

nach x_1, y_1 auflösbar sind, oder was auf dasselbe hinauskommt, sobald die drei Gleichungen:

$$(9) \qquad \Omega = 0, \qquad -y' + \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \qquad 1 + \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0$$

nach x_1, y_1, λ aufgelöst werden können. Um darüber Auskunft zu erhalten, ob das der Fall ist, bildet man nach einer bekannten Regel die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial x} & \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} & \lambda \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial x_1} & \lambda \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial x_1} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} & \lambda \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y_1} & \lambda \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial y_1} \end{vmatrix}$$

welche durch λ dividirt in die Determinante:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial x} & \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial x_1} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial x_1} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y_1} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial y_1} \end{vmatrix}$$

übergeht, und hat nun zu untersuchen, ob $\varDelta$ vermöge (9) oder, was auf dasselbe hinauskommt, ob es vermöge $\Omega = 0$ verschwindet. Ist das nicht der Fall, so sind die Gleichungen (8′) sicher nach x_1, y_1, y_1' auflösbar.

Die Determinante $\varDelta$ ist augenscheinlich in Bezug auf die beiden Grössenpaare x, y und x_1, y_1 symmetrisch. Verschwindet daher $\varDelta$ vermöge $\Omega = 0$ nicht, so sind die Gleichungen (8′) nothwendig auch nach x, y, y' auflösbar, und da sie, wie wir eben gesehen haben, zugleich nach x_1, y_1, y_1' aufgelöst werden können, so stellen sie eine Transformation dar; diese Transformation ist nach der oben gemachten Bemerkung eine Berührungstransformation.

Aus dem Vorangehenden folgt, dass die Gleichungen (8′) dann und nur dann eine Berührungstransformation bestimmen, wenn Ω alle vier Veränderlichen x, y, x_1, y_1 enthält und wenn $\varDelta$ nicht vermöge $\Omega = 0$ verschwindet. Es ist aber leicht zu erkennen, dass die letztere Bedingung für sich allein genügt; enthält nämlich Ω nicht die Grössen x, y, x_1, y_1 alle vier, so wird $\varDelta$ identisch null.

Man könnte auch fragen, ob die Gleichungen (8') nicht etwa schon immer dann eine Berührungstransformation liefern, wenn Ω alle vier Veränderlichen x, y, x_1, y_1 enthält. Diese Frage wäre aber mit nein zu beantworten, denn ist zum Beispiel:

$$\Omega = \alpha(x, y) + \beta(x_1, y_1),$$

so verschwindet die Determinante Δ identisch, welche Functionen ihrer Argumente auch α und β sein mögen.

Das gewonnene Ergebniss können wir folgendermassen aussprechen:

Theorem 1. *Ist die Function Ω der vier Veränderlichen x, y, x_1, y_1 so beschaffen, dass die Determinante:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial x} & \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial x_1} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial x_1} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y_1} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial y_1} \end{vmatrix}$$

nicht vermöge $\Omega = 0$ verschwindet, so sind die Gleichungen:

$$(8') \qquad \Omega(x, y, x_1, y_1) = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} + y' \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + y_1' \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = 0$$

sowohl nach x_1, y_1, y_1' als nach x, y, y' auflösbar und bestimmen eine Berührungstransformation der Ebene xy. Wählt man Ω in allgemeinster Weise so, dass Δ nicht vermöge $\Omega = 0$ verschwindet, so liefert (8') die allgemeinste Berührungstransformation:

$$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y'),$$

*aus deren Gleichungen sich nur eine Relation zwischen x, y, x_1, y_1 allein ergiebt. Alle übrigen Berührungstransformationen der Ebene xy sind erweiterte Punkttransformationen derselben.**)

Beispiele. Setzt man:

$$\Omega = y + y_1 - x x_1,$$

so findet man $\Delta = 1$, so dass Δ vermöge $\Omega = 0$ nicht verschwindet, demnach müssen die Gleichungen:

$$y + y_1 - x x_1 = 0, \quad -x_1 + y' = 0, \quad -x + y_1' = 0$$

eine Berührungstransformation bestimmen. In der That ergiebt sich aus ihnen:

$$(10) \qquad x_1 = y', \quad y_1 = x y' - y, \quad y_1' = x$$

---

*) Lie, Verhandlungen der Ges. der W. zu Christiania 1871, Math. Ann. Bd. V, S. 159, Bd. VIII und XI; Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Bd. I, Christiania 1876.

und andererseits:

$$x = y_1', \quad y = x_1 y_1' - y_1, \quad y' = x_1$$

und zugleich wird:

$$dy_1 - y_1' dx_1 = d(xy' - y) - x dy' = -(dy - y' dx).$$

Die Function $\varrho(x, y, y')$ hat demnach für die betreffende Berührungstransformation den Werth: -1.

Für:

$$\Omega = (x - x_1)x_1 + (y - y_1)y_1$$

hat Δ den Werth:

$$\Delta = (2x_1 - x)x_1 + (2y_1 - y)y_1,$$

welcher vermöge $\Omega = 0$ nicht verschwindet. Folglich müssen die Gleichungen:

$$(x - x_1)x_1 + (y - y_1)y_1 = 0$$
$$x_1 + y' y_1 = 0, \quad x - 2x_1 + (y - 2y_1)y_1' = 0$$

eine Berührungstransformation bestimmen. Dieselbe lautet in aufgelöster Form:

(11) $$x_1 = y' \frac{xy' - y}{y'^2 + 1}, \quad y_1 = -\frac{xy' - y}{y'^2 + 1}, \quad y_1' = \frac{x + 2yy' - xy'^2}{y - 2xy' - yy'^2}.$$

Die versprochene Bestimmung aller Berührungstransformationen einer Ebene x, y ist jetzt geleistet. Insbesondere zeigt das Theorem 1, dass es wirklich, wie auf S. 6 behauptet, ausser den erweiterten Punkttransformationen noch eine ausgedehnte Kategorie von Elementtransformationen giebt, welche die Pfaffsche Gleichung: $dy - y' dx = 0$ invariant lassen.

Aus der Definition der Berührungstransformationen ergiebt sich leicht der wichtige

Satz 3. *Führt man zwei Berührungstransformationen:*

(12) $$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y')$$

und:

(12′) $$x_2 = \Xi(x_1, y_1, y_1'), \quad y_2 = H(x_1, y_1, y_1'), \quad y_2' = \Pi(x_1, y_1, y_1')$$

der Ebene x, y nach einander aus, so ist die entstehende Transformation:

(12″) $$x_2 = A(x, y, y'), \quad y_2 = B(x, y, y'), \quad y_2' = C(x, y, y')$$

wieder eine Berührungstransformation dieser Ebene.

In der That, unter den Voraussetzungen dieses Satzes besteht vermöge (12) eine Relation von der Gestalt:

$$dy_1 - y_1' dx_1 = \varrho(x, y, y') \cdot (dy - y' dx)$$

und vermöge (12′) eine von der Gestalt:

$$dy_2 - y_2' dx_2 = \sigma(x_1, y_1, y_1') \,.\, (dy_1 - y_1' dx_1').$$

Schafft man aus diesen beiden Gleichungen mit Hülfe von (12) die Veränderlichen x_1, y_1, y_1' fort, so erhält man eine Relation:

$$dy_2 - y_2' dx_2 = \sigma(X, Y, P) \,.\, \varrho(x, y, y') \,.\, (dy - y' dx),$$

die vermöge derjenigen Gleichungen besteht, welche sich aus (12) und (12′) durch Fortschaffung von x_1, y_1, y_1' ergeben. Nun aber liefern (12) und (12′) bei Wegschaffung von x_1, y_1, y_1' gerade die Gleichungen (12″), also ist wirklich auch (12″) eine Berührungstransformation.

Es ist andererseits selbstverständlich, dass *die aus einer vorgelegten Berührungstransformation* (12) *durch Auflösung entstehende inverse Transformation*

$$x = U(x_1, y_1, y_1'), \quad y = V(x_1, y_1, y_1'), \quad y' = W(x_1, y_1, y_1')$$

selbst eine Berührungstransformation ist.

§ 3.

In diesem Paragraphen wird ein wichtiger Begriff eingeführt, welcher die Begriffe Curve und Punkt als besondere Fälle umfasst.

Jede Curve: $y - f(x) = 0$ zeichnet unter den ∞^3 Linienelementen x, y, y' der Ebene x, y gewisse ∞^1 aus, die wir geradezu als *die Linienelemente der Curve* bezeichnen wollen; es sind das diejenigen Linienelemente, welche aus je einem Punkte der Curve und der zugehörigen Tangente bestehen; dieselben sind offenbar durch die beiden Gleichungen:

$$(13) \qquad y - f(x) = 0, \quad y' - f'(x) = 0$$

bestimmt, wo $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$ nach x bedeutet.

Differentiirt man (13) einmal und fügt man die erhaltenen beiden Gleichungen:

$$(13') \qquad dy - f'(x) \,.\, dx = 0, \quad dy' - f''(x) \,.\, dx = 0$$

zu (13) hinzu, so findet man ein System von vier Gleichungen: (13) (13′), welches offenbar so beschaffen ist, dass alle Werthsysteme x, y, y', dx, dy, dy', die (13) (13′) befriedigen, auch der Pfaffschen Gleichung: $dy - y' dx = 0$ genügen. Mit andern Worten: die Pfaffsche Gleichung: $dy - y' dx = 0$ besteht vermöge der vereinigten Gleichungen (13) und (13′).

Besitzt ein Gleichungensystem:

$$\Phi(x, y, y') = 0, \quad \Psi(x, y, y') = 0$$

die Eigenschaft, dass die Pfaffsche Gleichung: $dy - y' dx = 0$ vermöge der vier Gleichungen:

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 0, \quad d\Phi = 0, \quad d\Psi = 0$$

this case $[\Phi \Psi] \equiv \begin{vmatrix} \Phi_x + y' \Phi_y & \Phi_{y'} \\ \Psi_x + y' \Psi_y & \Psi_{y'} \end{vmatrix} = 0$

besteht, so wollen wir einfach sagen, *dass das betreffende Gleichungensystem:* $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ *der Pfaffschen Gleichung:* $dy - y'dx = 0$ *genügt, oder dass es sie befriedigt, oder erfüllt.*

Bei Anwendung dieser Ausdrucksweise können wir unser obiges Ergebniss einfach folgendermassen ausdrücken:

Das Gleichungensystem:

$$(13) \qquad y - f(x) = 0, \qquad y' - f'(x) = 0,$$

welches die ∞^1 *Linienelemente der Curve:* $y - f(x) = 0$ *bestimmt, genügt der Pfaffschen Gleichung:* $dy - y'dx = 0$.

Leicht zu erkennen ist, dass es ausser den Gleichungensystemen von der Form (13), deren jedes alle Linienelemente einer Curve darstellt, noch andere Gleichungensysteme:

$$\Phi(x, y, y') = 0, \qquad \Psi(x, y, y') = 0$$

giebt, welche die Pfaffsche Gleichung: $dy - y'dx = 0$ erfüllen.

In der That, man betrachte die Schaar aller Linienelemente x, y, y', welche denselben Punkt x_0, y_0 haben, oder kürzer *die Linienelemente des Punktes* x_0, y_0. Die Gleichungen dieser Schaar lauten:

$$(14) \qquad x = x_0, \qquad y = y_0$$

und ergeben einmal differentiirt:

$$(14') \qquad dx = 0, \qquad dy = 0,$$

sodass die Gleichung: $dy - y'dx = 0$ vermöge (14) und (14') besteht. Also befriedigt auch jedes Gleichungensystem von der Form (14) die Pfaffsche Gleichung: $dy - y'dx = 0$.

Wir werden jetzt beweisen, dass die Gleichungensysteme von der Form (13) und (14) die einzigen sind, welche der Pfaffschen Gleichung: $dy - y'dx = 0$ genügen. Wir thun das, indem wir direkt alle Gleichungensysteme:

$$(15) \qquad \Phi(x, y, y') = 0, \qquad \Psi(x, y, y') = 0$$

bestimmen, welche diese Eigenschaft besitzen.

Aus (15) ergeben sich entweder zwei Relationen zwischen x, y allein, oder es ergiebt sich nur eine solche. Im ersten Falle kann (15) die Form: $x = a$, $y = b$ erhalten und stellt daher alle Linienelemente eines Punktes dar. Im zweiten Falle kann die eine vorhandene Relation zwischen x und y offenbar nicht von y frei sein; sie lässt sich also auf die Form: $y - f(x) = 0$ bringen. Durch Differentiation erhalten wir hieraus: $dy - f'(x)dx = 0$; soll daher das Gleichungensystem (15) die Pfaffsche Gleichung: $dy - y'dx = 0$ erfüllen; so muss der Ausdruck: $(f' - y')dx$

für jedes dx vermöge (15) verschwinden. Mithin kann unser Gleichungensystem (15) die Form (13):

$$y - f(x) = 0, \qquad y' - f'(x) = 0$$

erhalten. Also:

Theorem 2. *Wenn ein Gleichungensystem:*

$$\Phi(x, y, y') = 0, \qquad \Psi(x, y, y') = 0$$

die Pfaffsche Gleichung: $dy - y'dx = 0$ *erfüllt, so sind die* ∞^1 *Linienelemente, welche es definirt, entweder die Linienelemente einer Curve:* $y - f(x) = 0$ *oder diejenigen eines Punktes:* $x = x_0$, $y = y_0$.*)

Es ist naturgemäss für die so definirten Schaaren von Linienelementen eine *gemeinsame* Bezeichnung zu benutzen. *Wir nennen deshalb eine Schaar von* ∞^1 *Linienelementen* x, y, y' *dann eine Element-Mannigfaltigkeit**) *oder kürzer eine Element-*M_1 *der Ebene* xy, *wenn das Gleichungensystem:*

$$\Phi(x, y, y') = 0, \qquad \Psi(x, y, y') = 0$$

dieser Schaar der Pfaffschen Gleichung: $dy - y'dx = 0$ *genügt.*

Damit ist der oben (S. 2 und 12) angekündigte allgemeine Begriff gewonnen, der die Begriffe „Curve“ und „Punkt“ als besondere Fälle umfasst.

Jede Element-M_1 ist eine *Linienelement*figur; da sie aber entweder aus allen Linienelementen eines Punktes oder aus allen einer Curve besteht, so kann sie auch als eine *Punkt*figur aufgefasst werden und zwar ist sie als Punktfigur *entweder* ein Punkt *oder* eine Curve.

Bemerkenswerth ist, dass unter den soeben gefundenen Element-M_1 der Ebene x, y zwar alle Punkte enthalten sind, nicht aber alle Curven; die Curven von der Form: $x = a$, also die zur y-Axe parallelen Geraden haben wir bei der Bestimmung aller Element-M_1 nicht mit erhalten. Es hat das seinen Grund in den hier benutzten Coordinaten: x, y, y' der Linienelemente; für alle Linienelemente, deren Gerade zur y-Axe parallel ist, werden nämlich diese Coordinaten unbrauchbar, da für sie y' unendlich gross wird. Später, wenn wir diese Untersuchungen für beliebig viele Veränderliche durchführen, werden wir Elementcoordinaten kennen lernen, denen ein solcher Mangel nicht anhaftet.

Man kann fragen, ob es ausser der Gleichung: $dy - y'dx = 0$ noch andere Pfaffsche Gleichungen giebt, welche von allen Element-M_1

---

*) Lie, Göttinger Nachrichten, October 1872; Verhandlungen der Gesellsch. d. W. zu Christiania 1871, Mai 1872 und Novbr. 1874; Math. Ann. Bd. V und IX.

der Ebene x, y befriedigt werden. Die Beantwortung dieser Frage bietet keine Schwierigkeit.

Wird die Pfaffsche Gleichung:

$$(16) \quad \mathfrak{a}(x, y, y') \,.\, dx + \mathfrak{b}(x, y, y') \,.\, dy + \mathfrak{c}(x, y, y') \,.\, dy' = 0$$

von allen Element-M_1 der Ebene x, y befriedigt, so genügen ihr insbesondere alle Gleichungensysteme von der Form:

$$y - f(x) = 0, \qquad y' - f'(x) = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Gleichung (16) vermöge der Gleichungen:

$$y - f(x) = 0, \qquad y' - f'(x) = 0, \qquad dy - f'(x)dx = 0,$$
$$dy' - f''(x)dx = 0$$

besteht, welche Function von x auch f sein mag, oder was auf dasselbe hinauskommt, dass die Gleichung:

$$\{\mathfrak{a}(x, f, f') + f' \,.\, \mathfrak{b}(x, f, f') + f'' \,.\, \mathfrak{c}(x, f, f')\} dx = 0$$

für alle Werthe von dx und für jede Function $f(x)$ identisch erfüllt ist. Das aber ist nur möglich, wenn die beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{c}(x, f, f') = 0, \qquad \mathfrak{a}(x, f, f') + f' \,.\, \mathfrak{b}(x, f, f') = 0$$

für alle Zahlenwerthe der Grössen x, f, f' identisch bestehen, also wenn (16) die Form:

$$\mathfrak{b}(x, y, y') \,.\, (dy - y'dx) = 0$$

besitzt und demnach mit der Gleichung: $dy - y'dx = 0$ äquivalent ist.

Damit haben wir den

Satz 4. *Die Gleichung: $dy - y'dx = 0$ ist die einzige Pfaffsche Gleichung, welche von allen Element-M_1 der Ebene x, y erfüllt wird; sie ist sogar die einzige Pfaffsche Gleichung, welcher alle Element-M_1 von der besonderen Form:*

$$y - f(x) = 0, \qquad y' - f'(x) = 0$$

genügen.

Dieser Satz wird uns bald nützlich sein.

§ 4.

Die Entwickelungen des vorigen Paragraphen führen zu einer neuen Eigenschaft der Berührungstransformationen, welche für dieselben charakteristisch ist und welche daher eine neue Definition der Berührungstransformationen enthält.

Die betreffende Eigenschaft besteht einfach darin, *dass bei Ausführung einer Berührungstransformation jede Element-M_1 der Ebene xy in eine Element-M_1 übergeht.*

Stellen nämlich die Gleichungen:

$$\Phi(x, y, y') = 0, \qquad \Psi(x, y, y') = 0$$

eine Element-M_1 dar, so besteht, wie wir wissen, die Gleichung: $dy - y'dx = 0$ vermöge der vier:

$$(17) \qquad \Phi = 0, \qquad \Psi = 0, \qquad d\Phi = 0, \qquad d\Psi = 0.$$

Führen wir nun an Stelle von x, y, y' durch eine Berührungstransformation die neuen Veränderlichen x_1, y_1, y_1' ein, so gehen Φ und Ψ in gewisse Functionen Φ_1 und Ψ_1 von x_1, y_1, y_1' über; das Gleichungensystem (17) verwandelt sich also in:

$$(17') \qquad \Phi_1 = 0, \qquad \Psi_1 = 0, \qquad d\Phi_1 = 0, \qquad d\Psi_1 = 0;$$

dagegen erhalten wir aus: $dy - y'dx = 0$ die neue Gleichung: $dy_1 - y_1'dx_1 = 0$, welche nun augenscheinlich ihrerseits vermöge (17') besteht. Mithin stellen auch die Gleichungen: $\Phi_1 = 0$, $\Psi_1 = 0$ immer eine Element-M_1 dar.

Ist andererseits eine Transformation:

$$(18) \quad x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P_1(x, y, y')$$

so beschaffen, dass sie jede Element-M_1 der Ebene xy in eine Element-M_1 überführt, so ist sie eine Berührungstransformation.

Um das zu beweisen, denken wir uns die Transformation (18) auf eine beliebige Element-M_1 von der Form

$$(19) \qquad y - f(x) = 0, \qquad y' - f'(x) = 0$$

ausgeführt; wir müssen dann, wie auch die Function $f(x)$ gewählt sein mag, aus (19) ein Gleichungensystem:

$$\Phi_1(x_1, y_1, y_1') = 0, \qquad \Psi_1(x_1, y_1, y_1') = 0$$

erhalten, welches der Pfaffschen Gleichung: $dy_1 - y_1'dx_1 = 0$ genügt. Führen wir daher mit Hülfe von (18) rückwärts an Stelle von x_1, y_1, y_1' die alten Veränderlichen x, y, y' ein, so verwandelt sich: $dy_1 - y_1'dx_1 = 0$ in eine gewisse Pfaffsche Gleichung:

$$(20) \quad dy_1 - y_1'dx_1 = A(x, y, y')dx + B(x, y, y')dy + C(x, y, y')dy' = 0,$$

welcher nun offenbar alle Gleichungensysteme von der Form (19) genügen. Aber nach Satz 4, S. 15 ist $dy - y'dx = 0$ die einzige Pfaffsche Gleichung von dieser Beschaffenheit, folglich muss der Ausdruck:

$$A(x, y, y')dx + B(x, y, y')dy + C(x, y, y')dy'$$

die Form $B(dy - y'dx)$ besitzen; es besteht daher vermöge (18) eine Relation von der Form:

$$dy_1 - y_1'dx_1 = B(x, y, y') \cdot (dy - y'dx),$$

das heisst (18) ist wirklich eine Berührungstransformation.

Damit ist bewiesen, dass die oben angegebene Eigenschaft für die Berührungstransformationen der Ebene charakteristisch ist, wir können daher sagen:

Satz 5. *Die Berührungstransformationen der Ebene x, y lassen sich auch definiren als diejenigen Linienelementtransformationen dieser Ebene, welche jede Element-M_1 in eine Element-M_1 überführen.*

Eine Element-M_1 der Ebene besteht, wie wir wissen, entweder aus den ∞^1 Elementen einer Curve oder aus den ∞^1 Elementen eines Punktes. Aus der neuen Definition der Berührungstransformationen folgt daher, dass die ∞^1 Elemente einer Curve bei Ausführung einer Berührungstransformation entweder in die ∞^1 Elemente einer Curve oder in die eines Punktes übergehen; kürzer ausgedrückt: bei einer Berührungstransformation verwandelt sich eine Curve entweder in eine Curve oder in einen Punkt; andererseits verwandelt sich auch ein Punkt entweder in eine Curve oder in einen Punkt.

Es ist klar, dass die erweiterten Punkttransformationen (4) die einzigen Berührungstransformationen der Ebene sind, welche jeden Punkt wieder in einen Punkt überführen.

Betrachten wir ferner eine Berührungstransformation, welche keine erweiterte Punkttransformation ist, also eine, deren Gleichungen:

$$(21) \qquad x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y')$$

blos eine Relation:

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$$

zwischen x, y, x_1, y_1 allein ergeben.

Die betreffende Berührungstransformation führt die ∞^1 Linienelemente des Punktes: $x = a$, $y = b$ in ∞^1 Linienelemente über, deren Punkte die Curve: $\Omega(a, b, x_1, y_1) = 0$ erfüllen. Da nun diese neuen ∞^1 Linienelemente eine Element-M_1 bilden, so sind sie (Theorem 2, S. 14) eben die Linienelemente der besprochenen Curve; wir sehen also, dass *unsere Berührungstransformation den Punkt: $x = a$, $y = b$ in die Curve: $\Omega(a, b, x_1, y_1) = 0$ verwandelt.* In derselben Weise erkennen wir, dass *sie die Curve: $\Omega(x, y, a_1, b_1) = 0$ in den Punkt: $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$ überführt.**)

---

*) *Plücker* betrachtet in seinen Analytisch-geometrischen Entwickelungen, Abth. 2 eine beliebige Gleichung: $\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$ und deutet darin x, y als Coordinaten eines Punktes und x_1, y_1 als diejenigen eines zweiten Punktes. Für diese Auffassung ordnet die Gleichung: $\Omega = 0$ jedem Punkte: $x = a$, $y = b$ die Curve: $\Omega(a, b, x_1, y_1) = 0$ zu und dementsprechend jedem Punkte: $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$ die Curve: $\Omega(x, y, a_1, b_1) = 0$; ferner bemerkt *Plücker* ausdrücklich, dass die Curven, welche den Punkten x_1, y_1 der Curve: $\Omega(a, b, x_1, y_1) = 0$ zugeordnet sind, sämmtlich durch einen gemeinsamen Punkt gehen. *Wahrscheinlich* hatte *Plücker* die *Absicht,* in späteren Arbeiten zu zeigen, dass die Gleichung: $\Omega = 0$ oder wie er sich ausdrückt „die aequatio directrix: $\Omega = 0$" überhaupt

Beispiele. Nach S. 10 ist durch die Gleichung:

$$y + y_1 - x x_1 = 0$$

eine Berührungstransformation definirt. Bei dieser geht der Punkt: $x = a$, $y = b$ in die Gerade: $y_1 - a x_1 + b = 0$ über, also in seine *Polare* in Bezug auf den Kegelschnitt: $2y - x^2 = 0$; die Gerade: $y - a_1 x + b_1 = 0$ verwandelt sich in den Punkt: $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$ also in ihren *Pol* in Bezug auf diesen Kegelschnitt.

Die Berührungstransformation, welche durch die Gleichung:

$$(x - x_1)x_1 + (y - y_1)y_1 = 0$$

definirt ist, verwandelt jeden Punkt: $x = a$, $y = b$ in einen Kreis, welcher durch den betreffenden Punkt und durch den Coordinatenanfang geht und die Verbindungslinie dieser beiden Punkte zum Durchmesser hat. Jede Gerade führt sie in einen Punkt über, nämlich in den *Fusspunkt* des Lothes, welches man vom Coordinatenanfang auf sie fällt.

Wir fügen hier noch einige allgemeine Bemerkungen an.

Definirt die Gleichung:

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$$

eine Berührungstransformation, so geht jede Curve: $\Omega(x, y, a_1, b_1) = 0$ bei dieser Berührungstransformation in den Punkt $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$ über; das sahen wir oben.

Wünscht man andererseits zu wissen, ob eine vorgelegte Gleichung von der Form:

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0,$$

eine Berührungstransformation bestimmt, so hat man nach S. 9 zu untersuchen, ob sich die beiden Gleichungen:

$$(22) \qquad \Omega(x, y, x_1, y_1) = 0, \qquad y' = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x}}{\frac{\partial \Omega}{\partial y}}$$

nach x_1 und y_1 auflösen lassen oder ob sie eine Relation:

$$V(x, y, y') = 0$$

zwischen *allen* Curven der Ebene ein Entsprechen herstellt, welches solchen Curven, die sich in einem Punkte berühren, Curven von derselben Beschaffenheit zuordnet. Man braucht in der That zu Plücker's Ausführungen nur wenig hinzuzufügen, um den Ausgangspunkt für die geometrische Theorie der Berührungstransformationen einer Ebene zu gewinnen; dabei ist jedoch zu bemerken, dass genau dasselbe auch von *Lagrange*'s Untersuchungen über singuläre Lösungen gesagt werden kann. *Lagrange* war dem Begriff Berührungstransformation der *Ebene* fast ebenso nahe wie *Plücker*. (Vgl. Lagrange's Leçons sur le calcul des fonctions.)

zwischen x, y, y' allein liefern. Nur im ersten Falle bestimmt $\Omega = 0$ eine Berührungstransformation.

Nun definiren die Gleichungen (22), wenn man in ihnen den Grössen x_1 und y_1 die festen Werthe $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$ ertheilt, die Linienelemente einer Curve, welche der Curvenschaar: $\Omega(x, y, a_1, b_1) = 0$ angehört. Verbinden wir diese Bemerkung mit dem oben Gesagten, so erhalten wir den

Satz 6. *Ist die Curvenschaar $\Omega(x, y, a_1, b_1) = 0$ mit den Parametern a_1, b_1 so beschaffen, dass die Linienelemente x, y, y' aller Curven der Schaar keine Relation: $V(x, y, y') = 0$ befriedigen, so giebt es eine und nur eine Berührungstransformation:*

$$x_1 = X(x, y, y'), \qquad y_1 = Y(x, y, y'), \qquad y_1' = P(x, y, y'),$$

welche jede Curve: $\Omega(x, y, a_1, b_1) = 0$ in den Punkt: $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$ überführt; die Gleichungen dieser Berührungstransformation erhält man durch Auflösung der Gleichungen:

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial x} + y' \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + y_1' \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = 0$$

nach x_1, y_1, y_1'.

Genügen die Linienelemente x, y, y' aller Curven der Schaar: $\Omega(x, y, a, b) = 0$ einer Relation: $V(x, y, y') = 0$, so sind alle Curven dieser Schaar Integralcurven der Differentialgleichung erster Ordnung:

$$V\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

und da diese Differentialgleichung nur ∞^1 Integralcurven besitzt, so enthält auch die Schaar: $\Omega(x, y, a, b) = 0$ nicht, wie es den Anschein hat, ∞^2 verschiedene Curven, sondern blos ∞^1. Dass die Linienelemente aller Curven einer Schaar $\Omega(x, y, a, b) = 0$ keine Relation von der Form: $V(x, y, y') = 0$ befriedigen, ist also damit gleichbedeutend, dass die Schaar $\Omega(x, y, a, b) = 0$ ∞^2 verschiedene Curven enthält. Diese Bemerkung giebt eine Deutung und führt zu einer Verallgemeinerung des vorhin aufgestellten Satzes.

Es sei irgend eine Schaar von ∞^2 verschiedenen Curven vorgelegt, etwa die folgende:

$$W(x, y, \alpha, \beta) = 0.$$

Wir ordnen die Curven dieser Schaar den Punkten der Ebene nach irgend einem Gesetze so zu, dass jeder Curve der Schaar ein Punkt der Ebene und jedem Punkte eine Curve der Schaar entspricht. Verstehen wir also unter a, b die Coordinaten des Punktes, welcher der Curve $W(x, y, \alpha, \beta) = 0$ mit den Parametern α, β entspricht, so setzen wir:

$$a = A(\alpha, \beta), \qquad b = B(\alpha, \beta), \tag{23}$$

wo A und B beliebige von einander unabhängige Functionen ihrer Argumente bezeichnen.

Lösen wir die Gleichungen (23) nach α und β auf:

$$\alpha = \mathfrak{A}(a, b), \qquad \beta = \mathfrak{B}(a, b)$$

und setzen wir die gefundenen Ausdrücke für α, β in die Gleichung: $W(x, y, \alpha, \beta) = 0$ ein, so erhalten wir eine Gleichung:

$$W(x, y, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \Omega(x, y, a, b) = 0,$$

welche genau dieselbe Schaar von ∞^2 Curven der Ebene x, y darstellt. Es giebt daher nach Satz 6 eine Berührungstransformation, welche jede Curve $\Omega(x, y, a, b) = 0$ in den Punkt: $x_1 = a$, $y_1 = b$ überführt.

Damit haben wir die angekündigte Verallgemeinerung des Satzes 6 gewonnen:

Satz 7. *Hat man in der Ebene x, y irgend eine Schaar von ∞^2 Curven: $W(x, y, \alpha, \beta) = 0$ und hat man diese Curven nach irgend einem Gesetze den Punkten der Ebene so zugeordnet, dass jeder Curve der Schaar ein Punkt und jedem Punkte eine Curve entspricht, so giebt es immer eine und nur eine Berührungstransformation der Ebene x, y, welche die Curven der Schaar in die Punkte der Ebene und zwar jede Curve in den ihr zugeordneten Punkt überführt.*

Beispiel. Der Inbegriff aller Kreise von gleichem Halbmesser r_0 bildet eine zweifach unendliche Curvenschaar:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r_0^2. \tag{24}$$

Ordnet man jedem dieser ∞^2 Kreise seinen Mittelpunkt zu, so entspricht jedem Punkte der Ebene einer von den Kreisen, man hat also eine Zuordnung von der in Satz 7 beschriebenen Beschaffenheit. Die Berührungstransformation, welche jeden der ∞^2 Kreise (24) in seinen Mittelpunkt überführt, ist durch die Gleichungen:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_0^2, \qquad x - x_1 + (y - y_1)y' = 0,$$
$$x - x_1 + (y - y_1)y_1' = 0$$

definirt, in aufgelöster Form lautet sie:

$$x_1 = x + \frac{r_0 y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \qquad y_1 = y - \frac{r_0}{\sqrt{1 + y'^2}}, \qquad y_1' = y', \tag{25}$$

sie führt also jedes Linienelement in ein *paralleles* über.

§ 5.

Wir wollen jetzt die Entwickelungen der beiden letzten Paragraphen dadurch vervollständigen, dass wir der Pfaffschen Gleichung: $dy - y'dx = 0$

eine begriffliche Deutung geben; auf diese Weise erhalten wir auch eine tiefere Einsicht in das Wesen der Element-M_1.

Es sei eine beliebige Schaar von ∞^1 Elementen x, y, y' der Ebene vorgelegt, etwa in der Weise, dass x, y, y' als Functionen einer unabhängigen Veränderlichen t dargestellt sind.

Wir betrachten irgend zwei unendlich benachbarte Werthe t_0 und $t_0 + \Delta t$ von t und setzen nur voraus, dass die drei Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dy'}{dt}$ nicht sämmtlich für $t = t_0$ verschwinden. Den Werthen t_0 und $t_0 + \Delta t$ entsprechen zwei unendlich benachbarte Elemente: x_0, y_0, y_0' und $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, y_0' + \Delta y'$ unsrer Schaar. Die Punkte: x_0, y_0 und $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$ weichen von einander um eine Grösse von der Ordnung des Δt ab. Um eine Grösse von derselben Ordnung weicht im Allgemeinen auch der Punkt $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$ von der Geraden:

$$\mathfrak{y} - y_0 = y_0'(\mathfrak{x} - x_0)$$

des Elementes x_0, y_0, y_0' ab; denn der Ausdruck:

$$\Delta y - y_0' \Delta x,$$

welcher als Mass dieser Abweichung aufgefasst werden kann, ist im Allgemeinen von erster Ordnung in Δt. Es kann jedoch vorkommen, dass der Ausdruck: $\Delta y - y_0' \Delta x$ von der zweiten Ordnung in Δt wird. Dann weicht der Punkt: $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$ von der Geraden des Elements x_0, y_0, y_0' nur um eine Grösse ab, welche unendlich klein ist im Vergleich zu der Abweichung der beiden Punkte x_0, y_0 und $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$ von einander. Wir sagen in diesem Falle, *dass die beiden Elemente: x_0, y_0, y_0' und $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, y_0' + \Delta y'$ unsrer Schaar vereinigt liegen.*

Diese Definition kann präciser folgendermassen gefasst werden: *In der Schaar der ∞^1 Elemente:*

$$x = \alpha(t), \qquad y = \beta(t), \qquad y' = \gamma(t)$$

liegt das Element t_0 mit dem unendlich benachbarten Elemente $t_0 + \Delta t$ der Schaar vereinigt), wenn der Ausdruck:*

$$\frac{dy}{dt} - y' \frac{dx}{dt}$$

für $t = t_0$ verschwindet, ohne dass $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dy'}{dt}$ alle drei für $t = t_0$ den Werth Null annehmen.

Verschwindet der Ausdruck: $\frac{dy}{dt} - y' \frac{dx}{dt}$ für alle Werthe von t,

*) Lie, Göttinger Nachrichten, October 1872.

so bildet die in Rede stehende Schaar von ∞^1 Elementen eine Element-M_1; demnach liegt in einer Element-M_1 jedes Element mit dem unendlich benachbarten vereinigt. Diese Eigenschaft kann geradezu zur Definition des Begriffes einer Element-M_1 benutzt werden.

Dass alle Elemente einer Curve eine Element-M_1 bilden, beruht darauf, dass die Tangente der Curve im Punkte x, y von dem unendlich benachbarten Punkte $x + dx, y + dy$ der Curve nur um eine Grösse abweicht, welche unendlich klein ist im Vergleich zu der Abweichung der Punkte x, y und $x + dx, y + dy$ von einander. Die Elemente eines Punktes x_0, y_0 bilden eine Element-M_1, weil sie alle denselben Punkt haben, und weil in Folge dessen der Punkt des Elementes $x_0, y_0, y_0' + dy_0'$ auf der Geraden des Elementes x_0, y_0, y_0' liegt, welchen Werth auch y_0' haben mag.

Mit Benutzung des Begriffs der vereinigten Lage zweier unendlich benachbarten Elemente kann man die Berührungstransformationen der Ebene x, y geradezu als diejenigen *Elementtransformationen dieser Ebene definiren, welche unendlich benachbarte, vereinigt liegende Elemente in eben solche überführen.* Da nun in einer Element-M_1 jedes Element mit dem unendlich benachbarten der Element-M_1 vereinigt liegt, so erscheint eine früher bewiesene Eigenschaft der Berührungstransformationen jetzt selbstverständlich, die Eigenschaft nämlich, dass bei einer Berührungstransformation jede Element-M_1 in eine Element-M_1 übergeht.

§ 6.

Wir haben gesehen, dass eine Berührungstransformation der Ebene x, y jede Element-M_1 der Ebene in eine Element-M_1 verwandelt. Da sich die Element-M_1 auch als Punktgebilde auffassen lassen, so können wir auch sagen, dass eine Berührungstransformation jede Curve entweder in eine Curve oder in einen Punkt überführt und jeden Punkt ebenfalls entweder in eine Curve oder in einen Punkt. Nebenbei bemerkt ist hierbei an und für sich klar, dass eine Curve im Allgemeinen wieder in eine Curve übergeht, denn die Gleichung aller Curven der Ebene hängt von einer willkürlichen Function mit einem Argumente ab, die allgemeinen Gleichungen eines Punktes dagegen nur von zwei willkürlichen *Parametern.*

Zwei Curven, die sich in einem gemeinsamen Punkte berühren, haben als Element-M_1 aufgefasst ein Linienelement gemein. *Nun verwandeln sich zwei Element-M_1 mit einem gemeinsamen Linienelement bei einer Berührungstransformation in zwei Element-M_1, welche in derselben Beziehung stehen.* Folglich erkennen wir, dass *zwei sich berührende*

Curven bei einer Berührungstransformation im Allgemeinen wieder in zwei sich berührende Curven übergehen. Daher der Name Berührungstransformation. Doch kann es auch vorkommen, dass sich die eine der beiden Curven in einen Punkt verwandelt, dieser liegt dann auf der Curve, in welche die andere übergeht.

Ist die Berührungstransformation aus einer Punkttransformation durch Erweiterung entstanden, so transformirt sie natürlich die Punkte und die Curven der Ebene x, y genau so wie diese Punkttransformation. Dazu ist weiter nichts zu bemerken.

Betrachten wir andererseits eine Berührungstransformation, die keine erweiterte Punkttransformation ist und sehen wir zu, wie gegebene Punkte und gegebene Curven von derselben transformirt werden.

Die Gleichung zwischen x, y, x_1, y_1, durch welche unsre Berührungstransformation bestimmt ist, sei:

$$\Omega(x,\ y,\ x_1,\ y_1) = 0$$

Dann wissen wir schon (vgl. S. 17), dass bei der Berührungstransformation jeder Punkt: $x = a$, $y = b$ in die Curve: $\Omega(a, b, x_1, y_1) = 0$ übergeht und jede Curve: $\Omega(x, y, a_1, b_1) = 0$ in den Punkt: $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$. Wir können hinzufügen, dass die ∞^2 Curven: $\Omega(x, y, a_1, b_1) = 0$ die einzigen Curven der Ebene sind, welche in Punkte verwandelt werden; das ist unmittelbar klar.

Denken wir uns jetzt eine beliebige Curve: $\varphi(x, y) = 0$ vorgelegt, welche nicht zu den Curven: $\Omega(x, y, a_1, b_1) = 0$ gehört, welche also sicher in eine Curve und nicht in einen Punkt übergeht.

Zu der Curve, in welche sich $\varphi(x, y) = 0$ verwandelt, können wir folgendermassen gelangen:

Die ∞^1 Punkte der Curve $\varphi(x, y) = 0$ gehen in ∞^1 Curven über, deren allgemeine Gleichung man erhält, wenn man in

$$\Omega(x^0,\ y^0,\ x_1,\ y_1) = 0$$

die Grössen x^0, y^0 als Parameter auffasst, welche der Gleichung: $\varphi(x^0, y^0) = 0$ genügen. Jeder Punkt der Curve: $\varphi(x, y) = 0$ hat mit dieser ein Linienelement gemein, folglich verwandelt sich die Curve: $\varphi(x, y) = 0$ in eine Curve, welche mit jeder der ∞^1 Curven:

$$\Omega(x^0,\ y^0,\ x_1,\ y_1) = 0$$

ein Linienelement gemein hat, kurz sie verwandelt sich in die Einhüllende dieser ∞^1 Curven. Um diese Einhüllende zu finden, bildet man nach bekannten Regeln die Gleichungen:

$$\frac{\partial \Omega^0}{\partial x^0}\,dx^0 + \frac{\partial \Omega^0}{\partial y^0}\,dy^0 = 0, \qquad \frac{\partial \varphi^0}{\partial x^0}\,dx^0 + \frac{\partial \varphi^0}{\partial y^0}\,dy^0 = 0,$$

in welchen Ω^0 und φ^0 der Kürze wegen für: $\Omega(x^0, y^0, x_1, y_1)$ und $\varphi(x^0, y^0)$ geschrieben sind. Durch Fortschaffung von dx^0 und dy^0 ergiebt sich:

$$\frac{\partial \Omega^0}{\partial x^0}\,\frac{\partial \varphi^0}{\partial y^0} - \frac{\partial \Omega^0}{\partial y^0}\,\frac{\partial \varphi^0}{\partial x^0} = 0$$

und wenn man hieraus mit Hülfe von: $\Omega^0 = 0$ und $\varphi^0 = 0$ die Parameter x^0, y^0 entfernt, so erhält man die Gleichung der gesuchten Curve.

Ein anderer Weg ist dieser: *Jede Curve $\Omega(x, y, a, b) = 0$, welche die Curve $\varphi(x, y) = 0$ berührt, geht bei der Berührungstransformation in einen Punkt $x_1 = a$, $y_1 = b$ über, welcher offenbar auf der gesuchten Curve liegt.* Man hat daher nur die Gleichung: $\psi(a, b) = 0$ zu bestimmen, welche zwischen a, b bestehen muss, damit die Curve $\varphi(x, y) = 0$ von der Curve: $\Omega(x, y, a, b) = 0$ berührt wird; dann ist $\psi(x_1, y_1) = 0$ ohne Weiteres die Gleichung der gesuchten Curve. Zur Bestimmung von $\psi(a, b) = 0$ gelangt man aber offenbar durch Bildung der Gleichungen:

$$\Omega(x, y, a, b) = 0, \qquad \varphi(x, y) = 0$$

$$\frac{\dfrac{\partial \Omega(x, y, a, b)}{\partial x}}{\dfrac{\partial \Omega(x, y, a, b)}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}}$$

und durch nachherige Elimination von x und y. Das stimmt mit der ersten Methode.

Wir können endlich rein analytisch verfahren. Unsere Berührungstransformation ist nach S. 8 durch die Gleichungen:

$$(26) \qquad \Omega(x, y, x_1, y_1) = 0, \quad y' = -\frac{\dfrac{\partial \Omega}{\partial x}}{\dfrac{\partial \Omega}{\partial y}}, \quad y_1' = -\frac{\dfrac{\partial \Omega}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial \Omega}{\partial y_1}}$$

definirt. Die Linienelemente x, y, y' der Curve $\varphi(x, y) = 0$ sind gegeben durch:

$$(27) \qquad \varphi(x, y) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y'\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Wünscht man daher die Linienelemente der transformirten Curve zu finden, so hat man nur x, y und y' aus den fünf Gleichungen (26) und (27) fortzuschaffen. Die Gleichung der transformirten Curve selbst findet man, wenn man ausserdem noch y_1' eliminirt.

Die Elimination von y' und y_1' liefert die schon oben erhaltenen Gleichungen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \qquad \Omega = 0, \qquad \varphi = 0$$

aus welchen noch x und y fortzuschaffen sind. Also führt die direkte analytische Methode zu denselben Rechnungen wie die oben durchgeführten Betrachtungen.

Um diese Ergebnisse kurz aussprechen zu können, wollen wir eine Berührungstransformation, welche nicht durch Erweiterung einer Punkttransformation entstanden ist, als eine *eigentliche* Berührungstransformation bezeichnen. Dann können wir sagen:

Theorem 3. *Bestimmt eine eigentliche Berührungstransformation der Ebene x, y die Relation $\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$ zwischen den Grössen x, y, x_1, y_1, so kann der Zusammenhang zwischen einer Curve $\varphi(x, y) = 0$ und der transformirten Curve $\varphi_1(x_1, y_1) = 0$ in den beiden folgenden Weisen definirt werden: Durchläuft der Punkt $x = a$, $y = b$ die Curve $\varphi = 0$, so umhüllt die zugeordnete Curve $\Omega(a, b, x_1, y_1) = 0$ die transformirte Curve $\varphi_1 = 0$; durchläuft andererseits der Punkt $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$ die Curve $\varphi_1 = 0$, so umhüllt die zugeordnete Curve $\Omega(x, y, a_1, b_1) = 0$ die Curve $\varphi = 0$.**)

Beispiele. Die Berührungstransformation, welche durch die Gleichung:

$$y + y_1 - x x_1 = 0$$

definirt ist, führt nach S. 18 jeden Punkt $x = a$, $y = b$ in seine Polare: $y_1 - a x_1 + b = 0$ in Bezug auf den Kegelschnitt: $2y - x^2 = 0$ über; demnach verwandelt sie augenscheinlich jede Curve in ihre Polarcurve in Bezug auf den Kegelschnitt. Die einzigen Curven, welche nicht in Curven sondern in Punkte übergehen sind die Geraden.

Man sieht, dass diese Berührungstransformation mit der *Poncelet*schen Transformation durch reciproke Polaren identisch ist.

Die Gleichung:

$$(x - x_1)x_1 + (y - y_1)y_1 = 0$$

definirte eine Berührungstransformation, welche jede Gerade in den Punkt des Lothes verwandelte, welches vom Coordinatenanfang auf sie gefällt werden kann. Eine beliebige Curve wird von dieser Berührungstransformation in ihre *Fusspunktcurve* in Bezug auf den Coordinatenanfang übergeführt; man sieht das sofort, wenn man bedenkt, dass die betreffende Bildcurve aus allen den Punkten bestehen muss, in welche die Tangenten der ursprünglichen Curve übergehen.

Auch diese Transformation ist längst betrachtet worden.

Die Gleichung:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_0^2$$

endlich definirt eine Berührungstransformation, welche jede Curve in eine *Parallelcurve* überführt.

---

*) Dieser Satz wurde zum ersten Male aufgestellt in der Abhandlung: Over en Classe geometriske Transformationer af Sophus Lie, Verhandl. der Ges. d. W. zu Christiania 1871; vgl. auch Math. Ann. Bd. V, S. 149.

§ 7.

Bestimmen die Gleichungen:

$$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y')$$

eine Berührungstransformation, so besteht eine Identität von der Form:

$$dY - PdX = \varrho(x, y, y') \,.\, (dy - y'dx), \tag{28}$$

oder, was damit gleichbedeutend ist, es bestehen die drei Identitäten:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial x} - P\dfrac{\partial X}{\partial x} = -\varrho y', \\ \dfrac{\partial Y}{\partial y} - P\dfrac{\partial X}{\partial y} = \varrho, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial y'} - P\dfrac{\partial X}{\partial y'} = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Schafft man aus diesen die Grössen ϱ und P fort, so erkennt man, dass identisch ist:

$$\frac{\partial X}{\partial y'}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + y'\frac{\partial Y}{\partial y}\right) - \frac{\partial Y}{\partial y'}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + y'\frac{\partial X}{\partial y}\right) \equiv 0.$$

Mit der Benutzung der gebräuchlichen Abkürzung:

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + y'\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y}\right) = [F\Phi]$$

können wir daher den Satz aussprechen:

Satz 8. *Bestimmen die Gleichungen:*

$$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y')$$

eine Berührungsformation, so besteht zwischen den Functionen X *und* Y *die Identität:* $[XY] \equiv 0$.

Es seien andererseits zwei unabhängige Functionen X und Y vorgelegt, welche in der Beziehung $[XY] \equiv 0$ stehen. Dann sind die Gleichungen (29) offenbar mit einander verträglich; sie bestimmen überdies ϱ und P in eindeutiger Weise.

In der That durch Fortschaffung von ϱ ergeben sich aus (29) die beiden mit einander verträglichen Gleichungen:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} + y'\frac{\partial Y}{\partial y} - P\left(\frac{\partial X}{\partial x} + y'\frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y'} - P\frac{\partial X}{\partial y'} = 0.$$

Diese würden jedenfalls nur dann die Grösse P nicht bestimmen, wenn die beiden Ausdrücke:

$$\frac{\partial X}{\partial y'}, \; \frac{\partial X}{\partial x} + y'\frac{\partial X}{\partial y}$$

identisch verschwänden, wenn also X von allen drei Veränderlichen x, y, y' frei wäre; das aber ist ausgeschlossen. Demnach ist P ein-

$X = \varphi(y')$

$Y = \psi(y', y - y'x)$

deutig bestimmt; eine analoge Betrachtung zeigt, dass P nicht identisch verschwindet. Die Grösse ϱ ist eindeutig bestimmt durch

$$\frac{\partial Y}{\partial y} - P\frac{\partial X}{\partial x} = \varrho$$

und offenbar kann ϱ nicht identisch verschwinden; denn aus:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - P\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} - P\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial y'} - P\frac{\partial X}{\partial y'} \equiv 0$$

würde in der bekannten Weise (vgl. S. 6) folgen, dass X und Y nicht von einander unabhängig wären.

Sind P und ϱ so bestimmt, dass die Gleichungen (29) zu Identitäten werden, so ist auch die Gleichung:

$$dY - PdX = \varrho(dy - y'dx)$$

identisch befriedigt und die Gleichungen:

$$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y')$$

stellen daher eine Berührungstransformation dar, wenn nur die drei Functionen X, Y, P von einander unabhängig sind. Das sind sie aber; wäre nämlich $P = \Omega(XY)$, so liesse sich $dY - PdX$ auf die Form $V(XY)dU(XY)$ bringen; es wäre also $dy - y'dx = \frac{V}{\varrho}dU$, was nicht der Fall ist.

Damit haben wir das

Theorem 4. *Stehen zwei von einander unabhängige Functionen X und Y der Veränderlichen x, y, y' in der Beziehung: $[XY] \equiv 0$, so ist es immer, aber nur in einer einzigen Weise möglich, eine solche Function P von x, y, y' anzugeben, dass die Gleichungen:*

$$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y')$$

*eine Berührungstransformation der Ebene xy darstellen. Ist andererseits eine Berührungstransformation durch die Gleichungen: $x_1 = X$, $y_1 = Y$, $y_1' = P$ bestimmt, so ist $[XY] \equiv 0$.**)

Betrachtet man zwei beliebige Gleichungen:

$$x_1 = A(x, y, y'), \quad y_1 = B(x, y, y'), \tag{30}$$

indem man unter A und B unabhängige Functionen ihrer Argumente versteht, so erkennt man leicht, dass dieselben jeder Curve: $y - f(x) = 0$ der Ebene in gewissem Sinne eine andere Curve dieser Ebene zuordnen. In der That, jedem Linienelement x, y, y' der Curve $y - f(x) = 0$ entspricht vermöge der Gleichungen (30) ein gewisser Punkt x_1, y_1; die Punkte, welche

*) Lie, Kurzes Résumé mehrerer neuen Theorien, Verh. d. Ges. d. W. zu Christiania, April 1871 und Zur analytischen Theorie der Berührungstransformationen, dieselben Verhandlungen, Juni 1873.

auf diese Weise den ∞^1 Linienelementen unserer Curve entsprechen, bilden im Allgemeinen eine Curve, welche der Curve: $y - f(x) = 0$ durch die Gleichungen (30) zugeordnet ist.

Wenn die von einander unabhängigen Functionen A und B insbesondere in der Beziehung $[AB] \equiv 0$ stehen, so giebt es nach Theorem 4 stets eine und nur eine Berührungstransformation von der Gestalt:

$$x_1 = A(x, y, y'), \quad y_1 = B(x, y, y'), \quad y_1' = C(x, y, y').$$

Es leuchtet ein, dass diese Berührungstransformation die Curve: $y - f(x) = 0$ gerade in die Curve überführt, welche ihr nach dem Vorstehenden schon durch die beiden Gleichungen (30) zugeordnet ist.

Wir kehren zu dem Falle zurück, dass die Gleichungen (30) ganz beliebig sind und wollen zunächst angeben, in welcher Weise man zu einer vorgelegten Curve: $y - f(x) = 0$ die von den Gleichungen (30) zugeordnete Curve findet.

Die ∞^1 Linienelemente der Curve: $y - f(x) = 0$ werden nach S. 12 durch die Gleichungen:

$$y - f(x) = 0, \quad y' - f'(x) = 0$$

dargestellt. Der Ort der ∞^1 Punkte x_1, y_1, welche vermöge (30) diesen ∞^1 Linienelementen entsprechen, ist die gesuchte Curve; die Gleichung dieser Curve erhalten wir daher, wenn wir x aus den beiden Gleichungen:

$$x_1 = A\big(x, f(x), f'(x)\big), \quad y_1 = B\big(x, f(x), f'(x)\big) \tag{31}$$

fortschaffen. Im Allgemeinen wird sich die betreffende Gleichung auf die Form: $y_1 - f_1(x_1) = 0$ bringen lassen.

Jedem Werthe von x entspricht in Folge der Gleichungen (31) ein gewisser Punkt der Curve: $y_1 - f_1(x_1) = 0$. In diesem Punkte hat der Differentialquotient:

$$y_1' = \frac{dy_1}{dx_1} = f_1'(x_1)$$

den Werth:

$$y_1' = \frac{\frac{dB}{dx}}{\frac{dA}{dx}} = \frac{\frac{\partial B}{\partial x} + y'\frac{\partial B}{\partial y} + y''\frac{\partial B}{\partial y'}}{\frac{\partial A}{\partial x} + y'\frac{\partial A}{\partial y} + y''\frac{\partial A}{\partial y'}}, \tag{32}$$

wo y'' für $\frac{dy'}{dx}$ geschrieben ist und wo man sich rechter Hand die Substitution:

$$y = f(x), \quad y' = f'(x), \quad y'' = f''(x)$$

ausgeführt zu denken hat.

Wir sehen hieraus, dass y_1' im Allgemeinen keine Function von x, y, y' allein ist, sondern dass es auch von der Grösse y'' abhängt. Geometrisch betrachtet kommt das darauf hinaus: wenn zwei Curven: $y - f(x) = 0$ und $y - \varphi(x) = 0$ sich in einem gemeinsamen Punkte $\bar{x}, \bar{y}$ berühren, wenn sie also ein Linienelement $\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'$ gemein haben, so haben die beiden Curven: $y_1 - f_1(x_1) = 0$ und $y_1 - \varphi_1(x_1) = 0$, welche ihnen vermöge (30) entsprechen, zwar den Punkt:

$$\bar{x}_1 = A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'), \quad \bar{y}_1 = B(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}')$$

gemein, aber sie haben in diesem Punkte im Allgemeinen verschiedene Tangenten. Nur dann, wenn die beiden Curven: $y - f(x) = 0$, $y - \varphi(x) = 0$ sich im Punkte: $\bar{x}, \bar{y}$ osculiren, ist es von vornherein sicher, dass die entsprechenden Curven: $y_1 - f_1(x_1) = 0$, $y_1 - \varphi_1(x_1) = 0$ einander im Punkte: $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ berühren.

Wie müssen nun die Functionen A und B beschaffen sein, damit die Gleichungen:

$$(30) \qquad x_1 = A(x, y, y'), \qquad y_1 = B(x, y, y')$$

zwei solchen Curven, die sich einfach berühren, jedenfalls im Allgemeinen zwei sich berührende Curven zuordnen? anders ausgesprochen: unter welchen Umständen wird der Ausdruck (31) für y_1' eine Function von x, y, y' allein und von y'' frei? Nothwendig und hinreichend ist offenbar, dass A und B der Gleichung:

$$\frac{\frac{\partial B}{\partial x} + y' \frac{\partial B}{\partial y}}{\frac{\partial A}{\partial x} + y' \frac{\partial A}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial B}{\partial y'}}{\frac{\partial A}{\partial y'}}$$

oder der äquivalenten:

$$\frac{\partial A}{\partial y'}\left(\frac{\partial B}{\partial x} + y' \frac{\partial B}{\partial y}\right) - \frac{\partial B}{\partial y'}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + y' \frac{\partial A}{\partial y}\right) = [AB] = 0$$

identisch genügen. Also tritt der betreffende Fall dann und nur dann ein, wenn die Gleichungen (30) sich durch Hinzufügung einer Gleichung von der Form:

$$y_1' = C(x, y, y')$$

zu einer Berührungstransformation vervollständigen lassen.

Dieses Ergebniss sprechen wir aus, wie folgt:

Satz 9. *Sind A und B unabhängige Functionen von x, y, y', so ordnen die Gleichungen:*

$$(30) \qquad x_1 = A(x, y, y'), \qquad y_1 = B(x, y, y')$$

den ∞^1 Linienelementen einer Curve im Allgemeinen ∞^1 Punkte x_1, y_1 zu, welche eine neue Curve bilden und es entspricht auf diese Weise jeder Curve der Ebene eine neue Curve. Berühren sich zwei gegebene Curven, so berühren sich die beiden ihnen entsprechenden Curven im Allgemeinen nicht; sie berühren sich dann und nur dann immer, wenn der Ausdruck $[AB]$ identisch verschwindet; in diesem Falle werden alle Curven der Ebene in die ihnen vermöge (30) *zugeordneten durch eine Berührungstransformation übergeführt.*

Zwischen den Functionen X, Y und P einer Berührungstransformation:

$$(33) \quad x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y')$$

der Ebene xy besteht ausser der Identität: $[X, Y] \equiv 0$ noch eine andere ähnliche Identität, die wir leicht finden können.

Da (33) eine Berührungstransformation ist, so gilt:

$$dY - PdX \equiv \varrho(x, y, y') \cdot (dy - y'dx).$$

Nun aber ist identisch:

$$dY - PdX \equiv d(Y - PX) + XdP$$

also gilt zugleich:

$$d(Y - PX) + XdP \equiv \varrho(x, y, y') \cdot (dy - y'dx),$$

das heisst es müssen auch die Gleichungen:

$$x_2 = -P, \qquad y_2 = Y - PX, \qquad y_2' = X$$

eine Berührungstransformation der Ebene xy darstellen. Nach dem obigen Satze 8, S. 26 ist daher auch:

$$(34) \qquad [P, Y - PX] \equiv 0.$$

Ein paar Anwendungen werden die Fruchtbarkeit dieser Bemerkung erkennen lassen.

Man kann nach allen Berührungstransformationen fragen, welche die Richtung eines jeden Elements ungeändert lassen.

Die betreffenden Transformationen haben offenbar die Form:

$$x_1 = X(x, y, y'), \qquad y_1 = Y(x, y, y'), \qquad y_1' = y'.$$

Aus der Identität (34) folgt nun, dass $Y - PX$ der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$[Pf] = [y'f] = 0$$

in den drei Veränderlichen x, y, y' genügt; da aber von dieser Differentialgleichung zwei unabhängige Lösungen bekannt sind, nämlich: y' und $y - xy'$, so haben wir:

$$Y - PX = y_1 - y_1'x_1 = \Omega(y', y - xy').$$

Setzen wir diesen Werth zusammen mit $P = y'$ in die Gleichung:

$$d(Y - PX) + XdP = \varrho(dy - y'dx)$$

ein, so bekommen wir durch Nullsetzen des Faktors von dy':

$$X = -\frac{\partial}{\partial y'}\,\Omega(y', y - xy').$$

Demnach haben die gesuchten Transformationen die Gestalt:

$$(35) \qquad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{\partial}{\partial y'}\,\Omega(y', y - xy'), \qquad y_1' = y', \\ y_1 = \Omega(y', y - xy') - y' \cdot \dfrac{\partial}{\partial y'}\,\Omega(y', y - xy'). \end{cases}$$

Hier ist die Function Ω vollkommen willkürlich, denn vermöge der Gleichungen (35) wird:

$$dy_1 - y_1'dx_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial y}(dy - y'dx),$$

welche Function seiner Argumente auch das Ω sein mag.

In ganz ähnlicher Weise findet man alle Berührungstransformationen, welche parallele Linienelemente in parallele überführen. Ihre allgemeine Form ist:

nur muss sie $(y - xy')$ wirklich enthalten

$$x_1 = -\frac{\frac{\partial}{\partial y'}\Omega(y',\, y - xy')}{F'(y')}, \qquad y_1' = F(y'),$$

$$y_1 = \Omega(y',\, y - xy') - \frac{F(y')}{F'(y')}\cdot\frac{\partial}{\partial y'}\Omega(y',\, y - xy'),$$

wo $F(y')$ und $\Omega(y', y - xy')$ beliebige Functionen ihrer Argumente bedeuten.

§ 8.

Die im Vorangehenden entwickelte Theorie der Berührungstransformationen einer Ebene ist von Bedeutung für die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen in zwei Veränderlichen.

Zunächst veranlasst die Einführung der Begriffe Linienelement und Element-M_1 zu einer Verallgemeinerung des Problems eine gewöhnliche Differentialgleichung *erster* Ordnung:

$$W(x,\, y,\, y') = 0$$

zu integriren. Wir können nämlich diese Aufgabe offenbar durch die folgende etwas allgemeinere ersetzen: *es sollen alle Element-M_1 gefunden werden, deren Linienelemente x, y, y' die Gleichung $W(x, y, y') = 0$ befriedigen.**)

Für diese Auffassung sind nicht blos Curven als Lösungen der Differentialgleichung $W = 0$ zulässig; es gilt vielmehr auch jeder Punkt, dessen Linienelemente die Gleichung: $W = 0$ erfüllen, als eine Lösung derselben.

Ferner sieht man leicht ein, dass jede bekannte Berührungstransformation eine unbegränzte Anzahl von unmittelbar integrabeln Differentialgleichungen erster Ordnung aufzustellen erlaubt.

Eine Berührungstransformation ist bestimmt durch zwei unabhängige Functionen: $X(x, y, y')$ und $Y(x, y, y')$, welche in der Beziehung: $[X, Y] \equiv 0$ stehen. Es ist nun klar, dass die Gleichungen: $X = a$, $Y = b$ diejenigen Linienelemente x, y, y' definiren, welche von der betreffenden Berührungstransformation in Linienelemente des Punktes: $x_1 = a$, $y_1 = b$ übergeführt werden; diese Linienelemente bilden natürlich eine Element-M_1, folglich haben wir zunächst den

Satz 10. *Sind X und Y solche unabhängige Functionen von x, y, y', welche in der Beziehung: $[XY] \equiv 0$ stehen, so stellen die beiden Gleichungen: $X = a$, $Y = b$ für jedes Werthsystem a, b die Linienelemente einer Element-M_1 dar.*

---

*) Lie, Göttinger Nachrichten, October 1872; vgl. auch die Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1871 und 1874, sowie Math. Ann. Bd. V und IX.

Es sei jetzt irgend eine Differentialgleichung vorgelegt, welche die Form: $Y - \Omega(X) = 0$ besitzt. Dann ist offenbar auch:

$$[Y - \Omega(X),\ X] \equiv 0;$$

also stellen die Gleichungen:

$$Y - \Omega(X) = 0, \qquad X = a$$

für jeden Werth von a eine Element-M_1 dar und zwar eine, deren Linienelemente die Gleichung $Y - \Omega(X) = 0$ befriedigen. Eliminiren wir daher aus den zuletzt geschriebenen Gleichungen die Grösse y', so erhalten wir eine Gleichung zwischen x, y und a, welche für jeden Werth der willkürlichen Constanten a eine Integralcurve der Differentialgleichung: $Y - \Omega(X) = 0$ darstellt, wir erhalten ∞^1 Integralcurven dieser Differentialgleichung und damit eine vollständige Lösung.

Selbstverständlich ist hierbei vorausgesetzt, dass X und also auch Y die Grösse y' enthält, dass also die Berührungstransformation:

$$x_1 = X, \qquad y_1 = Y, \qquad y_1' = \frac{\frac{\partial Y}{\partial y'}}{\frac{\partial X}{\partial y'}}$$

nicht blos eine erweiterte Punkttransformation ist. Mit Rücksicht auf diese Voraussetzung können wir daher den Satz aussprechen:

Satz 11. *Stehen die Functionen $X(x, y, y')$ und $Y(x, y, y')$, welche beide y' wirklich enthalten, in der Beziehung: $[X, Y] \equiv 0$, so ist jede Differentialgleichung von der Form: $Y - \Omega(X) = 0$ ohne Weiteres integrabel; ihre vollständige Lösung wird erhalten, wenn man y' aus den beiden Gleichungen:*

$$Y - \Omega(X) = 0, \qquad X = a$$

fortschafft und a als Integrationsconstante betrachtet.

Der vorstehende Satz hat einen sehr einfachen Sinn: Bei Ausführung der Berührungstransformation:

$$(36) \qquad x_1 = X, \qquad y_1 = Y, \qquad y_1' = \frac{\frac{\partial Y}{\partial y'}}{\frac{\partial X}{\partial y'}}$$

geht die Differentialgleichung: $Y - \Omega(X) = 0$ über in die von y_1' freie Differentialgleichung: $y_1 - \Omega(x_1) = 0$; diese letztere definirt die Schaar der ∞^2 Linienelemente, deren Punkte auf der Curve: $y_1 - \Omega(x_1) = 0$ liegen; es ist daher ohne Weiteres möglich ∞^1 Element-M_1 anzugeben, welche der Gleichung: $y_1 - \Omega(x_1) = 0$ genügen: jeder Punkt der Curve: $y_1 - \Omega(x_1) = 0$ ist eben eine solche Element-M_1. Indem man nun die ∞^1 Curven aufsucht, welche bei der Berührungstransformation (36) in die ∞^1 Punkte der Curve: $y_1 - \Omega(x_1) = 0$

übergehen, findet man die im Satze angegebenen ∞^1 Integralcurven der Differentialgleichung: $Y - \Omega(X) = 0$.

Das Problem eine Differentialgleichung erster Ordnung: $W(x, y, y') = 0$ zu integriren, lässt sich daher dadurch erledigen, dass man eine Berührungstransformation aufsucht, welche die Gleichung: $W(x, y, y') = 0$ auf die Form: $w(x_1, y_1) = 0$ oder, wenn man will, auf die Form: $y_1 = 0$ bringt.

§ 9.

Endlich noch eine Anwendung der Berührungstransformationen auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in x und y.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' = u(x, y, y')$$

hat ∞^2 Integralcurven:

$$U(x, y, a, b) = 0.$$

Nun wissen wir nach S. 19, Satz 6, dass die Gleichung:

$$U(x, y, x_1, y_1) = 0$$

eine gewisse Berührungstransformation der Ebene xy definirt, welche durch Auflösung der Gleichungen:

$$(37)\quad U(x, y, x_1, y_1) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + y' \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x_1} + y_1' \frac{\partial U}{\partial y_1} = 0$$

nach x, y_1, y_1' erhalten wird. Diese Berührungstransformation führt die Curve: $U(x, y, a, b) = 0$ mit den Parametern a, b in den Punkt: $x_1 = a$, $y_1 = b$ über. Also sehen wir:

Zu jeder gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' = u(x, y, y')$$

lässt sich eine Berührungstransformation angeben, welche die ∞^2 Integralcurven dieser Differentialgleichung in die ∞^2 Punkte der Ebene x, y überführt.

Aus den Entwickelungen auf S. 19 f. geht übrigens hervor, dass es ausser der Berührungstransformation (37) noch unbegränzt viele leicht angebbare Berührungstransformationen giebt, welche diese Ueberführung leisten.

Ist nun eine beliebige andere Differentialgleichung zweiter Ordnung vorgelegt, etwa:

$$y'' = v(x, y, y')$$

mit den ∞^2 Integralcurven:

$$V(x, y, a, b) = 0,$$

so können wir sofort eine Berührungstransformation angeben, welche die Punkte der Ebene in die Integralcurven von $y'' = v(x, y, y')$ überführt, wir finden dieselbe, wenn wir die Gleichungen:

$$(38)\quad V(x_2, y_2, x_1, y_1) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} + y_2' \frac{\partial V}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} + y_1' \frac{\partial V}{\partial y_1} = 0$$

nach x_2, y_2, y_2' auflösen.

Wir haben jetzt zwei Berührungstransformationen, von denen die erste die Integralcurven der Gleichung: $y'' = u(x, y, y')$ in die Punkte der Ebene überführt, während die zweite die Punkte der Ebene in die Integralcurven von: $y'' = v(x, y, y')$ verwandelt. Wenden wir diese beiden Berührungstransformationen nach einander an, so erhalten wir nach S. 11 wieder eine Berührungstransformation und zwar offenbar eine, welche die Integralcurven von: $y'' = u(x, y, y')$ in die Integralcurven von: $y'' = v(x, y, y')$ überführt. Da aber jede Differentialgleichung zweiter Ordnung durch ihre ∞^2 Integralcurven vollständig definirt ist, so leuchtet ein, dass die so gefundene Berührungstransformation zugleich die Differentialgleichung: $y'' = u(x, y, y')$ in die Gleichung: $y'' = v(x, y, y')$ verwandelt. Hier kann noch die Berührungstransformation (37) durch jede andere Berührungstransformation ersetzt werden, welche die Integralcurven der Differentialgleichung: $y'' = u(x, y, y')$ in die Punkte der Ebene überführt.

Die Gleichungen der besprochenen Berührungstransformation, welche die Differentialgleichung: $y'' = u(x, y, y')$ in die: $y'' = v(x, y, y')$ überführt, ergeben sich natürlich, wenn man x_1, y_1, y_1' aus (37) und (38) eliminirt und die erhaltenen Gleichungen nach x_2, y_2, y_2' auflöst.

Da die beiden Differentialgleichungen: $y'' = u(x, y, y')$ und $y'' = v(x, y, y')$ vollständig beliebig sind, so haben wir das folgende wichtige

Theorem 5. *Jede gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung: $y'' - \varphi(x, y, y') = 0$ der Ebene lässt sich durch eine Berührungstransformation in jede andere derartige Gleichung überführen; es giebt sogar unbegränzt viele Berührungstransformationen, welche diese Ueberführung leisten*).*

*) Vgl. Lie, Gött. Nachr. 1874, S. 538—539, sowie auch Okt. 1872. Nach den Entwickelungen des Textes, die mit den soeben citirten Noten im Einklange stehen, ist eine Behauptung abzuändern, welche in *Clebsch*'s Vorlesungen über Geometrie, bearbeitet und herausgegeben von *Lindemann* 1876 auf S. 1029 in der Anmerkung aufgestellt ist. Bei dieser Gelegenheit mag daran erinnert werden, dass die Ausführungen über Berührungstransformationen, welche dieses in vieler Beziehung vortreffliche Werk bringt, *nicht* von *Clebsch* herrühren, sondern erst mehrere Jahre nach dessen Tod mit Benutzung der inzwischen entstandenen Literatur abgefasst sind. Obgleich der verdiente Bearbeiter die Sachlage im Wesentlichen richtig dargestellt hat, sind doch durch den nicht zutreffenden *Titel*

Hierin liegt, dass eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung keine Eigenschaft besitzt, welche sich allen Berührungstransformationen gegenüber invariant verhält. Dagegen hat jede gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung: $y''' - w(x, y, y', y'') = 0$ und auch jede von höherer Ordnung derartige Eigenschaften.

Kapitel 2.

Einige Definitionen und allgemeine Sätze.

Wir stellen in diesem Kapitel einige Definitionen zusammen, von welchen in den nachfolgenden Untersuchungen vielfach Gebrauch gemacht wird. Dazu kommen, ohne Beweis, einige bekannte Sätze, welche in der Lehre von den Differentialgleichungen häufig Anwendung finden und welche auch im Folgenden fortwährend benutzt werden.

§ 10.

Wenn wir ein Gleichungensystem:

(1) $$\Phi_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Phi_q(x_1 \cdots x_n) = 0$$

zwischen gewissen Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ betrachten, setzen wir wie im ersten Abschnitt (vgl. daselbst S. 108) jederzeit voraus, *dass die q-reihigen Determinanten der Matrix:*

(2) $$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \Phi_q}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_q}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

nicht alle vermöge des Gleichungensystems (1) *verschwinden.* Genügt ein Gleichungensystem dieser Forderung, so enthält es gerade q von einander unabhängige Gleichungen; wir bezeichnen es daher auch wohl kurz als *q-gliedrig.* Gleichungensysteme, welche unsrer Forderung nicht genügen, schliessen wir im Allgemeinen von der Untersuchung aus.

Es möge zum Beispiel die Determinante:

$$\sum \pm \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \Phi_q}{\partial x_q}$$

nicht vermöge (1) verschwinden. Dann können die Differentialgleichungen:

---

des Werkes mehrfache Missverständnisse hervorgerufen worden. Insbesondere ist es *unrichtig,* wenn einige Verfasser *Clebsch* den wichtigen Begriff Element-Mannigfaltigkeit zuschreiben (vgl. S. 14, die Anmerkung).

$$\sum_1^n {}_i \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} dx_i = 0, \cdots \sum_1^n {}_i \frac{\partial \Phi_q}{\partial x_i} dx_i = 0$$

nach $dx_1 \cdots dx_q$ aufgelöst werden, und die Coefficienten in diesen Auflösungen verhalten sich für die Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ von (1) im Allgemeinen regulär. Daraus aber folgt bekanntlich, dass sich die endlichen Gleichungen (1) nach den Veränderlichen $x_1 \cdots x_q$ auflösen lassen. Ist:

$$x_1 = \varphi_1(x_{q+1} \cdots x_n), \cdots x_q = \varphi_q(x_{q+1} \cdots x_n)$$

diese Auflösung, so bestehen die Gleichungen:

$$\Phi_1(\varphi_1 \cdots \varphi_q, x_{q+1} \cdots x_n) = 0, \cdots \Phi_q(\varphi_1 \cdots \varphi_q, x_{q+1} \cdots x_n) = 0$$

identisch für alle Werthe von $x_{q+1} \cdots x_n$.

Wird ein Gleichungensystem:

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_m(x_1 \cdots x_n) = 0 \qquad (m \leq q)$$

von allen Werthsystemen $x_1 \cdots x_n$ befriedigt, welche dem q-gliedrigen Gleichungensysteme $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_q = 0$ genügen, so sagen wir, dass es vermöge dieses letzteren Gleichungensystems besteht oder auch dass es eine Folge desselben ist.

Zwei q-gliedrige Gleichungensysteme: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_q = 0$ und $\Psi_1 = 0, \cdots \Psi_q = 0$ heissen *äquivalent*, wenn jedes Werthsystem $x_1 \cdots x_n$, welches dem einen genügt, auch das andere befriedigt, wenn also jedes der beiden Gleichungensysteme eine Folge des andern ist. Zur Aequivalenz ist nothwendig und hinreichend, dass *eine* Auflösung: $x_1 = \varphi_1, \cdots x_q = \varphi_q$ des ersten Gleichungensystems das zweite identisch befriedigt; ist diese Bedingung erfüllt, so befriedigt überhaupt jede Auflösung eines jeden der beiden Systeme auch das andere identisch; man kann daher von zwei äquivalenten Gleichungensystemen das eine durch das andere ersetzen.

Genügt ein vorgelegtes Gleichungensystem:

$$(1) \qquad \Phi_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Phi_q(x_1 \cdots x_n) = 0$$

in den n Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ der Forderung, dass nicht alle q-reihigen Determinanten der zugehörigen Matrix (2) vermöge desselben verschwinden sollen, so ist auch das *erweiterte* Gleichungensystem:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Phi_q(x_1 \cdots x_n) = 0 \\ \sum_1^n {}_i \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} dx_i = 0, \cdots \sum_1^n {}_i \frac{\partial \Phi_q}{\partial x_i} dx_i = 0 \end{array} \right.$$

in den $2n$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $dx_1 \cdots dx_n$ so beschaffen, dass vermöge desselben nicht alle $2q$-reihigen Determinanten der zugehörigen

Matrix verschwinden; unter diesen $2q$-reihigen Determinanten befinden sich ja die Quadrate der q-reihigen Determinanten der Matrix (2).

Sind die beiden Gleichungensysteme: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_q = 0$ und $\Psi_1 = 0, \cdots \Psi_q = 0$ *in den Veränderlichen* $x_1 \cdots x_n$ *äquivalent, so sind auch die erweiterten Gleichungensysteme:*

$$(3) \quad \Phi_1 = 0, \cdots \Phi_q = 0, \quad \sum_1^n i \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} dx_i = 0, \cdots \sum_1^n i \frac{\partial \Phi_q}{\partial x_i} dx_i = 0$$

und:

$$(3') \quad \Psi_1 = 0, \cdots \Psi_q = 0, \quad \sum_1^n i \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i} dx_i = 0, \cdots \sum_1^n i \frac{\partial \Psi_q}{\partial x_i} dx_i = 0$$

in den $2n$ *Veränderlichen:* $x_1 \cdots x_n$, $dx_1 \cdots dx_n$ *mit einander äquivalent;* mit andern Worten: *unter der gemachten Voraussetzung befriedigt jedes Werthsystem:* $x_1 \cdots x_n$, $dx_1 \cdots dx_n$, *welches* (3) *erfüllt auch* (3′) *und umgekehrt.*

Wird daher das Gleichungensystem (3) nach Ausführung der Substitution:

$$(4) \qquad dx_1 = \xi_1(x_1 \cdots x_n) \cdot dt, \cdots dx_n = \xi_n(x_1 \cdots x_n) \cdot dt$$

von allen Werthsystemen $x_1 \cdots x_n$ befriedigt, welche die Gleichungen: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_q = 0$ erfüllen, so wird das Gleichungensystem (3′) seinerseits nach Ausführung der Substitution (4) von allen Werthsystemen $x_1 \cdots x_n$ befriedigt, welche $\Psi_1 = 0, \cdots \Psi_q = 0$ erfüllen. Das können wir auch so ausdrücken:

Satz 1. *Sind die beiden q-gliedrigen Gleichungensysteme:* $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_q = 0$ *und:* $\Psi_1 = 0, \cdots \Psi_q = 0$ *in den Veränderlichen* $x_1 \cdots x_n$ *mit einander äquivalent und bestehen die q Gleichungen:*

$$\sum_1^n i \, \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x_i} = 0 \qquad (\varkappa = 1 \cdots q)$$

sämmtlich vermöge: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_q = 0$, *so bestehen auch die q Gleichungen:*

$$\sum_1^n i \, \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial \Psi_\varkappa}{\partial x_i} = 0 \qquad (\varkappa = 1 \cdots q)$$

sämmtlich vermöge: $\Psi_1 = 0, \cdots \Psi_q = 0$.

Von diesem selbstverständlichen Satze werden wir im Folgenden wichtige Anwendungen machen, doch wollen wir zu grösserer Bequemlichkeit den Satz noch in eine andere Form kleiden. Dazu gelangen wir durch Einführung des *Ausdrucks: „infinitesimale Transformation“*.

Wir sagen (ebenso wie im ersten Abschnitt S. 53 ff.), dass n Gleichungen von der Form:

$$dx_1 = \xi_1(x_1 \cdots x_n) \cdot dt, \cdots dx_n = \xi_n(x_1 \cdots x_n) \cdot dt,$$

in denen dt irgend eine unendlich kleine Grösse bezeichnet, eine infinitesimale Transformation der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ bestimmen.

Wir machen dabei ausdrücklich darauf aufmerksam, dass wir in dieser ersten Abtheilung des vorliegenden Abschnitts den *Ausdruck* „infinitesimale Transformation“ *nur zur Abkürzung der Sprache* benutzen. Der Zusammenhang des *Begriffes* „infinitesimale Transformation“ mit dem im ersten Abschnitte eingeführten Begriffe der eingliedrigen Gruppe wird erst in der dritten Abtheilung dieses Abschnitts als bekannt vorausgesetzt.

Ferner sagen wir (in Uebereinstimmung mit dem ersten Abschnitt): *Das q-gliedrige Gleichungensystem:*

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \quad \cdots \Omega_q(x_1 \cdots x_n) = 0$$

gestattet die infinitesimale Transformation:

$$dx_1 = \xi_1(x_1 \cdots x_n) \, . \, dt, \quad \cdots dx_n = \xi_n(x_1 \cdots x_n) \, . \, dt,$$

wenn es so beschaffen ist, dass die q Gleichungen

$$\xi_1(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial \Omega_\varkappa}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial \Omega_\varkappa}{\partial x_n} = 0$$
$$(\varkappa = 1 \cdots q)$$

sämmtlich vermöge: $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ bestehen. Für gestatten brauchen wir auch wohl das Wort: *zulassen.*

Bei Benutzung dieser Ausdrucksweisen lässt sich der oben angegebene Satz folgendermassen aussprechen:

Satz 2. *Gestattet ein q-gliedriges Gleichungensystem: $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ die infinitesimale Transformation:*

$$dx_1 = \xi_1(x_1 \cdots x_n) \, . \, dt, \quad \cdots dx_n = \xi_n(x_1 \cdots x_n) \, . \, dt,$$

so gestattet auch jedes äquivalente Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_q = 0$ diese infinitesimale Transformation.

In vielen Fällen wäre es umständlich, die n Gleichungen:

$$(4) \qquad dx_1 = \xi_1(x_1 \cdots x_n) \, . \, dt, \quad \cdots dx_n = \xi_n(x_1 \cdots x_n) \, . \, dt,$$

durch welche eine infinitesimale Transformation bestimmt ist, wirklich hinzuschreiben. Diese Unbequemlichkeit vermeiden wir wie in Abschnitt I. dadurch, dass wir für die infinitesimale Transformation (4) ein Symbol einführen.

Verstehen wir nämlich unter f eine willkürliche Function von $x_1 \cdots x_n$, so können wir aus dem Ausdruck:

$$\xi_1(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_n} = Xf$$

die n Functionen $\xi_1 \cdots \xi_n$ ohne Weiteres ablesen, so dass der eine

Ausdruck Xf die n Gleichungen (4) vollständig bestimmt und in Folge dessen auch vollständig ersetzt. Deshalb führen wir wie in Abschnitt I. den Ausdruck Xf als Symbol für die infinitesimale Transformation (4) ein und reden geradezu von der infinitesimalen Transformation: Xf.

Jetzt können wir sagen: *Das q-gliedrige Gleichungensystem: $\Omega_1 = 0$, $\cdots \Omega_q = 0$ gestattet die infinitesimale Transformation Xf, wenn die q Ausdrücke: $X\Omega_1, \cdots X\Omega_q$ vermöge: $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ verschwinden.*

Wir wollen zur Erläuterung des eben Gesagten den Fall $n = 3$ etwas näher betrachten.

Deuten wir x_1, x_2, x_3 als rechtwinklige Coordinaten eines dreifach ausgedehnten Raumes, so *ordnet die infinitesimale Transformation:*

(5) $$dx_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3) \cdot dt \qquad (i = 1, 2, 3)$$

jedem Punkte x_1, x_2, x_3, für welchen ξ_1, ξ_2, ξ_3 nicht sämmtlich verschwinden, eine ganz bestimmte Richtung: $dx_1 : dx_2 : dx_3$ zu.

Gestattet nun die Gleichung: $\Omega(x_1, x_2, x_3) = 0$ die infinitesimale Transformation (5), *so verschwinden entweder ξ_1, ξ_2, ξ_3 sämmtlich für alle Punkte der Fläche: $\Omega(x_1, x_2, x_3) = 0$ oder diese Fläche wird in jedem ihrer Punkte von der Richtung: $dx_1 : dx_2 : dx_3$ berührt, welche die infinitesimale Transformation* (5) *dem betreffenden Punkte zuordnet. In dieser geometrischen Deutung des Umstandes, dass die Gleichung: $\Omega = 0$ die infinitesimale Transformation* (5) *gestattet, liegt zugleich der obige Satz, dass auch jede mit $\Omega = 0$ äquivalente Gleichung die infinitesimale Transformation* (5) *zulässt.*

Gestattet ein zweigliedriges Gleichungensystem:

$$\Omega_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad \Omega_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

die infinitesimale Transformation (5), so verschwinden entweder ξ_1, ξ_2, ξ_3 für alle Punkte der Curve: $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ oder die Richtungen: $dx_1 : dx_2 : dx_3$, welche die infinitesimale Transformation (5) den Punkten der Curve: $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ zuordnen, fallen stets mit den zugehörigen Tangenten der Curve zusammen.

Gestattet endlich ein dreigliedriges Gleichungensystem:

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \qquad x_3 = a_3$$

die infinitesimale Transformation (5), so verschwinden ξ_1, ξ_2, ξ_3 für den Punkt: $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $x_3 = a_3$ sämmtlich.

§ 11.

Eine Gleichung von der Form:

(6) $$\alpha_1(x_1 \cdots x_n) dx_1 + \cdots + \alpha_n(x_1 \cdots x_n) dx_n = 0$$

nennen wir eine *Pfaffsche Gleichung*, ihre linke Seite bezeichnen wir als einen *Pfaffschen Ausdruck.*

Führt man in die Pfaffsche Gleichung (6) vermöge einer Transformation:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n) \qquad (i = 1 \cdots n).$$

an Stelle der x die neuen Veränderlichen x' ein, so erhält man in den x' eine neue Pfaffsche Gleichung:

$$\bar{\alpha}_1(x_1' \cdots x_n')\, dx_1' + \cdots + \bar{\alpha}_n(x_1' \cdots x_n')\, dx_n' = 0.$$

Es kann vorkommen, dass diese Gleichung dieselbe Form besitzt wie die ursprüngliche, indem sie sich von der Gleichung:

$$\alpha_1(x_1' \cdots x_n')\, dx_1' + \cdots + \alpha_n(x_1' \cdots x_n')\, dx_n' = 0$$

nur durch einen Faktor unterscheidet, der eine Function von $x_1' \cdots x_n'$ ist. In diesem Falle sagen wir, dass die Pfaffsche Gleichung (6) bei der betreffenden Transformation *invariant bleibt*, dass sie diese Transformation *gestattet* oder *zulässt.*

Nothwendige und hinreichende Bedingung für die Invarianz der Pfaffschen *Gleichung* (6) bei der Transformation:

$$x_1' = f_1, \cdots x_n' = f_n$$

ist daher, dass eine Gleichung von der Form:

$$\sum_1^n {}_i\, \alpha_i(x_1' \cdots x_n')\, dx_i' = \varrho \sum_1^n {}_i\, \alpha_i(x_1 \cdots x_n)\, dx_i$$

identisch besteht, in welcher ϱ eine Function von $x_1 \cdots x_n$ bezeichnet. Soll insbesondere der Pfaffsche *Ausdruck:* $\Sigma \alpha_i dx_i$ invariant bleiben, so muss die Function ϱ den speciellen Werth 1 haben.

Wird die Pfaffsche Gleichung:

$$(6) \qquad \alpha_1(x_1 \cdots x_n)\, dx_1 + \cdots + \alpha_n(x_1 \cdots x_n)\, dx_n = 0$$

von allen Werthsystemen $x_1 \cdots x_n$, $dx_1 \cdots dx_n$ befriedigt, welche sowohl dem Gleichungensystem:

$$(7) \qquad \Phi_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Phi_q(x_1 \cdots x_n) = 0$$

genügen als auch dem daraus durch Differentiation entstandenen:

$$(7') \qquad \sum_1^n {}_i\, \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} dx_i = 0, \cdots \sum_1^n {}_i\, \frac{\partial \Phi_q}{\partial x_i} dx_i = 0,$$

besteht also mit andern Worten die Pfaffsche Gleichung (6) vermöge der vereinigten Gleichungen (7) und (7′), so sagen wir, *dass das Gleichungensystem:* $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_q = 0$ *die Pfaffsche Gleichung* (6) *erfüllt* oder auch dass es dieselbe *befriedigt*, dass es *ihr genügt.*

In dieser Definition liegt, dass auch jedes mit (7) äquivalente Gleichungensystem die Pfaffsche Gleichung (6) erfüllt, sobald das Gleichungensystem (7) dies thut. Ist daher:

$$x_1 - \varphi_1(x_{q+1} \cdots x_n) = 0, \cdots x_q - \varphi_q(x_{q+1} \cdots x_n) = 0$$

irgend eine aufgelöste Form von (7), so wird (7) der Pfaffschen Gleichung (6) dann und nur dann genügen, wenn der Ausdruck:

$$\alpha_1(x_1 \cdots x_n)\, dx_1 + \cdots + \alpha_n(x_1 \cdots x_n)\, dx_n$$

bei der Substitution:

$$x_1 = \varphi_1, \cdots x_q = \varphi_q, \quad dx_1 = \sum_{q+1}^{n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\varkappa}\, dx_\varkappa, \cdots dx_q = \sum_{q+1}^{n} \frac{\partial \varphi_q}{\partial x_\varkappa}\, dx_\varkappa$$

für alle Werthe von $x_{q+1} \cdots x_n$, $dx_{q+1} \cdots dx_n$ identisch verschwindet.

Ferner überzeugt man sich leicht, dass der folgende Satz gilt:

Führt man in ein Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_q = 0$, *welches die Pfaffsche Gleichung:* $\alpha_1 dx_1 + \cdots + \alpha_n dx_n = 0$ *erfüllt, an Stelle von* $x_1 \cdots x_n$ *neue Veränderliche* $x_1' \cdots x_n'$ *ein, so befriedigt das entstehende Gleichungensystem in* $x_1' \cdots x_n'$ *diejenige Pfaffsche Gleichung, welche aus:* $\alpha_1 dx_1 + \cdots + \alpha_n dx_n = 0$ *durch Einführung der neuen Veränderlichen erhalten wird.*

Erfüllt das Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_q = 0$ die Pfaffsche Gleichung: $\alpha_1 dx_1 + \cdots + \alpha_n dx_n = 0$, so gehören zu jedem Werthsystem $x_1 \cdots x_n$, welches $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_q = 0$ befriedigt, q solche Zahlen $\lambda_1 \cdots \lambda_q$, dass für das betreffende Werthsystem $x_1 \cdots x_n$ die Gleichung:

$$\sum_{1}^{n} \alpha_i(x)\, dx_i = \lambda_1 \sum_{1}^{n} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i}\, dx_i + \cdots + \lambda_q \sum_{1}^{n} \frac{\partial \Phi_q}{\partial x_i}\, dx_i$$

erfüllt ist, welche Werthe man auch den $dx_1 \cdots dx_n$ ertheilen mag. Die eben geschriebene Gleichung zerfällt offenbar in die folgenden n:

$$\alpha_i(x) = \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_q \frac{\partial \Phi_q}{\partial x_i} \qquad (i = 1 \cdots n);$$

eliminirt man aus diesen die q Grössen $\lambda_1 \cdots \lambda_q$, so erhält man lauter Gleichungen, die für alle Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ erfüllt sind, welche: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_q = 0$ befriedigen, also lauter Gleichungen, die aus dem Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_q = 0$ folgen.

Die $n + s$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_s$ seien durch $m + q$ unabhängige Relationen verknüpft, welche nach gerade m von den y auflösbar sind und welche daher gerade q unabhängige Relationen zwischen den x allein liefern, so dass die betreffenden $m+q$ Relationen auf die Form gebracht werden können:

$$(8)\quad \begin{cases} y_1 - \omega_1(y_{m+1}\cdots y_s,\, x_1\cdots x_n) = 0, \;\cdots\; y_m - \omega_m(y_{m+1}\cdots y_s,\, x_1\cdots x_n) = 0 \\ \Omega_1(x_1\cdots x_n) = 0, \;\cdots\; \Omega_q(x_1\cdots x_n) = 0. \end{cases}$$

Unter diesen Voraussetzungen sind auch die $n+s$ Differentiale: $dx_1\cdots dx_n$, $dy_1\cdots dy_s$ gerade durch $m+q$ unabhängige Relationen verknüpft, welche sich in der folgenden Form darstellen lassen:

$$(8')\quad \begin{cases} dy_1 - d\omega_1 = 0, \;\cdots\; dy_m - d\omega_m = 0 \\ \sum_1^n i \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_i}\, dx_i = 0, \;\cdots\; \sum_1^n i \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_i}\, dx_i = 0, \end{cases}$$

also aufgelöst nach m von den dy, während q unabhängige unter ihnen von den dy frei sind und nur die dx enthalten.

Erfüllt nun das Gleichungensystem (8) irgend eine von den dy freie Pfaffsche Gleichung:

$$(9)\quad \alpha_1(x_1\cdots x_n,\, y_1\cdots y_s)\, dx_1 + \cdots + \alpha_n(x_1\cdots x_n,\, y_1\cdots y_s)\, dx_n = 0,$$

so besteht nach dem Früheren die Gleichung (9) vermöge der vereinigten Gleichungen (8) und (8'). In unserem Falle muss aber (9) augenscheinlich schon vermöge der vereinigten Gleichungen (8) und

$$(8'')\quad \sum_1^n i \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_i}\, dx_i = 0, \;\cdots\; \sum_1^n i \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_i}\, dx_i = 0$$

bestehen. Folglich müssen zu jedem Werthsysteme $x_1\cdots x_n$, $y_1\cdots y_s$, welches das Gleichungensystem (8) befriedigt, q solche Zahlen $\lambda_1\cdots\lambda_q$ gehören, dass die Gleichung

$$\sum_1^n i\, \alpha_i(x, y) dx_i = \lambda_1 \sum_1^n i \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} dx_i + \cdots + \lambda_q \sum_1^n i \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_i} dx_i$$

für das betreffende Werthsystem erfüllt ist, welche Werthe man auch den dx ertheilen mag.

Die letzte Gleichung zerfällt offenbar in die n folgenden:

$$\alpha_i(x, y) = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_q \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_i} \qquad (i = 1\cdots n).$$

Eliminirt man aus diesen die Grössen $\lambda_1\cdots\lambda_q$, so muss man lauter Gleichungen erhalten, die für alle Werthsysteme $x_1\cdots x_n$, $y_1\cdots y_s$ befriedigt sind, welche (8) *genügen, also lauter Gleichungen, die eine Folge des Gleichungensystems* (8) *sind.*

Es ist nun leicht zu erkennen, dass *jedes Gleichungensystem in den Veränderlichen $x_1\cdots x_n$, $y_1\cdots y_s$, welches die Pfaffsche Gleichung:*

(9) $\alpha_1(x_1 \cdots x_n,\ y_1 \cdots y_s)dx_1 + \cdots + \alpha_n(x_1 \cdots x_n,\ y_1 \cdots y_s)dx_n = 0$

befriedigt, entweder die n Gleichungen:

(10) $$\alpha_1(x, y) = 0, \cdots \alpha_n(x, y) = 0$$

umfasst oder eine Relation zwischen $x_1 \cdots x_n$ allein liefert. Ergiebt nämlich das betreffende Gleichungsystem keine Relation zwischen $x_1 \cdots x_n$ allein, so sind auch die Differentiale: $dx_1 \cdots dx_n$ unter einander durch keine Relation verknüpft; das Gleichungensystem kann daher die Pfaffsche Gleichung (9) nur dann befriedigen, wenn die n Functionen: $\alpha_1(x, y) \cdots \alpha_n(x, y)$ vermöge desselben verschwinden. Das kann natürlich nur dann eintreten, wenn es überhaupt Werthsysteme x, y giebt, welche alle n Functionen α zum Verschwinden bringen.

Fügt man zu den Gleichungen (10) beliebige weitere Gleichungen: $W_1(x, y) = 0$, $W_2(x, y) = 0, \cdots$ hinzu, die unter einander und mit den Gleichungen (10) verträglich sind, so erhält man immer ein Gleichungensystem:

$$\alpha_1 = 0, \cdots \alpha_n = 0, \quad W_1 = 0, \quad W_2 = 0, \cdots,$$

welches die Pfaffsche Gleichung (9) erfüllt.

Wählt man andrerseits q ganz beliebige unabhängige Gleichungen zwischen den x:

(11) $$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_q(x_1 \cdots x_n) = 0$$

und fügt man zu diesen die aus

(12) $$\alpha_i(x, y) = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_q \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_i} \qquad (i = 1 \cdots n)$$

durch Fortschaffung der λ entstehenden unabhängigen Gleichungen:

$$U_1(x, y) = 0, \cdots U_l(x, y) = 0,$$

so bekommt man jedesmal, wenn die Gleichungen (11) *und* (12) *mit einander verträglich sind, ein Gleichungensystem*

(13) $$\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0, \quad U_1 = 0, \cdots U_l = 0,$$

welches die Pfaffsche Gleichung (9) *erfüllt.* Zu bemerken ist dabei, dass das Gleichungensystem (13) keineswegs immer n unabhängige Gleichungen enthält, und dass andererseits die Gleichungen: $U_1 = 0, \cdots U_l = 0$ sehr gut neue Relationen zwischen den x allein nach sich ziehen können.

Fügt man endlich zu den Gleichungen (11) beliebig viele weitere Gleichungen: $V_1(x, y) = 0$, $V_2(x, y) = 0, \cdots$ hinzu, die unter einander und mit (13) verträglich sind, so erfüllt das entstehende Gleichungensystem:

$\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0, \quad U_1 = 0, \cdots U_l = 0, \quad V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \cdots$ wiederum die Pfaffsche Gleichung (9).

Es wäre leicht nachzuweisen, dass auf dem angegebenen Wege *alle* Gleichungensysteme erhalten werden, welche die Pfaffsche Gleichung (9) erfüllen. Jedoch ist wohl zu beachten, dass es im Allgemeinen nicht möglich ist, ohne Integration alle *kleinsten* Gleichungensysteme dieser Art auszuscheiden. Wendet man z. B. das geschilderte Verfahren auf die allgemeine Pfaffsche Gleichung:

$$X_1(x_1 \cdots x_n)\, dx_1 + \cdots + X_n(x_1 \cdots x_n)\, dx_n = 0$$

an, so haben die Gleichungensysteme, welche man findet, im Allgemeinen die triviale Form:

$$x_1 = \text{Const.}, \cdots x_n = \text{Const.}$$

Kapitel 3.

Die Berührungstransformationen des gewöhnlichen Raumes.

Um zu den Berührungstransformationen des gewöhnlichen Raumes zu gelangen, verfahren wir ganz ähnlich wie in Kapitel 1, bei den Berührungstransformationen der Ebene.

§ 12.

In der Transformation:

(1) $\quad x_1 = X(x, y, z), \quad y_1 = Y(x, y, z), \quad z_1 = Z(x, y, z)$

deuten wir die Grössen x, y, z als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes des dreifach ausgedehnten Raumes, die Grössen x_1, y_1, z_1 als rechtwinklige Coordinaten eines zweiten Punktes, und zwar benutzen wir beide Male dasselbe Coordinatensystem.

Für diese Auffassung erscheint die Transformation (1) als eine Operation, welche jedem Punkte des Raumes eine neue Lage ertheilt: den Punkt mit den Coordinaten x, y, z führt sie in den Punkt über, welcher die Coordinaten x_1, y_1, z_1 besitzt.

Die Punkte einer Fläche: $z - \varphi(x, y) = 0$ gehen bei der Transformation (1) in Punkte über, welche ihrerseits eine Fläche bilden; wir können daher sagen, dass unsere Transformation jede Fläche: $z - \varphi(x, y) = 0$ in eine neue Fläche überführt. Die Gleichung dieser neuen Fläche ergiebt sich, wenn man x, y, z mit Hülfe von (1) aus: $z - \varphi(x, y) = 0$ fortschafft; sie kann offenbar im Allgemeinen — auf diesen Fall beschränken wir uns hier — die analoge Form:

$$z_1 - \varphi_1(x_1, y_1) = 0$$

erhalten.

Zu jedem Punkte x, y, z der Fläche: $z - \varphi(x, y) = 0$ gehören gewisse Werthe der partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q;$$

zu dem entsprechenden Punkte: $x_1 = X$, $y_1 = Y$, $z_1 = Z$ der transformirten Fläche: $z_1 - \varphi_1(x_1, y_1) = 0$ gehören ebenso gewisse Werthe der Differentialquotienten:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y_1} = q_1.$$

Wir werden den analytischen Zusammenhang zwischen den Grössen p_1, q_1 und p, q entwickeln.

Verstehen wir unter $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ einen beliebigen, dem Punkte x, y, z unendlich benachbarten Punkt der Fläche: $z - \varphi = 0$, so gilt die Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$, und für den entsprechenden Punkt: $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$, $z_1 + dz_1$ der Fläche: $z_1 - \varphi_1 = 0$ haben wir ebenso: $dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = 0$. Drücken wir hierin x_1, y_1, z_1 vermöge (1) durch x, y, z aus, so ergiebt sich:

$$dZ - p_1 dX - q_1 dY = 0$$

oder ausführlicher:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - p_1 \frac{\partial X}{\partial x} - q_1 \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - p_1 \frac{\partial X}{\partial y} - q_1 \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dy +$$
$$+ \left(\frac{\partial Z}{\partial z} - p_1 \frac{\partial X}{\partial z} - q_1 \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dz = 0.$$

Nun aber sollte $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ ein beliebiger dem Punkte x, y, z unendlich benachbarter Punkt der Fläche: $z - \varphi = 0$ sein; es sind also dx, dy, dz nur der Bedingung: $dz - pdx - qdy = 0$ unterworfen, sonst aber vollständig willkürlich. Folglich muss die eben gefundene Relation zwischen dx, dy, dz die Form: $dz - pdx - qdy = 0$ erhalten können, dass heisst, es muss eine Grösse ϱ geben von solcher Beschaffenheit, dass die Gleichung:

$$dZ - p_1 dX - q_1 dY = \varrho\,(dz - pdx - qdy)$$

für alle Werthe von dx, dy, dz besteht.

Vergleichen wir hier die Coefficienten von dx, dy, dz auf beiden Seiten, so erhalten wir:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial z} - p_1 \dfrac{\partial X}{\partial z} - q_1 \dfrac{\partial Y}{\partial z} = \varrho \\ \dfrac{\partial Z}{\partial x} - p_1 \dfrac{\partial X}{\partial x} - q_1 \dfrac{\partial Y}{\partial x} = -\varrho p \\ \dfrac{\partial Z}{\partial y} - p_1 \dfrac{\partial X}{\partial y} - q_1 \dfrac{\partial Y}{\partial y} = -\varrho q, \end{cases}$$

mithin durch Elimination von ϱ:

$$(3)\qquad \begin{cases} p_1\left(\frac{\partial X}{\partial x}+p\frac{\partial X}{\partial z}\right)+q_1\left(\frac{\partial Y}{\partial x}+p\frac{\partial Y}{\partial z}\right)=\frac{\partial Z}{\partial x}+p\frac{\partial Z}{\partial z} \\ p_1\left(\frac{\partial X}{\partial y}+q\frac{\partial X}{\partial z}\right)+q_1\left(\frac{\partial Y}{\partial y}+q\frac{\partial Y}{\partial z}\right)=\frac{\partial Z}{\partial y}+q\frac{\partial Z}{\partial z}. \end{cases}$$

Hier kann die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}+p\frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial x}+p\frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial X}{\partial y}+q\frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial y}+q\frac{\partial Y}{\partial z} \end{vmatrix}$$

nur für specielle Flächen: $z-\varphi(x, y)=0$ den Werth Null haben; verschwände sie nämlich für jede Fläche: $z-\varphi=0$, so müsste sie überhaupt für alle Werthe von x, y, z, p, q verschwinden; das aber ist unmöglich, da sonst alle zweireihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \end{vmatrix}$$

identisch null wären und also die Gleichungen (1) gar keine Transformation darstellten. Somit bestimmen die Gleichungen (3) die Grössen p_1 und q_1 als Functionen von x, y, z, p und q:

$$p_1=P(x, y, z, p, q), \quad q_1=Q(x, y, z, p, q);$$

zugleich wird wegen (2) auch ϱ eine Function von x, y, z, p, q. Beachten wir jetzt noch, dass die Gleichungen: $p_1=P$, $q_1=Q$ nach p und q auflösbar sind — man erkennt das sofort an den äquivalenten Gleichungen (2) —, so sehen wir, dass die fünf Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{cases} x_1=X(x, y, z), \quad y_1=Y(x, y, z), \quad z_1=Z(x, y, z) \\ p_1=P(x, y, z, p, q), \quad q_1=Q(x, y, z, p, q) \end{cases}$$

zusammengenommen eine Transformation in den fünf Veränderlichen x, y, z, p, q darstellen.

Die Transformation (1) transformirt demnach zugleich mit x, y, z auch noch die Grössen p, q und zwar so, wie es die Transformation (4) angiebt. Wir sagen deshalb, dass die Transformation (4) in den Veränderlichen x, y, z, p, q aus der Transformation (1) durch *Erweiterung* entstanden ist, und wir bezeichnen (4) einfach als *die zu* (1) *gehörige erweiterte Transformation.*

Ihrer Herleitung zufolge ist *die erweiterte Transformation* (4) *so beschaffen, dass eine Identität von der Form:*

$$(5)\qquad dZ-PdX-QdY=\varrho(dz-pdx-qdy)$$

besteht, wo ϱ eine ganz bestimmte Function von x, y, z, p, q ist; (4) lässt also die Pfaffsche Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ invariant. Ausserdem zeigen unsere obigen Entwickelungen, dass bei gegebenen X, Y, Z die Functionen ϱ, P, Q durch die Identität (5) eindeutig bestimmt sind. Also können wir sagen:

Die zu (1) *gehörige erweiterte Transformation* (4) *ist die einzige Transformation von der Form:*

$$(6)\qquad \begin{cases} x_1 = X(x, y, z), & y_1 = Y(x, y, z), \quad z_1 = Z(x, y, z) \\ p_1 = \Pi(x, y, z, p, q), & q_1 = K(x, y, z, p, q) \end{cases}$$

welche die Pfaffsche Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ *invariant lässt.*

Die zum Punkte x, y, z gehörige Tangentialebene der Fläche: $z - \varphi(x, y) = 0$ ist durch die Werthe von x, y, z, p, q bestimmt, welche diesem Punkte entsprechen; ihre Gleichung ist ja:

$$(7)\qquad \mathfrak{z} - z = p(\mathfrak{x} - x) + q(\mathfrak{y} - y).$$

Die Gleichung der Tangentialebene an die transformirte Fläche: $z_1 - \varphi_1(x_1, y_1) = 0$ im Punkte: $x_1 = X$, $y_1 = Y$, $z_1 = Z$ lautet:

$$\mathfrak{z} - z_1 = p_1(\mathfrak{x} - x_1) + q_1(\mathfrak{y} - y_1),$$

wo p_1, q_1 aus den Gleichungen (4) zu berechnen sind; mithin ist auch sie vollkommen bestimmt, wenn man die Grössen x, y, z, p, q kennt. Hieraus folgt, *dass alle Flächen, welche mit der Fläche:* $z - \varphi = 0$ *den Punkt* x, y, z *und in diesem Punkte die Tangentialebene gemein haben, bei der Transformation* (1) *in Flächen übergehen, welche die Fläche:* $z_1 - \varphi_1 = 0$ *im Punkte:* $x_1 = X$, $y_1 = Y$, $z_1 = Z$ *berühren. Also führt die Transformation* (1) *solche Flächen, die sich in einem gemeinsamen Punkte berühren, stets in Flächen über, welche sich in einem gemeinsamen Punkte berühren.*

Das Werthsystem x, y, z wird durch einen Punkt des Raumes dargestellt; das Werthsystem x, y, z, p, q ordnet nach dem Vorhergehenden diesem Punkte eine gewisse hindurchgehende Ebene zu, nämlich die folgende:

$$(7)\qquad \mathfrak{z} - z = p(\mathfrak{x} - x) + q(\mathfrak{y} - y).$$

Es liegt daher nahe den Punkt x, y, z im Verein mit dieser Ebene durch ihn als das geometrische Bild des Werthsystems: x, y, z, p, q aufzufassen. Die so definirte Figur — also den *Inbegriff des Punktes* x, y, z *und der hindurchgehenden Ebene* (7) bezeichnen wir als ein *Flächenelement* oder kurz als ein *Element* des Raumes x, y, z. Die Grössen x, y, z, p, q betrachten wir als die *Coordinaten* dieses Elements.

Nunmehr erscheint die Transformation (4) im Gegensatz zu der

*Punkt*transformation (1) als eine *Element*transformation. Den Zusammenhang aber, der zwischen beiden Transformationen besteht, können wir folgendermassen kennzeichnen:

Satz 1. *Eine jede Punkttransformation:*

$$(1) \qquad x_1 = X(x, y, z), \quad y_1 = Y(x, y, z), \quad z_1 = Z(x, y, z)$$

des Raumes xyz bestimmt zugleich eine Transformation der Flächenelemente x, y, z, p, q; der analytische Ausdruck dieser Elementtransformation ist die zu (1) *gehörige erweiterte Transformation:*

$$(4) \qquad \begin{cases} x_1 = X(x, y, z), \quad y_1 = Y(x, y, z), \quad z_1 = Z(x, y, z) \\ p_1 = P(x, y, z, p, q), \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q), \end{cases}$$

welche dadurch charakterisirt ist, dass sie die Pfaffsche Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ invariant lässt.

Die aus Punkttransformationen durch Erweiterung entstandenen Transformationen (4) bilden unter den Elementtransformationen des Raumes eine besondere Klasse, welche offenbar durch die folgenden beiden Eigenschaften definirt ist:

Erstens verwandelt jede Transformation der betreffenden Klasse solche Flächenelemente, welche den Punkt gemein haben, stets wieder in Flächenelemente mit gemeinsamem Punkt.

Zweitens lassen alle derartigen Transformationen die Pfaffsche Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ invariant.

Es liegt auf der Hand, dass Elementtransformationen existiren, welche zwar die erste, nicht aber die zweite dieser beiden Eigenschaften besitzen; doch spielen derartige Transformationen im Folgenden keine Rolle. Nicht so selbstverständlich ist es, dass Elementtransformationen vorhanden sind, denen die erste Eigenschaft fehlt, während sie die zweite besitzen. Wir werden jetzt zeigen, dass es solcher Transformationen eine unbegränzte Anzahl giebt, und werden sie alle bestimmen. Dieselben bilden mit den oben definirten Transformationen (4) zusammen eine wichtige Klasse von Elementtransformationen des Raumes, nämlich die Klasse aller Elementtransformationen, welche die Pfaffsche Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ invariant lassen. Wir wollen alle Transformationen, welche diese Eigenschaft besitzen, kurz als *Berührungstransformationen**) des Raumes bezeichnen und stellen daher die folgende Definition auf:

Die Elementtransformation:

---

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1870 und 1871; Math. Ann. Bd. V und VIII; Göttinger Nachrichten 1870 und 1872.

$$(8)\quad \begin{cases} x_1 = X(x, y, z, p, q), \; y_1 = Y(x, y, z, p, q), \; z_1 = Z(x, y, z, p, q) \\ p_1 = P(x, y, z, p, q), \; q_1 = Q(x, y, z, p, q) \end{cases}$$

des Raumes x, y, z ist dann eine **Berührungstransformation** *dieses Raumes, wenn sie die Pfaffsche Gleichung: $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ invariant lässt.*

Demzufolge ist die Transformation (8) *eine Berührungstransformation dann und nur dann, wenn eine Identität von der Form:*

$$(9)\qquad dZ - P\,dX - Q\,dY \equiv \varrho(dz - p\,dx - q\,dy)$$

besteht, in welcher ϱ eine gewisse Function von x, y, z, p, q bezeichnet.

§ 13.

Unsere Aufgabe ist es jetzt, alle Berührungstransformationen des Raumes x, y, z zu bestimmen; dabei müssen wir natürlich insbesondere die Transformationen (4) wieder finden.

Die Transformation (8) sei eine Berührungstransformation, es bestehe also eine Identität von der Form (9).

Vor allen Dingen bemerken wir, dass die Function ϱ nicht identisch null sein kann. Wäre sie es nämlich, so zerlegte sich die Identität:

$$dZ - P\,dX - Q\,dY \equiv 0$$

in fünf verschiedene, aus denen folgte, dass alle dreireihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial p} & \frac{\partial Z}{\partial q} \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial X}{\partial p} & \frac{\partial X}{\partial q} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial p} & \frac{\partial Y}{\partial q} \end{vmatrix}$$

identisch verschwänden; das aber ist ausgeschlossen, da das Gleichungensystem (8) eine Transformation und mithin nach x, y, z, p, q auflösbar sein soll.

Wir denken uns ferner die vier Grössen p_1, q_1, p, q aus den fünf Gleichungen (8) eliminirt. Da muss sich mindestens eine Relation zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1 allein ergeben; es können aber auch zwei, unter Umständen sogar drei unabhängige Relationen dieser Art hervorgehen, niemals jedoch mehr als drei. Liefern nun die Gleichungen (8) gerade drei unabhängige Relationen zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1 allein, so sind die Functionen X, Y, Z nothwendig von p und q frei; die Transformation (8) ist daher nichts anderes als eine erweiterte Punkttransformation des Raumes x, y, z und gehört zu der oben besprochenen

Klasse der Transformationen (4). Folglich muss jede Berührungstransformation (8), welche nicht blos eine erweiterte Punkttransformation ist, entweder eine oder zwei Relationen zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1 ergeben.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass aus (8) blos eine Relation:

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1 allein folgt.

In diesem Falle sind offenbar auch die sechs Differentiale $dx, dy, dz, dx_1, dy_1, dz_1$ nur durch eine Relation verknüpft, nämlich durch:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z}dz + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial z_1}dz_1 = 0. \tag{10}$$

Andererseits wissen wir aber aus der Identität (9), dass zwischen diesen Differentialen die Relation:

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 - \varrho(dz - p dx - q dy) = 0 \tag{11}$$

besteht. Drücken wir daher mit Hülfe von (8) die vier Grössen p, q, p_1, q_1 durch x, y, z, x_1, y_1, z_1 aus, was in dem vorliegenden Falle sicher möglich ist, und setzen wir die betreffenden Werthe in (11) ein, so müssen wir bis auf einen Faktor genau die Gleichung (10) erhalten. Wir sehen also, dass vermöge (8) die fünf Gleichungen:

$$\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial z_1}}{1} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}}{-p_1} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}}{-q_1} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial z}}{-\varrho} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x}}{\varrho p} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y}}{\varrho q} \tag{12}$$

bestehen. Wir erkennen überdies, dass die sechs Differentialquotienten der Function Ω alle von Null verschieden sein müssen.

Aus (12) schaffen wir ϱ fort und fügen zu den gewonnenen vier Gleichungen noch $\Omega = 0$ hinzu; so erhalten wir die fünf Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{lll} & p_1 = -\dfrac{\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}}{\frac{\partial \Omega}{\partial z_1}}, & q_1 = -\dfrac{\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}}{\frac{\partial \Omega}{\partial z_1}} \\ \Omega = 0, & & \\ & p = -\dfrac{\frac{\partial \Omega}{\partial x}}{\frac{\partial \Omega}{\partial z}}, & q = -\dfrac{\frac{\partial \Omega}{\partial y}}{\frac{\partial \Omega}{\partial z}}. \end{array}\right. \tag{13}$$

Dieselben bestehen vermöge (8); sie sind ausserdem offenbar von einander unabhängig; mithin ersetzen sie die Gleichungen (8) vollständig.

Hiermit ist bewiesen, dass jede Berührungstransformation (8), welche nur eine Relation zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1 liefert, auf die Form (13) gebracht werden kann.

Es sei jetzt umgekehrt Ω irgend eine Function von x, y, z, x_1, y_1, z_1, nur so beschaffen, dass die fünf Gleichungen (13) sowohl nach x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 als nach x, y, z, p, q auflösbar sind und in Folge dessen eine Elementtransformation des Raumes x, y, z darstellen. Dann lässt sich die Gleichung: $d\Omega = 0$ offenbar schreiben:

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 + \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial z}}{\frac{\partial \Omega}{\partial z_1}}(dz - p dx - q dy) = 0.$$

Hier aber können wir den Faktor von $dz - pdx - qdy$ durch x, y, z, p, q ausdrücken; wir sehen also, dass die Transformation (13) die Pfaffsche Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ invariant lässt, dass sie eine Berührungstransformation des Raumes x, y, z ist.

Giebt es denn aber Functionen Ω von der eben vorausgesetzten Beschaffenheit?

Die Gleichungen (13) sind dann und nur dann nach x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 auflösbar, wenn die Gleichungen:

$$(14) \qquad \Omega = 0, \qquad p = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x}}{\frac{\partial \Omega}{\partial z}}, \qquad q = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y}}{\frac{\partial \Omega}{\partial z}}$$

sich nach x_1, y_1, z_1 auflösen lassen. Hierzu ist nothwendig und hinreichend, dass eine gewisse Determinante, die man nach bekannten Regeln bilden kann, nicht vermöge $\Omega = 0$ verschwindet. Da nun diese Determinante nicht für jedes Ω identisch null ist, wie man sich leicht überzeugt, so sind die Gleichungen (13) im Allgemeinen sicher nach x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 auflösbar. In derselben Weise erkennt man, dass sie im Allgemeinen auch nach x, y, z, p, q auflösbar sind.

Später bei den entsprechenden Untersuchungen für beliebig viele Veränderliche werden wir auf die Frage nach der Auflösbarkeit der Gleichungen (13) genauer eingehen und werden ähnlich wie in der Ebene (vgl. S. 8 f.) zeigen, dass Gleichungen von der Form (13), welche nach x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 auflösbar sind, auch nach x, y, z, p, q aufgelöst werden können.

Jedenfalls haben wir den

Satz 2. *Es giebt eine unbegränzte Anzahl von Berührungstransformationen:*

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \qquad y_1 = Y, \qquad z_1 = Z, \qquad p_1 = P, \qquad q_1 = Q$$

des Raumes x, y, z, aus deren Gleichungen nur eine Relation $\Omega = 0$ zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1 allein folgt. Alle diese Berührungstrans-

formationen lassen sich auf die Form (13) *bringen, wo* Ω *eine gewisse Function von* x, y, z, x_1, y_1, z_1 *bezeichnet.*

Beispiele. Ist $\Omega = z + z_1 + xx_1 + yy_1$, so erhält man aus (13) die Transformation:

$$\text{(15)} \qquad \begin{cases} x_1 = -p, \quad y_1 = -q, \quad z_1 = xp + yq - z \\ \qquad p_1 = -x, \quad q_1 = -y, \end{cases}$$

welche *Legendre* zur Integration der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen benutzte.

Ebenso liefert: $\Omega = (x - x_1)x_1 + (y - y_1)y_1 + (z - z_1)z_1$ die Berührungstransformation:

$$\text{(16)} \qquad \begin{cases} z_1 = \dfrac{z - xp - yq}{p^2 + q^2 + 1}, \quad x_1 = -pz_1, \quad y_1 = -qz_1 \\ p_1 = \dfrac{x + 2pz_1}{2z_1 - z}, \quad q_1 = \dfrac{y + 2qz_1}{2z_1 - z} \end{cases}$$

Dass übrigens nicht jede Function Ω auflösbare Gleichungen (13) liefert, ist leicht zu sehen; ist zum Beispiel Ω von x_1 frei, so kommt x_1 in den Gleichungen (13) überhaupt gar nicht vor und dieselben können daher jedenfalls nicht nach x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 aufgelöst werden.

Nunmehr wenden wir uns zur Bestimmung aller Berührungstransformationen (8), aus deren Gleichungen gerade zwei unabhängige Relationen:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \qquad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1 allein hergeleitet werden können.

In diesem Falle sind die sechs Differentiale $dx, dy, dz, dx_1, dy_1, dz_1$ durch gerade zwei unabhängige Relationen verknüpft, nämlich durch die beiden:

$$\text{(17)} \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial y} dy + \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z} dz + \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} dy_1 + \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} dz_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial y} dy + \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial z} dz + \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial y_1} dy_1 + \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial z_1} dz_1 = 0; \end{cases}$$

daher muss es möglich sein drei Grössen ϱ, λ_1 und λ_2 derart als Functionen von x, y, z, p, q zu bestimmen, dass die Coefficienten entsprechender Differentiale in den beiden Gleichungen:

$$\lambda_1\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} dx + \cdots\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x} dx + \cdots\right) = 0$$

und:

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 - \varrho(dz - pdx - qdy) = 0$$

vermöge (8) einander proportional werden. Das giebt fünf Gleichungen, aus denen wir ϱ fortschaffen können; fügen wir dann noch die beiden: $\Omega_1 = 0$ und $\Omega_2 = 0$ hinzu, so erhalten wir:

$$(18)\left\{\begin{aligned}&\Omega_1 = 0, \quad p_1 = -\frac{\lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}}{\lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial z_1}+\lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_1}}, \quad q_1 = -\frac{\lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial y_1}+\lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial y_1}}{\lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial z_1}+\lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_1}}\\ &\Omega_2 = 0, \quad p = -\frac{\lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial x}}{\lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial z}}, \quad q = -\frac{\lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial y}}{\lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial z}},\end{aligned}\right.$$

ein Gleichungensystem, welches durch Elimination des Quotienten $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ in ein mit (8) äquivalentes übergeht.

Wir sehen hieraus, dass jede Berührungstransformation (8) von der hier untersuchten Art sich in der Form (18) darstellen lässt.

Umgekehrt leuchtet ein: sind zwei unabhängige Functionen Ω_1 und Ω_2 so beschaffen, dass die Gleichungen (18) sich sowohl nach $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 als nach $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, x, y, z, p, q auflösen lassen, so stellen die durch Auflösung erhaltenen Gleichungen eine Berührungstransformation dar; vermöge (18) erhält ja die Gleichung:

$$\lambda_1\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x}dx + \cdots\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x}dx + \cdots\right) = 0$$

die charakteristische Form:

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 - \varrho(dz - p\,dx - q\,dy) = 0,$$

wo ϱ den Werth hat:

$$\varrho = -\frac{\lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial z}}{\lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial z_1}+\lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_1}}.$$

Nicht jedes Paar von unabhängigen Functionen Ω_1, Ω_2 liefert auflösbare Gleichungen (18), denn sind zum Beispiel Ω_1 und Ω_2 beide von x_1 frei, so kommt x_1 in den Gleichungen, welche man aus (18) durch Elimination von $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ erhält, gar nicht vor und eine Auflösung nach x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 ist daher nicht möglich.

Andrerseits kann man aber auch Functionenpaare Ω_1, Ω_2 angeben, welche in (18) eingesetzt wirklich Berührungstransformationen liefern. Später werden wir zeigen, dass dies auf unbegränzt viele Weisen möglich ist; hier genüge ein Beispiel:

Setzt man $\Omega_1 = z + z_1 + xx_1$, $\Omega_2 = y - y_1$, so erhält man aus (18) die schon von *Euler* und später von *Ampère* betrachtete Transformation:

$$(19)\quad x_1 = -p, \quad y_1 = y, \quad z_1 = xp - z, \quad p_1 = -x, \quad q_1 = -q.$$

Wir können daher den Satz aussprechen:

Satz 3. *Jede Berührungstransformation:*

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y, \quad z_1 = Z, \quad p_1 = P, \quad q_1 = Q$$

des Raumes x, y, z, aus deren Gleichungen gerade zwei unabhängige Relationen: $\Omega_1 = 0$ und $\Omega_2 = 0$ zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1 allein folgen, kann dadurch erhalten werden, dass man aus den Gleichungen (18) *die Grösse $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ eliminirt und die entstandenen Gleichungen nach x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 auflöst.*

Endlich können wir nach S. 49 hinzufügen:

Satz 4. *Jede Berührungstransformation:*

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y, \quad z_1 = Z, \quad p_1 = P, \quad q_1 = Q$$

des Raumes x, y, z, aus deren Gleichungen gerade drei unabhängige Relationen zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1 allein folgen, ist aus einer Punkttransformation des Raumes x, y, z durch Erweiterung entstanden.

Durch Zusammenfassung der Sätze 2, 3, 4 erhalten wir das

Theorem 6. *Es giebt drei verschiedene Arten von Berührungstransformationen:*

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y, \quad z_1 = Z, \quad p_1 = P, \quad q_1 = Q$$

*des Raumes x, y, z, erstens solche, aus deren Gleichungen drei unabhängige Relationen zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1 allein folgen, dieselben werden aus den Punkttransformationen des Raumes x, y, z durch Erweiterung erhalten, zweitens solche, welche gerade zwei unabhängige Relationen und drittens solche, welche nur eine Relation zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1 allein liefern.**)

§ 14.

Bei Untersuchung der Berührungstransformationen in der Ebene erwies es sich als zweckmässig den allgemeinen Begriff Elementmannigfaltigkeit einzuführen; wir bezeichneten mit diesem Namen jede Schaar von Linienelementen, welche entweder aus allen Elementen eines Punktes oder aus allen Elementen einer Curve bestand. Dadurch wurden wir der Nothwendigkeit überhoben in der Ebene zwischen den beiden Arten von Punktmannigfaltigkeiten, den Punkten und den Curven einen Unterschied machen zu müssen: Punkte und Curven erschienen nur als die beiden Specialfälle des allgemeinen Begriffs Elementmannigfaltigkeit.

Aehnliches gilt im gewöhnlichen Raume. Auch hier ist es zweck-

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1870 und 1871; Math. Ann. Bd. V.

mässig den Begriff Elementmannigfaltigkeit einzuführen. Die drei Arten von Punktmannigfaltigkeiten des Raumes: Punkte, Curven und Flächen sind besondere Fälle dieses allgemeinen Begriffs.

Eine continuirliche Schaar von Flächenelementen des gewöhnlichen Raumes heisst eine **Elementmannigfaltigkeit**, *wenn das Gleichungensystem zwischen x, y, z, p, q, durch welches die Schaar dargestellt wird, der Pfaffschen Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ genügt.* Enthält die betreffende Schaar gerade ∞^q verschiedene Flächenelemente, so reden wir wohl auch kurz von einer *Element-M_q*.*)

Was giebt es nun für verschiedene Arten von Elementmannigfaltigkeiten?

Ein Gleichungensystem: $W_1(x, y, z, p, q) = 0$, $W_2 = 0, \cdots$, welches der Pfaffschen Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ genügt, muss mindestens eine Relation zwischen x, y, z allein liefern (vgl. Seite 42 f.).

Betrachten wir zunächst den Fall, dass aus: $W_1 = 0, \cdots$ nur *eine* Relation: $\Phi(x, y, z) = 0$ zwischen x, y, z allein folgt. Hier sind dx, dy, dz nur durch die eine Relation:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = 0$$

verknüpft; diese Relation muss daher für alle Werthsysteme x, y, z, p, q, welche $W_1 = 0, \cdots$ befriedigen, mit der Pfaffschen Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ äquivalent sein, das heisst es müssen vermöge: $W_1 = 0, \cdots$ die Gleichungen:

$$-\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}{1} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{p} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{q}$$

bestehen, welche wir auch schreiben können:

$$(20) \qquad p = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}, \qquad q = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}};$$

es ist ja nämlich einleuchtend, dass Φ nicht von z frei sein kann. Nun aber kann das System: $W_1 = 0, \cdots$ in unsrem Falle höchstens drei von einander unabhängige Gleichungen enthalten, es muss daher mit den vereinigten Gleichungen: $\Phi = 0$ und (20) äquivalent sein; wirklich bilden $\Phi = 0$ und (20) zusammengenommen ein Gleichungensystem, welches die Pfaffsche Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ erfüllt,

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1871 und 1874; Math. Ann. Bd. V und IX; Göttinger Nachrichten 1872.

und zwar thun sie das, welche Function von x, y, z man auch für Φ einsetzen mag; nur darf Φ nicht von z frei sein.

Die Elementmannigfaltigkeit, welche durch die vereinigten Gleichungen: $\Phi = 0$ und (20) dargestellt wird, besteht aus den ∞^2 Elementen x, y, z, p, q, deren Punkte auf der Fläche $\Phi = 0$ liegen, während ihre Ebenen:

$$\mathfrak{z} - z = p(\mathfrak{x} - x) + q(\mathfrak{y} - y)$$

die zugehörigen Tangentialebenen dieser Fläche sind, *sie besteht*, so können wir uns kürzer ausdrücken, *aus allen Elementen der Fläche* $\Phi = 0$. Diese Ausdrucksweise entspricht vollständig derjenigen, welche wir in der Ebene benutzten, als wir von den Linienelementen einer Curve sprachen (vgl. S. 12).

Demnach gilt der

Satz 5. *Ergeben die Gleichungen einer Elementmannigfaltigkeit des Raumes x, y, z nur* e i n e *Relation: $\Phi(x, y, z) = 0$ zwischen x, y, z allein, so können sie die Form erhalten:*

$$(21) \qquad \Phi(x, y, z) = 0, \quad p = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}, \quad q = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}};$$

die betreffende Elementmannigfaltigkeit besteht aus den ∞^2 Elementen der Fläche: $\Phi = 0$.

Die Gleichungen (21) werden, wie oben bemerkt, unbrauchbar, wenn die Function Φ von z frei ist; also bleiben unter den Flächen des Raumes x, y, z alle Cylinder ausgeschlossen, deren Erzeugende zur z-Axe parallel sind. Es hat das seinen Grund in der Beschaffenheit der hier benutzten Elementcoordinaten x, y, z, p, q; dieselben werden nämlich für alle Elemente, deren Ebenen zur z-Axe parallel sind, unbrauchbar. Später werden Elementcoordinaten eingeführt, denen dieser Mangel nicht anhaftet.

Jetzt zur Bestimmung aller Elementmannigfaltigkeiten, aus deren Gleichungen sich gerade *zwei* unabhängige Relationen zwischen x, y, z allein ergeben.

Befriedigt das Gleichungensystem: $W_1 = 0$, $W_2 = 0, \cdots$ die Pfaffsche Gleichung: $dz - p dx - q dy = 0$ und liefert es zwischen x, y, z gerade zwei unabhängige Relationen, etwa:

$$\Psi_1(x, y, z) = 0, \qquad \Psi_2(x, y, z) = 0,$$

so sind dx, dy, dz auch durch gerade zwei unabhängige Relationen verknüpft, nämlich durch:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} dz = 0$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} dz = 0.$$

Diese beiden Gleichungen müssen in Verbindung mit: $W_1 = 0$, $W_2 = 0, \cdots$ die Pfaffsche Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ nach sich ziehen; also muss das Gleichungensystem: $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, $\cdots$ ausser: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ jedenfalls noch diejenigen Gleichungen umfassen, welche sich aus:

$$\left\{\begin{aligned} p &= \lambda_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}, \quad q = \lambda_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \\ -1 &= \lambda_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \end{aligned}\right. \tag{22}$$

durch Fortschaffung von λ_1 und λ_2 ergeben (vgl. S. 41).

Es seien nun umgekehrt zwei beliebige unabhängige Relationen:

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0$$

zwischen x, y, z allein gegeben. Sind dann die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} p &= \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \quad q = \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \\ -1 &= \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{aligned}\right. \tag{22'}$$

unter einander und mit: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ verträglich, so ergiebt sich aus: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ und (22′) durch Fortschaffung der λ sicher ein Gleichungensystem, welches die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - pdx - qdy = 0$$

befriedigt (vgl. S. 43).

Wenn die Determinante:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix}$$

nicht vermöge: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ verschwindet, so lassen sich die Gleichungen: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ und (22′) offenbar nach $z, x, \lambda_1, \lambda_2$ und q auflösen und sind daher jedenfalls mit einander verträglich. Aehnliches gilt, wenn die Determinante:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix}$$

nicht vermöge: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ verschwindet. In beiden Fällen ergiebt sich aus: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ und (22′) durch Fortschaffung der λ ein dreigliedriges Gleichungensystem:

$$
(22'') \quad \begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0 \\ D(x, y, z, p, q) = \begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0, \end{cases}
$$

welches die Pfaffsche Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ befriedigt. Dasselbe liefert augenscheinlich zwischen x, y, z allein nur die beiden unabhängigen Relationen: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$.

Wenn dagegen Δ_1 und Δ_2 beide vermöge: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ verschwinden, so gilt dasselbe auch von $\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}$ und $\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}$ und die letzte der Gleichungen (22′) erhält die sinnlose Form: $1 = 0$; in diesem Falle giebt es daher kein Gleichungensystem, welches die Pfaffsche Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ befriedigt und zwischen x, y, z blos die beiden Relationen: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ liefert.

Aus dem Gesagten ergiebt sich Folgendes: Jedes Gleichungensystem, welches die Pfaffsche Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ befriedigt und zwischen x, y, z nur zwei unabhängige Relationen liefert, enthält drei unabhängige Relationen von der Form (22″). Darin bezeichnen Φ_1 und Φ_2 ganz beliebige Functionen ihrer Argumente, nur müssen die Gleichungen: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ entweder nach z und x oder nach z und y auflösbar sein. Enthält nun das betreffende Gleichungensystem gerade drei unabhängige Relationen, so lässt es sich auf die Form (22″) bringen, enthält es dagegen deren vier — eine grössere Zahl ist von vornherein ausgeschlossen — so kann es die Form:

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad D = 0, \quad U(x, y, z, p, q) = 0$$

erhalten, wo die Function U nur der einen Beschränkung unterworfen ist, dass die beiden Gleichungen: $\Delta = 0$, $U = 0$ nach p und q auflösbar sein müssen.

Das Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $D = 0$ stellt eine Element-M_2 dar. Jedes Element x, y, z, p, q derselben hat seinen Punkt x, y, z auf der Curve: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, seine Ebene aber geht durch die zugehörige Tangente dieser Curve; denn die Gleichung $D = 0$ sagt aus, dass die Ebene:

$$\mathfrak{z} - z = p(\mathfrak{x} - x) + q(\mathfrak{y} - y)$$

mit der Curve: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ die beiden unendlich benachbarten Punkte: x, y, z und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ gemein hat. Unsere Element-M_2 enthält überdies alle Elemente, welche zu der Curve: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ in der eben geschilderten Beziehung stehen; das drücken wir kürzer so aus: *die Element-M_2*: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $D = 0$ *besteht aus den ∞^2 Elementen der Curve:* $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$.

Das Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $D = 0$, $U = 0$ stellt eine Element-M_1 dar, welche von den ∞^2 Elementen der Curve blos ∞^1 enthält und zwar gehört zu jedem Punkte der Curve eines dieser ∞^1 Elemente. Ein derartiges Gebilde nennen wir einen *Elementstreifen.*

Nunmehr können wir den Satz aussprechen:

Satz 6. *Ergeben die Gleichungen einer Elementmannigfaltigkeit des Raumes x, y, z gerade zwei unabhängige Relationen:* $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ *zwischen x, y, z allein, so können sie entweder die Form erhalten:*

$$(23)\qquad \Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0, \quad D = \begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

oder die Form:

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad D = 0, \quad U(x, y, z, p, q) = 0,$$

wo U nur der Beschränkung unterworfen ist, dass die beiden Gleichungen: $D = 0$, $U = 0$ *nach p und q auflösbar sein müssen. Im ersten Falle hat man es mit einer Element-M_2 zu thun, welche von den ∞^2 Elementen der Curve:* $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ *gebildet wird, im zweiten Falle mit einer Element-M_1 und zwar mit einem sogenannten Elementstreifen. Das zweigliedrige Gleichungensystem* $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ *muss z enthalten, ist aber sonst keiner Beschränkung unterworfen.*

Noch sind alle Elementmannigfaltigkeiten zu bestimmen, aus deren Gleichungen *drei* unabhängige Relationen:

$$(24)\qquad x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

zwischen x, y, z allein folgen.

Das Gleichungensystem (24) ergiebt: $dx = dy = dz = 0$, es befriedigt also an und für sich schon die Pfaffsche Gleichung. Dasselbe gilt von dem Gleichungensystem:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c, \quad V(p, q) = 0,$$

welche Function von p und q auch das V sein mag. Dieses Ergebniss drücken wir so aus:

Satz 7. *Ergeben die Gleichungen einer Elementmannigfaltigkeit des Raumes x, y, z gerade drei unabhängige Relationen:* $x = a$, $y = b$, $z = c$ *zwischen x, y, z allein, so können sie entweder die Form:*

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

erhalten oder die Form:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c, \quad V(p, q) = 0,$$

wo die Function V ganz beliebig ist. Im ersten Falle hat man es mit einer Element-M_2 zu thun, welche von den ∞^2 Elementen des Punktes: $x = a$, $y = b$, $z = c$ gebildet wird, im zweiten Falle mit einer Element-M_1, welche aus ∞^1 von den ∞^2 Elementen dieses Punktes besteht.

Uns werden hier meistens nur die Element-M_2 des Raumes x, y, z beschäftigen, deshalb stellen wir jetzt noch einmal besonders zusammen, was wir über dieselben gefunden haben:

Theorem 7. *Im gewöhnlichen Raume giebt es drei verschiedene Arten von Element-M_2, jede Element-M_2 der ersten Art besteht aus allen Elementen einer Fläche, jede von der zweiten aus allen Elementen einer Curve, jede von der dritten aus allen Elementen eines Punktes.**)

Es ist für später von Wichtigkeit zu wissen, ob es ausser: $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ noch eine andere Pfaffsche Gleichung giebt, welche von allen Element-M_2 des Raumes x, y, z befriedigt wird.

Wird die Pfaffsche Gleichung:

$$(25) \qquad \mathfrak{a}(x, y, z, p, q)dx + \mathfrak{b}dy + \mathfrak{c}dz + \mathfrak{p}dp + \mathfrak{q}(x, y, z, p, q)dq = 0$$

von allen Element-M_2 erfüllt, so genügen ihr insbesondere alle Gleichungensysteme von der Form:

$$(26) \qquad z - F(x, y) = 0, \qquad p - \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad q - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

welche Function von x und y auch das F sein mag. Hieraus folgt, dass die Gleichung (25) bei beliebig gewähltem F vermöge der vereinigten Gleichungen (26) und

$$(26') \quad \left\{ \begin{array}{l} dz - \frac{\partial F}{\partial x}dx - \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0, \quad dp - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dy = 0 \\ \qquad\qquad dq - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dx - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy = 0 \end{array} \right.$$

besteht, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass die Gleichung:

$$\left(\mathfrak{a} + p\mathfrak{c} + \mathfrak{p}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \mathfrak{q}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)dx + \\ + \left(\mathfrak{b} + q\mathfrak{c} + \mathfrak{p}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \mathfrak{q}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)dy = 0$$

für alle Zahlenwerthe der Grössen:

$$x, \ y, \ z, \ p, \ q, \ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \ dx, \ dy$$

identisch erfüllt ist. Demnach erhalten wir:

$$\mathfrak{p} \equiv 0, \quad \mathfrak{q} \equiv 0, \quad \mathfrak{a} + p\mathfrak{c} \equiv 0, \quad \mathfrak{b} + q\mathfrak{c} \equiv 0$$

---

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1871 und 1874; Göttinger Nachrichten 1872; Math. Ann. Bd. V und IX.

und erkennen, dass die Pfaffsche Gleichung (25) mit der Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ äquivalent ist. In Worten:

Satz 8. *Die Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ ist die einzige Pfaffsche Gleichung, welche von allen Element-M_2 des Raumes x, y, z befriedigt wird, sie ist sogar die einzige Pfaffsche Gleichung, welcher alle Element-M_2 von der besonderen Form:*

$$z - F(x, y) = 0, \quad p - \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad q - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

genügen.

§ 15.

Führen wir auf eine Element-M_2 eine Berührungstransformation aus, so erhalten wir stets wieder eine Element-M_2.

In der That, es mögen die Gleichungen:

$$(27) \qquad \Phi(x, y, z, p, q) = 0, \quad X = 0, \quad \Psi = 0$$

eine Element-M_2 bestimmen, es befriedige also das Gleichungensystem (27) die Pfaffsche Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$. Wird auf (27) eine Berührungstransformation ausgeführt, so ergiebt sich ein neues Gleichungensystem:

$$(27') \qquad \Phi_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0, \quad X_1 = 0, \quad \Psi_1 = 0,$$

während die Pfaffsche Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$, wie wir wissen, die Form erhält: $dz_1 - p_1dx_1 - q_1dy_1 = 0$. Nach S. 41 befriedigt nun (27′) die transformirte Pfaffsche Gleichung, also stellt (27′) wiederum eine Element-M_2 dar. Das aber war unsere Behauptung.

Wir ersehen hieraus, dass die ∞^2 Elemente einer Fläche bei einer Berührungstransformation entweder in die ∞^2 Elemente einer Fläche übergehen oder in die Elemente einer Curve oder in die eines Punktes, mit anderen Worten: *bei einer Berührungstransformation verwandelt sich eine Fläche entweder wieder in eine Fläche oder in eine Curve oder in einen Punkt. Dementsprechend wird eine Curve oder ein Punkt bei einer Berührungstransformation entweder zu einer Fläche oder zu einer Curve oder zu einem Punkte.*

Dass auch jede Element-M_1 bei Berührungstransformation sich wieder in eine Element-M_1 verwandelt, liegt auf der Hand; es genügt daher die Thatsache zu erwähnen.

Es liege jetzt umgekehrt irgend eine Elementtransformation:

$$(28) \quad x_1 = \Xi(x, y, z, p, q), \quad y_1 = H, \quad z_1 = Z, \quad p_1 = \Pi, \quad q_1 = K$$

des Raumes x, y, z vor, welche jede Element-M_2 in eine Element-M_2 überführt. Wir werden nachweisen, dass dieselbe eine Berührungstransformation ist.

Die Transformation (28) verwandelt insbesondere jede Element-M_2 von der Form:

$$(26) \qquad z - F(x, y) = 0, \quad p - \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad q - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

in eine Element-M_2; führen wir daher in (26) vermöge (28) die neuen Veränderlichen x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 ein, so erhalten wir ein Gleichungensystem:

$$U_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0,$$

welches die Pfaffsche Gleichung: $dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = 0$ befriedigt; das gilt ganz unabhängig von der Beschaffenheit der Function $F(x, y)$. Ersetzen wir daher in: $dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = 0$ die neuen Veränderlichen wieder durch die alten, so bekommen wir (vgl. S. 41) eine Pfaffsche Gleichung:

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = \mathfrak{a}(x, y, z, p, q)dx + \mathfrak{b}dy + \mathfrak{c}dz + \mathfrak{p}dp + \mathfrak{q}dq = 0,$$

welcher *alle* Gleichungensysteme von der Form (26) genügen. Nun ist nach Satz 8, S. 61 die Gleichung $dz - pdx - qdy = 0$ die einzige Pfaffsche Gleichung von dieser Beschaffenheit, also muss vermöge (28) eine Relation von der Form:

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = \varrho(x, y, z, p, q) \cdot (dz - pdx - qdy)$$

bestehen, das heisst, die Gleichungen (28) stellen unter der gemachten Voraussetzung wirklich eine Berührungstransformation dar.

Aus alledem geht hervor, dass die Eigenschaft, Element-M_2 in Element-M_2 zu verwandeln, für die Berührungstransformationen des Raumes x, y, z charakteristisch ist. Also:

Theorem 8. *Die Berührungstransformationen des Raumes x, y, z lassen sich auch definiren als diejenigen Elementtransformationen dieses Raumes, welche jede Element-M_2 wieder in eine Element-M_2 verwandeln.**)

Ergeben die Gleichungen:

$$(29) \qquad x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y, \quad z_1 = Z, \quad p_1 = P, \quad q_1 = Q$$

einer Berührungstransformation blos eine Relation:

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1 allein, so führt die betreffende Berührungstransformation die ∞^2 Flächenelemente des Punktes: $x = a$, $y = b$, $z = c$ in ∞^2 Flächenelemente über, deren Punkte x_1, y_1, z_1 die Fläche:

$$(30) \qquad \Omega(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0$$

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1873; Math. Ann. Bd. VIII.

erfüllen; da nun die so erhaltenen Flächenelemente nach Theorem 8 eine Element-M_2 bilden, so sind sie (Satz 5, S. 56) die Elemente der eben geschriebenen Fläche; wir sehen also, dass unsre Berührungstransformation den Punkt: $x=a$, $y=b$, $z=c$ in die Fläche (30) überführt. Dementsprechend gehen die Elemente der Fläche:

$$\Omega(x,\, y,\, z,\, a_1,\, b_1,\, c_1) = 0$$

in die Elemente des Punktes: $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$ über.

Liefert andererseits die Berührungstransformation (29) gerade zwei unabhängige Relationen:

$$\Omega_1(x,\, y,\, z,\, x_1,\, y_1,\, z_1) = 0, \qquad \Omega_2(x,\, y,\, z,\, x_1,\, y_1,\, z_1) = 0$$

zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1 allein, so führt sie die ∞^2 Elemente des Punktes: $x=a$, $y=b$, $z=c$ in ∞^2 Elemente über, deren Punkte die Curve:

$$\Omega_1(a,\, b,\, c,\, x_1,\, y_1,\, z_1) = 0, \qquad \Omega_2(a,\, b,\, c,\, x_1,\, y_1,\, z_1) = 0$$

erfüllen, also, da diese ∞^2 Elemente eine Element-M_2 bilden, in die ∞^2 Elemente der eben geschriebenen Curve. Dementsprechend verwandeln sich bei der betreffenden Berührungstransformation die ∞^2 Elemente der Curve:

$$\Omega_1(x,\, y,\, z,\, a_1,\, b_1,\, c_1) = 0, \qquad \Omega_2(x,\, y,\, z,\, a_1,\, b_1,\, c_1) = 0$$

in die ∞^2 Elemente des Punktes: $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$.

Erinnern wir uns jetzt, dass im ersten Falle die Gleichung $\Omega = 0$ die betreffende Berührungstransformation vollständig bestimmt und dass im zweiten Falle die beiden Gleichungen: $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ dasselbe leisten (vgl. Satz 2, S. 51 und Satz 3, S. 54), so können wir sagen:

Satz 9. *Ist eine Berührungstransformation des Raumes* x, y, z *durch die eine Gleichung:*

$$\Omega(x,\, y,\, z,\, x_1,\, y_1,\, z_1) = 0$$

definirt, so führt sie den Punkt: $x=a$, $y=b$, $z=c$ *in die Fläche:* $\Omega(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0$ *über und die Fläche:* $\Omega(x, y, z, a_1, b_1, c_1) = 0$ *in den Punkt:* $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$; *ist sie dagegen durch die beiden Gleichungen:*

$$\Omega_1(x,\, y,\, z,\, x_1,\, y_1,\, z_1) = 0, \qquad \Omega_2(x,\, y,\, z,\, x_1,\, y_1,\, z_1) = 0$$

definirt, so verwandelt sie den Punkt: $x=a$, $y=b$, $z=c$ *in die Curve:*

$$\Omega_1(a,\, b,\, c,\, x_1,\, y_1,\, z_1) = 0, \qquad \Omega_2(a,\, b,\, c,\, x_1,\, y_1,\, z_1) = 0$$

und die Curve:

$$\Omega_1(x,\, y,\, z,\, a_1,\, b_1,\, c_1) = 0, \qquad \Omega_2(x,\, y,\, z,\, a_1,\, b_1,\, c_1) = 0$$

in den Punkt: $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$.

Beispiele. Die Gleichung:

$$\Omega = z + z_1 + xx_1 + yy_1 = 0$$

definirt, wie wir auf S. 52 gesehen haben, eine Berührungstransformation. Bei dieser Transformation verwandeln sich die Elemente des Punktes: $x = a$, $y = b$, $z = c$ in die Elemente der Ebene:

$$z_1 + c + ax_1 + by_1 = 0 \tag{31}$$

oder kürzer, der Punkt: $x = a$, $y = b$, $z = c$ verwandelt sich in diese Ebene. Andererseits geht die Ebene:

$$z + c_1 + a_1 x + b_1 y = 0 \tag{32}$$

in den Punkt: $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$ über.

Bedenkt man, dass (31) die Polarebene des Punktes: $x = a$, $y = b$, $z = c$ in Bezug auf die Fläche zweiten Grades:

$$2z + x^2 + y^2 = 0$$

ist und dass die Ebene (32) in Bezug auf diese Fläche den Punkt: $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$ zum Pole hat, so kann man einfach sagen: *bei der besprochenen Berührungstransformation verwandelt sich jeder Punkt in seine Polarebene und jede Ebene in ihren Pol in Bezug auf die Fläche zweiten Grades:* $2z + x^2 + y^2 = 0$.

Ferner definiren nach S. 53 auch die beiden Gleichungen:

$$z + z_1 + xx_1 = 0, \qquad y - y_1 = 0$$

eine Berührungstransformation. Bei derselben geht der Punkt: $x = a$, $y = b$, $z = c$ in die Gerade:

$$z_1 + c + ax_1 = 0, \qquad y_1 - b = 0$$

über. Diese Gerade ist der Schnitt der Ebene, welche durch den Punkt: $x = a$, $y = b$, $z = c$ parallel zur zx-Ebene gelegt werden kann, mit der *Polarebene des Punktes in Bezug auf den Cylinder zweiten Grades:*

$$2z + x^2 = 0.$$

Andererseits geht die Gerade:

$$z + c_1 + a_1 x = 0, \qquad y - a_1 = 0$$

in den Punkt: $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$ über, es verwandelt sich also jede zur zx-Ebene parallele Gerade in einen Punkt.

§ 16.

Die Entwickelungen der beiden letzten Paragraphen wollen wir dadurch vervollständigen, dass wir der Pfaffschen Gleichung:

$$dz - pdx - qdy = 0$$

eine begriffliche Deutung geben. Damit erhalten wir zugleich eine anschauliche Vorstellung von dem Wesen der Elementmannigfaltigkeiten.

Es sei eine Schaar von ∞^1 Elementen des Raumes x, y, z vorgelegt, etwa in der Weise, dass x, y, z, p, q als Functionen einer unabhängigen Veränderlichen t dargestellt sind.

Betrachten wir irgend zwei unendlich benachbarte Werthe t_0 und $t_0 + \Delta t$ von t und setzen wir nur voraus, dass die fünf Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}$ für $t = t_0$ nicht sämmtlich verschwinden. Den Werthen t_0 und $t_0 + \Delta t$ entsprechen zwei unendlich benachbarte Elemente: x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 und $x_0 + \Delta x, \cdots q_0 + \Delta q$, unsrer Schaar. Die Punkte dieser beiden Elemente weichen von einander um eine Grösse von der Ordnung des Δt ab. Um eine Grösse von derselben Ordnung weicht im Allgemeinen auch der Punkt $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z$ von der Ebene:

$$\mathfrak{z} - z_0 = p_0(\mathfrak{x} - x_0) + q_0(\mathfrak{y} - y_0)$$

des Elements x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 ab; denn der Ausdruck:

$$\Delta z - p_0 \Delta x - q_0 \Delta y,$$

welcher als Mass dieser Abweichung aufgefasst werden kann, ist im Allgemeinen von erster Ordnung in Δt. Es kann jedoch vorkommen, dass der Ausdruck: $\Delta z - p_0 \Delta x - q_0 \Delta y$ von der zweiten Ordnung in Δt wird. Dann weicht der Punkt $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z$ von der Ebene des Elements x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 nur um eine Grösse ab, welche unendlich klein ist im Vergleich zu der Abweichung der beiden Punkte x_0, y_0, z_0 und $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z$ von einander. Wir sagen in diesem Falle, dass *die beiden Elemente* x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 *und* $x_0 + \Delta x, \cdots$ *unsrer Schaar vereinigt liegen.*

Diese Definition kann die folgende schärfere Fassung erhalten:

In der Schaar der ∞^1 Elemente:

$$x = \alpha(t), \quad y = \beta(t), \quad z = \gamma(t), \quad p = \pi(t), \quad q = \varkappa(t)$$

liegt das Element t_0 mit dem unendlich benachbarten Elemente $t_0 + \Delta t$ der Schaar vereinigt, wenn der Ausdruck:

$$\frac{dz}{dt} - p\frac{dx}{dt} - q\frac{dy}{dt}$$

für $t = t_0$ verschwindet, ohne dass $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}$ alle fünf für $t = t_0$ den Werth Null erhalten.

Verschwindet der Ausdruck $\frac{dz}{dt} - p\frac{dx}{dt} - q\frac{dy}{dt}$ für alle Werthe von t, so bildet die in Rede stehende Schaar von ∞^1 Elementen eine Element-M_1; demnach liegt in einer Element-M_1 jedes Element mit dem unendlich benachbarten vereinigt.

Haben wir andrerseits eine Element-M_2, so bildet jede in derselben enthaltene Schaar von ∞^1 Elementen eine Element-M_1 und in dieser liegt jedes Element mit dem unendlich benachbarten vereinigt; wir können uns daher kürzer auch so ausdrücken: in einer Element-M_2 liegt jedes Element mit jedem unendlich benachbarten vereinigt.

Dass alle Elemente einer Fläche eine Element-M_2 bilden, beruht darauf, dass von der Tangentialebene dieser Fläche im Punkte x, y, z jeder unendlich benachbarter Punkt $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ der Fläche nur um eine Grösse abweicht, welche unendlich klein ist im Vergleich zu der Abweichung der beiden Punkte x, y, z und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ von einander. Aehnliches gilt, wenn die Element-M_2 aus allen Elementen einer Curve oder eines Punktes besteht.

Mit Benutzung des Begriffs der vereinigten Lage zweier unendlich benachbarter Elemente können wir die *Berührungstransformationen* des Raumes x, y, z geradezu definiren als *diejenigen Elementtransformationen, welche unendlich benachbarte vereinigt liegende Elemente in ebensolche überführen*, ferner *eine Elementmannigfaltigkeit als eine solche Schaar von Elementen, in welcher jedes Element mit jedem unendlich benachbarten Elemente der Schaar vereinigt liegt.*

Der früher abgeleitete Satz, dass eine Berührungstransformation jede Elementmannigfaltigkeit in eine Elementmannigfaltigkeit verwandelt, erscheint als selbstverständlich, wenn die soeben aufgestellten Definitionen zu Grunde gelegt werden.

§ 17.

Haben zwei Element-M_2 ein und nur ein Element gemein, so sind die ihnen entsprechenden Punktgebilde entweder zwei Flächen, die sich in einem Punkte berühren, oder eine Fläche und eine Curve von derselben Beschaffenheit oder eine Fläche und ein Punkt auf ihr oder endlich zwei sich schneidende Curven. Haben dagegen die beiden Element-M_2 gerade ∞^1 Elemente gemein, so entsprechen ihnen entweder zwei Flächen, welche sich längs einer Curve berühren, oder eine Fläche und eine auf ihr liegende Curve, (oder eine Fläche mit einem ihrer Doppelpunkte) oder zwei Curven, die sich in einem Punkte berühren, oder endlich eine Curve und ein Punkt auf ihr; die gemeinsamen ∞^1 Elemente bilden in jedem dieser Fälle eine Element-M_1.

Führen wir nun eine Berührungstransformation aus, so gehen zwei Element-M_2, welche ein Element oder ∞^1 solche gemein haben, in zwei Element-M_2 über, die in derselben Beziehung stehen. Folglich verwandelt jede Berührungstransformation zwei Flächen, die sich in *einem* Punkte berühren, entweder in zwei Flächen von derselben

Beschaffenheit oder in eine Fläche und eine Curve, die sich in einem Punkte berühren, oder in eine Fläche und einen Punkt darauf oder in zwei sich schneidende Curven. Dagegen führt sie zwei Flächen, die sich längs einer Curve berühren, entweder in zwei ebensolche Flächen über oder in eine Fläche mit einer Curve darauf oder u. s. w.

Jetzt können wir uns rein geometrisch klar machen, in welcher Weise eine vorgelegte Berührungstransformation die *Punkt*mannigfaltigkeiten des Raumes transformirt.

Zunächst wollen wir annehmen, dass sich aus den Gleichungen der Berührungstransformation nur eine Relation:

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1 allein ableiten lässt.

Ertheilen wir x, y, z die festen Werthe: x^0, y^0, z^0, betrachten wir also die ∞^2 Elemente x, y, z, p, q des Punktes: $x = x^0$, $y = y^0$, $z = z^0$, so erhalten wir als Ort der entsprechenden Elemente: x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 die Fläche:

$$\Omega(x^0, y^0, z^0, x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Unsere Berührungstransformation verwandelt demnach den Punkt x^0, y^0, z^0 in die Fläche $\Omega(x^0, y^0, z^0, x_1, y_1, z_1) = 0$. Umgekehrt verwandelt sie die Fläche:

$$\Omega(x, y, z, x_1^0, y_1^0, z_1^0) = 0$$

in den Punkt: $x_1 = x_1^0$, $y_1 = y_1^0$, $z_1 = z_1^0$.

Das bemerkten wir ja schon in Satz 9, S. 63.

Wollen wir zu einer beliebigen Fläche: $\varphi(x, y, z) = 0$ die Punktmannigfaltigkeit $\varphi_1(x_1, y_1, z_1) = 0, \cdots$ finden, in welche sie von unsrer Berührungstransformation übergeführt wird, so können wir in verschiedenen Weisen verfahren.

Ist x^0, y^0, z^0 irgend ein Punkt der Fläche $\varphi = 0$, so berührt die Bildfläche: $\Omega(x^0, y^0, z^0, x_1, y_1, z_1) = 0$ desselben die gesuchte Punktmannigfaltigkeit $\varphi_1(x_1, y_1, z_1) = 0, \cdots$; *also ist die letztere nichts anderes als die Umhüllungsfigur der ∞^2 Flächen:*

$$\Omega(x^0, y^0, z^0, x_1, y_1, z_1) = 0,$$

wo die drei Parameter x^0, y^0, z^0 an die Bedingung: $\varphi(x^0, y^0, z^0) = 0$ gebunden sind. Man erhält daher die gesuchte Punktmannigfaltigkeit $\varphi_1 = 0, \cdots$, wenn man alle zweireihigen Determinanten der beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial \Omega(x^0 \cdots z_1)}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial \Omega}{\partial y^0} dy^0 + \frac{\partial \Omega}{\partial z^0} dz^0 = 0$$

$$\frac{\partial \varphi(x^0, y^0, z^0)}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial \varphi}{\partial y^0} dy^0 + \frac{\partial \varphi}{\partial z^0} dz^0 = 0$$

der Null gleich setzt und aus den so gefundenen Relationen:

$$\frac{\frac{\partial \Omega(x^0 \cdots z_1)}{\partial x^0}}{\frac{\partial \varphi(x^0, y^0, z^0)}{\partial x^0}} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y^0}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y^0}} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial z^0}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z^0}}$$

mit Hülfe von $\varphi(x^0, y^0, z^0) = 0$ und $\Omega(x^0 \cdots z_1) = 0$ die Grössen x^0, y^0, z^0 fortschafft.

Ein anderes Verfahren ist das folgende:

Die gegebene Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ wird von gewissen der Flächen

$$\Omega(x, y, z, x_1^0, y_1^0, z_1^0) = 0$$

berührt und diese Flächen gehen bei unsrer Berührungstransformation in die Punkte der gesuchten Bildmannigfaltigkeit von $\varphi = 0$ über. Folglich sind die Relationen, welche zwischen x_1^0, y_1^0, z_1^0 bestehen müssen, damit die Fläche $\Omega(x \cdots z_1^0) = 0$ die Fläche $\varphi = 0$ berührt, eben die Gleichungen der gesuchten Punktmannigfaltigkeit. Man findet diese Relationen, wenn man x, y, z aus den Gleichungen:

$$\frac{\frac{\partial \Omega(x \cdots z_1^0)}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial z}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}$$

mit Hülfe von $\varphi(x, y, z) = 0$ und $\Omega(x \cdots z_1^0) = 0$ eliminirt. Das Ergebniss ist natürlich dasselbe wie vorhin.

Wir können endlich rein analytisch zu Werke gehen.

Unsre Berührungstransformation wird dargestellt durch die Gleichungen:

$$(33) \quad \begin{cases} \Omega(x \cdots z_1) = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} + p \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} + q \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} + q_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = 0. \end{cases}$$

Die ∞^2 Elemente der Fläche $\varphi = 0$ sind definirt durch:

$$(34) \quad \varphi(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Eliminirt man nun aus (33) und (34) die Grössen x, y, z, p, q, so erhält man die Gleichungen der Element-M_2, in welche die Element-M_2 (34) übergeht. Eliminirt man endlich noch p_1 und q_1, so ergeben sich die Gleichungen der Punktmannigfaltigkeit, in welche sich die Fläche $\varphi = 0$ verwandelt. Man sieht sofort, dass diese Methode auf dieselben Rechnungen führt, wie die beiden ersten.

Ist endlich eine Curve vorgelegt, so findet man die Punktmannigfaltigkeit, in welche sie übergeht, folgendermassen:

Die Curve hat mit jedem ihrer ∞^1 Punkte gerade ∞^1 Elemente gemein; ihre ∞^1 Punkte verwandeln sich aber in ∞^1 Flächen der Schaar: $\Omega(x^0, y^0, z^0, x_1, y_1, z_1) = 0$, also geht die Curve über in die Umhüllungsfigur dieser ∞^1 Flächen.

Umgekehrt verwandelt sich die Umhüllungsfigur von irgend ∞^1 Flächen der Schaar: $\Omega(x, y, z, x_1^0, y_1^0, z_1^0) = 0$ stets in eine Curve.

Beispiele. Die Berührungstransformation, welche durch die Gleichung:

$$\Omega = z + z_1 + xx_1 + yy_1 = 0$$

definirt ist, verwandelt, wie auf S. 64 gezeigt wurde, jeden Punkt x, y, z in seine Polarebene in Bezug auf die Fläche zweiten Grades:

$$2z + x^2 + y^2 = 0.$$

Infolgedessen verwandelt sie überhaupt jede Punktfigur in ihre Polarfigur in Bezug auf diese Fläche. Im Allgemeinen geht eine Fläche wieder in eine Fläche über, nur die abwickelbaren Flächen verwandeln sich in Curven, die Ebenen insbesondere in Punkte. Curven gehen im Allgemeinen in abwickelbare Flächen über, nur die Geraden verwandeln sich in Curven, nämlich wieder in Gerade.

Man sieht, dass die betreffende Berührungstransformation nichts anderes ist, als die *Poncelet*sche Transformation durch reciproke Polaren, welche übrigens schon vor *Poncelet* von *Legendre* benutzt worden ist.

Auch die auf S. 52 angegebene Berührungstransformation (16), welche durch die Gleichung:

$$(x - x_1)x_1 + (y - y_1)y_1 + (z - z_1)z_1 = 0$$

definirt war, ist eine sehr bekannte Transformation, sie verwandelt nämlich jede Fläche: $\varphi(x, y, z) = 0$ in ihre *Fusspunktfläche* in Bezug auf den Coordinatenanfang.

Untersuchen wir jetzt eine Berührungstransformation, aus deren Gleichungen sich gerade zwei unabhängige Relationen

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \qquad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

zwischen x, y, z und x_1, y_1, z_1 allein ableiten lassen.

Den Elementen durch den Punkt x^0, y^0, z^0 ordnet diese Berührungstransformation nach Satz 9, S. 63 die Elemente der Curve:

$$\Omega_1(x^0, y^0, z^0, x_1, y_1, z_1) = 0, \qquad \Omega_2(x^0 \cdots z_1) = 0$$

zu, *sie verwandelt also den Punkt* x^0, y^0, z^0 *in die soeben genannte Curve; dementsprechend führt sie die Curve:*

$$\Omega_1(x, y, z, x_1^0, y_1^0, z_1^0) = 0, \qquad \Omega_2(x \cdots z_1^0) = 0$$

in den Punkt mit den Coordinaten x_1^0, y_1^0, z_1^0 *über.*

Die ∞^2 Punkte x^0, y^0, z^0 einer vorgelegten Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ gehen bei unsrer Berührungstransformation in ∞^2 Curven über, deren analytischer Ausdruck die beiden Gleichungen:

$$\Omega_1(x^0, y^0, z^0, x_1, y_1, z_1) = 0, \qquad \Omega_2(x^0 \cdots z_1) = 0$$

sind, in welchen zwischen den drei Parametern x^0, y^0, z^0 die Relation $\varphi(x^0, y^0, z^0) = 0$ besteht. Jede dieser ∞^2 Curven berührt die Punktmannigfaltigkeit, in welche die Fläche $\varphi = 0$ bei der Berührungstransformation verwandelt wird, folglich *haben unsre* ∞^2 *Curven eine Umhüllungsfigur* (*Fläche, Curve oder Punkt*), *eben die Figur, in welche die Fläche* $\varphi = 0$ *übergeht.*

Man kann aber auch so verfahren: Unter den Curven der Schaar:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1^0, y_1^0, z_1^0) = 0, \qquad \Omega_2(x \cdots z_1^0) = 0$$

giebt es gewisse, welche die Fläche $\varphi = 0$ berühren; dieselben werden durch Relationen zwischen den Parametern x_1^0, y_1^0, z_1^0 definirt; bei der Berührungstransformation verwandeln sich die betreffenden Curven in die Punkte derjenigen Punktmannigfaltigkeit, in welche die Fläche $\varphi = 0$ übergeht, also sind die eben definirten Relationen zwischen x^0, y^0, z^0 die Gleichungen dieser Punktmannigfaltigkeit.

Endlich sei eine Curve gegeben. Dieselbe hat mit jedem ihrer ∞^1 Punkte ∞^1 Elemente gemein, die Punktmannigfaltigkeit, in welche sie übergeht, ist daher die Umhüllungsfigur derjenigen ∞^1 Curven, in welche sich ihre ∞^1 Punkte verwandeln. Oder auch so: die vorgelegte Curve wird von gewissen unter den Curven:

$$\text{(A)} \qquad \Omega_1(x, y, z, x_1^0, y_1^0, z_1^0) = 0, \qquad \Omega_2(x \cdots z_1^0) = 0$$

geschnitten; diese Curven gehen in die Punkte der Bildmannigfaltigkeit über, man erhält also die Gleichungen dieser Mannigfaltigkeit, wenn man diejenigen Relationen zwischen x_1^0, y_1^0, z_1^0 aufstellt, welche bestehen müssen, damit die Curve (A) die vorgelegte Curve schneidet.

Beispiel. Die Berührungstransformation, welche durch die beiden Gleichungen:

$$z + z_1 + x x_1 = 0, \qquad y - y_1 = 0$$

definirt wird (vgl. S. 53 und S. 64), führt jeden Punkt in eine Gerade über; eine Curve verwandelt sie im Allgemeinen in eine geradlinige Fläche, welche die unendlich ferne Gerade der zx-Ebene enthält; endlich geht eine Fläche in die Brennfigur eines gewissen Strahlensystems über, also im Allgemeinen wieder in eine Fläche; man kann insbesondere diejenigen Flächen, welche in Curven übergehen, sehr leicht angeben.

Bemerkenswerth ist die eben besprochene Berührungstransformation u. A. deswegen, weil sie ein-eindeutig ist.

§ 18.

Zur Vorbereitung auf die Entwickelungen des nächsten Kapitels wollen wir hier einige Bemerkungen anfügen, welche sich auf das Problem der Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{35}$$

beziehen.

Setzt man, wie es üblich ist:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

so erhält die partielle Differentialgleichung (35) die Form

$$\Phi(x, y, z, p, q) = 0, \tag{35'}$$

und *das Problem ihrer Integration*, wie es gewöhnlich aufgefasst wird, kommt darauf hinaus, alle Gleichungensysteme von der Form:

$$z - F(x, y) = 0, \quad p - \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad q - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{36}$$

zu bestimmen, welche die Gleichung (35') umfassen. Ist ein derartiges Gleichungensystem gefunden, so wird die Gleichung (35') bei der Substitution:

$$z = F(x, y), \quad p = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

identisch erfüllt; bei derselben Substitution wird aber auch die *Pfaff*sche Gleichung $dz - pdx - qdy = 0$ identisch befriedigt.

Das Integrationsproblem einer Gleichung (35) kann daher durch das allgemeinere Problem ersetzt werden: *man soll alle dreigliedrigen Gleichungensysteme:*

$$\Phi_1(x, y, z, p, q) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z, p, q) = 0, \quad \Phi_3(x, y, z, p, q) = 0$$

finden, welche die Pfaffsche Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ befriedigen und dabei die Gleichung (35') *umfassen;* geometrisch ausgesprochen: *Unter den ∞^5 Flächenelementen x, y, z, p, q des Raumes x, y, z ist durch die Gleichung: $\Phi(x, y, z, p, q) = 0$ eine Schaar von ∞^4 Elementen definirt; man soll alle Element-M_2 finden, deren Elemente dieser Schaar von ∞^4 Elementen angehören,* kürzer: *man soll alle Element-M_2 der Gleichung* (35') *finden.*

Um den Unterschied zwischen dieser Formulirung des Integrationsproblems und der gewöhnlichen klar zu machen, entwickeln wir zunächst die Integrationstheorie einer *linearen* partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$X(x, y, z) . p + Y(x, y, z) . q - Z(x, y, z) = 0 \tag{37}$$

in ihren Hauptzügen.

Unter den ∞^4 Elementen x, y, z, p, q, welche die Gleichung (37) definirt, betrachten wir die ∞^1, welche einen und denselben Punkt: x, y, z haben. Die ∞^1 Ebenen:

$$p(\mathfrak{x} - x) + q(\mathfrak{y} - y) - (\mathfrak{z} - z) = 0$$

dieser ∞^1 Elemente bilden ein Büschel, dessen Axe die Gerade:

$$\frac{\mathfrak{x} - x}{X(x, y, z)} = \frac{\mathfrak{y} - y}{Y(x, y, z)} = \frac{\mathfrak{z} - z}{Z(x, y, z)}$$

ist. Denken wir uns nun jedem Punkte x, y, z des Raumes die Axe des zugehörigen Büschels als Fortschreitungsrichtung zugeordnet, so erhalten wir als analytische Definition der betreffenden Fortschreitungsrichtungen ein simultanes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, nämlich das folgende:

$$\frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)}. \tag{38}$$

Es liegt auf der Hand, dass jedes Flächenelement x, y, z, p, q einer jeden Integralcurve dieses simultanen Systems der Gleichung (37) genügt; folglich *sind die ∞^2 Integralcurven des Systems* (38), *als Elementmannigfaltigkeiten aufgefasst, Element-M_2 der Gleichung* (37).

Greift man unter den ∞^2 Integralcurven von (38) nach irgend einem analytischen Gesetz ∞^1 verschiedene heraus, so genügen offenbar auch alle Elemente der von diesen ∞^1 Curven gebildeten Fläche wiederum der Gleichung (37); die betreffende Fläche ist daher eine Element-M_2 der Gleichung (37).

Das stimmt mit dem von *Lagrange* herrührenden Satze, dass jede Fläche, welche von ∞^1 Integralcurven des Systems (38) erzeugt ist, eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (37) ist. Es wäre jetzt leicht noch den ebenfalls von *Lagrange* herrührenden Satz zu beweisen, dass man in dieser Weise alle Integralflächen von (37) findet; doch wollen wir darauf nicht näher eingehen.

Wir haben gesehen, dass es unter den Element-M_2 einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (37) immer ∞^2 solche giebt, die als Punktgebilde betrachtet Curven sind; es sind das ja die ∞^2 Integralcurven des simultanen Systems (38).*)

---

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1871; Göttinger Nachrichten 1872; Math. Ann. Bd. V.

Ist umgekehrt eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung so beschaffen, dass es unter ihren Element-M_2 ∞^2 Curven giebt, welche den ganzen Raum erfüllen, so ist diese Differentialgleichung, wie man sich leicht überzeugt, eine lineare. Das Vorhandensein von ∞^2 derartigen Element-M_2 ist also für die linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung charakteristisch.

Nach *Lagranges* Auffassung gilt eine Gleichung von der Form:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

nur dann als eine Differentialgleichung, wenn sie wenigstens eine der beiden Grössen: p, q enthält.

Von dem Standpunkte aus, den wir hier eingenommen haben, erscheinen die von p und q freien Gleichungen mit den andern, welche wenigstens eine der beiden Grössen p, q enthalten, vollkommen gleichberechtigt. Denn auch jede Gleichung von der Form: $F(x, y, z) = 0$ bestimmt unter den ∞^5 Elementen des Raumes eine Schaar von ∞^4, nämlich die Schaar aller Elemente, deren Punkte auf der Fläche: $F(x, y, z) = 0$ liegen. Aber allerdings sind die Gleichungen von der Form: $F(x, y, z) = 0$ insofern ausgezeichnet, als man für jede solche Gleichung ohne Weiteres alle ihre Element-M_2 angeben kann. Eine Element-M_2 der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ ist nämlich *erstens* die Fläche: $F(x, y, z) = 0$, *zweitens* jeder Punkt auf dieser Fläche und *drittens* jede Curve dieser Fläche. Es leuchtet ein, dass damit alle Element-M_2 der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ angegeben sind.

Endlich noch einige Bemerkungen über Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung im gewöhnlichen Raume.

Ist ein zweigliedriges Gleichungensystem von der Form:

(39) $$F_1(x, y, z, p, q) = 0, \quad F_2(x, y, z, p, q) = 0$$

vorgelegt, so sind drei Fälle möglich: entweder ist das Gleichungensystem nach p und q auflösbar oder es ist zwar nicht danach auflösbar, aber es enthält doch wenigstens eine der beiden Grössen p, q, oder endlich es ist überhaupt von p und q frei.

Betrachten wir zunächst den *ersten* Fall und denken wir uns die Auflösung nach p und q ausgeführt:

(40) $$p = \Pi(x, y, z), \quad q = K(x, y, z).$$

Diese Gleichungen definiren ∞^3 Flächenelemente, unter denen jedem Punkte eines zugeordnet ist. Wenn nun die totale Differentialgleichung:

(41) $$dz - \Pi dx - K dy = 0$$

unbeschränkt integrabel ist, so besteht eine Identität von der Form:

$$dz - \Pi dx - K dy \equiv \varrho(x, y, z) \,.\, d\varphi(x, y, z)$$

und die Elemente einer jeden der ∞^1 Flächen: $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$ erfüllen die beiden Gleichungen (40); anders ausgesprochen: die ∞^3 Elemente, welche durch das Gleichungensystem (40) bestimmt sind, ordnen sich zu ∞^1 Element-M_2 zusammen. Wenn dagegen die totale Differentialgleichung (41) nicht unbeschränkt integrabel ist, so lassen sich die besprochenen ∞^3 Elemente nicht zu ∞^1 Element-M_2 zusammenordnen.

Wir kommen jetzt zum *zweiten* Fall, in welchem das Gleichungensystem (39) sich auf die Form:

$$(42) \qquad \Phi(x, y, z) = 0, \qquad \Omega(x, y, z, p, q) = 0$$

bringen lässt, wo das Ω jedenfalls eine der beiden Grössen p, q enthält. Die Gleichungen (42) definiren ∞^3 Elemente, deren Punkte die Fläche: $\Phi = 0$ erfüllen und zwar gehen durch jeden Punkt der Fläche ∞^1 derartige Elemente. Bilden nun die Ebenen dieser ∞^1 Elemente jedesmal ein Büschel, dessen Axe die Fläche: $\Phi = 0$ berührt, so giebt es auf der Fläche: $\Phi = 0$ ∞^1 Curven, welche in jedem ihrer Punkte die Axe des zu dem Punkte gehörigen Büschels von Elementen zur Tangente haben. Die so definirten ∞^1 Curven sind dann ∞^1 Element-M_2, deren Elemente die beiden Gleichungen (42) erfüllen; zugleich ist offenbar die Fläche: $\Phi = 0$ selbst eine Element-M_2 von dieser Beschaffenheit. Umgekehrt: wenn die ∞^3 durch (42) definirten Elemente sich zu ∞^1 Element-M_2 zusammenordnen, so sind diese Element-M_2 nothwendig Curven, welche auf der Fläche $\Phi = 0$ liegen, und es ordnen sich in Folge dessen die ∞^3 besprochenen Elemente in ∞^2 Büschel, deren Axen die Fläche: $\Phi = 0$ berühren.

Uebrig bleibt der *dritte* Fall, in welchem das Gleichungensystem (39) p und q gar nicht enthält und daher die Form besitzt:

$$(43) \qquad F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0.$$

Die ∞^3 Elemente, welche durch diese Gleichungen bestimmt sind, lassen sich auch definiren als diejenigen ∞^3 Elemente, deren Punkte auf der Curve: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ liegen. Sie ordnen sich immer in ∞^1 Element-M_2 zusammen, nämlich die ∞^1 Punkte dieser Curve sind sämmtlich Element-M_2, welche den Gleichungen (43) genügen; eine solche Element-M_2 ist übrigens auch die Curve: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ selbst.

Endlich bestimmt ein dreigliedriges Gleichungensystem von der Form:

$$F_1(x, y, z, p, q) = 0, \quad F_2(x, y, z, p, q) = 0, \quad F_3(x, y, z, p, q) = 0$$

gerade ∞^2 Elemente, welche natürlich nur bei besonderer Beschaffenheit der Functionen F_1, F_2, F_3 eine Element-M_2 bilden. Diese Element-M_2 ist dann entweder eine Fläche, oder eine Curve oder ein Punkt.

§ 19.

Die Gleichungen:

(44) $x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y, \quad z_1 = Z, \quad p_1 = P, \quad q_1 = Q$

mögen eine Berührungstransformation darstellen.

Verstehen wir unter a, b, c irgend welche Constanten, so bestimmen die Gleichungen:

$$X(x, y, z, p, q) = a, \qquad Y = b, \qquad Z = c,$$

diejenigen ∞^2 Flächenelemente, welche bei der Berührungstransformation (44) in die ∞^2 Elemente des Punktes: $x_1 = a$, $y_1 = b$, $z_1 = c$ übergehen (vgl. S. 62 f.), sie bestimmen also die ∞^2 Elemente einer Element-M_2. Damit haben wir den

Satz 10. *Ist:*

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y, \quad z_1 = Z, \quad p_1 = P, \quad q_1 = Q$$

eine Berührungstransformation des Raumes x, y, z, so stellt das Gleichungensystem:

$$X(x, y, z, p, q) = a, \qquad Y = b, \qquad Z = c$$

stets eine Element-M_2 dieses Raumes dar, welche festen Werthe man auch den a, b, c ertheilen mag. Diese Element-M_2 wird von der Berührungstransformation in den Punkt: $x_1 = a$, $y_1 = b$, $z_1 = c$ übergeführt.

Hiermit haben wir eine bemerkenswerthe analytische Darstellung für die ∞^3 Element-M_2, welche von der Berührungstransformation (44) in die ∞^3 Punkte x_1, y_1, z_1 des Raumes übergeführt werden. Die betreffenden ∞^3 Element-M_2 sind als Punktgebilde entweder Flächen oder Curven oder Punkte, je nach der Zahl der unabhängigen Relationen zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1 allein, welche aus den Gleichungen: $x_1 = X$, $y_1 = Y$, $z_1 = Z$ durch Elimination von p und q folgen.

Wir zeigen später, dass man stets eine Berührungstransformation erhält, wenn man ∞^3 Element-M_2 des Raumes x, y, z nimmt, deren Elemente x, y, z, p, q keine Relation von der Form: $F(x, y, z, p, q) = 0$ befriedigen, und wenn man diesen ∞^3 Element-M_2 die ∞^3 Punkte x_1, y_1, z_1 des Raumes nach irgend einem analytischen Gesetze derart zuordnet, dass jeder Element-M_2 ein Punkt und jedem Punkte eine Element-M_2 entspricht. Es giebt dann immer eine und nur eine Berührungstransformation, welche jede der gewählten ∞^3 Element-M_2 in den zugeordneten Punkt überführt.

Den Beweis hierfür werden wir später bringen, ebenso die Ableitung gewisser Differentialgleichungen, durch welche die Functionen X, Y, Z, P, Q in einer beliebigen Berührungstransformation (44) verknüpft sind.

§ 20.

Hier mögen noch einige interessante specielle Theorien angedeutet werden.*) Dieselben werden aber in den folgenden Kapiteln *nicht benutzt.* Geht bei einer Berührungstransformation eine bestimmte Fläche F wieder in eine Fläche F_1 über, so entspricht jedem Punkte von F ein bestimmter Punkt von F_1, jeder Curve auf F entspricht also eine Curve auf F_1. Man kann daher zum Beispiel nach allen Berührungstransformationen fragen, bei welchen den Haupttangentencurven einer Fläche stets die Haupttangentencurven der transformirten Fläche entsprechen.

Bei einer Berührungstransformation von der verlangten Beschaffenheit geht jede Gerade g, welche auf einer Fläche F liegt, in eine gewisse Element-M_2 g_1 über, welche die transformirte Fläche F_1 längs einer Haupttangentencurve berührt. Hieraus lässt sich schliessen: wenn g_1 eine ganz beliebige Fläche Φ_1 längs irgend einer Curve berührt, so ist diese Curve eine Haupttangentencurve der Fläche Φ_1. Folglich sind die g_1 als Punktmannigfaltigkeiten entweder Ebenen oder gerade Linien; da aber den ∞^4 Geraden g ∞^4 verschiedene g_1 entsprechen müssen, können es nur gerade Linien sein.

Die gesuchten Berührungstransformationen führen also Gerade in Gerade über, und zwar Gerade, die sich schneiden, das heisst, die ein Element gemein haben, in ebensolche. Nun hat jede Ebene mit ∞^2 verschiedenen Geraden je ∞^1 Elemente gemein, ebenso jeder Punkt; ausser den Ebenen und den Punkten aber giebt es keine Element-M_2 von dieser Beschaffenheit. Folglich verwandeln die gesuchten Berührungstransformationen entweder die Punkte in Punkte und die Ebenen in Ebenen oder die Punkte in Ebenen und die Ebenen in die Punkte, kurz wir erhalten blos die projectiven und die dualistischen Transformationen:

Satz 11. *Ordnet eine Berührungstransformation des Raumes x, y, z den Haupttangentencurven einer jeden Fläche, welche sie wieder in eine Fläche verwandelt, stets die Haupttangentencurven der transformirten Fläche zu, so ist sie entweder eine projective oder eine dualistische Transformation dieses Raumes.***)

Man kann weiter nach allen Berührungstransformationen fragen, bei welchen Krümmungslinien in Krümmungslinien übergehen.

---

*) Vgl. Lie, Over en Classe geometriske Transformationer, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1871 und Ueber Complexe insbesondere Linien- und Kugel-Complexe, Math. Ann. Bd. V. Diese Abhandlungen enthalten eine eingehende wenn auch kurzgefasste *geometrische* Theorie der Berührungstransformationen des Raumes; unter Anderem entwickeln sie die Haupteigenschaften einer merkwürdigen Berührungstransformation, welche gerade Linien in Kugeln verwandelt. Diese Transformation und die *Poncelet*sche Transformation durch reciproke Polaren sind die wichtigsten Berührungstransformationen des Raumes.

**) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1871, S. 107.

Zur Beantwortung dieser Frage beachte man, dass auf den Kugeln jede Curve Krümmungslinie ist, und dass die Kugeln abgesehen von den Integralflächen der Differentialgleichung:

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$$

die einzigen Flächen sind, welche diese Eigenschaft besitzen. Da es nun keine Curve giebt, welche auf allen durch sie gehenden Flächen Krümmungslinie ist, und da andererseits die ∞^4 Kugeln des Raumes keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung befriedigen, so kann man schliessen, dass die gesuchten Berührungstransformationen jede Kugel in eine Kugel überführen.

Wählt man die Mittelpunktscoordinaten α, β, γ und den Halbmesser r als Bestimmungsstücke einer Kugel und sind α_1, β_1, γ_1, r_1 die Bestimmungsstücke derjenigen Kugel, in welche die Kugel α, β, γ, r bei einer der gesuchten Berührungstransformationen übergeht, so bestehen Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= A(\alpha, \beta, \gamma, r), \\ \beta_1 &= B(\alpha, \beta, \gamma, r), \\ \gamma_1 &= \Gamma(\alpha, \beta, \gamma, r), \\ r_1 &= R(\alpha, \beta, \gamma, r). \end{aligned}$$

Da ausserdem beliebige also auch unendlich benachbarte Kugeln, welche sich berühren, in Kugeln von derselben Beschaffenheit übergehen sollen, so muss eine Bedingungsgleichung von der Form:

$$d\alpha_1^2 + d\beta_1^2 + d\gamma_1^2 - dr^2 = \varrho(\alpha, \beta, \gamma, r) \,.\, (d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 - dr^2)$$

erfüllt sein.

Hieraus kann man die gesuchten Berührungstransformationen ohne Schwierigkeit bestimmen, doch unterlassen wir die weitere Ausführung.

Endlich kann man alle Berührungstransformationen suchen, welche Haupttangentencurven in Krümmungslinien verwandeln.

Ueber diese Transformationen möge hier nur bemerkt werden, dass sie die geraden Linien des Raumes in die Kugeln überführen. Man erkennt das sehr leicht.

Kapitel 4.

Verallgemeinerung des Problems der Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Als wir von der Ebene x, y zum Raume x, y, z übergingen, erhielten wir an Stelle der Pfaffschen Gleichung: $dy - y'dx = 0$ die allgemeinere: $dz - pdx - qdy = 0$. Wir gehen jetzt noch weiter und betrachten bei beliebigem n die Pfaffsche Gleichung:

$$(1) \qquad dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0.$$

§ 21.

Die erste Aufgabe, welche wir uns stellen, ist die, in den $2n+1$ Veränderlichen: $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ alle Gleichungensysteme zu bestimmen, welche die Pfaffsche Gleichung (1) erfüllen.

Wird die Pfaffsche Gleichung $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ von dem Gleichungensysteme:

$$\text{(A)} \qquad W_1(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0, \quad W_2 = 0, \cdots$$

erfüllt, so besteht sie vermöge der vereinigten Gleichungen:

$$\text{(B)} \qquad W_1 = 0, \; W_2 = 0, \cdots, \; dW_1 = 0, \; dW_2 = 0, \cdots.$$

Möglich ist das nur, wenn aus (A) mindestens eine Relation zwischen $z, x_1 \cdots x_n$ allein folgt, denn die Coefficienten der Pfaffschen Gleichung (1) können ja nicht sämmtlich vermöge (A) verschwinden (vgl. S. 42 f.). Nehmen wir daher an, dass aus (A) gerade $q+1$ unabhängige Relationen:

$$\text{(2)} \qquad \Omega_1(z, x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_{q+1}(z, x_1 \cdots x_n) = 0$$

zwischen $z, x_1 \cdots x_n$ allein folgen.

Unter diesen Voraussetzungen umfasst (A) nach S. 42 ausser den Gleichungen (2) jedenfalls noch alle die, welche aus:

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \cdots + \lambda_{q+1} \dfrac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial z} = 1 \\ \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_{q+1} \dfrac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial x_i} = -p_i \end{cases}$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

durch Fortschaffung von $\lambda_1 \cdots \lambda_{q+1}$ entstehen. Ferner ist das Gleichungensystem: $\Omega_1(z, x) = 0, \cdots \Omega_{q+1}(z, x) = 0$ nothwendig nach z und q von den x auflösbar. Enthielte es nämlich z gar nicht oder nur formell, wäre es also mit einem von z freien Systeme:

$$O_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots O_{q+1}(x_1 \cdots x_n) = 0$$

äquivalent, so würden die Gleichungen (B) zwischen den Grössen: $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ und den Differentialen: $dz, dx_1 \cdots dx_n$ keine weiteren Relationen liefern als die Gleichungen (A) und die Differentialgleichungen: $dO_1 = 0 \cdots dO_{q+1} = 0$. Diese Relationen aber sind von dz frei und werden durch die Substitution $W_i = 0, dx_\varkappa = 0$ bei beliebigem dz erfüllt, was mit der Pfaffschen Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ nicht der Fall ist.

Es sei nun andrerseits:

$$\text{(2')} \qquad \overline{\Omega}_1(z, x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \overline{\Omega}_{q+1}(z, x_1 \cdots x_n) = 0$$

ein beliebiges $(q+1)$-gliedriges Gleichungensystem, welches nach z und q von den x, also etwa nach: $z, x_1 \cdots x_q$ auflösbar ist, so dass die Determinante:

$$\sum \pm \frac{\partial \overline{\Omega}_1}{\partial z} \frac{\partial \overline{\Omega}_2}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \overline{\Omega}_{q+1}}{\partial x_q}$$

nicht vermöge (2′) verschwindet. Wir denken uns (2′) wirklich nach $z, x_1 \cdots x_q$ aufgelöst und tragen die gefundenen Werthe in die $n+1$ Gleichungen:

$$(3') \qquad \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{\partial \overline{\Omega}_1}{\partial z} + \cdots + \lambda_{q+1} \dfrac{\partial \overline{\Omega}_{q+1}}{\partial z} = 1 \\ \lambda_1 \dfrac{\partial \overline{\Omega}_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_{q+1} \dfrac{\partial \overline{\Omega}_{q+1}}{\partial x_i} = -p_i \end{cases}$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

ein; dann werden die $q+1$ ersten der so erhaltenen Gleichungen nach $\lambda_1 \cdots \lambda_{q+1}$ auflösbar sein, und zwar werden sie $\lambda_1 \cdots \lambda_{q+1}$ als Functionen von: $x_{q+1} \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_q$ bestimmen. Endlich setzen wir die gefundenen Werthe von $\lambda_1 \cdots \lambda_{q+1}$ in die $n-q$ letzten der Gleichungen (3′) ein und bekommen auf diese Weise auch noch Ausdrücke für $p_{q+1} \cdots p_n$, so dass die Gleichungen (2′) (3′) nach $z, x_1 \cdots x_q$, $\lambda_1 \cdots \lambda_{q+1}$, $p_{q+1} \cdots p_n$ aufgelöst erscheinen. Hieraus folgt, dass die Gleichungen (2′) (3′) mit einander verträglich sind; sie liefern also (vgl. S. 43) bei Fortschaffung der λ ein Gleichungensystem, welches die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ befriedigt; zugleich ist klar, dass dieses durch Fortschaffung der λ entstehende Gleichungensystem gerade $(n+1)$-gliedrig sein muss, es ist ja nach $z, x_1 \cdots x_q, p_{q+1} \cdots p_n$ auflösbar.

Nach diesen Vorbereitungen können wir ohne Weiteres alle Gleichungensysteme angeben, welche die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

erfüllen.

Soll ein Gleichungensystem unsre Pfaffsche Gleichung erfüllen, so muss es jedenfalls eine gewisse Anzahl, etwa gerade $q+1$ unabhängige Relationen:

$$(2) \qquad \Omega_1(z, x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_{q+1}(z, x_1 \cdots x_n) = 0$$

zwischen $z, x_1 \cdots x_n$ allein liefern. Dabei kann die Zahl q einen jeden der $n+1$ Werthe: $0, 1, 2 \cdots n$ haben und die Functionen $\Omega_1 \cdots \Omega_{q+1}$ sind keiner anderen Beschränkung unterworfen, als dass (2) nach z und nach q von den x auflösbar sein muss. Ausser den Gleichungen (2) umfasst das betreffende Gleichungensystem jedenfalls noch die $n-q$ unabhängigen Gleichungen:

(4) $U_1(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0, \cdots U_{n-q}(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0,$

welche aus (3) durch Fortschaffung von $\lambda_1 \cdots \lambda_{q+1}$ entstehen.

Durch Zusammenfassung von (2) und (4) erhält man ein $(n+1)$-gliedriges Gleichungensystem, welches die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

befriedigt und zwar offenbar das einzige $(n+1)$-gliedrige Gleichungensystem dieser Art, welches zwischen $z, x_1 \cdots x_n$ allein blos die Gleichungen (2) liefert.

Es ist ferner klar, dass jedes Gleichungensystem, welches (2) und (4) umfasst, unsre Pfaffsche Gleichung ebenfalls befriedigt. Da andrerseits alle Gleichungensysteme, welche diese letztere Eigenschaft besitzen und welche zwischen $z, x_1 \cdots x_n$ allein nur die Relationen (2) liefern, nothwendig (2) und (4) umfassen müssen, so sehen wir, dass wir alle derartigen Gleichungensysteme erhalten, wenn wir zu (2) und (4) entweder 0 oder 1, oder 2, $\cdots$ oder $n-1$ Relationen zwischen, $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ hinzufügen. Diese Relationen sind ganz beliebig, nur müssen sie unter einander und mit (2) und (4) verträglich sein und dürfen mit (4) zusammengenommen keine von (2) unabhängige Relation zwischen $z, x_1 \cdots x_n$ allein ergeben.

Damit haben wir den

Satz 1. *Will man in den $2n+1$ Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ alle Gleichungensysteme bestimmen, welche die Pfaffsche Gleichung:*

(1) $$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

befriedigen, so hat man folgendermassen zu verfahren: Unter q verstehe man eine beliebige der Zahlen $0, 1 \cdots n$ und unter $\Omega_1 \cdots \Omega_{q+1}$ irgend $q+1$ solche Functionen von $z, x_1 \cdots x_n$ allein, dass die Gleichungen:

(2) $$\Omega_1(z, x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_{q+1}(z, x_1 \cdots x_n) = 0$$

nach z und nach q von den x auflösbar sind. Dann findet man zunächst das allgemeinste $(n+1)$-gliedrige Gleichungensystem von der verlangten Beschaffenheit, indem man zu (2) diejenigen Gleichungen hinzufügt, welche aus:

(3) $$\begin{cases} \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \cdots + \lambda_{q+1} \dfrac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial z} - 1 = 0 \\ \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_{q+1} \dfrac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial x_i} + p_i = 0 \end{cases}$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

durch Fortschaffung von $\lambda_1 \cdots \lambda_{q+1}$ entstehen. Alle übrigen gesuchten Gleichungensysteme ergeben sich, wenn man zu dem gefundenen $(n+1)$-

gliedrigen Gleichungensysteme in allgemeinster Weise solche Relationen zwischen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ hinzufügt, welche sowohl unter einander als mit dem $(n+1)$-gliedrigen Systeme verträglich sind und welche mit diesem letzteren zusammen keine von (2) unabhängige Relation zwischen $z, x_1 \cdots x_n$ allein liefern.

Zu einer expliciteren Form der besprochenen Gleichungensysteme gelangen wir, wenn wir die Gleichungen (2) in aufgelöster Form zu Grunde legen.

Da $\Omega_1 \cdots \Omega_{q+1}$ nicht sämmtlich von z frei sind, so lässt sich das Gleichungensystem: $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{q+1} = 0$ immer auf die Form bringen:

$$(2'') \quad \begin{cases} z - f(x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n}) = 0, \quad x_{\alpha_1} - f_1(x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n}) = 0, \\ \qquad \cdots x_{\alpha_q} - f_q(x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n}) = 0 \end{cases}$$

wo $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ eine gewisse Reihenfolge der Zahlen $1 \cdots n$ bezeichnet. Bei Benutzung von $(2'')$ erscheinen die Gleichungen (2), (4) in der Gestalt:

$$(4') \quad \begin{cases} z - f = 0, \quad x_{\alpha_1} - f_1 = 0, \cdots x_{\alpha_q} - f_q = 0 \\ p_i - \frac{\partial f}{\partial x_i} + p_{\alpha_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \cdots + p_{\alpha_q} \frac{\partial f_q}{\partial x_i} = 0 \\ \qquad (i = \alpha_{q+1} \cdots \alpha_n). \end{cases}$$

Demnach können wir den Satz aussprechen:

Satz 2. *Erfüllt ein Gleichungensystem in den Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ die Pfaffsche Gleichung:*

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0,$$

so liefert es mindestens eine Relation zwischen $z, x_1 \cdots x_n$ allein. Liefert es gerade $q+1$ unabhängige Relationen dieser Art, so kann man dieselben stets nach z und q von den x auflösen:

$$(2'') \quad z - f(x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n}) = 0, \quad x_{\alpha_i} - f_i(x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n}) = 0 \quad (i = 1 \cdots q).$$

Das Gleichungensystem lässt sich dann entweder auf die Form:

$$(4') \quad \begin{cases} z - f = 0, \quad x_{\alpha_1} - f_1 = 0, \cdots x_{\alpha_q} - f_q = 0 \\ p_i - \frac{\partial f}{\partial x_i} + p_{\alpha_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \cdots + p_{\alpha_q} \frac{\partial f_q}{\partial x_i} = 0 \\ \qquad (i = \alpha_{q+1} \cdots \alpha_n). \end{cases}$$

bringen, wo $f, f_1 \cdots f_q$ beliebige Functionen ihrer Argumente bezeichnen, oder es enthält ausser den Relationen $(4')$ noch gewisse weitere Relationen zwischen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$, welche vollkommen beliebig sind, nur dass sie mit einander und mit $(4')$ verträglich sein müssen und dass sie zusammen mit $(4')$ keine von $(2'')$ unabhängigen Relationen zwischen $z, x_1 \cdots x_n$ allein ergeben dürfen.

Die Gleichungen (4′) lassen sich in einer eleganten Form schreiben. Beachtet man nämlich, dass aus (4′) die Gleichung folgt:

$$z - x_{\alpha_1}p_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}p_{\alpha_2} - \cdots - x_{\alpha_q}p_{\alpha_q} = f - p_{\alpha_1}f_1 - \cdots - p_{\alpha_q}f_q$$

und bezeichnet man die rechte Seite dieser Gleichung kurz mit: $W(x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n},\ p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_q})$, so erhält (4′) die Gestalt:

$$(5)\quad \begin{cases} z - x_{\alpha_1}p_{\alpha_1} - \cdots - x_{\alpha_q}p_{\alpha_q} = W(x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n},\ p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_q}) \\ x_{\alpha_1} = -\dfrac{\partial W}{\partial p_{\alpha_1}},\ \cdots\ x_{\alpha_q} = -\dfrac{\partial W}{\partial p_{\alpha_q}} \\ p_{\alpha_{q+1}} = \dfrac{\partial W}{\partial x_{\alpha_{q+1}}},\ \cdots\ p_{\alpha_n} = \dfrac{\partial W}{\partial x_{\alpha_n}} \end{cases}$$

Das Gleichungensystem (5) befriedigt demnach die Pfaffsche Gleichung (1), wenn W eine solche Function von $x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n},\ p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_q}$ ist, in welcher $p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_q}$ nur linear vorkommen. Bemerkenswerth ist nun, dass diese Eigenschaft des Gleichungensystems (5) auch dann noch erhalten bleibt, wenn W eine ganz beliebige Function seiner Argumente bezeichnet. In der That, wir erhalten aus (5) durch Differentiation:

$$dz - p_{\alpha_1}dx_{\alpha_1} - \cdots - p_{\alpha_q}dx_{\alpha_q} = dW + x_{\alpha_1}dp_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_q}dp_{\alpha_q}$$
$$= dW - \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha_1}}dp_{\alpha_1} - \cdots - \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha_q}}dp_{\alpha_q}.$$

Andererseits aber wird:

$$p_{\alpha_{q+1}}dx_{\alpha_{q+1}} + \cdots + p_{\alpha_n}dx_{\alpha_n} = \frac{\partial W}{\partial x_{\alpha_{q+1}}}dx_{\alpha_{q+1}} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial x_{\alpha_n}}dx_{\alpha_n},$$

also, wenn wir diese Gleichung von der vorhergehenden abziehen:

$$dz - p_1dx_1 - \cdots - p_ndx_n = dW - dW = 0,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Demnach können wir den Satz 2, S. 81 folgendermassen erweitern:

Theorem 9. *Versteht man in den Gleichungen:*

$$(5)\quad \begin{cases} z - x_{\alpha_1}p_{\alpha_1} - \cdots - x_{\alpha_q}p_{\alpha_q} = W(x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n},\ p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_q}) \\ x_{\alpha_1} = -\dfrac{\partial W}{\partial p_{\alpha_1}},\ \cdots\ x_{\alpha_q} = -\dfrac{\partial W}{\partial p_{\alpha_q}} \\ p_{\alpha_{q+1}} = \dfrac{\partial W}{\partial x_{\alpha_{q+1}}},\ \cdots\ p_{\alpha_n} = \dfrac{\partial W}{\partial x_{\alpha_n}} \end{cases}$$

unter q irgend eine der Zahlen $0, 1, 2 \cdots n$, unter $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ irgend eine Reihenfolge der n Zahlen $1, 2 \cdots n$, endlich unter W eine beliebige Function seiner Argumente, so befriedigt das $(n+1)$-gliedrige Gleichungensystem (5) in den Veränderlichen:

$z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ stets die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0.$$

Auf die Form (5) lässt sich jedes $(n+1)$-gliedrige Gleichungensystem bringen, welches diese Pfaffsche Gleichung erfüllt und zwar kann man insbesondere erreichen, dass W eine lineare Function der darin vorkommenden p wird.

*Das allgemeinste Gleichungensystem, welches überhaupt die Pfaffsche Gleichung befriedigt, erhält man, wenn man zu (5) noch 0, oder 1, oder 2, $\cdots$ oder $n-1$ beliebige unabhängige Relationen zwischen $x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n}, p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_n}$ allein hinzufügt.**)

§ 22.

Unter den Gleichungensystemen in $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$, welche die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ erfüllen, giebt es insbesondere solche, welche die Gleichung $z = 0$ umfassen. Ist:

$$z = 0, \quad U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \cdots$$

ein System dieser Art und sind die Functionen $U_1, U_2 \cdots$ sämmtlich von z frei, was sich ja immer erreichen lässt, so befriedigt das Gleichungensystem: $U_1 = 0, U_2 = 0, \cdots$ augenscheinlich die Pfaffsche Gleichung:

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = 0. \tag{6}$$

Erfüllt umgekehrt ein von z freies Gleichungensystem:

$$V_1(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0, \quad V_2 = 0, \cdots$$

die Pfaffsche Gleichung: $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = 0$, so genügt das System:

$$z = 0, \quad V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \cdots$$

der Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$.

Auf Grund dieser Bemerkungen ist es leicht, alle Gleichungensysteme in $x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ anzugeben, welche die Pfaffsche Gleichung: $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = 0$ befriedigen.

Liefert ein Gleichungensystem dieser Art keine Relation zwischen den x allein, so umfasst es die n Gleichungen:

$$p_1 = 0, \cdots p_n = 0$$

und enthält auch keine weiteren. *Liefert es andererseits zwischen $x_1 \cdots x_n$ allein gerade q unabhängige Relationen:*

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_q(x_1 \cdots x_n) = 0, \tag{7}$$

---

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, 1874, S. 201 und 207; vgl. auch Math. Ann. Bd. IX.

so umfasst es ausser (7) zugleich noch die $n-q$ unabhängigen Gleichungen, welche aus:

(8)
$$\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_q \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_i} = p_i$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

durch Fortschaffung der λ entstehen. Weitere Gleichungen braucht es nicht zu enthalten, doch kann es welche enthalten; die sind dann vollkommen willkürlich, nur müssen sie unter einander und mit den bisher gefundenen Gleichungen verträglich sein und dürfen mit diesen zusammen keine von: $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ unabhängigen Relationen zwischen $x_1 \cdots x_n$ allein ergeben. Es liegt endlich auf der Hand, dass die Form des q-gliedrigen Gleichungensystems: $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ gar keiner Beschränkung unterworfen ist.

Bequem ist es die Gleichungen (7) in aufgelöster Form zu Grunde zu legen. Die Darstellung, welche sich auf diese Weise für die in Rede stehenden Gleichungensysteme ergiebt, wollen wir in einem Satze mittheilen:

Satz 3. *Befriedigt ein Gleichungensystem in den $2n$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ die Pfaffsche Gleichung: $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = 0$ und liefert es zwischen den x allein gerade q unabhängige Relationen:*

$$x_{\alpha_1} - \varphi_1(x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n}) = 0, \cdots x_{\alpha_q} - \varphi_q(x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n}) = 0,$$

so kann es entweder die Form erhalten:

(9)
$$\begin{cases} x_{\alpha_1} - \varphi_1 = 0, \cdots x_{\alpha_q} - \varphi_q = 0, \\ p_{\alpha_\nu} + p_{\alpha_1} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\alpha_\nu}} + \cdots + p_{\alpha_q} \dfrac{\partial \varphi_q}{\partial x_{\alpha_\nu}} = 0, \end{cases}$$
$$(\nu = q + 1 \cdots n)$$

*wo $\varphi_1 \cdots \varphi_q$ beliebige Functionen ihrer Argumente bezeichnen, oder es umfasst ausser den Gleichungen (9) noch gewisse weitere Relationen zwischen $p_{\alpha} \cdots p_{\alpha_q}$, $x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n}$ allein; diese Relationen sind ganz beliebig, nur dürfen sie keine Gleichung zwischen $x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n}$ allein ergeben.**)

Beschränkt man sich daher unter den Gleichungensystemen, welche die Pfaffsche Gleichung: $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = 0$ befriedigen, auf die n-gliedrigen, so erhält man abgesehen von dem System: $p_1 = 0, \cdots p_n = 0$ nur solche Gleichungensysteme, welche blos die Verhältnisse der Veränderlichen $p_1 \cdots p_n$ enthalten.

---

*) Handelte es sich nur darum den Satz 3 des Textes zu beweisen, so wäre es einfacher, denselben unabhängig von den vorangehenden Sätzen dieses Kapitels abzuleiten. Vgl. die auf S. 83 citirten Abhandlungen.

Wir sind im Vorstehenden von den $(n+1)$-gliedrigen Gleichungensystemen in $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ ausgegangen, welche die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ befriedigen und haben daraus die n-gliedrigen Gleichungensysteme in $x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ hergeleitet, welche die Pfaffsche Gleichung: $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = 0$ erfüllen.

Umgekehrt lassen sich nun aus den $(n+1)$-gliedrigen Gleichungensystemen in $y_1 \cdots y_{n+1}, q_1 \cdots q_{n+1}$, welche die Pfaffsche Gleichung: $q_1 dy_1 + \cdots + q_{n+1} dy_{n+1} = 0$ befriedigen, die $(n+1)$-gliedrigen Gleichungensysteme in: $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ herstellen, welche die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ erfüllen.

In der That, wenn wir setzen:

$$y_1 = x_1, \cdots y_n = x_n, \ y_{n+1} = z$$

$$\frac{q_1}{q_{n+1}} = -p_1, \cdots \frac{q_n}{q_{n+1}} = -p_n,$$

so verwandelt sich die Pfaffsche Gleichung:

$$(6') \qquad q_1 dy_1 + \cdots + q_{n+1} dy_{n+1} = 0$$

in:

$$(1) \qquad dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0.$$

Zugleich erhält man aus jedem $(n+1)$-gliedrigen Gleichungensysteme in $y_1 \cdots y_{n+1}, q_1 \cdots q_{n+1}$, welches (6′) befriedigt und welches die Gleichung: $q_{n+1} = 0$ nicht umfasst, ein $(n+1)$-gliedriges Gleichungensystem in $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$, welches (1) befriedigt; es leuchtet überdies, sogar ohne Rechnung ein, dass man auf diese Weise *jedes* $(n+1)$-gliedrige Gleichungensystem erhält, welches (1) erfüllt; um dies analytisch zu bestätigen, braucht man nur die Formeln (7) und (8) der Seiten 83 und 84 auf die Pfaffsche Gleichung:

$$q_1 dy_1 + \cdots + q_{n+1} dy_{n+1} = 0$$

anzuwenden, in den erhaltenen Formeln die q, y durch $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ zu ersetzen und das Ergebniss mit den Formeln des Satzes 1, S. 80 zu vergleichen.

Es erscheint wünschenswerth die eben durchgeführten *analytischen Entwickelungen durch begriffliche Betrachtungen in eine anschaulichere Form zu kleiden;* dabei beschränken wir uns hier der Einfachheit wegen auf den Fall $n = 2$; auf den Fall eines beliebigen n kommen wir später zurück.

Deuten wir in Uebereinstimmung mit dem Kapitel 3 die Grössen z, x_1, x_2 als rechtwinklige Punktcoordinaten im gewöhnlichen Raume, so erscheinen z, x_1, x_2, p_1, p_2 als Coordinaten eines Flächenelements (früher hiessen diese Coordinaten z, x, y, p, q). Die dreigliedrigen Gleichungensysteme in z, x_1, x_2, p_1, p_2, welche die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 = 0$ befriedigen, stellen dann die Element-M_2 des Raumes: z, x_1, x_2 dar.

Beschränken wir uns insbesondere unter den eben besprochenen dreigliedrigen Gleichungensystemen auf diejenigen, welche die Gleichung: $z = 0$ umfassen, so heisst das: wir betrachten blos solche Element-M_2 des Raumes, deren Flächenelemente die Gleichung: $z = 0$ erfüllen. Jede derartige Element-M_2 besteht entweder aus allen Elementen einer in der Ebene $z = 0$ gelegenen Curve:

$$z = 0, \qquad \varphi(x_1, x_2) = 0$$

oder aus allen Elementen eines Punktes:

$$z = 0, \qquad x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2$$

dieser Ebene. In beiden Fällen ordnen sich die ∞^2 Flächenelemente der betreffenden Element-M_2 in ∞^1 Schaaren von je ∞^1; denn *die Curve: $z = 0$, $\varphi(x_1, x_2) = 0$ besitzt ∞^1 Linienelemente und durch jedes dieser ∞^1 Linienelemente gehen ∞^1 Flächenelemente des Raumes z, x_1, x_2; für einen Punkt: $z = 0$, $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ gilt Entsprechendes.*

Wir können alles das so ausdrücken: Jede Curve: $z=0$, $\varphi(x_1, x_2)=0$ und jeder Punkt: $z=0$, $x_1=a_1$, $x_2=a_2$ lässt sich entweder als eine Element-M_2 des Raumes z, x_1, x_2 oder als eine Element-M_1 der Ebene: $z=0$ auffassen. Im ersten Falle sind z, x_1, x_2, p_1, p_2 gewöhnliche Flächenelementcoordinaten des Raumes z, x_1, x_2; im zweiten Falle sind x_1, x_2, $\frac{p_1}{p_2}$ Coordinaten der Linienelemente der Ebene: $z = 0$.

Jedenfalls übersieht man, dass man durch Bestimmung aller derjenigen Element-M_2 des Raumes z, x_1, x_2, welche die Gleichung: $z=0$ befriedigen, zugleich alle Element-M_1 der Ebene $z = 0$ erhält.

Besonders wichtig ist es, dass man in dieser Weise für die Element-M_1 der Ebene $z = 0$ eine analytische Darstellung bekommt, bei welcher *keine im Endlichen gelegene Element-M_1 dieser Ebene ausgeschlossen bleibt;* bei der in Kap. 1 entwickelten Darstellung für die Element-M_1 der Ebene x, y blieben ja alle zur y-Axe parallelen Geraden ausgeschlossen, obwohl dieselben ebensogut wie jede andere Curve der Ebene als Element-M_1 zu betrachten sind.

Die entsprechenden Entwickelungen für beliebiges n siehe S. 108 f.

§ 23.

Die Aufgabe, eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\Phi\left(z, x_1 \cdots x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{10}$$

zu integriren, spricht man gewöhnlich nach *Lagrange* so aus: es sollen alle Functionen $F(x_1 \cdots x_n)$ bestimmt werden, welche so beschaffen sind, dass (10) bei der Substitution $z = F(x_1 \cdots x_n)$ identisch befriedigt wird.

Setzen wir, wie es gebräuchlich ist:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i \qquad {\scriptstyle (i = 1 \cdots n)},$$

so erhält (10) die Form:

$$(10') \qquad \Phi(z,\ x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n) = 0$$

und das Problem der Integration von (10) kommt darauf hinaus, in den Veränderlichen $z,\ x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n$ alle Gleichungensysteme von der Form:

$$(11) \quad z - F(x_1 \cdots x_n) = 0, \qquad p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \cdots p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

zu bestimmen, welche die Gleichung (10′) umfassen.

Diese Formulirung des Integrationsproblems ist blos eine Umschreibung der gewöhnlichen; sie ist aber insofern von Nutzen, als sie naturgemäss dazu führt, das Problem der Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung nur als besonderen Fall eines allgemeineren Problems zu betrachten.

Die Gleichungensysteme von der Form (11) befriedigen nämlich die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$; sie bilden aber nach § 21 unter allen Gleichungensystemen, welche diese letztere Eigenschaft besitzen, nur eine besondere Klasse. Es liegt daher nahe, das Problem der Integration von (10) durch das folgende allgemeinere zu ersetzen:

Es sollen überhaupt alle $(n+1)$-gliedrigen Gleichungensysteme:

$$\Phi_1(z,\ x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n) = 0, \ \cdots \ \Phi_{n+1}(z,\ x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n) = 0$$

bestimmt werden, welche die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ erfüllen und welche dabei die Gleichung:

$$(10') \qquad \Phi(z,\ x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n) = 0$$

*umfassen.**)

Ist dieses Problem gelöst, so hat man unter den gefundenen Gleichungensystemen nur noch alle die auszuwählen, welche nur *eine* Relation zwischen $z,\ x_1 \cdots x_n$ allein liefern und demnach die Form (11) erhalten können. Alsdann ist die Integration der Differentialgleichung (10) auch im Sinne *Lagrange*s geleistet.

---

*) Lie, Göttinger Nachrichten, October 1872; vgl. auch die Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania für 1874, sowie Math. Ann. Bd. IX.

Wenn wir auch in dem gegenwärtigen Kapitel das soeben aufgestellte allgemeine Problem noch nicht erledigen, so bereiten wir doch seine Erledigung dadurch vor, dass wir eine Reihe von wichtigen charakteristischen Eigenschaften derjenigen $(n+1)$-gliedrigen Gleichungensysteme entwickeln, welche die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

befriedigen.

§ 24.

Wir gehen zunächst noch von Gleichungensystemen aus, welche die Form:

$$(11)\quad z - F(x_1 \cdots x_n) = 0, \quad p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \cdots p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

erhalten können.

Umfasst das Gleichungensystem (11) die Gleichung:

$$V(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0,$$

so ist identisch:

$$V\left(F, x_1 \cdots x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) \equiv 0.$$

Differentiirt man diese Identität nach $x_1 \cdots x_n$, so erhält man natürlich wieder Identitäten; also sieht man, dass das System (11) ausser der Gleichung: $V = 0$ auch noch die n Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial V}{\partial p_\nu}\frac{\partial^2 F}{\partial x_\nu \partial x_i} = 0$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

umfasst.

Wir wollen nun, wie es seit *Poisson* gebräuchlich ist, den Ausdruck:

$$\sum_1^n{}_\nu \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right\}$$

mit dem Symbole $[\varphi\psi]$ bezeichnen; dann erhalten die linken Seiten der letzten Gleichungen die Form:

$$\left[p_i - \frac{\partial F}{\partial x_i}, V\right] \qquad (i = 1 \cdots n);$$

unter den gemachten Voraussetzungen bestehen daher die n Gleichungen:

$$\left[p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1}, V\right] = 0, \cdots \left[p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n}, V\right] = 0$$

vermöge (11).

Andererseits wird:

$$[z - F, V] = -\sum_1^n{}_\nu \frac{\partial V}{\partial p_\nu}\left(p_\nu - \frac{\partial F}{\partial x_\nu}\right),$$

was ebenfalls vermöge (11) verschwindet; folglich erhalten wir den

Satz 4. *Umfasst*) ein Gleichungensystem von der Form:*

$$(11) \quad z - F(x_1 \cdots x_n) = 0, \quad p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \cdots \quad p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

die Gleichung: $V(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0$, *so umfasst es auch jede der nachstehenden* $n+1$ *Gleichungen:*

$$[z - F, V] = 0, \quad \left[p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1}, V\right] = 0, \quad \cdots \quad \left[p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n}, V\right] = 0.$$

Es ist zweckmässig, dieses Ergebniss in einer anderen Form auszusprechen.

Der Klammerausdruck $[Vf]$ stellt eine infinitesimale Transformation**) dar, diejenige nämlich, welche den Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ die unendlich kleinen Incremente:

$$\delta z = \sum_1^n{}_{\nu}\, p_\nu \frac{\partial V}{\partial p_\nu} \delta t, \quad \delta x_i = \frac{\partial V}{\partial p_i} \delta t, \quad \delta p_i = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial V}{\partial z}\right) \delta t$$

$$(i = 1 \cdots n)$$

ertheilt. Dass die Ausdrücke:

$$[z - F, V], \quad \left[p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1}, V\right] \cdots \left[p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n}, V\right]$$

oder was auf dasselbe hinauskommt, die Ausdrücke:

$$[V, z - F], \quad \left[V, p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1}\right] \cdots \left[V, p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n}\right]$$

sämmtlich vermöge (11) verschwinden, kommt daher nach S. 37 f. darauf hinaus, dass das Gleichungensystem (11) die infinitesimale Transformation $[V, f]$ gestattet. Folglich kann Satz 4 auch so ausgedrückt werden:

Satz 5. *Umfasst das Gleichungensystem:*

$$(11) \quad z - F(x_1 \cdots x_n) = 0, \quad p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \cdots \quad p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

die Gleichung: $V(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0$, *so gestattet es die infinitesimale Transformation* $[V, f]$.

Hieraus ergiebt sich insbesondere, dass (11) die $n+1$ infinitesimalen Transformationen:

---

*) Der wichtige Satz 4 rührt, wenn auch in anderer Form, von *Cauchy* her. Es ist aber zu beachten, dass *Pfaff,* der zuerst die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in beliebig vielen Veränderlichen integrirte, schon früher einen analogen, wenn auch specielleren Satz aufgestellt hatte.

**) Die wichtige Auffassung des *Poisson*schen Klammerausdrucks als des Symboles einer infinitesimalen Transformation wurde entwickelt und verwerthet in der Abhandlung: Theorie der Transformationsgruppen II, von *Sophus Lie;* Archiv for Mathematik, Christiania 1876; vgl. auch Math. Ann. Bd. VIII, S. 239 und S. 303.

$$[z - F, f], \left[p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1}, f\right], \cdots \left[p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n}, f\right]$$

gestattet. Wirklich verschwinden die Ausdrücke:

$$\left[z - F,\ p_i - \frac{\partial F}{\partial x_i}\right] = -\left(p_i - \frac{\partial F}{\partial x_i}\right)$$

$$\left[p_i - \frac{\partial F}{\partial x_i},\ p_\varkappa - \frac{\partial F}{\partial x_\varkappa}\right] = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_\varkappa \partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_\varkappa} \equiv 0$$

sämmtlich vermöge (11).

Bemerkenswerth ist die folgende Form:

$$(11')\ \begin{cases} z - p_1 x_1 - \cdots - p_n x_n - \left(F - x_1 \dfrac{\partial F}{\partial x_1} - \cdots - x_n \dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right) = 0 \\ p_1 - \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \cdots p_n - \dfrac{\partial F}{\partial x_n} = 0, \end{cases}$$

welche das System (11) erhalten kann. Bildet man nämlich aus den linken Seiten von irgend zweien der Gleichungen (11′) den Klammerausdruck [ ], so erhält man stets identisch Null.

§ 25.

Es sei:

$$V_1(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0, \cdots V_{n+1}(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0$$

ein $(n+1)$-gliedriges Gleichungensystem, welches die Form:

$$(11)\quad z - F(x_1 \cdots x_n) = 0,\ p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \cdots p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

erhalten kann. Nach Satz 5 gestattet dann das System (11) jede der $n+1$ infinitesimalen Transformationen:

$$[V_1 f] \cdots [V_{n+1} f]$$

hieraus aber folgt (vgl. S. 38), dass auch das System: $V_1 = 0, \cdots V_{n+1} = 0$ selbst alle diese infinitesimalen Transformationen zulässt, anders ausgesprochen, dass *alle Ausdrücke:* $[V_i V_\varkappa]$ *vermöge:* $V_1 = 0, \cdots V_{n+1} = 0$ *den Werth Null annehmen.*

Diese Bemerkung führt uns dazu, überhaupt ein beliebiges Gleichungensystem:

$$(12)\ \Phi_1(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0, \cdots \Phi_m(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0$$

zu betrachten, welches so beschaffen ist, dass alle $[\Phi_i \Phi_\varkappa]$ vermöge $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$ verschwinden.

Das Gleichungensystem (12) gestattet nach unsrer Voraussetzung die m infinitesimalen Transformationen:

$$[\Phi_1 f] \cdots [\Phi_m f]:$$

ist daher: $\Psi_1 = 0, \cdots \Psi_m = 0$ irgend ein mit (12) äquivalentes Gleichungensystem, so gestattet auch dieses die eben geschriebenen infinitesimalen Transformationen; es verschwinden demnach die Ausdrücke $[\Phi_i \Psi_\varkappa]$ sämmtlich vermöge: $\Psi_1 = 0, \cdots \Psi_m = 0$ und in Folge dessen auch vermöge: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$. Nun aber ist $[\Psi_\varkappa \Phi_i] = -[\Phi_i \Psi_\varkappa]$, es verschwinden also auch alle $[\Psi_\varkappa \Phi_i]$ vermöge: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$ oder, was auf dasselbe hinauskommt: das Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$ gestattet die m infinitesimalen Transformationen:

$$[\Psi_1 f] \cdots [\Psi_m f];$$

von dem äquivalenten Gleichungensysteme: $\Psi_1 = 0, \cdots \Psi_m = 0$ gilt daher dasselbe; kurz es verschwinden alle: $[\Psi_i \Psi_\varkappa]$ vermöge: $\Psi_1 = 0, \cdots \Psi_m = 0$.

Damit haben wir das äusserst wichtige

Theorem 10. *Ist ein m-gliedriges Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$ so beschaffen, dass alle Ausdrücke: $[\Phi_i \Phi_\varkappa]$ vermöge: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$ verschwinden, so besitzt auch jede andere Form: $\Psi_1 = 0, \cdots \Psi_m = 0$ dieses Gleichungensystems die Eigenschaft, dass alle Ausdrücke: $[\Psi_i \Psi_\varkappa]$ vermöge: $\Psi_1 = 0, \cdots \Psi_m = 0$ verschwinden.**)

Man darf hierbei nicht vergessen, dass die Gleichungensysteme: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$ und: $\Psi_1 = 0, \cdots \Psi_m = 0$ beide den Anforderungen genügen müssen, welche wir nach Kap. 2, S. 35 an jedes Gleichungensystem stellen, das wir untersuchen.

Die Entwickelungen, welche uns zu dem Theoreme 10 geführt haben, liefern insbesondere auch noch den

Satz 6. *Gestattet ein m-gliedriges Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$ in den Veränderlichen: $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ die m infinitesimalen Transformationen: $[\Phi_1 f] \cdots [\Phi_m f]$, so gestattet es auch jede infinitesimale Transformation: $[\Psi f]$, in welcher die Function Ψ vermöge: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$ verschwindet.*

Aus dem Theoreme 10 lassen sich viele wichtige Schlüsse ziehen. Wir beginnen mit einigen besonders einfachen.

Soll ein $(n+1)$-gliedriges Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ auf die Form:

$$(11) \quad z - F(x_1 \cdots x_n) = 0, \; p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \cdots p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

gebracht werden können, so müssen nach einer früheren Bemerkung

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1874; Math. Ann. Bd. IX; Abhandlungen der kgl. Sächs. Ges. d. W., Bd. XIV.

(S. 90) alle $[\Phi_i \Phi_\varkappa]$ vermöge: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ verschwinden, und ausserdem muss es möglich sein, die Gleichungen: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ nach $z, p_1 \cdots p_n$ aufzulösen. Ist die erste dieser beiden Bedingungen erfüllt, so braucht es die zweite noch nicht zu sein, das zeigt schon das specielle Gleichungensystem: $z = 0, x_1 = 0, \cdots x_n = 0$; ist aber nicht blos die erste Bedingung erfüllt sondern auch die zweite, so kann: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ die Form erhalten:

$$(13) \quad z - F(x_1 \cdots x_n) = 0,\ p_1 - F_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots p_n - F_n(x_1 \cdots x_n) = 0$$

und da nach Theorem 10 jeder Ausdruck

$$[p_i - F_i,\ z - F] = p_i - \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

vermöge (13) verschwindet, so ergiebt sich: $F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$. Berücksichtigen wir jetzt noch, dass (11) das allgemeinste nach $z, p_1 \cdots p_n$ auflösbare $(n+1)$-gliedrige Gleichungensystem ist, welches die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ erfüllt, so erhalten wir den

Satz 7. *Ein nach $z, p_1 \cdots p_n$ auflösbares Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ in den Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ erfüllt dann und nur dann die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$, wenn alle Ausdrücke: $[\Phi_i, \Phi_\varkappa]$ vermöge: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ verschwinden.*

Zu gleicher Zeit ergeben sich die beiden folgenden Sätze:

Satz 8. *Ein nach $z, p_1 \cdots p_n$ auflösbares Gleichungensystem:*

$$\Phi_1(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_1, \cdots \Phi_{n+1}(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_{n+1}$$

erfüllt dann und nur dann für alle Werthe der Parameter $a_1 \cdots a_{n+1}$ die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$, wenn alle $[\Phi_i \Phi_\varkappa]$ identisch verschwinden.

Satz 9. *Ist es möglich zu $m < n+1$ gegebenen Gleichungen: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$ in $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ weitere $n+1-m$ Gleichungen: $\Psi_{m+1} = a_{m+1}, \cdots \Psi_{n+1} = a_{n+1}$ hinzuzufügen, so dass ein $(n+1)$-gliedriges Gleichungensystem entsteht, welches nach $z, p_1 \cdots p_n$ auflösbar ist und die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ für alle Werthe der Parameter $a_{m+1} \cdots a_{n+1}$ befriedigt, so verschwinden alle Ausdrücke: $[\Phi_i, \Phi_\varkappa]$, $[\Phi_i, \Psi_\varkappa]$, $[\Psi_i, \Psi_\varkappa]$ vermöge der m gegebenen Gleichungen.**)

*) In seinen Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung beschränkt sich *Jacobi* fast immer auf den Fall, dass die unbekannte Function z nicht explicite vorkommt. In Folge dessen sind die wichtigen Sätze 7, 8 und 9 des Textes nicht von ihm aufgestellt worden, während sie allerdings zu seinen Theoremen in naher Beziehung stehen.

§ 26.

Nunmehr wenden wir uns zur Ableitung allgemeinerer Sätze.

Nach Theorem 9, S. 82 befriedigt ein $(n+1)$-gliedriges Gleichungensystem dann und nur dann die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$, wenn es die Form:

$$
(14) \quad \begin{cases} z - p_{\alpha_1} x_{\alpha_1} - \cdots - p_{\alpha_q} x_{\alpha_q} - W(p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_q},\ x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n}) = 0 \\ x_{\alpha_1} + \dfrac{\partial W}{\partial p_{\alpha_1}} = 0, \ \cdots \ x_{\alpha_q} + \dfrac{\partial W}{\partial p_{\alpha_q}} = 0 \\ p_{\alpha_{q+1}} - \dfrac{\partial W}{\partial x_{\alpha_{q+1}}} = 0, \ \cdots \ p_{\alpha_n} - \dfrac{\partial W}{\partial x_{\alpha_n}} = 0. \end{cases}
$$

erhalten kann.

Ist nun die Functionaldeterminante:

$$
(15) \qquad \sum \pm \frac{\partial}{\partial p_{\alpha_1}} \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial p_{\alpha_q}} \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha_q}}
$$

nicht identisch null, so lassen sich die Gleichungen:

$$
x_{\alpha_1} + \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha_1}} = 0, \ \cdots \ x_{\alpha_q} + \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha_q}} = 0
$$

nach $p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_q}$ auflösen und unser System (14) lässt sich demzufolge auch in der Form:

$$
z - F(x_1 \cdots x_n) = 0, \ p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \ \cdots \ p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0
$$

darstellen. Bilden wir daher aus den linken Seiten von irgend zweien der Gleichungen (14) den Klammerausdruck [ ], so erhalten wir nach Theorem 10 stets eine Function von $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$, welche vermöge (14) verschwindet.

Damit haben wir eine Eigenschaft gefunden, welche dem Gleichungensysteme (14) zukommt, sobald die Determinante (15) nicht identisch verschwindet. Es ist aber klar, dass diese Eigenschaft auch bei identischem Verschwinden von (15) nicht verloren gehen kann; denn dass die besprochenen Klammerausdrücke vermöge (14) null werden, das kann doch unmöglich eine Folge des Nichtverschwindens der Determinante (15) sein. Wirklich ergiebt sich durch Ausrechnung:

$$
\left[z - p_{\alpha_1} x_{\alpha_1} - \cdots - p_{\alpha_q} x_{\alpha_q} - W,\ x_{\alpha_i} + \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha_i}}\right] = -\left(x_{\alpha_i} + \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha_i}}\right)
$$

$$
\left[z - p_{\alpha_1} x_{\alpha_1} - \cdots - p_{\alpha_q} x_{\alpha_q} - W,\ p_{\alpha_\varkappa} - \frac{\partial W}{\partial x_{\alpha_\varkappa}}\right] = -\left(p_{\alpha_\varkappa} - \frac{\partial W}{\partial x_{\alpha_\varkappa}}\right)
$$

$$
\left[x_{\alpha_i} + \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha_i}},\ x_{\alpha_\mathfrak{i}} + \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha_\mathfrak{i}}}\right] \equiv 0 \qquad \left[p_{\alpha_\varkappa} - \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha_\varkappa}},\ p_{\alpha_\mathfrak{k}} - \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha_\mathfrak{k}}}\right] \equiv 0
$$

$$
\left[x_{\alpha_i} + \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha_i}},\ p_{\alpha_\varkappa} - \frac{\partial W}{\partial x_{\alpha_\varkappa}}\right] \equiv 0,
$$

wo i und $\mathfrak{i}$ irgend welche der Zahlen $1, 2 \cdots q$ bedeuten und $\varkappa$, $\mathfrak{k}$ irgend welche der Zahlen $q+1, \cdots n$.

Demnach erkennen wir bei Berücksichtigung des Theorems 10, dass der Satz besteht:

Satz 10. *Erfüllt ein $(n+1)$-gliedriges Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ in den Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$, so verschwinden alle $[\Phi_i \Phi_\varkappa]$ vermöge: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$.*

Dieser Satz kann auch folgendermassen ausgedrückt werden:

Satz 11. *Wenn ein $(n+1)$-gliedriges Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ erfüllt, so gestattet es jede der $n+1$ infinitesimalen Transformationen: $[\Phi_1 f], \cdots [\Phi_{n+1} f]$.*

Man kann zeigen, dass der Satz 10 sich umkehren lässt. Um das ausführen zu können, schicken wir zunächst einen Hülfssatz voraus, der auch an und für sich bemerkenswerth ist.

Es liege in den Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ ein $(n+1)$-gliedriges Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ vor, welches so beschaffen ist, dass alle $[\Phi_i \Phi_\varkappa]$ vermöge desselben verschwinden.

Wären alle $n+1$ Functionen Φ von z frei, so ergäbe das Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ eine gewisse Anzahl, sagen wir $l > 0$ unabhängige Relationen:

$$W_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots W_l(x_1 \cdots x_n) = 0$$

zwischen $x_1 \cdots x_n$ allein und es liesse sich andrerseits nach gerade $n - l + 1$ von den p etwa nach: $p_l, p_{l+1} \cdots p_n$ auflösen:

$$p_l - \varphi_l(p_1 \cdots p_{l-1}, x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots p_n - \varphi_n(p_1 \cdots p_{l-1}, x_1 \cdots x_n) = 0.$$

Aus den l Gleichungen: $W_1 = 0, \cdots W_l = 0$ könnten wir nun die $l-1$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_{l-1}$ fortschaffen und wir bekämen so mindestens eine Relation zwischen $x_l \cdots x_n$ allein. Enthielte aber diese Relation zum Beispiel x_l, so liesse sie sich auf die Form:

$$x_l - \psi(x_{l+1} \cdots x_n) = 0$$

bringen und es müsste nach Theorem 10 der Ausdruck:

$$[p_l - \varphi_l, x_l - \psi] = 1$$

vermöge: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ verschwinden. Das ist widersinnig, wir sehen also: der Fall, dass $\Phi_1 \cdots \Phi_{n+1}$ sämmtlich von z frei sind, kann nicht eintreten. Damit haben wir den versprochenen Hülfssatz gewonnen:

Satz 12. *Sind $n+1$ unabhängige Gleichungen: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ in den Veränderlichen: $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ so beschaffen,* *dass alle* $[\Phi_\iota \Phi_\varkappa]$ *vermöge:* $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ *verschwinden, so sind die* $n + 1$ *Functionen:* $\Phi_1 \cdots \Phi_{n+1}$ *nicht sämmtlich von* z *frei.*

Wir schaffen nunmehr z aus dem $(n + 1)$-gliedrigen Gleichungensysteme: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ fort, dann erhalten wir in $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ allein ein n-gliedriges Gleichungensystem:

$$\Psi_1(x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n) = 0, \cdots \Psi_n(x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n) = 0,$$

welches so beschaffen ist, dass jedes $[\Psi_i \Psi_\varkappa]$ vermöge: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ ja sogar schon vermöge: $\Psi_1 = 0, \cdots \Psi_n = 0$ verschwindet.

Liefert das Gleichungensystem: $\Psi_1 = 0, \cdots \Psi_n = 0$ gerade $l \geqq 0$ unabhängige Relationen:

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_l(x_1 \cdots x_n) = 0$$

zwischen $x_1 \cdots x_n$ allein, so lässt es sich nach $n - l$ von den p etwa nach $p_{l+1} \cdots p_n$ auflösen:

$$p_{l+1} - \varphi_{l+1}(p_1 \cdots p_l,\ x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots p_n - \varphi_n(p_1 \cdots p_l,\ x_1 \cdots x_n) = 0.$$

Daraus erkennen wir ähnlich wie oben, dass sich aus den Gleichungen: $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_l = 0$ keine Relation zwischen $x_{l+1} \cdots x_n$ allein ergiebt, dass also diese Gleichungen nach $x_1 \cdots x_l$ auflösbar sind:

$$x_1 - \varphi_1(x_{l+1} \cdots x_n) = 0, \cdots x_l - \varphi_l(x_{l+1} \cdots x_n) = 0.$$

Das System der n Gleichungen:

$$x_1 - \varphi_1 = 0, \cdots x_l - \varphi_l = 0, \quad p_{l+1} - \varphi_{l+1} = 0, \cdots p_n - \varphi_n = 0$$

ist dann offenbar mit dem Gleichungensysteme: $\Psi_1 = 0, \cdots \Psi_n = 0$ äquivalent.

Durch die vorstehenden Ueberlegungen ist bewiesen, dass das Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ sich nach z, $x_1 \cdots x_l$, $p_{l+1} \cdots p_n$ auflösen lässt, und dass es somit auch die Form:

$$(16) \begin{cases} z - x_1 p_1 - \cdots - x_l p_l - W(p_1 \cdots p_l,\ x_{l+1} \cdots x_n) = 0 \\ x_1 + W_1 = 0, \cdots x_l + W_l = 0, \quad p_{l+1} - W_{l+1} = 0, \cdots p_n - W_n = 0 \end{cases}$$

erhalten kann, wo $W_1 \cdots W_n$ ebenso wie W nur von $p_1 \cdots p_l$, $x_{l+1} \cdots x_n$ abhängen. Bilden wir aber die Klammerausdrücke:

$$[z - x_1 p_1 - \cdots - x_l p_l - W,\ x_i + W_i] = -\left(x_i + \frac{\partial W}{\partial p_i}\right)$$

$$[z - x_1 p_1 - \cdots - x_l p_l - W,\ p_\varkappa - W_\varkappa] = -\left(p_\varkappa - \frac{\partial W}{\partial x_\varkappa}\right),$$

$$(i = 1 \cdots l;\ \varkappa = l + 1 \cdots n),$$

welche sämmtlich vermöge (16) verschwinden müssen, so sehen wir, dass $W_1 \cdots W_n$ die Werthe haben:

$$W_1 = \frac{\partial W}{\partial p_1}, \quad \cdots W_l = \frac{\partial W}{\partial p_l}, \quad W_{l+1} = \frac{\partial W}{\partial x_{l+1}}, \cdots W_n = \frac{\partial W}{\partial x_n}$$

und dass (16), also auch das äquivalente System: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ befriedigt.

Dadurch ist die Umkehrbarkeit des Satzes 10 bewiesen und wir bekommen das

Theorem 11. *Ein System von $n+1$ unabhängigen Gleichungen: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ in den Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ befriedigt die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_n - \cdots - p_n dx_n = 0$ dann und nur dann, wenn alle $[\Phi_i \Phi_\varkappa]$ vermöge: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ verschwinden.**)

Zu erwähnen ist noch, dass man jedes $(n+1)$-gliedrige Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$, vermöge dessen alle $[\Phi_i \Phi_\varkappa]$ verschwinden, auf eine solche Form: $X_1 = 0, \cdots X_{n+1} = 0$ bringen kann, dass alle $[X_i X_\varkappa]$ identisch null sind. Zunächst kann man nämlich, wie wir eben gesehen haben, das System: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1}$ in der Form darstellen:

$$(17)\quad \begin{cases} z - x_{\alpha_1} p_{\alpha_1} - \cdots - x_{\alpha_q} p_{\alpha_q} - W(p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_q}, x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n}) = 0 \\ x_{\alpha_1} + \dfrac{\partial W}{\partial p_{\alpha_1}} = 0, \cdots x_{\alpha_q} + \dfrac{\partial W}{\partial p_{\alpha_q}} = 0 \\ p_{\alpha_{q+1}} - \dfrac{\partial W}{\partial x_{\alpha_{q+1}}} = 0, \cdots p_{\alpha_n} - \dfrac{\partial W}{\partial x_{\alpha_n}} = 0. \end{cases}$$

Das System (17) aber ist äquivalent mit dem folgenden:

$$(18)\quad \begin{cases} z - x_{\alpha_{q+1}} p_{\alpha_{q+1}} - \cdots - x_{\alpha_n} p_{\alpha_n} - W + p_{\alpha_1} \dfrac{\partial W}{\partial p_{\alpha_1}} + \cdots + x_{\alpha_n} \dfrac{\partial W}{\partial x_{\alpha_n}} \\ x_{\alpha_1} + \dfrac{\partial W}{\partial p_{\alpha_1}} = 0, \cdots x_{\alpha_q} + \dfrac{\partial W}{\partial p_{\alpha_q}} = 0 \\ p_{\alpha_{q+1}} - \dfrac{\partial W}{\partial x_{\alpha_{q+1}}} = 0, \cdots p_{\alpha_n} - \dfrac{\partial W}{\partial x_{\alpha_n}} = 0 \end{cases}$$

und bildet man hier aus den linken Seiten zweier Gleichungen den Klammerausdruck [ ], so erhält man stets identisch Null.

Aus dem Theoreme 11 folgt sofort der

Satz 13. *Ein System von $n+1$ unabhängigen Gleichungen: $\Phi_1(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_1, \cdots \Phi_{n+1}(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_{n+1}$ erfüllt die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ dann und nur dann für alle Werthe der Parameter $a_1 \cdots a_{n+1}$, wenn sämmtliche Ausdrücke: $[\Phi_i \Phi_\varkappa]$ identisch verschwinden.*

Sind zwei Functionen Φ und Ψ der Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ so beschaffen, dass der Ausdruck $[\Phi \Psi]$ identisch verschwindet,

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1874; Math. Ann. Bd. IX; Abhandlungen der Kgl. Sächsischen Ges. d. W. Bd. XII.

so sagt man von ihnen, dass sie in *Involution* liegen. Ein System von l solchen unabhängigen Functionen: $\Psi_1(z, x, p) \cdots \Psi_l(z, x, p)$, welche paarweise in Involution liegen, heisst ein *l-gliedriges Involutionssystem.**)

Da ein $(n+1)$-gliedriges Gleichungensystem $\Phi_1 = a_1 \cdots \Phi_{n+1} = a_{n+1}$, welches die Pfaffsche Gleichung $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ erfüllt, nicht von z frei sein kann, folgt

Satz 14. *Bilden $\Phi_1 \cdots \Phi_{n+1}$ ein $(n+1)$-gliedriges Involutionssystem, so muss mindestens eine unter den Functionen Φ die Grösse z enthalten.*

Eine einfachere Ableitung dieses Satzes wird später gegeben.

§ 27.

Erfüllt ein m-gliedriges Gleichungensystem:

$\Phi_1(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_1, \cdots \Phi_m(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_m) = a_m$ für alle Werthe der Parameter $a_1 \cdots a_m$ die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$, so verschwindet der Ausdruck: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n$ bei beliebig gewählten $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ für jedes Werthsystem: $dz, dx_1 \cdots dx_n, dp_1 \cdots dp_n$, welches die m Gleichungen:

$$d\Phi_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} dz + \sum_1^n{}' \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_\nu} dx_\nu + \sum_1^n{}' \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_\nu} dp_\nu = 0$$
$$(i = 1, 2 \cdots m)$$

befriedigt. Es ist daher möglich m solche Functionen $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ von $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ anzugeben, dass die Identität:

$$(19) \qquad dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n \equiv \lambda_1 d\Phi_1 + \cdots + \lambda_m d\Phi_m$$

besteht. Man findet diese Functionen $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ durch Auflösung der Gleichungen:

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial z} = 1 \\ &\lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_i} = -p_i \\ &\lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_i} = 0 \\ &\qquad (i = 1 \cdots n), \end{aligned} \right.$$

---

*) Der *allgemeine* Begriff, sowie die Bezeichnung *Involutionssystem* wurden eingeführt in der Abhandlung: „Kurzes Resumé mehrerer neuen Theorien“ von *Sophus Lie*, Gesell. d. W. zu Christiania Mai 1872; vgl. auch dieselben Verhandlungen für 1873, S. 19. In *Jacobi's* Untersuchungen kommen nur *specielle*

welche unter den gemachten Voraussetzungen sicher mit einander verträglich sind und wegen der Unabhängigkeit von $\Phi_1 \cdots \Phi_m$ die Unbekannten $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ eindeutig bestimmen.

Denken wir uns jetzt umgekehrt $2m$ Functionen $\Phi_1 \cdots \Phi_m$, $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ vorgelegt, welche (19) identisch erfüllen. Sind die Functionen $\Phi_1 \cdots \Phi_m$ nicht von einander unabhängig, so können wir (19) durch eine Identität von derselben Gestalt ersetzen, in welcher die Zahl m einen kleineren Werth besitzt; denn sind zum Beispiel $\Phi_1 \cdots \Phi_l$ von einander unabhängig, während $\Phi_{l+1} \cdots \Phi_m$ sich durch $\Phi_1 \cdots \Phi_l$ allein ausdrücken lassen, so lässt sich (19) offenbar auf die Form bringen:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n \equiv \lambda_1' d\Phi_1 + \cdots + \lambda_l' d\Phi_l.$$

Wir können demnach voraussetzen, dass $\Phi_1 \cdots \Phi_m$ von einander unabhängig sind. Dann aber folgt aus dem Bestehen der Identität (19), dass das Gleichungensystem:

$$\Phi_1(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_1, \cdots \Phi_m(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_m$$

für alle Werthe der Parameter $a_1 \cdots a_m$ die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ befriedigt; das aber ist nach Satz 1, S. 80 nur möglich, wenn $m \geqq n + 1$ ist, also erhalten wir zunächst den folgenden, aus der Theorie des *Pfaff*schen Problems bekannten

Satz 15. *Befriedigen $2m$ Functionen: $\lambda_1 \cdots \lambda_m$, $\Phi_1 \cdots \Phi_m$ der Veränderlichen: z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ die Gleichung:*

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = \lambda_1 d\Phi_1 + \cdots + \lambda_m d\Phi_m$$

identisch, so giebt es unter den m Functionen $\Phi_1 \cdots \Phi_m$ mindestens $n + 1$, welche von einander unabhängig sind.

Ueberdies erhalten wir (Satz 13, S. 96) den wichtigen

Satz 16. *Zum identischen Bestehen einer Gleichung von der Gestalt:*

$$\text{(A)} \qquad dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = \lambda_1 d\Phi_1 + \cdots + \lambda_{n+1} d\Phi_{n+1}$$

*ist nothwendig und hinreichend, dass $\Phi_1 \cdots \Phi_{n+1}$ solche von einander unabhängige Functionen der Veränderlichen z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ sind, welche paarweise in der Involutionsbeziehung: $[\Phi_i \Phi_k] \equiv 0$ stehen. Sind $n + 1$ Functionen $\Phi_1 \cdots \Phi_{n+1}$ von dieser Beschaffenheit gegeben, so sind $\lambda_1 \cdots \lambda_{n+1}$ eindeutig bestimmt und können durch Auflösung von $n + 1$ linearen Gleichungen gefunden werden.**)

Involutionssysteme vor, die *lästigen Beschränkungen* unterworfen sind; *Jacobi* setzt nämlich voraus, dass *die betreffenden Functionen* von z frei und *in Bezug auf $p_1 \cdots p_n$ unabhängig sind.*

*) Der wichtige Satz 16 des Textes wurde zum ersten Male aufgestellt und bewiesen in den Abhandlungen: „Kurzes Resumé mehrerer neuen Theorien“ und „Zur analytischen Theorie der Berührungstransformationen“ von Sophus Lie, Ver-

§ 28.

Mit Hülfe des Satzes 16 können wir leicht ein anderes bemerkenswerthes Resultat ableiten.

Sind $X_1 \cdots X_m$, $P_1 \cdots P_m$ solche Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, welche die Gleichung:

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = P_1 dX_1 + \cdots + P_m dX_m$$

identisch befriedigen, so besteht auch die Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = dz - P_1 dX_1 - \cdots - P_m dX_m$$

identisch. Hieraus folgt, dass die Zahl $m \gtreqless n$ ist.

Beschränken wir uns auf den Fall $m = n$.

Zum Bestehen einer Relation von der Form:

$$(21) \quad dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = dz - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n$$

ist nach dem Satze 16 jedenfalls nothwendig, dass die Functionen $X_1(x, p) \cdots X_n(x, p)$ von einander unabhängig sind und dass sie die Gleichungen:

$$(22) \qquad [X_i X_\varkappa] = 0, \; [z, X_i] = \sum_1^n {}_\nu \, p_\nu \frac{\partial X_i}{\partial p_\nu} = 0 \qquad (i = 1 \cdots n)$$

identisch befriedigen, mit andern Worten: die von einander unabhängigen Functionen: $X_1 \cdots X_n$ müssen paarweise in Involution liegen und ausserdem in den p homogen von nullter Ordnung sein. Diese nothwendigen Bedingungen sind nun zugleich hinreichend. Sind sie nämlich erfüllt, so besteht nach dem angeführten Satze eine Identität von der Gestalt:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = \lambda dz - \lambda_1 dX_1 - \cdots - \lambda_n dX_n;$$

aus dieser aber ergiebt sich sofort: $\lambda = 1$ und:

---

handlungen der Ges. d. W. zu Christiania, Mai 1872 und Juni 1873. Die daselbst gegebene Begründung des Satzes stützt sich auf *Clebsch's* Theorie des *Pfaff*schen Problems und setzt, wie Herr *Mayer* in der Note: „Ueber die *Lie*schen Berührungstransformationen (Göttinger Nachrichten Juni 1874) hervorhebt, implicite voraus, dass die Grösse Φ_{n+1} nicht von z frei ist. Hierzu ist indess zu bemerken, dass die $\Phi_1 \cdots \Phi_{n+1}$ gleichberechtigt sind, und dass es von vornherein klar ist, dass sie nicht alle von z frei sein können, wenn sie eine Identität (A) erfüllen, und auch nicht, wenn sie ein $(n+1)$-gliedriges Involutionssystem bilden (vgl. Verh. d. Ges. d. W. zu Christiania für März 1873, S. 38). Es war übrigens grade durch die im Texte dargestellten Entwickelungen, dass der Satz 16 zuerst gefunden wurde.

$$(23) \qquad \sum_1^n{}^{\nu}\, \lambda_\nu \frac{\partial X_\nu}{\partial x_i} = p_i, \qquad \sum_1^n{}^{\nu}\, \lambda_\nu \frac{\partial X_\nu}{\partial p_i} = 0$$

$$(i = 1 \cdots n),$$

also werden $\lambda_1 \cdots \lambda_n$, welche ja durch diese Gleichungen eindeutig bestimmt sind, Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ allein. Wenn daher die vorhin angegebenen Bedingungen erfüllt sind, so besteht sicher eine Identität von der Form (21); die Functionen $P_1 \cdots P_n$, welche in derselben auftreten, sind identisch mit den durch die Gleichungen (23) definirten $\lambda_1 \cdots \lambda_n$; bedenkt man noch, dass die X in den p homogen von nullter Ordnung sind, so erkennt man sofort, dass die P homogene Functionen erster Ordnung von $p_1 \cdots p_n$ werden.

Aus dem identischen Bestehen von (21) folgt endlich, dass auch die Gleichung:

$$(24) \qquad p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = P_1 dX_1 + \cdots + P_n dX_n$$

identisch erfüllt ist, und da umgekehrt (21) aus (24) folgt, so haben wir im Vorstehenden die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen einer Identität von der Form (24).

Bevor wir das gewonnene Ergebniss als Satz aussprechen, wollen wir noch Folgendes bemerken.

Da $X_1 \cdots X_n$ von z frei sind, so erhält der Ausdruck $[X_i X_\varkappa]$ die Gestalt:

$$[X_i X_\varkappa] = \sum_1^n{}^{\nu} \left(\frac{\partial X_i}{\partial p_\nu} \frac{\partial X_\varkappa}{\partial x_\nu} - \frac{\partial X_i}{\partial x_\nu} \frac{\partial X_\varkappa}{\partial p_\nu} \right).$$

Nun ist es üblich, für den Ausdruck:

$$\sum_1^n{}^{\nu} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \frac{\partial \psi}{\partial p_\nu} \right),$$

in welchem φ und ψ zwei beliebige Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ bezeichnen, das Symbol: $(\varphi \psi)$ anzuwenden; wir können daher in unserem Falle an Stelle von $[X_i X_\varkappa]$ auch schreiben: $(X_i X_\varkappa)$.

Damit haben wir den

Satz 17. *Eine Identität von der Form:*

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = P_1 dX_1 + \cdots + P_m dX_m,$$

in welcher die X und P Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ sind, kann nur dann bestehen, wenn $m \gtreqless n$ ist. Insbesondere ist zum Bestehen einer Identität von der Form:

$$(24) \qquad p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = P_1 dX_1 + \cdots + P_n dX_n$$

nothwendig und hinreichend, dass die Functionen $X_1 \cdots X_n$ von einander unabhängig sind, dass sie paarweise in der Beziehung: $(X_i X_\varkappa) \equiv 0$

stehen und dass sie in den p homogen von nullter Ordnung sind. Kennt man n Functionen $X_1 \cdots X_n$ von dieser Beschaffenheit, so findet man $P_1 \cdots P_n$ durch Auflösung linearer Gleichungen; $P_1 \cdots P_n$ sind durch dieselben eindeutig bestimmt und werden homogene Functionen erster Ordnung von $p_1 \cdots p_n$.

Soll ein Gleichungensystem von der Form:

$$U_1(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_1, \cdots U_n(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_n$$

die Pfaffsche Gleichung: $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = 0$ für alle Werthe der Parameter $a_1 \cdots a_n$ erfüllen, so ist nothwendig und hinreichend, dass die Gleichung: $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = 0$ für alle Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, $dx_1 \cdots dx_n$, $dp_1 \cdots dp_n$ besteht, welche die n Gleichungen:

$$dU_1 = 0, \cdots dU_n = 0$$

befriedigen. Das aber tritt dann und nur dann ein, wenn identisch ist:

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = \lambda_1 dU_1 + \cdots + \lambda_n dU_n,$$

wo $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ gewisse Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ bezeichnen. Auf Grund des letzten Satzes können wir daher den Satz aussprechen:

Satz 18. *Ein Gleichungensystem von der Form:*

$$U_1(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_1, \cdots U_n(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_n$$

befriedigt die Pfaffsche Gleichung: $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = 0$ dann und nur dann für alle Werthe der Parameter $a_1 \cdots a_n$, wenn $U_1 \cdots U_n$ solche von einander unabhängige Functionen sind, welche paarweise in der Beziehung: $(U_i U_\varkappa) \equiv 0$ stehen und in den p homogen von nullter Ordnung sind.

§ 29.

Wenn ein $(n+1)$-gliedriges Gleichungensystem von der Form:

(25) $\Omega_1(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0, \cdots \Omega_{n+1}(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0$

eine vorgelegte Gleichung: $\Omega(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0$ umfasst und wenn es dabei die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ befriedigt, so sagen wir, dass *es eine Lösung der Gleichung: $\Omega = 0$ darstellt.*

Enthält ein Gleichungensystem von der Form (25), welches eine Lösung von $\Omega = 0$ darstellt, n willkürliche Constanten $a_1 \cdots a_n$, so bezeichnen wir die betreffende Lösung als eine *vollständige*, sobald sich aus (25) durch Fortschaffung von $a_1 \cdots a_n$ nur die eine Gleichung: $\Omega = 0$ zwischen z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ allein ergiebt, oder was auf dasselbe hinauskommt, sobald das Gleichungensystem (25) die Form:

$$\Omega(z, x, p) = 0, \ \Phi_1(z, x, p) = a_1, \cdots \Phi_n(z, x, p) = a_n$$

erhalten kann.

Dieser Begriff*) der vollständigen Lösung ist allgemeiner als der *Lagrange*sche. *Lagrange* beschränkt sich nämlich auf den Fall, dass das Gleichungensystem (25) nur *eine* Relation zwischen $z, x_1 \cdots x_n$ und den Parametern $a_1 \cdots a_n$ liefert.

Später werden wir zeigen, dass die Integration von $\Omega = 0$ sich auf die Bestimmung einer vollständigen Lösung von $\Omega = 0$ zurückführen lässt; es ist dabei gleichgültig, ob sich aus den Gleichungen dieser vollständigen Lösung nur eine oder mehrere Relationen zwischen $z, x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_n$ ableiten lassen.

Enthält die zu integrirende Gleichung bereits eine willkürliche Constante, lässt sie sich also schreiben: $U(z, x, p) = a$, so hat man, um eine vollständige Lösung von ihr zu finden, nur n Functionen $U_1 \cdots U_n$ von $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ zu bestimmen, welche eine Gleichung von der Form:

$$\lambda dU + \lambda_1 dU_1 + \cdots + \lambda_n dU_n = dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n$$

identisch erfüllen. Ist *eine* vollständige Lösung $U = a, U_1 = a_1, \cdots U_n = a_n$ der Gleichung $U = a$ gefunden, so erhält man die allgemeinste vollständige Lösung derselben, indem man die Gleichung:

$$\lambda dU + \lambda_1 dU_1 + \cdots + \lambda_n dU_n = \mu dU + \mu_1 dV_1 + \cdots + \mu_n dV_n$$

oder was auf dasselbe hinauskommt, die Gleichung:

$$dU + \frac{\lambda_1}{\lambda} dU_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} dU_n = \frac{\mu}{\lambda}\left(dU + \frac{\mu_1}{\mu} dV_1 + \cdots + \frac{\mu_n}{\mu} dV_n\right)$$

in allgemeinster Weise befriedigt (vgl. Kap. 6).

Legt man die alte *Lagrange*sche Definition einer vollständigen Lösung zu Grunde, so ist der Uebergang von einer vorgelegten vollständigen Lösung zu anderen vollständigen Lösungen verwickelter.

§ 30.

In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ist es oft vortheilhaft die Begriffsbildungen und Ausdrucksweisen der Mannigfaltigkeitslehre zu benutzen. Die ganze Theorie gewinnt

---

*) Die im Texte gegebene Verallgemeinerung des *Lagrange*schen Begriffs „vollständige Lösung" wurde zum ersten Male auseinandergesetzt in der Note: „Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere über eine Classification derselben" von Sophus Lie, Göttinger Nachrichten, Oct. 1872.

dadurch wesentlich an Durchsichtigkeit; viele ihrer Ergebnisse erscheinen sogar geradezu selbstverständlich.

Das Werthsystem $z, x_1 \cdots x_n$ deuten wir als einen *Punkt* eines $(n + 1)$-fach ausgedehnten Raumes, die Grössen $z, x_1 \cdots x_n$ betrachten wir als Coordinaten des betreffenden Punktes.

Für diese Auffassung scheidet eine Gleichung von der Form:

$$\Phi(z, x_1 \cdots x_n) = 0$$

unter den ∞^{n+1} Punkten des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ gerade ∞^n verschiedene aus, deren Inbegriff eine n-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit bildet; die Gleichung $\Phi = 0$ ist demnach nur die analytische Darstellung der betreffenden Punktmannigfaltigkeit. Insbesondere definirt jede Gleichung ersten Grades:

$$Az + B_1 x_1 + \cdots + B_n x_n + C = 0$$

eine *ebene* n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit oder kurz: eine n-fach ausgedehnte Ebene.

Ein q-gliedriges Gleichungensystem:

$$\Phi_1(z, x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Phi_q(z, x_1 \cdots x_n) = 0$$

bestimmt eine $(n + 1 - q)$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$.

Den Punkten des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ stellen wir die Elemente dieses Raumes gegenüber. *Jedes Werthsystem $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ bezeichnen wir als ein Element*) des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$, die Grössen z, x, p betrachten wir als die Coordinaten dieses Elements.* Demnach müssen wir sagen, dass der $(n + 1)$-fach ausgedehnte Raum einerseits ∞^{n+1} Punkte und andrerseits ∞^{2n+1} Elemente enthält.

In der Ebene und im gewöhnlichen Raume konnten wir mit dem Begriffe Element eine anschauliche Vorstellung verbinden: in der Ebene war jedes Element der Inbegriff eines Punktes und einer hindurchgehenden Geraden, im gewöhnlichen Raume der Inbegriff eines Punktes und einer hindurchgehenden Ebene. Geradeso können wir auch dem Begriffe „Element eines $(n + 1)$-fach ausgedehnten Raumes" eine reale Bedeutung geben.

---

*) Der wichtige Begriff *Element* des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ wurde ausdrücklich eingeführt in der Note: „Neue Integrationsmethode partieller Gleichungen erster Ordnung zwischen n Veränderlichen" von Sophus Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania Mai 1872; daselbst findet sich zugleich eine Reihe wichtiger Anwendungen dieses Begriffs. Vgl. auch Göttinger Nachrichten Mai 1871 und October 1872.

Die Gleichung:

$$(26) \qquad \mathfrak{z} - z - p_1(\mathfrak{x}_1 - x_1) - \cdots - p_n(\mathfrak{x}_n - x_n) = 0$$

stellt eine durch den Punkt: z, $x_1 \cdots x_n$ hindurchgehende n-fach ausgedehnte Ebene unsres $(n+1)$-fach ausgedehnten Raumes dar. Der Inbegriff des Punktes z, $x_1 \cdots x_n$ und der hindurchgehenden Ebene (26), das ist nun die Figur, welche wir als Bild des Werthsystems z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ betrachten. Wir bezeichnen dementsprechend den *Inbegriff des Punktes z, $x_1 \cdots x_n$ und der hindurchgehenden Ebene*

$$\mathfrak{z} - z - p_1(\mathfrak{x}_1 - x_1) - \cdots - p_n(\mathfrak{x}_n - x_n) = 0$$

als ein Element des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ und betrachten dabei z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ als Coordinaten dieses Elementes.

Diese Deutung des Begriffs Element zeigt einen Mangel, welcher den Elementcoordinaten z, x, p anhaftet. Es ist nämlich von vornherein klar, dass folgerichtig überhaupt jede Figur, welche aus einem Punkte und einer hindurchgehenden n-fach ausgedehnten Ebene des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ besteht, als ein Element des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ bezeichnet werden muss; aber die Elementcoordinaten z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ stellen nicht die Gesammtheit aller so definirten Elemente des Raumes dar; sie werden ja für alle diejenigen Elemente unbrauchbar, deren n-fach ausgedehnte Ebene die besondere Form:

$$q_1(\mathfrak{x}_1 - x_1) + \cdots + q_n(\mathfrak{x}_n - x_n) = 0$$

hat.

Etwas später werden wir *homogene* Elementcoordinaten kennen lernen, welchen ein solcher Mangel nicht anhaftet.

Von unsrer Versinnlichung des Elementbegriffs werden wir jetzt einige Anwendungen geben.

Eine n-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit:

$$z - F(x_1 \cdots x_n) = 0$$

besitzt in jedem ihrer Punkte z, $x_1 \cdots x_n$ eine n-fach ausgedehnte Tangentialebene, deren Gleichung folgendermassen lautet:

$$\mathfrak{z} - z - \frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathfrak{x}_1 - x_1) - \cdots - \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathfrak{x}_n - x_n) = 0.$$

Wir wollen nun jedes Element: z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, dessen Punkt $z, x_1 \cdots x_n$ auf der Mannigfaltigkeit: $z - F(x) = 0$ liegt und dessen Ebene:

$$\mathfrak{z} - z - p_1(\mathfrak{x}_1 - x_1) - \cdots - p_n(\mathfrak{x}_n - x_n) = 0$$

die zugehörige Tangentialebene dieser Mannigfaltigkeit ist, kurzweg als ein *Element der Mannigfaltigkeit*: $z - F = 0$ bezeichnen. Dann können wir sagen: zu jeder n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit: $z - F(x_1 \cdots x_n) = 0$ des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ gehören ∞^n verschiedene Elemente z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, deren Inbegriff durch das Gleichungensystem:

$$(27) \qquad z - F(x_1 \cdots x_n) = 0,\ p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0,\ \cdots p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

dargestellt wird.

Gleichungensysteme von der Form (27) sind uns nichts neues; wir haben ja früher gesehen, dass sie die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

erfüllen und dass sie unter allen $(n+1)$-gliedrigen Gleichungensystemen von dieser Beschaffenheit die einzigen sind, welche zwischen z, $x_1 \cdots x_n$ allein blos eine Relation liefern. Demnach lässt sich das vorhin gefundene Ergebniss so aussprechen:

Die Schaar der ∞^n Elemente z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, welche zu einer n-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeit: $z - F(x_1 \cdots x_n) = 0$ des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ gehören, genügt der Pfaffschen Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0.$$

Es bleiben hier alle n-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten ausgeschlossen, welche durch eine Gleichung von der Form: $\Omega(x_1 \cdots x_n) = 0$ dargestellt werden.

Betrachten wir andrerseits eine Punktmannigfaltigkeit, welche durch $q+1$ unabhängige Gleichungen:

$$\Omega_1(z, x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_{q+1}(z, x_1 \cdots x_n) = 0$$

dargestellt wird. Dieselbe besitzt in jedem ihrer Punkte ∞^q n-fach ausgedehnte Tangentialebenen, welche durch die Gleichung:

$$\begin{aligned}(28)\qquad \left(\sum_1^{q+1}{}_{\varkappa}\, \lambda_\varkappa \frac{\partial \Omega_\varkappa}{\partial z}\right)(\mathfrak{z} - z) + \left(\sum_1^{q+1}{}_{\varkappa}\, \lambda_\varkappa \frac{\partial \Omega_\varkappa}{\partial x_1}\right)(\mathfrak{x}_1 - x_1) + \cdots \\ + \left(\sum_1^{q+1}{}_{\varkappa}\, \lambda_\varkappa \frac{\partial \Omega_\varkappa}{\partial x_n}\right)(\mathfrak{x}_n - x_n) = 0\end{aligned}$$

definirt werden, unter $\lambda_1 \cdots \lambda_{q+1}$ willkürliche Parameter verstanden. Wir wollen nun entsprechend der vorhin eingeführten Ausdrucksweise ein Element z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ stets dann als ein Element der Mannigfaltigkeit: $\Omega_1 = 0$, $\cdots$ $\Omega_{q+1} = 0$ bezeichnen, wenn sein Punkt z, $x_1 \cdots x_n$ auf dieser Mannigfaltigkeit liegt, und wenn seine Ebene:

$$\mathfrak{z} - z - p_1(\mathfrak{x}_1 - x_1) - \cdots - p_n(\mathfrak{x}_n - x_n) = 0$$

eine der ∞^q n-fach ausgedehnten Tangentialebenen (28) ist, welche die Mannigfaltigkeit: $\Omega_1 = 0$, $\cdots$ $\Omega_{q+1} = 0$ im Punkte: z, $x_1 \cdots x_n$ besitzt.

Die Mannigfaltigkeit: $\Omega_1 = 0$, $\cdots$ $\Omega_{q+1} = 0$ ist $(n-q)$-fach ausgedehnt, sie enthält also ∞^{n-q} verschiedene Punkte, zu jedem dieser ∞^{n-q} Punkte gehören nach dem eben Gesagten ∞^q verschiedene Elemente, folglich gehören zu unsrer Mannigfaltigkeit im Ganzen ∞^n Elemente, welche durch die Gleichungen:

$$(29)\qquad \begin{cases} \Omega_1(z, x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_{q+1}(z, x_1 \cdots x_n) = 0 \\ \displaystyle\sum_1^{q+1}{}_{\varkappa}\, \lambda_\varkappa \frac{\partial \Omega_\varkappa}{\partial z} = 1, \qquad \underset{(i=1\cdots n)}{\sum_1^{q+1}{}_{\varkappa}\, \lambda_\varkappa \frac{\partial \Omega_\varkappa}{\partial x_i} = -p_i} \end{cases}$$

definirt werden, vorausgesetzt, dass man sich aus denselben die λ fortgeschafft denkt. Durch Elimination von $\lambda_1 \cdots \lambda_{q+1}$ aus (29) erhält man aber ein $(n+1)$-gliedriges Gleichungensystem in $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$, das die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ befriedigt. Also:

Die Schaar der ∞^n Elemente $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$, welche zu einer $(n-q)$-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeit des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ gehören, genügt der Pfaffschen Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$; hierbei kann q eine jede der Zahlen $0, 1, 2 \cdots n$ sein.

Wegen der besonderen Beschaffenheit der Elementcoordinaten z, x, p bleiben hier alle $(n-q)$-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten ausgeschlossen, deren Gleichungen von z frei sind.

Besonders erwähnt sei noch der Fall $q = n$, in welchem die $(n-q)$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit blos aus einem Punkte:

$$z = a, \quad x_1 = a_1, \cdots x_n = a_n \tag{30}$$

besteht. Die ∞^n Elemente, welche zu der betreffenden Punktmannigfaltigkeit gehören, sind da eben diejenigen, welche den Punkt (30) zum Punkte haben.

Erinnern wir uns der in § 21, S. 78 ff. durchgeführten Bestimmung aller $(n+1)$-gliedrigen Gleichungensysteme, welche die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ befriedigen, so ergiebt sich noch:

Jedes $(n+1)$-gliedrige Gleichungensystem in $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$, welches die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ befriedigt, stellt die ∞^n Elemente dar, welche einer Punktmannigfaltigkeit des n-fach ausgedehnten Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ angehören; die Dimensionenzahl dieser Punktmannigfaltigkeit ist eine der Zahlen $0, 1, 2 \cdots n$.

Ist ein Gleichungensystem in $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ so beschaffen, dass es die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ befriedigt, so heisst die Schaar von Elementen: $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$, welche es darstellt, eine *Elementmannigfaltigkeit des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$*. Eine Elementmannigfaltigkeit, welche durch ein System von $n - l + 1$ unabhängigen Gleichungen in $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ dargestellt wird, so dass sie aus gerade ∞^l verschiedenen Elementen besteht, nennen wir kurz eine *Element-M_l*.*)

Da ein Gleichungensystem, welches die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

befriedigt, aus mindestens $n+1$ unabhängigen Gleichungen besteht, so

---

*) Der *Begriff* Element-Mannigfaltigkeit wurde eingeführt in der Note: Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung ··· von Sophus Lie, Göttinger Nachrichten, October 1872; dagegen wurde die *Bezeichnung* „Element-Mannigfaltigkeit" bez. „Element-M_q" zuerst angewandt in den Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania für 1874. Neuerdings hat Herr *Engel* die vielleicht ausdrucksvollere Bezeichnung „Element-Verein" oder „Verein" in Vorschlag gebracht. Im Texte ist aus verschiedenen Gründen die zuerst eingeführte Bezeichnung behalten.

giebt es überhaupt keine Elementmannigfaltigkeit, welche mehr als ∞^n Elemente enthielte. Eine Elementmannigfaltigkeit, welche gerade ∞^n Elemente enthält, also eine Element-M_n besteht nach den eben durchgeführten Entwickelungen stets aus den ∞^n Elementen einer Punktmannigfaltigkeit des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$.

Mit Benutzung des Begriffs der Element-M_n können wir den Satz 13, S. 96 aussprechen wie folgt:

Satz 19. *Ein System von $n+1$ unabhängigen Gleichungen:*

$$F_1(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_1, \cdots F_{n+1}(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_{n+1}$$

stellt dann und nur dann für alle Werthe der Parameter $a_1 \cdots a_{n+1}$ eine Element-M_n dar, wenn $F_1 \cdots F_{n+1}$ eine Identität von der Form:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = \lambda_1 dF_1 + \cdots + \lambda_{n+1} dF_{n+1}$$

befriedigen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn alle Ausdrücke $[F_i F_\varkappa]$ identisch verschwinden.

§ 31.

Um den Begriff der Elementmannigfaltigkeit möglichst zugänglich zu machen, wollen wir zeigen, dass auch die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ einer begrifflichen Deutung fähig ist.

Wir betrachten irgend eine Schaar von ∞^1 Elementen, also nicht gerade eine Element-M_1 und denken uns diese Schaar in der Weise analytisch dargestellt, dass $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ als Functionen eines Parameters t gegeben sind:

$$z = \gamma(t), \quad x_i = \alpha_i(t), \quad p_i = \beta_i(t) \quad (i = 1 \cdots n). \tag{31}$$

Unter den ∞^1 Elementen dieser Schaar greifen wir irgend eines heraus, etwa das zum Parameter: $t = t^0$ gehörige Element: $z^0, x_1^0 \cdots x_n^0, p_1^0 \cdots p_n^0$ und setzen dabei nur voraus, dass für $t = t_0$ die $2n+1$ Differentialquotienten:

$$\frac{d\gamma}{dt}, \quad \frac{d\alpha_i}{dt}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} \qquad (i = 1 \cdots n)$$

nicht sämmtlich verschwinden. Dem unendlich benachbarten Werthe: $t^0 + \Delta t$ des Parameters t entspricht dann ein gewisses unendlich benachbartes Element: $z^0 + \Delta z, x_1^0 + \Delta x_1, \cdots p_n^0 + \Delta p_n$ unsrer Schaar.

Im Allgemeinen weicht nun der Punkt: $z^0 + \Delta z, x_1^0 + \Delta x_1, \cdots x_n^0 + \Delta x_n$ des Elementes mit dem Parameter $t_0 + \Delta t$ von der n-fach ausgedehnten Ebene:

$$\mathfrak{z} - z^0 - p_1^0(\mathfrak{x}_1 - x_1^0) - \cdots - p_n^0(\mathfrak{x}_n - x_n^0) = 0$$

des Elementes: $z^0, x_1^0 \cdots p_n^0$ um eine Grösse ab, welche von derselben Ordnung ist wie Δt, denn der Ausdruck:

$$\Delta z - p_1^0 \Delta x_1 - \cdots - p_n^0 \Delta x_n, \tag{32}$$

welcher als Mass dieser Abweichung gelten kann, hat im Allgemeinen dieselbe Ordnung wie $\varDelta t$. Es kann aber für einzelne Werthe von t^0 auch vorkommen, dass der Ausdruck (32) eine unendlich kleine Grösse von höherer Ordnung wird, als $\varDelta t$. In diesem Falle sagen wir, dass das Element $z^0 + \varDelta z$, $x_1{}^0 + \varDelta x_1, \cdots p_n{}^0 + \varDelta p_n$ mit dem Elemente z^0, $x_1{}^0 \cdots p_n{}^0$ *vereinigt liegt.*

Diese Definition kann die folgende schärfere Fassung erhalten:

In einer Schaar von ∞^1 Elementen:

$$z = \gamma(t), \quad x_i = \alpha_i(t), \quad p_i = \beta_i(t) \atop (i = 1 \cdots n) \tag{31}$$

liegt das Element t_0 mit dem unendlich benachbarten Elemente $t_0 + \varDelta t$ vereinigt, wenn der Ausdruck:

$$\frac{dz}{dt} - p_1 \frac{dx_1}{dt} - \cdots - p_n \frac{dx_n}{dt}$$

für $t = t^0$ verschwindet, ohne dass die $2n + 1$ Differentialquotienten:

$$\frac{dz}{dt}, \ \frac{dx_1}{dt} \cdots \frac{dx_n}{dt}, \ \frac{dp_1}{dt} \cdots \frac{dp_n}{dt}$$

*für $t = t^0$ sämmtlich den Werth Null annehmen.**)

Soll die Schaar der ∞^1 Elemente (31) eine Element-M_1 bilden, so ist nothwendig und hinreichend, dass der Ausdruck:

$$\frac{dz}{dt} - p_1 \frac{dx_1}{dt} - \cdots - p_n \frac{dx_n}{dt}$$

für jeden Werth von t verschwindet. Demnach können wir eine *Element-M_1* auch als *eine solche Schaar von ∞^1 Elementen* definiren, *in welcher jedes Element mit dem unendlich benachbarten vereinigt liegt.*

Haben wir endlich eine beliebige Element-M_l und wählen wir in derselben nach irgend einem Gesetze eine Schaar von ∞^1 Elementen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ aus, so liegen in dieser Schaar zwei Elemente, welche unendlich benachbart sind, jederzeit vereinigt und offenbar ist die Elementmannigfaltigkeit eben durch diese Eigenschaft als solche charakterisirt. In Folge dessen können wir jetzt die nachstehende Definition aufstellen:

Eine Elementmannigfaltigkeit des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ ist eine solche Schaar von Elementen dieses Raumes, in welcher jedes Element mit jedem unendlich benachbarten vereinigt liegt.

§ 32.

Wir definirten das Element $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ als den Inbegriff des Punktes $z, x_1 \cdots x_n$ und der hindurchgehenden n-fach ausgedehnten Ebene:

---

*) Lie, Göttinger Nachrichten, October 1872; Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1874; Math. Ann. Bd. IX.

$$\mathfrak{z} - z - p_1(\mathfrak{x}_1 - x_1) - \cdots - p_n(\mathfrak{x}_n - x_n) = 0;$$

wir bemerkten jedoch schon, dass die Elementcoordinaten: z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ gewisse Nachtheile haben; von Rechts wegen wird man jede Figur, welche aus einem Punkte und einer hindurchgehenden n-fach ausgedehnten Ebene besteht, als ein Element bezeichnen müssen; unsere Elementcoordinaten stellen aber keineswegs alle derartigen Elemente dar, sondern sie versagen für alle Elemente, deren n-fach ausgedehnte Ebene die Form:

$$\bar{p}_1(\mathfrak{x}_1 - x_1) + \cdots + \bar{p}_n(\mathfrak{x}_n - x_n) = 0$$

besitzt.

Diesem Uebelstande ist leicht abzuhelfen. Die Grössen $p_1 \cdots p_n$ sind ja weiter nichts als Ebenencoordinaten in dem Bündel der ∞^{n-1} n-fach ausgedehnten Ebenen, welche durch einen beliebig gewählten Punkt: z, $x_1 \cdots x_n$ gehen und diese Ebenencoordinaten sind so beschaffen, dass sie nicht alle durch den Punkt z, $x_1 \cdots x_n$ gehenden n-fach ausgedehnten Ebenen darstellen. Um diese Ebenen alle zu erhalten, brauchen wir blos an Stelle von $p_1 \cdots p_n$ ein System von $n+1$ homogenen Ebenencoordinaten $q_1 \cdots q_{n+1}$ durch die Substitution:

$$p_1 = -\frac{q_1}{q_{n+1}}, \cdots p_n = -\frac{q_n}{q_{n+1}}$$

einzuführen. Die n-fach ausgedehnte Ebene eines beliebigen Elementes mit dem Punkte z, $x_1 \cdots x_n$ hat dann die Gleichung:

$$q_{n+1}(\mathfrak{z} - z) + q_1(\mathfrak{x}_1 - x_1) + \cdots + q_n(\mathfrak{x}_n - x_n) = 0.$$

Nunmehr sind die $n+1$ Punktcoordinaten z, $x_1 \cdots x_n$ vollständig gleichberechtigt unter einander; es ist daher kein Grund mehr vorhanden, die eine unter diesen Punktcoordinaten, nämlich z in der Bezeichnung vor den übrigen hervorzuheben; in Folge dessen setzen wir noch:

$$x_1 = y_1, \cdots x_n = y_n, \; z = y_{n+1}$$

und können uns jetzt folgendermassen ausdrücken:

Ein Element des $(n+1)$-fach ausgedehnten Raumes: $y_1 \cdots y_{n+1}$ heisst jede Figur, welche aus dem Inbegriffe eines Punktes $y_1 \cdots y_{n+1}$ und einer hindurchgehenden n-fach ausgedehnten Ebene:

$$q_1(\mathfrak{y}_1 - y_1) + \cdots + q_{n+1}(\mathfrak{y}_{n+1} - y_{n+1}) = 0$$

besteht.

Die Grössen $y_1 \cdots y_{n+1}$, $q_1 \cdots q_{n+1}$ bezeichnen wir als *homogene Elementcoordinaten,* im Gegensatze zu den nichthomogenen Elementcoordinaten: z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$.

Zu diesen homogenen Elementcoordinaten kann man übrigens, wie schon früher (S. 85 f.) angedeutet, auch auf einem anderen Wege kommen.

Unter den ∞^{2n+1} Elementen des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ fassen wir blos die ∞^{2n} ins Auge, welche der Gleichung: $z = 0$ genügen.

Ist $z = 0$, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ irgend eines dieser ∞^{2n} Elemente und verstehen wir unter λ einen willkürlichen Parameter, so stellt die Gleichung:

$$\mathfrak{z} - \lambda p_1(\mathfrak{x}_1 - x_1) - \cdots - \lambda p_n(\mathfrak{x}_n - x_n) = 0$$

die ∞^1 n-fach ausgedehnten Ebenen der ∞^1 Elemente: $z = 0$, $x_1 \cdots x_n$, $\lambda p_1, \cdots, \lambda p_n$ dar. Diese ∞^1 Ebenen gehen alle durch die $(n-1)$-fach ausgedehnte Ebene:

$$\mathfrak{z} = 0, \quad p_1(\mathfrak{x}_1 - x_1) + \cdots + p_n(\mathfrak{x}_n - x_n) = 0$$

des n-fach ausgedehnten Raumes $z = 0$.

Demnach sehen wir, dass *die ∞^{2n} Elemente z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, welche der Gleichung $z = 0$ genügen, sich in ∞^{2n-1} Büschel von je ∞^1 anordnen und zwar derart, dass die ∞^1 Elemente jedes Büschels durch ein ganz bestimmtes der ∞^{2n-1} Elemente des n-fach ausgedehnten Raumes $z = 0$ hindurchgehen.*

Betrachten wir nun irgend eine Element-M_n des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$, welche der Gleichung $z = 0$ genügt. Nach den Entwickelungen des § 22, S. 83 f. wird dieselbe durch $n + 1$ Gleichungen von der Form:

$$z = 0, \quad F_i\left(x_1 \cdots x_n, \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) = 0 \qquad (i = 1 \cdots n)$$

dargestellt. Ihre ∞^n Elemente z, x, p ordnen sich in Folge dessen ebenfalls in Schaaren von je ∞^1 solchen, welche durch ein Element des n-fach ausgedehnten Raumes $z = 0$ hindurchgehen. Die ∞^{n-1} Elemente des Raumes $z = 0$, welche auf diese Weise durch die Element-M_n: $z = 0$, $F_1 = 0, \cdots F_n = 0$ des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ definirt sind, bilden ihrerseits eine Element-M_{n-1} des n-fach ausgedehnten Raumes.

Hierin liegt, dass wir die Grössen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ als Coordinaten der Elemente des n-fach ausgedehnten Raumes: $x_1 \cdots x_n$ auffassen können. Die so definirten Elementcoordinaten sind augenscheinlich nichts anderes als die oben besprochenen *homogenen* Elementcoordinaten.

Wir wollen endlich noch den früheren Satz 19, S. 107 so aussprechen, wie er sich bei Benutzung homogener Elementcoordinaten gestaltet:

Sind $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ homogene Elementcoordinaten des n-fach ausgedehnten Raumes: $x_1 \cdots x_n$, so stellt ein Gleichungensystem von der Form:

$$X_1(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_1, \cdots X_n(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_n$$

dann und nur dann für alle Werthe der Parameter $a_1 \cdots a_n$ eine Element-M_{n-1} dieses Raumes dar, wenn alle $(X_i X_\varkappa)$ identisch verschwinden und wenn $X_1 \cdots X_n$ unabhängige Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ darstellen, welche in den p homogen von nullter Ordnung sind.

§ 33.

Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0$$

des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ scheidet unter den ∞^{2n+1} Elementen dieses Raumes eine Schaar von ∞^{2n} aus. Die Aufgabe diese Gleichung zu integriren, können wir daher jetzt so aussprechen:

Es sollen alle Element-M_n gefunden werden, deren Elemente die Gleichung: $F = 0$ erfüllen oder kürzer, es sollen alle Element-M_n *der* Gleichung: *$F = 0$ gefunden werden.*

*Eine vollständige Lösung der Gleichung $F=0$ zu finden, heisst nichts anderes, als die ∞^{2n} Elemente der Gleichung auf irgend eine solche Weise in eine Schaar von ∞^n Element-M_n anordnen, dass der Inbegriff aller Elemente dieser ∞^n Element-M_n mit dem Inbegriff der ∞^{2n} Elemente von $F=0$ zusammenfällt.**)

Alle Element-M_n einer Gleichung: $F=0$ zu finden, ist im Allgemeinen blos durch Integration möglich; dagegen kann man die Element-M_{n-1} einer jeden Gleichung: $F=0$ ohne Integration angeben. Man nehme nur irgend eine Element-M_n, welche der betreffenden Gleichung $F=0$ nicht genügt und suche alle in ihr enthaltenen Elemente, welche $F=0$ erfüllen; die so definirten Elemente bilden immer eine Element-M_{n-1} von $F=0$. Wählt man jene Element-M_n auf alle möglichen Weisen, so erhält man *alle* Element-M_{n-1} von $F=0$:

Sind mehrere Gleichungen:

$$F_1(z,\ x_1\cdots x_n,\ p_1\cdots p_n)=0,\ \cdots\ F_q(z,\ x_1\cdots x_n,\ p_1\cdots p_n)=0$$

zwischen $z,\ x_1\cdots x_n,\ p_1\cdots p_n$ vorgelegt, so kann man sich die Aufgabe stellen, in allgemeinster Weise $n+1-q$ solche Gleichungen: $\Phi_{q+1}(z,\ x,\ p)=0,\ \cdots\ \Phi_{n+1}(z,\ x,\ p)=0$ hinzuzufügen, dass das entstehende Gleichungensystem:

$$F_1=0,\ \cdots\ F_q=0,\qquad \Phi_{q+1}=0,\ \cdots\ \Phi_{n+1}=0$$

die Pfaffsche Gleichung: $dz-p_1dx_1-\cdots-p_ndx_n=0$ erfüllt.

Besonders wichtig ist der Fall, dass blos *zwei* Gleichungen vorgelegt sind und dass die eine derselben lautet: $z=0$. Da wir nun wissen, dass jedes $(n+1)$-gliedrige Gleichungensystem, welches die Pfaffsche Gleichung: $dz-p_1dx_1-\cdots-p_ndx_n=0$ befriedigt und welches die Gleichung: $z=0$ umfasst, auf die Form:

$$z=0,\quad F_i\left(x_1\cdots x_n,\ \frac{p_1}{p_n}\cdots\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=0\qquad (i=1\cdots n)$$

gebracht werden kann, so werden wir naturgemäss dazu geführt, die folgende Aufgabe zu stellen:

Es sind zwei Gleichungen von der Form:

$$z=0,\quad F\left(x_1\cdots x_n,\ \frac{p_1}{p_n}\cdots\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=0$$

vorgelegt, man soll in allgemeinster Weise $n-1$ solche Gleichungen:

$$\Phi_1\left(x_1\cdots x_n,\ \frac{p_1}{p_n}\cdots\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=0,\ \cdots\ \Phi_{n-1}\left(x_1\cdots x_n,\ \frac{p_1}{p_n}\cdots\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=0$$

hinzufügen, dass:

---

*) Lie, Göttinger Nachrichten, October 1872; vgl. auch die Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1871.

$$z = 0, \quad F = 0, \quad \Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n-1} = 0$$

ein $(n+1)$*-gliedriges Gleichungensystem wird, welches die Pfaffsche Gleichung:* $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ *erfüllt.*

Diese Aufgabe kann offenbar die nachstehende einfachere Fassung erhalten:

Vorgelegt ist eine Gleichung von der Form:

$$F\left(y_1 \cdots y_n, \frac{q_1}{q_n} \cdots \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) = 0 \tag{32}$$

in den $2n$ *Veränderlichen* $y_1 \cdots y_n$, $q_1 \cdots q_n$, *man soll in allgemeinster Weise* $n-1$ *solche Gleichungen:*

$$\Phi_1\left(y_1 \cdots y_n, \frac{q_1}{q_n} \cdots \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) = 0, \cdots \Phi_{n-1}\left(y_1 \cdots y_n, \frac{q_1}{q_n} \cdots \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) = 0$$

hinzufügen, dass ein n*-gliedriges Gleichungensystem entsteht, welches die Pfaffsche Gleichung:* $q_1 dy_1 + \cdots + q_n dy_n = 0$ *befriedigt.*

Von der grössten Wichtigkeit ist es, dass diese letzte Aufgabe im Wesentlichen nur eine andere Formulirung der Aufgabe ist, eine gewisse partielle Differentialgleichung erster Ordnung in n Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_{n-1}$ zu integriren.

In der That, es sei:

$$F\left(y_1 \cdots y_n, \frac{q_1}{q_n} \cdots \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) = 0, \quad \Phi_i\left(y_1 \cdots y_n, \frac{q_1}{q_n} \cdots \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) = 0 \tag{33}$$
$$(i = 1 \cdots n-1)$$

ein n-gliedriges Gleichungensystem, welches die Pfaffsche Gleichung: $q_1 dy_1 + \cdots + q_n dy_n = 0$ befriedigt oder wie wir uns nach Analogie mit der auf S. 101 eingeführten Redeweise ausdrücken können: es sei (33) eine *Lösung* der Gleichung (32).

Setzt man nun:

$$y_n = z, \; y_1 = x_1, \cdots y_{n-1} = x_{n-1}, \; \frac{q_1}{q_n} = -p_1, \cdots \frac{q_{n-1}}{q_n} = -p_{n-1},$$

so erhält man aus (32) die Gleichung:

$$F(x_1 \cdots x_{n-1}, z, -p_1, \cdots -p_{n-1}) = 0 \tag{32'}$$

und aus (33) das Gleichungensystem:

$$\left\{\begin{aligned} &F(x_1 \cdots x_{n-1}, z, -p_1, \cdots -p_{n-1}) = 0, \\ &\Phi_i(x_1 \cdots x_{n-1}, z, -p_1, \cdots -p_{n-1}) = 0, \\ &\qquad (i = 1 \cdots n-1). \end{aligned}\right. \tag{33'}$$

Dieses letztere befriedigt die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_{n-1} dx_{n-1} = 0$$

und umfasst die Gleichung (32′), es stellt also nach S. 101 eine Lösung von (32′) dar.

Macht man andrerseits in einem n-gliedrigen Gleichungensystem, welches eine Lösung von (32′) darstellt, die Substitution:

$$z = y_n, \; x_1 = y_1, \; \cdots \; x_{n-1} = y_{n-1}, \; p_1 = -\frac{q_1}{q_n}, \; \cdots \; p_{n-1} = -\frac{q_{n-1}}{q_n},$$

so erhält man offenbar ein Gleichungensystem, welches eine Lösung von (32) darstellt.

Dies alles ist auch begrifflich klar.*)

Die Gleichung:

$$F\left(y_1 \cdots y_n, \; \frac{q_1}{q_n} \cdots \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) = 0$$

bestimmt eine Schaar von ∞^{2n-2} Elementen des n-fach ausgedehnten Raumes. Es handelt sich nun darum, alle Element-M_{n-1} zu finden, welche in dieser Schaar von ∞^{2n-2} Elementen enthalten sind. Das ist eine Aufgabe, welche man entweder unter Benutzung der homogenen Elementcoordinaten: $y_1 \cdots y_n$, $q_1 \cdots q_n$ analytisch formuliren kann oder unter Benutzung der nicht homogenen Elementcoordinaten: z, $x_1 \cdots x_{n-1}$, $p_1 \cdots p_{n-1}$. Selbstverständlich sind diese beiden analytischen Formulirungen im Wesentlichen mit einander äquivalent, nur ein kleiner Unterschied findet statt, der in dem Unterschiede zwischen homogenen und nicht homogenen Elementcoordinaten seinen Grund hat: Löst man das Problem für homogene Elementcoordinaten, so kann man sehr gut auch solche Element-M_{n-1} finden, welche die Gleichung: $q_n = 0$ befriedigen, löst man dagegen das Problem in nicht homogenen Elementcoordinaten, so gehen alle derartigen Element-M_{n-1} verloren, weil für sie die nicht homogenen Elementcoordinaten unbrauchbar sind.

Wir wollen die vorstehenden Betrachtungen noch durch ein Beispiel erläutern.

Eine Gleichung von der Form:

$$F\left(x, \; y, \; \frac{p}{q}\right) = 0$$

bestimmt eine Schaar von ∞^4 Elementen des Raumes z, x, y. Unter diesen ∞^4 Elementen giebt es ∞^3, welche die Gleichung: $z = 0$ befriedigen. Man sieht sofort, dass die so definirten ∞^3 Elemente des Raumes z, x, y sich in ∞^2 Schaaren von je ∞^1 anordnen und zwar so, dass alle ∞^1 Elemente einer derartigen Schaar durch ein Linienelement der Ebene $z = 0$ hindurchgehen. Demnach sind durch die Gleichung:

$$F\left(x, \; y, \; \frac{p}{q}\right) = 0$$

*) Die Entwickelungen des Textes erklären und vervollständigen eine von *Jacobi* herrührende Umformung des Integrationsproblems der allgemeinen Gleichung:

$$F(x_1 \cdots x_n, z, p_1 \cdots p_n) = 0.$$

Vgl. die Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1873 und 1874.

∞^2 Linienelemente der Ebene $z = 0$ ausgezeichnet. In den nicht homogenen Linienelementcoordinaten x, y, y' werden diese ∞^2 Linienelemente durch die Gleichung:

$$F(x, y, -y') = 0 \tag{34}$$

dargestellt, welche als eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung der Ebene x, y aufgefasst werden kann.

Die Aufgabe, alle Element-M_1 der Gleichung (34) zu finden, ist offenbar äquivalent mit der Aufgabe, alle Element-M_2 des Raumes z, x, y zu finden, welche den beiden Gleichungen:

$$z = 0, \quad F\left(x, y, \frac{p}{q}\right) = 0$$

genügen.

Kapitel 5.

Die Berührungstransformationen in beliebig vielen Veränderlichen.

Ist eine Transformation:

$$\left\{\begin{aligned} z' &= Z(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n), \quad x_i' = X_i(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) \\ p_i' &= P_i(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) \\ &\qquad (i = 1 \cdots n) \end{aligned}\right. \tag{1}$$

in den $2n + 1$ Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ so beschaffen, dass sie die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

invariant lässt, so heisst sie eine *Berührungstransformation des* $(n+1)$-*fach ausgedehnten Raumes:* $z, x_1 \cdots x_n$.*)

§ 34.

Die Transformation (1) ist dann und nur dann eine Berührungstransformation, wenn die $2n + 1$ Functionen $Z, X_1 \cdots X_n, P_1 \cdots P_n$ eine Relation von der Form:

$$dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n) \tag{2}$$

*) Die im Texte gegebene Definition des Begriffes *Berührungstransformation* wurde aufgestellt in der Abhandlung: „Zur analytischen Theorie der Berührungstransformationen" von Sophus Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, Juni 1873; vgl. dieselben Verhandlungen für 1871 und 1872, sowie Göttinger Nachrichten, October 1872. Die in dem vorliegenden Kapitel entwickelten Sätze über Berührungstransformationen finden sich ebenfalls in der zuerst genannten Arbeit. Freilich waren derartige Transformationen, wie im Texte erwähnt wird, schon früher von mehreren Mathematikern, besonders von *Euler*, *Ampère* und *Jacobi* benutzt worden; *keiner unter ihnen gab aber eine wirkliche Definition, geschweige denn eine systematische Theorie der Berührungstransformationen.*

identisch befriedigen, unter ϱ eine gewisse Function von $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ verstanden.

Man sieht leicht, dass hier die Function ϱ niemals identisch verschwindet. Wäre nämlich $\varrho \equiv 0$, so zerfiele die Identität (2) in die folgenden $2n + 1$:

$$
(2') \qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial Z}{\partial z} - P_1 \dfrac{\partial X_1}{\partial z} - \cdots - P_n \dfrac{\partial X_n}{\partial z} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial Z}{\partial x_i} - P_1 \dfrac{\partial X_1}{\partial x_i} - \cdots - P_n \dfrac{\partial X_n}{\partial x_i} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial Z}{\partial p_i} - P_1 \dfrac{\partial X_1}{\partial p_i} - \cdots - P_n \dfrac{\partial X_n}{\partial p_i} = 0 \\
\qquad\qquad (i = 1 \cdots n),
\end{cases}
$$

so dass alle $(n+1)$-reihigen Determinanten der Matrix:

$$
\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial Z}{\partial z} & \dfrac{\partial Z}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \dfrac{\partial Z}{\partial x_n} & \dfrac{\partial Z}{\partial p_1} & \cdot & \cdot & \dfrac{\partial Z}{\partial p_n} \\[2ex]
\dfrac{\partial X_1}{\partial z} & \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \dfrac{\partial X_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial X_1}{\partial p_1} & \cdot & \cdot & \dfrac{\partial X_1}{\partial p_n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\dfrac{\partial X_n}{\partial z} & \dfrac{\partial X_n}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \dfrac{\partial X_n}{\partial x_n} & \dfrac{\partial X_n}{\partial p_1} & \cdot & \cdot & \dfrac{\partial X_n}{\partial p_n}
\end{vmatrix}
$$

identisch verschwänden und also die Functionen $Z, X_1 \cdots X_n$ gar nicht von einander unabhängig wären; das aber ist ausgeschlossen, da ja (1) eine Transformation sein soll.

Eine sehr einfache und besonders wichtige Berührungstransformation ist die nachstehende:

$$
(3) \qquad \begin{cases}
z' = z - x_1 p_1 - \cdots - x_q p_q \\
x_1' = p_1, \cdots x_q' = p_q, \; x_{q+1}' = x_{q+1}, \cdots x_n' = x_n \\
p_1' = -x_1, \cdots p_q' = -x_q, \; p_{q+1}' = p_{q+1}, \cdots p_n' = p_n,
\end{cases}
$$

in welcher q eine beliebige der Zahlen $1, 2 \cdots n$ bedeutet. Indem man sich überzeugt, dass diese Transformation die allgemeine Definitionsgleichung (2) einer Berührungstransformation erfüllt, erkennt man gleichzeitig, dass die Grösse ϱ den Werth 1 besitzt. Transformationen von dieser Gestalt kommen für den Fall $q = 1$ bereits bei *Euler* vor; der Fall $n = 3$, $q = 2$ ist unter dem Namen „*Legendre*sche Transformation“ bekannt; der Fall $n = 3$, $q = 1$ findet sich bei *Ampère*.

Verstehen wir unter $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ irgend eine Reihenfolge der Zahlen $1, 2 \cdots n$, so stellen offenbar auch die Gleichungen:

$$
(3') \begin{cases} z' = z - x_{\alpha_1} p_{\alpha_1} - \cdots - x_{\alpha_q} p_{\alpha_q} \\ x'_{\alpha_1} = p_{\alpha_1}, \cdots x'_{\alpha_q} = p_{\alpha_q}, \; x'_{\alpha_{q+1}} = x_{\alpha_{q+1}}, \cdots x'_{\alpha_n} = x_{\alpha_n} \\ p'_{\alpha_1} = - x_{\alpha_1}, \cdots p'_{\alpha_q} = - x_{\alpha_q}, \; p'_{\alpha_{q+1}} = p_{\alpha_{q+1}}, \cdots p'_{\alpha_n} = p_{\alpha_n} \end{cases}
$$

stets eine Berührungstransformation dar. Von dieser Berührungstransformation, welche zwar in ihrer Form etwas allgemeiner ist als (3), nicht aber in ihrem Wesen, wollen wir hier eine bemerkenswerthe Anwendung machen.

Nach Theorem 9, S. 82 kann jedes $(n+1)$-gliedrige Gleichungensystem, welches die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ befriedigt, durch Auflösung auf die Form:

$$
(4) \begin{cases} z - x_{\alpha_1} p_{\alpha_1} - \cdots - x_{\alpha_q} p_{\alpha_q} = W(p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_q}, \; x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n}) \\ x_{\alpha_1} = - \dfrac{\partial W}{\partial p_{\alpha_1}}, \cdots x_{\alpha_q} = - \dfrac{\partial W}{\partial p_{\alpha_q}} \\ p_{\alpha_{q+1}} = \dfrac{\partial W}{\partial x_{\alpha_{q+1}}}, \cdots p_{\alpha_n} = \dfrac{\partial W}{\partial x_{\alpha_n}} \end{cases}
$$

gebracht werden. Führen wir nun auf (4) die Berührungstransformation (3′) aus, so erhalten wir in den z', x', p' das Gleichungensystem:

$$
z' = W(x'_{\alpha_1} \cdots x'_{\alpha_n}), \quad p'_1 = \frac{\partial W}{\partial x'_1}, \cdots p'_n = \frac{\partial W}{\partial x'_n},
$$

welches seinerseits die Pfaffsche Gleichung: $dz' - p'_1 dx'_1 - \cdots - p'_n dx'_n = 0$ erfüllt. Damit ist bewiesen, dass man jedes $(n+1)$-gliedrige Gleichungensystem, welches die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ befriedigt, durch eine geeignete Berührungstransformation von der Form (3′) in ein Gleichungensystem überführen kann, welches in aufgelöster Form so lautet:

$$
z' - F(x'_1 \cdots x'_n) = 0, \quad p'_1 - \frac{\partial F}{\partial x'_1} = 0, \cdots p'_n - \frac{\partial F}{\partial x'_n} = 0.*)
$$

Man überzeugt sich ferner durch eine leichte Rechnung, dass jeder Klammerausdruck: $[F\Phi]_{zxp}$ bei Ausführung der Transformation (3′) die Form:

$$
[F\Phi]_{zxp} = [F\Phi]_{z'x'p'}
$$

erhält. Mit Benutzung dieser Bemerkung liessen sich die Entwickelungen der §§ 25 und 26 des vorigen Kapitels abkürzen.

Als zweites Beispiel einer Berührungstransformation führen wir noch an:

$$
(5) \begin{cases} z' = z - \dfrac{a}{\sqrt{1 + p_1^2 + \cdots + p_n^2}} \\ x'_i = x_i + \dfrac{a p_i}{\sqrt{1 + p_1^2 + \cdots + p_n^2}}, \; p'_i = p_i \\ (i = 1 \cdots n); \end{cases}
$$

für dieselbe hat ϱ ebenfalls den Werth 1.

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, November 1874.

Ist:

$$(1) \qquad z' = Z(z, x, p), \quad x_i' = X_i(z, x, p), \quad p_i' = P_i(z, x, p) \quad (i = 1 \cdots n)$$

irgend eine Berührungstransformation, so besteht, wie wir wissen, vermöge (1) eine Relation von der Form:

$$(6) \quad dz' - p_1'dx_1' - \cdots - p_n'dx_n' = \varrho(z, x, p) \,.\, (dz - p_1dx_1 - \cdots - p_ndx_n),$$

wo die Function ϱ nicht identisch verschwindet. Hieraus ergiebt sich sofort, dass die zu (1) gehörige inverse Transformation:

$$z = \overline{Z}(z', x', p'), \quad x_i = \overline{X}_i(z', x', p'), \quad p_i = \overline{P}_i(z', x', p') \quad (i = 1 \cdots n),$$

welche durch Auflösung von (1) nach den z, x, p erhalten wird, ebenfalls eine Berührungstransformation ist.

Führen wir andrerseits zuerst die Berührungstransformation (1) aus und sodann irgend eine zweite Berührungstransformation:

$$(1') \quad z'' = \mathsf{Z}(z', x', p'), \quad x_i'' = \Xi_i(z', x', p'), \quad p_i'' = \Pi_i(z', x', p') \quad (i = 1 \cdots n),$$

so ist die auf diese Weise erhaltene Transformation:

$$(1'') \quad z'' = \mathsf{Z}(Z, X, P), \quad x_i'' = \Xi_i(Z, X, P), \quad p_i'' = \Pi_i(Z, X, P) \quad (i = 1 \cdots n)$$

stets wieder eine Berührungstransformation.

In der That, vermöge (1) besteht eine Relation von der Form (6) und vermöge (1′) eine von der ähnlichen Form:

$$(6') \quad \begin{cases} dz'' - p_1''dx_1'' - \cdots - p_n''dx_n'' = \\ = \sigma(z', x', p') \,.\, (dz' - p_1'dx_1' - \cdots - p_n'dx_n'). \end{cases}$$

Vermöge der Gleichungen (1″), welche sich aus (1) und (1′) durch Fortschaffung der z', x', p' ergeben, besteht daher eine Relation von der Form:

$$\begin{cases} dz'' - p_1''dx_1'' - \cdots - p_n''dx_n'' = \\ = \varrho(z, x, p) \,.\, \sigma(Z, X, P)\,(dz - p_1dx_1 - \cdots - p_ndx_n), \end{cases}$$

also ist (1″) wirklich eine Berührungstransformation.

Wir haben somit den

Satz 1. *Die Berührungstransformationen des $(n+1)$-fach ausgedehnten Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ ordnen sich paarweise als inverse zusammen; führt man andrerseits zwei beliebige Berührungstransformationen dieses Raumes nach einander aus, so erhält man stets wieder eine Berührungstransformation.*

Setzen wir den in der Einleitung des ersten Abschnitts eingeführten Begriff „unendliche continuirliche Gruppe“ als bekannt voraus, so können wir sagen, dass *alle Berührungstransformationen in den Veränderlichen* $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ *eine unendliche continuirliche Transformationsgruppe bilden.*

Bestimmen die Gleichungen:

$$z' = Z(z, x, p), \quad x_\varkappa' = X_\varkappa(z, x, p), \quad p_\varkappa' = P_\varkappa(z, x, p)$$

eine Berührungstransformation und die Gleichungen:

$$z' = A(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}, \mathfrak{p}), \quad x_\varkappa' = B_\varkappa(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}, \mathfrak{p}), \quad p_\varkappa' = C_\varkappa(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}, \mathfrak{p})$$

eine zweite, so bestimmen die Gleichungen:

$$Z(z, x, p) = A(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}, \mathfrak{p}), \quad X_\varkappa = B_\varkappa, \quad P_\varkappa = C_\varkappa$$

eine Berührungstransformation zwischen den Veränderlichen z, x, p und $\mathfrak{z}, \mathfrak{x}, \mathfrak{p}$; es bestehen ja nach unsern Voraussetzungen Identitäten von der Form:

$$dz' - p_1' dx_1' - \cdots - p_n' dx_n' = \varrho (dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$
$$dz' - p_1' dx_1' - \cdots - p_n' dx_n' = \sigma (d\mathfrak{z} - \mathfrak{p}_1 d\mathfrak{x}_1 - \cdots - \mathfrak{p}_n d\mathfrak{x}_n),$$

also auch eine von der Form:

$$d\mathfrak{z} - \mathfrak{p}_1 d\mathfrak{x}_1 - \cdots - \mathfrak{p}_n d\mathfrak{x}_n = w(z, x, p) . (dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n).$$

§ 35.

Es seien jetzt irgend welche Functionen $Z, X_1 \cdots X_n, P_1 \cdots P_n$ vorgelegt, welche eine Identität von der Form:

(2) $$dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = \varrho (dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

mit nicht verschwindendem ϱ befriedigen. Wir werden gewisse Differentialrelationen ableiten, welche für alle solchen Functionensysteme Z, X_i, P_i charakteristisch sind.

Die Identität (2) lässt sich auch schreiben:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = \frac{1}{\varrho} dZ - \frac{P_1}{\varrho} dX_1 - \cdots - \frac{P_n}{\varrho} dX_n,$$

also müssen nach Satz 16, S. 98 die $n+1$ Functionen: $Z, X_1 \cdots X_n$ paarweise in Involution liegen, es muss sein:

(7) $$[Z X_i] \equiv 0, \quad [X_i X_\varkappa] \equiv 0 \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n).$$

Andrerseits ist identisch:

$$dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = d(Z - X_{\alpha_1} P_{\alpha_1} - \cdots - X_{\alpha_q} P_{\alpha_q}) +$$
$$+ X_{\alpha_1} dP_{\alpha_1} + \cdots + X_{\alpha_q} dP_{\alpha_q} - P_{\alpha_{q+1}} dX_{\alpha_{q+1}} - \cdots - P_{\alpha_n} dX_{\alpha_n},$$

wo $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ wie schon öfter eine beliebige Reihenfolge der Zahlen $1, 2 \cdots n$ bezeichnet und q irgend eine dieser Zahlen ist. Wird dieser Werth von $dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n$ in die Identität (2) eingesetzt und nochmals jener Satz 16 benutzt, so ergiebt sich, dass die $n+1$ Functionen:

$$Z - X_{\alpha_1}P_{\alpha_1} - \cdots - X_{\alpha_q}P_{\alpha_q}, \quad X_{\alpha_1} \cdots X_{\alpha_q}, \quad P_{\alpha_{q+1}} \cdots P_{\alpha_n}$$

paarweise in Involution liegen. Folglich haben wir:

$$(7') \qquad \begin{cases} [P_i,\, P_\varkappa] \equiv 0, \quad [P_i,\, X_\varkappa] \equiv 0 \quad (i \neq \varkappa) \\ \qquad [P_i,\, Z] \equiv P_i[P_i,\, X_i] \end{cases} \qquad (i,\, \varkappa = 1 \cdots n).$$

Ferner liefert die Berührungstransformation (5) die Identität:

$$d\left(Z - \frac{a}{\sqrt{S}}\right) - \sum_1^n {}^i P_i \,.\, d\left(X_i + \frac{a P_i}{\sqrt{S}}\right) = dZ - \sum_1^n {}^i P_i dX_i,$$

wo S zur Abkürzung für $1 + P_1^2 + \cdots + P_n^2$ geschrieben ist, es müssen also die Functionen:

$$Z - \frac{a}{\sqrt{S}}, \; X_1 + \frac{a P_1}{\sqrt{S}}, \; \cdots \; X_n + \frac{a P_n}{\sqrt{S}}$$

paarweise in Involution liegen. In Folge dessen ist:

$$\left[X_i + \frac{a P_i}{\sqrt{S}},\, X_\varkappa + \frac{a P_\varkappa}{\sqrt{S}}\right] \equiv 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$[P_1,\, X_1] \equiv [P_2,\, X_2] \equiv \cdots \equiv [P_n,\, X_n].$$

Um endlich den Werth des Ausdrucks $[P_i,\, X_i]$ zu finden, benutzen wir den Umstand, dass die $2n+3$ Functionen:

$$z' = Z, \; x_1' = X_1, \; \cdots \; x_n' = X_n, \; x_{n+1}' = x_{n+1}$$
$$p_1' = P_1, \; \cdots \; p_n' = P_n, \; p_{n+1}' = \varrho p_{n+1}$$

der $2n+3$ Veränderlichen $z,\, x_1 \cdots x_{n+1},\, p_1 \cdots p_{n+1}$ die Gleichung:

$$dz' - \sum_1^{n+1} {}^\nu p_\nu' dx_\nu' = \varrho\left(dz - \sum_1^{n+1} {}^\nu p_\nu dx_\nu\right)$$

identisch befriedigen. Wir setzen für den Augenblick:

$$\sum_1^{n+1} {}^\nu \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) - \frac{\partial \Psi}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\right\} = [\Phi,\, \Psi]_{n+1};$$

dann muss nach dem Vorangehenden sein:

$$[P_1,\, X_1]_{n+1} \equiv \cdots \equiv [P_n,\, X_n]_{n+1} \equiv [\varrho p_{n+1},\, x_{n+1}]_{n+1};$$

hier hat der Ausdruck am weitesten rechts einfach den Werth ϱ, während $[P_i,\, X_i]_{n+1}$ gleich $[P_i,\, X_i]$ ist. Also kommt:

$$(7'') \qquad [P_1,\, X_1] \equiv \cdots \equiv [P_n,\, X_n] \equiv \varrho.$$

Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 2. *Sind* Z, $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ *solche Functionen der Veränderlichen:* z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, *welche eine Identität von der Form:*

$$(2) \quad dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n \equiv \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

befriedigen, wo ϱ *eine nicht identisch verschwindende Function von* z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ *bezeichnet, so bestehen auch die Differentialrelationen:*

$$(8) \quad \begin{cases} [Z,\ X_i] = [X_i,\ X_\varkappa] = [P_i,\ X_\varkappa] = 0 & (i \neq \varkappa) \\ [P_i,\ X_i] = \varrho, \quad [P_i,\ Z] = \varrho P_i & \\ (i,\ \varkappa = 1 \cdots n) & \end{cases}$$

sämmtlich identisch.

Dieser Satz lässt sich leicht vervollständigen.

Aus dem Bestehen einer Identität von der Form (2) mit nicht verschwindendem ϱ folgt nach Satz 15, S. 98, dass die Functionen Z, $X_1 \cdots X_n$ von einander unabhängig sind. Wären nun die Functionen $P_1 \cdots P_n$ nicht von einander und von Z, $X_1 \cdots X_n$ unabhängig, so liesse sich jedenfalls eine unter ihnen, etwa P_q durch die übrigen und durch Z, $X_1 \cdots X_n$ ausdrücken:

$$P_q \equiv \mathsf{X}(P_1 \cdots P_{q-1},\ P_{q+1} \cdots P_n,\ Z,\ X_1 \cdots X_n),$$

es müsste also sein:

$$[P_q X_q] \equiv [\mathsf{X} X_q] \equiv 0,$$

was nicht der Fall ist. Folglich sind die $2n+1$ Functionen: Z, $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ von einander unabhängig.

Damit haben wir die angekündigte Vervollständigung des Satzes 2:

Satz 3. *Befriedigen die* $2n+1$ *Functionen* Z, $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ *der Veränderlichen* z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ *eine Identität von der Form:*

$$(2) \quad dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

in welcher ϱ *nicht verschwindet, so sind sie von einander unabhängig*) und es stellen daher die Gleichungen:*

$$z' = Z, \quad x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i \qquad (i = 1 \cdots n)$$

eine Berührungstransformation dar.

Aber der Satz 2 lässt sich auch umkehren.

In der That, es seien $2n+1$ Functionen Z, $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ vorgelegt, welche die Gleichungen (8) identisch befriedigen, ohne dass

*) Dass $2n+1$ Grössen Z, $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$, welche die Identität (2) des Textes erfüllen, von einander unabhängig sind, ist aus der Theorie des *Pfaff*schen Problems längst bekannt.

ϱ verschwindet. Wir werden zeigen, dass unter diesen Voraussetzungen die Identität (2) besteht.

Zunächst erkennen wir auf dieselbe Weise wie vorhin, dass die Functionen $P_1 \cdots P_n$ von einander und von Z, $X_1 \cdots X_n$ unabhängig sind. Wären andrerseits Z, $X_1 \cdots X_n$ nicht von einander unabhängig, so müsste sich entweder Z durch $X_1 \cdots X_n$ allein ausdrücken lassen:

$$Z \equiv U(X_1 \cdots X_n)$$

oder eines der X etwa X_q durch die übrigen allein:

$$X_q \equiv V(X_1 \cdots X_{q-1}, X_{q+1} \cdots X_n).$$

Im ersten Falle ergäbe sich aus der Gleichung:

$$[P_i Z] \equiv [P_i U]$$

eine Identität von der Form:

$$P_i \equiv \frac{\partial U(X_1 \cdots X_n)}{\partial X_i},$$

die nach der vorhin gemachten Bemerkung über $P_1 \cdots P_n$ unmöglich bestehen kann; im zweiten Falle führte die Identität:

$$[P_q, X_q] \equiv [P_q, V] \equiv 0$$

auf einen Widerspruch. Also erkennen wir, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Functionen Z, $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ von einander unabhängig sind.

Da die von einander unabhängigen Functionen Z, $X_1 \cdots X_n$ paarweise in Involution liegen, so giebt es nach Satz 16, S. 98 sicher $n+1$ Functionen σ, $\Pi_1 \cdots \Pi_n$, welche die Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = \frac{1}{\sigma}(dZ - \Pi_1 dX_1 - \cdots - \Pi_n dX_n)$$

identisch erfüllen. Hier haben wir wegen Satz 2:

$$[X_\varkappa, \Pi_i] \equiv 0 \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n;\ i \neq \varkappa),$$

also ist zum Beispiel Π_i eine gemeinsame Lösung der $n-1$ linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$[X_1, f] = 0, \cdots [X_{i-1}, f] = 0, [X_{i+1}, f] = 0, \cdots [X_n, f] = 0.$$

Diese Gleichungen haben $n+2$ unabhängige Lösungen gemein, nämlich: Z, X_1, $X_2 \cdots X_n$, P_i, sie sind andererseits von einander unabhängig, wie man sich sofort überzeugt, wenn man in ihnen für f der Reihe nach die Functionen $P_1 \cdots P_{i-1}$, $P_{i+1} \cdots P_n$ einsetzt und (8) berücksichtigt; folglich haben sie sicher nicht mehr als $n+2$ unabhängige Lösungen gemein, und jede solche gemeinsame Lösung, also auch Π_i ist eine Function von Z, $X_1 \cdots X_n$, P_i allein:

$$\Pi_i = U(Z, X_1 \cdots X_n, P_i).$$

Tragen wir nun diesen Werth von Π_i in die Gleichung:

$$[Z, \Pi_i] - \Pi_i[X_i, \Pi_i] = 0$$

ein, welche nach Satz 2, S. 120 ebenfalls identisch erfüllt sein muss, so kommt:

$$\frac{\partial U}{\partial P_i}\{[Z, P_i] - U[X_i P_i]\} \equiv 0,$$

oder da U wegen $[\Pi_i, X_i] = \sigma$ nicht von P_i frei sein kann:

$$[Z, P_i] - U[X_i, P_i] \equiv 0.$$

Andererseits aber ist:

$$[Z, P_i] - P_i[X_i, P_i] \equiv 0;$$

also folgt: $P_i \equiv U_i \equiv \Pi_i$ und ausserdem $\sigma \equiv \varrho$.

Damit ist die Umkehrbarkeit des Satzes 2 bewiesen. Wenn wir daher alles zusammenfassen, können wir sagen:

Satz 4. *Sollen* $2n+1$ *Functionen* Z, $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ *der Veränderlichen* z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ *eine Identität von der Form:*

$$dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

mit nicht verschwindendem ϱ *befriedigen, so ist* ***nothwendig*** *und* ***hinreichend***, *dass sie die Relationen:*

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} [Z, X_i] = [X_i, X_\varkappa] = [P_i, X_\varkappa] = 0 \quad (i \neq \varkappa) \\ [P_i, X_i] = \varrho, \quad [P_i, Z] = \varrho P_i \\ \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{array}\right.$$

identisch erfüllen. Ist diesen Bedingungen Genüge geleistet, so sind Z, $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ *unabhängige Functionen ihrer Argumente und die Gleichungen:*

$$(9)\qquad z' = Z,\; x_i' = X_i,\; p_i' = P_i \quad (i = 1 \cdots n)$$

bestimmen daher eine Berührungstransformation. Ist Z, $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ *das allgemeinste Functionensystem von der definirten Beschaffenheit, so ist* (9) *die allgemeinste Berührungstransformation.**)

Die Relationen (8), durch deren Bestehen eine Transformation (9) als Berührungstransformation charakterisirt ist, ergeben eine wichtige Eigenschaft des Klammersymbols.

Es seien Φ und Ψ irgend zwei Functionen von z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$. Bilden wir den Klammerausdruck $[\Phi, \Psi]$, indem wir berücksichtigen, dass sich Φ und Ψ auch als Functionen von Z, $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ darstellen lassen, so kommt:

*) Lie, Zur analytischen Theorie der Berührungstransformationen, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, Juni 1873; *A. Mayer*, Ueber die Lieschen Berührungstransformationen, Göttinger Nachrichten, 1874.

$$[\Phi, \Psi] = \sum_{i\varkappa}^{1\cdots n}\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial X_i}\frac{\partial\Psi}{\partial X_\varkappa}[X_iX_\varkappa] + \frac{\partial\Phi}{\partial P_i}\frac{\partial\Psi}{\partial P_\varkappa}[P_iP_\varkappa]\right\} +$$

$$+ \sum_{i\varkappa}^{1\cdots n}\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial X_i}\frac{\partial\Psi}{\partial P_\varkappa}[X_iP_\varkappa] + \frac{\partial\Phi}{\partial P_i}\frac{\partial\Psi}{\partial X_\varkappa}[P_iX_\varkappa]\right\} +$$

$$+ \sum_1^n\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial Z}\frac{\partial\Psi}{\partial X_i}[ZX_i] + \frac{\partial\Phi}{\partial X_i}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}[X_iZ] + \frac{\partial\Phi}{\partial Z}\frac{\partial\Psi}{\partial P_i}[ZP_i] + \frac{\partial\Phi}{\partial P_i}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}[P_iZ]\right\}$$

also wegen (8):

$$[\Phi, \Psi] = \varrho\sum_1^n\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial P_i}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X_i} + P_i\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\right) - \frac{\partial\Psi}{\partial P_i}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial X_i} + P_i\frac{\partial\Phi}{\partial Z}\right)\right\},$$

was wir mit Benutzung einer leicht verständlichen Bezeichnungsweise kurz so schreiben können:

(10) $$[\Phi, \Psi]_{z,x,p} = \varrho[\Phi, \Psi]_{Z,X,P}.$$

Diese Identität sagt aus, wie sich der Klammerausdruck $[\Phi, \Psi]_{z,x,p}$ gegenüber der Berührungstransformation (9) verhält. Es gilt offenbar der

Satz 5. *Führt man an Stelle von $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ vermittelst einer Berührungstransformation:*

$$z' = Z(z, x, p), \quad x_i' = X_i(z, x, p), \quad p_i' = P_i(z, x, p)$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

die neuen Veränderlichen $z', x_1' \cdots x_n', p_1' \cdots p_n'$ ein, so erhält der Ausdruck: $[\Phi, \Psi]_{z,x,p}$, in welchem Φ und Ψ beliebige Functionen von $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ bezeichnen, die Gestalt:

(10) $$[\Phi, \Psi]_{z,x,p} = \varrho[\Phi, \Psi]_{z',x',p'}.$$

Hier bedeutet ϱ eine Function, deren Werth aus der Identität:

$$dZ - P_1dX_1 - \cdots - P_ndX_n = \varrho(dz - p_1dx_1 - \cdots - p_ndx_n)$$

zu entnehmen ist.

Kennt man $n + 1$ unabhängige Functionen $Z, X_1 \cdots X_n$, welche paarweise in Involution liegen, so giebt es nach Satz 16, S. 98 $n + 1$ eindeutig bestimmte Functionen: $\Pi_0, \Pi_1 \cdots \Pi_n$, welche die Identität:

$$dz - p_1dx_1 - \cdots - p_ndx_n = \Pi_0dZ + \Pi_1dX_1 + \cdots + \Pi_ndX_n$$

befriedigen. Keine von diesen Functionen ist identisch null, man kann daher setzen:

$$P_1 = -\frac{\Pi_1}{\Pi_0}, \cdots P_n = -\frac{\Pi_n}{\Pi_0}, \varrho = \frac{1}{\Pi_0}$$

und sieht sofort (Satz 3, S. 120), dass die Gleichungen:

$$z' = Z,\ x_i' = X_i,\ p_i' = P_i \quad (i=1\cdots n)$$

eine Berührungstransformation darstellen. Dies giebt uns das wichtige

Theorem 12. *Sind Z, $X_1 \cdots X_n$ solche unabhängige Functionen von z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, welche paarweise in Involution liegen, so giebt es eine und nur eine Berührungstransformation von der Form:*

$$z' = Z,\ x_i' = X_i,\ p_i' = P_i \quad (i=1\cdots n),$$

die betreffenden Functionen $P_1 \cdots P_n$ findet man aus den Gleichungen:

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial z} - P_1 \dfrac{\partial X_1}{\partial z} - \cdots - P_n \dfrac{\partial X_n}{\partial z} = \varrho \\[2mm] \dfrac{\partial Z}{\partial x_i} - P_1 \dfrac{\partial X_1}{\partial x_i} - \cdots - P_n \dfrac{\partial X_n}{\partial x_i} = -\varrho p_i \\[2mm] \dfrac{\partial Z}{\partial p_i} - P_1 \dfrac{\partial X_1}{\partial p_i} - \cdots - P_n \dfrac{\partial X_n}{\partial p_i} = 0 \\ \qquad\qquad (i=1\cdots n), \end{cases}$$

*welche unter den gemachten Voraussetzungen mit einander verträglich sind und die Functionen ϱ, $P_1 \cdots P_n$ eindeutig bestimmen.**)

Endlich beweisen wir einen einfachen Satz, den wir später benützen:

Satz 6. *Stellen die Gleichungen:*

$$z' = Z(z,\ x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n),\ x_i' = X_i,\ p_i' = P_i \quad (i=1\cdots n)$$

eine Berührungstransformation dar, so bilden die Gleichungen:

$$(12)\qquad [X_1, f] = 0, \cdots [X_q, f] = 0$$

ein q-gliedriges vollständiges System, dessen Lösungen sich sämmtlich als Functionen der $2n+1-q$ unabhängigen Lösungen:

$$X_1 \cdots X_n,\ Z,\ P_{q+1} \cdots P_n$$

darstellen lassen.

Zum Beweise desselben bemerken wir: Die Gleichungen (12) sind von einander unabhängig, um sich davon zu überzeugen, braucht man blos in ihnen für f der Reihe nach die Functionen P_1, $P_2 \cdots P_q$ einzusetzen; andererseits haben sie offenbar die $2n+1-q$ unabhängigen Lösungen: $X_1 \cdots X_n$, Z, $P_{q+1} \cdots P_n$ gemein, sie bilden daher nach der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen wirklich ein q-gliedriges vollständiges System.

---

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1872 und 1873. Es ist zu bemerken, dass bei dem im Texte gegebenen Beweise des Theorems 12 der vorangehende Satz 4 nicht benützt wird.

§ 36.

Unter den Berührungstransformationen:

$$(13) \qquad z' = Z(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n), \; x_i' = X_i, \; p_i' = P_i \atop (i=1\cdots n)$$

giebt es insbesondere solche, bei welchen *die* $2n$ *Veränderlichen* $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ *für sich allein transformirt werden*, bei denen also die Functionen $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ von z frei sind und nur von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ abhängen. Wir bezeichnen derartige Transformationen kurz als *Berührungstransformationen in den* x, p. Beispiele von solchen sind die im Eingang des Kapitels angeführten speciellen Berührungstransformationen (3), (3') und (5).

Ist (13) eine Berührungstransformation in den x und p, so folgt aus der Identität:

$$(2) \quad dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n \equiv \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

augenscheinlich:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial z} - \cdots - P_n \frac{\partial X_n}{\partial z} \equiv \varrho \equiv \frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_i} - \cdots - P_n \frac{\partial X_n}{\partial x_i} \equiv -\varrho p_i$$

$$\frac{\partial Z}{\partial p_i} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_i} - \cdots - P_n \frac{\partial X_n}{\partial p_i} \equiv 0.$$

Eliminiren wir Z mit Hilfe der ersten dieser Gleichungen zuerst aus der dritten und dann aus der zweiten, so finden wir:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial p_i} \equiv 0, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \varrho}{\partial z} \equiv 0.$$

Hieraus erhellt zunächst, dass ϱ von den p frei ist; in Folge dessen müssen $\frac{\partial \varrho}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial \varrho}{\partial z}$ identisch verschwinden, es ist also ϱ eine, natürlich von Null verschiedene Constante: $\varrho = A$. Zugleich ergiebt sich, dass Z die Form hat:

$$Z = Az + \Omega(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n).$$

Ausserdem müssen die Functionen Z, X_i, P_i noch die Relationen (8) identisch befriedigen; wir können aber in denselben fast überall das Symbol [ ] durch ( ) ersetzen, da wir es meistens mit Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ allein zu thun haben. Demnach gilt der

Satz 7. *Werden bei einer Berührungstransformation in* z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ *die Veränderlichen* $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ *für sich transformirt, so hat dieselbe die Form:*

(14) $z' = Az + \Omega(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n), \; x_i' = X_i(x, p), \; p_i' = P_i(x, p), \quad (i = 1 \cdots n),$

wo A eine von Null verschiedene Constante bezeichnet und wo die auftretenden Functionen den charakteristischen Relationen:

$$(15) \quad \begin{cases} [Az + \Omega, X_i] = 0, \quad [P_i, Az + \Omega] = AP_i \\ (X_i X_\varkappa) = (P_i P_\varkappa) = (P_i X_\varkappa) = 0 \quad (i \neq \varkappa) \quad (P_i X_i) = A \\ \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{cases}$$

identisch genügen.

Entsprechend dem Satze 5, S. 123 erhalten wir jetzt den

Satz 8. *Führt man an Stelle von $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ vermittelst einer Berührungstransformation von der Form:*

$$z' = Z(z, x, p), \; x_i' = X_i(x, p), \; p_i' = P_i(x, p) \quad (i = 1 \cdots n)$$

die neuen Veränderlichen $z', x_1' \cdots x_n', p_1' \cdots p_n'$ ein, so erhält der Ausdruck $(u, v)_{x,p}$, in welchem u und v beliebige Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ bezeichnen, die Gestalt:

$$(16) \qquad (u, v)_{x,p} = A \cdot (u, v)_{x', p'}.$$

Hier bedeutet A eine von Null verschiedene Constante, deren Werth aus der Identität:

$$dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = A(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

zu entnehmen ist.

Wir werden zeigen, dass die Berührungstransformationen von der Form (14) im Wesentlichen schon durch diejenigen unter den Relationen (15) charakterisirt sind, in welchen blos $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ vorkommen.

Es gilt zunächst der

Satz 9. *Erfüllen $2n$ Functionen $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ die Relationen:*

$$(17) \quad (X_i X_\varkappa) = (P_i X_\varkappa) = (P_i P_\varkappa) = 0 \quad (i \neq \varkappa), \quad (P_i X_i) = A \quad (i, \varkappa = 1 \cdots n),$$

wo die Constante A nicht verschwindet, so sind sie von einander unabhängig.

In der That, liesse sich etwa P_q durch die übrigen P und durch $X_1 \cdots X_n$ ausdrücken:

$$P_q \equiv \mathsf{X}(P_1 \cdots P_{q-1}, P_{q+1} \cdots P_n, X_1 \cdots X_n),$$

so würde sich ergeben:

$$(P_q X_q) \equiv (\mathsf{X} X_q) \equiv 0,$$

was unmöglich ist. Geradeso sieht man ein, dass keine von den Functionen $X_1 \cdots X_n$ sich durch die übrigen ausdrücken lässt.

Hat die Constante A in den Relationen (17) den Werth 1, so bezeichnen wir diese Relationen als *kanonische* und sagen, dass die Functionen $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ *in kanonischen Beziehungen stehen.*

Sind $X_1 \cdots X_n$ solche unabhängige Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, welche paarweise in Involution liegen, so ist es nach den auf S. 95 f. angestellten Betrachtungen möglich, das Gleichungensystem:

$$(18)\quad X_1(x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n) = a_1, \ \cdots\ X_n(x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n) = a_n$$

nach $x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_q}$, $p_{\alpha_{q+1}} \cdots p_{\alpha_n}$ aufzulösen:

$$(18')\quad \begin{cases} x_{\alpha_\varkappa} - W_{\alpha_\varkappa}(p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_q},\ x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n},\ a_1 \cdots a_n) = 0 \\ p_{\alpha_{q+j}} - W_{\alpha_{q+j}}(p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_q},\ x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n},\ a_1 \cdots a_n) = 0 \\ \qquad (\varkappa = 1 \cdots q;\ j = 1 \cdots n-q), \end{cases}$$

wo $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ eine gewisse Reihenfolge der Zahlen $1 \cdots n$ bezeichnet.

Da nach Voraussetzung alle $(X_i X_\varkappa)$ identisch verschwinden, so muss dem Theorem 10, S. 92 zufolge das Gleichungensystem (18′) so beschaffen sein, dass jeder Klammerausdruck, welcher aus den linken Seiten zweier seiner Gleichungen gebildet ist, vermöge (18′) verschwindet, das heisst es müssen die Ausdrücke:

$$(x_{\alpha_\varkappa} - W_{\alpha_\varkappa},\ x_{\alpha_\mathfrak{k}} - W_{\alpha_\mathfrak{k}}) = \frac{\partial W_{\alpha_\mathfrak{k}}}{\partial p_{\alpha_\varkappa}} - \frac{\partial W_{\alpha_\varkappa}}{\partial p_{\alpha_\mathfrak{k}}}$$

$$(x_{\alpha_\varkappa} - W_{\alpha_\varkappa},\ p_{\alpha_{q+j}} - W_{\alpha_{q+j}}) = \frac{\partial W_{\alpha_{q+j}}}{\partial p_{\alpha_\varkappa}} + \frac{\partial W_{\alpha_\varkappa}}{\partial x_{\alpha_{q+j}}}$$

$$(p_{\alpha_{q+j}} - W_{\alpha_{q+j}},\ p_{\alpha_{q+\mathfrak{j}}} - W_{\alpha_{q+\mathfrak{j}}}) = \frac{\partial W_{\alpha_{q+j}}}{\partial x_{\alpha_{q+\mathfrak{j}}}} - \frac{\partial W_{\alpha_{q+\mathfrak{j}}}}{\partial x_{\alpha_{q+j}}}$$

$$(\varkappa,\ \mathfrak{k} = 1 \cdots q;\ j,\ \mathfrak{j} = 1 \cdots n-q)$$

sämmtlich vermöge (18′) verschwinden. Aber diese Ausdrücke sind alle von $x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_q}$, $p_{\alpha_{q+1}} \cdots p_{\alpha_n}$ frei, sie sind also an und für sich identisch null. Wir schliessen hieraus, dass $W_{\alpha_1} \cdots W_{\alpha_n}$ sich durch die partiellen Differentialquotienten einer gewissen Function W von $p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_q}$, $x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n}$, $a_1 \cdots a_n$ folgendermassen ausdrücken lassen:

$$W_{\alpha_\varkappa} = -\frac{\partial W}{\partial p_{\alpha_\varkappa}}, \qquad W_{\alpha_{q+j}} = \frac{\partial W}{\partial x_{\alpha_{q+j}}}$$

$$(\varkappa = 1 \cdots q;\ j = 1 \cdots n-q)$$

und dass sich daher das Gleichungensystem (18′) so schreiben lässt:

$$x_{\alpha_\varkappa} = -\frac{\partial W}{\partial p_{\alpha_\varkappa}}, \qquad p_{\alpha_{q+j}} = \frac{\partial W}{\partial x_{\alpha_{q+j}}}$$

$$(\varkappa = 1 \cdots q;\ j = 1 \cdots n-q).$$

Die betreffende Function W wird durch eine Quadratur gefunden; die dabei auftretende Integrationsconstante ist als eine willkürliche Function von $a_1 \cdots a_n$ aufzufassen.

Setzen wir nun:

$$W(p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_q}, x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n}, X_1 \cdots X_n) = \mathfrak{W}(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n),$$

so ist offenbar:

$$x_{\alpha_\varkappa} \equiv -\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial p_{\alpha_\varkappa}} + \sum_1^n{}_i \left[\frac{\partial W}{\partial a_i}\right]_{a=X} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial p_{\alpha_\varkappa}}$$

$$p_{\alpha_{q+j}} \equiv \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x_{\alpha_{q+j}}} - \sum_1^n{}_i \left[\frac{\partial W}{\partial a_i}\right]_{a=X} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_{q+j}}}$$

$$(\varkappa = 1 \cdots q;\ j = 1 \cdots n-q),$$

also lässt sich die Identität:

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = d \sum_1^q{}_\varkappa x_{\alpha_\varkappa} p_{\alpha_\varkappa} - \sum_1^q{}_\varkappa x_{\alpha_\varkappa} dp_{\alpha_\varkappa} +$$

$$+ \sum_1^{n-q}{}_j p_{\alpha_{q+j}} dx_{\alpha_{q+j}}$$

schreiben wie folgt:

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n \equiv d(\mathfrak{W} + x_{\alpha_1} p_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_q} p_{\alpha_q}) -$$

$$- \left[\frac{\partial W}{\partial a_1}\right]_{a=X} \cdot dX_1 - \cdots - \left[\frac{\partial W}{\partial a_n}\right]_{a=X} \cdot dX_n.$$

Dieses Ergebniss können wir folgendermassen aussprechen:

Satz 10. *Hat man n unabhängige Functionen $X_1 \cdots X_n$ von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, für welche alle $(X_i X_\varkappa)$ identisch verschwinden, so kann man immer $n+1$ solche Functionen Ω, $P_1 \cdots P_n$ von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ finden, dass identisch wird:*

(19) $$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n \equiv d\Omega + P_1 dX_1 + \cdots + P_n dX_n.$$

Die Functionen Ω, $P_1 \cdots P_n$ sind, wie man sieht, durch $X_1 \cdots X_n$ keineswegs vollständig bestimmt; dagegen sind $P_1 \cdots P_n$ eindeutig bestimmt, wenn man über Ω verfügt hat.

Die Identität (19), die wir unter den gemachten Voraussetzungen stets befriedigen können, lässt sich auch schreiben:

$$d(z - \Omega) - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n,$$

woraus hervorgeht, dass die Gleichungen:

$$z' = z - \Omega(x, p),\ x_i' = X_i(x, p),\ p_i' = P_i(x, p)$$

eine Berührungstransformation darstellen und dass die Function Ω den n Gleichungen:

$$[z-\Omega,\ X_i]=0 \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

identisch genügt. Damit haben wir den

Satz 11. *Stehen die n von einander unabhängigen Functionen $X_1\cdots X_n$ der Veränderlichen $x_1\cdots x_n$, $p_1\cdots p_n$ paarweise in den Beziehungen: $(X_i, X_\varkappa)\equiv 0$, so kann man stets durch Quadratur eine Function Ω von $x_1\cdots x_n$, $p_1\cdots p_n$ finden, welche die n Gleichungen:*

$$[z-\Omega,\ X_1]=0,\ \cdots\ [z-\Omega,\ X_n]=0$$

identisch befriedigt. Kennt man eine solche Function Ω, so sind durch dieselbe eindeutig n solche Functionen $P_1\cdots P_n$ von $x_1\cdots x_n$, $p_1\cdots p_n$ bestimmt, dass man hat:

$$d(z-\Omega)-P_1dX_1-\cdots-P_ndX_n=dz-p_1dx_1-\cdots-p_ndx_n.$$

Die Functionen $X_1\cdots X_n$, $P_1\cdots P_n$ stehen dabei in den kanonischen Beziehungen:

$$(20)\qquad (X_iX_\varkappa)=(P_iX_\varkappa)=(P_iP_\varkappa)=0 \ {\scriptstyle (i\neq\varkappa)},\quad (P_iX_i)=1 \qquad {\scriptstyle (i,\ \varkappa=1\cdots n)}$$

und die Gleichungen:

$$z'=z-\Omega(x,p),\quad x_i'=X_i(x,p),\quad p_i'=P_i(x,p) \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

stellen eine Berührungstransformation dar.

Jetzt seien $2n$ Functionen $X_1\cdots X_n$, $P_1\cdots P_n$ von $x_1\cdots x_n$, $p_1\cdots p_n$ vorgelegt, welche in den Beziehungen:

$$(X_iX_\varkappa)=(P_iX_\varkappa)=(P_iP_\varkappa)=0\ {\scriptstyle (i\neq\varkappa)},\quad (P_iX_i)=A\ {\scriptstyle (A\neq 0)} \qquad {\scriptstyle (i,\ \varkappa=1\cdots n)}$$

stehen.*) Dann giebt es nach dem eben bewiesenen Satze n Functionen $\Pi_1\cdots\Pi_n$ von $x_1\cdots x_n$, $p_1\cdots p_n$, welche zu $X_1\cdots X_n$ in den kanonischen Beziehungen:

$$(X_iX_\varkappa)=(\Pi_iX_\varkappa)=(\Pi_i\Pi_\varkappa)=0\ {\scriptstyle (i\neq\varkappa)},\quad (\Pi_iX_i)=1 \qquad {\scriptstyle (i,\ \varkappa=1\cdots n)}$$

stehen und welche eine Identität von der Form:

$$\sum_1^n{}^i\, p_idx_i\equiv\sum_1^n{}^i\,\Pi_idX_i+d\Phi$$

befriedigen. Hieraus folgt:

*) In der Störungstheorie betrachtet man seit *Poisson* und *Lagrange*, *Jacobi* und *Bour* fortwährend Systeme von $2n$ Functionen $X_1\cdots X_n$, $P_1\cdots P_n$ der $2n$ unabhängigen Veränderlichen $x_1\cdots x_n$, $p_1\cdots p_n$, welche die Gleichungen (20) des Textes erfüllen. Die in diesem Paragraphen entwickelten Theorien sind aber, wie schon früher angedeutet, zuerst in der Abhandlung: „Zur analytischen Theorie der Berührungstransformationen“ von Sophus Lie, Juni 1873 begründet worden.

$$(X_i,\ P_\varkappa - A\Pi_\varkappa) \equiv 0 \qquad (i,\ \varkappa = 1 \cdots n),$$

also ist $P_\varkappa - A\Pi_\varkappa$ eine gemeinsame Lösung der n linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(X_1 f) = 0, \cdots (X_n f) = 0.$$

Diese Gleichungen sind von einander unabhängig, wie man erkennt, wenn man in ihnen an Stelle von f der Reihe nach die Functionen $P_1 \cdots P_n$ einsetzt, sie haben daher höchstens n unabhängige Lösungen gemein. Nun sind $X_1 \cdots X_n$ derartige Lösungen, also ergiebt sich:

$$P_\varkappa = A\Pi_\varkappa + W_\varkappa(X_1 \cdots X_n) \qquad (\varkappa = 1 \cdots n).$$

Hier müssen noch die Ausdrücke:

$$(P_i,\ P_\varkappa) = (A\Pi_i + W_i,\ A\Pi_\varkappa + W_\varkappa) = A\left(\frac{\partial W_\varkappa}{\partial X_i} - \frac{\partial W_i}{\partial X_\varkappa}\right)$$

identisch verschwinden, folglich sind $W_1 \cdots W_n$ die partiellen Differentialquotienten einer Function $W(X_1 \cdots X_n)$ nach $X_1 \cdots X_n$.

Nunmehr haben wir:

$$P_\varkappa = A\Pi_\varkappa + \frac{\partial W(X_1 \cdots X_n)}{\partial X_\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1 \cdots n)$$

mithin:

$$\sum_1^n{}^i P_i dX_i \equiv A \sum_1^n{}^i \Pi_i dX_i + dW$$

$$\equiv A \sum_1^n{}^i p_i dx_i + d(W - A\Phi).$$

Also ist der Ausdruck:

$$\sum_1^n{}^i P_i dX_i - A \sum_1^n{}^i p_i dx_i$$

ein vollständiges Differential, durch dessen Integration man die Function $W - A\Phi$ findet: sie ist bis auf eine additive willkürliche Constante bestimmt.

Theorem 13. *Die Gleichungen:*

$$z' = Z(z,\ x,\ p), \quad x_i' = X_i(x,\ p), \quad p_i' = P_i(x,\ p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

stellen dann und nur dann eine Berührungstransformation dar, wenn Z die Form $Z = Az + \Omega(x,\ p)$ besitzt, wo A eine von Null verschiedene Constante bezeichnet, und wenn überdies die Gleichungen:

$$[Az + \Omega,\ X_i] = 0, \quad [P_i,\ Az + \Omega] = AP_i$$

$$(X_i X_\varkappa) = (P_i X_\varkappa) = (P_i P_\varkappa) = 0 \ (i \neq \varkappa), \quad (P_i X_i) = A \qquad (i,\ \varkappa = 1 \cdots n)$$

identisch erfüllt sind. Sind andrerseits $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ solche Functionen, welche die Gleichungen:

$$(X_i X_\varkappa) = (P_i X_\varkappa) = (P_i P_\varkappa) = 0 \quad (i \neq \varkappa), \quad (P_i X_i) = A \quad (i, \varkappa = 1 \cdots n)$$

befriedigen, so ist der Ausdruck:

$$\sum_1^n {}^i P_i dX_i - A \sum_1^n {}^i p_i dx_i$$

ein vollständiges Differential; es giebt also eine Function $\Omega(x, p)$, welche die Gleichung:

$$\sum_1^n {}^i P_i dX_i - d\Omega = A \sum_1^n {}^i p_i dx_i$$

identisch befriedigt und zwar ist dieselbe bis auf eine additive Constante bestimmt. Zugleich stellen die Gleichungen:

$$(14) \qquad z' = Az + \Omega(x, p), \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \quad (i = 1 \cdots n)$$

*eine Berührungstransformation in den x, p dar.**)

Unter den Berührungstransformationen von der Form (14) sind diejenigen besonders beachtenswerth, bei welchen die Constante A den Werth 1 hat.

Es ist nach Satz 8, S. 126 klar, dass der Klammerausdruck $(u, v)_{x, p}$ sich bei jeder derartigen Berührungstransformation invariant verhält, dass also $(u, v)_{x, p} = (u, v)_{x', p'}$ ist.

Lässt umgekehrt eine Transformation:

$$(21) \quad x_i' = \Xi_i(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n), \quad p_i' = \Pi_i(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) \quad (i = 1 \cdots n),$$

den Klammerausdruck $(u, v)_{x, p}$ invariant, welche Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ auch u und v sein mögen, so stehen die Functionen Ξ, Π in den kanonischen Beziehungen:

$$(\Xi_i \Xi_\varkappa) = (\Pi_i \Xi_\varkappa) = (\Pi_i \Pi_\varkappa) = 0 \quad (i \neq \varkappa), \quad (\Pi_i \Xi_i) = 1 \quad (i, \varkappa = 1 \cdots n),$$

denn es muss ja sein:

$$(\Xi_i \Xi_\varkappa)_{x, p} = (\Xi_i \Xi_\varkappa)_{x', p'} = (x_i' x_\varkappa')_{x', p'} = 0$$

und so weiter. Es ist also nach dem letzten Theorem stets möglich

*) Das Theorem 13 des Textes ist ungleich wichtiger als der anscheinend allgemeinere Satz 4, S. 122, der im Folgenden keine wichtige Anwendung findet.

eine solche Function $\Omega(x, p)$ zu bestimmen, dass die Gleichungen (21) zusammen mit:

$$z' = z + \Omega(x, p)$$

eine Berührungstransformation in den x, p darstellen.

Führen wir zuerst eine Berührungstransformation von der Form:

$$z' = Az + \Omega(x, p), \quad x_\varkappa' = X_\varkappa(x, p), \quad p_\varkappa' = P_\varkappa(x, p)$$

aus und sodann irgend eine andere Berührungstransformation von der entsprechenden Form:

$$z'' = A_1 z' + \Omega_1(x', p'), \quad x_\varkappa'' = X_\varkappa'(x', p'), \quad p_\varkappa'' = P_\varkappa'(x', p'),$$

so transformirt die auf diese Weise entstehende Berührungstransformation offenbar ebenfalls die Veränderlichen x, p unter sich.

Es bilden daher, können wir sagen, alle Berührungstransformationen in den x, p eine unendliche Gruppe. Augenscheinlich ist, dass die Transformationen dieser unendlichen Gruppe sich paarweise als inverse zusammenordnen lassen. Es ist andrerseits klar, dass alle Berührungstransformationen von der besonderen Form:

$$z' = z + \Omega(x, p), \quad x_\varkappa' = X_\varkappa(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p)$$

ihrerseits eine unendliche Gruppe mit paarweise inversen Transformationen bilden.

Sind auf der anderen Seite zwei Berührungstransformationen von der Form:

$$z' = Az + \Omega(x, p), \quad x_\varkappa' = X_\varkappa(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p)$$

und

$$z' = A_1\mathfrak{z} + \Omega_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{p}), \quad x_\varkappa' = Y_\varkappa(\mathfrak{x}, \mathfrak{p}), \quad p_i' = Q_i(\mathfrak{x}, \mathfrak{p})$$

vorgelegt, so ist die durch Elimination der z', x', p' entstehende Transformation offenbar wieder eine Berührungstransformation in den x, p.

§ 37.

Unter den Berührungstransformationen von der Form:

$$(14) \qquad z' = Az + \Omega(x, p), \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \quad (i = 1 \cdots n)$$

wollen wir jetzt diejenigen besonders betrachten, bei welchen die Function Ω blos eine Constante ist. Die so definirte Kategorie von Berührungstransformationen ist von hervorragender Wichtigkeit.

Ist Ω eine Constante, so lassen sich die beiden Gleichungen:

$$[Az + \Omega, X_i] = 0, \quad [P_i, Az + \Omega] = AP_i$$

bezüglich schreiben:

$$\sum_1^n {}^\nu p_\nu \frac{\partial X_i}{\partial p_\nu} = 0, \quad \sum_1^n {}^\nu p_\nu \frac{\partial P_i}{\partial p_\nu} = P_i;$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

wir sehen also, *dass die X in den Veränderlichen $p_1 \cdots p_n$ homogen von der nullten Ordnung sind, die P aber in $p_1 \cdots p_n$ homogen von der ersten Ordnung.*

Es ist klar, dass alle Transformationen (14), bei denen die Functionen X und P diese Homogeneitätseigenschaften besitzen, jede in den p homogene Function von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ in eine Function von $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$ überführen, welche in den p' homogen ist.

Besitzt umgekehrt eine Berührungstransformation von der Form (14) die Eigenschaft, jede in den p homogene Function der x, p in eine in den p' homogene Function der x', p' zu verwandeln, so sind bei ihr $X_1 \cdots X_n$ in den p homogen von nullter Ordnung, $P_1 \cdots P_n$ homogen von erster und die Function Ω ist eine Constante.

In der That, unter der gemachten Voraussetzung sind die X und die P sicher homogen in den p. Ferner ist $x_i' + x_i'^2$ homogen von nullter Ordnung in den p'; also ist $X_i + X_i^2$ homogen in den p; folglich sind die X in den p homogen von *nullter* Ordnung. Ist nun P_i homogen von s-ter Ordnung, so ist $(P_i X_i)$ homogen von $(s-1)$-ter Ordnung und hier hat $s-1$ wegen $(P_i X_i) = A$ den Werth Null; mithin sind die P homogen von erster Ordnung in den p. Nun aber haben wir:

$$[X_i,\ Az + \Omega] = A \sum_1^n {}^\nu p_\nu \frac{\partial X_i}{\partial p_\nu} + (X_i \Omega) = 0$$

$$[P_i,\ Az + \Omega] - AP_i = A\left(\sum_1^n {}^\nu p_\nu \frac{\partial P_i}{\partial p_\nu} - P_i\right) + (P_i \Omega) = 0$$

also wegen der Homogeneität der X und der P:

(22) $$(X_i \Omega) = 0, \quad (P_i \Omega) = 0 \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Demnach ist Ω eine gemeinsame Lösung der $2n$ linearen partiellen Differentialgleichungen (22) in den $2n$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$. Da aber $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ in den bekannten Beziehungen stehen, so ergiebt sich, indem man für Ω der Reihe nach $P_1 \cdots P_n$, $X_1 \cdots X_n$ einsetzt, dass die Gleichungen (22) von einander unabhängig sind und dass sie somit keine andere Lösung gemein haben als: $\Omega =$ const.

Es gilt also der

Satz 12. *Eine Berührungstransformation von der Form:*

$$z' = Az + \Omega(x, p), \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p)$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

verwandelt dann und nur dann jede in den p homogene Function von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ in eine Function von $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$, welche in den p' homogen ist, wenn die Function $\Omega(x, p)$ sich auf eine blose Constante reducirt; die X sind in diesem Falle homogene Functionen nullter Ordnung der p und die P homogene Functionen erster Ordnung.

Eine Berührungstransformation von der Form:

(23) $$z' = Az + B, \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p)$$
$$(i = 1 \cdots n),$$

in welcher A und B Constanten bezeichnen, transformirt die Grössen:

$$x_1 \cdots x_n, \quad \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}$$

für sich, wie man sofort aus den Homogeneitätseigenschaften ersieht, welche die X und die P nach dem soeben aufgestellten Satze 12 besitzen. Nun aber ist zugleich mit (23) offenbar auch:

(23') $$z' = z, \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = \frac{1}{A} P_i(x, p)$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

eine Berührungstransformation und es ist klar, *dass die Berührungstransformationen* (23) *und* (23') *die Grössen:*

$$x_1 \cdots x_n, \quad \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}$$

beide in ein und derselben Weise transformiren.

Wir können uns aus diesem Grunde auf Berührungstransformationen von der Form:

(24) $$z' = z, \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p)$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

beschränken und die Berührungstransformationen von der allgemeineren Form (23) ganz bei Seite lassen. Das soll denn auch im Folgenden geschehen.

Für jede Berührungstransformation von der Form (24) besteht die Identität:

$$dz - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n \equiv dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Identität:

(25) $$P_1 dX_1 + \cdots + P_n dX_n \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n.$$

Lassen wir aus den Gleichungen der Berührungstransformation (24) die Gleichung: $z' = z$ fort, so erhalten wir offenbar in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ allein eine Transformation:

$$x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \quad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}, \tag{26}$$

für welche ebenfalls die Identität (25) besteht.

Die Transformationen von der Form (26), für welche die Identität (25) erfüllt ist, besitzen hervorragende Wichtigkeit; wir nennen sie *homogene Berührungstransformationen.**) Also:

Eine Transformation:

$$x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \quad {\scriptstyle (i=1\cdots n)} \tag{26}$$

in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ *heisst eine homogene Berührungstransformation, wenn die Identität:*

$$P_1 dX_1 + \cdots + P_n dX_n \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n \tag{25}$$

besteht.

Diese Definition lässt sich ein wenig anders fassen.

Sind $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ solche Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, welche die Identität:

$$P_1 dX_1 + \cdots + P_n dX_n \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n \tag{25}$$

erfüllen, so ist auch identisch:

$$dz - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n \equiv dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n,$$

also sind (vgl. Satz 3, S. 120) z, $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ unabhängige Functionen von z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ und in Folge dessen die X, P ihrerseits unabhängige Functionen der x, p. Damit haben wir zunächst den aus der Theorie des Pfaffschen Problems bekannten

Satz 13. *Sind die Functionen* $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ *der Veränderlichen* $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ *so beschaffen, dass die Gleichung:*

$$P_1 dX_1 + \cdots + P_n dX_n = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

identisch erfüllt ist, so sind sie von einander unabhängig.

Die obige Definition der homogenen Berührungstransformationen kann nunmehr durch die folgende ersetzt werden:

Die Gleichungen:

$$x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \quad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

stellen dann und nur dann eine homogene Berührungstransformation dar, wenn die $2n$ *Functionen* X, P *der Identität:*

$$P_1 dX_1 + \cdots + P_n dX_n \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

genügen.

---

*) Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, in denen die unbekannte Function explicite vorkommt, von Sophus Lie, Verhandl. d. Ges. d. W. zu Christiania, März 1873; vgl. auch Math. Ann. Bd. VIII.

Ist die Transformation:

$$(26) \qquad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

eine homogene Berührungstransformation, so ist identisch:

$$dz - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n \equiv dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n$$

es stellen also die Gleichungen:

$$z' = z, \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \atop {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

eine Berührungstransformation in den x, p dar. Hieraus ergiebt sich zunächst, dass die X und P in den kanonischen Beziehungen:

$$(X_i X_\varkappa) = (P_i X_\varkappa) = (P_i P_\varkappa) = 0 \;{\scriptstyle (i \neq \varkappa)}, \quad (P_i X_i) = 1 \atop {\scriptstyle (i,\, \varkappa = 1\cdots n)}$$

stehen, ausserdem sind aber (vgl. S. 132 f.) die Functionen X in den p homogen von nullter Ordnung und die P homogen von erster Ordnung.

Sind umgekehrt $2n$ Functionen $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ vorgelegt, welche in den kanonischen Beziehungen stehen und von denen die X homogene Functionen nullter Ordnung der p sind, die P homogene Functionen erster Ordnung, so stellen die Gleichungen:

$$x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

immer eine homogene Berührungstransformation dar.

In der That, unter den gemachten Voraussetzungen sind auch die Gleichungen:

$$[z, X_i] = 0, \quad [P_i, z] = P_i \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

identisch erfüllt, die Gleichungen:

$$z' = z, \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \atop {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

stellen daher nach Theorem 13, S. 130 eine Berührungstransformation in den x, p dar, für welche A den Werth 1 hat und $\Omega = 0$ ist. Hieraus folgt zunächst das Bestehen der Identität:

$$dz - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n \equiv dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n$$

und damit das Bestehen der charakteristischen Identität (25).

Aus dem Gesagten geht hervor, dass der Satz gilt:

Satz 14. *Bezeichnen $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ Functionen der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, so ist zum Bestehen einer Identität von der Form:*

$$P_1 dX_1 + \cdots + P_n dX_n \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

nothwendig und hinreichend, dass die Gleichungen:

$$(27) \quad \begin{cases} (X_i X_\varkappa) = (P_i X_\varkappa) = (P_i P_\varkappa) = 0 \;{\scriptstyle (i \neq \varkappa)}, \quad (P_i X_i) = 1 \\ p_1 \dfrac{\partial X_i}{\partial p_1} + \cdots + p_n \dfrac{\partial X_i}{\partial p_n} = 0, \quad p_1 \dfrac{\partial P_i}{\partial p_1} + \cdots + p_n \dfrac{\partial P_i}{\partial p_n} = P_i \\ \qquad\qquad {\scriptstyle (i,\, \varkappa = 1\cdots n)} \end{cases}$$

identisch erfüllt sind.

Erinnern wir uns jetzt noch der auf S. 135 angegebenen Definition der homogenen Berührungstransformationen, so erhalten wir das

Theorem 14. *Die $2n$ Gleichungen:*

$$x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

stellen dann und nur dann eine homogene Berührungstransformation dar, wenn die X und P in den kanonischen Beziehungen:

$$(X_i X_\varkappa) = (P_i X_\varkappa) = (P_i P_\varkappa) \equiv 0 \ (i \neq \varkappa), \quad (P_i X_i) \equiv 1$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots n)$$

*stehen und wenn ausserdem die X homogene Functionen nullter Ordnung, die P homogene Functionen erster Ordnung von $p_1 \cdots p_n$ sind.**)

Verbinden wir die gewonnenen Ergebnisse mit dem Satze 11, S. 129, so bekommen wir (vgl. Satz 17, S. 100) den

Satz 15. *Sind $X_1 \cdots X_n$ solche unabhängige Functionen von: $x_1 \cdots x_n$, $\frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}$, welche paarweise in der Beziehung: $(X_i X_\varkappa) \equiv 0$ stehen, so giebt es n eindeutig bestimmte Functionen $P_1 \cdots P_n$ von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, welche die Relationen:*

$$(X_i X_\varkappa) = (P_i X_\varkappa) = (P_i P_\varkappa) = 0 \qquad (i \neq \varkappa)$$
$$(P_i X_i) = 1, \quad p_1 \frac{\partial P_i}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial P_i}{\partial p_n} = P_i$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots n)$$

identisch erfüllen. Die Gleichungen:

$$x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p)$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

stellen alsdann eine homogene Berührungstransformation dar.

Es sei in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine homogene Berührungstransformation (26) vorgelegt. Ist nun vermöge dieser Transformation:

$$U(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = \mathfrak{U}(x_1' \cdots x_n', p_1' \cdots p_n'),$$

so wird:

$$\sum_1^n {}^i\, p_i \frac{\partial U}{\partial p_i} = \sum_1^n {}^\nu \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x_\nu'} \sum_1^n {}^i\, p_i \frac{\partial x_\nu'}{\partial p_i} + \sum_1^n {}^\nu \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial p_\nu'} \sum_1^n {}^i\, p_i \frac{\partial p_\nu'}{\partial p_i}$$
$$= \sum_1^n {}^\nu\, p_\nu' \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial p_\nu'}.$$

---

*) Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, März und Juni 1873.

Also:

Satz 16. *Führt die homogene Berührungstransformation:*

$$x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

die Function $U(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n)$ *über in:* $\mathfrak{U}(x_1' \cdots x_n', p_1' \cdots p_n')$, *so führt sie zu gleicher Zeit:*

$$p_1 \frac{\partial U}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial U}{\partial p_n}$$

über in:

$$p_1' \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial p_1'} + \cdots + p_n' \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial p_n'}.$$

Erfüllen $2n - 1$ Functionen $P_2 \cdots P_n$, $X_1 \cdots X_n$ von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ die Bedingungsgleichung:

$$p_1 dX_1 + P_2 dX_2 + \cdots + P_n dX_n = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n,$$

so zeigen die Relationen:

$$(p_1 P_\varkappa) = 0, \quad (p_1 X_1) = 1, \quad (p_1 X_\varkappa) = 0, \qquad (\varkappa = 2 \cdots n)$$

dass $P_2 \cdots P_n$, $X_2 \cdots X_n$ von x_1 frei sind, während X_1 die Form:

$$X_1 = x_1 + W\left(x_2 \cdots x_n, \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}\right)$$

besitzt. Auf diese Bemerkung kommen wir später zurück.

Löst man eine homogene Berührungstransformation:

$$x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

nach $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ auf, so stellen die hervorgehenden Gleichungen:

$$x_i = \overline{X}_i(x', p'), \quad p_i = \overline{P}_i(x', p') \qquad (i = 1 \cdots n)$$

offenbar ebenfalls eine homogene Berührungstransformation dar.

Führt man zuerst die homogene Berührungstransformation:

$$(28) \qquad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

aus und sodann irgend eine andere homogene Berührungstransformation:

$$(28') \qquad x_i'' = \Xi_i(x', p'), \quad p_i'' = \Pi_i(x', p') \qquad (i = 1 \cdots n)$$

so erhält man — durch Fortschaffung der x', p' — die neue Transformation:

$$(28'') \qquad x_i'' = \Xi_i(X, P), \quad p_i'' = \Pi_i(X, P) \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Dieselbe ist wieder eine homogene Berührungstransformation.

In der That, unter den gemachten Voraussetzungen ist:

$$\sum_1^n{}^i P_i(x, p) \,.\, dX_i(x, p) \equiv \sum_1^n{}^i p_i dx_i$$

$$\sum_1^n{}^i \Pi_i(x', p') \,.\, d\Xi_i(x', p') \equiv \sum_1^n{}^i p_i' dx_i'.$$

Macht man in der zweiten dieser beiden Identitäten die Substitution: $x_i' = X_i$, $p_i' = P_i$, so kommt mit Berücksichtigung der ersten:

$$\sum_1^n {}^i\, \Pi_i(X, P) \,.\, d\Xi_i(X, P) \equiv \sum_1^n {}^i\, p_i dx_i,$$

also bestimmen die Gleichungen (28″) wirklich eine homogene Berührungstransformation.

Aus dem Gesagten erhellt, *dass der Inbegriff aller homogenen Berührungstransformationen in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine unendliche Gruppe bildet und zwar eine Gruppe mit paarweise inversen Transformationen.*

Endlich wollen wir noch den Satz hinzufügen:

Satz 17. *Bestimmen die Gleichungen:*

(29) $$x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

eine homogene Berührungstransformation und die Gleichungen:

(29′) $$x_i' = Y_i(y, q), \quad p_i' = Q_i(y, q) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

eine zweite, so erhält man aus den Gleichungen:

(29″) $$X_i(x, p) = Y_i(y, q), \quad P_i(x, p) = Q_i(y, q) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

stets eine homogene Berührungstransformation, man mag dieselben nun nach den y, q oder nach den x, p auflösen.

Der Beweis liegt in den obigen Entwickelungen, kann aber auch leicht direkt geführt werden. Man hat nämlich:

$$\sum_1^n {}^i\, P_i dX_i \equiv \sum_1^n {}^i\, p_i dx_i, \qquad \sum_1^n {}^i\, Q_i dY_i \equiv \sum_1^n {}^i\, q_i dy_i,$$

also wird die Gleichung:

$$\sum_1^n {}^i\, q_i dy_i = \sum_1^n {}^i\, p_i dx_i$$

vermöge der Gleichungen (29″) zur Identität.

§ 38.

Von den allgemeinen Berührungstransformationen in $2n+1$ Veränderlichen: z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ aus sind wir durch zwei auf einander folgende Specialisirungen zu den homogenen Berührungstransformationen in $2n$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ gelangt.

Leicht vorauszusehen, aber doch von grosser Wichtigkeit ist es, dass man auch den umgekehrten Weg gehen kann. Wir werden nämlich zeigen, dass es möglich ist, aus den homogenen Berührungstransformationen in $2n+2$ Veränderlichen: $y_1 \cdots y_{n+1}$, $q_1 \cdots q_{n+1}$ die allgemeinen Berührungstransformationen in $2n+1$ Veränderlichen: z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ abzuleiten. Daran knüpfen wir dann noch verschiedene beachtenswerthe Entwickelungen.

Es sei in $y_1 \cdots y_{n+1}$, $q_1 \cdots q_{n+1}$ irgend eine homogene Berührungstransformation:

$$(30) \qquad \begin{cases} y_\varkappa' = Y_\varkappa(y_1 \cdots y_{n+1},\ q_1 \cdots q_{n+1}) \\ q_\varkappa' = Q_\varkappa(y_1 \cdots y_{n+1},\ q_1 \cdots q_{n+1}) \\ \qquad (\varkappa = 1 \cdots n+1) \end{cases}$$

vorgelegt. Dann besteht, wie wir wissen, die Gleichung:

$$(31) \qquad q_1' dy_1' + \cdots + q_{n+1}' dy_{n+1}' = q_1 dy_1 + \cdots + q_{n+1} dy_{n+1}$$

vermöge (30) identisch. Ferner sind die Y homogene Functionen nullter Ordnung der q und die Q homogene Functionen erster Ordnung, so dass die Y und die Verhältnisse der Q nur von den Verhältnissen der q abhängen.

Wir setzen nun:

$$(32) \qquad \begin{cases} y_{n+1} = z, \quad y_1 = x_1, \cdots y_n = x_n \\ \dfrac{q_1}{q_{n+1}} = -p_1, \cdots \dfrac{q_n}{q_{n+1}} = -p_n \end{cases}$$

und dementsprechend:

$$(32') \qquad \begin{cases} y_{n+1}' = z', \quad y_1' = x_1', \cdots y_n' = x_n' \\ \dfrac{q_1'}{q_{n+1}'} = -p_1', \cdots \dfrac{q_n'}{q_{n+1}'} = -p_n', \end{cases}$$

ausserdem führen wir noch die Bezeichnungen ein:

$$Y_{n+1}(y_1 \cdots y_{n+1},\ q_1 \cdots q_{n+1}) = Z\left(y_{n+1},\ y_1 \cdots y_n,\ \frac{-q_1}{q_{n+1}}, \cdots \frac{-q_n}{q_{n+1}}\right)$$

$$Y_i(y_1 \cdots y_{n+1},\ q_1 \cdots q_{n+1}) = X_i\left(y_{n+1},\ y_1 \cdots y_n,\ \frac{-q_1}{q_{n+1}}, \cdots \frac{-q_n}{q_{n+1}}\right)$$

$$\frac{Q_i(y_1 \cdots y_{n+1},\ q_1 \cdots q_{n+1})}{Q_{n+1}(y_1 \cdots y_{n+1},\ q_1 \cdots q_{n+1})} = -P_i\left(y_{n+1},\ y_1 \cdots y_n,\ \frac{-q_1}{q_{n+1}}, \cdots \frac{-q_n}{q_{n+1}}\right)$$

$$(i = 1 \cdots n).$$

Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir z', $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$ vermöge der Gleichungen (30) folgendermassen als Functionen von z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ ausgedrückt:

$$(33) \qquad \begin{cases} z' = Z(z,\ x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n) \\ x_i' = X_i(z,\ x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n) \\ p_i' = P_i(z,\ x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n) \\ \qquad (i = 1 \cdots n) \end{cases}$$

Es ist von vornherein klar, dass die Gleichungen (33) eine Transformation in den Veränderlichen z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ darstellen, es lässt sich aber auch leicht nachweisen, dass sie eine Berührungstransformation darstellen. Dividiren wir nämlich die Bedingungsgleichung (31) durch q'_{n+1} oder was dasselbe ist, durch Q_{n+1}, so erhält sie mit Benutzung der Gleichungen (32), (32′) die Form:

$$dz' - p_1'dx_1' - \cdots - p_n'dx_n' = \frac{q_{n+1}}{Q_{n+1}}(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n).$$

Hier hängt der Faktor von: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n$ nur von den Verhältnissen der q ab und ist daher eine Function ϱ von z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$. Wir bekommen demnach zwischen den z', x', p', z, x, p die Bedingungsgleichung:

$$(34)\quad dz' - p_1'dx_1' - \cdots - p_n'dx_n' = \varrho(z, x, p).(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n),$$

welche natürlich vermöge der Transformationsgleichungen (33) besteht, ebenso wie die Bedingungsgleichung (31) vermöge der Transformationsgleichungen (30). Damit ist bewiesen, dass (33) wirklich eine Berührungstransformation in den z, x, p ist.

Jetzt sei umgekehrt in z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ irgend eine Berührungstransformation vorgelegt, also eine Transformation:

$$(35)\qquad z' = \mathsf{Z}(z, x, p),\ x_i' = \Xi_i(z, x, p),\ p_i' = \Pi_i(z, x, p) \quad (i = 1 \cdots n),$$

vermöge deren die Gleichung:

$$(36)\quad dz' - p_1'dx_1' - \cdots - p_n'dx_n' = \sigma(z, x, p).(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

besteht. Setzen wir hier:

$$(37)\qquad \begin{cases} z = y_{n+1},\ z' = y'_{n+1},\ x_i = y_i,\ x_i' = y_i' \\ p_i = \dfrac{-q_i}{q_{n+1}},\ p_i' = \dfrac{-q_i'}{q'_{n+1}},\ \varrho = \dfrac{q_{n+1}}{q'_{n+1}} \end{cases}$$

so erhält die Bedingungsgleichung (36) die Form:

$$q_1'dy_1' + \cdots + q'_{n+1}dy'_{n+1} = q_1 dy_1 + \cdots + q_{n+1}dy_{n+1}$$

und diese Bedingungsgleichung wird offenbar von dem Gleichungensysteme:

$$(38)\qquad \begin{cases} y'_{n+1} = \mathsf{Z}\left(y_{n+1},\ y_1 \cdots y_n,\ \dfrac{-q_1}{q_{n+1}}, \cdots \dfrac{-q_n}{q_{n+1}}\right) \\ y_i' \quad = \Xi_i\left(y_{n+1},\ y_1 \cdots y_n,\ \dfrac{-q_1}{q_{n+1}}, \cdots \dfrac{-q_n}{q_{n+1}}\right) \\ q'_{n+1} = \dfrac{q_{n+1}}{\varrho\left(y_{n+1},\ y_1 \cdots y_n,\ \dfrac{-q_1}{q_{n+1}}, \cdots \dfrac{-q_n}{q_{n+1}}\right)} \\ q_i' \quad = \dfrac{q_{n+1}}{\varrho} \cdot \Pi_i\left(y_{n+1},\ y_1 \cdots y_n,\ \dfrac{-q_1}{q_{n+1}}, \cdots \dfrac{-q_n}{q_{n+1}}\right) \end{cases}$$

erfüllt, welches somit eine homogene Berührungstransformation darstellt. Dabei ist noch Folgendes klar: Fällt die Transformation (35) mit (33) zusammen, ist also identisch:

$$\mathsf{Z} = Z, \ \Xi_i = X_i, \ \Pi_i = P_i, \ \sigma = \varrho,$$

so fällt die Transformation (38) mit der Transformation (30) zusammen:

Durch die vorstehenden Entwickelungen ist gezeigt, dass man aus jeder homogenen Berührungstransformation in $y_1 \cdots y_{n+1}$, $q_1 \cdots q_{n+1}$ eine ganz bestimmte Berührungstransformation in z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ finden kann und umgekehrt. Hieraus geht zunächst hervor, dass sich alle Berührungstransformationen in z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ sofort angeben lassen, wenn man alle homogenen Berührungstransformationen in $y_1 \cdots y_{n+1}$, $q_1 \cdots q_{n+1}$ kennt und dass das umgekehrte auch gilt. *Zugleich aber ist zwischen diesen beiden Arten von Berührungstransformationen ein eindeutig umkehrbares Entsprechen hergestellt: Jeder Transformation der ersten Art entspricht eine ganz bestimmte Transformation der zweiten Art und umgekehrt*; sucht man zu einer Transformation einer von beiden Arten die entsprechende Transformation der andern Art und zu dieser wieder die entsprechende Transformation der ersten Art, so erhält man stets die ursprüngliche Transformation wieder.

Der eben geschilderte Zusammenhang zwischen den beiden Arten von Berührungstransformationen wird begrifflich klar, wenn man bemerkt, dass nach Belieben entweder z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ oder $y_1 \cdots y_{n+1}$, $q_1 \cdots q_{n+1}$ als Elementcoordinaten im $(n+1)$-fach ausgedehnten Punktraume aufgefasst werden können und dass jede Berührungstransformation dieses Raumes eine Transformation seiner Elemente ist. Daraus geht nämlich hervor, dass man jede Berührungstransformation des $(n+1)$-fach ausgedehnten Raumes sowohl in den Veränderlichen z, x, p als auch in den Veränderlichen y, q schreiben kann; thut man aber das, so erhält man genau das oben beschriebene Entsprechen zwischen den Berührungstransformationen in den z, x, p und den homogenen Berührungstransformationen in den y, q.

Der Inbegriff aller Berührungstransformationen in z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ bildet nach S. 118 eine unendliche Gruppe, sind daher S und T zwei beliebige Berührungstransformationen in den z, x, p und führt man zuerst S und nachher T aus, so ist die entstehende Transformation ST eine von derselben Beschaffenheit. Es seien nun $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ die beiden homogenen Berührungstransformationen in $y_1 \cdots y_{n+1}$, $q_1 \cdots q_{n+1}$, welche S und T bezüglich entsprechen, dann ist nach S. 138 f. auch $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ eine homogene Berührungstransformation und zwar ist $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ augenscheinlich diejenige, welche der Transformation ST entspricht. *Die unendliche Gruppe aller Berührungstransformationen in z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ und die unendliche Gruppe aller homogenen Berührungstransformationen in $y_1 \cdots y_{n+1}$, $q_1 \cdots q_{n+1}$ sind demnach durch das oben beschriebene eindeutig umkehrbare Entsprechen ihrer Transformationen holoedrisch isomorph auf einander bezogen.*

Der hier entwickelte Zusammenhang zwischen den beiden mehrfach genannten Arten von Berührungstransformationen setzt uns in den Stand, jeden Satz über Berührungstransformationen der einen Art in einen Satz über Berührungstransformationen der andern Art zu verwandeln. Dieses *allgemeine Princip**) wenden wir zunächst auf den folgenden Satz an (s. S. 136, Satz 14):

Sollen die Functionen: $Y_1 \cdots Y_{n+1}$, $Q_1 \cdots Q_{n+1}$ der Veränderlichen: $y_1 \cdots y_{n+1}$, $q_1 \cdots q_{n+1}$ die Gleichung:

$$Q_1 d Y_1 + \cdots + Q_{n+1} d Y_{n+1} = q_1 dy_1 + \cdots + q_{n+1} dy_{n+1}$$

identisch erfüllen, so ist nothwendig und hinreichend, dass die Gleichungen:

$$(39) \quad \begin{cases} (Q_i Q_\varkappa) = (Q_i Y_\varkappa) = (Y_i Y_\varkappa) = 0 \quad (i \neq \varkappa), \quad (Q_i Y_i) = 1 \\ \sum_1^{n+1} {}^{\nu} q_\nu \frac{\partial Y_i}{\partial q_\nu} = 0, \quad \sum_1^{n+1} {}^{\nu} q_\nu \frac{\partial Q_i}{\partial q_\nu} = Q_i \\ (i, \varkappa = 1 \cdots n+1) \end{cases}$$

identisch erfüllt sind.

Um diesen Satz in einen über Berührungstransformationen in z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ umzusetzen, müssen wir nach dem Früheren an Stelle der y, q die Grössen:

$$z = y_{n+1}, \quad x_1 = y_1, \cdots x_n = y_n$$

$$p_1 = -\frac{q_1}{q_{n+1}}, \cdots p_n = -\frac{q_n}{q_{n+1}}$$

als Veränderliche betrachten, müssen die Functionen:

$$(40) \quad \begin{cases} Y_{n+1}(y, q) = Z(z, x, p), \quad Y_i(y, q) = X_i(z, x, p) \\ \frac{-Q_i(y, q)}{Q_{n+1}(y, q)} = P_i(z, x, p), \quad \frac{q_{n+1}}{Q_{n+1}(y, q)} = \varrho(z, x, p) \end{cases}$$

bilden und müssen nunmehr aus jeder einzelnen der Relationen (39) die äquivalente Relation ableiten, welche sie zwischen den Functionen: Z, $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$, ϱ liefert.

Ehe wir die angedeutete Rechnung durchführen, schicken wir eine Formel voraus, welche uns dabei und auch später noch von Nutzen sein wird:

Sind F und Φ Functionen der Grössen:

$$y_1 \cdots y_{n+1}, \quad \frac{q_1}{q_{n+1}} \cdots \frac{q_n}{q_{n+1}}$$

und setzt man:

---

*) Das im Texte formulirte allgemeine Princip wurde aufgestellt und verwerthet in den Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, März 1873.

$$y_{n+1} = z, \quad y_1 = x_1, \cdots y_n = x_n$$

$$\frac{q_1}{q_{n+1}} = -p_1, \cdots \frac{q_n}{q_{n+1}} = -p_n,$$

so gilt die Formel:

$$(41) \qquad (F\Phi)_{yq} = -\frac{1}{q_{n+1}}[F\Phi]_{zxp}.$$

Der Beweis ist sehr einfach. Man hat ja:

$$\frac{\partial F}{\partial y_{n+1}} = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial F}{\partial q_i} = -\frac{1}{q_{n+1}}\frac{\partial F}{\partial p_i}$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_{n+1}} = \sum_1^n {}_\nu \frac{q_\nu}{q^2_{n+1}}\frac{\partial F}{\partial p_\nu} = -\frac{1}{q_{n+1}}\sum_1^n {}_\nu p_\nu \frac{\partial F}{\partial p_\nu}$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

und entsprechendes gilt für Φ. Daraus erhellt das Bestehen der Gleichung (41) unmittelbar.

Nunmehr gehen wir dazu über, die Relationen abzuleiten, welche sich zwischen Z, $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$, ϱ aus den Gleichungen (39) ergeben.

Die Gleichungen:

$$(Y_i Y_\varkappa)_{yq} = 0 \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n+1)$$

erhalten auf Grund von (41) die Gestalt:

$$\text{(A)} \qquad [X_i X_\varkappa] = 0, \quad [X_i Z] = 0 \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n).$$

Ferner ist:

$$(q_{n+1} F)_{yq} = \frac{\partial F}{\partial y_{n+1}} = \frac{\partial F}{\partial z},$$

also wird:

$$(Q_{n+1} Y_{n+1})_{yq} = \left(\frac{q_{n+1}}{\varrho}, Z\right)_{yq}$$
$$= \frac{1}{\varrho}\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{1}{\varrho^2}[\varrho Z]_{zxp},$$

das heisst, die Gleichung: $(Q_{n+1} Y_{n+1}) = 1$ ist äquivalent mit der nachstehenden:

$$\text{(B)} \qquad [\varrho Z] + \varrho \frac{\partial Z}{\partial z} - \varrho^2 = 0.$$

Eine ganz ähnliche Rechnung zeigt, dass sich aus den Gleichungen:

$$(Q_{n+1} Y_i) = 0, \quad (Q_{n+1} Q_i) = 0 \qquad (i = 1 \cdots n)$$

die folgenden ergeben:

$$\text{(C)} \qquad [\varrho X_i] + \varrho \frac{\partial X_i}{\partial z} = 0, \quad [\varrho P_i] + \varrho \frac{\partial P_i}{\partial z} = 0.\text{*)}$$
$$(i = 1 \cdots n).$$

---

*) Die Formeln (B) und (C) des Textes wurden zuerst aufgestellt von Herrn *Darboux,* Bulletin des sciences mathématiques 1882.

Weiter haben wir für $i = 1 \cdots n$:

$$(Q_i Y_i) = -(Q_{n+1} P_i,\ Y_i) = -P_i(Q_{n+1} Y_i) - Q_{n+1}(P_i Y_i)$$
$$= \frac{Q_{n+1}}{q_{n+1}}[P_i X_i] = \frac{1}{\varrho}[P_i X_i]$$

also, da $(Q_i Y_i)$ den Werth 1 hat:

(D) $$[P_i X_i] = \varrho \qquad (i = 1 \cdots n);$$

in derselben Weise bekommen wir aus:

$$(Q_i Y_\varkappa) = 0, \quad (Q_i Y_{n+1}) = 0$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots n;\ i \neq \varkappa)$$

die Relationen:

(E) $$[P_i X_\varkappa] = 0, \quad [P_i Z] = \varrho P_i$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots n;\ i \neq \varkappa)$$

und aus:

$$(Q_i Q_\varkappa) = 0 \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n)$$

die Relationen:

(F) $$[P_i P_\varkappa] = 0 \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n).$$

Uebrig bleiben noch die Homogeneitätsbedingungen:

$$\sum_1^{n+1} {}_{\nu}\, q_\nu \frac{\partial Y_i}{\partial q_\nu} = 0, \quad \sum_1^{n+1} {}_{\nu}\, q_\nu \frac{\partial Q_i}{\partial q_\nu} = Q_i$$
$$(i = 1 \cdots n + 1),$$

die aber liefern keine Relationen zwischen den Functionen Z, X, P, ϱ.

Aus den Gleichungen (39) ergeben sich somit zwischen den Z, X, P, ϱ die Relationen (A) $\cdots$ (F), wir können daher den Satz aussprechen:

Satz 18. *Sollen $2n + 2$ Functionen: Z, $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$, ϱ der $2n + 1$ Veränderlichen: z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ die Gleichung:*

(42) $$dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

identisch befriedigen, so ist nothwendig und hinreichend, dass die Gleichungen:

$$(43) \begin{cases} (43\text{a}) & [P_i P_\varkappa] = [P_i X_\varkappa] = [X_i X_\varkappa] = 0 \ (i \neq \varkappa), \ [P_i X_i] = \varrho, \\ (43\text{b}) & [X_i Z] = 0, \ [P_i Z] = \varrho P_i, \ \varrho \neq 0 \\ (43\text{c}) & [\varrho X_i] + \varrho \dfrac{\partial X_i}{\partial z} = [\varrho P_i] + \varrho \dfrac{\partial P_i}{\partial z} = [\varrho Z] + \varrho \dfrac{\partial Z}{\partial z} - \varrho^2 = 0 \\ & (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{cases}$$

identisch erfüllt sind.

Dieser Satz ist im Grunde blos eine andere Form des auf S. 137 aufgestellten allgemeinen Theorems 14 über homogene Berührungstransformationen. Von dem früher bewiesenen Satze 4, S. 122 unterscheidet er sich nur dadurch, dass zu den damaligen Gleichungen (8) die Gleichungen (43c) hinzugekommen sind. Der Satz 18 des Textes sagt in gewisser Beziehung etwas mehr aus als der citirte Satz 4; er zeigt nämlich, dass auch die Gleichungen (43c) eine Folge des Bestehens der Gleichung (42) sind. Andrerseits sagt der alte Satz 4 insofern mehr aus, als er zeigt, dass schon die Gleichungen (43a) und (43b) allein zum Bestehen von (42) nothwendig und hinreichend sind. Durch Verbindung beider Sätze ergiebt sich, dass die Gleichungen (43c) eine Folge der vereinigten Gleichungen (43a) und (43b) sind.

Setzen wir in den Formeln (43c) für ϱ den Werth $\varrho = 1$ ein, so finden wir die Gleichungen:

$$\frac{\partial X_i}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P_i}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = 1,$$

die uns den folgenden aus der Theorie des *Pfaffschen* Problems bekannten Satz liefern:

Satz 19. *Erfüllen* $2n+1$ *Grössen* Z, $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ *die Identität:*

$$dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n,$$

so besitzen sie die Form:

$$Z = z + \Omega(x, p), \qquad X_\varkappa = A_\varkappa(x, p), \qquad P_\varkappa = B_\varkappa(x, p).$$

Diesen Satz erhalten wir übrigens auch dadurch, dass wir das allgemeine Princip der Seite 142 f. auf die Note im Text der Seite 138 anwenden.

Kapitel 6.

Bestimmung aller Berührungstransformationen ohne Integration. Charakteristische Eigenschaften derselben.

Im Vorangehenden wurden drei verschiedene Arten von Berührungstransformationen betrachtet und bei jeder dieser Arten die auftretenden Functionen durch gewisse Differentialrelationen vollständig charakterisirt, so dass die Bestimmung aller Berührungstransformationen jeder einzelnen von diesen drei Kategorien auf die Integration gewisser Differentialgleichungen zurückgeführt ist. Damit wissen wir aber noch nichts über den Umfang dieser drei Kategorien und über die Allgemeinheit der in ihnen enthaltenen Berührungstransformationen, nur an Beispielen haben wir uns überzeugt, dass jede der drei Kategorien wirklich durch Berührungstransformationen vertreten ist.

Später entwickeln wir allgemeine Methoden, welche zur Integration der erwähnten Differentialgleichungen führen, und gewinnen so eine vollständige Einsicht in die Beschaffenheit der willkürlichen Elemente, von denen eine Berührungstransformation abhängt. Vorläufig werden wir zur Bestimmung aller Berührungstransformationen einen andern Weg einschlagen, einen Weg, auf welchem keine Integrationen sondern nur Differentiationen und Eliminationen erforderlich sind. Schon so werden wir einen Ueberblick über den Umfang der drei Kategorien erhalten.

In dem zweiten Theile des Kapitels entwickeln wir eine Reihe von charakteristischen Eigenschaften der Berührungstransformationen eines $(n+1)$-fach ausgedehnten Raumes; insbesondere untersuchen wir, in welcher Weise die Punktmannigfaltigkeiten des betreffenden Raumes von einer Berührungstransformation transformirt werden.

§ 39.

Zunächst suchen wir alle *homogenen* Berührungstransformationen, also alle Transformationen:

$$(1) \qquad x_i' = X_i(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n), \quad p_i' = P_i(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) \quad {\scriptstyle (i=1 \cdots n)}$$

vermöge deren die Gleichung:

$$(2) \qquad p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n - p_1' dx_1' - \cdots - p_n' dx_n' = 0$$

zur Identität wird.

Die Gleichung (2) *lässt sich auffassen als eine Pfaffsche Gleichung in den* $4n$ *Veränderlichen* x_i, p_i, x_i', p_i'. Legt man diese Auffassung zu Grunde, so kann man sagen: eine Transformation von der Gestalt (1) ist dann und nur dann eine homogene Berührungstransformation, wenn das $2n$-gliedrige Gleichungensystem (1) in den $4n$ Veränderlichen x_i, p_i, x_i', p_i' die Pfaffsche Gleichung (2) befriedigt. Demnach findet man alle homogenen Berührungstransformationen (1), wenn man in den $4n$ Veränderlichen x_i, p_i, x_i', p_i' alle $2n$-gliedrigen Gleichungensysteme bestimmt, welche die Pfaffsche Gleichung (2) befriedigen und welche sowohl nach $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$ als nach $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ auflösbar sind.

Wir können sehr leicht alle $2n$-gliedrigen Gleichungensysteme hinschreiben, welche die Pfaffsche Gleichung (2) erfüllen; wir sind ja nach S. 83 f. im Stande, alle m-gliedrigen Gleichungensysteme in $x_1 \cdots x_m$, $p_1 \cdots p_m$ anzugeben, welche die Pfaffsche Gleichung:

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m = 0$$

befriedigen; in den betreffenden Formeln haben wir nur $m = 2n$ zu wählen und sodann $x_{n+1} \cdots x_{2n}$, $p_{n+1} \cdots p_{2n}$ durch bezüglich: $x_1' \cdots x_n'$, $-p_1', \cdots, -p_n'$ zu ersetzen. Auf diese Weise finden wir folgendes:

Wird von dem Gleichungensystem: $p_i = 0$, $p_i' = 0$ ${\scriptstyle (i=1 \cdots n)}$ abgesehen, welches im gegenwärtigen Falle überhaupt nicht in Betracht kommt, so ergiebt sich das allgemeinste $2n$-gliedrige Gleichungensystem, welches die Pfaffsche Gleichung (2) erfüllt, dadurch, dass man die q Grössen $\lambda_1 \cdots \lambda_q$ aus den $2n+q$ Gleichungen:

$$(3)\begin{cases} (3\text{a}) & \Omega_1(x_1 \cdots x_n,\, x_1' \cdots x_n') = 0, \cdots \Omega_q(x_1 \cdots x_n,\, x_1' \cdots x_n') = 0 \\ (3\text{b}) & -p_i + \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1 \cdots n) \\ (3\text{c}) & p_i' + \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_i'} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_i'} = 0 \qquad (i = 1 \cdots n) \end{cases}$$

fortschafft (vgl. S. 83 f.).

Hier kann q eine jede der Zahlen $1, 2 \cdots n$ sein und $\Omega_1 \cdots \Omega_q$ bedeuten beliebige Functionen ihrer Argumente, nur dürfen (vgl. S. 35) nicht alle q-reihigen Determinanten der Matrix:

$$(\text{M}) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_1'} & \cdots & \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_n'} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \dfrac{\partial \Omega_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Omega_n}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \Omega_n}{\partial x_1'} & \cdots & \dfrac{\partial \Omega_n}{\partial x_n'} \end{vmatrix}$$

vermöge: $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ verschwinden. Alsdann ist offenbar das $(2n+q)$-gliedrige Gleichungensystem (3) in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n,\, p_1 \cdots p_n,\, x_1' \cdots x_n',\, p_1' \cdots p_n',\, \lambda_1 \cdots \lambda_q$ so beschaffen, dass nicht alle $(2n+q)$-reihigen Determinanten der zugehörigen Matrix vermöge (3) verschwinden. Andererseits ist sicher, dass man aus (3) durch Fortschaffung von $\lambda_1 \cdots \lambda_q$ wirklich ein $2n$-gliedriges Gleichungensystem erhält.

Unter den $2n$-gliedrigen Gleichungensystemen, welche aus den Gleichungensystemen von der Form (3) durch Wegschaffung der λ entstehen, haben wir jetzt noch diejenigen auszuwählen*), welche

---

*) *Pfaff*, *Jacobi* und *Clebsch* haben längst nachgewiesen, dass *Transformationen* zwischen den x', p' und den x, p, welche durch Elimination von $\lambda_1 \cdots \lambda_q$ zwischen $2n+q$ Gleichungen von der Form (3) hervorgehen, den allgemeinsten Uebergang von einer $2n$-gliedrigen kanonischen Form eines Pfaffschen Ausdrucks zu einer anderen kanonischen Form desselben liefern. Der Zusammenhang dieses Transformationsproblems eines Pfaffschen Ausdrucks mit dem allgemeinen Problem: alle analytischen Transformationen zu finden, ist aber in diesen älteren Arbeiten nicht erörtert. Auf der anderen Seite war die Frage unerledigt geblieben, wann $2n+q$ Gleichungen von der Form (3) nach Elimination der Parameter λ eine *Transformation* zwischen den x', p' und den x, p liefern.

sowohl nach den x', p' als nach den x, p auflösbar sind. Der Inbegriff aller homogenen Berührungstransformationen in den x, p besteht ja eben aus dem Inbegriff aller Gleichungensysteme von dieser besonderen Beschaffenheit.

Sollen $2n+q$ Gleichungen von der Form (3) nach Fortschaffung der λ ein $2n$-gliedriges Gleichungensystem ergeben, welches nach $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$ auflösbar ist, so ist nothwendig und hinreichend, dass sie selbst nach $x_1' \cdots x_n'$, $\lambda_1 \cdots \lambda_q$, $p_1' \cdots p_n'$ auflösbar sind. Um diese Bedingung bequem ausdrücken zu können, setzen wir:

$$\lambda_1 \Omega_1 + \cdots + \lambda_q \Omega_q = W,$$

so dass die Gleichungen (3b) und (3c) in der Gestalt:

$$(3b') \qquad -p_i + \frac{\partial W}{\partial x_i} = 0 \qquad (i=1\cdots n)$$

$$(3c') \qquad p_i' + \frac{\partial W}{\partial x_i'} = 0 \qquad (i=1\cdots n)$$

erscheinen. Dann kommt die Auflösbarkeit von (3) nach den x', λ, p' darauf hinaus, dass die Functionaldeterminante von:

$$\Omega_1 \cdots \Omega_q, \quad -p_1 + \frac{\partial W}{\partial x_1}, \cdots -p_n + \frac{\partial W}{\partial x_n}, \quad p_1' + \frac{\partial W}{\partial x_1'}, \cdots p_n' + \frac{\partial W}{\partial x_n'}$$

genommen nach $x_1' \cdots x_n'$, $\lambda_1 \cdots \lambda_q$, $p_1' \cdots p_n'$ nicht vermöge (3) verschwindet. Aber diese $(2n+q)$-reihige Functionaldeterminante reducirt sich ohne Weiteres auf die $(n+q)$-reihige Functionaldeterminante von:

$$\Omega_1 \cdots \Omega_q, \quad -p_1 + \frac{\partial W}{\partial x_1}, \cdots, -p_n + \frac{\partial W}{\partial x_n}$$

genommen nach $x_1' \cdots x_n'$, $\lambda_1 \cdots \lambda_q$; sie hat daher die Form:

$$(4) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1'} & \cdots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n'} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_1'} & \cdots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_n'} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_1'} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_n'} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x_n \partial x_1'} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial x_n \partial x_n'} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Die Gleichungen (3) sind also dann und nur dann nach den x', λ, p' auflösbar, wenn Δ nicht vermöge (3) verschwindet. Nun aber ist Δ von $p_1 \cdots p_n$, $p_1' \cdots p_n'$ frei; es kann mithin vermöge (3) nur dann verschwinden, wenn es schon vermöge (3a) für alle Werthsysteme $\lambda_1 \cdots \lambda_q$ verschwindet. Folglich ergiebt sich:

Gleichungen von der Form (3) liefern bei Fortschaffung der λ dann und nur dann ein $2n$-gliedriges nach $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$ auflösbares Gleichungensystem, wenn Δ nicht vermöge: $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ verschwindet.

Die Determinante Δ ändert sich nicht, wenn man $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ mit bezüglich: $x_1' \cdots x_n'$, $-p_1', \cdots -p_n'$ vertauscht; also sieht man unmittelbar, dass das aus (3) durch Fortschaffung der λ entstehende Gleichungsystem ebenfalls dann und nur dann nach $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ auflösbar ist, wenn Δ nicht vermöge (3) verschwindet.

Wenn alle q-reihigen Determinanten der Matrix (M) vermöge: $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ verschwänden, so würde Δ offenbar dasselbe thun. Man sieht sogar, dass Δ vermöge: $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ verschwinden würde, wenn alle q-reihigen Determinanten einer der beiden Matricen:

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1'} & \cdots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n'} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_1'} & \cdots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_n'} \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} \end{array} \right|$$

vermöge (3a) gleich Null würden. Die Forderung, dass Δ nicht vermöge (3a) verschwinden soll, hat demnach nicht blos zur Folge, dass die q-reihigen Determinanten von (M) nicht sämmtlich vermöge (3a) verschwinden dürfen; sie verlangt sogar, *dass die Gleichungen:* $\Omega_1 = 0$, $\cdots \Omega_q = 0$ *sowohl nach q von den x' als nach q von den x auflösbar sind.*

Nunmehr können wir das Theorem aussprechen:

Theorem 15. *Sind die Functionen: $\Omega_1 \cdots \Omega_q$ der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $x_1' \cdots x_n'$ so beschaffen, dass die Determinante:*

$$(4) \qquad \Delta = \left| \begin{array}{cccccc} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1'} & \cdots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n'} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_1'} & \cdots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_n'} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_1'} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_n'} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x_n \partial x_1'} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial x_n \partial x_n'} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_n} \end{array} \right|$$

in welcher $W = \lambda_1 \Omega_1 + \cdots + \lambda_q \Omega_q$ *ist, nicht vermöge:* $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ *für alle Werthe der* λ *verschwindet, so ergeben die Gleichungen:*

$$(3') \begin{cases} \Omega_1(x_1 \cdots x_n, x_1' \cdots x_n') = 0, \cdots \Omega_q(x_1 \cdots x_n, x_1' \cdots x_n') = 0 \\ -p_i + \dfrac{\partial W}{\partial x_i} = 0, \; p_i' + \dfrac{\partial W}{\partial x_i'} = 0 \\ \quad (i = 1 \cdots n) \end{cases}$$

bei Fortschaffung der λ *ein* $2n$*-gliedriges Gleichungensystem, welches sowohl nach* $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$ *als nach* $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ *auflösbar ist und welches eine homogene Berührungstransformation bestimmt. Wählt man* $\Omega_1 \cdots \Omega_q$ *in allgemeinster Weise so, dass* Δ *nicht vermöge:* $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ *verschwindet, und ertheilt man der ganzen Zahl* q *der Reihe nach die Werthe* $1, 2 \cdots n$, *so erhält man alle homogenen Berührungstransformationen in den Veränderlichen* $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$. *Dabei ist das Gleichungensystem:* $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ *immer sowohl nach* q *von den* x' *als nach* q *von den* x *auflösbar.**)

Erwähnen wollen wir noch, dass Δ eine ganze homogene Function $(n - q)$-ten Grades von $\lambda_1 \cdots \lambda_q$ wird und dass man die Forderung: Δ soll nicht vermöge: $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ für alle Werthe der λ verschwinden, auch so ausdrücken kann: es sollen nicht alle Coefficienten dieser ganzen homogenen Function der λ vermöge: $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ verschwinden.

Denkt man sich die Gleichungen (3) nach $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$, $\lambda_1 \cdots \lambda_q$ aufgelöst, so werden die x' homogene Functionen nullter Ordnung von den p und die p' homogene Functionen erster Ordnung, wie es bei einer homogenen Berührungstransformation sein muss.

Will man nämlich $x_1' \cdots x_n'$ durch die x, p ausdrücken, so wird man zunächst die λ aus den Gleichungen (3b) fortschaffen, was man in der Weise ausführen kann, dass man die $n - 1$ Gleichungen:

$$\frac{p_\varkappa}{p_n} = \frac{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_\varkappa} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_\varkappa}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_n}} \quad (\varkappa = 1 \cdots n - 1)$$

bildet und dann aus diesen die Verhältnisse der λ wegschafft. Man erhält auf diese Weise $n - q$ Gleichungen zwischen $x_1' \cdots x_n'$, $x_1 \cdots x_n$,

*) Lie, Math. Ann. Bd. V, VIII und XI, S. 547; Archiv for Math., Bd. I, Christiania 1876.

$p_1 \cdots p_n$, in denen nur die Verhältnisse der p auftreten; nimmt man daher noch die Gleichungen (3a) hinzu, so bekommt man $x_1' \cdots x_n'$ dargestellt als Functionen von:

$$x_1 \cdots x_n, \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}.$$

Setzt man die gefundenen Werthe von $x_1' \cdots x_n'$ in (3b) ein und löst die entstehenden Gleichungen nach $\lambda_1 \cdots \lambda_q$ auf, so werden $\lambda_1 \cdots \lambda_q$ solche Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, welche in den p homogen von erster Ordnung sind. Die Gleichungen (3c) endlich zeigen, dass die p' ebensolche Functionen der x und p werden wie die λ.

Ist das Gleichungensystem: $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ so beschaffen, dass die Determinante Δ vermöge desselben verschwindet, so ist das Gleichungensystem, welches aus (3) durch Elimination der λ entsteht, weder nach den x', p', noch nach den x, p auflösbar, es werden sich daher aus den Gleichungen (3) gewisse Relationen zwischen den x, p allein ableiten lassen und ebenso gewisse Relationen zwischen den x', p' allein.

Sollen sich aus (3) oder, was auf dasselbe hinauskommt, aus (3a) (3b) gerade m unabhängige Relationen zwischen den x, p allein herleiten lassen, so ist nothwendig und hinreichend, dass mit der Determinante Δ zugleich alle ihre Unterdeterminanten $(n+q-1)$-ten, $\cdots (n+q-m+1)$-ten Grades vermöge $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ verschwinden, ohne dass auch alle Unterdeterminanten $(n+q-m)$-ten Grades dies thun. Ist aber diese Bedingung erfüllt, so lassen sich offenbar aus den Gleichungen (3a) (3c) ebenfalls gerade m unabhängige Relationen zwischen den x', p' allein ableiten und genau ebenso viele Relationen dieser Art folgen aus dem ganzen Gleichungensystem (3).

Man beachte überdies, dass alle etwa auftretenden Relationen zwischen den x, p allein in den p homogen sind und dass von den etwaigen Relationen zwischen den x', p' allein dasselbe in Bezug auf die p' gilt.

In der That, um eine Relation zwischen den x, p allein zu finden, muss man jedenfalls aus (3a) (3b) die λ eliminiren und das kann man wie vorhin in der Weise ausführen, dass man zuerst die Gleichungen:

$$\frac{p_i}{p_n} = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_q \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_i}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_q \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_n}}$$

$$(i = 1, 2 \cdots n-1)$$

bildet und dann aus diesen die Quotienten der λ fortschafft. Alle Relationen, die man auf diese Weise erhält, sind homogen in den p.

Damit haben wir den

Satz 1. *Ergeben die* $2n + q$ *unabhängigen Gleichungen:*

$$(3)\qquad \begin{cases} \Omega_1(x_1 \cdots x_n,\ x_1' \cdots x_n') = 0, \ \cdots\ \Omega_q = 0 \\ -p_i + \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_i} = 0 \\ \quad p_i' + \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_i'} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_i'} = 0 \\ \qquad\qquad (i = 1 \cdots n) \end{cases}$$

gerade $m \geqq 0$ *unabhängige von* $\lambda_1 \cdots \lambda_q$ *freie Relationen zwischen den* x, p *allein, so ergeben sie auch gerade* m *unabhängige von den* λ *freie Relationen zwischen den* x', p' *allein. Alle derartigen Relationen zwischen den* x, p *sind in den* p, *diejenigen zwischen den* x', p' *sind in den* p' *homogen.**)

§ 40.

Wir wenden uns zur Bestimmung der allgemeinen Berührungstransformationen in z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, also derjenigen Transformationen:

$$(5)\qquad z' = Z(z, x, p),\ x_i' = X_i(z, x, p),\ p_i' = P_i(z, x, p) \qquad (i = 1 \cdots n),$$

welche eine Gleichung von der Form:

$$dz' - p_1' dx_1' - \cdots - p_n' dx_n' = \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

identisch befriedigen.

Um diese Aufgabe zu lösen, setzen wir wie in Kap. 5:

$$(6)\qquad \begin{cases} z = y_{n+1},\ z' = y_{n+1}',\ x_i = y_i,\ x_i' = y_i' \\ \varrho = \dfrac{q_{n+1}}{q_{n+1}'},\ p_i = \dfrac{-q_i}{q_{n+1}},\ p_i' = \dfrac{-q_i'}{q_{n+1}'} \\ \qquad\qquad (i = 1 \cdots n), \end{cases}$$

so dass Gleichung (5) die Form:

$$q_1' dy_1' + \cdots + q_{n+1}' dy_{n+1}' = q_1 dy_1 + \cdots + q_{n+1} dy_{n+1}$$

erhält. Dann stellen, wie wir wissen, die Gleichungen:

---

*) Archiv for Math. Bd. I, Christiania 1876; Math. Ann. Bd. XI. An der letzten Stelle finden sich weitergehende Untersuchungen über die im Texte betrachteten *unvollständigen* Berührungstransformationen.

$$
(7)\quad \begin{cases}
y'_{n+1} = Z\left(y_{n+1},\ y_1 \cdots y_n,\ \dfrac{-q_1}{q_{n+1}}, \cdots \dfrac{-q_n}{q_{n+1}}\right) \\[2ex]
y_i' = X_i\left(y_{n+1},\ y_1 \cdots y_n,\ \dfrac{-q_1}{q_{n+1}}, \cdots \dfrac{-q_n}{q_{n+1}}\right) \\[2ex]
q'_{n+1} = q_{n+1} \cdot \varrho\left(y_{n+1},\ y_1 \cdots y_n,\ \dfrac{-q_1}{q_{n+1}}, \cdots \dfrac{-q_n}{q_{n+1}}\right) \\[2ex]
q_i' = -\, q_{n+1} \cdot \varrho\left(y_{n+1} \cdots \dfrac{-q_n}{q_{n+1}}\right) P_i\left(y_{n+1} \cdots \dfrac{-q_n}{q_{n+1}}\right) \\
\qquad\qquad (i = 1 \cdots n)
\end{cases}
$$

eine homogene Berührungstransformation in den Veränderlichen $y_1 \cdots y_{n+1}$, $q_1 \cdots q_{n+1}$ dar. Dagegen liefert auf der andern Seite jede homogene Berührungstransformation in den y, q eine Berührungstransformation in z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, sobald man aus ihren Gleichungen die Veränderlichen y', q', y, q mit Hülfe von (6) wegschafft und sodann die erhaltenen Gleichungen nach z', $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$ auflöst.

Die allgemeinste homogene Berührungstransformation in $y_1 \cdots y_{n+1}$, $q_1 \cdots q_{n+1}$ wird nach Theorem 15 (S. 150) aus den Gleichungen:

$$
(8)\quad \begin{cases}
\Omega_1(y_{n+1},\ y_1 \cdots y_n,\ y'_{n+1},\ y_1' \cdots y_n') = 0, \quad \cdots \Omega_q = 0 \\[1ex]
q_i = \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial y_i} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial y_i} \\[2ex]
-q_i' = \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial y_i'} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial y_i'} \\
\qquad (i = 1 \cdots n+1)
\end{cases}
$$

erhalten, wenn man die λ eliminirt. Dabei kann q eine jede der Zahlen $1, 2 \cdots n+1$ sein und die Functionen $\Omega_1 \cdots \Omega_q$ sind in allgemeinster Weise so zu wählen, dass die durch Elimination der λ erhaltenen Gleichungen nach $y_1' \cdots y'_{n+1}$, $q_1' \cdots q'_{n+1}$ auflösbar sind, die Auflösbarkeit nach den y, q ist dann von selbst vorhanden. Wollen wir daher die allgemeinste Berührungstransformation in z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ finden, so haben wir nur mit Hülfe von (6) die Grössen y, q, y', q' aus (8) fortzuschaffen, was giebt:

$$
(9)\quad \begin{cases}
\Omega_1(z, x_1 \cdots x_n, z', x_1' \cdots x_n') = 0, \cdots \Omega_q = 0 \\[1ex]
p_i = -\dfrac{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_i}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial z}} \\[4ex]
p_i' = -\dfrac{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_i'} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_i'}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z'} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial z'}} \\
\qquad (i = 1 \cdots n)
\end{cases}
$$

und müssen nun das Gleichungensystem: $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ in allgemeinster Weise so wählen, dass die aus (9) durch Elimination der λ entstehenden Gleichungen nach $z', x_1' \cdots x_n', p_1' \cdots p_n'$ auflösbar sind; dieselben sind dann von selbst auch nach den z, x, p auflösbar.

Somit haben wir den

Satz 2. *Die allgemeinste Berührungstransformation in $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ wird erhalten, wenn man $\lambda_1 \cdots \lambda_q$ aus den Gleichungen:*

$$
(9) \qquad \begin{cases} \Omega_1(z, x_1 \cdots x_n, z', x_1' \cdots x_n') = 0, \cdots \Omega_q = 0 \\[2mm] p_i = -\dfrac{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_i}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial z}} \\[2mm] p_i' = -\dfrac{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_i'} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_i'}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z'} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial z'}} \\ \qquad (i = 1 \cdots n) \end{cases}
$$

eliminirt. Hier kann q eine jede der Zahlen $1, 2 \cdots n + 1$ sein; das q-gliedrige Gleichungensystem: $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ ist nur der Beschränkung unterworfen, dass die aus (9) durch Elimination der λ entstehenden Gleichungen nach $z', x_1' \cdots x_n', p_1' \cdots p_n'$ auflösbar sind; die Auflösbarkeit nach $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ ist dann von selbst vorhanden.

Ausserdem erhalten wir noch aus dem Satze 1 S. 153 den folgenden

Satz 3. *Liefern die Gleichungen (9) gerade $m \geqq 0$ unabhängige von den λ freie Relationen zwischen $z', x_1' \cdots x_n', p_1' \cdots p_n'$ allein, so liefern sie auch gerade m unabhängige Relationen zwischen den z, x, p allein.*

Durch Specialisirung des Satzes 2 finden wir endlich alle Berührungstransformationen von der Form:

$$
(10) \qquad z' = Az + \Omega(x, p), \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n).
$$

Denken wir uns nämlich die aus (10) folgenden Relationen zwischen $z, x_1 \cdots x_n, z', x_1' \cdots x_n'$ aufgestellt, was durch Elimination von $p_1 \cdots p_n$ aus den $n + 1$ ersten Gleichungen (10) geschehen würde, so erkennen wir sofort, dass diese Relationen z und z' nur in der Verbindung $z' - Az$ enthalten, dass sie also auf die Form gebracht werden können:

$$
(11) \qquad \begin{cases} z' - Az - V(x_1 \cdots x_n, x_1' \cdots x_n') = 0, \\ U_1(x, x') = 0, \cdots U_{q-1}(x, x') = 0. \end{cases}
$$

Soll daher das Gleichungensystem (9) eine Berührungstransformation von der Form (10) liefern, so müssen die Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_q = 0$ die Form (11) erhalten können. Ersetzt man umgekehrt in (9) die Gleichungen $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ durch (11), so erhält man offenbar eine Berührungstransformation von der Gestalt (10). Also:

Theorem 16. *Die allgemeinste Berührungstransformation in $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$, bei welcher die Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ unter einander transformirt werden, entsteht, wenn man $\lambda, \lambda_1 \cdots \lambda_q$ aus den $2n+q+1$ unabhängigen Gleichungen:*

$$(12)\begin{cases} z' - Az - W(x_1 \cdots x_n, x_1' \cdots x_n') = 0, \ \Omega_1(x, x') = 0, \cdots \Omega_q(x, x') = 0 \\ p_i = \dfrac{-\lambda \dfrac{\partial W}{\partial x_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_i}}{\lambda A} \\ p_i' = \dfrac{\lambda \dfrac{\partial W}{\partial x_i'} - \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_i'} - \cdots - \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_i'}}{\lambda} \\ (i = 1 \cdots n) \end{cases}$$

wegschafft. Hier bedeutet A eine beliebige von Null verschiedene Constante, q kann eine jede der Zahlen $0, 1, 2 \cdots n$ sein, endlich sind $W, \Omega_1 \cdots \Omega_q$ beliebige Functionen ihrer Argumente und nur der einen Beschränkung unterworfen, dass die Gleichungen, welche aus (12) durch Elimination der λ entstehen, nach den z', x', p' auflösbar sein müssen, die Auflösbarkeit nach den z, x, p folgt daraus von selbst.)*

Setzt man in den Gleichungen (12) die Constante $A = 1$ und die Function $W = 0$ und lässt man sodann die Gleichung: $z' - z = 0$ weg, so kommt man, wie es auch sein muss, wieder auf die Formeln des Theorems 15 S. 150 für die allgemeinste homogene Berührungstransformation in $x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$.

§ 41.

Es sei in den Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ irgend ein Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$ vorgelegt, welches die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ befriedigt. Führen wir nun auf dieses Gleichungensystem irgend eine Berührungstransformation:

$$z' = Z(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n), \ x_i' = X_i, \ p_i' = P_i \quad (i = 1 \cdots n)$$

---

*) Lie, Zur analytischen Theorie der Berührungstransformationen, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, Juni 1873; Math. Ann., Bd. VIII.

aus, so erhalten wir in $z', x_1' \cdots x_n', p_1' \cdots p_n'$ ein neues Gleichungensystem: $\Phi_1' = 0, \cdots \Phi_m' = 0$, welches nach S. 41 diejenige Pfaffsche Gleichung befriedigt, in welche $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ bei der Transformation übergeht; nun verwandelt sich aber unter der gemachten Voraussetzung die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

in: $dz' - p_1 dx_1' - \cdots - p_n' dx_n' = 0$; also sehen wir:

Bei einer Berührungstransformation in den Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ geht jedes Gleichungensystem, welches die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ befriedigt, in ein Gleichungensystem von derselben Beschaffenheit über.

Um nachweisen zu können, dass auch das Umgekehrte gilt, schicken wir zunächst einen Hilfssatz voraus:

Satz 4. *Die Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ ist die einzige Pfaffsche Gleichung, welche von allen Gleichungensystemen von der Form:*

$$(13) \qquad z - F(x_1 \cdots x_n) = 0,\ p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0,\ \cdots\ p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

befriedigt wird.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach. Es sei:

$$(14) \quad A(z, x, p) dz + \sum_1^n {}_i\, B_i(z, x, p) dx_i + \sum_1^n {}_i\, C_i(z, x, p) dp_i = 0$$

irgend eine Pfaffsche Gleichung, welche von allen Gleichungensystemen von der Form (13) erfüllt wird. Dann muss die Gleichung:

$$\sum_1^n {}_i \left(A \frac{\partial F}{\partial x_i} + B_i + \sum_1^n {}_\nu\, C_\nu \frac{\partial^2 F}{\partial x_\nu \partial x_i} \right) dx_i = 0$$

bei der Substitution:

$$z = F,\ p_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1},\ \cdots\ p_n = \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

zu einer Identität werden, welche Function von $x_1 \cdots x_n$ auch F sein mag. Folglich müssen die n Gleichungen:

$$A p_i + B_i + \sum_1^n {}_\nu\, C_\nu \frac{\partial^2 F}{\partial x_\nu \partial x_i} = 0 \qquad (i = 1 \cdots n)$$

für alle Zahlenwerthe der Grössen:

$$z,\ x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_\nu \partial x_i} \qquad (\nu, i = 1 \cdots n)$$

identisch erfüllt sein, das aber tritt nur ein, wenn

$$C_i \equiv 0,\ B_i \equiv - A p_i \qquad (i = 1 \cdots n)$$

ist, das heisst, wenn die Pfaffsche Gleichung (14) die Form:

$$A(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n) = 0$$

besitzt. Damit ist der Satz bewiesen.

Nunmehr denken wir uns irgend eine Transformation:

$$(15) \qquad z' = Z(z,\, x,\, p),\; x_i' = \Xi_i(z,\, x,\, p),\; p_i' = \Pi_i(z,\, x,\, p) \atop (i = 1 \cdots n)$$

vorgelegt, welche jedes Gleichungensystem, das die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ befriedigt, in ein ebensolches überführt. Wir werden zeigen, dass diese Transformation eine Berührungstransformation ist.

Wir führen die Transformation (15) auf ein beliebiges Gleichungensystem von der Form:

$$(13) \qquad z - F(x_1 \cdots x_n) = 0,\; p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0,\; \cdots\; p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

aus. Da (13) die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ befriedigt, müssen wir auf diese Weise stets ein Gleichungensystem: $\Psi_1 = 0, \cdots \Psi_{n+1} = 0$ in den z', x', p' erhalten, welches die Pfaffsche Gleichung: $dz' - p_1' dx_1' - \cdots - p_n' dx_n' = 0$ befriedigt. Führen wir daher in: $dz' - p_1' dx_1' - \cdots - p_n' dx_n' = 0$ vermöge (15) die ursprünglichen Veränderlichen z, x, p wieder ein, so muss sich eine Pfaffsche Gleichung:

$$dz' - p_1' dx_1' - \cdots - p_n' dx_n' =$$

$$= A(z,\, x,\, p)\, dz + \sum_1^n {}_i\, B_i(z,\, x,\, p) dx_i + \sum_1^n {}_i\, C_i(z,\, x,\, p) dp_i = 0$$

ergeben, die von *allen* Gleichungensystemen von der Form (13) erfüllt wird. Das ist nach dem Obigen nur der Fall, wenn $C_i \equiv 0$ und $B_i \equiv - A p_i$ ist, folglich besteht vermöge der Transformationsgleichungen (15) eine Relation von der Form:

$$dz' - p_1' dx_1' - \cdots - p_n' dx_n' = A(z, x, p)\,(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n),$$

das heisst (15) ist wirklich eine Berührungstransformation.

Verbinden wir dieses Ergebniss mit dem oben abgeleiteten, so können wir sagen:

Theorem 17. *Die Berührungstransformationen in den Veränderlichen z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ lassen sich auch definiren als diejenigen Transformationen in den z, x, p, welche jedes $(n+1)$-gliedrige Gleichungensystem, das die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ befriedigt, in ein Gleichungensystem von derselben Beschaffenheit überführen.**)

*) Vgl. Lie, Math. Ann. Bd. V und VIII.

§ 42.

In Kapitel 4 haben wir gesehen, dass die $(n+1)$-gliedrigen Gleichungensysteme in z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, welche die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ befriedigen, in eine endliche Zahl, nämlich in $n+1$ verschiedene Klassen zerfallen. Die eine dieser $n+1$ Klassen besteht aus allen Gleichungensystemen von der Form:

$$(13) \qquad z - F(x_1 \cdots x_n) = 0,\ p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0,\ \cdots p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0,$$

der Inbegriff aller ihr angehörigen Gleichungensysteme hängt demnach von *einer willkürlichen Function mit n Argumenten ab.* Dagegen hängt der Inbegriff aller übrigen Gleichungensysteme, welche die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ erfüllen, allerdings von mehreren willkürlichen Functionen ab, diese Functionen jedoch enthalten nicht n, sondern nur eine *geringere Zahl von Argumenten.*

Bei Ausführung einer Berührungstransformation:

$$(16) \qquad z' = Z(z, x, p),\ x_i' = X_i(z, x, p),\ p_i' = P_i(z, x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

verwandelt sich jedes $(n+1)$-gliedrige Gleichungensystem, welches die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ befriedigt, in ein Gleichungensystem von derselben Beschaffenheit. Nach dem vorhin Gesagten lässt sich erwarten, dass die Gleichungensysteme von der besonderen Form (13) bei Ausführung der Berührungstransformation (16) im Allgemeinen in Gleichungensysteme von der analogen Form:

$$(13') \qquad z' - \Phi(x_1' \cdots x_n') = 0,\ p_1' - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1'} = 0,\ \cdots p_n' - \frac{\partial \Phi}{\partial x_n'} = 0$$

übergehen. Wir werden jetzt zeigen, dass dies wirklich so ist, und dass ein Gleichungensystem von der Form (13) bei der Berührungstransformation dann und nur dann nicht in ein Gleichungensystem von der analogen Form (13') übergeht, wenn $F(x_1 \cdots x_n)$ einer gewissen partiellen Differentialgleichung genügt, welche wir aufstellen werden.

Wünschen wir das Gleichungensystem zu finden, in welches (13) bei der Berührungstransformation (16) übergeht, so haben wir nur in (16) die Substitution:

$$z = F(x_1 \cdots x_n),\ p_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1 \cdots n)$$

zu machen und aus den so entstehenden Gleichungen:

$$(17)\quad \begin{cases} z' = Z\left(F,\, x_1 \cdots x_n,\, \dfrac{\partial F}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right) \\ x_i' = X_i\left(F,\, x_1 \cdots x_n,\, \dfrac{\partial F}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right) \\ p_i' = P_i\left(F,\, x_1 \cdots x_n,\, \dfrac{\partial F}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right) \\ \qquad (i = 1 \cdots n) \end{cases}$$

die Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ fortzuschaffen.

Das transformirte Gleichungensystem kann nun offenbar dann und nur dann nicht auf die Form (13′) gebracht werden, wenn sich aus (17) wenigstens eine Relation zwischen $x_1' \cdots x_n'$ allein ergiebt. Das tritt ein, wenn die Functionaldeterminante der n Functionen:

$$X_i\left(F,\, x_1 \cdots x_n,\, \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

genommen nach $x_1 \cdots x_n$ identisch verschwindet, mit andern Worten, wenn $z = F(x_1 \cdots x_n)$ eine gewisse partielle Differentialgleichung identisch befriedigt, die wir mit Anwendung der Abkürzungen:

$$\frac{dU(z,\, x_1 \cdots x_n,\, p_1 \cdots p_n)}{dx_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial U}{\partial z} + \sum_1^n{}_\nu\, p_{\nu i} \frac{\partial U}{\partial p_\nu}$$

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i},\quad p_{\nu i} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_\nu \partial x_i}$$

folgendermassen schreiben können:

$$(18)\qquad D = \sum \pm \frac{dX_1}{dx_1} \cdots \frac{dX_n}{dx_n} = 0\,.$$

Die Determinante D kann nicht identisch verschwinden, denn thäte sie es, so müsste sie jedenfalls dann identisch null werden, wenn man in ihr alle $p_{i\varkappa}\,(i \neq \varkappa)$ gleich Null setzte. Nun nimmt D bei dieser Substitution die Form an:

$$D^0 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial X_1}{\partial z} + p_{11} \dfrac{\partial X_1}{\partial p_1} & \cdot & \dfrac{\partial X_1}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial X_1}{\partial z} + p_{nn} \dfrac{\partial X_1}{\partial p_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial X_n}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial X_n}{\partial z} + p_{11} \dfrac{\partial X_n}{\partial p_1} & \cdot & \dfrac{\partial X_n}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial X_n}{\partial z} + p_{nn} \dfrac{\partial X_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

und D^0 kann offenbar nur dann für alle Werthe von $p_{11} \cdots p_{nn}$ identisch verschwinden, wenn alle n-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial X_1}{\partial z} & \cdot & \dfrac{\partial X_1}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial X_1}{\partial z} & \dfrac{\partial X_1}{\partial p_1} & \cdot & \dfrac{\partial X_1}{\partial p_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial X_n}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial X_n}{\partial z} & \cdot & \dfrac{\partial X_n}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial X_n}{\partial z} & \dfrac{\partial X_n}{\partial p_1} & \cdot & \dfrac{\partial X_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

identisch null sind. Das ist aber unmöglich, denn dann verschwänden auch alle n-reihigen Determinanten der erweiterten Matrix:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_1}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial p_n} & \sum_1^n i\, p_i \frac{\partial X_1}{\partial p_i} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_n}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial p_n} & \sum_1^n i\, p_i \frac{\partial X_n}{\partial p_i} \end{vmatrix}$$

identisch und es wären demzufolge die n Gleichungen:

$$[X_1 f] = 0, \cdots [X_n f] = 0$$

nicht von einander unabhängig, während sie doch (vgl. Satz 6, S. 124) sicher von einander unabhängig sind.

Damit haben wir das

Theorem 18. *Bei einer Berührungstransformation:*

$$(16) \qquad z' = Z(z, x, p), \; x_i' = X_i(z, x, p), \; p_i' = P_i(z, x, p) \quad (i = 1 \cdots n)$$

verwandelt sich ein Gleichungensystem von der besonderen Form:

$$(13) \qquad z - F(x_1 \cdots x_n) = 0, \; p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \; \cdots p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

im Allgemeinen in ein Gleichungensystem von der analogen Form:

$$(13') \quad z' - \Phi(x_1' \cdots x_n') = 0, \; p_1' - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1'} = 0, \; \cdots p_n' - \frac{\partial \Phi}{\partial x_n'} = 0;$$

ausgenommen ist nur der Fall, dass die Function $F(x_1 \cdots x_n)$ *eine gewisse partielle Differentialgleichung* (18) *befriedigt, dann nämlich liefert das aus* (13) *entstehende transformirte Gleichungensystem mindestens eine Relation zwischen* $x_1' \cdots x_n'$ *allein.**)

Wir wollen die vorstehenden Entwickelungen noch etwas vervollständigen und zunächst annehmen, dass die Berührungstransformation (16) aus einer *Punkttransformation des Raumes* $z, x_1 \cdots x_n$ *durch Erweiterung entstanden* ist, dass sie also die Form besitzt:

$$(19) \qquad z' = Z(z, x), \; x_i' = X_i(z, x), \; p_i' = P_i(z, x, p) \quad (i = 1 \cdots n).$$

Hier sind $Z, X_1 \cdots X_n$ beliebige unabhängige Functionen von $z, x_1 \cdots x_n$;

---

*) Lie, Zur Theorie der Berührungstransformationen, Abhandlungen der Kgl. Sächsischen Ges. d. W., Bd. XIV, Nr. XII; vgl. auch die Verhandlungen der Ges. d. Wissenschaften zu Christiania 1872 und 1873, sowie Archiv for Math., Bd. 2, Christiania 1877.

alsdann giebt es ja immer n eindeutig bestimmte Functionen $P_1 \cdots P_n$ von $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$, welche eine Gleichung von der Form:

$$dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

identisch erfüllen (vgl. Theorem 12, S. 124).

Die Punkttransformation, aus welcher (19) durch Erweiterung entstanden ist, lautet:

$$(20) \qquad z' = Z(z, x), \quad x_1' = X_1(z, x), \cdots x_n' = X_n(z, x).$$

Bei Ausführung dieser Punkttransformation geht die Gleichung: $z - F(x_1 \cdots x_n) = 0$ in eine Gleichung: $\Psi(z', x_1' \cdots x_n') = 0$ über, welche offenbar nur dann von z' frei ist, wenn die Gleichung: $z - F = 0$ die Form: $\Omega(X_1 \cdots X_n) = 0$ erhalten kann. Wir sehen daraus, dass eine Berührungstransformation von der besonderen Form (19) das Gleichungensystem (13) dann und nur dann nicht auf die analoge Form (13′) bringt, wenn die Gleichung: $z - F = 0$ sich in der Form: $\Omega(X_1 \cdots X_n) = 0$ darstellen lässt; dieser Fall kann natürlich nur dann eintreten, wenn $X_1 \cdots X_n$ nicht alle von z frei sind.

Das gewonnene Ergebniss könnte man auch durch Betrachtung der Gleichung: $D = 0$ herleiten. Sind nämlich in der Berührungstransformation (19) die Functionen $X_1 \cdots X_n$ der $z, x_1 \cdots x_n$ nicht sämmtlich von z frei, so wird $D = 0$ eine lineare partielle Differentialgleichung *erster* Ordnung für z, deren allgemeinste Lösung durch eine beliebige Relation: $\Omega(X_1 \cdots X_n) = 0$ zwischen $X_1 \cdots X_n$ dargestellt wird. Sind dagegen $X_1 \cdots X_n$ sämmtlich von z frei, so ist D eine nicht identisch verschwindende Function von $x_1 \cdots x_n$ allein und es ist daher nicht möglich $F(x_1 \cdots x_n)$ so zu bestimmen, dass D bei der Substitution: $z = F$ identisch verschwindet.

Betrachten wir jetzt eine *eigentliche* Berührungstransformation:

$$(16) \qquad z' = Z(z, x, p), \quad x_i' = X_i(z, x, p), \quad p_i' = P_i(z, x, p) \qquad (i = 1 \cdots n),$$

also eine, die nicht durch Erweiterung einer Punkttransformation entstanden ist, in welcher also $X_1 \cdots X_n, Z$ nicht sämmtlich von $p_1 \cdots p_n$ frei sind.

Es lässt sich leicht zeigen, dass in diesem Falle schon $X_1 \cdots X_n$ allein nicht sämmtlich von $p_1 \cdots p_n$ frei sind. In der That, sind $X_1 \cdots X_n$ von $p_1 \cdots p_n$ frei, so gilt:

$$(21) \quad [ZX_i] \equiv 0 = \frac{\partial Z}{\partial p_1}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_i}{\partial z}\right) + \cdots + \frac{\partial Z}{\partial p_n}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial X_i}{\partial z}\right) \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Verschwände nun die Determinante:

$$(22) \qquad \sum \pm \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_1}{\partial z}\right) \cdots \left(\frac{\partial X_n}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial X_n}{\partial z}\right)$$

identisch, so wären wegen der Beschaffenheit der X zugleich alle n-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\left|\begin{array}{cccc} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} & \frac{\partial X_1}{\partial z} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} & \frac{\partial X_n}{\partial z} \end{array}\right|$$

identisch null und $X_1 \cdots X_n$ wären nicht von einander unabhängig. Also ist die Determinante (22) von Null verschieden und es ergiebt sich aus (21), dass $\frac{\partial Z}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial Z}{\partial p_n}$ identisch verschwinden: sobald $X_1 \cdots X_n$ von den p frei sind, gilt dasselbe auch von Z. Also:

In einer eigentlichen Berührungstransformation (16), *das heisst in einer solchen, welche nicht durch Erweiterung einer Punkttransformation des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ entstanden ist, sind die Functionen: $X_1 \cdots X_n$ niemals sämmtlich von $p_1 \cdots p_n$ frei.*

Da die Grössen Z, $X_1 \cdots X_n$ als gleichberechtigt aufgefasst werden können, folgt ohne weiteres, dass *bei einer eigentlichen Berührungstransformation höchstens $n-1$ unter den Grössen Z, $X_1 \cdots X_n$ von $p_1 \cdots p_n$ frei sein können.*

Führen wir eine solche eigentliche Berührungstransformation (16) auf das Gleichungensystem:

$$(13) \qquad z - F(x_1 \cdots x_n), \; p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \; \cdots \; p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

aus, so erhalten wir nach dem Früheren dann und nur dann kein Gleichungensystem von der analogen Form:

$$(13') \; z' - \Phi(x_1' \cdots x_n') = 0, \; p_1' - \frac{\partial F}{\partial x_1'} = 0, \; \cdots \; p_n' - \frac{\partial F}{\partial x_n'} = 0,$$

wenn $z = F(x_1 \cdots x_n)$ die partielle Differentialgleichung:

$$(18) \qquad D = \sum \pm \frac{d X_1}{d x_1} \cdots \frac{d X_n}{d x_n} = 0$$

befriedigt.

Wir werden zeigen, dass die Gleichung $D = 0$ jetzt eine Differentialgleichung *zweiter* Ordnung ist.

Zu diesem Behufe betrachten wir die linearen partiellen Differentialgleichungen: $[X_1 f] = 0, \cdots [X_n f] = 0$ oder ausführlich geschrieben:

$$\sum_1^n {}^i \frac{\partial X_\varkappa}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \left(\sum_1^n {}^i p_i \frac{\partial X_\varkappa}{\partial p_i}\right) \frac{\partial f}{\partial z} - \sum_1^n {}^i \left(\frac{\partial X_\varkappa}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial X_\varkappa}{\partial z}\right) \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0$$

$$(\varkappa = 1, 2 \cdots n),$$

welche (Satz 6, S. 124) ein n-gliedriges vollständiges System mit $n+1$ unabhängigen Lösungen $Z, X_1 \cdots X_n$ bilden. Werden diese Lösungen gleich beliebigen Constanten $a, a_1 \cdots a_n$ gesetzt, so erfüllt das hervorgehende Gleichungensystem:

$$Z = a, \quad X_1 = a_1, \cdots X_n = a_n$$

immer die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$. Es ist daher möglich (S. 94 f.) eine solche Reihenfolge $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ der Zahlen $1 \cdots n$ zu wählen, dass die Gleichungen: $Z = a$, $X_1 = a_1, \cdots X_n = a_n$ sich nach:

$$z, \; p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_q}, \quad x_{\alpha_{q+1}} \cdots x_{\alpha_n}$$

auflösen lassen; und da die Grössen $Z, X_1 \cdots X_n$ nicht von den p frei sind, so kann (Satz 2, S. 81) die Zahl q immer grösser als Null gemacht werden. Wir können dabei ohne Beschränkung annehmen, dass unsere Gleichungen sich nach:

$$z, \; p_1 \cdots p_q, \quad x_{q+1} \cdots x_n \qquad (q > 0)$$

auflösen lassen, so dass die $2n+1$ Grössen:

$$Z, \; X_1 \cdots X_n, \quad p_{q+1} \cdots p_n, \quad x_1 \cdots x_q$$

von einander unabhängig sind. Alsdann sind die linearen partiellen Differentialgleichungen: $[X_1 f] = 0, \cdots [X_n f] = 0$ nach den Differentialquotienten:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_q}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_{q+1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial p_n}$$

auflösbar und dementsprechend die Determinante:

$$E_{1 \ldots q} = \sum \pm \frac{\partial X_1}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial X_q}{\partial p_q} \frac{\partial X_{q+1}}{\partial x_{q+1}} + p_{q+1} \frac{\partial X_{q+1}}{\partial z} \cdots \frac{\partial X_n}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial X_n}{\partial z}$$

von Null verschieden.

Also enthält die partielle Differentialgleichung $D = 0$, geordnet nach den Potenzen der Differentialquotienten zweiter Ordnung $p_{i\varkappa}$ jedenfalls ein Glied zweiter Ordnung, nämlich:

$$E_{1 \ldots q} p_{11} \cdots p_{qq},$$

welches nicht identisch verschwindet.

Hiermit ist bewiesen, dass die partielle Differentialgleichung $D = 0$, welche zu einer eigentlichen Berührungstransformation gehört, immer von der zweiten Ordnung ist.

Es sei nunmehr: $z = \overline{F}(x_1 \cdots x_n)$ irgend eine Lösung der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung: $D = 0$.

Da (16) eine Berührungstransformation ist, so haben wir identisch:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial z} - \cdots - P_n \frac{\partial X_n}{\partial z} = \varrho$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_i} - \cdots - P_n \frac{\partial X_n}{\partial x_i} = -\varrho p_i$$
$$\frac{\partial Z}{\partial p_i} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_i} - \cdots - P_n \frac{\partial X_n}{\partial p_i} = 0$$
$$(i = 1 \cdots n),$$

und wir erhalten somit zur Bestimmung von $P_1 \cdots P_n$ die Gleichungen:

$$(23) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x_i} + p_i \dfrac{\partial Z}{\partial z} = P_1 \left(\dfrac{\partial X_1}{\partial x_i} + p_i \dfrac{\partial X_1}{\partial z} \right) + \cdots + P_n \left(\dfrac{\partial X_n}{\partial x_i} + p_i \dfrac{\partial X_n}{\partial z} \right) \\ \dfrac{\partial Z}{\partial p_i} = P_1 \dfrac{\partial X_1}{\partial p_i} + \cdots + P_n \dfrac{\partial X_n}{\partial p_i} \\ (i = 1 \cdots n). \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind, wie wir wissen, mit einander verträglich und nach $P_1 \cdots P_n$ auflösbar; das bleiben sie im Allgemeinen auch dann, wenn man in ihnen die Substitution:

$$(24) \qquad z = \overline{F}(x_1 \cdots x_n), \quad p_1 = \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_1}, \cdots p_n = \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_n}$$

macht, denn: $z = \overline{F}$ ist eine beliebige Lösung der partiellen Differentialgleichung *zweiter* Ordnung: $D = 0$; es ist daher im Allgemeinen keine Lösung derjenigen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche ausdrücken, dass die Gleichungen (23) nicht nach $P_1 \cdots P_n$ auflösbar sind. Hiermit ist bewiesen, dass $P_1 \cdots P_n$ im Allgemeinen bei der Substitution (24) weder unbestimmt noch unendlich werden.

Aus den Gleichungen (23) leiten wir nun die folgenden ab:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial Z}{\partial z} + \sum_1^n{}^{\nu} p_{\nu i} \frac{\partial Z}{\partial p_\nu} = \frac{dZ}{dx_i} = P_1 \frac{dX_1}{dx_i} + \cdots + P_n \frac{dX_n}{dx_i}$$
$$(i = 1 \cdots n).$$

Diese Gleichungen zeigen, dass $z = \overline{F}(x_1 \cdots x_n)$ ausser der Gleichung: $D = 0$ auch noch alle andern partiellen Differentialgleichungen befriedigt, welche durch Nullsetzen der n-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dZ}{dx_1} & \dfrac{dX_1}{dx_1} & \cdot & \dfrac{dX_n}{dx_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{dZ}{dx_n} & \dfrac{dX_1}{dx_n} & \cdot & \dfrac{dX_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

erhalten werden. Hierin liegt, dass sich $x_1 \cdots x_n$ aus je n von den $n+1$ Gleichungen:

$$z' = Z\left(\overline{F},\, x_1 \cdots x_n,\, \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_n}\right)$$

$$x_i' = X_i\left(\overline{F},\, x_1 \cdots x_n,\, \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_n}\right)$$

$$(i = 1 \cdots n)$$

eliminiren lassen. Wir können daher sagen:

Ist die Berührungstransformation (16) *nicht durch Erweiterung einer Punkttransformation entstanden und ist:* $z = \overline{F}(x_1 \cdots x_n)$ *eine Lösung der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:* $D = 0$, *so geht das Gleichungensystem:*

$$z - \overline{F}(x_1 \cdots x_n) = 0,\quad p_1 - \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_1} = 0,\ \cdots\ p_n - \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_n} = 0$$

bei Ausführung der Berührungstransformation (16) *im Allgemeinen in ein Gleichungensystem über, welches eine Relation von der Form:* $z' - \Phi(x_1' \cdots x_n') = 0$ *und ausserdem noch mindestens eine Relation zwischen* $x_1' \cdots x_n'$ *allein liefert.*

Man kann sich nun die Frage vorlegen: Wie muss das Gleichungensystem:

$$(13)\qquad z - F(x_1 \cdots x_n) = 0,\quad p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0,\ \cdots\ p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

beschaffen sein, damit es bei einer vorgelegten Berührungstransformation (16) in ein Gleichungensystem übergeht, das gerade $m > 0$ unabhängige Relationen zwischen $x_1' \cdots x_n'$ allein liefert?

Die Antwort auf diese Frage ist leicht zu geben. Es müssen nämlich für: $z = F(x_1 \cdots x_n)$ mit der Determinante D zugleich alle ihre Unterdeterminanten: $(n-1)$-ten, $\cdots$ $(n-m+1)$-ten Grades identisch verschwinden, ohne dass alle Unterdeterminanten $(n-m)$-ten Grades identisch null werden. Demnach sind alle Gleichungensysteme (13) von der verlangten Beschaffenheit dadurch definirt, dass F gemeinsame Lösung einer Reihe von partiellen Differentialgleichungen sein muss; diese Differentialgleichungen erhält man durch Nullsetzen aller $(n-m+1)$-reihigen Unterdeterminanten von D.

§ 43.

Wir wissen, dass die q Gleichungen:

$$(25)\quad \Omega_1(z, x_1 \cdots x_n, z', x_1' \cdots x_n') = 0,\ \cdots\ \Omega_q(z, x_1 \cdots x_n, z', x_1' \cdots x_n') = 0$$

dann und nur dann eine Berührungstransformation bestimmen, wenn sie eine gewisse auf S. 155 in Satz 2 angegebene Bedingung erfüllen. Jetzt wollen wir zeigen, dass dieser Bedingung ein sehr einfacher begrifflicher Sinn zu Grunde liegt.

Die bewusste Bedingung kommt darauf hinaus, dass die Gleichungen:

$$(26)\quad \begin{cases} \Omega_1(z, x, z', x') = 0, \cdots \Omega_q(z, x, z', x') = 0 \\ p_\varkappa = -\dfrac{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_\varkappa} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_\varkappa}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial z}} \\ (\varkappa = 1 \cdots q) \end{cases}$$

keine von z', $x_1' \cdots x_n'$ und $\lambda_1 \cdots \lambda_q$ freie Relation zwischen z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ allein liefern dürfen. Ertheilt man nun aber in (26) den z', $x_1' \cdots x_n'$ beliebige feste Werthe c, $a_1 \cdots a_n$ und denkt man sich $\lambda_1 \cdots \lambda_q$ aus (26) eliminirt, so stellen die erhaltenen Gleichungen eine Element-M_n des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ dar, nämlich diejenige Element-M_n, welche aus allen ∞^n Elementen der $(n-q)$-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeit:

$$(25')\quad \Omega_1(z, x_1 \cdots x_n, c, a_1 \cdots a_n) = 0, \cdots \Omega_q(z, x_1 \cdots x_n, c, a_1 \cdots a_n) = 0$$

besteht. Sollen daher die Gleichungen (26) keine von den z', x', p' und den λ freie Relation zwischen den z, x, p allein liefern, so ist nothwendig und hinreichend, dass der Inbegriff aller Elemente z, x, p derjenigen Mannigfaltigkeiten, welche durch die Gleichungen (25′) mit den Parametern c, $a_1 \cdots a_n$ dargestellt werden, keine Relation von der Form:

$$\Phi(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0$$

befriedigt. Da es im Raume z, $x_1 \cdots x_n$ ∞^{2n+1} verschiedene Elemente giebt und da jede Mannigfaltigkeit der Schaar (25′) gerade ∞^n Elemente enthält, so ergiebt sich insbesondere, dass die Schaar (25′) aus gerade ∞^{n+1} verschiedenen Mannigfaltigkeiten bestehen muss.

Wir haben daher den

Satz 5. *Die q Gleichungen:*

$$(25)\quad \Omega_1(z, x_1 \cdots x_n, z', x_1' \cdots x_n') = 0, \cdots \Omega_q(z, x_1 \cdots x_n, z', x_1' \cdots x_n') = 0$$

bestimmen dann und nur dann eine Berührungstransformation, wenn sie, sobald man z', $x_1' \cdots x_n'$ als willkürliche Parameter deutet, ∞^{n+1} verschiedene Mannigfaltigkeiten des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ darstellen, deren Elemente z, x, p keine Gleichung von der Form: $\Phi(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0$ befriedigen.

Bestimmen die Gleichungen (25) eine Berührungstransformation und deutet man in ihnen z, $x_1 \cdots x_n$ als Parameter, so stellen sie natürlich ∞^{n+1} Mannigfaltigkeiten des Raumes z', $x_1' \cdots x_n'$ dar, deren Elemente z', x', p' keine Relation von der Form: $\Psi(z', x', p')$ erfüllen. Also können wir den Satz aussprechen:

Satz 6. *Stellen die q Gleichungen:*

$$\Omega_1(z, x_1 \cdots x_n, c', a_1' \cdots a_n') = 0, \cdots \Omega_q(z, x_1 \cdots x_n, c', a_1' \cdots a_n') = 0$$

mit den Parametern c', $a_1' \cdots a_n'$ ∞^{n+1} verschiedene Mannigfaltigkeiten des

Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ dar, deren Elemente $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ keine Relation von der Form: $\Phi(z, x, p) = 0$ befriedigen, so stellen die q Gleichungen:

$$\Omega_1(c, a_1 \cdots a_n, z', x_1' \cdots x_n') = 0, \cdots \Omega_q(c, a_1 \cdots a_n, z', x_1' \cdots x_n') = 0$$

ihrerseits ∞^{n+1} Mannigfaltigkeiten des Raumes $z', x_1' \cdots x_n'$ dar, deren Elemente $z', x_1' \cdots x_n', p_1' \cdots p_n'$ keine Relation von der Form: $\Psi(z', x', p') = 0$ befriedigen.

Betrachten wir nun die Berührungstransformation, welche durch q vorgelegte Gleichungen:

$$(25) \quad \Omega_1(z, x_1 \cdots x_n, z', x_1' \cdots x_n') = 0, \cdots \Omega_q(z, x_1 \cdots x_n, z', x_1' \cdots x_n') = 0$$

bestimmt ist, etwas näher.

Bei unsrer Berührungstransformation geht jede Element-M_n in eine Element-M_n über, insbesondere also auch die Element-M_n, welche aus den ∞^n Elementen des Punktes:

$$z = c, \quad x_1 = a_1, \cdots x_n = a_n$$

besteht. Denken wir uns unsre Berührungstransformation auf diese ∞^n Elemente ausgeführt, so erhalten wir ∞^n Elemente $z', x_1' \cdots x_n', p_1' \cdots p_n'$, welche die q Gleichungen:

$$\Omega_\varkappa(c, a_1 \cdots a_n, z', x_1' \cdots x_n') = 0 \qquad (\varkappa = 1 \cdots q)$$

aber sonst keine von $p_1' \cdots p_n'$ freie Gleichung erfüllen. Die eben geschriebenen Gleichungen bestimmen daher die Punktmannigfaltigkeit, deren Elemente die ∞^n transformirten Elemente z', x', p' sind.

Eine ganz ähnliche Ueberlegung zeigt, dass die Element-M_n, welche aus den Elementen der Punktmannigfaltigkeit:

$$\Omega_\varkappa(z, x_1 \cdots x_n, c', a_1' \cdots a_n') = 0 \qquad (\varkappa = 1 \cdots q)$$

besteht, bei unsrer Berührungstransformation in die Element-M_n übergeht, welche von allen Elementen des Punktes:

$$z' = c', \quad x_1' = a_1', \cdots x_n' = a_n'$$

gebildet wird.

Diese Ergebnisse können wir kurz folgendermassen aussprechen:

Satz 7. *Ist eine Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ durch die q unabhängigen Gleichungen:*

$$\Omega_\varkappa(z, x_1 \cdots x_n, z', x_1' \cdots x_n') = 0 \qquad (\varkappa = 1 \cdots q)$$

definirt, so führt sie den Punkt: $z = c, x_1 = a_1, \cdots x_n = a_n$ in die $(n - q)$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit:

$$\Omega_\varkappa(c, a_1 \cdots a_n, z', x_1' \cdots x_n') = 0 \qquad (\varkappa = 1 \cdots q)$$

über und die $(n - q)$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit:

$$\Omega_\varkappa(z, x_1 \cdots x_n, c', a_1' \cdots a_n') = 0 \qquad (\varkappa = 1 \cdots q)$$

in den Punkt: $z' = c', x_1' = a_1', \cdots x_n' = a_n'$.

Im Raume $z, x_1 \cdots x_n$ seien ∞^{n+1} Element-M_n gegeben, deren Elemente keine Relation von der Form: $\Phi(z, x, p) = 0$ erfüllen; die entsprechenden ∞^{n+1} Punktmannigfaltigkeiten mögen durch die Gleichungen:

$$(27)\quad W_1(z, x_1 \cdots x_n, c', a_1' \cdots a_n') = 0, \cdots W_q(z, x_1 \cdots x_n, c', a_1' \cdots a_n') = 0$$

dargestellt werden.

Wir wollen nun auf irgend eine Weise jeder dieser ∞^{n+1} Mannigfaltigkeiten einen Punkt z', $x_1' \cdots x_n'$ derart zuordnen, dass zwei verschiedenen unsrer ∞^{n+1} Mannigfaltigkeiten stets auch zwei verschiedene Punkte entsprechen, das heisst, wir setzen:

$$(28)\quad z' = \gamma(c', a_1' \cdots a_n'), \quad x_i' = \alpha_i(c', a_1' \cdots a_n') \quad (i = 1 \cdots n),$$

wo die Functionen γ, $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ ganz beliebig und nur der Beschränkung unterworfen sind, dass die Gleichungen (28) nach c', $a_1' \cdots a_n'$ auflösbar sein müssen:

$$(29)\quad c' = C(z', x_1' \cdots x_n'), \quad a_i' = A_i(z', x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n).$$

Unter diesen Voraussetzungen sei:

$$W_\varkappa(z, x_1 \cdots x_n, C, A_1 \cdots A_n) \equiv \Omega_\varkappa(z, x_1 \cdots x_n, z', x_1' \cdots x_n') \quad (\varkappa = 1 \cdots q),$$

dann stellen die Gleichungen:

$$(30)\quad \Omega_\varkappa(z, x_1 \cdots x_n, z', x_1' \cdots x_n') = 0 \quad (\varkappa = 1 \cdots q),$$

wenn man in ihnen z', $x_1' \cdots x_n'$ als Parameter deutet, genau dieselbe Schaar von Mannigfaltigkeiten des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ dar, wie die Gleichungen (27), also ebenfalls ∞^{n+1} Mannigfaltigkeiten, deren Elemente keine Relation von der Form: $\Phi(z, x, p) = 0$ befriedigen. Infolgedessen definiren die Gleichungen (30) nach Satz 5, S. 167 eine Berührungstransformation des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ und diese Berührungstransformation führt nach Satz 7, S. 168 die Mannigfaltigkeit:

$$\Omega_\varkappa(z, x_1 \cdots x_n, \gamma, \alpha_1 \cdots \alpha_n) = 0 \quad (\varkappa = 1 \cdots q)$$

in den Punkt: $z' = \gamma$, $x_1' = \alpha_1$, $\cdots x_n' = \alpha_n$ über oder, was auf dasselbe hinauskommt, sie verwandelt jede Mannigfaltigkeit:

$$(27)\quad W_\varkappa(z, x_1 \cdots x_n, c', a_1' \cdots a_n') = 0 \quad (\varkappa = 1 \cdots q)$$

in den ihr zugeordneten Punkt:

$$(28)\quad z' = \gamma(c', a_1' \cdots a_n'), \quad x_i' = \alpha_i(c', a_1' \cdots a_n') \quad (i = 1 \cdots n).$$

Es lässt sich zeigen, dass die eben gefundene Berührungstransformation die einzige ist, welche jede Mannigfaltigkeit (27) in den ihr zugeordneten Punkt (28) überführt. In der That, jede Berührungstransformation, welche diese Ueberführung leistet, führt zugleich die Mannigfaltigkeit:

$$\Omega_\varkappa(z, x_1 \cdots x_n, \gamma, \alpha_1 \cdots \alpha_n) = 0 \quad (\varkappa = 1 \cdots q)$$

in den Punkt: $z' = \gamma$, $x_1' = \alpha_1$, $\cdots x_n' = \alpha_n$ über. Hieraus geht hervor, dass die Gleichungen der betreffenden Berührungstransformation zwischen $z, x_1 \cdots x_n, z', x_1' \cdots x_n'$ allein nur die Relationen:

$$(30) \qquad \Omega_\varkappa(z, x_1 \cdots x_n, z', x_1' \cdots x_n') = 0 \qquad (\varkappa = 1 \cdots q)$$

und sonst keine Relationen weiter liefern. Wir wissen aber, dass es nur *eine* Berührungstransformation giebt, bei welcher $z, x_1 \cdots x_n, z', x_1' \cdots x_n'$ blos durch die Relationen (30) verknüpft sind, eben die Berührungstransformation, welche durch die Gleichungen (30) definirt ist.

Damit haben wir den

Satz 8. *Wählt man irgend ∞^{n+1} Punktmannigfaltigkeiten des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ aus, deren Elemente $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ keine Relation von der Form: $\Phi(z, x, p) = 0$ befriedigen, und ordnet man diesen ∞^{n+1} Mannigfaltigkeiten nach irgend einem Gesetze die ∞^{n+1} Punkte des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ derart zu, dass jeder Mannigfaltigkeit ein Punkt entspricht und zwei verschiedenen Mannigfaltigkeiten auch zwei verschiedene Punkte entsprechen, so giebt es immer eine aber auch nur eine Berührungstransformation, welche jene ∞^{n+1} Mannigfaltigkeiten derart in die Punkte des Raumes überführt, dass jede Mannigfaltigkeit in den ihr zugeordneten Punkt übergeht.*

Führt man auf zwei Element-M_n des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$, welche etwa ∞^m Elemente gemein haben, eine Berührungstransformation dieses Raumes aus, so erhält man stets wieder zwei Element-M_n, welche ∞^m Elemente gemein haben. Von dieser Bemerkung werden wir eine einfache, aber wichtige Anwendung machen.

Wir betrachten irgend eine $(n-m)$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit M_{n-m} und einen auf ihr gelegenen Punkt P. Als Element-M_n aufgefasst, haben die M_{n-m} und der Punkt P, wie man sich leicht überzeugt, gerade ∞^m verschiedene Elemente gemein. Führen wir daher auf die M_{n-m} und auf den Punkt P eine Berührungstransformation aus, so erhalten wir zwei Element-M_n, welche ebenfalls ∞^m Elemente gemein haben. Das gilt für jeden Punkt der M_{n-m}. Also:

Führt man auf die ∞^{n-m} Punkte einer $(n-m)$-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeit M_{n-m} des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ eine Berührungstransformation dieses Raumes aus, so erhält man ∞^{n-m} Element-M_n, welche diejenige Element-M_n umhüllen, in welche die M_{n-m} übergeht.

Wir können umgekehrt alle Element-M_n finden, welche bei einer vorgelegten Berührungstransformation in Element-M_n übergehen, die als Punktgebilde gerade $(n-m)$-fach ausgedehnt sind. Bei der betreffenden Berührungstransformation gehen ja, wie wir wissen, ∞^{n+1} verschiedene Element-M_n in die Punkte des Raumes über. Wählen wir nun unter diesen ∞^{n+1} Element-M_n nach irgend einem Gesetze ∞^{n-m} verschiedene aus, so müssen dieselben eine Element-M_n umhüllen, die bei der Berührungstransformation in eine Element-M_n übergeht, welche als Punktgebilde $(n-m)$-fach ausgedehnt ist. In dieser Weise findet man alle derartigen Element-M_n.

Die vorstehenden Betrachtungen entsprechen genau den analytischen Entwickelungen des § 42; sie zeigen überdies, dass man alle Lösungen der damals auftretenden partiellen Differentialgleichungen ohne Integration finden kann. Denn ist irgend eine Berührungstransformation:

$$(31) \qquad z' = Z(z, x, p), \quad x_i' = X_i(z, x, p), \quad p_i' = P_i(z, x, p) \quad (i = 1 \cdots n)$$

vorgelegt, so kann man aus ihr stets durch blose Eliminationen die Gleichungen:

$$\Omega_\varkappa(z, x_1 \cdots x_n, z', x_1' \cdots x_n') = 0 \qquad (\varkappa = 1 \cdots q)$$

finden, welche sie zwischen z, $x_1 \cdots x_n$, z', $x_1' \cdots x_n'$ allein liefert. Hat man die Gleichungen: $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_q = 0$ gefunden, so kann man nach Satz 7, S. 168 sofort diejenigen Mannigfaltigkeiten angeben, welche bei der Berührungstransformation (31) in die Punkte des Raumes übergehen. Wie wir eben gesehen haben, braucht man aber nur diese Mannigfaltigkeiten zu kennen, um im Stande zu sein, alle Mannigfaltigkeiten anzugeben, welche bei der Berührungstransformation (31) in Punktmannigfaltigkeiten von gegebener Dimensionenzahl übergehen.

Kapitel 7.

Das Poissonsche Theorem, die Jacobische Identität und die Jacobische Integrationsmethode.

Wir stellen in diesem Kapitel einige wichtige von *Poisson* und *Jacobi* herrührende Theorien zusammen, welche im Folgenden häufig Anwendung finden.

§ 44.

Von dem Klammersymbole:

$$(\varphi, \psi) = \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \frac{\partial \psi}{\partial p_\nu} \right)$$

gilt der wichtige

Satz 1. *Sind u, v, w drei ganz beliebige Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, so besteht die Identität:*

$$(1) \qquad ((u, v)\, w) + ((v, w)\, u) + ((w, u)\, v) \equiv 0.$$

Wir beweisen die Gültigkeit dieser Identität zunächst für den besonderen Fall, dass die Function w sich auf eine der Grössen x_i oder p_i reducirt.

Aus

$$(u, v) \equiv \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{\partial u}{\partial p_\nu} \frac{\partial v}{\partial x_\nu} - \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \frac{\partial v}{\partial p_\nu} \right)$$

ergiebt sich:

$$((u, v)\, x_i) \equiv \frac{\partial (u, v)}{\partial p_i} \equiv \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial p_\nu \partial p_i} \frac{\partial v}{\partial x_\nu} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu \partial p_i} \frac{\partial v}{\partial p_\nu} \right) +$$

$$+ \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{\partial u}{\partial p_\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial x_\nu \partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial p_\nu \partial p_i} \right),$$

also bekommen wir:

$$((u, v)\, x_i) \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial p_i}, v\right) + \left(u, \frac{\partial v}{\partial p_i}\right)$$
$$\equiv ((u, x_i)\, v) + (u\, (v, x_i)),$$

das aber ist eben die Identität (1) für den besonderen Fall: $w = x_i$.

Genau in derselben Weise sieht man ein, dass die Identität (1) auch für $w = p_i$ richtig ist.

Um nun die Allgemeingültigkeit von (1) zu beweisen, verfahren wir so:

Ist:

$$A(f) = \sum_1^m {}_\mu\, \eta_\mu(y_1 \cdots y_m) \frac{\partial f}{\partial y_\mu}$$

$$B(f) = \sum_1^m {}_\mu\, \zeta_\mu(y_1 \cdots y_m) \frac{\partial f}{\partial y_\mu},$$

so gilt die bekannte Gleichung:

$$A(B(f)) - B(A(f)) = \sum_1^m {}_\mu\, (A(\zeta_\mu) - B(\eta_\mu)) \frac{\partial f}{\partial y_\mu}$$

Setzen wir daher:

$$(u, w) = \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{\partial u}{\partial p_\nu} \frac{\partial w}{\partial x_\nu} - \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \frac{\partial w}{\partial p_\nu}\right) = A(w)$$

$$(v, w) = \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{\partial v}{\partial p_\nu} \frac{\partial w}{\partial x_\nu} - \frac{\partial v}{\partial x_\nu} \frac{\partial w}{\partial p_\nu}\right) = B(w),$$

so kommt:

$$(u(v, w)) - (v(u, w)) = A(B(w)) - B(A(w))$$
$$\equiv \sum_1^n {}_\nu \left\{\left(u, \frac{\partial v}{\partial p_\nu}\right) - \left(v, \frac{\partial u}{\partial p_\nu}\right)\right\} \frac{\partial w}{\partial x_\nu} -$$
$$- \sum_1^n {}_\nu \left\{\left(u, \frac{\partial v}{\partial x_\nu}\right) - \left(v, \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right)\right\} \frac{\partial w}{\partial p_\nu}.$$

Nun aber ist, wie wir oben gesehen haben:

$$\left(u, \frac{\partial v}{\partial p_\nu}\right) - \left(v, \frac{\partial u}{\partial p_\nu}\right) \equiv \frac{\partial (u, v)}{\partial p_\nu}$$

und natürlich auch:

$$\left(u, \frac{\partial v}{\partial x_\nu}\right) - \left(v, \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right) \equiv \frac{\partial (u, v)}{\partial x_\nu},$$

also ergiebt sich:

$$(u(v, w)) - (v(u, w)) \equiv \sum_1^n {}_\nu \left\{\frac{\partial (u, v)}{\partial p_\nu} \frac{\partial w}{\partial x_\nu} - \frac{\partial (u, v)}{\partial x_\nu} \frac{\partial w}{\partial p_\nu}\right\}$$

oder:

(1') $$(u(v, w)) - (v(u, w)) \equiv ((u, v)\, w),$$

wovon die Identität:

(1) $$((u, v)\, w) + ((v, w)\, u) + ((w, u)\, v) \equiv 0$$

nur eine andere Schreibart ist.

Die wichtige Identität (1) ist zuerst von *Jacobi* bewiesen worden und zwar in der soeben entwickelten Weise. Wir nennen sie daher kurz die *Jacobische Identität.*

§ 45.

Aus der Jacobischen Identität folgt unmittelbar das berühmte Theorem, welches nach seinem Entdecker *Poisson* benannt ist und welches folgendermassen lautet:

Satz 2. *Sind v und w zwei beliebige Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung:*

$$(u, f) = \sum_{1}^{n} {}_{\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial p_\nu} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} - \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \frac{\partial f}{\partial p_\nu} \right) = 0,$$

so ist stets auch (v, w) eine Lösung dieser Differentialgleichung.

In der That, unter den Voraussetzungen des Satzes ist:

$$(u, v) \equiv 0, \quad (u, w) \equiv 0,$$

folglich ergiebt sich aus der Identität (1), dass der Ausdruck $((v, w)\, u) \equiv -(u(v, w))$ identisch verschwindet, womit der Satz bewiesen ist.

Poisson hat sein Theorem bereits im Anfange dieses Jahrhunderts veröffentlicht; es ist demnach älter als die Jacobische Identität, die erst aus *Jacobi*'s Nachlasse veröffentlicht worden ist.

§ 46.

Es seien $u_1 \cdots u_r$ irgend r solche unabhängige Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, welche paarweise in der Beziehung $(u_i, u_\varkappa) \equiv 0$ stehen.

Betrachten wir nun die r linearen partiellen Differentialgleichungen:

(2) $$A_1(f) = (u_1, f) = 0, \cdots A_r(f) = (u_r, f) = 0,$$

so erkennen wir zunächst, dass dieselben von einander unabhängig sind, denn aus der Unabhängigkeit der Functionen $u_1 \cdots u_r$ von einander folgt augenscheinlich, dass nicht alle r-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial p_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_r}{\partial x_n} & \frac{\partial u_r}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial u_r}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden und darin liegt eben die Unabhängigkeit der Gleichungen (2).

Weiter ergiebt sich:

$$A_\varkappa(A_j(f)) - A_j(A_\varkappa(f)) \equiv (u_\varkappa(u_j, f)) - (u_j(u_\varkappa, f)),$$

hier aber erhält die rechte Seite wegen der Identität (1) oder (1′) die Form: $((u_\varkappa, u_j) f)$, sie verschwindet also identisch und wir bekommen:

$$A_\varkappa(A_j(f)) - A_j(A_\varkappa(f)) \equiv 0 \qquad (\varkappa, j = 1 \cdots r).$$

Es bilden daher die Gleichungen (2) ein r-gliedriges vollständiges System. Somit gilt der

Satz 3. *Stehen die r unabhängigen Functionen $u_1 \cdots u_r$ der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ paarweise in den Beziehungen: $(u_i, u_\varkappa) \equiv 0$, so bilden die r linearen partiellen Differentialgleichungen:*

$$(u_1, f) = 0, \cdots (u_r, f) = 0 \tag{2}$$

ein r-gliedriges vollständiges System.

Das vollständige System (2) besitzt nach der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen gerade $2n - r$ unabhängige Lösungen; r unabhängige Lösungen sind insbesondere $u_1 \cdots u_r$ selbst.

Ist nun u_{r+1} irgend eine von $u_1 \cdots u_r$ unabhängige Lösung des Systems (2), so bilden nach dem eben bewiesenen Satze die Gleichungen:

$$(u_1, f) = 0, \cdots (u_r, f) = 0, \quad (u_{r+1}, f) = 0 \tag{3}$$

ein $(r + 1)$-gliedriges vollständiges System mit $2n - r - 1$ unabhängigen Lösungen, von denen $r + 1$ unabhängige bekannt sind, nämlich $u_1 \cdots u_{r+1}$. Ist u_{r+2} eine von $u_1 \cdots u_{r+1}$ unabhängige Lösung des Systems (3), so bilden wiederum die Gleichungen:

$$(u_1, f) = 0, \cdots (u_{r+2}, f) = 0$$

ein $(r + 2)$-gliedriges vollständiges System und so weiter.

Demnach kann man durch Bestimmung je einer Lösung eines r-gliedrigen, eines $(r + 1)$-gliedrigen, $\cdots$ eines $(n - 1)$-gliedrigen vollständigen Systems $n - r$ Functionen $u_{r+1} \cdots u_n$ finden, welche unter einander und von $u_1 \cdots u_r$ unabhängig und so beschaffen sind, dass alle Ausdrücke $(u_i, u_\varkappa)$ $(i, \varkappa = 1 \cdots n)$ identisch verschwinden. Die n Gleichungen:

$$(u_1, f) = 0, \cdots (u_n, f) = 0$$

bilden dann natürlich ein n-gliedriges vollständiges System mit n unabhängigen Lösungen, eben $u_1 \cdots u_n$.

Sind $u_{r+1} \cdots u_n$ gefunden, so kann man nach Satz 11, S. 129 durch eine Quadratur eine Function $\Omega(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n)$ bestimmen, welche die n Gleichungen:

$$[z + \Omega(x, p), u_i] = 0 \qquad (i = 1 \cdots n)$$

identisch befriedigt und es liefern alsdann, wie in Kap. 4, S. 101 f. auseinandergesetzt wurde, die Gleichungen:

$$u_1(x, p) = a_1, \cdots u_r(x, p) = a_r, \quad u_{r+1}(x, p) = C_1, \cdots u_n(x, p) = C_{n-r}$$
$$z + \Omega(x, p) = C$$

mit den $n + 1$ willkürlichen Constanten $a_1 \cdots a_r$, $C_1 \cdots C_{n-r}$, C eine vollständige Lösung für eine jede unter den r partiellen Differentialgleichungen:

$$u_1(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_1, \cdots u_r(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_r;$$

das gilt für alle Werthe der Constanten $a_1 \cdots a_r$.

Wir wollen dieses Ergebniss für den besonders wichtigen Fall $r = 1$ aussprechen, also für den Fall einer einzigen partiellen Differentialgleichung von der Form:

$$u(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a.$$

Satz 4. *Jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Form:*

$$u(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a$$

besitzt vollständige Lösungen. Zur Bestimmung einer solchen vollständigen Lösung gelangt man durch Integration mehrerer vollständiger Systeme.

Die in diesem Paragraphen entwickelte Integrationstheorie ist eine *Verallgemeinerung* von *Jacobi's* Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. *Jacobi* führt die *unnöthige Beschränkung* ein, dass die n Functionen $u_1 \cdots u_r \cdots u_n$ in Bezug auf $p_1 \cdots p_n$ unabhängig sein sollen.*)

Die obenstehenden Entwickelungen geben einen neuen und einfacheren Beweis eines auf Seite 97 aufgestellten Satzes. Sind nämlich $u_1 \cdots u_n$ unabhängige Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, welche paarweise in der Beziehung: $(u_i, u_\varkappa) = 0$ stehen, so bilden die Gleichungen:

$$(u_1, f) = 0, \cdots (u_n, f) = 0$$

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, März 1873.

ein n-gliedriges vollständiges System mit gerade n unabhängigen Lösungen, nämlich $u_1 \cdots u_n$. Hiermit haben wir den

Satz 5. *Stehen m unabhängige Functionen $u_1 \cdots u_m$ von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ paarweise in den Beziehungen $(u_i, u_\varkappa) = 0$, so ist m nicht grösser als n.*

Abtheilung II.

Invariantentheorie der Berührungstransformationen.

Führt man auf gegebene Functionen: $F_1 \cdots F_m$ der Veränderlichen z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine Berührungstransformation:

$$(A) \qquad z' = Z(z, x, p),\; x_i' = X_i(z, x, p),\; p_i' = P_i(z, x, p) \quad (i = 1 \cdots n)$$

in diesen Veränderlichen aus, so erhält man gewisse neue Functionen: $\Phi_1 \cdots \Phi_m$ der neuen Veränderlichen: z', $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$.

Man kann sich nun die Aufgabe stellen, diejenigen Eigenschaften des gegebenen Functionensystems: $F_1 \cdots F_m$ zu finden, welche gegenüber allen Berührungstransformationen von der Form (A) invariant bleiben, oder, was auf dasselbe hinauskommt: Man kann nach den Kriterien fragen, vermöge deren sich entscheiden lässt, ob es eine Berührungstransformation (A) giebt, welche die m vorgelegten Functionen: $F_1 \cdots F_m$ von den z, x, p bezüglich in m gegebene Functionen: $\Psi_1 \cdots \Psi_m$ von den z', x', p' überführt.

Die Erledigung dieser wichtigen Aufgabe ist eines der Hauptergebnisse der gegenwärtigen Abtheilung. Wir gehen dabei, weil es so am zweckmässigsten ist, folgendermassen zu Werke:

Zunächst beschränken wir uns auf den Fall, dass die m vorgelegten Functionen: $F_1 \cdots F_m$ blos von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ abhängen und suchen die invarianten Eigenschaften dieses Functionensystems gegenüber allen Berührungstransformationen von der besonderen Form:

$$(B) \qquad z' = z + \Omega(x, p),\; x_i' = X_i(x, p),\; p_i' = P_i(x, p) \quad (i = 1 \cdots n),$$

das heisst, wir suchen die Kriterien dafür, ob sich m gegebene Functionen $F_1 \cdots F_m$ von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ durch eine Berührungstransformation (B) in m gegebene Functionen $\Psi_1 \cdots \Psi_m$ von $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$ überführen lassen.

Sodann treffen wir eine noch weitergehende Beschränkung, indem wir die entsprechende Untersuchung für solche Functionen von $x_1 \cdots x_n$,

$p_1 \cdots p_n$, welche in den p *homogen* sind, und für *homogene* Berührungstransformation durchführen; wir denken uns also m in den p homogene Functionen: $F_1 \cdots F_m$ von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ vorgelegt und suchen die Kriterien dafür, ob sich $F_1 \cdots F_m$ durch eine homogene Berührungstransformation:

(C) $$x_i' = X_i(x, p),\ p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

in m gegebene in den p' homogene Functionen: $\Psi_1 \cdots \Psi_m$ von $x_1' \cdots x_n$, $p_1' \cdots p_n'$ überführen lassen.

Durch die Lösung dieser letzten Aufgabe ist dann die zu Anfang gestellte allgemeine Aufgabe von selbst erledigt.

Das eben Gesagte giebt in grossen Zügen den Weg an, welchen wir in der gegenwärtigen Abtheilung verfolgen. Aber die Erledigung der erwähnten allgemeinen Aufgabe ist keineswegs das Einzige, was in dieser Abtheilung geleistet wird. Im Gegentheil, die Hülfstheorien, welche zur Erreichung dieses einen Zieles entwickelt werden, besitzen auch an und für sich schon eine hervorragende Bedeutung. Als besonders wichtig ist zu nennen der Begriff „*Functionengruppe*," dessen Zusammenhang mit dem allgemeinen Begriffe „*Transformationsgruppe*" später (in Abtheilung 3) erörtert wird.*)

Erwähnt möge noch werden, dass das allgemeine Problem, welches in dieser Abtheilung für beliebige Functionen von z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ erledigt wird, noch einer Verallgemeinerung fähig ist. Zu dieser Verallgemeinerung gelangt man, wenn man die Grössen $p_1 \cdots p_n$ als die Ableitungen:

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots p_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

von z nach $x_1 \cdots x_n$ deutet. Es liegt nämlich nahe, sich m Functionen $F_1 \cdots F_m$ von z, $x_1 \cdots x_n$ und von den Ableitungen erster, zweiter, $\cdots s$-ter Ordnung des z gegeben zu denken und zu fragen, unter welchen Bedingungen es eine Berührungstransformation in z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ giebt, welche $F_1 \cdots F_m$ in m vorgelegte Functionen $\Psi_1 \cdots \Psi_m$ von z', $x_1' \cdots x_n'$ und von den Ableitungen des z' nach $x_1' \cdots x_n'$

*) Die in dieser Abtheilung dargestellte Invariantentheorie der Berührungstransformationen wurde begründet in den Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania 1872 und 1873 durch die Abhandlungen „Zur Invariantentheorie der Berührungstransformationen", „Ueber partielle Differentialgleichungen erster Ordnung" und „Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, in denen die unbekannte Function explicite vorkommt" von Sophus Lie. Der Inhalt dieser Arbeiten ist ohne wesentliche Aenderung reproducirt in den Mathematischen Annalen, Bd. VIII, 1874, in der Abhandlung: „Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen".

überführt. Man kann sogar noch weiter gehen und statt der beiden *Functionen*systeme: $F_1 \cdots F_m$ und $\Psi_1 \cdots \Psi_m$ sich zwei *Gleichungen*systeme gegeben denken und nun die Frage stellen, ob und wann das eine Gleichungensystem durch eine Berührungstransformation in das andere übergeführt werden kann.*)

Derartige allgemeinere Aufgaben zu erledigen, liegt nicht in dem Plane dieses Werkes; dieselben sollen daher hier nicht behandelt werden.

Kapitel 8.

Functionengruppen und ihre ausgezeichneten Functionen.

In Uebereinstimmung mit dem, was wir in der Einleitung der gegenwärtigen Abtheilung gesagt haben, beginnen wir damit, nach allen invarianten Eigenschaften zu fragen, welche ein System von m Functionen $F_1 \cdots F_m$ der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ gegenüber allen Berührungstransformationen von der Gestalt:

$$z' = z + \Omega(x, p), \; x_i' = X_i(x, p), \; p_i' = P_i(x, p) \quad (i = 1 \cdots n) \tag{1}$$

besitzt. Bei der Inangriffnahme dieser Frage werden wir sogleich auf den wichtigen Begriff *Functionengruppe* geführt, dessen Theorie in diesem und im nächsten Kapitel entwickelt werden soll. Auf Grund der gewonnenen Theorie werden wir dann in Kapitel 10 ohne Schwierigkeit die invarianten Eigenschaften eines beliebigen Functionensystems: $F_1(x, p) \cdots F_m(x, p)$ angeben können.

§ 47.

Es seien $F_1 \cdots F_m$ irgend welche Functionen der Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$. Führen wir auf $F_1 \cdots F_m$ eine Berührungstransformation von der Gestalt (1) aus, so erhalten wir gewisse neue Functionen: $\Phi_1 \cdots \Phi_m$ der neuen Veränderlichen: $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$. Wegen der Eigenschaften des Klammersymbols wird zu gleicher Zeit (s. S. 131):

$$(F_\mu F_\nu)_{xp} = (\Phi_\mu \Phi_\nu)_{x'p'} \quad (\mu, \nu = 1 \cdots m).$$

Hierin liegt, dass jeder der Ausdrücke $(F_\mu F_\nu)_{xp}$ allen Berührungstransformationen von der Form (1) gegenüber eine *Invariante des Functionensystems*: $F_1 \cdots F_m$ ist.

---

*) Lie, Kurzes Resumé mehrerer neuer Theorien, Verh. d. Ges. d. W. zu Christiania, 3. Mai 1872; vgl. auch Math. Ann. Bd. VIII, S. 217; Bd. XVI, S. 526; Bd. XXIV.

Was die Beschaffenheit der Ausdrücke $(F_\mu F_\nu)_{xp}$ anbetrifft, so sind zwei verschiedene Fälle denkbar: Entweder nämlich lassen sich alle $(F_\mu F_\nu)_{xp}$ als Functionen von $F_1 \cdots F_m$ allein darstellen oder eine solche Darstellung ist nicht möglich. Liegt der zweite Fall vor, so denken wir uns die Functionen $(F_\mu F_\nu)_{xp}$ zu den Functionen $F_1 \cdots F_m$ hinzugefügt und erhalten so ein neues Functionensystem: $F_1 \cdots F_m$, $F_{m+1} \cdots F_q$. Lassen sich jetzt immer noch nicht alle $(F_i F_\varkappa)$ $(i, \varkappa = 1 \cdots q)$ durch $F_1 \cdots F_q$ allein ausdrücken, so fügen wir alle Functionen $(F_\pi F_\varrho)$ $(\pi = 1 \cdots q;\ \varrho = m+1 \cdots q)$ zu $F_1 \cdots F_q$ hinzu und erhalten abermals ein neues Functionensystem. In dieser Weise fahren wir fort. Weil es nun blos $2n$ von einander unabhängige Functionen der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ giebt, so müssen wir auf dem angegebenen Wege schliesslich nach einer endlichen Anzahl von Operationen auf ein Functionensystem: $F_1 \cdots F_r$ $(r \geqq m)$ stossen, welches so beschaffen ist, dass alle $(F_i F_\varkappa)$ $(i, \varkappa = 1 \cdots r)$ sich als Functionen von $F_1 \cdots F_r$ allein darstellen lassen.

Es liegt daher nahe sich zunächst auf die Betrachtung solcher Functionensysteme: $F_1 \cdots F_r$ zu beschränken, für welche bereits alle $(F_\mu F_\nu)$ $(\mu, \nu = 1 \cdots r)$ durch $F_1 \cdots F_r$ allein ausgedrückt werden können. Zweckmässig wird man dabei noch die Voraussetzung einführen, dass $F_1 \cdots F_r$ von einander unabhängig sind; denn wären zum Beispiel blos $F_1 \cdots F_l$ von einander unabhängig und $F_{l+1} \cdots F_r$ Functionen von $F_1 \cdots F_l$ allein, so würden alle $(F_i F_\varkappa)$ $(i, \varkappa = 1 \cdots m)$ sich durch $F_1 \cdots F_l$ allein ausdrücken lassen, so dass man $F_{l+1} \cdots F_r$ jedenfalls zunächst ganz ausser Betracht lassen könnte.

Wir denken uns demzufolge r unabhängige Functionen $F_1 \cdots F_r$ von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ vorgelegt, welche so beschaffen sind, dass alle $(F_\mu F_\nu)_{xp}$ sich als Functionen von $F_1 \cdots F_r$ allein darstellen lassen:

$$(F_\mu F_\nu)_{xp} = w_{\mu\nu}(F_1 \cdots F_r) \qquad (\mu, \nu = 1 \cdots r).$$

Sind $U(F_1 \cdots F_r)$ und $V(F_1 \cdots F_r)$ irgend zwei Functionen von $F_1 \cdots F_r$ allein, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}(UV)_{xp} &= \sum_{\mu\nu}^{1 \ldots r} \frac{\partial U}{\partial F_\mu} \frac{\partial V}{\partial F_\nu} (F_\mu F_\nu)_{xp} \\ &= \sum_{\mu\nu}^{1 \ldots r} \frac{\partial U}{\partial F_\mu} \frac{\partial V}{\partial F_\nu} w_{\mu\nu}(F_1 \cdots F_r),\end{aligned}$$

es wird also $(UV)_{xp}$ stets wieder eine Function von $F_1 \cdots F_r$ allein. Wir sehen hieraus, dass unter den gemachten Voraussetzungen der Inbegriff aller Functionen von $F_1 \cdots F_r$ die folgende charakteristische

Eigenschaft besitzt: combinirt man irgend zwei Functionen, welche dem Inbegriff angehören, durch Klammeroperation, so erhält man stets wieder eine dem Inbegriff angehörige Function.

Statt nun das Functionensystem $F_1 \cdots F_r$ an und für sich zu untersuchen, werden wir uns zunächst mit dem Inbegriffe aller Functionen von $F_1 \cdots F_r$ beschäftigen. Wir bezeichnen diesen Inbegriff von Functionen als eine *Functionengruppe* und nennen diese Functionengruppe *r-gliedrig*, weil sie durch die r von einander unabhängigen Functionen: $F_1 \cdots F_r$ bestimmt ist. Also:

*Sind r unabhängige Functionen $F_1 \cdots F_r$ der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ so beschaffen, dass jedes $(F_\mu F_\nu)_{xp}$ $(\mu, \nu = 1 \cdots r)$ sich als Function von $F_1 \cdots F_r$ allein darstellen lässt, so bestimmen sie eine r-gliedrige Functionengruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$. Diese Functionengruppe selbst besteht aus dem Inbegriff aller Functionen von $F_1 \cdots F_r$.**)

Bestimmen die unabhängigen Functionen: $F_1 \cdots F_r$ eine r-gliedrige Functionengruppe, so sagen wir wohl auch kurz: *die Functionengruppe: $F_1 \cdots F_r$.* Andererseits lassen wir zuweilen das Wort „Functionen" weg und reden einfach von „Gruppen" statt von „Functionengruppen", doch thun wir das nur so lange, als nicht von Transformationsgruppen die Rede ist.

Wir stellen zunächst einige naheliegende Bemerkungen über Functionengruppen zusammen.

Bestimmen $F_1 \cdots F_r$ eine r-gliedrige Functionengruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ und sind $\Phi_1 \cdots \Phi_r$ irgend welche unabhängige Functionen von $F_1 \cdots F_r$, so lassen sich alle $(\Phi_i \Phi_\varkappa)_{xp}$ zunächst durch $F_1 \cdots F_r$ und demnach auch durch $\Phi_1 \cdots \Phi_r$ allein ausdrücken. In Folge dessen bestimmen $\Phi_1 \cdots \Phi_r$ ihrerseits eine r-gliedrige Functionengruppe, aber augenscheinlich ebendieselbe Functionengruppe, welche $F_1 \cdots F_r$ bestimmen. Die beiden Functionensysteme: $F_1 \cdots F_r$ und $\Phi_1 \cdots \Phi_r$ müssen daher als zwei verschiedene Darstellungsformen einer und derselben Functionengruppe aufgefasst werden.

Aus diesem Grunde *bezeichnen wir jedes System von r unabhängigen Functionen einer r-gliedrigen Functionengruppe als eine Form der betreffenden Gruppe.* Solcher Formen kann die Gruppe natürlich unbegränzt viele erhalten.

Bilden die r unabhängigen Functionen $F_1 \cdots F_r$ ein r-gliedriges

---

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, Decbr. 1872 und März 1873.

Involutionssystem, so sind alle $(F_i F_\varkappa) \equiv 0$ und $F_1 \cdots F_r$ bestimmen daher eine r-gliedrige Functionengruppe. Es ist klar, dass alle Functionen dieser Gruppe paarweise in Involution liegen und dass jede Form der Gruppe ein r-gliedriges Involutionssystem ist.

Hat man s Functionen $F_1 \cdots F_s$ der x, p, welche so beschaffen sind, dass jedes $(F_i F_\varkappa)$ $(i, \varkappa = 1 \cdots s)$ sich durch $F_1 \cdots F_s$ allein ausdrücken lässt, giebt es aber unter diesen s Functionen blos r von einander unabhängige, etwa $F_1 \cdots F_r$, während $F_{r+1} \cdots F_s$ Functionen von $F_1 \cdots F_r$ allein sind, so leuchtet ein, dass $F_1 \cdots F_r$ eine r-gliedrige Functionengruppe bestimmen, welcher auch $F_{r+1} \cdots F_s$ angehören.

Bestimmen $F_1 \cdots F_r$ eine r-gliedrige Functionengruppe und l unabhängige Functionen der F, etwa:

$$\varphi_1 = \mathfrak{F}_1(F_1 \cdots F_r), \cdots \varphi_l = \mathfrak{F}_l(F_1 \cdots F_r)$$

eine l-gliedrige, so nennen wir die l-gliedrige Functionengruppe eine *Untergruppe* der r-gliedrigen.

Liegen zwei Functionengruppen: $F_1 \cdots F_r$ und $\Psi_1 \cdots \Psi_l$ in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ vor, so ist denkbar, dass es Functionen von $x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ giebt, welche beiden Gruppen gleichzeitig angehören. Wir wollen annehmen, dass es gerade h unabhängige Functionen: $\chi_1 \cdots \chi_h$ von dieser Beschaffenheit giebt, so dass also jede Function, welche sowohl der Gruppe: $F_1 \cdots F_r$, als der Gruppe: $\Psi_1 \cdots \Psi_l$ angehört, sich als Function von $\chi_1 \cdots \chi_h$ allein darstellen lässt. Dann gehört auch jede Function $(\chi_\varkappa \chi_j)$ den vorgelegten Functionengruppen an und lässt sich in Folge dessen durch $\chi_1 \cdots \chi_h$ allein ausdrücken, das heisst: $\chi_1 \cdots \chi_h$ bestimmen ihrerseits eine h-gliedrige Functionengruppe. Dieses Ergebniss drücken wir folgendermassen aus:

Satz 1. *Die gemeinsamen Functionen zweier Functionengruppen bilden ihrerseits eine Functionengruppe.*

Es seien $F_1 \cdots F_r$ solche unabhängige Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, welche eine r-gliedrige Functionengruppe bestimmen, welche daher in Beziehungen von der Form:

$$(F_\mu F_\nu)_{xp} = w_{\mu\nu}(F_1 \cdots F_r) \qquad (\mu, \nu = 1 \cdots r)$$

stehen. Führt man nun auf $F_1 \cdots F_r$ eine Berührungstransformation von der Form:

$$z' = z + \Omega(x, p),\ x_i' = X_i(x, p),\ p_i' = P_i(x, p) \tag{1}$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

aus, so bekommt man r unabhängige Functionen $\Psi_1 \cdots \Psi_r$ der x', p', welche wegen des Verhaltens des Klammersymbols in den Beziehungen:

$$(F_\mu F_\nu)_{xp} = (\Psi_\mu \Psi_\nu)_{x'p'} = w_{\mu\nu}(\Psi_1 \cdots \Psi_r) \quad (\mu, \nu = 1 \cdots r)$$

stehen; zugleich geht jede Function von $F_1 \cdots F_r$ in dieselbe Function von $\Psi_1 \cdots \Psi_r$ über. Hierin liegt der

Satz 2. *Jede r-gliedrige Functionengruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ verwandelt sich bei Ausführung einer Berührungstransformation von der Form:*

$$z' = z + \Omega(x, p), \; x_i' = X_i(x, p), \; p_i' = P_i(x, p) \quad (i = 1 \cdots n) \tag{1}$$

stets wieder in eine r-gliedrige Functionengruppe. Sind $F_1(x, p) \cdots F_r(x, p)$ solche unabhängige Functionen, welche die ursprüngliche Functionengruppe bestimmen, so gehen sie bei Ausführung der Berührungstransformation (1) *in r unabhängige Functionen $\Psi_1 \cdots \Psi_r$ von $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$ über, welche die transformirte Functionengruppe bestimmen; dabei drückt sich jedes $(\Psi_\mu \Psi_\nu)_{x'p'}$ genau so durch $\Psi_1 \cdots \Psi_r$ aus wie das entsprechende $(F_\mu F_\nu)_{xp}$ durch $F_1 \cdots F_r$.*

Bilden die r unabhängigen Functionen $F_1(x, p) \cdots F_r(x, p)$ ein Involutionssystem, ist also jedes $(F_\mu F_\nu)_{xp} \equiv 0$, so bestimmen sie, wie schon oben bemerkt wurde, eine r-gliedrige Functionengruppe. Wenden wir auf diese Functionengruppe den eben ausgesprochenen Satz an, so erkennen wir, dass jedes r-gliedrige Involutionssystem in den x, p bei jeder Berührungstransformation von der Form (1) wieder in ein r-gliedriges Involutionssystem übergeht.

Da eine r-gliedrige Functionengruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ durch jede Berührungstransformation von der Form (1) in eine r-gliedrige Functionengruppe in den Veränderlichen $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$ übergeführt wird, so ist es ganz naturgemäss und dem in der Einleitung Gesagten entsprechend, wenn wir uns die Frage vorlegen: *Welche Eigenschaften einer beliebigen r-gliedrigen Functionengruppe bleiben allen Berührungstransformationen von der Form* (1) *gegenüber invariant?*

Diese Frage kann auch folgendermassen ausgesprochen werden: *Gegeben sind irgend zwei r-gliedrige Functionengruppen, die eine durch r unabhängige Functionen $F_1 \cdots F_r$ von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, die andere durch r unabhängige Functionen $\Phi_1 \cdots \Phi_r$ von $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$, gesucht werden die Kriterien dafür, ob die erste Functionengruppe durch eine Berührungstransformation von der Form* (1) *in die zweite übergeführt werden kann oder nicht.* Dabei ist das „übergeführt werden“

natürlich so zu verstehen, dass bei der fraglichen Berührungstransformation der Inbegriff aller Functionen von $F_1 \cdots F_r$ in den Inbegriff aller Functionen von $\Phi_1 \cdots \Phi_r$ übergehen soll oder, was auf dasselbe hinauskommt: *es soll durch die betreffende Berührungstransformation jede der r Functionen: $F_1 \cdots F_r$ in eine Function von $\Phi_1 \cdots \Phi_r$ übergeführt werden.*

Das eben aufgestellte Problem ist von ausserordentlicher Wichtigkeit; wir werden in den folgenden Entwickelungen des gegenwärtigen Kapitels seine Erledigung vorbereiten, die Erledigung selbst aber soll erst im nächsten Kapitel gegeben werden. Nachher wenden wir uns wieder zu dem Probleme, von welchem wir ausgegangen sind, zur Untersuchung der invarianten Eigenschaften, welche ein beliebiges Functionensystem: $F_1(x, p) \cdots F_m(x, p)$ gegenüber allen Berührungstransformationen von der Form (1) besitzt.

§ 48.

Die Grundlage der Theorie der Functionengruppen bildet das wichtige

Theorem 19. *Bestimmen r unabhängige Functionen $u_1 \cdots u_r$ von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige Functionengruppe, so bilden die r linearen partiellen Differentialgleichungen:*

$$(u_1 f) = 0, \quad \cdots \quad (u_r f) = 0$$

*in den unabhängigen Veränderlichen $x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ ein r-gliedriges vollständiges System.**)

Um dasselbe zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass die r eben geschriebenen Differentialgleichungen von einander unabhängig sind; wären sie es nämlich nicht, so würden alle Determinanten von der Form:

$$\sum \pm \frac{\partial u_1}{\partial \pi_1} \cdots \frac{\partial u_r}{\partial \pi_r}$$

identisch verschwinden, unter $\pi_1 \cdots \pi_r$ irgend r von den $2n$ Veränderlichen x, p verstanden, folglich wären $u_1 \cdots u_r$ entgegen der Voraussetzung des Theorems nicht von einander unabhängig. Ferner setzen wir:

$$(u_\mu f) = A_\mu(f) \qquad (\mu = 1 \cdots r),$$

dann wird:

---

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, Decbr. 1872 und März 1873.

$$A_\mu(A_\nu(f)) - A_\nu(A_\mu(f)) = (u_\mu(u_\nu f)) - (u_\nu(u_\mu f))$$

oder wegen der Jacobischen Identität:

$$A_\mu(A_\nu(f)) - A_\nu(A_\mu(f)) = ((u_\mu u_\nu) f).$$

Nun aber bestehen Gleichungen von der Gestalt:

$$(u_\mu u_\nu) = w_{\mu\nu}(u_1 \cdots u_r) \qquad (\mu,\ \nu = 1 \cdots r); \tag{2}$$

es kommt also:

$$A_\mu(A_\nu(f)) - A_\nu(A_\mu(f)) = (w_{\mu\nu} f)$$
$$= \sum_1^r {}_j \frac{\partial w_{\mu\nu}}{\partial w_j} A_j(f).$$

Damit ist das Theorem bewiesen.

Wir denken uns nun in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ irgend r unabhängige Functionen: $u_1 \cdots u_r$ vorgelegt, die eine r-gliedrige Functionengruppe bestimmen. Das r-gliedrige vollständige System:

$$(u_1 f) = 0, \cdots (u_r f) = 0$$

hat dann $2n - r$ unabhängige Lösungen. Sind $v_1 \cdots v_{2n-r}$ derartige Lösungen, so lässt sich jede beliebige andere Lösung als Function von $v_1 \cdots v_{2n-r}$ allein darstellen. Aus dem Poisson'schen Theoreme (s. S. 173) folgt weiter, dass zugleich mit $v_1 \cdots v_{2n-r}$ auch jedes $(v_\varkappa v_j)$ eine Lösung des vollständigen Systems ist. Demnach sind alle $(v_\varkappa v_j)$ Functionen von $v_1 \cdots v_{2n-r}$ allein und $v_1 \cdots v_{2n-r}$ bestimmen ihrerseits eine $(2n - r)$-gliedrige Functionengruppe.

Wenden wir auf die Functionengruppe: $v_1 \cdots v_{2n-r}$ dieselben Betrachtungen an, wie soeben auf die Gruppe: $u_1 \cdots u_r$, so kommen wir auf die Gruppe: $u_1 \cdots u_r$ zurück; denn das $(2n - r)$-gliedrige vollständige System:

$$(v_1 f) = 0, \cdots (v_{2n-r} f) = 0$$

hat $2n - (2n - r) = r$ unabhängige Lösungen und zwar sind augenscheinlich $u_1 \cdots u_r$ solche Lösungen und jede andere Lösung eine Function von $u_1 \cdots u_r$ allein.

Diese Ergebnisse können wir folgendermassen zusammenfassen:

Theorem 20. *Zu einer jeden r-gliedrigen Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ gehört eine ganz bestimmte $(2n - r)$-gliedrige Functionengruppe, welche zu der r-gliedrigen in einem vollständigen Reciprocitätsverhältnisse steht. Jede dieser beiden Gruppen wird von allen*

*Functionen gebildet, welche mit allen Functionen der andern Gruppe in Involution liegen.**)

Wir bezeichnen in der Folge zwei solche Functionengruppen als *reciproke Functionengruppen*, zuweilen nennen wir auch jede von beiden die *Polargruppe* der andern.

Es liegt auf der Hand, dass zwei reciproke Functionengruppen bei jeder Berührungstransformation von der Gestalt:

$$z' = Az + \Omega(x, p), \; x_i' = X_i(x, p), \; p_i' = P_i(x, p) \quad {\scriptstyle (i = 1 \cdots n)}$$

wieder in zwei reciproke Functionengruppen übergehen.

Ist die r-gliedrige Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ insbesondere ein Involutionssystem, verschwinden also alle $(u_i u_\varkappa)$ identisch, so besitzt das r-gliedrige vollständige System:

$$(u_1 f) = 0, \; \cdots \; (u_r f) = 0$$

mindestens r unabhängige Lösungen, denn $u_1 \cdots u_r$ sind in diesem Falle Lösungen des Systems. Daraus folgt, dass $2n - r \geqq r$ ist, es ergiebt sich also für die Gliederzahl r des Involutionssystems die Bedingung: $r \leqq n$; das heisst, es gilt der

Satz 3. *Ein Involutionssystem in den* $2n$ *Veränderlichen* $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ *enthält nie mehr als* n *unabhängige Functionen.*

Diesen Satz haben wir bereits in Kapitel 4, S. 97 (vgl. auch Kap. 7, S. 176) gefunden.

Wir wollen noch bemerken, dass das Theorem 19 sich vervollständigen lässt.

Man kann sich nämlich die Frage stellen, unter welchen Bedingungen r Gleichungen von der Form:

$$B_1(f) = (\varphi_1 f)_{xp} = 0, \; \cdots \; B_r(f) = (\varphi_r f)_{xp} = 0$$

ein r-gliedriges vollständiges System in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ bilden.

Zunächst ist klar, dass die r Functionen $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ von einander unabhängig sein müssen, denn wären sie es nicht, so sähe man wie oben ein, dass auch die Gleichungen: $B_1(f) = 0$, $\cdots B_r(f) = 0$ nicht von einander unabhängig wären. Sind nun $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ unabhängige Functionen, aber keine solchen, welche eine r-gliedrige Functionengruppe bestimmen, so giebt es unter den

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, 1872 und 1873.

Functionen $(\varphi_i \varphi_\varkappa)_{xp}$ mindestens eine von $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ unabhängige; es giebt somit unter den Gleichungen:

$$B_i(B_\varkappa(f)) - B_\varkappa(B_i(f)) = ((\varphi_i\varphi_\varkappa)f) = 0$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

mindestens eine, welche von: $B_1 f = 0, \cdots B_r f = 0$ unabhängig ist; hieraus aber folgt, dass die Gleichungen: $B_1 f = 0, \cdots B_r f = 0$ unter der gemachten Voraussetzung kein r-gliedriges vollständiges System bilden. Demnach erhalten wir unter Berücksichtigung des Theorems 19 den

Satz 4. *Die r Gleichungen:*

$$(\varphi_1 f)_{xp} = 0, \cdots (\varphi_r f)_{xp} = 0$$

bilden nur dann ein r-gliedriges vollständiges System, wenn die r Functionen $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ der Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ von einander unabhängig sind und eine r-gliedrige Functionengruppe bestimmen.

Sind $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ unabhängige Functionen einer r-gliedrigen Functionengruppe, so bilden die linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(\varphi_1 f) = 0, \cdots (\varphi_r f) = 0$$

ein vollständiges System, welches die Eigenschaft besitzt, dass gleichzeitig mit ψ und χ auch $(\psi\chi)$ eine Lösung darstellt.

Man kann sich nun die Aufgabe stellen, in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ *alle* vollständigen Systeme:

$$A_1 f = 0, \cdots A_r f = 0$$

zu finden, welche diese Eigenschaft besitzen.

Sind $u_1 \cdots u_{2n-r}$ ein System Lösungen eines solchen vollständigen Systems, so bestehen Relationen von der Form:

$$(u_i u_\varkappa) = w_{i\varkappa}(u_1 \cdots u_{2n-r});$$

es bestimmen daher die u eine $(2n - r)$-gliedrige Functionengruppe. Sind $v_1 \cdots v_r$ unabhängige Functionen der zugehörigen Polargruppe, so lassen sich die u nach S. 184 definiren als die Lösungen des vollständigen Systems:

$$(v_1 f) = 0, \cdots (v_r f) = 0,$$

welches in Folge dessen mit dem Systeme: $A_1 f = 0, \cdots A_r f = 0$ äquivalent ist. Hiermit haben wir den

Satz 5. *Besitzt ein r-gliedriges vollständiges System in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ die Eigenschaft, dass der aus zwei Lösungen ψ und χ des Systems gebildete Klammerausdruck $(\psi\chi)$ stets wieder eine Lösung darstellt, so kann es die Form:*

$$(v_1 f) = 0, \cdots (v_r f) = 0$$

erhalten); es bestimmen dabei* $v_1 \cdots v_r$ *eine* r*-gliedrige Functionengruppe.*

§ 49.

Eine Functionengruppe kann Functionen enthalten, welche auch der reciproken Gruppe angehören und daher beiden Gruppen gemeinsam sind. Solche Functionen nennen wir *ausgezeichnete Functionen***) der ersten Gruppe. In dieser Definition liegt, dass die ausgezeichneten Functionen einer Functionengruppe zugleich auch die ausgezeichneten Functionen der reciproken Gruppe sind; zugleich ergiebt sich aus Satz 1, S. 181, dass die ausgezeichneten Functionen einer Functionengruppe ihrerseits eine Functionengruppe bilden.

Analytisch gesehen sind die ausgezeichneten Functionen einer r-gliedrigen Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ diejenigen Functionen U von $u_1 \cdots u_r$ allein, welche das r-gliedrige vollständige System:

$$(u_1 U) = 0, \cdots (u_r U) = 0$$

in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ befriedigen. Wir können daher sagen:

Die ausgezeichneten Functionen einer Functionengruppe sind diejenigen Functionen der Gruppe, welche mit allen Functionen der Gruppe in Involution liegen.

Hieraus folgt, dass die ausgezeichneten Functionen einer Functionengruppe paarweise in Involution liegen, dass also h unabhängige ausgezeichnete Functionen stets ein h-gliedriges Involutionssystem bilden.

Wird eine Functionengruppe in den Veränderlichen x, p durch eine Berührungstransformation von der Form (1) in eine Functionengruppe in den x', p' übergeführt, so verwandelt sich offenbar zu gleicher Zeit jede ausgezeichnete Function der ursprünglichen Functionengruppe in eine ausgezeichnete Function der neuen Gruppe. *Demnach ist die Anzahl der von einander unabhängigen ausgezeichneten Functionen einer Functionengruppe in den* x, p *gegenüber allen Berührungstransformationen von der Gestalt* (1) *invariant.*

---

*) Lie, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Bd. 9, Christiania 1884. Für den Fall $r = 1$ war der erste Theil des Satzes 5 schon früher von Herrn *Korkine* aufgestellt worden.

**) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, 1872 und 1873. Später wird gezeigt, dass es naturgemäss ist, die ausgezeichneten Functionen einer Functionengruppe als die *invarianten* Functionen derselben zu bezeichnen.

Ist $F(x, p)$ eine ausgezeichnete Function der r-gliedrigen Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$, so gehört es nicht blos der Gruppe $u_1 \cdots u_r$ an, sondern auch der reciproken Gruppe: $v_1 \cdots v_{2n-r}$, es lässt sich daher sowohl durch $u_1 \cdots u_r$ als durch $v_1 \cdots v_{2n-r}$ ausdrücken:

$$F(x, p) = U(u_1 \cdots u_r) = V(v_1 \cdots v_{2n-r}). \tag{3}$$

Mit andern Worten: jeder ausgezeichneten Function der Gruppe: $u_1 \cdots u_r$ entspricht eine Relation zwischen den Functionen der beiden reciproken Gruppen: $u_1 \cdots u_r$ und $v_1 \cdots v_{2n-r}$ und zwar eine Relation von der besonderen Form (3). Sind $F_1(x, p) \cdots F_m(x, p)$ unabhängige ausgezeichnete Functionen der Gruppe: $u_1 \cdots u_r$, so sind natürlich auch die m ihnen entsprechenden Relationen:

$$F_\varkappa(x, p) = U_\varkappa(u_1 \cdots u_r) = V_\varkappa(v_1 \cdots v_{2n-r})$$
$$(\varkappa = 1 \cdots m)$$

von einander unabhängig.

Wir wollen nun umgekehrt annehmen, dass die r unabhängigen Functionen: $u_1 \cdots u_r$ einer r-gliedrigen Functionengruppe mit den $2n - r$ unabhängigen Functionen: $v_1 \cdots v_{2n-r}$ der Polargruppe durch gerade m unabhängige Relationen:

$$\Psi_\varkappa(u_1 \cdots u_r, v_1 \cdots v_{2n-r}) = 0 \qquad (\varkappa = 1 \cdots m) \tag{4}$$

verknüpft sind. Wir werden zeigen, dass die beiden reciproken Gruppen in diesem Falle gerade m von einander unabhängige Functionen gemein haben, dass also jede von ihnen gerade m unabhängige ausgezeichnete Functionen enthält.

Die $2n$ Functionen $u_1 \cdots u_r$, $v_1 \cdots v_{2n-r}$, unter denen es nach unsrer Voraussetzung gerade $2n - m$ von einander unabhängige giebt, sind augenscheinlich so beschaffen, dass sich jedes $(u_i, u_\varkappa)$, $(u_i, v_\varkappa)$, $(v_i, v_\varkappa)$ durch sie allein ausdrücken lässt, sie gehören daher zufolge einer auf S. 181 gemachten Bemerkung sämmtlich einer gewissen $(2n - m)$-gliedrigen Functionengruppe an. Nun müssen sich die m Gleichungen (4) sowohl nach m von den u, als nach m von den v auflösen lassen, sonst wären ja entweder die v oder die u nicht von einander unabhängig; wir können daher annehmen, dass eine Auflösung sowohl nach $u_1 \cdots u_m$ als nach $v_1 \cdots v_m$ möglich ist. Dann wird die $(2n - m)$-gliedrige Functionengruppe, welcher alle $2n$ Functionen u, v angehören, sowohl durch die $2n - m$ unabhängigen Functionen: $u_1 \cdots u_r$, $v_{m+1} \cdots v_{2n-r}$ als durch die $2n - m$ unabhängigen: $u_{m+1} \cdots u_r$, $v_1 \cdots v_{2n-r}$ bestimmt sein.

Zu der eben besprochenen $(2n - m)$-gliedrigen Functionengruppe gehört eine m-gliedrige Polargruppe. Jede Function dieser Polargruppe befriedigt die Gleichungen:

$$(u_1, f) = 0, \cdots (u_r, f) = 0$$

und gehört daher der Gruppe: $v_1 \cdots v_{2n-r}$ an, zugleich aber befriedigt sie die Gleichungen:

$$(v_1, f) = 0, \cdots (v_{2n-r}, f) = 0,$$

gehört demnach auch der Gruppe: $u_1 \cdots u_r$ an. Damit ist bewiesen, dass alle Functionen der in Rede stehenden m-gliedrigen Polargruppe den beiden Gruppen: $u_1 \cdots u_r$ und $v_1 \cdots v_{2n-r}$ gemeinsam sind, dass also jede dieser beiden Gruppen unter den gemachten Voraussetzungen m unabhängige ausgezeichnete Functionen enthält. Das aber wollten wir beweisen.

Nunmehr wissen wir Folgendes: Wenn die r-gliedrige Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ gerade m unabhängige ausgezeichnete Functionen enthält, so sind $u_1 \cdots u_r$, $v_1 \cdots v_{2n-r}$ jedenfalls durch m unabhängige Relationen von der besonderen Form:

$$U_\varkappa(u_1 \cdots u_r) = V_\varkappa(v_1 \cdots v_{2n-r})$$
$$(\varkappa = 1 \cdots m)$$

verknüpft. Sind andererseits $u_1 \cdots u_r$, $v_1 \cdots v_{2n-r}$ durch gerade m unabhängige Relationen verknüpft, so enthält die Gruppe $u_1 \cdots u_r$ jedenfalls m unabhängige ausgezeichnete Functionen. Wir erkennen daher sofort, dass das folgende Theorem besteht:

Theorem 21. *Eine r-gliedrige Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ mit der $(2n - r)$-gliedrigen Polargruppe: $v_1 \cdots v_{2n-r}$ enthält stets genau so viele unabhängige ausgezeichnete Functionen, als es unabhängige Relationen zwischen den $2n$ Functionen: $u_1 \cdots u_r$, $v_1 \cdots v_{2n-r}$ giebt. Die betreffenden Relationen lassen sich immer auf die Form:*

$$U_\varkappa(u_1 \cdots u_r) = V_\varkappa(v_1 \cdots v_{2n-r})$$
$$(\varkappa = 1, 2 \cdots)$$

*bringen; sie sagen eben aus, dass die ausgezeichneten Functionen einer Functionengruppe zugleich die ausgezeichneten Functionen der reciproken Gruppe sind.**)

Wieviele unabhängige ausgezeichnete Functionen enthält eine vorgelegte r-gliedrige Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$?

Soll $F(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n)$ eine ausgezeichnete Function der Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass es die r Gleichungen:

---

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, März 1873.

$$A_1(F) = (u_1, F) = 0, \cdots A_r(F) = (u_r, F) = 0$$

identisch befriedigt und dass es ausserdem eine Function von $u_1 \cdots u_r$ allein ist. Hieraus ergiebt sich, dass die ausgezeichneten Functionen der Gruppe: $u_1 \cdots u_r$ diejenigen Functionen U von $u_1 \cdots u_r$ sind, welche den r linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(5) \qquad A_\varkappa(U) = \sum_1^r {}_j (u_\varkappa u_j)\frac{\partial U}{\partial u_j} = \sum_1^r {}_j w_{\varkappa j}(u_1 \cdots u_r)\frac{\partial U}{\partial u_j} = 0 \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

in den unabhängigen Veränderlichen $u_1 \cdots u_r$ identisch genügen.

Was die Gleichungen (5) betrifft, so kommt alles auf die Beschaffenheit der Determinante:

$$(6) \qquad \mathrm{D} = \begin{vmatrix} (u_1 u_1) & \cdot & \cdot & (u_1 u_r) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (u_r u_1) & \cdot & \cdot & (u_r u_r) \end{vmatrix}$$

an. Wir wollen voraussetzen, dass diese Determinante nebst allen ihren Unterdeterminanten $(r - 1)$-ten, $\cdots$ $(r - m + 1)$-ten Grades verschwindet, während von den $(r - m)$-reihigen Unterdeterminanten jedenfalls eine, etwa:

$$\Sigma \pm (u_1 u_1) \cdots (u_{r-m} u_{r-m})$$

nicht identisch verschwindet.

Unter diesen Voraussetzungen sind die $r - m$ Gleichungen: $A_1(U) = 0, \cdots A_{r-m}(U) = 0$ von einander unabhängig, während: $A_{r-m+1}(U) \cdots A_r(U)$ sich in der Form:

$$A_{r-m+\mu}(U) \equiv \chi_{\mu 1}(u_1 \cdots u_r) . A_1(U) + \cdots + \chi_{\mu, r-m}(u_1 \cdots u_r) . A_{r-m}(U) \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

darstellen lassen. Nun aber stehen die linken Seiten der Gleichungen (5) nach S. 184 paarweise in den Beziehungen:

$$A_\mu(A_\nu(U)) - A_\nu(A_\mu(U)) = \sum_1^r {}_j \frac{\partial w_{\mu\nu}(u_1 \cdots u_r)}{\partial u_j} . A_j(U) \qquad (\mu, \nu = 1 \cdots r);$$

denkt man sich hier auf der rechten Seite überall $A_{r-m+1}(U) \cdots A_r(U)$ durch $A_1(U) \cdots A_{r-m}(U)$ ausgedrückt, so erkennt man sofort, dass die $r - m$ Gleichungen: $A_1(U) = 0, \cdots A_{r-m}(U) = 0$ ein $(r - m)$-gliedriges vollständiges System bilden. Dieses vollständige System besitzt gerade m unabhängige Lösungen, es ergiebt sich also, dass unter den gemachten Voraussetzungen die r Gleichungen (5) gerade m unabhängige Lösungen gemein haben und dass die vorgelegte

Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ gerade m unabhängige ausgezeichnete Functionen enthält.

Wir haben somit das

Theorem 22. *Die r-gliedrige Functionengruppe $u_1 \cdots u_r$ in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ enthält dann und nur dann gerade m und nicht mehr unabhängige ausgezeichnete Functionen, wenn die Determinante: $\Sigma \pm (u_1 u_1) \cdots (u_r u_r)$ und alle ihre Unterdeterminanten $(r-1)$-ten, $\cdots$ $(r-m+1)$-ten Grades identisch verschwinden, während die Unterdeterminanten $(r-m)$-ten Grades nicht alle identisch null sind; in diesem Falle reduciren sich die r linearen partiellen Differentialgleichungen:*

$$(5) \qquad A_\varkappa(U) = \sum_1^r {}_j (u_\varkappa u_j) \frac{\partial U}{\partial u_j} = \sum_1^r {}_j w_{\varkappa j}(u_1 \cdots u_r) \frac{\partial U}{\partial u_j} = 0 \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

in den Veränderlichen $u_1 \cdots u_r$ auf ein $(r-m)$-gliedriges vollständiges System, dessen Lösungen die ausgezeichneten Functionen der Gruppe $u_1 \cdots u_r$ sind.)*

Man kann demnach immer durch ausführbare Operationen entscheiden, wieviele unabhängige ausgezeichnete Functionen eine vorgelegte Functionengruppe enthält, dagegen erfordert die Bestimmung dieser ausgezeichneten Functionen selbst im Allgemeinen Integration.

Bemerkenswerth ist, dass eine Functionengruppe mit ungerader Gliederzahl r stets mindestens eine ausgezeichnete Function enthält; die Determinante D ist nämlich schief, ist daher r ungerade, so verschwindet sie stets identisch und die Gleichungen (5) haben mindestens eine Lösung gemein.

Wir knüpfen hieran noch den

Satz 6. *Enthält eine r-gliedrige Functionengruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ $r-1$ unabhängige ausgezeichnete Functionen, so liegen alle ihre Functionen paarweise in Involution und die Gruppe enthält nur ausgezeichnete Functionen.*

Der Beweis ist sehr einfach. Sind nämlich $U_1 \cdots U_{r-1}$ die bewussten ausgezeichneten Functionen und V irgend eine von $U_1 \cdots U_{r-1}$ unabhängige Function der Gruppe, so ist nach der Voraussetzung des Satzes:

$$(U_i U_\varkappa) = 0, \quad (U_i V) = 0 \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r),$$

also bilden $U_1 \cdots U_{r-1}$, V ein r-gliedriges Involutionssystem und es liegen wirklich alle Functionen der Gruppe paarweise in Involution.

---

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, März 1873.

§ 50.

Es bezeichne wie bisher $u_1 \cdots u_r$ eine r-gliedrige Functionengruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, jedoch wollen wir nicht wie bisher die Functionen $u_1 \cdots u_r$ selbst als bekannt voraussetzen, sondern uns nur ein $(2n - r)$-gliedriges vollständiges System:

$$A_\varkappa(u) = \sum_1^n {}_i \left\{ \alpha_{\varkappa i}(x, p) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \mathfrak{a}_{\varkappa i}(x, p) \frac{\partial u}{\partial p_i} \right\} = 0 \tag{7}$$
$$(\varkappa = 1 \cdots 2n - r)$$

gegeben denken, welches $u_1 \cdots u_r$ zu unabhängigen Lösungen hat, so dass die Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ aus dem Inbegriff aller Lösungen des vollständigen Systems (7) besteht.

Zu der r-gliedrigen Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ gehört, wie wir wissen, eine ganz bestimmte $(2n - r)$-gliedrige Polargruppe: $v_1 \cdots v_{2n-r}$, welche aus dem Inbegriff aller Lösungen des r-gliedrigen vollständigen Systems:

$$(u_1 v) = 0, \cdots (u_r v) = 0 \tag{8}$$

besteht. Bei den gemachten Voraussetzungen sind nun freilich $u_1 \cdots u_r$ unbekannt; wir werden aber zeigen, dass es nichtsdestoweniger stets möglich ist, ohne Integration ein r-gliedriges vollständiges System anzugeben, welches genau dieselben Lösungen besitzt wie das unbekannte System (8).

Unter $\pi_1 \cdots \pi_{2n}$ möge eine solche Reihenfolge der Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ verstanden werden, dass die $2n - r$ Gleichungen (7) nach $\frac{\partial u}{\partial \pi_{r+1}} \cdots \frac{\partial u}{\partial \pi_{2n}}$ auflösbar sind. Denken wir uns die betreffende Auflösung ausgeführt und die gefundenen Werthe der genannten Ableitungen von u in (uv) eingesetzt, so erhalten wir einen Ausdruck von der Form:

$$(uv) = B_1(v) \cdot \frac{\partial u}{\partial \pi_1} + \cdots + B_r(v) \cdot \frac{\partial u}{\partial \pi_r}, \tag{9}$$

wo $B_1(v) \cdots B_r(v)$ bekannte lineare homogene Functionen der Ableitungen von v sind.

Die Gleichung (9) besteht bei beliebigem v vermöge der Gleichungen (7); sie wird also zur Identität, wenn in ihr an Stelle von u eine Lösung des vollständigen Systems (7) eingesetzt wird. Wir erkennen somit, dass die folgenden r Identitäten bestehen:

$$\left\{\begin{aligned} (u_1 v) &\equiv B_1(v) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \pi_1} + \cdots + B_r(v) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \pi_r} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (u_r v) &\equiv B_1(v) \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \pi_1} + \cdots + B_r(v) \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \pi_r}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Nun aber waren die Gleichungen (7) nach $\frac{\partial u}{\partial \pi_{r+1}} \cdots \frac{\partial u}{\partial \pi_{2n}}$ auflösbar und es sind daher $u_1 \cdots u_r$ nach Abschn. I, Theorem 12, S. 91 in Bezug auf die Veränderlichen $\pi_1 \cdots \pi_r$ von einander unabhängig, so dass die Determinante:

$$\sum \pm \frac{\partial u_1}{\partial \pi_1} \cdots \frac{\partial u_r}{\partial \pi_r}$$

nicht identisch verschwindet. Folglich sind die Identitäten (10) nach: $B_1(v) \cdots B_r(v)$ auflösbar oder, was auf dasselbe hinauskommt: das System der r unbekannten Gleichungen (8) ist äquivalent mit dem Systeme der r bekannten Gleichungen:

$$(11) \qquad B_1(v) = 0, \cdots B_r(v) = 0.$$

Es ist klar, dass die Gleichungen (11) ein r-gliedriges vollständiges System von der gewünschten Beschaffenheit bilden, dass also die Polargruppe: $v_1 \cdots v_{2n-r}$ der Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ von dem Inbegriffe aller Lösungen des vollständigen Systems (11) gebildet wird.

Man kann die vorstehenden Entwickelungen noch verallgemeinern, indem man auf die Voraussetzung verzichtet, dass r unabhängige Lösungen $u_1 \cdots u_r$ des $(2n-r)$-gliedrigen vollständigen Systems (7) eine r-gliedrige Functionengruppe bestimmen sollen. Man erhält dann genau in der vorhin auseinandergesetzten Weise ein System von r Gleichungen (11), welches mit dem Systeme der r unbekannten Gleichungen (8) äquivalent ist; nur der Unterschied gegen vorhin tritt jetzt ein, dass die r Gleichungen (8) und ebenso die Gleichungen (11) im Allgemeinen kein r-gliedriges vollständiges System bilden, ja dass sie unter Umständen gar keine Lösungen gemein haben.

Wir können daher den Satz aussprechen:

Satz 7. *Ist in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ ein $(2n-m)$-gliedriges vollständiges System:*

$$L_1(f) = 0, \cdots L_{2n-m}(f) = 0$$

vorgelegt, dessen Lösungen unbekannt sind, und versteht man unter $u_1 \cdots u_m$ irgend m unabhängige Lösungen dieses vollständigen Systems, so kann man stets ohne Integration ein System von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung angeben, welches genau dieselben Lösungen besitzt wie das System der unbekannten Gleichungen:

$$(u_1 f)_{xp} = 0, \cdots (u_m f)_{xp} = 0.\text{*)}$$

Kapitel 9.

Die kanonischen Formen und die invarianten Eigenschaften der Functionengruppen.

Bestimmen die r unabhängigen Functionen: $u_1 \cdots u_r$ der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige Functionengruppe, so bestehen Relationen von der Gestalt:

*) Lie, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Bd. 2, 1877.

(1) $$(u_i u_\varkappa)_{xp} = w_{i\varkappa}(u_1 \cdots u_r)$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots r).$$

Ersetzt man $u_1 \cdots u_r$ durch irgend r unabhängige Functionen: $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_r$ von $u_1 \cdots u_r$, bringt man also (vgl. S. 180) die Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ auf die neue Form: $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_r$, so bekommt man zwischen den $\mathfrak{u}$ ähnliche Relationen:

(1') $$(\mathfrak{u}_i \mathfrak{u}_\varkappa)_{xp} = \mathfrak{w}_{i\varkappa}(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_r)$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots r),$$

wo die Functionen auf der rechten Seite natürlich im Allgemeinen andere sind als in den Relationen (1).

Wir werden in dem gegenwärtigen Kapitel zunächst die Relationen (1') durch geeignete Wahl der Functionen $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_r$ vereinfachen und werden zeigen, dass sich die r-gliedrige Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ auf eine gewisse *kanonische* Form: $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_r$ bringen lässt, für welche jede der Functionen $\mathfrak{w}_{i\varkappa}$ in den Gleichungen (1') einen der beiden Werthe: 0 oder 1 besitzt. Von der kanonischen Form ausgehend, gelangen wir leicht dazu die Bedingungen anzugeben, unter welchen zwei vorgelegte r-gliedrige Functionengruppen durch Berührungstransformationen von der Form:

(2) $$z' = z + \Omega(x, p), \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p)$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

in einander übergeführt werden können; damit haben wir dann zugleich diejenigen Eigenschaften einer Functionengruppe, welche gegenüber allen Berührungstransformationen von der Form (2) invariant bleiben.

§ 51.

Wir denken uns also in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ vorgelegt, für welche die Relationen:

(1) $$(u_i u_\varkappa)_{xp} = w_{i\varkappa}(u_1 \cdots u_r)$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

bestehen.

Wären alle $w_{i\varkappa}$ identisch null, so wäre es nicht möglich die Relationen (1) durch Einführung neuer Functionen von $u_1 \cdots u_r$ zu vereinfachen. Wir können uns daher auf den Fall beschränken, dass nicht alle $w_{i\varkappa}$ identisch verschwinden, dass also $u_1 \cdots u_r$ nicht sämmtlich ausgezeichnete Functionen unserer Functionengruppe sind.

Es sei demnach u_1 keine ausgezeichnete Function der Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$. Dann verschwindet der Ausdruck:

$$\sum_1^r {}_{\varkappa} (u_1 u_\varkappa) \frac{\partial F(u_1 \cdots u_r)}{\partial u_\varkappa} = \sum_1^r {}_{\varkappa} w_{1\varkappa}(u_1 \cdots u_r) \frac{\partial F}{\partial u_\varkappa}$$

nicht für jedes F identisch, es stellt somit:

$$\sum_1^r {}_{\varkappa} w_{1\varkappa}(u_1 \cdots u_r) \frac{\partial F}{\partial u_\varkappa} = 1$$

in den Veränderlichen $u_1 \cdots u_r$ eine lineare partielle Differentialgleichung dar, für deren Lösungen $F(u_1 \cdots u_r)$ der Ausdruck: $(u_1 F)$ identisch den Werth 1 besitzt. Also haben wir den

Satz 1. *Ist u_1 keine ausgezeichnete Function der r-gliedrigen Functionengruppe $u_1 \cdots u_r$ in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, so giebt es in dieser Gruppe immer Functionen $F(u_1 \cdots u_r)$, welche die Gleichung: $(u_1 F) = 1$ identisch befriedigen.*

Irgend eine derartige Function F denken wir uns bestimmt; dieselbe ist offenbar von u_1 unabhängig und kann daher als u_2 gewählt werden, so dass wir von jetzt ab das Bestehen der Identität:

$$(u_1 u_2)_{xp} \equiv 1$$

voraussetzen können.

Nunmehr suchen wir alle Functionen der Gruppe: $u_1 \cdots u_r$, welche sowohl mit u_1 als mit u_2 in Involution liegen, das heisst, wir suchen alle Functionen $f(u_1 \cdots u_r)$, welche den beiden linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(3) \begin{cases} (u_1 f)_{xp} = \dfrac{\partial f}{\partial u_2} + w_{13}(u) \dfrac{\partial f}{\partial u_3} + \cdots + w_{1r}(u) \dfrac{\partial f}{\partial u_r} = A_1(f) = 0 \\ (u_2 f)_{xp} = -\dfrac{\partial f}{\partial u_1} + w_{23}(u) \dfrac{\partial f}{\partial u_3} + \cdots + w_{2r}(u) \dfrac{\partial f}{\partial u_r} = A_2(f) = 0 \end{cases}$$

in den Veränderlichen $u_1 \cdots u_r$ identisch genügen.

Die beiden Gleichungen (3) sind augenscheinlich von einander unabhängig, überdies ergiebt sich mit Benutzung der Jacobischen Identität:

$$\begin{aligned} A_1(A_2(f)) - A_2(A_1(f)) &\equiv (u_1(u_2 f)) - (u_2(u_1 f)) \\ &\equiv ((u_1 u_2) f) \equiv (1, f) \\ &\equiv 0, \end{aligned}$$

folglich bilden sie ein zweigliedriges vollständiges System in den r Veränderlichen $u_1 \cdots u_r$ und haben gerade $r-2$ unabhängige Lösungen $u_1' \cdots u_{r-2}'$ gemein.

Diese $r-2$ Lösungen $u_1' \cdots u_{r-2}'$ bestimmen als Functionen von

$x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ betrachtet eine $(r-2)$-gliedrige Functionengruppe, welche in der Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ als Untergruppe enthalten ist. In der That nach dem *Poisson*schen Theoreme (s. S. 173) ergiebt sich, dass nicht blos $u_1' \cdots u_{r-2}'$ sondern auch alle $(u_i' u_\varkappa')_{xp}$ sowohl mit u_1 als mit u_2 in Involution liegen; da nun jedes $(u_i' u_\varkappa')_{xp}$ von vornherein nur von $u_1 \cdots u_r$ abhängt, so muss es die beiden Differentialgleichungen (3) in den Veränderlichen $u_1 \cdots u_r$ befriedigen und daher eine Function von $u_1' \cdots u_{r-2}'$ allein sein.

Endlich ist noch leicht einzusehen, dass die r Functionen: u_1, u_2, $u_1' \cdots u_{r-2}'$ nicht durch eine Relation verknüpft sein können; wären sie es nämlich, so müsste die betreffende Relation nothwendig u_1 oder u_2 enthalten, sie liesse sich daher entweder auf die Form:

$$u_1 - \varphi(u_2, u_1' \cdots u_{r-2}') = 0$$

oder auf die Form:

$$u_2 - \psi(u_1, u_1' \cdots u_{r-2}') = 0$$

bringen, aber in beiden Fällen kommt man auf einen Widerspruch, denn im ersten würde sich ergeben:

$$(u_1 u_2)_{xp} = 1 \equiv (\varphi u_2)_{xp} \equiv 0$$

und im zweiten entsprechend.

Demnach können wir den Satz aussprechen:

Satz 2. *Ist $u_1 \cdots u_r$ eine r-gliedrige Functionengruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ und besteht die Relation: $(u_1 u_2) = 1$, so bilden die Gleichungen:*

$$(u_1 f) = \frac{\partial f}{\partial u_2} + (u_1 u_3)\frac{\partial f}{\partial u_3} + \cdots + (u_1 u_r)\frac{\partial f}{\partial u_r} = 0$$

$$(u_2 f) = -\frac{\partial f}{\partial u_1} + (u_2 u_3)\frac{\partial f}{\partial u_3} + \cdots + (u_2 u_r)\frac{\partial f}{\partial u_r} = 0$$

in den Veränderlichen $u_1 \cdots u_r$ ein zweigliedriges vollständiges System mit $r-2$ unabhängigen Lösungen: $u_1' \cdots u_{r-2}'$. Diese Lösungen bestimmen als Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ betrachtet eine $(r-2)$-gliedrige Untergruppe der Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$, überdies sind sie von u_1, u_2 unabhängig, es ist also: u_1, u_2, $u_1' \cdots u_{r-2}'$ eine Form der r-gliedrigen Gruppe: $u_1 \cdots u_r$.

Zum Beweise dieses Satzes kann man übrigens auch folgendermassen gelangen.

Es sei $u_1 \cdots u_r$ eine r-gliedrige Functionengruppe, für welche die Relation $(u_1 u_2) = 1$ besteht, $v_1 \cdots v_{2n-r}$ seien unabhängige Functionen der zugehörigen $(2n-r)$-gliedrigen Polargruppe. Dann sind u_1, u_2, $v_1 \cdots v_{2n-r}$ nicht durch eine Relation verknüpft; denn bestände eine

Relation von der Form: $u_1 = \chi(u_2, v_1 \cdots v_{2n-r})$, so ergäbe sich die unmögliche Gleichung: $(u_1 u_2) = 1 = (\chi u_2) = 0$. In Folge dessen bestimmen die Functionen: $u_1, u_2, v_1 \cdots v_{2n-r}$ eine $(2n - r + 2)$-gliedrige Functionengruppe, deren Polargruppe $(r - 2)$-gliedrig und offenbar in der Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ enthalten ist. Sind $u_1' \cdots u_{r-2}'$ unabhängige Functionen dieser Polargruppe, so sieht man genau wie oben ein, dass $u_1, u_2, u_1' \cdots u_{r-2}'$ von einander unabhängig sind und also eine Form der r-gliedrigen Functionengruppe $u_1 \cdots u_r$ bilden.

Indem wir den Satz 2 eine Reihe von Malen hintereinander anwenden, gelangen wir leicht zu der auf S. 194 angekündigten kanonischen Form der r-gliedrigen Gruppe: $u_1 \cdots u_r$.

Haben $u_1' \cdots u_{r-2}'$ die in dem Satze 2 auseinandergesetzte Bedeutung, so ist:

$$u_1, u_2, u_1' \cdots u_{r-2}'$$

eine neue Form der r-gliedrigen Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ und zwar bestehen die Relationen:

$$(u_1 u_2) = 1, \quad (u_1 u_\varkappa') = (u_2 u_\varkappa') = 0$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r - 2),$$

während: $u_1' \cdots u_{r-2}'$ ihrerseits eine $(r - 2)$-gliedrige Functionengruppe bestimmen.

Die Functionengruppe $u_1' \cdots u_{r-2}'$ behandeln wir nun genau so wie oben die ursprüngliche Gruppe: $u_1 \cdots u_r$. Also: wenn $u_1' \cdots u_{r-2}'$ kein $(r-2)$-gliedriges Involutionssystem bilden, so wählen wir irgend eine nicht ausgezeichnete Function der Gruppe: $u_1' \cdots u_{r-2}'$ aus — sie möge u_3 genannt werden —, wir bestimmen irgend eine Function u_4 von $u_1' \cdots u_{r-2}'$, welche zu u_3 in der Beziehung: $(u_3 u_4) \equiv 1$ steht, endlich suchen wir $r-4$ unabhängige Functionen $u_1'' \cdots u_{r-4}''$ der u', welche sowohl mit u_3 als mit u_4 in Involution liegen. Dann bestimmen: $u_1'' \cdots u_{r-4}''$ ihrerseits eine $(r-4)$-gliedrige Functionengruppe, zugleich ist: $u_3, u_4, u_1'' \cdots u_{r-4}''$ eine neue Form der $(r - 2)$-gliedrigen Gruppe: $u_1' \cdots u_{r-2}'$ und endlich ist:

$$u_1, u_2, u_3, u_4, u_1'' \cdots u_{r-4}''$$

eine neue Form der r-gliedrigen Gruppe: $u_1 \cdots u_r$.

Bilden: $u_1'' \cdots u_{r-4}''$ kein Involutionssystem, so können wir die von ihnen bestimmte Gruppe wieder so behandeln, wie soeben die Gruppe: $u_1' \cdots u_{r-2}'$ und so weiter. In dieser Weise fahren wir fort und gelangen schliesslich zu einem $(r-2m)$-gliedrigen Involutionssysteme: $u_1^{(m)} \cdots u_{r-2m}^{(m)}$, was übrigens nach Satz 3, S. 185 nicht eher eintreten kann, als bis $r - 2m \overline{\overline{<}} n$ ist.

Diese Ergebnisse sprechen wir folgendermassen aus:

Satz 3. *Eine r-gliedrige Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ lässt sich stets auf eine solche Form:*

$$P_1, X_1, P_2, X_2, \cdots P_m, X_m, X_{m+1} \cdots X_{m+q}$$

$$(n \geqq q = r - 2m; \; m + q \leqq r; \; m \geqq 0)$$

bringen, dass jedes $(P_i X_i)$ den Werth 1 besitzt, während alle übrigen Ausdrücke: $(P_i P_x)$, $(P_i X_x)$, $(X_i X_x)$ identisch verschwinden.

Die in diesem Satze angegebene Form ist es, welche wir als eine *kanonische Form* der betreffenden Functionengruppe bezeichnen. Gruppen, die in kanonischer Form gegeben sind, nennen wir wohl auch der Kürze halber *kanonische Gruppen.*

Aus den Entwickelungen, welche zu der kanonischen Form geführt haben, geht hervor, dass die einzelnen Functionen P und X in der kanonischen Form einer vorgelegten Functionengruppe keineswegs vollständig bestimmt sind, dass also eine jede Functionengruppe in unendlich vielen Weisen auf eine kanonische Form gebracht werden kann. Es wird sich indess bald zeigen, dass zu allen kanonischen Formen, die eine Functionengruppe erhalten kann, dieselben Werthe der Zahlen q und m gehören.

Liegt eine Functionengruppe in kanonischer Form:

$$P_1 \cdots P_m, X_1 \cdots X_{m+q}$$

vor, so lassen sich ihre ausgezeichneten Functionen sofort angeben.

Ist nämlich: $\Pi(P_1 \cdots P_m, X_1 \cdots X_{m+q})$ irgend eine Function der Gruppe, so bestehen die Relationen:

$$(P_i \Pi) = \frac{\partial \Pi}{\partial X_i}, \; (X_i \Pi) = -\frac{\partial \Pi}{\partial P_i} \qquad (i = 1 \cdots m)$$

$$(X_{m+1} \Pi) = \cdots = (X_{m+q} \Pi) = 0.$$

Soll daher Π eine *ausgezeichnete* Function sein, so darf es $X_1 \cdots X_m$, $P_1 \cdots P_m$ nicht enthalten, sondern darf nur von $X_{m+1} \cdots X_{m+q}$ abhängen. Andererseits ist aber jede Function von $X_{m+1} \cdots X_{m+q}$ eine ausgezeichnete Function der Gruppe, welche somit *gerade q unabhängige ausgezeichnete Functionen enthält.*

Hieraus folgt nun zunächst, dass zu *allen kanonischen Formen $P_1 \cdots P_m, X_1 \cdots X_m \cdots X_{m+q}$ einer bestimmten Functionengruppe dieselben Werthe der Zahlen q und m gehören.*

Unsre Gruppe ist $(2m + q)$-gliedrig und ausgezeichnete Functionen enthält sie, wie wir eben gesehen, gerade q von einander unabhängige, also können wir schliessen: die Differenz zwischen der Gliederzahl einer

Functionengruppe und der Anzahl ihrer unabhängigen ausgezeichneten Functionen ist stets eine gerade Zahl.

Eine $(2s+1)$-gliedrige Functionengruppe enthält daher stets eine ungerade, eine $2s$-gliedrige stets eine gerade Anzahl von unabhängigen ausgezeichneten Functionen.

Ist eine r-gliedrige Functionengruppe in der nichtkanonischen Form: $u_1 \cdots u_r$ gegeben, so lässt sich nach S. 191 die Anzahl q ihrer unabhängigen ausgezeichneten Functionen ohne Integration finden; die Zahl $r - q$ ist dann nach dem Obigen gerade, etwa gleich $2m$, man kann daher von vornherein sagen, dass jede kanonische Form der Gruppe die Gestalt:

$$P_1,\ X_1,\ P_2,\ X_2,\ \cdots P_m,\ X_m,\ X_{m+1} \cdots X_{m+q}$$
$$(P_iP_\varkappa) = (P_iX_\varkappa) = (X_iX_\varkappa) \equiv 0 \quad {\scriptstyle (i \neq \varkappa)}, \quad (P_iX_i) \equiv 1$$

besitzen muss. Die wirkliche Aufstellung einer solchen kanonischen Form, also die Bestimmung eines derartigen Functionensystems: $P_1 \cdots P_m$, $X_1 \cdots X_{m+q}$ erfordert aber im Allgemeinen Integration.

Denken wir uns jetzt überhaupt $2m+q$ solche Functionen:

$$P_1 \cdots P_m,\ X_1 \cdots X_{m+q}$$

der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ vorgelegt, welche in den kanonischen Beziehungen:

$$(P_iP_\varkappa) = (P_iX_\varkappa) = (X_iX_\varkappa) = 0 \quad {\scriptstyle (i \neq \varkappa)}, \quad (P_iX_i) = 1$$

stehen.

Wären diese $2m+q$ Functionen durch eine Relation verknüpft, in welcher eine der $2m$ Functionen: $P_1 \cdots P_m$, $X_1 \cdots X_m$ etwa P_1 vorkäme, so wäre:

$$P_1 \equiv \Phi(P_2 \cdots P_m,\ X_1 \cdots X_{m+q})$$

und es würde folgen:

$$(P_1X_1) \equiv 1 \equiv (\Phi X_1) \equiv 0\,.$$

Das ist ein Widerspruch, also kann eine Relation zwischen den Functionen $P_1 \cdots X_{m+q}$ höchstens die Functionen $X_{m+1} \cdots X_{m+q}$ enthalten. Damit haben wir den

Satz 4. *Stehen die $2m+q$ Functionen $P_1 \cdots P_m$, $X_1 \cdots X_{m+q}$ der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ in den kanonischen Beziehungen:*

$$(P_iP_\varkappa) = (P_iX_\varkappa) = (X_iX_\varkappa) = 0 \quad {\scriptstyle (i \neq \varkappa)}, \quad (P_iX_i) = 1\,,$$

so sind sie stets dann, aber auch nur dann von einander unabhängig, wenn die q Functionen $X_{m+1} \cdots X_{m+q}$ es sind; ist diese Bedingung erfüllt, so bestimmen $P_1 \cdots P_m$, $X_1 \cdots X_{m+q}$ eine $(2m+q)$-gliedrige Functionengruppe, welche bereits die kanonische Form besitzt.

Die bisherigen Ergebnisse des gegenwärtigen Paragraphen fassen wir jetzt noch einmal kurz zusammen:

Theorem 23. *Eine jede Functionengruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ kann die kanonische Form:*

$$P_1 \cdots P_m, \; X_1 \cdots X_{m+q}$$

erhalten, wo die P und X durch die Relationen:

$$(P_i X_i) = 1, \; (P_i P_\varkappa) = (P_i X_\varkappa) = (X_i X_\varkappa) = 0$$

*verknüpft sind; hier ist $2m + q$ die Gliederzahl der Functionengruppe und q die Zahl der unabhängigen ausgezeichneten Functionen, die Differenz zwischen diesen beiden Zahlen ist daher immer eine gerade Zahl; endlich sind $X_{m+1} \cdots X_{m+q}$ unabhängige ausgezeichnete Functionen der Gruppe und die allgemeinste ausgezeichnete Function ist eine willkürliche Function von $X_{m+1} \cdots X_{m+q}$.**)

Wir schalten hier noch eine Verallgemeinerung des Satzes 2, S. 196 ein. Es sei:

$$u_1 \cdots u_m, \; u_{m+1} \cdots u_r$$

eine r-gliedrige Functionengruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, ferner sei $u_1 \cdots u_m$ eine m-gliedrige Untergruppe, aber eine solche, welche keine ausgezeichnete Function enthält, so dass die Determinante:

$$\Delta = \sum \pm (u_1 u_1) \cdots (u_m u_m)$$

nicht identisch verschwindet. Bildet man nun, indem man unter U eine Function von $u_1 \cdots u_r$ versteht, die m linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(u_1 \, U) = (u_1 \, u_1) \frac{\partial U}{\partial u_1} + \cdots + (u_1 \, u_r) \frac{\partial U}{\partial u_r} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(u_m U) = (u_m u_1) \frac{\partial U}{\partial u_1} + \cdots + (u_m u_r) \frac{\partial U}{\partial u_r} = 0$$

in den Veränderlichen $u_1 \cdots u_r$, so erkennt man leicht, dass diese Gleichungen von einander unabhängig sind und ein m-gliedriges vollständiges System mit gerade $r - m$ unabhängigen Lösungen: $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m}$ bilden. Diese Lösungen: $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m}$ bestimmen offenbar eine $(r - m)$-gliedrige Functionengruppe, welche ebenfalls in der r-gliedrigen: $u_1 \cdots u_r$ als Untergruppe enthalten ist; sie sind andererseits von $u_1 \cdots u_m$ unabhängig, denn bestände zwischen $u_1 \cdots u_m$, $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m}$ eine Relation, so müsste dieselbe nach einer der Functionen $u_1 \cdots u_m$, etwa nach u_1 auflösbar sein, es wäre also:

---

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, März 1873.

$$u_1 - \Psi(u_2 \cdots u_m, \mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m}) \equiv 0;$$

hieraus aber ergäben sich m Identitäten von der Form:

$$(u_1 u_\mu) - \frac{\partial \Psi}{\partial u_2}(u_2 u_\mu) - \cdots - \frac{\partial \Psi}{\partial u_m}(u_m u_\mu) = 0$$
$$(\mu = 1 \cdots m),$$

welche nicht bestehen können, da die Determinante $\varDelta$ von Null verschieden ist.

Satz 5. *Enthält die r-gliedrige Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine m-gliedrige Untergruppe: $u_1 \cdots u_m$, welche keine ausgezeichnete Function besitzt, so enthält sie gerade $r - m$ unabhängige Functionen: $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m}$, welche mit allen m Functionen $u_1 \cdots u_m$ in Involution liegen, diese Functionen: $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m}$ bestimmen ihrerseits eine $(r - m)$-gliedrige Untergruppe der r-gliedrigen und sind überdies von $u_1 \cdots u_m$ unabhängig, so dass: $u_1 \cdots u_m$, $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m}$ eine Form der Gruppe: $u_1 \cdots u_r$ ist.*

Der Satz 2, S. 196 ist ein besonderer Fall dieses Satzes, er wird erhalten, wenn man die beiden Voraussetzungen: $m = 2$ und: $(u_1 u_2) = 1$ hinzufügt.

§ 52.

Hat man in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine kanonische Functionengruppe, deren Gliederzahl kleiner ist als $2n$, so kann man immer grössere kanonische Gruppen angeben, welche die betreffende Gruppe umfassen, insbesondere kann man immer eine $2n$-gliedrige Gruppe von dieser Beschaffenheit finden.

Es sei zunächst:

(A) $$P_1 \cdots P_m,\; X_1 \cdots X_{m+q}$$

eine $(2m + q)$-gliedrige kanonische Gruppe mit $q > 0$ unabhängigen ausgezeichneten Functionen. Wir lassen eine der q ausgezeichneten Functionen $X_{m+1} \cdots X_{m+q}$ weg, etwa X_{m+1} und bekommen so die Gruppe:

(B) $$P_1 \cdots P_m,\; X_1 \cdots X_m,\; X_{m+2} \cdots X_{m+q}.$$

Die Polargruppe dieser letzteren enthält X_{m+1} und kann daher auf die Form:

(C) $$X_{m+1},\; U_1,\; U_2 \cdots$$

gebracht werden. Da nun X_{m+1} der Gruppe (B) nicht angehört, ist es keine ausgezeichnete Function der Gruppe (C), es giebt also (vgl. Satz 1, S. 195) in der Gruppe (C) sicher eine Function P_{m+1}, welche die Gleichung: $(P_{m+1} X_{m+1}) = 1$ erfüllt. Da dieses P_{m+1} mit allen Functionen der Gruppe (B) in Involution liegt, so befriedigen die $2m + q + 1$ Functionen:

(D) $$P_1 \cdots P_{m+1},\; X_1 \cdots X_{m+q}$$

die kanonischen Relationen und sind nach Satz 4, S. 199 von einander unabhängig, weil $X_{m+2} \cdots X_{m+q}$ von einander unabhängig sind. Folglich bestimmen die Functionen (D) eine $(2m+q+1)$-gliedrige Gruppe, welche die ursprüngliche Gruppe (A) umfasst und ebenfalls bereits in kanonischer Form vorliegt.

Durch wiederholte Anwendung der eben gemachten Ueberlegungen erhalten wir zuletzt eine kanonische Gruppe von der Gestalt:

$$P_1 \cdots P_{m+q}, \; X_1 \cdots X_{m+q},$$

also eine Gruppe ohne ausgezeichnete Functionen. Ist daher in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine kanonische Gruppe mit ausgezeichneten Functionen vorgelegt, so lässt sich immer eine kanonische Gruppe ohne ausgezeichnete Functionen angeben, in welcher die vorgelegte Gruppe als Untergruppe enthalten ist.

Demnach können wir uns nunmehr auf den Fall beschränken, dass eine kanonische Gruppe ohne ausgezeichnete Functionen, etwa die $2m$-gliedrige:

$$\text{(E)} \qquad P_1 \cdots P_m, \; X_1 \cdots X_m$$

vorgelegt ist, und können grössere kanonische Gruppen suchen, welche diese $2m$-gliedrige umfassen.

Eine $(2m+1)$-gliedrige Gruppe dieser Art und zwar eine mit *einer* ausgezeichneten Function erhalten wir, wenn wir zu der vorgelegten eine beliebige Function X_{m+1} ihrer Polargruppe hinzufügen. Aus dieser $(2m+1)$-gliedrigen Gruppe:

$$P_1 \cdots P_m, \; X_1 \cdots X_{m+1}$$

können wir in der oben auseinandergesetzten Weise durch Hinzufügung einer Function P_{m+1} eine $(2m+2)$-gliedrige kanonische Gruppe:

$$P_1 \cdots P_{m+1}, \; X_1 \cdots X_{m+1}$$

herstellen, welche keine ausgezeichnete Function enthält. Indem wir dieses Verfahren mehrmals hintereinander anwenden, bekommen wir schliesslich eine $2n$-gliedrige kanonische Gruppe von der gewünschten Beschaffenheit. Zu einer solchen gelangt man übrigens am schnellsten, indem man zu der vorgelegten Gruppe (E) gleich ihre ganze $2(n-m)$-gliedrige Polargruppe in kanonischer Form:

$$P_{m+1} \cdots P_n, \; X_{m+1} \cdots X_n$$

hinzunimmt. Die $2n$-gliedrige kanonische Gruppe lautet dann:

$$P_1 \cdots P_n, \; X_1 \cdots X_n .$$

Also haben wir den

Satz 6. *Ist $P_1 \cdots P_m$, $X_1 \cdots X_{m+q}$ eine $(2m + q)$-gliedrige kanonische Functionengruppe in den $2n$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, so giebt es immer solche weitere Functionen: $P_{m+1} \cdots P_n$, $X_{m+q+1} \cdots X_n$, dass:*

$$P_1 \cdots P_n,\ X_1 \cdots X_n$$

eine $2n$-gliedrige kanonische Functionengruppe bestimmen.

Die in diesem Satze definirten Functionen: $P_1 \cdots P_n$, $X_1 \cdots X_n$ stehen in den kanonischen Beziehungen:

$$(P_i X_i) = 1,\ (P_i P_\varkappa) = (P_i X_\varkappa) = (X_i X_\varkappa) = 0 \atop (i,\ \varkappa = 1 \cdots n),$$

es giebt daher nach Theorem 13, S. 130 eine solche Function Ω von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, dass die Gleichungen:

$$z' = z + \Omega(x,\ p),\ x_i' = X_i(x,\ p),\ p_i' = P_i(x,\ p) \atop (i = 1 \cdots n)$$

eine Berührungstransformation bestimmen.

Aus dieser Bemerkung werden wir sogleich Nutzen ziehen; mit den letzten Sätzen verbunden erledigt sie nämlich das Hauptproblem aus der Theorie der Functionengruppen, sie erlaubt zu entscheiden, unter welchen Bedingungen zwei r-gliedrige Functionengruppen durch Berührungstransformationen von der Form (2) in einander übergeführt werden können.

Wir denken uns also zwei r-gliedrige Functionengruppen vorgelegt, die eine: $u_1 \cdots u_r$ in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ und die andere: $w_1 \cdots w_r$ in den Veränderlichen: $y_1 \cdots y_n$, $q_1 \cdots q_n$ und wir fragen nach den Kriterien dafür, ob es eine Berührungstransformation von der Form:

$$\mathfrak{z} = z + \Phi(x,\ p),\ y_i = Y_i(x,\ p),\ q_i = K_i(x,\ p) \atop (i = 1 \cdots n) \tag{4}$$

giebt, welche die Gruppe: $u_1 \cdots u_r$ in die Gruppe: $w_1 \cdots w_r$ überführt, sodass also die r Functionen $u_1 \cdots u_r$ der Veränderlichen x, p bei Ausführung der betreffenden Berührungstransformation in solche Functionen der y, q übergehen, welche sich durch $w_1 \cdots w_r$ allein ausdrücken lassen.

Soll es eine Berührungstransformation (4) geben, welche die verlangte Ueberführung leistet, so ist nothwendig, dass die beiden Functionengruppen $u_1 \cdots u_r$ und $w_1 \cdots w_r$ gleichviele unabhängige ausgezeichnete Functionen enthalten. Diese nothwendige Bedingung ist aber zugleich hinreichend.

In der That, jede der beiden Gruppen möge gerade q unabhängige ausgezeichnete Functionen enthalten, dann lässt sich die Gruppe $u_1 \cdots u_r$ auf eine kanonische Form:

$$P_1 \cdots P_m,\ X_1 \cdots X_{m+q} \qquad (2m+q=r)$$

bringen und die Gruppe $w_1 \cdots w_r$ ihrerseits auf eine kanonische Form:

$$Q_1 \cdots Q_m,\ Y_1 \cdots Y_{m+q}.$$

Auf Grund des Satzes 6, S. 203 lassen sich ferner solche Functionen P, X von den x, p und Q, Y von den y, q bestimmen, dass auch:

$$P_1 \cdots P_n,\ X_1 \cdots X_n \quad \text{und} \quad Q_1 \cdots Q_n,\ Y_1 \cdots Y_n$$

kanonische Gruppen sind. Endlich kann man eine solche Function Ω von den x, p und eine solche Function O von den y, q finden, dass sowohl die Gleichungen:

$$z' = z + \Omega(x, p),\ x_i' = X_i(x, p),\ p_i' = P_i(x, p) \atop (i=1 \cdots n)$$

als die Gleichungen:

$$\mathfrak{z}' = \mathfrak{z} + O(y, q),\ y_i' = Y_i(y, q),\ q_i' = Q_i(y, q) \atop (i=1 \cdots n)$$

eine Berührungstransformation darstellen. Dann aber bestimmen nach Seite 132 auch die Gleichungen:

$$\mathfrak{z} + O(y, q) = z + \Omega(x, p),\ Y_i(y, q) = X_i(x, p),\ Q_i(y, q) = P_i(x, p) \atop (i=1 \cdots n)$$

eine Berührungstransformation und zwar eine, welche nach den $\mathfrak{z}$, y, q aufgelöst die Form (4) erhält. Diese Berührungstransformation führt $P_1 \cdots P_m$, $X_1 \cdots X_{m+q}$ in bezüglich $Q_1 \cdots Q_m$, $Y_1 \cdots Y_{m+q}$ über und verwandelt demnach die Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ in die Gruppe: $v_1 \cdots v_r$. Damit ist unsere Behauptung bewiesen und wir haben das

Theorem 24. *Eine r-gliedrige Functionengruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ lässt sich dann und nur dann durch eine Berührungstransformation von der Form:*

$$z' = z + \Omega(x, p),\ x_i' = X_i(x, p),\ p_i' = P_i(x, p) \atop (i=1 \cdots n)$$

*in eine andere r-gliedrige Gruppe in den x, p überführen, wenn beide Functionengruppen gleichviele unabhängige ausgezeichnete Functionen enthalten.**)

Hieraus folgt sogleich noch das

Theorem 25. *Eine Functionengruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ besitzt nur zwei Eigenschaften*), welche bei allen Berührungstransformationen von der Gestalt:*

---

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, Decbr. 1872 und März 1873; Math. Ann. Bd. VIII.

$$(2)\qquad z' = z + \Omega(x, p),\ x_i' = X_i(x, p),\ p_i' = P_i(x, p) \quad (i = 1 \cdots n)$$

erhalten bleiben, die erste Eigenschaft ist ihre Gliederzahl, die zweite die Zahl der unabhängigen ausgezeichneten Functionen, welche die Gruppe enthält.

Wir wollen zwei r-gliedrige Functionengruppen in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ stets dann zu demselben *Typus von Functionengruppen* rechnen, wenn die eine durch eine Berührungstransformation von der Gestalt (2) in die andere übergeführt werden kann; dagegen rechnen wir sie zu verschiedenen Typen, wenn eine solche Ueberführung nicht möglich ist. Nach dieser Definition erhalten wir den Inbegriff aller r-gliedrigen Functionengruppen, welche ein und demselben Typus angehören, wenn wir auf eine Gruppe des betreffenden Typus alle Berührungstransformationen von der Form (2) ausführen.

Es erhebt sich nun die Frage: Wie viele verschiedene Typen von r-gliedrigen Functionengruppen giebt es in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$?

Die Antwort auf diese Frage lässt sich auf Grund des Theorems 24 sofort geben. Zwei r-gliedrige Functionengruppen gehören nämlich offenbar dann und nur dann zu demselben Typus, wenn sie beide gleichviele, etwa q unabhängige ausgezeichnete Functionen enthalten, es giebt in Folge dessen soviele verschiedene Typen von r-gliedrigen Functionengruppen, als die Zahl q verschiedene Werthe haben kann. Dabei ist zu bemerken, dass $q \leqq r$ und $\leqq n$ sein muss, und dass $r - q$ stets eine gerade Zahl ist. Man sieht also, dass die Zahl der betreffenden Typen endlich und $\leqq r$ ist. Da die Zahl r selbst nicht grösser als $2n$ sein kann, so erhellt zugleich, dass es überhaupt in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ blos eine endliche Anzahl Typen von Functionengruppen giebt.

Ist: $u_1 \cdots u_r$ eine r-gliedrige Functionengruppe mit der kanonischen Form:

$$P_1 \cdots P_m,\ X_1 \cdots X_{m+q}$$

und sind $P_{m+1} \cdots P_n$, $X_{m+q+1} \cdots X_n$ solche Functionen, dass: $P_1 \cdots P_n$, $X_1 \cdots X_n$ eine $2n$-gliedrige kanonische Functionengruppe bestimmen, so ist es oft empfehlenswerth durch eine Berührungstransformation von der Form:

$$z' = z + \Omega(x, p),\ x_i' = X_i(x, p),\ p_i' = P_i(x, p) \quad (i = 1 \cdots n)$$

die P, X an Stelle der p, x als neue Veränderliche einzuführen. Wir nennen diese neuen Veränderlichen *kanonische Veränderliche.*

Wir sahen auf S. 198, dass jede r-gliedrige Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ in $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ in unendlich vielen Weisen auf eine kanonische Form gebracht werden kann.

Es seien:

$$P_1 \cdots P_m, \; X_1 \cdots X_{m+q} \qquad (2m + q = r)$$

und:

$$\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_m, \; \mathfrak{X}_1 \cdots \mathfrak{X}_{m+q} \qquad (2m + q = r)$$

zwei verschiedene kanonische Formen derselben r-gliedrigen Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ und zwar sei die erste Form in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ geschrieben, die zweite in $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$. Erinnern wir uns nun der Entwickelungen, welche wir beim Beweise des Theorems 24, S. 204 benutzt haben, so sehen wir, dass es eine Berührungstransformation von der Form:

$$z' = z + \Omega(x, p), \; x_i' = Y_i(x, p), \; p_i' = K_i(x, p)$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

giebt, welche jedes P_i in das entsprechende $\mathfrak{P}_i$ und jedes $X_\varkappa$ in das entsprechende $\mathfrak{X}_\varkappa$ überführt; bei dieser Berührungstransformation geht offenbar jede Function von $u_1 \cdots u_r$ wieder in eine Function von $u_1 \cdots u_r$ über, mit andern Worten: die Functionengruppe geht in sich selbst über. Also:

Sind zwei verschiedene kanonische Formen einer r-gliedrigen Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ vorgelegt, so giebt es immer eine Berührungstransformation von der Gestalt (2), *welche die Gruppe: $u_1 \cdots u_r$ invariant lässt und die eine kanonische Form in die andere überführt.*

Zum Schlusse möge noch der Satz angeführt werden:

Satz 7. *Hat man in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige Functionengruppe und eine Untergruppe derselben, so ist es immer möglich, eine solche kanonische Form der r-gliedrigen Gruppe anzugeben, dass auch die Untergruppe in kanonischer Form erscheint.*

Den Beweis, welcher keinerlei Schwierigkeiten darbietet, unterdrücken wir.*)

*) Lie, Math. Ann. Bd. VIII, S. 262 f.

Kapitel 10.

Erledigung eines allgemeinen Transformationsproblems.

Wir kehren zur Behandlung des allgemeinen Problems zurück, bei dessen Inangriffnahme wir seinerzeit (Kap. 8, S. 178 ff.) auf den Begriff „Functionengruppe“ geführt wurden. Jetzt, wo wir die Theorie der Functionengruppen entwickelt haben, wird uns die Erledigung des Problems ohne Schwierigkeit gelingen.

Das Problem, um welches es sich handelt, kann folgendermassen ausgesprochen werden:

In den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ sind r Functionen $U_1 \cdots U_r$ vorgelegt und in den Veränderlichen $y_1 \cdots y_n$, $q_1 \cdots q_n$ r Functionen: $V_1 \cdots V_r$, es soll angegeben werden, unter welchen Bedingungen eine Berührungstransformation von der Gestalt:

$$(1) \qquad \mathfrak{z} = z + \Omega(x, p), \; y_i = \Pi_i(x, p), \; q_i = K_i(x, p) \quad (i = 1 \cdots n)$$

existiert, welche $U_1 \cdots U_r$ bezüglich in $V_1 \cdots V_r$ überführt.

Zunächst werden wir dieses Problem für einen besonderen Fall erledigen, sodann aber in voller Allgemeinheit.

§ 53.

Der besondere Fall, auf dessen Betrachtung wir uns vorerst beschränken, ist der, dass die Functionen $U_1 \cdots U_r$ von einander unabhängig sind und paarweise in Beziehungen von der Form:

$$(2) \qquad (U_i U_\varkappa) = \Omega_{i\varkappa}(U_1 \cdots U_r) \quad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

stehen, mit andern Worten: $U_1 \cdots U_r$ sollen eine r-gliedrige Functionengruppe bestimmen.

Soll es nun unter diesen Voraussetzungen eine Berührungstransformation (1) geben, welche $U_1 \cdots U_r$ in bezüglich $V_1 \cdots V_r$ überführt, so müssen $V_1 \cdots V_r$ natürlich vor allen Dingen ebenfalls von einander unabhängig sein. Ferner haben wir früher (Kap. 8, S. 182) gesehen, dass die Gleichungen (2) bei jeder Berührungstransformation (1), welche $U_1 \cdots U_r$ in $V_1 \cdots V_r$ überführt, die folgende Gestalt annehmen:

$$(2') \qquad (V_i V_\varkappa)_{yq} = \Omega_{i\varkappa}(V_1 \cdots V_r) \quad (i, \varkappa = 1 \cdots r).$$

Mithin ergiebt sich, dass die r unabhängigen Functionen $V_1 \cdots V_r$ ihrerseits auch eine r-gliedrige Functionengruppe bestimmen müssen, und zwar derart, dass jedes $(V_i V_\varkappa)_{yq}$ sich geradeso durch $V_1 \cdots V_r$ ausdrückt wie $(U_i U_\varkappa)_{xp}$ durch $U_1 \cdots U_r$.

Damit sind gewisse Bedingungen gefunden, welche für die Existenz einer Berührungstransformation (1) von der verlangten Beschaffenheit nothwendig sind; wir werden zeigen, dass diese nothwendigen Bedingungen zugleich hinreichend sind.

Die beiden Functionensysteme: $U_1 \cdots U_r$ und $V_1 \cdots V_r$ mögen die angegebenen Bedingungen erfüllen, das heisst, es mögen sowohl $U_1 \cdots U_r$, als $V_1 \cdots V_r$ von einander unabhängig sein und es mögen mit den Relationen (2) zugleich die Relationen (2′) bestehen.

Nach den Regeln des vorigen Kapitels können wir die Gruppe: $U_1 \cdots U_r$ auf eine kanonische Form:

$$P_1 \cdots P_m, \; X_1 \cdots X_{m+q} \qquad (2m + q = r)$$

bringen. Diese kanonische Form sei durch die r von einander unabhängigen Relationen:

$$X_i = \Phi_i(U_1 \cdots U_r), \; P_\varkappa = \Psi_\varkappa(U_1 \cdots U_r)$$
$$(i = 1 \cdots m; \; \varkappa = 1 \cdots m + q)$$

bestimmt. Ferner denken wir uns die r Functionen:

$$Y_i = \Phi_i(V_1 \cdots V_r), \; Q_\varkappa = \Psi_\varkappa(V_1 \cdots V_r)$$
$$(i = 1 \cdots m; \; \varkappa = 1 \cdots m + q)$$

berechnet, welche selbstverständlich von einander unabhängig sind. Unter den gemachten Voraussetzungen werden nun die Ausdrücke:

$$(Q_i Q_\varkappa)_{yq}, \; (Q_i Y_\varkappa)_{yq}, \; (Y_i Y_\varkappa)_{yq}$$

genau dieselben Functionen von $V_1 \cdots V_r$, welche die entsprechenden Ausdrücke:

$$(P_i P_\varkappa)_{xp}, \; (P_i X_\varkappa)_{xp}, \; (X_i X_\varkappa)_{xp}$$

von $U_1 \cdots U_r$ sind; berücksichtigen wir daher, dass die P und die X in den kanonischen Beziehungen:

$$(P_i P_\varkappa)_{xp} = (P_i X_\varkappa)_{xp} = (X_i X_\varkappa)_{xp} \equiv 0 \;\; (i \neq \varkappa), \;\; (P_i X_i)_{xp} \equiv 1$$

stehen, so erkennen wir sofort, dass zwischen den Q und den Y dieselben kanonischen Beziehungen:

$$(Q_i Q_\varkappa)_{yq} = (Q_i Y_\varkappa)_{yq} = (Y_i Y_\varkappa)_{yq} \equiv 0 \;\; (i \neq \varkappa), \;\; (Q_i Y_i)_{yq} \equiv 1$$

stattfinden. Folglich ist das System der r von einander unabhängigen Functionen: $Q_1 \cdots Q_m, \; Y_1 \cdots Y_{m+q}$ eine kanonische Form der Gruppe: $V_1 \cdots V_r$.

Jetzt erinnern wir uns der Entwickelungen auf S. 203 f. Aus denen geht hervor, dass es eine Berührungstransformation von der Form (1) giebt, welche die Functionen: $X_1 \cdots X_m$, $P_1 \cdots P_{m+q}$ bezüglich in: $Y_1 \cdots Y_m$, $Q_1 \cdots Q_{m+q}$ überführt. Es liegt auf der Hand, dass diese Berührungstransformation auch $U_1 \cdots U_r$ bezüglich in $V_1 \cdots V_r$ verwandelt, zugleich verwandelt sie natürlich die durch $U_1 \cdots U_r$ bestimmte Functionengruppe in diejenige, welche durch $V_1 \cdots V_r$ bestimmt ist.

Demnach gilt das

Theorem 26. *Bestimmen die r unabhängigen Functionen: $U_1 \cdots U_r$ der Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige Functionengruppe und die r unabhängigen Functionen: $\mathfrak{U}_1 \cdots \mathfrak{U}_r$ der Veränderlichen: $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$ ebenfalls eine r-gliedrige Functionengruppe, so giebt es dann und nur dann eine Berührungstransformation:*

$$(3) \qquad z' = z + \Omega(x, p),\ x_i' = X_i(x, p),\ p_i' = P_i(x, p) \quad (i = 1 \cdots n),$$

welche $U_1 \cdots U_r$ in bezüglich $\mathfrak{U}_1 \cdots \mathfrak{U}_r$ überführt, wenn jedes $(\mathfrak{U}_i \mathfrak{U}_\varkappa)_{x'p'}$ sich durch $\mathfrak{U}_1 \cdots \mathfrak{U}_r$ genau so ausdrückt, wie das entsprechende $(U_i U_\varkappa)_{xp}$ durch $U_1 \cdots U_r$.

Bestimmen also die r unabhängigen Functionen: $U_1 \cdots U_r$ von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige Functionengruppe, so ist das Bestehen der Relationen:

$$(U_i U_\varkappa)_{xp} = \Omega_{i\varkappa}(U_1 \cdots U_r) \quad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

die einzige Eigenschaft des Functionensystems: $U_1 \cdots U_r$, welche gegenüber allen Berührungstransformationen von der Form (3) invariant bleibt.

§ 54.

Nunmehr wollen wir annehmen, dass die beiden Functionensysteme: $U_1 \cdots U_r$ und $V_1 \cdots V_r$, welche wir uns in der Einleitung des Kapitels gegeben dachten, vollständig beliebig sind, und wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen es eine Berührungstransformation (1) giebt, welche $U_1 \ldots U_r$ in bezüglich $V_1 \ldots V_r$ überführt.

Unter den r Functionen: $U_1 \ldots U_r$ gebe es gerade m von einander unabhängige, etwa: $U_1 \ldots U_m$, während $U_{m+1} \ldots U_r$ sich als Functionen von $U_1 \ldots U_m$ allein ausdrücken lassen:

$$U_{m+\mu} \equiv W_\mu(U_1 \ldots U_m) \quad (\mu = 1 \cdots r - m).$$

Zur Existenz einer Berührungstransformation von der verlangten Beschaffenheit ist dann offenbar nothwendig, dass auch $V_1 \ldots V_m$ von einander unabhängig sind und dass $V_{m+1} \ldots V_r$ sich durch $V_1 \ldots V_m$

genau so ausdrücken lassen, wie oben $U_{m+1} \cdots U_r$ durch $U_1 \cdots U_m$, das heisst es muss sein:

$$V_{m+\mu} \equiv W_\mu(V_1 \cdots V_m) \quad (\mu = 1 \cdots r - m).$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so braucht man blos noch zu untersuchen, ob es eine Berührungstransformation (1) giebt, welche $U_1 \cdots U_m$ bezüglich in $V_1 \cdots V_m$ überführt, denn bei einer solchen Berührungstransformation verwandeln sich $U_{m+1} \cdots U_r$ augenscheinlich von selbst in $V_{m+1} \cdots V_r$.

Damit ist der Fall, dass $U_1 \cdots U_r$ nicht von einander unabhängig sind, auf den Fall eines Functionensystems zurückgeführt, welches aus von einander unabhängigen Functionen besteht, wir können daher ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beeinträchtigen, von vornherein die Annahme machen, dass $U_1 \cdots U_r$ von einander unabhängig sind, $V_1 \cdots V_r$ müssen es dann natürlich auch sein.

Von jetzt ab nehmen wir an, dass sowohl $U_1 \cdots U_r$ als auch $V_1 \cdots V_r$ von einander unabhängig sind.

Wir bilden die sämmtlichen Ausdrücke $(U_i U_\varkappa)_{xp}$ und wählen unter ihnen so viele als möglich aus, welche von $U_1 \cdots U_r$ und unter einander unabhängig sind; die so gefundenen Functionen bezeichnen wir mit: $U'_{r+1} \cdots U'_{r_1}$. Ferner bilden wir alle Ausdrücke: $(U_i U_\varkappa')_{xp}$, $(U_i' U_\varkappa')_{xp}$ und wählen unter ihnen so viele als möglich aus, welche sowohl von $U_1 \cdots U_r$, $U'_{r+1} \cdots U'_{r_1}$ als unter einander unabhängig sind, sie mögen: $U''_{r_1+1} \cdots U''_{r_2}$ heissen. Ebenso wählen wir unter den Ausdrücken: $(U_i U_\varkappa'')$, $(U_i' U_\varkappa'')$, $(U_i'' U_\varkappa'')$ so viele als möglich aus, welche von $U_1 \cdots U''_{r_2}$ und unter einander unabhängig sind, und bezeichnen sie mit: $U'''_{r_2+1} \cdots U'''_{r_3}$. In entsprechender Weise gelangen wir zu gewissen Functionen: $U^{(4)}_{r_3+1} \cdots U^{(4)}_{r_4}$, welche von $U_1 \cdots U'''_{r_3}$ und unter einander unabhängig sind, und so weiter.

Die eben definirten ganzen Zahlen: $r_1, r_2 \cdots$ genügen den Bedingungen:

$$r_1 \geqq r, \; r_2 \geqq r_1, \; \cdots \; r_{h+1} \geqq r_h, \; \cdots,$$

ist aber einmal ein $r_{h+1} = r_h$, so sind augenscheinlich auch r_{h+2}, $r_{h+3} \cdots$ alle gleich r_h. Nun sind die Zahlen $r_1, r_2 \cdots$ andrerseits alle $\leqq 2n$, denn es giebt ja nicht mehr als $2n$ von einander unabhängige Functionen der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$. In Folge dessen muss es eine endliche ganze Zahl $l \geqq 0$ geben, so beschaffen, dass zwar für $h < l$ jedes r_{h+1} grösser ist als r_h, dass aber $r_{l+1}, r_{l+2}, \cdots$ sämmtlich gleich r_l sind.

Diese Zahl l denken wir uns bestimmt und die Functionen: $U'_{r+1} \cdots U^{(l)}_{r_l}$ alle gebildet. Dann sind:

$$U_1 \cdots U_r,\ U'_{r+1} \cdots U'_{r_1},\ \cdots U^{(l)}_{r_{l-1}+1} \cdots U^{(l)}_{r_l}$$

unabhängige Functionen von solcher Beschaffenheit, dass sich die Ausdrücke:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} (U_i U_\varkappa)_{xp}, & (U_i U'_\varkappa)_{xp} & \cdot\ \cdot & (U_i U^{(l)}_\varkappa)_{xp} \\ & (U'_i U'_\varkappa)_{xp} & \cdot\ \cdot & (U'_i U^{(l)}_\varkappa)_{xp} \\ & & \cdot\ \cdot & \cdot \\ & & & (U^{(l)}_i U^{(l)}_\varkappa)_{xp} \end{array} \right.$$

sämmtlich als Functionen von $U_1 \cdots U^{(l)}_{r_l}$ allein darstellen lassen. Mit andern Worten: $U_1 \cdots U^{(l)}_{r_l}$ bestimmen eine r_l-gliedrige Functionengruppe, welcher alle r Functionen $U_1 \cdots U_r$ angehören, und zwar ist das augenscheinlich die *kleinste* Functionengruppe von dieser Beschaffenheit.

Soll nun eine Berührungstransformation (1) die Functionen: $U_1 \cdots U_r$ bezüglich in $V_1 \cdots V_r$ überführen, so muss sie zu gleicher Zeit: $U'_{r+1} \cdots U'_{r_1}$, $U''_{r_1+1} \cdots U^{(l)}_{r_l}$ in gewisse Functionen: $V'_{r+1} \cdots V'_{r_1}$ $V''_{r_1+1} \cdots V^{(l)}_{r_l}$ von $y_1 \cdots y_n$, $q_1 \cdots q_n$ verwandeln. Diese Functionen: $V'_{r+1} \cdots$ sind vollkommen bestimmt und leicht angebbar. Es sind ja $U'_{r+1} \cdots U'_{r_1}$ gewisse $r_1 - r$ unter den Ausdrücken $(U_i U_\varkappa)_{xp}$; bei der betreffenden Berührungstransformation geht aber jedes $(U_i U_\varkappa)_{xp}$ in das entsprechende: $(V_i V_\varkappa)_{yq}$ über; folglich sind die Functionen: $V'_{r+1} \cdots V'_{r_1}$, in welche $U'_{r+1} \cdots U'_{r_1}$ übergehen, einfach diejenigen $r_1 - r$ unter den Ausdrücken $(V_i V_\varkappa)_{yq}$, welche jenen $r_1 - r$ von den Ausdrücken $(U_i U_\varkappa)_{xp}$ entsprechen. Ferner sind $U''_{r_1+1} \cdots U''_{r_2}$ gewisse $r_2 - r_1$ unter den Ausdrücken: $(U_i U'_\varkappa)_{xp}$, $(U'_i U'_\varkappa)_{xp}$, die Functionen $V''_{r_1+1} \cdots V''_{r_2}$ sind natürlich die $r_2 - r_1$ entsprechenden unter den Ausdrücken: $(V_i V'_\varkappa)_{yq}$, $(V'_i V'_\varkappa)_{yq}$. Genau in derselben Weise lassen sich $V''_{r_2+1} \cdots V^{(l)}_{r_l}$ finden.

Sind $V'_{r+1} \cdots V^{(l)}_{r_l}$ sämmtlich berechnet, so ist offenbar blos noch zu untersuchen, ob es eine Berührungstransformation (1) giebt, welche $U_1 \cdots U_r$, $U'_{r+1} \cdots U^{(l)}_{r_l}$ in $V_1 \cdots V_r$, $V'_{r+1} \cdots V^{(l)}_{r_l}$ überführt.

Die Durchführung dieser Untersuchung ist sehr leicht. Da näm- $U_1 \cdots U^{(l)}_{r_l}$ von einander unabhängig sind und eine r_l-gliedrige Functionengruppe bestimmen, so kann es eine Berührungstransformation von der verlangten Beschaffenheit nur dann geben, wenn auch $V_1 \cdots V_{r_l}^{(l)}$ von einander unabhängig sind und eine r_l-gliedrige Functionengruppe bestimmen. Zu diesen Bedingungen tritt endlich nach Theorem 26, S. 209 noch die weitere hinzu, dass die Functionen:

$$
(5) \qquad \left\{ \begin{array}{llll}
(V_i V_\varkappa)_{yq}, & (V_i V_\varkappa')_{yq} & \cdot \cdot & (V_i V_\varkappa^{(l)})_{yq} \\
 & (V_i' V_\varkappa')_{yq} & \cdot \cdot & (V_i' V_\varkappa^{(l)})_{yq} \\
 & & \cdot \cdot & \cdot \\
 & & & (V_i^{(l)} V_\varkappa^{(l)})_{yq}
\end{array} \right.
$$

sich durch $V_1 \cdots V_{r_l}^{(l)}$ genau so ausdrücken müssen, wie die entsprechenden Functionen (4) durch $U_1 \cdots U_{r_l}^{(l)}$. Damit sind die Bedingungen gefunden, welche zur Existenz einer Berührungstransformation von der verlangten Beschaffenheit nothwendig und hinreichend sind.

Aus den Entwickelungen des gegenwärtigen Paragraphen erhalten wir zunächst das

Theorem 27. *Sind in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ irgend r Functionen: $U_1 \cdots U_r$ vorgelegt und in den Veränderlichen: $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$ irgend r Functionen: $\mathfrak{U}_1 \cdots \mathfrak{U}_r$, so kann man stets durch Differentiationen und Eliminationen entscheiden, ob es eine Berührungstransformation von der Gestalt:*

$$z' = z + \Omega(x, p), \; x_i' = X_i(x, p), \; p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

*giebt, welche $U_1 \cdots U_r$ bezüglich in $\mathfrak{U}_1 \cdots \mathfrak{U}_r$ überführt.**)

Die obenstehenden Entwickelungen bestimmen überdies alle Eigenschaften eines beliebigen Functionensystems: $U_1(x, p) \cdots U_r(x, p)$, welche gegenüber allen Berührungstransformationen von der Form (3) invariant bleiben.

---

*) Lie, Math. Ann. Bd. VIII.

Kapitel 11.

Homogene Functionengruppen und ihre ausgezeichneten Functionen.

In diesem und in dem nächsten Kapitel beschränken wir uns auf die Betrachtung solcher Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, welche in den p homogen sind, oder, wie wir uns kürzer ausdrücken wollen: wir betrachten blos *homogene* Functionen. Dementsprechend bringen wir auch blos homogene Berührungstransformationen in Anwendung, sonst aber sind die Entwickelungen dieses und des nächsten Kapitels denen der drei vorhergehenden vollkommen parallel.

Sind $H^{(i)}$ und $H^{(\varkappa)}$ homogene Functionen von bezüglich i-ter und $\varkappa$-ter Ordnung in den p, so werden offenbar alle einzelnen Glieder des Ausdrucks:

$$\sum_1^n {}_\nu \left(\frac{\partial H^{(i)}}{\partial p_\nu} \frac{\partial H^{(\varkappa)}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial H^{(i)}}{\partial x_\nu} \frac{\partial H^{(\varkappa)}}{\partial p_\nu} \right) = (H^{(i)} H^{(\varkappa)})$$

homogene Functionen $(i + \varkappa - 1)$-ter Ordnung und der ganze Ausdruck $(H^{(i)} H^{(\varkappa)})$ in Folge dessen ebenfalls. Nimmt man daher m homogene Functionen $H_1 \cdots H_m$, so erhält man aus denselben auch bei beliebig oft wiederholten Klammeroperationen $(H_i H_\varkappa)$, $((H_i H_\varkappa) H_j)$ u. s. w. stets nur homogene Functionen. Dieser Umstand bietet die natürliche Veranlassung zur Einführung des Begriffs: *homogene Functionengruppe.*

Eine r-gliedrige Functionengruppe in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ soll homogen heissen, sobald sie r unabhängige Functionen enthält, welche in den p homogen sind.

Aus dieser Definition erhellt unmittelbar, dass eine homogene Functionengruppe in $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ bei jeder homogenen Berührungstransformation in diesen Veränderlichen wieder in eine homogene Functionengruppe übergeht.

§ 55.

Es seien r unabhängige homogene Functionen $H_1 \cdots H_r$ einer r-gliedrigen homogenen Functionengruppe vorgelegt und zwar sei jedes $H_\varkappa$ homogen von der Ordnung $s_\varkappa$, so dass also die Gleichungen:

$$\sum_1^n {}_i \, p_i \frac{\partial H_\varkappa}{\partial p_i} = s_\varkappa H_\varkappa \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

bestehen. Bedeutet dann F eine beliebige Function von den H, so findet man:

$$\sum_1^n {}_i \, p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = \sum_1^r {}_\varkappa \frac{\partial F}{\partial H_\varkappa} \sum_1^n {}_i \, p_i \frac{\partial H_\varkappa}{\partial p_i} = \sum_1^r {}_\varkappa \, s_\varkappa H_\varkappa \frac{\partial F}{\partial H_\varkappa},$$

wo der Ausdruck rechter Hand nur von $H_1 \cdots H_r$ abhängt. Das heisst, es gilt der

Satz 1. *Enthält eine homogene Functionengruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ die Function $F(x, p)$, so enthält sie stets auch die Function:*

$$p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial F}{\partial p_n}.$$

Diese wichtige Eigenschaft ist für die homogenen Gruppen charakteristisch. Ist nämlich eine r-gliedrige Functionengruppe $K_1 \cdots K_r$ so beschaffen, dass mit $\Phi(K_1 \cdots K_r)$ stets auch $\sum p_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}$ der Gruppe angehört, so enthält sie r unabhängige homogene Functionen und ist daher homogen.

Der Beweis hierfür ist sehr einfach. Unter der gemachten Voraussetzung befriedigen die Functionen K Relationen von der Form:

$$\sum_1^n {}_i \, p_i \frac{\partial K_j}{\partial p_i} = \Omega_j(K_1 \cdots K_r) \qquad (j = 1 \cdots r).$$

Wären hier alle Ω_j gleich Null, so wären schon die K_j homogen und zwar alle von der nullten Ordnung. Verschwinden dagegen nicht alle Ω_j, so stellt die Gleichung:

$$\sum_1^n {}_i \, p_i \frac{\partial N(K_1 \cdots K_r)}{\partial p_i} = \sum_1^r {}_j \, \Omega_j(K_1 \cdots K_r) \frac{\partial N}{\partial K_j} = 0$$

eine lineare partielle Differentialgleichung in den r Veränderlichen $K_1 \cdots K_r$ dar; irgend $r-1$ unabhängige Lösungen $N_1 \cdots N_{r-1}$ dieser Gleichung sind dann ebensoviele unabhängige homogene Functionen nullter Ordnung der Gruppe. Um endlich eine r-te von $N_1 \cdots N_{r-1}$ unabhängige, homogene Function der Gruppe zu finden, braucht man nur irgend eine Lösung der Differentialgleichung:

$$\sum_1^n {}_i \, p_i \frac{\partial F(K_1 \cdots K_r)}{\partial p_i} = \sum_1^r {}_j \, \Omega_j(K_1 \cdots K_r) \frac{\partial F}{\partial K_j} = F$$

aufzusuchen; jede solche Lösung ist homogen von erster Ordnung in den p, sie gehört der Gruppe an und ist ausserdem offenbar von $N_1 \cdots N_{r-1}$ unabhängig. Damit ist die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung erwiesen.

Aus den angestellten Ueberlegungen folgt zugleich, dass eine r-gliedrige homogene Functionengruppe stets mindestens $r-1$ unabhängige homogene Functionen nullter Ordnung enthält.

Enthält die Gruppe r solche Functionen, etwa: $N_1 \cdots N_r$, so sind augenscheinlich ihre sämmtlichen Functionen homogen von nullter Ordnung. Nun werden die Ausdrücke $(N_i N_\varkappa)$ homogen von (-1)-ter Ordnung, sie sind aber andrerseits Functionen der Gruppe und müssen daher von nullter Ordnung sein. Das ist nur möglich, wenn alle $(N_i N_\varkappa)$ identisch verschwinden, wenn also alle Functionen der Gruppe paarweise in Involution liegen.

Enthält die Gruppe blos $r-1$ unabhängige homogene Functionen nullter Ordnung, etwa: $N_1 \cdots N_{r-1}$, so kann man nach dem Obigen stets eine von $N_1 \cdots N_{r-1}$ unabhängige Function erster Ordnung H finden, welche der Gruppe angehört. Dann ist: $N_1 \cdots N_{r-1}$, H eine Form der Gruppe. Unter Umständen kann es jedoch bequemer sein, die Gruppe auf die Form:

$$H_1 = N_1 H, \cdots H_{r-1} = N_{r-1} H, \quad H_r = H$$

zu bringen, wo alle r Functionen homogen von erster Ordnung sind.

Die vorstehenden einzelnen Ergebnisse wollen wir jetzt im Zusammenhange noch einmal aussprechen:

Theorem 28. *Eine Functionengruppe in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ ist dann und nur dann homogen, wenn immer zugleich mit der Function: $F(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n)$ auch die Function:*

$$p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial F}{\partial p_n}$$

*der Gruppe angehört. Enthält eine r-gliedrige homogene Functionengruppe r unabhängige homogene Functionen von nullter Ordnung in den p, so sind alle ihre Functionen homogen von nullter Ordnung und liegen ausserdem paarweise in Involution; in jedem andern Falle kann die Gruppe eine Form erhalten, in der ausser einer Function von erster nur solche von nullter Ordnung auftreten.**)

Hierzu fügen wir den

Satz 2. *Die gemeinsamen Functionen von zwei homogenen Functionengruppen bilden ihrerseits eine homogene Functionengruppe.*

In der That, sind $K_1 \cdots K_r$ und $L_1 \cdots L_m$ zwei homogene Functionengruppen, so bilden die gemeinsamen Functionen beider Gruppen nach Kap. 8, Satz 1, S. 181 jedenfalls eine Functionengruppe g. Ist nun $\mathfrak{H}$ irgend eine Function von g, so gehört die Function:

$$p_1 \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_n}$$

stets sowohl der Gruppe: $K_1 \cdots K_r$ als der Gruppe: $L_1 \cdots L_m$ an und

---

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, 1872, 1873; Math. Ann., Bd. VIII.

ist in Folge dessen wieder eine Function von g. Demnach ist die Gruppe g wirklich homogen.

Hier mögen einige Bemerkungen über den Begriff *homogene Berührungstransformationen* ihren Platz finden.

Wenn eine Berührungstransformation in den x, p:

$$(1) \qquad z' = z + \Omega(x, p), \quad x_\varkappa' = X_\varkappa(x, p), \quad p_\varkappa' = P_\varkappa(x, p)$$

alle Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $\frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}$ in Functionen von $x_1' \cdots x_n'$, $\frac{p_1'}{p_n'} \cdots \frac{p_{n-1}'}{p_n'}$ überführt, so müssen alle X_i und auch alle $\frac{P_i}{P_\varkappa}$ von nullter Ordnung in den p sein. Folglich (s. S. 213) sind alle:

$$\left(\frac{P_i}{P_\varkappa} X_i\right) = \frac{1}{P_\varkappa}$$

homogen von (-1)-ter Ordnung und alle $P_\varkappa$ homogen von erster Ordnung in den p. Hieraus folgt nach den Entwickelungen der Seite 133, dass Ω eine Constante ist, welche ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann. Also:

Die homogenen Berührungstransformationen in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ sind die einzigen Berührungstransformationen von der Form (1), welche die Grössen:

$$x_1 \cdots x_n, \quad \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}$$

unter sich transformiren.

§ 56.

Bei Untersuchung der homogenen Functionengruppen ist der folgende Satz von grossem Nutzen:

Satz 3. *Ist H eine in den p homogene Function von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ und ist: $f = K$ eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung: $(Hf) = 0$, so ist stets auch:*

$$f = p_1 \frac{\partial K}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial K}{\partial p_n}$$

eine Lösung dieser Gleichung.

Um denselben zu beweisen, setzen wir:

$$p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial f}{\partial p_n} = Bf$$

und:

$$(Hf) = \sum_1^n {}_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = Af;$$

dann ergiebt sich:

$$B(A(f)) - A(B(f)) = \sum_1^n {}_i B \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_1^n {}_i \left\{ B \frac{\partial H}{\partial x_i} + (Hp_i) \right\} \frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

Ist nun H homogen von der m-ten Ordnung, so sind die Differentialquotienten von H nach den p_i und x_i homogen von der $(m-1)$-ten bez. m-ten Ordnung, was durch die Gleichungen:

$$BH = mH, \quad B\frac{\partial H}{\partial p_i} = (m-1)\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad B\frac{\partial H}{\partial x_i} = m\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

ausgedrückt wird. Also folgt:

$$BAf - ABf = (m-1)(Hf)$$

oder was auf dasselbe hinauskommt:

$$\text{(A)} \qquad \sum_1^n {}_i\, p_i \frac{\partial (Hf)}{\partial p_i} - \left(H, \sum_1^n {}_i\, p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = (m-1)(Hf).$$

Ersetzen wir endlich hier f durch irgend eine Lösung K der linearen partiellen Differentialgleichung: $(Hf) = 0$, so verschwinden zwei Glieder identisch und wir bekommen:

$$\left(H, \sum_1^n {}_i\, p_i \frac{\partial K}{\partial p_i}\right) \equiv 0,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Es sei nun $H_1 \cdots H_r$ eine r-gliedrige homogene Functionengruppe und zwar seien der Einfachheit wegen die r Functionen $H_1 \cdots H_r$ sämmtlich homogen gewählt.

Die $(2n-r)$-gliedrige Polargruppe: $K_1 \cdots K_{2n-r}$ der Gruppe: $H_1 \cdots H_r$ wird von allen Functionen gebildet, welche das r-gliedrige vollständige System:

$$\text{(2)} \qquad (H_1 f) = 0, \; \cdots \; (H_r f) = 0$$

in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ befriedigen. Nach dem eben bewiesenen Satze ist aber mit K zugleich stets auch $\sum p_i \frac{\partial K}{\partial p_i}$ eine Lösung des vollständigen Systems (2), folglich (Theorem 28, S. 215) ist die Gruppe $K_1 \cdots K_{2n-r}$ ihrerseits homogen.

Wir haben somit das

Theorem 29. *Die Polargruppe einer homogenen Functionengruppe ist ebenfalls homogen.**)

Die $r+1$ Gleichungen:

$$\text{(3)} \qquad (H_1 f) = 0, \; \cdots \; (H_r f) = 0, \quad \sum_1^n {}_i\, p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0$$

definiren den Inbegriff aller Functionen von nullter Ordnung, welche

---

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1873; Math. Ann. Bd. VIII.

es in der Gruppe: $K_1 \cdots K_{2n-r}$ giebt. Dabei sind zwei Fälle denkbar. Einmal kann $\sum p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0$ eine Folge der übrigen r Gleichungen (3) sein; das tritt offenbar stets dann und nur dann ein, wenn alle Functionen der Gruppe $K_1 \cdots K_{2n-r}$ homogen von der nullten Ordnung sind. Im zweiten Falle bilden die obigen $r+1$ Gleichungen ein $(r+1)$-gliedriges vollständiges System mit $2n-r-1$ unabhängigen Lösungen, dann enthält die Gruppe: $K_1 \cdots K_{2n-r}$ nur $2n-r-1$ unabhängige Functionen nullter Ordnung.

Ist U eine ausgezeichnete Function der Gruppe $H_1 \cdots H_r$, so ist auch $\sum p_i \frac{\partial U}{\partial p_i}$ eine ausgezeichnete Function, denn $\sum p_i \frac{\partial U}{\partial p_i}$ gehört ebenso wie U sowohl der Gruppe $H_1 \cdots H_r$ als der Gruppe $K_1 \cdots K_{2n-r}$ an. Wir schliessen daraus:

Satz 4. *Die ausgezeichneten Functionen einer homogenen Gruppe bilden ihrerseits eine homogene Gruppe.*

Dieser Satz ist offenbar ein besonderer Fall des Satzes 2, S. 215.

Die ausgezeichneten Functionen einer Functionengruppe liegen, wie wir wissen, paarweise in Involution. Bei den ausgezeichneten Functionen einer homogenen Functionengruppe sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, denn diese ausgezeichneten Functionen sind entweder alle oder nicht alle homogen von nullter Ordnung.

Es fragt sich, woran man bei einer vorgelegten homogenen Functionengruppe erkennt, welcher von diesen beiden Fällen eintritt.

Ist eine r-gliedrige homogene Functionengruppe vorgelegt, so denken wir uns in derselben r unabhängige Functionen: $H_1 \cdots H_r$ ausgewählt, welche sämmtlich in den p homogen von erster Ordnung sind. Das lässt sich nach S. 214f. immer erreichen, ausgenommen wenn alle Functionen der Gruppe von der nullten Ordnung sind; in diesem Falle aber liegen alle Functionen der Gruppe paarweise in Involution, die Gruppe besteht daher aus lauter ausgezeichneten Functionen nullter Ordnung, so dass unsere ganze Frage von vornherein erledigt ist.

Also $H_1 \cdots H_r$ sind sämmtlich homogen von der ersten Ordnung. Die ausgezeichneten Functionen der Gruppe: $H_1 \cdots H_r$ sind nun nach S. 191 die gemeinsamen Lösungen der r linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(4) \qquad (H_\varkappa H_1)\frac{\partial U}{\partial H_1} + \cdots + (H_\varkappa H_r)\frac{\partial U}{\partial H_r} = 0 \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

in den r Veränderlichen $H_1 \cdots H_r$. Es giebt ausserdem gerade m

unabhängige ausgezeichnete Functionen, wenn von der Determinante:

$$\Sigma \pm (H_1 H_1) \cdots (H_r H_r)$$

alle $(r - m + 1)$-reihigen Unterdeterminanten identisch verschwinden, während nicht alle $(r - m)$-reihigen dies thun. Die ausgezeichneten Functionen nullter Ordnung unsrer Gruppe genügen ausser den obigen Gleichungen auch noch der folgenden:

$$\sum_1^n {}_i\, p_i \frac{\partial U}{\partial p_i} = \sum_1^r {}_\varkappa\, H_\varkappa \frac{\partial U}{\partial H_\varkappa} = 0$$

und sind dadurch als homogen von nullter Ordnung definirt. Ist diese Gleichung eine Folge von (4), so sind alle ausgezeichneten Functionen unsrer Gruppe von der nullten Ordnung; andernfalls enthält die Gruppe blos $m - 1$ unabhängige ausgezeichnete Functionen nullter Ordnung.

Um die gestellte Frage erledigen zu können, braucht man also nur die Matrix:

$$\begin{vmatrix} (H_1 H_1) & \cdot & (H_1 H_r) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (H_r H_1) & \cdot & (H_r H_r) \\ H_1 & \cdot & H_r \end{vmatrix}$$

aufzustellen und zu untersuchen, ob alle $(r - m + 1)$-reihigen Determinanten derselben verschwinden oder nicht.

Damit haben wir den

Satz 5. *Sind $H_1 \cdots H_r$ unabhängige homogene Functionen erster Ordnung einer r-gliedrigen homogenen Functionengruppe in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, so kann man durch Determinantenbildung nicht blos die Zahl der unabhängigen ausgezeichneten Functionen dieser Gruppe finden, sondern auch die Zahl der unabhängigen ausgezeichneten Functionen nullter Ordnung.*

Weiss man von einer vorgelegten r-gliedrigen Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$, dass sie homogen ist, kennt man aber noch nicht r unabhängige homogene Functionen erster Ordnung dieser Gruppe, so kann man gleichwohl stets ohne Integration entscheiden, wieviele unabhängige ausgezeichnete Functionen nullter Ordnung diese Gruppe enthält. Man bestimmt nämlich zunächst nach S. 191 die Anzahl m aller unabhängigen ausgezeichneten Functionen der Gruppe. Sodann bildet man ein $(2n - r)$-gliedriges vollständiges System:

$$A_\varkappa f = \sum_1^n {}_i\, \alpha_{\varkappa i}(x, p) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n {}_i\, \beta_{\varkappa i}(x, p) \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0$$

$$(\varkappa = 1 \cdots 2n - r),$$

welches $u_1 \cdots u_r$ zu unabhängigen Lösungen hat, endlich stellt man das System der linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$A_1(f) = 0, \cdots A_{2n-r}(f) = 0, \quad (u_1 f) = 0, \cdots (u_r f) = 0$$

auf und untersucht, ob dasselbe die Gleichung:

$$p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial f}{\partial p_n} = 0$$

nach sich zieht. Ist das der Fall, so sind alle ausgezeichneten Functionen der Gruppe: $u_1 \cdots u_r$ homogen von nullter Ordnung, ist es nicht der Fall, so enthält die Gruppe blos $m - 1$ unabhängige ausgezeichnete Functionen von dieser Beschaffenheit.

Kapitel 12.

Die kanonischen Formen und die invarianten Eigenschaften der homogenen Functionengruppen. Erledigung eines allgemeinen Transformationsproblems.

Wir erledigen in diesem Kapitel die Frage, was für Eigenschaften einer homogenen Functionengruppe gegenüber allen homogenen Berührungstransformationen invariant bleiben. Zu diesem Behufe entwickeln wir zunächst eine Theorie der kanonischen Formen homogener Functionengruppen.

Schliesslich soll noch gezeigt werden, wie sich das in Kapitel 10 behandelte Transformationsproblem erledigen lässt, wenn man sich auf homogene Berührungstransformationen in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ beschränkt. Dadurch werden wir in den Stand gesetzt, das allgemeine Transformationsproblem zu erledigen, von welchem wir in der Einleitung des gegenwärtigen Abschnitts ausgingen.

§ 57.

In Kap. 9 sahen wir, dass jede Functionengruppe, sie mochte nun homogen sein oder nicht, eine kanonische Form: $P_1 \cdots P_m$, $X_1 \cdots X_q$ erhalten kann, für welche die kanonischen Relationen:

$$(P_i X_i) = 1, \quad (P_i P_\varkappa) = (P_i X_\varkappa) = (X_i X_\varkappa) = 0$$

identisch bestehen. Eine *homogene* Functionengruppe kann nun auf eine noch speciellere kanonische Form gebracht werden, es ist nämlich, wie wir jetzt zeigen wollen, bei einer solchen Gruppe stets möglich zu erreichen, dass die P_i homogen von erster, die X_i homogen von nullter Ordnung in den p werden.

Wir denken uns in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ irgend r unabhängige Functionen: $u_1 \cdots u_r$ vorgelegt, welche eine r-gliedrige homogene Functionengruppe bestimmen.

Betrachten wir zunächst den besonderen Fall, dass $u_1 \cdots u_r$ ein r-gliedriges Involutionssystem bilden. Sind dann die Functionen: $u_1 \cdots u_r$ alle homogen von nullter Ordnung in den p, so setzen wir einfach: $X_1 = u_1, \cdots X_r = u_r$ und haben damit bereits die Gruppe auf eine kanonische Form gebracht. Sind dagegen $u_1 \cdots u_r$ nicht sämmtlich homogen von nullter Ordnung, so können wir nach S. 215 r solche unabhängige Functionen: $H_1 \cdots H_r$ von $u_1 \cdots u_r$ finden, welche in $p_1 \cdots p_r$ homogen von erster Ordnung sind; dann ist: $P_1 = H_1, \cdots P_r = H_r$ eine kanonische Form der Gruppe: $u_1 \cdots u_r$.

Damit ist der Fall erledigt, dass $u_1 \cdots u_r$ ein r-gliedriges Involutionssystem bilden, wir können daher von jetzt ab voraussetzen, dass die r Functionen: $u_1 \cdots u_r$ nicht alle paarweise in Involution liegen. Dadurch ist es dem Theorem 28, S. 215 zufolge ausgeschlossen, dass $u_1 \cdots u_r$ sämmtlich homogen von nullter Ordnung sind, und es muss deshalb nach diesem selben Theoreme möglich sein, die Gruppe: $u_1 \cdots u_r$ auf eine Form: $N_1 \cdots N_{r-1}, H$ zu bringen, in welcher $N_1 \cdots N_{r-1}$ homogen von nullter Ordnung in den p sind, während H homogen von erster Ordnung ist.

Die Form: $N_1 \cdots N_{r-1}, H$ der Gruppe: $u_1 \cdots u_r$ legen wir im Folgenden zu Grunde. Wir bemerken noch, dass die Relationen: $(u_i u_\varkappa) = w_{i\varkappa}(u_1 \cdots u_r)$ für diese Form: $N_1 \cdots N_{r-1}, H$ der Gruppe folgende Gestalt annehmen:

$$(1) \qquad \begin{cases} (N_\varkappa H) = \psi_\varkappa(N_1 \cdots N_{r-1}) \\ (N_\varkappa N_j) = \dfrac{\varphi_{\varkappa j}(N_1 \cdots N_{r-1})}{H} \end{cases}$$
$$(\varkappa, j = 1 \cdots r-1).$$

Die Ausdrücke: $(N_\varkappa H)$ und $H(N_\varkappa N_j)$ werden nämlich alle homogen von nullter Ordnung in den p, sie müssen sich daher als Functionen von $N_1 \cdots N_{r-1}$ allein darstellen lassen.

Unter den gemachten Voraussetzungen sind jedenfalls $N_1 \cdots N_{r-1}$ nicht sämmtlich ausgezeichnete Functionen unsrer Gruppe. (Vgl. Satz 6, S. 191.) Ist demnach etwa N_1 keine ausgezeichnete Function, so lässt sich immer eine Function:

$$F = H \,.\, \Omega(N_1 \cdots N_{r-1})$$

von erster Ordnung angeben, welche zu N_1 in der Beziehung: $(FN_1) \equiv 1$ steht. Für Ω ergiebt sich nämlich die Bedingungsgleichung:

$$(HN_1)\Omega + \sum_1^{r-1}{}_\varkappa H(N_\varkappa N_1)\frac{\partial \Omega}{\partial N_\varkappa} = 1,$$

welche bei Benutzung der Gleichungen (1) die Form:

$$(2) \qquad \sum_1^{r-1} \varkappa\, \varphi_{\varkappa 1}(N_1 \cdots N_{r-1}) \frac{\partial \Omega}{\partial N_\varkappa} = 1 + \psi_1(N_1 \cdots N_{r-1}) \,.\, \Omega$$

annimmt. Hier verschwinden die Coefficienten: $\varphi_{11} \cdots \varphi_{r-1,1}$, ψ_1 nicht sämmtlich, also stellt (2) in den Veränderlichen $N_1 \cdots N_{r-1}$ eine lineare partielle Differentialgleichung dar, welche Lösungen besitzt. Jede Lösung dieser Differentialgleichung liefert mit H multiplicirt eine Function F von der verlangten Beschaffenheit.

Auf der andern Seite können wir uns jedoch auch die Function *erster* Ordnung H so gewählt denken, dass sie keine ausgezeichnete Function unsrer Gruppe ist, dann giebt es immer Functionen nullter Ordnung: $\Phi(N_1 \cdots N_{r-1})$, welche der Bedingung:

$$(H\Phi) = \sum_1^{r-1} \varkappa\, (HN_\varkappa) \frac{\partial \Phi}{\partial N_\varkappa} = 1$$

genügen. Diese Bedingung ist nämlich gleichbedeutend mit der Differentialgleichung:

$$\sum_1^{r-1} \varkappa\, \psi_\varkappa(N_1 \cdots N_{r-1}) \frac{\partial \Phi}{\partial N_\varkappa} = -1,$$

und da unter der gemachten Voraussetzung $\psi_1 \cdots \psi_{r-1}$ nicht sämmtlich verschwinden, so besitzt diese Differentialgleichung immer Lösungen.

Somit können wir den Satz aussprechen:

Satz 1. *Liegen die Functionen einer homogenen Functionengruppe in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ nicht paarweise in Involution, so lassen sich in der Gruppe stets zwei unabhängige Functionen: P und X finden, welche in der Beziehung: $(PX) \equiv 1$ stehen und von denen die erste homogen von erster Ordnung in den p ist, die zweite dagegen homogen von nullter Ordnung. Dabei kann nach Belieben für P oder für X irgend eine nicht ausgezeichnete Function der Gruppe gewählt werden, vorausgesetzt nur, dass sie homogen von der richtigen Ordnung ist.*

Es seien jetzt P_1 und X_1 zwei solche Functionen der homogenen Gruppe: $N_1 \cdots N_{r-1}$, H, welche die im vorstehenden Satze angegebenen Eigenschaften besitzen, und es sei: P_1, X_1, $N_1' \cdots N_{r-2}'$ eine Form unsrer Gruppe. Wegen des Bestehens der Relation: $(P_1 X_1) = 1$ können wir dann den Satz 2 in Kap. 9, S. 196 anwenden und erkennen so, dass unsre Gruppe $r - 2$ Functionen: $u_1' \cdots u_{r-2}'$ enthält, welche die folgende Beschaffenheit haben: sie sind von einander und von P_1 und X_1 unabhängig, sie liegen sowohl mit P_1 als mit X_1 in Involution, sie bestimmen endlich ihrerseits eine $(r - 2)$-gliedrige Functionengruppe, welche in der r-gliedrigen als Untergruppe enthalten ist. Damit haben wir zugleich eine neue Form: $P_1, X_1, u'_1 \cdots u'_{r-2}$ unsrer r-gliedrigen homogenen Gruppe gefunden.

Es lässt sich nachweisen, dass die $(r-2)$-gliedrige Functionengruppe: $u'_1 \cdots u'_{r-2}$ wiederum homogen ist. In der That es sei: $v_1 \cdots v_{2n-r}$ die zu unsrer r-gliedrigen Gruppe gehörige $(2n-r)$-gliedrige Polargruppe, welche nach Theorem 29, S. 217 ebenfalls homogen ist. Dann bestimmen: $P_1, X_1, v_1 \cdots v_{2n-r}$ eine $(2n-r+2)$-gliedrige Functionengruppe (vgl. Kap. 9, S. 196 f.) und zwar offenbar eine homogene Gruppe. Die $(r-2)$-gliedrige Polargruppe dieser homogenen Gruppe ist wieder homogen, sie ist aber augenscheinlich nichts anderes als eben die Gruppe: $u'_1 \cdots u'_{r-2}$.

Demnach kann jede r-gliedrige homogene Functionengruppe, deren Functionen nicht paarweise in Involution liegen, auf die Form:

$$P_1,\ X_1,\ u'_1 \cdots u'_{r-2}$$
$$(P_1 X_1) = 1, \quad (P_1 u'_\varkappa) = (X_1 u'_\varkappa) = 0$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r-2)$$

gebracht werden, wo P_1 homogen von erster, X_1 homogen von nullter Ordnung ist und wo $u'_1 \cdots u'_{r-2}$ ihrerseits eine $(r-2)$-gliedrige homogene Functionengruppe bestimmen.

Bilden $u'_1 \cdots u'_{r-2}$ ein $(r-2)$-gliedriges Involutionssystem, so kann die von ihnen bestimmte Gruppe nach S. 221 leicht auf eine kanonische Form gebracht werden. Andernfalls behandeln wir die Gruppe: $u'_1 \cdots u'_{r-2}$ genau so wie vorhin die Gruppe: $N_1 \cdots N_{r-1}, H$, das heisst, wir bringen sie auf die Form:

$$P_2,\ X_2,\ u''_1 \cdots u''_{r-4}$$
$$(P_2 X_2) = 1, \quad (P_2 u''_\varkappa) = (X_2 u''_\varkappa) = 0,$$

wo P_2 homogen von erster, X_2 homogen von nullter Ordnung ist und wo: $u''_1 \cdots u''_{r-4}$ eine $(r-4)$-gliedrige homogene Gruppe bestimmen. Auf diese Weise fortfahrend, müssen wir schliesslich zu einer $(r-2m)$-gliedrigen homogenen Gruppe gelangen, deren Functionen paarweise in Involution liegen. Diese Gruppe, welche von den ausgezeichneten Functionen unsrer r-gliedrigen Gruppe gebildet wird (vgl. Theorem 23, S. 200), bringen wir dann nach Anleitung von S. 221 auf eine kanonische Form.

Für homogene Functionengruppen erhält daher das Theorem 23, S. 200 die folgende speciellere Form:

Theorem 30. *Jede r-gliedrige homogene Functionengruppe in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ lässt sich auf die Form:*

$$P_1 \cdots P_m, \quad X_1 \cdots X_m, \quad U_1 \cdots U_q \qquad (2m + q = r)$$

bringen; darin sind die P_i und X_i homogene Functionen von bezüglich erster und nullter Ordnung und stehen in den kanonischen Beziehungen:

$$(P_i P_\varkappa) = (P_i X_\varkappa) = (X_i X_\varkappa) = 0 \ (i \neq \varkappa), \quad (P_i X_i) = 1$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots m);$$

ferner liegen $U_1 \cdots U_q$ unter einander und mit den $2m$ Functionen: $P_1 \cdots P_m$, $X_1 \cdots X_m$ in Involution und bestimmen eine q-gliedrige homogene Functionengruppe, welche aus den ausgezeichneten Functionen der r-gliedrigen Gruppe besteht. Jenachdem die ausgezeichneten Functionen: $U_1 \cdots U_q$ sämmtlich homogen von nullter Ordnung sind oder nicht, kann die r-gliedrige Gruppe auf die erste oder auf die zweite der beiden kanonischen Formen:

$$P_1 \cdots P_m, \quad X_1 \cdots X_m, \quad X_{m+1} \cdots X_{m+q}$$

und:

$$P_1 \cdots P_m, \quad P_{m+1} \cdots P_{m+q}, \quad X_1 \cdots X_m$$

*gebracht werden, wo $X_{m+1} \cdots X_{m+q}$ homogen von nullter Ordnung sind und $P_{m+1} \cdots P_{m+q}$ homogen von erster.**)

Wenn wir im Folgenden von einer kanonischen Form einer homogenen Functionengruppe sprechen, so meinen wir stets diejenige der beiden eben definirten kanonischen Formen, welche die Gruppe erhalten kann. Eine homogene Gruppe, welche bereits in kanonischer Form vorliegt, nennen wir eine „kanonische homogene Gruppe“ oder auch, wenn kein Missverständniss zu befürchten ist, kurz: eine „kanonische Gruppe“.

§ 58.

Ist eine homogene Gruppe, welche nur ausgezeichnete Functionen nullter Ordnung enthält, in kanonischer Form: $P_1 \cdots P_m$, $X_1 \cdots X_{m+q}$ vorgelegt, so kann man immer eine solche Function P_{m+1} von erster Ordnung finden, dass $P_1 \cdots P_{m+1}$, $X_1 \cdots X_{m+q}$ eine kanonische Gruppe ist, welche die ursprüngliche umfasst.

Nämlich die Polargruppe der homogenen Gruppe: $P_1 \cdots P_m$, $X_1 \cdots X_m$, $X_{m+2} \cdots X_{m+q}$ ist homogen und enthält X_{m+1} aber nicht als ausgezeichnete Function. Nach dem Satze 1, S. 222 des vorigen Paragraphen enthält daher diese Polargruppe sicher eine Function P_{m+1} von erster Ordnung, welche der Bedingung: $(P_{m+1} X_{m+1}) = 1$ genügt; es ist klar, dass dieses P_{m+1} alle gestellten Forderungen erfüllt.

---

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, März 1873.

Wenden wir dieses Verfahren im Ganzen q-mal hinter einander an, so erhalten wir eine kanonische homogene Gruppe: $P_1 \cdots P_{m+q}$, $X_1 \cdots X_{m+q}$ ohne ausgezeichnete Functionen. Zu dieser fügen wir ihre homogene Polargruppe in kanonischer Form: $P_{m+q+1} \cdots P_n$, $X_{m+q+1} \cdots X_n$ hinzu und bekommen so eine $2n$-gliedrige kanonische homogene Gruppe: $P_1 \cdots P_n$, $X_1 \cdots X_n$, in welcher die ursprüngliche r-gliedrige steckt. Also:

Satz 2. *Jede homogene Functionengruppe in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, welche die kanonische Form:*

$$P_1 \cdots P_m, \quad X_1 \cdots X_m, \quad X_{m+1} \cdots X_{m+q}$$

besitzt, ist in einer $2n$-gliedrigen kanonischen homogenen Functionengruppe: $P_1 \cdots P_n$, $X_1 \cdots X_n$ enthalten.

Kennen wir daher zum Beispiel n unabhängige Functionen: $X_1 \cdots X_n$ von nullter Ordnung, welche paarweise in Involution liegen, so lassen sich stets n von einander und von $X_1 \cdots X_n$ unabhängige Functionen erster Ordnung: $P_1 \cdots P_n$ finden, welche zusammen mit den X die kanonischen Relationen befriedigen. Dieses Ergebniss ist uns schon von früher her bekannt (s. S. 137), damals fanden wir überdies, dass diese n Functionen: $P_1 \cdots P_n$ eindeutig bestimmt sind und dass die $2n$ Functionen: $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ die Gleichung:

$$P_1 dX_1 + \cdots + P_n dX_n = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

identisch befriedigen.

Enthalten zwei homogene Functionengruppen von gleicher Gliederzahl beide nur ausgezeichnete Functionen nullter Ordnung, deren aber gleichviele unabhängige, so können sie bezüglich auf die kanonischen Formen:

$$P_1 \cdots P_m, \quad X_1 \cdots X_{m+q}$$

und:

$$Q_1 \cdots Q_m, \quad Y_1 \cdots Y_{m+q}$$

gebracht werden, wo die P_i, X_i etwa in $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, die Q_i, Y_i dagegen in $y_1 \cdots y_n$, $q_1 \cdots q_n$ geschrieben sein mögen. Nach dem vorhin aufgestellten Satze giebt es nun stets solche weitere Functionen: $P_{m+1} \cdots P_n$, $X_{m+q+1} \cdots X_n$ und $Q_{m+1} \cdots Q_n$, $Y_{m+q+1} \cdots Y_n$, dass:

$$P_1 \cdots P_n, \quad X_1 \cdots X_n$$

und:

$$Q_1 \cdots Q_n, \quad Y_1 \cdots Y_n$$

wiederum kanonische homogene Gruppen sind. Ein früherer Satz (S. 139) zeigt ausserdem, dass die Gleichungen:

$$X_i = Y_i, \quad P_i = Q_i \qquad (i = 1 \cdots n)$$

eine homogene Berührungstransformation bestimmen. Es ist klar, dass diese Berührungstransformation die homogene Gruppe: $P_1 \cdots P_m$, $X_1 \cdots X_{m+q}$ in die Gruppe: $Q_1 \cdots Q_m$, $Y_1 \cdots Y_{m+q}$ überführt.

Folglich erhalten wir das

Theorem 31. *Haben zwei homogene Functionengruppen in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ gleiche Gliederzahl und enthalten sie beide nur ausgezeichnete Functionen nullter Ordnung, deren aber gleichviele von einander unabhängige, so giebt es stets homogene Berührungstransformationen, welche die eine Functionengruppe in die andere überführen.*

§ 59.

Bei den homogenen Functionengruppen, deren ausgezeichnete Functionen nicht alle von nullter Ordnung sind, können wir uns jetzt kürzer fassen.

Die kanonische Form einer solchen Gruppe war: $P_1 \cdots P_{m+q}$, $X_1 \cdots X_m$. Die homogene Polargruppe der homogenen Gruppe: $P_1 \cdots P_m$, $P_{m+2} \cdots P_{m+q}$, $X_1 \cdots X_m$ enthält P_{m+1}, aber nicht als ausgezeichnete Function, es giebt daher (vgl. Satz 1, S. 222) in dieser Polargruppe eine Function nullter Ordnung: X_{m+1}, welche die Gleichung: $(P_{m+1} X_{m+1}) = 1$ befriedigt. Damit ist eine kanonische homogene Gruppe: $P_1 \cdots P_{m+q}$, $X_1 \cdots X_{m+1}$ gefunden, in welcher die ursprüngliche Gruppe steckt. Eine q-malige Wiederholung dieser Ueberlegungen liefert eine Gruppe: $P_1 \cdots P_{m+q}$, $X_1 \cdots X_{m+q}$ ohne ausgezeichnete Functionen, fügt man wie oben zu dieser ihre homogene Polargruppe in kanonischer Form hinzu, so bekommt man eine $2n$-gliedrige kanonische Gruppe: $P_1 \cdots P_n$, $X_1 \cdots X_n$. Also:

Satz 3. *Jede homogene Functionengruppe in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, welche die kanonische Form:*

$$P_1 \cdots P_m, \quad P_{m+1} \cdots P_{m+q}, \quad X_1 \cdots X_m$$

besitzt, ist in einer $2n$-gliedrigen kanonischen homogenen Functionengruppe: $P_1 \cdots P_n$, $X_1 \cdots X_n$ enthalten.

Durch Betrachtungen ganz ähnlich denen, welche uns zu dem obenstehenden Theoreme 31, führten, erhalten wir das

Theorem 32. *Haben zwei homogene Functionengruppen in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ gleiche Gliederzahl und enthalten sie beide gleichviele unabhängige ausgezeichnete Functionen und sind endlich diese ausgezeichneten Functionen bei keiner der beiden Gruppen sämmtlich von nullter Ordnung, so giebt es stets homogene Berührungstransformationen, welche die eine Functionengruppe in die andere überführen.*

Aus den beiden Theoremen 31 und 32 folgt sofort das

Theorem 33. *Eine homogene Functionengruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ besitzt nur drei Eigenschaften, welche bei allen homogenen Berührungstransformationen in diesen Veränderlichen erhalten bleiben, nämlich erstens ihre Gliederzahl r, zweitens die Zahl q der in ihr enthaltenen unabhängigen ausgezeichneten Functionen und drittens die Zahl q' der unabhängigen ausgezeichneten Functionen nullter Ordnung; diese letzte Zahl q' ist stets entweder gleich q oder gleich $q - 1$.**)

Zwei r-gliedrige homogene Gruppen in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ wollen wir zu demselben *Typus homogener Functionengruppen* rechnen, wenn die eine durch eine homogene Berührungstransformation in diesen Veränderlichen in die andere übergeführt werden kann, dagegen rechnen wir sie zu verschiedenen Typen, wenn eine solche Ueberführung nicht möglich ist. Die Zahl der Typen von r-gliedrigen homogenen Gruppen ist natürlich endlich, denn sie hängt ab von der Zahl aller möglichen Werthsysteme: q, q' und diese Zahl ist endlich, da $q \leq r$ sein muss und für q' nur die beiden Möglichkeiten: $q' = q$ und $q' = q - 1$ zu berücksichtigen sind. Selbstverständlich giebt es überhaupt in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ blos eine endliche Zahl verschiedener Typen von homogenen Functionengruppen.

§ 60.

Jetzt wollen wir das allgemeine Transformationsproblem, welches in Kapitel 10 behandelt worden ist, unter der besonderen Voraussetzung erledigen, dass nur homogene Berührungstransformationen berücksichtigt werden. Wir denken uns also r Functionen: $U_1 \cdots U_r$ von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ gegeben und r Functionen: $V_1 \cdots V_r$ von $y_1 \cdots y_n$, $q_1 \cdots q_n$ und fragen nach den Kriterien für die Existenz einer homogenen Berührungstransformation:

$$(3) \qquad y_i = \Pi_i(x, p), \quad q_i = K_i(x, p) \quad (i = 1 \cdots n),$$

welche $U_1 \cdots U_r$ bezüglich in $V_1 \cdots V_r$ überführt.

Zunächst wollen wir den besonderen Fall betrachten, dass $U_1 \cdots U_r$ von einander unabhängig sind und eine r-gliedrige homogene Functionengruppe bestimmen, so dass Relationen von der Gestalt:

---

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, März 1873.

$$
(4)\quad \begin{cases} (U_i U_\varkappa)_{xp} = \Omega_{i\varkappa}(U_1 \cdots U_r) \\ \sum_1^n {}_\nu\, p_\nu \dfrac{\partial U_i}{\partial p_\nu} = w_i(U_1 \cdots U_r) \\ \qquad (i,\ \varkappa = 1 \cdots r). \end{cases}
$$

bestehen.

Soll es unter diesen Voraussetzungen eine homogene Berührungstransformation (3) geben, welche $U_1 \cdots U_r$ in $V_1 \cdots V_r$ verwandelt, so müssen vor allen Dingen auch $V_1 \cdots V_r$ von einander unabhängig sein. Denken wir uns ferner die betreffende Berührungstransformation auf die Gleichungen (4) ausgeführt, so erhalten wir mit Berücksichtigung der Seiten 131 und 138 die Gleichungen:

$$
(5)\quad \begin{cases} (V_i V_\varkappa)_{yq} = \Omega_{i\varkappa}(V_1 \cdots V_r) \\ \sum_1^n {}_\nu\, q_\nu \dfrac{\partial V_i}{\partial q_\nu} = w_i(V_1 \cdots V_r) \\ \qquad (i,\ \varkappa = 1 \cdots r). \end{cases}
$$

Soll es daher eine homogene Berührungstransformation von der verlangten Beschaffenheit geben, so müssen $V_1 \cdots V_r$ ihrerseits auch eine r-gliedrige homogene Functionengruppe bestimmen und zwar müssen die Relationen (5) identisch erfüllt sein.

Die nothwendigen Bedingungen, welche sich hiermit ergeben haben, sind auch hinreichend.

Nehmen wir nämlich an, dass die angegebenen Bedingungen erfüllt sind. Wir bringen die r-gliedrige homogene Gruppe: $U_1 \cdots U_r$ auf eine kanonische Form: $X_1 \cdots X_m$, $P_1 \cdots P_h$, welche durch die Gleichungen:

$$
X_i = \varphi_i(U_1 \cdots U_r),\ P_j = \psi_j(U_1 \cdots U_r) \\ (i = 1 \cdots m,\ j = 1 \cdots h,\ m + h = r)
$$

definirt sein mag. Offenbar sind dann:

$$
Y_i = \varphi_i(V_1 \cdots V_r) \qquad (i = 1 \cdots m)
$$
$$
Q_j = \psi_j(V_1 \cdots V_r) \qquad (j = 1 \cdots h)
$$

unabhängige Functionen der Gruppe: $V_1 \cdots V_r$ und stehen in den kanonischen Beziehungen, zugleich werden die Y homogene Functionen nullter Ordnung von den q und die Q homogene Functionen erster Ordnung, denn es ist:

$$
\sum_1^n {}_\nu\, p_\nu \frac{\partial X_i}{\partial p_\nu} = 0, \qquad \sum_1^n {}_\nu\, p_\nu \frac{\partial P_j}{\partial p_\nu} = P_j;
$$

also wird auch:

$$
\sum_1^n {}_\nu\, q_\nu \frac{\partial Y_i}{\partial q_\nu} = 0, \qquad \sum_1^n {}_\nu\, q_\nu \frac{\partial Q_j}{\partial q_\nu} = Q_j.
$$

Hieraus schliessen wir, dass: $Y_1 \cdots Y_m$, $Q_1 \cdots Q_h$ eine kanonische Form der homogenen Functionengruppe: $V_1 \cdots V_r$ ist. Nun lassen sich nach S. 225 und 226 $2n - r$ solche Functionen X, P der x, p und $2n - r$ solche Functionen Y, Q der y, q finden, dass $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ und $Y_1 \cdots Y_n$, $Q_1 \cdots Q_n$ zwei $2n$-gliedrige kanonische homogene Functionengruppen werden. Folglich bestimmen die $2n$ Gleichungen:

$$Y_i = X_i, \; Q_i = P_i \qquad (i = 1 \cdots n)$$

eine homogene Berührungstransformation und zwar offenbar eine, welche $U_1 \cdots U_r$ bezüglich in $V_1 \cdots V_r$ überführt. Unsere Behauptung ist somit bewiesen und wir haben das

Theorem 34. *Bestimmen die r unabhängigen Functionen $U_1 \cdots U_r$ der Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige homogene Functionengruppe und die r unabhängigen Functionen: $\mathfrak{U}_1 \cdots \mathfrak{U}_r$ der Veränderlichen: $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$ ebenfalls eine r-gliedrige homogene Functionengruppe, so giebt es dann und nur dann eine homogene Berührungstransformation:*

$$x_i' = X_i(x, p), \; p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n),$$

welche $U_1 \cdots U_r$ in bezüglich $\mathfrak{U}_1 \cdots \mathfrak{U}_r$ überführt, wenn jeder der Ausdrücke:

$$(\mathfrak{U}_i \mathfrak{U}_\varkappa)_{x'p'}, \quad \sum_1^n {}^\nu p_\nu' \frac{\partial \mathfrak{U}_i}{\partial p_\nu'} \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

sich genau so durch $\mathfrak{U}_1 \cdots \mathfrak{U}_r$ ausdrückt, wie der entsprechende der Ausdrücke:

$$(U_i U_\varkappa)_{xp}, \quad \sum_1^n {}^\nu p_\nu \frac{\partial U_i}{\partial p_\nu} \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

*durch $U_1 \cdots U_r$.**)

Sind die Functionen $U_1 \cdots U_r$ selbst schon homogen in den p, so müssen es $\mathfrak{U}_1 \cdots \mathfrak{U}_r$ natürlich in den p' sein und zwar muss jedes $\mathfrak{U}_i$ von derselben Ordnung homogen sein wie das entsprechende U_i.

Aus dem Theorem 34 ergiebt sich ferner: Bestimmen die r unabhängigen Functionen $U_1 \cdots U_r$ der Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige homogene Functionengruppe, so ist das Bestehen der Relationen (4) die einzige Eigenschaft des Functionensystems: $U_1 \cdots U_r$, welche bei allen homogenen Berührungstransformationen in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ erhalten bleibt.

Nunmehr soll der allgemeine Fall behandelt werden, dass die vor-

---

*) Lie, Mathematische Annalen, Bd. VIII.

gelegten Functionen $U_1 \cdots U_r$ und $V_1 \cdots V_r$ ganz beliebig sind, doch wollen wir wenigstens die Voraussetzung machen, dass $U_1 \cdots U_r$ von einander unabhängig sind, eine Beschränkung der Allgemeinheit ist das nicht (vgl. S. 210).

Sollen $U_1 \cdots U_r$ durch eine homogene Berührungstransformation (3) in $V_1 \cdots V_r$ übergehen, so müssen natürlich auch $V_1 \cdots V_r$ von einander unabhängig sein, ausserdem muss sich aber bei der betreffenden Berührungstransformation jedes $(U_i U_x)_{xp}$ in $(V_i V_x)_{yq}$ und jedes:

$$p_1 \frac{\partial U_i}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial U_i}{\partial p_n}$$

in:

$$q_1 \frac{\partial V_i}{\partial q_1} + \cdots + q_n \frac{\partial V_i}{\partial q_n}$$

verwandeln. Diese Ueberlegung, sowie die Erinnerung an die Entwickelungen der Seiten 210 ff. veranlassen uns folgendermassen zu verfahren. Wir bilden die sämmtlichen Ausdrücke:

$$(6) \qquad (U_i U_x)_{xp}, \quad \sum_1^n {}_\nu\, p_\nu \frac{\partial U_i}{\partial p_\nu}$$

und wählen unter ihnen so viele als möglich aus, welche von $U_1 \cdots U_r$ und unter einander unabhängig sind, die gefundenen Functionen bezeichnen wir mit: $U'_{r+1} \cdots U'_{r_1}$. Ferner bilden wir alle Ausdrücke:

$$(7) \qquad (U_i U_x')_{xp}, \quad (U_i' U_x')_{xp}, \quad \sum_1^n {}_\nu\, p_\nu \frac{\partial U_i'}{\partial p_\nu}$$

und wählen unter ihnen so viele als möglich aus, welche sowohl von $U_1 \cdots U_r$, $U'_{r+1} \cdots U'_{r_1}$ als unter einander unabhängig sind, sie mögen: $U''_{r_1+1} \cdots U''_{r_2}$ heissen. In entsprechender Weise bekommen wir gewisse Functionen: $U'''_{r_2+1} \cdots U'''_{r_3}$ und so weiter. Schliesslich müssen wir zu einem Systeme von $r_l > r$ unabhängigen Functionen:

$$U_1 \cdots U_r, \; U'_{r+1} \cdots U'_{r_1}, \; U''_{r_1+1} \cdots U''_{r_2}, \; \cdots \; U^{(l)}_{r_{l-1}+1} \cdots U^{(l)}_{r_l}$$

$$(r_1 > r,\; r_2 > r_1,\; \cdots\; r_l > r_{l-1};\; l \geqq 0)$$

gelangen, welches so beschaffen ist, dass die Ausdrücke:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \sum_1^n {}_\nu\, p_\nu \frac{\partial U_i}{\partial p_\nu}, & \sum_1^n {}_\nu\, p_\nu \frac{\partial U_i'}{\partial p_\nu}, & \cdot\;\cdot & \sum_1^n {}_\nu\, p_\nu \frac{\partial U_i^{(l)}}{\partial p_\nu} \\ (U_i U_x)_{xp}, & (U_i U_x')_{xp}, & \cdot\;\cdot & (U_i U_x^{(l)})_{xp} \\ & (U_i' U_x')_{xp}, & \cdot\;\cdot & (U_i' U_x^{(l)})_{xp} \\ & & \cdot\;\cdot & \cdot \\ & & & (U_i^{(l)} U_x^{(l)})_{xp} \end{array} \right.$$

sich sämmtlich als Functionen von: $U_1 \cdots U^{(l)}_{r_l}$ allein darstellen lassen, mit andern Worten: wir müssen zu einer r_l-gliedrigen homogenen Functionengruppe: $U_1 \cdots U^{(l)}_{r_l}$ gelangen, welche die r Functionen: $U_1 \cdots U_r$ umfasst, und zwar gelangen wir augenscheinlich zu der kleinsten homogenen Functionengruppe von dieser Beschaffenheit.

Nunmehr suchen wir unter den Ausdrücken:

$$(6') \qquad (V_i V_\varkappa)_{yq}, \quad \sum_1^n {}_\nu\, q_\nu \frac{\partial V_i}{\partial q_\nu}$$

diejenigen auf, welche den mit: $U'_{r+1} \cdots U'_{r_1}$ bezeichneten unter den Ausdrücken (6) entsprechen und nennen sie bezüglich: $V'_{r+1} \cdots V'_{r_1}$. Ebenso suchen wir unter den Ausdrücken:

$$(7') \qquad (V_i V'_\varkappa)_{yq}, \quad (V'_i V'_\varkappa)_{yq}, \quad \sum_1^n {}_\nu\, q_\nu \frac{\partial V'_i}{\partial q_\nu}$$

diejenigen auf, welche den mit: $U''_{r_1+1} \cdots U''_{r_2}$ bezeichneten unter den Ausdrücken (7) entsprechen, und nennen sie: $V''_{r_1+1} \cdots V''_{r_2}$. In ähnlicher Weise bilden wir die Functionen: $V'''_{r_2+1} \cdots V^{(l)}_{r_l}$.

Wenn eine homogene Berührungstransformation $U_1 \cdots U_r$ in bezüglich: $V_1 \cdots V_r$ überführt, so verwandelt sie zu gleicher Zeit auch: $U'_{r+1} \cdots U^{(l)}_{r_l}$ in bezüglich: $V'_{r+1} \cdots V^{(l)}_{r_l}$; es kommt in Folge dessen nur darauf an zu entscheiden, ob es eine homogene Berührungstransformation giebt, welche $U_1 \cdots U^{(l)}_{r_l}$ in bezüglich $V_1 \cdots V^{(l)}_{r_l}$ überführt. Diese Frage ist aber sehr leicht zu beantworten: Eine homogene Berührungstransformation von der verlangten Beschaffenheit giebt es dann und nur dann, wenn $V_1 \cdots V^{(l)}_{r_l}$ von einander unabhängig sind und eine r_l-gliedrige homogene Functionengruppe bestimmen und wenn sich ausserdem (s. Theorem 34, S. 229) jede der Functionen:

$$(8') \qquad \left\{ \begin{array}{llll} \sum_1^n {}_\nu\, q_\nu \frac{\partial V_i}{\partial q_\nu}, & \sum_1^n {}_\nu\, q_\nu \frac{\partial V'_i}{\partial q_\nu}, & \cdot\ \cdot & \sum_1^n {}_\nu\, q_\nu \frac{\partial V^{(l)}_i}{\partial q_\nu} \\ (V_i V_\varkappa)_{yq}, & (V_i V'_\varkappa)_{yq}, & \cdot\ \cdot & (V_i V^{(l)}_\varkappa)_{yq} \\ & (V'_i V'_\varkappa)_{yq}, & \cdot\ \cdot & (V'_i V^{(l)}_\varkappa)_{yq} \\ & & \cdot\ \cdot & \cdot \\ & & & (V^{(l)}_i V^{(l)}_\varkappa)_{yq} \end{array} \right.$$

genau in derselben Weise durch $V_1 \cdots V^{(l)}_{r_l}$ ausdrückt, wie die entsprechende der Functionen (8) durch: $U_1 \cdots U^{(l)}_{r_l}$.

Wir können jetzt sagen:

Theorem 35. *Sind in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ irgend r Functionen: $U_1 \cdots U_r$ vorgelegt und in den Veränderlichen: $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$ irgend r Functionen: $\mathfrak{U}_1 \cdots \mathfrak{U}_r$, so kann man stets durch Differentiationen und Eliminationen entscheiden, ob es eine homogene Berührungstransformation:*

$$x_i' = X_i(x, p), \; p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

*giebt, welche $U_1 \cdots U_r$ bezüglich in $\mathfrak{U}_1 \cdots \mathfrak{U}_r$ überführt.**)

Ueberdies liefern die vorstehenden Entwickelungen alle Eigenschaften eines beliebigen Functionensystems: $U_1(x, p) \cdots U_r(x, p)$, welche gegenüber allen homogenen Berührungstransformationen in den Veränderlichen x, p invariant bleiben; doch wollen wir uns nicht mit Auseinandersetzungen über diesen Punkt aufhalten.

§ 61.

Jetzt sind wir endlich im Stande das in der Einleitung des gegenwärtigen Abschnitts aufgestellte allgemeine Transformationsproblem zu erledigen.

Wir denken uns m Functionen: $F_1 \cdots F_m$ der Veränderlichen: z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ vorgelegt und m Functionen: $\mathfrak{F}_1 \cdots \mathfrak{F}_m$ der Veränderlichen: z', $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$; es soll entschieden werden, ob es eine Berührungstransformation von der Gestalt:

$$(9) \qquad z' = Z(z, x, p), \; x_i' = X_i(z, x, p), \; p_i' = P_i(z, x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

giebt, bei welcher $F_1 \cdots F_m$ bezüglich in $\mathfrak{F}_1 \cdots \mathfrak{F}_m$ übergehen.

Um die gestellte Frage zu beantworten, führen wir (vgl. S. 139 ff.) an Stelle der Veränderlichen: z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ die homogenen Veränderlichen: $y_1 \cdots y_{n+1}$, $q_1 \cdots q_{n+1}$ ein, indem wir setzen:

$$z = y_{n+1}, \; x_1 = y_1, \; \cdots \; x_n = y_n$$

$$p_1 = \frac{-q_1}{q_{n+1}}, \; \cdots \; p_n = \frac{-q_n}{q_{n+1}}$$

und dementsprechend:

$$z' = y_{n+1}', \; x_1' = y_1', \; \cdots \; x_n' = y_n'$$

$$p_1' = \frac{-q_1'}{q_{n+1}'}, \; \cdots \; p_n' = \frac{-q_n'}{q_{n+1}'}.$$

---

*) Lie, Math. Ann. Bd. VIII.

Alles kommt dann darauf an, zu entscheiden, ob es eine homogene Berührungstransformation:

$$y_\nu' = Y_\nu(y, q), \; q_\nu' = Q_\nu(y, q) \qquad {\scriptstyle (\nu=1\cdots n+1)}$$

giebt, welche die m Functionen:

$$F_\mu\left(y_{n+1}, y_1 \cdots y_n, \frac{-q_1}{q_{n+1}}, \cdots \frac{-q_n}{q_{n+1}}\right) \qquad {\scriptstyle (\mu=1\cdots m)}$$

bezüglich in:

$$\mathfrak{F}_\mu\left(y_{n+1}', y_1' \cdots y_n', \frac{-q_1'}{q_{n+1}'}, \cdots \frac{-q_n'}{q_{n+1}'}\right) \qquad {\scriptstyle (\mu=1\cdots m)}$$

überführt. Das aber haben wir vorhin entscheiden gelernt. Also:

Theorem 36. *Sind in den Veränderlichen: $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ irgend m Functionen: $F_1 \cdots F_m$ vorgelegt und in den Veränderlichen: $z', x_1' \cdots x_n', p_1' \cdots p_n'$ irgend m Functionen: $\mathfrak{F}_1 \cdots \mathfrak{F}_m$, so kann man stets durch Differentiationen und Eliminationen entscheiden, ob es eine Berührungstransformation von der Form:*

$$(9) \qquad z' = Z(z, x, p), \; x_i' = X_i(z, x, p), \; p_i' = P_i(z, x, p) \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

giebt, welche $F_1 \cdots F_m$ bezüglich in $\mathfrak{F}_1 \cdots \mathfrak{F}_m$ überführt.

Offenbar lassen sich auch alle Eigenschaften eines beliebigen Functionensystems: $F_1(z, x, p) \cdots F_m(z, x, p)$ angeben, welche gegenüber allen Berührungstransformationen von der Gestalt (9) invariant bleiben.

Kapitel 13.

Die Zusammensetzung einer Functionengruppe.

Durch das gegenwärtige Kapitel wird die Theorie der Functionengruppen nach einer wesentlichen Richtung hin vervollständigt und zwar im ersten Paragraphen des Kapitels die Theorie beliebiger Functionengruppen, im zweiten Paragraphen die Theorie der homogenen Functionengruppen.

§ 62.

Sind $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ unabhängige Functionen einer r-gliedrigen Functionengruppe in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, so bestehen, wie wir wissen, Relationen von der Gestalt:

$$(1) \qquad (\varphi_i \varphi_\varkappa)_{xp} = \Omega_{i\varkappa}(\varphi_1 \cdots \varphi_r) \qquad {\scriptstyle (i, \varkappa=1\cdots r)}.$$

Es ist nun leicht zu erkennen, dass die hier auftretenden Functionen $\Omega_{i\varkappa}$ der Grössen $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ gewissen Bedingungen genügen, welche von der speciellen Form der Functionengruppe:

$$\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$$

unabhängig sind.

Zunächst ist:

$$(\varphi_i \varphi_\varkappa)_{xp} + (\varphi_\varkappa \varphi_i)_{xp} \equiv 0 \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r),$$

also muss auch der Ausdruck: $\Omega_{i\varkappa} + \Omega_{\varkappa i}$ für alle Werthe von i und $\varkappa$ identisch verschwinden und da $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ unabhängige Functionen ihrer Argumente sind, so ist das nicht anders möglich, als wenn die Functionen $\Omega_{i\varkappa}$ der Veränderlichen $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ die Gleichungen:

$$(2) \qquad \Omega_{i\varkappa}(\varphi_1 \cdots \varphi_r) + \Omega_{\varkappa i}(\varphi_1 \cdots \varphi_r) = 0 \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

identisch befriedigen.

Zweitens besteht zwischen je drei der Functionen:

$$\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$$

die Identität:

$$((\varphi_i \varphi_\varkappa) \varphi_j) + ((\varphi_\varkappa \varphi_j) \varphi_i) + ((\varphi_j \varphi_i) \varphi_\varkappa) \equiv 0; \qquad (i, \varkappa, j = 1 \cdots r)$$

drücken wir aber hier die linke Seite mit Hülfe von (1) durch $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ aus und berücksichtigen wir wiederum, dass $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ unabhängige Functionen ihrer Argumente sind, so erkennen wir, dass die $\Omega_{i\varkappa}$ als Functionen von $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ auch die Gleichungen:

$$(3) \qquad \sum_1^r{}_\nu \left(\Omega_{\nu j} \frac{\partial \Omega_{i\varkappa}}{\partial \varphi_\nu} + \Omega_{\nu i} \frac{\partial \Omega_{\varkappa j}}{\partial \varphi_\nu} + \Omega_{\nu \varkappa} \frac{\partial \Omega_{ji}}{\partial \varphi_\nu} \right) = 0 \qquad (i, \varkappa, j = 1 \cdots r)$$

identisch befriedigen.

Es gilt demnach der

Satz 1. *Bestimmen r unabhängige Functionen $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige Functionengruppe und bestehen in Folge dessen Relationen von der Form:*

$$(1) \qquad (\varphi_i \varphi_\varkappa)_{xp} = \Omega_{i\varkappa}(\varphi_1 \cdots \varphi_r) \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r),$$

so befriedigen die $\Omega_{i\varkappa}$ als Functionen der Grössen $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ betrachtet die Gleichungen (2) *und* (3) *identisch.*

Man kann sich nun umgekehrt r^2 Functionen $w_{i\varkappa}$ von $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ gegeben denken und kann sich die Frage vorlegen, ob und unter welchen Bedingungen es möglich ist, die Zahl n so zu wählen, dass es in den $2n$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ r unabhängige Functionen: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ giebt, welche eine r-gliedrige Functionengruppe bestimmen und dabei gerade in den Beziehungen:

$$(\varphi_i \varphi_\varkappa)_{xp} = w_{i\varkappa}(\varphi_1 \cdots \varphi_r) \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r) \tag{4}$$

stehen.

Diese Frage soll im Folgenden beantwortet werden.

Eine r-gliedrige Functionengruppe von der verlangten Beschaffenheit kann es dem obigen Satze 1 zufolge jedenfalls nur dann geben, wenn die Functionen $w_{i\varkappa}$ der Grössen $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ sowohl den Gleichungen:

$$w_{i\varkappa} + w_{\varkappa i} = 0 \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r) \tag{5}$$

als den Gleichungen:

$$\sum_1^r{}_\nu \left(w_{\nu j} \frac{\partial w_{i\varkappa}}{\partial \varphi_\nu} + w_{\nu i} \frac{\partial w_{\varkappa j}}{\partial \varphi_\nu} + w_{\nu \varkappa} \frac{\partial w_{ji}}{\partial \varphi_\nu} \right) = 0 \tag{6}$$
$$(i, \varkappa, j = 1 \cdots r)$$

identisch genügen. Diese für die Existenz einer solchen Functionengruppe nothwendigen Bedingungen sind nun aber auch hinreichend, das werden wir jetzt beweisen.

Wir setzen voraus, dass die r^2 gegebenen Functionen $w_{i\varkappa}$ der Grössen $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ die Gleichungen (5) und (6) identisch erfüllen.

Wäre es schon bewiesen, dass in einer geeigneten Anzahl $2n$ von Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige Functionengruppe: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ existirt, für welche die Relationen (4) bestehen, so würden wir für zwei beliebige Functionen F und Φ von $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ die Gleichung:

$$\begin{cases} (F\Phi)_{xp} = \sum\limits_{i,\varkappa}^{1\ldots r} \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_i} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi_\varkappa} (\varphi_i \varphi_\varkappa)_{xp} \\ \qquad\quad = \sum\limits_{i,\varkappa}^{1\ldots r} w_{i\varkappa}(\varphi_1 \cdots \varphi_r) \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_i} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi_\varkappa} \end{cases} \tag{7}$$

erhalten. Wissen wir dagegen noch nichts darüber, ob eine solche Functionengruppe: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ wirklich vorhanden ist, und in diesem Falle befinden wir uns vorläufig noch, so hat das Symbol:

$$(F(\varphi_1 \cdots \varphi_r), \quad \Phi(\varphi_1 \cdots \varphi_r))_{xp}$$

überhaupt gar keinen Sinn. Unter allen Umständen behält nun aber der Ausdruck, welcher in der zweiten Zeile der Formel (7) geschrieben ist, einen Sinn; wir führen daher für diesen Ausdruck ein neues Symbol ein, indem wir setzen:

$$\sum_{i,\varkappa}^{1\ldots r} w_{i\varkappa}(\varphi_1 \cdots \varphi_r) \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_\varkappa} = |F\Phi|. \tag{8}$$

In diesem Symbol: $|\,|$ ist das alte Symbol: $(\ )_{xp}$ als ein besonderer Fall enthalten; wenn man nämlich r gleich $2n$ wählt, für $\varphi_1 \cdots \varphi_{2n}$ bezüglich: $p_1 \cdots p_n$, $x_1 \cdots x_n$ schreibt und endlich alle $w_{i\varkappa}$ ausser:

$$w_{1,\,n+1} = w_{2,\,n+2} = \cdots = w_{n,\,2n} = 1$$

$$w_{n+1,\,1} = w_{n+2,\,2} = \cdots = w_{2n,\,n} = -1$$

gleich Null setzt, so sind die Gleichungen (5) und (6) identisch erfüllt, und wenn U und V beliebige Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ bezeichnen, so wird:

$$|UV| = \sum_1^n {}^i \left(\frac{\partial U}{\partial p_i} \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial p_i} \right) = (UV)_{xp}.$$

Das neue Symbol: $|\,|$ besitzt die charakteristischen Eigenschaften des alten Symbols: $(\ )_{xp}$.

Vor allen Dingen gilt wegen: $w_{i\varkappa} + w_{\varkappa i} \equiv 0$ die Identität:

$$(9) \qquad |F\Phi| + |\Phi F| \equiv 0,$$

welche unter Anderm zeigt, dass der Ausdruck $|FF|$ immer verschwindet. Ferner hat der Ausdruck: $|\varphi_i \varphi_\varkappa|$ offenbar den Werth: $w_{i\varkappa}$ und der Ausdruck:

$$\sum_1^r {}^\nu \, w_{\nu j} \frac{\partial w_{i\varkappa}}{\partial \varphi_\nu}$$

in Folge dessen den Werth: $||\varphi_i \varphi_\varkappa| \varphi_j|$; da aber die Functionen $w_{i\varkappa}(\varphi_1 \cdots \varphi_r)$ die Gleichungen (6) identisch erfüllen, so besteht auch noch die Identität:

$$(10) \qquad ||\varphi_i \varphi_\varkappa| \varphi_j| + ||\varphi_\varkappa \varphi_j| \varphi_i| + ||\varphi_j \varphi_i| \varphi_\varkappa| \equiv 0$$

für beliebige Zahlen i, $\varkappa$, j der Reihe: $1, 2 \cdots r$.

Die Vermuthung liegt sehr nahe, dass eine Identität von dieser Form auch für drei beliebige Functionen: F, Φ, Ψ von $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ besteht. Um die Richtigkeit dieser Vermuthung zu beweisen, verfahren wir folgendermassen.

Aus den beiden Identitäten:

$$|\varphi_i F| \equiv \sum_1^r {}^\nu \, |\varphi_i \varphi_\nu| \cdot \frac{\partial F}{\partial \varphi_\nu}$$

$$|\varphi_\varkappa F| \equiv \sum_1^r {}^\nu \, |\varphi_\varkappa \varphi_\nu| \cdot \frac{\partial F}{\partial \varphi_\nu}$$

ergiebt sich in bekannter Weise:

$$|\varphi_i |\varphi_\varkappa F|| - |\varphi_\varkappa |\varphi_i F|| \equiv \sum_1^r {}^\nu \left\{ |\varphi_i |\varphi_\varkappa \varphi_\nu|| - |\varphi_\varkappa |\varphi_i \varphi_\nu|| \right\} \frac{\partial F}{\partial \varphi_\nu}.$$

also mit Berücksichtigung von (10):

(11) $$|\varphi_i|\varphi_\varkappa F|| - |\varphi_\varkappa|\varphi_i F|| \equiv ||\varphi_i\varphi_\varkappa|F|.$$

Ebenso erhält man aus den Identitäten:

$$|\varphi_i \Phi| \equiv \sum_1^r{}_\nu |\varphi_i \varphi_\nu| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_\nu}$$

$$|F\Phi| \equiv \sum_1^r{}_\nu |F\varphi_\nu| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_\nu}$$

die folgende:

$$|\varphi_i|F\Phi|| - |F|\varphi_i\Phi|| \equiv \sum_1^r{}_\nu \left\{|\varphi_i|F\varphi_\nu|| - |F|\varphi_i\varphi_\nu||\right\} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_\nu},$$

deren rechte Seite wegen (11) die Form:

$$\sum_1^r{}_\nu ||\varphi_i F|\varphi_\nu| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_\nu} \equiv ||\varphi_i F|\Phi|$$

annimmt; es ist mithin:

(12) $$|\varphi_i|F\Phi|| - |F|\varphi_i\Phi|| \equiv ||\varphi_i F|\Phi|.$$

Endlich bekommen wir aus:

$$|F\Psi| \equiv \sum_1^r{}_\nu |F\varphi_\nu| \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_\nu}$$

$$|\Phi\Psi| \equiv \sum_1^r{}_\nu |\Phi\varphi_\nu| \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_\nu}$$

die Identität:

$$|F|\Phi\Psi|| - |\Phi|F\Psi|| \equiv \sum_1^r{}_\nu \left\{|F|\Phi\varphi_\nu|| - |\Phi|F\varphi_\nu||\right\} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_\nu}$$

und wenn wir hier die rechte Seite mit Hülfe von (12) umformen:

(13) $$|F|\Phi\Psi|| - |\Phi|F\Psi|| \equiv ||F\Phi|\Psi|$$

oder was dasselbe ist:

(14) $$||F\Phi|\Psi| + ||\Phi\Psi|F| + ||\Psi F|\Phi| \equiv 0.$$

Damit ist unsere Vermuthung bestätigt und wir haben den

Satz 2. *Sind die r^2 Functionen: $w_{i\varkappa}$ der Veränderlichen: $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ so beschaffen, dass die Gleichungen:*

(15) $$\left\{\begin{aligned} & w_{i\varkappa}(\varphi_1 \cdots \varphi_r) + w_{\varkappa i}(\varphi_1 \cdots \varphi_r) = 0 \\ & \sum_1^r{}_\nu \left\{ w_{\nu j}\frac{\partial w_{i\varkappa}}{\partial \varphi_\nu} + w_{\nu i}\frac{\partial w_{\varkappa j}}{\partial \varphi_\nu} + w_{\nu\varkappa}\frac{\partial w_{ji}}{\partial \varphi_\nu} \right\} = 0 \\ & \qquad (i, \varkappa, j = 1 \cdots r) \end{aligned}\right.$$

identisch erfüllt sind, und setzt man:

$$\sum_{i,\,\varkappa}^{1\cdots r} w_{i\varkappa}(\varphi_1\cdots\varphi_r)\cdot\frac{\partial F}{\partial\varphi_i}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_\varkappa}=|F\Phi|,$$

so erfüllen drei beliebige Functionen: F, Φ, Ψ der $\varphi_\varkappa$ stets die Identität:

$$(14)\qquad ||F\Phi|\Psi|+||\Phi\Psi|F|+||\Psi F|\Phi|\equiv 0.$$

Die Identität (14) ist offenbar eine Verallgemeinerung der Jacobischen Identität.

Nach diesen Vorbereitungen nehmen wir die Beantwortung der auf S. 234 f. gestellten Frage in Angriff. Wir denken uns also r^2 solche Functionen $w_{i\varkappa}$ von $\varphi_1\cdots\varphi_r$ vorgelegt, welche die Gleichungen (15) identisch erfüllen, und fragen, ob es eine r-gliedrige Functionengruppe: $\varphi_1(x,p)\cdots\varphi_r(x,p)$ giebt, für welche gerade die Relationen:

$$(4)\qquad (\varphi_i\varphi_\varkappa)_{xp}=w_{i\varkappa}(\varphi_1\cdots\varphi_r)\qquad {\scriptstyle (i,\,\varkappa=1\cdots r)}$$

bestehen. Um diese Frage zu beantworten, gehen wir folgendermassen zu Werke: Wir suchen $r=2m+q$ solche unabhängige Functionen: $P_1\cdots P_{m+q}$, $X_1\cdots X_m$ von $\varphi_1\cdots\varphi_r$ zu bestimmen, dass Relationen von der Gestalt:

$$|P_iX_i|=1,\quad |P_iP_\varkappa|=|P_iX_\varkappa|=|X_iX_\varkappa|=0$$

stattfinden; ist uns das gelungen, so werden wir ohne Weiteres eine r-gliedrige Functionengruppe von der verlangten Beschaffenheit angeben können; wir werden also finden, dass unsere Frage mit ja zu beantworten ist.

Verschwinden alle Ausdrücke $|\varphi_i\varphi_\varkappa|$ identisch, so können wir sofort $2m+q=r$ unabhängige Functionen: $P_1\cdots P_{m+q}$, $X_1\cdots X_m$ von der gewünschten Beschaffenheit angeben; wir setzen einfach: $\varphi_1=P_1,\cdots\varphi_r=P_r$, dann sind die Relationen: $|P_iP_\varkappa|=0$ von selbst erfüllt; die Zahl m ist in diesem Falle gleich Null und $q=r$.

Von jetzt ab wollen wir voraussetzen, dass nicht alle $|\varphi_i\varphi_\varkappa|$ identisch verschwinden, insbesondere seien nicht alle $|\varphi_1\varphi_\varkappa|$ identisch null.

Wir setzen zunächst: $P_1=\varphi_1$ und suchen eine Function F von $\varphi_1\cdots\varphi_r$, welche der Bedingung:

$$|P_1F|=\sum_1^r{}_\varkappa\, w_{1\varkappa}(\varphi_1\cdots\varphi_r)\frac{\partial F}{\partial\varphi_\varkappa}=1$$

genügt. Unter den Lösungen dieser linearen partiellen Differentialgleichung für F wählen wir irgend eine aus und nennen sie X_1. Dass dieses X_1 von P_1 unabhängig ist, folgt aus dem identischen Bestehen der Relation: $|P_1X_1|=1$.

Nunmehr bilden wir die beiden linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(16)\qquad \begin{cases} |P_1 f| = \sum_1^r{}_{\varkappa} |P_1 \varphi_\varkappa| \frac{\partial f}{\partial \varphi_\varkappa} = 0 \\ |X_1 f| = \sum_1^r{}_{\varkappa} |X_1 \varphi_\varkappa| \frac{\partial f}{\partial \varphi_\varkappa} = 0. \end{cases}$$

Dieselben sind von einander unabhängig, denn sie haben nicht alle Lösungen gemein, wie man schon durch Einsetzung von X_1 an Stelle von f erkennen kann; sie bilden überdies ein zweigliedriges vollständiges System; mit Benutzung der Identität (14) bekommen wir nämlich:

$$|P_1|X_1 f|| - |X_1|P_1 f|| \equiv ||P_1 X_1| f| \equiv |1 f| \equiv 0.$$

Hieraus folgt, dass es gerade $r-2$ unabhängige Functionen: $\varphi_1' \cdots \varphi_{r-2}'$ von $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ giebt, welche die beiden Gleichungen (16) befriedigen. Diese Functionen $\varphi_1' \cdots \varphi_{r-2}'$ sind von P_1 und X_1 unabhängig; denn wäre etwa:

$$P_1 \equiv \Omega(X_1,\ \varphi_1' \cdots \varphi_{r-2}'),$$

so ergäbe sich die widersinnige Gleichung: $|P_1 X_1| = 1 = |P_1 \Omega| = 0$.

Wenn $\varphi_1' \cdots \varphi_{r-2}'$ gefunden sind, so berechnen wir die Ausdrücke: $|\varphi_i' \varphi_\varkappa'|$. Verschwinden dieselben sämmtlich, so setzen wir: $P_2 = \varphi_1'$, $\cdots P_{r-1} = \varphi_{r-2}'$ und haben damit schon das gewünschte Functionensystem: $P_1 \cdots P_{m+q}$, $X_1 \cdots X_m$; die Zahl m ist gleich 1 und q gleich $r-2$. Verschwinden dagegen nicht alle $|\varphi_i' \varphi_\varkappa'|$, was natürlich nur eintreten kann, wenn $r > 3$ ist, so können wir annehmen, dass zum Beispiel nicht alle: $|\varphi_1' \varphi_\varkappa'|$ gleich Null sind; wir setzen dann: $P_2 = \varphi_1'$ und bilden die Gleichungen:

$$(16')\qquad |P_1 f| = 0,\quad |X_1 f| = 0,\quad |P_2 f| = 1.$$

Um eine Function f von $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ zu finden, welche diese Bedingungen erfüllt, suchen wir zuerst eine Function W von $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ und f, welche die Gleichungen:

$$(17)\qquad \begin{cases} A_1(W) = |P_1 W| = 0, \quad A_2(W) = |X_1 W| = 0, \\ \qquad A_3(W) = |P_2 W| + \frac{\partial W}{\partial f} = 0 \end{cases}$$

befriedigt. Diese drei linearen partiellen Differentialgleichungen, welche augenscheinlich von einander unabhängig sind, bilden ein dreigliedriges vollständiges System in den Veränderlichen: $\varphi_1 \cdots \varphi_r, f$, denn es ergiebt sich mit Benutzung der Identität (14):

$$A_1(A_2(W)) - A_2(A_1(W)) \equiv ||P_1 X_1| W| \equiv |1\, W| \equiv 0$$
$$A_1(A_3(W)) - A_3(A_1(W)) \equiv ||P_1 P_2| W| \equiv |0\, W| \equiv 0$$
$$A_2(A_3(W)) - A_3(A_2(W)) \equiv ||X_1 P_2| W| \equiv |0\, W| \equiv 0.$$

Wären nun die Lösungen des dreigliedrigen vollständigen Systems (17) alle frei von f, enthielte also das System (17) die Gleichung: $\frac{\partial W}{\partial f}=0$, so würden die beiden Gleichungen: $|P_1 W| = 0$ und $|X_1 W| = 0$ die Gleichung: $|P_2 W|=0$ nach sich ziehen und es würden in Folge dessen die Ausdrücke: $|P_2 \varphi_\varkappa'|$ gegen die Voraussetzung sämmtlich verschwinden. Wir schliessen hieraus, das das vollständige System (17) jedenfalls eine Lösung $W(\varphi_1 \cdots \varphi_r, f)$ besitzt, welche das f wirklich enthält; setzen wir aber diese Lösung gleich einer Constanten:

$$W(\varphi_1 \cdots \varphi_r, f) = \text{const.}$$

und denken uns die eben geschriebene Gleichung nach f aufgelöst, so bekommen wir bekanntlich eine Lösung f der Gleichungen (16′).

Wir denken uns auf dem angegebenen Wege eine Lösung der Gleichungen (16′) bestimmt und nennen dieselbe: X_2; dann sind: P_1, X_1, P_2, X_2 offenbar von einander unabhängig und stehen in den gewünschten Beziehungen:

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} |P_1 X_1| = |P_2 X_2| = 1, \\ |P_1 P_2| = |P_1 X_2| = |X_1 X_2| = 0. \end{cases}$$

Jetzt stellen wir die vier linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$\text{(19)} \qquad |P_1 f| = 0, \quad |X_1 f| = 0, \quad |P_2 f| = 0, \quad |X_2 f| = 0$$

in den Veränderlichen $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ auf. Keine dieser Gleichungen ist eine Folge der übrigen, was man sofort erkennt, wenn man in ihnen dem f der Reihe nach die Werthe: X_1, P_1, X_2, P_2 ertheilt. Ferner ergiebt sich durch Benutzung der Identität (14) und der Relationen (18), dass die Gleichungen (19) ein viergliedriges vollständiges System bilden. Dieses vollständige System besitzt gerade $r-4$ unabhängige Lösungen: $\varphi_1'' \cdots \varphi_{r-4}''$, welche offenbar auch von P_1, X_1, P_2, X_2 unabhängig sind.

Wie man jetzt weiter zu verfahren hat ist klar und braucht nicht erst auseinandergesetzt zu werden. Genug, es gelingt in der That schliesslich $2m + q = r$ solche unabhängige Functionen: $P_1 \cdots P_{m+q}$, $X_1 \cdots X_m$ von $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ zu bestimmen, welche die Relationen:

$$\text{(20)} \qquad |P_i P_\varkappa| = |P_i X_\varkappa| = |X_i X_\varkappa| = 0 \ (i \neq \varkappa), \quad |P_i X_i| = 1$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

identisch befriedigen.

Sind $P_1 \cdots P_{m+q}$, $X_1 \cdots X_m$ als Functionen von $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ bestimmt, so können wir auch umgekehrt: $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ als Functionen von: $P_1 \cdots P_{m+q}$, $X_1 \cdots X_m$ darstellen. Verstehen wir dann unter F und Φ zwei beliebige Functionen von $\varphi_1 \cdots \varphi_r$, so erhalten wir:

$$|F\Phi| = \sum_{i,\varkappa}^{1\cdots m+q} |P_i P_\varkappa| \frac{\partial F}{\partial P_i}\frac{\partial \Phi}{\partial P_\varkappa} + \sum_{i,\varkappa}^{1\cdots m} |X_i X_\varkappa| \frac{\partial F}{\partial X_i}\frac{\partial \Phi}{\partial X_\varkappa} +$$
$$+ \sum_1^{m+q}{}_i \sum_1^{m}{}_\varkappa |P_i X_\varkappa| \left\{\frac{\partial F}{\partial P_i}\frac{\partial \Phi}{\partial X_\varkappa} - \frac{\partial F}{\partial X_\varkappa}\frac{\partial \Phi}{\partial P_i}\right\}$$

oder wegen der Relationen (20):

$$|F\Phi| = \sum_1^m{}_\mu \left(\frac{\partial F}{\partial P_\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial X_\mu} - \frac{\partial F}{\partial X_\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial P_\mu}\right).$$

Insbesondere wird:

$$|\varphi_i \varphi_\varkappa| = w_{i\varkappa}(\varphi_1 \cdots \varphi_r) = \sum_1^m{}_\mu \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial P_\mu}\frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial X_\mu} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_\mu}\frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial P_\mu}\right),$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\sum_1^n{}_\nu \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial P_\nu}\frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial X_\nu} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_\nu}\frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial P_\nu}\right) = w_{i\varkappa}(\varphi_1 \cdots \varphi_r),$$

indem wir neben $P_1 \cdots P_{m+q}$, $X_1 \cdots X_m$, noch irgend welche in $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ nicht vorkommende Grössen: $P_{m+q+1} \cdots P_n$, $X_{m+1} \cdots X_n$ als unabhängige Veränderliche einführen. Bei diesen Festsetzungen bestimmen $\varphi_1(X, P) \cdots \varphi_r(X, P)$ offenbar eine r-gliedrige Functionengruppe in den Veränderlichen $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ und zwar eine Functionengruppe, welche den auf S. 238 gestellten Anforderungen genügt.

Damit ist nebenbei bemerkt überhaupt jede r-gliedrige Functionengruppe in $2n$ Veränderlichen: $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ gefunden, welche die verlangte Beschaffenheit hat. Sind nämlich: $\psi_1 \cdots \psi_r$ solche unabhängige Functionen von $X_1' \cdots X_n'$, $P_1' \cdots P_n'$, welche die Relationen:

$$(\psi_i \psi_\varkappa)_{X'P'} = w_{i\varkappa}(\psi_1 \cdots \psi_r) \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

identisch erfüllen, so giebt es nach Theorem 26, S. 209 stets eine Berührungstransformation von der Form:

$$Z' = Z + \Omega(X, P), \quad X_i' = \Xi_i(X, P), \quad P_i' = \Pi_i(X, P)$$
$$(i = 1 \cdots n),$$

welche: $\varphi_1(X, P) \cdots \varphi_r(X, P)$ bezüglich in: $\psi_1(X', P') \cdots \psi_r(X', P')$ verwandelt. Führt man andrerseits auf die Functionengruppe: $\varphi_1(X, P) \cdots \varphi_r(X, P)$ eine beliebige Berührungstransformation von der angegebenen Form aus, so erhält man natürlich stets wieder eine Functionengruppe von derselben Beschaffenheit.

Wir erhalten somit das

Theorem 37. *Soll es wenigstens für gewisse Werthe von n in den $2n$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige Functionengruppe geben, die r solche unabhängige Functionen:*

$\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ *enthält, für welche Relationen von der Gestalt:*

$$(\varphi_\iota \varphi_\varkappa)_{xp} = w_{\iota\varkappa}(\varphi_1 \cdots \varphi_r) \qquad (\iota, \varkappa = 1 \cdots r) \tag{21}$$

mit vorgeschriebenen Functionen $w_{\iota\varkappa}$ *bestehen, so ist nothwendig und hinreichend, dass die Functionen* $w_{\iota\varkappa}$ *der Grössen* $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ *die Gleichungen:*

$$\left\{\begin{aligned} & w_{i\varkappa}(\varphi_1 \cdots \varphi_r) + w_{\varkappa i}(\varphi_1 \cdots \varphi_r) = 0 \\ & \sum_1^r {}_\nu \left\{ w_{\nu j} \frac{\partial w_{i\varkappa}}{\partial \varphi_\nu} + w_{\nu i} \frac{\partial w_{\varkappa j}}{\partial \varphi_\nu} + w_{\nu\varkappa} \frac{\partial w_{ji}}{\partial \varphi_\nu} \right\} = 0 \\ & \qquad (i, \varkappa, j = 1 \cdots r) \end{aligned}\right. \tag{22}$$

sämmtlich identisch befriedigen. Sind diese Bedingungen erfüllt und hat man in den $2n$ *Veränderlichen:* $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ *eine* r*-gliedrige Functionengruppe:* $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$, *für welche die Relationen* (21) *bestehen, so findet man alle anderen derartigen Functionengruppen in* $2n$ *Veränderlichen, indem man auf:* $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ *die allgemeinste Berührungstransformation von der Form:*

$$z' = z + \Omega(x, p), \quad x_i' = \Xi_i(x, p), \quad p_i' = \Pi_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

*ausführt.**)

Sind r^2 Functionen $w_{i\varkappa}(\varphi_1 \cdots \varphi_r)$ vorgelegt, welche die Gleichungen (21) identisch erfüllen, so kann man im Allgemeinen nur durch Integration eine r-gliedrige Functionengruppe: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ finden, für welche die Relationen (21) bestehen, und zwar zeigen die obigen Entwickelungen, dass jedenfalls nur die Integration von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung erforderlich ist oder, was auf dasselbe hinauskommt: *die Integration simultaner Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen.* Dagegen kann man *ohne* Integration die ganzen Zahlen m und q finden, welche in der kanonischen Form: $P_1 \cdots P_{m+q}$, $X_1 \cdots X_m$ der unbekannten Functionengruppe: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ auftreten.

Die Zahl q ist nämlich offenbar die Anzahl der unabhängigen ausgezeichneten Functionen, welche die Functionengruppe: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ enthält. Man findet daher nach S. 191 die Zahl q durch Untersuchung der Determinante: $\Sigma \pm (\varphi_1 \varphi_1) \cdots (\varphi_r \varphi_r)$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch Untersuchung der Determinante:

$$\begin{vmatrix} w_{11}(\varphi) & \cdot & w_{1r}(\varphi) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ w_{r1}(\varphi) & \cdot & w_{rr}(\varphi) \end{vmatrix}$$

---

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1888.

Verschwindet diese Determinante nebst allen ihren Unterdeterminanten $(r-1)$-ten, $\cdots$ $(r-h+1)$-ten Grades identisch, ohne dass alle Unterdeterminanten $(r-h)$-ten Grades verschwinden, so ist q gleich h. Hat man q bestimmt, so findet man m aus der Gleichung: $2m = r - q$.

Noch ist zu bemerken, dass man ohne Integration auch die kleinste Zahl $2n$ von Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ angeben kann, in welchen es eine r-gliedrige Functionengruppe: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ giebt, für welche die vorgelegten Relationen (21) bestehen. Es leuchtet ein, dass diese kleinste Zahl $2n$ den Werth $2(m+q)$ besitzt; in $2n = 2(m+q)$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ giebt es nämlich offenbar eine r-gliedrige Functionengruppe von der betreffenden Beschaffenheit, in $2n < 2(m+q)$ giebt es aber keine solche Functionengruppe, denn eine $(2m+q)$-gliedrige Functionengruppe in $2n < 2(m+q)$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ kann (vgl. S. 176, Satz 5) niemals eine kanonische Form von der Gestalt:

$$P_1 \cdots P_{m+q}, \quad X_1 \cdots X_m$$

besitzen.

Die Entwickelungen, welche zu dem Theoreme 37, S. 241 geführt haben, lassen sich zum Theil etwas anders gestalten.

Wir versetzen uns wieder auf den Standpunkt zurück, welchen wir auf S. 238 nach dem Satze 2 einnahmen. Wie damals denken wir uns r^2 solche Functionen $w_{i\varkappa}$ von $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ vorgelegt, welche die Gleichungen (15) identisch befriedigen und suchen nun $r = 2m + q$ solche unabhängige Functionen: $P_1 \cdots P_{m+q}$, $X_1 \cdots X_m$ zu finden, dass Relationen von der Gestalt:

$$|P_i X_i| = 1, \quad |P_i P_\varkappa| = |P_i X_\varkappa| = |X_i X_\varkappa| = 0$$

bestehen.

Zunächst verfahren wir genau so wie früher; wenn nicht alle $|\varphi_i \varphi_\varkappa|$ identisch verschwinden, so bestimmen wir wie auf S. 238 f. r solche unabhängige Functionen: P_1, X_1, $\varphi_1' \cdots \varphi_{r-2}'$ von den φ, dass die Gleichungen:

$$(23) \qquad |P_1 X_1| = 1, \quad |P_1 \varphi_\varkappa'| = 0, \quad |X_1 \varphi_\varkappa'| = 0 \qquad {\scriptstyle (\varkappa = 1 \cdots r-2)}$$

identisch erfüllt sind. Nunmehr aber bilden wir die beiden Identitäten (vgl. Satz 2, S. 237):

$$\|\varphi_i' \varphi_\varkappa'| P_1| + \|\varphi_\varkappa' P_1| \varphi_i'| + \|P_1 \varphi_i'| \varphi_\varkappa'| \equiv 0$$
$$\|\varphi_i' \varphi_\varkappa'| X_1| + \|\varphi_\varkappa' X_1| \varphi_i'| + \|X_1 \varphi_i'| \varphi_\varkappa'| \equiv 0,$$

welche wegen der Relationen (23) die Form:

$$\|\varphi_i' \varphi_\varkappa'| P_1| \equiv 0, \quad \|\varphi_i' \varphi_\varkappa'| X_1| \equiv 0$$

erhalten. Hieraus geht hervor, dass mit $\varphi_1' \cdots \varphi_{r-2}'$ zugleich auch jedes $|\varphi_i' \varphi_\varkappa'|$ eine Lösung des zweigliedrigen vollständigen Systems: $|P_1 f| = 0$, $|X_1 f| = 0$ ist, und da jede Lösung dieses vollständigen Systems sich als eine Function von $\varphi_1' \cdots \varphi_{r-2}'$ allein darstellen lässt, so ergiebt sich, dass Relationen von der Form:

$$(24) \qquad |\varphi_i'\varphi_\varkappa'| = \overline{w}_{i\varkappa}(\varphi_1' \cdots \varphi_{r-2}') \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r-2)$$

bestehen.

Sind nicht alle $\overline{w}_{i\varkappa}$ identisch null, insbesondere etwa nicht alle $\overline{w}_{1\varkappa}$, so setzen wir: $P_2 = \varphi_1'$ und suchen eine Function F von $\varphi_1' \cdots \varphi_{r-2}'$, welche die Bedingung erfüllt:

$$|P_2 F| = \sum_1^{r-2}{}_\varkappa \overline{w}_{1\varkappa}(\varphi_1' \cdots \varphi_{r-2}') \frac{\partial F}{\partial \varphi_\varkappa'} = 1.$$

Ist $F(\varphi_1' \cdots \varphi_{r-2}')$ eine Lösung dieser linearen partiellen Differentialgleichung in den Veränderlichen $\varphi_1' \cdots \varphi_{r-2}'$, so setzen wir: $X_2 = F(\varphi_1' \cdots \varphi_{r-2}')$ und bilden nunmehr die beiden linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(25) \qquad \begin{cases} |P_2 f| = \sum_1^{r-2}{}_\varkappa |P_2 \varphi_\varkappa'| \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_\varkappa'} = 0 \\ |X_2 f| = \sum_1^{r-2}{}_\varkappa |X_2 \varphi_\varkappa'| \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_\varkappa'} = 0 \end{cases}$$

in den Veränderlichen $\varphi_1' \cdots \varphi_{r-2}'$. Die Gleichungen (25) sind offenbar von einander unabhängig, ausserdem bilden sie ein zweigliedriges vollständiges System, denn es ergiebt sich:

$$|P_2|X_2 f|| - |X_2|P_2 f|| \equiv ||P_2 X_2| f| \equiv |1 f| \equiv 0,$$

sie haben demnach gerade $r-4$ unabhängige Lösungen: $\varphi_1'' \cdots \varphi_{r-4}''$ gemein. Man erkennt überdies leicht, dass P_2, X_2, $\varphi_1'' \cdots \varphi_{r-4}''$ unabhängige Functionen von $\varphi_1' \cdots \varphi_{r-2}'$ sind und dass jedes $|\varphi_i''\varphi_\varkappa''|$ sich als eine Function von $\varphi_1'' \cdots \varphi_{r-4}''$ allein darstellen lässt.

Das Functionensystem: $\varphi_1'' \cdots \varphi_{r-4}''$ behandeln wir nun genau so, wie vorhin das Functionensystem: $\varphi_1' \cdots \varphi_{r-2}'$ und indem wir so fortfahren, gelangen wir schliesslich zu r solchen unabhängigen Functionen: $P_1 \cdots P_{m+q}$, $X_1 \cdots X_m$ der φ, welche in den gewünschten Beziehungen:

$$|P_i X_i| = 1, \quad |P_i P_\varkappa| = |P_i X_\varkappa| = |X_i X_\varkappa| = 0$$

stehen. Das weitere ist dann wie auf S. 240 f.

§ 63.

Das im vorigen Paragraphen behandelte allgemeine Problem wollen wir jetzt etwas specialisiren. Wir wollen nämlich untersuchen, unter welchen Bedingungen es möglich ist, die Zahl n so zu wählen, dass es in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige *homogene* Functionengruppe giebt, welche die folgenden Eigenschaften besitzt: sie soll r unabhängige Functionen: $h_1 \cdots h_r$ enthalten, welche in den p homogen von erster Ordnung sind, und diese r Functionen sollen vorgelegte Relationen von der Form:

$$(26) \qquad (h_i h_\varkappa)_{xp} = w_{i\varkappa}(h_1 \cdots h_r) \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

erfüllen.

Soll es eine Functionengruppe von der verlangten Beschaffenheit geben, so müssen die Functionen $w_{i\varkappa}$ dem Satze 1, S. 234 zufolge die Gleichungen:

$$(27) \qquad \begin{cases} w_{i\varkappa}(h_1 \cdots h_r) + w_{\varkappa i}(h_1 \cdots h_r) = 0 \\ \sum_1^r {}^\nu \left\{ w_{j\nu} \frac{\partial w_{i\varkappa}}{\partial h_\nu} + w_{i\nu} \frac{\partial w_{\varkappa j}}{\partial h_\nu} + w_{\varkappa\nu} \frac{\partial w_{ji}}{\partial h_\nu} \right\} = 0 \\ \qquad (i, \varkappa, j = 1 \cdots r) \end{cases}$$

identisch befriedigen. Zu diesen Bedingungen tritt jetzt augenscheinlich noch die hinzu, dass die $w_{i\varkappa}$ homogene Functionen erster Ordnung von $h_1 \cdots h_r$ sein müssen.

Sind die angegebenen Bedingungen erfüllt, so können wir uns nach dem Theoreme 37 immer, etwa in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige Functionengruppe: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ gegeben denken, für welche die Relationen:

$$(28) \qquad (\varphi_i \varphi_\varkappa)_{xp} = w_{i\varkappa}(\varphi_1 \cdots \varphi_r) \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

bestehen. Allerdings brauchen hier $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ keineswegs homogen von erster Ordnung in den p zu sein, aber es lässt sich nachweisen, dass es stets eine Berührungstransformation von der Gestalt:

$$(29) \qquad z' = z + \Omega(x, p), \quad x_i' = \Xi_i(x, p), \quad p_i' = \Pi_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

giebt, bei deren Ausführung $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ in solche Functionen: $H_1 \cdots H_r$ von $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$ übergehen, welche in den p' homogen von erster Ordnung sind. Diese Functionen: $H_1 \cdots H_r$ stehen dann in den Beziehungen:

$$(H_i H_\varkappa)_{x'p'} = w_{i\varkappa}(H_1 \cdots H_r) \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

und bestimmen daher eine r-gliedrige homogene Functionengruppe von der verlangten Beschaffenheit.

Will man das Vorhandensein einer derartigen Berührungstransformation (29) nachweisen, so genügt es, die Functionengruppe: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ auf eine solche kanonische Form: $P_1 \cdots P_m$, $X_1 \cdots X_q$ $(m + q = r,\ m > 0)$ zu bringen, dass die P_i homogen von erster, die X_i homogen von nullter Ordnung in $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ werden. Ist nämlich eine derartige kanonische Form gefunden, so lassen sich $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ als Functionen von: $P_1 \cdots P_m$, $X_1 \cdots X_q$ darstellen und zwar werden sie offenbar homogen von erster Ordnung in $P_1 \cdots P_m$. Fügt man nun zu: $P_1 \cdots P_m$, $X_1 \cdots X_q$ solche Functionen: $P_{m+1} \cdots P_n$, $X_{q+1} \cdots X_n$ der x, p hinzu, dass $P_1 \cdots P_n$, $X_1 \cdots X_n$ eine $2n$-gliedrige kanonische Gruppe wird, so giebt es nach Theorem 13, S. 130 eine Berührungstransformation von der Form:

$$z' = z + \Omega(x, p), \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \quad (i = 1 \cdots n)$$

und diese führt augenscheinlich: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ in gewisse Functionen: $H_1 \cdots H_r$ von $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$ über, welche in den p' homogen von erster Ordnung sind.

Es bleibt uns also nur noch übrig, eine solche kanonische Form: $P_1 \cdots P_m$, $X_1 \cdots X_q$ $(m+q=r,\ m>0)$ der Functionengruppe: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ zu bestimmen, dass die P homogene Functionen erster Ordnung von $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ werden und die X homogene Functionen nullter Ordnung. Das wollen wir jetzt thun.

Verschwänden in den Gleichungen (28) alle $w_{i\varkappa}(\varphi_1 \cdots \varphi_r)$ identisch, so könnten wir setzen: $P_1 = \varphi_1, \cdots P_r = \varphi_r$ und hätten daher schon eine kanonische Form von der verlangten Beschaffenheit. Wir wollen daher annehmen, dass nicht alle $w_{i\varkappa}$ und dass insbesondere nicht alle $w_{1\varkappa}$ gleich Null sind.

Unter den gemachten Voraussetzungen können wir φ_1 als die Function P_1 wählen und müssen nun zunächst eine Function f von den Grössen:

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = v_1, \cdots \frac{\varphi_r}{\varphi_1} = v_{r-1}$$

bestimmen, welche zu: $P_1 = \varphi_1$ in der Beziehung: $(\varphi_1 f)_{xp} = 1$ steht. Für f erhalten wir auf diese Weise die Bedingung:

$$\sum_1^{r-1} {}_{\varkappa} (\varphi_1 v_\varkappa)_{xp} \frac{\partial f}{\partial v_\varkappa} = 1, \tag{30}$$

deren Coefficienten $(\varphi_1 v_\varkappa)_{xp}$ offenbar homogen von nullter Ordnung in $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ und daher Functionen von: $v_1 \cdots v_{r-1}$ allein sind. In Folge dessen ist (30) eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung in den Veränderlichen: $v_1 \cdots v_{r-1}$. Irgend eine Lösung dieser Differentialgleichung wählen wir als X_1.

Nunmehr bilden wir in den Veränderlichen: $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ die beiden linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$\tag{31} \begin{cases} (P_1 F) = \sum_1^r {}_{\varkappa} (P_1 \varphi_\varkappa) \frac{\partial F}{\partial \varphi_\varkappa} = 0 \\ (X_1 F) = \sum_1^r {}_{\varkappa} (X_1 F) \frac{\partial F}{\partial \varphi_\varkappa} = 0, \end{cases}$$

welche offenbar von einander unabhängig sind, und zeigen in der bekannten Weise, dass sie ein zweigliedriges vollständiges System bilden, dessen $r-2$ unabhängige Lösungen von P_1 und X_1 unabhängig sind und eine $(r-2)$-gliedrige Functionengruppe in $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ bestimmen.

Wären alle $r-2$ unabhängigen Lösungen: $F_1 \cdots F_{r-2}$ dieses vollständigen Systems homogen von nullter Ordnung in den φ, so würden die $(F_i F_\varkappa)$ homogene Functionen (-1)-ter Ordnung von $\varphi_1 \cdots \varphi_r$, sie müssten also, da sie sich durch $F_1 \cdots F_{r-2}$ allein ausdrücken lassen, sämmtlich identisch verschwinden. Wir würden in diesem Falle setzen: $X_2 = F_1, \cdots X_{r-1} = F_{r-2}$ und es wäre: $P_1, X_1, X_2 \cdots X_{r-1}$ eine solche kanonische Form unsrer r-gliedrigen Functionengruppe, wie wir sie suchen.

Sind dagegen nicht alle Lösungen des vollständigen Systems (31) homogen von nullter Ordnung in den φ, so bilden die Gleichungen (31) zusammen mit:

$$\varphi_1 \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} + \cdots + \varphi_r \frac{\partial F}{\partial \varphi_r} = 0 \tag{32}$$

ein dreigliedriges vollständiges System, was man sehr leicht daraus erkennt, dass die $(P_1 \varphi_\varkappa)$ homogene Functionen erster, die $(X_1 \varphi_\varkappa)$ solche nullter Ordnung von $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ sind. Es seien nun: $\psi_2 \cdots \psi_{r-2}$ unabhängige Lösungen dieses dreigliedrigen vollständigen Systems, ferner sei φ_1' eine Function von $\varphi_1 \cdots \varphi_r$, welche die Gleichungen (31) und ausserdem noch die Gleichung:

$$\varphi_1 \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} + \cdots + \varphi_r \frac{\partial F}{\partial \varphi_r} = F \tag{33}$$

befriedigt — dass es eine solche Function φ_1' giebt, sieht man ebenfalls sehr leicht ein —, dann ist:

$$\varphi_1', \; \varphi_2' = \psi_2 \varphi_1', \; \cdots \; \varphi_{r-2}' = \psi_{r-2} \varphi_1'$$

eine Form der besprochenen $(r-2)$-gliedrigen Functionengruppe. In den Relationen:

$$(\varphi_i' \varphi_\varkappa')_{xp} = \overline{w}_{i\varkappa}(\varphi_1' \cdots \varphi_{r-2}') \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r-2),$$

welche zu dieser Form der betreffenden Gruppe gehören, sind die $\overline{w}_{i\varkappa}$ homogene Functionen erster Ordnung von $\varphi_1' \cdots \varphi_{r-2}'$, das folgt aus dem Umstande, dass jedes φ_i' und ebenso jedes $(\varphi_i' \varphi_\varkappa')$ homogen von erster Ordnung in $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ ist.

Behandeln wir jetzt die $(r-2)$-gliedrige Gruppe: $\varphi_1' \cdots \varphi_{r-2}'$ ebenso, wie bisher die r-gliedrige: $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ und fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten wir schliesslich die gewünschte kanonische

Form: $P_1 \cdots P_m$, $X_1 \cdots X_q$ unsrer r-gliedrigen Gruppe, wo die P homogen von erster Ordnung in den φ sind und die X homogen von nullter Ordnung.

Nach S. 245 f. ist nunmehr bewiesen, dass es unter den Voraussetzungen, welche wir über die Functionen $w_{i\varkappa}$ gemacht haben, stets eine r-gliedrige homogene Functionengruppe giebt, welche r unabhängige Functionen: $h_1(x, p) \cdots h_r(x, p)$ enthält, die in den Beziehungen:

$$(h_i h_\varkappa)_{xp} = w_{i\varkappa}(h_1 \cdots h_r) \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

stehen und in den p homogen von erster Ordnung sind.

Hat man in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige Functionengruppe: $h_1(x, p) \cdots h_r(x, p)$ von dieser Beschaffenheit, und führt man auf $h_1 \cdots h_r$ irgend eine homogene Berührungstransformation:

(34) $$x_i' = \Xi_i(x, p), \quad p_i' = \Pi_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

in diesen Veränderlichen aus, so erhält man natürlich in $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$ r unabhängige Functionen $H_1(x', p') \cdots H_r(x', p')$, welche in den p' homogen von erster Ordnung sind und in den Beziehungen:

$$(H_i H_\varkappa)_{x'p'} = w_{i\varkappa}(H_1 \cdots H_r) \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

stehen. Sind andrerseits $H_1(x', p') \cdots H_r(x', p')$ irgend r unabhängige Functionen von der eben geschilderten Beschaffenheit, so giebt es nach Theorem 34, S. 229 immer eine homogene Berührungstransformation (34), welche $h_1(x, p) \cdots h_r(x, p)$ bezüglich in $H_1(x', p') \cdots H_r(x', p')$ überführt.

Es gilt demnach das

Theorem 38. *Soll es wenigstens für gewisse Werthe von n in den $2n$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige homogene Functionengruppe geben, die r solche unabhängige Functionen: $h_1(x, p) \cdots h_r(x, p)$ enthält, welche in den p homogen von erster Ordnung sind und welche in Beziehungen von der Gestalt:*

(26) $$(h_i h_\varkappa)_{xp} = w_{i\varkappa}(h_1 \cdots h_r) \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

stehen, mit vorgeschriebenen Functionen $w_{i\varkappa}$, so ist nothwendig und hinreichend, dass die $w_{i\varkappa}$ homogene Functionen erster Ordnung der h sind und dass sie die Gleichungen:

(27) $$\begin{cases} w_{i\varkappa}(h_1 \cdots h_r) + w_{\varkappa i}(h_1 \cdots h_r) = 0 \\ \sum_1^r {}_\nu \left\{ w_{\nu j} \dfrac{\partial w_{i\varkappa}}{\partial h_\nu} + w_{\nu i} \dfrac{\partial w_{\varkappa j}}{\partial h_\nu} + w_{\nu\varkappa} \dfrac{\partial w_{ji}}{\partial h_\nu} \right\} = 0 \\ \qquad (i, \varkappa, j = 1 \cdots r) \end{cases}$$

identisch befriedigen. Sind diese Bedingungen erfüllt und hat man in den $2n$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ irgend eine

r-gliedrige homogene Functionengruppe: $h_1(x,p)\cdots h_r(x,p)$ von der betreffenden Beschaffenheit, so findet man alle andern derartigen Functionengruppen in $2n$ Veränderlichen, wenn man auf: $h_1(x,p)\cdots h_r(x,p)$ die allgemeinste homogene Berührungstransformation:

$$x_i' = \Xi_i(x,p),\quad p_i' = \Pi_i(x,p) \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

*in $x_1\cdots x_n$, $p_1\cdots p_n$ ausführt.**)

Sind r^2 Functionen $w_{i\varkappa}(h_1\cdots h_r)$ vorgelegt, welche in den h homogen von erster Ordnung sind und die Gleichungen (27) identisch befriedigen, so kann man *jedenfalls durch Integration simultaner Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen* eine r-gliedrige homogene Functionengruppe finden, die r unabhängige homogene Functionen erster Ordnung: $h_1(x,p)\cdots h_r(x,p)$ enthält, für welche die Relationen (26) bestehen. Dagegen kann man stets *ohne* Integration die ganzen Zahlen m und q finden, welche in der oben betrachteten kanonischen Form: $P_1\cdots P_m$, $X_1\cdots X_q$ der unbekannten homogenen Functionengruppe: $h_1(x,p)\cdots h_r(x,p)$ auftreten.

Die Differenz $m-q$ ist nämlich absolut genommen gleich der Anzahl der unabhängigen ausgezeichneten Functionen, welche die unbekannte Functionengruppe: $h_1(x,p)\cdots h_r(x,p)$ enthält. Absolut genommen kann daher diese Differenz nach dem auf S. 191 beschriebenen Verfahren bestimmt werden, indem man die Determinante:

$$\begin{vmatrix} w_{11}(h) & \cdot & w_{1r}(h) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ w_{r1}(h) & \cdot & w_{rr}(h) \end{vmatrix}$$

und ihre Unterdeterminanten untersucht.

Um nun auch das Vorzeichen von $m-q$ zu finden, beachte man Folgendes: Die ausgezeichneten Functionen der gesuchten Gruppe: $h_1(x,p)\cdots h_r(x,p)$ sind alle oder nicht alle von nullter Ordnung, jenachdem entweder $q-m$ oder $m-q$ positiv ist. Welcher von diesen beiden Fällen eintritt, das lässt sich auf Grund von S. 219 durch Untersuchung der Matrix:

$$\begin{vmatrix} w_{11}(h) & \cdot & w_{1r}(h) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ w_{r1}(h) & \cdot & w_{rr}(h) \\ h_1 & \cdot & h_r \end{vmatrix}$$

entscheiden.

Ist die Zahl $m-q$ bestimmt, so ergeben sich m und q selbst aus der Bedingung: $m+q=r$.

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1888.

Abtheilung III.

Infinitesimale Berührungstransformationen.

Die wichtigsten Ergebnisse des ersten Abschnitts wurden unter fortwährender Benutzung des Begriffs der *infinitesimalen Punkttransformationen* abgeleitet, während Rechnungen mit *endlichen Punkttransformationen* verhältnissmässig selten vorkamen. Ebenso sollen von jetzt ab im Grossen und Ganzen nur *infinitesimale Berührungstransformationen* benutzt werden, während die *endlichen* zurücktreten. Es wird sich zeigen, dass auf diese Weise eine ebenso grosse Vereinfachung erzielt wird, wie im ersten Abschnitt bei den Untersuchungen über Punkttransformationen.

Von jetzt ab werden einige der Ergebnisse des ersten Abschnitts als bekannt vorausgesetzt, allerdings nur die hauptsächlichsten.

Kapitel 14.

Die Form der infinitesimalen Berührungstransformationen.

In der ersten Abtheilung des vorliegenden Abschnitts haben sich verschiedene Kategorien von *endlichen* Berührungstransformationen ergeben; denen entsprechen nun ebensoviele Kategorien von *infinitesimalen*. Wir wollen diese in dem gegenwärtigen Kapitel der Reihe nach betrachten und ihre allgemeine Form bestimmen.

§ 64.

Eine infinitesimale Transformation:

$$Xf = \zeta(z, x, p)\frac{\partial f}{\partial z} + \sum_1^n {}_i\, \xi_i(z, x, p)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n {}_\varkappa\, \pi_\varkappa(z, x, p)\frac{\partial f}{\partial p_\varkappa}$$

in den Veränderlichen z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ heisst eine *infinitesimale Berührungstransformation*, wenn sie die Pfaffsche Gleichung:

$$(1) \qquad dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

invariant lässt.

Da Xf den z, x, p die unendlich kleinen Zuwachse:

$$\delta z = \zeta \delta t, \quad \delta x_i = \xi_i \delta t, \quad \delta p_i = \pi_i \delta t \qquad (i = 1 \cdots n)$$

ertheilt, so lässt es nach Abschnitt I, S. 531 die Pfaffsche Gleichung (1) dann und nur dann invariant, wenn der Ausdruck:

$$\frac{\delta}{\delta t}(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n) = d\zeta - \sum_1^n {}_i (\pi_i dx_i + p_i d\xi_i)$$

die Form:

$$\sigma(z, x, p) \cdot (dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

besitzt, oder wie wir es damals ausdrückten, wenn eine Gleichung von der Form:

$$X(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n) = \sigma(z, x, p)(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

identisch besteht.

Wünschen wir daher alle infinitesimalen Berührungstransformationen Xf zu finden, so haben wir nur ζ, $\xi_1 \cdots \xi_n$, $\pi_1 \cdots \pi_n$, σ in allgemeinster Weise so zu bestimmen, dass identisch wird:

$$d\zeta - \sum_1^n {}_i (\pi_i dx_i + p_i d\xi_i) = \sigma(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n). \tag{2}$$

Die Gleichung (2) ist äquivalent mit dem folgenden Systeme von $2n+1$ Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} - p_1 \dfrac{\partial \xi_1}{\partial z} - \cdots - p_n \dfrac{\partial \xi_n}{\partial z} = \sigma \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial x_i} - p_1 \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_i} - \cdots - p_n \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_i} - \pi_i = -\sigma p_i \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial p_i} - p_1 \dfrac{\partial \xi_1}{\partial p_i} - \cdots - p_n \dfrac{\partial \xi_n}{\partial p_i} = 0 \\ \qquad (i = 1 \cdots n), \end{cases}$$

welches wir offenbar so schreiben können:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}(\zeta - p_1 \xi_1 - \cdots - p_n \xi_n) = \sigma \\ \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\zeta - p_1 \xi_1 - \cdots - p_n \xi_n) + \sigma p_i = \pi_i \\ \dfrac{\partial}{\partial p_i}(\zeta - p_1 \xi_1 - \cdots - p_n \xi_n) = -\xi_i \\ \qquad (i = 1 \cdots n); \end{cases}$$

setzen wir daher:

$$\zeta - p_1 \xi_1 - \cdots - p_n \xi_n = -W,$$

so bekommen wir:

$$(5)\quad\begin{cases}\xi_i = \dfrac{\partial W}{\partial p_i}, \quad \pi_i = -\dfrac{\partial W}{\partial x_i} - p_i\dfrac{\partial W}{\partial z}\\ \zeta = p_1\dfrac{\partial W}{\partial p_1} + \cdots + p_n\dfrac{\partial W}{\partial p_n} - W, \quad \sigma = -\dfrac{\partial W}{\partial z}\\ (i = 1 \cdots n),\end{cases}$$

während die Function W vollkommen willkürlich bleibt.

Dieses Ergebniss wollen wir in einem Satze aussprechen:

Satz 1. *Die allgemeinste infinitesimale Berührungstransformation in den Veränderlichen z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ besitzt die Form:*

$$(6)\quad\begin{cases}\dfrac{\delta z}{\delta t} = p_1\dfrac{\partial W}{\partial p_1} + \cdots + p_n\dfrac{\partial W}{\partial p_n} - W\\ \dfrac{\delta x_i}{\delta t} = \dfrac{\partial W}{\partial p_i}, \quad \dfrac{\delta p_i}{\delta t} = -\dfrac{\partial W}{\partial x_i} - p_i\dfrac{\partial W}{\partial z}.\\ (i = 1 \cdots n),\end{cases}$$

wo W eine willkürliche Function von z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ bezeichnet. Dass (6) *eine infinitesimale Berührungstransformation ist und als solche die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ invariant lässt, zeigt sich darin, dass vermöge* (6) *die Identität:*

$$(7)\quad \frac{\delta}{\delta t}(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n) \equiv -\frac{\partial W}{\partial z}(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n).$$

besteht.

Die Function $W(z, x, p)$, durch welche die infinitesimale Berührungstransformation (6) bestimmt ist, nennen wir die *charakteristische Function* dieser Transformation.

Ist eine infinitesimale Berührungstransformation vorgelegt, etwa:

$$\zeta\frac{\partial f}{\partial z} + \sum_1^n {}_i\, \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n {}_i\, \pi_i \frac{\partial f}{\partial p_i},$$

so kann man sofort ihre charakteristische Function W angeben, sie lautet nämlich:

$$W = p_1\xi_1 + \cdots + p_n\xi_n - \zeta.$$

Ist umgekehrt irgend eine Function $W(z, x, p)$ gegeben, so bestimmen die Gleichungen (6) die infinitesimale Berührungstransformation, welche W zur charakteristischen Function hat; das Symbol dieser infinitesimalen Transformation lautet:

$$\left(\sum_1^n {}_i\, p_i\frac{\partial W}{\partial p_i} - W\right)\frac{\partial f}{\partial z} + \sum_1^n {}_i\, \frac{\partial W}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_1^n {}_i \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial W}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p_i}$$

oder bei Anwendung des Zeichens [ ]:

$$(6a)\quad [Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Es leuchtet hier unmittelbar ein, dass zwei Functionen W_1 und W_2, welche sich nur um einen constanten Faktor unterscheiden, zwei infinitesimale Berührungstransformationen liefern, welche äquivalent sind, denn die Symbole:

$$[W_1 f] - W_1 \frac{\partial f}{\partial z}, \quad [W_2 f] - W_2 \frac{\partial f}{\partial z}$$

der letzteren unterscheiden sich nur um einen constanten Faktor.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass die charakteristische Function W schon an und für sich die betreffende infinitesimale Berührungstransformation repräsentirt und in Folge dessen das Symbol (6a) vollständig ersetzt. Es ist demnach ganz berechtigt, wenn wir geradezu von der *infinitesimalen Berührungstransformation* $W(z, x, p)$ reden.

Auf Grund der vorstehenden Betrachtungen können wir dem Satze 1 folgende Fassung geben:

Theorem 39. *Jede infinitesimale Berührungstransformation:*

$$\zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \sum_1^n{}_i \left(\xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \pi_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\right)$$

ist durch die Function:

$$W = p_1 \xi_1 + \cdots + p_n \xi_n - \zeta,$$

ihre sogenannte charakteristische Function vollständig bestimmt. Andrerseits ist jede beliebige Function $W(z, x, p)$ die charakteristische Function einer ganz bestimmten infinitesimalen Berührungstransformation, welche durch das Symbol:

$$[Wf] - W \frac{\partial f}{\partial z}$$

*dargestellt wird.**)

Beispiel. Setzen wir:

$$W = \sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2},$$

so wird:

$$\frac{\delta x_i}{\delta t} = \frac{p_i}{\sqrt{1 + p_1^2 + \cdots + p_n^2}}, \quad \frac{\delta p_i}{\delta t} = 0$$

$$\frac{\delta z}{\delta t} = -\frac{1}{\sqrt{1 + p_1^2 + \cdots + p_n^2}}$$

$$(i = 1 \cdots n),$$

---

*) Der Begriff *infinitesimale Berührungstransformation* wurde eingeführt in der Abhandlung „Kurzes Resumé mehrerer neuer Theorien“ von Sophus Lie; Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, 3. Mai 1872; vgl. auch Math. Ann. Bd. VIII, Göttinger Nachrichten Decbr. 1874, Archiv for Mathematik Bd. 1, 1876 und Bd. 6, 1881, Abhandlungen der Kgl. Sächs. Ges. d. W. 1888.

hieraus ergiebt sich die Gleichung:

$$\sqrt{\left(\frac{\delta z}{\delta t}\right)^2+\left(\frac{\delta x_1}{\delta t}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\delta x_n}{\delta t}\right)^2}=1,$$

welche, nebenbei bemerkt, aussagt, dass alle Elemente z, x, p um gleichlange infinitesimale Strecken δt verschoben werden.

Wählen wir insbesondere $n = 2$, so erhalten wir im gewöhnlichen Raume eine infinitesimale Berührungstransformation, welche jedes Flächenelement senkrecht zu seiner Ebene um die unendlich kleine Strecke δt verschiebt (eine infinitesimale Paralleltransformation).

Das Rechnen mit infinitesimalen Berührungstransformationen gestaltet sich wesentlich einfacher als das Rechnen mit endlichen Berührungstransformationen. Es beruht das in erster Linie darauf, dass eine infinitesimale Berührungstransformation durch *eine einzige Function* W der Veränderlichen z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ vollständig bestimmt ist, denn aus diesem Umstande folgt sogleich, dass *jedes Rechnen mit infinitesimalen Berührungstransformationen auf ein Rechnen mit charakteristischen Functionen hinauskommt.*

Aus Abschnitt I wissen wir, dass es bei Untersuchungen über Transformationsgruppen im Allgemeinen genügt, die infinitesimalen Transformationen in Betracht zu ziehen. Hieraus ergiebt sich für die Behandlung der Gruppen von Berührungstransformationen ein gewaltiger Vortheil.

Wir wenden uns jetzt zur näheren Untersuchung der infinitesimalen Berührungstransformationen in z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$.

Jede infinitesimale Berührungstransformation in z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ erzeugt eine eingliedrige Gruppe, deren Transformationen Berührungstransformationen sind, denn sie lassen nach Abschnitt I, S. 530 sämmtlich die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

invariant. Lässt umgekehrt eine eingliedrige Gruppe in den Veränderlichen z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

invariant, so besitzt ihre infinitesimale Transformation*) dieselbe Eigenschaft. Also:

*) Im Texte werden überall nur solche eingliedrige Gruppen betrachtet, die von infinitesimalen Transformationen erzeugt sind. Es scheint unnöthig, den Entwickelungen des Textes dieselbe allgemeine Fassung zu geben, wie in Abschnitt I.

Satz 2. *Eine eingliedrige Gruppe in den Veränderlichen z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ ist dann und nur dann eine Gruppe von Berührungstransformationen, wenn ihre infinitesimale Transformation eine Berührungstransformation ist.*

Ist W die charakteristische Function einer infinitesimalen Berührungstransformation, so bezeichnen wir die von der letzteren erzeugte eingliedrige Gruppe von Berührungstransformationen auch wohl als *die eingliedrige Gruppe W.*

Eine infinitesimale Berührungstransformation reducirt sich dann und nur dann auf die identische Transformation, wenn ihr Symbol identisch verschwindet, wenn also die Zuwachse:

$$\delta z = \left(\sum_1^n{}_i\, p_i \frac{\partial W}{\partial p_i} - W\right)\delta t, \quad \delta x_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}\delta t, \quad \delta p_i = -\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial W}{\partial z}\right)\delta t$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

sämmtlich identisch null sind; hierfür ist, wie man aus der Gleichung:

$$W = \sum_1^n{}_i\, p_i \frac{\delta x_i}{\delta t} - \frac{\delta z}{\delta t}$$

ersieht, nothwendig und hinreichend, dass W identisch verschwindet.

Sind:

$$A_1 f = [W_1 f] - W_1 \frac{\partial f}{\partial z}, \quad A_2 f = [W_2 f] - W_2 \frac{\partial f}{\partial z}$$

die Symbole zweier infinitesimaler Berührungstransformationen und versteht man unter c_1, c_2 zwei beliebige Constanten, so ist auch:

$$c_1 A_1 f + c_2 A_2 f = [c_1 W_1 + c_2 W_2,\, f] - (c_1 W_1 + c_2 W_2) \frac{\partial f}{\partial z}$$

eine infinitesimale Berührungstransformation und zwar eine mit der charakteristischen Function: $c_1 W_1 + c_2 W_2$.

Nun sind r infinitesimale Transformationen: $A_1 f \cdots A_r f$ dann und nur dann von einander unabhängig, wenn es unmöglich ist, r solche nicht sämmtlich verschwindende Constanten $c_1 \cdots c_r$ anzugeben, dass der Ausdruck: $c_1 A_1 f + \cdots + c_r A_r f$ identisch null wird. Folglich bekommen wir den

Satz 3. *Die r infinitesimalen Berührungstransformationen:*

$$W_1(z, x, p) \cdots W_r(z, x, p)$$

sind dann und nur dann von einander unabhängig, wenn zwischen $W_1 \cdots W_r$ keine Identität von der Form: $c_1 W_1 + \cdots + c_r W_r \equiv 0$ besteht, in welcher die Constanten $c_1 \cdots c_r$ nicht sämmtlich verschwinden.

Soll eine *Function* $\Phi(z, x, p)$ die infinitesimale Berührungstransformation: $[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}$ gestatten, so ist (Abschnitt I, S. 96) nothwendig und hinreichend, dass der Ausdruck:

$$[W\Phi] - W\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

identisch verschwindet. Ist diese Bedingung erfüllt, so gestattet $\Phi(z, x, p)$ zugleich alle endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppe: $[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}$.

Soll andrerseits eine *Gleichung:* $F(z, x, p) = 0$ die infinitesimale Berührungstransformation $W(z, x, p)$ und demnach auch alle von derselben erzeugten endlichen Berührungstransformationen gestatten, so ist (Abschnitt I, S. 112) nothwendig und hinreichend, dass der Ausdruck:

$$[WF] - W\frac{\partial F}{\partial z}$$

vermöge $F = 0$ verschwindet.

Eine Gleichung, welche die infinitesimale Berührungstransformation $W(z, x, p)$ gestattet, ist die Gleichung $W = 0$ selbst, denn der Ausdruck:

$$[WW] - W\frac{\partial W}{\partial z}$$

verschwindet offenbar vermöge $W = 0$. Umgekehrt können wir, wenn irgend eine Gleichung: $\Phi(z, x, p) = 0$ vorliegt, sofort eine infinitesimale Berührungstransformation angeben, bei welcher sie invariant bleibt, eine solche ist nämlich die Transformation: $\Phi(z, x, p)$.

Dass die Gleichung $W = 0$ gegenüber der infinitesimalen Berührungstransformation $W(z, x, p)$ eine gewisse ausgezeichnete Stellung einnimmt, geht noch deutlicher aus der folgenden einfachen Betrachtung hervor.

Die infinitesimale Berührungstransformation $W(z, x, p)$ verwandelt jedes Element z, x, p in ein unendlich benachbartes: $z + \delta z$, $x + \delta x$, $p + \delta p$. Es liegt daher nahe zu fragen, ob oder wann dieses letztere mit dem Elemente z, x, p vereinigt liegt. Die Beantwortung dieser Frage ist sehr leicht. Wir wissen, dass die vereinigte Lage dann und nur dann eintritt, wenn die Gleichung:

$$\frac{\delta z}{\delta t} - p_1\frac{\delta x_1}{\delta t} - \cdots - p_n\frac{\delta x_n}{\delta t} \equiv W(z, x, p) = 0$$

erfüllt ist. Also sehen wir:

Die infinitesimale Berührungstransformation $W(z, x, p)$ führt das Element z, x, p dann und nur dann in ein unendlich benachbartes, mit ihm vereinigt liegendes über, wenn es der Gleichung: $W(z, x, p) = 0$ genügt.

Früher stiessen wir wiederholt auf solche infinitesimale Transformationen in z, x, p, welche die Form $[Wf]$ besassen. Diese infinitesimalen Transformationen $[Wf]$ sind *keine* Berührungstransformationen, denn der Ausdruck:

$$p_1 \frac{\delta x_1}{\delta t} + \cdots + p_n \frac{\delta x_n}{\delta t} - \frac{\delta z}{\delta t}$$

verschwindet für sie identisch, was nur bei solchen infinitesimalen Berührungstransformationen eintritt, die sich auf die identische Transformation reduciren und das thun die $[Wf]$ offenbar nicht. Dagegen steht die Transformation $[Wf]$ allerdings zu einer gewissen infinitesimalen Berührungstransformation, nämlich zu

$$[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}$$

in naher Beziehung, denn sie ertheilt augenscheinlich jedem Werthsystem z, x, p, welches der Gleichung $W = 0$ genügt, genau dieselben Zuwachse wie diese. Mit Berücksichtigung von Abschnitt I, Kap. 7 und Kap. 14 können wir daher sagen:

Die infinitesimale Transformation:

$$[Wf]$$

und die infinitesimale Berührungstransformation:

$$[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}$$

lassen beide die Gleichung $W = 0$ invariant und transformiren beide die Elemente z, x, p, welche dieser Gleichung genügen, in gleicher Weise. Von den beiden zugehörigen eingliedrigen Gruppen gilt dasselbe.

Erfüllt ein m-gliedriges Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$ in den Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ die Pfaffsche Gleichung: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$, so giebt es (vgl. S. 41) m solche Functionen $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ von den z, x, p, dass die Gleichung:

$$\text{(A)} \qquad dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = \lambda_1 . d\Phi_1 + \cdots + \lambda_m . d\Phi_m$$

für jedes Werthsystem z, x, p, welches: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$ befriedigt, in den Differentialen $dz, dx_1 \cdots dx_n, dp_1 \cdots dp_n$ identisch besteht. Machen wir daher in (A) die Substitution:

$$dx_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}\delta t, \quad dp_i = -\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial W}{\partial z}\right)\delta t,$$

$$dz = \left(p_1 \frac{\partial W}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial W}{\partial p_n} - W\right)\delta t,$$

so erhalten wir eine Gleichung:

$$-W = \lambda_1\left([W\Phi_1] - W\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right) + \cdots + \lambda_m\left([W\Phi_m] - W\frac{\partial \Phi_m}{\partial z}\right),$$

welche bei beliebiger Wahl der Function $W(z, x, p)$ vermöge: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$ besteht. Setzen wir insbesondere voraus, dass das Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$ die infinitesimale Berührungstransformation W gestattet, so verschwinden die m Ausdrücke:

$$[W\Phi_\mu] - W\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial z} \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

sämmtlich vermöge: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$ und wir bekommen den

Satz 4. *Gestattet ein m-gliedriges Gleichungensystem:*

$$\Phi_\mu(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0 \qquad (\mu = 1 \cdots m),$$

welches eine Elementmannigfaltigkeit des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ darstellt, die infinitesimale Berührungstransformation: $W(z, x, p)$, so befriedigen alle Elemente dieser Elementmannigfaltigkeit die Gleichung: $W = 0$.

Andrerseits gilt der

Satz 5. *Ist ein m-gliedriges Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$ in den Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ so beschaffen, dass alle $[\Phi_i \Phi_\varkappa]$ vermöge: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$ verschwinden, so gestattet dieses Gleichungensystem jede infinitesimale Berührungstransformation, deren charakteristische Function W vermöge: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$ verschwindet.*

Unter den Voraussetzungen dieses Satzes verschwinden nämlich (vgl. Kap. 4, Satz 6, S. 91) alle $[W\Phi_\mu]$ und demnach auch alle:

$$[W\Phi_\mu] - W\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial z}$$

vermöge: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_m = 0$.

In dem Satze 4 ist nach der Natur der Sache $m \gtreqless n + 1$, in Satz 5 aber ist $m \leqq n + 1$. Beschränken wir uns daher auf den Fall: $m = n + 1$, so erhalten wir durch Verbindung beider Sätze den

Satz 6. *Ein $(n + 1)$-gliedriges Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_{n+1} = 0$ in den Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$, welches eine Element-$M_n$ des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ darstellt, gestattet die infinitesimale Berührungstransformation $W(z, x, p)$ dann und nur dann, wenn alle Elemente der Element-M_n die Gleichung: $W = 0$ erfüllen.*

§ 65.

Unter den infinitesimalen Berührungstransformationen $W(z, x, p)$ sind von besonderer Wichtigkeit diejenigen, welche nicht blos die *Pfaff*sche *Gleichung*: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ invariant lassen, sondern auch den *Pfaff*schen *Ausdruck*: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n$ selbst.

Eine beliebige infinitesimale Berührungstransformation $W(z, x, p)$ befriedigt, wie wir wissen, die Gleichung:

$$\frac{\delta}{\delta t}(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n) = -\frac{\partial W}{\partial z}(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n).$$

Lässt dieselbe insbesondere auch noch den Pfaffschen Ausdruck: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n$ invariant, so genügt sie (vgl. Abschn. I, S. 531) der Bedingung:

$$\frac{\delta}{\delta t}(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n) = 0.$$

Das aber tritt dann und nur dann ein, wenn $\frac{\partial W}{\partial z}$ identisch verschwindet, wenn also W von z frei ist. Damit haben wir das

Theorem 40. *Eine infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Function $W(z, x, p)$ lässt den Pfaffschen Ausdruck: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n$ dann und nur dann invariant, wenn W eine Function von den x, p allein ist. Das allgemeine Symbol einer solchen infinitesimalen Berührungstransformation lautet:*

$$(\varphi f) + \left(p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} - \varphi\right)\frac{\partial f}{\partial z}, \tag{8}$$

wo φ eine beliebige Function von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ bezeichnet.

Lässt eine infinitesimale Berührungstransformation in den z, x, p den Pfaffschen Ausdruck: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n$ invariant, so besitzen auch alle Transformationen der von ihr erzeugten eingliedrigen Gruppe diese Eigenschaft; die betreffenden Transformationen haben daher nach Kap. 5, S. 146, Satz 19 die Gestalt:

$$z' = z + \Omega(x, p), \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \quad (i = 1 \cdots n).$$

Weiss man umgekehrt von einer eingliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen, dass alle ihre Transformationen die eben geschriebene Form besitzen, so kann man daraus schliessen, dass dieselbe von einer infinitesimalen *Berührungs*transformation von der Form (8) erzeugt ist.

Bei einer infinitesimalen Berührungstransformation mit der charakteristischen Function: $\varphi(x, p)$ werden die Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ unter sich transformirt und zwar durch die *verkürzte* infinitesimale Transformation (φf). Sehr oft ist es von Interesse, diese verkürzte Transformation für sich zu betrachten. Natürlich transformirt die von (φf) erzeugte eingliedrige Gruppe die Veränderlichen x, p genau so wie die von:

$$(\varphi f) + \left(p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} - \varphi\right)\frac{\partial f}{\partial z}$$

erzeugte eingliedrige Gruppe von Berührungstransformationen.

Die verkürzte infinitesimale Transformation (φf) reducirt sich dann und auch nur dann auf die identische Transformation, wenn φ eine Constante ist, während bei der infinitesimalen Berührungstransformation:

$$(\varphi f)+\left(p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}+\cdots+p_n\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}-\varphi\right)\frac{\partial f}{\partial z}$$

das entsprechende nur für $\varphi\equiv 0$ eintritt (vgl. S. 255).

Sollen r infinitesimale Berührungstransformationen mit den charakteristischen Functionen: $\varphi_1(x,p)\cdots\varphi_r(x,p)$ von einander unabhängig sein, so ist nach Satz 3, S. 255 nothwendig und hinreichend, dass zwischen $\varphi_1\cdots\varphi_r$ keine Identität von der Form: $c_1\varphi_1+\cdots+c_r\varphi_r\equiv 0$ besteht. Dagegen gilt der

Satz 7. *Die verkürzten infinitesimalen Transformationen:*

$$(\varphi_1 f)\cdots(\varphi_r f)$$

in den Veränderlichen x, p sind dann und nur dann von einander unabhängig, wenn $\varphi_1\cdots\varphi_r$ keine Identität von der Form:

$$c_1\varphi_1+\cdots+c_r\varphi_r\equiv c=\text{const.}$$

befriedigen.

Eine Function v von $x_1\cdots x_n$, $p_1\cdots p_n$ gestattet die infinitesimale Berührungstransformation $\varphi(x,p)$ dann und nur dann, wenn der Ausdruck (φv) identisch verschwindet.

Diese einfache Bemerkung ist von Wichtigkeit, sie enthält unter Anderm eine begriffliche Deutung der Involutionsbeziehung zwischen zwei Functionen der x,p. Zum Beispiel liefert sie sofort für die Polargruppe, welche zu einer vorgelegten m-gliedrigen Functionengruppe gehört (vgl. Theorem 20, S. 184), die folgende Definition:

Theorem 41. *Ist: $u_1(x,p)\cdots u_m(x,p)$ eine m-gliedrige Functionengruppe, so besteht die zugehörige Polargruppe aus denjenigen Functionen von $x_1\cdots x_n$, $p_1\cdots p_n$, welche bei allen infinitesimalen Berührungstransformationen invariant bleiben, deren charakteristische Functionen die Form $\psi(u_1\cdots u_m)$ haben. Die Functionen der Polargruppe verhalten sich jeder eingliedrigen Gruppe ψ gegenüber als Differentialinvarianten.**)

Da die ausgezeichneten Functionen der Functionengruppe: $u_1\cdots u_m$ dadurch definirt sind, dass sie zugleich der Polargruppe angehören, so ergiebt sich noch:

Satz 8. *Die ausgezeichneten Functionen einer Functionengruppe: $u_1\cdots u_m$ sind diejenigen Functionen derselben, welche bei allen infinitesi-*

*) Vgl. Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, Februar 1875.

malen Berührungstransformationen invariant bleiben, deren charakteristische Functionen die Form $\psi(u_1 \cdots u_m)$ *haben.*

Aus diesem Grunde werden wir die *ausgezeichneten* Functionen einer Functionengruppe auch die *invarianten Functionen* derselben nennen; man wird zugeben, dass die letztere Benennung bezeichnend ist, was von der ersteren nicht behauptet werden kann.

Die infinitesimalen Berührungstransformationen, welche wir in dem gegenwärtigen Paragraphen betrachtet haben, transformiren zwar die Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ unter sich; sie sind aber noch nicht die allgemeinsten infinitesimalen Berührungstransformationen von dieser Beschaffenheit.

Wenn eine infinitesimale Berührungstransformation die x, p unter sich transformirt, so ertheilt sie den x und den p solche Zuwachse, welche nur von den x und p abhängen, das heisst, ihre charakteristische Function $W(z, x, p)$ ist so beschaffen, dass alle $2n$ Ausdrücke:

$$\frac{\partial W}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial W}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial W}{\partial z} \qquad (i = 1 \cdots n)$$

von z frei sind. Setzen wir daher zur Abkürzung:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \Omega,$$

so ist:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$$

für jedes $i = 1 \cdots n$. Von diesen Gleichungen zeigt die erste, dass Ω von $p_1 \cdots p_n$ frei ist; die zweite zerlegt sich deswegen in:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0,$$

woraus hervorgeht, dass Ω eine Constante ist. Aus:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \Omega = A = \text{const.}$$

ergiebt sich endlich:

$$W = Az + w(x, p).$$

Es leuchtet ein, dass auch umgekehrt jede infinitesimale Berührungstransformation mit einer charakteristischen Function von der Form: $Az + w(x, p)$ *die Veränderlichen* x, p *unter sich transformirt.**)

Die hiermit definirte Kategorie von infinitesimalen Berührungstransformationen ist nicht ohne Interesse, wenn auch hier von derselben wenig Gebrauch gemacht wird. Man beachte übrigens, dass

*) Archiv for Mathematik, Bd. 9, Christiania 1884.

eine infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Function: $Az + w(x, p)$ sich aus den beiden linear ableiten lässt, welche z und $w(x, p)$ zu charakteristischen Functionen haben. Die infinitesimale Berührungstransformation, deren charakteristische Function z ist, besitzt die Form:

$$[zf] - z\frac{\partial f}{\partial z} = -p_1\frac{\partial f}{\partial p_1} - \cdots - p_n\frac{\partial f}{\partial p_n} - z\frac{\partial f}{\partial z}.$$

§ 66.

Es entspricht vollkommen dem Wege, welchen wir in Kapitel 5 eingeschlagen haben, wenn wir nunmehr dazu übergehen, alle *infinitesimalen Transformationen* in $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ zu bestimmen, *welche den Pfaffschen Ausdruck:* $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$ *invariant lassen.*

Jede infinitesimale Transformation:

$$Xf = \sum_1^n {}_i\, \xi_i(x, p)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n {}_i\, \pi_i(x, p)\frac{\partial f}{\partial p_i}$$

in den Veränderlichen x, p kann auch als eine infinitesimale Transformation in den Veränderlichen z, x, p aufgefasst werden, als solche ertheilt sie eben dem z den Zuwachs: $\delta z = 0$. Lässt nun Xf, als Transformation in den x, p aufgefasst, den Pfaffschen Ausdruck: $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$ invariant, so lässt es, als Transformation in den z, x, p angesehen, augenscheinlich den Pfaffschen Ausdruck: $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n$ invariant und ist unter allen Transformationen von dieser Beschaffenheit nur dadurch ausgezeichnet, dass der Zuwachs von z verschwindet. Nach Theorem 40, S. 259 hat daher Xf die Form:

$$(\varphi f) + \left(p_1\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \cdots + p_n\frac{\partial \varphi}{\partial p_n} - \varphi\right)\frac{\partial f}{\partial z},$$

wo die Function φ der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ keiner andern Beschränkung unterworfen ist, als dass der Faktor von $\frac{\partial f}{\partial z}$ gleich Null sein muss. Die Differentialgleichung:

$$p_1\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \cdots + p_n\frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = \varphi,$$

welche sich auf diese Weise für φ ergiebt, lässt erkennen, dass φ in den p homogen von erster Ordnung sonst aber ganz beliebig ist. Also:

Satz 9. *Die allgemeinste infinitesimale Transformation in den Veränderlichen* $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, *welche den Pfaffschen Ausdruck:*

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

invariant lässt, besitzt die Form: (hf), *wo* h *eine Function der Ver-*

änderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ *bezeichnet, welche sonst ganz beliebig ist, nur muss sie in den* p *homogen von erster Ordnung sein.*

Ist h in den p homogen von erster Ordnung, so besteht (vgl. Abschn. I, S. 530) die von (hf) erzeugte eingliedrige Gruppe aus lauter Transformationen, welche den Pfaffschen Ausdruck: $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$ invariant lassen, also aus lauter homogenen Berührungstransformationen in $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$. Umgekehrt ist jede eingliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen in den x, p nothwendig von einer infinitesimalen Transformation (hf) erzeugt, wo h in den p homogen von erster Ordnung ist.

Hierin liegt, dass wir nur folgerichtig verfahren, wenn wir jede infinitesimale Transformation (hf), in welcher h die besprochene Homogeneitätsbedingung erfüllt, als eine *infinitesimale homogene Berührungstransformation* bezeichnen. Die Function h, durch welche die Transformation (hf) bestimmt ist, nennen wir natürlich ihre *charakteristische Function.*

Demnach können wir den Satz aussprechen:

Theorem 42. *Die allgemeine Form einer infinitesimalen homogenen Berührungstransformation in* $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ *ist* (hf), *wo* h, *die zugehörige charakteristische Function, in den* p *homogen von erster Ordnung, sonst aber eine ganz beliebige Function von* $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ *ist. Jede infinitesimale homogene Berührungstransformation erzeugt eine eingliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen, andrerseits ist jede eingliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen von einer infinitesimalen homogenen Berührungstransformation erzeugt.**)

Ist eine infinitesimale homogene Berührungstransformation vorgelegt, etwa:
$$\sum_1^n {}_i\, \xi_i(x, p) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n {}_i\, \pi_i(x, p) \frac{\partial f}{\partial p_i},$$
so kann man die zugehörige charakteristische Function h sofort angeben. Man hat ja:
$$h = p_1 \frac{\partial h}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial h}{\partial p_n},$$
nun aber ist offenbar:
$$\xi_i(x, p) = \frac{\partial h}{\partial p_i} \qquad (i = 1 \cdots n),$$
also kommt:
$$h = p_1 \xi_1 + \cdots + p_n \xi_n .$$

---

*) Lie, Mathematische Annalen Bd. VIII, Göttinger Nachr. December 1874, Archiv for Mathematik Bd. 1, Christiania 1876.

Eine infinitesimale homogene Berührungstransformation (hf) reducirt sich dann und nur dann auf die identische Transformation, wenn die Zuwachse von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ alle verschwinden. In diesem Falle sind sämmtliche Ableitungen von h gleich Null, aus:

$$h = p_1 \frac{\partial h}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial h}{\partial p_n}$$

ergiebt sich daher, dass h selbst verschwindet.

Soll andererseits die infinitesimale homogene Berührungstransformation (hf) alle Elemente:

$$x_1 \cdots x_n, \quad \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}$$

in Ruhe lassen, so ist nothwendig und hinreichend, dass die Ausdrücke:

$$\frac{\delta x_1}{\delta t} \cdots \frac{\delta x_n}{\delta t}, \quad \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{p_1}{p_n}\right) \cdots \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)$$

alle verschwinden. Aus $\frac{\delta x_i}{\delta t} = \frac{\partial h}{\partial p_i} = 0$ ergiebt sich aber wie vorhin $h = 0$, also ist unsere Forderung dann und nur dann erfüllt, wenn sich (hf) auf die identische Transformation reducirt.

Man sieht sogar noch mehr: Lässt eine infinitesimale homogene Berührungstransformation von jedem Elemente $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ den zugehörigen Punkt $x_1 \cdots x_n$ in Ruhe, so reducirt sie sich auf die identische Transformation und h ist gleich Null. Das ist übrigens von vornherein klar, da (hf) unter der gemachten Voraussetzung jeden Punkt $x_1 \cdots x_n$ in seiner Eigenschaft als Elementmannigfaltigkeit stehen lässt (S. 170, Satz 8).

Sind $(h_1 f)$ und $(h_2 f)$ zwei infinitesimale homogene Berührungstransformationen mit den charakteristischen Functionen h_1 und h_2, so ist auch:

$$c_1(h_1 f) + c_2(h_2 f) = (c_1 h_1 + c_2 h_2,\ f)$$

eine infinitesimale homogene Berührungstransformation; die zugehörige charakteristische Function lautet: $c_1 h_1 + c_2 h_2$.

Hieraus folgt mit Berücksichtigung des oben Gesagten der

Satz 10. *Die r infinitesimalen homogenen Berührungstransformationen*

$$(h_1 f) \cdots (h_r f)$$

sind dann und nur dann von einander unabhängig, wenn zwischen ihren charakteristischen Functionen $h_1 \cdots h_r$ keine Identität von der Form:

$$c_1 h_1 + \cdots + c_r h_r \equiv 0$$

besteht, in welcher die Constanten $c_1 \cdots c_r$ nicht sämmtlich verschwinden.

Ist $h_1 \cdots h_r$ eine homogene Functionengruppe, so lassen sich *die*

Functionen nullter Ordnung der zugehörigen Polargruppen offenbar auch definiren als die Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $\frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}$, *welche gegenüber den infinitesimalen Transformationen* $(h_1 f) \cdots (h_r f)$ *invariant bleiben. Es sind daher die Functionen nullter Ordnung der Polargruppe wirkliche Differentialinvarianten gegenüber allen eingliedrigen Transformationsgruppen* $(h_\varkappa f)$.

Unter den infinitesimalen homogenen Berührungstransformationen (Hf) sind diejenigen besonders wichtig, deren charakteristische Function H in den p linear ist und also die Form:

$$H = \xi_1(x_1 \cdots x_n) . p_1 + \cdots + \xi_n(x_1 \cdots x_n) . p_n$$

besitzt. In diesem Falle hängen die Incremente:

$$\delta x_\varkappa = \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa} \delta t = \xi_\varkappa(x_1 \cdots x_n) . \delta t$$

nur von $x_1 \cdots x_n$ ab. Es ist daher die entsprechende infinitesimale Berührungstransformation eine *infinitesimale Punkttransformation*, präciser gesagt: die infinitesimale homogene Berührungstransformation:

$$\left(\sum^i \xi_i p_i,\, f\right) = \sum^i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum^j \left(\sum^i \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} p_i\right) \frac{\partial f}{\partial p_j}$$

ist durch *Erweiterung* (Abschn. I, S. 550 f.) aus der infinitesimalen Punkttransformation $\sum^i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ entstanden.

Kapitel 15.

Rechnungen mit infinitesimalen Berührungstransformationen.

Im vorigen Kapitel haben wir mehrere Kategorien von infinitesimalen Berührungstransformationen betrachtet und ihre allgemeine Form bestimmt. Allein das genügt noch nicht, um mit infinitesimalen Berührungstransformationen wirklich erfolgreich rechnen zu können. Dazu ist noch zweierlei erforderlich: Erstens muss man wissen, was dabei herauskommt, wenn man zwei infinitesimale Berührungstransformationen durch die Klammeroperation mit einander combinirt und zweitens muss bekannt sein, wie sich eine infinitesimale Berührungstransformation verhält, wenn man in dieselbe vermittelst einer endlichen Berührungstransformation neue Veränderliche einführt.

Diese beiden Punkte sollen in dem gegenwärtigen Kapitel für die drei verschiedenen Kategorien von infinitesimalen Berührungstransformationen erledigt werden. Wir schlagen aber dabei gerade den entgegengesetzten Weg ein wie im vorigen Kapitel; wir beginnen mit den *homogenen* infinitesimalen Berührungstransformationen, weil sie den *einfachsten* analytischen Ausdruck haben und ausserdem für die Anwendungen am wichtigsten sind; die allgemeinen infinitesimalen Berührungstransformationen zwischen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ betrachten wir erst zuletzt.

§ 67.

Sind:

$$(H_1 f) = A_1 f, \quad (H_2 f) = A_2 f$$

zwei infinitesimale homogene Berührungstransformationen, so erhält man durch Klammeroperation die infinitesimale Transformation:

$$A_1 A_2 f - A_2 A_1 f = (H_1 (H_2 f)) - (H_2 (H_1 f)),$$

welche sich nach S. 173 folgendermassen schreiben lässt:

$$A_1 A_2 f - A_2 A_1 f = ((H_1 H_2) f).$$

Hier ist $(H_1 H_2)$ ebenso wie H_1 und H_2 in den p homogen von der ersten Ordnung, also ist $A_1 A_2 f - A_2 A_1 f$ wieder eine infinitesimale homogene Berührungstransformation. Das war allerdings vorauszusehen, da (vgl. Abschn. I, Theorem 93, S. 531) zwei infinitesimale Transformationen $A_1 f$, $A_2 f$, welche den Pfaffschen Ausdruck:

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

invariant lassen, durch Combination eine infinitesimale Transformation $A_1 A_2 f - A_2 A_1 f$ von derselben Beschaffenheit liefern. Jetzt aber ergiebt sich überdies, dass $(H_1 H_2)$ die charakteristische Function der neuen infinitesimalen homogenen Berührungstransformation ist.

Jedenfalls haben wir das

Theorem 43. *Zwei infinitesimale homogene Berührungstransformationen: $(H_1 f)$ und $(H_2 f)$, deren charakteristische Functionen bezüglich H_1 und H_2 sind, ergeben durch Klammeroperation eine infinitesimale homogene Berührungstransformation mit der charakteristischen Function: $(H_1 H_2)$.**)

Sollen die beiden infinitesimalen Berührungstransformationen $A_1 f$ und $A_2 f$ vertauschbar sein, soll also der Ausdruck:

$$A_1 A_2 f - A_2 A_1 f = ((H_1 H_2) f)$$

identisch verschwinden, so ist nach S. 264 nothwendig und hinreichend, dass $(H_1 H_2) \equiv 0$ ist, also:

---

*) Lie, Göttinger Nachrichten, December 1874; Archiv for Mathematik, Bd. 1, Christiania 1876.

Satz 1. *Zwei infinitesimale homogene Berührungstransformationen mit den charakteristischen Functionen H_1 und H_2 sind dann und nur dann vertauschbar, wenn der Ausdruck $(H_1 H_2)$ identisch verschwindet.*

Führt man in die infinitesimale homogene Berührungstransformation $(Hf)_{xp}$ vermittelst einer homogenen Berührungstransformation:

$$x_i' = X_i(x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n), \quad p_i' = P_i(x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

die neuen Veränderlichen x', p' ein, so erhält man nach S. 131:

$$(Hf)_{xp} = (Hf)_{x'p'}$$

und zwar wird H als Function der x', p' in den p' homogen von der ersten Ordnung. Dieses Ergebniss können wir in Worten so ausdrücken:

Satz 2. *Führt man in eine infinitesimale homogene Berührungstransformation mit der charakteristischen Function $H(x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n)$ vermittelst einer homogenen Berührungstransformation:*

$$x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

die neuen Veränderlichen x', p' ein, so erhält man eine infinitesimale homogene Berührungstransformation, deren charakteristische Function aus $H(x, p)$ durch Einführung der x', p' entsteht.

Sind $m \leqq n$ unabhängige Functionen:

$$H_1(x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n) \cdots H_m(x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n),$$

vorgelegt, welche paarweise in den Beziehungen $(H_i H_\varkappa) \equiv 0$ stehen und welche in den p homogen von erster Ordnung sind, so kann man (vgl. S. 225 f.) durch eine homogene Berührungstransformation solche neue Veränderliche x', p' einführen, dass wird:

$$H_1(x, p) = p_1', \cdots H_m(x, p) = p_m'.$$

Die infinitesimalen homogenen Berührungstransformationen:

$$(H_1 f) \cdots (H_m f),$$

welche unter den gemachten Voraussetzungen mit einander vertauschbar sind, erhalten dann in den neuen Veränderlichen x', p' die Gestalt:

$$(H_\mu f)_{xp} = (p_\mu' f)_{x'p'} = \frac{\partial f}{\partial x_\mu'} \qquad (\mu = 1 \cdots m).$$

Demnach gilt der

Satz 3. *Sind die infinitesimalen homogenen Berührungstransformationen:*

$$(H_1 f) \cdots (H_m f)$$

in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ paarweise vertauschbar und *sind ihre charakteristischen Functionen $H_1 \cdots H_m$ von einander unabhängig, so kann man stets durch eine homogene Berührungstransformation solche neue Veränderliche x', p' einführen, dass $(H_1 f) \cdots (H_m f)$ in die infinitesimalen Translationen:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1'}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_m'}$$

*übergehen; es leuchtet ein, dass $m \leqq n$ sein muss.**)

Ist insbesondere $m = 2$, so sind die charakteristischen Functionen H_1, H_2 immer unabhängig von einander, sobald $(H_1 f)$ und $(H_2 f)$ zwei unabhängige infinitesimale Berührungstransformationen darstellen. Also:

Satz 4. *Sind zwei unabhängige infinitesimale homogene Berührungstransformationen, etwa $(H_1 f)$ und $(H_2 f)$ vertauschbar, so kann man stets durch eine homogene Berührungstransformation solche neue Veränderliche x', p' einführen, dass $(H_1 f)$ und $(H_2 f)$ in die infinitesimalen Translationen: $\frac{\partial f}{\partial x_1'}$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2'}$ übergehen.**)

Beispiel. Wendet man auf die Gleichung:

$$x_1 x_1' + \cdots + x_n x_n' + 1 = 0$$

die in Theorem 15, S. 150 gegebene Methode an, so erhält man die Berührungstransformation:

$$x_i' = -\frac{p_i}{\sum^{\varkappa} x_\varkappa p_\varkappa}, \qquad p_i' = x_i \sum_1^n {}^{\varkappa}\, x_\varkappa p_\varkappa$$

$$x_i = -\frac{p_i'}{\sum^{\varkappa} x_\varkappa' p_\varkappa'}, \qquad p_i = x_i' \sum_1^n {}^{\varkappa}\, x_\varkappa' p_\varkappa',$$

welche für $n = 3$ in die *Poncelet*sche Transformation durch reciproke Polaren übergeht.

Führt man nun vermittelst dieser Berührungstransformation neue Veränderliche x', p' in die infinitesimalen projectiven Transformationen:

$$p_i, \quad x_i p_\varkappa, \quad x_i \sum x_\varkappa p_\varkappa$$

ein, so wird:

$$p_i = x_i' \sum_1^n {}^{\varkappa}\, x_\varkappa' p_\varkappa',$$

$$x_i p_\varkappa = - x_\varkappa' p_i',$$

$$x_i \sum_1^n {}^{\varkappa}\, x_\varkappa p_\varkappa = p_i'.$$

---

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, 1872.

Unsere Berührungstransformation führt also jede infinitesimale projective Transformation in eine ebensolche über; insbesondere führt sie jede lineare homogene Transformation: $\sum c_{i\varkappa} x_i p_\varkappa$ in eine ebensolche Transformation über.

§ 68.

Wir denken uns jetzt in den Veränderlichen z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ zwei beliebige infinitesimale Berührungstransformationen von der besonderen Form:

$$Af = (\varphi f) + \left(p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} - \varphi\right) \frac{\partial f}{\partial z}$$
$$Bf = (\psi f) + \left(p_1 \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial \psi}{\partial p_n} - \psi\right) \frac{\partial f}{\partial z}$$

vorgelegt, wo φ und ψ Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ bezeichnen; wir wollen die Form der infinitesimalen Transformation: $ABf - BAf$ bestimmen.

Da Af und Bf beide den Pfaffschen Ausdruck:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n$$

invariant lassen, so muss auch $ABf - BAf$ dies thun; es muss also die Form haben:

$$(1) \qquad ABf - BAf = (wf) + \left(p_1 \frac{\partial w}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial w}{\partial p_n} - w\right) \frac{\partial f}{\partial z},$$

wo w ebenso wie φ und ψ nur von den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ abhängt.

Zur Auffindung von w können wir die Jacobische Identität benutzen. Durch direkte Ausrechnung bekommen wir nämlich:

$$ABf - BAf = (\varphi(\psi f)) - (\psi(\varphi f)) +$$
$$+ \left\{ \left(\varphi, \sum_1^n {}_i\, p_i \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \psi\right) - \left(\psi, \sum_1^n {}_i\, p_i \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} - \varphi\right) \right\} \frac{\partial f}{\partial z}$$

oder, wenn wir die genannte Identität berücksichtigen und im Faktor von $\frac{\partial f}{\partial z}$ die sich weghebenden Glieder fortlassen:

$$ABf - BAf =$$
$$((\varphi\psi) f) + \left\{ \sum_1^n {}_i\, p_i \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial p_i}\right) + \sum_1^n {}_i\, p_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \psi\right) - (\varphi\psi) \right\} \frac{\partial f}{\partial z},$$

was sich auch so schreiben lässt:

$$ABf - BAf = ((\varphi\psi) f) + \left\{ \sum_1^n {}_i\, p_i \frac{\partial (\varphi\psi)}{\partial p_i} - (\varphi\psi) \right\} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Demnach ist w einfach gleich $(\varphi\psi)$.

In Worten:

Satz 5. *Sind Af und Bf zwei infinitesimale Berührungstransformationen von der besonderen Form:*

$$Af = (\varphi f) + \left(\sum_1^n i\, p_i \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} - \varphi\right)\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$Bf = (\psi f) + \left(\sum_1^n i\, p_i \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \psi\right)\frac{\partial f}{\partial z},$$

mit den beiden charakteristischen Functionen $\varphi(x, p)$ und $\psi(x, p)$, so ist: $ABf - BAf$ stets eine infinitesimale Berührungstransformation von derselben Beschaffenheit und zwar hat die zugehörige charakteristische Function die Gestalt: $(\varphi\psi)$.

Die vorstehenden Entwickelungen zeigen, dass der Begriff „infinitesimale Berührungstransformation" mit Nothwendigkeit auf die Jacobische Identität führt. Die Gleichung (1) des Textes lässt sich nämlich folgendermassen schreiben:

$$(\varphi(\psi f)) - (\psi(\varphi f)) + \tau\frac{\partial f}{\partial z} =$$

$$(wf) + \left(p_1\frac{\partial w}{\partial p_1} + \cdots + p_n\frac{\partial w}{\partial p_n} - w\right)\frac{\partial f}{\partial z};$$

betrachtet man hierin f als eine beliebige Function χ von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ allein, so erkennt man, dass eine Gleichung von der Form:

$$(\varphi(\psi\chi)) - (\psi(\varphi\chi)) = (w\chi)$$

identisch besteht, in welcher w nur von φ und ψ abhängt. Beide Seiten dieser Gleichung sind linear und homogen in den Differentialquotienten von χ; setzt man die entsprechenden Coefficienten einander gleich, so bekommt man Ausdrücke für die Differentialquotienten von w und kann sodann w selbst bestimmen. Es ergiebt sich: $w = (\varphi\psi) + \text{const.}$, womit die Identität:

$$(\varphi(\psi\chi)) - (\psi(\varphi\chi)) \equiv ((\varphi\psi)\chi)$$

wiedergefunden ist.

Aus Satz 5 ergiebt sich mit Benutzung von S. 255:

Satz 6. *Zwei infinitesimale Berührungstransformationen in $z, x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, deren charakteristische Functionen φ und ψ blos von den x, p abhängen, sind dann und nur dann vertauschbar, wenn der Ausdruck $(\varphi\psi)$ identisch verschwindet.*

Dagegen gilt für die verkürzten infinitesimalen Transformationen von der Form (φf) der

Satz 7. *Die beiden infinitesimalen Transformationen: (φf) und (ψf), in welchen φ und ψ Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ bedeuten, sind dann und nur dann mit einander vertauschbar, wenn der Ausdruck $(\varphi\psi)$ sich auf eine Constante reducirt.*

In der That, sollen die beiden infinitesimalen Transformationen:

$$A_1 f = (\varphi_1 f), \quad A_2 f = (\varphi_2 f)$$

in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ vertauschbar sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass der Ausdruck:

$$A_1 A_2 f - A_2 A_1 f = ((\varphi_1 \varphi_2) f)$$

identisch verschwindet, das aber tritt nach S. 260 dann und nur dann ein, wenn $(\varphi_1 \varphi_2)$ gleich einer Constanten ist.

Führt man in eine infinitesimale Berührungstransformation:

$$\begin{aligned} Bf &= (\varphi f) + \left(\sum_1^n {}_{\nu}\, p_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial p_\nu} - \varphi \right) \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= [\varphi f]_{zxp} - \varphi \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

vermöge einer Berührungstransformation von der besonderen Gestalt:

$$z' = z + \Omega(x, p), \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \\ {\scriptstyle (i = 1 \cdots n)}$$

die neuen Veränderlichen z', $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$ ein, so bekommt man zunächst (vgl. S. 123, Satz 5):

$$[\varphi f]_{zxp} = [\varphi f]_{z'x'p'}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z'},$$

also wird:

$$[\varphi f]_{zxp} - \varphi \frac{\partial f}{\partial z} = [\varphi f]_{z'x'p'} - \varphi \frac{\partial f}{\partial z'},$$

man erhält also in den neuen Veränderlichen eine infinitesimale Berührungstransformation, deren charakteristische Function nur von den x', p' abhängt und aus φ dadurch entsteht, dass man an Stelle der x, p die x', p' einführt. Es gilt also der

Satz 8. *Werden in die infinitesimale Berührungstransformation:*

$$(\varphi(x, p), f)_{xp} + \left(\sum_1^n {}_{\nu}\, p_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial p_\nu} - \varphi \right) \frac{\partial f}{\partial z}$$

vermöge einer Berührungstransformation von der Gestalt:

$$z' = z + \Omega(x, p), \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \\ {\scriptstyle (i = 1 \cdots n)}$$

die neuen Veränderlichen z', $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$ eingeführt, so ergiebt sich eine infinitesimale Berührungstransformation:

$$(\psi(x', p'), f)_{x'p'} + \left(\sum_1^n {}_{\nu}\, p_\nu' \frac{\partial \psi}{\partial p_\nu'} - \psi \right) \frac{\partial f}{\partial z'},$$

deren charakteristische Function $\psi(x', p')$ aus $\varphi(x, p)$ durch Einführung der neuen Veränderlichen entsteht.

§ 69.

Die Theorie der allgemeinsten endlichen Berührungstransformationen in $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ deckt sich, wie wir wissen, mit der Theorie der endlichen *homogenen* Berührungstransformationen in $y_1 \cdots y_{n+1}, q_1 \cdots q_{n+1}$; denn nach S. 139 f. erhalten wir aus der allgemeinsten homogenen Berührungstransformation in $y_1 \cdots y_{n+1}, q_1 \cdots q_{n+1}$ die allgemeinste Berührungstransformation in $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$, wenn wir berechnen, in welcher Weise jene allgemeinste homogene Berührungstransformation die Veränderlichen:

$$(2) \qquad z = y_{n+1}, \ x_i = y_i, \ p_i = -\frac{q_i}{q_{n+1}} \qquad (i = 1 \cdots n)$$

unter einander transformirt.

Es lässt sich voraussehen, dass auch die allgemeinste infinitesimale homogene Berührungstransformation in $y_1 \cdots y_{n+1}, q_1 \cdots q_{n+1}$ die Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ in derselben Weise transformirt, wie die allgemeinste infinitesimale Berührungstransformation in $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$. Das werden wir zunächst durch Rechnung bestätigen und sodann aus den Sätzen des § 67 über infinitesimale homogene Berührungstransformationen die entsprechenden Sätze über die allgemeinen infinitesimalen Berührungstransformationen in $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ ableiten.

Es sei H eine beliebige Function von $y_1 \cdots y_{n+1}, q_1 \cdots q_{n+1}$, welche in den q von erster Ordnung ist, so dass also $(Hf)_{yq}$ eine infinitesimale homogene Berührungstransformation in den y, q darstellt. Wollen wir die Zuwachse finden, welche die Veränderlichen:

$$(2) \qquad z = y_{n+1}, \ x_i = y_i, \ p_i = -\frac{q_i}{q_{n+1}} \qquad (i = 1 \cdots n)$$

bei der infinitesimalen Transformation $(Hf)_{yq}$ erhalten, so brauchen wir nur den Zuwachs zu berechnen, welchen eine ganz beliebige Function F von:

$$y_{n+1}, y_1 \cdots y_n, \frac{-q_1}{q_{n+1}}, \cdots \frac{-q_n}{q_{n+1}}$$

bei $(Hf)_{yq}$ erhält; es wird sich ergeben, dass dieser Zuwachs: $(HF)_{yq}$ nur von $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ abhängt.

Wir können setzen:

$$H = -q_{n+1} \cdot W\left(y_{n+1}, y_1 \cdots y_n, \frac{-q_1}{q_{n+1}}, \cdots \frac{-q_n}{q_{n+1}}\right),$$

wo W eine beliebige Function seiner Argumente bezeichnet; dann wird:

$$(HF)_{yq} = -q_{n+1}\cdot(WF)_{yq} - W\cdot(q_{n+1}F)_{yq}.$$

Hier ist in Folge der Relationen (2) zunächst:

$$(q_{n+1}F)_{yq} = \frac{\partial F}{\partial z}$$

und andrerseits (vgl. S. 143 f.):

(3) $$-q_{n+1}(WF)_{yq} = [WF]_{zxp},$$

folglich ergiebt sich die Gleichung:

(4) $$(HF)_{yq} = [WF]_{zxp} - W\frac{\partial F}{\partial z},$$

die identisch besteht, wenn F eine beliebige Function der Grössen (2) *ist.* In (4) aber stellt der Ausdruck rechter Hand wirklich die allgemeinste infinitesimale Berührungstransformation in den z, x, p dar, denn W ist ja eine beliebige Function der z, x, p.

Damit haben wir den

Satz 9. *Sind H und F beliebige Functionen von $y_1\cdots y_{n+1}$, $q_1\cdots q_{n+1}$, nur H homogen von erster Ordnung in den q und F homogen von nullter Ordnung, setzt man ferner:*

$$H = -q_{n+1}\cdot W\left(y_{n+1},\ y_1\cdots y_n,\ \frac{-q_1}{q_{n+1}},\ \cdots\ \frac{-q_n}{q_{n+1}}\right)$$

und definirt man endlich die Grössen z, $x_1\cdots x_n$, $p_1\cdots p_n$ durch die Gleichungen:

$$z = y_{n+1},\ x_1 = y_1,\ \cdots\ x_n = y_n$$

$$p_1 = \frac{-q_1}{q_{n+1}},\ \cdots\ p_n = \frac{-q_n}{q_{n+1}},$$

so besteht die Relation:

$$(HF)_{yq} = [WF]_{zxp} - W\frac{\partial F}{\partial z}$$

identisch.

Dieser Satz lässt sich auch folgendermassen aussprechen:

Satz 10. *Die allgemeinste infinitesimale homogene Berührungstransformation in den Veränderlichen: $y_1\cdots y_{n+1}$, $q_1\cdots q_{n+1}$ transformirt die Veränderlichen:*

$$z = y_{n+1},\ x_i = y_i,\ p_i = \frac{-q_i}{q_{n+1}} \quad (i = 1\cdots n)$$

genau so wie die allgemeinste infinitesimale Berührungstransformation in z, $x_1\cdots x_n$, $p_1\cdots p_n$ und zwar transformirt die infinitesimale homogene Berührungstransformation $(Hf)_{yq}$ die z, x, p durch die infinitesimale Berührungstransformation:

$$[WF]_{zxp} - W\frac{\partial F}{\partial z},$$

wo die charakteristische Function $W(z, x, p)$ *mit der charakteristischen Function* $H(y, q)$ *durch die Gleichung:*

$$W(z, x, p) = \frac{-H(y, q)}{q_{n+1}}$$

verknüpft ist.

Sind:

$$[W_1F]_{zxp} - W_1\frac{\partial F}{\partial z} = B_1F, \quad [W_2F]_{zxp} - W_2\frac{\partial F}{\partial z} = B_2F$$

zwei infinitesimale Berührungstransformationen in $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$, so lässt auch: $B_1B_2F - B_2B_1F$ die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - p_1dx_1 - \cdots - p_ndx_n = 0$$

invariant und ist daher eine infinitesimale Berührungstransformation, kurz, es besteht eine Gleichung von der Form:

$$B_1B_2F - B_2B_1F = [VF]_{zxp} - V\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Wir wollen die charakteristische Function V, welche nur von W_1 und W_2 abhängen kann, wirklich berechnen.

Setzen wir:

$$-q_{n+1}W_1(z, x, p) = H_1(y, q), \; -q_{n+1}W_2(z, x, p) = H_2(y, q)$$

und ferner:

$$(H_1f)_{yq} = A_1f, \; (H_2f)_{yq} = A_2f,$$

und verstehen wir unter F eine beliebige Function der z, x, p, so ist nach Satz 9, S. 273 identisch:

$$(5) \qquad \begin{cases} A_1F = (H_1F)_{yq} = [W_1F]_{zxp} - W_1\dfrac{\partial F}{\partial z} = B_1F \\ A_2F = (H_2F)_{yq} = [W_2F]_{zxp} - W_2\dfrac{\partial F}{\partial z} = B_2F, \end{cases}$$

also folgt:

$$A_1A_2F - A_2A_1F = B_1B_2F - B_2B_1F,$$

oder (vgl. S. 173):

$$((H_1H_2)F)_{yq} = B_1B_2F - B_2B_1F.$$

Nun ist $(H_1H_2)_{yq}$ homogen von erster Ordnung in den q, also können wir setzen:

$$\frac{(H_1H_2)_{yq}}{q_{n+1}} = -\mathfrak{W}(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n)$$

und bekommen nach Satz 9, S. 273

$$\begin{aligned} ((H_1H_2)F)_{yq} &= [\mathfrak{W}F]_{zxp} - \mathfrak{W}\frac{\partial F}{\partial z} \\ &= B_1B_2F - B_2B_1F, \end{aligned}$$

das heisst die oben definirte charakteristische Function V ist gleich $\mathfrak{W}$.

Um $\mathfrak{W}$ direkt durch W_1 und W_2 auszudrücken, beachten wir, dass:

$$\begin{aligned}(H_1 H_2)_{yq} &= (H_1, -q_{n+1} W_2)_{yq} \\ &= -q_{n+1}(H_1 W_2)_{yq} + \frac{\partial H_1}{\partial y_{n+1}} W_2\end{aligned}$$

ist. Aus dem Satze 9 ergiebt sich wiederum:

$$(H_1 W_2)_{yq} = [W_1 W_2]_{zxp} - W_1 \frac{\partial W_2}{\partial z},$$

folglich wird:

$$\begin{aligned}\frac{(H_1 H_2)_{yq}}{q_{n+1}} &= -[W_1 W_2]_{zxp} + W_1 \frac{\partial W_2}{\partial z} + \frac{1}{q_{n+1}} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial y_{n+1}} \cdot W_2 \\ &= -[W_1 W_2]_{zxp} + W_1 \frac{\partial W_2}{\partial z} - W_2 \frac{\partial W_1}{\partial z}\end{aligned}$$

und:

$$\mathfrak{W} = [W_1 W_2]_{zxp} - \left(W_1 \frac{\partial W_2}{\partial z} - W_2 \frac{\partial W_1}{\partial z}\right).$$

In Worten ausgedrückt lautet dieses Ergebniss:

Theorem 44. *Sind:*

$$B_\varkappa F = [W_\varkappa F]_{zxp} - W_\varkappa \frac{\partial F}{\partial z} \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

zwei infinitesimale Berührungstransformationen in den Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$, mit den beiden charakteristischen Functionen: $W_1(z, x, p)$ und $W_2(z, x, p)$, so ist auch: $B_1 B_2 F - B_2 B_1 F$ eine infinitesimale Berührungstransformation und zwar eine mit der charakteristischen Function:

$$\mathfrak{W}(z, x, p) = [W_1 W_2]_{zxp} - \left(W_1 \frac{\partial W_2}{\partial z} - W_2 \frac{\partial W_1}{\partial z}\right),$$

so dass $B_1 B_2 F - B_2 B_1 F$ die Form besitzt:

$$B_1 B_2 F - B_2 B_1 F = [\mathfrak{W} F]_{zxp} - \mathfrak{W} \frac{\partial F}{\partial z}. ^{*)}$$

Untersuchen wir jetzt, wie sich eine infinitesimale Berührungstransformation:

$$[WF]_{z,x,p} - W \frac{\partial F}{\partial z}$$

verhält, wenn in ihr an Stelle der z, x, p vermöge einer Berührungstransformation:

---

*) Lie, Abhandlungen des Kgl. Sächs. Ges. d. W. Bd. XIV, Nr. 12.

(5a) $$z' = Z(z, x, p), \quad x_i' = X_i(z, x, p), \quad p_i' = P_i(z, x, p) \quad (i = 1 \cdots n)$$

die neuen Veränderlichen z', x', p' eingeführt werden.

Nach Kap. 5, Satz 5, S. 123 ist:

$$[WF]_{z,x,p} = \varrho \cdot [WF]_{z',x',p'},$$

wo ϱ aus der Identität:

$$dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

zu entnehmen ist. Ferner wird:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial z} + \sum_1^n {}^i \frac{\partial F}{\partial x_i'} \cdot \frac{\partial x_i'}{\partial z} + \sum_1^n {}^i \frac{\partial F}{\partial p_i'} \cdot \frac{\partial p_i'}{\partial z},$$

es ist aber (vgl. Kap. 5, Satz 18, S. 145):

(6) $$\begin{cases} \dfrac{\partial z'}{\partial z} = \varrho - \dfrac{1}{\varrho}[\varrho Z]_{z,x,p} = \varrho - [\varrho z']_{z',x',p'} \\ \dfrac{\partial x_i'}{\partial z} = - \dfrac{1}{\varrho}[\varrho X_i]_{z,x,p} = - [\varrho x_i']_{z',x',p'} \\ \dfrac{\partial p_i'}{\partial z} = - \dfrac{1}{\varrho}[\varrho P_i]_{z,x,p} = - [\varrho p_i']_{z',x',p'} \\ \qquad (i = 1 \cdots n), \end{cases}$$

also bekommen wir:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z'} \{\varrho - [\varrho z']_{z',x',p'}\} - \sum_1^n {}^i \frac{\partial F}{\partial x_i'} [\varrho x_i']_{z',x',p'} - \\ - \sum_1^n {}^i \frac{\partial F}{\partial p_i'} [\varrho p_i']_{z',x',p'}$$

oder:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \varrho \frac{\partial F}{\partial z'} - [\varrho F]_{z',x',p'}.$$

Nunmehr ergiebt sich:

$$[WF]_{z,x,p} - W\frac{\partial F}{\partial z} = \varrho \cdot [WF]_{z',x',p'} + W[\varrho F]_{z',x',p'} - \varrho W \cdot \frac{\partial F}{\partial z'},$$

was folgendermassen geschrieben werden kann:

$$[WF]_{z,x,p} - W\frac{\partial F}{\partial z} = [\varrho W, F]_{z',x',p'} - \varrho W \cdot \frac{\partial F}{\partial z'}.$$

Also:

Theorem 45. *Führt man in eine infinitesimale Berührungstransformation:*

$$[WF]_{z,x,p} - W \cdot \frac{\partial F}{\partial z}$$

mit der charakteristischen Function $W(z, x, p)$ neue Veränderliche z, x', p' ein vermöge einer Berührungstransformation:

(5a) $$z' = Z(z,\, x,\, p),\ x_i' = X_i(z,\, x,\, p),\ p_i' = P_i(z,\, x,\, p) \quad (i = 1 \cdots n),$$

so erhält man in den z', x', p' stets wieder eine infinitesimale Berührungstransformation:

$$[\mathfrak{W} F]_{z', x', p'} - \mathfrak{W} \frac{\partial F}{\partial z'}.$$

Die charakteristische Function: $\mathfrak{W}(z', x', p')$ dieser letzteren hat die Gestalt:

$$\mathfrak{W}(z',\, x',\, p') = \varrho(z,\, x,\, p)\,.\, W(z,\, x,\, p),$$

wo $\varrho(z, x, p)$ durch die Identität:

$$dZ - \sum_1^n {}_i\, P_i dX_i \equiv \varrho \left(dz - \sum_1^n {}_i\, p_i dx_i \right)$$

*definirt ist.**)

Der eben bewiesene Satz soll jetzt noch auf andere Weise abgeleitet werden.

Es sei:

$$[W F]_{z, x, p} - W \frac{\partial F}{\partial z}$$

irgend eine infinitesimale Berührungstransformation in den Veränderlichen $z,\, x_1 \cdots x_n,\, p_1 \cdots p_n$ und:

(7) $$z' = Z(z,\, x,\, p),\ x_i' = X_i(z,\, x,\, p),\ p_i' = P_i(z,\, x,\, p) \quad (i = 1 \cdots n)$$

sei irgend eine endliche Berührungstransformation.

Setzen wir:

(8) $$z = y_{n+1},\ x_i = y_i,\ p_i = \frac{-q_i}{q_{n+1}} \qquad (i = 1 \cdots n)$$

und ausserdem:

$$-q_{n+1} \cdot W\left(y_{n+1},\ y_1 \cdots y_n,\ \frac{-q_1}{q_{n+1}} \cdots \frac{-q_n}{q_{n+1}} \right) = H(y,\, q),$$

so wird nach Satz 10, S. 273:

(9) $$[W F]_{z, x, p} - W \frac{\partial F}{\partial z} = (H F)_{y q},$$

wo der Ausdruck rechter Hand die y, q natürlich nur in den Verbindungen (8) enthält. Nun transformirt die Berührungstransformation (7) die Grössen (8) genau so, wie eine gewisse, nach S. 141 leicht angebbare homogene Berührungstransformation:

(7′) $$y_\nu' = Y_\nu(y,\, q),\ q_\nu' = Q_\nu(y,\, q) \qquad (\nu = 1 \cdots n+1)$$

in den Veränderlichen $y_1 \cdots y_{n+1}$, $q_1 \cdots q_{n+1}$. Wünschen wir daher zu wissen, wie sich die linke Seite von (9) bei Ausführung der Berührungs-

---

*) Lie, Abhandlungen der Kgl. Sächsischen Ges. d. W. Bd. XIV, Nr. 12.

transformation (7) verhält, so brauchen wir blos in die rechte Seite von (9) vermöge der homogenen Berührungstransformation (7′) die neuen Veränderlichen y', q' einzuführen und dann zu berücksichtigen, dass die y', q' mit den z', x', p' durch die Relationen:

$$(8') \qquad z' = y'_{n+1}, \; x'_i = y'_i, \; p'_i = \frac{-q'_i}{q'_{n+1}} \qquad (i = 1 \cdots n)$$

verknüpft sind.

Bei Ausführung der homogenen Berührungstransformation (7′) erhält der Ausdruck: $(HF)_{yq}$ nach S. 131 die Gestalt:

$$(HF)_{yq} = (HF)_{y'q'}\,.$$

Nun wird H als Function der y', q' betrachtet in den q' homogen von erster Ordnung und F homogen von nullter Ordnung, setzen wir daher:

$$H = -\, q'_{n+1} \cdot \mathfrak{W}\left(y'_{n+1},\; y'_1 \cdots y'_n,\; \frac{-q'_1}{q'_{n+1}} \cdots \frac{-q'_n}{q'_{n+1}}\right),$$

so ergiebt sich mit Benutzung des Satzes 10, S. 273:

$$(HF)_{y'q'} = [\mathfrak{W} F]_{z', x', p'} - \mathfrak{W} \frac{\partial F}{\partial z'},$$

also nimmt die linke Seite von (9) bei Ausführung der Berührungstransformation (7) die Form:

$$[WF]_{z,x,p} - W \frac{\partial F}{\partial z} = [\mathfrak{W} F]_{z', x', p'} - \mathfrak{W} \frac{\partial F}{\partial z'}$$

an. Zwischen $\mathfrak{W}$ und W besteht die Gleichung:

$$\mathfrak{W}(z', x', p') = \frac{q_{n+1}}{q'_{n+1}}\, W(z, x, p),$$

wo der Ausdruck $\frac{q_{n+1}}{q'_{n+1}}$ augenscheinlich eine Function von z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ allein ist und zwar ist er nach S. 140 f. gleich derjenigen Function $\varrho(z, x, p)$, welche durch die Identität:

$$dZ - \sum_1^n{}_i P_i dX_i \equiv \varrho(z, x, p) \cdot \left(dz - \sum_1^n{}_i p_i dx_i\right)$$

definirt ist. Folglich haben wir:

$$\mathfrak{W}(z', x', p') = \varrho(z, x, p) \cdot W(z, x, p),$$

damit aber ist der versprochene neue Beweis des Theorems 45, S. 276 geliefert.

§ 70.

Die Wichtigkeit der Jacobischen Identität rechtfertigt es, wenn wir hier einer begrifflichen Deutung dieser Identität Platz gewähren. Allerdings finden die Entwickelungen dieses Paragraphen im Folgenden keine Verwerthung.

Die infinitesimale Transformation $(\varphi f)_{xp}$ in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ erzeugt eine eingliedrige Gruppe, deren endliche Transformationen folgendermassen lauten:

$$(10)\qquad \begin{cases} x_i' = x_i + \frac{\varepsilon}{1}(\varphi x_i)_{xp} + \frac{\varepsilon^2}{1.2}(\varphi(\varphi x_i))_{xp} + \cdots \\ p_i' = p_i + \frac{\varepsilon}{1}(\varphi p_i)_{xp} + \frac{\varepsilon^2}{1.2}(\varphi(\varphi p_i))_{xp} + \cdots \\ \qquad (i = 1 \cdots n), \end{cases}$$

wo ε den Parameter der eingliedrigen Gruppe bezeichnet.

Verstehen wir nun unter u' und v' beliebige Functionen von $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$, so besteht nach S. 131 vermöge der Transformationsgleichungen (10) die Relation:

$$(11)\qquad (u'v')_{x'p'} = (u'v')_{xp}$$

identisch. Drücken wir daher in der vorstehenden Gleichung auf beiden Seiten die x', p' vermöge (10) durch die x, p aus, so entsteht eine Identität, welchen Werth der Parameter ε auch haben mag.

Ist Ω eine beliebige Function von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ und Ω' dieselbe Function von $x_1' \cdots x_n'$, $p_1' \cdots p_n'$, so besteht nach Abschn. I, S. 52 vermöge (10) die Gleichung:

$$\Omega' = \Omega + \frac{\varepsilon}{1}(\varphi\Omega)_{xp} + \frac{\varepsilon^2}{1.2}(\varphi(\varphi\Omega))_{xp} + \cdots,$$

oder wie wir unter Anwendung einer leicht verständlichen Abkürzung schreiben können:

$$\Omega' = \Omega + \frac{\varepsilon}{1}(\varphi\Omega)_{xp}^1 + \frac{\varepsilon^2}{1.2}(\varphi\Omega)_{xp}^2 + \cdots + \frac{\varepsilon^m}{m!}(\varphi\Omega)_{xp}^m + \cdots$$

Aus dieser Formel ergiebt sich einerseits:

$$(u'v')_{x'p'} = (uv)_{xp} + \frac{\varepsilon}{1}(\varphi(uv))_{xp}^1 + \cdots + \frac{\varepsilon^m}{m!}(\varphi(uv))_{xp}^m + \cdots$$

Andererseits aber wird:

$$(u'v')_{xp} = \left(u + \frac{\varepsilon}{1}(\varphi u)_{xp}^1 + \cdots,\ v + \frac{\varepsilon}{1}(\varphi v)_{xp}^1 + \cdots\right)_{xp}$$

$$= (uv)_{xp} + \frac{\varepsilon}{1}\{(u(\varphi v)^1) + ((\varphi u)^1 v)\} + \cdots$$

Hier hat der Coefficient von $\frac{\varepsilon^m}{m!}$ die einfache Form:

$$((\varphi u)^m v) + \frac{m}{1}((\varphi u)^{m-1}(\varphi v)^1) +$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}((\varphi u)^{m-2}(\varphi v)^2) + \cdots + (u(\varphi v)^m),$$

mit den bekannten Binomialcoefficienten; sind nämlich $\varkappa$ und l

bestimmte positive ganze Zahlen, so kommt in der Reihenentwickelung von $(u'v')_{xp}$ nur ein einziges Glied von der Form:

$$\varepsilon^{\varkappa+l}((\varphi u)^{\varkappa}(\varphi v)^{l})$$

vor und dieses Glied ist offenbar mit dem Zahlenfaktor:

$$\frac{1}{\varkappa!}\cdot\frac{1}{l!}=\frac{1}{(\varkappa+l)!}\cdot\frac{(\varkappa+l)(\varkappa+l-1)\cdots(\varkappa+l-\varkappa+1)}{\varkappa!}$$

$$=\frac{1}{(\varkappa+l)!}\cdot\frac{(\varkappa+l)(\varkappa+l-1)\cdots(\varkappa+l-l+1)}{l!}$$

behaftet.

Setzen wir die gefundenen Ausdrücke für $(u'v')_{x'p'}$ und $(u'v')_{xp}$ in die Gleichung (11) ein, so müssen wir eine Identität erhalten, welchen Werth auch das ε haben mag, wir erkennen somit, dass zwischen den drei beliebigen Functionen φ, u, v der Veränderlichen $x_1\cdots x_n$, $p_1\cdots p_n$ die folgenden unendlich vielen Identitäten bestehen:

$$(\varphi(uv))^m\equiv((\varphi u)^m v)+\frac{m}{1}((\varphi u)^{m-1}(\varphi v)^1)+$$
$$+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}((\varphi u)^{m-2}(\varphi v)^2)+\cdots+(u(\varphi v)^m)$$
$$(m=1,\,2,\,3\cdots).$$

Die erste dieser Identitäten ist die uns schon bekannte Jacobische Identität:

$$(\varphi(uv))\equiv((\varphi u)v)+(u(\varphi v)),$$

die übrigen sind, wie man sich leicht überzeugen kann, sämmtlich Folgen der Jacobischen Identität.

Die Jacobische Identität ist demnach eine unmittelbare Consequenz der Thatsache, dass der Klammerausdruck $(uv)_{xp}$ sich gegenüber jeder Transformation:

$$x_i'=X_i(x,\,p),\qquad p_i'=P_i(x,\,p)\qquad (i=1\cdots n)$$

invariant verhält, bei welcher die Functionen X und P in kanonischen Beziehungen stehen.

Wählt man die oben vorkommende Grösse ε unendlich klein, gleich δt, so dass die Transformation (10) mit der infinitesimalen Transformation $(\varphi f)_{xp}$ zusammenfällt, und vernachlässigt man in den obigen Rechnungen alle Potenzen zweiter und höherer Ordnung von δt, so kann man das gefundene Ergebniss auch folgendermassen ausdrücken:

Die Jacobische Identität, welche zwischen drei beliebigen Functionen u, v, φ der Veränderlichen $x_1\cdots x_n$, $p_1\cdots p_n$ besteht, sagt aus, dass der Klammerausdruck $(uv)_{xp}$ sich gegenüber jeder infinitesimalen Transformation von der Form: $(\varphi f)_{xp}$ invariant verhält.

Damit ist eine begriffliche Deutung der Jacobischen Identität gewonnen.*)

§ 71.

Wir betrachten hier einige Verallgemeinerungen des Poissonschen Satzes (s. S. 173). Dieselben finden übrigens in diesem Abschnitte keine Anwendung.

Man kann fragen: Wann gestattet die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$Af = (uf) = 0$$

in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ die infinitesimale Transformation: $(vf) = Bf$?

Die Antwort ist leicht zu geben. Nothwendige und hinreichende Bedingung ist (Abschnitt I, S. 140) das Bestehen einer Relation von der Form:

$$ABf - BAf = \lambda(x, p) \cdot Af,$$

es muss also sein:

$$(u(vf)) - (v(uf)) \equiv ((uv)f) = \lambda \cdot (uf).$$

Diese Bedingungsgleichung zerlegt sich in:

$$\frac{\partial (uv)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial (uv)}{\partial p_i} = \lambda \frac{\partial u}{\partial p_i}$$
$$(i = 1 \cdots n),$$

es muss also λ und demzufolge auch (uv) eine Function von u allein sein.

Satz 11. *Die lineare partielle Differentialgleichung $(uf) = 0$ in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ gestattet die infinitesimale Transformation (vf) dann und nur dann, wenn (uv) eine Function von u allein ist.*

Leicht zu erledigen ist auch die allgemeinere Frage: Wann gestattet eine lineare partielle Differentialgleichung $(P_1, f) = 0$ in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ die infinitesimale Transformation:

$$Bf = \sum_\varkappa \xi_\varkappa(x, p) \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa} + \sum_\varkappa \pi_\varkappa(x, p) \frac{\partial f}{\partial p_\varkappa}?$$

Zur Beantwortung dieser Frage führt man kanonische Veränderliche $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ ein, in denen $(P_1 f) = 0$ die Form:

$$(P_1 f) = \frac{\partial f}{\partial X_1} = 0$$

annimmt. Ist nun:

$$Bf = \sum_\varkappa \alpha_\varkappa(X, P) \frac{\partial f}{\partial X_\varkappa} + \sum_\varkappa \beta_\varkappa(X, P) \frac{\partial f}{\partial P_\varkappa},$$

*) Vgl. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Math. Ann. Bd. XVI.

so ergiebt sich ohne weiteres als nothwendige und hinreichende Bedingung, dass $\alpha_2 \cdots \alpha_n$, $\beta_1 \cdots \beta_n$ von X_1 frei sein müssen.

Ist w eine Lösung der Differentialgleichung $(uf) = 0$ und ist (vf) eine infinitesimale Transformation, welche die Gleichung $(uf) = 0$ invariant lässt, so ist auch (vw) eine Lösung von: $(uf) = 0$ (Abschn. I, S. 130). Verbinden wir das mit dem eben bewiesenen Satze 11, so erhalten wir eine erste Verallgemeinerung des Poissonschen Theorems:

Satz 12. *Ist w eine Lösung der Differentialgleichung $(uf) = 0$ in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ und ist v irgend eine Function von solcher Beschaffenheit, dass der Ausdruck (uv) eine Function von u allein wird, so ist stets auch (vw) eine Lösung von $(uf) = 0$.*

Dieser Satz, welcher übrigens auch direkt aus der Jacobischen Identität geschlossen werden könnte, lässt sich nach mehreren Richtungen hin verallgemeinern. Beispielsweise gilt der folgende

Satz 13. *Sind $w_1 \cdots w_m$ solche Lösungen der Gleichung $(uf) = 0$, welche paarweise in den Beziehungen: $(w_i w_\varkappa) \equiv 0$ stehen und ist andererseits die Function v so beschaffen, dass (uv) die Form:*

$$(uv) = \Omega(u, w_1 \cdots w_m)$$

besitzt, so sind $(vw_1) \cdots (vw_m)$ sämmtlich Lösungen von $(uf) = 0$.

In der That, unter den Voraussetzungen dieses Satzes verschwinden in der Identität:

$$((uv)w_\varkappa) + ((vw_\varkappa)u) + ((w_\varkappa u)v) \equiv 0$$

links das erste und das dritte Glied, es ist also wirklich:

$$((vw_\varkappa)u) \equiv 0 \qquad (\varkappa = 1 \cdots m).$$

Es giebt noch andere Verallgemeinerungen des Poissonschen Theorems, die nicht direkt aus der Jacobischen Identität hervorgehen. auf dieselben einzugehen ist aber hier nicht der Ort.

Kapitel 16.

Verallgemeinerung der Theorie der homogenen Functionengruppen. Auffassung der Functionengruppen als unendlicher Transformationsgruppen.

In dem gegenwärtigen Kapitel beschäftigen wir uns hauptsächlich mit endlichen Berührungstransformationen von der besonderen Form:

$$(1) \qquad z' = Az + \Omega(x, p), \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

und mit den zugehörigen infinitesimalen Berührungstransformationen, deren charakteristische Functionen nach S. 261 die Gestalt haben: $\varepsilon z + w(x, p)$, wo ε eine Constante bezeichnet.

Die Entwickelungen des Kapitels sind übrigens zum Verständniss der folgenden Kapitel nicht erforderlich; wenn sie trotzdem gebracht werden, so beruht das auf der Wichtigkeit, die ihnen an und für sich zukommt.

§ 72.

Zunächst einige einfache Definitionen und Sätze.

Wir sagen (Abschnitt I, S. 95), dass eine Function U von $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ bei einer gegebenen Berührungstransformation von der Form (1) invariant bleibt, wenn vermöge (1) eine Relation von der Form:

$$U(z', x_1' \cdots x_n', p_1' \cdots p_n') = U(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n)$$

besteht. Hieraus ergiebt sich sofort, *dass die homogenen Berührungstransformationen:*

$$z' = z, \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ auch definirt werden können als diejenigen Berührungstransformationen von der Form (1), *welche die Function z invariant lassen.*

Ist: $u_1(x, p) \cdots u_r(x, p)$ eine r-gliedrige Functionengruppe und bestehen vermöge (1) Relationen von der Form:

$$(2) \qquad u_\varkappa(x', p') = F_\varkappa(u_1(x, p) \cdots u_r(x, p)) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r),$$

so sagen wir, dass die Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ bei der Berührungstransformation (1) invariant bleibt oder dass sie die Transformation (1) gestattet; unter den gemachten Voraussetzungen und nur unter diesen führt die Berührungstransformation (1) jede Function der Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ wieder in eine Function der Gruppe über.

Die eben aufgestellte Definition kann etwas anders gefasst werden. Ist nämlich $v_1 \cdots v_{2n-r}$ die Polargruppe der Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$, so besteht die letztere aus allen Lösungen des vollständigen Systems:

$$(3) \qquad (v_1 f)_{x,p} = 0, \cdots (v_{2n-r} f)_{x,p} = 0.$$

Bleibt nun die Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ bei der Berührungstransformation (1) invariant, so gilt (Abschnitt I, S. 138) dasselbe auch von dem vollständigen Systeme (3) und umgekehrt. Also können wir sagen:

Die r-gliedrige Functionengruppe: $u_1(x, p) \cdots u_r(x, p)$ bleibt bei der Berührungstransformation (1) *dann und nur dann invariant, wenn das zu ihrer Polargruppe: $v_1 \cdots v_{2n-r}$ gehörige vollständige System:*

$$(3) \qquad (v_1 f)_{x,p} = 0, \cdots (v_{2n-r} f)_{x,p} = 0$$

bei (1) *invariant bleibt.*

Zugleich gilt der

Satz 1. *Bleibt die r-gliedrige Functionengruppe:* $u_1(x, p) \cdots u_r(x, p)$ *bei der Berührungstransformation:*

$$z' = Az + \Omega(x, p), \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \quad (i = 1 \cdots n) \tag{1}$$

invariant, so gilt dasselbe auch von der zugehörigen Polargruppe: $v_1 \cdots v_{2n-r}$.

Dieser Satz folgt unmittelbar daraus, dass zwei reciproke Gruppen von jeder Berührungstransformation (1) in zwei reciproke Gruppen übergeführt werden (s. S. 185).

Soll die *infinitesimale* Berührungstransformation: $\varepsilon z + w(x, p)$, deren Symbol lautet:

$$[\varepsilon z + w(x, p), f]_{z, x, p} - (\varepsilon z + w(x, p))\frac{\partial f}{\partial z},$$

die Function $U(z, x, p)$ invariant lassen, so ist (S. 255 f.) nothwendig und hinreichend, dass der Ausdruck:

$$[\varepsilon z + w(x, p), U]_{z, x, p} - (\varepsilon z + w(x, p))\frac{\partial U}{\partial z}$$

identisch verschwindet.

Ist die besprochene infinitesimale Berührungstransformation so beschaffen, dass sie das oben definirte vollständige System (3) invariant lässt, so sagen wir: *sie lässt die Functionengruppe:* $u_1(x, p) \cdots u_r(x, p)$ *invariant.* Auf Grund von Abschnitt I, Kap. 8 können wir uns daher auch so ausdrücken:

Die r-gliedrige Functionengruppe: $u_1(x, p) \cdots u_r(x, p)$ *gestattet die infinitesimale Berührungstransformation:* $\varepsilon z + w(x, p)$ *dann und nur dann, wenn r Relationen von der Form:*

$$[\varepsilon z + w(x, p), u_\varkappa]_{z, x, p} = \Pi_\varkappa(u_1 \cdots u_r) \quad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

bestehen.

Soll das vollständige System (3) bei allen *endlichen* Transformationen der eingliedrigen Gruppe:

$$[\varepsilon z + w(x, p), f]_{z, x, p} - (\varepsilon z + w(x, p))\frac{\partial f}{\partial z}$$

invariant bleiben, so ist nach Abschnitt I, Kap. 8 nothwendig und hinreichend, dass es bei der *infinitesimalen* Transformation dieser eingliedrigen Gruppe invariant bleibt. Hieraus folgt:

Die r-gliedrige Functionengruppe: $u_1(x, p) \cdots u_r(x, p)$ *gestattet alle endlichen Berührungstransformationen der eingliedrigen Gruppe:* $\varepsilon z + w(x, p)$ *dann und nur dann, wenn sie die infinitesimale Berührungstransformation:* $\varepsilon z + w(x, p)$ *gestattet.*

Wenn die Functionengruppe: $u_1(x, p) \cdots u_r(x, p)$ alle endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppe: $\varepsilon z + w(x, p)$ gestattet, so gilt nach Satz 1, S. 284 von der zugehörigen Polargruppe: $v_1 \cdots v_{2n-r}$ dasselbe. Verbinden wir hiermit das vorhin Gesagte, so bekommen wir den

Satz 2. *Gestattet eine r-gliedrige Functionengruppe: $u_1(x, p) \cdots u_r(x, p)$ die infinitesimale Berührungstransformation: $\varepsilon z + w(x, p)$, so besitzt die zugehörige Polargruppe: $v_1(x, p) \cdots v_{2n-r}(x, p)$ dieselbe Eigenschaft.*

Dieser Satz kann offenbar auch folgendermassen ausgedrückt werden:

Theorem 46. *Erfüllen r unabhängige Functionen: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ einer r-gliedrigen Functionengruppe r Relationen von der Form:*

$$[\varepsilon z + w(x, p), \varphi_\varkappa]_{z, x, p} = U_\varkappa(\varphi_1 \cdots \varphi_r) \quad (\varkappa = 1 \cdots r),$$

so erfüllen irgend $2n - r$ unabhängige Functionen: $\psi_1(x, p) \cdots \psi_{2n-r}(x, p)$ der zugehörigen $(2n - r)$-gliedrigen Polargruppe Relationen von der entsprechenden Form:

$$[\varepsilon z + w(x, p), \psi_j]_{z, x, p} = V_j(\psi_1 \cdots \psi_{2n-r}) \quad (j = 1 \cdots 2n - r).$$

§ 73.

Die Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen geben einen tieferen Einblick in die Theorie der homogenen Functionengruppen und liefern zugleich eine Verallgemeinerung dieser Theorie.

Eine r-gliedrige Functionengruppe: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ ist nach Theorem 28, S. 215 homogen, sobald r Relationen von der Form:

$$(4) \qquad \sum_1^n {}^i p_i \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial p_i} = U_\varkappa(\varphi_1 \cdots \varphi_r) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

bestehen. Vergleichen wir hiermit das Symbol der infinitesimalen Berührungstransformation z, welches folgendermassen lautet:

$$[zf]_{z, x, p} - z\frac{\partial f}{\partial z} = -\sum_1^n {}^i p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} - z\frac{\partial f}{\partial z},$$

so erkennen wir, dass die Relationen (4) sich schreiben lassen:

$$[z\varphi_\varkappa]_{z, x, p} = - U_\varkappa(\varphi_1 \cdots \varphi_r) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r).$$

Auf Grund des im vorigen Paragraphen Gesagten können wir daher die alte Definition der homogenen Functionengruppen durch die nachstehende*) ersetzen:

*) Vgl. Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, December 1872.

Eine r-gliedrige Functionengruppe: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ heisst homogen, wenn sie die infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Function z gestattet.

Wenn aber die Functionengruppe: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ die infinitesimale Berührungstransformation z gestattet, so thut die zugehörige Polargruppe nach Satz 2, S. 285 dasselbe und ist daher ebenfalls homogen.

Hiermit haben wir einen neuen Beweis und *zugleich eine begriffliche Erklärung des Fundamentaltheorems aus der Theorie der homogenen Functionengruppen*, nach welchem die Polargruppe einer homogenen Functionengruppe ebenfalls homogen ist (s. Theorem 29, S. 217).

Ausserdem leuchtet bei Betrachtung des Satzes 2, S. 285 ein, dass der ganze Begriff der homogenen Functionengruppen nur ein besonderer Fall eines allgemeineren Begriffs ist. Man kann nämlich überhaupt alle Functionengruppen betrachten, welche irgend eine *gegebene* infinitesimale Berührungstransformation von der Form: $\varepsilon z + w(x, p)$ gestatten. Der Inbegriff aller dieser Functionengruppen ist dann nach Satz 2, S. 285 so beschaffen, dass die Polargruppe einer darin enthaltenen Functionengruppe stets wieder dem Inbegriff angehört.

Man kann den Satz 2, S. 285 übrigens auch auf einem anderen Wege ableiten.

Gestattet eine r-gliedrige Functionengruppe: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$, welche die Gruppe: $\psi_1(x, p) \cdots \psi_{2n-r}(x, p)$ zur Polargruppe hat, die infinitesimale Berührungstransformation: $\varepsilon z + w(x, p)$, so bestehen nach S. 284 Relationen von der Form:

$$(5) \qquad [\varepsilon z + w(x, p), \varphi_\varkappa]_{z, x, p} = \Phi_\varkappa(\varphi_1 \cdots \varphi_r) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r).$$

Ist nun zunächst ε gleich Null, so lassen sich diese Gleichungen schreiben:

$$(w \varphi_\varkappa)_{x, p} = \Phi_\varkappa(\varphi_1 \cdots \varphi_r) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r).$$

Setzen wir aber diese Ausdrücke in die Jacobische Identität:

$$((w \varphi_\varkappa) \psi_j) + ((\varphi_\varkappa \psi_j) w) + ((\psi_j w) \varphi_\varkappa) = 0$$

ein und berücksichtigen wir, dass auf der linken Seite die beiden ersten Glieder verschwinden, so ergiebt sich, dass Relationen von der Form:

$$(w \psi_j)_{x, p} = \Psi_j(\psi_1 \cdots \psi_{2n-r}) \qquad (j = 1 \cdots 2n - r)$$

bestehen. Ist andrerseits $\varepsilon \neq 0$, so führen wir durch eine Berührungstransformation von der Gestalt:

$$z' = \varepsilon z + w(x, p), \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p)$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

die neuen Veränderlichen z', x', p' ein. Gehen dabei die $\varphi_\varkappa$ und ψ_j bezüglich über in $\overline{\varphi}_\varkappa(x', p')$ und $\overline{\psi}_j(x', p')$, so verwandelt sich (5) in:

$$(5') \qquad [z'\overline{\varphi}_\varkappa]_{z', x', p'} = \frac{1}{\varepsilon} \Phi_\varkappa(\overline{\varphi}_1 \cdots \overline{\varphi}_r) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r),$$

woraus erhellt, dass die Functionengruppe: $\overline{\varphi}_1 \cdots \overline{\varphi}_r$ homogen ist. Die zugehörige Polargruppe: $\overline{\psi}_1 \cdots \overline{\psi}_{2n-r}$ ist nach Theorem 29, S. 217 ebenfalls homogen, es bestehen also Relationen von der Form:

$$[z'\overline{\psi}_j]_{z', x', p'} = \Psi_j(\overline{\psi}_1 \cdots \overline{\psi}_{2n-r}) \qquad (j = 1 \cdots 2n - r)$$

und die erhalten, wenn wir die alten Veränderlichen z, x, p wieder einführen, die Gestalt:

$$[\varepsilon z + w(x, p), \psi_j]_{z, x, p} = \varepsilon \Psi_j(\psi_1 \cdots \psi_{2n-r})$$
$$(j = 1 \cdots 2n - r).$$

Beide Male findet man also das Theorem 46, S. 285 bestätigt.

Durch ganz ähnliche Betrachtungen erhält man aus dem Theorem 30 in Kap. 12, S. 223 den folgenden

Satz 3. *Gestattet die r-gliedrige Functionengruppe: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ die infinitesimale Berührungstransformation: $z + w(x, p)$, bestehen also r Relationen von der Form:*

$$[z + w(x, p), \varphi_\varkappa] = \Phi_\varkappa(\varphi_1 \cdots \varphi_r) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r),$$

so ist es stets möglich, diese Gruppe auf eine solche kanonische Form: $X_1 \cdots X_m$, $P_1 \cdots P_q$ zu bringen, dass die Gleichungen:

$$[X_i, z + w(x, p)]_{z, x, p} = 0, \quad [P_j, z + w(x, p)]_{z, x, p} = P_j$$
$$(i = 1 \cdots m; \; j = 1 \cdots q)$$

identisch erfüllt sind.

Dieser Satz liefert eine neue Methode zur Beantwortung der Frage, ob es eine Berührungstransformation (1) giebt, welche s vorgelegte Functionen $U_1(x, p) \cdots U_s(x, p)$ in s andere Functionen: $V_1(x', p') \cdots V_s(x', p')$ überführt und ausserdem eine gegebene Function: $z + w(x, p)$ invariant lässt. Es ist jedoch kein Grund vorhanden darauf genauer einzugehen.

§ 74.

Es sei: $u_1(x, p) \cdots u_r(x, p)$ irgend eine r-gliedrige Functionengruppe und $X_1 \cdots X_{m+q}$, $P_1 \cdots P_m$ eine kanonische Form derselben.

Verstehen wir nun unter U eine beliebige Function der Gruppe, so ist:

$$(6) \qquad (Uf)_{xp} - U\frac{\partial f}{\partial z}$$

eine infinitesimale Berührungstransformation, welche die Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ invariant lässt. Diese infinitesimale Transformation lässt zu gleicher Zeit *jede einzelne Function* der zu: $u_1 \cdots u_r$ gehörigen Polargruppe und daher insbesondere eine jede ausgezeichnete Function der Gruppe: $u_1 \cdots u_r$ invariant. Es ist überdies leicht zu sehen, dass sie die allgemeinste *infinitesimale* Berührungstransformation von der Form:

$$(\varphi(x, p), f)_{xp} - \varphi(x, p)\frac{\partial f}{\partial z}$$

ist, welche die angegebenen Eigenschaften besitzt.

Wir wollen andrerseits alle *endlichen* Berührungstransformationen von der Form:

$$z' = z + O(x, p), \quad x_i' = \Xi_i(x, p), \quad p_i' = \Pi_i(x, p) \quad (i = 1 \cdots n) \tag{7}$$

suchen, welche die Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ und zugleich jede einzelne Function der zugehörigen Polargruppe, also auch jede ausgezeichnete Function der Gruppe: $u_1 \cdots u_r$ invariant lassen.

Sind $X_{m+q+1} \cdots X_n$, $P_{m+1} \cdots P_n$ solche Functionen der x, p, dass $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ eine $2n$-gliedrige kanonische Functionengruppe bestimmen, so ist insbesondere: $X_{m+1} \cdots X_n$, $P_{m+q+1} \cdots P_n$ eine kanonische Form der zu $u_1 \cdots u_r$ gehörigen Polargruppe. Es handelt sich daher nur darum, die allgemeinste Berührungstransformation (7) zu finden, welche das Functionensystem: $X_1 \cdots X_{m+q}$, $P_1 \cdots P_m$ in eine andere kanonische Form der Gruppe: $u_1 \cdots u_r$ überführt und zugleich die Functionen: $X_{m+1} \cdots X_n$, $P_{m+q+1} \cdots P_n$ sämmtlich invariant lässt.

Um diese Aufgabe zu lösen, bestimmen wir zunächst in allgemeinster Weise eine solche kanonische Form: $\mathfrak{X}_1 \cdots \mathfrak{X}_{m+q}$, $\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_m$ der Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$, dass: $\mathfrak{X}_{m+1} \cdots \mathfrak{X}_{m+q}$ bezüglich gleich: $X_{m+1} \cdots X_{m+q}$ sind. Sodann fügen wir zu den Functionen: $\mathfrak{X}_1 \cdots \mathfrak{X}_m$, $X_{m+1} \cdots X_n$, $\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_m$, $P_{m+q+1} \cdots P_n$ in allgemeinster Weise solche weitere: $\mathfrak{P}_{m+1} \cdots \mathfrak{P}_{m+q}$ hinzu, dass eine $2n$-gliedrige kanonische Gruppe entsteht. Endlich suchen wir nach Anleitung von Theorem 13, S. 130 zwei Functionen: $A(x, p)$ und $B(x, p)$ von solcher Beschaffenheit, dass sowohl die Gleichungen:

$$\bar{z} = z + A(x, p), \quad \bar{x}_i = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \quad (i = 1 \cdots n)$$

als die Gleichungen:

$$\bar{z} = z + B(x, p), \quad \bar{x}_1 = \mathfrak{X}_1(x, p), \cdots \bar{x}_m = \mathfrak{X}_m(x, p)$$
$$\bar{x}_{m+1} = X_{m+1}(x, p), \cdots \bar{x}_n = X_n(x, p)$$
$$\bar{p}_1 = \mathfrak{P}_1(x, p), \cdots \bar{p}_{m+q} = \mathfrak{P}_{m+q}(x, p)$$
$$\bar{p}_{m+q+1} = P_{m+q+1}(x, p), \cdots \bar{p}_n = P_n(x, p)$$

eine Berührungstransformation darstellen. Alsdann ergiebt sich nach S. 132 aus:

$$(8)\quad \begin{cases} z' + B(x', p') = z + A(x, p) \\ \mathfrak{X}_1(x', p') = X_1(x, p), \cdots \mathfrak{X}_m(x', p') = X_m(x, p) \\ X_{m+1}(x', p') = X_{m+1}(x, p), \cdots X_n(x', p') = X_n(x, p) \\ \mathfrak{P}_1(x', p') = P_1(x, p), \cdots \mathfrak{P}_{m+q}(x', p') = P_{m+q}(x, p) \\ P_{m+q+1}(x', p') = P_{m+q+1}(x, p), \cdots P_n(x', p') = P_n(x, p) \end{cases}$$

durch Auflösung nach den z', x', p' eine Berührungstransformation und zwar ist dies offenbar die allgemeinste von der Form (7), welche die Functionengruppe: $u_1 \cdots u_r$ und zugleich alle Functionen der zugehörigen Polargruppe invariant lässt.

Es leuchtet ein, dass der Inbegriff aller Berührungstransformationen (8) eine unendliche continuirliche Transformationsgruppe mit paarweise inversen Transformationen bildet und dass diese Transformationsgruppe alle infinitesimalen Berührungstransformationen:

$$(6)\qquad (Uf)_{xp} - U\frac{\partial f}{\partial z}$$

umfasst, welche Function von $u_1 \cdots u_r$ auch das U sein mag. Andrerseits ist klar, dass für jede *infinitesimale* Berührungstransformation (8) die zugehörige charakteristische Function nur von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ abhängt, denn es ist ja $z' - z$ eine Function der x, p allein. Hieraus folgt, dass in der Form (6), in welcher U eine willkürliche Function von $u_1 \cdots u_r$ bedeutet, alle infinitesimalen Transformationen der unendlichen Transformationsgruppe (8) enthalten sind. Also:

Theorem 47. *Ist: $u_1 \cdots u_r$ eine beliebige r-gliedrige Functionengruppe in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, so giebt es eine unendliche continuirliche Gruppe von Berührungstransformationen, deren infinitesimale Transformationen sämmtlich in der Form:*

$$(6)\qquad (Uf)_{xp} - U\frac{\partial f}{\partial z}$$

enthalten sind, wo U eine willkürliche Function von $u_1 \cdots u_r$ bezeichnet.

Die hierin erwähnte unendliche Transformationsgruppe umfasst offenbar alle eingliedrigen Transformationsgruppen von der Form (6); ob dagegen jede ihrer endlichen Transformationen einer solchen eingliedrigen Gruppe angehört, das muss hier unentschieden bleiben.

Lässt man aus den Gleichungen (8) die oberste Gleichung weg, so erhält man natürlich in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$

allein eine unendliche Gruppe von verkürzten Berührungstransformationen. Die infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe sind ebenfalls verkürzte Berührungstransformationen und sämmtlich in der Form:

$$(U(u_1 \cdots u_r), f)_{x,p}$$

enthalten, wo U eine willkürliche Function seiner Argumente bezeichnet.

Wir bemerkten schon früher (S. 260), dass *die ausgezeichneten Functionen* einer r-gliedrigen Functionengruppe und ebenso *die Functionen der zugehörigen Polargruppe* allen eingliedrigen Gruppen von der Form: $(U(u_1 \cdots u_r), f)$ gegenüber *Differentialinvarianten* sind. Sie sind aber offenbar gleichzeitig auch *Differentialinvarianten gegenüber allen endlichen Transformationen unsrer unendlichen Gruppe* von Berührungstransformationen (8).

Hier möge ohne nähere Begründung der folgende Satz angeführt werden:

Satz 4. *Ordnen sich die Transformationen einer unendlichen continuirlichen Transformationsgruppe paarweise als inverse zusammen, so bleibt jede Function, welche alle infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe gestattet, zugleich auch bei allen ihren endlichen Transformationen invariant.*

Hier sollen noch verschiedene Fragestellungen angedeutet werden.*)

Ist eine r-gliedrige Functionengruppe: $u_1(x, p) \cdots u_r(x, p)$ vorgelegt, so kann man nach allen endlichen Berührungstransformationen von der Form (7) fragen, welche die Functionengruppe invariant lassen. Der Inbegriff aller dieser Transformationen bildet natürlich eine unendliche Transformationsgruppe, deren infinitesimale und endliche Transformationen sich, wie nebenbei bemerkt sein mag, immer ohne Schwierigkeit direkt bestimmen lassen.

Man kann ferner alle endlichen oder infinitesimalen Berührungstransformationen von der Form (7) suchen, welche zu gleicher Zeit *mehrere* vorgelegte Functionengruppen oder Functionen invariant lassen; selbstverständlich erhält man auch da im Allgemeinen unendliche Transformationsgruppen.

Man kann andrerseits *alle vollständigen Systeme* in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ suchen, *welche bei einer derartigen unendlichen Gruppe invariant bleiben.***)

---

*) Eine Reihe solcher Fragen findet man erledigt in den Verh. d. Ges. d. W. zu Christiania, Februar 1875, in der Abhandlung: „Discussion aller Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung“ von Sophus Lie; vgl. auch Math. Ann. Bd. XI.

**) Probleme von dieser Beschaffenheit gehören zu der *allgemeinen Theorie der Differentialinvarianten*, vgl. die eben citirte Abhandlung: Discussion u. s. w.

Von selbst versteht sich, dass sich entsprechende Untersuchungen auch durchführen lassen, wenn man sich von vornherein auf homogene Berührungstransformationen in den x, p beschränkt.

Nur ein ausgeführtes Beispiel möge hier seine Stelle finden.

Es sei eine Function u der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ vorgelegt. Wir fragen zunächst nach allen infinitesimalen Berührungstransformationen $\varphi(x, p)$, welche u invariant lassen.

Soll die infinitesimale Berührungstransformation $\varphi(x, p)$ die Function u invariant lassen, so ist nach S. 255 f. nothwendig und hinreichend, dass der Ausdruck (φu) identisch verschwindet, also ist $\varphi(x, p)$ eine beliebige Function der zu u gehörigen $(2n-1)$-gliedrigen Polargruppe. Setzen wir $u = X_1$ und sind $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ kanonische Veränderliche (vgl. S. 205), so hat die besprochene Polargruppe die Form: $X_1 \cdots X_n$, $P_2 \cdots P_n$; die allgemeinste infinitesimale Berührungstransformation von der gesuchten Beschaffenheit lautet also:

$$(\Phi(X_1 \cdots X_n,\ P_2 \cdots P_n),\ f)_{xp} - \Phi \frac{\partial f}{\partial z}, \tag{9}$$

wo Φ eine willkürliche Function seiner Argumente bezeichnet.

Nunmehr suchen wir alle vollständigen Systeme in $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, welche bei allen infinitesimalen Berührungstransformationen von der Form (9) invariant bleiben.

Ist $W(x, p)$ eine Lösung eines der gesuchten vollständigen Systeme, so muss stets auch:

$$(\Phi(X_1 \cdots X_n,\ P_2 \cdots P_n),\ W)_{xp}$$

eine Lösung dieses Systems sein und zwar bei ganz beliebigem Φ.

Wir denken uns nun die allgemeinste Lösung eines der gesuchten vollständigen Systeme als Function von $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ dargestellt, sie möge in dieser Darstellung die Form:

$$\Omega(X_1 \cdots X_n,\ P_1 \cdots P_n)$$

besitzen.

Es sei Ω zunächst nicht von allen $2n-2$ Grössen: $X_2 \cdots X_n$, $P_2 \cdots P_n$ frei, sondern enthalte etwa $X_\varkappa$, wo $\varkappa$ grösser als 2 ist (enthält es $P_\varkappa$ $(\varkappa > 2)$, so kommt man auf genau dasselbe). Wir bilden die beiden Ausdrücke:

$$(P_\varkappa \Omega) = \frac{\partial \Omega}{\partial X_\varkappa}, \quad (P_\varkappa^2,\ \Omega) = 2 P_\varkappa \frac{\partial \Omega}{\partial X_\varkappa},$$

welche nach dem soeben Gesagten gleichfalls Lösungen des betreffenden vollständigen Systems sind und da $\frac{\partial \Omega}{\partial X_\varkappa}$ nicht identisch verschwindet, so erkennen wir, dass $P_\varkappa$ selbst eine Lösung ist. Nunmehr ergiebt sich, dass auch:

$$(P_\varkappa,\ X_\varkappa^2) = 2X_\varkappa, \quad (P_\varkappa,\ X_\varkappa X_j) = X_j$$
$$(j = 1 \cdots n;\ j \neq \varkappa)$$

Lösungen des vollständigen Systems sind, dass also dieses System die $2n-1$ unabhängigen Lösungen: $X_1 \cdots X_n$, $P_2 \cdots P_n$ besitzt. Mehr unabhängige Lösungen kann es nicht besitzen, also hat es einfach die Form: $(X_1 f) = 0$ oder, was auf dasselbe hinauskommt: $(uf) = 0$.

Es sei Ω andrerseits von $X_2 \cdots X_n$, $P_2 \cdots P_n$ frei und also eine Function von X_1, P_1 allein: $\Omega(X_1, P_1)$. Dann muss Ω nothwendig auch von P_1 frei sein, denn sonst wären die Ausdrücke:

$$(X_1 \Omega) = -\frac{\partial \Omega}{\partial P_1}, \quad (X_1 X_2,\ \Omega) = -X_2 \frac{\partial \Omega}{\partial P_1}$$

Lösungen des betreffenden vollständigen Systems und also auch X_2 eine Lösung, während doch die allgemeinste Lösung nur von X_1 und P_1 abhängen soll. In diesem Falle ist daher die allgemeinste Lösung eine Function von X_1 allein und das betreffende vollständige System lautet:

$$(X_1 f) = 0, \cdots (X_n f) = 0$$
$$(P_2 f) = 0, \cdots (P_n f) = 0.$$

Damit haben wir den

Satz 5. *Gestattet ein vollständiges System in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ alle infinitesimalen Berührungstransformationen in den x, p, welche die Function $u(x, p)$ invariant lassen, so kann es entweder die Form:*

$$(uf)_{xp} = 0$$

erhalten, oder es ist $(2n-1)$-gliedrig und besitzt nur die eine Lösung u.

Abtheilung IV.

Allgemeine Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen von Berührungstransformationen.

In dieser Abtheilung entwickeln wir den Begriff der endlichen continuirlichen Gruppen von Berührungstransformationen und leiten die wichtigsten Eigenschaften derartiger Gruppen ab.

Zunächst jedoch füllen wir eine Lücke aus, welche im ersten Abschnitte geblieben war. Daselbst fanden wir nämlich, dass r unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$X_\varkappa(f) = \sum_1^n{}_i\ \xi_{\varkappa i}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

einer r-gliedrigen Gruppe Relationen von der Form:

$$\text{(A)} \qquad X_i(X_\varkappa(f)) - X_\varkappa(X_i(f)) = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} X_s f \qquad (i,\ \varkappa = 1 \cdots r)$$

erfüllen und ausserdem, dass die in diesen Relationen vorkommenden Constanten $c_{i\varkappa s}$ die Gleichungen:

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} c_{i\varkappa s} + c_{\varkappa i s} = 0 \\ \sum_1^r {}_\nu \left\{ c_{i\varkappa\nu} c_{\nu j s} + c_{\varkappa j \nu} c_{\nu i s} + c_{j i \nu} c_{\nu \varkappa s} \right\} = 0 \\ (i,\ \varkappa,\ j,\ s = 1 \cdots r) \end{cases}$$

befriedigen. Wir kündigten auch bereits an, *dass umgekehrt jedesmal, wenn r^3 Constanten $c_{i\varkappa s}$ vorgelegt sind, welche die Relationen* (B) *erfüllen, es immer eine r-gliedrige Gruppe von Punkttransformationen giebt, welche die Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ besitzt, eine Gruppe also, welche r unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f \cdots X_r f$ enthält, die in den Beziehungen* (A) *stehen.* Diesen Fundamentalsatz wollen wir jetzt wirklich beweisen und wir werden zu gleicher Zeit finden, dass alle Gruppen von *Punkt*transformationen mit gegebener Zusammensetzung jedenfalls durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen bestimmt werden können.

In Kapitel 18 entwickeln wir sodann den Begriff der endlichen continuirlichen Gruppen von Berührungstransformationen und übertragen die hauptsächlichsten Theorien des ersten Abschnitts auf die Gruppen dieser Art. Besonders einfach gestaltet sich dabei die Theorie der Aehnlichkeit zweier Gruppen von Berührungstransformationen.

Aus dem übrigen Inhalte der gegenwärtigen Abtheilung möge ferner hervorgehoben werden der Nachweis, dass alle Gruppen von *Berührungs*transformationen mit gegebener Zusammensetzung sich jedenfalls durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen bestimmen lassen (Kapitel 20).

In Kapitel 21 führen wir sodann den Begriff der Reducibilität und Irreducibilität der Gruppen von Berührungstransformationen ein; endlich zeigen wir in dem Schlusskapitel (Kap. 22) der Abtheilung, dass jede endliche continuirliche Gruppe von Berührungstransformationen Differentialinvarianten besitzt, und geben zugleich eine Methode, alle diese Differentialinvarianten durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zu bestimmen.

Kapitel 17.

Beweis der Existenz von Gruppen mit gegebener Zusammensetzung.

Wir denken uns eine Zusammensetzung gegeben, also r^3 Constanten $c_{i\varkappa s}$, welche die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} c_{i\varkappa s} + c_{\varkappa i s} = 0 \\ \sum_1^r {}_\nu \{ c_{i\varkappa\nu} c_{\nu j s} + c_{\varkappa j \nu} c_{\nu i s} + c_{j i \nu} c_{\nu \varkappa s} \} = 0 \\ (i, \varkappa, j, s = 1 \cdots r) \end{cases}$$

erfüllen. Wir behaupten, dass es in einer geeigneten Zahl m von Veränderlichen $y_1 \cdots y_m$ r unabhängige infinitesimale Punkttransformationen:

$$Y_\varkappa(f) = \sum_1^m {}_\mu \eta_{\varkappa\mu}(y_1 \cdots y_m) \frac{\partial f}{\partial y_\mu} \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

giebt, welche in den Beziehungen:

$$(2)\qquad Y_i(Y_\varkappa(f)) - Y_\varkappa(Y_i(f)) = \sum_1^r {}_s c_{i\varkappa s} Y_s f \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

stehen und somit eine r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ erzeugen.

§ 75.

Zunächst werden wir nachweisen, dass es bei geeigneter Wahl von n stets r unabhängige Functionen: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ der $2n$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ giebt, welche in den Beziehungen:

$$(3)\qquad (\varphi_i \varphi_\varkappa)_{xp} = \sum_1^r {}_s c_{i\varkappa s} \varphi_s = w_{i\varkappa}(\varphi_1 \cdots \varphi_r) \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

stehen.

Nach Theorem 37, S. 241 ist zur Existenz von r derartigen Functionen: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ nothwendig und hinreichend, dass die $w_{i\varkappa}(\varphi_1 \cdots \varphi_r)$ die Relationen:

$$(4)\qquad \begin{cases} w_{i\varkappa} + w_{\varkappa i} = 0 \\ \sum_1^r {}_\nu \left\{ w_{\nu j} \frac{\partial w_{i\varkappa}}{\partial \varphi_\nu} + w_{\nu i} \frac{\partial w_{\varkappa j}}{\partial \varphi_\nu} + w_{\nu\varkappa} \frac{\partial w_{ji}}{\partial \varphi_\nu} \right\} = 0 \\ (i, \varkappa, j = 1 \cdots r) \end{cases}$$

identisch erfüllen. Von diesen Relationen sind nun aber die in der ersten Reihe wegen: $c_{i\varkappa s} + c_{\varkappa i s} = 0$ augenscheinlich erfüllt und die in der zweiten Reihe nehmen bei wirklicher Ausrechnung die Form an:

$$\sum_1^r {}_s\, \varphi_s \cdot \sum_1^r {}_\nu \left\{ c_{i\varkappa\nu} c_{\nu j s} + c_{\varkappa j\nu} c_{\nu i s} + c_{j i \nu} c_{\nu\varkappa s} \right\} = 0,$$

werden also vermöge (1) ebenfalls zu Identitäten. Folglich giebt es sicher r unabhängige Functionen: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ von der angegebenen Beschaffenheit und wir haben den

Satz 1. *Sind r^3 Constanten $c_{i\varkappa s}$ vorgelegt, welche die Gleichungen:*

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & c_{i\varkappa s} + c_{\varkappa i s} = 0 \\ & \sum_1^r {}_\nu \left\{ c_{i\varkappa\nu} c_{\nu j s} + c_{\varkappa j\nu} c_{\nu i s} + c_{j i \nu} c_{\nu\varkappa s} \right\} = 0 \\ & \qquad (i, \varkappa, j, s = 1 \cdots r) \end{aligned} \right.$$

erfüllen, so ist es nach geeigneter Wahl von n stets möglich r solche unabhängige Functionen: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ der $2n$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ zu finden, welche in den Beziehungen:

$$(3) \qquad (\varphi_i \varphi_\varkappa)_{xp} = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} \varphi_s \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

stehen und zwar ist zur Bestimmung von r derartigen Functionen: $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ höchstens die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen erforderlich.

Jetzt seien: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ unabhängige Functionen, welche in den Beziehungen (3) stehen.

Wir betrachten die r infinitesimalen Transformationen:

$$(\varphi_1 f)_{xp} \cdots (\varphi_r f)_{xp}$$

in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$. Diese Transformationen sind nach S. 260, Satz 7 von einander unabhängig, denn $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ sind als unabhängige Functionen der x, p durch keine lineare Relation:

$$c_1 \varphi_1 + \cdots + c_r \varphi_r + c = 0$$

mit constanten Coefficienten verknüpft.

Setzen wir nun für den Augenblick:

$$(\varphi_\varkappa f) = A_\varkappa(f) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r),$$

so kommt:

$$\begin{aligned} A_i(A_\varkappa(f)) - A_\varkappa(A_i(f)) &= (\varphi_i(\varphi_\varkappa f)) - (\varphi_\varkappa(\varphi_i f)) \\ &= ((\varphi_i \varphi_\varkappa) f) \\ &= \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} (\varphi_s f) \end{aligned}$$

oder:

$$A_i(A_\varkappa(f)) - A_\varkappa(A_i(f)) = \sum_1^r{}_s\, c_{i\varkappa s} A_s(f)$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots r).$$

Demnach sind $A_1(f) \cdots A_r(f)$ r unabhängige infinitesimale Transformationen in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, welche eine r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ erzeugen.

Damit ist die im Eingang des Kapitels aufgestellte Behauptung bewiesen; denn wählen wir die dort genannte Zahl $m = 2n$ und schreiben wir: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ an Stelle von $y_1 \cdots y_m$, so brauchen wir blos zu setzen: $Y_\varkappa f = A_\varkappa f$.

Die r-gliedrige Functionengruppe: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ besitzt eine $(2n - r)$-gliedrige Polargruppe: $\psi_1(x, p) \cdots \psi_{2n-r}(x, p)$. Wir führen die $2n - r$ unabhängigen Functionen: $\psi_1 \cdots \psi_{2n-r}$ dieser Polargruppe nebst r geeigneten Grössen $z_1 \cdots z_r$ als neue unabhängige Veränderliche ein, dann erhalten die r infinitesimalen Transformationen:

$$A_\varkappa(f) = (\varphi_\varkappa f)_{xp} \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

augenscheinlich die Form:

$$A_\varkappa(f) = \sum_1^r{}_j\, \zeta_{\varkappa j}(z_1 \cdots z_r,\ \psi_1 \cdots \psi_{2n-r}) \frac{\partial f}{\partial z_j}$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r).$$

Nun sind die r linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(\varphi_1 f)_{xp} = 0, \cdots (\varphi_r f)_{xp} = 0$$

von einander unabhängig, da $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ unabhängige Functionen der x, p sind, folglich müssen auch die r linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$\sum_1^r{}_j\, \zeta_{\varkappa j}(z_1 \cdots z_r,\ \psi_1 \cdots \psi_{2n-r}) \frac{\partial f}{\partial z_j} = 0 \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

von einander unabhängig sein und müssen es auch bleiben, wenn man in ihnen die Grössen $\psi_1 \cdots \psi_{2n-r}$ nicht mehr als Veränderliche, sondern als willkürliche Constanten ansieht. Hieraus ergiebt sich, dass die r infinitesimalen Transformationen:

$$\mathfrak{A}_\varkappa(f) = \sum_1^r{}_j\, \zeta_{\varkappa j}(z_1 \cdots z_r,\ C_1 \cdots C_{2n-r}) \frac{\partial f}{\partial z_j}$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r)$$

in den Veränderlichen $z_1 \cdots z_r$ von einander unabhängig sind, zugleich ist klar, dass diese infinitesimalen Transformationen eine r-gliedrige Gruppe in $z_1 \cdots z_r$ erzeugen und zwar nothwendig eine einfach transitive Gruppe. Also:

Theorem 48. *Sind r^3 Constanten:*

$$c_{i\varkappa s} \qquad (i, \varkappa, s = 1 \cdots r)$$

vorgelegt, welche die Relationen:

$$(1) \qquad \begin{cases} c_{i\varkappa s} + c_{\varkappa i s} = 0 \\ \sum_1^r \nu \left\{ c_{i\varkappa\nu} c_{\nu j s} + c_{\varkappa j \nu} c_{\nu i s} + c_{j i \nu} c_{\nu \varkappa s} \right\} = 0 \\ (i, \varkappa, j, s = 1 \cdots r) \end{cases}$$

*erfüllen, so ist es immer möglich, durch Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen eine r-gliedrige einfach transitive Gruppe von Punkttransformationen aufzustellen, welche die Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ besitzt.**)

Ist aber eine einfach transitive Gruppe von Punkttransformationen bestimmt, welche die Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ hat, so findet man nach Abschn. I, Kap. 22 alle anderen Gruppen von Punkttransformationen mit dieser Zusammensetzung ebenfalls durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Mithin gilt der

Satz 2. *Hat man r^3 Constanten:*

$$c_{i\varkappa s} \qquad (i, \varkappa, s = 1 \cdots r),$$

welche die Relationen:

$$(1) \qquad \begin{cases} c_{i\varkappa s} + c_{\varkappa i s} = 0 \\ \sum_1^r \nu \left\{ c_{i\varkappa\nu} c_{\nu j s} + c_{\varkappa j \nu} c_{\nu i s} + c_{j i \nu} c_{\nu \varkappa s} \right\} = 0 \\ (i, \varkappa, j, s = 1 \cdots r) \end{cases}$$

erfüllen, so giebt es unbegränzt viele Gruppen von Punkttransformationen, welche die Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ haben. Alle diese Gruppen können jedenfalls durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen gefunden werden.

Da in den Relationen (3) die $w_{i\varkappa}$ homogene Functionen erster Ordnung von $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ sind, so giebt es dem Theoreme 38, S. 248 zufolge insbesondere auch r unabhängige Functionen: $h_1(x, p) \cdots h_r(x, p)$, welche in den p homogen von erster Ordnung sind und in den Beziehungen:

$$(h_i h_\varkappa)_{xp} = \sum_1^r s \, c_{i\varkappa s} h_s \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

stehen. Dann sind:

$$(h_1 f)_{xp} \cdots (h_r f)_{xp}$$

*) Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1888; vgl. auch Archiv for Mathematik, Bd. 1, Christiania 1876; Math. Ann., Bd. XVI und Berichte der Kgl. Sächs. Ges. d. W. 1888.

offenbar infinitesimale *homogene* Berührungstransformationen und erzeugen eine r-gliedrige Gruppe mit der Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$. Also:

Satz 3. *Hat man r^3 Constanten:*

$$c_{i\varkappa s} \qquad (i, \varkappa, s = 1 \cdots r),$$

welche die Relationen:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & c_{i\varkappa s} + c_{\varkappa i s} = 0 \\ & \sum_1^r{}_\nu \{ c_{i\varkappa\nu} c_{\nu j s} + c_{\varkappa j \nu} c_{\nu i s} + c_{j i \nu} c_{\nu \varkappa s} \} = 0 \\ & (i, \varkappa, j, s = 1 \cdots r) \end{aligned} \right.$$

erfüllen, so kann man stets und zwar jedenfalls durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen r unabhängige infinitesimale homogene Berührungstransformationen:

$$B_\varkappa(f) = (h_\varkappa f)_{xp} \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

finden, welche in den Beziehungen:

$$B_i(B_\varkappa(f)) - B_\varkappa(B_i(f)) = \sum_1^r{}_s c_{i\varkappa s} B_s(f) \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

stehen und somit eine r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ erzeugen; die infinitesimalen Transformationen:

$$\sum_1^r{}_\varkappa e_\varkappa (h_\varkappa f) = \left(\sum_1^r{}_\varkappa e_\varkappa h_\varkappa,\ f \right)$$

dieser Gruppe sind sämmtlich infinitesimale homogene Berührungstransformationen.

Kapitel 18.

Allgemeines über endliche continuirliche Gruppen von Berührungstransformationen.

Bei den nachfolgenden Untersuchungen über endliche continuirliche Gruppen von Berührungstransformationen werden wir uns vorzugsweise mit den Gruppen von *homogenen* Berührungstransformationen beschäftigen.

Eine Beschränkung der Allgemeinheit liegt darin nicht. In Kap. 5, S. 140 ff. haben wir ja nachgewiesen, dass jeder homogenen Berührungstransformation in den $2n$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine ganz bestimmte Berührungstransformation in den $2n-1$ Veränderlichen:

$$z = x_n, \quad y_\varkappa = x_\varkappa, \quad q_\varkappa = -\frac{p_\varkappa}{p_n} \qquad (\varkappa = 1 \cdots n-1)$$

entspricht und dass dadurch eine eindeutig umkehrbare Beziehung zwischen den angegebenen beiden Kategorien von Berührungstransformationen hergestellt ist. Ferner zeigten wir damals: Führt man zwei Berührungstransformationen, welche beide derselben Kategorie angehören, nach einander aus und sucht man zu ihnen und zu der so erhaltenen dritten Transformation der betreffenden Kategorie die entsprechenden Transformationen der andern Kategorie, so erhält man stets drei Transformationen, von denen die dritte durch Ausführung der beiden ersten nach einander entsteht.

Hat man daher ∞^r solche Transformationen der einen Kategorie, welche eine r-gliedrige continuirliche Gruppe bilden, so bilden die ∞^r entsprechenden Transformationen der andern Kategorie ebenfalls eine r-gliedrige Gruppe, welche augenscheinlich mit der ersten holoedrisch isomorph ist.

Jedenfalls brauchen wir die folgenden Untersuchungen nur für Gruppen von homogenen Berührungstransformationen bis ins Einzelne durchzuführen, die Uebertragung auf die Gruppen von nicht homogenen hat dann nicht die geringste Schwierigkeit.

Ferner ist noch Folgendes klar: Jede Untergruppe einer r-gliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen besteht wieder aus Berührungstransformationen. Wird diese Bemerkung auf die eingliedrigen Untergruppen der betreffenden Gruppe angewendet, so ergiebt sich (vgl. Satz 2, S. 255), dass die Gruppe von r unabhängigen infinitesimalen *Berührungs*transformationen erzeugt ist. Umgekehrt leuchtet ein, dass eine r-gliedrige Gruppe, welche von r unabhängigen infinitesimalen Berührungstransformationen erzeugt ist, aus lauter Berührungstransformationen besteht.

§ 76.

Jede r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen in $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ enthält r unabhängige infinitesimale homogene Berührungstransformationen: $(H_1 f) \cdots (H_r f)$. Die r charakteristischen Functionen: $H_1 \cdots H_r$ dieser infinitesimalen Transformationen sind in den p homogen und sind nach Kap. 14, Satz 10, S. 264 durch keine lineare Relation: $\varepsilon_1 H_1 + \cdots + \varepsilon_r H_r = 0$ mit constanten Coefficienten verknüpft.

Es leuchtet ein, dass die charakteristische Function der allgemeinen infinitesimalen Transformation: $e_1(H_1 f) + \cdots + e_r(H_r f)$ unsrer Gruppe die Form: $e_1 H_1 + \cdots + e_r H_r$ besitzt. Schreiben wir ferner für einen Augenblick $A_\varkappa f$ an Stelle von $(H_\varkappa f)$, so bestehen nach Abschnitt I, Theorem 22, S. 150 Relationen von der Form:

$$A_i A_\varkappa f - A_\varkappa A_i f = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} A_s f.$$

Nun ist:

$$A_i A_\varkappa f - A_\varkappa A_i f = (H_i(H_\varkappa f)) - (H_\varkappa(H_i f)) = ((H_i H_\varkappa) f);$$

also erhalten jene Relationen die Gestalt:

$$((H_i H_\varkappa) f) = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s}(H_s f),$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\left((H_i H_\varkappa) - \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} H_s,\ f\right) \equiv 0.$$

Hieraus aber lässt sich schliessen (vgl. Kap. 14, S. 264), dass die charakteristischen Functionen: $H_1 \cdots H_r$ in den folgenden Beziehungen stehen:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (H_i H_\varkappa) = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} H_s \\ (i,\ \varkappa = 1 \cdots r). \end{array} \right.$$

Sind umgekehrt $(H_1 f) \cdots (H_r f)$ solche unabhängige infinitesimale homogene Berührungstransformationen, deren charakteristische Functionen $H_1 \cdots H_r$ in Beziehungen von der Form (1) stehen, so erzeugen sie augenscheinlich eine r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen.

Demnach gilt das

Theorem 49. *Sollen r infinitesimale homogene Berührungstransformationen: $(H_1 f) \cdots (H_r f)$ in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen erzeugen, so ist nothwendig und hinreichend, dass die r charakteristischen Functionen $H_1 \cdots H_r$ durch keine lineare Relation: $\varepsilon_1 H_1 + \cdots + \varepsilon_r H_r = 0$ mit constanten Coefficienten verknüpft sind, dass sie dagegen in Beziehungen von der Form:*

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (H_i H_\varkappa) = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} H_s \\ (i,\ \varkappa = 1 \cdots r) \end{array} \right.$$

stehen. Jede r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen ist von r derartigen infinitesimalen homogenen Berührungstransformationen: $(H_1 f) \cdots (H_r f)$ erzeugt; die *charakteristische Function der allgemeinen infinitesimalen Transformation der betreffenden Gruppe lautet:*

$$e_1 H_1 + \cdots + e_r H_r.^{*)}$$

Der Kürze wegen werden wir in Zukunft auch *von der r-gliedrigen Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen* reden oder auch, wo kein Missverständniss zu befürchten steht, einfach *von der r-gliedrigen Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$.*

Ist: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ eine r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen, so kann man sich die Aufgabe stellen, die charakteristischen Functionen der infinitesimalen Transformationen aller Untergruppen zu bestimmen, welche in dieser r-gliedrigen Gruppe enthalten sind. Zur Erledigung dieser Aufgabe ist nur die Auflösung algebraischer Gleichungen erforderlich; das folgt unmittelbar aus dem Theorem 33, S. 210 des Abschnitts I, denn die betreffende Aufgabe kommt einfach darauf hinaus, alle Untergruppen der r-gliedrigen Gruppe: $(H_1 f) \cdots (H_r f)$ zu bestimmen.

Die Constanten $c_{i\varkappa s}$, welche in den Gleichungen (1) auftreten, sind durch die Relationen:

$$\text{(2)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^r {}_\nu \left(c_{i\varkappa\nu} c_{\nu j s} + c_{\varkappa j \nu} c_{\nu i s} + c_{j i \nu} c_{\nu \varkappa s} \right) = 0 \\ \qquad (i, \varkappa, j, s = 1 \cdots r) \end{array} \right.$$

verknüpft. Man kann diese Relationen entweder durch Bildung der bekannten Identität zwischen je drei der infinitesimalen Transformationen: $A_\varkappa f = (H_\varkappa f)$ herleiten oder durch Bildung der Identität zwischen je drei der charakteristischen Functionen: $H_1 \cdots H_r$.

Das System der $c_{i\varkappa s}$ in den Gleichungen (1) bestimmt gerade so wie bei den Gruppen von Punkttransformationen die *Zusammensetzung* der Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$; setzt man nämlich: $(H_\varkappa f) = A_\varkappa f$, so ziehen die Gleichungen: $(H_i H_\varkappa) = \sum c_{i\varkappa s} H_s$ die Relationen:

$$A_i A_\varkappa f - A_\varkappa A_i f = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} A_s f$$

nach sich. Hieraus geht hervor, dass die *adjungirte Gruppe* der Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ die gewöhnliche Form:

$$E_\mu f = \sum_{\varkappa j}^{1 \cdots r} c_{j\mu\varkappa} e_j \frac{\partial f}{\partial e_\varkappa} \qquad (\mu = 1 \cdots r)$$

besitzt.

---

*) Lie, Math. Ann. Bd. VIII; Göttinger Nachrichten, December 1874; Archiv for Mathematik Bd. I, Christiania 1876.

Ferner sind (vgl. Abschn. I, S. 291) zwei r-gliedrige Gruppen: $H_1(x,p)\cdots H_r(x,p)$ und $K_1(x,p)\cdots K_r(x,p)$ von homogenen Berührungstransformationen dann und nur dann *gleichzusammengesetzt* oder *holoedrisch isomorph*, wenn es in der zweiten Gruppe r solche unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$(K_j'f) = g_{j1}(K_1f) + \cdots + g_{jr}(K_rf) \qquad (j=1\cdots r)$$

giebt, dass mit den Relationen:

$$(H_i(H_jf)) - (H_j(H_if)) = \sum_1^r {}_s\, c_{ijs}(H_sf)$$

zugleich die ebenso gestalteten:

$$(K_i'(K_j'f)) - (K_j'(K_i'f)) = \sum_1^r {}_s\, c_{ijs}(K_s'f)$$

stattfinden. Das aber können wir jetzt folgendermassen ausdrücken:

Satz 1. *Zwei r-gliedrige Gruppen: $H_1(x,p)\cdots H_r(x,p)$ und $K_1(x,p)\cdots K_r(x,p)$ von homogenen Berührungstransformationen sind dann und nur dann gleichzusammengesetzt, wenn es möglich ist, r solche durch keine lineare homogene Relation verknüpfte charakteristische Functionen:*

$$K_j' = \sum_1^r {}_i\, g_{ji} \,.\, K_i(x,p) \qquad (j=1\cdots r)$$

anzugeben, dass zu gleicher Zeit die Relationen:

$$(H_iH_j) = \sum_1^r {}_s\, c_{ijs} H_s \qquad (i,j=1\cdots r)$$

und:

$$(K_iK_j) = \sum_1^r c_{ijs} K_s \qquad (i,j=1\cdots r)$$

bestehen, beide Male mit denselben Constanten c_{ijs}.

Wählt man die r^2 Constanten g_{ji} in allgemeinster Weise so, dass den Bedingungen dieses Satzes genügt wird und ordnet man jeder charakteristischen Function: $e_1H_1 + \cdots + e_rH_r$ die Function: $e_1K_1' + \cdots + e_rK_r'$ zu, so erhält man augenscheinlich die beiden Gruppen: $H_1\cdots H_r$ und $K_1\cdots K_r$ in allgemeinster Weise holoedrisch isomorph auf einander bezogen.

Soll die r-gliedrige Gruppe: $H_1(x,p)\cdots H_r(x,p)$ von homogenen Berührungstransformationen eine invariante Untergruppe der $(r+m)$-gliedrigen Gruppe: $H_1(x,p)\cdots H_{r+m}(x,p)$ sein, so ist nach Abschn. I, Theorem 47, S. 261 nothwendig und hinreichend, dass Relationen von der Form:

$$(H_\varkappa(H_{r+\mu}f)) - (H_{r+\mu}(H_\varkappa f)) = \sum_1^r {}_s\, c_{\varkappa,r+\mu,s}(H_s f)$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r, \quad \mu = 1 \cdots m)$$

bestehen. Hieraus ergiebt sich in bekannter Weise der

Satz 2. *Die r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen ist dann und nur dann eine invariante Untergruppe der $(r+m)$-gliedrigen: $H_1(x, p) \cdots H_{r+m}(x, p)$, wenn Relationen von der Form:*

$$(H_\varkappa H_{r+\mu}) = c_{\varkappa,r+\mu,1}H_1 + \cdots + c_{\varkappa,r+\mu,r}H_r$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r, \quad \mu = 1 \cdots m)$$

bestehen.

§ 77.

Ist: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ eine r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen, so werden unter den r *Functionen:* $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ eine gewisse Anzahl, etwa gerade m von einander unabhängige vorhanden sein. Wir wollen annehmen, dass $H_1 \cdots H_m$ von einander unabhängig sind, während $H_{m+1} \cdots H_r$ sich durch $H_1 \cdots H_m$ allein ausdrücken lassen:

$$H_{m+\varkappa} \equiv \Omega_{m+\varkappa}(H_1 \cdots H_m) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r-m). \tag{3}$$

Unter diesen Voraussetzungen liefern die Gleichungen (1) zwischen $H_1 \cdots H_m$ die folgenden Beziehungen:

$$(4) \qquad \left\{ (H_\mu H_\nu) = \sum_1^m {}_s\, c_{\mu\nu s}H_s + \sum_1^{r-m} {}_\varkappa\, c_{\mu\nu,m+\varkappa}\Omega_{m+\varkappa}(H_1 \cdots H_m) \right. \qquad (\mu,\ \nu = 1 \cdots m),$$

mit andern Worten: $H_1 \cdots H_m$ bestimmen eine m-gliedrige, natürlich homogene *Functionengruppe*, welcher auch $H_{m+1} \cdots H_r$ angehören. Das giebt den

Satz 3. *Zu jeder r-gliedrigen Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen gehört eine ganz bestimmte homogene Functionengruppe.*) Dieselbe ist durch die Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ bestimmt und enthält die charakteristischen Functionen aller infinitesimalen Transformationen der r-gliedrigen Gruppe. Ihre Gliederzahl ist gleich der Anzahl der von einander unabhängigen unter den Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$.*

---

*) Archiv for Mathematik Bd. 1, Christiania 1876.

Zum Unterschied von der Functionengruppe, welche durch die Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ bestimmt ist, werden wir im Folgenden die r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen als die *Transformationsgruppe:* $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ bezeichnen.

Sind die $c_{i\varkappa s}$ gegeben und die Form der Relationen $H_{m+\varkappa} - \Omega_{m+\varkappa} = 0$ bekannt, so kann der *Typus* (vgl. S. 227) der betreffenden homogenen Functionengruppe ohne Weiteres angegeben werden.

Die *Invarianten* der Transformationsgruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ sind (Abschnitt I, S. 215) diejenigen Functionen der x, p, welche die r infinitesimalen Transformationen: $(H_1 f) \cdots (H_r f)$ gestatten, sie sind also die gemeinsamen Lösungen der r linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(H_1 f) = 0, \cdots (H_r f) = 0$$

in den Veränderlichen x, p. Sind wie oben $H_1 \cdots H_m$ von einander unabhängig, während $H_{m+1} \cdots H_r$ sich durch $H_1 \cdots H_m$ allein ausdrücken, so reduciren sich diese Gleichungen auf die m von einander unabhängigen:

$$(H_1 f) = 0, \cdots (H_m f) = 0,$$

welche nach Theorem 19, S. 183 ein m-gliedriges vollständiges System bilden. Die Lösungen dieses vollständigen Systems bilden aber nach Theorem 20, S. 184 die Polargruppe der m-gliedrigen Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$, also:

Theorem 50. *Die Invarianten der r-gliedrigen Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen sind die Functionen der Polargruppe, welche zu der durch die Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ bestimmten Functionengruppe gehört.*

Insbesondere ergiebt sich:

Satz 4. *Diejenigen Invarianten der r-gliedrigen Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen, welche in den p homogen von nullter Ordnung sind, lassen sich auch definiren als die Functionen nullter Ordnung der Polargruppe, welche zu der durch die Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ bestimmten Functionengruppe gehört.*

Fragt man nach allen denjenigen Invarianten der Transformationsgruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$, welche der Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ selbst angehören, so wird zu antworten sein: es sind die ausgezeichneten Functionen der Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$. Giebt es unter diesen Invarianten solche von nullter Ordnung in den p, so sind das natürlich die ausgezeichneten Functionen nullter Ordnung jener Functionengruppe.

Will man den Begriff der *Transitivität* auf die Gruppen von homogenen Berührungstransformationen übertragen, so kann man sich auf zwei verschiedene Standpunkte stellen.

Erstens kann man die r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen dann als transitiv bezeichnen, wenn sie die Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ transitiv transformirt. In diesem Falle ist zur Transitivität nothwendig und hinreichend, dass die Gruppe keine Invarianten besitzt oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass es unter den Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ gerade $2n$ von einander unabhängige giebt.

Zweitens kann man die Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ dann als transitiv bezeichnen, wenn sie die Veränderlichen:

$$x_1 \cdots x_n, \quad \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}$$

transitiv transformirt. Für diese Auffassung ist zur Transitivität nothwendig und hinreichend, dass die Gruppe keine Invarianten nullter Ordnung besitzt, das heisst, die Polargruppe der Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ darf keine Functionen nullter Ordnung enthalten.

Ueberall da, wo man darauf Gewicht legt, dass man es mit einer Gruppe von homogenen *Berührungstransformationen* der Mannigfaltigkeit $x_1 \cdots x_n$ zu thun hat, wird man der zweiten Definition der Transitivität den Vorzug geben. Denn unter diesen Umständen kommt es einem nur darauf an, wie die Elemente:

$$x_1 \cdots x_n, \quad \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}$$

des n-fach ausgedehnten Punktraumes: $x_1 \cdots x_n$ transformirt werden und man wird naturgemäss eine Gruppe dann transitiv nennen, wenn sie jedes Element von allgemeiner Lage in jedes andere überführt, wenn sie also keine Invariante nullter Ordnung besitzt. Hat sie andrerseits gerade l unabhängige Invarianten nullter Ordnung:

$$N_1\left(x_1 \cdots x_n, \quad \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) \cdots N_l\left(x_1 \cdots x_n, \quad \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}\right),$$

so zerlegt sie die Schaar aller ∞^{2n-1} Elemente des Raumes $x_1 \cdots x_n$ in ∞^l einzeln invariante Schaaren: $N_1(x, p) = a_1, \cdots N_l(x, p) = a_l$ von je ∞^{2n-l-1} Elementen und die Gruppe ist intransitiv.

Etwas anders gestaltet sich die Sache, wenn man die Begriffe der *Primitivität* und der *Imprimitivität* auf die Gruppen von homogenen Berührungstransformationen übertragen will.

Da nämlich (S. 137) jede homogene Berührungstransformation in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ die lineare partielle Differentialgleichung:

$$(5) \qquad p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial f}{\partial p_n} = 0$$

invariant lässt, so transformirt überhaupt jede r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ die Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ imprimitiv, indem sie schon die Veränderlichen:

$$x_1 \cdots x_n, \quad \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}$$

unter einander transformirt. In Folge dessen hat es bei einer Gruppe von homogenen Berührungstransformationen nur dann einen Sinn von „Primitivität“ zu reden, wenn sie die Veränderlichen:

$$x_1 \cdots x_n, \quad \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}$$

primitiv transformirt, wenn sie also in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ kein zwei- oder mehrgliedriges vollständiges System invariant lässt, welches die Gleichung (5) umfasst. Ist eine Gruppe von homogenen Berührungstransformationen nicht in diesem Sinne primitiv, so wird sie als imprimitiv zu bezeichnen sein.

Um Missverständnisse zu vermeiden, empfiehlt es sich, jedesmal ausdrücklich zu sagen, in welchem Sinne man die Begriffe Transitivität und Primitivität auf eine Gruppe von homogenen Berührungstransformationen anwendet.

§ 78.

Es sei: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ eine r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen. Führt man in diese Gruppe vermöge einer homogenen Berührungstransformation:

$$y_i = Y_i(x, p), \quad q_i = Q_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

die neuen Veränderlichen: $y_1 \cdots y_n$, $q_1 \cdots q_n$ ein, so erhält man eine neue r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen. Verwandeln sich: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ bei Einführung der y, q bezüglich in: $K_1(y, q) \cdots K_r(y, q)$, so gehen nach S. 267 die infinitesimalen Transformationen: $(H_1 f)_{xp} \cdots (H_r f)_{xp}$ bezüglich über in: $(K_1 f)_{yq} \cdots (K_r f)_{yq}$ und das sind dann unabhängige infinitesimale Transformationen der neuen Gruppe. Mithin lautet die charakteristische Function der allgemeinen infinitesimalen Transformation unsrer neuen Gruppe: $e_1 K_1(y, q) + \cdots + e_r K_r(y, q)$ oder, wie wir uns auch ausdrücken können:

Satz 5. *Führt man in eine r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen vermöge einer homogenen Berührungstransformation:*

$$y_i = Y_i(x, p), \quad q_i = Q_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

die neuen Veränderlichen: $y_1 \cdots y_n$, $q_1 \cdots q_n$ ein, so bekommt man eine neue r-gliedrige Gruppe: $K_1(y, q) \cdots K_r(y, q)$ von homogenen Berührungstransformationen; die charakteristischen Functionen: $K_1(y, q) \cdots K_r(y, q)$ dieser neuen Gruppe werden dadurch erhalten, dass man in die charakteristischen Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ der ursprünglichen Gruppe die neuen Veränderlichen y, q einführt.

Beispiel. Führt man in die allgemeine projective Gruppe:

$$p_i, \quad x_i p_\varkappa, \quad x_i \sum_1^n {}_\varkappa x_\varkappa p_\varkappa$$

die neuen Veränderlichen x', p' vermöge der Berührungstransformation:

$$x_i' = -\frac{p_i}{\sum x_\varkappa p_\varkappa}, \qquad p_i' = x_i \sum_1^n {}_\varkappa x_\varkappa p_\varkappa$$

ein, so bekommt man (s. S. 268) wiederum die allgemeine projective Gruppe. Hierbei geht jede Untergruppe der allgemeinen projectiven Gruppe in eine Untergruppe derselben über. Zwei solche projective Gruppen nennen wir *dualistische* Gruppen. Die zu einer linearen homogenen Gruppe gehörige dualistische Gruppe ist selbst eine lineare homogene Gruppe. So z. B. ist die zu der *adjungirten Gruppe* einer beliebigen Transformationsgruppe gehörige *dualistische* Gruppe ebenfalls eine lineare homogene Gruppe.

Nach Satz 3, S. 303 ist der r-gliedrigen Gruppe: $H_1(x,p) \cdots H_r(x,p)$ von homogenen Berührungstransformationen eine ganz bestimmte homogene Functionengruppe: $H_1 \cdots H_m$ zugeordnet, welcher alle r Functionen: $H_1 \cdots H_r$ angehören. Wir wollen annehmen, dass:

$$X_1(x, p) \cdots X_\lambda(x, p), \quad P_1(x, p) \cdots P_\mu(x, p)$$
$$(\lambda + \mu \leqq r)$$

eine kanonische Form dieser Functionengruppe ist; ferner mögen:

$$X_{\lambda+1}(x, p) \cdots X_n(x, p), \quad P_{\mu+1}(x, p) \cdots P_n(x, p)$$

solche Functionen sein, dass: $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ eine $2n$-gliedrige kanonische homogene Functionengruppe wird.

Führen wir unter den gemachten Voraussetzungen vermöge der homogenen Berührungstransformation:

$$y_i = X_i(x, p), \quad q_i = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

an Stelle der x, p die neuen Veränderlichen $y_1 \cdots y_n$, $q_1 \cdots q_n$ ein, so werden $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ augenscheinlich Functionen von $y_1 \cdots y_\lambda$, $q_1 \cdots q_\mu$ allein:

$$H_\varkappa(x, p) = \Omega_\varkappa(y_1 \cdots y_\lambda, \ q_1 \cdots q_\mu) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

und die infinitesimalen Transformationen: $(H_\varkappa f)_{xp}$ unsrer r-gliedrigen Gruppe nehmen daher die folgende Gestalt an:

$$(H_\varkappa f)_{xp} = (\Omega_\varkappa f)_{yq} = \sum_1^\mu {}_j \frac{\partial \Omega_\varkappa}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial y_j} - \sum_1^\lambda {}_i \frac{\partial \Omega_\varkappa}{\partial y_i} \frac{\partial f}{\partial q_i}$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r).$$

Hieraus lässt sich erkennen, welche Form die endlichen Gleichungen unsrer Gruppe in den neuen Veränderlichen erhalten. Ist nämlich $\mu \geqq \lambda$, so besitzen diese endlichen Gleichungen die Form:

$$(6)\quad \begin{cases} y_i' = \Phi_i(y_1 \cdots y_\lambda,\ q_1 \cdots q_\mu,\ a_1 \cdots a_r) \\ q_i' = \Psi_i(y_1 \cdots y_\lambda,\ q_1 \cdots q_\mu,\ a_1 \cdots a_r) \\ \qquad\qquad (i = 1 \cdots \lambda) \\ y_{\lambda+1}' = y_{\lambda+1} + \Xi_1(y_1 \cdots y_\lambda,\ q_1 \cdots q_\mu,\ a_1 \cdots a_r) \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_\mu' = y_\mu + \Xi_{\mu-\lambda}(y_1 \cdots y_\lambda,\ q_1 \cdots q_\mu,\ a_1 \cdots a_r) \\ q_{\lambda+1}' = q_{\lambda+1}, \cdots q_\mu' = q_\mu \\ y_{\mu+1}' = y_{\mu+1}, \cdots y_n' = y_n \\ q_{\mu+1}' = q_{\mu+1}, \cdots q_n' = q_n. \end{cases}$$

Im Falle $\lambda > \mu$ ist die Form der endlichen Gleichungen ganz ähnlich und braucht wohl nicht besonders hingeschrieben zu werden.

Wir sahen oben (S. 304), dass die Transformationsgruppe: $H_1(x,p) \cdots H_r(x,p)$ alle Functionen der Polargruppe invariant lässt, welche zu der homogenen Functionengruppe: $H_1(x,p) \cdots H_m(x,p)$ gehört. In der Form (6) der Transformationsgruppe ist die Invarianz der Functionen der Polargruppe augenscheinlich, denn ist $\mu \geqq \lambda$, so erhält die Polargruppe der Functionengruppe: $H_1(x,p) \cdots H_m(x,p)$ in den Veränderlichen y, q die Gestalt: $q_{\lambda+1} \cdots q_\mu$, $q_{\mu+1} \cdots q_n$, $y_{\mu+1} \cdots y_n$.

Ausserdem mag noch bemerkt werden, dass die Form der Functionen Φ, Ψ, Ξ in den Gleichungen (6) durch $H_1(x,p) \cdots H_r(x,p)$ und durch die gewählte kanonische Form: $X_1(x,p) \cdots X_\lambda(x,p)$, $P_1(x,p) \cdots P_\mu(x,p)$ der Functionengruppe: $H_1(x,p) \cdots H_m(x,p)$ vollständig bestimmt ist.

§ 79.

Ist: $H_1(x,p) \cdots H_r(x,p)$ eine r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ und: $K_1(y,q) \cdots K_r(y,q)$ eine ebensolche Gruppe in den Veränderlichen $y_1 \cdots y_n$, $q_1 \cdots q_n$ und giebt es eine homogene Berührungstransformation:

$$(7)\qquad y_i = Y_i(x,p), \quad q_i = Q_i(x,p) \quad (i = 1 \cdots n),$$

welche die endlichen Transformationen der ersten Gruppe in die der zweiten überführt, so heissen die beiden Gruppen *ähnlich vermöge der homogenen Berührungstransformation* (7).

Sollen die beiden Gruppen: $H_1 \cdots H_r$ und $K_1 \cdots K_r$ vermöge der homogenen Berührungstransformation (7) ähnlich sein, so ist nach

Abschnitt I, Theorem 61, S. 329 nothwendig und hinreichend, dass die r infinitesimalen Transformationen: $(H_1 f)_{xp} \cdots (H_r f)_{xp}$ der ersten Gruppe bei Ausführung der Transformation (7) in r infinitesimale Transformationen der Gruppe: $K_1(y, q) \cdots K_r(y, q)$ übergehen. Nach dem auf S. 267 Gesagten ergiebt sich daher das

Theorem 51. *Zwei r-gliedrige Gruppen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ und $K_1(y, q) \cdots K_r(y, q)$ von homogenen Berührungstransformationen in $2n$ Veränderlichen sind dann und nur dann durch homogene Berührungstransformation mit einander ähnlich, wenn es eine homogene Berührungstransformation:*

$$(7) \qquad y_i = Y_i(x, p), \quad q_i = Q_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

*giebt, vermöge deren jedes $H_i(x, p)$ die Form: $g_{i1} K_1(y, q) + \cdots + g_{ir} K_r(y, q)$ erhält, wo die g_{ij} Constanten bezeichnen.**)

Sind die beiden Gruppen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ und $K_1(y, q) \cdots K_r(y, q)$ in dem angegebenen Sinne mit einander ähnlich und setzt man:

$$g_{i1} K_1(y, q) + \cdots + g_{ir} K_r(y, q) = K_i'(y, q) \qquad (i = 1 \cdots r),$$

so gehen die Relationen:

$$(H_i H_j)_{xp} = \sum_1^r {}_s\, c_{ijs} H_s$$

wegen des invarianten Charakters des Klammersymbols bei Ausführung der Berührungstransformation (7) über in:

$$(K_i' K_j')_{yq} = \sum_1^r {}_s\, c_{ijs} K_s'.$$

Das stimmt mit dem Theoreme 62, S. 330 des Abschnitts I, nach welchem nur solche Gruppen mit einander ähnlich sein können, welche gleichzusammengesetzt sind.

Von grosser Wichtigkeit ist es natürlich, entscheiden zu können, ob zwei vorgelegte r-gliedrige Gruppen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ und $K_1(y, q) \cdots K_r(y, q)$ von homogenen Berührungstransformationen vermöge einer homogenen Berührungstransformation (7) mit einander ähnlich sind. Wir werden jetzt zeigen, wie man das entscheiden kann, setzen aber dabei voraus, dass die beiden Gruppen gleichzusammengesetzt sind, denn wären sie das nicht, so würde die Aehnlichkeit von vornherein ausgeschlossen sein.

---

*) Vgl. Lie, Math. Ann. Bd. VIII, S. 303; Göttinger Nachrichten, December 1874; Archiv for Mathematik, Bd. 1, S. 185, Christiania 1876.

Bestehen die Relationen:

$$(H_i H_j)_{xp} = \sum_1^r {}_s\, c_{ijs} H_s,$$

so wählen wir zunächst in allgemeinster Weise r^2 solche Constanten g_{ij} mit nicht verschwindender Determinante, dass die r charakteristischen Functionen:

$$K_i' = g_{i1} K_1(y, q) + \cdots + g_{ir} K_r(y, q) \qquad (i = 1 \cdots r)$$

durch die Relationen:

$$(K_i' K_j')_{yq} = \sum_1^r {}_s\, c_{ijs} K_s'$$

mit denselben Constanten c_{ijs} verknüpft sind. Anders ausgedrückt: Wir beziehen die Gruppe: $K_1(y, q) \cdots K_r(y, q)$ in allgemeinster Weise holoedrisch isomorph auf die Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$. Nunmehr kommt es blos darauf an, ob es möglich ist, die in den g_{ij} enthaltenen willkürlichen Elemente derart zu specialisiren, dass es eine homogene Berührungstransformation (7) giebt, welche $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ bezüglich in $K_1'(y, q) \cdots K_r'(y, q)$ verwandelt. Diese Frage aber lässt sich auf Grund der Entwickelungen des § 60, S. 227 ff. erledigen.

Sind nämlich etwa $H_1 \cdots H_m$ unabhängige Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, während $H_{m+1} \cdots H_r$ sich durch $H_1 \cdots H_m$ allein ausdrücken lassen:

$$H_{m+j} \equiv \Omega_{m+j}(H_1 \cdots H_m) \qquad (j = 1 \cdots r - m),$$

so bestimmen $H_1 \cdots H_m$ eine m-gliedrige homogene Functionengruppe, welcher auch $H_{m+1} \cdots H_r$ angehören. Soll es nun eine homogene Berührungstransformation (7) geben, welche $H_1 \cdots H_r$ in $K_1' \cdots K_r'$ überführt, so muss es möglich sein, die in den g_{ij} enthaltenen willkürlichen Elemente so zu specialisiren, dass $K_1' \cdots K_m'$ unabhängige Functionen von $y_1 \cdots y_n$, $q_1 \cdots q_n$ werden und eine m-gliedrige homogene Functionengruppe bestimmen, welcher auch $K_{m+1}' \cdots K_r'$ angehören und zwar müssen sich $K_{m+1}' \cdots K_r'$ genau so durch $K_1' \cdots K_m'$ ausdrücken, wie $H_{m+1} \cdots H_r$ durch $H_1 \cdots H_m$, das heisst, es muss sein:

$$K_{m+j}' \equiv \Omega_{m+j}(K_1' \cdots K_m') \qquad (j = 1 \cdots r - m).$$

Diese nothwendigen Bedingungen sind aber auch für das Vorhandensein einer Berührungstransformation (7) von der verlangten Beschaffenheit hinreichend. Sind sie nämlich erfüllt, so stehen $H_1 \cdots H_m$ in den Beziehungen:

$$(H_\mu H_\nu)_{xp} = \sum_1^m {}_s\, c_{\mu\nu s} H_s + \sum_1^{r-m} {}_j\, c_{\mu\nu,\, m+j}\, \Omega_{m+j}(H_1 \cdots H_m) \qquad (\mu, \nu = 1 \cdots m)$$

und $K_1' \cdots K_m'$ stehen in den Beziehungen:

$$(K_\mu' K_\nu')_{yq} = \sum_1^m {}_s c_{\mu\nu s} K_s' + \sum_1^{r-m} {}_j c_{\mu\nu,\, m+j} \Omega_{m+j}(K_1' \cdots K_m')$$
$$(\mu,\, \nu = 1 \cdots m);$$

da nun $H_1 \cdots H_m$ sämmtlich homogen von erster Ordnung in $p_1 \cdots p_n$ sind und $K_1' \cdots K_m'$ homogen von erster Ordnung in $q_1 \cdots q_n$, so giebt es nach Theorem 34, S. 229 sicher eine homogene Berührungstransformation (7), welche $H_1 \cdots H_m$ bezüglich in $K_1' \cdots K_m'$ verwandelt, diese aber führt zu gleicher Zeit: $H_{m+1} \cdots H_r$ über in $K_{m+1}' \cdots K_r'$, erfüllt also alle gestellten Forderungen. Damit haben wir das

Theorem 52. *Sollen zwei r-gliedrige Gruppen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ und $K_1(y, q) \cdots K_r(y, q)$ von homogenen Berührungstransformationen in $2n$ Veränderlichen durch eine homogene Berührungstransformation:*

(7) $$y_i = Y_i(x, p), \quad q_i = Q_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

mit einander ähnlich sein, so ist vor allen Dingen nothwendig, dass sie gleichzusammengesetzt sind. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, wähle man in allgemeinster Weise r^2 solche Constanten g_{ij} mit nicht verschwindender Determinante, dass zwischen $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ und zwischen:

$$K_i'(y, q) = g_{i1} K_1(y, q) + \cdots + g_{ir} K_r(y, q) \qquad (i = 1 \cdots r)$$

Relationen von derselben Form:

$$(H_i H_j)_{xp} = \sum_1^r {}_s c_{ijs} H_s$$

und:

$$(K_i' K_j')_{yq} = \sum_1^r {}_s c_{ijs} K_s'$$

stattfinden. Sind nun etwa $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ von einander unabhängige Functionen, während $H_{m+1} \cdots H_r$ sich durch $H_1 \cdots H_m$ allein ausdrücken lassen:

$$H_{m+\mu} \equiv \Omega_{m+\mu}(H_1 \cdots H_m) \qquad (\mu = 1 \cdots r - m),$$

so sind die beiden Gruppen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ und: $K_1(y, q) \cdots K_r(y, q)$ dann und nur dann in der verlangten Weise mit einander ähnlich, wenn es möglich ist, die in den g_{ij} enthaltenen willkürlichen Elemente derart zu specialisiren, dass $K_1'(y, q) \cdots K_m'(y, q)$ von einander unabhängig werden, während $K_{m+1}' \cdots K_r'$ sich folgendermassen durch $K_1' \cdots K_m'$ allein ausdrücken):*

$$K_{m+\mu}' \equiv \Omega_{m+\mu}(K_1' \cdots K_m') \qquad (\mu = 1 \cdots r - m).$$

---

*) Lie, Archiv for Mathematatik, Bd. 1, S. 187, Christiania 1876.

Aus diesem Theorem ergiebt sich insbesondere, dass die beiden Gruppen: $H_1 \cdots H_r$ und $K_1 \cdots K_r$ jedenfalls nur dann ähnlich sein können, wenn es unter den Functionen: $K_1(y, q) \cdots K_r(y, q)$ genau so viele von einander unabhängige giebt wie unter den Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$. Sind andrerseits die beiden Gruppen wirklich ähnlich, so findet man die allgemeinste homogene Berührungstransformation (7), welche die eine Gruppe in die andere überführt, folgendermassen: Man specialisirt die in den g_{ij} enthaltenen willkürlichen Elemente in allgemeinster Weise derart, dass die Bedingungen des Theorems erfüllt sind und sucht sodann die allgemeinste homogene Berührungstransformation (7), welche $H_1 \cdots H_m$ bezüglich in $K_1' \cdots K_m'$ überführt.

Ein einfaches Beispiel mag zur Erläuterung des eben bewiesenen Theorems dienen. Wir wollen untersuchen, ob die Gruppe:

$$H_1 = p_1 + p_2, \quad H_2 = x_1 p_1 + x_2 p_2, \quad H_3 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2$$

durch eine homogene Berührungstransformation mit der Gruppe:

$$K_1 = q_1, \quad K_2 = y_1 q_1 + \tfrac{1}{2} y_2 q_2, \quad K_3 = y_1^2 q_1 + y_1 y_2 q_2$$

ähnlich ist.

Es bestehen die Relationen:

$$(H_1 H_2)_{xp} = H_1, \quad (H_1 H_3)_{xp} = 2H_2, \quad (H_2 H_3)_{xp} = H_3$$

und ebenso:

$$(K_1 K_2)_{yq} = K_1, \quad (K_1 K_3)_{yq} = 2K_2, \quad (K_2 K_3)_{yq} = K_3,$$

die beiden Gruppen sind also gleichzusammengesetzt. Da überdies H_1, H_2, H_3 unabhängige Functionen von x_1, x_2, p_1, p_2 sind und K_1, K_2, K_3 ebensolche Functionen von y_1, y_2, q_1, q_2, so giebt es unsrem Theorem zufolge sicher eine homogene Berührungstransformation, vermöge deren die Gleichungen:

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{aligned} p_1 + p_2 &= q_1 \\ x_1 p_1 + x_2 p_2 &= y_1 q_1 + \tfrac{1}{2} y_2 q_2 \\ x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 &= y_1^2 q_1 + y_1 y_2 q_2 \end{aligned} \right.$$

identisch bestehen.

Aus den Gleichungen (A) ergiebt sich durch Auflösung:

$$y_1 = \frac{x_1 \sqrt{p_1} + i x_2 \sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1} + i \sqrt{p_2}}, \quad q_1 = p_1 + p_2$$

$$y_2 q_2 = 2i(x_1 - x_2)\sqrt{p_1 p_2}.$$

Zur Bestimmung von:

$$y_2 = \Phi\left(x_1,\ x_2,\ \frac{p_1}{p_2}\right)$$

hat man die Differentialgleichungen:

$$(q_1,\ y_2)_{xp} = 0, \quad (y_1 q_1,\ y_2)_{xp} = 0, \quad (y_2 q_2,\ y_2)_{xp} = y_2,$$

durch deren Integration man findet:

$$y_2 = C \cdot \sqrt{x_1 - x_2} \cdot \frac{\sqrt[4]{p_1 p_2}}{\sqrt{p_1} + i\sqrt{p_2}}.$$

Endlich wird noch:

$$q_2 = \frac{2i}{C} \cdot \sqrt{x_1 - x_2} \cdot \sqrt[4]{p_1 p_2}\left(\sqrt{p_1} + i\sqrt{p_2}\right)$$

und damit ist die gesuchte Berührungstransformation vollständig bestimmt.

Bemerkenswerth ist, dass H_1, H_2, H_3 auch als eine Gruppe von Punkttransformationen in den Veränderlichen x_1, x_2 aufgefasst werden kann und K_1, K_2, K_3 als eine ebensolche Gruppe in den Veränderlichen y_1, y_2, dass aber diese beiden Gruppen durch keine Punkttransformation:

$$y_1 = \varphi_1(x_1,\ x_2), \qquad y_2 = \varphi_2(x_1,\ x_2)$$

mit einander ähnlich sind (vgl. Abschn. I, S. 362).

Wir haben bisher den Begriff der Aehnlichkeit nur auf solche Gruppen von homogenen Berührungstransformationen angewendet, welche gleichviele Veränderliche enthalten. Diese Voraussetzung kann fallen gelassen werden. Enthält zum Beispiel die Gruppe: $K_1(y, q) \cdots K_r(y, q)$ nur $2h < 2n$ Veränderliche: $y_1 \cdots y_h$, $q_1 \cdots q_h$, so kann man $2(n-h)$ Veränderliche $y_{h+1} \cdots y_n$, $q_{h+1} \cdots q_n$ hinzufügen, welche bei der Gruppe $K_1(y, q) \cdots K_r(y, q)$ gar nicht, das heisst nur durch die identische Transformation:

$$y'_{h+1} = y_{h+1}, \ \cdots \ y'_n = y_n$$
$$q'_{h+1} = q_{h+1}, \ \cdots \ q'_n = q_n$$

transformirt werden. Ist dann die Gruppe $K_1(y, q) \cdots K_r(y, q)$ in den $2n$ Veränderlichen: $y_1 \cdots y_n$, $q_1 \cdots q_n$ mit der Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ durch eine homogene Berührungstransformation (7) ähnlich, so kann man den Begriff der Aehnlichkeit erweitern, indem man auch sagt, dass die Gruppe: $K_1 \cdots K_r$ in den $2h$ Veränderlichen: $y_1 \cdots y_h$, $q_1 \cdots q_h$ mit der Gruppe: $H_1 \cdots H_r$ in den $2n$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ durch eine homogene Berührungstransformation ähnlich ist (vgl. Abschn. I, S. 361 f., wo eine ähnliche Redeweise bei den Gruppen von Punkttransformationen eingeführt ist). Wenn wir übrigens im

Folgenden von Aehnlichkeit zweier Gruppen durch homogene Berührungstransformation sprechen, so meinen wir stets, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich hervorgehoben wird, die Aehnlichkeit in dem ursprünglichen engeren Sinne, wo beide Gruppen gleichviele Veränderliche enthalten.

An die besprochene Erweiterung des Begriffs der Aehnlichkeit zweier Gruppen von homogenen Berührungstransformationen knüpfen wir noch die folgende Bemerkung.

Ist in den $2n$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ vorgelegt, so kann man sich die Frage vorlegen, wie klein die Zahl $2h$ sein darf, damit es in den $2h$ Veränderlichen $y_1 \cdots y_h$, $q_1 \cdots q_h$ noch eine r-gliedrige Gruppe: $K_1(y, q) \cdots K_r(y, q)$ von homogenen Berührungstransformationen giebt, welche mit der Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ durch homogene Berührungstransformation ähnlich ist, das Wort „ähnlich" in jenem weiteren Sinne verstanden.

Die Antwort auf diese Frage ist leicht zu geben. Es sei nämlich: $X_1(x, p) \cdots X_\lambda(x, p)$, $P_1(x, p) \cdots P_\mu(x, p)$ wie in § 78, S. 307 eine kanonische Form der homogenen Functionengruppe, welche durch: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ bestimmt ist, und es sei etwa $\mu \geq \lambda$, dann erkennt man aus dem damals Gesagten sofort, dass es in $2h = 2\mu$ Veränderlichen: $y_1 \cdots y_\mu$, $q_1 \cdots q_\mu$ eine r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen giebt, welche mit der Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ ähnlich ist; man erhält die betreffende Gruppe, wenn man in der Gruppe (6) die Veränderlichen $y_{\mu+1} \cdots y_n$, $q_{\mu+1} \cdots q_n$, welche von derselben gar nicht transformirt werden, weglässt. Zugleich liegt auf der Hand, dass es in $2h < 2\mu$ Veränderlichen: $y_1 \cdots y_h$, $q_1 \cdots q_h$ keine r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen giebt, welche mit der Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ ähnlich ist, denn wäre: $K_1(y, q) \cdots K_r(y, q)$ eine solche Gruppe, so müssten $K_1(y, q) \cdots K_r(y, q)$ eine $(\lambda + \mu)$-gliedrige homogene Functionengruppe bestimmen, welche die kanonische Form: $Y_1(y, q) \cdots Y_\lambda(y, q)$, $Q_1(y, q) \cdots Q_\mu(y, q)$ erhalten könnte; eine Functionengruppe mit einer solchen kanonischen Form giebt es aber in den $2h < 2\mu$ Veränderlichen: $y_1 \cdots y_h$, $q_1 \cdots q_h$ überhaupt nicht.

Sind in $2n$ Veränderlichen zwei r-gliedrige Gruppen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ und $K_1(x', p') \cdots K_r(x', p')$ von homogenen Berührungstransformationen vorgelegt, so kann man sich auch die allgemeinere Frage stellen, ob es in den $2n$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ überhaupt irgend eine Transformation:

$$(8) \qquad x_i' = F_i(x, p), \quad p_i' = \Phi_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

giebt, welche die eine Transformationsgruppe in die andere überführt, ohne zu verlangen, dass (8) gerade eine homogene Berührungstransformation sein soll. Die Beantwortung dieser Frage kann nach den Regeln des Kap. 19 in Abschnitt I geleistet werden, denn es handelt sich ja nur darum, ob die beiden r-gliedrigen Gruppen von Punkttransformationen: $(H_1 f)_{xp} \cdots (H_r f)_{xp}$ und $(K_1 f)_{x'p'} \cdots (K_r f)_{x'p'}$ durch eine Punkttransformation (8) mit einander ähnlich sind.

Man kann sich andrerseits die Frage stellen, ob die beiden vorgelegten Gruppen von homogenen Berührungstransformationen durch eine Transformation (8) ähnlich sind, welche keine homogene Berührungstransformation ist. Die Beantwortung dieser Frage wird durch die folgenden Bemerkungen erleichtert.

Jede homogene Berührungstransformation in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ lässt den Pfaffschen Ausdruck: $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$ invariant, ja sie lässt überhaupt jeden Pfaffschen Ausdruck von der Form: $c(p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n)$ invariant, welchen Werth auch die Constante c haben mag. Dasselbe gilt natürlich auch von jeder *Gruppe* von homogenen Berührungstransformationen in $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$.

Lässt nun die Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ nur die ∞^1 Pfaffschen Ausdrücke: $c(p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n)$ invariant, sonst aber keinen Pfaffschen Ausdruck:

$$(9) \qquad \sum_1^n {}_i \left(\alpha_i(x, p) dx_i + \beta_i(x, p) dp_i\right),$$

so können die beiden Gruppen: $H_1 \cdots H_r$ und $K_1 \cdots K_r$ jedenfalls nur dann durch eine Transformation (8) ähnlich sein, wenn auch die Gruppe: $K_1(x', p') \cdots K_r(x', p')$ blos die ∞^1 Pfaffschen Ausdrücke: $c(p_1' dx_1' + \cdots + p_n' dx_n')$ invariant lässt. Jede Transformation (8), vermöge deren die beiden Gruppen ähnlich sind, muss dann die Schaar der ∞^1 Pfaffschen Ausdrücke: $c(p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n)$ invariant lassen, sie muss also die Form haben:

$$(10) \qquad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = \varepsilon \,.\, P_i(x, p) \qquad {\scriptstyle (i = 1 \cdots n)},$$

wo ε eine Constante bezeichnet und wo:

$$(11) \qquad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad {\scriptstyle (i = 1 \cdots n)}$$

eine homogene Berührungstransformation ist. Man sieht sofort, dass in diesem Falle die beiden Gruppen, wenn sie überhaupt durch eine Transformation (8) ähnlich sind, es auch durch eine homogene Berührungstransformation sind. Ist ferner (11) die allgemeinste homogene Berührungstransformation, vermöge deren die beiden Gruppen ähnlich sind und versteht man unter ε eine willkürliche Constante, so ist (10) die allgemeinste Transformation (8), vermöge deren die beiden Gruppen ähnlich sind.

Wenn dagegen die Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ ausser den ∞^1 Pfaffschen Ausdrücken: $c(p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n)$ noch andere Pfaffsche Ausdrücke (9) invariant lässt, und wenn die Gruppe: $K_1(x', p') \cdots K_r(x', p')$ dasselbe thut, so können die beiden Gruppen sehr gut durch eine Transformation (8) ähnlich sein, welche keine homogene Berührungstransformation ist, selbst wenn sie durch homogene Berührungstransformation nicht mit einander ähnlich sind.

Sind unter den Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ gerade $m < 2n$ von einander unabhängige vorhanden, so besitzt die Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ gerade $2n - m > 0$ unabhängige Invarianten: $J_1(x, p) \cdots J_{2n-m}(x, p)$ und sie lässt ausser den ∞^1 Pfaffschen Ausdrücken: $c(p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n)$ überhaupt jeden Pfaffschen Ausdruck von der Form:

$$\Omega(J_1 \cdots J_{2n-m}) \sum_1^n {}_i\, p_i dx_i + \sum_1^{2n-m} {}_\nu\, \Omega_\nu(J_1 \cdots J_{2n-m}) dJ_\nu$$

invariant, welche Functionen ihrer Argumente auch die Ω sein mögen.

§ 80.

Die Entwickelungen dieses Paragraphen sind zwar an und für sich von Wichtigkeit, können aber übergangen werden, ohne dass dadurch das Verständniss des Folgenden beeinträchtigt würde.

Ist in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ vorgelegt, so kann man sich die Aufgabe stellen, alle homogenen Berührungstransformationen:

$$(12) \qquad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

zu bestimmen, welche die Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ in sich überführen. Der Inbegriff aller dieser Transformationen bildet natürlich eine Gruppe, nämlich die grösste Gruppe von homogenen Berührungstransformationen, in welcher die Gruppe: $H_1 \cdots H_r$ als invariante Untergruppe enthalten ist. Es leuchtet ein, dass die so definirte Gruppe weder endlich noch continuirlich zu sein braucht.

Soll eine homogene Berührungstransformation (12) die Gruppe: $H_1 \cdots H_r$ in sich überführen, so ist nothwendig und hinreichend, dass sie die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $(H_1 f) \cdots (H_r f)$ der Gruppe in r ebensolche Transformationen überführt, oder, was auf dasselbe hinauskommt: es ist nothwendig und hinreichend, dass sie die r charakteristischen Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ auf die Form:

$$H_\varkappa(x, p) = \sum_1^r {}_j\, g_{\varkappa j} H_j(x', p') \qquad {\scriptstyle (\varkappa=1\cdots r)}$$

bringt, wo die $g_{\varkappa j}$ Constanten bezeichnen. Will man daher die allgemeinste homogene Berührungstransformation (12) bestimmen, welche die Gruppe: $H_1 \cdots H_r$ in sich überführt, so wird man folgendermassen zu Werke gehen:

Man bezieht zunächst die Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ in allgemeinster Weise holoedrisch isomorph auf sich selbst, das heisst, wenn die Beziehungen:

$$(H_i H_\varkappa)_{xp} = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} H_s \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

bestehen, so wählt man in allgemeinster Weise r^2 solche Constanten $\gamma_{\varkappa j}$ mit nicht verschwindender Determinante, dass auch zwischen den charakteristischen Functionen:

$$\mathfrak{H}_\varkappa(x, p) = \sum_1^r {}_j\, \gamma_{\varkappa j} H_j(x, p) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

die Beziehungen:

$$(\mathfrak{H}_i \mathfrak{H}_\varkappa)_{xp} = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} \mathfrak{H}_s \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

bestehen. Sodann specialisirt man (vgl. den vorigen Paragraphen) die in den $\gamma_{\varkappa j}$ enthaltenen willkürlichen Elemente soweit nöthig derart, dass es eine homogene Berührungstransformation (12) giebt, welche $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ bezüglich in: $\mathfrak{H}_1(x', p') \cdots \mathfrak{H}_r(x', p')$ überführt und endlich bestimmt man die allgemeinste homogene Berührungstransformation (12), welche diese Ueberführung leistet; damit ist die gestellte Aufgabe gelöst.

Von welchen willkürlichen Elementen hängt nun die so definirte Berührungstransformation ab? von willkürlichen Functionen oder nur von willkürlichen Parametern? Die Beantwortung dieser Frage lässt sich auf die Beantwortung einer einfacheren zurückführen.

Es sei irgend ein solches Werthsystem der $\gamma_{\varkappa j}$ vorgelegt, dass es möglich ist: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ durch eine homogene Berührungstransformation (12) in: $\mathfrak{H}_1(x', p') \cdots \mathfrak{H}_r(x', p')$ überzuführen. Ist dann $\mathfrak{T}$ irgend eine Transformation (12), welche diese Ueberführung leistet und ist S die allgemeinste homogene Berührungstransformation (12), welche jede einzelne der Functionen: $H_\varkappa(x, p)$ invariant lässt, so ist augenscheinlich: $S\mathfrak{T}$ die allgemeinste Transformation (12), welche: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ in: $\mathfrak{H}_1(x', p') \cdots \mathfrak{H}_r(x', p')$ verwandelt. Folglich lässt sich die allgemeinste homogene Berührungstransformation (12), welche die Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ in sich überführt, in der Form: ST darstellen, wo die Transformation T nur solche willkürliche Elemente enthält, welche in dem allgemeinsten Werthsysteme der $\gamma_{\varkappa j}$ vorkommen, das heisst nur willkürliche Parameter. Also kommt die Beantwortung der oben gestellten Frage darauf zurück, festzustellen, ob die Transformation S von willkürlichen Functionen abhängt oder nicht; das aber werden wir weiter unten (S. 319) wirklich thun. Hier wollen wir nur noch bemerken, dass auch der Inbegriff aller Transformationen S selbstverständlich eine Gruppe bildet (vgl. S. 288 f.).

Man kann sich auch die etwas speciellere Aufgabe stellen, alle eingliedrigen Gruppen $K(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen zu bestimmen, welche die r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ invariant lassen.

Setzen wir: $(H_j f)_{xp} = A_j(f)$ und $(Kf)_{xp} = B(f)$. Die eingliedrige Gruppe: Bf wird nach Abschnitt I, Theorem 43, S. 252 dann und nur dann die Gruppe: $A_1(f) \cdots A_r(f)$ invariant lassen, wenn r Relationen von der Form:

$$B(A_j(f)) - A_j(B(f)) = \sum_1^r {}_s\, l_{js} A_s(f) \qquad (j = 1 \cdots r) \tag{13}$$

bestehen, in denen die l_{js} Constanten bedeuten. Diese Gleichungen (13) lassen sich folgendermassen schreiben:

$$(K(H_j f)) - (H_j(Kf)) = \sum_1^r {}_s\, l_{js}(H_s f) = ((KH_j) f),$$

woraus sich in der bekannten Weise ergiebt:

$$(KH_j) = \sum_1^r {}_s\, l_{js} H_s \qquad (j = 1 \cdots r). \tag{14}$$

Also bekommen wir den folgenden Satz, welcher übrigens von dem auf S. 303 abgeleiteten Satze 2 nicht wesentlich verschieden ist.

Satz 6. *Eine r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen bleibt dann und nur dann bei allen Transformationen einer eingliedrigen Gruppe: $K(x, p)$ derselben Art invariant, wenn r Relationen von der Form:*

$$(KH_j)_{xp} = \sum_1^r {}_s\, l_{js} H_s \qquad (j = 1 \cdots r) \tag{14}$$

mit gewissen Constanten l_{js} bestehen.

Auf die Bestimmung aller solchen eingliedrigen Gruppen $K(x, p)$ wollen wir nicht weiter eingehen, sondern wollen unter ihnen nur diejenigen betrachten, welche jede einzelne Function: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ invariant lassen.

Soll die eingliedrige Gruppe: $K(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen die r infinitesimalen Transformationen, oder was auf dasselbe hinauskommt, die r Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ invariant lassen, so ist nothwendig und hinreichend, dass die infinitesimale Transformation: $(Kf)_{xp}$ dies thut, also, dass die r Gleichungen:

$$(KH_1) = 0, \cdots (KH_m) = 0, \cdots (KH_r) = 0$$

identisch bestehen. Die Function $K(x, p)$ muss mithin in der Polargruppe enthalten sein, welche zu der homogenen Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ gehört, und da sie die charakteristische Function einer infinitesimalen homogenen Berührungstransformation ist, so muss sie in den p homogen von erster Ordnung sein. *Wollen wir daher die allgemeinste eingliedrige Gruppe: $K(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen finden, welche: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ einzeln invariant lässt, so haben wir nur die allgemeinste homogene Function erster Ordnung der zur Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ gehörigen Polargruppe aufzusuchen.*

Enthält die Polargruppe der Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ nur Functionen von nullter Ordnung in den p, so giebt es offenbar gar keine eingliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen, welche $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ invariant lässt. In allen übrigen Fällen lässt sich die bewusste Polargruppe, weil sie homogen ist, auf die Form:

$$J(x, p), \quad N_1(x, p) \cdots N_\mu(x, p)$$

bringen, wo J homogen von erster Ordnung ist und die N von nullter Ordnung (vgl. S. 215). Dann hat die allgemeinste eingliedrige Gruppe: $K(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen, welche $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ einzeln invariant lässt, die folgende Gestalt:

$$J(x, p) \,.\, \Omega(N_1 \cdots N_\mu),$$

wo die Function Ω vollkommen willkürlich ist. *Die betreffende allgemeinste eingliedrige Gruppe hängt daher von willkürlichen Functionen ab, wenn die Zahl μ grösser als Null ist,* wenn aber $\mu = 0$ ist, so giebt es nur eine einzige eingliedrige Gruppe von der besprochenen Beschaffenheit.

Der Inbegriff aller eingliedrigen Gruppen von homogenen Berührungstransformationen, welche: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ invariant lassen, ist offenbar in dem Inbegriff aller homogenen Berührungstransformationen enthalten, welche dasselbe thun. Hängt nun jener erste Inbegriff von willkürlichen Functionen ab, so wird von dem zweiten nothwendig dasselbe gelten und umgekehrt (vgl. S. 287 f.). *Damit erledigt sich die oben aufgeworfene Frage, ob die allgemeinste homogene Berührungstransformation, welche $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ einzeln invariant lässt, von willkürlichen Functionen abhängt oder nicht.*

Wünscht man überhaupt alle Transformationen:

$$x_i' = \Phi_i(x, p), \quad p_i' = \Psi_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n) \tag{15}$$

zu finden, welche die r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ invariant lassen, also auch diejenigen, welche keine homogenen Berührungstransformationen sind, so hat man nach Anleitung von Abschnitt I, S. 360 f. zu verfahren.

Endlich könnte man auch nach allen Transformationen (15) fragen, welche die r infinitesimalen Transformationen: $(H_1 f) \cdots (H_r f)$ einzeln invariant lassen, die würden nach Abschnitt I, S. 367 ff. zu bestimmen sein.

§ 81.

Jetzt in aller Kürze einige Bemerkungen über r-gliedrige Gruppen von Berührungstransformationen in den Veränderlichen z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$.

Die ∞^r Transformationen einer solchen Gruppe ordnen sich in ∞^{r-1} eingliedrige Gruppen an, die von infinitesimalen Berührungstransformationen erzeugt sind (vgl. S. 255, Satz 2). Sind nun:

$$A_\varkappa(f) = [W_\varkappa f] - W_\varkappa \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

die Symbole von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen der Gruppe, so bestehen Relationen von der bekannten Form:

$$A_i(A_\varkappa(f)) - A_\varkappa(A_i(f)) = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} A_s(f);$$

nach Kap. 15, Theorem 44, S. 275 ist aber:

$$A_i(A_\varkappa(f)) - A_\varkappa(A_i(f)) = [\Omega f] - \Omega \frac{\partial f}{\partial z},$$

wo Ω die Form besitzt:

$$\Omega = [W_i W_\varkappa] - W_i \frac{\partial W_\varkappa}{\partial z} + W_\varkappa \frac{\partial W_i}{\partial z}$$

oder wie wir der Kürze wegen schreiben wollen:

$$\Omega = \{W_i W_\varkappa\}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass der Ausdruck:

$$\left[\Omega - \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} W_s,\ f\right] - \left(\Omega - \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} W_s\right)\frac{\partial f}{\partial z}$$

identisch verschwindet, was nach S. 255 dann und nur dann eintritt, wenn die charakteristischen Functionen $W_1 \cdots W_r$ durch die folgenden Relationen verknüpft sind:

$$\{W_i W_\varkappa\} = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} W_s \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r).$$

Umgekehrt seien:

$$[W_\varkappa f] - W_\varkappa \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

r infinitesimale Berührungstransformationen, deren charakteristische Functionen $W_1 \cdots W_r$ durch keine lineare Relation:

$$\varepsilon_1 W_1 + \cdots + \varepsilon_r W_r = 0$$

verknüpft sind, aber in Beziehungen von der Form:

$$\{W_i W_\varkappa\} = \sum_1^r{}_s\, c_{i\varkappa s} W_s \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

stehen. Dann sind diese infinitesimalen Transformationen von einander unabhängig (vgl. S. 255) und erzeugen eine r-gliedrige Gruppe, natürlich eine von Berührungstransformationen.

Also:

Theorem 53. *Sollen r infinitesimale Berührungstransformationen:*

(16) $$[W_\varkappa f] - W_\varkappa \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

in den Veränderlichen: z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen erzeugen, so ist nothwendig und hinreichend, dass ihre r charakteristischen Functionen: $W_1 \cdots W_r$ durch keine lineare Relation:

$$\varepsilon_1 W_1 + \cdots + \varepsilon_r W_r = 0$$

mit constanten Coefficienten verknüpft sind, dass sie aber in Beziehungen von der Form:

(17) $$\{W_i W_\varkappa\} = \sum_1^r{}_s\, c_{i\varkappa s} W_s \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

*stehen. Umgekehrt ist jede r-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen in den Veränderlichen: z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ von r derartigen infinitesimalen Berührungstransformationen erzeugt.**)

Erzeugen r infinitesimale Berührungstransformationen (16) mit den charakteristischen Functionen: $W_1 \cdots W_r$ eine r-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen, so nennen wir diese Gruppe auch kurz: die Gruppe $W_1 \cdots W_r$.

Es verdient angemerkt zu werden, dass sehr gut eine der charakteristischen Functionen: $W_1 \cdots W_r$ eine blose Constante sein kann.

---

*) Vgl. Lie, Göttinger Nachrichten, December 1874; Abhandlungen der Kgl. Sächs. Ges. d. W., Bd. XIV, Nr. 12.

Die Constanten $c_{i\varkappa s}$ in den Gleichungen (17) bestimmen die Zusammensetzung der betreffenden r-gliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen. Man übersieht daher ohne Schwierigkeit, wie man die charakteristischen Functionen der infinitesimalen Transformationen aller Untergruppen finden kann, welche in der Gruppe enthalten sind. Hat man ferner zwei r-gliedrige Gruppen von Berührungstransformationen, welche durch die charakteristischen Functionen von je r unabhängigen infinitesimalen Transformationen gegeben sind, so kann man aus den zu beiden Gruppen gehörigen Relationen (17) sofort entscheiden, ob die Gruppen gleichzusammengesetzt sind oder nicht.

Die Begriffe: Transitivität und Intransitivität, Primitivität und Imprimitivität übertragen sich auf die Gruppen von Berührungstransformationen in $z,\ x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n$ ohne Weiteres.

Die r-gliedrige Gruppe: $W_1(z, x, p) \cdots W_r(z, x, p)$ von Berührungstransformationen ist dann und nur dann *transitiv*, wenn es unter den r linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$[W_\varkappa f] - W_\varkappa \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

in den Veränderlichen $z,\ x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n$ gerade $2n + 1$ von einander unabhängige giebt; sie ist dann und nur dann *primitiv*, wenn die r infinitesimalen Transformationen:

$$[W_\varkappa f] - W_\varkappa \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

kein q-gliedriges $(0 < q < 2n + 1)$ vollständiges System:

$$C_j f = \sum_1^n {}^i \left(\alpha_{ji}(z, x, p) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \beta_{ji}(z, x, p) \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \gamma_j(z, x, p) \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$
$$(j = 1 \cdots q)$$

in den Veränderlichen $z,\ x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n$ invariant lassen.

Es sei:

$$(18) \qquad \bar{z} = Z(z, x, p), \quad \bar{x}_i = X_i(z, x, p), \quad \bar{p}_i = P_i(z, x, p)$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

eine Berührungstransformation, welche die Gleichung:

$$d\bar{z} - \bar{p}_1 d\bar{x}_1 - \cdots - \bar{p}_n d\bar{x}_n = \varrho(z, x, p)\,(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

identisch befriedigt. Führt man dann vermöge dieser Berührungstransformation in die r-gliedrige Gruppe: $W_1(z, x, p) \cdots W_r(z, x, p)$ von Berührungstransformationen die neuen Veränderlichen $\bar{z},\ \bar{x},\ \bar{p}$ ein, so bekommt man in den $\bar{z},\ \bar{x},\ \bar{p}$ eine neue r-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen, welche r unabhängige infinitesimale Berührungstransformationen mit den charakteristischen Functionen:

$$\mathfrak{W}_\varkappa(\bar{z}, \bar{x}, \bar{p}) = \varrho(z, x, p) \,.\, W_\varkappa(z, x, p) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

enthält.

Sind zwei r-gliedrige Gruppen: $W_1(z, x, p) \cdots W_r(z, x, p)$ und $V_1(\bar{z}, \bar{x}, \bar{p}) \cdots V_r(\bar{z}, \bar{x}, \bar{p})$ von Berührungstransformationen vorgelegt und will man entscheiden, ob dieselben durch eine Berührungstransformation (18) ähnlich sind, so muss man zunächst untersuchen, ob sie gleichzusammengesetzt sind. Ist das der Fall, so kommt alles darauf hinaus, ob es eine Berührungstransformation (18) giebt, welche die r infinitesimalen Transformationen:

$$[W_\varkappa f]_{zxp} - W_\varkappa \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

in r infinitesimale Transformationen von der Form:

$$\sum_1^r{}_j\, g_{\varkappa j}\left([V_\varkappa f]_{\bar{z}\bar{x}\bar{p}} - V_\varkappa \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

überführt. Diese Aufgabe aber brauchen wir nicht direkt zu erledigen, wir können ja nach Anleitung von S. 273 die beiden Gruppen und auch die charakteristischen Functionen ihrer infinitesimalen Transformationen in $2n + 2$ homogenen Veränderlichen: $y_1 \cdots y_{n+1}$, $q_1 \cdots q_{n+1}$ und bezüglich: $\bar{y}_1 \cdots \bar{y}_{n+1}$, $\bar{q}_1 \cdots \bar{q}_{n+1}$ schreiben, auf diese Weise ergeben sich zwei r-gliedrige Gruppen: $H_1(y, q) \cdots H_r(y, q)$ und: $K_1(\bar{y}, \bar{q}) \cdots K_r(\bar{y}, \bar{q})$ von homogenen Berührungstransformationen; sind dieselben durch eine homogene Berührungstransformation:

$$\bar{y}_i = Y_i(y, q), \quad \bar{q}_i = Q_i(y, q) \qquad (i = 1 \cdots n + 1)$$

mit einander ähnlich, so sind auch die Gruppen: $W_1 \cdots W_r$ und $V_1 \cdots V_r$ durch eine Berührungstransformation (18) mit einander ähnlich, sonst nicht.

§ 82.

Schliesslich wollen wir noch bei einer besonderen Art von Berührungstransformationen in den Veränderlichen: $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ etwas verweilen, bei denen nämlich, welche die Gestalt:

$$(19) \qquad z' = z + \Omega(x, p), \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

besitzen. Die entsprechenden infinitesimalen Berührungstransformationen haben, wie wir wissen, die Gestalt:

$$Af = (\varphi f)_{xp} + \left(\sum_1^n{}_\nu\, p_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial p_\nu} - \varphi\right)\frac{\partial f}{\partial z},$$

wo φ eine beliebige Function von $x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ allein bedeutet.

Nach S. 260 sind r infinitesimale Berührungstransformationen:

$A_1 f \cdots A_r f$ dieser Art von einander unabhängig, wenn zwischen ihren r charakteristischen Functionen: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ keine lineare Relation: $\gamma_1 \varphi_1 + \cdots + \gamma_r \varphi_r = 0$ mit constanten Coefficienten besteht. Sind nun: $A_1 f \cdots A_r f$ unabhängige infinitesimale Transformationen und sollen dieselben eine r-gliedrige Gruppe erzeugen, so müssen Gleichungen von der Form:

$$A_i(A_\varkappa(f)) - A_\varkappa(A_i(f)) = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} A_s f$$

stattfinden, oder anders geschrieben (vgl. S. 269):

$$((\varphi_i \varphi_\varkappa) f) + \left(\sum_1^n {}_\nu\, p_\nu \frac{\partial (\varphi_i \varphi_\varkappa)}{\partial p_\nu} - (\varphi_i \varphi_\varkappa) \right) \frac{\partial f}{\partial z} =$$

$$= \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} A_s f,$$

diese aber sind wiederum nach S. 260 gleichbedeutend mit den folgenden:

$$(\varphi_i \varphi_\varkappa) = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} \varphi_s \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r).$$

Wir können daher den Satz aussprechen:

Satz 7. *Sollen r infinitesimale Berührungstransformationen von der Form:*

$$(\varphi_\varkappa f)_{xp} + \left(\sum_1^n {}_\nu\, p_\nu \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial p_\nu} - \varphi_\varkappa \right) \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

in den Veränderlichen z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen erzeugen, so ist nothwendig und hinreichend, dass die r charakteristischen Functionen: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ keine lineare Relation von der Form: $\gamma_1 \varphi_1 + \cdots + \gamma_r \varphi_r = 0$ mit constanten Coefficienten befriedigen, dass sie aber in Beziehungen von der Form:

$$(20) \qquad (\varphi_i \varphi_\varkappa) = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} \varphi_s \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

stehen. Umgekehrt ist jede r-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen, deren Transformationen die Form:

$$(19) \qquad z' = z + \Omega(x, p), \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

haben, von r derartigen infinitesimalen Berührungstransformationen erzeugt.

Man kann die hier besprochenen Gruppen von Berührungstransformationen in zwei Klassen theilen, in die erste Klasse gehören alle

Gruppen, welche die charakteristische Function: $\varphi(x,p)=1$ und demnach die infinitesimale Berührungstransformation:

$$\frac{\partial f}{\partial z}$$

enthalten, in die zweite alle übrigen. Es leuchtet ein, dass jede r-gliedrige Gruppe der zweiten Klasse als invariante Untergruppe in einer $(r+1)$-gliedrigen Gruppe der ersten Klasse enthalten ist.

Die Grössen $c_{i\varkappa s}$ in den Gleichungen (20) bestimmen die Zusammensetzung der betreffenden Gruppe; man übersieht daher sofort, wie man alle Untergruppen der Gruppe findet und wie man entscheiden kann, ob zwei vorgelegte r-gliedrige Gruppen dieser Art gleichzusammengesetzt sind oder nicht.

Endlich bleibt noch zu untersuchen, unter welchen Bedingungen zwei r-gliedrige Gruppen von der besprochenen Beschaffenheit durch eine Berührungstransformation von der Form (19) ähnlich sind. Ueberlegungen, welche sich von den in § 79 angestellten wenig unterscheiden, liefern uns das

Theorem 54. *Sollen zwei r-gliedrige Gruppen von Berührungstransformationen:*

$$(\varphi_\varkappa f)_{xp}+\left(\sum_1^n{}_\nu\, p_\nu\frac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial p_\nu}-\varphi_\varkappa\right)\frac{\partial f}{\partial z}\qquad(\varkappa=1\cdots r)$$

und:

$$(\psi_\varkappa f)_{xp}+\left(\sum_1^n{}_\nu\, p_\nu\frac{\partial\psi_\varkappa}{\partial p_\nu}-\psi_\varkappa\right)\frac{\partial f}{\partial z}\qquad(\varkappa=1\cdots r)$$

durch eine Berührungstransformation von der Gestalt:

$$(19)\qquad z'=z+\Omega(x,p),\quad x_i'=X_i(x,p),\quad p_i'=P_i(x,p)\qquad(i=1\cdots n)$$

mit einander ähnlich sein, so ist vor allen Dingen nothwendig, dass sie gleichzusammengesetzt sind. Ist das der Fall, so wähle man in allgemeinster Weise r^2 solche Constanten $g_{\varkappa j}$ von nicht verschwindender Determinante, dass zwischen: $\varphi_1(x,p)\cdots\varphi_r(x,p)$ und zwischen:

$$\overline{\psi}_\varkappa(x,p)=g_{\varkappa 1}\psi_1(x,p)+\cdots+g_{\varkappa r}\psi_r(x,p)$$
$$(\varkappa=1\cdots r)$$

Relationen von derselben Form:

$$(\varphi_i\varphi_\varkappa)_{xp}=\sum_1^r{}_s\, c_{i\varkappa s}\varphi_s$$

und:

$$(\overline{\psi}_i\overline{\psi}_\varkappa)_{xp}=\sum_1^r{}_s\, c_{i\varkappa s}\overline{\psi}_s$$

bestehen. Sind nun etwa $\varphi_1 \cdots \varphi_m$ *unabhängige Functionen, während* $\varphi_{m+1} \cdots \varphi_r$ *sich durch* $\varphi_1 \cdots \varphi_m$ *allein ausdrücken lassen:*

$$\varphi_{m+\mu} \equiv \Omega_{m+\mu}(\varphi_1 \cdots \varphi_m) \qquad (\mu = 1 \cdots r - m),$$

so sind die beiden Gruppen dann und nur dann in der verlangten Weise mit einander ähnlich, wenn es möglich ist, die in den $g_{\varkappa j}$ *enthaltenen willkürlichen Elemente derart zu specialisiren, dass* $\overline{\psi}_1 \cdots \overline{\psi}_m$ *von einander unabhängig werden, während* $\overline{\psi}_{m+1} \cdots \overline{\psi}_r$ *sich folgendermassen durch* $\overline{\psi}_1 \cdots \overline{\psi}_m$ *allein ausdrücken:*

$$\overline{\psi}_{m+\mu} \equiv \Omega_{m+\mu}(\overline{\psi}_1 \cdots \overline{\psi}_m) \qquad (\mu = 1 \cdots r - m).$$

Ein gewisses Interesse können auch diejenigen Gruppen von Berührungstransformationen in z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ beanspruchen, deren infinitesimale Transformationen charakteristische Functionen von der Form: $\varepsilon z + w(x, p)$ haben, wo ε eine Constante bezeichnet und $w(x, p)$ eine Function von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ allein ist. Die infinitesimalen Transformationen dieser Gruppen haben natürlich die Form:

$$[\varepsilon z + w(x, p), f] - (\varepsilon z + w(x, p))\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Sind:

$$\varepsilon_\varkappa z + w_\varkappa(x, p) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

die charakteristischen Functionen von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe dieser Art, und sind nicht alle $\varepsilon_\varkappa$ gleich Null, so enthält die betreffende Gruppe eine $(r - 1)$-gliedrige invariante Untergruppe, deren infinitesimale Transformationen die vorhin betrachtete Form:

$$(21) \qquad (\varphi_j f)_{xp} + \left(\sum_1^n{}_\nu\, p_\nu \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_\nu} - \varphi_j\right)\frac{\partial f}{\partial z} \qquad (j = 1 \cdots r - 1)$$

haben.

Es seien nicht alle $\varepsilon_\varkappa$ gleich Null. Der einfachste Fall ist der, dass eine der Functionen $w_\varkappa$ verschwindet; die Gruppe enthält dann eine infinitesimale Transformation, welche die charakteristische Function z besitzt und demnach lautet:

$$p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial f}{\partial p_n} + z\frac{\partial f}{\partial z},$$

ausserdem enthält sie $r - 1$ unabhängige infinitesimale Transformationen von der Gestalt (21). Auf diesen einfachsten Fall kann man den allgemeineren Fall, in welchem eine charakteristische Function z nicht auftritt, zurückführen. Sind nämlich etwa $w_1(x, p)$ und ε_1 beide $\neq 0$, so braucht man blos vermöge einer Berührungstransformation von der Form:

$$z' = z + \frac{w_1(x, p)}{\varepsilon_1}, \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

neue Veränderliche einzuführen und erhält auf diese Weise in den z', x', p'

eine r-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen, in welcher die charakteristische Function z' vorhanden ist.

Sind: z, $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_{r-1}(x, p)$ die charakteristischen Functionen von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen, so bestehen selbstverständlich Relationen von der Form (17), dieselben haben aber in dem vorliegenden Falle die besondere Gestalt:

$$(\varphi_i \varphi_\varkappa)_{xp} = \sum_1^{r-1} {}_s\, c_{i\varkappa s} \varphi_s$$

$$\sum_1^n {}_\nu\, p_\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_\nu} = \sum_1^{r-1} {}_s\, d_{is} \varphi_s$$

$$(i, \varkappa = 1 \cdots r-1).$$

Endlich kann man auch zuweilen in die Lage kommen, solche Gruppen in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ zu betrachten, welche von verkürzten infinitesimalen Transformationen von der Form $(\varphi f)_{xp}$ erzeugt sind. Ueber diese Gruppen erhält man (vgl. S. 260) sehr leicht den

Satz 8. *Die r verkürzten infinitesimalen Transformationen:*

$$(\varphi_1 f)_{xp} \cdots (\varphi_r f)_{xp}$$

in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ erzeugen dann und nur dann eine r-gliedrige Gruppe, wenn die r Functionen: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ durch keine lineare Relation:

$$\gamma_1 \cdot \varphi_1(x, p) + \cdots + \gamma_r \cdot \varphi_r(x, p) = \gamma_{r+1}$$

mit constanten Coefficienten verknüpft sind, während sie dagegen in Beziehungen von der Form:

$$(\varphi_i \varphi_\varkappa) = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} \varphi_s + d_{i\varkappa} \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

stehen, wo sowohl die $c_{i\varkappa s}$ als die $d_{i\varkappa}$ Constanten bezeichnen.

Kapitel 19.

Die dualistische der adjungirten Gruppe.

Von der adjungirten Gruppe einer r-gliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen haben wir bereits gesprochen (s. Kapitel 18, S. 301). An zwei Stellen (Abschn. I, S. 493 und Abschn. II, S. 307) haben wir auch bereits derjenigen Gruppe Erwähnung gethan, welche zur adjungirten dualistisch ist. Diese dualistische Gruppe wird in dem nächsten Kapitel bei der Bestimmung aller Gruppen von Berührungstransformationen mit gegebener Zusammensetzung eine grosse Rolle spielen, sie kann daher der adjungirten Gruppe gegenüber ein selbständiges Interesse beanspruchen und es scheint deshalb gerechtfertigt, wenn wir auch ihr ein eigenes, allerdings kurzes Kapitel widmen. In diesem Kapitel setzen wir aus dem ersten Abschnitt im Wesentlichen nur die Theorien bis mit Kapitel 15 als bekannt voraus.

§ 83.

Es seien:

$$(H_1 f)_{xp} = A_1(f), \cdots (H_r f)_{xp} = A_r(f)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe G_r von homogenen Berührungstransformationen, es mögen also Relationen von der Form:

$$A_i(A_\varkappa(f)) - A_\varkappa(A_i(f)) = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} A_s(f) \tag{1}$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

bestehen, welche nach S. 300 auch durch die äquivalenten Relationen:

$$(H_i H_\varkappa) = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} H_s \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r) \tag{2}$$

ersetzt werden können. Ausserdem seien noch:

$$x_i' = F_i(x, p;\, a_1 \cdots a_r), \quad p_i' = \Phi_i(x, p;\, a_1 \cdots a_r) \tag{3}$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

die endlichen Gleichungen der Gruppe G_r.

Nach Abschnitt I, S. 80 f. bestehen unter den gemachten Voraussetzungen vermöge (3) Relationen von der Form:

$$(H_\varkappa' f)_{x'p'} = \sum_1^r {}_j\, w_{\varkappa j}(a_1 \cdots a_r) \,.\, (H_j f)_{xp} \tag{4}$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r),$$

wo wie gewöhnlich $H_\varkappa'$ kurz für $H_\varkappa(x_1' \cdots x_n', p_1' \cdots p_n')$ geschrieben ist. Nun aber sind die Transformationen (3) homogene Berührungstransformationen, also gilt (s. S. 131):

$$(H_\varkappa' f)_{x'p'} = (H_\varkappa' f)_{xp}$$

und es ergiebt sich aus (4):

$$\left(H_\varkappa' - \sum_1^r {}_j\, w_{\varkappa j}(a) H_j,\ f\right)_{xp} = 0 \qquad (\varkappa = 1 \cdots r,$$

woraus in bekannter Weise folgt:

$$(5)\qquad H'_\varkappa = \sum_1^r j\, w_{\varkappa j}(a_1 \cdots a_r) \,.\, H_j \qquad (\varkappa = 1 \cdots r).$$

Setzen wir weiter:

$$(3')\qquad x_i'' = F_i(x', p'; b_1 \cdots b_r), \quad p_i'' = \Phi_i(x', p'; b_1 \cdots b_r) \qquad (i = 1 \cdots n),$$

so ergiebt sich ebenso:

$$(5')\qquad H''_\varkappa = \sum_1^r j\, w_{\varkappa j}(b_1 \cdots b_r) \,.\, H'_j \qquad (\varkappa = 1 \cdots r),$$

oder mit Benutzung von (5):

$$(5'')\qquad H''_\varkappa = \sum_{jl}^{1 \cdots r} w_{\varkappa j}(b) \,.\, w_{jl}(a) \,.\, H_l \qquad (\varkappa = 1 \cdots r).$$

Andrerseits aber folgt aus (3) und (3′):

$$x_i'' = F_i(x, p; c_1 \cdots c_r), \quad p_i'' = \Phi_i(x, p; c_1 \cdots c_r) \qquad (i = 1 \cdots n),$$

wo $c_1 \cdots c_r$ durch Gleichungen von der Form:

$$(6)\qquad c_\varkappa = \varphi_\varkappa(a_1 \cdots a_r; b_1 \cdots b_r) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

definirt sind, denn die Transformationen (3) bilden ja eine Gruppe. Mithin bekommen wir für die $H''_\varkappa$ auch die folgende Darstellung:

$$(5''')\qquad H''_\varkappa = \sum_1^r j\, w_{\varkappa j}(c_1 \cdots c_r) \,.\, H_j \qquad (\varkappa = 1 \cdots r).$$

Da diese Gleichungen nothwendig vermöge (6) mit den Gleichungen (5″) identisch werden müssen, so erkennen wir, *dass die Gleichungen* (5) *eine Gruppe Γ darstellen, sobald man in ihnen die Grössen $H_1 \cdots H_r$ als unabhängige Veränderliche auffasst.*

Die Transformationen dieser neuen Gruppe Γ sind denen der Gruppe G_r:

$$(3)\qquad x_i' = F_i(x, p; a), \quad p_i' = \Phi_i(x, p; a) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

in einem gewissen Sinne zugeordnet. Sind nämlich $T_{(a)}$ und $T_{(b)}$ zwei Transformationen der G_r und ergeben dieselben nach einander ausgeführt die Transformation: $T_{(a)} T_{(b)} = T_{(c)}$, so stehen die entsprechenden Transformationen der Gruppe Γ — sie mögen bezüglich: $\mathfrak{T}_{(a)}$, $\mathfrak{T}_{(b)}$ und $\mathfrak{T}_{(c)}$ heissen — ebenfalls in der Beziehung: $\mathfrak{T}_{(a)} \mathfrak{T}_{(b)} = \mathfrak{T}_{(c)}$.

Wollten wir den Begriff des Isomorphismus als bekannt voraussetzen, so könnten wir einfach sagen: Die Gruppe Γ in den Veränderlichen $H_1 \cdots H_r$ ist mit der Gruppe G_r in den Veränderlichen x, p *isomorph.*

Der identischen Transformation von G_r entspricht in Γ wieder die identische Transformation. Solchen Transformationen der G_r, welche eine Untergruppe bilden, entsprechen Transformationen von Γ, welche ebenfalls eine Untergruppe bilden, doch kann diese Untergruppe von Γ unter Umständen zur identischen Transformation zusammenschrumpfen. Jeder eingliedrigen Untergruppe der G_r entspricht in Folge dessen entweder eine eingliedrige Untergruppe von Γ oder die identische Transformation, jeder infinitesimalen Transformation der G_r entspricht entweder eine infinitesimale oder die identische Transformation von Γ.

Diese Ueberlegungen zeigen, dass die endlichen Transformationen:

$$(5) \qquad H'_\varkappa = \sum_1^r {}_j\, w_{\varkappa j}(a_1 \cdots a_r) \,.\, H_j \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

der Gruppe Γ sich in eingliedrige Gruppen anordnen, deren jede die identische Transformation enthält und somit von einer infinitesimalen Transformation erzeugt ist.

Es sei:

$$(7) \qquad \overline{x}_i = \mathfrak{F}_i(x, p;\, t), \quad \overline{p}_i = \mathfrak{P}_i(x, p;\, t) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

eine solche eingliedrige Untergruppe der G_r, welcher in Γ die identische Transformation entspricht. Dann ist vermöge der Gleichungen (7):

$$\overline{H}_\varkappa = H_\varkappa(\overline{x}, \overline{p}) = H_\varkappa(x, p) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

und in Folge dessen auch:

$$(8) \qquad (\overline{H}_\varkappa f)_{\overline{x}\,\overline{p}} = (H_\varkappa f)_{xp} \qquad (\varkappa = 1 \cdots r),$$

denn die eingliedrige Gruppe (7) besteht ja aus homogenen Berührungstransformationen. Die Gleichungen (8) zeigen, dass die eingliedrige Gruppe (7) jede einzelne der r infinitesimalen Transformationen: $(H_1 f) \cdots (H_r f)$ invariant lässt; dazu ist aber nach Abschnitt I, S. 259 nothwendig und hinreichend, dass die betreffende eingliedrige Untergruppe der G_r von einer mit: $(H_1 f) \cdots (H_r f)$ vertauschbaren infinitesimalen Transformation erzeugt ist.

Enthält demnach die G_r gerade m unabhängige infinitesimale Transformationen, welche mit $(H_1 f) \cdots (H_r f)$ vertauschbar sind, so enthält die Gruppe Γ gerade $r - m$ unabhängige infinitesimale Transformationen, denn es giebt unter der gemachten Voraussetzung in der

G_r gerade $r - m$ unabhängige infinitesimale Transformationen, aus denen sich keine mit $(H_1 f) \cdots (H_r f)$ vertauschbare infinitesimale Transformation linear ableiten lässt, und diesen $r - m$ Transformationen entsprechen, wie man leicht einsieht, ebensoviele unabhängige infinitesimale Transformationen von Γ.

Es hat keine Schwierigkeit die infinitesimalen Transformationen von Γ wirklich aufzustellen.

Ist nämlich:

$$\lambda_1 (H_1 f) + \cdots + \lambda_r (H_r f)$$

oder kurz:

$$\lambda_1 H_1 + \cdots + \lambda_r H_r$$

die allgemeine infinitesimale Transformation der G_r, so lassen sich die endlichen Gleichungen dieser Gruppe in bekannter Weise (Erster Abschnitt, S. 74) durch Reihen nach Potenzen von $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ ausdrücken:

$$(9) \qquad \begin{cases} x_i' = x_i + \sum_1^r {}^j \lambda_j \frac{\partial H_j}{\partial p_i} + \cdots \\ p_i' = p_i - \sum_1^r {}^j \lambda_j \frac{\partial H_j}{\partial x_i} + \cdots \\ \qquad (i = 1 \cdots n). \end{cases}$$

Diese Werthe der x', p' tragen wir in $H_\varkappa(x', p') = H_\varkappa'$ ein und erhalten so $H_\varkappa'$ nach Potenzen von $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ entwickelt:

$$H_\varkappa' = H_\varkappa + \sum_1^r {}^j \lambda_j \sum_1^n {}^i \left(\frac{\partial H_j}{\partial p_i} \frac{\partial H_\varkappa}{\partial x_i} - \frac{\partial H_j}{\partial x_i} \frac{\partial H_\varkappa}{\partial p_i} \right) + \cdots$$

$$(\varkappa = 1 \cdots r),$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$(10) \qquad \begin{cases} H_\varkappa' = H_\varkappa + \sum_1^r {}^j \lambda_j (H_j H_\varkappa) + \cdots \\ \qquad = H_\varkappa + \sum_{js}^{1 \cdots r} \lambda_j c_{j\varkappa s} H_s + \cdots \\ \qquad (\varkappa = 1 \cdots r). \end{cases}$$

Wählen wir hierin $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ unendlich klein, so erhalten wir eine infinitesimale Transformation der Gruppe Γ, nämlich die folgende:

$$\sum_1^r {}^j \lambda_j \sum_{\varkappa s}^{1 \cdots r} c_{j\varkappa s} H_s \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa},$$

welche aus den r nachstehenden:

$$(11) \qquad B_j f = \sum_{\varkappa s}^{1\cdots r} c_{j\varkappa s} H_s \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa} \qquad (j=1\cdots r)$$

linear abgeleitet werden kann.

Es fragt sich, ob hiermit alle infinitesimalen Transformationen von Γ gefunden sind, denn es wäre ja von vornherein denkbar, dass man in den Reihenentwickelungen (10) nach Potenzen der λ Glieder zweiter oder noch höherer Ordnung mitnehmen müsste, um wirklich alle infinitesimalen Transformationen von Γ zu bekommen.

Um uns über diesen Punkt zu vergewissern, müssen wir zunächst feststellen, wieviele von einander unabhängige unter den infinitesimalen Transformationen $B_1 f \cdots B_r f$ vorhanden sind.

Wenn $B_1 f \cdots B_r f$ nicht von einander unabhängig sind, so besteht zwischen ihnen wenigstens eine Relation von der Form:

$$l_1 . B_1 f + \cdots + l_r . B_r f = 0,$$

in welcher die l Constanten bezeichnen. Hieraus ergiebt sich, dass der Ausdruck:

$$\sum_1^r {}_j \, l_j \sum_1^r {}_s \, c_{j\varkappa s} H_s$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Ausdruck:

$$\sum_1^r {}_j \, l_j (H_j H_\varkappa)_{xp} = \left(\sum_1^r {}_j \, l_j H_j, \; H_\varkappa \right)_{xp}$$

identisch verschwindet, mit andern Worten: die infinitesimale Transformation: $l_1 . H_1(x, p) + \cdots + l_r . H_r(x, p)$ ist mit $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ vertauschbar. Enthält nun die G_r gerade m unabhängige infinitesimale Transformationen, welche mit $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ vertauschbar sind, so bestehen zwischen $B_1 f \cdots B_r f$ gerade m und nicht mehr unabhängige Relationen von der Form: $l_1 B_1 f + \cdots + l_r B_r f = 0$, das heisst: unter den infinitesimalen Transformationen: $B_1 f \cdots B_r f$ giebt es gerade $r - m$ von einander unabhängige, genau so viele wie die Gruppe Γ unter der gemachten Voraussetzung enthält. Folglich giebt es in Γ keine von $B_1 f \cdots B_r f$ unabhängige infinitesimale Transformation.

Durch eine ähnliche Rechnung wie in Abschnitt I, Kapitel 16, S. 274 findet man, dass $B_1 f \cdots B_r f$ in den Beziehungen:

$$B_i(B_\varkappa(f)) - B_\varkappa(B_i(f)) = \sum_1^r {}_s \, c_{i\varkappa s} B_s f \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

stehen.

Hierin liegt ein neuer Beweis dafür, dass $B_1 f \cdots B_r f$ eine Gruppe erzeugen und dass diese Gruppe mit der G_r isomorph ist.

Bemerkt sei noch, dass die infinitesimalen Transformationen: $B_1 f \cdots B_r f$ auch mit:

$$Bf = \sum_1^r {}^{\varkappa} H_\varkappa \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa}$$

zusammen eine Gruppe erzeugen; die r Ausdrücke: $B(B_\varkappa(f)) - B_\varkappa(B(f))$ verschwinden nämlich sämmtlich identisch.

Die Ergebnisse des gegenwärtigen Kapitels fassen wir zusammen wie folgt:

Theorem 55. *Sind:*

(1) $$x_i' = F_i(x, p;\ a_1 \cdots a_r), \quad p_i' = \Phi_i(x, p;\ a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

die endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe von homogenen Berührungstransformationen, welche von den infinitesimalen homogenen Berührungstransformationen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ erzeugt ist, so bestehen Relationen von der Gestalt:

$$H_\varkappa(x', p') = \sum_1^r {}^j w_{\varkappa j}(a_1 \cdots a_r) \cdot H_j(x, p) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r).$$

Werden nun $H_1 \cdots H_r$ als unabhängige Veränderliche aufgefasst, so stellen die Gleichungen:

$$H_\varkappa' = \sum_1^r {}^j w_{\varkappa j}(a_1 \cdots a_r) H_j \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

eine lineare homogene Gruppe dar, welche von den infinitesimalen Transformationen:

(11) $$\sum_{\varkappa s}^{1 \cdots r} c_{j\varkappa s} H_s \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa} \qquad (j = 1 \cdots r)$$

*erzeugt ist. Diese lineare homogene Gruppe enthält gerade $r - m$ unabhängige infinitesimale Transformationen, sobald die Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ gerade m unabhängige infinitesimale Transformationen enthält, welche mit $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ vertauschbar sind.**)

---

*) Lie, Archiv for Mathematik Bd. I, Christiania 1876; Math. Ann. Bd. XVI, S. 495.

Die besprochene lineare homogene Gruppe nennen wir die *dualistische der adjungirten Gruppe;* sie ist wie diese mit der ursprünglichen Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ isomorph.

§ 84.

Sind irgend r^3 Constanten $c_{i\varkappa s}$ gegeben, welche die bekannten Relationen:

$$(12) \quad \begin{cases} c_{i\varkappa s} + c_{\varkappa i s} = 0 \\ \sum_1^r {}^\nu \{ c_{i\varkappa\nu} c_{\nu j s} + c_{\varkappa j \nu} c_{\nu i s} + c_{j i \nu} c_{\nu \varkappa s} \} = 0 \\ (i, \varkappa, j, s = 1 \cdots r) \end{cases}$$

erfüllen, so giebt es nach Kapitel 17 immer solche r-gliedrige Gruppen von homogenen Berührungstransformationen, welche r unabhängige infinitesimale Transformationen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ enthalten, die in den Beziehungen:

$$(H_i H_\varkappa) = \sum_1^r {}^s c_{i\varkappa s} H_s \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

stehen. Hieraus geht hervor, dass die infinitesimalen Transformationen:

$$B_j f = \sum_{\varkappa s}^{1 \cdots r} c_{j\varkappa s} H_s \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa} \qquad (j = 1 \cdots r)$$

eine, natürlich lineare und homogene Gruppe erzeugen. Das folgt übrigens auch schon aus der auf S. 332 gemachten Bemerkung. Also:

Satz 1. *Erfüllen r^3 Constanten:*

$$c_{i\varkappa s} \qquad (i, \varkappa, s = 1 \cdots r)$$

die Relationen:

$$(12) \quad \begin{cases} c_{i\varkappa s} + c_{\varkappa i s} = 0 \\ \sum_1^r {}^\nu \{ c_{i\varkappa\nu} c_{\nu j s} + c_{\varkappa j \nu} c_{\nu i s} + c_{j i \nu} c_{\nu \varkappa s} \} = 0 \\ (i, \varkappa, j, s = 1 \cdots r), \end{cases}$$

so erzeugen die linearen homogenen infinitesimalen Transformationen:

$$B_j f = \sum_{\varkappa s}^{1 \cdots r} c_{j\varkappa s} H_s \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa} \qquad (j = 1 \cdots r)$$

immer eine Gruppe.

Wir werden jetzt noch eine neue und im Grunde einfachere Begründung einiger Ergebnisse des § 83 kurz entwickeln:

Wir betrachten wiederum die Gruppe:

$$(H_1 f) \cdots (H_r f)$$

in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$. Sind nun $x_\varkappa' = F_\varkappa$, $p_\varkappa' = \Phi_\varkappa$ die zugehörigen endlichen Gleichungen und ist φ eine beliebige Function der x, p, so gilt (vgl. Abschnitt I, S. 74) die Formel:

$$\varphi(x_1' \cdots x_n', p_1' \cdots p_n') = \varphi(x, p) + \sum_1^r {}_j \lambda_j (H_j \varphi) + \frac{1}{1.2} \sum_{i,j}^{1 \cdots r} \lambda_i \lambda_j (H_i (H_j \varphi)) + \cdots$$

und insbesondere ist:

$$(13) \quad H_\varkappa(x', p') = H_\varkappa(x, p) + \sum_1^r {}_j \lambda_j (H_j H_\varkappa) + \frac{1}{1.2} \sum_{i,j}^{1 \cdots r} \lambda_i \lambda_j (H_i (H_j H_\varkappa)) + \cdots$$

$$(\varkappa = 1 \cdots r).$$

Wird hier $H_\varkappa'$ statt $H_\varkappa(x', p')$ geschrieben und werden ausserdem für die Klammerausdrücke $(H_j H_\varkappa)$ ihre Werthe als Functionen der H eingeführt, so ergeben sich die endlichen Gleichungen der früher betrachteten Gruppe Γ.

Wir betrachten nun andrerseits in den Veränderlichen $H_1 \cdots H_r$ die r infinitesimalen Transformationen:

$$B_j f = |H_j f| = \sum_1^r {}_\varkappa |H_j H_\varkappa| \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa} = \sum_{\varkappa, s}^{1 \cdots r} c_{j \varkappa s} H_s \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa}$$

sowie die allgemeinste aus ihnen abgeleitete infinitesimale Transformation:

$$\sum_1^r {}_j \lambda_j B_j f = C f.$$

Die endlichen Gleichungen der zugehörigen eingliedrigen Gruppe sind gegeben (vgl. Abschnitt I, S. 74) durch die bekannte Formel:

$$H_\varkappa' = H_\varkappa + C H_\varkappa + \frac{1}{1.2} C C H_\varkappa + \cdots,$$

die sich auch folgendermassen schreiben lässt:

$$H_\varkappa' = H_\varkappa + \sum_1^r {}_j \lambda_j |H_j H_\varkappa| + \frac{1}{1.2} \sum_{i,j}^{1 \cdots r} \lambda_i \lambda_j |H_i |H_j H_\varkappa|| + \cdots$$

Vergleichen wir diese letzte Formel mit der Formel (13), so erkennen wir unmittelbar, dass die Gruppe Γ von den r infinitesimalen Transformationen $B_j f$ erzeugt ist.

Kapitel 20.

Bestimmung aller Gruppen von Berührungstransformationen, welche eine gegebene Zusammensetzung haben.

Hat man ein System von r^3 solchen Constanten $c_{i\varkappa s}$, welche alle Relationen von der Form:

$$(1)\qquad \begin{cases} \sum_1^r \nu \{ c_{i\varkappa\nu} c_{\nu j s} + c_{\varkappa j \nu} c_{\nu i s} + c_{j i \nu} c_{\nu \varkappa s} \} = 0 \\ c_{i\varkappa s} + c_{\varkappa i s} = 0 \\ (i, \varkappa, j, s = 1 \cdots r) \end{cases}$$

erfüllen, so giebt es, wie in dem Kapitel 17 nachgewiesen ist, immer r-gliedrige Transformationsgruppen von der Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$.

Wir werden jetzt *alle r-gliedrigen Gruppen von homogenen Berührungstransformationen bestimmen, welche die gegebene Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ haben.**) Dabei betrachten wir zwei derartige Gruppen als nicht von einander verschieden, wenn sie durch eine homogene Berührungstransformation mit einander ähnlich sind, und zwar fassen wir den Begriff der Aehnlichkeit in dem allgemeinen auf S. 313 besprochenen Sinne; wir kümmern uns also nicht darum, ob die beiden Gruppen gleichviele unabhängige Veränderliche enthalten oder nicht.

Ist es uns gelungen, alle r-gliedrigen Gruppen von homogenen Berührungstransformationen zu bestimmen, welche die gegebene Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ haben, so können wir sofort auch alle so zusammengesetzten Gruppen von Berührungstransformationen in z, x_1, $x_2 \cdots$, p_1, $p_2 \cdots$ angeben. Das folgt ohne Weiteres daraus, dass sich nach S. 142 die unendliche Gruppe aller homogenen Berührungstransformationen in $2n+2$ Veränderlichen: $y_1 \cdots y_{n+1}$, $q_1 \cdots q_{n+1}$ auf die unendliche Gruppe aller Berührungstransformationen in $2n+1$ Veränderlichen: z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ holoedrisch isomorph beziehen lässt.

Endlich bestimmen wir noch in dem Schlussparagraphen des Kapitels alle r-gliedrigen Gruppen von der Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$, welche aus Berührungstransformationen von der besonderen Form:

$$z' = z + \Omega(x, p), \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1, 2 \cdots)$$

bestehen.

§ 85.

In den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ sei eine r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransfor-

*) Lie, Theorie der Transformationsgruppen II; Archiv for Mathematik Bd. I, Christiania 1876.

mationen vorgelegt. Die Zusammensetzung dieser Gruppe sei: $c_{i\varkappa s}$; es mögen also Relationen von der Form:

$$(H_i H_\varkappa)_{xp} = \sum_1^r {}^s c_{i\varkappa s} H_s(x, p) \tag{2}$$

$$(i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

bestehen. Ferner seien die Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ von einander unabhängig, während sich $H_{m+1}(x, p) \cdots H_r(x, p)$ folgendermassen durch $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ allein ausdrücken lassen mögen:

$$H_{m+j}(x, p) \equiv W_{m+j}(H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)) \tag{3}$$

$$(j = 1 \cdots r - m).$$

Unter den gemachten Voraussetzungen werden die Gleichungen:

$$H_{m+j} - W_{m+j}(H_1 \cdots H_m) = 0 \qquad (j = 1 \cdots r - m) \tag{4}$$

bei der Substitution:

$$H_1 = H_1(x, p), \cdots H_r = H_r(x, p) \tag{5}$$

zu Identitäten, und umgekehrt ist jede Relation zwischen $H_1 \cdots H_r$, welche bei der Substitution (5) zur Identität wird, eine Folge der Gleichungen (4). Nun verschwindet der Ausdruck:

$$\Big(\varphi,\ H_{m+j}(x, p) - W_{m+j}(H_1(x, p) \cdots H_m(x, p))\Big)_{xp}$$

augenscheinlich identisch, welche Function der x, p auch φ sein mag; mit Berücksichtigung von (2) ergiebt sich also, wenn für φ nach und nach $H_1 \cdots H_m \cdots H_r$ gesetzt wird, dass die Gleichungen:

$$\sum_1^r {}^s c_{i,\, m+j,\, s} H_s - \sum_1^m {}^\mu \frac{\partial W_{m+j}(H_1 \cdots H_m)}{\partial H_\mu} \cdot \sum_1^r {}^s c_{i\mu s} H_s = 0 \tag{6}$$

$$(i = 1 \cdots r;\ \ j = 1 \cdots r - m)$$

bei der Substitution (5) identisch erfüllt sind. Folglich müssen die Relationen (6) zwischen den Grössen $H_1 \cdots H_r$ eine Folge der Relationen (4) sein. Setzen wir aber wie in Kapitel 19, S. 332:

$$B_i f = \sum_{\varkappa s}^{1 \cdots r} c_{i\varkappa s} H_s \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa}$$

$$(i = 1 \cdots r),$$

so lassen sich die Gleichungen (6) auch schreiben:

$$B_i(H_{m+j} - W_{m+j}(H_1 \cdots H_m)) = 0 \tag{6'}$$

$$(i = 1 \cdots r;\ \ j = 1 \cdots r - m);$$

mithin kann die Thatsache, dass die Gleichungen (6) eine Folge der Gleichungen (4) sind, einfach so ausgesprochen werden:

Das Gleichungensystem:

$$H_{m+j} - W_{m+j}(H_1 \cdots H_m) = 0 \qquad (j = 1 \cdots r - m) \tag{4}$$

in den r Veränderlichen $H_1 \cdots H_r$ gestattet die r infinitesimalen Transformationen: $B_1 f \cdots B_r f$ in diesen Veränderlichen.

Erinnern wir uns endlich noch, dass $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ homogene Functionen erster Ordnung von $p_1 \cdots p_n$ sind, so erkennen wir augenblicklich, dass die W_{m+j} homogene Functionen erster Ordnung von $H_1 \cdots H_m$ sind; hieraus aber geht hervor, dass jede der Gleichungen: $H_{m+j} - W_{m+j} = 0$ die infinitesimale Transformation:

$$Bf = H_1 \frac{\partial f}{\partial H_1} + \cdots + H_r \frac{\partial f}{\partial H_r}$$

in den Veränderlichen $H_1 \cdots H_r$ gestattet. Dasselbe gilt natürlich von dem ganzen Gleichungensysteme (4).

Wir haben somit den Satz:

Satz 1. *Ist: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ eine r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, ist ferner die Zusammensetzung dieser Gruppe durch die Gleichungen:*

$$(H_i H_\varkappa)_{xp} = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} H_s \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

bestimmt, sind endlich die Functionen $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ durch gerade $r - m$ unabhängige Relationen verknüpft, welche etwa die Form:

$$H_{m+j} - W_{m+j}(H_1 \cdots H_m) = 0 \qquad (j = 1 \cdots r - m) \tag{4}$$

erhalten können, so definiren die $r - m$ Gleichungen: $H_{m+j} - W_{m+j} = 0$ in den r unabhängigen Veränderlichen: $H_1 \cdots H_r$ ein Gleichungensystem, welches die $r + 1$ infinitesimalen Transformationen:

$$Bf = H_1 \frac{\partial f}{\partial H_1} + \cdots + H_r \frac{\partial f}{\partial H_r},$$

$$B_i f = \sum_{\varkappa s}^{1 \cdots r} c_{i\varkappa s} H_s \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa} \qquad (i = 1 \cdots r)$$

in diesen Veränderlichen gestattet.

Nach dem vorigen Kapitel erzeugen $B_1 f \cdots B_r f$ eine Gruppe, welche zur Adjungirten der Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ dualistisch ist. Auch $B_1 f \cdots B_r f$, Bf erzeugen zusammen eine Gruppe.

§ 86.

Jetzt sei umgekehrt irgend ein System von r^3 Constanten $c_{i\varkappa s}$ vorgelegt, welches die bekannten Bedingungen:

$$(1) \quad \begin{cases} c_{i\varkappa s} + c_{\varkappa i s} = 0 \\ \sum_1^r {}_\nu (c_{i\varkappa\nu} c_{\nu j s} + c_{\varkappa j \nu} c_{\nu i s} + c_{j i \nu} c_{\nu \varkappa s}) = 0 \\ (i, \varkappa, j, s = 1 \cdots r) \end{cases}$$

erfüllt.

Wir bilden mit diesen $c_{i\varkappa s}$ in den Veränderlichen $H_1 \cdots H_r$ die r infinitesimalen Transformationen:

$$B_i f = \sum_{\varkappa s}^{1 \cdots r} c_{i\varkappa s} H_s \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa}$$

$$(i = 1 \cdots r),$$

welche allerdings nicht unabhängig von einander zu sein brauchen, aber nach S. 334, Satz 1 immer eine lineare homogene Gruppe erzeugen. Wir wählen sodann irgend ein Gleichungensystem in den Veränderlichen $H_1 \cdots H_r$, welches sowohl: $B_1 f \cdots B_r f$ als auch die infinitesimale Transformation:

$$Bf = H_1 \frac{\partial f}{\partial H_1} + \cdots + H_r \frac{\partial f}{\partial H_r}$$

gestattet und welches ausserdem keine lineare homogene Relation:

$$c_1 H_1 + \cdots + c_r H_r = 0$$

zwischen $H_1 \cdots H_r$ nach sich zieht. Das betreffende Gleichungensystem denken wir uns der Einfachheit wegen gleich in aufgelöster Form:

$$(7) \qquad H_{m+j} - w_{m+j}(H_1 \cdots H_m) = 0 \qquad (j = 1 \cdots r - m)$$

vorgelegt; dabei ist es übrigens keineswegs ausgeschlossen, dass die ganze Zahl m gerade gleich r ist: dieser Fall wird immer dann eintreten, wenn das gewählte Gleichungensystem blos aus der identischen Gleichung: $0 = 0$ besteht.

Unter den gemachten Voraussetzungen giebt es nun stets eine r-gliedrige Gruppe: $H_1(x_1 \cdots, p_1 \cdots) \cdots H_r(x_1 \cdots, p_1 \cdots)$ von homogenen Berührungstransformationen, welche die gegebene Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ hat und deren charakteristische Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ gerade durch die $r - m$ Relationen:

$$(7) \qquad H_{m+j} - w_{m+j}(H_1 \cdots H_m) = 0 \qquad (j = 1 \cdots r - m)$$

nicht aber durch eine von diesen unabhängige Relation verknüpft sind.

Wir werden das im Folgenden ganz allgemein beweisen, indem wir uns auf die Entwickelungen des Kapitels 13 stützen, doch wollen wir nicht unerwähnt lassen, dass der besondere Fall $m = r$ schon in dem Kapitel 17 seine Erledigung gefunden hat.

Unter α und β verstehen wir irgend welche der Zahlen: $1, 2 \cdots m$ und setzen:

$$|H_\alpha H_\beta| = \sum_1^m{}^\mu c_{\alpha\beta\mu} H_\mu + \sum_1^{r-m}{}^j c_{\alpha\beta,\, m+j}\, w_{m+j}(H_1 \cdots H_m),$$

wofür wir auch schreiben können:

$$|H_\alpha H_\beta| = \sum_1^r{}^s c_{\alpha\beta s} H_s$$

$$(\alpha,\, \beta = 1 \cdots m),$$

vorausgesetzt, dass wir uns $H_{m+1} \cdots H_r$ vermöge der Gleichungen: $H_{m+j} = w_{m+j}(H_1 \cdots H_m)$ als Functionen von $H_1 \cdots H_m$ ausgedrückt denken. Sind ferner F und Φ zwei beliebige Functionen von $H_1 \cdots H_m$, so definiren wir wie früher den Ausdruck $|F\Phi|$ so:

$$|F\Phi| = \sum_{\alpha\beta}^{1 \cdots m} |H_\alpha H_\beta| \frac{\partial F}{\partial H_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial H_\beta}.$$

Weil das Gleichungensystem: $H_{m+j} - w_{m+j} = 0$ die infinitesimalen Transformationen:

$$B_i f = \sum_{\varkappa s}^{1 \cdots r} c_{i\varkappa s} H_s \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa} \qquad (i = 1 \cdots r)$$

gestattet, so werden die Gleichungen:

$$(8) \qquad \sum_1^r{}^s c_{i,\, m+j,\, s} H_s - \sum_1^m{}^\mu \frac{\partial w_{m+j}(H_1 \cdots H_m)}{\partial H_\mu} \sum_1^r{}^s c_{i\mu s} H_s = 0$$

$$(i = 1 \cdots r; \quad j = 1 \cdots r - m)$$

bei der Substitution:

$$H_{m+1} = w_{m+1}(H_1 \cdots H_m), \; \cdots \; H_r = w_r(H_1 \cdots H_m)$$

zu Identitäten. Hieraus ergiebt sich, dass die Gleichungen:

$$|H_\alpha w_{m+j}| = \sum_1^m{}^\beta |H_\alpha H_\beta| \frac{\partial w_{m+j}}{\partial H_\beta}$$

$$= \sum_1^m{}^\beta \frac{\partial w_{m+j}}{\partial H_\beta} \sum_1^r{}^s c_{\alpha\beta s} H_s$$

die folgende Gestalt erhalten können:

$$|H_\alpha w_{m+j}| = \sum_1^r {}_s\, c_{\alpha,\, m+j,\, s} H_s .$$

In derselben Weise finden wir:

$$|w_{m+\varkappa} w_{m+j}| = \sum_1^m {}_\beta\, |w_{m+\varkappa} H_\beta| \frac{\partial w_{m+j}}{\partial H_\beta}$$

$$= \sum_1^r {}_s\, c_{m+\varkappa,\, m+j,\, s} H_s ;$$

es gilt also die Formel:

$$|H_i H_\varkappa| = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} H_s$$

allgemein für $i, \varkappa = 1 \cdots r$, wenn man nur überall $H_{m+1} \cdots H_r$ bezüglich durch $w_{m+1} \cdots w_r$ ersetzt. Erinnern wir uns daher, dass die $c_{i\varkappa s}$ den bekannten Relationen (1) genügen, so sehen wir, dass die Gleichung:

$$||H_i H_\varkappa| H_j| + ||H_\varkappa H_j| H_i| + ||H_j H_i| H_\varkappa| = 0$$

identisch besteht, welche unter den Zahlen $1, 2 \cdots r$ auch $i, \varkappa, j$ sein mögen; sie besteht daher insbesondere auch, wenn $i, \varkappa, j$ drei beliebige unter den Zahlen $1, 2 \cdots m$ bezeichnen.

Endlich muss noch betont werden, dass die m^2 Ausdrücke: $|H_\alpha H_\beta|$ homogene Functionen erster Ordnung von $H_1 \cdots H_m$ sind; es folgt das unmittelbar daraus, dass das Gleichungensystem: $H_{m+j} - w_{m+j} = 0$ die infinitesimale Transformation:

$$Bf = H_1 \frac{\partial f}{\partial H_1} + \cdots + H_r \frac{\partial f}{\partial H_r}$$

gestattet.

Dem Theoreme 38 in Kap. 13, S. 248 entnehmen wir jetzt, dass es in einer geeigneten Anzahl von Veränderlichen: $x_1 \cdots, p_1 \cdots$ eine m-gliedrige homogene Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ giebt, deren m unabhängige Functionen $H_\alpha(x, p)$ in den Beziehungen:

$$(H_\alpha H_\beta)_{xp} = \sum_1^m {}_\mu\, c_{\alpha\beta\mu} H_\mu(x, p) + \sum_1^{r-m} {}_j\, c_{\alpha\beta,\, m+j}\, w_{m+j}(H_1 \cdots H_m)$$

$$(\alpha, \beta = 1 \cdots m)$$

stehen und ausserdem in den p homogen von erster Ordnung sind. Wir denken uns eine solche m-gliedrige Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ bestimmt. Setzen wir dann:

$$w_{m+j}(H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)) = H_{m+j}(x, p) \qquad (j = 1 \cdots r - m),$$

so werden offenbar auch die $H_{m+j}(x, p)$ homogen von erster Ordnung in den p, und es ist überdies klar, dass die Gleichungen (8) bei der Substitution: $H_1 = H_1(x, p), \cdots H_r = H_r(x, p)$ identisch erfüllt sind. Für $\alpha, \beta = 1 \cdots m$, $j, \varkappa = 1 \cdots r - m$ erhalten wir daher die Relationen:

$$(H_\alpha H_\beta)_{xp} = \sum_1^r {}^s c_{\alpha\beta s} H_s(x, p)$$

$$(H_\alpha H_{m+j})_{xp} = \sum_1^m {}^\beta (H_\alpha H_\beta)_{xp} \frac{\partial w_{m+j}}{\partial H_\beta} = \sum_1^r {}^s c_{\alpha,\, m+j,\, s} H_s(x, p)$$

$$(H_{m+\varkappa} H_{m+j})_{xp} = \sum_1^m {}^\beta (H_{m+\varkappa} H_\beta)_{xp} \frac{\partial w_{m+j}}{\partial H_\beta} = \sum_1^r {}^s c_{m+\varkappa,\, m+j,\, s} H_s(x, p).$$

Da nun zwischen $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ augenscheinlich keine Relation bestehen kann, welche von den Gleichungen:

$$(7) \qquad H_{m+j} - w_{m+j}(H_1 \cdots H_m) = 0 \qquad (j = 1 \cdots r - m)$$

unabhängig ist, und da aus diesen letzteren nach unsrer Voraussetzung keine lineare homogene Relation: $c_1 H_1 + \cdots + c_r H_r = 0$ folgt, so ist $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ eine r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen. Diese Gruppe aber hat wirklich die gegebene Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ und ihre charakteristischen Functionen sind wirklich gerade durch die $r - m$ unabhängigen von uns gewählten Relationen (7) verknüpft. Damit ist die auf S. 339, aufgestellte Behauptung bewiesen.

Es sei nun: $\mathfrak{H}_1(y_1 \cdots, q_1 \cdots) \cdots \mathfrak{H}_r(y_1 \cdots, q_1 \cdots)$ irgend eine andere r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen, welche ebenfalls die gegebene Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ hat, und zwar mögen ihre charakteristischen Functionen: $\mathfrak{H}_1(y, q) \cdots \mathfrak{H}_r(y, q)$ ebenso beschaffen sein wie: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$, es sollen also erstens die Beziehungen:

$$(\mathfrak{H}_i \mathfrak{H}_\varkappa)_{yq} = \sum_1^r {}^s c_{i\varkappa s} \mathfrak{H}_s(y, q) \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

bestehen und zweitens sollen sich $\mathfrak{H}_{m+1}(y, q) \cdots \mathfrak{H}_r(y, q)$ durch die von einander unabhängigen Functionen: $\mathfrak{H}_1(y, q) \cdots \mathfrak{H}_m(y, q)$ ebenso ausdrücken wie $H_{m+1}(x, p) \cdots H_r(x, p)$ durch $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$:

$$\mathfrak{H}_{m+j}(y, q) \equiv w_{m+j}(\mathfrak{H}_1(y, q) \cdots \mathfrak{H}_m(y, q)) \\ (j = 1 \cdots r - m).$$

Dagegen soll die Zahl der Veränderlichen: $y_1 \cdots, q_1 \cdots$ nicht gerade gleich der Zahl der $x_1 \cdots, p_1 \cdots$ sein. Unter diesen Voraussetzungen sind nach dem Theoreme 52, S. 311 die beiden Gruppen: $H_1 \cdots H_r$ und

$\mathfrak{H}_1 \cdots \mathfrak{H}_r$ mit einander durch eine homogene Berührungstransformation ähnlich, das Wort „ähnlich" in dem auf S. 313 definirten weiteren Sinne gefasst.

Kennen wir daher auch nur eine einzige r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen, deren charakteristische Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ in den Beziehungen:

$$(H_i H_\varkappa)_{xp} = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} H_s \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

stehen und gerade durch $r - m$ unabhängige Relationen von der Form:

$$H_{m+j} = w_{m+j}(H_1 \cdots H_m) \qquad (j = 1 \cdots r - m)$$

verknüpft sind, so kennen wir überhaupt alle Gruppen von dieser Beschaffenheit; alle diese Gruppen sind aber von dem Standpunkte aus, welchen wir hier einnehmen (vgl. S. 336), nicht für verschieden zu achten.

Wir wollen diese Ergebnisse zunächst in einem besonderen Satze zusammenstellen:

Satz 2. *Befriedigen die r^3 Constanten $c_{i\varkappa s}$ die Gleichungen:*

$$(1) \qquad \begin{cases} \sum_1^r {}_\nu \{ c_{i\varkappa\nu} c_{\nu js} + c_{\varkappa j\nu} c_{\nu is} + c_{ji\nu} c_{\nu\varkappa s} \} = 0 \\ c_{i\varkappa s} + c_{\varkappa is} = 0 \end{cases}$$

und ist:

$$(7) \qquad H_{m+j} - w_{m+j}(H_1 \cdots H_m) = 0 \qquad (j = 1 \cdots r - m)$$

irgend ein $(r - m)$-gliedriges Gleichungensystem, welches die $r + 1$ infinitesimalen Transformationen:

$$Bf = H_1 \frac{\partial f}{\partial H_1} + \cdots + H_r \frac{\partial f}{\partial H_r}$$

$$B_i f = \sum_{\varkappa s}^{1 \cdots r} c_{i\varkappa s} H_s \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa} \qquad (i = 1 \cdots r)$$

in den Veränderlichen $H_1 \cdots H_r$ gestattet, welches aber keine lineare homogene Relation: $c_1 H_1 + \cdots + c_r H_r = 0$ zwischen den H nach sich zieht, so giebt es immer eine r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen, deren charakteristische Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ in den Beziehungen:

$$(H_i H_\varkappa)_{xp} = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} H_s(x, p) \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

stehen und gerade durch die Relationen (7) verknüpft sind, während zwischen $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ keine Relation besteht. Man findet eine *solche Gruppe, wenn man in hinreichend vielen Veränderlichen:* $x_1, x_2 \cdots$, $p_1, p_2 \cdots$ *eine* m*-gliedrige homogene Functionengruppe:* $H_1(x,p) \cdots H_m(x,p)$ *bestimmt, deren* m *Functionen* $H_1 \cdots H_m$ *in den* p *homogen von erster Ordnung sind und die Relationen:*

$$(H_\alpha H_\beta)_{xp} = \sum_1^m{}^\mu c_{\alpha\beta\mu} H_\mu + \sum_1^{r-m}{}^j c_{\alpha\beta,\, m+j}\, w_{m+j}(H_1 \cdots H_m)$$
$$(\alpha,\ \beta = 1 \cdots m)$$

identisch befriedigen; die betreffende Gruppe von homogenen Berührungstransformationen hat alsdann die Form:

$$H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$$
$$H_{m+j}(x, p) \equiv w_{m+j}(H_1(x, p) \cdots H_m(x, p))$$
$$(j = 1 \cdots r - m).$$

Jede andere derartige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen ist mit der so gefundenen Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ *durch eine homogene Berührungstransformation ähnlich.*

Wünscht man zu wissen, welches die geringste Anzahl von Veränderlichen: $x_1 \cdots$, $p_1 \cdots$ ist, in denen es eine r-gliedrige Gruppe von der hier betrachteten Beschaffenheit giebt, so hat man nur nach Anleitung von S. 191 die Anzahl π der unabhängigen ausgezeichneten Functionen zu bestimmen, welche die m-gliedrige Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ enthält; die kleinste mögliche Zahl von Veränderlichen ist dann: $m + \pi$. Die Zahl π kann selbstverständlich gefunden werden, ohne dass man die Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ wirklich bestimmt.

§ 87.

Aus den Entwickelungen der beiden vorhergehenden Paragraphen geht unmittelbar hervor, wie man zu verfahren hat, um *alle* r-gliedrigen Gruppen von homogenen Berührungstransformationen zu bestimmen, welche eine gegebene Zusammensetzung $c_{ix s}$ haben.

In § 85 sahen wir, dass zu jeder r-gliedrigen Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ ein gewisses Gleichungensystem in den Veränderlichen: $H_1 \cdots H_r$ gehört, welches die $r+1$ infinitesimalen Transformationen: Bf, $B_1 f \cdots B_r f$ gestattet. In § 86 ist gezeigt, dass auch umgekehrt zu jedem Gleichungensysteme in $H_1 \cdots H_r$, welches Bf, $B_1 f \cdots B_r f$ gestattet und welches keine Relation von der Form:

$$c_1 H_1 + \cdots + c_r H_r = 0$$

nach sich zieht, eine r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen gefunden werden kann und dass alle zu dem betreffenden

Gleichungensysteme gehörigen Gruppen durch homogene Berührungstransformation mit einander ähnlich sind. Mithin bekommen wir das

Theorem 56. *Alle r-gliedrigen Gruppen von homogenen Berührungstransformationen, welche eine gegebene Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ haben, können folgendermassen gefunden werden: Man bilde zunächst in den Veränderlichen $H_1 \cdots H_r$ die $r+1$ infinitesimalen Transformationen:*

$$Bf = H_1 \frac{\partial f}{\partial H_1} + \cdots + H_r \frac{\partial f}{\partial H_r},$$

$$B_i f = \sum_{\varkappa s}^{1 \cdots r} c_{i\varkappa s} H_s \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa} \qquad (i = 1 \cdots r),$$

welche eine lineare homogene Transformationsgruppe erzeugen. Sodann bestimme man in $H_1 \cdots H_r$ alle Gleichungensysteme, welche Bf, $B_1 f \cdots B_r f$ gestatten, schliesse aber dabei alle solchen aus, welche eine lineare homogene Relation: $c_1 H_1 + \cdots + c_r H_r = 0$ zur Folge haben. Ist:

$$H_{m+j} = w_{m+j}(H_1 \cdots H_m) \qquad (j = 1 \cdots r - m)$$

eines der gefundenen Gleichungensysteme, so bestimme man nach den Regeln des Satzes 2, S. 343 in einer geeigneten Anzahl von Veränderlichen: $x_1 \cdots$, $p_1 \cdots$ eine r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$, deren charakteristische Functionen: $H_1 \cdots H_r$ in den Beziehungen:

$$(H_i H_\varkappa)_{xp} = \sum_1^r {}^s c_{i\varkappa s} H_s \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

*stehen und durch die $r - m$ Relationen: $H_{m+j} - w_{m+j} = 0$ verknüpft sind, während zwischen $H_1 \cdots H_m$ allein keine Relation besteht. In dieser Weise muss man alle gefundenen Gleichungensysteme behandeln. Jede r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen, welche die Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ hat, ist alsdann mit einer der erhaltenen Gruppen durch homogene Berührungstransformation ähnlich.**)

In dem vorstehenden Theoreme liegt, dass *die Bestimmung aller r-gliedrigen Gruppen von homogenen Berührungstransformationen, welche eine gegebene Zusammensetzung haben, jedenfalls durch Integration von simultanen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen geleistet werden kann.**)

---

*) Lie, Archiv for Math. Bd. I, Christiania 1876; Math. Ann. Bd. XVI; Berichte der Kgl. Sächsischen Ges. d. W., Februar 1888.

Zunächst ist nämlich *die Bestimmung aller Gleichungensysteme, welche die infinitesimalen Transformationen Bf, $B_1 f \cdots B_r f$ gestatten, eine ausführbare Operation.* Es beruht das darauf, dass die von Bf, $B_1 f \cdots B_r f$ erzeugte Gruppe linear und homogen ist, dass also ihre endlichen Transformationen durch Auflösung algebraischer Gleichungen gefunden werden können; aus den endlichen Transformationen dieser Gruppe lassen sich aber die besprochenen invarianten Gleichungensysteme nach Abschn. I, Kap. 14, Theorem 37, S. 226 durch Elimination ermitteln.

Andrerseits handelt es sich nach Satz 2, S. 343 noch um die Bestimmung einer m-gliedrigen Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ von gewisser Beschaffenheit. Wir haben aber in Kapitel 13, S. 244 f. gesehen, dass zu dieser Bestimmung nur die Integration simultaner Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen erforderlich ist.

Sehr nahe liegt die Frage nach der kleinsten Zahl von Veränderlichen: $x_1 \cdots$, $p_1 \cdots$, in denen es eine r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen giebt, welche die Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ besitzt. Um sie zu beantworten, bestimme man zu jedem Gleichungensysteme, welches die infinitesimalen Transformationen: Bf, $B_1 f \cdots B_r f$ gestattet, die zugehörige auf S. 344 definirte Zahl π. Die kleinste unter den sich ergebenden Zahlen $m + \pi$ ist die gesuchte Zahl von Veränderlichen. Dabei ist es augenscheinlich gar nicht nöthig, eine Gruppe von der Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ zu kennen.

Da wir auf Grund des Theorems 56 alle r-gliedrigen Gruppen von homogenen Berührungstransformationen finden können, welche eine gegebene Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ haben, so sind wir, wie schon im Anfang des Kapitels (auf S. 336) hervorgehoben wurde, auch *im Stande, alle r-gliedrigen Gruppen von Berührungstransformationen in z, $x_1 \cdots$, $p_1 \cdots$ zu bestimmen, deren Zusammensetzung die gegebene ist.*

§ 88.

Das Problem der Bestimmung aller r-gliedrigen Gruppen von homogenen Berührungstransformationen mit gegebener Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ führte uns auf das andere: eine m-gliedrige homogene Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ zu bestimmen, deren Functionen $H_1 \cdots H_m$ in den p homogen von erster Ordnung sind und die Relationen:

$$(H_\alpha H_\beta)_{xp} = \sum_1^m {}^\mu \, c_{\alpha\beta\mu} H_\mu + \sum^{r-m} {}^j \, c_{\alpha\beta,\, m+j} w_{m+j}(H_1 \cdots H_m) = |H_\alpha H_\beta|$$

$$(\alpha, \beta = 1 \cdots m)$$

identisch erfüllen. Dass es eine solche Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ giebt, folgte aus den Entwickelungen in Kapitel 13, § 63, welche zeigen, dass immer m unabhängige Functionen: $X_1 \cdots X_\alpha$, $P_1 \cdots P_\beta$ von $H_1 \cdots H_m$ vorhanden sind, welche die bekannten Relationen:

$$|X_i X_\varkappa| = |X_i P_\varkappa| = |P_i P_\varkappa| = 0, \quad |P_i X_i| = 1$$

$$\sum_1^m {}^\varkappa H_\varkappa \frac{\partial X_i}{\partial H_\varkappa} = 0, \quad \sum_1^m {}^\varkappa H_\varkappa \frac{\partial P_i}{\partial H_\varkappa} = P_i$$

erfüllen. Das citirte Kapitel enthielt überdies eine Methode zur Auffindung von m solchen Grössen X, P und damit eine Methode, eine homogene Functionengruppe von der verlangten Beschaffenheit durch *Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen* zu bestimmen.

Jene Methode ist nun keineswegs diejenige, welche am Einfachsten zum Ziele führt, es erhebt sich daher die Frage, welche Methode die einfachste ist. Diese Frage gehört aber in das Gebiet der Differentialgleichungen und soll deshalb hier nicht ausführlich behandelt werden; nur mit den ausgezeichneten Functionen der gesuchten Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ werden wir uns eingehend beschäftigen; die Bestimmung derselben als Functionen von $H_1 \cdots H_m$ gestaltet sich nämlich besonders einfach und verlangt, wie wir sehen werden, nur ausführbare Operationen.

Es seien: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ irgend m unabhängige Functionen, welche in den p homogen von erster Ordnung sind und welche die Relationen:

$$(9) \qquad (H_\alpha H_\beta)_{xp} = \sum_1^m {}^\mu c_{\alpha\beta\mu} H_\mu + \sum_1^{r-m} {}^j c_{\alpha\beta,\, m+j} w_{m+j}(H_1 \cdots H_m)$$
$$(\alpha,\ \beta = 1 \cdots m)$$

identisch befriedigen. Wir setzen diese Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ durchaus nicht als gegeben voraus, aber wir wissen ja, dass es m solche Functionen giebt und deshalb können wir von ihnen reden.

Die allgemeinste ausgezeichnete Function: $U(H_1 \cdots H_m)$ der m-gliedrigen homogenen Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ ist nach S. 189 f. die allgemeinste gemeinsame Lösung der m linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(H_\alpha H_1) \frac{\partial f}{\partial H_1} + \cdots + (H_\alpha H_m) \frac{\partial f}{\partial H_m} = 0$$
$$(\alpha = 1 \cdots m)$$

in den Veränderlichen $H_1 \cdots H_m$, in unsrem Falle also die allgemeinste gemeinsame Lösung der m Gleichungen:

$$(10)\qquad \sum_1^m {}^{\beta} \left\{ \sum_1^m {}^{\mu} c_{\alpha\beta\mu} H_\mu + \sum_1^{r-m} {}^{j} c_{\alpha\beta,\, m+j}\, w_{m+j}(H_1 \cdots H_m) \right\} \frac{\partial U}{\partial H_\beta} = 0$$

$$(\alpha = 1 \cdots m).$$

Die unabhängigen unter diesen Gleichungen bilden ein vollständiges System, aus dessen Gliederzahl sich sogleich die Anzahl der von einander unabhängigen ausgezeichneten Functionen der Gruppe ergiebt.

Wir werden nachweisen, dass die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen (10) durch ausführbare Operationen gefunden werden können.

Zu dem Zwecke deuten wir $H_1 \cdots H_r$ als die Punktcoordinaten eines r-fach ausgedehnten Raumes. Die Punkte dieses Raumes werden bei der Gruppe:

$$B_i f = \sum_{\varkappa s}^{1 \cdots r} c_{i\varkappa s} H_s \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa} \qquad (i = 1 \cdots r)$$

transformirt und zwar so, dass die Mannigfaltigkeit, welche durch die Gleichungen:

$$H_{m+j} - w_{m+j}(H_1 \cdots H_m) = 0 \qquad (j = 1 \cdots r - m)$$

dargestellt wird, invariant bleibt.

Die Punkte der besprochenen Mannigfaltigkeit werden bei der Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ unter einander vertauscht und zwar nach Abschn. I, S. 233, Theorem 40 ebenfalls durch eine Gruppe. Wenn wir $H_1 \cdots H_m$ als Coordinaten der einzelnen Punkte auf der Mannigfaltigkeit:

$$H_{m+j} - w_{m+j} = 0$$

ansehen, erscheinen die infinitesimalen Transformationen dieser neuen Gruppe in der Gestalt:

$$(11)\qquad W_\varkappa f = \sum_1^m {}^{\beta} \left\{ \sum_1^m {}^{\mu} c_{\varkappa\beta\mu} H_\mu + \sum_1^{r-m} {}^{j} c_{\varkappa\beta,\, m+j}\, w_{m+j} \right\} \frac{\partial f}{\partial H_\beta}$$

$$(\varkappa = 1 \cdots r).$$

Berücksichtigen wir aber, dass das Gleichungensystem:

$$H_{m+j} - w_{m+j} = 0$$

die r infinitesimalen Transformationen $B_i f$ gestattet, dass also die Gleichungen:

$$B_i(H_{m+j} - w_{m+j}(H_1 \cdots H_m)) = 0$$

$$(i = 1 \cdots r;\; j = 1 \cdots r - m)$$

bei der Substitution:

$$H_{m+1} = w_{m+1}(H_1 \cdots H_m), \;\cdots\; H_r = w_r(H_1 \cdots H_m)$$

zu Identitäten werden, so erkennen wir, dass $W_1 f \cdots W_r f$ durch die identischen Relationen:

$$W_{m+j}f \equiv \sum_1^m \beta \frac{\partial w_{m+j}}{\partial H_\beta} \cdot W_\beta f$$
$$(j = 1 \cdots r - m)$$

verknüpft sind. Hieraus folgt, dass das System der Gleichungen (10) mit dem Systeme der Gleichungen: $W_1 f = 0, \cdots W_r f = 0$ äquivalent ist, mit andern Worten: *die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen* (10) *sind nichts anderes als die Invarianten der Gruppe:* $W_1 f \cdots W_r f$.

Diese Invarianten aber lassen sich durch ausführbare Operationen finden. Es ist ja zunächst durch ausführbare Operationen möglich, die endlichen Gleichungen der Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ aufzustellen. Hat man aber diese gefunden, so kann man nach Abschn. I, S. 233 sofort die endlichen Gleichungen der Gruppe: $W_1 f \cdots W_r f$ hinschreiben, welche die Punkte der invarianten Mannigfaltigkeit: $H_{m+j} - w_{m+j} = 0$ transformirt. Die Invarianten der Gruppe: $W_1 f \cdots W_r f$ findet man dann durch Elimination (Abschn. I, Theorem 35, S. 218).

Damit ist bewiesen, dass man die ausgezeichneten Functionen der m-gliedrigen Functionengruppe: $H_1 \cdots H_m$ durch ausführbare Operationen ermitteln kann.

Jede absolute Invariante der Gruppe: $W_1 f \cdots W_r f$ liefert, gleich einer willkürlichen Constanten gesetzt, eine Schaar von ∞^1 Theilgebieten der Mannigfaltigkeit: $H_{m+j} - w_{m+j} = 0$. Natürlich bleibt jedes einzelne dieser Theilgebiete bei der Gruppe: $W_1 f \cdots W_r f$ und zugleich bei der Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ invariant. Ist daher die Mannigfaltigkeit: $H_{m+j} - w_{m+j} = 0$ eine von denen, welche wir in Abschn. I, S. 224 als „die kleinsten bei der Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ invarianten Mannigfaltigkeiten" bezeichneten, so enthält die Functionengruppe: $H_1 \cdots H_m$ gar keine ausgezeichneten Functionen; solche Functionen treten vielmehr dann und nur dann auf, wenn die Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ die Mannigfaltigkeit: $H_{m+j} - w_{m+j} = 0$ in eine continuirliche Schaar einzeln invarianter Theilgebiete zerlegt.

Unter den ausgezeichneten Functionen der m-gliedrigen homogenen Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ giebt es insbesondere solche, welche in den p homogen von nullter Ordnung sind. Es ist bemerkenswerth, dass auch diese durch ausführbare Operationen gefunden werden können.

In der That, die ausgezeichneten Functionen nullter Ordnung der Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ sind diejenigen ihrer ausgezeichneten Functionen, welche in $H_1 \cdots H_m$ homogen von nullter

Ordnung sind, oder, was auf dasselbe hinauskommt, diejenigen Functionen von $H_1 \cdots H_m$, welche die infinitesimale Transformation:

$$Wf = H_1 \frac{\partial f}{\partial H_1} + \cdots + H_m \frac{\partial f}{\partial H_m}$$

gestatten. In Folge dessen lassen sie sich auch definiren als die Invarianten der Transformationsgruppe: $W_1 f \cdots W_r f$, Wf; dass man aber die Invarianten dieser Gruppe durch ausführbare Operationen finden kann, liegt auf der Hand.

Enthält die homogene Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ gerade l unabhängige ausgezeichnete Functionen, so bildet der Inbegriff aller ihrer ausgezeichneten Functionen nach S. 218, Satz 4 eine l-gliedrige homogene Functionengruppe, deren Functionen paarweise in Involution liegen. Wir werden jetzt noch zeigen, in welcher Weise man diese l-gliedrige Functionengruppe auf eine kanonische Form bringen kann.

Sind alle ausgezeichneten Functionen der Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ von nullter Ordnung in den p, so bestimmen wir — durch ausführbare Operationen — l unabhängige unter ihnen, etwa:

$$U_1\left(\frac{H_1}{H_m} \cdots \frac{H_{m-1}}{H_m}\right) \cdots U_l\left(\frac{H_1}{H_m} \cdots \frac{H_{m-1}}{H_m}\right),$$

dann ist: $U_1 \cdots U_l$ bereits eine kanonische Form unsrer l-gliedrigen Functionengruppe. In jedem andern Fall enthält die Functionengruppe: $H_1 \cdots H_m$ blos $l-1$ unabhängige ausgezeichnete Functionen nullter Ordnung. Wir denken uns daher $l-1$ solche:

$$\mathfrak{U}_1\left(\frac{H_1}{H_m} \cdots \frac{H_{m-1}}{H_m}\right) \cdots \mathfrak{U}_{l-1}\left(\frac{H_1}{H_m} \cdots \frac{H_{m-1}}{H_m}\right)$$

und irgend eine von denselben unabhängige ausgezeichnete Function: $U(H_1 \cdots H_m)$ bestimmt — alles durch ausführbare Operationen. Um nun die Functionengruppe: $\mathfrak{U}_1 \cdots \mathfrak{U}_{l-1}$, U auf eine kanonische Form zu bringen, müssen wir noch eine Function $F(\mathfrak{U}_1 \cdots \mathfrak{U}_{l-1}, U)$ aufsuchen, welche in den p oder, was auf dasselbe hinauskommt, in $H_1 \cdots H_m$ homogen von erster Ordnung ist. Für diese Function F erhalten wir die Differentialgleichung:

$$\sum_1^m {}^{\mu}\, H_\mu \frac{\partial F}{\partial H_\mu} = F,$$

welche augenscheinlich die einfache Form:

$$\sum_1^m {}^{\mu}\, H_\mu \frac{\partial U}{\partial H_\mu} \cdot \frac{\partial F}{\partial U} = F$$

annimmt. Hier lässt sich der Faktor von $\frac{\partial F}{\partial U}$, welcher sicher nicht verschwindet, als Function von $\mathfrak{U}_1 \cdots \mathfrak{U}_{l-1}$, U darstellen, also wird F selbst durch eine Quadratur gefunden. Kennt man F, so ist: $F\mathfrak{U}_1, \cdots F\mathfrak{U}_{l-1}, F$ eine kanonische Form der l-gliedrigen Functionengruppe.

Wir sprechen die Ergebnisse dieses Paragraphen folgendermassen aus:

Theorem 57. *Befriedigen die r^3 Constanten $c_{i\varkappa s}$ die Gleichungen:*

$$(1) \qquad \begin{cases} \sum_1^r \nu \{ c_{i\varkappa\nu} c_{\nu js} + c_{\varkappa j\nu} c_{\nu is} + c_{ji\nu} c_{\nu\varkappa s} \} = 0 \\ c_{i\varkappa s} + c_{\varkappa is} = 0 \end{cases}$$

und gestattet das Gleichungensystem:

$$(7) \qquad H_{m+j} - w_{m+j}(H_1 \cdots H_m) = 0 \qquad (j = 1 \cdots r - m)$$

die $r + 1$ infinitesimalen Transformationen:

$$Bf = H_1 \frac{\partial f}{\partial H_1} + \cdots + H_r \frac{\partial f}{\partial H_r}$$

$$B_i f = \sum_{\varkappa s}^{1 \cdots r} c_{i\varkappa s} H_s \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa} \qquad (i = 1 \cdots r),$$

so giebt es in einer geeigneten Anzahl von Veränderlichen: $x_1 \cdots, p_1 \cdots$ stets m unabhängige Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$, welche in den p homogen von erster Ordnung sind und welche die Gleichungen:

$$(9) \qquad (H_\alpha H_\beta)_{xp} = \sum_1^m \mu \, c_{\alpha\beta\mu} H_\mu + \sum_1^{r-m} j \, c_{\alpha\beta,\, m+j} w_{m+j}(H_1 \cdots H_m)$$
$$(\alpha, \beta = 1 \cdots m)$$

identisch befriedigen. Man kann immer, auch wenn man noch nicht m solche Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ kennt, durch ausführbare Operationen alle ausgezeichneten Functionen $U(H_1 \cdots H_m)$ der von $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ bestimmten m-gliedrigen homogenen Functionengruppe durch $H_1 \cdots H_m$ ausdrücken und insbesondere auch alle ausgezeichneten Functionen nullter Ordnung dieser Functionengruppe. Will man die homogene Functionengruppe, welche von den ausgezeichneten Functionen der Functionengruppe: $H_1(x, p) \cdots H_m(x, p)$ gebildet wird, auf eine kanonische Form bringen, so bedarf man dazu, abgesehen von ausführbaren Operationen, höchstens einer Quadratur.

Noch wollen wir den folgenden Satz aufstellen, der in dem eben ausgesprochenen Theoreme enthalten ist.

Satz 3. *Ist in den $2n$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ eine r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen vorgelegt, so kann man stets durch ausführbare Operationen alle ausgezeichneten Functionen und alle ausgezeichneten Functionen nullter Ordnung der homogenen Functionengruppe finden, welche von den unabhängigen unter den Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ bestimmt wird. Will man die von allen diesen ausgezeichneten Functionen gebildete homogene Functionengruppe auf eine kanonische Form bringen, so bedarf man dazu, abgesehen von ausführbaren Operationen, höchstens einer Quadratur.*

Im Vorangehenden wurden die ausgezeichneten Functionen unsrer unbekannten Functionengruppe $H_1 \cdots H_m$ als Functionen von $H_1 \cdots H_m$ durch eine einzige nicht einmal immer nöthige Quadratur ausgedrückt. Um jetzt m unabhängige Functionen $X_1 \cdots X_\alpha$, $P_1 \cdots P_\beta$ von $H_1 \cdots H_m$ zu finden, welche die bekannten Relationen:

$$\text{(A)} \quad \left\{ \begin{aligned} & |P_i X_i| = 1, \quad |X_i X_\varkappa| = |X_i P_\varkappa| = |P_i P_\varkappa| = 0 \qquad (i \neq \varkappa) \\ & \sum_1^m{}_\varkappa H_\varkappa \frac{\partial X_i}{\partial H_\varkappa} = 0, \quad \sum_1^m{}_\varkappa H_\varkappa \frac{\partial P_i}{\partial H_\varkappa} = P_i \end{aligned} \right.$$

erfüllen, sind gewisse Integrationen erforderlich. Wir werden, jedoch ohne ausführliche Begründung, angeben, wie diese Bestimmung sich am einfachsten durchführen lässt; dabei beschränken wir uns der Einfachheit wegen auf den Fall, dass alle ausgezeichneten Functionen unsrer Functionengruppe von nullter Ordnung in den $H_\varkappa$ sind.

Es seien:

$$N_1 = \mathsf{N}_1(H_1 \cdots H_m), \quad \cdots \quad N_\nu = \mathsf{N}_\nu(H_1 \cdots H_m)$$

die schon gefundenen ausgezeichneten Functionen unsrer Gruppe. Ist nun $m = 2\mu + \nu$ und dementsprechend $X_1 \cdots X_\mu \cdots X_{\mu+\nu}$, $P_1 \cdots P_\mu$ die typische Form unsrer homogenen Functionengruppe, so setzen wir:

$$X_{\mu+1} = N_1, \quad \cdots \quad X_{\mu+\nu} = N_\nu$$

und wählen eine beliebige von $N_1 \cdots N_\nu$ unabhängige Function nullter Ordnung von $H_1 \cdots H_m$ als X_1. Sodann bilden wir die beiden linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$|X_1 f| = 0, \qquad \sum_1^m{}_\varkappa H_\varkappa \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa} = 0,$$

welche offenbar gemeinsame Lösungen besitzen und wählen eine von $N_1 \cdots N_\nu$ und X_1 unabhängige Lösung als X_2. Ferner wählen wir eine von $N_1 \cdots N_\nu$, X_1 und X_2 unabhängige Lösung der Gleichungen:

$$|X_1 f| = 0, \quad |X_2 f| = 0, \quad \sum_1^m{}_\varkappa H_\varkappa \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa} = 0$$

als X_3, und so weiter. In dieser Weise finden wir nach und nach gerade μ Functionen nullter Ordnung: $X_1, X_2 \cdots X_\mu$ von $H_1 \cdots H_m$, welche mit $X_{\mu+1} \cdots X_{\mu+\nu}$ zusammen ein $(\mu + \nu)$-gliedriges Involutionssystem bilden.

Sodann suchen wir μ Functionen: $P_1 \cdots P_\mu$ von $H_1 \cdots H_m$, welche die Gleichungen:

$$|X_\varkappa P_i| = 0, \quad |P_i X_i| = 1, \quad \sum_1^m {}_s H_s \frac{\partial P_i}{\partial H_s} = P_i$$

$$(\varkappa \mp i, \quad i = 1, 2 \cdots \mu, \quad \varkappa = 1 \cdots \mu + \nu)$$

erfüllen. Es ergiebt sich, dass diese Gleichungen für jedes i eine einzige gemeinsame Lösung P_i besitzen, welche ohne Integration gefunden wird, und ausserdem dass alle $|P_i P_\varkappa|$ identisch verschwinden.

Hiermit sind $2\mu + \nu$ unabhängige Functionen: $X_1 \cdots X_{\mu+\nu}$, $P_1 \cdots P_\mu$ von $H_1 \cdots H_m$ gefunden, welche die Relationen (A) erfüllen; werden sodann die $H_\varkappa$ als Functionen von den X und P:

$$H_\varkappa = V_\varkappa(X_1 \cdots X_{\mu+\nu}, \; P_1 \cdots P_\mu)$$

ausgedrückt, so bestimmen die m Functionen:

$$H_\varkappa = V_\varkappa(x_1 \cdots x_{\mu+\nu}, \; p_1 \cdots p_\mu)$$

in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_{\mu+\nu}$, $p_1 \cdots p_{\mu+\nu}$ eine Functionengruppe, welche die verlangte Beschaffenheit besitzt.

§ 89.

Um die bisherigen Entwickelungen durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir alle dreigliedrigen Gruppen: $H_1(x, p)$, $H_2(x, p)$, $H_3(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen bestimmen, welche mit der allgemeinen projectiven Gruppe:

$$X_1 f = \frac{df}{dx}, \quad X_2 f = x\frac{df}{dx}, \quad X_3 f = x^2 \frac{df}{dx}$$

der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit gleichzusammengesetzt sind.

Es soll werden:

$$(H_1 H_2)_{xp} = H_1, \quad (H_1 H_3)_{xp} = 2H_2, \quad (H_2 H_3)_{xp} = H_3,$$

wir erhalten daher:

$$B_1 f = H_1 \frac{\partial f}{\partial H_2} + 2H_2 \frac{\partial f}{\partial H_3}$$

$$B_2 f = -H_1 \frac{\partial f}{\partial H_1} + H_3 \frac{\partial f}{\partial H_3}$$

$$B_3 f = -2H_2 \frac{\partial f}{\partial H_1} - H_3 \frac{\partial f}{\partial H_2},$$

wozu noch:

$$Bf = H_1 \frac{\partial f}{\partial H_1} + H_2 \frac{\partial f}{\partial H_2} + H_3 \frac{\partial f}{\partial H_3}$$

tritt.

Durch Bildung aller drei- und zweireihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} 0 & H_1 & 2H_2 \\ -H_1 & 0 & H_3 \\ -2H_2 & -H_3 & 0 \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix}$$

überzeugt man sich leicht, dass: $H_1 H_3 - H_2^2 = 0$ das einzige bei der Gruppe: $B_1 f$, $B_2 f$, $B_3 f$, Bf invariante Gleichungensystem ist, welches keine in den H lineare Gleichung enthält. Es müssen daher zwei Fälle unterschieden werden und in jedem dieser beiden Fälle genügt es, *eine* zugehörige Gruppe anzugeben, alle andern sind dann mit dieser einen durch homogene Berührungstransformation ähnlich.

Im ersten Falle sind H_1, H_2, H_3 überhaupt nicht durch Relationen verknüpft. Um die ausgezeichneten Functionen der Functionengruppe: H_1, H_2, H_3 zu finden, haben wir daher H_1, H_2, H_3 als Punktcoordinaten im dreifach ausgedehnten Raume zu deuten und zu untersuchen, ob die Gruppe: $B_1 f$, $B_2 f$, $B_3 f$ diesen Raum in eine continuirliche Schaar von einzeln invarianten Mannigfaltigkeiten zerlegt. Wir finden, dass jede der ∞^1 Flächen zweiten Grades: $H_1 H_3 - H_2^2 =$ const. bei der Gruppe: $B_1 f$, $B_2 f$, $B_3 f$ invariant bleibt, dass aber diese Flächen nicht in continuirliche Schaaren invarianter Theilgebiete zerfallen. Hieraus folgt, dass die allgemeinste ausgezeichnete Function der Functionengruppe: H_1, H_2, H_3 eine willkürliche Function von: $H_1 H_3 - H_2^2$ ist. Eine kanonische Form der von diesen ausgezeichneten Functionen gebildeten homogenen Functionengruppe ist die Function erster Ordnung: $\sqrt{H_1 H_3 - H_2^2}$. Als Repräsentant der hierher gehörigen Gruppen von homogenen Berührungstransformationen kann die folgende dienen:

$$H_1 = p_1 + p_2, \qquad H_2 = x_1 p_1 + x_2 p_2, \qquad H_3 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2;$$

in weniger als vier Veränderlichen $x_1 \cdots$, $p_1 \cdots$ giebt es offenbar gar keine derartige Gruppe.

Der zweite Fall ist durch die Gleichung: $H_1 H_3 - H_2^2 = 0$ gekennzeichnet, welche einen bei der Gruppe: $B_i f$, Bf invarianten Kegel zweiten Grades darstellt. Die zugehörige Functionengruppe: H_1, H_2 ist zweigliedrig und enthält keine ausgezeichneten Functionen. Das letztere erkennt man entweder aus der Relation: $(H_1 H_2) = H_1$ oder daraus, dass jener Kegel bei der Gruppe: $B_1 f$, $B_2 f$, $B_3 f$ nicht in eine continuirliche Schaar von invarianten Theilgebieten zerfällt. Alle hierher gehörigen Gruppen von homogenen Berührungstransformationen sind mit der Gruppe:

$$H_1 = p_1, \quad H_2 = x_1 p_1, \quad H_3 = x_1^2 p_1$$

durch homogene Berührungstransformation ähnlich.

§ 90.

Die Ergebnisse der §§ 86, 87 sind nach einer gewissen Richtung hin unvollständig und bedürfen noch der Ergänzung. Wir haben allerdings gezeigt, wie man alle Gruppen von homogenen Berührungstransformationen finden kann, welche von gegebener Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ sind. Bisher wissen wir aber nur Folgendes:

Erstens. Zu jedem Gleichungensysteme in $H_1 \cdots H_r$, welches bei der Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$, Bf invariant bleibt und keine lineare Relation zwischen den H liefert, gehören gewisse r-gliedrige Gruppen von homogenen Berührungstransformationen, welche die Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ haben und welche mit einander durch homogene Berührungstransformation ähnlich sind. *Zweitens.* Hat man zu jedem der besprochenen Gleichungensysteme *eine* zugehörige Gruppe aufgestellt, so ist jede r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen, welche die Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ hat, mit einer der gefundenen Gruppen durch homogene Berührungstransformation ähnlich.

Dagegen wissen wir noch nicht, wann zwei verschiedene unter jenen Gleichungensystemen auch zwei Gruppen liefern, welche wir als verschieden betrachten, das heisst zwei Gruppen, welche nicht durch homogene Berührungstransformation mit einander ähnlich sind, das Wort „ähnlich“ in dem weiteren auf S. 313 definirten Sinne genommen. Wir müssen daher noch die Bedingungen aufstellen, unter denen zwei verschiedene Gleichungensysteme in den H zu zwei mit einander ähnlichen Gruppen führen. Das wollen wir jetzt ausführen, können aber dabei voraussetzen, dass die beiden Gleichungensysteme ein und dieselbe Anzahl unabhängiger Gleichungen enthalten, thäten sie das nämlich nicht, so würden sie sicher zwei Gruppen liefern, die nicht mit einander ähnlich sind.

Es sei wie früher:

(7) $$H_{m+j} - w_{m+j}(H_1 \cdots H_m) = 0 \qquad (j = 1 \cdots r - m)$$

ein Gleichungensystem, welches die Gruppe:

$$Bf = H_1 \frac{\partial f}{\partial H_1} + \cdots + H_r \frac{\partial f}{\partial H_r}$$

$$B_i f = \sum_{\varkappa s}^{1 \cdots r} c_{i\varkappa s} H_s \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa} \qquad (i = 1 \cdots r)$$

gestattet und keine lineare homogene Relation zwischen den H nach sich zieht. Eine zugehörige r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen sei:

$$H_1(x_1 \cdots, p_1 \cdots) \cdots H_r(x_1 \cdots, p_1 \cdots),$$

wo die Functionen $H_\varkappa(x, p)$ in den Beziehungen:

(12) $$(H_i H_\varkappa)_{xp} = \sum_1^r {}^s c_{i\varkappa s} H_s \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

stehen.

Andrerseits sei:

(7′) $$\mathfrak{H}_{\alpha_{m+j}} = \mathfrak{w}_{m+j}(\mathfrak{H}_{\alpha_1} \cdots \mathfrak{H}_{\alpha_m}) \qquad (j = 1 \cdots r - m)$$

ein Gleichungensystem in $\mathfrak{H}_1 \cdots \mathfrak{H}_r$, welches die Gruppe:

$$\mathfrak{B}f = \mathfrak{H}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{H}_1} + \cdots + \mathfrak{H}_r \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{H}_r}$$

$$\mathfrak{B}_i f = \sum_{\varkappa s}^{1 \cdots r} c_{i\varkappa s} \mathfrak{H}_s \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{H}_\varkappa} \qquad (i = 1 \cdots r)$$

gestattet. Eine zugehörige r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen sei:

$$\mathfrak{H}_1(y_1 \cdots, q_1 \cdots) \cdots \mathfrak{H}_r(y_1 \cdots, q_1 \cdots),$$

wo die $\mathfrak{H}_\varkappa(y, q)$ in den Beziehungen:

(12′) $$(\mathfrak{H}_i \mathfrak{H}_\varkappa)_{yq} = \sum_1^r {}^s c_{i\varkappa s} \mathfrak{H}_s \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

stehen.

Sind zwei solche Berührungstransformationsgruppen $H_1 \cdots H_r$ und $\mathfrak{H}_1 \cdots \mathfrak{H}_r$ schon bekannt, so ist es leicht zu entscheiden, ob sie im Sinne von S. 313 durch eine homogene Berührungstransformation ähnlich sind.

Wir können nämlich ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass die Zahl der y, q und die Zahl der x, p einander gleich sind. Wäre nämlich zum Beispiel die Zahl der y, q kleiner als die der x, p, so könnten wir wie auf S. 313 zu den y, q gewisse neue Veränderliche y, q hinzufügen, welche bei der Gruppe: $\mathfrak{H}_1(y, q) \cdots \mathfrak{H}_r(y, q)$ nicht transformirt werden. Wir wollen daher annehmen, dass sowohl die Zahl der x, p als die Zahl der y, q gleich $2n$ ist.

Sollen nun die beiden Gruppen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ und: $\mathfrak{H}_1(y, q) \cdots \mathfrak{H}_r(y, q)$ mit einander ähnlich sein, so ist nach Theorem 51, S. 309 nothwendig und hinreichend, dass es eine homogene Berührungstransformation:

$$y_i = Y_i(x, p), \quad q_i = Q_i(x, p) \quad (i = 1 \cdots n) \tag{13}$$

giebt, vermöge deren jedes $\mathfrak{H}_i(y, q)$ die Form:

$$\mathfrak{H}_i(y, q) = \sum_1^r {}^j g_{ij} H_j(x, p) \quad (i = 1 \cdots r) \tag{14}$$

annimmt; dabei bezeichnen die g_{ij} Constanten, deren Determinante nicht verschwindet. Existirt eine solche Transformation, so erfüllen die r infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{H}_i(x, p) = \sum_1^r {}^j g_{ij} H_j(x, p) \quad (i = 1 \cdots r)$$

die Relationen:

$$(\overline{H}_i \overline{H}_\varkappa)_{xp} = \sum_1^r {}^s c_{i\varkappa s} \overline{H}_s, \tag{A}$$

während das Gleichungensystem:

$$\overline{H}_{\alpha_{m+j}} = \mathfrak{w}_{m+j}\left(\overline{H}_{\alpha_1} \cdots \overline{H}_{\alpha_m}\right) \quad (j = 1 \cdots r - m)$$

mit dem Gleichungensysteme $H_{m+j} = w_{m+j}(H_1 \cdots H_m)$ äquivalent wird. Ist es andrerseits möglich r^2 solche Constanten g_{ij} mit nichtverschwindender Determinante zu finden, dass die Gleichungen (A) bestehen, während das Gleichungensystem $\overline{H}_{\alpha_{m+j}} = \mathfrak{w}_{m+j}$ mit dem Gleichungensysteme $H_{m+j} = w_{m+j}$ äquivalent wird, so giebt es (Theorem 52, S. 311) sicher eine homogene Berührungstransformation (13), welche jedes $\mathfrak{H}_i(y, q)$ auf die Form $\sum^j g_{ij} H_j(x, p)$ bringt.

Sind daher schon zwei homogene Berührungstransformationsgruppen $H_1 \cdots H_r$ und $\mathfrak{H}_1 \cdots \mathfrak{H}_r$ bekannt, welche in der auseinandergesetzten Weise zu den Gleichungensystemen (7) und (7′) gehören, so lässt sich die Frage, ob diese beiden Gleichungensysteme ähnliche Gruppen liefern, nach den Entwickelungen des vorletzten Kapitels ohne weiteres erledigen.

Wir stellen uns aber hier auf den Standpunkt, dass wir nur die beiden Gleichungensysteme (7) und (7′) kennen, und wir wünschen zu wissen, ob die zugehörigen noch unbekannten Berührungstransformationsgruppen, welche wir fortwährend mit $H_1 \cdots H_r$ und $\mathfrak{H}_1 \cdots \mathfrak{H}_r$ bezeichnen, durch homogene Berührungstransformation ähnlich sind oder nicht.

Giebt es eine homogene Berührungstransformation (13), welche jedes $\mathfrak{H}_i(y, q)$ auf die Form $\sum^j g_{ij} H_j(x, p)$ bringt, so ist identisch:

$$\mathfrak{H}_i(Y, Q) \equiv \sum_1^r {}^j g_{ij} H_j(x, p) \qquad (i=1\cdots r). \tag{15}$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichungen (12′) ein und berücksichtigen wir, dass $(\mathfrak{H}_i \mathfrak{H}_\varkappa)_{xp} = (\mathfrak{H}_i \mathfrak{H}_\varkappa)_{yq}$ ist (vgl. S. 131), so ergiebt sich mit Benutzung von (12), dass die Gleichungen:

$$\sum_{j\pi}^{1\cdots r} g_{ij} g_{\varkappa\pi} \sum_1^r {}^s c_{j\pi s} H_s(x, p) = \sum_1^r {}^\tau c_{i\varkappa\tau} \sum_1^r {}^s g_{\tau s} H_s(x, p)$$
$$(i, \varkappa = 1\cdots r)$$

identisch erfüllt sind, diese aber zerlegen sich, weil $H_1(x,p) \cdots H_r(x,p)$ nicht durch eine lineare Relation verknüpft sind, in die folgenden:

$$\sum_{j\pi}^{1\cdots r} g_{ij} g_{\varkappa\pi} c_{j\pi s} = \sum_1^r {}^\tau c_{i\varkappa\tau} g_{\tau s} \tag{16}$$
$$(i, \varkappa, s = 1\cdots r).$$

Setzen wir andrerseits die Werthe (15) der $\mathfrak{H}_i(Y, Q)$ in die Gleichungen (7′) ein, welche von den $\mathfrak{H}_i(y, q)$ und also auch von den $\mathfrak{H}_i(Y, Q)$ identisch erfüllt werden, so ergeben sich $r - m$ unabhängige Gleichungen zwischen den H, welche von den Functionen $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ identisch erfüllt werden. Das System dieser $r - m$ unabhängigen Gleichungen muss aber augenscheinlich mit dem Systeme:

$$H_{m+j} - w_{m+j}(H_1 \cdots H_m) = 0 \qquad (j = 1\cdots r-m) \tag{7}$$

äquivalent sein, denn: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ sind durch keine von den Gleichungen (7) unabhängige Relation verknüpft.

Soll es daher eine homogene Berührungstransformation (13) von der beschriebenen Beschaffenheit geben, so ist jedenfalls Folgendes nothwendig: *Es muss möglich sein r^2 Constanten g_{ij} mit nicht verschwindender Determinante zu bestimmen, welche erstens die Gleichungen* (16) *identisch erfüllen und welche zweitens so beschaffen sind, dass das Gleichungensystem* (7′) *bei der Substitution:*

$$\mathfrak{H}_i = \sum_1^r {}^j g_{ij} H_j \qquad (i=1\cdots r)$$

in ein Gleichungensystem übergeht, welches mit dem Systeme (7) *äquivalent ist.*

Die gefundenen nothwendigen Bedingungen sind nun aber zugleich hinreichend. Giebt es nämlich r^2 Constanten g_{ij}, welche die angegebenen Eigenschaften besitzen, so stehen die r charakteristischen Functionen:

$$\overline{H}_i(x, p) = \sum_1^r {}^j g_{ij} H_j(x, p) \qquad (i = 1 \cdots r)$$

augenscheinlich in den Beziehungen:

$$(\overline{H}_i \overline{H}_\varkappa)_{xp} = \sum_1^r {}^s c_{i\varkappa s} \overline{H}_s(x, p) \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

und sind ausserdem gerade durch die $r - m$ unabhängigen Relationen:

$$\overline{H}_{\alpha_{m+j}} = \mathfrak{w}_{m+j}(\overline{H}_{\alpha_1} \cdots \overline{H}_{\alpha_m}) \qquad (j = 1 \cdots r - m)$$

verknüpft, es giebt daher nach Theorem 52, S. 311 sicher eine homogene Berührungstransformation (13), welche $\overline{H}_1(x, p) \cdots \overline{H}_r(x, p)$ bezüglich in: $\mathfrak{H}_1(y, q) \cdots \mathfrak{H}_r(y, q)$ überführt, und diese Berührungstransformation erfüllt alle gestellten Forderungen.

Wir wollen die gewonnenen Ergebnisse zunächst noch einmal zusammenfassen; dabei bedienen wir uns zweckmässig der beiden Symbole:

$$(17) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i\varkappa}^{1 \cdots r} \frac{\partial \varphi(H_1 \cdots H_r)}{\partial H_i} \cdot \frac{\partial \chi(H_1 \cdots H_r)}{\partial H_\varkappa} \cdot \sum_1^r {}^s c_{i\varkappa s} H_s = |\varphi \chi|_H \\ \displaystyle\sum_{i\varkappa}^{1 \cdots r} \frac{\partial U(\mathfrak{H}_1 \cdots \mathfrak{H}_r)}{\partial \mathfrak{H}_i} \cdot \frac{\partial V(\mathfrak{H}_1 \cdots \mathfrak{H}_r)}{\partial \mathfrak{H}_\varkappa} \cdot \sum_1^r {}^s c_{i\varkappa s} \mathfrak{H}_s = |UV|_{\mathfrak{H}}, \end{cases}$$

dann können wir sagen:

Satz 4. *Hat man in den Veränderlichen $H_1 \cdots H_r$ zwei $(r - m)$-gliedrige Gleichungensysteme:*

$$H_{m+j} = w_{m+j}(H_1 \cdots H_m) \qquad (j = 1 \cdots r - m)$$

und:

$$H_{\alpha_{m+j}} = \mathfrak{w}_{m+j}(H_{\alpha_1} \cdots H_{\alpha_m}) \qquad (j = 1 \cdots r - m),$$

welche beide die Gruppe: Bf, $B_1 f \cdots B_r f$ zulassen und beide keine lineare homogene Relation zwischen $H_1 \cdots H_r$ nach sich ziehen, so liefern dieselben dann und nur dann solche r-gliedrige Gruppen von homogenen Berührungstransformationen mit der Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$, welche durch homogene Berührungstransformation mit einander ähnlich sind, wenn es möglich ist r^2 Constanten g_{ij} mit nicht verschwindender Determinante anzugeben, welche die folgenden Eigenschaften besitzen: Erstens müssen die r Ausdrücke:

$$\mathfrak{H}_i = \sum_1^r {}^j g_{ij} H_j \qquad (i = 1 \cdots r)$$

die symbolischen Gleichungen:

$$(18)\qquad |\mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_\varkappa|_H = |\mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_\varkappa|_{\mathfrak{H}} \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

oder ausführlicher geschrieben, die Gleichungen:

$$(19)\qquad \sum_{j\pi}^{1\cdots r} g_{ij} g_{\varkappa\pi} \sum_{1}^{r}{}^{s} c_{j\pi s} H_s = \sum_{1}^{r}{}^{\tau} c_{i\varkappa\tau} \sum_{1}^{r}{}^{s} g_{\tau s} H_s$$

$$(i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

für alle Werthe der H identisch erfüllen und zweitens muss das Gleichungensystem:

$$\mathfrak{H}_{\alpha_{m+j}} = \mathfrak{w}_{m+j}(\mathfrak{H}_{\alpha_1} \cdots \mathfrak{H}_{\alpha_m}) \qquad (j = 1 \cdots r - m)$$

bei der Substitution:

$$\mathfrak{H}_i = \sum_{1}^{r}{}^{j} g_{ij} H_j \qquad (i = 1 \cdots r)$$

mit dem Systeme: $H_{m+j} = w_{m+j}(H_1 \cdots H_m)$ äquivalent werden.

Das in dem vorstehenden Satze ausgesprochene Kriterium wollen wir jetzt noch etwas umgestalten.

Bestehen die symbolischen Gleichungen:

$$(18)\qquad |\mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_\varkappa|_H = |\mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_\varkappa|_{\mathfrak{H}} \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

für alle Werthe von $H_1 \cdots H_r$ identisch, so ist zugleich identisch:

$$(20)\qquad |\varphi f|_H = |\varphi f|_{\mathfrak{H}},$$

welche Functionen von $H_1 \cdots H_r$ auch φ und f sein mögen. Umgekehrt ist klar, dass aus dem Bestehen von (20) das Bestehen der Gleichungen (18) folgt, dass die eine Gleichung (20) mit dem Systeme (18) äquivalent ist. Insbesondere bestehen nun auch die r symbolischen Gleichungen:

$$(21)\qquad |\mathfrak{H}_i f|_H = |\mathfrak{H}_i f|_{\mathfrak{H}} \qquad (i = 1 \cdots r),$$

deren Inbegriff ebenfalls mit dem Inbegriff aller Gleichungen (18) äquivalent ist. Die Gleichungen (21) aber lassen sich mit Benutzung der Symbole:

$$B_i f = \sum_{\varkappa s}^{1\cdots r} c_{i\varkappa s} H_s \frac{\partial f}{\partial H_s} = |H_i f|_H$$

$$\mathfrak{B}_i f = \sum_{\varkappa s}^{1\cdots r} c_{i\varkappa s} \mathfrak{H}_s \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{H}_s} = |\mathfrak{H}_i f|_{\mathfrak{H}}$$

folgendermassen schreiben:

$$(22)\qquad \sum_{1}^{r}{}^{j} g_{ij} B_j f = \mathfrak{B}_i f \qquad (i = 1 \cdots r).$$

Also erhalten wir das

Theorem 58. *Genügen die* r^3 *Constanten* $c_{i\varkappa s}$ *den Gleichungen:*

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_1^r{}^{\nu} \{c_{i\varkappa\nu}c_{\nu js} + c_{\varkappa j\nu}c_{\nu is} + c_{ji\nu}c_{\nu\varkappa s}\} = 0 \\ &c_{i\varkappa s} + c_{\varkappa is} = 0 \\ &(i, \varkappa, j, s = 1 \cdots r) \end{aligned}\right.$$

und gestatten die beiden Gleichungensysteme:

$$H_{m+j} - w_{m+j}(H_1 \cdots H_m) = 0 \qquad (j = 1 \cdots r - m)$$

und:

$$H_{\alpha_{m+j}} - \mathfrak{w}_{m+j}(H_{\alpha_1} \cdots H_{\alpha_m}) = 0 \qquad (j = 1 \cdots r - m),$$

deren keines eine lineare homogene Relation zwischen $H_1 \cdots H_r$ *nach sich zieht, die* $r + 1$ *infinitesimalen Transformationen:*

$$Bf = H_1\frac{\partial f}{\partial H_1} + \cdots + H_r\frac{\partial f}{\partial H_r},$$

$$B_i f = \sum_{\varkappa s}^{1 \cdots r} c_{i\varkappa s} H_s \frac{\partial f}{\partial H_\varkappa} \qquad (i = 1 \cdots r),$$

so entsprechen jedem dieser beiden Gleichungensysteme gewisse r*-gliedrige Gruppen von homogenen Berührungstransformationen mit der Zusammensetzung* $c_{i\varkappa s}$. *Es sind nun die Gruppen, welche dem einen Gleichungensysteme entsprechen, mit denen, welche dem andern entsprechen, dann und nur dann durch homogene Berührungstransformation ähnlich*), wenn es eine lineare homogene Transformation von der Gestalt:*

$$(23)\qquad \mathfrak{H}_i = \sum_1^r{}^{j} g_{ij} H_j \qquad (i = 1 \cdots r)$$

giebt, welche das eine Gleichungensystem in das andere überführt und welche überdies ergiebt:

$$(22\text{a})\qquad \sum_{\varkappa s}^{1 \cdots r} c_{i\varkappa s}\,\mathfrak{H}_s \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{H}_\varkappa} = \mathfrak{B}_i f = \sum_1^r{}^{j} g_{ij} B_j f \qquad (i = 1 \cdots r).$$

Will man daher untersuchen, ob die beiden Gleichungensysteme (7) und (7′) zu Gruppen führen, welche mit einander ähnlich sind, so hat man zunächst alle Transformationen:

$$(23)\qquad \mathfrak{H}_i = \sum_1^r{}^{j} g_{ij} H_j \qquad (i = 1 \cdots r)$$

---

*) Vgl. Lie, Berichte der Kgl. Sächsischen Ges. d. W., Februar 1888.

zu bestimmen, welche die Gleichungen (22a) befriedigen und sodann zu untersuchen, ob es unter den gefundenen Transformationen eine giebt, welche das Gleichungsystem: $H_{m+j} - w_{m+j} = 0$ in das System: $\mathfrak{H}_{\alpha_{m+j}} - \mathfrak{w}_{m+j} = 0$ überführt. Man findet alle Transformationen (23), welche die Gleichungen (22a) befriedigen, indem man zuerst alle Transformationen (23) bestimmt, *welche die Gruppe:* $B_1 f \cdots B_r f$ *invariant lassen* und alsdann unter den gefundenen Transformationen diejenigen aufsucht, welche die Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ in der Weise invariant lassen, dass die Gleichungen (22a) erfüllt sind. Diese letzten Transformationen bilden offenbar ihrerseits eine Gruppe.

Den Inbegriff aller r-gliedrigen Gruppen von homogenen Berührungstransformationen mit der Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ theilen wir in eine Reihe von *Typen* ein, indem wir zwei Gruppen, die durch homogene Berührungstransformation ähnlich sind, stets zu demselben Typus rechnen, zwei Gruppen aber, die nicht ähnlich sind, zu verschiedenen Typen.

Durch die Entwickelungen des gegenwärtigen Paragraphen sind wir nun in den Stand gesetzt, festzustellen, wieviele verschiedene Typen von r-gliedrigen Gruppen von homogenen Berührungstransformationen mit der Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ unterschieden werden müssen. Wir bestimmen zunächst alle Gleichungensysteme in $H_1 \cdots H_r$, welche die $r+1$ infinitesimalen Transformationen: Bf, $B_1 f \cdots B_r f$ gestatten und keine lineare Relation zwischen den H nach sich ziehen. Ferner suchen wir die allgemeinste Transformation:

$$(23) \qquad \mathfrak{H}_i = \sum_1^r {}^j g_{ij} H_j \qquad (i = 1 \cdots r),$$

vermöge deren die Gleichungen:

$$(22) \qquad \mathfrak{B}_i f = \sum_1^r {}^j g_{ij} B_j f \qquad (i = 1 \cdots r)$$

bestehen. Sodann theilen wir die gefundenen Gleichungensysteme in verschiedene Klassen ein, indem wir zwei Gleichungensysteme stets dann und nur dann in dieselbe Klasse rechnen, wenn das eine durch eine der gefundenen Transformationen (23) in das andere übergeführt werden kann. Die Zahl der so gefundenen Klassen ist gleich der Zahl der zu unterscheidenden Gruppentypen. Es ist klar, dass die Bestimmung dieser Zahl nur ausführbare Operationen erfordert.

Wünscht man für jeden Gruppentypus eine Gruppe zu haben, welche ihm angehört, so hat man nur aus allen besprochenen Klassen von Gleichungensystemen je ein Gleichungensystem auszuwählen und nach Anleitung von § 87 eine zugehörige Gruppe zu bestimmen.*)

§ 91.

Als einfache Anwendung der Ergebnisse des vorigen Paragraphen wollen wir untersuchen, was für verschiedene Typen solcher Gruppen von homogenen Berührungstransformationen es giebt, welche mit der viergliedrigen Gruppe:

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 f = x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_3 f = x^2\frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_4 f = \frac{\partial f}{\partial y}$$

von Punkttransformationen der Ebene x, y gleichzusammengesetzt sind.

Es soll werden:

$$(H_1 H_2)_{xp} = H_1, \quad (H_1 H_3)_{xp} = 2H_2, \quad (H_2 H_3)_{xp} = H_3$$
$$(H_1 H_4)_{xp} = (H_2 H_4)_{xp} = (H_3 H_4)_{xp} = 0$$

also bekommen wir:

$$B_1 f = H_1\frac{\partial f}{\partial H_2} + 2H_2\frac{\partial f}{\partial H_3}$$

$$B_2 f = -H_1\frac{\partial f}{\partial H_1} + H_3\frac{\partial f}{\partial H_3}$$

$$B_3 f = -2H_2\frac{\partial f}{\partial H_1} - H_3\frac{\partial f}{\partial H_2}$$

$$B_4 f = 0$$

$$Bf = H_1\frac{\partial f}{\partial H_1} + H_2\frac{\partial f}{\partial H_2} + H_3\frac{\partial f}{\partial H_3} + H_4\frac{\partial f}{\partial H_4}.$$

Die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & H_1 & 2H_2 & 0 \\ -H_1 & 0 & H_3 & 0 \\ -2H_2 & -H_3 & 0 & 0 \\ H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \end{vmatrix}$$

verschwindet identisch, also haben die Gleichungen:

$$Bf = 0, \quad B_\varkappa f = 0 \qquad (\varkappa = 1 \cdots 4)$$

eine Lösung gemein, nämlich die folgende: $\frac{H_2{}^2 - H_1 H_3}{H_4{}^2}$. Hieraus ergiebt sich, dass die ∞^1 Gleichungensysteme:

---

*) Im nächsten Abschnitte kommen wir auf diese Untersuchungen zurück und leiten einige weitere allgemeine Resultate ab. Vgl. Abschnitt I, Kap. 14, sowie Archiv for Mathematik, Bd. I, Christiania 1876.

(24) $$H_2^2 - H_1 H_3 = C \,.\, H_4^2$$

bei der Gruppe: Bf, $B_1f \cdots B_4f$ invariant bleiben. Das sind aber, wie man sich durch Nullsetzen der dreireihigen Unterdeterminanten jener Determinante überzeugen kann, die einzigen invarianten Gleichungensysteme, aus denen keine lineare homogene Relation zwischen $H_1 \cdots H_4$ folgt.

Es ist nun zu untersuchen, wie sich die Gleichungensysteme (24) verhalten, wenn man Transformationen von der Form:

(25) $$\mathfrak{H}_i = \sum_1^4 {}^j g_{ij} H_j \qquad (i = 1 \cdots 4)$$

ausführt, welche die Gleichungen:

$$\mathfrak{B}_i f = \sum_1^4 {}^j g_{ij} B_j f \qquad (i = 1 \cdots 4)$$

befriedigen. Dazu brauchen wir aber nicht die allgemeinste Transformation (25) von dieser Beschaffenheit aufzustellen, es genügt vielmehr zu bemerken, dass jede Transformation von der Form:

(26) $$\mathfrak{H}_1 = H_1, \quad \mathfrak{H}_2 = H_2, \quad \mathfrak{H}_3 = H_3, \quad \mathfrak{H}_4 = c \,.\, H_4$$

die Gleichungen:

$$\mathfrak{B}_1 f = B_1 f, \quad \mathfrak{B}_2 f = B_2 f, \quad \mathfrak{B}_3 f = B_3 f, \quad \mathfrak{B}_4 f = c \,.\, B_4 f$$

nach sich zieht und dass man, solange $C \neq 0$ ist, durch eine Transformation von der Form (26) jedes Gleichungensystem (24) in jedes andere überführen kann.

Hiernach sind zwei Fälle zu unterscheiden: erstens $C \neq 0$ und zweitens $C = 0$. Im ersten Falle kann man stets erreichen, dass $C = 1$ wird. Den beiden Gleichungensystemen:

$$H_2^2 - H_1 H_3 = 0$$

und:

$$H_2^2 - H_1 H_3 = H_4^2$$

entsprechen zwei verschiedene Gruppentypen. Als Repräsentanten des einen kann man die Gruppe:

$$H_1 = p_1, \quad H_2 = x_1 p_1, \quad H_3 = x_1^2 p_1, \quad H_4 = p_2$$

wählen, als Repräsentanten des andern die Gruppe:

$$H_1 = x_2 p_1, \quad H_2 = \frac{x_1 p_1 - x_2 p_2}{2}, \quad H_3 = - x_1 p_2$$

$$H_4 = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2}{2}.$$

Hierzu kommen endlich alle Gruppen von der gegebenen Zusammensetzung, deren charakteristische Functionen keine Relationen erfüllen. Als Repräsentanten dieser, unter einander ähnlichen, Gruppen wählen wir die Gruppe: x_2p_1, $\frac{1}{2}(x_1p_1 - x_2p_2)$, x_1p_2, x_3p_3.

§ 92.

Mit wenigen Worten wollen wir jetzt noch auf ein Problem eingehen, welches mit dem in § 87 erledigten sehr grosse Aehnlichkeit hat, aber doch ein selbständiges Interesse beanspruchen darf.

Wir wollen nämlich jetzt Gruppen von Berührungstransformationen in den Veränderlichen z, $x_1\cdots$, $p_1\cdots$ betrachten, aber nur solche, deren infinitesimale Transformationen die besondere Gestalt:

$$(\varphi f)_{xp} + \left(\sum p_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial p_\nu} - \varphi\right)\frac{\partial f}{\partial z}$$

besitzen, wo φ eine Function der x, p allein bedeutet. Ist: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ eine r-gliedrige Gruppe von dieser Beschaffenheit und: $\psi_1(x', p') \cdots \psi_r(x', p')$ eine andere, so betrachten wir diese beiden Gruppen als nicht von einander verschieden, wenn sie durch eine Berührungstransformation von der Form:

$$z' = z + \Omega(x, p), \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \tag{27}$$
$$(i = 1, 2 \cdots)$$

mit einander ähnlich sind (vgl. S. 325). Dabei fassen wir das Wort „ähnlich“ in seinem allgemeineren Sinne, wir verlangen also nicht, dass die beiden Gruppen: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ und: $\psi_1(x', p') \cdots \psi_r(x', p')$ gleichviele unabhängige Veränderliche enthalten.

Ist: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ eine r-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen, so bestehen nach S. 324, Satz 7 Relationen von der Gestalt:

$$(\varphi_i \varphi_\varkappa)_{xp} = \sum_1^r {}_s\, c_{i\varkappa s} \varphi_s(x, p) \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r).$$

Es giebt dann immer eine Functionengruppe mit $m \leqq r$ Gliedern, welcher alle r Functionen: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ angehören. Nehmen wir nämlich der Einfachheit wegen an, dass $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_m(x, p)$ von einander unabhängig sind, während: $\varphi_{m+1}(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ sich folgendermassen ausdrücken:

$$\varphi_{m+j}(x, p) \equiv \Omega_{m+j}(\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_m(x, p)) \qquad (j = 1 \cdots r - m),$$

so bestimmen $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_m(x, p)$ offenbar eine m-gliedrige Functionengruppe, der auch $\varphi_{m+1}(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ angehören. Betrachten wir ferner die Grössen $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ als Veränderliche, so können wir genau so wie in § 85 nachweisen, dass das Gleichungensystem:

$$\varphi_{m+j} - \Omega_{m+j}(\varphi_1 \cdots \varphi_m) = 0 \qquad (j = 1 \cdots r - m)$$

die lineare homogene Gruppe:

$$B_i f = \sum_{\varkappa s}^{1 \cdots r} c_{i\varkappa s} \varphi_s \frac{\partial f}{\partial \varphi_\varkappa} \qquad (i = 1 \cdots r)$$

in den Veränderlichen $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ gestattet.

Diese beiden Bemerkungen bilden hier wie damals den Ausgangspunkt der Untersuchung. Wir können uns daher kurz fassen.

Ist eine Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ gegeben und werden alle diejenigen r-gliedrigen Gruppen: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ von Berührungstransformationen gesucht, welche diese Zusammensetzung haben, so bilde man zunächst in den Veränderlichen $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ die r linearen homogenen infinitesimalen Transformationen: $B_1 f \cdots B_r f$. Sodann suche man in $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ alle Gleichungensysteme, welche die Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ gestatten, schliesse jedoch alle solchen aus, welche eine lineare homogene Gleichung: $c_1 \varphi_1 + \cdots + c_r \varphi_r = 0$ zwischen den φ nach sich ziehen*). Ist:

$$\varphi_{m+j} = \Omega_{m+j}(\varphi_1 \cdots \varphi_m) \qquad (j = 1 \cdots r - m)$$

eines der gefundenen Gleichungensysteme, so bestimme man nach Anleitung von Kapitel 13 in hinreichend vielen Veränderlichen: $x_1, p_1, x_2, p_2 \cdots$ eine m-gliedrige Functionengruppe: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_m(x, p)$, für welche die Relationen:

$$(\varphi_\alpha \varphi_\beta)_{xp} = \sum_1^m {}_\mu\, c_{\alpha\beta\mu} \varphi_\mu + \sum_1^{r-m} {}_j\, c_{\alpha\beta,\, m+j} \Omega_{m+j}(\varphi_1 \cdots \varphi_m)$$
$$(\alpha, \beta = 1 \cdots m)$$

bestehen. Berechnet man dann noch: $\varphi_{m+1}(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ aus den Relationen: $\varphi_{m+j} = \Omega_{m+j}(\varphi_1 \cdots \varphi_m)$, so ist: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ eine r-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen, welche die gegebene Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ besitzt. Ist endlich: $\psi_1(x', p') \cdots \psi_r(x', p')$ irgend eine andere r-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen, welche zu dem Gleichungensysteme: $\varphi_{m+j} - \Omega_{m+j} = 0$ gehört, so ist

*) Man kann auch ganz von z absehen und alle r-gliedrigen Gruppen von der Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ suchen, welche von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen von der Gestalt: $(\varphi_1 f)_{xp} \cdots (\varphi_r f)_{xp}$ erzeugt sind; in diesem Falle muss man auch solche invariante Gleichungensysteme ausschliessen, welche eine Relation von der Form: $c_1 \varphi_1 + \cdots + c_r \varphi_r = \text{const.}$ zur Folge haben.

dieselbe stets durch eine Berührungstransformation von der Form (27) mit der Gruppe: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_r(x, p)$ ähnlich (S. 325, Theor. 54).

Solche Betrachtungen, wie wir sie in § 88 durchführten, lassen sich natürlich auch hier anstellen, wir wollen jedoch nicht darauf eingehen, sondern nur bemerken, erstens, dass die Bestimmung aller Gleichungensysteme, welche die Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ gestattet, eine ausführbare Operation ist und zweitens, dass die Entwickelungen des § 88 unmittelbar die ausgezeichneten Functionen der Functionengruppe: $\varphi_1(x, p) \cdots \varphi_m(x, p)$ liefern, selbstverständlich durch ausführbare Operationen.

Endlich bleiben die Entwickelungen des § 90 fast Wort für Wort auch in dem gegenwärtigen Falle gültig.

Das in § 89 behandelte Beispiel wollen wir unter den jetzigen etwas andern Voraussetzungen wieder aufnehmen; wir wollen also alle dreigliedrigen Gruppen: $\varphi_1(x, p)$, $\varphi_2(x, p)$, $\varphi_3(x, p)$ von Berührungstransformationen bestimmen, welche die Zusammensetzung:

$$(\varphi_1 \varphi_2)_{xp} = \varphi_1, \quad (\varphi_1 \varphi_3)_{xp} = 2\varphi_2, \quad (\varphi_2 \varphi_3)_{xp} = \varphi_3$$

haben.

Die infinitesimalen Transformationen $B_i f$ lauten:

$$B_1 f = \varphi_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} + 2\varphi_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_3}$$

$$B_2 f = -\varphi_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} + \varphi_3 \frac{\partial f}{\partial \varphi_3}$$

$$B_3 f = -2\varphi_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} - \varphi_3 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}.$$

Das einzige Gleichungensystem, welches bei ihnen invariant bleibt und keine lineare homogene Relation zwischen den φ nach sich zieht, hat die Gestalt:

$$\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_3 = \text{const.} = a^2. \tag{28}$$

Der hier auftretende Parameter a kann nicht fortgeschafft werden, denn jede Substitution:

$$\varphi_i' = \sum_1^3 {}^j\, g_{ij} \varphi_j \qquad (i = 1 \cdots 3),$$

welche zur Folge hat:

$$B_i' f = \sum_1^3 {}^j\, g_{ij} B_j f \qquad (i = 1 \cdots 3),$$

ergiebt gleichzeitig:

$$\varphi_2'^2 - \varphi_1' \varphi_3' = \varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_3.$$

Das folgt ohne Weiteres daraus, dass die grösste lineare homogene Gruppe, in welcher die Gruppe $B_i f$ invariant ist, die Form:

$$B_1 f, B_2 f, B_3 f, \quad Bf = \varphi_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} + \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} + \varphi_3 \frac{\partial f}{\partial \varphi_3}$$

besitzt.

Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden.

In dem ersten sind die Functionen: φ_1, φ_2, φ_3 durch keine Relation verknüpft. Alle hierher gehörigen Gruppen sind mit der Gruppe:

$$\varphi_1 = p_1 + p_2, \quad \varphi_2 = x_1 p_1 + x_2 p_2, \quad \varphi_3 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2$$

durch eine Berührungstransformation (27) ähnlich.

Im zweiten Falle besteht zwischen φ_1, φ_2, φ_3 die Relation (28), es muss daher werden:

$$(\varphi_1 \varphi_2)_{xp} = \varphi_1, \quad \varphi_3 = \frac{\varphi_2^2 - a^2}{\varphi_1}.$$

Eine zweigliedrige Functionengruppe: $\varphi_1(x, p)$, $\varphi_2(x, p)$, welche der Bedingung: $(\varphi_1 \varphi_2)_{xp} = \varphi_1$ genügt, ist: $\varphi_1 = p_1$, $\varphi_2 = x_1 p_1$; wir ziehen jedoch die folgende Functionengruppe:

$$\varphi_1 = p_1, \quad \varphi_2 = x_1 p_1 + \alpha \tag{29}$$

vor, weil wir durch Verfügung über die willkürliche Constante α einen bequemeren Ausdruck für φ_3 erhalten, als wenn wir: $\varphi_1 = p_1$, $\varphi_2 = x_1 p_1$ setzten. Aus den Gleichungen (29) ergiebt sich nun:

$$\varphi_3 = \frac{x_1^2 p_1^2 + 2\alpha x_1 p_1 + \alpha^2 - a^2}{p_1},$$

also, wenn wir α gleich a wählen:

$$\varphi_3 = x_1^2 p_1 + 2 a x_1.$$

Eine hierher gehörige Gruppe ist daher:

$$\varphi_1 = p_1, \quad \varphi_2 = x_1 p_1 + a, \quad \varphi_3 = x_1^2 p_1 + 2 a x_1.$$

Jede andere Gruppe: $\varphi_1(x, p)$, $\varphi_2(x, p)$, $\varphi_3(x, p)$, bei welcher die Relation: $\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_3 = a^2$ besteht, ist mit der eben geschriebenen durch eine Berührungstransformation von der Gestalt (27) ähnlich.

Kapitel 21.

Reducible und irreducible Gruppen von Berührungstransformationen.

Führt man in eine Gruppe G von Berührungstransformationen eines m-fach ausgedehnten Raumes vermöge einer Berührungstransformation neue Veränderliche ein, so erhält man eine neue Gruppe, welche mit der ursprünglichen ähnlich ist. Giebt es nun unter den Gruppen von Berührungstransformationen, welche mit der Gruppe G ähnlich sind, solche, welche aus lauter Punkttransformationen des m-fach ausgedehnten Raumes bestehen, so soll G *reducibel* heissen, im entgegengesetzten Falle nennen wir es *irreducibel.*

Wir beschäftigen uns in dem gegenwärtigen Kapitel mit den Begriffen der Reducibilität und Irreducibilität der Gruppen von Berührungstransformationen, namentlich entwickeln wir Kriterien dafür, ob eine vorgelegte Gruppe von Berührungstransformationen reducibel ist oder irreducibel. Um uns mit der nöthigen Schärfe ausdrücken zu können, betrachten wir zunächst die Gruppen von homogenen Berührungstransformationen und darnach die Gruppen von Berührungstransformationen in $z,\ x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n$.

§ 93.

In den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n,\ p_1 \cdots p_n$ sei eine r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen vorgelegt. Führen wir in diese Gruppe durch eine homogene Berührungstransformation:

$$(1) \qquad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

die neuen Veränderlichen: $x_1' \cdots x_n',\ p_1' \cdots p_n'$ ein, so erhalten wir eine neue Gruppe von homogenen Berührungstransformationen; die charakteristischen Functionen: $K_1(x', p') \cdots K_r(x', p')$ dieser neuen Gruppe ergeben sich, indem man einfach: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ vermöge der Gleichungen (1) durch die x', p' ausdrückt (vgl. Satz 5, S. 306). Soll nun die neue Gruppe: $K_1(x', p') \cdots K_r(x', p')$ aus lauter Punkttransformationen in den Veränderlichen $x_1' \cdots x_n'$ bestehen, so ist nach S. 265 nothwendig und hinreichend, dass die r Functionen: $K_1(x', p') \cdots K_r(x', p')$, welche sowieso homogen von erster Ordnung in den p' sind, ausserdem noch *lineare* Functionen von $p_1' \cdots p_n'$ werden:

$$K_j(x', p') = \sum_1^n {}^i\, \eta_{ji}(x_1' \cdots x_n') \,.\, p_i' \qquad (j = 1 \cdots r).$$

Der Definition, welche wir in der Einleitung des Kapitels von den Begriffen Reducibilität und Irreducibilität gegeben haben, können wir nunmehr, soweit es sich um Gruppen von *homogenen* Berührungstransformationen handelt, die folgende schärfere Fassung geben:

Eine r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ heisst reducibel, sobald es eine homogene Berührungstransformation:

$$x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

giebt, bei welcher die charakteristischen Functionen: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ in lineare homogene Functionen von $p_1' \cdots p_n'$ übergehen:

$$H_\varkappa(x, p) = \sum_1^n {}^i \eta_{\varkappa i}(x_1' \cdots x_n') \cdot p_i' \qquad (\varkappa = 1 \cdots r);$$

sie heisst irreducibel, wenn es keine derartige Berührungstransformation giebt.

Ist die r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen reducibel und ist:

$$(1) \qquad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

eine homogene Berührungstransformation, welche die $H_\varkappa(x, p)$ in lineare homogene Functionen der p' überführt:

$$H_\varkappa(x, p) = \sum_1^n {}^i \eta_{\varkappa i}(x_1' \cdots x_n') \cdot p_i' \qquad (\varkappa = 1 \cdots r),$$

so bestehen vermöge (1) Relationen von der Form:

$$(H_\varkappa X_\nu)_{xp} = \left(\sum_1^n {}^i \eta_{\varkappa i}(x') p_i', \; x_\nu' \right)_{x'p'} = \eta_{\varkappa\nu}(x_1' \cdots x_n')$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r; \quad \nu = 1 \cdots n),$$

es ist also identisch:

$$(H_\varkappa X_\nu)_{xp} \equiv \eta_{\varkappa\nu}(X_1 \cdots X_n) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r; \quad \nu = 1 \cdots n);$$

ausserdem ist noch zu bemerken, dass $X_1(x, p) \cdots X_n(x, p)$ homogene Functionen nullter Ordnung der p sind und dass sie paarweise in Involution liegen, es folgt das daraus, dass die Gleichungen (1) eine homogene Berührungstransformation darstellen.

Giebt es nun umgekehrt n solche unabhängige Functionen: $\Xi_1 \cdots \Xi_n$ von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, welche in den p homogen von nullter Ordnung sind, paarweise in Involution liegen und endlich $r \cdot n$ Relationen von der Gestalt:

(2) $$(H_\varkappa \Xi_\nu)_{xp} = \Phi_{\varkappa\nu}(\Xi_1 \cdots \Xi_n) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r;\ \nu = 1 \cdots n)$$

identisch erfüllen, so ist die Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ reducibel.

In der That, unter den gemachten Voraussetzungen lassen sich und zwar ohne Integration (vgl. S. 137, Satz 15) n homogene Functionen erster Ordnung: $\Pi_1(x, p) \cdots \Pi_n(x, p)$ bestimmen, welche so beschaffen sind, dass: $\Xi_1 \cdots \Xi_n$, $\Pi_1 \cdots \Pi_n$ in den kanonischen Beziehungen stehen. Nach Theorem 14, S. 137 ist dann:

(3) $$x_i' = \Xi_i(x, p), \quad p_i' = \Pi_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

eine homogene Berührungstransformation. Führen wir vermöge derselben in die Gleichungen (2) die neuen Veränderlichen x', p' ein, so bekommen wir:

$$(H_\varkappa \Xi_\nu)_{xp} = (H_\varkappa x_\nu')_{x'p'} = \frac{\partial H_\varkappa}{\partial p_\nu'} = \Phi_{\varkappa\nu}(x_1' \cdots x_n') \qquad (\varkappa = 1 \cdots r;\ \nu = 1 \cdots n).$$

Erinnern wir uns schliesslich, dass die $H_\varkappa$ homogene Functionen erster Ordnung der p_i' werden müssen, so erhalten wir sofort:

$$\sum_1^n {}_\nu\, p_\nu' \frac{\partial H_\varkappa}{\partial p_\nu'} = H_\varkappa = \sum_1^n {}_\nu\, \Phi_{\varkappa\nu}(x_1' \cdots x_n') p_\nu' \qquad (\varkappa = 1 \cdots r).$$

Demnach geht die Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ bei Ausführung der Berührungstransformation (3) in eine Gruppe von Punkttransformationen über und ist daher wirklich reducibel.

Damit ist das Theorem gewonnen:

Theorem 59. *Soll eine r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen reducibel sein, soll sie also durch eine homogene Berührungstransformation:*

$$x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

mit einer Gruppe von Punkttransformationen in den Veränderlichen $x_1' \cdots x_n'$ ähnlich sein, so ist nothwendige und hinreichende Bedingung, dass es n unabhängige Functionen: $\Xi_1 \cdots \Xi_n$ von:

$$x_1 \cdots x_n, \quad \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}$$

giebt, welche paarweise in Involution liegen und $r.n$ Relationen von der Gestalt:

$$(H_\varkappa \Xi_\nu)_{xp} = \Phi_{\varkappa\nu}(\Xi_1 \cdots \Xi_n) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r;\ \nu = 1 \cdots n)$$

erfüllen. Giebt es n solche Functionen, so giebt es eine ganz *bestimmte homogene Berührungstransformation von der Form:*

$$x_i' = \Xi_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

und diese führt die Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ *in die Gruppe von Punkttransformationen:*

$$\sum_1^n {}_\nu \, \Phi_{\varkappa\nu}(x_1' \cdots x_n') p_\nu' \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

über.

Das erhaltene Kriterium für die Reducibilität einer Gruppe von homogenen Berührungstransformationen lässt sich in anderer Weise formuliren.

Wir haben gefunden, dass die Gruppe $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen reducibel ist, wenn es n unabhängige homogene Functionen nullter Ordnung: $\Xi_1(x, p) \cdots \Xi_n(x, p)$ giebt, welche paarweise in Involution liegen und $r.n$ Relationen von der Form:

$$(H_\varkappa \Xi_\nu)_{xp} = \Phi_{\varkappa\nu}(\Xi_1 \cdots \Xi_n)$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r; \quad \nu = 1 \cdots n)$$

identisch befriedigen. Die Functionen: $\Xi_1(x, p) \cdots \Xi_n(x, p)$ aber sind Lösungen eines ganz bestimmten n-gliedrigen vollständigen Systems:

$$A_i f = \sum_1^n {}_\nu \left\{ \alpha_{i\nu}(x, p) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \beta_{i\nu}(x, p) \frac{\partial f}{\partial p_\nu} \right\} = 0$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

in den $2n$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ und dieses vollständige System gestattet nach Abschnitt I, Kapitel 8, Satz 1, S. 139 jede der infinitesimalen Transformationen: $(H_\varkappa f)_{xp}$ und demzufolge die ganze Gruppe: $(H_1 f)_{xp} \cdots (H_r f)_{xp}$.

Eine reducible Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ ist demnach dadurch charakterisirt, dass sie in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ ein n-gliedriges vollständiges System invariant lässt, dessen Lösungen in den p homogen von nullter Ordnung sind und ausserdem paarweise in Involution liegen. Es ist klar, dass dieses vollständige System die Gleichung:

$$p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial f}{\partial p_n} = 0$$

umfasst.

Wir können daher das in Theorem 59, S. 371 enthaltene Kriterium auch folgendermassen aussprechen:

Satz 1. *Eine r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$*

ist dann und nur dann reducibel, wenn es in diesen Veränderlichen ein n-gliedriges vollständiges System von der Form:

$$A_1 f = 0, \cdots A_{n-1} f = 0, \quad \sum_1^n i\, p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0$$

giebt, welches die r infinitesimalen Transformationen: $(H_1 f)_{xp} \cdots (H_r f)_{xp}$ gestattet und ausserdem so beschaffen ist, dass seine Lösungen paarweise in Involution liegen.

Betrachten wir für einen Augenblick $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ als gleichberechtigte Veränderliche, so können wir jede Gruppe $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen als eine Gruppe von Punkttransformationen des $2n$-fach ausgedehnten Raumes $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ auffassen. Eine solche Gruppe von Punkttransformationen ist (vgl. S. 305 f.) immer imprimitiv, da sie die lineare partielle Differentialgleichung:

$$p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial f}{\partial p_n} = 0$$

invariant lässt. Sie kann aber noch in anderer Weise imprimitiv sein; das ist sie insbesondere sicher dann, wenn die Berührungstransformationsgruppe: $H_1 \cdots H_r$ reducibel ist. Darin liegt ein nothwendiges Kriterium für die Reducibilität einer homogenen Berührungstransformationsgruppe, dasselbe ist aber nach dem Vorangehenden keineswegs hinreichend.

Durch den Satz 1 ist die Beantwortung der Frage, ob eine vorgelegte Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen reducibel ist, auf die Untersuchung der vollständigen Systeme zurückgeführt, welche bei der Gruppe: $(H_1 f)_{xp} \cdots (H_r f)_{xp}$ invariant bleiben. Die Bestimmung dieser vollständigen Systeme verlangt allerdings im Allgemeinen Integration (vgl. Abschnitt I, das Kapitel 25 „Ueber Differentialinvarianten“ § 132), jedoch wollen wir nicht unerwähnt lassen, dass man immer ohne Integration entscheiden kann, ob ein vollständiges System vorhanden ist, welches die in Satz 1 beschriebene Beschaffenheit hat. Mit andern Worten: Man kann immer durch ausführbare Operationen entscheiden, ob eine vorgelegte r-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen reducibel ist oder nicht. Den Beweis hierfür übergehen wir.

Endlich wollen wir noch eine dritte, begriffliche Formulirung für unser Kriterium der Reducibilität einer Gruppe von homogenen Berührungstransformationen entwickeln. Zu diesem Zwecke schicken wir einige allgemeine Bemerkungen voraus.

Es sei:

$$U_\varkappa f = \sum_1^n i\, v_{\varkappa i}(u_1 \cdots u_n) \frac{\partial f}{\partial u_i} \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

in den Veränderlichen $u_1 \cdots u_n$ eine r-gliedrige Gruppe von Punkttransformationen, welche eine Schaar:

(4) $$\Omega_\mu(u_1 \cdots u_n,\; l_1 \cdots l_h) = 0 \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

von ∞^h verschiedenen Mannigfaltigkeiten des Raumes $u_1 \cdots u_n$ invariant lässt, es gebe also (vgl. Abschn. I, Kap. 23, S. 467) in den Veränderlichen $l_1 \cdots l_h$ r infinitesimale Transformationen:

$$L_\varkappa f = \sum_1^h {}_\tau\, \lambda_{\varkappa\tau}(l_1 \cdots l_h) \frac{\partial f}{\partial l_\tau} \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

von solcher Beschaffenheit, dass das Gleichungensystem (4) in den $n + h$ Veränderlichen $u_1 \cdots u_n$, $l_1 \cdots l_h$ die r infinitesimalen Transformationen:

$$X_1 f + L_1 f, \;\cdots\; X_r f + L_r f$$

gestattet. Führt man nun an Stelle der u neue Veränderliche: $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_n$ ein, so erhält man aus der Gruppe: $U_1 f \cdots U_r f$ eine neue Gruppe:

$$\mathfrak{U}_\varkappa f = \sum_1^n {}_i\, \bar{\lambda}_{\varkappa i}(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_n) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{u}_i} \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

und aus (4) ein neues Gleichungensystem:

(4′) $$\mathfrak{O}_\mu(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_n,\; l_1 \cdots l_h) = 0 \qquad (\mu = 1 \cdots m),$$

welches wiederum eine Schaar von ∞^h verschiedenen Mannigfaltigkeiten darstellt. *Diese neue Schaar von Mannigfaltigkeiten gestattet die Gruppe:* $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$, denn das Gleichungensystem (4′) in den Veränderlichen: $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_n$, $l_1 \cdots l_h$ gestattet augenscheinlich die r infinitesimalen Transformationen:

$$\mathfrak{U}_1 f + L_1 f, \;\cdots\; \mathfrak{U}_r f + L_r f$$

in diesen Veränderlichen.

Das Gesagte soll jetzt auf reducible Gruppen von homogenen Berührungstransformationen angewendet werden.

In den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ sei irgend eine reducible Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen vorgelegt und es sei:

(5) $$x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

eine homogene Berührungstransformation, welche diese Gruppe in die aus lauter Punkttransformationen bestehende Gruppe:

(6) $$\sum_1^n {}_i\, \eta_{\varkappa i}(x_1' \cdots x_n') p_i' \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

überführt.

Die Gruppe (6) lässt die Schaar aller ∞^n Punkte:

(7) $$x_1' = a_1, \cdots x_n' = a_n$$

des Raumes $x_1' \cdots x_n'$ invariant. Führt man nun rückwärts vermöge der Berührungstransformation (5) die alten Veränderlichen x, p ein, so geht die Gruppe (6) in die ursprüngliche Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ über. Zugleich verwandelt sich die Schaar (7) aller Punkte des Raumes $x_1' \cdots x_n'$ in eine Schaar:

(7') $$X_1(x, p) = a_1, \cdots X_n(x, p) = a_n$$

von ∞^n Element-M_{n-1} des Raumes $x_1 \cdots x_n$ (vgl. S. 168, Satz 7) und aus den oben gemachten Bemerkungen erhellt, dass der Inbegriff dieser ∞^n Element-M_{n-1} bei der Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ invariant bleibt. Ueberdies liegt auf der Hand, dass die Elemente x, p der ∞^n Element-M_{n-1} (7') keine Relation befriedigen; die willkürlichen Constanten $a_1 \cdots a_n$ lassen sich ja aus den Gleichungen (7') nicht fortschaffen.

Soll daher eine r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ reducibel sein, so muss es eine bei der Gruppe invariante Schaar von ∞^n Element-M_{n-1} des Raumes $x_1 \cdots x_n$ geben, und zwar eine Schaar, deren Elemente x, p keine Relation befriedigen.

Diese Bedingung ist nothwendig aber auch hinreichend, denn ist sie erfüllt, so brauchen wir die betreffende Schaar von ∞^n Element-M_{n-1} nur durch eine geeignete homogene Berührungstransformation in die Schaar aller Punkte des n-fach ausgedehnten Punktraumes überzuführen, was nach Satz 8, S. 170 immer möglich ist. Dabei geht die Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ in eine neue über, welche die Schaar aller Punkte invariant lässt, also in eine Gruppe, die aus lauter Punkttransformationen besteht.

Damit haben wir den

Satz 2. *Eine r-gliedrige Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ von homogenen Berührungstransformationen in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ ist dann und nur dann reducibel, wenn sie eine solche Schaar von ∞^n Element-M_{n-1} des Raumes $x_1 \cdots x_n$ invariant lässt, deren Elemente x, p keine Relation von der Form: $F(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0$ erfüllen.*

Der vorstehende Satz ist nur eine neue (dritte) Formulirung des in Theorem 59, S. 371 enthaltenen Kriteriums. Jede Schaar von ∞^n Element-M_{n-1} des Raumes $x_1 \cdots x_n$, deren Elemente keine Relation erfüllen, wird nämlich (vgl. S. 110) durch n unabhängige Gleichungen von der Form:

(8) $$N_1(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_1, \cdots N_n(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_n$$

dargestellt, wo $N_1 \cdots N_n$ homogene Functionen nullter Ordnung der p sind und paarweise in Involution liegen, während $a_1 \cdots a_n$ willkürliche Constanten bezeichnen. Eine solche Schaar (8) aber gestattet dann und nur dann die Gruppe: $H_1(x, p) \cdots H_r(x, p)$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, die r infinitesimalen Transformationen: $(H_1 f)_{xp} \cdots (H_r f)_{xp}$, wenn $r \,.\, n$ Relationen von der Form:

$$(H_\varkappa N_\nu)_{xp} = \Phi_{\varkappa\nu}(N_1 \cdots N_n) \quad (\varkappa = 1 \cdots r;\ \nu = 1 \cdots n)$$

identisch bestehen, denn nur in diesem Falle giebt es r infinitesimale Transformationen von der Form:

$$(H_\varkappa f) + \sum_1^n {}_i\, \alpha_{\varkappa i}(a_1 \cdots a_n) \frac{\partial f}{\partial a_i} \qquad (\varkappa = 1 \cdots r),$$

welche das Gleichungensystem (8) in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, $a_1 \cdots a_n$ invariant lassen (Abschn. I, S. 467 und 468). Der Satz 2 ist somit wirklich nur eine andere Form des Theorems 59.

§ 94.

Es ist leicht, die Ergebnisse des vorigen Paragraphen auf Gruppen von Berührungstransformationen in z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ zu übertragen.

Eine r-gliedrige Gruppe:

$$B_\varkappa f = [W_\varkappa f]_{zxp} - W_\varkappa \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

von Berührungstransformationen in den Veränderlichen: z, $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$ heisst *reducibel*, wenn sie durch eine Berührungstransformation:

$$z' = Z(z, x, p), \quad x_i' = X_i(z, x, p), \quad p_i' = P_i(z, x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

in eine Gruppe von Berührungstransformationen übergeführt werden kann, welche aus lauter Punkttransformationen des Raumes z', $x_1' \cdots x_n'$ besteht. Ist eine solche Ueberführung nicht möglich, so heisst sie *irreducibel.*

Soll die Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ *reducibel* sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass *sie eine Schaar von* ∞^{n+1} *Element-*M_n *des Raumes* z, $x_1 \cdots x_n$ *invariant lässt, deren Elemente* z, x, p *keine Relation von der Form:* $\Omega(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = 0$ *erfüllen.* Eine solche Schaar von Element-M_n wird durch $n + 1$ Gleichungen von der Form:

$$\mathsf{Z}_i(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) = a_i \qquad (i = 1 \cdots n + 1)$$

dargestellt, wo die Z_i von einander unabhängig sind und paarweise in Involution liegen, so dass die Ausdrücke: $[\mathsf{Z}_i \mathsf{Z}_\varkappa]$ alle identisch verschwinden. Das können wir auch so ausdrücken:

Theorem 60. *Eine r-gliedrige Gruppe:*

$$B_\varkappa f = [W_\varkappa f]_{zxp} - W_\varkappa \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

von Berührungstransformationen in den Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ *ist dann und nur dann reducibel, wenn es in diesen Veränderlichen ein n-gliedriges vollständiges System giebt, welches die Gruppe gestattet und dessen Lösungen paarweise in Involution liegen.*

Man kann natürlich auch sagen: *die Gruppe:* $B_1 f \cdots B_r f$ *ist dann und nur dann reducibel, wenn es* $n + 1$ *unabhängige Functionen* $\mathsf{Z}_1 \cdots \mathsf{Z}_{n+1}$ *von* $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ *giebt, welche paarweise in Involution liegen und* $r(n + 1)$ *Relationen von der Form:*

$$B_\varkappa \mathsf{Z}_i = \Phi_{\varkappa i}(\mathsf{Z}_1 \cdots \mathsf{Z}_{n+1})$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r;\quad i = 1 \cdots n + 1)$$

identisch befriedigen.

Ist die Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ in den Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ transitiv, so enthält ihre grösste Untergruppe, welche ein Element z, x, p von allgemeiner Lage invariant lässt, $r - 2n - 1$ Parameter. Soll nun die Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ reducibel sein, so ist jedenfalls nothwendig, dass die eben besprochene Untergruppe in einer $(r - n)$-gliedrigen Untergruppe steckt, doch ist das noch nicht hinreichend.

Ist in den x, p eine Berührungstransformationsgruppe von der Form:

$$(\varphi_\varkappa f) + \left(\sum_1^n {}^i p_i \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial p_i} - \varphi_\varkappa\right) \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

vorgelegt, so erkennt man leicht, dass dieselbe dann und nur dann durch eine Berührungstransformation von der Form:

$$z' = z + \Omega(x, p), \quad x_\varkappa' = X_\varkappa(x, p), \quad p_\varkappa' = P_\varkappa(x, p)$$

in eine Gruppe von Punkttransformationen von der Gestalt:

$$\sum {}^i \xi_{\varkappa i}(x_1' \cdots x_n') \frac{\partial f}{\partial x_i'} + \zeta_\varkappa(x_1' \cdots x_n', z') \frac{\partial f}{\partial z'}$$

übergeführt werden kann, wenn es n unabhängige Functionen:

$$X_\varkappa(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) \qquad (\varkappa = 1 \cdots n)$$

von den x, p giebt, welche paarweise in Involution liegen und überdies $r . n$ Relationen von der Form:

$$(\varphi_\varkappa X_i) = \xi_{\varkappa i}(X_1 \cdots X_n) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r;\quad i = 1 \cdots n)$$

erfüllen; alsdann hängen die $\zeta_\varkappa(x', z')$ offenbar nur von $x_1' \cdots x_n'$ ab.

Kapitel 22.

Erweiterung der Berührungstransformationen und der Gruppen von solchen. Differentialinvarianten derartiger Gruppen.

Bei einer Berührungstransformation:

$$(1)\qquad z' = Z(z, x, p), \quad x_i' = X_i(z, x, p), \quad p_i' = P_i(z, x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ geht nach S. 156 f. jede Element-M_n dieses Raumes wieder in eine Element-M_n über. Dabei zeigen aber, wie in Kapitel 6, §§ 42, 43 auseinandergesetzt worden ist, die verschiedenen Element-M_n ein verschiedenes Verhalten. Hat man nämlich eine Element-M_n, aus deren Gleichungen gerade $m > 1$ unabhängige Relationen zwischen $z, x_1 \cdots x_n$ allein folgen, so erhält man bei Ausführung einer Berührungstransformation (1) im Allgemeinen keine Element-M_n, deren analytischer Ausdruck gerade m unabhängige Relationen zwischen $z', x_1' \cdots x_n'$ allein liefert. Hat man dagegen eine Element-M_n, für welche die vorhin definirte Zahl m gerade gleich 1 ist, also eine Element-M_n von der besonderen Form:

$$(2)\qquad z - F(x_1 \cdots x_n) = 0, \quad p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \cdots \quad p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0,$$

so verwandelt sich dieselbe bei der Berührungstransformation (1) im Allgemeinen in eine Element-M_n, aus deren Gleichungen blos eine Relation zwischen $z', x_1' \cdots x_n'$ allein hervorgeht.

Die Elment-M_n von der Form (2) *sind also die einzigen des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$, welche sich bei Ausführung einer Berührungstransformation* (1) *im Allgemeinen in Element-M_n von der analogen Form:*

$$(2')\qquad z' - \Phi(x_1' \cdots x_n') = 0, \quad p_1' - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1'} = 0, \quad \cdots \quad p_n' - \frac{\partial \Phi}{\partial x_n'} = 0$$

verwandeln. In Kapitel 6, S. 161 f. haben wir überdies gesehen, dass die Element-M_n (2) bei der Berührungstransformation (1) dann und nur dann nicht in eine Element-M_n von der Form (2′) übergeht, wenn die Function $F(x_1 \cdots x_n)$ eine gewisse partielle Differentialgleichung befriedigt. Mit Benutzung der Bezeichnungen:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_\nu} = p_{i\nu} \qquad (i, \nu = 1 \cdots n)$$

und der Abkürzungen:

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_\nu} + p_i \frac{\partial X_i}{\partial z} + \sum_1^n {}^j\, p_{j\nu} \frac{\partial X_i}{\partial p_j} = \frac{d X_i}{d x_\nu} \qquad (i, \nu = 1 \cdots n)$$

lässt sich diese Differentialgleichung folgendermassen schreiben

$$(3)\qquad D = \begin{vmatrix} \frac{dX_1}{dx_1} & \cdot & \frac{dX_n}{dx_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dX_1}{dx_n} & \cdot & \frac{dX_n}{dx_n} \end{vmatrix} = 0.$$

Sie ist (vgl. S. 164) im Allgemeinen von der zweiten Ordnung, von der ersten nur dann, wenn $X_1 \cdots X_n$ sämmtlich von $p_1 \cdots p_n$ frei sind; in diesem Falle ist aber zugleich Z von den p frei, und die Berührungstransformation (1) ist nichts anderes als eine erweiterte Punkttransformation des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$. Wir erinnern schliesslich noch daran, dass die Determinante D niemals identisch verschwindet.

Betrachtet man daher in den Gleichungen (1) das z als eine beliebige Function von $x_1 \cdots x_n$, indem man nur solche Functionen ausschliesst, welche der Differentialgleichung: $D = 0$ genügen, und betrachtet man $p_1 \cdots p_n$ als die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung von z nach $x_1 \cdots x_n$, so definiren die Gleichungen (1) das z' als Function von $x_1' \cdots x_n'$, und $p_1' \cdots p_n'$ werden die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung von z' nach $x_1' \cdots x_n'$. Unsere Berührungstransformation bestimmt die p_x' als Functionen von $z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$.

Offenbar liegt es nahe, zu vermuthen, dass die partiellen Differentialquotienten m-ter Ordnung von z' nach $x_1' \cdots x_n'$ auch für $m > 1$ durch $z, x_1 \cdots x_n$ und durch die partiellen Differentialquotienten erster bis m-ter Ordnung des z nach $x_1 \cdots x_n$ ausgedrückt werden können. Wir werden jetzt nachweisen, dass diese Vermuthung der Wahrheit entspricht.

§ 95.

Die partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_\nu} = p_{i\nu}, \quad \frac{\partial^2 z'}{\partial x_i' \partial x_\nu'} = p_{i\nu}' \qquad (i, \nu = 1 \cdots n)$$

sind bezüglich durch die Gleichungen:

$$(4)\qquad dp_i = \sum_1^n {}^\nu\, p_{i\nu} dx_\nu \qquad (i = 1 \cdots n)$$

und:

$$(4')\qquad dp_i' = \sum_1^n {}^\nu\, p_{i\nu}' dx_\nu' \qquad (i = 1 \cdots n)$$

definirt. Setzen wir in (4′) die aus (1) folgenden Werthe von $p_1' \cdots p_n'$, $x_1' \cdots x_n'$ ein, so ergiebt sich:

$$dP_i = \sum_1^n {}^\nu p_{i\nu}' dX_\nu \qquad (i = 1 \cdots n),$$

ausführlicher geschrieben:

$$\frac{\partial P_i}{\partial z} dz + \sum_1^n {}^j \frac{\partial P_i}{\partial x_j} dx_j + \sum_1^n {}^j \frac{\partial P_i}{\partial p_j} dp_j =$$

$$= \sum_1^n {}^\nu p_{i\nu}' \left\{ \frac{\partial X_\nu}{\partial z} dz + \sum_1^n {}^j \frac{\partial X_\nu}{\partial x_j} dx_j + \sum_1^n {}^j \frac{\partial X_\nu}{\partial p_j} dp_j \right\}.$$

Werden hierin dz, $dp_1 \cdots dp_n$ vermöge der Gleichungen:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

und (4) durch $dx_1 \cdots dx_n$ ausgedrückt, so entstehen n Gleichungen von der Form:

$$\sum_1^n {}^\nu U_{i\nu} dx_\nu = 0 \qquad (i = 1 \cdots n),$$

deren jede wiederum in n verschiedene Gleichungen zerfällt, denn $dx_1 \cdots dx_n$ sind ja vollkommen willkürlich. Wir bekommen also zur Bestimmung der $p_{i\varkappa}'$ die folgenden n^2 Gleichungen:

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial P_i}{\partial z} + \sum_1^n {}^\varkappa p_{\varkappa j} \frac{\partial P_i}{\partial p_\varkappa} = \sum_1^n {}^\nu p_{i\nu}' \left\{ \frac{\partial X_\nu}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial X_\nu}{\partial z} + \sum_1^n {}^\varkappa p_{\varkappa j} \frac{\partial X_\nu}{\partial p_\varkappa} \right\}$$
$$(i, j = 1 \cdots n),$$

welche sich mit Benutzung der auf S. 378 angewendeten Abkürzungen folgendermassen schreiben lassen:

$$(5) \qquad \frac{dP_i}{dx_j} = \sum_1^n {}^\nu p_{i\nu}' \frac{dX_\nu}{dx_j} \qquad (i, j = 1 \cdots n).$$

Da die Determinante D nicht identisch verschwindet, lassen sich diese Gleichungen augenscheinlich nach den n^2 Grössen $p_{i\varkappa}'$ auflösen. Scheinbar ergeben sich dabei für $p_{i\nu}'$ und $p_{\nu i}'$ zwei verschiedene Werthe, sobald i von ν verschieden ist, aber auch nur scheinbar. Es muss ja $p_{i\nu}'$ gleich $p_{\nu i}'$ sein und diese Gleichheit muss identisch stattfinden, andernfalls bestände ja eine Gleichung zwischen den z, x_i, p_i, $p_{i\nu}$ und das ist ausgeschlossen, weil wir z als eine beliebige Function von $x_1 \cdots x_n$ betrachten.

Hiermit ist nachgewiesen, dass sich vermöge der Gleichungen (1) einer Berührungstransformation die $p_{i\nu}'$ als Functionen der z, x_i, p_i, $p_{i\nu}$ darstellen lassen:

$$p'_{i\nu} = P_{i\nu}(z, \ x_1 \cdots x_n, \ p_1 \cdots p_n, \ p_{11} \cdots p_{nn})$$
$$(i, \nu = 1 \cdots n).$$

Hierbei ist $P_{i\nu} \equiv P_{\nu i}$. *Verhalten sich die Functionen* $Z, X_1 \cdots X_n, P_1 \cdots P_n$ *in der Umgebung von* $z^0, x_1^0 \cdots x_n^0, p_1^0 \cdots p_n^0$ *regulär und verschwindet die Determinante* D *für das Werthsystem:* $z^0, x_i^0, p_i^0, p_{i\nu}^0$ *nicht, so verhalten sich offenbar auch die* $P_{i\nu}$ *in der Umgebung von:* $z^0, x_i^0, p_i^0, p_{i\nu}^0$ *regulär.*

Jede Berührungstransformation (1) transformirt demnach ausser den z, x, p auch noch die partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung von z und zwar durch die *erweiterte* Transformation:

(6) $$z' = Z, \quad x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i, \quad p_{i\nu}' = P_{i\nu}$$
$$(i, \nu = 1 \cdots n).$$

Diese erweiterte Transformation kann auch definirt werden als diejenige Transformation in den Veränderlichen $z, x_i, p_i, p_{i\nu}$, welche die Form:

(7) $$z' = Z, \quad x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i, \quad p_{i\nu}' = \Pi_{i\nu}$$
$$(i, \nu = 1 \cdots n)$$

besitzt und welche das System der Pfaffschen Gleichungen:

(8) $$dz - \sum_1^n {}^{\nu} p_\nu dx_\nu = 0, \quad dp_i - \sum_1^n {}^{\nu} p_{i\nu} dx_\nu = 0$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

invariant lässt. Soll nämlich die Transformation (7) das System (8) invariant lassen, so müssen ausser der bekannten Identität:

$$dZ - \sum_1^n {}^{\nu} P_\nu dX_\nu = \varrho(z, x, p) \cdot \left(dz - \sum_1^n {}^{\nu} p_\nu dx_\nu \right)$$

auch noch n Identitäten von der Form:

$$dP_i - \sum_1^n {}^{\nu} \Pi_{i\nu} dX_\nu = \sigma_i \cdot \left(dz - \sum_1^n {}^{\nu} p_\nu dx_\nu \right) +$$
$$+ \sum_1^n {}^{j} \tau_{ij} \left(dp_j - \sum_1^n {}^{\nu} p_{j\nu} dx_\nu \right)$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

bestehen; aus diesen Bedingungen ergeben sich zunächst eindeutig bestimmte Werthe für die σ_i und τ_{ij} und sodann erhält man für die $\Pi_{i\nu}$ eine Reihe von Gleichungen, welche zeigen, dass jedes $\Pi_{i\nu} = P_{i\nu}$ ist.

Ebenso wie die Differentialquotienten zweiter Ordnung von z werden auch diejenigen dritter Ordnung bei der Berührungstransformation (1) transformirt. Setzt man:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_i \partial x_\mu \partial x_\nu} = p_{i\mu\nu},$$

so ist:

$$dP_{i\mu} = \sum_1^n {}^\nu p'_{i\mu\nu} dX_\nu \qquad (i, \mu = 1 \cdots n).$$

Entwickelt man diese Gleichung unter Berücksichtigung der Relationen (8) und zerlegt sie dann wegen der Willkürlichkeit von $dx_1 \cdots dx_n$ in je n Gleichungen, so findet man:

$$\frac{\partial P_{i\mu}}{\partial x_\tau} + p_\tau \frac{\partial P_{i\mu}}{\partial z} + \cdots + p_{nn\tau} \frac{\partial P_{i\mu}}{\partial p_{nn}} = \sum_1^n {}^\nu p'_{i\mu\nu} \frac{dX_\nu}{dx_\tau}$$
$$(i, \mu, \tau = 1 \cdots n),$$

woraus sich, weil D nicht verschwindet, alle $p'_{i\mu\nu}$ als Functionen von den z, x_i, p_i, $p_{i\nu}$, $p_{i\mu\nu}$ bestimmen lassen. Dass die scheinbar verschiedenen Werthe, welche man so für $p'_{i\mu\nu}$, $p'_{i\nu\mu}$ u. s. w. erhält, mit einander identisch sein müssen, ist klar; denn sonst beständen zwischen den z, x_i, p_i, $p_{i\nu}$, $p_{i\mu\nu}$ Relationen, was unmöglich der Fall sein kann, so lange z eine beliebige Function von $x_1 \cdots x_n$ ist. Findet man: $p'_{i\nu\mu} = P_{i\nu\mu}$, so ist:

(9) $$z' = Z, \quad x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i, \quad p'_{i\nu} = P_{i\nu}, \quad p'_{i\mu\nu} = P_{i\mu\nu}$$
$$(i, \mu, \nu = 1 \cdots n)$$

diejenige Transformation, welche angiebt, wie die dritten Differentialquotienten von z bei (1) transformirt werden. Diese erweiterte Transformation (9) ist offenbar dadurch vollständig definirt, dass sie das System der Pfaffschen Gleichungen:

(10) $$\begin{cases} dz - \sum_1^n {}^\tau p_\tau dx_\tau = 0, \quad dp_i - \sum_1^n {}^\tau p_{i\tau} dx_\tau = 0 \\ dp_{i\nu} - \sum_1^n {}^\tau p_{i\nu\tau} dx_\tau = 0 \\ (i, \nu = 1 \cdots n) \end{cases}$$

invariant lässt.

In dieser Weise fortfahrend, kann man bis zu Differentialquotienten von beliebiger Ordnung gelangen und findet immer, dass die Differentialquotienten m-ter Ordnung von z' sich durch z, $x_1 \cdots x_n$ und die Differentialquotienten erster bis mit m-ter Ordnung von z ausdrücken lassen. Man erhält dabei eine Anzahl von erweiterten Transformationen, deren jede dadurch charakterisirt ist, dass sie ein gewisses System von Pfaffschen Gleichungen invariant lässt. *Die Gleichungen dieser erweiterten*

Transformationen verhalten sich für jedes Werthsystem: z^0, x_i^0, p_i^0, $p_{i\nu}^0$ *regulär, welches* D *nicht zum Verschwinden bringt.*

Demnach gilt das

Theorem 61. *Jede Berührungstransformation:*

$$(1)\qquad z' = Z(z, x, p), \quad x_i' = X_i(z, x, p), \quad p_i' = P_i(z, x, p) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ *transformirt ausser den ersten Differentialquotienten* $p_1 \cdots p_n$ *des* z *nach den* x *auch alle Differentialquotienten höherer Ordnung von* z. *Berücksichtigt man alle Differentialquotienten von* z *bis zu einer bestimmten Ordnung, so erhält man aus* (1) *eine erweiterte Transformation, welche dadurch definirt ist, dass sie ein gewisses System von Pfaffschen Gleichungen invariant lässt.*

§ 96.

Die Gleichungen:

$$(11)\qquad \begin{cases} z' = Z(z, x, p; a_1 \cdots a_r), \quad x_i' = X_i(z, x, p; a), \\ p_i' = P_i(z, x, p; a) \\ (i = 1 \cdots n) \end{cases}$$

mögen eine r-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ darstellen. Wir fügen zu ihnen solche Gleichungen:

$$(12)\qquad p_{i\nu}' = P_{i\nu}(z, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n, p_{11} \cdots p_{nn}; a_1 \cdots a_r) \qquad (i, \nu = 1 \cdots n)$$

hinzu, dass (11) und (12) zusammengenommen Transformationen darstellen, welche das System der Pfaffschen Gleichungen:

$$(8)\qquad dz - \sum_1^n{}^{\nu} p_\nu dx_\nu = 0, \quad dp_i - \sum_1^n{}^{\nu} p_{i\nu} dx_\nu = 0 \qquad (i = 1 \cdots n)$$

invariant lassen. Ausserdem bilden wir noch die Gleichungen:

$$(13)\qquad \begin{cases} z'' = Z(z', x', p'; b_1 \cdots b_r), \quad x_i'' = X_i(z', x', p'; b) \\ p_i'' = P_i(z', x', p'; b), \quad p_{i\nu}'' = P_{i\nu}(z', x', p', p_{11}' \cdots p_{nn}'; b) \\ (i, \nu = 1 \cdots n). \end{cases}$$

Führen wir nun zuerst die Transformation (11), (12) aus und alsdann (13), so erhalten wir unter den gemachten Voraussetzungen eine Transformation von der Gestalt:

$$(14)\qquad \begin{cases} z'' = Z(z, x, p; c_1 \cdots c_r), \quad x_i'' = X_i(z, x, p; c) \\ p_i'' = P_i(z, x, p; c), \quad p_{i\nu}'' = Q_{i\nu}(z, x, p, p_{11} \cdots p_{nn}; a, b) \\ (i, \nu = 1 \cdots n), \end{cases}$$

in welcher die c gewisse Functionen von $a_1 \cdots a_r$, $b_1 \cdots b_r$ bezeichnen. Es liegt auf der Hand, dass die Transformation (14) ihrerseits ebenfalls das System der Pfaffschen Gleichungen (8) invariant lässt, folglich besitzt die Function $Q_{i\nu}$ die Form: $P_{i\nu}(z, x, p \cdots; c)$, das heisst: die ∞^r Transformationen: (11), (12), welche aus den Transformationen der Gruppe (11) durch Erweiterung entstanden sind, bilden eine r-gliedrige Transformationsgruppe. Diese *erweiterte* Gruppe ist mit der ursprünglichen Gruppe (11) gleichzusammengesetzt, denn sie hat augenscheinlich dieselbe Parametergruppe wie diese.

Die gefundene erweiterte Gruppe können wir wiederum durch die Hinzunahme der Differentialquotienten dritter Ordnung von z erweitern und so fort. Kurz wir haben das

Theorem 62. *Bei jeder r-gliedrigen Gruppe:*

$$(11) \qquad \begin{cases} z' = Z(z, x, p; a_1 \cdots a_r), \quad x_i' = X_i(z, x, p; a_1 \cdots a_r) \\ p_i' = P_i(z, x, p; a_1 \cdots a_r) \\ (i = 1 \cdots n) \end{cases}$$

von Berührungstransformationen des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ werden ausser den Veränderlichen z, x, p auch noch die Differentialquotienten zweiter, dritter, $\cdots$ N-ter Ordnung von z nach den x durch eine Gruppe transformirt, welche mit der ursprünglichen Gruppe (11) *gleichzusammengesetzt ist.**)

Es sei wiederum:

$$(11) \qquad \begin{cases} z' = Z(z, x, p; a_1 \cdots a_r), \quad x_i' = X_i(z, x, p; a), \\ p_i' = P_i(z, x, p; a) \\ (i = 1 \cdots n) \end{cases}$$

eine r-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ und zwar sei dieselbe von den r unabhängigen infinitesimalen Berührungstransformationen:

$$B_\varkappa f = \zeta_\varkappa(z, x, p)\frac{\partial f}{\partial z} + \sum_1^n {}_\nu\, \xi_{\varkappa\nu}(z, x, p)\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \sum_1^n {}_\nu\, \pi_{\varkappa\nu}(z, x, p)\frac{\partial f}{\partial p_\nu}$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r)$$

erzeugt. Die identische Transformation der Gruppe (11) habe die Parameter: $a_1^0 \cdots a_r^0$ und es seien die Forderungen der SS. 14—17 und 74 des ersten Abschnitts erfüllt.

Unter diesen Voraussetzungen bestehen nach Abschnitt I, S. 33, Theorem 3 vermöge (11) Gleichungen von der Gestalt:

*) Lie, Abhandlungen der Kgl. Sächs. Ges. d. W. Bd. XIV, Nr. 12.

$$(15)\quad \begin{cases} \zeta_\varkappa(z', x', p') = \sum_1^r {}_j\, \alpha_{\varkappa j}(a) \cdot \dfrac{\partial z'}{\partial a_j} \\ \xi_{\varkappa i}(z', x', p') = \sum_1^r {}_j\, \alpha_{\varkappa j}(a) \cdot \dfrac{\partial x_i'}{\partial a_j} \\ \pi_{\varkappa i}(z', x', p') = \sum_1^r {}_j\, \alpha_{\varkappa j}(a) \cdot \dfrac{\partial p_i'}{\partial a_j} \\ (\varkappa = 1 \cdots r;\quad i = 1 \cdots n), \end{cases}$$

wo die Determinante der $\alpha_{\varkappa j}(a)$ für: $a_1 = a_1^0, \cdots a_r = a_r^0$ nicht verschwindet.

Ist nun:

$$(16)\quad \begin{cases} z' = Z(z, x, p; a),\quad x_i' = X_i(z, x, p; a),\quad p_i' = P_i(z, x, p; a) \\ p_{i\nu}' = P_{i\nu}(z, x, p, p_{11} \cdots p_{nn}; a) \\ (i, \nu = 1 \cdots n) \end{cases}$$

die zu (11) gehörige erweiterte Gruppe, so bestehen vermöge (16) Gleichungen von der Form:

$$(17)\quad \begin{cases} \bar{\zeta}_\varkappa(z', x', p', p_{11}' \cdots p_{nn}') = \sum_1^r {}_j\, \bar{\alpha}_{\varkappa j}(a) \cdot \dfrac{\partial z'}{\partial a_j} \\ \bar{\xi}_{\varkappa i}(z', x', p', p_{11}' \cdots p_{nn}') = \sum_1^r {}_j\, \bar{\alpha}_{\varkappa j}(a) \cdot \dfrac{\partial x_i'}{\partial a_j} \\ \bar{\pi}_{\varkappa i}(z', x', p', p_{11}' \cdots p_{nn}') = \sum_1^r \bar{\alpha}_{\varkappa j}(a) \cdot \dfrac{\partial p_i'}{\partial a_j} \\ (\varkappa = 1 \cdots r;\quad i = 1 \cdots n) \end{cases}$$

$$(17')\quad \pi_{\varkappa i\nu}(z', x', p', p_{11}' \cdots p_{nn}') = \sum_1^r \bar{\alpha}_{\varkappa j}(a) \cdot \frac{\partial p_{i\nu}'}{\partial a_j}$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r;\quad i, \nu = 1 \cdots n).$$

Aus (17) geht hervor, dass die $\bar{\zeta}_\varkappa$, $\bar{\xi}_{\varkappa i}$, $\bar{\pi}_{\varkappa i}$ nur von den z', x', p' abhängen, nicht von $p_{11}' \cdots p_{nn}'$, und da die Functionen $\zeta_\varkappa$, $\xi_{\varkappa i}$, $\pi_{\varkappa i}$, $\alpha_{\varkappa j}(a)$ durch die Gleichungen (15) eindeutig bestimmt sind, so ergiebt sich, weil die Gleichungen (15) und (17) in derselben Weise gebildet sind:

$$\bar{\zeta}_\varkappa = \zeta_\varkappa,\quad \bar{\xi}_{\varkappa j} = \xi_{\varkappa j},\quad \bar{\pi}_{\varkappa j} = \pi_{\varkappa j},\quad \bar{\alpha}_{\varkappa j}(a) = \alpha_{\varkappa j}(a)$$
$$(\varkappa, j = 1 \cdots r).$$

In Folge dessen verschwindet die Determinante der $\bar{\alpha}_{\varkappa j}(a)$ für: $a_1 = a_1^0$, $\cdots a_r = a_r^0$ ebenfalls nicht und wir können daher (Abschn. I, S. 74) aus den Gleichungen (17), (17′) schliessen, dass die erweiterte Gruppe (16) ihrerseits von den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$\zeta_\varkappa \frac{\partial f}{\partial z} + \sum_1^n {}^i \xi_{\varkappa i} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n {}^i \pi_{\varkappa i} \frac{\partial f}{\partial p_i} +$$
$$+ \sum_1^n {}^i \sum_1^i {}^\nu \pi_{\varkappa i \nu} \frac{\partial f}{\partial p_{i\nu}}$$

erzeugt ist; diese infinitesimalen Transformationen aber haben die Gestalt:

$$B_\varkappa^{(1)} f = B_\varkappa f + \sum_1^n {}^i \sum_1^i {}^\nu \pi_{\varkappa i \nu} \frac{\partial f}{\partial p_{i\nu}}$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r).$$

Die erweiterte Gruppe (16) *ist also von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugt, welche aus den infinitesimalen Transformationen der ursprünglichen Gruppe* (11) *durch Erweiterung entstehen.*

Um die $B_\varkappa^{(1)} f$ wirklich berechnen zu können, erinnern wir daran, dass das System der Pfaffschen Gleichungen:

$$(8) \qquad dz - \sum_1^n {}^\nu p_\nu dx_\nu = 0, \quad dp_i - \sum_1^n {}^\nu p_{i\nu} dx_\nu = 0$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

alle endlichen und in Folge dessen auch alle infinitesimalen Transformationen der erweiterten Gruppe (16) gestattet. Wir schliessen hieraus, dass Relationen von der Gestalt:

$$B_\varkappa^{(1)} \left(dp_i - \sum_1^n {}^\nu p_{i\nu} dx_\nu \right) = \sigma_{\varkappa i} \left(dz - \sum_1^n {}^\nu p_\nu dx_\nu \right) +$$
$$+ \sum_1^n {}^j \tau_{\varkappa i j} \left(dp_j - \sum_1^n {}^\nu p_{j\nu} dx_\nu \right)$$

bestehen. Die linken Seiten dieser Relationen haben die Form:

$$d\pi_{\varkappa i} - \sum_1^n {}^\nu \pi_{\varkappa i \nu} dx_\nu - \sum_1^n {}^\nu p_{i\nu} d\xi_{\varkappa\nu}.$$

Durch Vergleichung der Coefficienten auf beiden Seiten findet man zunächst die $\sigma_{\varkappa i}$, $\tau_{\varkappa i j}$ und sodann erhält man:

$$(18) \qquad \pi_{\varkappa i \nu} = \frac{d\pi_{\varkappa i}}{dx_\nu} - \sum_1^n {}^j p_{ij} \frac{d\xi_{\varkappa j}}{dx_\nu}$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r; \quad i, \nu = 1 \cdots n),$$

wo wie gewöhnlich gesetzt ist:

$$\frac{\partial U}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial U}{\partial z} + \sum_1^n {}^\mu p_{\mu\nu} \frac{\partial U}{\partial p_\mu} = \frac{dU}{dx_\nu}.$$

Hiermit sind die $\pi_{\varkappa i\nu}$ bestimmt; dass die formell vorhandene Ueberbestimmung derselben nur scheinbar ist, liegt in der Natur der Sache, da die Grössen $z, x, p, p_{11} \cdots p_{nn}$ nicht durch Relationen verknüpft sind.

Zwischen den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$B_\varkappa^{(1)} f = B_\varkappa f + \sum_1^n {}_i \sum_1^i {}_\nu \pi_{\varkappa i\nu} \frac{\partial f}{\partial p_{i\nu}}$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r)$$

der erweiterten Gruppe (16) bestehen nun Relationen von der Gestalt:

$$(B_\varkappa^{(1)} B_j^{(1)}) = \sum_1^r {}_s c'_{i\varkappa s} B_s^{(1)} f$$
$$= \sum_1^r {}_s c'_{i\varkappa s} \left(B_s f + \sum_1^n {}_\tau \sum_1^\tau {}_\nu \pi_{s\tau\nu} \frac{\partial f}{\partial p_{\tau\nu}} \right),$$

andrerseits ist aber:

$$(B_\varkappa^{(1)} B_j^{(1)}) = (B_\varkappa B_j) + \sum_1^n {}_\tau \sum_1^\tau {}_\nu \psi_{\varkappa j\tau\nu} \frac{\partial f}{\partial p_{\tau\nu}}$$
$$= \sum_1^r {}_s c_{\varkappa js} B_s f + \sum_1^n {}_\tau \sum_1^\tau {}_\nu \psi_{\varkappa j\tau\nu} \frac{\partial f}{\partial p_{\tau\nu}},$$

also ergiebt sich:

$$\sum_1^r {}_s c_{\varkappa js} B_s f + \sum_1^n {}_\tau \sum_1^\tau {}_\nu \psi_{\varkappa j\tau\nu} \frac{\partial f}{\partial p_{\tau\nu}} =$$
$$= \sum_1^r {}_s c'_{\varkappa js} B_s f + \sum_1^n {}_\tau \sum_1^\tau {}_\nu \sum_1^r {}_s c'_{i\varkappa s} \pi_{s\tau\nu} \frac{\partial f}{\partial p_{\tau\nu}},$$

woraus sofort folgt: $c'_{\varkappa js} = c_{\varkappa js}$. Wir erkennen auch auf diese Weise, was wir schon oben (S. 384) sahen, dass die erweiterte Gruppe (16) mit der ursprünglichen Gruppe (11) gleichzusammengesetzt ist.

Genau dieselben Betrachtungen kann man natürlich anstellen, wenn man die Gruppe (11) durch Mitnahme aller Differentialquotienten von z bis zu einer gewissen Ordnung erweitert hat. Wir können daher sagen:

Theorem 63. *Ist die r-gliedrige Gruppe:*

$$(11) \quad z' = Z(z, x, p;\, a), \quad x'_i = X_i(z, x, p;\, a), \quad p'_i = P_i(z, x, p;\, a)$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

von Berührungstransformationen des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $B_1 f \cdots B_r f$ erzeugt, und wird dieselbe durch Mitnahme aller Differentialquotienten von z bis mit N-ter Ordnung erweitert, so ist auch die so entstehende erweiterte Gruppe von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$B_1^{(N-1)}f \cdots B_r^{(N-1)}f$$

erzeugt. Stehen die $B_\varkappa f$ in den Beziehungen:

$$(B_\varkappa B_j) = \sum_1^r {}_s\, c_{\varkappa js} B_s f \qquad (\varkappa, j = 1 \cdots r),$$

so stehen die $B_\varkappa^{(N-1)}f$ in denselben Beziehungen:

$$(B_\varkappa^{(N-1)} B_j^{(N-1)}) = \sum_1^r {}_s\, c_{\varkappa js} B_s^{(N-1)} f \qquad (\varkappa, j = 1 \cdots r).$$

Wählt man die Zahl N gross genug, so wird das vollständige System:

$$B_1^{(N-1)}f = 0, \cdots B_r^{(N-1)}f = 0$$

immer Lösungen besitzen, diese Lösungen sind dann Invarianten der erweiterten Gruppe: $B_1^{(N-1)}f \cdots B_r^{(N-1)}f$ und sind als *Differentialinvarianten* der ursprünglichen Gruppe von Berührungstransformationen: $B_1 f \cdots B_r f$ zu betrachten. Also:

Theorem 64. *Jede endliche continuirliche Gruppe von Berührungstransformationen des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ bestimmt eine unendliche Reihe von Differentialinvarianten, welche sich als die Lösungen vollständiger Systeme definiren lassen.**)

Kennt man die endlichen Gleichungen der ursprünglichen Gruppe, so kennt man auch die endlichen Gleichungen einer jeden zugehörigen erweiterten Gruppe; man kann daher alle Invarianten der letzteren, das heisst also alle Differentialinvarianten der ursprünglichen Gruppe ohne Integration bilden (vgl. Abschn. I, S. 218, Theorem 35). Unter allen Umständen aber lassen sich, wenn eine hinreichende Anzahl von Differentialinvarianten bekannt ist, beliebig viele neue durch Differentiationen herstellen. Doch soll auf diesen Punkt nicht weiter eingegangen werden.

Jedes Gleichungensystem, welches bei einer erweiterten Gruppe invariant bleibt, stellt natürlich ein System von Differentialgleichungen dar, welches die ursprüngliche Gruppe gestattet. Alle derartigen Systeme lassen sich nach den Regeln von Kap. 14 des Abschnitts I bestimmen und zwar ohne Integration, wenn die endlichen Gleichungen der ursprünglichen Gruppe vorliegen. Bei jedem einzelnen solchen Gleichungensysteme muss aber noch besonders untersucht werden, ob es die Integrabilitätsbedingungen erfüllt. Etwas Allgemeines lässt sich naturgemäss darüber nicht aussagen.

---

*) Lie, Abhandlungen der Kgl. Sächs. Ges. d. W., Bd. XIV, Nr. 12.

Abtheilung V.

Nachdem wir uns in der vorigen Abtheilung mit der allgemeinen Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen von Berührungstransformationen beschäftigt haben, werden wir in der gegenwärtigen Abtheilung einige besonders wichtige specielle Klassen von derartigen Gruppen behandeln.

Den Anfang machen wir mit der Bestimmung aller irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene. Wir werden eine sechs-, eine sieben- und eine zehngliedrige Gruppe dieser Art finden und werden zeigen, dass jede irreducible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene durch eine Berührungstransformation mit einer dieser drei Gruppen ähnlich ist. Insbesondere gelingt es uns die zehngliedrige Gruppe durch eine geeignete Berührungstransformation in diejenige Gruppe zu verwandeln, welche aus allen Berührungstransformationen der Ebene besteht, die Kreise in Kreise überführen. Ausserdem bestimmen wir die in der zehngliedrigen Gruppe enthaltenen grössten Untergruppen, unter denen sich die beiden irreducibeln Gruppen mit bezüglich sechs und sieben Parametern befinden (Kapitel 23 und 24).

Indem wir die angedeuteten Untersuchungen auf den Raum von n Dimensionen übertragen, finden wir zwar nicht alle irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen dieses Raumes, aber doch drei der wichtigsten unter ihnen. Namentlich ist zu bemerken, dass wir in jedem Raume von gegebener Dimensionenzahl eine *einfache* Gruppe dieser Art erhalten (Kapitel 25).

Endlich leiten wir in dem Schlusskapitel der Abtheilung (im Kapitel 26) einen merkwürdigen Satz ab, welcher für die Bestimmung gewisser Gruppen von Berührungstransformationen des n-fach ausgedehnten Raumes von grossem Werthe ist.

Kapitel 23.

Bestimmung aller irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene.

Wählen wir z, x als Coordinaten der Punkte einer Ebene und:

$$z,\ x,\ y = \frac{dz}{dx}$$

als die Coordinaten der Linienelemente, so sind nach Kapitel 1 die

Berührungstransformationen der betreffenden Ebene diejenigen Transformationen in z, x, y, welche die Pfaffsche Gleichung: $dz - y dx = 0$ invariant lassen.

Die Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene zerfallen in zwei Kategorien, sie sind nämlich entweder *reducibel* oder *irreducibel;* jene sind durch Berührungstransformationen mit Gruppen von (erweiterten) Punkttransformationen der Ebene ähnlich, diese nicht (vgl. Kap. 21). Da wir nun im dritten Abschnitt alle Gruppen von *Punkt*transformationen der Ebene bestimmen, *so dürfen wir uns hier auf die irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene beschränken.**)

§ 97.

Um die reducibeln Gruppen von vornherein ausschliessen zu können, müssen wir uns zunächst die Bedingungen vergegenwärtigen, unter denen eine vorgelegte Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene reducibel ist. Wir thun das, indem wir die Entwickelungen des Kapitels 21 auf den besonderen Fall der Ebene übertragen und dann noch einige Bemerkungen hinzufügen, welche sich gerade in diesem besonderen Falle darbieten.

Es seien:

$$B_\varkappa f = \xi_\varkappa(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \zeta_\varkappa(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial z} + \eta_\varkappa(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z. Diese Gruppe ist nach S. 376 dann und nur dann reducibel, wenn sich die ∞^3 Linienelemente der Ebene in ∞^2 solche Element-M_1 anordnen lassen, deren Inbegriff bei der Gruppe invariant bleibt, während die einzelnen Element-M_1 des Inbegriffs unter einander vertauscht werden. Analytisch können wir die angegebene Bedingung für die Reducibilität der Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ folgendermassen aussprechen (vgl. S. 377): *Es ist nothwendig und hinreichend, dass zwei unabhängige Functionen: u und v von x, z, y existiren, welche in Involution liegen:*

$$(1) \qquad [uv] = \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial z}\right) \equiv 0$$

---

*) Die in diesem Kapitel abgeleiteten Resultate wurden zum ersten Male angegeben und bewiesen in den Abhandlungen „Ueber Gruppen von Transformationen" und „Theorie der Transformationsgruppen" von Sophus Lie, Göttinger Nachr. Decbr. 1874 und Archiv for Math. Bd. 3 und 4, Christiania 1878 und 1879.

und welche ausserdem $2r$ *Relationen von der Form:*

$$B_\varkappa u = \varphi_\varkappa(u, v), \quad B_\varkappa v = \chi_\varkappa(u, v) \tag{2}$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r)$$

befriedigen. Die Gleichungen: $u =$ const., $v =$ const. stellen dann eine bei der Gruppe invariante Schaar von ∞^2 Element-M_1 dar.

Auf Grund von S. 377 können wir auch sagen:

Unsere Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ *ist dann und nur dann reducibel, wenn sie eine lineare partielle Differentialgleichung:*

$$\alpha(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \gamma(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial z} + \beta(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

invariant lässt, von welcher irgend zwei unabhängige Lösungen in Involution liegen.

Es sei (3) eine lineare partielle Differentialgleichung, welche zwei unabhängige Lösungen u und v besitzt, die in Involution liegen. Dann ist einerseits identisch:

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$$

$$\alpha\frac{\partial v}{\partial x} + \gamma\frac{\partial v}{\partial z} + \beta\frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{\alpha}{\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}} = \frac{\gamma}{\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}} = \frac{\beta}{\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}}, \tag{4}$$

andrerseits haben wir wegen der Involutionsbeziehung zwischen u und v:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right) \equiv 0. \tag{5}$$

Hieraus ergiebt sich, dass die zwei ersten Nenner in den Gleichungen (4) entweder beide gleich Null sind oder beide von Null verschieden. Im ersten Falle ist nothwendig: $\alpha = \gamma = 0$, im zweiten ergiebt sich: $\gamma \equiv \alpha y$, in beiden Fällen hat mithin die Differentialgleichung (3) die Gestalt:

$$\alpha(x, z, y)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \beta(x, z, y)\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{3'}$$

wo natürlich α und β nicht gleichzeitig verschwinden dürfen.

Umgekehrt ist leicht zu sehen, dass zwei unabhängige Lösungen u und v einer Differentialgleichung von der Form (3′) stets in Involution liegen. Die Identitäten:

$$\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\beta\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0$$

$$\alpha\left(\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\beta\frac{\partial v}{\partial y}\equiv 0$$

haben nämlich, da α und β nicht beide verschwinden, augenscheinlich die Involutionsbeziehung (5) zwischen u und v zur Folge.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass der Satz gilt:

Satz 1. *Eine r-gliedrige Gruppe:*

$$B_\varkappa f=\xi_\varkappa(x,z,y)\frac{\partial f}{\partial x}+\zeta_\varkappa(x,z,y)\frac{\partial f}{\partial z}+\eta_\varkappa(x,z,y)\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$(\varkappa=1\cdots r)$$

von Berührungstransformationen der Ebene x, z ist dann und nur dann reducibel, wenn sie eine lineare partielle Differentialgleichung von der Form:

$$(3')\qquad \alpha(x,z,y)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\gamma(x,z,y)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

invariant lässt.

Eine reducible Gruppe: $B_1f\cdots B_rf$ von Berührungstransformationen kann insbesondere auch aus lauter (erweiterten) Punkttransformationen der Ebene x, z bestehen. Wie wir anmerken wollen, tritt dieser Fall dann und nur dann ein, wenn die Gruppe eine Differentialgleichung von der Form (3′) invariant lässt, in welcher die Function α verschwindet, eine Differentialgleichung also, deren Lösungen sämmtlich von y frei sind; denn nur unter dieser Voraussetzung lässt die Gruppe diejenige Schaar von ∞^2 Element-M_1 invariant, welche von allen Punkten der Ebene x, z gebildet wird. —

Dem Satze 1 können wir noch eine andere Fassung geben. Die lineare partielle Differentialgleichung:

$$(3)\qquad \alpha(x,z,y)\frac{\partial f}{\partial x}+\gamma(x,z,y)\frac{\partial f}{\partial z}+\beta(x,z,y)\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

und das simultane System:

$$(6)\qquad \frac{dx}{\alpha}=\frac{dz}{\gamma}=\frac{dy}{\beta}$$

sind nämlich mit einander invariant verknüpft, das heisst, jede Transformation in den Veränderlichen x, z, y, welche (3) invariant lässt, lässt auch (6) invariant und umgekehrt. Folglich können wir auch sagen:

Satz 2. *Soll eine r-gliedrige Gruppe:*

$$B_\varkappa f=\xi_\varkappa(x,z,y)\frac{\partial f}{\partial x}+\zeta_\varkappa(x,z,y)\frac{\partial f}{\partial z}+\eta_\varkappa(x,z,y)\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$(\varkappa=1\cdots r)$$

von Berührungstransformationen der Ebene x, z reducibel sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass sie ein simultanes System von der Form:

$$(7) \qquad \frac{dx}{\alpha(x, z, y)} = \frac{dz}{y \cdot \alpha(x, z, y)} = \frac{dy}{\beta(x, z, y)}$$

invariant lässt.

Endlich wollen wir noch den Satz beweisen:

Satz 3. *Eine irreducible Gruppe:*

$$B_\varkappa f = \xi_\varkappa(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \zeta_\varkappa(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial z} + \eta_\varkappa(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r)$$

von Berührungstransformationen der Ebene x, z lässt ausser der Gleichung: $dz - ydx = 0$ keine andere Pfaffsche Gleichung:

$$\lambda(x, z, y) \cdot dx + \nu(x, z, y) \cdot dz + \mu(x, z, y) \cdot dy = 0$$

invariant.

Liesse die Gruppe nämlich die beiden von einander verschiedenen Pfaffschen Gleichungen:

$$dz - ydx = 0, \qquad \lambda dx + \nu dz + \mu dy = 0$$

invariant, so liesse sie auch das von denselben bestimmte simultane System:

$$\frac{dx}{\mu} = \frac{dz}{y \cdot \mu} = \frac{dy}{-\lambda - y \cdot \nu}$$

invariant und wäre daher nach Satz 2 nicht irreducibel, was mit der Voraussetzung des zu beweisenden Satzes in Widerspruch stände.

§ 98.

Die Grössen x, z, y haben wir bis jetzt immer als Coordinaten der Linienelemente in der Ebene x, z aufgefasst, wir können sie aber auch als Punktcoordinaten in einem dreifach ausgedehnten Raume deuten. Das wollen wir jetzt thun und uns zunächst den Zusammenhang zwischen diesen beiden verschiedenen Auffassungen klar machen.

Jedem Linienelemente der Ebene x, z entspricht für die neue Auffassung im Raume x, z, y ein Punkt. Jeder Element-M_1 der Ebene x, z entspricht im Raume x, z, y eine die Pfaffsche Gleichung: $dz - ydx = 0$ befriedigende Curve, mag nun die betreffende Element-M_1 aus allen Elementen einer Curve oder aus allen Elementen eines Punktes der Ebene x, z bestehen. Umgekehrt entspricht jeder Curve des Raumes x, z, y, welche: $dz - ydx = 0$ befriedigt, eine Element-M_1 der Ebene x, z. Bezeichnen wir daher jede Curve des Raumes x, z, y, welche die Pfaffsche Gleichung: $dz - ydx = 0$ erfüllt, als eine Integralcurve dieser Gleichung, so können wir sagen: *Die Element-M_1 der Ebene x, z bilden sich im Raume x, z, y als die Integralcurven der Pfaffschen Gleichung: $dz - ydx = 0$ ab und umgekehrt* (vgl. S. 14).

Die Gleichung: $dz - ydx = 0$ ihrerseits hat für den Raum x, z, y eine sehr einfache geometrische Bedeutung. Sie ordnet nämlich jedem der ∞^3 Punkte x, z, y dieses Raumes ∞^1 Fortschreitungsrichtungen $dx : dy : dz$ zu, welche ein ebenes Büschel bilden. Der Inbegriff der so definirten ∞^3 Büschel von Richtungen ist augenscheinlich das vollständige geometrische Bild der Pfaffschen Gleichung: $dz - ydx = 0$.

Eine Curve des Raumes x, z, y befriedigt daher die Pfaffsche Gleichung: $dz - ydx = 0$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, sie ist eine Integralcurve dieser Gleichung, wenn in jedem Punkte der Curve die Richtung, welche von der zugehörigen Tangente der Curve bestimmt wird, in das dem Punkte zugeordnete Büschel von Richtungen hineinfällt.

Andrerseits stellt eine Berührungstransformation der Ebene x, z im Raume x, z, y eine Punkttransformation dar, welche den Inbegriff der besprochenen Büschel von Richtungen invariant lässt, und umgekehrt entspricht jeder Punkttransformation des Raumes x, z, y, welche den Inbegriff dieser Büschel invariant lässt, eine Berührungstransformation der Ebene x, z. Jede derartige Punkttransformation des Raumes x, z, y führt die Integralcurven der Pfaffschen Gleichung: $dz - ydx = 0$ wieder in Integralcurven über, und umgekehrt ist jede Punkttransformation des Raumes x, z, y, welche die Integralcurven von: $dz - ydx = 0$ wieder in Integralcurven verwandelt, das Bild einer Berührungstransformation der Ebene x, z (vgl. S. 15 f.).

Eine reducible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z erscheint im Raume x, z, y als eine imprimitive Gruppe von Punkttransformationen; sie lässt ja eine lineare partielle Differentialgleichung von der besonderen Form:

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial f}{\partial z} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, ein simultanes System von der Form:

$$(7) \qquad \frac{dx}{\alpha(x, z, y)} = \frac{dz}{y \cdot \alpha(x, z, y)} = \frac{dy}{\beta(x, z, y)}$$

invariant.

Unser Problem, alle irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene x, z zu bestimmen, lässt sich mithin auch so aussprechen: *es sind alle Gruppen von Punkttransformationen des Raumes*

x, z, y aufzustellen, welche die Pfaffsche Gleichung: $dz - y dx = 0$, nicht aber ein simultanes System von der besonderen Form (7) *invariant lassen.* Die zweite dieser beiden Bedingungen liesse sich auch so ausdrücken: *Es soll keine Schaar von ∞^2 Integralcurven der Gleichung: $dz - y dx = 0$ bei der Gruppe invariant bleiben.*

Da nach Satz 3, S. 393 eine irreducible Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ von Berührungstransformationen der Ebene x, z nur die eine Pfaffsche Gleichung: $dz - y dx = 0$ invariant lässt, kann man leicht erkennen, dass jede solche Gruppe als Gruppe von Punkttransformationen des Raumes x, z, y *transitiv* ist. Denn wäre sie das nicht, so gäbe es unter allen Umständen im Raume x, z, y eine Schaar von ∞^1 bei der Gruppe invarianten Flächen: $\psi(x, z, y) = \text{const.}$, daraus aber würde folgen, dass bei der Gruppe die Pfaffsche Gleichung: $d\psi = 0$ invariant bliebe, welche offenbar von: $dz - y dx = 0$ verschieden ist, und das ist eben nach Satz 3 ausgeschlossen. Also:

Satz 4. *Jede irreducible Gruppe:*

$$B_\varkappa f = \xi_\varkappa(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \zeta_\varkappa(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial z} + \eta_\varkappa(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r)$$

von Berührungstransformationen der Ebene x, z ist, als Gruppe von Punkttransformationen des Raumes x, z, y aufgefasst, transitiv.

§ 99.

Es seien wiederum:

$$B_\varkappa f = \xi_\varkappa(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \zeta_\varkappa(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial z} + \eta_\varkappa(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z.

Da es uns nur um die irreducibeln Gruppen zu thun ist und da nach dem eben bewiesenen Satze jede irreducible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z als Gruppe des Raumes x, z, y transitiv sein muss, so wollen wir noch die besondere Voraussetzung machen, *dass die Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ als Gruppe des Raumes x, z, y transitiv ist.* Es wird dann zu untersuchen sein, unter welchen Bedingungen diese Gruppe $B_1 f \cdots B_r f$ zu gleicher Zeit irreducibel ist.

Wir betrachten für einen Augenblick x, z, y als Functionen einer Hülfsveränderlichen t, welche bei unsrer Gruppe nicht transformirt wird, und erweitern die Gruppe durch Mitnahme der Differentialquotienten:

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dz}{dt} = z', \quad \frac{dy}{dt} = y'.$$

Auf diese Weise erhalten wir (vgl. Abschnitt I, S. 524 f.) in den Veränderlichen x, y, z, x', y', z' eine neue r-gliedrige Gruppe mit den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$B_\varkappa' f = B_\varkappa f + \xi_\varkappa' \frac{\partial f}{\partial x'} + \zeta_\varkappa' \frac{\partial f}{\partial z'} + \eta_\varkappa' \frac{\partial f}{\partial y'}$$

$$(\varkappa = 1 \cdots r),$$

wo zur Abkürzung $\xi_\varkappa'$ für

$$x' \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial x'} + z' \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial z'} + y' \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial y'}$$

geschrieben ist, während $\zeta_\varkappa'$, $\eta_\varkappa'$ entsprechende Bedeutungen haben.

Man kann x', z', y' als homogene Coordinaten der durch den Punkt x, z, y gehenden Richtungen auffassen und demnach die sechs Grössen x, z, y, x', z', y' als Bestimmungsstücke der Linienelemente des Raumes x, z, y (a. a. O. S. 525). Für diese Auffassung giebt die Gruppe: $B_1'f \cdots B_r'f$ an, in welcher Weise die Linienelemente des Raumes x, z, y von der Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ transformirt werden.

Ob man übrigens die Grössen: x, z, y, x', z', y' oder die Grössen: x, z, y, dx, dz, dy als Coordinaten der Linienelemente des Raumes x, z, y betrachtet, das ist ganz gleichgültig; die Gruppe: $B_1'f \cdots B_r'f$ transformirt ja augenscheinlich x, z, y, x', z', y' genau so, wie die Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ die Grössen x, z, y, dx, dz, dy. Da nun $B_1 f \cdots B_r f$ als Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z die Pfaffsche Gleichung: $dz - y dx = 0$ invariant lässt, so leuchtet ein, dass bei der erweiterten Gruppe: $B_1'f \cdots B_r'f$ die Gleichung:

$$z' - y \, . \, x' = 0$$

invariant bleibt.

Jetzt denken wir uns in den $B_\varkappa f$ die $\xi_\varkappa$, $\zeta_\varkappa$, $\eta_\varkappa$ nach Potenzen von $x - x_0$, $z - z_0$, $y - y_0$ entwickelt, unter x_0, z_0, y_0 einen *Punkt von allgemeiner Lage* verstanden, also einen, für welchen sich die $\xi_\varkappa$, $\zeta_\varkappa$, $\eta_\varkappa$ regulär verhalten (Abschnitt I, S. 118) und welcher ausserdem weder selbst bei der Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ invariant bleibt, noch auf einer invarianten Curve oder invarianten Fläche des Raumes x, z, y liegt. Derartige Punkte x_0, z_0, y_0 giebt es sicher, da $B_1 f \cdots B_r f$ nach Voraussetzung als Gruppe des Raumes x, z, y transitiv ist.

Unter den infinitesimalen Transformationen: $e_1 B_1 f + \cdots + e_r B_r f$ betrachten wir insbesondere die, welche den Punkt x_0, z_0, y_0 invariant lassen, oder mit andern Worten die, in deren Reihenentwickelungen nach $x - x_0$, $z - z_0$, $y - y_0$ nur Glieder von erster und höherer Ordnung auftreten. Solcher Transformationen enthält die Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ wegen ihrer Transitivität gerade $r-3$ unabhängige (s. Abschnitt I, S. 217), etwa die nachstehenden:

$$\mathsf{B}_j f = \mathfrak{x}_j \frac{\partial f}{\partial x} + \mathfrak{z}_j \frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{y}_j \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$(j = 1 \cdots r-3),$$

wo zum Beispiel $\mathfrak{x}_j$ bei Weglassung der Glieder zweiter und höherer Ordnung die Form hat:

$$\mathfrak{x}_j = a_{j1}(x - x_0) + a_{j2}(z - z_0) + a_{j3}(y - y_0) + \cdots,$$

während $\mathfrak{z}_j$ und $\mathfrak{y}_j$ ähnlich gebildet sind. Natürlich erzeugen $\mathsf{B}_1 f \cdots \mathsf{B}_{r-3} f$ eine $(r-3)$-gliedrige Untergruppe der Gruppe $B_1 f \cdots B_r f$.

Indem wir die $\mathsf{B}_j f$ ebenso erweitern wie vorhin die $B_\varkappa f$, erhalten wir $r-3$ unabhängige infinitesimale Transformationen von der Gestalt:

$$\mathsf{B}_j' f = \mathsf{B}_j f + \mathfrak{x}_j' \frac{\partial f}{\partial x'} + \mathfrak{z}_j' \frac{\partial f}{\partial z'} + \mathfrak{y}_j' \frac{\partial f}{\partial y'}$$

$$(j = 1 \cdots r-3),$$

wo zum Beispiel das $\mathfrak{x}_j'$ folgendermassen lautet:

$$\mathfrak{x}_j' = (a_{j1} + \cdots)x' + (a_{j2} + \cdots)z' + (a_{j3} + \cdots)y'.$$

Diese Transformationen: $\mathsf{B}_1' f \cdots \mathsf{B}_{r-3}' f$ gehören selbstverständlich der Gruppe: $B_1' f \cdots B_r' f$ an und erzeugen eine $(r-3)$-gliedrige Untergruppe derselben, eine Untergruppe, welche den Punkt x_0, z_0, y_0 invariant lässt, aber die Richtungen $dx : dz : dy$ oder $x' : z' : y'$ durch diesen Punkt unter einander vertauscht. Um zu erfahren, in welcher Weise die betreffenden Richtungen unter einander vertauscht werden, brauchen wir nur (Abschn. I, S. 600) in den $\mathsf{B}_j' f$ an Stelle von x, y, z bezüglich x_0, y_0, z_0 einzusetzen; dann bekommen wir $r-3$ infinitesimale Transformationen:

$$\mathfrak{B}_j f = (a_{j1} x' + a_{j2} z' + a_{j3} y') \frac{\partial f}{\partial x'} + (c_{j1} x' + c_{j2} z' + c_{j3} y') \frac{\partial f}{\partial z'} + \\ + (b_{j1} x' + b_{j2} z' + b_{j3} y') \frac{\partial f}{\partial y'}$$

$$(j = 1 \cdots r-3),$$

welche die Richtungen durch x_0, z_0, y_0 genau so transformiren wie $\mathsf{B}_1' f \cdots \mathsf{B}_{r-3}' f$ und welche ihrerseits eine Gruppe erzeugen, allerdings im Allgemeinen keine $(r-3)$-gliedrige, da sie nicht von einander unabhängig zu sein brauchen.

Wir erinnern daran (s. Abschn. I, § 149, S. 599 ff.), dass $\mathfrak{B}_1 f \cdots \mathfrak{B}_{r-3} f$ durch die Glieder erster Ordnung in den Reihenentwickelungen der infinitesimalen Transformationen der Gruppe: $\mathsf{B}_1 f \cdots \mathsf{B}_{r-3} f$ bestimmt sind. Man erkennt übrigens auch unmittelbar, dass dem so ist, denn man erhält augenscheinlich die infinitesimalen Transformationen: $\mathfrak{B}_1 f \cdot\cdot$

$\mathfrak{B}_{r-3}f$, wenn man in $\mathsf{B}_1 f \cdots \mathsf{B}_{r-3}f$ alle Glieder zweiter und höherer Ordnung weglässt und ausserdem für:

$$x - x_0, \quad z - z_0, \quad y - y_0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

bezüglich schreibt:

$$x', \quad z', \quad y', \quad \frac{\partial f}{\partial x'}, \quad \frac{\partial f}{\partial z'}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Zugleich erkennt man, dass umgekehrt die Glieder erster Ordnung in der Reihenentwickelung der allgemeinen infinitesimalen Transformation der Gruppe $\mathsf{B}_1 f \cdots \mathsf{B}_{r-3}f$ durch die infinitesimalen Transformationen: $\mathfrak{B}_1 f \cdots \mathfrak{B}_{r-3}f$ bestimmt sind.

Der Kürze wegen wollen wir für die Gruppe: $\mathfrak{B}_1 f \cdots \mathfrak{B}_{r-3}f$ die Benennung $\mathfrak{G}$ einführen.

Nach Seite 394 ordnet die Pfaffsche Gleichung: $dz - y dx = 0$ jedem Punkte des Raumes x, z, y ein ebenes Büschel von ∞^1 hindurchgehenden Richtungen: $dx : dz : dy$ oder: $x' : z' : y'$ zu und der Inbegriff aller dieser Büschel bleibt invariant bei jeder Punkttransformation des Raumes x, z, y, welche eine Berührungstransformation der Ebene x, z ist. Hieraus folgt, dass jede Berührungstransformation der Ebene x, z, welche den Punkt x_0, z_0, y_0 des Raumes x, z, y invariant lässt, auch das diesem Punkte zugeordnete Büschel von ∞^1 Richtungen: $x' : y' : z'$ festhält. Mithin bleibt dieses Büschel bei der Gruppe: $\mathsf{B}_1' f \cdots \mathsf{B}_{r-3}' f$ und ebenso bei der Gruppe $\mathfrak{G}$ invariant; die ∞^1 Richtungen des Büschels dagegen werden von beiden Gruppen transformirt.

Das dem Punkte x_0, z_0, y_0 zugeordnete Büschel von Richtungen wird durch die Gleichung: $z' - y_0 . x' = 0$ dargestellt, wir können daher x' und y' als homogene Coordinaten der Richtungen dieses Büschels benutzen. Da nun das Büschel bei der Gruppe $\mathfrak{G}$ invariant bleibt, so lässt sich sofort angeben, in welcher Weise seine ∞^1 Richtungen von dieser Gruppe transformirt werden. Wir brauchen nämlich blos (s. Abschnitt I, S. 233 f.) aus den infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{B}_1 f \cdots \mathfrak{B}_{r-3}f$ von $\mathfrak{G}$ die Glieder mit $\frac{\partial f}{\partial z'}$ wegzulassen und in den übrigen Gliedern die Substitution: $z' = y_0 . x'$ zu machen, dann bekommen wir in x', y' $r-3$ verkürzte infinitesimale Transformationen:

$$\overline{\mathfrak{B}}_j f = ((a_{j1} + y_0 a_{j2}) x' + a_{j3} y') \frac{\partial f}{\partial x'} + ((b_{j1} + y_0 b_{j2}) x' + b_{j3} y') \frac{\partial f}{\partial y'}$$

$$(j = 1 \cdots r-3),$$

welche ihrerseits eine Gruppe erzeugen und welche die Richtungen des besprochenen Büschels genau so transformiren wie $\mathfrak{B}_1 f \cdots \mathfrak{B}_{r-3}f$ und also auch wie: $\mathsf{B}_1' f \cdots \mathsf{B}_{r-3}' f$.

Die Gruppe: $\overline{\mathfrak{B}}_1 f \cdots \overline{\mathfrak{B}}_{r-3} f$, welche wir kurz mit $\overline{\mathfrak{G}}$ bezeichnen wollen, ist eine Untergruppe der allgemeinen linearen homogenen Gruppe einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit und hat daher höchstens vier Parameter. Ist sie viergliedrig, so transformirt sie nach Abschnitt I, S. 557 f. die ∞^1 Richtungen $x' : y'$ unsres Büschels durch die allgemeine projective Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit und lässt daher keine Richtung $x' : y'$ stehen.

Ist die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ dreigliedrig, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder nämlich enthält sie die infinitesimale Transformation:

$$x' \frac{\partial f}{\partial x'} + y' \frac{\partial f}{\partial y'},$$

welche alle ∞^1 Richtungen $x' : y'$ in Ruhe lässt, oder sie enthält diese Transformation nicht.

Im zweiten der beiden Fälle giebt es in $\overline{\mathfrak{G}}$ offenbar drei unabhängige infinitesimale Transformationen von der Gestalt:

$$x' \frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda \left(x' \frac{\partial f}{\partial x'} + y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right)$$

$$x' \frac{\partial f}{\partial x'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'} + \mu \left(x' \frac{\partial f}{\partial x'} + y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right)$$

$$y' \frac{\partial f}{\partial x'} + \nu \left(x' \frac{\partial f}{\partial x'} + y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right);$$

hier aber sind die Constanten λ, μ, ν alle drei gleich Null, wie man sich durch paarweise Combination der drei infinitesimalen Transformationen sofort überzeugt, folglich ist $\overline{\mathfrak{G}}$ in diesem Falle nichts anderes als die specielle lineare homogene Gruppe der zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit und transformirt die ∞^1 Richtungen $x' : y'$ durch die allgemeine projective Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Eine bei $\overline{\mathfrak{G}}$ invariante Richtung $x' : y'$ giebt es demnach nicht.

Im ersten der beiden Fälle enthält $\overline{\mathfrak{G}}$ drei unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$Yf = x' \frac{\partial f}{\partial x'} + y' \frac{\partial f}{\partial y'}$$

$$Y_1 f = \alpha_1 y' \frac{\partial f}{\partial x'} + \beta_1 \left(x' \frac{\partial f}{\partial x'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \gamma_1 x' \frac{\partial f}{\partial y'}$$

$$Y_2 f = \alpha_2 y' \frac{\partial f}{\partial x'} + \beta_2 \left(x' \frac{\partial f}{\partial x'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \gamma_2 x' \frac{\partial f}{\partial y'},$$

wo $Y_1 f$ und $Y_2 f$ der speciellen linearen homogenen Gruppe angehören und für sich offenbar eine zweigliedrige Gruppe erzeugen. Daher können wir uns nach Abschnitt I, S. 592 die infinitesimalen Transformationen: $Y_1 f$ und $Y_2 f$ von vornherein so gewählt denken, dass eine Relation von der Form:

$$Y_1(Y_2(f)) - Y_2(Y_1(f)) = c \,.\, Y_1(f)$$

besteht. Weil nun Yf die Richtungen: $x' : y'$ alle stehen lässt, so transformirt $\overline{\mathfrak{G}}$ diese Richtungen blos zweigliedrig und zwar genau so, wie die zweigliedrige Gruppe: $Y_1 f$, $Y_2 f$; auf diese letztere aber können wir den Satz 4 auf S. 589 des Abschnitts I anwenden, nach welchem sie jedenfalls eine Richtung: $x' : y'$ in Ruhe lässt, und wir erkennen so, dass es in dem vorliegenden Falle auch sicher eine bei der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ invariante Richtung giebt.

Enthält endlich die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ blos zwei oder noch weniger unabhängige infinitesimale Transformationen, so überzeugt man sich in ganz ähnlicher Weise, dass sie dann immer mindestens eine Richtung $x' : y'$ festhält.

Damit ist bewiesen, dass es nur zwei Fälle giebt, in denen die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ keine Richtung des zum Punkte x_0, z_0, y_0 gehörigen Büschels stehen lässt: in dem einen Falle ist $\overline{\mathfrak{G}}$ die allgemeine, in dem andern ist es die specielle lineare homogene Gruppe der zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Wir werden jetzt zeigen, dass das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein einer bei $\overline{\mathfrak{G}}$ invarianten Richtung darüber entscheidet, ob die Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ von Berührungstransformationen der Ebene x, z reducibel ist oder nicht.

Es sei: $x_0' : y_0'$ eine Richtung des Büschels: $z' - y_0 x' = 0$, welche bei $\overline{\mathfrak{G}}$ und also auch bei $\mathfrak{G}$ in Ruhe bleibt. Mit dem Punkte x_0, z_0, y_0 zusammen bildet dann diese Richtung ein Linienelement des Raumes x, z, y, welches bei der $(r-3)$-gliedrigen Gruppe: $\mathsf{B}_1' f \cdots \mathsf{B}_{r-3}' f$ seine Lage behält, denn diese Gruppe lässt den Punkt x_0, z_0, y_0 stehen und transformirt die hindurchgehenden Richtungen genau so, wie die Gruppe $\mathfrak{G}$. Nun aber enthält die r-gliedrige Gruppe: $B_1' f \cdots B_r' f$ augenscheinlich keine von: $\mathsf{B}_1' f \cdots \mathsf{B}_{r-3}' f$ unabhängige infinitesimale Transformation, welche den Punkt x_0, z_0, y_0, und also auch keine derartige Transformation, welche das besprochene Linienelement invariant lässt, folglich nimmt dieses Linienelement nach Abschnitt I, Theorem 85, S. 483 bei allen ∞^r Transformationen der Gruppe: $B_1' f \cdots B_r' f$ im Raume x, z, y gerade ∞^3 verschiedene Lagen an, deren Inbegriff sich dieser Gruppe gegenüber invariant verhält. Da ausserdem die Gruppe $B_1' f \cdots B_r' f$ die Punkte des Raumes x, z, y transitiv transformirt und x_0, z_0, y_0 ein Punkt von allgemeiner Lage ist, so leuchtet ein, dass von den so erhaltenen ∞^3 Linienelementen zu jedem der ∞^3 Punkte des Raumes x, z, y eines gehört. Endlich ist auch noch daran zu erinnern, dass die Gruppe: $B_1'f \cdots B_r'f$ die Gleichung: $z' - yx' = 0$ invariant lässt und dass in Folge dessen jedes der bewussten ∞^3 Linienelemente ebenso wie das durch den Punkt x_0, z_0, y_0 gehende die Gleichung: $z' - yx' = 0$ erfüllt. Unsere bei der Gruppe: $B_1'f \cdots B_r'f$ invariante Schaar von ∞^3 Linienelementen kann demnach durch zwei Gleichungen von der Form:

$$\frac{x'}{\alpha(x, z, y)} = \frac{z'}{y \cdot \alpha(x, z, y)} = \frac{y'}{\beta(x, z, y)} \tag{8}$$

dargestellt werden.

Damit ist bewiesen: Wenn die oben definirte Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ eine Richtung $x' : y'$ invariant lässt, so giebt es eine Schaar von ∞^3 Linienelementen $x, z, y, x' : z' : y'$ des Raumes, welche durch Gleichungen von der Form (8) dargestellt wird und welche bei der Gruppe: $B_1'f \cdots B_r'f$ invariant bleibt. Hieraus aber folgt sogleich, dass die Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ von Berührungstransformationen der Ebene x, z ein simultanes System von der Form:

$$\frac{dx}{\alpha(x, z, y)} = \frac{dz}{y \cdot \alpha(x, z, y)} = \frac{dy}{\beta(x, z, y)} \tag{9}$$

invariant lässt, mit andern Worten, dass sie reducibel ist (s. Satz 2, S. 392).

Ist umgekehrt die Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ eine reducible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z, so lässt sie nach Satz 2, S. 392 ein simultanes System von der Form (9) invariant. Folglich stellen die Gleichungen (8) eine Schaar von ∞^3 Linienelementen dar, welche bei der zugehörigen erweiterten Gruppe: $B_1'f \cdots B_r'f$ invariant bleibt. Ist nun x_0, z_0, y_0 wieder ein Punkt von allgemeiner Lage, so definiren die Gleichungen:

$$x = x_0, \quad z = z_0, \quad y = y_0, \quad \frac{x'}{\alpha(x_0, z_0, y_0)} = \frac{z'}{y_0 \cdot \alpha(x_0, z_0, y_0)} = \frac{y'}{\beta(x_0, z_0, y_0)}$$

augenscheinlich ein durch den Punkt x_0, z_0, y_0 gehendes Linienelement, welches bei der Gruppe $\mathsf{B}_1'f \cdots \mathsf{B}_{r-3}'f$ invariant bleibt; zugleich ist klar, dass dieses Linienelement, welches offenbar dem Büschel $z' - y_0 x' = 0$ angehört, auch bei der Gruppe $\mathfrak{G}$ und ebenso bei der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ seine Lage behält.

Aus alledem geht hervor, dass unsre r-gliedrige Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ von Berührungstransformationen der Ebene x, z dann und nur dann irreducibel ist, wenn die zugehörige auf S. 398 f. definirte Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ keine Richtung $x' : y'$ invariant lässt.

Erinnern wir uns endlich des auf S. 400 Gesagten, so können wir das gefundene Ergebniss auch folgendermassen ausdrücken:

Satz 5. *Ist eine r-gliedrige Gruppe:*

$$B_\varkappa f = \xi_\varkappa(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \zeta_\varkappa(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial z} + \eta_\varkappa(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$(\varkappa = 1 \cdots r)$$

von Berührungstransformationen der Ebene x, z als Gruppe des Raumes x, z, y transitiv und soll sie zu gleicher Zeit irreducibel sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass die zugehörige Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ entweder die allgemeine oder die specielle lineare homogene Gruppe in x', y' ist, dass also $\overline{\mathfrak{G}}$ eine der beiden Formen:

$$x'\frac{\partial f}{\partial y'}, \quad x'\frac{\partial f}{\partial x'} - y'\frac{\partial f}{\partial y'}, \quad y'\frac{\partial f}{\partial x'}, \quad x'\frac{\partial f}{\partial x'} + y'\frac{\partial f}{\partial y'}$$

und:

$$x'\frac{\partial f}{\partial y'}, \quad x'\frac{\partial f}{\partial x'} - y'\frac{\partial f}{\partial y'}, \quad y'\frac{\partial f}{\partial x'}$$

besitzt.

§ 100.

Wir beschränken uns jetzt vorerst auf die Betrachtung einer einzelnen infinitesimalen Berührungstransformation:

$$Bf = \xi(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \zeta(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial z} + \eta(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

der Ebene x, z. Unter x_0, z_0, y_0 verstehen wir ein beliebiges Werthsystem, in dessen Umgebung sich ξ, ζ, η regulär verhalten; überhaupt werden ja nur solche Werthsysteme betrachtet.

Wir versuchen zunächst durch eine Berührungstransformation der Ebene x, z solche neue Veränderliche $\bar{x}$, $\bar{z}$, $\bar{y}$ einzuführen, dass das Werthsystem: $x = x_0$, $z = z_0$, $y = y_0$ in: $\bar{x} = 0$, $\bar{z} = 0$, $\bar{y} = 0$ übergeht. Zu dem Ende setzen wir:

$$x = \alpha\bar{x} + \beta\bar{z} + \mu, \quad z = \gamma\bar{x} + \delta\bar{z} + \nu,$$

wo α, β, γ, δ, μ, ν Constanten bezeichnen und wo natürlich: $\alpha\delta - \beta\gamma$ nicht verschwinden darf. Wir müssen dann vor allen Dingen noch y derart als Function von $\bar{x}$, $\bar{z}$, $\bar{y}$ bestimmen, dass eine Gleichung von der Form:

$$dz - y\,dx = \varrho(d\bar{z} - \bar{y}\,d\bar{x})$$

besteht. Dabei ergiebt sich:

$$(\gamma - \alpha y)d\bar{x} + (\delta - \beta y)d\bar{z} = \varrho(d\bar{z} - \bar{y}\,d\bar{x}),$$

also wird:

$$\varrho = \delta - \beta y, \quad -\varrho\bar{y} = \gamma - \alpha y$$

und mithin:

$$y = \frac{\gamma + \delta \bar{y}}{\alpha + \beta \bar{y}},$$

so dass die Gleichungen:

$$(10) \quad \begin{cases} x = \alpha \bar{x} + \beta \bar{z} + \mu, \qquad z = \gamma \bar{x} + \delta \bar{z} + \nu \\ \qquad\qquad y = \dfrac{\gamma + \delta \bar{y}}{\alpha + \beta \bar{y}} \end{cases}$$

eine Berührungstransformation und zwar eine erweiterte Punkttransformation der Ebene x, z darstellen. Die sechs Constanten $\alpha, \beta \cdots$ lassen sich nun leicht so bestimmen, dass x, z, y für $\bar{x} = \bar{z} = \bar{y} = 0$ bezüglich die Werthe x_0, z_0, y_0 annehmen, wir brauchen nämlich blos $\mu = x_0$, $\nu = z_0$, $\alpha y_0 = \gamma$ zu machen, was sich immer erreichen lässt, ohne dass $\alpha\delta - \beta\gamma$ gleich Null wird.

Sind α, β, γ, δ, μ, ν in der angegebenen Weise gewählt, so werden offenbar x, z, y gewöhnliche Potenzreihen von $\bar{x}$, $\bar{z}$, $\bar{y}$, und umgekehrt werden $\bar{x}$, $\bar{z}$, $\bar{y}$ gewöhnliche Potenzreihen von $x - x_0$, $z - z_0$, $y - y_0$. Führen wir daher vermöge der Berührungstransformation (10) in Bf die neuen Veränderlichen $\bar{x}$, $\bar{z}$, $\bar{y}$ ein, so ist die Berührungstransformation:

$$Bf = \mathfrak{x}(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}) \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + \mathfrak{z}(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \mathfrak{y}(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}) \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} = \overline{B}f$$

der Ebene $\bar{x}$, $\bar{z}$, welche wir auf diese Weise erhalten (s. Theorem 45, S. 276), so beschaffen, dass sich $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$ in der Umgebung von: $\bar{x} = \bar{z} = \bar{y} = 0$ regulär verhalten. Zugleich ergiebt sich noch auf Grund von Abschn. I, S. 196 f.: Beginnt die Reihenentwickelung von Bf nach Potenzen von $x - x_0$, $z - z_0$, $y - y_0$ mit Gliedern m-ter Ordnung, so beginnt die Reihenentwickelung von $\overline{B}f$ nach Potenzen von $\bar{x}$, $\bar{z}$, $\bar{y}$ ebenfalls mit Gliedern m-ter Ordnung.

Wissen wir daher, dass eine oder mehrere infinitesimale Berührungstransformationen:

$$B_\varkappa f = \xi_\varkappa(x, z, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \zeta_\varkappa(x, z, y) \frac{\partial f}{\partial z} + \eta_\varkappa(x, z, y) \frac{\partial f}{\partial y}$$
$$(\varkappa = 1, 2 \cdots)$$

der Ebene x, z sich in der Umgebung des Werthsystems: $x = x_0$, $z = z_0$, $y = y_0$ regulär verhalten, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_0 = z_0 = y_0 = 0$ ist. In diesem Kapitel betrachten wir in Folge dessen nur solche Gruppen $B_1 f \cdots B_r f$, deren infinitesimale Transformationen sich in der Umgebung des Werthsystems $x = y = z = 0$ regulär verhalten.

Wir gehen jetzt dazu über, die Glieder niedrigster Ordnung in der Reihenentwickelung einer beliebigen infinitesimalen Berührungstransformation der Ebene x, z wirklich aufzustellen. Dabei können wir uns dem eben Gesagten zu Folge auf Reihenentwickelungen nach Potenzen von x, z, y beschränken.

Nach Theorem 39, S. 253 ist jede infinitesimale Berührungstransformation:

$$Bf = \xi(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial z}$$

der Ebene x, z durch ihre charakteristische Function $W(x, z, y)$ vollständig bestimmt, denn es ist:

$$\xi = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \eta = -\frac{\partial W}{\partial x} - y\frac{\partial W}{\partial z}, \quad \zeta = -W + y\frac{\partial W}{\partial y}.$$

Da sich hieraus ergiebt:

$$W = y\xi - \zeta,$$

so *verhält sich* W *offenbar stets gleichzeitig mit* ξ, η, ζ *in der Umgebung von:* $x = z = y = 0$ *regulär.* Wir können uns daher auf den Fall beschränken, dass W eine gewöhnliche Potenzreihe von x, y, z ist:

$$W = A + Bx + Cy + Dz + Ex^2 + Fxy + \\ + Gy^2 + Hxz + Jyz + Kz^2 + \cdots.$$

Jedes Glied m-ter Ordnung in dem Ausdrucke für W beeinflusst in den entsprechenden Reihenentwickelungen von ξ und η die Glieder $(m-1)$-ter und m-ter Ordnung, in der Entwickelung von ζ dagegen blos die Glieder m-ter Ordnung. Wollen wir daher eine Uebersicht darüber gewinnen, mit welchen Gliedern nullter und erster Ordnung die Reihenentwickelung einer infinitesimalen Berührungstransformation in der Umgebung von $x = y = z = 0$ beginnen kann, so haben wir nur für W eine allgemeine ganze Function zweiten Grades von x, y, z einzusetzen und die zugehörigen Werthe von ξ, η, ζ zu berechnen. Genau dasselbe erreichen wir nun aber bequemer, wenn wir der charakteristischen Function W der Reihe nach die Werthe:

$$1,\ x,\ y,\ z,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ xz,\ yz,\ z^2$$

ertheilen und die entsprechenden infinitesimalen Berührungstransformationen Bf uns aufschreiben. Mit Benutzung der Abkürzungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = r,$$

welche wir von jetzt ab regelmässig anwenden wollen, erhalten wir dann die folgende Tafel:

(11)

W	Bf	W	Bf
-1	r	xy	$xp - yq$
$-x$	$q + xr$	y^2	$2yp + y^2 r$
y	p	$-xz$	$(z + xy)q + xzr$
$-z$	$yq + zr$	yz	$zp - y^2 q$
$-x^2$	$2xq + x^2 r$	$-z^2$	$2yzq + z^2 r$

Aus derselben können wir sofort ablesen, was für Glieder von nullter und erster Ordnung in x, y, z in der Reihenentwickelung einer beliebigen infinitesimalen Berührungstransformation auftreten können. Insbesondere ist klar, dass eine infinitesimale Berührungstransformation, welche nur Glieder von erster und höherer Ordnung in x, y, z enthält, nothwendig die Form besitzt:

$$\lambda . xq + \mu(xp - yq) + \nu . yp + \pi(yq + zr) + \varrho . zp + \sigma . zq + \cdots,$$

wo $\lambda, \mu, \nu, \pi, \varrho, \sigma$ Constanten bezeichnen und wo die weggelassenen Glieder von zweiter und höherer Ordnung sind.

Hieran knüpfen wir noch eine Bemerkung, welche im Folgenden bei einigen Gelegenheiten wichtige Anwendung finden wird.

Es seien Af und Bf zwei infinitesimale Berührungstransformationen der Ebene x, z und ihre charakteristischen Functionen seien bezüglich $U(x, y, z)$ und $V(x, y, z)$. Dann ist nach Theorem 44, S. 275 auch $ABf - BAf$ eine infinitesimale Berührungstransformation der Ebene x, z und zwar eine mit der charakteristischen Function:

$$\Omega = \frac{\partial U}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial V}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial z}\right) - U\frac{\partial V}{\partial z} + V\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Wir bemerken nun, dass die Glieder niedrigster Ordnung in der Reihenentwickelung von Ω nach Potenzen von x, y, z im Allgemeinen durch die Glieder niedrigster Ordnung in den Reihenentwickelungen von U und V bestimmt sind. Beginnen nämlich U und V bezüglich mit Gliedern μ-ter und ν-ter Ordnung:

$$U = \alpha_\mu + \cdots, \qquad V = \beta_\nu + \cdots,$$

so fängt Ω mit einem Gliede $(\mu + \nu - 2)$-ter Ordnung an, welches die Form:

$$\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial y}\frac{\partial \beta_\nu}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial x}\frac{\partial \beta_\nu}{\partial y}$$

besitzt. Dieser Umstand giebt zuweilen über die Form der infinitesimalen Berührungstransformation $ABf - BAf$ genaueren Aufschluss, als die direkte Berechnung der Glieder niedrigster Ordnung von $ABf - BAf$ aus den Gliedern niedrigster Ordnung von Af und Bf (s. Abschnitt I, S. 193).

Im Folgenden werden wir übrigens wie im ersten Abschnitt für den Ausdruck: $ABf - BAf$ die Abkürzung (AB) anwenden. Man überzeugt sich leicht, dass diese Art der Abkürzung nur ein besonderer Fall des Symbols $(\varphi\psi)_{xp}$ ist. Jede infinitesimale Berührungstransformation:

$$Bf = \xi(x, y, z)p + \eta(x, y, z)q + \zeta(x, y, z)r$$

der Ebene x, z ist ja zugleich eine infinitesimale Punkttransformation des Raumes x, y, z und lässt sich daher auch als eine infinitesimale homogene Berührungstransformation in den Veränderlichen x, y, z, p, q, r auffassen.

§ 101.

Nunmehr wenden wir uns wieder zur Untersuchung der *irreducibeln* Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene x, z. G sei eine derartige Gruppe und zwar eine r-gliedrige, erzeugt von den r unabhängigen infinitesimalen Berührungstransformationen:

$$B_\varkappa f = \xi_\varkappa(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_\varkappa(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_\varkappa(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r).$$

Wir denken uns die infinitesimalen Transformationen von G in der Umgebung eines Werthsystems x_0, y_0, z_0 von *allgemeiner Lage* (vgl. S. 396) nach Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ entwickelt. Dabei dürfen wir aber nach S. 403 voraussetzen, dass x_0, y_0, z_0 alle drei gleich Null sind.

Die irreducible Gruppe G von Berührungstransformationen der Ebene x, z ist als Gruppe des Raumes x, y, z transitiv (s. S. 395), sie enthält daher (vgl. Abschnitt I, S. 217, Satz 5) in der Umgebung von $x = y = z = 0$ drei unabhängige infinitesimale Berührungstransformationen von der Form:

$$A_1 f = p + \cdots, \quad A_2 f = q + \cdots, \quad A_3 f = r + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder in x, y, z von der ersten oder von höherer Ordnung sind. Nun haben die charakteristischen Functionen von Af und Bf, abgesehen von den Potenzen zweiter und höherer Ordnung, die Form:

$$U_1 = y + \mathfrak{a}z + \cdots, \quad U_2 = -x + \mathfrak{b}z + \cdots,$$

wie man aus der Tafel (11), S. 405 sofort entnehmen kann. Die charakteristische Function der infinitesimalen Berührungstransformation: $A_1 A_2 f - A_2 A_1 f = (A_1 A_2)$ lautet daher nach S. 405:

$$\frac{\partial}{\partial y}(y + \mathfrak{a} z) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(- x + \mathfrak{b} z) - \frac{\partial}{\partial x}(y + \mathfrak{a} z) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(- x + \mathfrak{b} z) + \cdots$$

oder ausgerechnet:

$$-1 + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder von erster und höherer Ordnung sind. Hieraus ergiebt sich, dass die Glieder nullter Ordnung von:

$$A_1 A_2 f - A_2 A_1 f = (A_1 A_2) = (p + \cdots, \quad q + \cdots)$$

die Form: $r + ap + bq$ besitzen, dass also eine Relation von der Form:

$$(p + \cdots, \quad q + \cdots) = r + ap + bq + \cdots \tag{12}$$

besteht, in welcher a und b gewisse, vorläufig nicht näher bestimmbare Constanten bezeichnen und in welcher die weggelassenen Glieder sämmtlich von erster oder von höherer Ordnung in x, y, z sind. Diese Formel, die natürlich auch für reducible Gruppen gilt, wird uns später wesentliche Dienste leisten.

Die Gruppe G enthält $r - 3$ unabhängige infinitesimale Berührungstransformationen, welche das Werthsystem: $x = y = z = 0$ invariant lassen und eine $(r - 3)$-gliedrige Untergruppe erzeugen. Wir wollen diese $r - 3$ infinitesimalen Transformationen wie auf S. 397 mit $\mathsf{B}_1 f \cdots \mathsf{B}_{r-3} f$ bezeichnen.

In den Reihenentwickelungen der infinitesimalen Berührungstransformationen: $\mathsf{B}_1 f \cdots \mathsf{B}_{r-3} f$ kommen nur Glieder von erster und höherer Ordnung in x, y, z vor, folglich muss (s. S. 405) die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe: $\mathsf{B}_1 f \cdots \mathsf{B}_{r-3} f$ die Form:

$$\begin{cases} \lambda \,.\, xq + \mu(xp - yq) + \nu \,.\, yp + \pi(yq + zr) + \\ \qquad + \varrho \,.\, zp + \sigma \,.\, zq + \cdots \end{cases} \tag{13}$$

besitzen, wo die weggelassenen Glieder von zweiter und höherer Ordnung in x, y, z sind und wo λ, μ, ν, π, ϱ, σ von der besonderen Beschaffenheit der Gruppe: $\mathsf{B}_1 f \cdots \mathsf{B}_{r-3} f$ abhängen. Nun gehört nach S. 397 f. zu der Gruppe: $\mathsf{B}_1 f \cdots \mathsf{B}_{r-3} f$ eine gewisse lineare homogene Gruppe $\mathfrak{G}$, die angiebt, in welcher Weise die Richtungen durch den invarianten Punkt $x = y = z = 0$ von der Gruppe: $\mathsf{B}_1 f \cdots \mathsf{B}_{r-3} f$ transformirt werden, diese letztere als eine Gruppe des Raumes x, z, y aufgefasst. Die allgemeine infinitesimale Transformation von $\mathfrak{G}$ ist durch die Glieder erster Ordnung in den Reihenentwickelungen von $\mathsf{B}_1 f \cdots \mathsf{B}_{r-3} f$ bestimmt und hat daher (s. S. 397 f.) die Form:

$$(14)\quad \begin{cases} \lambda\,.\,x'q' + \mu(x'p' - y'q') + \nu\,.\,y'p' + \pi(y'q' + z'r') + \\ \qquad + \varrho\,.\,z'p' + \sigma\,.\,z'q', \end{cases}$$

wo p', q', r' für:

$$\frac{\partial f}{\partial x'},\quad \frac{\partial f}{\partial y'},\quad \frac{\partial f}{\partial z'}$$

geschrieben ist und wo λ, μ, ν, π, ϱ, σ dieselben Werthe haben wie in dem Ausdruck (13).

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ihrerseits lässt das Büschel von ∞^1 Richtungen: $x' : y' : z'$ invariant, welches die Pfaffsche Gleichung: $dz - ydx = 0$ dem Punkte: $x = y = z = 0$ im Raume x, y, z zuordnet, und transformirt die ∞^1 Richtungen dieses Büschels durch eine gewisse Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$. Berücksichtigen wir, dass $z' = 0$ die Gleichung des betreffenden Büschels ist, und wählen wir wie auf S. 398 x', y' als homogene Coordinaten der Richtungen des Büschels, so erkennen wir sofort, dass die allgemeine infinitesimale Transformation von $\overline{\mathfrak{G}}$ die Form:

$$(15)\qquad \lambda\,.\,x'q' + \mu(x'p' - y'q') + \nu\,.\,y'p' + \pi\,.\,y'q'$$

besitzt. Hier haben λ, μ, ν, π dieselben Werthe wie in (14) und in (13).

Nun aber soll $B_1f \cdots B_rf$ als Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z irreducibel sein und dazu ist nach S. 402 nothwendig und hinreichend, dass die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ eine der beiden Formen:

$$(\mathfrak{A})\qquad x'q',\quad x'p' - y'q',\quad y'p',\quad x'p' + y'q'$$

und:

$$(\mathfrak{B})\qquad x'q',\quad x'p' - y'q',\quad y'p'$$

besitzt. Aus diesem Umstande können wir rückwärts auf die verschiedenen Formen schliessen, welche die Gruppe $\mathfrak{G}$ haben kann.

Besitzt $\overline{\mathfrak{G}}$ die Form $(\mathfrak{A})$, so stellt der Ausdruck (15) die allgemeine infinitesimale Transformation von $\overline{\mathfrak{G}}$ dar, sobald man in ihm λ, μ, ν, π als willkürliche Parameter betrachtet. In der allgemeinen infinitesimalen Transformation (14) von $\mathfrak{G}$ sind demnach λ, μ, ν, π ebenfalls willkürliche Parameter. Hieraus folgt, dass $\mathfrak{G}$ jedenfalls vier unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$\begin{aligned} C_1f &= x'q' + \alpha_1 z'p' + \beta_1 z'q' \\ C_2f &= x'p' - y'q' + \alpha_2 z'p' + \beta_2 z'q' \\ C_3f &= y'p' + \alpha_3 z'p' + \beta_3 z'q' \\ C_4f &= x'p' + y'q' + 2z'r' + \alpha_4 z'p' + \beta_4 z'q' \end{aligned}$$

enthalten muss, wo $x'p' + y'q' + 2z'r' = x'p' - y'q' + 2(y'q' + z'r')$ an Stelle von $y'q' + z'r'$ eingeführt ist, um eine gewisse Gleichberechtigung von x' und y' zum Ausdruck zu bringen. Ausser $C_1f\cdots C_4f$ kann es in $\mathfrak{G}$ möglicherweise noch infinitesimale Transformationen von der Form:

$$Df = \lambda \,.\, z'p' + \mu \,.\, z'q'$$

geben.

Enthält $\mathfrak{G}$ eine infinitesimale Transformation von der Form Df, so enthält es zu gleicher Zeit die Transformationen:

$$(DC_1) = \lambda \,.\, z'q', \quad (DC_3) = \mu \,.\, z'p'$$

und da λ und μ nicht beide verschwinden können, so enthält es sowohl $z'p'$ als $z'q'$ und hat mithin die Form:

(16) $x'q', \quad x'p' - y'q', \quad y'p', \quad x'p' + y'q' + 2z'r', \quad z'p', \quad z'q'.$

Andrerseits enthalte $\mathfrak{G}$ keine infinitesimale Transformation von der Form Df. In diesem Falle ergiebt sich durch Combination:

$$(C_1C_3) = x'p' - y'q' + \beta_1 z'p' - \alpha_3 z'q',$$

eine Transformation, welche nothwendig in $\mathfrak{G}$ enthalten sein muss; da es nun in $\mathfrak{G}$ keine Transformation von der Form Df giebt, so schliessen wir, dass: $\alpha_2 = \beta_1$ und $\beta_2 = -\alpha_3$ ist und dass C_2f die Form:

$$C_2f = (x' + \beta_1 z')p' - (y' + \alpha_3 z')q'$$

besitzt. Nunmehr finden wir:

$$(C_1C_2) = -2(x' + \beta_1 z')q' + \alpha_1 z'p'$$
$$(C_2C_3) = -2(y' + \alpha_3 z')p' + \beta_3 z'q',$$

also ist: $\alpha_1 = \beta_3 = 0$. Endlich wird:

$$(C_2C_4) = -\beta_1 z'p' + \alpha_3 z'q' - \alpha_4 z'p' + \beta_4 z'q'$$

und dieser Ausdruck muss natürlich verschwinden, folglich ist: $\alpha_4 = -\beta_1$ und $\beta_4 = -\alpha_3$.

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ hat demnach die Form:

$$(17)\quad \begin{cases} (x' + \alpha z')q', \quad (x' + \alpha z')p' - (y' + \beta z')q', \quad (y' + \beta z')p' \\ \quad (x' + \alpha z')p' + (y' + \beta z')q' + 2z'(r' - \alpha p' - \beta q'), \end{cases}$$

wo die Constanten α und β vollkommen unbestimmt bleiben.

Nunmehr ist noch zu untersuchen, wie $\mathfrak{G}$ beschaffen ist, wenn $\mathfrak{G}$ die Form ($\mathfrak{B}$) besitzt.

In diesem Falle findet man durch Ueberlegungen, welche sich von den eben angestellten fast gar nicht unterscheiden, dass $\mathfrak{G}$ entweder die Form:

(18) $(x' + \alpha z')q'$, $(x' + \alpha z')p' - (y' + \beta z')q'$, $(y' + \beta z')p'$

besitzt oder die Form:

(19) $x'q'$, $x'p' - y'q'$, $y'p'$, $z'p'$, $z'q'$.

Damit sind alle Formen gefunden, welche $\mathfrak{G}$ haben kann, sobald $B_1 f \cdots B_r f$ eine irreducible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z ist. Zugleich wissen wir aber auch, dass umgekehrt die Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ stets irreducibel ist, wenn die zugehörige Gruppe $\mathfrak{G}$ eine der gefundenen vier Formen (16) bis (19) besitzt; denn hat $\mathfrak{G}$ eine dieser Formen, so hat $\overline{\mathfrak{G}}$ entweder die Form ($\mathfrak{A}$) oder die Form ($\mathfrak{B}$) und daraus folgt nach S. 402 die Irreducibilität von $B_1 f \cdots B_r f$.

Durch die infinitesimalen Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}$ sind nach S. 398 die Glieder erster Ordnung in der Reihenentwickelung der allgemeinen infinitesimalen Transformation der Gruppe: $\mathsf{B}_1 f \cdots \mathsf{B}_{r-3} f$ vollständig bestimmt, so dass es uns möglich ist, die verschiedenen Formen, welche diese Glieder erster Ordnung haben können, alle hinzuschreiben. Solcher Formen giebt es natürlich vier, entsprechend den vier Formen von $\mathfrak{G}$; wir finden in jedem dieser vier Fälle die betreffenden Glieder erster Ordnung, indem wir die allgemeine infinitesimale Transformation von $\mathfrak{G}$ bilden und in dieser überall von x', y', z' die Striche weglassen.

Nun enthält aber die Gruppe: $\mathsf{B}_1 f \cdots \mathsf{B}_{r-3} f$ alle infinitesimalen Transformationen der Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$, deren Reihenentwickelungen nach x, y, z mit Gliedern erster oder höherer Ordnung beginnen, mit andern Worten, sie enthält alle infinitesimalen Transformationen der Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$, welche in den x, y, z von erster oder höherer Ordnung sind (vgl. über diese Ausdrucksweise: Abschnitt I, S. 191). Kennen wir daher die Glieder erster Ordnung in der Reihenentwickelung der allgemeinen infinitesimalen Transformation der Gruppe: $\mathsf{B}_1 f \cdots \mathsf{B}_{r-3} f$, so können wir ohne Weiteres angeben, wieviele unabhängige infinitesimale Transformationen von erster Ordnung in x, y, z die Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ enthält und wir sind auch im Stande die Anfangsglieder in den Reihenentwickelungen dieser Transformationen erster Ordnung anzugeben.

Auf diese Weise ergiebt sich über die Form, welche die infinitesimalen Transformationen der Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ haben können, Folgendes:

Theorem 65. *Soll eine r-gliedrige Gruppe: $B_1 f \cdots B_r f$ von Berührungstransformationen der Ebene x, z irreducibel sein, so* *ist nothwendig und hinreichend*), dass sie erstens drei unabhängige infinitesimale Transformationen von nullter Ordnung in x, y, z enthält, welche die Form:*

$$p + \cdots, \quad q + \cdots, \quad r + \cdots$$

besitzen, und dass sie ausserdem zweitens entweder drei oder vier oder fünf oder sechs solche unabhängige infinitesimale Transformationen von erster Ordnung in x, y, z enthält, aus denen sich keine Transformation von zweiter oder höherer Ordnung linear ableiten lässt, und zwar müssen die betreffenden infinitesimalen Transformationen erster Ordnung im ersten Falle die Form:

$$\text{(I)} \quad (x + \alpha z)q + \cdots, \; (x + \alpha z)p - (y + \beta z)q + \cdots, \; (y + \beta z)p + \cdots$$

haben, im zweiten Falle diese:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} (x+\alpha z)q + \cdots, \; (x+\alpha z)p - (y+\beta z)q + \cdots, \; (y+\beta z)p + \cdots \\ \qquad (x+\alpha z)p + (y+\beta z)q + 2z(r - \alpha p - \beta q) + \cdots, \end{cases}$$

im dritten Falle diese:

$$\text{(III)} \quad xq + \cdots, \quad xp - yq + \cdots, \quad yp + \cdots, \quad zp + \cdots, \quad zq + \cdots,$$

im vierten Falle endlich diese:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} xq + \cdots, \quad xp - yq + \cdots, \quad yp + \cdots, \quad zp + \cdots, \quad zq + \cdots \\ \qquad\qquad xp + yq + 2zr + \cdots, \end{cases}$$

wo jedesmal die weggelassenen Glieder in x, y, z von der zweiten oder von höherer Ordnung sind.

Die angegebenen vier Fälle entsprechen bezüglich den vier Formen: (18), (17), (19), (16) der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Natürlich ist es nicht ausgeschlossen, dass die Gruppe $B_1 f \cdots B_r f$ ausser den hingeschriebenen infinitesimalen Transformationen auch noch solche enthält, deren Reihenentwickelungen nach den x, y, z mit Gliedern zweiter oder höherer Ordnung beginnen.

Um alle irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene x, z zu finden, haben wir also nach einander die vier ver-

*) Um die Sprache zu erleichtern, beschränken wir uns im Texte stillschweigend (vgl. S. 403) auf Gruppen, deren infinitesimale Transformationen:

$$B_\varkappa f = \xi_\varkappa(x, y, z)p + \eta_\varkappa(x, y, z)q + \zeta_\varkappa(x, y, z)r$$

sich nach x, y, z entwickeln lassen; ferner setzen wir voraus, dass das Werthsystem $x = y = z = 0$ einen Punkt allgemeiner Lage (Abschnitt I, S. 203) des Raumes x, y, z darstellt. Um eine allgemeingültige Fassung des Theorems zu erhalten, braucht man nur statt x, y, z bezüglich $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ zu schreiben und darnach hinzuzufügen, dass x_0, y_0, z_0 einen Punkt allgemeiner Lage bedeuten soll.

schiedenen Fälle (I) bis (IV) zu behandeln. Wir wissen zwar noch nicht, ob jedem dieser vier Fälle wirklich Gruppen von Berührungstransformationen entsprechen, das aber wissen wir, dass jede Gruppe von Berührungstransformationen, welche einem der vier Fälle entspricht, irreducibel ist.

§ 102.

Zuerst suchen wir alle Gruppen*) von Berührungstransformationen, welche sechs infinitesimale Transformationen von der Form:

$$(20)\quad \begin{cases} p+\cdots,\quad q+\cdots,\quad r+\cdots \\ (x+\alpha z)q+\cdots,\ (x+\alpha z)p-(y+\beta z)q+\cdots,\ (y+\beta z)p+\cdots \end{cases}$$

enthalten, wozu noch gewisse infinitesimale Transformationen von zweiter und höherer Ordnung in x, y, z treten können, während in jeder infinitesimalen Transformation erster Ordnung der Gruppe sich die Glieder erster Ordnung aus:

$$(x+\alpha z)q,\quad (x+\alpha z)p-(y+\beta z)q,\quad (y+\beta z)p$$

linear ableiten lassen müssen. Ausserdem wissen wir bereits (s. S. 407), dass eine Relation von der Form:

$$(21)\qquad (p+\cdots,\ q+\cdots)=r+\lambda p+\mu q+\cdots$$

besteht, in welcher alle weggelassenen Glieder von der ersten und von höherer Ordnung in x, y, z sind.

Unter G wollen wir ganz allgemein eine solche Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z verstehen, welche den gestellten Anforderungen genügt; *es ist dann von vornherein sicher, dass jede Gruppe G — wenn überhaupt eine existirt — irreducibel ist und demzufolge keine andere Pfaffsche Gleichung invariant lässt als die bekannte:* $dz-y\,dx=0$.

Zur Abkürzung führen wir durch die Transformation:

$$(22)\qquad x'=x+\alpha z,\quad y'=y+\beta z,\quad z'=z$$

neue Veränderliche x', y', z' ein. Dabei erhalten die sechs infinitesimalen Transformationen (20) unsrer Gruppe G die Gestalt:

---

*) Im Texte beschränken wir uns wie überall in den folgenden Entwickelungen dieses Kapitels auf Gruppen, deren infinitesimale Transformationen sich nach x, y, z entwickeln lassen. Da wir nun ausdrücklich verlangen, dass unter den betreffenden Reihenentwickelungen drei von der Form:

$$p+\cdots,\quad q+\cdots,\quad r+\cdots$$

vorhanden sein sollen, so ist es sicher, dass das Werthsystem $x=y=z=0$ einen Punkt allgemeiner Lage des Raumes x, y, z darstellt.

$$(20')\begin{cases} p+\cdots=p'+\cdots,\ q+\cdots=q'+\cdots,\ r+\cdots=r'+\alpha p'+\beta q'+\cdots \\ (x+\alpha z)q+\cdots=x'q'+\cdots,\ (y+\beta z)p+\cdots=y'p'+\cdots \\ (x+\alpha z)p-(y+\beta z)q+\cdots=x'p'-y'q'+\cdots; \end{cases}$$

die Gruppe G selbst geht also in eine neue Gruppe G' über, welche die folgenden sechs infinitesimalen Transformationen enthält:

$$(20'')\qquad \begin{cases} p'+\cdots,\quad q'+\cdots,\quad r'+\cdots \\ x'q'+\cdots,\quad x'p'-y'q'+\cdots,\quad y'p'+\cdots. \end{cases}$$

Ausserdem kann G' noch gewisse infinitesimale Transformationen von zweiter und höherer Ordnung in x', y', z' enthalten, aber in jeder infinitesimalen Transformation von erster Ordnung, welche sie enthält, müssen sich die Glieder erster Ordnung aus:

$$x'q',\quad x'p'-y'q',\quad y'p'$$

linear ableiten lassen. Endlich besteht natürlich, entsprechend der Gleichung (21), zwischen $p'+\cdots$ und $q'+\cdots$ eine Relation von der Gestalt:

$$(21')\qquad (p'+\cdots,\ q'+\cdots)=r'+\lambda' p'+\mu' q'+\cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder von erster und höherer Ordnung in x', y', z' sind.

Man beachte, dass die Transformation (22) im Allgemeinen keine Berührungstransformation der Ebene x, z ist. Sie führt nämlich die Pfaffsche Gleichung: $dz-y\,dx=0$ über in:

$$(\mathrm{A})\qquad dz'-\frac{y'-\beta z'}{1+\alpha y'-\alpha\beta z'}\cdot dx'=0$$

und ist daher eine Berührungstransformation nur dann, wenn α und β beide gleich Null sind. Hieraus folgt zugleich, dass auch G' nur dann eine Gruppe von Berührungstransformationen ist, wenn α und β verschwinden, denn wie G blos die eine Pfaffsche Gleichung: $dz-y\,dx=0$ invariant lässt, so kann auch G' blos die eine Pfaffsche Gleichung (A) invariant lassen und keine andere.

Ausser den infinitesimalen Transformationen (20″) werden in der Gruppe G' möglicherweise noch gewisse von zweiter und höherer Ordnung in x', y', z' auftreten, wir können aber annehmen (s. Abschn. I, Theorem 29, S. 192), dass höhere als solche von s-ter Ordnung nicht vorkommen, unter s eine endliche positive ganze Zahl verstanden.

Eine infinitesimale Transformation s-ter Ordnung von G' sei:

$$B^{(s)}f=\xi_s' p'+\eta_s' q'+\zeta_s' r'+\cdots,$$

wo ξ_s', η_s', ζ_s' ganze homogene Functionen s-ter Ordnung von x', y', z' bedeuten, während die Glieder höherer Ordnung wie immer weggelassen sind. Wäre hier ζ_s' nicht Null, so erhielten wir, indem wir $B^{(s)}f$ in geeigneter Reihenfolge eine Anzahl von Malen mit $p' + \cdots$, $q' + \cdots$, $r' + \cdots$ combinirten, schliesslich eine infinitesimale Transformation erster Ordnung von einer Form, welche nach S. 413 in G' nicht vorkommen kann. Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass ξ_s' und η_s' beide von z' frei sind.

Da ξ_s' und η_s' nicht beide verschwinden können, wollen wir voraussetzen, dass ξ_s' von Null verschieden ist (wenn $\xi_s' = 0$ ist und $\eta_s' \neq 0$, führt eine ganz ähnliche Rechnung zum Ziel). Combiniren wir jetzt $B^{(s)}f$ hinreichend oft nach einander mit $x'q' + \cdots$, so bekommen wir schliesslich eine Transformation von der Gestalt:

$$x'^s p' + \bar{\eta}_s q' + \cdots$$

und aus dieser durch Combination mit $p' + \cdots$:

$$s x'^{s-1} p' + \frac{\partial \bar{\eta}_s}{\partial x'} q' + \cdots.$$

Indem wir schliesslich den Ausdruck:

$$\left(x'^{s-1} p' + \frac{1}{s} \frac{\partial \bar{\eta}_s}{\partial x'} q' + \cdots, \quad x'^s p' + \bar{\eta}_s q' + \cdots\right) = x'^{2s-2} p' + \eta q' + \cdots$$

bilden, erhalten wir eine infinitesimale Transformation $(2s - 2)$-ter Ordnung, also muss $2s - 2 \leq s$ sein oder $s \leq 2$. Wenn daher $s > 1$ ist, hat es nothwendig den Werth 2.

Ist $s = 2$, so enthält unsre Gruppe G' eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$B^{(2)}f = x'^2 p' + (a x'^2 + b x' y' + c y'^2) q' + \cdots.$$

Indem wir hier einmal mit $p' + \cdots$ und einmal mit $q' + \cdots$ combiniren und uns daran erinnern, dass keine Transformation $y'q' + \cdots$ auftritt, finden wir: $b = -2$ und $c = 0$. Combiniren wir jetzt:

$$B^{(2)}f = x'^2 p' + (a x'^2 - 2 x' y') q' + \cdots$$

mit $x'q' + \cdots$, so kommt: $-3x'^2 q' + \cdots$ und endlich:

$$(x'^2 p' + (a x'^2 - 2 x' y') q' + \cdots, \quad x'^2 q' + \cdots) = 4 x'^3 q' + \cdots,$$

also eine Transformation dritter Ordnung. Das ist ein Widerspruch. Folglich kann s nicht grösser als 1 sein und unsere Gruppe G' kann keine infinitesimale Transformation enthalten, welche von den sechs Transformationen (20″) unabhängig ist.

Nunmehr müssen wir die Relationen aufsuchen, welche zwischen den sechs unabhängigen infinitesimalen Transformationen (20″) unsrer sechsgliedrigen Gruppe G' bestehen.

Der Bequemlichkeit halber führen wir gewisse Abkürzungen ein, indem wir setzen:

$$(23)\begin{cases} p'+\cdots=P,\ \ q'+\cdots=Q,\ \ r'+\cdots=R, \\ x'q'+\cdots=XQ,\ \ x'p'-y'q'+\cdots=XP-YQ,\ \ y'p'+\cdots=YP. \end{cases}$$

Dabei ist für uns zum Beispiel der Ausdruck XQ keineswegs das Produkt zweier Grössen X und Q, sondern nur das Symbol der infinitesimalen Transformation: $x'q'+\cdots$.

Die Relationen, welche zwischen den infinitesimalen Transformationen erster Ordnung von G' bestehen, können wir, da infinitesimale Transformationen höherer Ordnung nicht vorhanden sind, sofort hinschreiben. Sie lauten:

$$(24)\begin{cases} (XQ,\ XP-YQ)=-2XQ,\ \ (YP,\ XP-YQ)=2YP \\ (XQ,\ YP)=XP-YQ. \end{cases}$$

Ferner bestehen Relationen von der Form:

$$(Q,\ XQ)=\alpha_1 . XQ+\beta_1(XP-YQ)+\gamma_1 . YP$$
$$(Q,\ XP-YQ)=-Q+\alpha_2 . XQ+\beta_2(XP-YQ)+\gamma_2 . YP.$$

Um dieselben zu vereinfachen, führen wir durch die Substitution:

$$Q'=Q+A . XQ+B(XP-YQ)+C . YP$$

Q' an Stelle von Q ein, wodurch die Relation (21′), welche offenbar ausführlich geschrieben folgendermassen lautet:

$$(21'')\quad\begin{cases} (PQ)=R+\lambda' . P+\mu' . Q+\nu' . XQ+\pi'(XP-YQ)+ \\ \qquad +\varrho' . YP, \end{cases}$$

nicht wesentlich geändert wird. Wir bekommen:

$$(Q',\ XP-YQ)=-Q'+(\alpha_2-A)XQ+(\beta_1+B)(XP-YQ)+$$
$$+(\gamma_1+3C)YP$$

und indem wir jetzt: $A=\alpha_2$, $B=-\beta_1$, $3C=-\gamma_1$ wählen, erkennen wir, dass wir in dem Ausdrucke für $(Q,\ XP-YQ)$ einfach α_2, β_2 und γ_2 gleich Null setzen dürfen.

Wir können also annehmen, dass $(Q,\ XP-YQ)=-Q$ ist. Bilden wir aber die Identität:

$$((Q,\ XQ)XP-YQ)+((XQ,\ XP-YQ)Q)+$$
$$+((XP-YQ,\ Q)XQ)=0,$$

so bekommen wir:

$$\alpha_1 XQ+3\beta_1(XP-YQ)+5\gamma_1 . YP=0,$$

also ist: $\alpha_1=\beta_1=\gamma_1=0$ und demnach:

$$(Q,\ XQ)=0,\quad (Q,\ XP-YQ)=-Q.$$

Weiter findet eine Gleichung:

$$(Q, YP) = P + a \,.\, XQ + b(XP - YQ) + c \,.\, YP$$

statt; hier führen wir die rechte Seite als neues P ein, wodurch die Relation (21″) nicht wesentlich geändert wird und bekommen:

$$(Q, YP) = P.$$

Da ausserdem in der Identität:

$$((Q, YP)XQ) + ((YP, XQ)Q) + ((XQ, Q)YP) = 0$$

die beiden letzten Glieder nur $-Q$ ergeben, wird:

$$(P, XQ) = Q.$$

Nunmehr bilden wir die Identität:

$$((Q, YP)XP - YQ) + ((YP, XP - YQ)Q) +$$
$$+ ((XP - YQ, Q)YP) = 0$$

und finden:

$$(P, XP - YQ) = P.$$

Endlich wird:

$$(P, YP) = \alpha \,.\, XQ + \beta(XP - YQ) + \gamma \,.\, YP,$$

aber die Identität:

$$((P, YP)XP - YQ) + ((YP, XP - YQ)P) +$$
$$+ ((XP - YQ, P)YP) = 0$$

liefert sofort:

$$-5\alpha \,.\, XQ - 3\beta(XP - YQ) - \gamma \,.\, YP = 0,$$

folglich ist: $\alpha = \beta = \gamma = 0$ und:

$$(P, YP) = 0.$$

Damit haben wir die nachstehenden Relationen gewonnen:

$$(25) \quad \begin{cases} (P, XQ) = Q, & (P, XP - YQ) = P, & (P, YP) = 0 \\ (Q, XQ) = 0, & (Q, XP - YQ) = -Q, & (Q, YP) = P. \end{cases}$$

In der Gleichung (21″) führen wir die rechte Seite als neues R ein, dann wird:

$$(PQ) = R.$$

Nun ist aber:

$$((PQ)XQ) + ((Q, XQ)P) + ((XQ, P)Q) = 0$$
$$((PQ)XP - YQ) + ((Q, XP - YQ)P) + ((XP - YQ, P)Q) = 0$$
$$((PQ)YP) + ((Q, YP)P) + ((YP, P)Q) = 0$$

und daraus bekommen wir mit Benutzung von (25):

$$(R, XQ) = (R, XP - YQ) = (R, YP) = 0.$$

Ferner haben wir:

$$(PR) = \alpha' P + \beta' Q + \gamma' R + \delta' \,.\, XQ + \varepsilon'(XP - YQ) + \vartheta' \,.\, YP.$$

Durch Ausrechnung der Identität:

$$((PR)XP - YQ) + ((R,\ XP - YQ)P) + ((XP - YQ,\ P)R) = 0$$

ergiebt sich aber:

$$\alpha' P - \beta' Q - 2\delta' XQ + 2\vartheta' YP = (PR),$$

also wird: $(PR) = \alpha' P$ und natürlich ebenso: $(QR) = \beta'' Q$. Schliesslich liefern die beiden Identitäten:

$$((PR)XQ) + ((R,\ XQ)P) + ((XQ,\ P)R) = 0$$
$$((PQ)R) + ((QR)P) + ((RP)Q) = 0$$

die Relationen:

$$(\alpha' - \beta'')Q = 0, \qquad -(\beta'' + \alpha')R = 0,$$

so dass auch α' und β'' beide verschwinden.

Es bestehen also die Relationen:

$$(26) \qquad \begin{cases} (R,\ XQ) = (R,\ XP - YQ) = (R,\ YP) = 0 \\ (PQ) = R, \quad (PR) = (QR) = 0. \end{cases}$$

Hiermit sind alle Relationen, welche zwischen den sechs unabhängigen infinitesimalen Transformationen (20″) der sechsgliedrigen Gruppe G' bestehen, auf eine einfache kanonische Form gebracht.

Erwähnt mag werden, dass die infinitesimalen Transformationen P, Q, R u. s. w. unsrer Gruppe G' nunmehr nach geschehener Normierung die folgenden Formen besitzen:

$$P = p' + \cdots, \quad Q = q' + \cdots, \quad R = r' + \lambda'' p' + \mu'' q' + \cdots$$
$$XQ = x'q' + \cdots, \quad XP - YQ = x'p' - y'q' + \cdots, \quad YP = y'p' + \cdots.$$

Da nun aber: $(R,\ XQ)$ und $(R,\ YP)$ verschwinden, so ergiebt sich augenscheinlich: $\lambda'' = \mu'' = 0$, so dass auch R die einfache Form:

$$R = r' + \cdots$$

besitzt, wo die weggelassenen Glieder von erster und höherer Ordnung in x', y', z' sind.

Es erübrigt noch, die infinitesimalen Transformationen P, Q, R u. s. w. selbst zu bestimmen. Das werden wir jetzt thun und wählen dabei die Veränderlichen so, dass die Gruppe G' eine möglichst einfache Form erhält.

Die drei infinitesimalen Transformationen P, Q, R erzeugen in den Veränderlichen x', y', z' eine einfach transitive Gruppe. Betrachten wir andrerseits die drei infinitesimalen Transformationen:

$$p, \quad q + xr, \quad r,$$

welche, wie beiläufig bemerkt werden mag, die Pfaffsche Gleichung: $dz - y dx = 0$ invariant lassen. Offenbar erzeugen dieselben ihrerseits in den Veränderlichen x, y, z eine einfach transitive Gruppe und zwar eine, welche mit der Gruppe P, Q, R gleichzusammengesetzt ist. Es giebt mithin (Abschn. I, Theorem 64, S. 340) zwischen den Veränderlichen x', y', z' und x, y, z eine Transformation, vermöge deren die Gleichungen:

$$P = p, \quad Q = q + xr, \quad R = r$$

bestehen.

Bei der eben besprochenen Transformation erhält natürlich XQ eine neue Form:

$$XQ = \xi_1(x, y, z) \cdot p + \eta_1(x, y, z) \cdot q + \zeta_1(x, y, z) \cdot r,$$

wo ξ_1, η_1, ζ_1 wegen der Relationen:

$$(P, XQ) = Q, \quad (Q, XQ) = (R, XQ) = 0$$

den Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = x$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial y} + x\frac{\partial \xi_1}{\partial z} = \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + x\frac{\partial \eta_1}{\partial z} = \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + x\frac{\partial \zeta_1}{\partial z} - \xi_1 = 0$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial z} = \frac{\partial \eta_1}{\partial z} = \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} = 0$$

genügen müssen. Durch Integration findet man hieraus:

$$XQ = ap + (b + x)q + \left(c + ay + \frac{x^2}{2}\right)r,$$

wo a, b, c Constanten bezeichnen.

Ferner sei:

$$YP = \xi_2 \cdot p + \eta_2 \cdot q + \zeta_2 \cdot r.$$

Dann ergeben sich für ξ_2, η_2, ζ_2 aus den Relationen:

$$(P, YP) = 0, \quad (Q, YP) = P, \quad (R, YP) = 0$$

die folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x} = \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = \frac{\partial \xi_2}{\partial z} = \frac{\partial \eta_2}{\partial z} = \frac{\partial \zeta_2}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial y} + x\frac{\partial \xi_2}{\partial z} - 1 = \frac{\partial \eta_2}{\partial y} + x\frac{\partial \eta_2}{\partial z} = \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} + x\frac{\partial \zeta_2}{\partial z} - \xi_2 = 0$$

und aus diesen erhält man:

$$YP = (\alpha + y)p + \beta q + \left(\gamma + \alpha y + \frac{y^2}{2}\right)r,$$

wo α, β, γ ebenfalls Constanten sind. Wegen: $XP - YQ = (XQ, YP)$ kommt ausserdem:

$$XP - YQ = (b + x)p - (\alpha + y)q - \{\beta a - b(\alpha + y)\}r.$$

Nun muss: $(XQ,\ XP - YQ) = -2 \,.\, XQ$ sein, also:

$$ap - 2(b + x)q + \{b(b + x) - x(b + x) + a(\alpha + y)\}r = -2 \,.\, XQ,$$

woraus folgt: $a = 0$, $b^2 = -2c$. Ferner muss:

$$(YP,\ XP - YQ) = 2 \,.\, YP$$

werden, mithin:

$$2(\alpha + y)p - \beta q + \{b\beta + (\alpha + y)^2\}r = 2 \,.\, YP$$

oder: $\beta = 0$, $\alpha^2 = 2\gamma$. Man hat demnach:

$$XQ = (x + b)q + \tfrac{1}{2}(x^2 - b^2)r,$$
$$YP = (y + \alpha)p + \tfrac{1}{2}(y + \alpha)^2 r,$$
$$XP - YQ = (x + b)p - (y + \alpha)q + b(y + \alpha)r.$$

Wie man sich leicht überzeugt, sind jetzt auch die Relationen:

$$(P,\ XP - YQ) = P, \quad (Q,\ XP - YQ) = -Q$$
$$(R,\ XP - YQ) = 0$$

identisch erfüllt.

Um die Constanten α und b fortzuschaffen, setzen wir versuchsweise:

$$x'' = x + b, \quad y'' = y + \alpha, \quad z'' = \varphi(x, y, z),$$

was ergiebt:

$$p = p'' + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot r'', \quad r = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot r''$$
$$q + xr = q'' + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) r''.$$

Die infinitesimalen Transformationen p, $q + xr$, r bleiben nun offenbar bei Einführung der neuen Veränderlichen x'', y'', z'' ungeändert, wenn die Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\frac{\partial \varphi}{\partial z} = x'' = x + b$$

erfüllt sind, wenn also φ die Form:

$$\varphi = z + by + \text{const.}$$

besitzt. Legen wir aber diesen Werth von φ zu Grunde, so kommt:

$$P = p'', \quad Q = q'' + x''r'', \quad R = r''$$
$$XQ = x''q'' + \tfrac{1}{2}x''^2 r'', \quad YP = y''p'' + \tfrac{1}{2}y''^2 r''$$
$$XP - YQ = x''p'' - y''q''.$$

Damit haben wir die sechsgliedrige Gruppe:

$$(27) \qquad \boxed{p, \ q + xr, \ r, \ xq + \tfrac{1}{2}x^2 r, \ xp - yq, \ yp + \tfrac{1}{2}y^2 r}$$

gefunden. Mit derselben ist die auf S. 413 definirte Gruppe G' durch eine Punkttransformation zwischen den Veränderlichen x, y, z und x', y', z' ähnlich, G' aber ist seinerseits durch die Transformation (22) mit der Gruppe G ähnlich, auf deren Bestimmung es uns eigentlich ankommt. Mithin ergiebt sich, dass jede Gruppe G von Berührungstransformationen der Ebene x, z, welche die im Anfange des gegenwärtigen Paragraphen angegebenen Eigenschaften besitzt, durch eine Punkttransformation in den Veränderlichen x, y, z mit der Gruppe (27) ähnlich ist.

Die Gruppe (27) ist nun aber eine Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z, denn alle ihre infinitesimalen Transformationen sind infinitesimale Berührungstransformationen, das zeigt die Tabelle (11) auf S. 405. Die Gruppe (27) erfüllt überdies offenbar alle im Anfange dieses Paragraphen (S. 412) gestellten Forderungen; sie ist also irreducibel und lässt keine Pfaffsche Gleichung invariant, welche von der Gleichung $dz - ydx = 0$ verschieden ist.

Ferner wissen wir, dass jede andere Gruppe G von Berührungstransformationen der Ebene x, z, welche die auf S. 412 angegebenen Eigenschaften besitzt, keine weitere Pfaffsche Gleichung invariant lassen kann, als eben die Gleichung $dz - ydx = 0$. Hieraus folgt, dass die Transformation in den Veränderlichen x, y, z, welche eine beliebige Gruppe G in die Gruppe (27) überführt, zu gleicher Zeit die Pfaffsche Gleichung: $dz - ydx = 0$ in sich selbst überführt, mit andern Worten, dass sie eine Berührungstransformation der Ebene x, z ist.

Wir sehen demnach, dass jede irreducible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z, welche die im Anfange des gegenwärtigen Paragraphen angegebenen Eigenschaften besitzt, durch eine *Berührungstransformation* mit der Gruppe (27) ähnlich ist.

Es scheint zweckmässig, noch einen anderen Beweis für die Irreducibilität der Gruppe (27) zu erbringen.

Zunächst besteht sie nicht aus lauter erweiterten Punkttransformationen der Ebene x, z, denn sie enthält eine infinitesimale Berührungstransformation, nämlich: $yp + \frac{1}{2}y^2 r$, welche augenscheinlich nicht durch Erweiterung einer infinitesimalen Punkttransformation:

$$\xi(x, z)p + \eta(x, z)q$$

der Ebene x, z entstanden ist. Wäre daher die Gruppe (27) reducibel, so müsste sie (vgl. Satz 1, S. 392 und die nach diesem Satze gemachte Bemerkung) eine lineare partielle Differentialgleichung von der Form:

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial z} + \omega(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{28}$$

invariant lassen.

Um ω zu bestimmen, combiniren wir Af nach einander mit: p, r, $q + xr$ und finden so die Gleichungen:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

welche unter der gemachten Voraussetzung vermöge: $Af = 0$ bestehen müssen (s. Abschn. I, Theorem 20, S. 140). Daraus folgt, dass ω eine Constante ist. Durch Combination mit: $xp - yq$ ergiebt sich nunmehr:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial z} - \omega\frac{\partial f}{\partial y},$$

also muss ω gleich Null sein. Endlich combiniren wir:

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial z}$$

mit: $xq + \frac{1}{2}x^2r$ und bekommen so die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

welche vermöge $Af = 0$ nicht bestehen kann. Das ist ein Widerspruch, also kann die Gruppe (27) keine Differentialgleichung von der besonderen Form (28) invariant lassen, sie ist wirklich irreducibel.

Nunmehr können wir das folgende Theorem aussprechen:

Theorem 66. *Enthält eine Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z, deren infinitesimale Transformationen sich in der Umgebung des Werthsystems $x = y = z = 0$ regulär verhalten, sechs unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:*

$$p + \cdots, \quad q + \cdots, \quad r + \cdots$$
$$(x + \alpha z)q + \cdots, \quad (y + \beta z)p + \cdots$$
$$(x + \alpha z)p - (y + \beta z)q + \cdots,$$

und enthält sie keine infinitesimale Transformation von erster Ordnung in x, y, z, deren Glieder erster Ordnung sich nicht aus:

$$(x + \alpha z)q, \quad (x + \alpha z)p - (y + \beta z)q, \quad (y + \beta z)p$$

linear ableiten lassen, so ist sie sechsgliedrig und ist mit der irreducibeln Gruppe:

$$(27) \qquad \boxed{p, \quad q + xr, \quad r, \quad xq + \tfrac{1}{2}x^2r, \quad xp - yq, \quad yp + \tfrac{1}{2}y^2r}$$

von Berührungstransformationen der Ebene x, z durch eine Berührungstransformation dieser Ebene ähnlich.

Erwähnt sei noch, dass die charakteristischen Functionen der infinitesimalen Berührungstransformationen (27) die folgenden sind:

$$\boxed{1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2},$$

dabei ist von der Reihenfolge und von Zahlenfaktoren der Transformationen (27) abgesehen.

§ 103.

Jetzt suchen wir alle Gruppen von Berührungstransformationen, welche in der Umgebung von $x = y = z = 0$ sieben infinitesimale Transformationen von der Form:

$$(29)\quad \begin{cases} p + \cdots,\quad q + \cdots,\quad r + \cdots \\ (x+\alpha z)q + \cdots,\quad (x+\alpha z)p - (y+\beta z)q + \cdots,\quad (y+\beta z)p + \cdots \\ (x + \alpha z)p + (y + \beta z)q + 2z(r - \alpha p - \beta q) + \cdots \end{cases}$$

enthalten, dabei vorausgesetzt, dass sich in jeder infinitesimalen Transformation der Gruppe, welche in x, y, z von der ersten Ordnung ist, die Glieder erster Ordnung aus:

$$(x + \alpha z)q,\quad (x + \alpha z)p - (y + \beta z)q,\quad (y + \beta z)p$$
$$(x + \alpha z)p + (y + \beta z)q + 2z(r - \alpha p - \beta q)$$

linear ableiten lassen. Unter G verstehen wir wiederum eine beliebige Gruppe, welche die gestellten Forderungen erfüllt.

Wir führen wieder die neuen Veränderlichen:

$$x' = x + \alpha z,\quad y' = y + \beta z,\quad z' = z$$

ein und erhalten so an Stelle von G eine neue Gruppe G', welche in der Umgebung von $x' = y' = z' = 0$ sieben infinitesimale Transformationen von der Form:

$$(29')\quad \begin{cases} p' + \cdots,\quad q' + \cdots,\quad r' + \cdots \\ x'q' + \cdots,\quad x'p' - y'q' + \cdots,\quad y'p' + \cdots \\ x'p' + y'q' + 2z'r' + \cdots \end{cases}$$

enthält. Dabei wissen wir von vornherein, dass eine Relation von der Form:

$$(p' + \cdots,\ q' + \cdots) = r' + \lambda p' + \mu q' + \cdots$$

besteht, wo die weggelassenen Glieder in x', y', z' von der zweiten und von höherer Ordnung sind.

Die Gruppe G' kann noch infinitesimale Transformationen von zweiter und höherer Ordnung in x', y', z' enthalten, etwa bis mit zur s-ten Ordnung, und zwar sei:

$$B^{(s)}f = \xi_s' \frac{\partial f}{\partial x'} + \eta_s' \frac{\partial f}{\partial y'} + \zeta_s' \frac{\partial f}{\partial z'} + \cdots$$

eine ihrer Transformationen von s-ter Ordnung in x', y', z'.

Wie im vorigen Falle erkennt man leicht, dass ξ_s' und η_s' von z' frei sein müssen. Ferner können x' und y' unmöglich in ζ_s' vorkommen, sonst ergäbe sich nämlich durch wiederholte Combination mit: $r' + \cdots$ und wenn nöthig noch mit: $p' + \cdots$, $q' + \cdots$ eine nicht in der Gruppe vorhandene Transformation von erster Ordnung in x', y', z'. Also hat $B^{(s)}f$ die Form:

$$\xi_s'(x', y') \cdot p' + \eta_s'(x', y') \cdot q' + C \cdot z'^s r' + \cdots .$$

Wäre C von Null verschieden, so würde sich durch $(s - 1)$-malige Combination mit: $r' + \cdots$ eine unzulässige Transformation erster Ordnung ergeben, nämlich: $z'r' + \cdots$, also muss C verschwinden. Nunmehr aber ergiebt sich genau so wie im vorigen Paragraphen, dass die Möglichkeit $s > 1$ ausgeschlossen ist, dass also G' keine infinitesimale Transformation enthält, welche von den sieben (29′) unabhängig ist.

Für die sechs ersten der Transformationen (29′) führen wir wie früher die Symbole P, Q, R, XQ, $XP - YQ$, YP ein und setzen ausserdem $x'p' + y'q' + 2z'r' + \cdots = U$; dann ist ohne Weiteres:

$$(30) \quad \begin{cases} (XQ,\ XP - YQ) = -2XQ,\ (XQ,\ YP) = XP - YQ, \\ \qquad (YP,\ XP - YQ) = 2YP \\ (XQ,\ U) = 0,\quad (XP - YQ,\ U) = 0,\quad (YP,\ U) = 0. \end{cases}$$

Ferner bestehen Relationen von der Form:

$$(PU) = P + \sum_1^3{}^i \alpha_i T_i + \beta U$$

$$(QU) = Q + \sum_1^3{}^i \gamma_i T_i + \delta U,$$

wo T_1, T_2, T_3 zur Abkürzung für XQ, $XP - YQ$, YP geschrieben sind. Führen wir hier die rechten Seiten bezüglich als neues P und als neues Q ein, so wird einfach:

$$(31) \qquad (PU) = P, \quad (QU) = Q.$$

Die Identität:

$$((PU)T_i) + ((UT_i)P) + ((T_iP)U) = 0$$

liefert nunmehr sofort den Werth von (PT_i) und in entsprechender Weise erhalten wir den Werth von (QT_i), es wird nämlich:

$$(32) \quad \begin{cases} (P,\ XQ) = Q,\quad (P,\ XP - YQ) = P,\quad (P,\ YP) = 0 \\ (Q,\ YP) = P,\quad (Q,\ XP - YQ) = -Q,\quad (Q,\ XQ) = 0. \end{cases}$$

Wie im vorigen Falle setzen wir: $(PQ) = R$, dann finden wir durch Bildung der Identitäten:

$$((PQ)T_i) + ((QT_i)P) + ((T_iP)Q) = 0$$
$$((PQ)U) + (QP) - (PQ) = 0$$

die Relationen:

$$(33)\qquad \begin{cases}(R, XQ) = (R, XP - YQ) = (R, YP) = 0\\ (RU) = 2R.\end{cases}$$

Endlich ist:

$$(PR) = \alpha'P + \beta'Q + \gamma'R + \sum_1^3{}^i \delta_i'T_i + \varepsilon'U,$$

aus der Identität:

$$((PR)U) + 2(RP) - (PR) = 0$$

geht aber augenblicklich hervor, dass: $\alpha' = \beta' = \cdots = \varepsilon' = 0$, also bestehen die Relationen:

$$(34)\qquad (PQ) = R, \quad (PR) = (QR) = 0.$$

Damit sind alle Relationen zwischen den sieben infinitesimalen Transformationen der Gruppe G' auf eine kanonische Form gebracht.

Offenbar enthält G' eine sechsgliedrige Untergruppe, nämlich die, welche von den sechs infinitesimalen Transformationen:

$$P, \quad Q, \quad R, \quad XQ, \quad XP - YQ, \quad YP$$

erzeugt wird. Da nun diese sechsgliedrige Gruppe die im Anfange des vorigen Paragraphen gestellten Forderungen erfüllt, so ist es möglich, sie durch Einführung geeigneter neuer Veränderlicher auf die Form:

$$(35)\qquad p, \quad q + xr, \quad r, \quad xq + \tfrac{1}{2}x^2r, \quad xp - yq, \quad yp + \tfrac{1}{2}y^2r$$

zu bringen.

Die neue Form: $\xi p + \eta q + \zeta r$, welche U bei der betreffenden Variabelnänderung erhält, bestimmt sich aus den Relationen:

$$(PU) = P, \quad (RU) = 2R, \quad (QU) = Q,$$
$$(XP - YQ, U) = 0.$$

Diese liefern folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 2$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} + x\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial y} + x\frac{\partial \eta}{\partial z} - 1 = \frac{\partial \zeta}{\partial y} + x\frac{\partial \zeta}{\partial z} - \xi - x = 0$$

$$x\frac{\partial \xi}{\partial x} - y\frac{\partial \xi}{\partial y} - \xi = x\frac{\partial \eta}{\partial x} - y\frac{\partial \eta}{\partial y} + \eta = x\frac{\partial \zeta}{\partial x} - y\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0,$$

aus denen sich durch Integration ergiebt:

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = 2(z + c).$$

Führen wir schliesslich noch $z + c$ als neues z ein, wodurch die Untergruppe (35) nicht geändert wird, so erhält U die Form:

$$U = xp + yq + 2zr$$

und befriedigt offenbar auch noch die Relationen:

$$(XQ,\ U) = (YP,\ U) = 0.$$

Demnach erhält die Gruppe G' in den neuen Veränderlichen x, y, z die Gestalt:

$$(36)\qquad \boxed{\begin{array}{c} p,\ \ q + xr,\ \ r,\ \ xq + \tfrac{1}{2}x^2 r,\ \ xp - yq,\ \ yp + \tfrac{1}{2}y^2 r \\ xp + yq + 2zr \end{array}}$$

Die infinitesimalen Transformationen (36) sind, wie die Tabelle (11), S. 405 zeigt, sämmtlich infinitesimale Berührungstransformationen. Demnach ist die Gruppe (36) eine Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z und zwar eine irreducible, denn sie enthält ja die sechsgliedrige Untergruppe (35), welche nach S. 420 irreducibel ist. Hieraus folgt gerade so wie im vorigen Paragraphen das

Theorem 67. *Enthält eine Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z, deren infinitesimale Transformationen sich in der Umgebung des Werthsystems: $x = y = z = 0$ regulär verhalten, sieben unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:*

$$p + \cdots, \quad q + \cdots, \quad r + \cdots$$
$$(x + \alpha z)q + \cdots, \quad (x + \alpha z)p - (y + \beta z)q + \cdots, \quad (y + \beta z)p + \cdots$$
$$(x + \alpha z)p + (y + \beta z)q + 2z(r - \alpha p - \beta q) + \cdots$$

und enthält sie keine infinitesimale Transformation von erster Ordnung in x, y, z, deren Glieder erster Ordnung sich nicht aus:

$$(x + \alpha z)q, \quad (x + \alpha z)p - (y + \beta z)q, \quad (y + \beta z)p$$
$$(x + \alpha z)p + (y + \beta z)q + 2z(r - \alpha p - \beta q)$$

linear ableiten lassen, so ist sie siebengliedrig und mit der irreducibeln Gruppe:

$$(36)\qquad \boxed{\begin{array}{c} p,\ \ q + xr,\ \ r,\ \ xq + \tfrac{1}{2}x^2 r,\ \ xp - yq,\ \ yp + \tfrac{1}{2}y^2 r \\ xp + yq + 2zr \end{array}}$$

von Berührungstransformationen der Ebene x, z durch eine Berührungstransformation dieser Ebene ähnlich.

Die charakteristischen Functionen der infinitesimalen Berührungstransformationen (36) lauten, wenn von der Reihenfolge und von Zahlenfaktoren abgesehen wird, folgendermassen:

$$\boxed{1, \quad x, \quad y, \quad z - \tfrac{1}{2}xy, \quad x^2, \quad xy, \quad y^2}$$

§ 104.

Von den auf S. 411 unterschiedenen vier Fällen sind jetzt noch der dritte und der vierte zu erledigen.

In dem dritten Falle handelt es sich um die Bestimmung aller Gruppen von Berührungstransformationen, welche acht unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$p + \cdots, \quad q + \cdots, \quad r + \cdots$$
$$xq + \cdots, \quad xp - yq + \cdots, \quad yp + \cdots, \quad zp + \cdots, \quad zq + \cdots$$

enthalten, dabei vorausgesetzt, dass in jeder infinitesimalen Transformation der Gruppe, welche in den x, y, z von erster Ordnung ist, die Glieder erster Ordnung aus:

$$xq, \quad xp - yq, \quad yp, \quad zp, \quad zq$$

linear abgeleitet werden können.

Die beiden infinitesimalen Berührungstransformationen:

$$q + \cdots, \quad zp + \cdots$$

haben zwei charakteristische Functionen, deren Reihenentwickelungen bezüglich lauten:

$$-x - \alpha z + \cdots, \quad yz + \varkappa z^2 + \cdots,$$

wo α und $\varkappa$ gewisse nicht näher bestimmbare Constanten bezeichnen. Nach S. 405 besitzt daher die infinitesimale Berührungstransformation $(q + \cdots,\ zp + \cdots)$ die charakteristische Function:

$$-\frac{\partial}{\partial y}(x + \alpha z) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(yz + \varkappa z^2) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x}(x + \alpha z) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(yz + \varkappa z^2) + \cdots = z + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder von zweiter und höherer Ordnung in x, y, z sind. Eine infinitesimale Berührungstransformation mit einer charakteristischen Function von der Form: $z + \cdots$ hat nun, wie man sich leicht überzeugt (vgl. S. 405), die Gestalt:

$$-(yq + zr) + \lambda . xq + \mu(xp - yq) + \nu . yp + \pi . zp + \varrho . zq + \cdots,$$

wo λ, μ, ν, π, ϱ gewisse Constanten sind und wo die weggelassenen Glieder in x, y, z die zweite oder eine noch höhere Ordnung haben.

Das Auftreten einer solchen infinitesimalen Transformation ist aber in unserem Falle ausgeschlossen, also kommen wir auf einen Widerspruch.

Damit ist bewiesen, dass es Gruppen von der verlangten Beschaffenheit überhaupt nicht giebt.

Wir kommen zum vierten und letzten Falle.

Gesucht werden alle Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene x, z, welche neun infinitesimale Transformationen von der Form:

$$(37)\quad \begin{cases} P=p+\cdots, \quad Q=q+\cdots, \quad R=r+\cdots \\ XQ=xq+\cdots, \quad XP-YQ=xp-yq+\cdots, \quad YP=yp+\cdots \\ U=xp+yq+2zr+\cdots, \quad ZP=zp+\cdots, \quad ZQ=zq+\cdots \end{cases}$$

enthalten. Vorausgesetzt wird, dass die betreffenden Gruppen keine infinitesimale Transformation von erster Ordnung in x, y, z enthalten, deren Glieder erster Ordnung sich nicht aus:

$$xq, \quad xp-yq, \quad yp, \quad xp+yq+2zr, \quad zp, \quad zq$$

linear ableiten lassen. Wir erinnern überdies daran, dass von vornherein das Bestehen einer Relation von der Form:

$$(p+\cdots, \quad q+\cdots)=r+\lambda p+\mu q+\cdots$$

bekannt ist, wo die weggelassenen Glieder in x, y, z von erster und höherer Ordnung sind (s. S. 407).

Unter G verstehen wir wieder irgend eine Gruppe, welche den gestellten Forderungen genügt.

Da die beiden infinitesimalen Berührungstransformationen: ZP und ZQ charakteristische Functionen von der Form: $yz+\alpha z^2+\cdots$ und: $-xz+\beta z^2+\cdots$ haben, so besitzt (ZP, ZQ), welches natürlich ebenfalls der Gruppe G angehört, nach S. 405 die charakteristische Function: $-z^2+\cdots$ und hat daher die Form:

$$(ZP, ZQ)=\xi_2\cdot p+\eta_2\cdot q+z^2r+\cdots,$$

wo ξ_2 und η_2 ganze homogene Functionen zweiten Grades von x, y, z sind, während die Ordnung der weggelassenen Glieder grösser als 2 ist.

Es gebe nun in der Gruppe G weitere infinitesimale Transformationen, deren Ordnung in x, y, z grösser als 1 und etwa höchstens gleich s ist und:

$$B^{(s)}f=\xi_s\cdot p+\eta_s\cdot q+\zeta_s\cdot r+\cdots$$

sei eine Transformation s-ter Ordnung von G. Wie in § 102 ergiebt sich da zunächst, dass ζ_s die Form: $C\,.\,z^s$ besitzen muss. Ist nun $s>2$, so erhält man durch Combination von $B^{(s)}f$ mit: $\xi_2 p+\eta_2 p+z^2r+\cdots$ eine Transformation $(s+1)$-ter Ordnung:

$$\xi_{s+1}p + \eta_{s+1}q + C \,.\, z^{s+1}r + \cdots,$$

also muss C den Werth Null haben; ist andrerseits $s = 2$, so kann man mit Hülfe von: $\xi_2 p + \eta_2 q + z^2 r + \cdots$ das C fortschaffen. In allen Fällen kommt man also auf eine Transformation von der Gestalt:

$$\xi_s(x,\, y,\, z)p + \eta_s(x,\, y,\, z)q + \cdots.$$

Indem man diese Transformation wiederholt mit $zp + \cdots$ und $zq + \cdots$ combinirt, erhält man schliesslich:

$$Az^s p + Bz^s q + \cdots,$$

wo A und B nicht beide verschwinden können und durch Combination mit: $xq + \cdots$ und $yp + \cdots$ findet man die beiden Transformationen: $z^s p + \cdots$, $z^s q + \cdots$.

Die Ausdrücke:

$$(z^s p + \cdots,\quad \xi_2 p + \eta_2 q + z^2 r + \cdots)$$
$$(z^s q + \cdots,\quad \xi_2 p + \eta_2 q + z^2 r + \cdots)$$

sind infinitesimale Transformationen $(s + 1)$-ter Ordnung und müssen daher identisch verschwinden. Das giebt:

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x} - sz = 0, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - sz = 0, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = \frac{\partial \xi_2}{\partial y} = 0$$

oder:

$$\xi_2 = sxz + l \,.\, z^2, \qquad \eta_2 = syz + m \,.\, z^2.$$

Durch Combination von: $\xi_2 p + \eta_2 q + z^2 r + \cdots$ mit $r + \cdots$ erhält man also eine Transformation erster Ordnung:

$$(sx + 2lz)p + (sy + 2mz)q + 2zr + \cdots,$$

welche in G enthalten sein muss. Das aber ist nur möglich, wenn $s = 1$ ist und dieser Fall ist gerade ausgeschlossen.

Hiermit ist bewiesen, dass G ausser der infinitesimalen Transformation:

$$\xi_2 p + \eta_2 q + z^2 r + \cdots$$

keine infinitesimale Transformation enthalten kann, deren Ordnung in x, y, z grösser als 1 ist.

Um ξ_2 und η_2 zu bestimmen, bemerken wir, dass die Ausdrücke:

$$(zp + \cdots,\quad \xi_2 p + \eta_2 q + z^2 r + \cdots)$$
$$(zq + \cdots,\quad \xi_2 p + \eta_2 q + z^2 r + \cdots)$$

verschwinden müssen, weil sie sonst infinitesimale Transformationen von zweiter Ordnung lieferten, die in G enthalten wären, aber nicht die Form: $\xi_2 p + \eta_2 q + z^2 r + \cdots$ besässen. Daraus bekommen wir ähnlich wie vorhin:

$$\xi_2 = xz + lz^2, \qquad \eta_2 = yz + mz^2$$

und durch Combination mit: $xq+\cdots$, $yp+\cdots$ ergiebt sich endlich, dass l und m gleich Null sind.

Zu den schon angegebenen neun infinitesimalen Transformationen (37) der Gruppe G tritt demnach nur noch eine hinzu, nämlich:

$$V = xzp + yzq + z^2r + \cdots$$

und zwar ist nach dem Obigen: $(ZP, ZQ) = V$.

Wir gehen jetzt dazu über, die Relationen aufzustellen, welche zwischen den zehn infinitesimalen Transformationen von G bestehen. Dabei bezeichnen wir, wie schon in § 103, die Ausdrücke: XQ, $XP - YQ$, YP gelegentlich kurz mit T_1, T_2, T_3.

Es ist sofort:

$$(38)\qquad \begin{cases} (XQ, V) = (XP - YQ, V) = (YP, V) = 0 \\ (ZP, V) = (ZQ, V) = 0, \quad (UV) = 2V \\ (ZP, ZQ) = V. \end{cases}$$

Ferner bestehen gewisse Relationen von der Form:

$$(T_i U) = a_i V \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$(ZP, U) = -ZP + bV, \quad (ZQ, U) = -ZQ + cV.$$

Indem wir hier zu jeder der Transformationen: T_i, ZP, ZQ ein geeignetes Vielfaches von V hinzufügen, können wir a_i, b und c zum Verschwinden bringen, ohne dass die Relationen (38) geändert werden, wir bekommen somit:

$$(39)\qquad \begin{cases} (ZP, U) = -ZP, \quad (ZQ, U) = -ZQ \\ (XQ, U) = (XP - YQ, U) = (YP, U) = 0. \end{cases}$$

Bilden wir die Identität zwischen T_i, $T_\varkappa$ und U, so finden wir, weil $(T_i U)$ und $(T_\varkappa U)$ verschwinden, dass auch $((T_i T_\varkappa) U)$ immer gleich Null ist. Nun hat $(T_i T_\varkappa)$ die Form: $\delta_{i\varkappa} T_j + \beta_{i\varkappa} V$, wo $\delta_{i\varkappa}$ einen der Werthe -2, $+1$, $+2$ besitzt, also muss jedes $\beta_{i\varkappa}$ gleich Null sein und es gilt:

$$(40)\qquad \begin{cases} (XQ, XP - YQ) = -2XQ, \quad (YP, XP - YQ) = 2YP \\ (XQ, YP) = XP - YQ. \end{cases}$$

Bezeichnen wir ZP und ZQ mit S_1 und S_2, so bestehen Gleichungen von der Form:

$$(T_i S_\varkappa) = \varepsilon_{i\varkappa} S_j + \gamma_{i\varkappa} V,$$

wo ε die Werthe 0, 1, -1 haben kann. Die Identität:

$$((T_i S_\varkappa) U) - (S_\varkappa T_i) = 0$$

zeigt aber, dass $\gamma_{i\varkappa}$ verschwindet, folglich wird:

$$(41)\qquad \begin{cases} (ZP, XQ) = ZQ, \quad (ZP, XP - YQ) = ZP, \quad (ZP, YP) = 0 \\ (ZQ, XQ) = 0, \quad (ZQ, XP - YQ) = -ZQ, \quad (ZQ, YP) = ZP. \end{cases}$$

In die Gleichung:

$$(RU) = 2R + \Sigma\alpha_i T_i + \Sigma\beta_\varkappa S_\varkappa + \gamma U + \delta V$$

führen wir:

$$R + \tfrac{1}{2}(\Sigma\alpha_i T_i + \gamma U) + \tfrac{1}{3}\Sigma\beta_\varkappa S_\varkappa + \tfrac{1}{4}\delta V$$

als neues R ein und bekommen so: $(RU) = 2R$. Weiter ist: $(RV) = U + aV$, die Identität:

$$((RV)U) - 2(VR) - 2(RV)$$

zeigt aber, dass a verschwindet, also ist: $(RV) = U$. Weiter haben wir:

$$(RT_i) = \Sigma\lambda_i T_i + \Sigma\mu_\varkappa S_\varkappa + \nu U + \pi V,$$

jedoch ergiebt sich aus der Identität:

$$((RT_i)U) - 2(RT_i) = 0$$

sofort: $(RT_i) = 0$. Es bestehen also die Relationen:

$$(42) \qquad \begin{cases} (RV) = U, \quad (RU) = 2R \\ (R,\ XQ) = (R,\ XP - YQ) = (R,\ YP) = 0 \end{cases}$$

Die Transformationen P und Q normiren wir so, dass:

$$(43) \qquad (R,\ ZP) = P, \quad (R,\ ZQ) = Q$$

wird. Sodann bilden wir die Identitäten:

$$((RS_i)T_\varkappa) + ((S_i T_\varkappa)R) + ((T_\varkappa R)S_i) = 0,$$

indem wir uns erinnern, dass $(RT_i) = 0$ und $(T_i S_\varkappa) = \varepsilon_{i\varkappa} S_j$ ist. Wir finden:

$$(44) \quad \begin{cases} (P,\ XQ) = Q, \quad (P,\ XP - YQ) = P, \quad (P,\ YP) = 0 \\ (Q,\ XQ) = 0, \quad (Q,\ XP - YQ) = -Q, \quad (Q,\ YP) = P. \end{cases}$$

Gerade so zeigen die Identitäten:

$$((RS_\varkappa)V) + ((S_\varkappa V)R) + ((VR)S_\varkappa) = 0$$
$$((RS_\varkappa)U) + ((S_\varkappa U)R) + ((UR)S_\varkappa) = 0,$$

dass die Relationen:

$$(45) \qquad \begin{cases} (PV) = ZP, \quad (QV) = ZQ \\ (PU) = P, \quad (QU) = Q \end{cases}$$

stattfinden.

Die beiden Identitäten:

$$((P,\ ZP)YP) = 0, \quad ((P,\ ZP)XP - YQ) - 2(P,\ ZP) = 0$$

lassen erkennen, dass in dem Ausdrucke:

$$(P,\ ZP) = \alpha' . XQ + \beta' . (XP - YQ) + \gamma' . YP +$$
$$+ \delta' . ZP + \varepsilon' . ZQ + \vartheta' . U + \varkappa' . V$$

alle Coefficienten verschwinden, mit Ausnahme von γ', dass also: $(P, ZP) = \gamma' . YP$ ist. Ferner haben wir:

$$((R, ZP)ZQ) + (VR) + ((ZQ, R)ZP) = 0$$
$$((P, ZP)XQ) + (ZQ, P) - (Q, ZP) = 0,$$

woraus folgt:

$$(P, ZQ) - (Q, ZP) = U, \quad (P, ZQ) + (Q, ZP) = -\gamma'(XP - YQ)$$

oder:

$$(P, ZQ) = \tfrac{1}{2}U - \tfrac{1}{2}\gamma'(XP - YQ)$$
$$(Q, ZP) = -\tfrac{1}{2}U - \tfrac{1}{2}\gamma'(XP - YQ).$$

Aus der Identität:

$$((P, ZP)ZQ) + (VP) + ((ZQ, P)ZP) = 0$$

ergiebt sich nunmehr:

$$-\gamma' . ZP - ZP - \tfrac{1}{2}ZP - \tfrac{1}{2}\gamma' . ZP = 0$$

also: $\gamma' = -1$, und die Identität:

$$((Q, ZP)XQ) + (ZQ, Q) = 0$$

liefert noch: $(Q, ZQ) = XQ$. Somit bestehen die Relationen:

$$(46) \qquad \begin{cases} (P, ZP) = -YP, & (P, ZQ) = \tfrac{1}{2}(XP - YQ) + \tfrac{1}{2}U \\ (Q, ZQ) = XQ, & (Q, ZP) = \tfrac{1}{2}(XP - YQ) - \tfrac{1}{2}U. \end{cases}$$

Durch Bildung der Identität:

$$((PR)U) - 3(PR) = 0$$

bekommen wir sofort: $(PR) = 0$ und ebenso wird: $(QR) = 0$. Endlich finden wir noch aus der Identität:

$$((R, ZP)Q) - \tfrac{1}{2}(XP - YQ - U, R) = 0$$

die Relation: $(PQ) = R$. Also ist:

$$(47) \qquad (PR) = (QR) = 0, \quad (PQ) = R.$$

Damit sind alle Relationen zwischen den zehn infinitesimalen Transformationen von G auf eine einfache kanonische Form gebracht.

Nun erzeugen die sieben infinitesimalen Transformationen:

$$P, \ Q, \ R, \ XQ, \ XP - YQ, \ YP, \ U$$

augenscheinlich eine siebengliedrige Untergruppe von G und diese Untergruppe ist nach Theorem 67, S. 425 durch eine Berührungstransformation der Ebene x, z mit der Gruppe:

$$p, \ q + xr, \ r, \ xq + \tfrac{1}{2}x^2 r, \ xp - yq, \ yp + \tfrac{1}{2}y^2 r$$
$$xp + yq + 2zr$$

ähnlich. Denken wir uns daher vermöge dieser Berührungstransformation in G neue Veränderliche eingeführt, so wird:

$$P = p, \quad Q = q + xr, \quad R = r, \quad U = xp + yq + 2zr$$
$$XQ = xq + \tfrac{1}{2}x^2 r, \quad XP - YQ = xp - yq, \quad YP = yp + \tfrac{1}{2}y^2 r.$$

Die neue Form: $\xi p + \eta q + \zeta r$, welche die Transformation ZP in den neuen Veränderlichen erhält, bestimmt sich aus den Relationen:

$$(P, ZP) = -(yp + \tfrac{1}{2}y^2 r), \quad (R, ZP) = p$$
$$(Q, ZP) = -(yq + zr), \quad (U, ZP) = ZP,$$

welche ergeben:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -y, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\tfrac{1}{2}y^2$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial y} + x\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial y} + x\frac{\partial \eta}{\partial z} + y = \frac{\partial \zeta}{\partial y} + x\frac{\partial \zeta}{\partial z} - \xi + z = 0$$
$$x\frac{\partial \xi}{\partial x} + y\frac{\partial \xi}{\partial y} + 2z\frac{\partial \xi}{\partial z} = 2\xi, \quad x\frac{\partial \eta}{\partial x} + y\frac{\partial \eta}{\partial y} + 2z\frac{\partial \eta}{\partial z} = 2\eta$$
$$x\frac{\partial \zeta}{\partial x} + y\frac{\partial \zeta}{\partial y} + 2z\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 3\zeta.$$

Wir finden hieraus:

$$\xi = z - xy, \quad \eta = -\tfrac{1}{2}y^2, \quad \zeta = -\tfrac{1}{2}xy^2$$

und mithin:

$$ZP = (z - xy)p - \tfrac{1}{2}y^2 q - \tfrac{1}{2}xy^2 r.$$

Ferner ist: $(ZP, XQ) = ZQ$, also:

$$ZQ = \tfrac{1}{2}x^2 p + zq + xzr$$

und endlich wird:

$$(ZP, ZQ) = V = (xz - \tfrac{1}{2}x^2 y)p + (yz - \tfrac{1}{2}xy^2)q + (z^2 - \tfrac{1}{4}x^2 y^2)r.$$

Unsre Gruppe G hat demnach in den neuen Veränderlichen die Gestalt:

$$(48) \quad \boxed{\begin{array}{c} p,\ q + xr,\ r,\ xq + \tfrac{1}{2}x^2 r,\ xp - yq,\ yp + \tfrac{1}{2}y^2 r \\ xp + yq + 2zr,\ (z - xy)p - \tfrac{1}{2}y^2 q - \tfrac{1}{2}xy^2 r,\ \tfrac{1}{2}x^2 p + zq + xzr \\ (xz - \tfrac{1}{2}x^2 y)p + (yz - \tfrac{1}{2}xy^2)q + (z^2 - \tfrac{1}{4}x^2 y^2)r \end{array}}$$

Die infinitesimalen Transformationen (48) lassen alle zehn die Pfaffsche Gleichung: $dz - ydx = 0$ invariant und sind daher infinitesimale Berührungstransformationen der Ebene x, z; ihre charakteristischen Functionen lauten nämlich, wenn von der Reihenfolge und von Zahlenfaktoren abgesehen wird, folgendermassen:

$$\left|\begin{array}{c} 1,\ \ x,\ \ y,\ \ z-\frac{1}{2}xy,\ \ x^2,\ \ xy,\ \ y^2 \\ x(z-\frac{1}{2}xy),\ \ y(z-\frac{1}{2}xy),\ \ (z-\frac{1}{2}xy)^2 \end{array}\right|.$$

Die Gruppe (48) ist demnach eine Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z und zwar offenbar eine irreducible, denn sie enthält eine sechs- und eine siebengliedrige Untergruppe, welche beide irreducibel sind [die Gruppe (27) auf S. 419 und die Gruppe (36) auf S. 425].

Nunmehr können wir das Theorem aussprechen:

Theorem 68. *Enthält eine Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z, deren infinitesimale Transformationen sich in der Umgebung des Werthsystems: $x=y=z=0$ regulär verhalten, neun unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:*

$$\begin{gathered} p+\cdots,\quad q+\cdots,\quad r+\cdots, \\ xq+\cdots,\quad xp-yq+\cdots,\quad yp+\cdots \\ xp+yq+2zr+\cdots,\quad zp+\cdots,\quad zq+\cdots \end{gathered}$$

und enthält sie keine infinitesimale Transformation von erster Ordnung in x, y, z, deren Glieder sich nicht aus:

$$xq,\quad xp-yq,\quad yp,\quad zp,\quad zq,\quad xp+yq+2zr$$

linear ableiten lassen, so ist sie zehngliedrig und enthält noch eine infinitesimale Transformation von zweiter Ordnung, welche die Form hat:

$$xzp+yzq+z^2r+\cdots,$$

zugleich ist sie mit der irreducibeln Gruppe:

$$(48)\quad \left|\begin{array}{c} p,\ q+xr,\ r,\ xq+\frac{1}{2}x^2r,\ xp-yq,\ yp+\frac{1}{2}y^2r \\ xp+yq+2zr,\ (z-xy)p-\frac{1}{2}y^2q-\frac{1}{2}xy^2r,\ \frac{1}{2}x^2p+zq+xzr \\ (xz-\frac{1}{2}x^2y)p+(yz-\frac{1}{2}xy^2)q+(z^2-\frac{1}{4}x^2y^2)r \end{array}\right|$$

von Berührungstransformationen der Ebene x, z durch eine Berührungstransformation dieser Ebene ähnlich.

Fassen wir endlich die Ergebnisse des ganzen Kapitels zusammen, so erhalten wir das

Theorem 69. *Jede endliche continuirliche irreducible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z ist entweder sechs- oder sieben- oder zehngliedrig, sie ist durch eine Be-*

rührungstransformation der Ebene x, z entweder mit der Gruppe (27) *auf S.* 419 *oder mit Gruppe* (36) *auf S.* 425 *oder endlich mit der Gruppe* (48) *auf S.* 432 *ähnlich.**)

Kapitel 24.

Nähere Besprechung der irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene.

Im vorigen Kapitel haben wir alle irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene bestimmt und gefunden, dass es nur drei verschiedene Typen von solchen Gruppen giebt, nämlich einen sechsgliedrigen Typus, einen siebengliedrigen und einen zehngliedrigen. Jetzt wollen wir die drei Gruppen, welche wir im vorigen Kapitel als Repräsentanten dieser drei Typen gefunden haben, etwas näher besprechen. Wir untersuchen zunächst die Zusammensetzung der betreffenden Gruppen und erledigen die wichtigsten darauf bezüglichen Fragen: wir bestimmen die invarianten Untergruppen aller drei Gruppen und finden dabei insbesondere, dass die zehngliedrige Gruppe einfach ist. Hierher gehört auch noch die in einem späteren Paragraphen (in § 111) des Kapitels durchgeführte Bestimmung der grössten Untergruppen der zehngliedrigen. Ferner fragen wir nach den Differentialgleichungen niedrigster Ordnung, welche bei der zehngliedrigen Gruppe invariant bleiben. Endlich beschäftigen wir uns mit denjenigen Gruppen von Punkttransformationen, welche mit unsrer zehngliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene isomorph sind und dabei möglichst wenige Veränderliche enthalten.

§ 105.

In diesem Paragraphen bestimmen wir alle invarianten Untergruppen der drei irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen, welche wir im vorigen Kapitel gefunden haben. Wir beginnen mit der *sechs*gliedrigen Gruppe:

(1) $$p, \quad q + xr, \quad r, \quad xq + \tfrac{1}{2}x^2 r, \quad xp - yq, \quad yp + \tfrac{1}{2}y^2 r.$$

Eine invariante Untergruppe g von (1) enthält jedenfalls eine infinitesimale Transformation von der Gestalt:

---

*) Lie, Göttinger Nachrichten, Decbr. 1874; Theorie der Transformationsgruppen IV, V, Archiv for Mathematik, Christiania 1878 und 1879. Die Methode, welche in dem vorstehenden Kapitel zur Ableitung der Sätze benutzt wird, ist bereits in der an letzter Stelle genannten Abhandlung auseinandergesetzt.

(2) $$\alpha p + \beta(q + xr) + \gamma r,$$

denn aus jeder infinitesimalen Transformation von g, welche nicht die Form (2) besitzt, ergiebt sich durch Combination mit p oder $q + xr$ eine Transformation von der Form (2), welche g angehört. Combiniren wir nun (2) mit: $q + xr$ und mit: p, so finden wir, dass g mit (2) zugleich auch die beiden Transformationen: αr und: βr enthält, und daraus können wir schliessen, dass r unter allen Umständen in der invarianten Untergruppe g vorkommt, im entgegengesetzten Falle müsste nämlich $\alpha = \beta = 0$ sein, es verschwände also auch γ, so dass g gar keine infinitesimale Transformation von der Form (2) und mithin überhaupt keine infinitesimale Transformation enthielte.

Offenbar erzeugt r selbst eine eingliedrige invariante Untergruppe der sechsgliedrigen Gruppe (1), es ist sogar eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation derselben, da es mit allen Transformationen (1) vertauschbar ist (s. Abschn. I, S. 276).

Enthält die invariante Untergruppe g von (1) ausser r noch andere infinitesimale Transformationen, dann jedenfalls eine von der Form:

(3) $$\alpha p + \beta(q + xr),$$

denn jede von r verschiedene Transformation, welche nicht die Form (3) besitzt, liefert durch Combination mit p oder $q + xr$ eine Transformation (2), in welcher α und β nicht beide verschwinden. Combinirt man aber (3) mit $xp - yq$, $xq + \frac{1}{2}x^2r$ und: $yp + \frac{1}{2}y^2r$, so kommt:

$$\alpha p - \beta(q + xr), \quad \alpha(q + xr), \quad \beta p,$$

also müssen p und $q + xr$ beide in g auftreten und wirklich ist: p, $q + xr$, r eine invariante Untergruppe von (1).

Endlich könnte g ausser p, $q + xr$, r noch eine infinitesimale Transformation von der Form:

(4) $$\lambda(xq + \tfrac{1}{2}x^2r) + \mu(xp - yq) + \nu(yp + \tfrac{1}{2}y^2r)$$

enthalten, allein das ist unmöglich, denn durch Combination von (4) mit: $xq + \frac{1}{2}x^2r$ u. s. w. würde sich sofort ergeben, dass g alle drei infinitesimalen Transformationen: $xq + \frac{1}{2}x^2r$ u. s. w. enthielte, dass es also mit der Gruppe (1) zusammenfiele. Folglich giebt es in der Gruppe (1) keine andern invarianten Untergruppen als die beiden vorhin gefundenen:

$$r; \quad p, \; q + xr, \; r.$$

Wir kommen jetzt zu der siebengliedrigen Gruppe:

(5) $$\begin{cases} p, \; q + xr, \; r, \; xq + \frac{1}{2}x^2r, \; xp - yq, \; yp + \frac{1}{2}y^2r \\ \qquad xp + yq + 2zr, \end{cases}$$

welche aus der sechsgliedrigen (1) durch Hinzunahme der Transformation: $xp + yq + 2zr$ entsteht.

Da (1) augenscheinlich eine invariante Untergruppe der Gruppe (5) ist und da von den beiden einzigen invarianten Untergruppen der Gruppe (1), nämlich von den beiden Gruppen:

$$r; \quad p, \; q + xr, \; r$$

dasselbe gilt, so brauchen wir nur noch diejenigen invarianten Untergruppen von (5) aufzusuchen, welche nicht in der Gruppe (1) enthalten sind. Jede solche invariante Untergruppe von (5) enthält, wenn sie m-gliedrig ist, eine $(m-1)$-gliedrige Untergruppe, welche der Gruppe (1) angehört und in derselben invariant ist (vgl. Abschn. I, S. 211, Satz 7 und S. 264, Satz 10). Demnach kann es in der Gruppe (5) höchstens zwei Arten von invarianten Untergruppen dieser Art geben, erstens zweigliedrige, deren infinitesimale Transformationen die Form:

$$\text{(6)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \quad r, \; xp + yq + 2zr + \alpha p + \beta(q + xr) + \\ + \gamma(xq + \tfrac{1}{2}x^2 r) + \delta(xp - yq) + \varepsilon(yp + \tfrac{1}{2}y^2 r) \end{array} \right.$$

besitzen, und zweitens viergliedrige von der Form:

$$\left\{ \begin{array}{l} \quad p, \; q + xr, \; r, \; xp + yq + 2zr + \\ + \gamma'(xq + \tfrac{1}{2}x^2 r) + \delta'(xp - yq) + \varepsilon'(yp + \tfrac{1}{2}y^2 r). \end{array} \right.$$

Im ersten Falle würde man durch Combination mit p und $q + xr$ zwei infinitesimale Transformationen von der Gestalt:

$$p + \beta r + \gamma(q + xr) + \delta p$$
$$q + xr - \alpha r - \delta(q + xr) + \varepsilon p$$

finden, die sich bezüglich auf βr und $-\alpha r$ reduciren müssten; da das unmöglich ist, so erkennen wir, dass es in der Gruppe (5) keine zweigliedrige invariante Untergruppe von der Form (6) giebt. Dagegen zeigt sich im zweiten Falle durch Combination mit: $xq + \frac{1}{2}x^2 r$ u. s. w., dass γ', δ', ε' verschwinden müssen und dass:

$$p, \; q + xr, \; r, \; xp + yq + 2zr$$

eine invariante Untergruppe von (5) ist.

Hiermit sind alle invarianten Untergruppen von (5) gefunden.

Endlich die zehngliedrige irreducible Berührungstransformationsgruppe:

$$\text{(7)} \qquad \left\{ \begin{array}{c} p, \; q + xr, \; r, \; xq + \tfrac{1}{2}x^2 r, \; xp - yq, \; yp + \tfrac{1}{2}y^2 r \\ xp + yq + 2zr \\ (z - xy)p - \tfrac{1}{2}y^2 q - \tfrac{1}{2}xy^2 r, \; zq + \tfrac{1}{2}x^2 p + xzr \\ (xz - \tfrac{1}{2}x^2 y)p + (yz - \tfrac{1}{2}xy^2)q + (z^2 - \tfrac{1}{4}x^2 y^2)r \end{array} \right.$$

enthält gar keine invariante Untergruppe. In einer solchen müsste nämlich, wie man sich leicht überzeugt, eine Transformation von der Form (2) und also insbesondere die Transformation r auftreten. Durch Combination von r mit:

$$(z - xy)p - \tfrac{1}{2}y^2 q - \tfrac{1}{2}xy^2 r \quad \text{u. s. w.}$$

würden sich nunmehr: p, $q + xr$ und $xp + yq + 2zr$ ergeben und durch Combination dieser Transformationen mit: $(z - xy)p + \cdots$, u. s. w. alle noch übrigen Transformationen (7).

Die gewonnenen Ergebnisse liefern das wichtige

Theorem 70. *Die zehngliedrige irreducible Gruppe:*

$$(7) \qquad \begin{cases} p, \quad q + xr, \quad r, \quad xq + \tfrac{1}{2}x^2 r, \quad xp - yq, \quad yp + \tfrac{1}{2}y^2 r \\ \qquad\qquad xp + yq + 2zr \\ (z - xy)p - \tfrac{1}{2}y^2 q - \tfrac{1}{2}xy^2 r, \quad zq + \tfrac{1}{2}x^2 p + xzr \\ (xz - \tfrac{1}{2}x^2 y)p + (yz - \tfrac{1}{2}xy^2)q + (z^2 - \tfrac{1}{4}x^2 y^2)r \end{cases}$$

von Berührungstransformationen der Ebene x, z ist einfach. Die siebengliedrige irreducible Gruppe:

$$(5) \qquad \begin{cases} p, \quad q + xr, \quad r, \quad xq + \tfrac{1}{2}x^2 r, \quad xp - yq, \quad yp + \tfrac{1}{2}y^2 r \\ \qquad\qquad xp + yq + 2zr \end{cases}$$

enthält vier invariante Untergruppen, nämlich die sechsgliedrige irreducible:

$$(1) \qquad p, \quad q + xr, \quad r, \quad xq + \tfrac{1}{2}x^2 r, \quad xp - yq, \quad yp + \tfrac{1}{2}y^2 r$$

und ausserdem noch die folgenden drei:

$$p, \quad q + xr, \quad r, \quad xp + yq + 2zr;$$

$$p, \quad q + xr, \quad r;$$

$$r.$$

Die sechsgliedrige irreducible Gruppe (1) *endlich enthält zwei invariante Untergruppen, nämlich:*

$$p, \quad q + xr, \quad r \quad \textit{und} \quad r.$$

§ 106.

Die drei Gruppen (1), (5), (7) sind irreducible Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene x, z, sie lassen in Folge dessen weder die Schaar aller ∞^2 Punkte noch irgend eine Schaar:

$$\psi(x, z, a, b) = 0$$

von ∞^2 Curven der Ebene x, z invariant. Es giebt daher sicher keine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \omega\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right),$$

welche bei einer unsrer drei Gruppen invariant bleibt. Dagegen kann es möglicherweise gewöhnliche Differentialgleichungen dritter Ordnung geben, die unsre drei Gruppen gestatten.

Um die betreffenden Differentialgleichungen dritter Ordnung zu finden, betrachten wir z als Function von x, y aber als den Differentialquotienten von z nach x und erweitern die zehn infinitesimalen Transformationen (7) nach den Regeln des Kapitels 22 durch Hinzunahme der Differentialquotienten zweiter und dritter Ordnung von z. Wenden wir dabei die Abkürzungen:

$$y = \frac{dz}{dx} = z', \quad \frac{d^2z}{dx^2} = z'', \quad \frac{d^3z}{dx^3} = z'''$$

an, so erhalten wir die folgenden erweiterten infinitesimalen Transformationen:

$$\begin{array}{rcl}
p & \text{liefert:} & \frac{\partial f}{\partial x} \\[1ex]
r & \text{„} & \frac{\partial f}{\partial z} \\[1ex]
xr + q & \text{„} & x\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z'} \\[1ex]
\frac{1}{2}x^2 r + xq & \text{„} & \frac{1}{2}x^2\frac{\partial f}{\partial z} + x\frac{\partial f}{\partial z'} + \frac{\partial f}{\partial z''} \\[1ex]
xp - yq & \text{„} & x\frac{\partial f}{\partial x} - z'\frac{\partial f}{\partial z'} - 2z''\frac{\partial f}{\partial z''} - 3z'''\frac{\partial f}{\partial z'''} \\[1ex]
yp + \frac{1}{2}y^2 r & \text{„} & z'\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}z'^2\frac{\partial f}{\partial z} - z''^2\frac{\partial f}{\partial z''} - 3z''z'''\frac{\partial f}{\partial z'''} \\[1ex]
xp + 2zr + yq & \text{„} & x\frac{\partial f}{\partial x} + 2z\frac{\partial f}{\partial z} + z'\frac{\partial f}{\partial z'} - z'''\frac{\partial f}{\partial z'''}.
\end{array}$$

Die übrigen drei erweiterten infinitesimalen Transformationen wollen wir ihrer Länge wegen nicht mit hinschreiben und nur bemerken, dass sie alle drei dem z''' einen Zuwachs ertheilen, welcher den Faktor z''' enthält und also zugleich mit z''' verschwindet.

Die fünf ersten der obigen infinitesimalen Transformationen: p u. s. w. erzeugen offenbar eine fünfgliedrige Gruppe, welche in jeder unsrer drei irreducibeln Gruppen enthalten ist. Durch die Erweiterung hat sich aus dieser Gruppe eine fünfgliedrige Gruppe in den fünf Veränderlichen x, z, z', z'', z''' ergeben und zwar eine einfach transitive Gruppe, denn die Determinante ihrer fünf infinitesimalen Transformationen besitzt den nicht verschwindenden Werth z'''. Hieraus ergiebt sich, dass die Gleichung: $z''' = 0$ die einzige Gleichung von der Form: $z''' = \chi(x, z, z', z'')$ ist, welche bei der bewussten fünfgliedrigen Gruppe invariant bleibt. Da nun: $z''' = 0$ auch die übrigen fünf erweiterten infinitesimalen Transformationen gestattet — bei jeder derselben erhält ja z''' einen Zuwachs, welcher mit z''' zugleich verschwindet —, so gestattet die Gleichung: $z''' = 0$ jede unsrer drei irreducibeln Gruppen und ist ausserdem die einzige Differentialgleichung dritter Ordnung, welche dies thut. Wir können hinzufügen, dass die zehngliedrige Gruppe (7) die grösste continuirliche Gruppe von Berührungstransformationen ist, bei welcher die Differentialgleichung: $z''' = 0$ invariant bleibt. Die grösste continuirliche Gruppe von dieser Beschaffenheit ist nämlich, weil sie die zehngliedrige irreducible Gruppe (7) umfasst, offenbar selbst irreducibel und ausserdem ist sie endlich*), sie kann also nach dem Theoreme 69, S. 433 nicht mehr als zehn Parameter enthalten, das heisst, sie fällt mit der Gruppe (7) zusammen.

Demnach besteht das

Theorem 71. *Jede irreducible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene lässt nur eine einzige Differentialgleichung dritter Ordnung invariant. Hat man die Gruppe durch eine geeignete Berührungstransformation auf eine der drei Formen* (1), (5), (7) *gebracht* (s. S. 437), *so erscheint die betreffende Differentialgleichung in der Gestalt:*

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = 0,$$

wo x und z Punktcoordinaten in der Ebene bedeuten. Insbesondere ist die zehngliedrige irreducible Gruppe (7) *die grösste continuirliche Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z, welche die angegebene Differentialgleichung invariant lässt.*

Wir können das vorstehende Theorem auch folgendermassen aussprechen: Bei einer irreducibeln Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z bleibt nur eine einzige Schaar von ∞^3 Curven der Ebene invariant; ist die Gruppe durch eine geeignete Berührungstransformation auf eine der drei Formen (1), (5), (7) gebracht (s. S. 437), so lautet die Gleichung der betreffenden Schaar:

$$z = a + 2bx + cx^2,$$

die Schaar selbst besteht mithin aus allen den ∞^3 Kegelschnitten, welche die unendlich ferne Gerade in einunddemselben Punkte berühren, das heisst aus allen Kegelschnitten, welche ein (unendlich fernes) Linienelement gemein haben.

---

*) Eine gewöhnliche Differentialgleichung zwischen x und z, deren Ordnung grösser ist als zwei, gestattet niemals unendlich viele unabhängige infinitesimale Berührungstransformationen.

In einem späteren Paragraphen (§ 110) gehen wir auf die Frage nach den invarianten Differentialgleichungen etwas genauer ein, werden uns aber dabei allerdings in der Hauptsache auf die zehngliedrige Gruppe (7) beschränken.

§ 107.

Führt man in eine irreducible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z vermöge einer Berührungstransformation:

$$\mathfrak{z} = \gamma(z, x, y), \quad \mathfrak{x} = \alpha(z, x, y), \quad \mathfrak{y} = \beta(z, x, y)$$

die neuen Veränderlichen $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ ein, so erhält man natürlich eine irreducible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$. Es giebt nun eine gewisse Berührungstransformation, welche unsre zehngliedrige irreducible Gruppe (7) auf eine andere sehr bemerkenswerthe einfache Form bringt.

Die betreffende Berührungstransformation ist durch die Gleichung:

$$4\mathfrak{x}(z - \mathfrak{z}) + x^2 = 0$$

definirt, aus welcher wir nach den Regeln von Kapitel 1, S. 10 als Gleichungen der Berührungstransformation die folgenden finden:

$$(8) \qquad \begin{cases} z = \mathfrak{z} + \mathfrak{x}\mathfrak{y} \\ x = 2\mathfrak{x} \cdot \sqrt{-\mathfrak{y}} \\ y = -\sqrt{-\mathfrak{y}}. \end{cases}$$

Offenbar wird:

$$dz - y\,dx = d\mathfrak{z} - \mathfrak{y}\,d\mathfrak{x},$$

also hat ϱ den Werth 1 und man erhält daher die charakteristischen Functionen derjenigen infinitesimalen Transformationen, in welche die infinitesimalen Transformationen (7) bei der Berührungstransformation (8) übergehen, wenn man in die charakteristischen Functionen:

$$1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ z - \tfrac{1}{2}xy,\ x(z - \tfrac{1}{2}xy),\ y(z - \tfrac{1}{2}xy),\ (z - \tfrac{1}{2}xy)^2$$

der Transformationen (7) die neuen Veränderlichen $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ einführt. Thut man das, so bekommt man nach Weglassung des unwesentlichen Faktors $\sqrt{-1}$ die nachstehenden charakteristischen Functionen:

$$(9) \qquad \begin{cases} 1,\ \mathfrak{z}\sqrt{\mathfrak{y}},\ \sqrt{\mathfrak{y}},\ \mathfrak{x}^2\mathfrak{y},\ \mathfrak{x}\mathfrak{y},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z} \\ \qquad \mathfrak{x}\mathfrak{z}\sqrt{\mathfrak{y}},\ \mathfrak{z}\sqrt{\mathfrak{y}},\ \mathfrak{z}^2. \end{cases}$$

Das also ist die Form, welche die Gruppe (7) in den neuen Veränderlichen $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ annimmt.

Von Interesse ist es, die Gruppe (9) als eine Gruppe von homogenen Berührungstransformationen in vier Veränderlichen: x_1, x_2,

p_1, p_2 zu schreiben. Um das zu erreichen, brauchen wir blos zu setzen:

$$\mathfrak{x} = x_1, \quad \mathfrak{z} = x_2, \quad \mathfrak{y} = -\frac{p_1}{p_2}$$

und ausserdem jede einzelne der charakteristischen Functionen (9) mit p_2 zu multipliciren (vgl. S. 273, Satz 10). Auf diese Weise finden wir die folgende Gruppe von homogenen Berührungstransformationen:

$$(10) \qquad \begin{cases} p_1, \; x_1 p_1, \; x_1^2 p_1, \; p_2, \; x_2 p_2, \; x_2^2 p_2, \\ \sqrt{p_1 p_2}, \; x_1\sqrt{p_1 p_2}, \; x_2\sqrt{p_1 p_2}, \; x_1 x_2 \sqrt{p_1 p_2}, \end{cases}$$

in deren Form eine gewisse Symmetrie zu Tage tritt.

Die Curvenschaar:

$$z = a + 2bx + cx^2,$$

welche bei der Gruppe (7) invariant bleibt, verwandelt sich natürlich bei der Berührungstransformation (8) in eine bei der Gruppe (9) invariante Curvenschaar. Wollen wir die Gleichung dieser neuen Curvenschaar finden, so haben wir auf die beiden Gleichungen:

$$z = a + 2bx + cx^2, \qquad y = 2b + 2cx$$

die Berührungstransformation (8) auszuführen und aus den entstehenden beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{z} + \mathfrak{x}\mathfrak{y} = a + 4b\mathfrak{x}\sqrt{-\mathfrak{y}} - 4c\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}$$
$$-\sqrt{-\mathfrak{y}} = 2b + 4c\mathfrak{x}\sqrt{-\mathfrak{y}}$$

das $\mathfrak{y}$ zu entfernen. Wir finden:

$$(11) \qquad 4c\mathfrak{x}\mathfrak{z} + 4(b^2 - ac)\mathfrak{x} + \mathfrak{z} - a = 0,$$

eine Gleichung, die alle Kegelschnitte darstellt, welche durch zwei gewisse (unendlich ferne) Punkte gehen.

Es versteht sich von selbst, dass die Gruppe (9) die grösste continuirliche Gruppe von Berührungstransformationen ist, welche die Curvenschaar (11) invariant lässt.

Wir wollen schliesslich vermittelst der Punkttransformation:

$$(12) \qquad \mathfrak{z} = z - ix, \qquad \mathfrak{x} = z + ix$$

der Ebene $\mathfrak{x}, \mathfrak{z}$ die beiden Punkte, durch welche die ∞^3 Kegelschnitte (11) gehen, in die beiden unendlich fernen Kreispunkte verlegen. Dabei geht die Curvenschaar (11) in die Schaar aller ∞^3 Kreise:

$$(13) \qquad 4c(x^2 + z^2) + 4(b^2 - ac)(z + ix) + z - ix - a = 0$$

der Ebene x, z über.

Um die zehngliedrige Gruppe von Berührungstransformationen zu finden, bei welcher die Schaar (13) invariant bleibt, haben wir die Punkttransformation (12) zu erweitern (vgl. S. 3) und die so erhaltene Berührungstransformation:

$$(14)\quad \begin{cases} \mathfrak{z} = z - ix, \quad \mathfrak{x} = z + ix \\ \mathfrak{y} = \dfrac{y - i}{y + i} \end{cases}$$

auf die Gruppe (9) auszuführen. Da nun vermöge (14) die Gleichung besteht:

$$d\mathfrak{z} - \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x} = \frac{2i}{y+i}(dz - y\,dx),$$

so brauchen wir (vgl. S. 276, Theorem 45) blos die Berührungstransformation (14) auf die charakteristischen Functionen (9) auszuführen und sodann jede dieser Functionen mit $(y + i)$ zu multipliciren; den Faktor $\frac{1}{2i}$ können wir natürlich weglassen. Auf diese Weise erhalten wir aus der Gruppe (9) die folgende neue Gruppe von Berührungstransformationen:

$$(15)\quad \begin{cases} y+i,\ (z+ix)\sqrt{y^2+1},\ \sqrt{y^2+1},\ (z+ix)^2(y-i),\ (z+ix)(y-i) \\ y-i,\ (z-ix)(y+i),\ (z^2+x^2)\sqrt{y^2+1},\ (z-ix)\sqrt{1+y^2},\ (z-ix)^2(y+i). \end{cases}$$

An Stelle der zehn imaginären infinitesimalen Transformationen (15) können wir natürlich auch die zehn reellen Transformationen:

$$(15')\quad \begin{cases} 1,\ y,\ z-xy,\ x+zy,\ 2zx+(z^2-x^2)y,\ z^2-x^2-2xzy \\ \sqrt{y^2+1},\ x\sqrt{y^2+1},\ z\sqrt{y^2+1},\ (x^2+z^2)\sqrt{y^2+1} \end{cases}$$

setzen.

Es versteht sich von selbst, dass (15′) die grösste continuirliche Gruppe von Berührungstransformationen ist, welche die Schaar (13) aller Kreise der Ebene x, z invariant lässt.

Auch die Gruppe (15′) werden wir als eine Gruppe von homogenen Berührungstransformationen schreiben. Setzen wir:

$$x = x_1, \quad z = x_2, \quad y = \frac{-p_1}{p_2},$$

so erhalten die charakteristischen Functionen der betreffenden Gruppe von homogenen Berührungstransformationen die Gestalt:

$$(16)\quad \begin{cases} p_1,\ p_2,\ x_1p_2 - x_2p_1,\ x_1p_1 + x_2p_2 \\ (x_1^2 - x_2^2)p_1 + 2x_1x_2p_2,\ 2x_1x_2p_1 + (x_2^2 - x_1^2)p_2 \\ \sqrt{p_1^2 + p_2^2},\ x_1\sqrt{p_1^2 + p_2^2},\ x_2\sqrt{p_1^2 + p_2^2},\ (x_1^2 + x_2^2)\sqrt{p_1^2 + p_2^2}. \end{cases}$$

Von diesen Transformationen sind die ersten beiden infinitesimale *Translationen* der Ebene x_1, x_2; die drei ersten erzeugen die Gruppe aller Bewegungen, die vier ersten die Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen dieser Ebene; die sechs ersten erzeugen die grösste continuirliche Gruppe von Punkttransformationen der Ebene x_1, x_2, bei welcher Kreise in Kreise übergehen (die grösste endliche Gruppe von conformen Punkttransformationen); endlich ist $\sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ eine infinitesimale Paralleltransformation.

Die Hauptergebnisse des gegenwärtigen Paragraphen zusammenfassend, können wir das Theorem aussprechen:

Theorem 72. *Es giebt in der Ebene ∞^{10} Berührungstransformationen, welche Kreise in Kreise überführen. Der Inbegriff dieser Transformationen bildet eine irreducible Gruppe von Berührungstransformationen, welche in keiner grösseren endlichen continuirlichen Gruppe von Berührungstransformationen steckt. Mit der betreffenden Gruppe ist jede zehngliedrige irreducible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene durch eine Berührungstransformation ähnlich und darunter insbesondere diejenige zehngliedrige Gruppe von Berührungstransformationen, welche die Schaar aller ∞^3 Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Linienelement invariant lässt.*

§ 108.

Schon im vorigen Kapitel haben wir den Umstand benutzt, dass jede Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene auch als eine Gruppe von Punkttransformationen des dreifach ausgedehnten Raumes aufgefasst werden kann. Wir werden von jetzt ab in der Hauptsache diese letztere Auffassung bei der Untersuchung der irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene zu Grunde legen. Dabei gehen wir aber wieder von den im vorigen Kapitel gefundenen Formen dieser Gruppen aus, also von den drei Gruppen: (1), (5) und (7) auf S. 437.

In den eben genannten drei irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene x, z deuten wir die Grössen x, z, y als Punktcoordinaten eines dreifach ausgedehnten Raumes, dann erscheinen diese Gruppen als Gruppen von Punkttransformationen des Raumes x, z, y und zwar als solche Gruppen, welche die Gleichung:

$$dz - y dx = 0,$$

nicht aber eine von derselben verschiedene Pfaffsche Gleichung:

$$\alpha(x, z, y) dx + \gamma(x, z, y) dz + \beta(x, z, y) dy = 0$$

invariant lassen (s. S. 393, Satz 3).

Sind nun diese drei Gruppen von Punkttransformationen des Raumes x, z, y primitiv oder sind sie es nicht?

Eine Schaar von ∞^1 Flächen: $\varphi(x, z, y) = \text{const.}$ des Raumes x, z, y kann bei keiner unsrer drei Gruppen invariant bleiben, zugleich mit der Flächenschaar würde nämlich auch die von der Gleichung: $dz - y dx = 0$ verschiedene Pfaffsche Gleichung: $d\varphi = 0$ invariant bleiben und das ist ausgeschlossen.

Wenn daher eine unsrer Gruppen imprimitiv ist, so lässt sie jedenfalls keine Schaar von ∞^1 Flächen sondern nur eine Schaar von ∞^2 Curven des Raumes x, z, y invariant. Für die sechsgliedrige und die siebengliedrige Gruppe können wir sofort eine derartige Curvenschaar angeben, denn beide enthalten nach Theorem 70, S. 437 die eingliedrige invariante Untergruppe r und lassen infolgedessen die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Curvenschaar: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ invariant. Beide Gruppen sind daher imprimitiv, die sechsgliedrige ist sogar systatisch, denn r ist, wie schon auf S. 435 gesagt wurde, eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation der sechsgliedrigen (vgl. Abschnitt I, S. 510, Satz 3).

Liesse die sechsgliedrige Gruppe noch eine andere von der Schaar: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ verschiedene Schaar von ∞^2 Curven invariant, so müsste sie eine von: $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ verschiedene lineare partielle Differentialgleichung:

$$\lambda(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \nu(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial z} + \mu(x, z, y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

invariant lassen, dann aber bliebe zugleich das System der beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial x} + \mu\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

invariant und demnach auch die Pfaffsche Gleichung:

$$\mu dx - \lambda dy = 0,$$

in welcher λ und μ nicht beide gleich Null wären. Das ist nach S. 393, Satz 3 ausgeschlossen, also giebt es ausser der Schaar: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ keine Schaar von ∞^2 Curven, welche bei der sechsgliedrigen Gruppe invariant bleibt. Für die siebengliedrige Gruppe, in welcher ja die sechsgliedrige als Untergruppe enthalten ist, gilt natürlich dasselbe.

Endlich die zehngliedrige Gruppe, von welcher wieder die siebengliedrige eine Untergruppe ist, lässt nicht einmal die Curvenschaar: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ invariant, da sie augenscheinlich die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ nicht invariant lässt, sie ist also primitiv.

Wir können daher sagen:

Theorem 73. *Fasst man die drei Gruppen:* (1), (5), (7) *auf S. 437, welche irreducible Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene x, z sind, als Gruppen von Punkttransformationen des dreifach ausgedehnten Raumes x, z, y auf, so ist nur die zehngliedrige Gruppe* (7) *primitiv, die beiden andern dagegen sind imprimitiv, die sechsgliedrige sogar systatisch. Die sechsgliedrige und die siebengliedrige Gruppe lassen beide die Schaar der ∞^2 Curven: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ invariant, es giebt aber keine andere Schaar von ∞^2 Curven und insbesondere auch keine Schaar von ∞^1 Flächen, welche bei einer dieser beiden Gruppen invariant bleibt.*

§ 109.

Als Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene x, z liessen unsre drei Gruppen die Schaar der ∞^3 Curven:

$$z = a + 2bx + cx^2$$

invariant. Da nun jeder Curve: $z = \varphi(x)$ der Ebene x, z eine Curve des Raumes x, z, y entspricht, welche die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - y\,dx = 0$$

befriedigt, nämlich die Curve: $z = \varphi(x)$, $y = \varphi'(x)$, so müssen unsre drei Gruppen, als Gruppen des Raumes x, z, y aufgefasst, die Schaar der ∞^3 Integralcurven:

$$z = a + 2bx + cx^2, \quad y = 2b + 2cx \tag{17}$$

der Pfaffschen Gleichung: $dz - y\,dx = 0$ invariant lassen.

Da die Gleichungen (17) sich auch schreiben lassen:

$$z - \tfrac{1}{2}xy = a + bx, \quad \tfrac{1}{2}y = b + cx, \tag{17'}$$

so liegt es nahe, an Stelle von x, z, y durch die Transformation:

$$x_1 = x, \quad z_1 = z - \tfrac{1}{2}xy, \quad y_1 = \tfrac{1}{2}y \tag{18}$$

die neuen Veränderlichen x_1, z_1, y_1 einzuführen. Auf diese Weise erhalten wir an Stelle von (17) die linearen Gleichungen:

$$z_1 = a + bx_1, \quad y_1 = b + cx_1, \tag{19}$$

welche, wenn x_1, z_1, y_1 als rechtwinklige Coordinaten eines dreifach ausgedehnten Raumes aufgefasst werden, eine Schaar von ∞^3 Geraden des betreffenden Raumes darstellen. Selbstverständlich sind diese ∞^3

Geraden sämmtlich Integralcurven derjenigen Pfaffschen Gleichung, welche aus: $dz - ydx = 0$ durch Einführung von x_1, y_1, z_1 entsteht, also Integralcurven der Pfaffschen Gleichung:

$$(20)\qquad dz_1 + x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = 0.$$

In den neuen Veränderlichen x_1, z_1, y_1 erhalten wir an Stelle unsrer drei Gruppen (1), (5), (7) (S. 437) der Reihe nach die folgenden Gruppen von Punkttransformationen des Raumes x_1, z_1, y_1:

$$(21)\qquad \boxed{p_1 - y_1 r_1,\ \ q_1 + x_1 r_1,\ \ r_1,\ \ x_1 q_1,\ \ x_1 p_1 - y_1 q_1,\ \ y_1 p_1}$$

$$(22)\qquad \boxed{\begin{array}{c} p_1 - y_1 r_1,\ \ q_1 + x_1 r_1,\ \ r_1,\ \ x_1 q_1,\ \ x_1 p_1 - y_1 q_1,\ \ y_1 p_1 \\ x_1 p_1 + y_1 q_1 + 2 z_1 r_1 \end{array}}$$

$$(23)\qquad \boxed{\begin{array}{c} p_1 - y_1 r_1,\ q_1 + x_1 r_1,\ r_1,\ x_1 q_1,\ x_1 p_1 - y_1 q_1,\ y_1 p_1,\ x_1 p_1 + y_1 q_1 + 2 z_1 r_1 \\ z_1 p_1 - y_1 (x_1 p_1 + y_1 q_1 + z_1 r_1),\ \ z_1 q_1 + x_1 (x_1 p_1 + y_1 q_1 + z_1 r_1) \\ z_1 (x_1 p_1 + y_1 q_1 + z_1 r_1) \end{array}}$$

Dieselben lassen natürlich die Pfaffsche Gleichung:

$$(20)\qquad dz_1 + x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = 0$$

invariant, nicht aber eine von derselben verschiedene Pfaffsche Gleichung:

$$\lambda(x_1, y_1, z_1) dx_1 + \mu(x_1, y_1, z_1) dy_1 + \nu(x_1, y_1, z_1) dz_1 = 0,$$

ausserdem lassen sie die Schaar der ∞^3 Geraden:

$$(19)\qquad z_1 = a + bx_1, \qquad y_1 = b + cx_1$$

invariant.

Durch jeden Punkt des Raumes x_1, y_1, z_1 gehen offenbar genau ∞^1 verschiedene Gerade der Schaar (19); da nun alle Geraden der Schaar (19) die in dx_1, dy_1, dz_1 lineare und homogene Gleichung (20) befriedigen, so erkennt man sofort, dass die ∞^1 Geraden der Schaar (19), welche durch einen beliebig gewählten Punkt x_1, y_1, z_1 gehen, stets in einer und derselben Ebene liegen. Andrerseits überzeugt man sich leicht, dass in jeder Ebene des Raumes x_1, y_1, z_1 auch genau ∞^1 verschiedene Gerade der Schaar (19) liegen und dass diese ∞^1 Geraden immer durch einen Punkt der betreffenden Ebene gehen. Die Schaar der ∞^3 Geraden (19) ordnet demnach jedem Punkte des Raumes x_1, y_1, z_1 eine hindurchgehende Ebene eindeutig zu und jeder Ebene dieses Raumes einen darin liegenden Punkt. Nun führt jede Transformation, welche einer der drei Gruppen (21), (22), (23) angehört, jeden Punkt des Raumes x_1, z_1, y_1 wieder in einen Punkt über und jede Gerade der Schaar (19) wieder in eine Gerade dieser Schaar, sie muss daher auch die einem beliebigen Punkte zugeordnete durch ihn hindurchgehende Ebene wieder in eine Ebene verwandeln und in Folge dessen überhaupt jede Ebene wieder in eine Ebene. Hieraus geht hervor, dass die drei Gruppen (21), (22), (23) sämmtlich Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe des Raumes x_1, z_1, y_1 sind. Wir hätten das allerdings auch schon den infinitesimalen Transformationen unsrer Gruppen ansehen können, denn die sind alle projectiv (Abschnitt I, S. 554 f.).

Dreifach unendliche Geradenschaaren von der Beschaffenheit der oben gefundenen Schaar (19) hat zuerst *Möbius* betrachtet und als „Nullsysteme" in die Wissenschaft eingeführt; später hat sie besonders *Chasles* verwerthet. Von *Plücker* wurde für eine solche Geradenschaar die Bezeichnung „linearer Liniencomplex" eingeführt, wofür man auch kürzer sagt „linearer Complex".

Plücker zeigte, dass der allgemeinste lineare Complex durch die allgemeinste lineare homogene Gleichung zwischen den nach ihm benannten sechs Liniencoordinaten dargestellt wird. Als Coordinaten einer geraden Linie des Raumes x_1, y_1, z_1 wählte er die sechs Grössen:

$$x_1 - x_2, \quad y_1 - y_2, \quad z_1 - z_2$$
$$x_1 y_2 - y_1 x_2, \quad y_1 z_2 - z_1 y_2, \quad z_1 x_2 - x_1 z_2,$$

wo x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 zwei beliebige Punkte auf der betreffenden Geraden sind. Lässt man nun insbesondere die drei Grössen x_2, y_2, z_2 bezüglich von x_1, y_1, z_1 unendlich wenig verschieden sein, so kommt man auf die Liniencoordinaten:

$$dx_1, \quad dy_1, \quad dz_1, \quad x_1 dy_1 - y_1 dx_1, \quad y_1 dz_1 - z_1 dy_1, \quad z_1 dx_1 - x_1 dz_1.$$

Eine homogene Gleichung ersten Grades zwischen diesen Grössen, also eine Gleichung von der Form:

$$A dx_1 + B dy_1 + C dz_1 + D(x_1 dy_1 - y_1 dx_1) +$$
$$+ E(y_1 dz_1 - z_1 dy_1) + F(z_1 dx_1 - x_1 dz_1) = 0$$

mit constanten Coefficienten stellt dann den allgemeinsten linearen Complex des Raumes x_1, y_1, z_1 dar. Wir sehen hieraus, dass es in dem dreifach ausgedehnten Raume x_1, y_1, z_1 gerade ∞^5 verschiedene lineare Complexe giebt. Andrerseits bemerken wir, dass die Pfaffsche Gleichung (20) einen gewissen linearen Complex darstellt; es ist das offenbar derjenige, welcher von den ∞^3 Geraden (19) gebildet wird.

Bei einer projectiven Transformation des Raumes x_1, y_1, z_1 geht selbstverständlich jeder lineare Complex dieses Raumes in einen linearen

Complex über. Da es nun in dem Raume x_1, y_1, z_1 gerade ∞^{15} projective Transformationen giebt, aber nur ∞^5 lineare Complexe, so folgt, dass jeder lineare Complex mindestens ∞^{10} projective Transformationen zulässt (vgl. Abschnitt I, S. 482, Satz 10). Die obigen Entwickelungen bestätigen das, denn sie zeigen, dass der lineare Complex:

$$dz_1 + x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = 0 \tag{20}$$

die zehngliedrige projective Gruppe (23) gestattet.

Wir könnten aus der Liniengeometrie als bekannt voraussetzen, dass jeder lineare Complex, der nicht aus allen Geraden besteht, die eine feste Gerade schneiden, durch projective Transformationen in jeden andern übergeführt werden kann; daraus könnten wir unmittelbar schliessen, dass jeder solche Complex gerade ∞^{10} und nicht mehr Collineationen zulässt und dieser Schluss würde auch auf den Complex (20) Anwendung finden, denn derselbe besteht offenbar nicht aus lauter solchen Geraden, die eine feste Gerade treffen. Allein es ist gar nicht nöthig, diese Sätze der Liniengeometrie zu benutzen, wir gelangen zu demselben Ergebniss durch die nachstehenden Ueberlegungen:

Die zehngliedrige Gruppe (7) auf S. 437, welche die Pfaffsche Gleichung: $dz - y dx = 0$ invariant lässt, steckt in keiner grösseren endlichen continuirlichen Gruppe, welche ebenfalls die Pfaffsche Gleichung: $dz - y dx = 0$ invariant lässt; eine solche grössere Gruppe hätten wir ja nothwendig im vorigen Kapitel mit finden müssen. Genau dasselbe gilt natürlich von der Gruppe (23) in Bezug auf die Pfaffsche Gleichung: $dz_1 + x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = 0$. Insbesondere kann daher die Gruppe (23) auch in keiner grösseren continuirlichen projectiven Gruppe enthalten sein, welche den linearen Complex:

$$dz_1 + x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = 0 \tag{20}$$

invariant lässt.

Man kann sich übrigens auch ganz direkt davon überzeugen, dass die zehngliedrige Gruppe (23) die grösste continuirliche projective Gruppe ist, welche der lineare Complex (20) gestattet; sucht man nämlich alle infinitesimalen Collineationen des Raumes x_1, y_1, z_1, welche die Gleichung: $dz_1 + x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = 0$ invariant lassen, so findet man, dass es gerade zehn unabhängige Transformationen dieser Art giebt, eben die Transformationen (23).

Es wäre schliesslich noch denkbar, dass die grösste projective Gruppe Γ, welche die Pfaffsche Gleichung (20) invariant lässt, aus einer Reihe discreter Schaaren von Transformationen bestände. Allein auch das ist nicht der Fall, die Gruppe Γ fällt vielmehr mit der Gruppe (23) zusammen. Man kann das dadurch beweisen, dass man die Gruppe (23) in allgemeinster Weise holoedrisch isomorph auf sich bezieht und sodann die allgemeinste Transformation in x_1, y_1, z_1 sucht, welche die Gruppe in sich überführt, man wird dabei finden, dass diese allgemeinste Transformation eben die allgemeinste Transformation der Gruppe (23) ist.

Im Vorstehenden sind die Entwickelungen des Kapitels 18 in Abschnitt I benutzt, aus denen folgt, dass die Gruppe (23) als die grösste in Γ enthaltene continuirliche Gruppe bei allen Transformationen von Γ invariant bleibt. Es ist von methodischem Interesse das hier hervorzuheben, denn ähnliche Ueberlegungen finden sehr oft praktische Anwendung.

Wir wollen jetzt die Ergebnisse des gegenwärtigen Paragraphen in einem Theoreme zusammenfassen:

Theorem 74. *Jede zehngliedrige irreducible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z ist gleichzusammengesetzt mit der zehngliedrigen projectiven Gruppe eines linearen Complexes eines dreifach ausgedehnten Raumes. Deutet man die ∞^3 Linienelemente der Ebene, welche von der ersten Gruppe transformirt werden, als Punkte eines dreifach ausgedehnten Raumes, so erhält man eine Gruppe von Punkttransformationen dieses Raumes, welche mit der Gruppe des linearen Complexes durch eine Punkttransformation ähnlich ist.*

In entsprechender Weise ist die siebengliedrige irreducible Berührungstransformationsgruppe (5) (s. S. 437) mit der siebengliedrigen projectiven Gruppe (22) (s. S. 446) des dreifach ausgedehnten Raumes gleichzusammengesetzt und wenn man will ähnlich. Diese siebengliedrige projective Gruppe lässt den linearen Complex:

$$dz_1 + x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = 0$$

invariant und ausserdem noch die unendlich ferne Ebene, sowie auf dieser Ebene den Punkt: $x_1 = y_1 = 0$, welcher derselben von dem linearen Complex zugeordnet ist. Man überzeugt sich überdies leicht, dass die Gruppe (22) die allgemeinste projective Gruppe ist, welche die angegebenen Figuren invariant lässt.

Endlich die sechsgliedrige irreducible Berührungstransformationsgruppe (1) (s. S. 437) ist mit der sechsgliedrigen projectiven Gruppe (21) (s. S. 446) gleichzusammengesetzt und wenn man will ähnlich. Diese letztere unterscheidet sich von der siebengliedrigen projectiven Gruppe (22) nur dadurch, dass sie auch alle Volumina des Raumes x_1, y_1, z_1 invariant lässt.

Die beiden Gruppen (1) und (5) waren, als Gruppen des Raumes

x, y, z aufgefasst, imprimitiv (vgl. S. 445), ebenso müssen natürlich die beiden projectiven Gruppen (22) und (21) des Raumes x_1, y_1, z_1 imprimitiv sein. In der That tritt auch ihre Imprimitivität unmittelbar zu Tage, sie lassen ja beide einen Punkt und in Folge dessen auch das Bündel der ∞^2 durch diesen Punkt gehenden Geraden invariant.

Für manche Zwecke ist es wünschenswerth, die Gruppe des linearen Complexes in homogener Form zu haben. Wir wollen diese homogene Form angeben und aus ihr einige Schlüsse ableiten.

Ersetzen wir die nichthomogenen Veränderlichen x_1, y_1, z_1 nach Anleitung von Abschnitt I, S. 578 f. durch vier homogene Veränderliche $x_1 \cdots x_4$, so nimmt die Gruppe (23) des linearen Complexes: $dz_1 + x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = 0$ die Form an:

$$\tag{24} \boxed{\begin{array}{c} x_4 p_1 - x_2 p_3, \quad x_4 p_2 + x_1 p_3, \quad x_4 p_3 \\ x_1 p_2, \quad x_1 p_1 - x_2 p_2, \quad x_2 p_1, \quad x_3 p_3 - x_4 p_4 \\ x_3 p_1 + x_2 p_4, \quad x_3 p_2 - x_1 p_4, \quad x_3 p_4 \end{array}}$$

und der lineare Complex selbst erscheint in der Gestalt:

$$\tag{25} x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + x_4 dx_3 - x_3 dx_4 = 0.$$

Aus der Form (24) lässt sich erkennen, dass unsre Gruppe jeden Punkt des dreifach ausgedehnten Raumes in jeden andern überführen kann, darin liegt zugleich, dass sie auch jede Ebene in jede andere verwandeln kann, denn jedem Punkte des Raumes ist ja vermöge des linearen Complexes eine hindurchgehende Ebene und jeder Ebene ist ein darin liegender Punkt eindeutig umkehrbar zugeordnet.

Halten wir andrerseits irgend einen Punkt fest, so kann bei den übrig bleibenden Transformationen unsrer Gruppe offenbar noch jede durch den Punkt gehende Gerade des Complexes in jede andere übergehen und ebenso jede durch den Punkt gehende nicht dem Complexe angehörige Gerade in jede andere, der Punkt selbst aber kann von unsrer Gruppe in jeden andern übergeführt werden, also ergiebt sich, dass unsre Gruppe jede der ∞^3 Geraden des Complexes in jede andere überführen kann und ebenso jede Gerade, welche nicht dem Complexe angehört, in jede andere.

§ 110.

Durch Betrachtung der zehngliedrigen projectiven Gruppe eines linearen Complexes kann man in einfacher Weise verschiedene neue Sätze über die zehngliedrige irreducible Berührungstransformationsgruppe (7) (s. S. 437) ableiten. Zum Beispiel hat es auf diesem Wege gar keine Schwierigkeit zu entscheiden, was für Curvenschaaren der Ebene x, z bei der letzteren Gruppe invariant bleiben, vorausgesetzt, dass man sich auf Schaaren mit nicht mehr als acht Parametern beschränkt.

Um die gestellte Aufgabe zu lösen, ist es nur erforderlich, alle Curvenschaaren des Raumes von drei Dimensionen zu finden, welche die Gleichung: $dz_1 + x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = 0$ erfüllen, die zehngliedrige projective Gruppe (23) gestatten und dabei nicht mehr als acht Parameter enthalten.

Jede Raumcurve, welche einer Schaar von der beschriebenen Beschaffenheit angehört, lässt mindestens ∞^2 Collineationen des Raumes zu und ist daher*) entweder eine gewundene Curve dritter Ordnung oder eine ebene Curve; eine ebene krumme Curve kann sie nicht sein, denn alle Tangenten der Curve sind Complexgerade, alle Complexgeraden, die in einer Ebene liegen, umhüllen aber einen Punkt und keine Curve, folglich ist die betreffende Curve entweder eine gewundene Raumcurve dritter Ordnung oder eine Complexgerade.

Eine invariante Curvenschaar von der verlangten Beschaffenheit ist demnach die uns schon bekannte Schaar der ∞^3 Geraden des linearen Complexes: $dz_1 + x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = 0$, jede andere der gesuchten Curvenschaaren muss aus gewundenen Curven dritter Ordnung bestehen. Nun ist bekannt, dass die Tangenten einer gewundenen Curve dritter Ordnung stets einem eindeutig bestimmten linearen Complexe angehören, der bei allen ∞^3 Collineationen, welche die betreffende Curve invariant lassen, ebenfalls in Ruhe bleibt. Umgekehrt stehen zu einem linearen Complexe stets Curven dritter Ordnung in der angegebenen Beziehung, zu dem Complexe: $dz_1 + x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = 0$ zum Beispiel die Curve:

$$(26) \qquad x_1 = t, \quad y_1 = t^2, \quad z_1 = -\tfrac{1}{3}t^3,$$

denn diese Curve befriedigt offenbar die Gleichung des Complexes, sie gestattet auch wirklich gerade eine dreigliedrige Untergruppe der zehngliedrigen Gruppe des Complexes, nämlich die dreigliedrige Gruppe:

$$p_1 + 2x_1 q_1 - y_1 r_1, \quad x_1 p_1 + 2y_1 q_1 + 3z_1 r_1,$$
$$x_1^2 p_1 + x_1 y_1 q_1 + x_1 z_1 r_1 + z_1 q_1 - \tfrac{2}{3} y_1 p_1.$$

Bei der ganzen zehngliedrigen Gruppe des Complexes nimmt die Curve (26) natürlich gerade ∞^7 verschiedene Lagen an.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass jede der gesuchten Curven

*) s. Klein und Lie, Comptes Rendus 1870.

schaaren, welche nicht mit der Schaar aller ∞^3 Geraden unsres linearen Complexes zusammenfällt, gerade sieben Parameter enthält und aus lauter gewundenen Curven dritter Ordnung besteht.

Indem wir diese Ergebnisse auf die zehngliedrige Berührungstransformationsgruppe (7) (s. S. 437) der Ebene x, z übertragen, erkennen wir, dass diese Gruppe ausser der Differentialgleichung dritter Ordnung: $z''' = 0$ (s. S. 439) nur noch eine oder mehrere gewöhnliche Differentialgleichungen siebenter Ordnung zwischen z und x invariant lässt, sonst aber keine Differentialgleichung, deren Ordnung die achte nicht übersteigt. Es bleibt noch übrig, die betreffenden Differentialgleichungen siebenter Ordnung wirklich zu bestimmen. Man wird zu diesem Zwecke die Gruppe (7) erweitern, indem man die Differentialquotienten von z nach x bis mit zur siebenten Ordnung einschliesslich mitnimmt; durch Determinantenbildung findet man dann erstens die invariante Differentialgleichung dritter Ordnung: $z''' = 0$ und zweitens noch eine invariante Differentialgleichung siebenter Ordnung, welche sich nicht mehr in Faktoren zerspalten lässt. Wir wollen diese Differentialgleichung nicht hinschreiben, sondern wollen uns begnügen das Theorem auszusprechen:

Theorem 75. *Jede zehngliedrige irreducible Gruppe von Berührungstransformationen einer Ebene lässt nur zwei gewöhnliche Differentialgleichungen invariant, deren Ordnung nicht grösser ist als acht, nämlich erstens eine Differentialgleichung von dritter und zweitens eine von siebenter Ordnung.*

§ 111.

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung der grössten Untergruppen der zehngliedrigen projectiven Gruppe eines linearen Complexes. Die Kenntniss dieser Untergruppen ist zu manchen Zwecken nützlich, unter Anderm für die Integrationstheorie.

Zunächst erinnern wir an das auf S. 450 Gesagte. Wir sahen damals, dass die zehngliedrige projective Gruppe (23) des linearen Complexes: $dz_1 + x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = 0$ jeden der ∞^3 Punkte des Raumes x_1, y_1, z_1 in jeden andern überführen kann und ebenso jede der ∞^3 Geraden des Complexes in jede andere. Hieraus geht nun hervor, dass es innerhalb der zehngliedrigen Gruppe (23) — wir wollen sie der Kürze halber die G_{10} nennen — zwei verschiedene Schaaren von je ∞^3 siebengliedrigen Untergruppen giebt. Jede Untergruppe, welche der einen Schaar angehört, besteht aus allen Transformationen der G_{10}, welche einen bestimmten Punkt festhalten; mit dem betreffenden Punkte bleibt dann natürlich zugleich auch die Ebene invariant, welche von den ∞^1 hindurchgehenden Complexgeraden gebildet wird. Jede Untergruppe der andern Schaar besteht aus allen Transformationen der G_{10}, welche eine Complexgerade invariant lassen. Die Untergruppen jeder einzelnen Schaar sind selbstverständlich innerhalb der G_{10} mit einander gleichberechtigt.

Als Repräsentant der ersten Schaar kann die siebengliedrige Gruppe (22) auf S. 446 gelten, bei welcher der invariante Punkt im Unendlichen liegt. Um einen Repräsentanten der andern Schaar zu haben, wählen wir als invariante Complexgerade die Axe des Ebenenbüschels: $y =$ const. und finden so die siebengliedrige Gruppe:

$$(27) \quad \boxed{\begin{array}{c} p_1 - y_1 r_1, \quad q_1 + x_1 r_1, \quad r_1, \quad x_1 p_1 - y_1 q_1, \quad y_1 p_1 \\ x_1 p_1 + y_1 q_1 + 2 z_1 r_1, \quad z_1 p_1 - y_1 (x_1 p_1 + y_1 q_1 + z_1 r_1) \end{array}}\,.$$

Die siebengliedrige Gruppe (27) ist mit der Gruppe (22) nicht gleichzusammengesetzt, denn während die letztere Gruppe eine eingliedrige invariante Untergruppe enthält, nämlich: r_1, giebt es in der Gruppe (27) keine eingliedrige invariante Untergruppe.

In der That, soll:

$$S = \alpha(p_1 - y_1 r_1) + \beta(q_1 + x_1 r_1) + \gamma r_1 + \delta(x_1 p_1 - y_1 q_1) + \varepsilon \,.\, y_1 p_1 + \\ + \vartheta(x_1 p_1 + y_1 q_1 + 2 z_1 r_1) + \varkappa(z_1 p_1 - y_1(x_1 p_1 + y_1 q_1 + z_1 r_1))$$

eine eingliedrige invariante Untergruppe der Gruppe (27) sein, so darf:

$$(r_1, S) = 2\vartheta r_1 + \varkappa(p_1 - y_1 r_1)$$

sich von S nur durch einen constanten Faktor unterscheiden, es müssen also ϑ und $\varkappa$ beide verschwinden; in entsprechender Weise erkennt man durch Betrachtung der beiden Ausdrücke:

$$(p_1 - y_1 r_1, S) = 2\beta \,.\, r_1 + \delta(p_1 - y_1 r_1)$$
$$(q_1 + x_1 r_1, S) = -2\alpha \,.\, r_1 - \delta(q_1 + x_1 r_1) + \varepsilon(p_1 - y_1 r_1),$$

dass δ und ε, α und β sämmtlich verschwinden; endlich zeigt noch:

$$(S,\, z_1 p_1 - y_1(x_1 p_1 + y_1 q_1 + z_1 r_1)) = \gamma(p_1 - y_1 r_1),$$

dass auch γ nicht von Null verschieden sein kann. Damit ist bewiesen, dass die Gruppe (27) wirklich keine eingliedrige invariante Untergruppe enthält.

Da unsere G_{10}, wie wir vorhin gesehen haben, siebengliedrige Untergruppen enthält, so werden wir ihre grössten Untergruppen finden, wenn wir alle ihre Untergruppen bestimmen, welche sieben oder mehr Parameter enthalten. Das soll jetzt geschehen.

Wir beweisen zuvörderst, dass jede Untergruppe der G_{10} imprimitiv ist und zwar in der Art, dass sie eine den ganzen Raum x_1, y_1, z_1 ausfüllende Schaar von ∞^2 Curven invariant lässt.

Wenn wir die Punkte des Raums x_1, y_1, z_1 vermöge der Gleichungen (18), S. 445 auf die Linienelemente x, y, z der Ebene x, z abbilden, so entspricht der G_{10} eine zehngliedrige irreducible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z, zugleich entspricht natürlich jeder Untergruppe g der G_{10} eine gewisse Berührungstransformationsgruppe γ der Ebene. Ist nun γ irreducibel, so hat es entweder sechs oder sieben Parameter und es ergiebt sich daher aus den Entwickelungen der Seiten 443 ff., dass die entsprechende Untergruppe g der G_{10} imprimitiv ist und eine Schaar von ∞^2 Curven des Raumes x_1, y_1, z_1 invariant lässt. Ist andrerseits die Berührungstransformationsgruppe γ reducibel, so giebt es nach Kap. 23, S. 390 in der Ebene x, z eine bei γ invariante Schaar von ∞^2 Element-M_1 und dieser Schaar entspricht natürlich im Raume x_1, y_1, z_1 eine bei g invariante Schaar von ∞^2 Curven, welche sämmtlich die Pfaffsche Gleichung: $dz_1 + x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = 0$ erfüllen, also, wie man sich ausdrückt, eine bei g invariante Schaar von ∞^2 Complexcurven des linearen Complexes: $dz_1 + x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = 0$.

Damit ist bewiesen, dass jede Untergruppe der G_{10} eine Schaar von ∞^2 Curven des Raumes x_1, y_1, z_1 invariant lässt; es ist überdies klar, dass in jedem einzelnen Falle die Curven der betreffenden invarianten Schaar den ganzen Raum erfüllen, denn man sieht unmittelbar, dass durch jeden Punkt des Raumes eine Curve der Schaar geht.

Wir wollen nun dieses Ergebniss zur Untersuchung der sieben- und mehrgliedrigen Untergruppen der G_{10} anwenden.

Enthält eine Untergruppe g der G_{10} sieben oder mehr Parameter, so gestattet jede unter den ∞^2 Curven der bei g invarianten Curvenschaar mindestens ∞^5 projective Transformationen und ist in Folge dessen entweder eine ebene krumme Curve oder eine Gerade.

Der erste dieser beiden Fälle kann, wie beiläufig bemerkt sein mag, nur dann eintreten, wenn die invariante Curvenschaar nicht aus Complexcurven besteht, denn ebene krumme Curven können die Gleichung: $dz_1 + x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = 0$ nicht erfüllen, das haben wir schon oben (auf S. 451) gesehen.

Tritt nun der erste Fall ein, so umhüllen die ∞^2 Ebenen der betreffenden Curven entweder eine bei g invariante krumme Fläche oder eine invariante Curve oder einen invarianten Punkt. Tritt dagegen der zweite Fall ein, so haben wir eine invariante Schaar von ∞^2 Geraden, also ein Strahlensystem, welches bei g invariant bleibt.

Dieses Strahlensystem besitzt immer eine natürlich ebenfalls invariante Brennfigur, nämlich entweder eine Brennfläche oder eine Brenncurve oder einen Brennpunkt; die etwaige Brennfläche kann selbstverständlich keine Ebene sein.

Wir sehen mithin, dass jede in der G_{10} enthaltene Untergruppe g, welche sieben oder mehr Parameter besitzt, entweder eine krumme Fläche oder eine Curve oder einen Punkt invariant lässt.

Früher ist gezeigt, dass jeder Punkt des Raumes x_1, y_1, z_1 blos ∞^7 Transformationen der G_{10} gestattet (s. S. 452). Bleibt daher bei g ein Punkt invariant, so enthält g gerade sieben Parameter und ist identisch mit der grössten in der G_{10} enthaltenen Untergruppe, bei welcher dieser Punkt in Ruhe bleibt.

Lässt g andrerseits eine krumme Fläche invariant, so gestattet diese Fläche mindestens ∞^7 Collineationen, jede ihrer ∞^1 Haupttangentencurven gestattet in Folge dessen deren ∞^6, also können diese Curven nicht gewunden, sondern sie müssen nach einem bekannten Satze gerade Linien sein. Wäre nun die Fläche abwickelbar mit einer gewundenen Curve als Rückkehrkante, so müsste diese Curve ebenfalls invariant bleiben und das ist unmöglich, da eine gewundene Curve nur ∞^3 Collineationen gestattet. Andrerseits kann die Fläche auch keine nicht ausgeartete Fläche zweiten Grades sein, denn eine solche gestattet blos ∞^6 Collineationen. Folglich kann die Fläche nur ein Kegel sein. Bleibt aber bei g ein Kegel invariant, so bleibt auch die Spitze desselben stehen, wir kommen demnach hier auf den schon erledigten Fall eines invarianten Punktes.

Uebrig bleibt der Fall, dass g eine Curve invariant lässt. Diese Curve kann offenbar nicht gewunden sein, wäre sie ferner eben aber krumm, so bliebe ihre Ebene stehen und in dieser Ebene der von dem linearen Complex zugeordnete Punkt, wir hätten also wieder den schon oben erledigten Fall. Folglich muss die Curve eine Gerade sein und zwar eine Complexgerade, denn jede andere Gerade nimmt ja bei der G_{10} gerade ∞^4 verschiedene Lagen an und gestattet daher blos eine sechsgliedrige Untergruppe, dagegen gestattet jede der ∞^3 Complexgeraden eine siebengliedrige.

Hiermit sind alle Untergruppen der G_{10} gefunden, welche sieben oder mehr Parameter haben, wir können daher sagen:

Theorem 76. *Die zehngliedrige projective Gruppe eines linearen Complexes im dreifach ausgedehnten Raume enthält keine Untergruppe mit mehr als sieben Parametern und von siebengliedrigen enthält sie nur zwei Arten: jede siebengliedrige Untergruppe der einen Art besteht aus allen Transformationen* *der zehngliedrigen Gruppe, welche einen bestimmten Punkt invariant lassen, jede der anderen Art aus allen Transformationen, welche eine bestimmte Complexgerade invariant lassen.*

Wir werden jetzt noch eine neue und im Grunde einfachere Methode zur Bestimmung der grössten Untergruppen unsrer zehngliedrigen Gruppe kurz auseinandersetzen.

Die zehngliedrige projective Gruppe G_{10} des linearen Complexes: $dz_1 + x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = 0$ enthält eine und nur eine infinitesimale Translation, nämlich r_1. Stellen wir, wie in Abschnitt I auf S. 577, jede infinitesimale Translation durch ein Flächenelement des Raumes x_1, y_1, z_1 dar, so erhalten wir als Bild der infinitesimalen Translation r_1 ein Flächenelement, das aus der unendlich fernen Ebene und aus dem Punkte besteht, welcher der unendlich fernen Ebene von dem linearen Complexe zugeordnet ist.

Berücksichtigen wir nun, dass die eingliedrige Untergruppe r_1 der G_{10} in der siebengliedrigen Untergruppe (22) invariant ist, nicht aber in einer grösseren Untergruppe der G_{10}, so erkennen wir, dass die G_{10} gerade ∞^3 verschiedene infinitesimale Transformationen enthält, welche in ihr und natürlich auch in der allgemeinen projectiven Gruppe des Raumes x_1, y_1, z_1 mit der infinitesimalen Translation r_1 gleichberechtigt sind. Diese ∞^3 mit r_1 gleichberechtigten Transformationen werden natürlich durch ∞^3 Flächenelemente des Raumes x_1, y_1, z_1 dargestellt und zwar liegt in jeder Ebene des Raumes ein solches Flächenelement, welches aus der betreffenden Ebene und dem ihr vom linearen Complexe zugeordneten Punkte besteht.

Ausser den eben beschriebenen ∞^3 infinitesimalen Transformationen giebt es in der G_{10} keine infinitesimale Transformation, welche innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe des Raumes x_1, y_1, z_1 mit einer infinitesimalen Translation gleichberechtigt ist. Wäre nämlich S eine derartige infinitesimale Transformation, so könnten wir die Ebene des zu S gehörigen Flächenelements durch eine geeignete Transformation der G_{10} in die unendlich ferne Ebene überführen; es wäre daher S auch innerhalb der G_{10} mit einer infinitesimalen Translation gleichberechtigt, das aber ist unmöglich, denn r_1 ist die einzige in der G_{10} enthaltene infinitesimale Translation und S sollte eben nicht zu den ∞^3 infinitesimalen Transformationen gehören, welche innerhalb der G_{10} mit r_1 gleichberechtigt sind.

Enthält eine Untergruppe der G_{10} alle die ∞^3 mit r_1 gleichberechtigten infinitesimalen Transformationen, so enthält sie, wie man sich durch Combination überzeugen kann, überhaupt alle infinitesimalen Transformationen der G_{10}, sie fällt demnach mit der G_{10} selbst zusammen. Hieraus folgt, dass jede neungliedrige Untergruppe der G_{10} gerade ∞^2 infinitesimale Transformationen enthält, welche innerhalb der G_{10} mit r_1 gleichberechtigt sind. Dementsprechend enthält jede achtgliedrige Untergruppe der G_{10} entweder ∞^1 oder ∞^2 derartige Transformationen, endlich jede siebengliedrige Untergruppe entweder ∞^0 oder ∞^1 oder ∞^2. Dabei versteht es sich von selbst, dass der Inbegriff aller mit r_1 gleichberechtigten infinitesimalen Transformationen, welche in der Untergruppe enthalten sind, gegenüber dieser Untergruppe invariant bleibt. Erinnern wir uns nun, dass jede mit r_1 gleichberechtigte infinitesimale Transformation durch ein Flächenelement dargestellt wird, so erkennen wir, dass jede Untergruppe der G_{10}, welche neun, acht oder sieben Parameter enthält, eine Schaar von ∞^2 oder ∞^1 oder ∞^0 Flächenelementen invariant lässt und daraus folgt schliesslich, dass jede solche Untergruppe entweder eine krumme Fläche oder eine Curve oder einen Punkt festhält.

Damit sind wir wieder auf dem Standpunkt angelangt, welchen wir bereits auf S. 455 erreicht hatten, nur damals auf Grund anderer Ueberlegungen. Von jetzt ab würden wir, um die Bestimmung der betreffenden Untergruppen wirklich durchzuführen, nur früher Gesagtes wiederholen müssen.

§ 112.

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen wollen wir jetzt benutzen, um in möglichst wenig Veränderlichen alle Gruppen von Punkttransformationen zu bestimmen, welche mit der G_{10} des linearen Complexes oder, was auf dasselbe hinauskommt, mit einer zehngliedrigen irreducibeln Berührungstransformationsgruppe der Ebene gleichzusammengesetzt sind.

Da die G_{10} des linearen Complexes nur siebengliedrige Untergruppen enthält, dagegen keine neungliedrigen und auch keine achtgliedrigen, so kann es zehngliedrige Gruppen von Punkttransformationen mit der verlangten Zusammensetzung nur in drei und mehr Veränderlichen geben; wir werden uns deshalb auf die Aufsuchung der betreffenden Gruppen in drei Veränderlichen beschränken.

Eine zehngliedrige Gruppe von Punkttransformationen des dreifach ausgedehnten Raumes, welche mit der G_{10} des linearen Complexes gleichzusammengesetzt ist, ist nothwendig transitiv, ja sogar primitiv, denn liesse sie eine Schaar von ∞^1 Flächen oder eine von ∞^2 Curven invariant, so müsste sie offenbar eine neungliedrige oder eine achtgliedrige Untergruppe enthalten, was nicht der Fall ist.

Zunächst können wir nach den Regeln von Abschn. I, Theor. 81, S. 446 sehr leicht entscheiden, wie viele verschiedene Typen von Gruppen von der verlangten Beschaffenheit es giebt. Wir wissen nämlich, dass es in der G_{10} eines linearen Complexes blos zwei verschiedene Arten von siebengliedrigen Untergruppen giebt. Repräsentant der einen Art ist die siebengliedrige Untergruppe g_7, welche einen Punkt invariant lässt, Repräsentant der andern Art die siebengliedrige Untergruppe γ_7, welche eine Complexgerade festhält. Da die G_{10} einfach ist, so enthält weder die g_7 noch die γ_7 eine in der G_{10} invariante Untergruppe, es entspricht also jeder dieser beiden Untergruppen ein Typus von Gruppen von der verlangten Beschaffenheit; diese beiden Typen sind überdies von einander verschieden, da die beiden Untergruppen g_7 und γ_7 nicht gleichzusammengesetzt sind (s. S. 453) und da es in Folge dessen nicht möglich ist, die G_{10} derart holoedrisch isomorph auf sich zu beziehen, dass die g_7 der γ_7 entspricht. Es giebt somit gerade zwei verschiedene Typen von Gruppen von der verlangten Beschaffenheit.

Um nun für jeden dieser beiden Typen einen Repräsentanten zu finden, verfahren wir nach Anleitung der Theoreme 85 und 86 auf S. 483 und 489 des Abschnitts I. Wir nehmen in dem Raume des linearen Complexes irgend zwei Figuren F_1 und F_2, von denen die erste bei der g_7, die zweite bei der γ_7 invariant bleibt, während keine von beiden die G_{10} gestattet. Auf diese Figuren führen wir alle ∞^{10} Transformationen der G_{10} aus und charakterisiren die ∞^3 Lagen, welche F_1 dabei annimmt, und die ∞^3 Lagen, welche F_2 annimmt, durch je drei Parameter. Dann erhalten wir in jedem dieser Systeme von drei Parametern eine zehngliedrige mit der Gruppe des linearen Complexes gleichzusammengesetzte Gruppe und die beiden so gefundenen Gruppen sind augenscheinlich Repräsentanten der beiden erwähnten Gruppentypen.

Als Figur F_1 können wir einen beliebigen Punkt des Raumes x_1, y_1, z_1 wählen; Repräsentant des durch g_7 bestimmten Gruppentypus ist daher die Gruppe (23) (s. S. 446) des linearen Complexes selbst.

Als Figur F_2 können wir eine beliebige Complexgerade wählen, wir ziehen es jedoch vor, einen etwas andern Weg einzuschlagen.

Wir wissen, dass es in der Ebene eine zehngliedrige irreducible Gruppe von Berührungstransformationen giebt, welche die Schaar aller Kreise:

$$(x-a)^2 + (z-c)^2 + b^2 = 0$$

invariant lässt (s. S. 443). Schreiben wir nun die Schaar aller Kreise als eine Schaar von Element-M_1 der Ebene x, z, also folgendermassen:

$$\left\{\begin{array}{l} (x-a)^2 + (z-c)^2 + b^2 = 0 \\ \quad x - a + y(z-c) = 0 \end{array}\right. \tag{28}$$

und deuten wir x, y, z als Punktcoordinaten eines dreifach ausgedehnten Raumes, so erscheint jene zehngliedrige Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z als eine Gruppe von Punkttransformationen des Raumes x, y, z und zwar als eine Gruppe, welche die Schaar der ∞^3 Curven (28) invariant lässt.

Wir wollen die eben definirte zehngliedrige Gruppe von Punkttransformationen kurz $\mathfrak{G}_{10}$ nennen. Es ist klar, dass diese $\mathfrak{G}_{10}$ mit der Gruppe des linearen Complexes durch eine Punkttransformation ähnlich ist, welche die ∞^3 Curven (28) in die ∞^3 Complexgeraden überführt. Wir können deshalb den noch fehlenden Repräsentanten für den durch γ_7 bestimmten Gruppentypus auch in der Weise finden, dass wir die Gruppe berechnen, durch welche die Parameter a, b, c der Curvenschaar (28) bei der $\mathfrak{G}_{10}$ transformirt werden.

Die betreffende Gruppe erhalten wir nun so: Sind:

$$\xi_\varkappa(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_\varkappa(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_\varkappa(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$(\varkappa = 1 \cdots 10)$$

die infinitesimalen Transformationen der $\mathfrak{G}_{10}$, so berechnen wir für jedes $\varkappa$ drei solche Functionen $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$, $\gamma_\varkappa$ von a, b, c, dass das Gleichungensystem (28) in den sechs Veränderlichen x, y, z, a, b, c die infinitesimale Transformation:

$$\xi_\varkappa\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_\varkappa\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_\varkappa\frac{\partial f}{\partial z} + \alpha_\varkappa\frac{\partial f}{\partial a} + \beta_\varkappa\frac{\partial f}{\partial b} + \gamma_\varkappa\frac{\partial f}{\partial c}$$

gestattet. Dann sind:

$$\alpha_\varkappa(a, b, c)\frac{\partial f}{\partial a} + \beta_\varkappa(a, b, c)\frac{\partial f}{\partial b} + \gamma_\varkappa(a, b, c)\frac{\partial f}{\partial c}$$
$$(\varkappa = 1 \cdots 10)$$

die infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppe. Diese infinitesimalen Transformationen lauten:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial a}, \quad \frac{\partial f}{\partial b}, \quad \frac{\partial f}{\partial c} \\ c\frac{\partial f}{\partial b} - b\frac{\partial f}{\partial c}, \quad a\frac{\partial f}{\partial c} - c\frac{\partial f}{\partial a}, \quad b\frac{\partial f}{\partial a} - a\frac{\partial f}{\partial b} \\ a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} + c\frac{\partial f}{\partial c} \end{array}\right. \tag{29}$$

$$
(29) \qquad \begin{cases}
(a^2 - b^2 - c^2)\frac{\partial f}{\partial a} + 2ab\frac{\partial f}{\partial b} + 2ac\frac{\partial f}{\partial c} \\
2ba\frac{\partial f}{\partial a} + (b^2 - c^2 - a^2)\frac{\partial f}{\partial b} + 2bc\frac{\partial f}{\partial c} \\
2ca\frac{\partial f}{\partial a} + 2cb\frac{\partial f}{\partial b} + (c^2 - a^2 - b^2)\frac{\partial f}{\partial c},
\end{cases}
$$

von ihnen erzeugen die ersten drei die Gruppe aller Translationen eines dreifach ausgedehnten Raumes, die ersten sechs die Gruppe aller Bewegungen.

Die zehngliedrige Gruppe aller Berührungstransformationen der Ebene, welche Kreise in Kreise überführen, verwandelt natürlich zwei unendlich benachbarte Kreise, welche sich berühren, in ebensolche Kreise. Nun ist: $da^2 + db^2 + dc^2 = 0$ die Bedingung dafür, dass sich die beiden unendlich benachbarten Kreise mit den Parametern: a, b, c und: $a + da$, $b + db$, $c + dc$ berühren, folglich können wir schliessen, dass die infinitesimalen Transformationen (29) sämmtlich die Gleichung: $da^2 + db^2 + dc^2 = 0$ invariant lassen, dass sie also conforme infinitesimale Transformationen sind. Man könnte sogar leicht beweisen, dass sich die allgemeinste conforme infinitesimale Transformation des Raumes a, b, c aus den zehn Transformationen (29) linear ableiten lässt.

Wir haben hiermit das

Theorem 77. *In drei Veränderlichen giebt es nur zwei Typen solcher Gruppen von Punkttransformationen, welche mit einer zehngliedrigen irreducibeln Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene gleichzusammengesetzt sind. Repräsentanten dieser beiden Gruppentypen sind: erstens die projective Gruppe eines linearen Complexes und zweitens die Gruppe aller conformen Punkttransformationen des Raumes.*

Hierzu fügen wir noch den

Satz 1. *Die projective Gruppe eines linearen Complexes im dreifach ausgedehnten Raume und die Gruppe aller conformen Transformationen dieses Raumes sind gleichzusammengesetzt, sie sind beide einfach und enthalten beide Untergruppen mit sieben, dagegen keine Untergruppen mit mehr als sieben Parametern.*

Kapitel 25.

Eine Klasse von irreducibeln Berührungstransformationsgruppen des $(n+1)$-fach ausgedehnten Raumes.

Entwickelungen, ganz analog denen, welche wir in Kapitel 23 für die Ebene angestellt haben, lassen sich auch für den Raum von $n+1$ Dimensionen durchführen. Freilich macht sich dabei ein wesentlicher Unterschied bemerkbar. In der Ebene lieferten unsere Betrachtungen *alle* irreducibeln endlichen continuirlichen Gruppen von Berührungstransformationen; bei der Verallgemeinerung dagegen, welche wir jetzt vornehmen, werden wir nur eine einzelne, aber gerade die wichtigste Klasse von irreducibeln Berührungstransformationsgruppen des $(n+1)$-fach ausgedehnten Raumes finden. Die Analogie zwischen dem Folgenden und dem in Kapitel 23 Gesagten ist übrigens so in die Augen fallend, dass wir hier Manches etwas kürzer fassen können.

§ 113.

Um die Berührungstransformationsgruppen, welche wir in dem gegenwärtigen Kapitel bestimmen wollen, scharf bezeichnen zu können, müssen wir Einiges vorausschicken.

Eine Berührungstransformation des $(n+1)$-fach ausgedehnten Raumes: $z, x_1 \cdots x_n$ ist nach Kapitel 5 eine Transformation in den $2n+1$ Veränderlichen $z, x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n$, bei welcher die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - y_1 dx_1 - \cdots - y_n dx_n = 0$$

invariant bleibt. Wir schreiben hier $y_1 \cdots y_n$ an Stelle der in Kapitel 5 benutzten $p_1 \cdots p_n$, weil wir später $p_1 \cdots p_n$ in einem andern Sinne verwenden werden (s. S. 464). *Es sind demnach in diesem ganzen Kapitel die Grössen $z, x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n$ als die Coordinaten der Elemente des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ zu betrachten.*

Jede infinitesimale Berührungstransformation:

$$Bf = \sum_1^n {}^i\, \xi_i(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n {}^i\, \eta_i(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y_i} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ ist nach Theorem 39, S. 253 durch eine gewisse Function W von $z, x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n$, ihre sogenannte charakteristische Function vollständig bestimmt, es ist nämlich:

$$(1) \quad \xi_i = \frac{\partial W}{\partial y_i}, \quad \eta_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i} - y_i\frac{\partial W}{\partial z}, \quad \zeta = -W + \sum_1^n {}^\nu\, y_\nu \frac{\partial W}{\partial y_\nu}$$

$$(i = 1 \cdots n).$$

Umgekehrt ist auch die charakteristische Function W der infinitesimalen Berührungstransformation Bf durch diese Transformation vollständig bestimmt, denn es ist:

$$W = \sum_1^n {}^\nu y_\nu \xi_\nu - \zeta. \tag{2}$$

Die allgemeinste infinitesimale Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ erhalten wir, wenn wir die charakteristische Function W gleich einer willkürlichen Function von $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z$ setzen.

Verhalten sich in der infinitesimalen Berührungstransformation Bf die Functionen ξ_i, η_i, ζ sämmtlich regulär in der Umgebung des Werthsystems $x_1^0 \cdots x_n^0, y_1^0 \cdots y_n^0, z^0$, so verhält sich die charakteristische Function W von Bf in der Umgebung desselben Werthsystems regulär. Das Umgekehrte gilt natürlich auch: verhält sich W an der Stelle x_i^0, y_i^0, z^0 regulär, so besitzen die ξ_i, η_i, ζ dieselbe Eigenschaft. Aehnlich wie in Kapitel 23 (s. S. 402 f.) lässt sich nun zeigen, dass man stets vermöge einer Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ solche neue Veränderliche $\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n, \bar{y}_1 \cdots \bar{y}_n, \bar{z}$ einführen kann, dass das Werthsystem: x_i^0, y_i^0, z^0 übergeht in: $\bar{x}_i = \bar{y}_i = \bar{z} = 0$; verhalten sich die ξ_i, η_i, ζ in der Umgebung von x_i^0, y_i^0, z^0 regulär, so verwandelt sich Bf bei der betreffenden Berührungstransformation in eine infinitesimale Berührungstransformation:

$$Bf = \sum_1^n {}^i \mathfrak{x}_i(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_i} + \sum_1^n {}^i \mathfrak{y}_i(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \frac{\partial f}{\partial \bar{y}_i} + \mathfrak{z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \overline{B}f,$$

bei welcher sich die $\mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_i, \mathfrak{z}$ in der Umgebung von $\bar{x}_i = \bar{y}_i = \bar{z} = 0$ regulär verhalten; von der charakteristischen Function:

$$\mathfrak{W}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \sum_1^n {}^\nu \bar{y}_\nu \mathfrak{x}_\nu - \mathfrak{z}$$

der infinitesimalen Transformation $\overline{B}f$ gilt natürlich dasselbe.

Ist:

$$B_\varkappa f = \sum_1^n {}^i \xi_{\varkappa i}(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n {}^i \eta_{\varkappa i}(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y_i} + \zeta_\varkappa(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z}$$
$$(\varkappa = 1 \cdots r)$$

eine r-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$, so setzen wir immer voraus (s. Abschnitt I, S. 171), dass sich sämmtliche Functionen $\xi_{\varkappa i}, \eta_{\varkappa i}, \zeta_\varkappa$ in der Umgebung eines und desselben Werthsystems: x_i^0, y_i^0, z^0 von allgemeiner Lage regulär verhalten. Nach dem eben Gesagten dürfen wir aber ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_1^0 \cdots x_n^0, y_1^0 \cdots y_n^0, z^0$ sämmtlich gleich Null sind. *Wir brauchen daher im Folgenden überall nur diejenigen Gruppen von Berührungstransformationen des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ zu betrachten, deren infinitesimale Transformationen: $B_1 f \cdots B_r f$ solche charakteristische Functionen: $W_1 \cdots W_r$ besitzen, welche gewöhnliche Potenzreihen nach $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z$ sind:*

$$W_\varkappa = \mathfrak{A}_\varkappa + \sum_1^n {}_\nu (\mathfrak{B}_{\varkappa\nu} x_\nu + \mathfrak{C}_{\varkappa\nu} y_\nu) + \mathfrak{D}_\varkappa z + \cdots;$$

hierin bezeichnen die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ u. s. w. natürlich Constanten.

Es seien $B_1 f$ und $B_2 f$ zwei infinitesimale Berührungstransformationen mit den charakteristischen Functionen W_1 und W_2; dann ist, wie wir früher gesehen haben (Theorem 44, S. 275) auch: $B_1 B_2 f - B_2 B_1 f$ eine infinitesimale Berührungstransformation und zwar eine mit der charakteristischen Function:

$$\Omega = \sum_1^n {}_\nu \left[\frac{\partial W_1}{\partial y_\nu} \left(\frac{\partial W_2}{\partial x_\nu} + y_\nu \frac{\partial W_2}{\partial z} \right) - \frac{\partial W_2}{\partial y_\nu} \left(\frac{\partial W_1}{\partial x_\nu} + y_\nu \frac{\partial W_1}{\partial z} \right) \right] -$$
$$- W_1 \frac{\partial W_2}{\partial z} + W_2 \frac{\partial W_1}{\partial z}.$$

Für diese charakteristische Function Ω wollen wir von jetzt ab das auf S. 320 eingeführte Symbol:

$$\Omega = \{ W_1 W_2 \}$$

benutzen und wir wollen kurz sagen, *dass die charakteristische Function $\{W_1 W_2\}$ durch Combination der beiden charakteristischen Functionen W_1 und W_2 entsteht.*

Aus den Gliedern niedrigster Ordnung in den Reihenentwickelungen von W_1 und W_2 kann man im Allgemeinen das Glied niedrigster Ordnung in der Reihenentwickelung von $\{W_1 W_2\}$ berechnen. Die Reihenentwickelungen für W_1 und W_2 mögen nämlich etwa mit Gliedern von bezüglich μ-ter und ν-ter Ordnung beginnen und daher die Form haben:

$$W_1 = \alpha_\mu(x, y, z) + \cdots, \quad W_2 = \beta_\nu(x, y, z) + \cdots,$$

wo α_μ und β_ν ganze homogene Functionen μ-ter bezüglich ν-ter Ordnung von $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z$ bezeichnen, während die Glieder höherer Ordnung weggelassen sind. Alsdann ist das Glied niedrigster Ordnung in der Entwickelung von $\{W_1 W_2\}$ gewöhnlich von der Ordnung $\mu + \nu - 2$ und hat die Form:

(3)
$$\sum_1^n{}_i\left(\frac{\partial\alpha_\mu}{\partial y_i}\frac{\partial\beta_\nu}{\partial x_i}-\frac{\partial\alpha_\mu}{\partial x_i}\frac{\partial\beta_\nu}{\partial y_i}\right);$$

sollte jedoch dieser Ausdruck identisch verschwinden, so ist das Glied niedrigster Ordnung von $\{W_1 W_2\}$ immer noch in einem Falle durch α_μ und β_ν vollständig bestimmt, nämlich dann, wenn α_μ und β_ν beide von $x_1\cdots x_n$, $y_1\cdots y_n$ frei sind; in diesem Falle beginnt die Entwickelung von $\{W_1 W_2\}$ mit einem Gliede $(\mu+\nu-1)$-ter Ordnung, welches die Form besitzt:

(4)
$$-\alpha_\mu\frac{\partial\beta_\nu}{\partial z}+\beta_\nu\frac{\partial\alpha_\mu}{\partial z}.$$

Wenn dagegen der Ausdruck (3) identisch verschwindet, ohne dass α_μ und β_ν beide von $x_1\cdots x_n$, $y_1\cdots y_n$ frei sind, so kann man nur behaupten, dass die Reihenentwickelung von $\{W_1 W_2\}$ mit einem Gliede $(\mu+\nu-1)$-ter oder höherer Ordnung beginnt, ohne über die Form des Anfangsgliedes etwas aussagen zu können.

Betrachtet man die infinitesimale Berührungstransformation Bf, welche der charakteristischen Function W entspricht, so bemerkt man, dass jedes in W vorkommende Glied m-ter Ordnung in der Reihenentwickelung von $\xi_1\cdots\xi_n$, $\eta_1\cdots\eta_n$ die Glieder $(m-1)$-ter und m-ter Ordnung beeinflusst, in der Entwickelung von ζ dagegen nur die Glieder m-ter Ordnung. Beginnt also die Reihenentwickelung von Bf mit einem Gliede nullter oder erster Ordnung in den x_i, y_i, z, so beginnt W mit einem Gliede von nullter oder erster oder höchstens zweiter Ordnung.

Wollen wir daher wissen, welche Form die Glieder niedrigster Ordnung in einer solchen infinitesimalen Berührungstransformation haben können, deren Reihenentwickelung mit Gliedern von nullter oder erster Ordnung beginnt, so brauchen wir nur der charakteristischen Function W der Reihe nach die Werthe:

$$1,\quad x_i,\quad y_i,\quad x_i x_\varkappa,\quad x_i y_\varkappa,\quad y_i y_\varkappa,\quad z^2$$
$$(i,\ \varkappa=1\cdots n)$$

zu ertheilen und die zugehörigen infinitesimalen Berührungstransformationen Bf zu berechnen. Auf diese Weise und mit Benutzung der Abkürzungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=p_i,\quad \frac{\partial f}{\partial y_i}=q_i,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=r,$$

welche von jetzt ab regelmässig angewendet werden sollen, erhalten wir die folgende Tabelle:

(5)

W	Bf	W	Bf
-1	r	$x_i y_\varkappa$	$x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i$
$-x_i$	$q_i + x_i r$	$y_i y_\varkappa$	$y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i + y_i y_\varkappa r$
y_i	p_i	$-x_i z$	$z q_i + x_i \sum_1^n {}_\nu\, y_\nu q_\nu + x_i z r$
$-z$	$\sum_1^n {}_\nu\, y_\nu q_\nu + z r$	$y_i z$	$z p_i - y_i \sum_1^n {}_\nu\, y_\nu q_\nu$
$-x_i x_\varkappa$	$x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i + x_i x_\varkappa r$	$-z^2$	$2z \sum_1^n {}_\nu\, y_\nu q_\nu + z^2 r$

Aus derselben lässt sich sofort ablesen, was für Glieder von nullter und erster Ordnung in der Reihenentwickelung einer infinitesimalen Berührungstransformation auftreten können; insbesondere ergiebt sich, dass eine infinitesimale Berührungstransformation, welche nur Glieder von erster und höherer Ordnung in den x_i, y_i, z enthält, nothwendig die Form besitzt:

$$(6)\quad \begin{cases} \sum\limits_{i\varkappa}^{1\cdots n} \{\alpha_{i\varkappa}(x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i) + \beta_{i\varkappa}(x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i) + \gamma_{i\varkappa}(y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i)\} + \\ \qquad + \sum\limits_1^n {}_i\, (\delta_i . z p_i + \varepsilon_i . z q_i) + \vartheta\left(\sum\limits_1^n {}_i\, y_i q_i + z r\right) + \cdots; \end{cases}$$

hier bezeichnen die α, β, γ, δ, ε, ϑ Constanten, die Glieder von zweiter und höherer Ordnung in den x_i, y_i, z sind weggelassen.

Aus dem eben Gesagten erhellt, dass eine Berührungstransformationsgruppe des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ in der Umgebung des Werthsystems: $x_i = y_i = z = 0$ höchstens:

$$2\left(\frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} + n\right) + n^2 + 2n + 1 = (n+1)(2n+1)$$

solche unabhängige infinitesimale Transformationen von erster Ordnung in den x_i, y_i, z enthält, aus denen sich keine Transformation von zweiter oder höherer Ordnung linear ableiten lässt (vgl. Abschnitt I, S. 191).

Wir wollen jetzt die Betrachtungen, welche wir auf S. 393 ff. bei den Berührungstransformationen der Ebene angestellt haben, auf den vorliegenden Fall übertragen, das heisst, *wir wollen die Veränderlichen:*

$x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$, z *als Punktcoordinaten in einem* $(2n+1)$*-fach ausgedehnten Räume deuten.*

Für diese Auffassung ordnet die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - y_1 dx_1 - \cdots - y_n dx_n = 0 \tag{7}$$

jedem Punkte des Raumes $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$, z ein ebenes Bündel von ∞^{2n-1} Richtungen zu und der Inbegriff der so definirten ∞^{2n+1} Bündel ist offenbar das vollkommene geometrische Bild der Pfaffschen Gleichung. *Die Berührungstransformationen des Raumes* z, $x_1 \cdots x_n$ *lassen sich in Folge dessen auch definiren als diejenigen Punkttransformationen des Raumes:* $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$, z, *welche den Inbegriff der besprochenen Bündel von Richtungen invariant lassen, dagegen die einzelnen Bündel unter einander vertauschen.*

Denken wir uns nunmehr irgend eine infinitesimale Berührungstransformation:

$$Bf = \sum_1^n {}_i\, \xi_i(x, y, z) p_i + \sum_1^n {}_i\, \eta_i(x, y, z) q_i + \zeta(x, y, z) r$$

des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ vorgelegt, welche als infinitesimale Punkttransformation des Raumes $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$, z den Punkt: $x_i = y_i = z = 0$ invariant lässt. Werden nur diejenigen Glieder von Bf geschrieben, welche in den x_i, y_i, z von erster Ordnung sind, so hat Bf nach S. 465 die Form (6):

$$\tag{6} \left\{\begin{aligned} Bf = \sum_{i\varkappa}^{1\cdots n} \{ & \alpha_{i\varkappa}(x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i) + \beta_{i\varkappa}(x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i) + \\ & + \gamma_{i\varkappa}(y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i)\} + \sum_1^n {}_i\,(\delta_i \,.\, z p_i + \varepsilon_i \,.\, z q_i) + \\ & + \vartheta\left(\sum_1^n {}_\nu\, y_\nu q_\nu + z r\right) + \cdots. \end{aligned}\right.$$

Die infinitesimale Transformation Bf vertauscht die ∞^{2n} Richtungen: $dx_i : dy_i : dz$, welche durch den Punkt: $x_i = y_i = z = 0$ gehen, unter einander und zwar durch eine infinitesimale Transformation $\mathfrak{B}f$, welche durch die in Bf vorkommenden Glieder erster Ordnung vollständig bestimmt ist (s. Abschnitt I, S. 600 f.). Wählen wir $x_1' \cdots x_n'$, $y_1' \cdots y_n'$, z' zu homogenen Coordinaten der betreffenden Richtungen und setzen wir:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i'} = p_i', \quad \frac{\partial f}{\partial y_i'} = q_i', \quad \frac{\partial f}{\partial z'} = r',$$

so erscheint $\mathfrak{B}f$ in der Form:

$$(6') \quad \begin{cases} \mathfrak{B}f = \sum_{i\varkappa}^{1\cdots n} \{ \alpha_{i\varkappa}(x_i' q_\varkappa' + x_\varkappa' q_i') + \beta_{i\varkappa}(x_i' p_\varkappa' - y_\varkappa' q_i') + \\ + \gamma_{i\varkappa}(y_i' p_\varkappa' + y_\varkappa' p_i') \} + \sum_1^n {}_i (\delta_i \,.\, z' p_i' + \varepsilon_i \,.\, z' q_i') + \\ \qquad + \vartheta \left(\sum_1^n {}_\nu y_\nu' q_\nu' + z' r' \right). \end{cases}$$

Da die infinitesimale Transformation Bf die Pfaffsche Gleichung (7) und ausserdem noch den Punkt: $x_i = y_i = z = 0$ invariant lässt, muss sie zugleich das diesem Punkte von der Gleichung (7) zugeordnete Bündel von ∞^{2n-1} Richtungen invariant lassen. Hieraus folgt, dass auch $\mathfrak{B}f$ dieses Bündel in Ruhe lässt, wovon man sich übrigens direkt überzeugen kann, wenn man beachtet, dass das betreffende Bündel durch die Gleichung: $z' = 0$ dargestellt wird. Während nun das Bündel: $z' = 0$ in Ruhe bleibt, werden die einzelnen Richtungen des Bündels von der infinitesimalen Transformation $\mathfrak{B}f$ unter einander vertauscht und zwar durch eine infinitesimale Transformation $\overline{\mathfrak{B}}f$, welche, wenn man $x_1' \cdots x_n'$, $y_1' \cdots y_n'$ zu homogenen Coordinaten der Richtungen des Bündels wählt, die Gestalt:

$$(6'') \quad \begin{cases} \overline{\mathfrak{B}}f = \sum_{i\varkappa}^{1\cdots n} \{ \alpha_{i\varkappa}(x_i' q_\varkappa' + x_\varkappa' q_i') + \beta_{i\varkappa}(x_i' p_\varkappa' - y_\varkappa' q_i') + \\ \qquad + \gamma_{i\varkappa}(y_i' p_\varkappa' + y_\varkappa' p_i') \} + \vartheta \,.\, \sum_1^n {}_\nu y_\nu' q_\nu' \end{cases}$$

erhält.

Soll die infinitesimale Transformation $\overline{\mathfrak{B}}f$ jede einzelne der ∞^{2n-1} Richtungen: $x_1' \cdots x_n'$, $y_1' \cdots y_n'$ des Bündels: $z' = 0$ stehen lassen, so ist nothwendig und hinreichend, dass sie die Form:

$$\lambda \left(\sum_1^n {}_\nu x_\nu' p_\nu' + \sum_1^n {}_\nu y_\nu' q_\nu' \right)$$

besitzt, wo λ eine Constante bezeichnet, die natürlich auch den Werth Null haben kann. Dieser Fall tritt, wie man sich leicht überzeugt, dann und nur dann ein, wenn erstens alle $\alpha_{i\varkappa}$ und $\gamma_{i\varkappa}$ und zweitens alle $\beta_{i\varkappa}$, in denen i von $\varkappa$ verschieden ist, verschwinden und wenn endlich drittens zwischen $\beta_{11} \cdots \beta_{nn}$ und ϑ die Relationen:

$$\vartheta = 2\beta_{11} = 2\beta_{22} = \cdots = 2\beta_{nn}$$

bestehen. Da nun $\mathfrak{B}f$ die Richtungen des Bündels: $z' = 0$ genau so transformirt wie $\overline{\mathfrak{B}}f$, so ergiebt sich, dass $\mathfrak{B}f$ dann und nur dann jede einzelne Richtung dieses Bündels stehen lässt, wenn es die Form besitzt:

$$\beta_{11}\left(\sum_1^n{}^{\nu} x_\nu' p_\nu' + \sum_1^n{}^{\nu} y_\nu' q_\nu' + 2z'r'\right) + \sum_1^n{}^{i} (\delta_i \,.\, z' p_i' + \varepsilon_i \,.\, z' q_i'),$$

wenn es sich also aus den $2n + 1$ infinitesimalen Transformationen:

$$z'p_1', \cdots z'p_n', \quad z'q_1', \cdots z'q_n', \quad \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu' p_\nu' + y_\nu' q_\nu') + 2z'r'$$

linear ableiten lässt. Bedenken wir andrerseits, dass sich die allgemeinste infinitesimale Transformation von der Form (6′) aus den $(n + 1)(2n + 1)$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$x_i' q_\varkappa' + x_\varkappa' q_i', \quad x_i' p_\varkappa' - y_\varkappa' q_i', \quad y_i' p_\varkappa' + y_\varkappa' p_i'$$
$$z'p_i', \quad z'q_i', \quad \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu' p_\nu' + y_\nu' q_\nu') + 2z'r'$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots n)$$

linear ableiten lässt, so erkennen wir, dass es nicht mehr als $n(2n+1)$ unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form (6′) giebt, welche die Richtungen des Bündels: $z' = 0$ wirklich transformiren und aus denen sich keine infinitesimale Transformation linear ableiten lässt, welche jede einzelne Richtung dieses Bündels stehen lässt. Zugleich ergiebt sich, dass eine infinitesimale Transformation von der Form (6′) die Richtungen des Bündels: $z' = 0$ dann und nur dann wirklich transformirt, wenn sie aus $n(2n + 1)$ infinitesimalen Transformationen von der Form:

$$(8)\quad \begin{cases} x_i' q_\varkappa' + x_\varkappa' q_i' + \sum_1^n{}^{j} (\mathfrak{a}_{i\varkappa j} z' p_j' + \mathfrak{b}_{i\varkappa j} z' q_j') + \mathfrak{c}_{i\varkappa}\left(\sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu' p_\nu' + y_\nu' q_\nu') + 2z'r'\right) \\ x_i' p_\varkappa' - y_\varkappa' q_i' + \sum_1^n{}^{j} (\mathfrak{a}_{i\varkappa j}' z' p_j' + \mathfrak{b}_{i\varkappa j}' z' q_j') + \mathfrak{c}_{i\varkappa}'\left(\sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu' p_\nu' + y_\nu' q_\nu') + 2z'r'\right) \\ y_i' p_\varkappa' + y_\varkappa' p_i' + \sum_1^n{}^{j} (\mathfrak{a}_{i\varkappa j}'' z' p_j' + \mathfrak{b}_{i\varkappa j}'' z' q_j') + \mathfrak{c}_{i\varkappa}''\left(\sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu' p_\nu' + y_\nu' q_\nu') + 2z'r'\right) \\ \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{cases}$$

linear abgeleitet werden kann; dabei ist vorausgesetzt, dass die Coefficienten:

$$\mathfrak{a}_{i\varkappa j}, \quad \mathfrak{b}_{i\varkappa j}, \quad \mathfrak{c}_{i\varkappa}, \quad \mathfrak{a}_{i\varkappa j}'', \quad \mathfrak{b}_{i\varkappa j}'', \quad \mathfrak{c}_{i\varkappa}''$$

ihre Werthe nicht ändern, wenn man i mit $\varkappa$ vertauscht.

Wenden wir die gewonnenen Ergebnisse auf die infinitesimalen Berührungstransformationen von der Form (6) an, so ergiebt sich Folgendes:

Beginnt die Reihenentwickelung einer infinitesimalen Berührungstransformation Bf des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ mit Gliedern von zweiter oder höherer Ordnung in den x_i, y_i, z, so lässt diese Transformation aufgefasst als infinitesimale Punkttransformation des Raumes $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$, z überhaupt jede durch den Punkt: $x_i = y_i = z = 0$ gehende Richtung invariant; es folgt das daraus, dass die Constanten $\alpha_{i\varkappa}$, $\beta_{i\varkappa}$, $\gamma_{i\varkappa}$, δ_i, ε_i, ϑ für die betreffende Transformation Bf alle den Werth Null haben und dass mithin die zugehörige infinitesimale Transformation $\mathfrak{B}f$ identisch verschwindet.

Beginnt dagegen die Reihenentwickelung einer infinitesimalen Berührungstransformation Bf mit Gliedern erster Ordnung in den x_i, y_i, z oder, was auf dasselbe hinauskommt, ist Bf eine infinitesimale Transformation von erster Ordnung in den x_i, y_i, z, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: entweder lässt Bf aufgefasst als infinitesimale Punkttransformation des Raumes x_i, y_i, z jede einzelne Richtung des Bündels: $z' = 0$ stehen oder es transformirt die Richtungen dieses Bündels wirklich.

Im ersten Falle hat Bf bei Weglassung der Glieder von zweiter und höherer Ordnung die Form:

$$(9)\quad \sum_1^n{}_i\, \delta_i \,.\, zp_i + \sum_1^n{}_i\, \varepsilon_i \,.\, zq_i + \vartheta\left(\sum_1^n{}_\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr\right) + \cdots,$$

wo die Constanten δ_i, ε_i, ϑ alle möglichen Werthe haben können, nur dürfen sie natürlich nicht sämmtlich verschwinden.

Im zweiten Falle muss sich Bf aus $n(2n+1)$ infinitesimalen Transformationen erster Ordnung von der Form:

$$(10)\quad \begin{cases} x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i + \sum_1^n{}_j (\mathfrak{a}_{i\varkappa j} z p_j + \mathfrak{b}_{i\varkappa j} z q_j) + \mathfrak{c}_{i\varkappa}\left(\sum_1^n{}_\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr\right) + \cdots \\ x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i + \sum_1^n{}_j (\mathfrak{a}'_{i\varkappa j} z p_j + \mathfrak{b}'_{i\varkappa j} z q_j) + \mathfrak{c}'_{i\varkappa}\left(\sum_1^n{}_\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr\right) + \cdots \\ y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i + \sum_1^n{}_j (\mathfrak{a}''_{i\varkappa j} z p_j + \mathfrak{b}''_{i\varkappa j} z q_j) + \mathfrak{c}''_{i\varkappa}\left(\sum_1^n{}_\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr\right) + \cdots \\ \qquad\qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{cases}$$

linear ableiten lassen; hierbei ist vorausgesetzt, dass die Constanten:

$$\mathfrak{a}_{i\varkappa j},\ \mathfrak{b}_{i\varkappa j},\ \mathfrak{c}_{i\varkappa},\ \mathfrak{a}''_{i\varkappa j},\ \mathfrak{b}''_{i\varkappa j},\ \mathfrak{c}''_{i\varkappa}$$

bei Vertauschung von i mit $\varkappa$ ihre Werthe nicht ändern; die weggelassenen Glieder sind von zweiter und höherer Ordnung in den x_i, y_i, z.

Wir sehen also: *Unter denjenigen infinitesimalen Berührungstransformationen des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$, die aufgefasst als infinitesimale Punkttransformationen des Raumes: $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$, z den Punkt: $x_i = y_i = z = 0$ stehen lassen, giebt es nicht mehr als $n(2n+1)$ von einander unabhängige, welche die ∞^{n-1} Richtungen des Bündels: $z' = 0$ wirklich transformiren und aus denen sich keine infinitesimale Transformation linear ableiten lässt, welche jede einzelne Richtung dieses Bündels festhält. Hat man gerade $n(2n+1)$ unabhängige infinitesimale Berührungstransformationen von der eben beschriebenen Beschaffenheit, so kann man dieselben stets aus $n(2n+1)$ infinitesimalen Transformationen erster Ordnung von der Form* (10) *linear ableiten.*

Nunmehr sind wir endlich im Stande, die Berührungstransformationsgruppen des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$, welche wir in dem gegenwärtigen Kapitel bestimmen wollen, zu definiren. Wir verlangen von diesen Gruppen zweierlei:

Jede der gesuchten Gruppen soll e r s t e n s *als Gruppe von Punkttransformationen des Raumes $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$, z transitiv sein und sie soll* z w e i t e n s *unter denjenigen ihrer infinitesimalen Transformationen, welche den Punkt von allgemeiner Lage: $x_i = y_i = z = 0$ invariant lassen, möglichst viele, also genauer gesagt gerade $n(2n+1)$ solche von einander unabhängige enthalten, aus denen sich keine infinitesimale Transformation linear ableiten lässt, welche jede einzelne Richtung des Bündels: $z' = 0$ festhält.*

Es wird sich zeigen, dass jede Gruppe von Berührungstransformationen des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$, welche die angegebenen beiden Eigenschaften besitzt, *irreducibel* ist.

Die erste der aufgestellten beiden Forderungen besagt nach Abschnitt I, S. 217, Satz 5, dass die Gruppe in der Umgebung von: $x_i = y_i = z = 0$ gerade $2n+1$ unabhängige infinitesimale Transformationen enthalten soll, welche in den x_i, y_i, z von der nullten Ordnung sind und aus denen sich keine infinitesimale Transformation von erster Ordnung linear ableiten lässt. Mit andern Worten: *die Gruppe soll $2n+1$ infinitesimale Transformationen von der Form:*

$$(11) \qquad p_i + \cdots, \quad q_i + \cdots, \quad r + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

enthalten, wo die weggelassenen Glieder von der ersten und von höherer Ordnung in den x_i, y_i, z sind.

Die zweite Forderung verlangt, dass die Gruppe in der Umgebung von $x_i = y_i = z = 0$ gerade $n(2n+1)$ unabhängige infinitesimale Transformationen erster Ordnung von der Form (10) enthalten soll. Ausserdem kann die Gruppe natürlich noch eine oder mehrere infinitesimale Transformationen erster Ordnung von der Form:

$$(9) \quad \sum_1^n {}_i\, \delta_i \, . \, z p_i + \sum_1^n {}_i\, \varepsilon_i \, . \, z q_i + \vartheta \left(\sum_1^n {}_\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr \right) + \cdots$$

enthalten, denn unsere Forderungen sagen nichts darüber aus, wieviele infinitesimale Transformationen die Gruppe enthält, welche jede Richtung des Bündels: $z' = 0$ stehen lassen.

Erwähnt sei noch, dass die Gruppe ausser den $n(2n+1)$ infinitesimalen Transformationen von der Form (10) und ausser gewissen von der Form (9) keine andern infinitesimalen Transformationen von der ersten Ordnung in den x_i, y_i, z enthalten kann, denn sie ist ja eine Gruppe von Berührungstransformationen des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ und alle ihre infinitesimalen Transformationen erster Ordnung haben daher nothwendig die Form (6).

Die oben gegebene Definition der hier gesuchten Gruppen kann noch etwas anders gefasst werden. Da es nämlich nicht mehr als $n(2n+1)$ unabhängige infinitesimale Berührungstransformationen giebt, welche den Punkt: $x_i = y_i = z = 0$ stehen lassen und aus denen sich keine infinitesimale Transformation linear ableiten lässt, welche jede Richtung des Bündels: $z' = 0$ festhält, so ist von vornherein klar, dass eine Berührungstransformationsgruppe des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ bei Festhaltung des Punktes: $x_i = y_i = z = 0$ die Richtungen des Bündels: $z' = 0$ höchstens $n(2n+1)$-gliedrig transformiren kann. Hieraus ergiebt sich, dass wir die zweite unsrer beiden Forderungen auch so aussprechen können: Jede der gesuchten Gruppen soll als Gruppe von Punkttransformationen des Raumes $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$, z so beschaffen sein, dass sie, wenn man einen Punkt von allgemeiner Lage festhält, die ∞^{2n-1} Richtungen des diesem Punkte zugeordneten Bündels in möglichst allgemeiner Weise, also gerade $n(2n+1)$-gliedrig transformirt.

§ 114.

Von den Gruppen, um deren Bestimmung es sich handelt, wissen wir bereits, dass sie in der Umgebung von: $x_i = y_i = z = 0$ $n(2n+1)$ unabhängige infinitesimale Transformationen erster Ordnung von der Form (10) enthalten. Fraglich ist, ob noch andere infinitesimale Transformationen erster Ordnung auftreten, doch können wir schon soviel sagen, dass derartige Transformationen, wenn sie überhaupt auftreten, nothwendig die Form:

$$(9)\quad \sum_1^n {}^i \delta_i \,.\, zp_i + \sum_1^n {}^i \varepsilon_i \,.\, zq_i + \vartheta\left(\sum_1^n {}^\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr\right) + \cdots$$

haben müssen.

Betrachten wir zunächst diejenigen Gruppen von der verlangten Beschaffenheit, welche keine Transformation von der Form (9) enthalten. G sei eine derartige Gruppe.

Die Gruppe G enthält zugleich mit den Transformationen (10) auch noch alle diejenigen, welche durch paarweise Combination der Transformationen (10) entstehen. Nun wird bei paarweiser Combination der Transformationen (10) jeder Ausdruck von der Form:

$$x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i, \quad x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i, \quad y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i$$

reproducirt, dagegen der Ausdruck:

$$\sum_1^n {}^\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr$$

niemals, wären daher nicht alle $\mathfrak{c}_{i\varkappa}$, $\mathfrak{c}'_{i\varkappa}$, $\mathfrak{c}''_{i\varkappa}$ gleich Null, so müsste G jedenfalls eine Transformation von der Form:

$$\sum_1^n {}^\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr + \sum_1^n {}^i (\delta_i \,.\, zp_i + \varepsilon_i \,.\, zq_i) + \cdots$$

enthalten, was ausgeschlossen ist. Folglich müssen die $\mathfrak{c}_{i\varkappa}$, $\mathfrak{c}'_{i\varkappa}$, $\mathfrak{c}''_{i\varkappa}$ sämmtlich verschwinden.

Um die übrigen in (10) vorkommenden Coefficienten zu bestimmen, bemerken wir, dass in G jedenfalls zwei Transformationen von der Form:

$$x_i q_i + \sum_1^n {}^j (\alpha_{ij} z p_j + \beta_{ij} z q_j) + \cdots$$

$$y_i p_i + \sum_1^n {}^j (\alpha''_{ij} z p_j + \beta''_{ij} z q_j) + \cdots$$

auftreten; aus diesen erhalten wir durch Combination:

$$x_i p_i - y_i q_i + \beta_{ii} z p_i - \alpha''_{ii} z q_i$$

und indem wir diese Transformation wieder mit den beiden ersten combiniren, ergiebt sich:

$$\begin{aligned} -2x_i q_i + \alpha_{ii} z p_i - 2\beta_{ii} z q_i + \cdots \\ 2y_i p_i + 2\alpha''_{ii} z p_i - \beta''_{ii} z q_i + \cdots, \end{aligned}$$

lauter Transformationen, welche der Gruppe G angehören.

Da G keine Transformation von der Form (9) enthält, so müssen α_{ii} und β''_{ii} verschwinden und wir haben die Transformationen:

$$(x_i + \beta_{ii}z)q_i + \cdots, \quad (y_i + \alpha''_{ii}z)p_i + \cdots$$
$$(x_i + \beta_{ii}z)p_i - (y_i + \alpha''_{ii}z)q_i + \cdots,$$

oder wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$x_i + \beta_{ii}z = x'_i, \quad y_i + \alpha''_{ii}z = y'_i$$

die Transformationen:

$$x'_i q'_i + \cdots, \quad x'_i p'_i - y'_i q'_i + \cdots, \quad y'_i p'_i + \cdots$$
$$(i = 1 \cdots n).$$

Die übrigen Transformationen (10) lassen sich jetzt schreiben:

$$x'_i q'_\varkappa + x'_\varkappa q'_i + \sum_1^n {}_j (\lambda_{i\varkappa j} z p'_j + \mu_{i\varkappa j} z q'_j) + \cdots$$

$$x'_i p'_\varkappa - y'_\varkappa q'_i + \sum_1^n {}_j (\lambda'_{i\varkappa j} z p'_j + \mu'_{i\varkappa j} z q'_j) + \cdots$$

$$y'_i p'_\varkappa + y'_\varkappa p'_i + \sum_1^n {}_j (\lambda''_{i\varkappa j} z p'_j + \mu''_{i\varkappa j} z q'_j) + \cdots$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots n; \quad i \neq \varkappa).$$

Combiniren wir aber hier die erste Reihe mit: $x'_i p'_i - y'_i q'_i + \cdots$, so kommt:

$$x'_i q'_\varkappa + x'_\varkappa q'_i - \lambda_{i\varkappa i} z p'_i + \mu_{i\varkappa i} z q'_i + \cdots$$

und durch Vertauschung von i mit $\varkappa$:

$$x'_\varkappa q'_i + x'_i q'_\varkappa - \lambda_{\varkappa i\varkappa} z p'_\varkappa + \mu_{\varkappa i\varkappa} z q'_\varkappa + \cdots,$$

also müssen alle $\lambda_{i\varkappa j}$ und alle $\mu_{i\varkappa j}$ gleich Null sein. In entsprechender Weise finden wir, dass auch die λ'', μ'', λ', μ' alle verschwinden.

Enthält demnach eine Gruppe G von der verlangten Beschaffenheit nur $n(2n+1)$ infinitesimale Transformationen erster Ordnung von der Form (10), aber keine Transformation von der Form (9), so enthält sie gerade $n(2n+1)$ unabhängige infinitesimale Transformationen erster Ordnung von der Gestalt:

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_i + \alpha_i z)q_\varkappa + (x_\varkappa + \alpha_\varkappa z)q_i + \cdots, \quad (y_i + \beta_i z)p_\varkappa + (y_\varkappa + \beta_\varkappa z)p_i + \cdots \\ \qquad\qquad (x_i + \alpha_i z)p_\varkappa - (y_\varkappa + \beta_\varkappa z)q_i + \cdots \\ \qquad\qquad\qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n), \end{array} \right.$$

dagegen enthält sie keine infinitesimale Transformation von erster Ordnung in den x_i, y_i, z, in welcher sich die Glieder erster Ordnung nicht aus den Gliedern erster Ordnung der Transformationen (I) *linear ableiten lassen. Die $2n$ Constanten $\alpha_1 \cdots \alpha_n$, $\beta_1 \cdots \beta_n$ bleiben hierbei vollständig unbestimmt.*

Wir kommen zu denjenigen Gruppen von der verlangten Beschaffenheit, welche ausser $n(2n+1)$ Transformationen von der Form (10) wenigstens eine infinitesimale Transformation erster Ordnung von der Form (9) enthalten.

Enthält eine solche Gruppe G keine Transformation von der besonderen Gestalt:

$$\sum_1^n {}_i\, \delta_i \,.\, zp_i + \sum_1^n {}_i\, \varepsilon_i \,.\, zq_i + \cdots, \tag{12}$$

so kann sie ausser $n(2n+1)$ infinitesimalen Transformationen erster Ordnung von der Gestalt (10) nur noch eine erster Ordnung von der Form:

$$\sum_1^n {}_\nu\, (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr + \sum_1^n {}_i\, \delta_i' \,.\, zp_i + \sum_1^n {}_i\, \varepsilon_i' \,.\, zq_i + \cdots \tag{13}$$

enthalten. In diesem Falle kann man offenbar in den Transformationen (10) die Coefficienten $\mathfrak{c}_{i\varkappa}$, $\mathfrak{c}_{i\varkappa}'$, $\mathfrak{c}_{i\varkappa}''$ alle gleich Null setzen und findet dann genau so wie vorhin, dass die Transformationen (10) die Gestalt (I) haben. Durch Combination von (13) mit:

$$(x_i + \alpha_i z)p_i - (y_i + \beta_i z)q_i + \cdots$$

findet man dann:

$$-\alpha_i zp_i + \beta_i zq_i - \delta_i' \,.\, zp_i + \varepsilon_i' \,.\, zq_i + \cdots,$$

eine Transformation, welche von der zweiten Ordnung in den x_i, y_i, z sein muss, da Transformationen von der Form (12) in G nicht vorkommen. Demnach ergiebt sich: $\delta_i' = -\alpha_i$, $\varepsilon_i' = -\beta_i$, so dass die Transformation (13) in der Gestalt:

$$\sum_1^n {}_\nu\, \big((x_\nu + \alpha_\nu z)p_\nu + (y_\nu + \beta_\nu z)q_\nu\big) + 2z\left(r - \sum_1^n {}_\nu\, (\alpha_\nu p_\nu + \beta_\nu q_\nu)\right) + \cdots$$

erscheint.

Es bleibt noch der Fall übrig, dass die Gruppe G ausser $n(2n+1)$ Transformationen erster Ordnung von der Form (10) noch wenigstens eine von der Gestalt:

$$\sum_1^n {}_i\, \delta_i \,.\, zp_i + \sum_1^n {}_i\, \varepsilon_i \,.\, zq_i + \cdots \tag{12}$$

enthält.

In diesem Falle können wir zunächst voraussetzen, dass in den Transformationen (10) alle $\mathfrak{c}_{i\varkappa}$, $\mathfrak{c}_{i\varkappa}'$, $\mathfrak{c}_{i\varkappa}''$ gleich Null sind. Enthält nämlich G keine Transformation von der Form (13), so erkennen wir, wie auf S. 472 durch paarweise Combination der Transformationen (10), dass die $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}', \mathfrak{c}''$ gleich Null sind, enthält dagegen G eine Transformation von der Form (13), so können wir die $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}', \mathfrak{c}''$ vermöge dieser letzteren gleich Null machen.

Combiniren wir nun (12) mit den Transformationen (10), nachdem wir in denselben alle $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}', \mathfrak{c}''$ gleich Null gesetzt haben, so finden wir sofort, dass G überhaupt alle die $2n$ infinitesimalen Transformationen:

$$zp_i + \cdots, \quad zq_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

enthält; zu diesen Transformationen kann natürlich noch eine von der Form:

$$\sum_1^n {}_\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr + \cdots$$

kommen.

Aus den eben durchgeführten Entwickelungen ergiebt sich Folgendes:

Enthält eine Gruppe G von der verlangten Beschaffenheit ausser $n(2n+1)$ Transformationen erster Ordnung von der Form (10) noch wenigstens eine von der Form (9), so enthält sie entweder $n(2n+1)+1$ unabhängige infinitesimale Transformationen erster Ordnung von der Gestalt:

$$\text{(II)}\begin{cases} (x_i + \alpha_i z) q_\varkappa + (x_\varkappa + \alpha_\varkappa z) q_i + \cdots, \quad (y_i + \beta_i z) p_\varkappa + (y_\varkappa + \beta_\varkappa z) p_i + \cdots \\ \qquad (x_i + \alpha_i z) p_\varkappa - (y_\varkappa + \beta_\varkappa z) q_i + \cdots \\ \sum_1^n {}_\nu \big((x_\nu + \alpha_\nu z) p_\nu + (y_\nu + \beta_\nu z) q_\nu\big) + 2z\left(r - \sum_1^n {}_\nu (\alpha_\nu p_\nu + \beta_\nu q_\nu)\right) + \cdots \\ \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{cases}$$

oder $n(2n+3)$ solche von der Gestalt:

$$\text{(III)}\begin{cases} x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i + \cdots, \quad x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i + \cdots, \quad y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i + \cdots \\ \qquad zp_i + \cdots, \quad zq_i + \cdots \\ \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{cases}$$

oder endlich $(n+1)(2n+1)$ solche von der Gestalt:

$$\text{(IV)}\begin{cases} x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i + \cdots, \quad x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i + \cdots, \quad y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i + \cdots \\ \qquad zp_i + \cdots, \quad zq_i + \cdots \\ \qquad \sum_1^n {}_\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr + \cdots \\ \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n). \end{cases}$$

In jedem einzelnen dieser drei Fälle enthält die Gruppe nur solche *infinitesimale Transformationen erster Ordnung, deren Glieder erster Ordnung sich aus den Gliedern erster Ordnung der in dem betreffenden Falle angegebenen Transformationen linear ableiten lassen.*

§ 115.

Auf Grund der bisherigen Entwickelungen können wir über die gesuchten Gruppen Folgendes aussagen:

Erstens. Jede der gesuchten Gruppen enthält in der Umgebung von: $x_i = y_i = z = 0$ gerade $2n + 1$ unabhängige infinitesimale Transformationen nullter Ordnung von der Form:

$$p_i + \cdots, \quad q_i + \cdots, \quad r + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n). \tag{11}$$

Zweitens. Was die in einer solchen Gruppe vorkommenden infinitesimalen Transformationen von erster Ordnung in den x_i, y_i, z anbetrifft, so sind vier verschiedene Fälle zu unterscheiden; die Gruppe kann nämlich entweder $n(2n+1)$ oder $n(2n+1)+1$ oder $n(2n+3)$ oder endlich $(n+1)(2n+1)$ unabhängige infinitesimale Transformationen von erster Ordnung enthalten, aus denen sich keine infinitesimale Transformation von zweiter oder höherer Ordnung linear ableiten lässt; die betreffenden infinitesimalen Transformationen erster Ordnung haben bezüglich die Formen: (I), (II), (III), (IV).

Es fragt sich nunmehr noch, was für infinitesimale Transformationen von zweiter und höherer Ordnung in unsern Gruppen auftreten können.

Um die Beantwortung dieser Frage zu erleichtern, wollen wir uns den Umstand zu Nutze machen, dass wir Gruppen von Berührungstransformationen suchen, dass also alle vorkommenden infinitesimalen Transformationen infinitesimale Berührungstransformationen sind und als solche durch ihre charakteristischen Functionen vollständig bestimmt sind. Wir werden deshalb von jetzt ab statt der in unsern Gruppen enthaltenen infinitesimalen Transformationen die zugehörigen charakteristischen Functionen betrachten.

Zunächst gehen wir die infinitesimalen Berührungstransformationen, welche in den x_i, y_i, z von der nullten oder von erster Ordnung sind, einzeln durch und schreiben uns für jede solche Transformation Bf die Reihenentwickelung der zugehörigen charakteristischen Function W auf; an der Hand der Tabelle (5), S. 465 hat das gar keine Schwierigkeit. Dadurch erhalten wir die folgende neue Tabelle:

(14)

Bf	W
$r + \cdots$	$-1 + \cdots$
$p_i + \cdots$	$y_i + \mu_i z + \cdots$
$q_i + \cdots$	$-x_i - \lambda_i z + \cdots$
$x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i + \cdots$	$-x_i x_\varkappa - \lambda_{i\varkappa} z^2 + \cdots$
$x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i + \cdots$	$x_i y_\varkappa + \mu_{i\varkappa} z^2 + \cdots$
$y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i + \cdots$	$y_i y_\varkappa + \nu_{i\varkappa} z^2 + \cdots$
$\sum_1^n {}^\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr + \cdots$	$-2z + \cdots$
$z p_i + \cdots$	$y_i z + \sigma_i z^2 + \cdots$
$z q_i + \cdots$	$-x_i z - \tau_i z^2 + \cdots$

Hier sind die λ_i, μ_i, $\lambda_{i\varkappa}$, $\mu_{i\varkappa}$, $\nu_{i\varkappa}$, σ_i, τ_i gewisse Constanten, die unbestimmt bleiben, und die weggelassenen Glieder sind überall von höherer Ordnung in den x_i, y_i, z als die geschriebenen.

Die Tabelle (14) liefert offenbar im Allgemeinen auch umgekehrt für jede charakteristische Function W, deren Reihenentwickelung nach den x_i, y_i, z mit Gliedern nullter, erster oder zweiter Ordnung beginnt, die Glieder niedrigster Ordnung in der Entwickelung der zugehörigen infinitesimalen Berührungstransformation Bf. Ausgenommen sind nur die charakteristischen Functionen von der Form: $1 + \cdots$, $z + \cdots$, $z^2 + \cdots$. Zu: $1 + \cdots$ gehört nämlich eine infinitesimale Transformation nullter Ordnung von der Form:

$$-r + \sum_1^n {}^i \alpha_i' p_i + \sum_1^n {}^i \beta_i' q_i + \cdots$$

und zu: $-2z + \cdots$ eine infinitesimale Transformation erster Ordnung von der Form:

$$\sum_1^n {}^\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr + \sum_{i\varkappa}^{1\cdots n} \{ \alpha_{i\varkappa}' (x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i) +$$
$$+ \beta_{i\varkappa}' (x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i) + \gamma_{i\varkappa}' (y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i) \} +$$
$$+ \sum_1^n {}^i (\delta_i' . z p_i + \varepsilon_i' . z q_i) + \cdots;$$

hier bleiben die Constanten α_i', β_i', $\alpha_{i\varkappa}'$, $\beta_{i\varkappa}'$, $\gamma_{i\varkappa}'$, δ_i', ε_i' unbestimmt. Zu: $z^2 + \cdots$ dagegen gehört eine infinitesimale Berührungstransformation, welche in den x_i, y_i, z von der zweiten Ordnung ist.

Wir wollen jetzt die gemachten Bemerkungen auf die von uns gesuchten Gruppen anwenden. Dabei behandeln wir die vier Fälle, welche gemäss den vier möglichen Formen der infinitesimalen Transformationen erster Ordnung zu unterscheiden sind, jeden für sich.

Erster Fall. Jede hierher gehörige Gruppe enthält $2n+1$ infinitesimale Transformationen nullter Ordnung von der Form (11) und $n(2n+1)$ solche erster Ordnung von der Form (I); zu diesen infinitesimalen Transformationen gehören die nachstehenden charakteristischen Functionen:

$$(15)\quad \begin{cases} 1+\cdots,\quad x_i+\lambda_i z+\cdots,\quad y_i+\mu_i z+\cdots \\ (x_i+\alpha_i z)(x_\varkappa+\alpha_\varkappa z)+\lambda_{i\varkappa}z^2+\cdots,\quad (y_i+\beta_i z)(y_\varkappa+\beta_\varkappa z)+\nu_{i\varkappa}z^2+\cdots \\ (x_i+\alpha_i z)(y_\varkappa+\beta_\varkappa z)+\mu_{i\varkappa}z^2+\cdots \\ (i,\ \varkappa=1\cdots n). \end{cases}$$

Die vorhin gemachten Bemerkungen zeigen überdies, dass die Gruppe keine charakteristische Function von der Form: $z+\cdots$ enthalten kann, und dass sie ebensowenig eine von der Form:

$$\sum_1^n {}_i(\delta_i\,.\,x_i z+\varepsilon_i\,.\,y_i z)+\vartheta z^2+\cdots$$

enthalten kann, in welcher die Constanten: $\delta_1\cdots\delta_n$, $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n$ nicht sämmtlich verschwinden. Die Gruppe enthält demnach ausser denen von der Form (15) keine charakteristische Function, deren Reihenentwickelung mit Gliedern nullter, erster oder zweiter Ordnung beginnt, nur das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein einer charakteristischen Function von der Form: $z^2+\cdots$ bleibt vorläufig noch unentschieden.

Combiniren wir die charakteristischen Functionen, welche in der zweiten und dritten Reihe von (15) stehen, paarweise mit einander, so bekommen wir nach S. 463 f. $n(2n+1)$ Functionen von der Form:

$$(16)\quad \begin{cases} (x_i+\alpha_i z)(x_\varkappa+\alpha_\varkappa z)+\cdots,\quad (y_i+\beta_i z)(y_\varkappa+\beta_\varkappa z)+\cdots \\ (x_i+\alpha_\varkappa z)(y_\varkappa+\beta_\varkappa z)+\cdots, \end{cases}$$

welche natürlich ebenfalls in der Gruppe enthalten sein müssen, folglich können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die $\lambda_{i\varkappa}$, $\mu_{i\varkappa}$, $\nu_{i\varkappa}$ alle gleich Null setzen. Um die λ_i, μ_i zu bestimmen, combiniren wir:

$$x_i+\lambda_i z+\cdots,\qquad y_i+\mu_i z+\cdots$$

mit den Functionen (16) und finden die charakteristischen Functionen:

$$x_i+\alpha_i z+\cdots,\qquad y_i+\beta_i z+\cdots,$$

nun aber tritt eine charakteristische Function von der Form: $z+\cdots$ nicht auf, also schliessen wir, dass $\lambda_i=\alpha_i$ und $\mu_i=\beta_i$ ist.

Im ersten Falle besitzen demnach die charakteristischen Functionen der auftretenden infinitesimalen Transformationen nullter und erster Ordnung die Form:

$$
(\mathrm{I}')\quad \begin{cases} 1 + \cdots, \quad x_i + \alpha_i z + \cdots, \quad y_i + \beta_i z + \cdots \\ (x_i + \alpha_i z)(x_\varkappa + \alpha_\varkappa z) + \cdots, \quad (y_i + \beta_i z)(y_\varkappa + \beta_\varkappa z) + \cdots \\ (x_i + \alpha_i z)(y_\varkappa + \beta_\varkappa z) + \cdots \\ (i, \varkappa = 1 \cdots n). \end{cases}
$$

Keine der betreffenden Gruppen enthält eine charakteristische Function von der Form: $z + \cdots$; sollte eine charakteristische Function vorkommen, deren Reihenentwickelung mit Gliedern zweiter Ordnung beginnt und deren Glieder niedrigster Ordnung sich nicht aus:

$$
(x_i + \alpha_i z)(x_\varkappa + \alpha_\varkappa z), \qquad (x_i + \alpha_i z)(y_\varkappa + \beta_\varkappa z), \qquad (y_i + \beta_i z)(y_\varkappa + \beta_\varkappa z)
$$
$$
(i, \varkappa = 1 \cdots n)
$$

linear ableiten lassen, so müsste die nothwendig auf die Form: $z^2 + \cdots$ gebracht werden können.

Im *zweiten Falle* erkennen wir genau in derselben Weise, dass die infinitesimalen Transformationen nullter und erster Ordnung der dahin gehörigen Gruppen die charakteristischen Functionen:

$$
(\mathrm{II}')\quad \begin{cases} 1 + \cdots, \quad x_i + \alpha_i z + \cdots, \quad y_i + \beta_i z + \cdots, \quad z + \cdots \\ (x_i + \alpha_i z)(x_\varkappa + \alpha_\varkappa z) + \cdots, \quad (y_i + \beta_i z)(y_\varkappa + \beta_\varkappa z) + \cdots \\ (x_i + \alpha_i z)(y_\varkappa + \beta_\varkappa z) + \cdots \\ (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{cases}
$$

besitzen. Von solchen charakteristischen Functionen, deren Reihenentwickelungen mit andern Gliedern zweiter Ordnung beginnen, kann höchstens noch: $z^2 + \cdots$ hinzukommen.

Im *dritten Falle* erhalten wir die charakteristischen Functionen:

$$
\begin{gathered}
1 + \cdots, \quad x_i + \lambda_i z + \cdots, \quad y_i + \mu_i z + \cdots \\
x_i x_\varkappa + \lambda_{i\varkappa} z^2 + \cdots, \quad x_i y_\varkappa + \mu_{i\varkappa} z^2 + \cdots, \quad y_i y_\varkappa + \nu_{i\varkappa} z^2 + \cdots \\
z x_i + \sigma_i z^2 + \cdots, \quad z y_i + \tau_i z^2 + \cdots \\
(i, \varkappa = 1 \cdots n),
\end{gathered}
$$

eine Function von der Form: $z + \cdots$ kann nicht auftreten. Nun ergiebt sich aber durch Combination der beiden charakteristischen Functionen: $y_i + \mu_i z^2 + \cdots$ und: $z x_i + \sigma_i z^2 + \cdots$ doch die Function: $z + \cdots$, wir kommen also auf einen Widerspruch, *folglich kann es überhaupt keine Berührungstransformationsgruppen geben, welche unter den dritten Fall gehören.*

Endlich im *vierten Falle* haben die charakteristischen Functionen der auftretenden infinitesimalen Transformationen nullter und erster Ordnung die Form:

$$\begin{gathered}1+\cdots,\quad x_i+\lambda_i z+\cdots,\quad y_i+\mu_i z+\cdots,\quad z+\cdots\\ x_i x_\varkappa+\lambda_{i\varkappa}z^2+\cdots,\quad x_i y_\varkappa+\mu_{i\varkappa}z^2+\cdots,\quad y_i y_\varkappa+\nu_{i\varkappa}z^2+\cdots\\ z x_i+\sigma_i z^2+\cdots,\quad z y_i+\tau_i z^2+\cdots\\ (i,\ \varkappa=1\cdots n).\end{gathered}$$

Hier finden wir sofort durch Combination der Functionen:

$$x_i+\lambda_i z+\cdots,\quad y_i+\mu_i z+\cdots,\quad z x_i+\sigma_i z^2+\cdots,\quad z y_i+\tau_i z^2+\cdots$$

mit: $x_i y_i+\mu_{ii}z^2+\cdots$, dass wir alle λ_i, μ_i, σ_i, τ_i gleich Null setzen können; dass wir auch die $\lambda_{i\varkappa}$, $\mu_{i\varkappa}$, $\nu_{i\varkappa}$ gleich Null setzen können, sehen wir in derselben Weise wie auf S. 478 ein. Nun ergiebt sich aber:

$$\{y_i z+\cdots,\quad x_i z+\cdots\}=z^2+\cdots,$$

also kommen in den hierher gehörigen Gruppen die folgenden charakteristischen Functionen vor:

$$\text{(IV}'\text{)}\qquad\left\{\begin{gathered}1+\cdots,\quad x_i+\cdots,\quad y_i+\cdots,\quad z+\cdots\\ x_i x_\varkappa+\cdots,\quad x_i y_\varkappa+\cdots,\quad y_i y_\varkappa+\cdots\\ z x_i+\cdots,\quad z y_i+\cdots,\quad z^2+\cdots\\ (i,\ \varkappa=1\cdots n).\end{gathered}\right.$$

Abgesehen von: $z^2+\cdots$ sind das die charakteristischen Functionen aller vorhandenen infinitesimalen Transformationen nullter und erster Ordnung.

Drei Fälle bleiben demnach zu unterscheiden und in jedem dieser drei Fälle kennen wir die Anfangsglieder aller auftretenden charakteristischen Functionen, deren Reihenentwickelungen mit Gliedern nullter, erster oder zweiter Ordnung beginnen. Ausgenommen ist allerdings die Function: $z^2+\cdots$, deren Auftreten in den beiden ersten Fällen noch ungewiss ist, während sie im letzten Falle sicher vorhanden ist.

§ 116.

Zu den schon vorhandenen charakteristischen Functionen können in jedem unsrer drei Fälle möglicherweise noch andere hinzukommen, nämlich ausser: $z^2+\cdots$ auch solche, deren Reihenentwickelungen mit Gliedern dritter oder noch höherer Ordnung beginnen. Da wir es aber mit endlichen continuirlichen Gruppen zu thun haben, so muss es nach Abschn. I, Theor. 29, S. 192 für jede der verlangten Gruppen eine endliche positive ganze Zahl $s'\geqq 1$ geben von solcher Beschaffenheit, dass die betreffende Gruppe zwar infinitesimale Transformationen von s'-ter oder niedrigerer Ordnung in den x_i, y_i, z enthält, aber keine von $(s'+1)$-ter oder höherer Ordnung. Hieraus folgt sogleich, dass zu jeder der verlangten Gruppen eine endliche positive ganze Zahl $s \geqq 2$ gehört von solcher Beschaffenheit, dass die Gruppe zwar charakteristische Functionen enthält, deren Reihenentwickelungen mit Gliedern s-ter oder niedrigerer Ordnung beginnen, nicht aber solche, in welchen die Anfangsglieder von $(s+1)$-ter oder höherer Ordnung in den x, y, z sind. Die Zahl s ist dann offenbar entweder gleich s' oder gleich $s'+1$.

Um nun die Anfangsglieder der etwa noch hinzukommenden charakteristischen Functionen zu bestimmen, gehen wir davon aus, dass in jedem der drei zu besprechenden Fälle charakteristische Functionen von der Form:

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{c} 1+\cdots \\ (x_i+\alpha_i z)(x_\varkappa+\alpha_\varkappa z)+\cdots, \quad (y_i+\beta_i z)(y_\varkappa+\beta_\varkappa z)+\cdots \\ (x_i+\alpha_i z)(y_\varkappa+\beta_\varkappa z)+\cdots \\ {\scriptstyle (i,\,\varkappa=1\cdots n)} \end{array} \right.$$

auftreten. Unter G verstehen wir irgend eine Gruppe, welche unter einen der drei Fälle gehört. Ist s die vorhin definirte zu G gehörige ganze Zahl, so sei:

$$(18) \qquad \psi^{(s)}(x_1\cdots x_n,\ y_1\cdots y_n,\ z)+\cdots$$

eine in G vorkommende charakteristische Function, deren Reihenentwickelung mit Gliedern s-ter Ordnung beginnt; dabei bedeutet $\psi^{(s)}$ eine ganze homogene Function s-ter Ordnung seiner Argumente, die fortgelassenen Glieder sind von $(s+1)$-ter und höherer Ordnung.

Der Kürze wegen setzen wir:

$$x_i+\alpha_i z = x_i', \quad y_i+\beta_i z = y_i' \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)},$$

so dass die charakteristischen Functionen (17) die Form:

$$(17') \qquad 1+\cdots, \quad x_i'x_\varkappa'+\cdots, \quad x_i'y_\varkappa'+\cdots, \quad y_i'y_\varkappa'+\cdots \qquad {\scriptstyle (i,\,\varkappa=1\cdots n)}$$

erhalten, während: $\psi^{(s)}+\cdots$ etwa die Form:

$$(18') \qquad \overline{\psi}^{(s)}(x_1'\cdots x_n',\ y_1'\cdots y_n',\ z)+\cdots$$

annimmt.

Für die Rechnung mit den charakteristischen Functionen macht die Einführung der x', y' an Stelle der x, y so gut wie keinen Unterschied. Haben wir nämlich zwei charakteristische Functionen:

$$F^{(\lambda)}(x, y, z)+\cdots, \quad F^{(\mu)}(x, y, z)+\cdots,$$

deren Glieder niedrigster Ordnung: $F^{(\lambda)}$ und $F^{(\mu)}$ bezüglich von den

Ordnungen λ und μ sind, und combiniren wir diese beiden Functionen mit einander, so bekommen wir nach S. 463 f. eine charakteristische Function, deren Glied niedrigster Ordnung die Ordnung $\lambda + \mu - 2$ hat und die Form besitzt:

$$\sum_1^n {}_i \left(\frac{\partial F^{(\lambda)}}{\partial y_i} \frac{\partial F^{(\mu)}}{\partial x_i} - \frac{\partial F^{(\lambda)}}{\partial x_i} \frac{\partial F^{(\mu)}}{\partial y_i} \right);$$

in $x_1' \cdots x_n'$, $y_1' \cdots y_n'$, z schreibt sich aber dieses Glied niedrigster Ordnung ganz in derselben Weise, denn es erhält die Form:

$$\sum_1^n {}_i \left(\frac{\partial F^{(\lambda)}}{\partial y_i'} \frac{\partial F^{(\mu)}}{\partial x_i'} - \frac{\partial F^{(\lambda)}}{\partial x_i'} \frac{\partial F^{(\mu)}}{\partial y_i'} \right).$$

Diese Form ist es, welche wir im Folgenden vorzugsweise benutzen werden.

Es sei *erstens* $\overline{\psi}^{(s)}(x', y', z)$ nicht ganz von $x_1' \cdots x_n'$, $y_1' \cdots y_n'$ frei. Dann schaffen wir zunächst alle y_i' fort, indem wir die Function (18′) mit gewissen der Functionen:

$$x_1'^2 + \cdots, \cdots x_n'^2 + \cdots$$

genügend oft combiniren. Auf diese Weise erhalten wir eine der Gruppe G angehörige charakteristische Function von der Form:

$$\chi^{(s)}(x_1' \cdots x_n', z) + \cdots,$$

wo $\chi^{(s)}$ wieder eine ganze homogene Function seiner Argumente ist und in Folge der gemachten Voraussetzung weder identisch verschwindet noch von allen x_i' frei ist. Um nunmehr alle vorhandenen x_i' mit Ausnahme von x_1' zu entfernen, combiniren wir hinreichend oft mit geeigneten unter den Functionen:

$$x_1' y_\varkappa' + \cdots \qquad (\varkappa = 2 \cdots n)$$

und kommen so auf eine charakteristische Function:

$$\omega^{(s)}(x_1', z) + \cdots,$$

wo $\omega^{(s)}$ wiederum homogen von s-ter Ordnung ist und x_1' sicher enthält. Hat die höchste in $\omega^{(s)}$ vorkommende Potenz von x_1' den Exponenten m, wo $0 < m \leqq s$ ist, so combiniren wir die Function: $\omega^{(s)} + \cdots$ m Male hintereinander mit: $y_1'^2 + \cdots$ und finden so die charakteristische Function:

$$y_1'^m \cdot z^{s-m} + \cdots, \tag{19}$$

welche natürlich ebenfalls in G enthalten ist. Durch ebenso oft wiederholte Combination mit: $x_1'^2 + \cdots$ folgt hieraus:

$$x_1'^m \cdot z^{s-m} + \cdots$$

und diese charakteristische Function ergiebt endlich mit (19) combinirt:

$$x_1'^{m-1} \cdot y_1'^{m-1} \cdot z^{2s-2m} + \cdots,$$

also eine Function, deren Reihenentwickelung mit einem Gliede $(2s-2)$-ter Ordnung beginnt. Hier muss nothwendig: $2s-2 \leq s$ sein, oder, da $s > 1$ ist: $s = 2$. Die oben angenommene charakteristische Function (18′) beginnt demnach mit Gliedern zweiter Ordnung, welche nicht blos von z allein abhängen. Was aber für charakteristische Functionen von dieser Beschaffenheit in G vorkommen können, das wissen wir bereits.

Es sei *zweitens* — eine dritte Möglichkeit ist nicht vorhanden — $\overline{\psi}^{(s)}$ von $x_1' \cdots x_n'$, $y_1' \cdots y_n'$ frei, so dass die charakteristische Function (18) die Form:

$$z^s + \cdots$$

besitzt. In diesem Falle combiniren wir: $z^s + \cdots$ mit: $1 + \cdots$ und bekommen nach S. 464 die Function:

$$z^{s-1} + \cdots,$$

welche ihrerseits mit: $z^s + \cdots$ combinirt die Function:

$$z^{2s-2} + \cdots$$

liefert, es muss also $2s-2 \leq s$ sein oder $s = 2$. Wir schliessen hieraus:

Zu den bereits bekannten charakteristischen Functionen kann höchstens noch: $z^2 + \cdots$ hinzukommen, diese tritt aber jedenfalls nur dann auf, wenn auch: $z + \cdots$ vorkommt.

Jetzt betrachten wir die drei Fälle einzeln.

Erster Fall. Weil: $z + \cdots$ nicht vorkommt, treten nur die bekannten Functionen (I′) auf (s. S. 479).

Zweiter Fall. Setzen wir zur Abkürzung:

$$x_i + \alpha_i z = x_i', \quad y_i + \beta_i z = y_i' \qquad (i = 1 \cdots n),$$

so enthält jede hierher gehörige Gruppe G folgende infinitesimale Transformationen von nullter und erster Ordnung in den x', y', z:

$$(\mathrm{II}'') \quad \left\{ \begin{array}{c} p_i' + \cdots, \quad q_i' + \cdots, \quad r + \cdots \\ x_i' q_\varkappa' + x_\varkappa' q_i' + \cdots, \quad x_i' p_\varkappa' - y_\varkappa' q_i' + \cdots, \quad y_i' p_\varkappa' + y_\varkappa' p_i' + \cdots \\ \sum_1^n {}_\nu \, (x_\nu' p_\nu' + y_\nu' q_\nu') + 2zr + \cdots \\ (i, \varkappa = 1 \cdots n). \end{array} \right.$$

Träte ausser den schon bekannten charakteristischen Functionen (II′) auf S. 479 auch noch: $z^2 + \cdots$ auf, so enthielte G eine infinitesimale Transformation zweiter Ordnung:

$$\sum_1^n {}^i (\xi_i^{(2)} p_i' + \eta_i^{(2)} q_i') + z^2 r + \cdots,$$

unter den $\xi_i^{(2)}$, $\eta_i^{(2)}$ ganze homogene Functionen zweiter Ordnung von $x_1' \cdots x_n'$, $y_1' \cdots y_n'$, z verstanden. Käme nun z in einer der $2n$ Functionen $\xi_i^{(2)}$, $\eta_i^{(2)}$ vor, so ergäbe sich durch Combination mit einer der Transformationen: $p_i' + \cdots$, $q_i' + \cdots$, $r + \cdots$ eine Transformation:

$$\sum_{i\varkappa}^{1\cdots n} (\lambda_{i\varkappa} x_i' p_\varkappa' + \mu_{i\varkappa} x_i' q_\varkappa' + \nu_{i\varkappa} y_i' p_\varkappa' + \varrho_{i\varkappa} y_i' q_\varkappa') +$$
$$+ \sum_1^n {}^i (a_i z p_i' + b_i z q_i') + 2\varepsilon z r + \cdots,$$

in welcher die a_i und b_i nicht sämmtlich verschwänden. Eine solche Transformation ist aber ausgeschlossen, da alle in G vorkommenden infinitesimalen Transformationen erster Ordnung aus den Transformationen (II″) auf S. 483 linear abgeleitet werden können (wenigstens soweit es auf die Glieder erster Ordnung ankommt). Wären andrerseits die $\xi_i^{(2)}$, $\eta_i^{(2)}$ sämmtlich von z frei, so ergäbe sich durch Combination mit: $r + \cdots$ die ebenfalls nicht vorkommende Transformation: $zr + \cdots$. Folglich kann G die charakteristische Function: $z^2 + \cdots$ nicht enthalten, sondern nur die auf S. 479 angegebenen Functionen (II′).

Letzter Fall. Jede hierher gehörige Gruppe G enthält die charakteristischen Functionen:

$$(\mathrm{IV}') \quad \begin{cases} 1 + \cdots, \quad x_i + \cdots, \quad y_i + \cdots, \quad z + \cdots \\ x_i x_\varkappa + \cdots, \quad x_i y_\varkappa + \cdots, \quad y_i y_\varkappa + \cdots \\ z x_i + \cdots, \quad z y_i + \cdots, \quad z^2 + \cdots \\ \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{cases}$$

sonst aber keine weiter. Der Function: $z^2 + \cdots$ entspricht nun eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$(20) \qquad \sum_1^n {}^i (\xi_i^{(2)} p_i + \eta_i^{(2)} q_i) + z^2 r + \cdots,$$

offenbar die einzige in G vorkommende infinitesimale Transformation zweiter Ordnung, während Transformationen dritter Ordnung überhaupt gar nicht auftreten. Unter $\xi_i^{(2)}$, $\eta_i^{(2)}$ verstehen wir natürlich ganze homogene Functionen zweiten Grades von $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$, z.

Combiniren wir die infinitesimale Transformation (20) mit:

$$z p_\nu + \cdots, \quad y_\nu p_\nu + \cdots,$$

so erhalten wir infinitesimale Transformationen von der Gestalt:

$$
(21)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\sum_1^n {}_i\, z \frac{\partial \xi_i^{(2)}}{\partial x_\nu} p_\nu + \sum_1^n {}_i\, z \frac{\partial \eta_i^{(2)}}{\partial x_\nu} q_\nu - z^2 p_\nu + \cdots \\
\sum_1^n {}_i\, y_\nu \frac{\partial \xi_i^{(2)}}{\partial x_\nu} p_\nu + \sum_1^n {}_i\, y_\nu \frac{\partial \eta_i^{(2)}}{\partial x_\nu} q_\nu - \eta_\nu^{(2)} p_\nu + \cdots \\
\qquad\qquad (\nu = 1 \cdots n),
\end{array}\right.
$$

wo die weggelassenen Glieder von höherer als der zweiten Ordnung sind. Nun enthält G blos eine infinitesimale Transformation von zweiter Ordnung, nämlich (20), die Transformationen (21) aber, die auch von der zweiten sind, haben nicht die Form (20), folglich müssen sie identisch verschwinden. Insbesondere müssen daher in (21) auch alle Glieder zweiter Ordnung verschwinden, setzen wir aber die Glieder zweiter Ordnung, mit welchen p_ν multiplicirt ist, gleich Null, so bekommen wir:

$$\frac{\partial \xi_\nu^{(2)}}{\partial x_\nu} = z, \qquad y_\nu \frac{\partial \xi_\nu^{(2)}}{\partial x_\nu} = \eta_\nu^{(2)},$$

also: $\eta_\nu^{(2)} = y_\nu z$. Ebenso wird selbstverständlich: $\xi_\nu^{(2)} = x_\nu z$, so dass die infinitesimale Transformation zweiter Ordnung (20) die Gestalt hat:

$$(20') \qquad \sum_1^n {}_\nu\, z(x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + z^2 r + \cdots.$$

Nunmehr kennen wir für alle die gesuchten Gruppen die Glieder niedrigster Ordnung der auftretenden charakteristischen Functionen und der auftretenden infinitesimalen Transformationen. Wir können daher insbesondere schon jetzt übersehen, wieviele Parameter die gesuchten Gruppen haben können. Zum Beispiel enthält jede Gruppe, welche unter den ersten Fall gehört, gerade

$$2n + 1 + n(2n + 1) = (n + 1)(2n + 1)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen und ist daher

$$(n + 1)(2n + 1)\text{-}\textit{gliedrig}.$$

Jede unter den zweiten Fall gehörige Gruppe ist

$$((n + 1)(2n + 1) + 1)\text{-}\textit{gliedrig},$$

im letzten Falle ergeben sich endlich Gruppen, welche

$$(n + 2)(2n + 1) + 1 = (n + 1)(2n + 3)$$

Parameter enthalten.

Es bleibt noch übrig die Relationen aufzustellen, welche zwischen den infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppen bestehen und sodann diese Gruppen selbst zu bestimmen.

§ 117.

Erster Fall.

Hier sind alle $(n+1)(2n+1)$-gliedrigen Gruppen von Berührungstransformationen zu bestimmen, welche in der Umgebung des Werthsystems: $x_i = y_i = z = 0$ von allgemeiner Lage $2n+1$ infinitesimale Transformationen nullter Ordnung von der Form (11) (s. S. 470) und $2n+1$ Transformationen erster Ordnung von der Form (I) (s. S. 473) enthalten.

Es ist bequem, für die infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppen solche Symbole einzuführen, welche an die Anfangsglieder der zugehörigen charakteristischen Functionen:

$$
(\mathrm{I}')\quad \begin{cases} 1+\cdots, \quad x_i+\alpha_i z+\cdots, \quad y_i+\beta_i z+\cdots \\ (x_i+\alpha_i z)(x_\varkappa+\alpha_\varkappa z)+\cdots, \quad (y_i+\beta_i z)(y_\varkappa+\beta_\varkappa z)+\cdots \\ (x_i+\alpha_i z)(y_\varkappa+\beta_\varkappa z)+\cdots \\ (i,\ \varkappa = 1\cdots n) \end{cases}
$$

erinnern. Wir setzen deshalb:

$$
(22)\quad \begin{cases} -r+\cdots = N, \quad -q_i+\cdots = X_i, \quad p_i+\cdots = Y_i \\ -(x_i+\alpha_i z)q_\varkappa-(x_\varkappa+\alpha_\varkappa z)q_i+\cdots = X_{i\varkappa} \\ (x_i+\alpha_i z)p_\varkappa-(y_\varkappa+\beta_\varkappa z)q_i+\cdots = T_{i\varkappa} \\ (y_i+\beta_i z)p_\varkappa+(y_\varkappa+\beta_\varkappa z)p_i+\cdots = Y_{i\varkappa} \\ (i,\ \varkappa = 1\cdots n). \end{cases}
$$

Diese Bezeichnungen haben abgesehen von ihrer Kürze noch den Vortheil, dass dieselben sehr leicht im Gedächtniss haften bleiben.

Man könnte N, X_i, Y_i, $X_{i\varkappa}$, $T_{i\varkappa}$, $Y_{i\varkappa}$ natürlich auch als Symbole für die charakteristischen Functionen (I′) auffassen und geradezu mit diesen Functionen rechnen, dann aber müsste man im Folgenden durchgängig das Zeichen $\{\ \}$ an Stelle des Zeichens $(\ )$ anwenden. Was übrigens das Zeichen $(\ )$ betrifft, so vergleiche man die auf S. 406 gemachte Bemerkung.

Setzen wir wie gewöhnlich fest, dass $\varepsilon_{i\varkappa}$ verschwinden soll, wenn i von $\varkappa$ verschieden ist, dass dagegen ε_{ii} den Werth 1 haben soll, so können wir die Relationen, welche zwischen den infinitesimalen Transformationen: $X_{i\varkappa}$, $T_{i\varkappa}$, $Y_{i\varkappa}$ bestehen, folgendermassen schreiben:

$$
(23)\quad \begin{cases} (X_{i\varkappa}X_{\nu\pi}) = 0, \quad (T_{i\varkappa}T_{\nu\pi}) = \varepsilon_{\varkappa\nu}T_{i\pi}-\varepsilon_{\pi i}T_{\nu\varkappa}, \quad (Y_{i\varkappa}Y_{\nu\pi}) = 0 \\ (T_{\nu\pi}X_{i\varkappa}) = \varepsilon_{\pi i}X_{\nu\varkappa}+\varepsilon_{\pi\varkappa}X_{\nu i}, \quad (Y_{i\varkappa}T_{\nu\pi}) = \varepsilon_{i\nu}Y_{\varkappa\pi}+\varepsilon_{\varkappa\nu}Y_{i\pi} \\ (Y_{\nu\pi}X_{i\varkappa}) = \varepsilon_{\nu i}T_{\varkappa\pi}+\varepsilon_{\nu\varkappa}T_{i\pi}+\varepsilon_{\pi i}T_{\varkappa\nu}+\varepsilon_{\pi\varkappa}T_{i\nu} \\ (i,\ \varkappa,\ \nu,\ \pi = 1\cdots n). \end{cases}
$$

Hierbei ist namentlich hervorzuheben, dass T_{ii} bei der Combination jedes $X_{\nu\pi}$, $T_{\nu\pi}$, $Y_{\nu\pi}$, in welchem einer von den beiden Indices den

Werth i hat, mit einem der fünf Faktoren: $0, +1, -1, +2, -2$ reproducirt. Auch auf die Formeln:

$$(24)\quad \begin{cases} \left(X_{i\varkappa},\ \sum_1^n {}_\nu T_{\nu\nu}\right) = -2X_{i\varkappa}, \quad \left(Y_{i\varkappa},\ \sum_1^n {}_\nu T_{\nu\nu}\right) = 2Y_{i\varkappa} \\ \left(T_{i\varkappa},\ \sum_1^n {}_\nu T_{\nu\nu}\right) = 0, \end{cases}$$

welche für alle Werthe von i und $\varkappa$ gelten, mag aufmerksam gemacht werden.

Ferner besteht zwischen X_1 und T_{11} eine Gleichung von der Form:

$$(X_1 T_{11}) = -X_1 + \sum_{i\varkappa}^{1\cdots n} (\mathfrak{a}_{i\varkappa} X_{i\varkappa} + \mathfrak{b}_{i\varkappa} T_{i\varkappa} + \mathfrak{c}_{i\varkappa} Y_{i\varkappa}),$$

führen wir daher:

$$X_1 - \sum_{i\varkappa}^{2\cdots n} (\mathfrak{a}_{i\varkappa} X_{i\varkappa} + \mathfrak{b}_{i\varkappa} T_{i\varkappa} + \mathfrak{c}_{i\varkappa} Y_{i\varkappa})$$

als neues X_1 ein, so erhalten wir eine Relation von der einfacheren Gestalt:

$$(X_1 T_{11}) = -X_1 + \sum_1^n {}_\varkappa (\mathfrak{a}_\varkappa X_{1\varkappa} + \mathfrak{b}_\varkappa T_{1\varkappa} + \mathfrak{c}_\varkappa T_{\varkappa 1} + \mathfrak{d}_\varkappa Y_{1\varkappa}).$$

Ausserdem zeigt die Identität:

$$((X_1 T_{11}) T_{ii}) - ((X_1 T_{ii}) T_{11}) = 0 \qquad (i > 1)$$

bei Einsetzung des Werthes von $(X_1 T_{11})$, dass nunmehr auch $(X_1 T_{ii})$ nur Glieder mit wenigstens einem Index 1 enthält. Also wird insbesondere:

$$\left(X_1,\ \sum_1^n {}_i T_{ii}\right) = -X_1 + \sum_1^n {}_\varkappa (\mathfrak{a}'_\varkappa X_{1\varkappa} + \mathfrak{b}'_\varkappa T_{1\varkappa} + \mathfrak{c}'_\varkappa T_{\varkappa 1} + \mathfrak{d}'_\varkappa Y_{1\varkappa}).$$

Um X_1 vollständig zu normiren setzen wir:

$$X_1' = X_1 + \sum_1^n {}_j (\lambda_j X_{1j} + \mu_j T_{1j} + \nu_j T_{j1} + \pi_j Y_{1j})$$

und bekommen unter Berücksichtigung von (24):

$$\left(X_1',\ \sum_1^n {}_i T_{ii}\right) = -X_1' + \sum_1^n {}_\varkappa \{(\mathfrak{a}'_\varkappa - \lambda_\varkappa) X_{1\varkappa} + (\mathfrak{d}'_\varkappa + 3\pi_\varkappa) Y_{1\varkappa}\} +$$

$$+ (\mathfrak{b}_1' + \mathfrak{c}_1' + \mu_1 + \nu_1) T_{11} + \sum_2^n {}_\varkappa \{(\mathfrak{b}'_\varkappa + \mu_\varkappa) T_{1\varkappa} + (\mathfrak{c}'_\varkappa + \nu_\varkappa) T_{\varkappa 1}\}.$$

Wählen wir daher die λ, μ, ν, π in geeigneter Weise und schreiben wir für X_1' wieder X_1, so haben wir die Relation:

$$\left(X_1, \sum_1^n i\, T_{ii}\right) = - X_1 .$$

Jetzt bilden wir für $\varkappa \gtreqless 1$ die Identität:

$$\left(\left(X_1, \sum_1^n i\, T_{ii}\right) T_{\varkappa\varkappa}\right) - \left((X_1\, T_{\varkappa\varkappa}) \sum_1^n i\, T_{ii}\right) = 0,$$

welche sofort die Gestalt:

$$(X_1\, T_{\varkappa\varkappa}) + \left((X_1\, T_{\varkappa\varkappa}) \sum_1^n i\, T_{ii}\right) = 0$$

annimmt. Da nun $(X_1\, T_{\varkappa\varkappa})$ die Form:

$$(X_1\, T_{\varkappa\varkappa}) = - \varepsilon_{1\varkappa} X_1 + \sum_1^n j \left\{ \mathfrak{a}_j^\varkappa X_{1j} + \mathfrak{b}_j^\varkappa T_{1j} + \mathfrak{c}_j^\varkappa T_{j1} + \mathfrak{d}_j^\varkappa Y_{1j} \right\}$$

besitzt, erhalten wir:

$$\sum_1^n j \left\{ - \mathfrak{a}_j^\varkappa X_{1j} + \mathfrak{b}_j^\varkappa T_{1j} + \mathfrak{c}_j^\varkappa T_{j1} + 3 \mathfrak{d}_j^\varkappa Y_{1j} \right\} = 0,$$

woraus sofort folgt:

$$\mathfrak{b}_1^\varkappa + \mathfrak{c}_1^\varkappa = 0, \quad \mathfrak{a}_j^\varkappa = \mathfrak{b}_j^\varkappa = \mathfrak{c}_j^\varkappa = \mathfrak{d}_j^\varkappa = 0$$

und somit:

$$(X_1\, T_{\varkappa\varkappa}) = - \varepsilon_{1\varkappa} X_1 .$$

Die Identität:

$$((X_1 X_{11}) T_{11}) + 3 (X_1 X_{11}) = 0$$

zeigt augenblicklich, dass $(X_1 X_{11})$ verschwindet. Weiter geht aus:

$$((X_1\, T_{11}) X_{\varkappa\varkappa}) - ((X_1 X_{\varkappa\varkappa}) T_{11}) = 0 \qquad (\varkappa > 1)$$

hervor, dass $(X_1 X_{\varkappa\varkappa})$ nur Glieder mit mindestens einem Index 1 enthält; da ausserdem:

$$((X_1 X_{\varkappa\varkappa}) T_{\varkappa\varkappa}) + 2 (X_1 X_{\varkappa\varkappa}) = 0$$

ist und $T_{\varkappa\varkappa}$ keines der in $(X_1 X_{\varkappa\varkappa})$ auftretenden Glieder mit dem Faktor -2 reproducirt, muss $(X_1 X_{\varkappa\varkappa}) = 0$ sein.

Wenn wir $X_2 \cdots X_n$ ebenso normiren wie X_1, erhalten wir die Relationen:

(A) $$(X_i X_{\varkappa\varkappa}) = 0, \quad (X_i\, T_{\varkappa\varkappa}) = - \varepsilon_{i\varkappa} X_\varkappa$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots n).$$

Y_i normiren wir so, dass: $(X_i Y_{ii}) = - 2 Y_i$ wird. Nun ist für beliebige i und $\varkappa$:

$$((X_i Y_{ii}) T_{\varkappa\varkappa}) - 2\varepsilon_{i\varkappa}(X_i Y_{ii}) + \varepsilon_{i\varkappa}(X_i Y_{ii}) = 0$$
$$((X_i Y_{ii}) X_{\varkappa\varkappa}) - 4\varepsilon_{i\varkappa}(X_i T_{ii}) = 0,$$

also ergiebt sich:

$$(Y_i T_{\varkappa\varkappa}) = \varepsilon_{i\varkappa} Y_i, \quad (Y_i X_{\varkappa\varkappa}) = 2\varepsilon_{i\varkappa} X_i.$$

Die Identität:

$$((Y_i Y_{\varkappa\varkappa}) T_{\varkappa\varkappa}) - 2(Y_i Y_{\varkappa\varkappa}) - \varepsilon_{i\varkappa}(Y_i Y_{\varkappa\varkappa}) = 0$$

liefert, wenn $i = \varkappa$ ist, sofort: $(Y_i Y_{ii}) = 0$, ist dagegen $i \neq \varkappa$, so zeigt sie nur, dass $(Y_i Y_{\varkappa\varkappa})$ die Form: $\lambda_{i\varkappa} Y_{\varkappa\varkappa}$ besitzt, aber die Identität:

$$((Y_i Y_{\varkappa\varkappa}) X_{\varkappa\varkappa}) - 4(Y_i T_{\varkappa\varkappa}) = 0$$

beweist, dass auch $\lambda_{i\varkappa}$ verschwindet. Endlich geht aus:

$$((Y_i X_{ii}) Y_{\varkappa\varkappa}) + 4\varepsilon_{i\varkappa}(Y_i T_{ii}) = 0$$

noch hervor:

$$(X_i Y_{\varkappa\varkappa}) = -2\varepsilon_{i\varkappa} Y_i.$$

Insgesammt haben wir daher:

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} (X_i X_{\varkappa\varkappa}) = 0, & (X_i T_{\varkappa\varkappa}) = -\varepsilon_{i\varkappa} X_\varkappa, & (X_i Y_{\varkappa\varkappa}) = -2\varepsilon_{i\varkappa} Y_i \\ (Y_i Y_{\varkappa\varkappa}) = 0, & (Y_i T_{\varkappa\varkappa}) = \varepsilon_{i\varkappa} Y_i, & (Y_i X_{\varkappa\varkappa}) = 2\varepsilon_{i\varkappa} X_i \end{cases}$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots n).$$

Wir bilden für $i \neq \varkappa$ die Identitäten:

$$\left((X_i X_{i\varkappa}) \sum_1^n {}_\nu T_{\nu\nu}\right) + 3(X_i X_{i\varkappa}) = 0$$
$$\left((X_i T_{i\varkappa}) \sum_1^n {}_\nu T_{\nu\nu}\right) + (X_i T_{i\varkappa}) = 0,$$

da nun $(X_i X_{i\varkappa})$ und $(X_i T_{i\varkappa})$, wenn i von $\varkappa$ verschieden ist, beide nur Glieder von der Form $X_{\mu\pi}$, $T_{\mu\pi}$, $Y_{\mu\pi}$ $(\mu, \pi = 1 \cdots n)$ enthalten und $\Sigma T_{\nu\nu}$ jedes dieser Glieder mit einem der Faktoren: -2, 0, $+2$ reproducirt, so schliessen wir, dass $(X_i X_{i\varkappa})$ und $(X_i T_{i\varkappa})$ für $i \neq \varkappa$ verschwinden. Nach (B) ist aber: $(X_i X_{ii}) = 0$ und $(X_i T_{ii}) = -X_i$, also bekommen wir allgemein:

$$\text{(C)} \quad (X_i X_{i\varkappa}) = 0, \quad (X_i T_{i\varkappa}) = -\varepsilon_{i\varkappa} X_i$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots n).$$

Auf genau dieselbe Weise finden wir:

$$\text{(D)} \quad (Y_i Y_{i\varkappa}) = 0, \quad (Y_i T_{\varkappa i}) = \varepsilon_{i\varkappa} Y_i$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots n).$$

Andrerseits ist für $i \neq \varkappa$:

$$(X_i T_{\varkappa i}) = -X_\varkappa + \sum_{\nu j}^{1 \cdots n} \{\mathfrak{a}''_{\nu j} X_{\nu j} + \mathfrak{b}''_{\nu j} T_{\nu j} + \mathfrak{c}''_{\nu j} Y_{\nu j}\},$$

die Identität:

$$\left((X_i T_{\varkappa i}) \sum_1^n {}_\pi T_{\pi\pi}\right) + (X_i T_{\varkappa i}) = 0$$

zeigt aber wegen der Relationen (24), dass alle $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$ verschwinden, dass also: $(X_i T_{\varkappa i}) = - X_\varkappa$ ist. Nunmehr ergiebt sich aus der Identität:

$$((X_i T_{\varkappa i}) Y_{\varkappa\varkappa}) + 2(X_i Y_{i\varkappa}) = 0 \qquad (i \neq \varkappa)$$

auch noch: $(X_i Y_{i\varkappa}) = - Y_\varkappa$ $(i \neq \varkappa)$. Verbinden wir hiermit die unter den Formeln (B) enthaltenen Relationen:

$$(X_i T_{ii}) = - X_i \quad \text{und} \quad (X_i Y_{ii}) = -2 Y_i,$$

so bekommen wir allgemein:

$$\text{(E)} \qquad (X_i T_{\varkappa i}) = - X_\varkappa, \quad (X_i Y_{i\varkappa}) = - \varepsilon_{i\varkappa} Y_i - Y_\varkappa$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots n).$$

Ebenso wird augenscheinlich:

$$\text{(F)} \qquad (Y_i T_{i\varkappa}) = Y_\varkappa, \quad (Y_i X_{i\varkappa}) = X_\varkappa + \varepsilon_{i\varkappa} X_i$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots n).$$

Es seien jetzt i, $\varkappa$ und j drei von einander verschiedene Indices, dann ist:

$$\left((X_i X_{\varkappa j}) \sum_1^n {}_\nu T_{\nu\nu}\right) + 3(X_i X_{\varkappa j}) = 0$$

$$\left((X_i T_{\varkappa j}) \sum_1^n {}_\nu T_{\nu\nu}\right) + (X_i T_{\varkappa j}) = 0$$

$$\left((X_i Y_{\varkappa j}) \sum_1^n {}_\nu T_{\nu\nu}\right) - (X_i Y_{\varkappa j}) = 0.$$

Nun enthalten: $(X_i X_{\varkappa j})$, $(X_i T_{\varkappa j})$, $(X_i Y_{\varkappa j})$ unter den gemachten Voraussetzungen nur Glieder von der Form: $X_{\mu\pi}$, $T_{\mu\pi}$, $Y_{\mu\pi}$ und jedes dieser Glieder wird von $\Sigma T_{\nu\nu}$ mit einem der Faktoren: -2, 0, $+2$ reproducirt, also ergiebt sich, dass $(X_i X_{\varkappa j})$, $(X_i T_{\varkappa j})$, $(X_i Y_{\varkappa j})$ alle drei verschwinden. Dasselbe gilt natürlich von: $(Y_i X_{\varkappa j})$, $(Y_i T_{\varkappa j})$, $(Y_i Y_{\varkappa j})$, wenn i, $\varkappa$, j von einander verschieden sind.

Fassen wir die eben gefundenen Relationen mit den früher gewonnenen: (A) bis (F) zusammen, so haben wir:

$$\text{(25)} \quad \left\{ \begin{array}{c} (X_i X_{\varkappa j}) = 0, \quad (Y_i Y_{\varkappa j}) = 0 \\ (X_i T_{\varkappa j}) = - \varepsilon_{ij} X_\varkappa, \quad (Y_i T_{\varkappa j}) = \varepsilon_{i\varkappa} Y_j \\ (X_i Y_{\varkappa j}) = - \varepsilon_{i\varkappa} Y_j - \varepsilon_{ij} Y_\varkappa, \quad (Y_i X_{\varkappa j}) = \varepsilon_{i\varkappa} X_j + \varepsilon_{ij} X_\varkappa \\ (i, \varkappa, j = 1 \cdots n). \end{array} \right.$$

Die charakteristische Function, welche zu der infinitesimalen Transformation: $(Y_1 X_1)$ gehört, hat die Form:

$$\{y_1 + \beta_1 z + \cdots,\ \ x_1 + \alpha_1 z + \cdots\} = 1 + \cdots,$$

also ist:

$$(Y_1 X_1) = N + \sum_1^n {}_i (a_i X_i + b_i Y_i) +$$

$$+ \sum_{i\varkappa}^{1\cdots n} \{\lambda_{i\varkappa} X_{i\varkappa} + \mu_{i\varkappa} T_{i\varkappa} + \nu_{i\varkappa} Y_{i\varkappa}\},$$

führen wir die rechte Seite als neues N ein, so bekommen wir:

(G) $$(Y_1 X_1) = N.$$

Wir bemerken ferner, dass die charakteristische Function der infinitesimalen Transformation $(X_i X_\varkappa)$ $(i \neq \varkappa)$ die Form hat:

$$\{x_i + \alpha_i z + \cdots,\ \ x_\varkappa + \alpha_\varkappa z + \cdots\} = 0 + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder von erster und höherer Ordnung in den x, y, z sind, es ist also:

$$(X_i X_\varkappa) = \sum_1^n {}_j (a_j' X_j + b_j' Y_j) + \sum_{\nu j}^{1\cdots n} \{a_{\nu j} X_{\nu j} + b_{\nu j} T_{\nu j} + c_{\nu j} Y_{\nu j}\}.$$

Die Identitäten:

$$((X_i X_\varkappa) T_{ii}) + (X_i X_\varkappa) = 0, \quad ((X_i X_\varkappa) T_{\varkappa\varkappa}) + (X_i X_\varkappa) = 0$$

lassen nun erkennen, dass sich der Ausdruck für $(X_i X_\varkappa)$ auf:

$$(X_i X_\varkappa) = \lambda_{i\varkappa} X_{i\varkappa}$$

reducirt, und aus der Identität: $((X_i X_\varkappa) T_{i\varkappa}) = 0$ erhellt, dass auch $\lambda_{i\varkappa}$ verschwindet, es ist also: $(X_i X_\varkappa) = 0$ und natürlich ebenso: $(Y_i Y_\varkappa) = 0$. Aus: $((Y_i X_{ii}) Y_\varkappa) = 0$ $(i \neq \varkappa)$ folgt überdies: $(X_i Y_\varkappa) = 0$, so dass wir haben:

(H) $$(X_i X_\varkappa) = 0, \quad (X_i Y_\varkappa) = 0, \quad (Y_i Y_\varkappa) = 0$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots n;\ \ i \neq \varkappa).$$

Um $(Y_i X_i)$ zu bestimmen, bilden wir die Identität:

$$((Y_1 T_{1i}) X_i) + (X_1 Y_1) + ((X_i Y_1) T_{1i}) = 0 \qquad (i > 1),$$

welche mit Berücksichtigung von (G) und (H) liefert: $(Y_i X_i) = N$. Es ist demnach:

(J) $$(X_i X_\varkappa) = 0, \quad (Y_i X_\varkappa) = \varepsilon_{i\varkappa} N, \quad (Y_i Y_\varkappa) = 0$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots n).$$

In den Identitäten:

$$((Y_1 X_1) X_{i\varkappa}) - \varepsilon_{1i}(X_\varkappa X_1) - \varepsilon_{1\varkappa}(X_i X_1) = 0$$
$$((Y_1 X_1) T_{i\varkappa}) - \varepsilon_{1\varkappa}(X_i Y_1) - \varepsilon_{1i}(Y_\varkappa X_1) = 0$$
$$((Y_1 X_1) Y_{i\varkappa}) - \varepsilon_{1i}(Y_\varkappa Y_1) - \varepsilon_{1\varkappa}(Y_i Y_1) = 0$$

können wir auf Grund von (J) jedesmal die beiden letzten Glieder berechnen und finden:

(K) $$(NX_{i\varkappa}) = 0, \quad (NT_{i\varkappa}) = 0, \quad (NY_{i\varkappa}) = 0 \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n).$$

Endlich ist:

$$(NX_1) = \varrho N + \sum_1^n{}_i (\sigma_i X_i + \tau_i Y_i) + \sum_{i\varkappa}^{1 \cdots n} (\varrho_{i\varkappa} X_{i\varkappa} + \sigma_{i\varkappa} T_{i\varkappa} + \tau_{i\varkappa} Y_{i\varkappa}),$$

die Identitäten:

$$((NX_1) T_{11}) + (NX_1) = 0, \quad ((NX_1) T_{ii}) = 0 \qquad (i > 1)$$

zeigen aber, dass rechts alle Coefficienten verschwinden ausser σ_1, es ist demnach:

$$(NX_1) = \sigma X_1$$

und ebenso:

$$(NY_1) = \tau Y_1.$$

Durch Bildung der Identitäten:

$$((X_1 Y_1) N) + ((Y_1 N) X_1) + ((NX_1) Y_1) = 0$$
$$((NX_1) Y_{11}) + 2(NY_1) = 0$$

bekommen wir nunmehr:

$$-\tau N - \sigma N = 0, \quad -2\sigma Y_1 + 2\tau Y_1 = 0,$$

also verschwinden auch σ und τ und wir finden überhaupt:

(L) $$(NX_i) = 0, \quad (NY_i) = 0 \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Fassen wir schliesslich die Relationen (G) bis (L) zusammen, so erhalten wir:

(26) $$\left\{\begin{array}{c} (NX_{i\varkappa}) = (NT_{i\varkappa}) = (NY_{i\varkappa}) = 0 \\ (X_i X_\varkappa) = 0, \quad (Y_i X_\varkappa) = \varepsilon_{i\varkappa} N, \quad (Y_i Y_\varkappa) = 0 \\ (NX_i) = (NY_i) = 0 \\ (i, \varkappa = 1 \cdots n). \end{array}\right.$$

Man wird bemerken, dass die infinitesimale Transformation N jetzt nach geschehener Normirung die Form hat:

$$N = -r + \sum_1^n{}_\nu (\alpha'_\nu p_\nu + \beta'_\nu q_\nu) + \cdots,$$

wo die α'_ν, β'_ν Constanten bezeichnen und wo die weggelassenen Glieder von höherer als der nullten Ordnung sind. Um die α'_ν, β'_ν zu bestimmen, gehen wir davon aus, dass der Ausdruck (NT_{ii}) für jedes i verschwindet; nun aber ist:

$$\begin{aligned}(NT_{ii}) &= (N, \quad (x_i + \alpha_i z)p_i - (y_i + \beta_i z)q_i + \cdots) \\ &= (\alpha_i' - \alpha_i)p_i - (\beta_i' - \beta_i)q_i + \cdots\end{aligned}$$

und hier müssen offenbar die Glieder nullter Ordnung für sich verschwinden, also ergiebt sich: $\alpha_i' = \alpha_i$, $\beta_i' = \beta_i$, so dass N die Form hat:

$$N = -r + \sum_1^n {}_\nu (\alpha_\nu p_\nu + \beta_\nu q_\nu) + \cdots.$$

Im Vorstehenden sind alle Relationen, welche zwischen den infinitesimalen Transformationen einer Gruppe von der hier verlangten Beschaffenheit bestehen, durch geeignete Normirung dieser infinitesimalen Transformationen auf eine einfache kanonische Form gebracht. Jetzt müssen wir noch die infinitesimalen Transformationen selbst durch Einführung geeigneter neuer Veränderlicher auf eine möglichst einfache Form zu bringen suchen.

Die $2n + 1$ infinitesimalen Transformationen nullter Ordnung:

$$X_i = -q_i + \cdots, \quad Y_i = p_i + \cdots, \quad N = -r + \sum_1^n {}_\nu (\alpha_\nu p_\nu + \beta_\nu q_\nu) + \cdots$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$, z erzeugen augenscheinlich eine $(2n + 1)$-gliedrige einfach transitive Gruppe. Mit dieser Gruppe ist die $(2n + 1)$-gliedrige einfach transitive Gruppe:

$$-(q_i' + x_i' r'), \quad p_i', \quad -r'$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

in den Veränderlichen: $x_1' \cdots x_n'$, $y_1' \cdots y_n'$, z' gleichzusammengesetzt, es giebt daher nach Abschnitt I, Theorem 64, S. 340 zwischen den Veränderlichen x, y, z und x', y', z' eine Transformation:

$$(27) \quad \begin{cases} x_i' = \mathsf{A}_i(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z), \quad y_i' = \mathsf{B}_i(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z) \\ z' = \Gamma(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z) \\ (i = 1 \cdots n), \end{cases}$$

vermöge deren die Gleichungen:

$$(28) \qquad X_i = -(q_i' + x_i' r'), \quad Y_i = p_i', \quad N = -r'$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

bestehen. Wir wollen diese Transformation (27) insbesondere so wählen, dass $x_1' \cdots x_n'$, $y_1' \cdots y_n'$, z' zugleich mit $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$, z

verschwinden, und dass die x', y', z' gewöhnliche Potenzreihen der x, y, z werden und umgekehrt die x, y, z gewöhnliche Potenzreihen der x', y', z'. Die Möglichkeit einer derartigen Wahl der Transformation (27) ist leicht einzusehen, wenn man auf Grund des angezogenen Theorems zunächst die allgemeinste Transformation (27) bestimmt, welche die Gleichungen (28) befriedigt, und sodann das Theorem 12, S. 91 des Abschnitts I anwendet.

Bei der Transformation (27) erhalten die infinitesimalen Transformationen Y_{ii} und X_{ii} gewisse neue Formen:

$$Y_{ii} = \sum_1^n {}_\nu (\xi_{i\nu}(x', y', z')p'_\nu + \eta_{i\nu}(x', y', z')q'_\nu) + \zeta_i(x', y', z')r'$$

$$X_{ii} = \sum_1^n {}_\nu (\Xi_{i\nu}p'_\nu + \mathsf{H}_{i\nu}q'_\nu) + \mathsf{Z}_i r',$$

welche den Relationen:

$$\begin{gathered}(Y_j Y_{ii}) = (N Y_{ii}) = 0, \quad (X_j Y_{ii}) = -2\varepsilon_{ij} Y_i \\ (X_j X_{ii}) = (N X_{ii}) = 0, \quad (Y_j X_{ii}) = 2\varepsilon_{ij} X_i \\ (j = 1 \cdots n)\end{gathered}$$

genügen müssen. Aus diesen Relationen geht hervor, dass die ξ, η, ζ von $x_1' \cdots x_n'$, z' frei sind, die Ξ, H von $y_1' \cdots y_n'$ und die Ξ, H, Z von z', überdies ergeben sich aus ihnen die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \xi_{ii}}{\partial y_i'} = 2, \quad \frac{\partial \xi_{i\varkappa}}{\partial y_j'} = 0, \quad \frac{\partial \eta_{i\varkappa}}{\partial y_j'} = 0, \quad \frac{\partial \zeta_i}{\partial y_j'} = \xi_{ij}$$

$$\frac{\partial \mathsf{H}_{ii}}{\partial x_i'} = -2, \quad \frac{\partial \Xi_{i\varkappa}}{\partial x_j'} = 0, \quad \frac{\partial \mathsf{H}_{i\varkappa}}{\partial x_j'} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathsf{Z}_i}{\partial x_j'} = -2\varepsilon_{ij} x_i', \quad \frac{\partial \mathsf{Z}_i}{\partial y_j'} = \Xi_{ij},$$

durch deren Integration man findet:

$$\tfrac{1}{2} Y_{ii} = y_i' p_i' + \sum_1^n {}_\varkappa (a_{i\varkappa} p_\varkappa' + b_{i\varkappa} q_\varkappa') + \left(c_i + \sum_1^n {}_\varkappa a_{i\varkappa} y_\varkappa' + \tfrac{1}{2} y_i'^2\right) r'$$

$$-\tfrac{1}{2} X_{ii} = x_i' q_i' + \sum_1^n {}_\varkappa (\alpha_{i\varkappa} p_\varkappa' + \beta_{i\varkappa} q_\varkappa') + \left(\gamma_i + \sum_1^n {}_\varkappa \alpha_{i\varkappa} y_\varkappa' + \tfrac{1}{2} x_i'^2\right) r',$$

wo die a, b, c, α, β, γ Constanten bezeichnen. Nun aber ist die Transformation (27) so beschaffen, dass die x', y', z' gewöhnliche Potenzreihen der x, y, z sind und zugleich mit den x, y, z verschwinden, und dass umgekehrt die x, y, z gewöhnliche Potenzreihen der x', y', z' sind, sie führt daher nach Abschnitt I, S. 197, Satz 1 die infinitesimalen Transformationen Y_{ii}, X_{ii}, welche in den x, y, z von der ersten Ordnung sind, in solche infinitesimale Transformationen über, welche in den x', y', z' von der ersten Ordnung sind. Hieraus folgt sofort, dass in den oben für Y_{ii} und X_{ii} gefundenen Ausdrücken die Constanten $a_{i\varkappa}$, $b_{i\varkappa}$, c_i, $\alpha_{i\varkappa}$, $\beta_{i\varkappa}$, γ_i gleich Null sind, und dass Y_{ii}, X_{ii} die einfache Form:

$$\tfrac{1}{2} Y_{ii} = y_i' p_i' + \tfrac{1}{2} y_i'^2 r'$$
$$-\tfrac{1}{2} X_{ii} = x_i' q_i' + \tfrac{1}{2} x_i'^2 r'$$

besitzen. Zugleich wird wegen: $(Y_{ii}, X_{ii}) = 4 T_{ii}$ auch noch:

$$T_{ii} = x_i' p_i' - y_i' q_i'.$$

Um jetzt $X_{i\varkappa}$ $(i \neq \varkappa)$ zu berechnen, bemerken wir, dass:

$$(T_{ii} X_{i\varkappa}) = X_{i\varkappa}, \qquad (T_{\varkappa\varkappa} X_{i\varkappa}) = X_{i\varkappa}$$

werden muss; hat daher $X_{i\varkappa}$ die Form:

$$X_{i\varkappa} = \sum_1^n {}_\nu (\xi_{i\varkappa\nu} p_\nu' + \eta_{i\varkappa\nu} q_\nu') + \zeta_{i\varkappa} r',$$

und verstehen wir unter F eine beliebige der Functionen: $\xi_{i\varkappa\nu}$, $\eta_{i\varkappa\nu}$, $\zeta_{i\varkappa}$, so muss F die Differentialgleichungen:

$$(29) \quad x_i' \frac{\partial F}{\partial x_i'} - y_i' \frac{\partial F}{\partial y_i'} = F \ (\nu \neq i), \qquad x_\varkappa' \frac{\partial F}{\partial x_\varkappa'} - y_\varkappa' \frac{\partial F}{\partial y_\varkappa'} = F \ (\nu \neq \varkappa)$$

befriedigen. Ferner ist:

$$(N X_{i\varkappa}) = (X_j X_{i\varkappa}) = 0, \qquad (Y_i X_{i\varkappa}) = X_\varkappa, \qquad (Y_\varkappa X_{i\varkappa}) = X_i,$$

also bekommen wir:

$$\frac{\partial F}{\partial z'} = \frac{\partial \xi_{i\varkappa\nu}}{\partial y_j'} = \frac{\partial \eta_{i\varkappa\nu}}{\partial y_j'} = \frac{\partial \xi_{i\varkappa\nu}}{\partial x_j'} = 0$$

$$\frac{\partial \zeta_{i\varkappa}}{\partial y_j'} = \xi_{i\varkappa j}, \quad \frac{\partial \eta_{i\varkappa\nu}}{\partial x_i'} = -\varepsilon_{\varkappa\nu}, \quad \frac{\partial \eta_{i\varkappa\nu}}{\partial x_\varkappa'} = -\varepsilon_{i\nu}, \quad \frac{\partial \zeta_{i\varkappa}}{\partial x_i'} = -x_\varkappa'$$

und mit Benutzung von (29):

$$\xi_{i\varkappa\nu} = 0, \qquad \eta_{i\varkappa\nu} = -\varepsilon_{\varkappa\nu} x_i' - \varepsilon_{i\nu} x_\varkappa', \qquad \zeta_{i\varkappa} = -x_i' x_\varkappa',$$

das heisst:

$$-X_{i\varkappa} = x_i' q_\varkappa' + x_\varkappa' q_i' + x_i' x_\varkappa' r'.$$

Endlich wird noch:

$$\tfrac{1}{2}(Y_{\varkappa\varkappa} X_{i\varkappa}) = T_{i\varkappa} = x_i' p_\varkappa' - y_\varkappa' q_i'$$
$$\tfrac{1}{2}(Y_{ii} T_{i\varkappa}) = Y_{i\varkappa} = y_i' p_\varkappa' + y_\varkappa' p_i' + y_i' y_\varkappa' r'.$$

Jede Berührungstransformationsgruppe des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$, welche die im Anfange dieses Paragraphen angegebenen Eigenschaften besitzt, ist also durch eine Transformation von der Gestalt (27) mit der $(n+1)(2n+1)$-gliedrigen Gruppe:

$$\boxed{\begin{gathered} p_i, \quad q_i + x_i r, \quad r \\ x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i + x_i x_\varkappa r, \quad x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i, \quad y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i + y_i y_\varkappa r \\ (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{gathered}} \tag{30}$$

ähnlich.

Die infinitesimalen Transformationen der Gruppe (30) sind, wie aus der Tabelle (5) auf S. 465 hervorgeht, sämmtlich infinitesimale Berührungstransformationen des Raumes: $z, x_1 \cdots x_n$; die zu ihnen gehörigen charakteristischen Functionen lauten, wenn von der Reihenfolge und vom Vorzeichen abgesehen wird, folgendermassen:

$$\boxed{\begin{gathered} 1, \quad x_i, \quad y_i, \quad x_i x_\varkappa, \quad x_i y_\varkappa, \quad y_i y_\varkappa \\ (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{gathered}}\,. \tag{31}$$

Die Gruppe (30) ist demnach eine Gruppe von Berührungstransformationen des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$.

Aus dem Gesagten erhellt, dass die Gruppe (30) die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - \sum_1^n {}_\nu\, y_\nu dx_\nu = 0 \tag{32}$$

invariant lässt. Wir behaupten, dass dies die einzige bei der Gruppe (30) invariante Pfaffsche Gleichung ist.

In der That, es sei:

$$\mathsf{Z} dz + \sum_1^n {}_\nu\, (\Xi_\nu dx_\nu + \mathsf{H}_\nu dy_\nu) = 0 \tag{33}$$

irgend eine Pfaffsche Gleichung, welche bei der Gruppe (30) invariant bleibt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine Pfaffsche Gleichung, welche alle infinitesimalen Transformationen von der Form (30) gestattet (vgl. Abschnitt I, S. 530 f.).

Denken wir uns (33) nach irgend einem der darin vorkommenden Differentiale aufgelöst, so müssen wir natürlich wieder eine Pfaffsche Gleichung erhalten, welche alle infinitesimalen Transformationen (30) und also auch insbesondere die Transformationen: $r, p_1, \cdots p_n$ gestattet. Hieraus folgt offenbar, dass in der aufgelösten Gleichung alle Coefficienten von $z, x_1 \cdots x_n$ frei sind. Wir können daher von vornherein voraussetzen, dass auch die Coefficienten der nicht aufgelösten Gleichung (33) nur von $y_1 \cdots y_n$ abhängen.

Wäre $\mathsf{Z} = 0$, so hätten wir eine Pfaffsche Gleichung von der Form:

$$(34) \qquad \sum_1^n {}^{\nu}\, \Xi_\nu(y_1 \cdots y_n)dx_\nu + \sum_1^n {}^{\nu}\, \mathsf{H}_\nu(y_1 \cdots y_n)dy_\nu = 0.$$

Denken wir uns diese nach einem der Differentiale dx_ν, dy_ν aufgelöst und berücksichtigen wir, dass die so erhaltene Pfaffsche Gleichung die n infinitesimalen Transformationen: $q_i + x_i r$ gestattet, so erkennen wir, dass in der aufgelösten Gleichung alle Coefficienten von $y_1 \cdots y_n$ frei und demnach blose Constanten sind. Folglich kann (34) durch eine Gleichung von der Form:

$$(34') \qquad \sum_1^n {}^{\nu}\, A_\nu dx_\nu + \sum_1^n {}^{\nu}\, B_\nu dy_\nu = 0$$

ersetzt werden, wo die A_ν und B_ν Constanten bezeichnen. Aber (34′) muss auch die $2n$ infinitesimalen Transformationen:

$$x_i q_i + \tfrac{1}{2}x_i^2 r, \qquad y_i p_i + \tfrac{1}{2}y_i^2 r \qquad (i = 1 \cdots n)$$

gestatten, es müssen also die $2n$ Ausdrücke:

$$B_i dx_i, \qquad A_i dy_i \qquad (i = 1 \cdots n)$$

sämmtlich vermöge (34′) verschwinden, was offenbar nur möglich ist, wenn alle A_i und B_i gleich Null sind. Der Fall $\mathsf{Z} = 0$ liefert also überhaupt keine bei der Gruppe (30) invariante Pfaffsche Gleichung.

Ist andrerseits $\mathsf{Z} \neq 0$, so können wir $\mathsf{Z} = 1$ setzen und haben eine Gleichung von der Gestalt:

$$(35) \qquad dz + \sum_1^n {}^{\nu}\, \Xi_\nu(y_1 \cdots y_n)dx_\nu + \sum_1^n {}^{\nu}\, \mathsf{H}_\nu(y_1 \cdots y_n)dy_\nu = 0.$$

Diese gestattet nun die $2n$ infinitesimalen Transformationen:

$$y_i p_i + \tfrac{1}{2}y_i^2 r \qquad x_i q_i + \tfrac{1}{2}x_i^2 r$$

dann und nur dann, wenn die $2n$ Ausdrücke:

$$y_i dy_i + \Xi_i dy_i$$

$$x_i dx_i + \sum_1^n {}^{\nu}\, x_i \frac{\partial \Xi_\nu}{\partial y_i} dx_\nu + \mathsf{H}_i dx_i + \sum_1^n {}^{\nu}\, x_i \frac{\partial \mathsf{H}_\nu}{\partial y_i} dy_\nu$$

alle vermöge (35) verschwinden. Hieraus ergiebt sich sofort:

$$y_i + \Xi_i = 0, \qquad \mathsf{H}_i + x_i + x_i \frac{\partial \Xi_i}{\partial y_i} = 0$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

oder, da $\Xi_i = - y_i$ ist:

$$y_i + \Xi_i = 0, \quad \mathsf{H}_i = 0 \qquad (i=1\cdots n).$$

Die Gleichung:

$$dz - \sum_1^n {}_i\, y_i dx_i = 0 \tag{32}$$

ist mithin wirklich die einzige Pfaffsche Gleichung in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$, z, welche bei der Gruppe (30) *invariant bleibt.*

Hieraus können wir sofort einen wichtigen Schluss ziehen.

Ist nämlich G eine Berührungstransformationsgruppe von der im Anfange dieses Paragraphen (auf S. 486) verlangten Beschaffenheit, so giebt es, wie wir auf S. 493 ff. gesehen haben, eine Transformation von der Form (27), bei welcher G in die Gruppe (30) übergeht. Nun wissen wir, dass die Gruppen G und (30) beide die Pfaffsche Gleichung (32) invariant lassen, von der Gruppe (30) aber haben wir soeben bewiesen, dass sie keine von (32) verschiedene Pfaffsche Gleichung invariant lässt, folglich können wir schliessen, dass auch bei der Gruppe G ausser der Pfaffschen Gleichung (32) keine andere invariant bleibt, zugleich ergiebt sich, dass die Transformation (27), welche G in die Gruppe (30) verwandelt, die Pfaffsche Gleichung (32) in sich überführt, dass sie also eine Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ ist. Mit andern Worten:

Jede Berührungstransformationsgruppe des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$, welche die auf S. 486 *angegebenen Eigenschaften besitzt, ist mit der Berührungstransformationsgruppe* (30) *durch eine Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ ähnlich.*

Endlich werden wir noch beweisen, dass die Berührungstransformationsgruppe (30) irreducibel ist.

Zu diesem Zwecke suchen wir in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$, z alle vollständigen Systeme, welche die Gruppe (30) gestatten.

Ist: $A_1 f = 0$, $A_2 f = 0, \cdots$ ein derartiges vollständiges System, so denken wir uns dasselbe nach sovielen Differentialquotienten von f aufgelöst, als es unabhängige Gleichungen enthält; das aufgelöste vollständige System muss dann insbesondere die $n+1$ infinitesimalen Transformationen: $r, p_1, \cdots p_n$ gestatten, also müssen alle seine Coefficienten von $z, x_1 \cdots x_n$ frei sein (vgl. Abschn. I, Theorem 20, S. 140). Wir können daher von vornherein annehmen, dass auch in den Gleichungen: $A_1 f = 0$, $A_2 f = 0, \cdots$ des nicht aufgelösten vollständigen Systems alle Coefficienten von $z, x_1 \cdots x_n$ frei sind.

Es sei nun:

$$(36) \qquad \sum_1^n{}_i \left(\lambda_i(y_1 \cdots y_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu_i(y_1 \cdots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i} \right) + \nu(y_1 \cdots y_n) \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

irgend eine Gleichung des vollständigen Systems: $A_1 f = 0, \cdots$, dann erkennen wir durch Anwendung der infinitesimalen Transformationen: $y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i + y_i y_\varkappa r$, dass auch alle Gleichungen von der Form:

$$\mu_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_\varkappa} + y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial z} \right) + \mu_\varkappa \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots n)$$

dem Systeme angehören. Verschwänden hier nicht alle μ_i, so enthielte das System offenbar die n Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} + y_n \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

ausserdem enthielte es, weil es die n infinitesimalen Transformationen: $x_i q_i + \frac{1}{2} x_i^2 r$ gestatten muss, die Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0, \cdots \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0,$$

und endlich, weil es ein vollständiges System ist, auch noch die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \ \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

es besässe also ausser der nichtssagenden Lösung: $f = \text{const.}$ gar keine Lösung und wäre überhaupt kein eigentliches vollständiges System. Demnach müssen in der Gleichung (36) die Coefficienten $\mu_1 \cdots \mu_n$ alle verschwinden, oder was auf dasselbe hinauskommt: das vollständige System: $A_1 f = 0, \cdots$ ist von den n Differentialquotienten:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial y_n}$$

frei.

Wir sehen hieraus, dass jedes vollständige System, welches die Gruppe (30) gestattet, die n Lösungen: $y_1, \cdots y_n$ besitzt; weil es nun aber die infinitesimalen Transformationen: $x_i q_i + \frac{1}{2} x_i^2 r$ gestattet, muss es zu gleicher Zeit die n Lösungen:

$$x_i \frac{\partial y_i}{\partial y_i} + \frac{1}{2} x_i^2 \frac{\partial y_i}{\partial z} = x_i \qquad (i = 1 \cdots n)$$

besitzen, und da es nicht $2n + 1$ unabhängige Lösungen haben kann, muss es die Form:

$$(37) \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

haben. Man erkennt überdies sofort, dass die Gleichung (37) wirklich die Gruppe (30) gestattet.

Die Gleichung (37) *ist demnach das einzige vollständige System in den Veränderlichen:* $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$, z, *welches bei der Gruppe* (30) *invariant bleibt.*

Nunmehr ist nach Theorem 60, S. 377 die Irreducibilität der Berührungstransformationsgruppe (30) klar, denn die $2n$ unabhängigen Lösungen: $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$ des einzigen bei der Gruppe invarianten vollständigen Systems (37) liegen augenscheinlich nicht paarweise in Involution. Damit ist zugleich bewiesen, dass alle Berührungstransformationsgruppen, welche die auf S. 486 angegebenen Eigenschaften besitzen, irreducibel sind.

Die Ergebnisse des gegenwärtigen Paragraphen können unter Berücksichtigung der früheren Entwickelungen die folgende Fassung erhalten:

Theorem 78.*) *Enthält eine endliche continuirliche Berührungstransformationsgruppe des Raumes* z, $x_1 \cdots x_n$, *deren infinitesimale Transformationen sich in der Umgebung von:* $x_i = y_i = z = 0$ *regulär verhalten,* $(n+1)(2n+1)$ *infinitesimale Transformationen von der Form:*

$$\begin{gathered} p_i + \cdots, \quad q_i + \cdots, \quad r + \cdots \\ (x_i + \alpha_i z)q_\varkappa + (x_\varkappa + \alpha_\varkappa z)q_i + \cdots, \quad (y_i + \beta_i z)p_\varkappa + (y_\varkappa + \beta_\varkappa z)p_i + \cdots \\ (x_i + \alpha_i z)p_\varkappa - (y_\varkappa + \beta_\varkappa z)q_i + \cdots \\ {\scriptstyle (i,\ \varkappa = 1 \cdots n)}, \end{gathered}$$

enthält sie dagegen keine infinitesimale Transformation von erster Ordnung in den x, y, z, *welche die Form:*

$$\vartheta \left\{ \sum_1^n {}_\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr \right\} + \sum_1^n {}_\nu (\delta_\nu z p_\nu + \varepsilon_\nu z q_\nu) + \cdots$$

besitzt, so ist sie $(n+1)(2n+1)$*-gliedrig, sie ist ausserdem irreducibel und mit der irreducibeln Berührungstransformationsgruppe:*

$$(30) \qquad \boxed{\begin{gathered} p_i, \quad q_i + x_i r, \quad r \\ x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i + x_i x_\varkappa r, \quad x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i, \quad y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i + y_i y_\varkappa r \\ {\scriptstyle (i,\ \varkappa = 1 \cdots n)} \end{gathered}}$$

*) Der Bequemlichkeit wegen sprechen wir dieses und die folgenden Theoreme nur für das Werthsystem: $x_i = y_i = z = 0$ aus; will man sie für ein Werthsystem x_i^0, y_i^0, z^0 von allgemeiner Lage aussprechen, so hat man nur überall für x_i, y_i, z bezüglich zu schreiben: $x_i - x_i^0$, $y_i - y_i^0$, $z - z^0$.

durch eine Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ ähnlich.

Wir wollen noch erwähnen, dass die Gruppe (30) als Gruppe von Punkttransformationen des Raumes $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z$ imprimitiv ist, allerdings nur in einer Weise; sie lässt ja die Gleichung (37) invariant und transformirt daher die $2n$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n$ für sich. Die Gruppe ist sogar systatisch, denn sie hat eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation, nämlich r (s. Abschn. I, S. 510, Satz 3).

§ 118.

Zweiter Fall.

Hier sollen alle diejenigen Berührungstransformationsgruppen mit $(n+1)(2n+1)+1$ Parametern bestimmt werden, welche in der Umgebung des Werthsystems: $x_i = y_i = z = 0$ von allgemeiner Lage $2n+1$ infinitesimale Transformationen nullter Ordnung von der Form (11) (s. S. 470) und $n(2n+1)+1$ Transformationen erster Ordnung von der Form (II) (s. S. 475) enthalten.

Wie im vorigen Paragraphen setzen wir:

$$(38) \quad \begin{cases} -r + \cdots = N, \quad -q_i + \cdots = X_i, \quad p_i + \cdots = Y_i, \\ \qquad -(x_i + \alpha_i z)q_\varkappa - (x_\varkappa + \alpha_\varkappa z)q_i + \cdots = X_{i\varkappa} \\ \qquad (x_i + \alpha_i z)p_\varkappa - (y_\varkappa + \beta_\varkappa z)q_i + \cdots = T_{i\varkappa} \\ \qquad (y_i + \beta_i z)p_\varkappa + (y_\varkappa + \beta_\varkappa z)p_i + \cdots = Y_{i\varkappa} \\ \qquad\qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n), \end{cases}$$

ausserdem bezeichnen wir noch die infinitesimale Transformation:

$$\sum_1^n{}^{\nu} \{(x_\nu + \alpha_\nu z)p_\nu + (y_\nu + \beta_\nu z)q_\nu\} + 2z\left\{r - \sum_1^n{}^{\nu} (\alpha_\nu p_\nu + \beta_\nu q_\nu)\right\} + \cdots$$

kurz mit U.

Zwischen den infinitesimalen Transformationen erster Ordnung $X_{i\varkappa}, T_{i\varkappa}, Y_{i\varkappa}, U$ bestehen ausser den Relationen (23) auf S. 486 noch die folgenden:

$$(39) \qquad (X_{i\varkappa} U) = (T_{i\varkappa} U) = (Y_{i\varkappa} U) = 0 \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n).$$

Die X_i und Y_i normiren wir so, dass die Gleichungen:

$$(40) \qquad (X_i U) = X_i, \quad (Y_i U) = Y_i \qquad (i = 1 \cdots n)$$

erfüllt sind. Ferner bilden wir, indem wir unter $S_{\varkappa j}$ eine beliebige der Transformationen: $X_{\varkappa j}, T_{\varkappa j}, Y_{\varkappa j}$ verstehen, die Identität:

$$((X_i U) S_{\varkappa j}) + ((U S_{\varkappa j}) X_i) + ((S_{\varkappa j} X_i) U) = 0.$$

Hier verschwindet das zweite Glied identisch, es wird also:

$$(X_i S_{\varkappa j}) = -((S_{\varkappa j} X_i) U).$$

Nun aber hat $(X_i S_{\varkappa j})$ die Form:

$$\sum_1^n {}_\nu (\sigma_\nu X_\nu + \tau_\nu Y_\nu) + \sum_{i\varkappa}^{1\cdots n} \{\lambda_{i\varkappa} X_{i\varkappa} + \mu_{i\varkappa} T_{i\varkappa} + \nu_{i\varkappa} Y_{i\varkappa}\} + \varrho U,$$

wo wir die Coefficienten σ_ν, τ_ν berechnen können, also wird:

$$-((S_{\varkappa j} X_i) U) = \sum_1^n {}_\nu (\sigma_\nu X_\nu + \tau_\nu Y_\nu) = (X_i S_{\varkappa j}).$$

Auf diese Weise finden wir:

$$(41) \quad \begin{cases} (X_i X_{\varkappa j}) = 0, & (X_i T_{\varkappa j}) = -\varepsilon_{ij} X_\varkappa, \quad (X_i Y_{\varkappa j}) = -\varepsilon_{i\varkappa} Y_j - \varepsilon_{ij} Y_\varkappa \\ (Y_i Y_{\varkappa j}) = 0, & (Y_i T_{\varkappa j}) = \varepsilon_{i\varkappa} Y_j, \quad (Y_i X_{\varkappa j}) = \varepsilon_{i\varkappa} X_j + \varepsilon_{ij} X_\varkappa \end{cases}$$
$$(i, \varkappa, j = 1 \cdots n).$$

Die Identitäten:

$$((X_i X_\varkappa) U) - 2(X_i X_\varkappa) = 0, \quad ((Y_i X_\varkappa) U) - 2(Y_i X_\varkappa) = 0$$
$$(i \neq \varkappa)$$

zeigen, dass $(X_i X_\varkappa)$ und $(Y_i X_\varkappa)$, welche beide nur Glieder mit X_ν, Y_ν, $X_{\nu\pi}$, $T_{\nu\pi}$, $Y_{\nu\pi}$, U enthalten (vgl. S. 491), verschwinden. Ebenso ist: $(Y_i Y_\varkappa) = 0$.

Die Transformation N normiren wir wie auf S. 491 so, dass $(Y_1 X_1) = N$ wird, dann beweist die Identität:

$$((Y_1 T_{1i}) X_i) - (Y_1 X_1) = 0 \qquad (i > 1)$$

sofort, dass $(Y_i X_i) = (Y_1 X_1) = N$ ist. Weiter bilden wir:

$$((Y_1 X_1) U) - 2(Y_1 X_1) = 0$$
$$((Y_1 X_1) S_{i\varkappa}) + ((X_1 S_{i\varkappa}) Y_1) + ((S_{i\varkappa} Y_1) X_1) = 0$$

und finden durch Ausrechnung, dass der Ausdruck:

$$((X_1 S_{i\varkappa}) Y_1) + ((S_{i\varkappa} Y_1) X_1)$$

immer verschwindet, wir bekommen somit:

$$(NU) = 2N, \quad (NS_{i\varkappa}) = 0.$$

Endlich ergiebt sich aus:

$$((NX_i) U) + ((X_i U) N) + ((UN) X_i) = 0$$

die Gleichung:

$$((NX_i) U) = 3(NX_i),$$

also ist: $(NX_i) = 0$ und ebenso: $(NY_i) = 0$.

Wir haben demnach:

$$(42)\quad \begin{cases} (X_i U) = X_i, \quad (Y_i U) = Y_i, \quad (NU) = 2N \\ (NX_{i\varkappa}) = 0, \quad (NT_{i\varkappa}) = 0, \quad (NY_{i\varkappa}) = 0 \\ (X_i X_\varkappa) = 0, \quad (Y_i X_\varkappa) = \varepsilon_{i\varkappa} N, \quad (Y_i Y_\varkappa) = 0 \\ (X_i N) = (Y_i N) = 0 \\ (i, \varkappa = 1 \cdots n). \end{cases}$$

Damit sind alle Relationen zwischen den infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppen auf eine kanonische Form gebracht.

Die $(n+1)(2n+1)$ infinitesimalen Transformationen N, X_i, Y_i, $X_{i\varkappa}$, $T_{i\varkappa}$, $Y_{i\varkappa}$ erzeugen augenscheinlich eine Untergruppe, welche nach den Entwickelungen des vorigen Paragraphen durch eine geeignete Berührungstransformation:

$$(43)\qquad x_i' = \mathsf{A}_i(x, y, z), \quad y_i' = \mathsf{B}_i(x, y, z), \quad z' = \Gamma(x, y, z) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

auf die Form:

$$N = -r', \quad X_i = -(q_i' + x_i' r'), \quad Y_i = p_i'$$
$$X_{i\varkappa} = -(x_i' q_\varkappa' + x_\varkappa' q_i' + x_i' x_\varkappa' r'), \quad Y_{i\varkappa} = y_i' p_\varkappa' + y_\varkappa' p_i' + y_i' y_\varkappa' r'$$
$$T_{i\varkappa} = x_i' p_\varkappa' - y_\varkappa' q_i'$$

gebracht werden kann. Dabei können wir voraussetzen, dass die x', y', z' zugleich mit den x, y, z verschwinden und dass sowohl die x', y', z' gewöhnliche Potenzreihen der x, y, z sind als auch die x, y, z gewöhnliche Potenzreihen der x', y', z'.

Bei der Berührungstransformation (43) erhält die infinitesimale Transformation U eine gewisse neue Form:

$$U = \sum_1^n {}_\nu (\xi_\nu p_\nu' + \eta_\nu q_\nu') + \zeta r',$$

welche den Relationen:

$$(Y_i U) = Y_i, \quad (X_i U) = X_i, \quad (NU) = 2N, \quad (T_{ii} U) = 0$$

genügen muss; für ξ_ν, η_ν, ζ ergeben sich daher die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_i'} = \varepsilon_{i\nu}, \quad \frac{\partial \eta_\nu}{\partial x_i'} = \frac{\partial \zeta}{\partial x_i'} = 0, \quad \frac{\partial \xi_\nu}{\partial z'} = \frac{\partial \eta_\nu}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z'} = 2$$

$$\frac{\partial \xi_\nu}{\partial y_i'} + x_i' \frac{\partial \xi_\nu}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial \eta_\nu}{\partial y_i'} + x_i' \frac{\partial \eta_\nu}{\partial z'} = \varepsilon_{i\nu}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y_i'} + x_i' \frac{\partial \zeta}{\partial z'} = \xi_i + x_i'$$

$$x_i' \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_i'} - y_i' \frac{\partial \xi_\nu}{\partial y_i'} = \varepsilon_{i\nu} \xi_\nu, \quad x_i' \frac{\partial \eta_\nu}{\partial x_i'} - y_i' \frac{\partial \eta_\nu}{\partial y_i'} = -\varepsilon_{i\nu} \eta_\nu,$$

durch deren Integration man findet:

$$\xi_\nu = x_\nu', \quad \eta_\nu = y_\nu', \quad \zeta = 2(z' + c).$$

Nun aber muss U auch in den x', y', z' eine infinitesimale Transformation von erster Ordnung sein (vgl. S. 494 f.), also muss c verschwinden und wir bekommen:

$$U = \sum_1^n {}_\nu (x'_\nu p'_\nu + y'_\nu q'_\nu) + 2z'r'.$$

Dieser Ausdruck genügt offenbar auch allen andern Relationen, welche wir oben zwischen U und den übrigen infinitesimalen Transformationen gefunden haben.

Durch das Vorstehende ist bewiesen, dass jede Berührungstransformationsgruppe G, welche die auf S. 501 angegebenen Eigenschaften besitzt, mit der Gruppe:

$$(44)\qquad \boxed{\begin{gathered} p_i, \quad q_i + x_i r, \quad r, \quad \sum_1^n {}_\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr \\ x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i + x_i x_\varkappa r, \quad x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i, \quad y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i + y_i y_\varkappa r \\ (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{gathered}}$$

vermöge einer Berührungstransformation ähnlich ist.

Die Gruppe (44) ist eine Berührungstransformationsgruppe, denn sie ist von lauter infinitesimalen Berührungstransformationen erzeugt; die zu diesen gehörigen charakteristischen Functionen sind, von der Reihenfolge und von Zahlenfaktoren abgesehen, die nachstehenden:

$$(45)\qquad \boxed{\begin{gathered} 1, \ x_i, \ y_i, \ z - \tfrac{1}{2}(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n), \ x_i x_\varkappa, \ x_i y_\varkappa, \ y_i y_\varkappa \\ (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{gathered}}\,.$$

Die Gruppe (44) ist überdies irreducibel, sie enthält ja eine irreducible Untergruppe, nämlich die Gruppe (30) auf S. 500.

Damit haben wir das Theorem:

Theorem 79. *Enthält eine endliche continuirliche Berührungstransformationsgruppe des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$, deren infinitesimale Transformationen sich in der Umgebung von $x_i = y_i = z = 0$ regulär verhalten, $(n+1)(2n+1)+1$ infinitesimale Transformationen von der Form:*

$$p_i + \cdots, \quad q_i + \cdots, \quad r + \cdots$$
$$(x_i + \alpha_i z) q_\varkappa + (x_\varkappa + \alpha_\varkappa z) q_i + \cdots, \quad (y_i + \beta_i z) p_\varkappa + (y_\varkappa + \beta_\varkappa z) p_i + \cdots$$
$$(x_i + \alpha_i z) p_\varkappa - (y_\varkappa + \beta_\varkappa z) q_i + \cdots$$
$$\sum_1^n {}_\nu \{(x_\nu + \alpha_\nu z) p_\nu + (y_\nu + \beta_\nu z) q_\nu\} + 2z\left\{r - \sum_1^n {}_\nu (\alpha_\nu p_\nu + \beta_\nu q_\nu)\right\} + \cdots$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots n),$$

enthält sie dagegen keine infinitesimale Transformation von erster Ordnung in den x, y, z, welche die Form hat:

$$\sum_1^n {}_\nu (\delta_\nu . zp_\nu + \varepsilon_\nu . zq_\nu) + \cdots,$$

so hat sie gerade $(n+1)(2n+1)+1$ Parameter, sie ist ausserdem irreducibel und mit der irreducibeln Berührungstransformationsgruppe:

$$\boxed{\begin{array}{c} p_i, \quad q_i + x_i r, \quad r, \quad \sum_1^n {}_\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr \\ x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i + x_i x_\varkappa r, \quad x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i, \quad y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i + y_i y_\varkappa r \\ (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{array}} \tag{44}$$

durch eine Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ ähnlich.

Als Gruppe von Punkttransformationen des Raumes $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$, z ist die Gruppe (44) imprimitiv, denn sie lässt ebenso wie die Gruppe (30) auf S. 500 die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

invariant, es ist diese Gleichung aber natürlich das einzige bei der Gruppe (44) invariante vollständige System in den Veränderlichen x, y, z. Selbstverständlich ist auch, dass es ausser der bekannten Gleichung: $dz - y_1 dx_1 - \cdots - y_n dx_n = 0$ keine andere Pfaffsche Gleichung giebt, welche bei der Gruppe (44) invariant bleibt.

§ 119.

Letzter Fall.

Gesucht werden alle Berührungstransformationsgruppen, welche $(n+1)(2n+3)$ Parameter haben und in der Umgebung des Werthsystems $x_i = y_i = z = 0$ von allgemeiner Lage $(2n+1)$ infinitesimale Transformationen nullter Ordnung von der Form (11) (s. S. 470), $(n+1)(2n+1)$ solche erster Ordnung von der Form (IV) (s. S. 475) und endlich eine zweiter Ordnung von der Form:

$$\sum_1^n {}_\nu (zx_\nu p_\nu + zy_\nu q_\nu) + z^2 r + \cdots.$$

Wir setzen entsprechend den in den §§ 117 und 118 gebrauchten Bezeichnungen:

$$-r+\cdots=N,\quad -q_i+\cdots=X_i,\quad p_i+\cdots=Y_i$$

$$\sum_1^n{}_\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr + \cdots = U$$

$$-(x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i) + \cdots = X_{i\varkappa},\quad y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i + \cdots = Y_{i\varkappa}$$

$$x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i + \cdots = T_{i\varkappa}$$

und erinnern daran (s. S. 480), dass die zu diesen infinitesimalen Transformationen gehörigen charakteristischen Functionen bezüglich die Form haben:

$$1+\cdots,\quad x_i+\cdots,\quad y_i+\cdots,\quad -2z+\cdots$$

$$x_i x_\varkappa+\cdots,\quad y_i y_\varkappa+\cdots,\quad x_i y_\varkappa+\cdots.$$

Ferner führen wir noch die Bezeichnungen ein:

$$-zq_i+\cdots=Z_{x_i},\quad zp_i+\cdots=Z_{y_i},$$

$$-\sum_1^n{}_\nu (zx_\nu p_\nu + zy_\nu q_\nu) - z^2 r + \cdots = V$$

$$(i=1\cdots n).$$

Die infinitesimalen Transformationen Z_{x_i}, Z_{y_i} und V haben dann die charakteristischen Functionen:

$$zx_i+\cdots,\quad zy_i+\cdots,\quad z^2+\cdots.$$

Endlich wollen wir noch festsetzen, dass wir unter $S_{i\varkappa}$ irgend eine der Transformationen: $X_{i\varkappa}$, $T_{i\varkappa}$, $Y_{i\varkappa}$ verstehen und unter $\mathfrak{Z}_i$ irgend eine der Transformationen: Z_{x_i}, Z_{y_i}.

Gewisse Relationen zwischen den infinitesimalen Transformationen $S_{i\varkappa}$, U, $\mathfrak{Z}_j$, V können wir sofort angeben. Wenn wir blos die Form der infinitesimalen Transformationen ins Auge fassen, erhalten wir:

$$(46)\quad \begin{cases} (X_{i\varkappa}V)=(T_{i\varkappa}V)=(Y_{i\varkappa}V)=0 \\ (UV)=2V,\quad (Z_{x_i}V)=(Z_{y_i}V)=0 \\ (i,\varkappa=1\cdots n). \end{cases}$$

Berücksichtigen wir aber auch die Form der charakteristischen Functionen, so bekommen wir noch:

$$(47)\quad \begin{cases} (Z_{x_i}X_{\varkappa j})=0,\quad (Z_{y_i}Y_{\varkappa j})=0 \\ (Z_{x_i}T_{\varkappa j})=-\varepsilon_{ij}Z_{x_\varkappa},\quad (Z_{y_i}T_{\varkappa j})=\varepsilon_{i\varkappa}Z_{y_j} \\ (Z_{x_i}Y_{\varkappa j})=-\varepsilon_{i\varkappa}Z_{y_j}-\varepsilon_{ij}Z_{y_\varkappa},\quad (Z_{y_i}X_{\varkappa j})=\varepsilon_{i\varkappa}Z_{x_j}+\varepsilon_{ij}Z_{x_\varkappa} \\ (Z_{x_i}Z_{x_\varkappa})=0,\quad (Z_{y_i}Z_{x_\varkappa})=\varepsilon_{i\varkappa}V,\quad (Z_{y_i}Z_{y_\varkappa})=0 \\ (i,\varkappa=1\cdots n) \end{cases}$$

und ausserdem noch die Relationen (23) auf S. 486.

Der Ausdruck $(S_{i\varkappa} U)$ hat die Form: $\lambda_{i\varkappa} V$, in der Identität:

$$((S_{i\varkappa} S_{\nu\pi}) U) + ((S_{\nu\pi} U) S_{i\varkappa}) + ((U S_{i\varkappa}) S_{\nu\pi}) = 0$$

verschwinden daher wegen der Relationen (46) die beiden letzten Glieder identisch, es ist also immer:

$$((S_{i\varkappa} S_{\nu\pi}) U) = 0\,.$$

Nun aber zeigen die vorhin angeführten Formeln (23), dass jede Transformation $S_{\varrho\tau}$ bei geeigneter Wahl der Transformationen $S_{i\varkappa}$ und $S_{\nu\pi}$ in der Form $(S_{i\varkappa} S_{\nu\pi})$ dargestellt werden kann, also ist $(S_{\varrho\tau} U)$ immer gleich Null. Andrerseits folgt aus der Identität:

$$((Z_{x_i} T_{ii}) U) + ((U Z_{x_i}) T_{ii}) = 0$$

wegen der Relationen (47) sofort:

$$(Z_{x_i} U) = ((U Z_{x_i}) T_{ii})\,,$$

es ist aber: $(Z_{x_i} U) = - Z_{x_i} + \mu_i V$, also wird:

$$(Z_{x_i} U) = (Z_{x_i} T_{ii}) = - Z_{x_i}$$

und ebenso: $(Z_{y_i} U) = - Z_{y_i}$. Damit haben wir:

$$(48) \qquad \begin{cases} (X_{i\varkappa} U) = (T_{i\varkappa} U) = (Y_{i\varkappa} U) = 0 \\ (Z_{x_i} U) = - Z_{x_i}, \quad (Z_{y_i} U) = - Z_{y_i} \\ \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n)\,. \end{cases}$$

Nunmehr müssen wir suchen die infinitesimalen Transformationen N, Y_i, X_i in solcher Weise zu normiren, dass sie mit den übrigen infinitesimalen Transformationen und unter einander durch möglichst einfache Relationen verknüpft sind.

Es ist:

$$(N U) = 2N + \sum \beta_{i\varkappa} S_{i\varkappa} + \sum \gamma_i \mathfrak{Z}_i + \delta U + \varepsilon V$$

oder wenn wir:

$$N + \tfrac{1}{2}\Big(\sum \beta_{i\varkappa} S_{i\varkappa} + \delta U\Big) + \tfrac{1}{3} \sum \gamma_i \mathfrak{Z}_i + \tfrac{1}{4} \varepsilon V$$

als neues N einführen:

$$(N U) = 2N.$$

Ausserdem ist:

$$(N V) = U + \alpha V,$$

die Identität:

$$((N V) U) - 2(V N) - 2(N V) = 0$$

zeigt aber, dass α verschwindet. Bilden wir überdies die Identität:

$$((N S_{i\varkappa}) U) - 2(N S_{i\varkappa}) = 0,$$

so finden wir, dass $(N S_{i\varkappa})$, welches die Form:

$$\sum \lambda_{\nu\pi} S_{\nu\pi} + \sum \mu_\pi \mathfrak{Z}_\pi + \varrho U + \sigma V$$

besitzt, gleich Null ist. Kurz wir bekommen:

$$(49)\quad \begin{cases} (NU) = 2N, \quad (NV) = 2U \\ (NX_{i\varkappa}) = (NT_{i\varkappa}) = (NY_{i\varkappa}) = 0 \\ \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n). \end{cases}$$

Die Y_i, X_i normiren wir derart, dass:

$$(50)\quad (NZ_{x_i}) = -X_i, \quad (NZ_{y_i}) = -Y_i \quad (i = 1 \cdots n)$$

wird, dann können wir in der Identität:

$$((N\mathfrak{Z}_i)S_{\varkappa j}) + ((\mathfrak{Z}_i S_{\varkappa j})N) + ((S_{\varkappa j}N)\mathfrak{Z}_i) = 0$$

die letzten beiden Glieder immer berechnen und finden so die Werthe von $(X_i S_{\varkappa j})$ und $(Y_i S_{\varkappa j})$, nämlich:

$$(51)\quad \begin{cases} (X_i X_{\varkappa j}) = 0, \quad (X_i T_{\varkappa j}) = -\varepsilon_{ij} X_\varkappa, \quad (X_i Y_{\varkappa j}) = -\varepsilon_{i\varkappa} Y_j - \varepsilon_{ij} Y_\varkappa \\ (Y_i Y_{\varkappa j}) = 0, \quad (Y_i T_{\varkappa j}) = \varepsilon_{i\varkappa} Y_j, \quad (Y_i X_{\varkappa j}) = \varepsilon_{i\varkappa} X_j + \varepsilon_{ij} X_\varkappa \\ \qquad (i, \varkappa, j = 1 \cdots n). \end{cases}$$

Geradeso liefern die Identitäten:

$$((N\mathfrak{Z}_i)V) + ((\mathfrak{Z}_i V)N) + ((VN)\mathfrak{Z}_i) = 0$$
$$((N\mathfrak{Z}_i)U) + ((\mathfrak{Z}_i U)N) + ((UN)\mathfrak{Z}_i) = 0$$

die Relationen:

$$(52)\quad \begin{cases} (X_i V) = -Z_{x_i}, \quad (Y_i V) = -Z_{y_i} \\ (X_i U) = X_i, \quad (Y_i U) = Y_i \\ \qquad (i = 1 \cdots n). \end{cases}$$

Aus der Identität:

$$((Y_i Z_{y_\varkappa}) T_{jj}) + \varepsilon_{\varkappa j}(Z_{y_\varkappa} Y_i) - \varepsilon_{ij}(Y_i Z_{y_\varkappa}) = 0$$

erhellt, dass in:

$$(Y_i Z_{y_\varkappa}) = \sum \alpha'_{\nu\pi} S_{\nu\pi} + \sum \beta'_\nu \mathfrak{Z}_\nu + \gamma' U + \delta' V$$

alle Glieder wegfallen bis auf eins, es wird nämlich:

$$(Y_i Z_{y_\varkappa}) = \alpha'_{i\varkappa} Y_{i\varkappa}.$$

Ferner ist:

$$((NZ_{y_i})Z_{x_\varkappa}) - \varepsilon_{i\varkappa}(NV) + (X_\varkappa Z_{y_i}) = 0$$
$$((Y_i Z_{y_\varkappa})X_{\varkappa\varkappa}) - 2(Y_i Z_{x_\varkappa}) - 2\varepsilon_{i\varkappa}(X_\varkappa Z_{y_\varkappa}) = 0$$

und somit:

$$-(Y_i Z_{x_\varkappa}) + (X_\varkappa Z_{y_i}) = \varepsilon_{i\varkappa} U$$
$$(Y_i Z_{x_\varkappa}) + \varepsilon_{i\varkappa}(X_\varkappa Z_{y_i}) = \alpha'_{i\varkappa}(1 + \varepsilon_{i\varkappa}) T_{\varkappa i},$$

woraus sich durch Auflösung ergiebt:

$$(Y_i Z_{x_\varkappa}) = \alpha'_{i\varkappa} T_{\varkappa i} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{i\varkappa} U$$

$$(X_\varkappa Z_{y_i}) = \alpha'_{i\varkappa} T_{\varkappa i} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{i\varkappa} U.$$

Schliesslich stellen wir die Identität:

$$((X_\varkappa Z_{y_i}) X_{ii}) - 2(X_\varkappa Z_{x_i}) = 0$$

auf und finden daraus:

$$(X_\varkappa Z_{x_i}) = \alpha'_{i\varkappa} X_{i\varkappa}.$$

Die Grösse $\alpha'_{i\varkappa}$ bestimmen wir mit Hülfe der Identität:

$$((Y_i Z_{y_\varkappa}) Z_{x_\varkappa}) - (Y_i V) - ((Y_i Z_{x_\varkappa}) Z_{y_\varkappa}) = 0,$$

durch deren Ausrechnung wir erhalten:

$$\alpha'_{i\varkappa}(1 + \varepsilon_{i\varkappa}) Z_{y_i} + Z_{y_i} + \alpha'_{i\varkappa} Z_{y_i} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{i\varkappa} Z_{y_\varkappa} = 0,$$

es wird also $\alpha'_{i\varkappa} = -\frac{1}{2}$, mag nun i gleich $\varkappa$ sein oder nicht.

Insgesammt haben wir nunmehr:

$$(53)\qquad \begin{cases} (X_i Z_{x_\varkappa}) = -\tfrac{1}{2} X_{i\varkappa}, & (X_i Z_{y_\varkappa}) = -\tfrac{1}{2} T_{i\varkappa} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{i\varkappa} U \\ (Y_i Z_{y_\varkappa}) = -\tfrac{1}{2} Y_{i\varkappa}, & (Y_i Z_{x_\varkappa}) = -\tfrac{1}{2} T_{\varkappa i} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{i\varkappa} U \\ & (i, \varkappa = 1 \cdots n). \end{cases}$$

Die Identitäten:

$$((NX_i)U) - 3(NX_i) = 0, \quad ((NY_i)U) - 3(NY_i) = 0$$

ergeben augenblicklich: $(NX_i) = (NY_i) = 0$, endlich liefert:

$$((NZ_{y_i}) X_\varkappa) + \tfrac{1}{2}(T_{\varkappa i} - \varepsilon_{i\varkappa} U, N) = 0$$

$$((NZ_{y_i}) Y_\varkappa) + \tfrac{1}{2}(Y_{i\varkappa}, N) = 0$$

noch: $(Y_i X_\varkappa) = \varepsilon_{i\varkappa} N$, $(Y_i Y_\varkappa) = 0$ und ebenso wird: $(X_i X_\varkappa) = 0$. Demnach bestehen die Relationen:

$$(54)\qquad \begin{cases} (X_i X_\varkappa) = 0, \quad (Y_i X_\varkappa) = \varepsilon_{i\varkappa} N, \quad (Y_i Y_\varkappa) = 0 \\ \qquad (NX_i) = 0, \quad (NY_i) = 0 \\ \qquad\qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n). \end{cases}$$

Jetzt liegen die Relationen zwischen den infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppen in der gewünschten einfachen Gestalt vor, es bleibt noch übrig, die infinitesimalen Transformationen selbst durch geeignete Wahl der Veränderlichen auf eine möglichst einfache Form zu bringen.

Die $(n + 1)(2n + 1) + 1$ infinitesimalen Transformationen: N, X_i, Y_i, $X_{i\varkappa}$, $T_{i\varkappa}$, $Y_{i\varkappa}$, U erzeugen augenscheinlich für sich eine Gruppe von der im vorigen Paragraphen betrachteten Beschaffenheit; diese Gruppe kann daher nach Theorem 79, S. 504 durch eine Berührungstransformation des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ auf die Form:

$$N = -r, \quad X_i = -(q_i + x_i r), \quad Y_i = p_i$$
$$X_{i\varkappa} = -(x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i + x_i x_\varkappa r), \quad Y_{i\varkappa} = y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i + y_i y_\varkappa r$$
$$T_{i\varkappa} = x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i, \quad U = \sum_1^n {}^\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots n)$$

gebracht werden. Hier sind, wie wir wissen, die Transformationen: N, X_i, Y_i, $X_{i\varkappa}$, $T_{i\varkappa}$, $Y_{i\varkappa}$, U sämmtlich infinitesimale Berührungstransformationen des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$.

Die infinitesimale Transformation Z_{y_i} erhält in den neuen Veränderlichen x, y, z eine neue Form:

$$Z_{y_i} = \sum_1^n {}^\nu (\xi_{i\nu} p_\nu + \eta_{i\nu} q_\nu) + \zeta_i r,$$

welche die Relationen:

$$(N Z_{y_i}) = -p_i, \quad (Y_j Z_{y_i}) = -\tfrac{1}{2}(y_i p_j + y_j p_i + y_i y_j r)$$
$$(X_j Z_{y_i}) = -\tfrac{1}{2}(x_j p_i - y_i q_j) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ij}\left\{\sum_1^n {}^\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr\right\}$$
$$(U Z_{y_i}) = \sum_1^n {}^\nu (\xi_{i\nu} p_\nu + \eta_{i\nu} q_\nu) + \zeta_i r$$

befriedigen muss. Wir bekommen daher für die $\xi_{i\nu}$, $\eta_{i\nu}$, ζ_i die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial z} = \varepsilon_{i\nu}, \quad \frac{\partial \eta_{i\nu}}{\partial z} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial x_j} = -\tfrac{1}{2}(\varepsilon_{i\nu} y_j + \varepsilon_{j\nu} y_i), \quad \frac{\partial \eta_{i\nu}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j} = -\tfrac{1}{2} y_i y_j$$
$$\frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial y_j} + x_j \frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial z} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{i\nu} x_j - \varepsilon_{ij} x_\nu)$$
$$\frac{\partial \eta_{i\nu}}{\partial y_j} + x_j \frac{\partial \eta_{i\nu}}{\partial z} = -\tfrac{1}{2}(\varepsilon_{\nu j} y_i + \varepsilon_{ij} y_\nu)$$
$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial y_j} + x_j \frac{\partial \zeta_i}{\partial z} - \xi_{ij} = -\varepsilon_{ij} z$$
$$\sum_1^n {}^j \left(x_j \frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial x_j} + y_j \frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial y_j}\right) + 2z \frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial z} = 2\xi_{i\nu}$$
$$\sum_1^n {}^j \left(x_j \frac{\partial \eta_{i\nu}}{\partial x_j} + y_j \frac{\partial \eta_{i\nu}}{\partial y_j}\right) + 2z \frac{\partial \eta_{i\nu}}{\partial z} = 2\eta_{i\nu}$$
$$\sum_1^n {}^j \left(x_j \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j} + y_j \frac{\partial \zeta_i}{\partial y_j}\right) + 2z \frac{\partial \zeta_i}{\partial z} = 3\zeta_i$$

und finden:

$$\xi_{i\nu} = \varepsilon_{i\nu}\left(z - \tfrac{1}{2}\sum_1^n {}^j x_j y_j\right) - \tfrac{1}{2}x_\nu y_i$$

$$\eta_{i\nu} = -\tfrac{1}{2}y_i y_\nu, \quad \zeta_i = -\tfrac{1}{2}y_i \sum_1^n {}^j x_j y_j,$$

also wird:

$$Z_{y_i} = \left(z - \tfrac{1}{2}\sum_1^n {}^j x_j y_j\right)p_i - \tfrac{1}{2}y_i\left(\sum_1^n {}^\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + \sum_1^n {}^j x_j y_j \,.\, r\right).$$

Die Transformation Z_{y_i} ist eine infinitesimale Berührungstransformation, denn bilden wir die infinitesimale Berührungstransformation, welche den Ausdruck:

$$\sum_1^n {}^\nu y_\nu \xi_{i\nu} - \zeta_i = y_i\left(z - \tfrac{1}{2}\sum_1^n {}^j x_j y_j\right)$$

zur charakteristischen Function besitzt, so erhalten wir eben die infinitesimale Transformation Z_{y_i}. Natürlich ist auch: $\frac{1}{2}(Z_{y_i} X_{ii}) = Z_{x_i}$ eine infinitesimale Berührungstransformation und da X_{ii} die charakteristische Function x_i^2 hat, so ergiebt sich für die charakteristische Function von Z_{x_i} die nachstehende Form:

$$\tfrac{1}{2}\left\{y_i\left(z - \tfrac{1}{2}\sum_1^n {}^j x_j y_j\right),\ x_i^2\right\} = x_i\left(z - \tfrac{1}{2}\sum_1^n {}^j x_j y_j\right);$$

endlich ist auch $(Z_{y_i} Z_{x_i}) = V$ eine infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Function:

$$\left\{y_i\left(z - \tfrac{1}{2}\sum_1^n {}^j x_j y_j\right),\ x_i\left(z - \tfrac{1}{2}\sum_1^n {}^j x_j y_j\right)\right\} = \left(z - \tfrac{1}{2}\sum_1^n {}^j x_j y_j\right)^2.$$

Wir sehen also, dass die infinitesimalen Transformationen der gesuchten Berührungstransformationsgruppen durch eine geeignete Berührungstransformation des Raumes in solche infinitesimale Berührungstransformationen übergeführt werden können, welche die charakteristischen Functionen:

$$\boxed{\begin{gathered} 1, \quad x_i, \quad y_i, \quad z - \tfrac{1}{2}\sum_1^n {}^\nu x_\nu y_\nu \\ x_i x_\varkappa, \quad x_i y_\varkappa, \quad y_i y_\varkappa \\ x_i\left(z - \tfrac{1}{2}\sum_1^n {}^\nu x_\nu y_\nu\right), \quad y_i\left(z - \tfrac{1}{2}\sum_1^n {}^\nu x_\nu y_\nu\right), \quad \left(z - \tfrac{1}{2}\sum_1^n {}^\nu x_\nu y_\nu\right)^2 \\ (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{gathered}} \tag{55}$$

besitzen. Man überzeugt sich überdies leicht, dass die charakteristischen Functionen (55) alle die oben aufgestellten Relationen befriedigen, wenn man nur das Zeichen ( ) durch { } ersetzt, die zu den Functionen (55) gehörigen infinitesimalen Berührungstransformationen erfüllen daher diese Relationen ebenfalls.

Die charakteristischen Functionen (55) definiren eine Berührungstransformationsgruppe des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$, welche $(n+1)(2n+3)$ Parameter enthält. Diese Gruppe ist irreducibel, denn sie enthält zwei irreducible Untergruppen, die Gruppe (30) auf S. 500 und die Gruppe (44) auf S. 504. Also haben wir das

Theorem 80. *Enthält eine endliche continuirliche Berührungstransformationsgruppe des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$, deren infinitesimale Transformationen sich in der Umgebung von $x_i = y_i = z$ regulär verhalten, $(n+2)(2n+1)$ infinitesimale Transformationen von der Form:*

$$p_i + \cdots, \quad q_i + \cdots, \quad r + \cdots, \quad \sum_1^n {}^{\nu} (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr + \cdots$$

$$x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i + \cdots, \quad x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i + \cdots, \quad y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i + \cdots$$

$$z p_i + \cdots, \quad z q_i + \cdots$$

$$(i, \varkappa = 1 \cdots n),$$

so ist sie $(n+1)(2n+3)$-gliedrig und enthält ausser den angegebenen Transformationen noch eine von der Gestalt:

$$\sum_1^n {}^{\nu} (z x_\nu p_\nu + z y_\nu q_\nu) + z^2 r + \cdots,$$

sie ist überdies irreducibel und mit der irreducibeln Berührungstransformationsgruppe:

$$(56)\quad \boxed{\begin{gathered}
p_i, \quad q_i + x_i r, \quad r, \quad \sum_1^n {}^{\nu} (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr \\
x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i + x_i x_\varkappa r, \quad x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i, \quad y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i + y_i y_\varkappa r \\
\left(z - \tfrac{1}{2} \sum_1^n {}^{\nu} x_\nu y_\nu\right)(p_i + y_i r) - \tfrac{1}{2} y_i \left(\sum_1^n {}^{\nu} (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr\right) \\
\left(z - \tfrac{1}{2} \sum_1^n {}^{\nu} x_\nu y_\nu\right) q_i + \tfrac{1}{2} x_i \left(\sum_1^n {}^{\nu} (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr\right) \\
\left(z - \tfrac{1}{2} \sum_1^n {}^{\nu} x_\nu y_\nu\right)^2 r - \left(z - \tfrac{1}{2} \sum_1^n {}^{\nu} x_\nu y_\nu\right)\left(\sum_1^n {}^{\nu} (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr\right) \\
(i, \varkappa = 1 \cdots n)
\end{gathered}}$$

durch eine Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ *ähnlich. Die charakteristischen Functionen der infinitesimalen Berührungstransformationen* (56) *haben die Form* (55).

Da die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

das einzige vollständige System in den Veränderlichen x, y, z ist, welches die Gruppe (30) auf S. 500 gestattet, und da diese Gleichung bei der Gruppe (56) augenscheinlich nicht invariant bleibt, so erkennen wir, *dass die Gruppe* (56) *als Gruppe des Raumes* $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z$ *primitiv ist.* Ausserdem ist noch zu erwähnen, dass es ausser der Gleichung:

$$dz - y_1 dx_1 - \cdots - y_n dx_n = 0$$

keine Pfaffsche Gleichung giebt, welche bei der Gruppe (56) invariant bleibt.

Nunmehr ist die Aufgabe erledigt, welche wir uns auf S. 470 gestellt haben, die daselbst definirten Berührungstransformationsgruppen sind alle gefunden. Wir können daher sagen:

Theorem 81. *Deutet man die endliche continuirliche Berührungstransformationsgruppe G des Raumes* $z, x_1 \cdots x_n$ *als eine Gruppe von Punkttransformationen des* $(2n+1)$*-fach ausgedehnten Raumes* $z, x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n$ *und verlangt man, dass G als Gruppe dieses letzteren Raumes erstens transitiv ist und dass es zweitens, sobald man einen Punkt* $z^0, x_1^0 \cdots x_n^0, y_1^0 \cdots y_n^0$ *von allgemeiner Lage festhält, die* ∞^{2n-1} *Richtungen des ebenen Bündels von Richtungen, welches diesem Punkte durch die Pfaffsche Gleichung:*

$$dz - y_1 dx_1 - \cdots - y_n dx_n = 0$$

zugeordnet wird, in möglichst allgemeiner Weise transformirt, so ergiebt sich Folgendes: Die Berührungstransformationsgruppe G ist irreducibel und hat entweder $(n+1)(2n+1)$ *oder* $(n+1)(2n+1)+1$ *oder endlich* $(n+1)(2n+3)$ *Parameter und sie ist mit einer der drei irreducibeln Berührungstransformationsgruppen:* (30) *auf S.* 500, (44) *auf S.* 504, (56) *auf S.* 512 *durch eine Berührungstransformation des Raumes* $z, x_1 \cdots x_n$ *ähnlich.*

Wir wollen jetzt die gefundenen Berührungstransformationsgruppen noch etwas näher untersuchen.

§ 120.

Die drei Berührungstransformationsgruppen des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$, welche wir gefunden haben, sind sämmtlich irreducibel, es bleibt daher bei keiner unter ihnen eine solche Schaar von ∞^{n+1} Element-M_n des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ invariant, deren Elemente $z, x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n$ keine Relation von der Form:

$$\Omega(z, x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n) = 0$$

befriedigen (vgl. S. 376). Dagegen kann es sehr gut andere Schaaren von Element-M_n geben, welche bei unsern Gruppen invariant bleiben, namentlich ist es wünschenswerth, unter den betreffenden Schaaren diejenigen zu kennen, welche möglichst wenige Parameter enthalten. Wir wollen die hiermit bezeichnete Aufgabe wenigstens für den Fall vollständig erledigen, dass die invariante Schaar von Element-M_n aus lauter n-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten von der Form:

$$z = \Phi(x_1 \cdots x_n)$$

besteht.

Gestattet eine Schaar von Punktmannigfaltigkeiten des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ die Berührungstransformationsgruppe (30) auf S. 500, so gestattet sie insbesondere auch alle in dieser Gruppe enthaltenen infinitesimalen Punkttransformationen des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$, unter anderen also die nachstehenden:

$$\frac{\partial f}{\partial z}, \quad x_i \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x_i x_\varkappa \frac{\partial f}{\partial z} \tag{57}$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots n).$$

Ist demnach: $z = \Phi(x_1 \cdots x_n)$ eine Mannigfaltigkeit der Schaar, so müssen zugleich alle Mannigfaltigkeiten, welche aus: $z = \Phi$ durch Ausführung der eingliedrigen Gruppen (57) entstehen, der Schaar angehören. Ausser: $z = \Phi$ muss also die Schaar auch noch alle Mannigfaltigkeiten von der Gestalt:

$$z = \Phi(x_1 \cdots x_n) + a + \sum_1^n {}_i\, b_i x_i + \sum_1^n {}_i \sum_1^i {}_\varkappa\, c_{i\varkappa} x_i x_\varkappa \tag{58}$$

enthalten, unter den a, b_i, $c_{i\varkappa}$ willkürliche Parameter verstanden.

Hiermit ist nachgewiesen, dass unsre Gruppe (30) keine Schaar von Mannigfaltigkeiten von der Form:

$$z = \Phi(x_1 \cdots x_n, a_1, a_2 \cdots)$$

invariant lässt, in welcher die Zahl der Parameter: $a_1, a_2 \cdots$ kleiner ist als:

$$1 + n + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Vielleicht giebt es aber invariante Schaaren mit gerade $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Parametern, wir müssen zusehen.

Giebt es eine invariante Schaar mit $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Parametern, so muss dieselbe nothwendig die Form (58) besitzen, wo die Function Φ von den Parametern $a, b_i, c_{i\varkappa}$ unabhängig ist. Nun enthält die Gruppe (30) ausser den infinitesimalen Punkttransformationen (57) noch die folgenden:

(59) $$\frac{\partial f}{\partial x_\mu}, \quad x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \qquad (\mu, \nu = 1 \cdots n).$$

Soll aber die Schaar (58) die infinitesimalen Transformationen (59) gestatten, so ist nach Abschnitt I, S. 467 nothwendig und hinreichend, dass es in den $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Veränderlichen $a, b_i, c_{i\varkappa}$ gewisse infinitesimale Transformationen: $A_\mu f, A_{\nu\mu} f$ giebt, welche so beschaffen sind, dass die Gleichung (58) in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n, a, b_i, c_{i\varkappa}$ die infinitesimalen Transformationen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\mu} + A_\mu f, \quad x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\mu} + A_{\nu\mu} f$$

gestattet. Berücksichtigt man, dass Φ von den $a, b_i, c_{i\varkappa}$ nicht abhängt, so erkennt man zunächst, dass die $A_\mu f$ und $A_{\nu\mu} f$ den $a, b_i, c_{i\varkappa}$ solche unendlich kleine Zuwachse ertheilen müssen, welche von den $a, b_i, c_{i\varkappa}$ linear abhängen, zugleich sieht man, dass die Function Φ Bedingungen von der Form:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} = \alpha + \sum_1^n {}_i\, \beta_i x_i + \sum_1^n {}_i \sum_1^i {}_\varkappa\, \gamma_{i\varkappa} x_i x_\varkappa$$

$$x_\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} = \alpha' + \sum_1^n {}_i\, \beta_i' x_i + \sum_1^n {}_i \sum_1^i {}_\varkappa\, \gamma_{i\varkappa}' x_i x_\varkappa$$

befriedigen muss, wo die $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ Constanten bezeichnen. Demnach hat Φ selbst die Form:

$$\Phi = \alpha'' + \sum_1^n {}_i\, \beta_i'' x_i + \sum_1^n {}_i \sum_1^i {}_\varkappa\, \gamma_{i\varkappa}'' x_i x_\varkappa$$

und es ergiebt sich, dass jede etwa vorhandene invariante Schaar mit $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Parametern die Gestalt:

(60) $$z = \mathfrak{a} + \sum_1^n {}_i\, \mathfrak{b}_i x_i + \sum_{i\varkappa}^{1 \cdots n} \mathfrak{c}_{i\varkappa} x_i x_\varkappa$$

haben muss, wo wir $\mathfrak{c}_{i\varkappa} = \mathfrak{c}_{\varkappa i}$ annehmen können. Von der Schaar (60) steht dann jedenfalls fest, dass sie bei den infinitesimalen Transformationen (57) und (59) invariant bleibt.

Die Gleichung (60) mit den Parametern $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_{i\varkappa}$ stellt die allgemeinste Lösung des folgenden Systems von Differentialgleichungen dar:

$$(61) \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x_i \partial x_\varkappa \partial x_j} = 0 \qquad (i, \varkappa, j = 1 \cdots n).$$

Hieraus folgt, dass das System (61) die infinitesimalen Transformationen (57) und (59) gestattet. Wollen wir andrerseits wissen, ob die Schaar der Mannigfaltigkeiten (60) auch noch die übrigen infinitesimalen Transformationen:

$$(62) \qquad y_i \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa} + y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial x_i} + y_i y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n)$$

der Gruppe (30) gestattet, so brauchen wir nur zu untersuchen, ob das System der Differentialgleichungen (61) diese infinitesimalen Transformationen gestattet. Zu diesem Zwecke betrachten wir z als Function von $x_1 \cdots x_n$, so dass:

$$y_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots y_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

wird, und wir erweitern die infinitesimalen Transformationen (62) durch Hinzunahme der Differentialquotienten zweiter und dritter Ordnung von z (vgl. Kap. 22). Wir finden, dass die Differentialquotienten dritter Ordnung von z bei den infinitesimalen Transformationen (62) solche unendlich kleine Zuwachse erhalten, welche vermöge der Gleichungen (61) verschwinden. Mit andern Worten: das Gleichungensystem (61) gestattet die infinitesimalen Transformationen (62), da es nun nach dem Früheren alle übrigen infinitesimalen Transformationen der Gruppe (30) zulässt, so bleibt es überhaupt bei der Gruppe (30) invariant. Genau in derselben Weise lässt sich einsehen, dass das Gleichungensystem (61) auch bei unsern andern beiden Berührungstransformationsgruppen (44) und (56) invariant bleibt.

Damit ist das folgende wichtige Theorem bewiesen:

Theorem 82. *Die drei irreducibeln Berührungstransformationsgruppen:* (30) *auf* S. 500, (44) *auf* S. 504 *und* (56) *auf* S. 512 *lassen keine Schaar:*

$$z = \Phi(x_1 \cdots x_n, a_1, a_2 \cdots)$$

von n-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ *invariant, welche weniger als* $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ *Parameter enthält, und nur eine Schaar mit gerade* $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ *Parametern, nämlich die Schaar:*

$$(60) \qquad z = \mathfrak{a} + \sum_1^n {}_i \mathfrak{b}_i x_i + \sum_{i\varkappa}^{1\cdots n} \mathfrak{c}_{i\varkappa} x_i x_\varkappa ;$$

dieselbe besteht aus allen n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten zweiter Ordnung, welche ein unendlich fernes Element des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ gemein haben.

§ 121.

Führt man in eine irreducible Berührungstransformationsgruppe des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ vermöge einer Berührungstransformation dieses Raumes neue Veränderliche ein, so erhält man natürlich wieder eine Berührungstransformationsgruppe, welche irreducibel ist. Unter den unendlich vielen verschiedenen Formen, welche die irreducible Berührungstransformationsgruppe (56) auf S. 512 in der angegebenen Weise erhalten kann, befindet sich nun eine von bemerkenswerther Einfachheit; in dem besonderen Falle $n = 1$ haben wir das bereits auf S. 440 f. gesehen, es gilt aber auch für beliebiges n.

Um die angekündigte Umformung der Gruppe (56) durchzuführen, denken wir uns diese Gruppe zunächst als eine Gruppe von homogenen Berührungstransformationen in den $2n + 2$ Veränderlichen $x_1' \cdots x_{n+1}'$, $p_1' \cdots p_{n+1}'$ geschrieben. Wir setzen also:

$$x_1 = x_1', \cdots x_n = x_n', \quad z = x_{n+1}'$$

$$y_1 = -\frac{p_1'}{p_{n+1}'}, \cdots y_n = -\frac{p_n'}{p_{n+1}'},$$

drücken die charakteristischen Functionen (55) der infinitesimalen Transformationen unsrer Gruppe alle durch $x_1' \cdots x_{n+1}'$, $p_1' \cdots p_{n+1}'$ aus und multipliciren jede der erhaltenen Functionen mit p_{n+1}' (vgl. S. 273, Satz 10). In die so erhaltene Gruppe von homogenen Berührungstransformationen führen wir neue Veränderliche $\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n+1}$, $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{n+1}$ ein vermöge der homogenen Berührungstransformation:

$$(63) \qquad \begin{cases} x_i' = 2\mathfrak{x}_i \sqrt{\dfrac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{p}_{n+1}}}, \quad x_{n+1}' = \mathfrak{x}_{n+1} - \displaystyle\sum_1^n {}_\nu \mathfrak{x}_\nu \frac{\mathfrak{p}_\nu}{\mathfrak{p}_{n+1}} \\ p_i' = \sqrt{\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_{n+1}}, \quad p_{n+1}' = \mathfrak{p}_{n+1} \\ (i = 1 \cdots n), \end{cases}$$

dann erscheint unsre Gruppe in der nachstehenden merkwürdigen Gestalt:

$$(64) \qquad \boxed{\begin{matrix} \sqrt{\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_\varkappa}, \quad \mathfrak{x}_i \sqrt{\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_\varkappa}, \quad \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_\varkappa \sqrt{\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_\varkappa} \\ (i, \varkappa = 1 \cdots n+1) \end{matrix}},$$

welche den Vorzug einer gewissen Symmetrie besitzt.

Oben sahen wir, dass die Gruppe (56) eine Schaar von n-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ invariant lässt, nämlich diese:

$$z = a + \sum_1^n {}_i\, b_i x_i + \tfrac{1}{4} \sum_{i\varkappa}^{1\cdots n} c_{i\varkappa} x_i x_\varkappa .$$

Schreiben wir diese Schaar als eine Schaar von Element-M_n des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ und benutzen wir dabei die oben definirten homogenen Elementcoordinaten: $x_1' \cdots x_{n+1}'$, $p_1' \cdots p_{n+1}'$, so erhält sie die Form:

$$(65)\qquad \begin{cases} x_{n+1}' = a + \sum\limits_1^n {}_i\, b_i x_i' + \tfrac{1}{4} \sum\limits_{i\varkappa}^{1\cdots n} c_{i\varkappa} x_i' x_\varkappa' \\[2ex] \dfrac{-p_\nu'}{p_{n+1}'} = b_\nu + \tfrac{1}{2} \sum\limits_1^n {}_\varkappa\, c_{\nu\varkappa} x_\varkappa' \\ \qquad\qquad (\nu = 1 \cdots n), \end{cases}$$

wo die Relation: $c_{i\varkappa} = c_{\varkappa i}$ benutzt ist. Führen wir auf diese Gleichungen die homogene Berührungstransformation (63) aus, so ergeben sich die Gleichungen:

$$(66)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_{n+1} - \sum\limits_1^n {}_i\, \mathfrak{x}_i \dfrac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{p}_{n+1}} = a + 2 \sum\limits_1^n {}_i\, b_i \mathfrak{x}_i \sqrt{\dfrac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{p}_{n+1}}} + \\[2ex] \qquad\qquad + \sum\limits_{i\varkappa}^{1\cdots n} c_{i\varkappa} \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_\varkappa \sqrt{\dfrac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{p}_{n+1}}} \cdot \sqrt{\dfrac{\mathfrak{p}_\varkappa}{\mathfrak{p}_{n+1}}} \\[2ex] -\sqrt{\dfrac{\mathfrak{p}_\nu}{\mathfrak{p}_{n+1}}} = b_\nu + \sum\limits_1^n {}_\varkappa\, c_{\nu\varkappa} \mathfrak{x}_\varkappa \sqrt{\dfrac{\mathfrak{p}_\varkappa}{\mathfrak{p}_{n+1}}} \\ \qquad\qquad (\nu = 1 \cdots n), \end{cases}$$

welche natürlich eine Schaar von Element-M_n des Raumes $\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n+1}$ darstellen, die bei der Gruppe (64) invariant bleibt. Da sich überdies aus den eben geschriebenen Gleichungen bei Fortschaffung der $\mathfrak{p}$ nur eine Relation zwischen den $\mathfrak{x}$ ergiebt, so muss diese Schaar von Element-M_n wiederum aus n-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten bestehen.

Es hat keine Schwierigkeit, die Gleichung dieser Schaar von Punktmannigfaltigkeiten anzugeben, man kann ihre Gleichung sogar auf eine recht elegante Form bringen.

Die erste der Gleichungen (66) lässt sich nämlich durch die folgende ersetzen:

$$\mathfrak{x}_{n+1} = a + \sum_1^n {}_i\, b_i \mathfrak{x}_i \sqrt{\frac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{p}_{n+1}}},$$

verbindet man hiermit die übrigen n Gleichungen und schafft man die $\mathfrak{p}$ fort, so kommt:

$$\begin{vmatrix} c_{11}\mathfrak{x}_1 + 1 & c_{12}\mathfrak{x}_2 & \cdot & c_{1n}\mathfrak{x}_n & b_1 \\ c_{21}\mathfrak{x}_1 & c_{22}\mathfrak{x}_2 + 1 & \cdot & c_{2n}\mathfrak{x}_n & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1}\mathfrak{x}_1 & c_{n2}\mathfrak{x}_2 & \cdot & c_{nn}\mathfrak{x}_n + 1 & b_n \\ b_1\mathfrak{x}_1 & b_2\mathfrak{x}_2 & \cdot & b_n\mathfrak{x}_n & a - \mathfrak{x}_{n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Um hier die linke Seite symmetrischer zu gestalten, setzen wir:

$$\frac{b_i}{\sqrt{a}} = \mathfrak{c}_{i,n+1}, \quad c_{i\varkappa} - \mathfrak{c}_{i,n+1}\mathfrak{c}_{\varkappa,n+1} = \mathfrak{c}_{i\varkappa}$$

$$-\frac{1}{a} = \mathfrak{c}_{n+1,n+1},$$

dann wird unsre Gleichung einfach:

$$(67) \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{c}_{11}\mathfrak{x}_1 + 1 & \mathfrak{c}_{12}\mathfrak{x}_2 & \cdot\ \cdot & \mathfrak{c}_{1,n+1}\mathfrak{x}_{n+1} \\ \mathfrak{c}_{21}\mathfrak{x}_1 & \mathfrak{c}_{22}\mathfrak{x}_2 + 1 & \cdot\ \cdot & \mathfrak{c}_{2,n+1}\mathfrak{x}_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \mathfrak{c}_{n+1,1}\mathfrak{x}_1 & \mathfrak{c}_{n+2,2}\mathfrak{x}_2 & \cdot\ \cdot & \mathfrak{c}_{n+1,n+1}\mathfrak{x}_{n+1} + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

wobei $\mathfrak{c}_{i\varkappa} = \mathfrak{c}_{\varkappa i}$ ist.

Die Gleichung (67) stellt eine Schaar von n-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten des Raumes $\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n+1}$ dar, welche $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Parameter enthält und bei der Gruppe (64) von homogenen Berührungstransformationen dieses Raumes invariant bleibt.

Bei der Berührungstransformationsgruppe (56) liessen wir es dahin gestellt, ob sie Schaaren von Element-M_n des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ invariant lässt, welche nicht aus n-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ bestehen. Bei der Gruppe (64) nun können wir die entsprechende Frage ohne Schwierigkeit beantworten. Es gilt nämlich das

Theorem 83. *Jede bei der Berührungstransformationsgruppe (64) invariante Schaar von Element-M_n des Raumes $\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n+1}$ besteht aus n-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten dieses Raumes.*

Beweis. Nach S. 84, Satz 3 und S. 108 ff. lässt sich jede Element-M_n des Raumes $\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n+1}$ durch eine Anzahl von Gleichungen zwischen den $\mathfrak{x}$ allein definiren. Es sei daher:

$$\mathfrak{x}_\mu - \psi_\mu(\mathfrak{x}_{m+1} \cdots \mathfrak{x}_{n+1}) = 0 \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

irgend eine Element-M_n, welche einer bei der Gruppe (64) invarianten Schaar von Element-M_n angehört. Dann gehören auch alle Element-M_n von der Form:

$$\mathfrak{x}_\mu - \psi_\mu(\mathfrak{x}_{m+1} \cdots \mathfrak{x}_{n+1}) = a_\mu \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

dieser Schaar an, denn die Schaar gestattet ja alle endlichen Transformationen der m eingliedrigen Gruppen:

$$(\mathfrak{p}_\mu, f)_{\mathfrak{x}\mathfrak{p}} = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_\mu} \qquad (\mu = 1 \cdots m).$$

Daraus folgt, dass jede bei der Gruppe (64) invariante Schaar von Element-M_n, wenigstens soviele Parameter enthält, als Gleichungen zwischen den $\mathfrak{x}$ allein zu ihrer Darstellung nöthig sind und dass diese Gleichungen nach ebensovielen unter den vorkommenden Parametern auflösbar sind.

Es sei demnach:

(68) $$\varphi_\mu(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n+1}, a_{m+1}, a_{m+2} \cdots) = a_\mu$$
$$(\mu = 1 \cdots m)$$

eine invariante Schaar von Element-M_n und zwar seien die Gleichungen (68) auflösbar nach $\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_m$; die Zahl m ist dabei nothwendig kleiner als $n+1$, denn der Inbegriff aller Punkte des Raumes $\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n+1}$ bleibt bei der Gruppe (64) offenbar nicht invariant.

Betrachten wir nun andrerseits die Schaar der ∞^{n+1-m} ebenen m-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten:

(69) $$\mathfrak{x}_{m+1} = b_{m+1}, \cdots \mathfrak{x}_{n+1} = b_{n+1}.$$

In der Gruppe (64) giebt es eine Untergruppe, welche jede einzelne dieser ∞^{n+1-m} Mannigfaltigkeiten stehen lässt, nämlich die Untergruppe:

(70) $$\sqrt{\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_\varkappa}, \quad \mathfrak{x}_i \sqrt{\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_\varkappa}, \quad \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_\varkappa \sqrt{\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_\varkappa}$$
$$(i, \varkappa = 1 \cdots m),$$

welche für jede dieser Mannigfaltigkeiten ganz dieselbe Bedeutung hat wie die Gruppe (64) für den Raum $\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n+1}$.

Natürlich bleibt bei der Untergruppe (70) auch die Schaar der Element-M_n (68) invariant. Aber jede Element-M_n der Schaar (68) schneidet jede ebene Punktmannigfaltigkeit von der Form (69) im Allgemeinen nur in einem isolirten Punkte und umgekehrt geht jeder Punkt einer ebenen Mannigfaltigkeit von der Form (69) stets mindestens durch eine Element-M_n der Schaar (68). Folglich muss die Untergruppe (70) die Punkte einer jeden ebenen Mannigfaltigkeit von der Form (69) unter einander vertauschen, das aber tritt nur dann ein, wenn $m = 1$ ist, denn für $m > 1$ ist (70) eine irreducible Berührungstransformationsgruppe einer m-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit von der Form (69) und lässt den Inbegriff aller Punkte dieser Mannigfaltigkeit nicht invariant.

Damit ist unser Theorem bewiesen.

§ 122.

Für den besonderen Fall $n = 1$ haben wir die invarianten Untergruppen der drei Gruppen (30), (44) und (56) bereits bestimmt (s. S. 434 ff.). Bei beliebigem n führt eine ganz ähnliche Rechnung zum Ziel, wir wollen uns daher begnügen, die Ergebnisse dieser Rechnung zusammenzustellen:

Theorem 84. *Von den drei irreducibeln Berührungstransformationsgruppen:* (30) *auf S.* 500, (44) *auf S.* 504, (56) *auf S.* 512 *des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ enthält die erste zwei invariante Untergruppen, nämlich:*

$$p_i, \quad q_i + x_i r, \quad r \quad {\scriptstyle (i = 1 \cdots n)} \quad \textit{und} \quad r,$$

die zweite enthält deren vier, nämlich erstens die Gruppe (30) *und ausserdem noch die folgenden drei:*

$$p_i, \quad q_i + x_i r, \quad r, \quad \sum_1^n {}_{\nu} (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr \qquad {\scriptstyle (i = 1 \cdots n)}$$

$$p_i, \quad q_i + x_i r, \quad r \qquad {\scriptstyle (i = 1 \cdots n)}$$

$$r,$$

die dritte endlich enthält gar keine invariante Untergruppe und ist daher einfach.

Auch die Entwickelungen des § 109, S. 445 ff. lassen sich ohne Schwierigkeit auf den Fall eines beliebigen n übertragen. Wir wollen uns jedoch darüber möglichst kurz fassen.

Betrachten wir die irreducible Berührungstransformationsgruppe (56) auf S. 512 als eine Gruppe von Punkttransformationen des Raumes $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$, z und führen wir vermöge der Punkttransformation:

$$x_i' = x_i, \quad y_i' = \tfrac{1}{2} y_i, \quad z' = z - \tfrac{1}{2} \sum_1^n {}_{\nu} x_\nu y_\nu \qquad (71)$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

in diese Gruppe die neuen Veränderlichen x', y', z' ein, so erhalten wir die folgende Gruppe von Punkttransformationen des Raumes: $x_1' \cdots x_n'$, $y_1' \cdots y_n'$, z':

$$
(72)\qquad \boxed{\begin{gathered}
p_i' - y_i' r', \quad q_i' + x_i' r', \quad r', \quad \sum_1^n {}_\nu (x_\nu' p_\nu' + y_\nu' q_\nu') + 2 z' r' \\
x_i' q_\varkappa' + x_\varkappa' q_i', \quad x_i' p_\varkappa' - y_\varkappa' q_i', \quad y_i' p_\varkappa' + y_\varkappa' p_i' \\
z' p_i' - y_i' \left(\sum_1^n {}_\nu (x_\nu' p_\nu' + y_\nu' q_\nu') + z' r' \right) \\
z' q_i' + x_i' \left(\sum_1^n {}_\nu (x_\nu' p_\nu' + y_\nu' q_\nu') + z' r' \right) \\
z' \left(\sum_1^n {}_\nu (x_\nu' p_\nu' + y_\nu' q_\nu') + z' r' \right) \\
(i, \varkappa = 1 \cdots n)
\end{gathered}}\;.
$$

Zugleich erhält die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - y_1 dx_1 - \cdots - y_n dx_n = 0$$

in den neuen Veränderlichen die Gestalt:

$$(73)\qquad dz' + \sum_1^n {}_\nu (x_\nu' dy_\nu' - y_\nu' dx_\nu') = 0.$$

Die Gruppe (72), welche aus lauter *projectiven* Transformationen besteht, lässt natürlich die Pfaffsche Gleichung (73) invariant, sonst aber keine Pfaffsche Gleichung, sie ist zugleich die grösste continuirliche projective Gruppe des Raumes x', y', z', welche die Gleichung (73) invariant lässt. Das letztere folgt daraus, dass die irreducible Berührungstransformationsgruppe (56) in keiner grösseren endlichen continuirlichen Berührungstransformationsgruppe enthalten ist, eine solche grössere Gruppe hätten wir nämlich, wenn sie existirte, nothwendig bei den früheren Entwickelungen mit finden müssen.

Ueberträgt man die im Raume von drei Dimensionen gebräuchliche Benennungsweise auf den Raum von $2n+1$ Dimensionen, so kann man sagen, dass die Pfaffsche Gleichung (73) einen *linearen Complex* des Raumes $x_1' \cdots x_n'$, $y_1' \cdots y_n'$, z' darstellt. Die Gruppe (72) würde dann als die projective Gruppe des linearen Complexes (73) zu bezeichnen sein.

Kapitel 26.

Allgemeines über die Bestimmung von endlichen continuirlichen Berührungstransformationsgruppen des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$.

Bisher — in Kapitel 23 und ebenso in dem vorstehenden Kapitel — haben wir bei der Bestimmung von Berührungstransformationsgruppen des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ meistens mit den Reihenentwickelungen der infinitesimalen Transformationen dieser Gruppen gerechnet, dagegen die Reihenentwickelungen der zugehörigen charakteristischen Functionen mehr blos nebenbei benutzt. Dieses Verfahren ist nicht ganz befriedigend. Erstens reichen ja die Glieder niedrigster Ordnung in der Reihenentwickelung einer infinitesimalen Berührungstransformation keineswegs hin, diese Transformation als eine Berührungstransformation zu kennzeichnen, es muss daher jedes Mal noch besonders Rücksicht darauf genommen werden, dass man es mit infinitesimalen Berührungstransformationen zu thun hat. Zweitens aber ist die charakteristische Function entschieden die naturgemässeste analytische Darstellung einer infinitesimalen Berührungstransformation und es erscheint daher wünschenswerth bei solchen Rechnungen, wie den in Kap. 23 und 25 ausgeführten, möglichst nur mit den charakteristischen Functionen zu arbeiten.

Dieses wünschenswerthe Ziel wird erreichbar sein, sobald es möglich ist, mit den Reihenentwickelungen von charakteristischen Functionen ebenso zu rechnen, wie es nach Abschnitt I, Theorem 30, S. 193 möglich ist, mit den Reihenentwickelungen von infinitesimalen Transformationen zu rechnen, wenn man also aus den Anfangsgliedern in den Reihenentwickelungen zweier charakteristischer Functionen U und V die Anfangsglieder in der Reihenentwickelung der charakteristischen Function $\{UV\}$ finden kann.

Wir werden jetzt zunächst zeigen, dass man wirklich in dieser Art mit den Reihenentwickelungen von charakteristischen Functionen rechnen kann, vorausgesetzt, dass man die Glieder der betreffenden Reihenentwickelungen in geeigneter Weise anordnet. Sodann werden wir unter Benutzung der Rechnung mit charakteristischen Functionen erstens über die Bestimmung von Berührungstransformationsgruppen des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ einige allgemeine Bemerkungen machen und zweitens einen wichtigen Satz ableiten, welcher die Bestimmung einer grossen Anzahl von solchen Gruppen ausserordentlich erleichtert.

Zu erwähnen ist schliesslich noch, dass wir die im vorigen Kapitel angewandten Bezeichnungen auch im gegenwärtigen beibehalten, wir wählen demnach als Coordinaten der Elemente des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ die Grössen: $z, x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n$ und verstehen demzufolge unter einer Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ eine solche Transformation in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z$, welche die Pfaffsche Gleichung:

$$(1) \qquad dz - y_1 dx_1 - \cdots - y_n dx_n = 0$$

invariant lässt.

§ 123.

Es seien $U(x, y, z)$ und $V(x, y, z)$ zwei charakteristische Functionen in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z$ und zwar U und V beide gewöhnliche Potenzreihen der x, y, z; auf diesen Fall können wir uns ja nach S. 462 beschränken. Was lässt sich aus den Anfangsgliedern der Reihenentwickelungen von U und V über die Anfangsglieder in der Reihenentwickelung der charakteristischen Function

$$\{UV\} = \sum_1^n{}^{\nu} \left[\frac{\partial U}{\partial y_\nu}\left(\frac{\partial V}{\partial x_\nu} + y_\nu \frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial V}{\partial y_\nu}\left(\frac{\partial U}{\partial x_\nu} + y_\nu \frac{\partial U}{\partial z}\right)\right] - \\ - U\frac{\partial V}{\partial z} + V\frac{\partial U}{\partial z}$$

schliessen?

Ordnen wir die Reihenentwickelungen von U und V in der gebräuchlichen Weise nach Potenzen von x, y, z, indem wir mit den Gliedern von niedrigster Ordnung in den x, y, z beginnen und die Glieder von höherer Ordnung in den x, y, z ihrer Ordnung nach folgen lassen, so sind die Anfangsglieder, also die Glieder niedrigster Ordnung von $\{UV\}$ zwar im Allgemeinen durch die Anfangsglieder von U und V bestimmt, es treten aber doch, wie wir auf S. 463 f. gesehen haben, verschiedene Ausnahmefälle ein. Wir müssen daher versuchen, ob wir nicht bei einer andern Anordnung der Glieder in den Reihenentwickelungen von U und V zu einem besseren Ergebniss gelangen. Zu diesem Zwecke stellen wir die folgenden Ueberlegungen an:

Bei der gebräuchlichen Anordnung einer Potenzreihe in den x, y, z erscheint die Reihe in der Form:

$$\sum_0^\infty{}^{\varkappa} \alpha_\varkappa(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z),$$

wo $\alpha_\varkappa$ eine ganze homogene Function $\varkappa$-ter Ordnung bezeichnet, es werden also jedesmal diejenigen Glieder der Reihe zusammengefasst, welche bei Ausführung der Operation:

(2) $$\sum_1^n{}_i\left(x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} + y_i\frac{\partial f}{\partial y_i}\right) + z\frac{\partial f}{\partial z}$$

mit demselben ganzzahligen Faktor reproducirt werden. Nun aber kann man von vornherein erkennen, dass eine derartige Anordnung der Potenzreihen bei den Reihenentwickelungen von charakteristischen Functionen unangebracht ist. Jede charakteristische Function in den x, y, z definirt ja eine infinitesimale Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$, das Operationssymbol (2) aber stellt, wie die Tabelle auf S. 465 zeigt, keine infinitesimale Berührungstransformation dar und besitzt daher, wenn es sich um Berührungstransformationen handelt, nichts ausgezeichnetes. Hingegen stellt das Operationssymbol:

(3) $$\sum_1^n{}_i\left(x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} + y_i\frac{\partial f}{\partial y_i}\right) + 2z\frac{\partial f}{\partial z} = Bf$$

eine infinitesimale Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ dar und zwar eine mit der charakteristischen Function:

(4) $$-2z + \sum_1^n{}_i x_i y_i,$$

es liegt daher nahe zu versuchen, ob man nicht einen besseren Erfolg hat, wenn man die Reihenentwickelungen der charakteristischen Functionen derart anordnet, dass man jedes Mal diejenigen Glieder zusammenfasst, welche bei der Operation Bf mit demselben ganzzahligen Faktor reproducirt werden. Es wird sich zeigen, dass das wirklich der Fall ist.

Wir wollen in einer gewöhnlichen Potenzreihe der x, y, z ein Glied:

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \cdot y_1^{\mu_1} \cdots y_n^{\mu_n} \cdot z^\nu$$

dann als *ein Glied von $\varkappa$-ter Stufe in den x, y, z* bezeichnen, wenn es bei der Operation Bf mit der ganzen Zahl $\varkappa$ als Faktor reproducirt wird, wenn also die ganzen Zahlen $\lambda_1 \cdots \lambda_n$, $\mu_1 \cdots \mu_n$, ν der Bedingung:

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \mu_1 + \cdots + \mu_n + 2\nu = \varkappa$$

genügen. Eine ganze Function von den x, y, z, welche nur Glieder $\varkappa$-ter Stufe enthält, nennen wir eine *ganze Function von $\varkappa$-ter Stufe in den x, y, z.* Auf Grund dieser Definition können wir jede gewöhnliche Potenzreihe in den x, y, z in der Form darstellen:

$$\sum_0^\infty{}_\varkappa g_\varkappa(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z),$$

wo $g_\varkappa$ eine ganze Function von $\varkappa$-ter Stufe in den x, y, z bezeichnet.

Ferner wollen wir sagen*): „*die charakteristische Function* $U(x, y, z)$ *ist von der* m*-ten Stufe in den* x, y, z“, sobald ihre Reihenentwickelung kein Glied von nullter, erster, $\cdots (m-1)$-ter Stufe in den x, y, z enthält, während nicht alle Glieder m-ter Stufe verschwinden. Eine charakteristische Function von der m-ten Stufe in den x, y, z werden wir dann folgendermassen schreiben können:

$$g_m(x, y, z) + \cdots,$$

wo g_m eine nicht verschwindende ganze Function m-ter Stufe bezeichnet, während die weggelassenen Glieder alle von der $(m+1)$-ten oder von höherer Stufe in den x, y, z sind.

Die allgemeine Form einer charakteristischen Function von der nullten Stufe in den x, y, z ist daher:

$$\mathfrak{A} + \cdots,$$

die Form einer Function von erster Stufe ist:

$$\sum_1^n{}_i (\mathfrak{A}_i x_i + \mathfrak{B}_i y_i) + \cdots,$$

jede charakteristische Function von zweiter Stufe in den x, y, z hat die Gestalt:

$$\sum_{i\varkappa}^{1\cdots n} (\mathfrak{A}_{i\varkappa} x_i x_\varkappa + \mathfrak{B}_{i\varkappa} x_i y_\varkappa + \mathfrak{C}_{i\varkappa} y_i y_\varkappa) + \mathfrak{D} z + \cdots,$$

hier bezeichnen die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ Constanten und die weggelassenen Glieder sind immer von höherer Stufe in den x, y, z als die geschriebenen.

Man kann sich die Anordnung der Reihenentwickelung einer charakteristischen Function $U(x, y, z)$ nach der Stufenzahl ihrer Glieder auch so vorstellen, dass man sich $U(x, y, z)$ in der üblichen Weise als eine Potenzreihe von $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$ und $\sqrt{z}$ geschrieben denkt, wobei natürlich nur gerade Potenzen von $\sqrt{z}$ auftreten.

Wir wenden uns jetzt wieder zur Betrachtung der beiden charakteristischen Functionen: $U(x, y, z)$ und $V(x, y, z)$, wollen aber jetzt voraussetzen, dass U in den x, y, z von der $\varkappa$-ten Stufe ist, V von der m-ten Stufe. Es soll also sein:

$$U = \alpha_\varkappa(x, y, z) + \cdots, \qquad V = \beta_m(x, y, z) + \cdots,$$

wo $\alpha_\varkappa$ und β_m ganze Functionen von bezüglich $\varkappa$-ter und m-ter Stufe

---

*) Der *Begriff*: „charakteristische Function von m-ter Stufe in den x, y, z“, rührt von Lie her. Die *Benennung* „Stufe“ ist von Engel vorgeschlagen.

in den x, y, z sind und wo die weggelassenen Glieder jedes Mal von höherer Stufe sind, als die geschriebenen.

Bedenken wir, dass jede Differentiation nach einer der Veränderlichen $x_1 \cdots y_n$, $y_1 \cdots y_n$ die Stufenzahl einer charakteristischen Function um eins erniedrigt, dass dagegen jede Differentiation nach z die Stufenzahl um zwei erniedrigt, beachten wir ausserdem, dass das Produkt zweier charakteristischer Functionen von l-ter und p-ter Stufe eine solche von der Stufe $l+p$ liefert, so erkennen wir sofort, dass die charakteristische Function $\{UV\}$ die Form hat:

$$\{UV\} = \{\alpha_\varkappa \beta_m\} + \cdots,$$

wo:

$$\{\alpha_\varkappa \beta_m\} = \sum_1^n {}_\nu \left[\frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial y_\nu}\left(\frac{\partial \beta_m}{\partial x_\nu} + y_\nu \frac{\partial \beta_m}{\partial z}\right) - \frac{\partial \beta_m}{\partial y_\nu}\left(\frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial x_\nu} + y_\nu \frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial z}\right)\right] -$$
$$- \alpha_\varkappa \frac{\partial \beta_m}{\partial z} + \beta_m \frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial z}$$

eine ganze Function von der $(\varkappa + m - 2)$-ten Stufe ist, und wo die weggelassenen Glieder in den x, y, z von $(\varkappa + m - 1)$-ter und höherer Stufe sind.

Damit haben wir das

Theorem 85. *Sind $U(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z)$ und $V(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z)$ die charakteristischen Functionen zweier infinitesimaler Berührungstransformationen des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ und beginnen die Reihenentwickelungen von U und V nach Potenzen der x, y, z mit Gliedern von bezüglich $\varkappa$-ter und m-ter Stufe in den x, y, z, so enthält die Reihenentwickelung der charakteristischen Function $\{UV\}$ nur Glieder von $(\varkappa + m - 2)$-ter und höherer Stufe in den x, y, z. Die in $\{UV\}$ auftretenden Glieder $(\varkappa + m - 2)$-ter Stufe sind durch die Glieder $\varkappa$-ter Stufe von U und durch die Glieder m-ter Stufe von V vollständig bestimmt. Ist insbesondere die Summe $\varkappa + m - 2$ negativ, so beginnt die Reihenentwickelung von $\{UV\}$ mit Gliedern nullter oder höherer Stufe.*

Wir müssen jetzt noch untersuchen, wie sich die Stufenzahl einer charakteristischen Function verhält, wenn man an Stelle der x, y, z durch eine Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ neue Veränderliche einführt.

Es sei Af eine infinitesimale Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ und $U(x, y, z)$ sei die zugehörige charakteristische Function. Führen wir auf Af eine endliche Berührungstransformation:

$$(5) \qquad \mathfrak{x}_i = \Xi_i(x, y, z), \quad \mathfrak{y}_i = \mathsf{H}_i(x, y, z), \quad \mathfrak{z} = \mathsf{Z}(x, y, z) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ aus, so erhalten wir eine infinitesimale Berührungstransformation $\mathfrak{A}f$ des Raumes $\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n$, deren charakteristische Function $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ zu $U(x, y, z)$ in der Beziehung steht:

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \varrho(x, y, z) \cdot U(x, y, z), \tag{6}$$

wo die Function $\varrho(x, y, z)$ aus der Identität:

$$dZ - \sum_1^n {}_i \mathsf{H}_i d\Xi_i = \varrho\left(dz - \sum_1^n {}_i y_i dx_i\right) \tag{7}$$

zu entnehmen ist (s. Theorem 45, S. 276).

Um den Zusammenhang zwischen den beiden charakteristischen Functionen $U(x, y, z)$ und $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ bequemer ausdrücken zu können, wollen wir in Zukunft sagen*), *dass die charakteristische Function* $U(x, y, z)$ *bei Ausführung der Berührungstransformation* (5) *in die charakteristische Function* $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ *übergeht* oder *dass die Berührungstransformation* (5) *die erste charakteristische Function in die zweite überführt.* Auf diese Weise haben wir den Vortheil, dass wir von den infinitesimalen Berührungstransformationen, welche zu unsern beiden charakteristischen Functionen gehören, gar nicht mehr zu sprechen brauchen. Missverständnisse sind auch nicht zu befürchten, wenn man nur sich immer vergegenwärtigt, dass man die neue charakteristische Function $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ findet, sobald man in den Ausdruck: $\varrho(x, y, z) \cdot U(x, y, z)$ vermöge der Berührungstransformation (5) die neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ einführt.

Die charakteristische Function $U(x, y, z)$ verhalte sich nun insbesondere in der Umgebung des Werthsystems: $x_i = y_i = z = 0$ regulär und sei von der $\varkappa$-ten Stufe in den x, y, z, sie habe also die Form:

$$U(x, y, z) = \alpha_\varkappa(x, y, z) + \cdots,$$

wo $\alpha_\varkappa$ eine nicht identisch verschwindende ganze Function von $\varkappa$-ter Stufe in den x, y, z bezeichnet, während die weggelassenen Glieder von höherer als der $\varkappa$-ten Stufe sind. In der Berührungstransformation (5) andrerseits mögen die Ξ_i, H_i, Z gewöhnliche Potenzreihen der x, y, z sein und für $x_\nu = y_\nu = z = 0$ verschwinden und es mögen sich auch umgekehrt die x, y, z als gewöhnliche, für $\mathfrak{x}_\nu = \mathfrak{y}_\nu = \mathfrak{z} = 0$ verschwindende Potenzreihen der $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ darstellen lassen.

Unter diesen Voraussetzungen führt die Berührungstransformation (5) die charakteristische Function $U(x, y, z)$ in eine charakteristische Function $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ über, welche sich in der Umgebung von $\mathfrak{x}_i = \mathfrak{y}_i = \mathfrak{z} = 0$

*) Nach einem Vorschlage von Engel.

regulär verhält (vgl. S. 462) und welche durch die Gleichung (6) definirt ist. Wir werden untersuchen, von welcher Stufe $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ ist, und werden zeigen, wie man die Glieder niedrigster Stufe von $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ aus den Gliedern niedrigster Stufe von $U(x, y, z)$ finden kann.

Die Berührungstransformation (5) hat bei den gemachten Annahmen jedenfalls die folgende Form:

$$
(5') \quad \begin{cases}
\mathfrak{x}_i = \sum_1^n {}^{\nu} (a_{i\nu} x_\nu + b_{i\nu} y_\nu) + c_i z + \cdots \\
\mathfrak{y}_i = \sum_1^n {}^{\nu} (\mathfrak{a}_{i\nu} x_\nu + \mathfrak{b}_{i\nu} y_\nu) + \mathfrak{c}_i z + \cdots \\
\mathfrak{z} = \sum_1^n {}^{\nu} (\mathfrak{A}_\nu x_\nu + \mathfrak{B}_\nu y_\nu) + \mathfrak{C} z + \cdots \\
\qquad (i = 1 \cdots n).
\end{cases}
$$

Hier sind auf den rechten Seiten alle Glieder weggelassen, welche in den x, y, z von höherer als der ersten Ordnung sind. Von selbst versteht es sich, dass die nach den x, y, z genommene Functionaldeterminante der Glieder erster Ordnung auf den rechten Seiten von (5′) nicht verschwindet, denn nur wenn sie nicht verschwindet, lassen sich auch umgekehrt die x, y, z als gewöhnliche Potenzreihen der $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ darstellen.

Setzen wir die unter (5′) angegebenen Ausdrücke für die Ξ_i, H_i, Z in die Identität (7) ein, berücksichtigen wir ausserdem, dass ϱ jedenfalls eine gewöhnliche Potenzreihe der x, y, z ist und daher die Form hat: $\varrho(x, y, z) = \varrho_0 + \cdots$, vergleichen wir endlich auf beiden Seiten von (7) die Glieder von nullter Ordnung in den x, y, z, so finden wir, dass alle $\mathfrak{A}_\nu$ und $\mathfrak{B}_\nu$ verschwinden und dass $\varrho_0 = \mathfrak{C}$ ist. Mit andern Worten: die Reihenentwickelung für $\mathfrak{z}$ enthält nur Glieder von zweiter und höherer Stufe in den x, y, z. Demnach hat unsre Berührungstransformation (5) die Gestalt:

$$
(5'') \quad \begin{cases}
\mathfrak{x}_i = \sum_1^n {}^{\nu} (a_{i\nu} x_\nu + b_{i\nu} y_\nu) + \cdots \\
\mathfrak{y}_i = \sum_1^n {}^{i} (\mathfrak{a}_{i\nu} x_\nu + \mathfrak{b}_{i\nu} y_\nu) + \cdots \\
\mathfrak{z} = \mathfrak{C} z + \sum_{\mu\nu}^{1 \cdots n} (\delta_{\mu\nu} x_\mu x_\nu + \varepsilon_{\mu\nu} x_\mu y_\nu + \vartheta_{\mu\nu} y_\mu y_\nu) + \cdots \\
\qquad (i = 1 \cdots n),
\end{cases}
$$

wo nunmehr auf der rechten Seite blos die Glieder von niedrigster Stufe in den x, y, z geschrieben sind. Die Constante $\mathfrak{C}$ muss natürlich von Null verschieden sein, ebenso die aus den $(2n)^2$ Grössen $a_{i\nu}$, $b_{i\nu}$, $\mathfrak{a}_{i\nu}$, $\mathfrak{b}_{i\nu}$ gebildete $2n$-reihige Determinante.

Denkt man sich die Gleichungen (5″) nach den x, y, z aufgelöst, so bekommt man augenscheinlich Gleichungen von der Form:

$$(5''')\quad \begin{cases} x_i = \sum\limits_1^n{}_{\nu} (a'_{i\nu}\mathfrak{x}_\nu + b'_{i\nu}\mathfrak{y}_\nu) + \cdots \\ y_i = \sum\limits_1^n{}_{\nu} (\mathfrak{a}'_{i\nu}\mathfrak{x}_\nu + \mathfrak{b}'_{i\nu}\mathfrak{y}_\nu) + \cdots \\ z = \frac{1}{\mathfrak{C}}\mathfrak{z} + \sum\limits_{\mu\nu}^{1\cdots n} (\delta'_{\mu\nu}\mathfrak{x}_\mu\mathfrak{x}_\nu + \varepsilon'_{\mu\nu}\mathfrak{x}_\mu\mathfrak{y}_\nu + \vartheta'_{\mu\nu}\mathfrak{y}_\mu\mathfrak{y}_\nu) + \cdots \\ \qquad (i = 1 \cdots n), \end{cases}$$

wo auf den rechten Seiten nur die Glieder von niedrigster Stufe in den $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ angegeben sind. Die $a'_{i\nu}$, $b'_{i\nu} \cdots \vartheta'_{\mu\nu}$ sind hier, wie man leicht sieht, durch die $a_{i\nu}$, $b_{i\nu} \cdots \vartheta_{\mu\nu}$, $\mathfrak{C}$ vollständig bestimmt und werden erhalten, wenn man die aus (5″) entstehenden verkürzten Transformationsgleichungen:

$$(8)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}_i = \sum\limits_1^n{}_{\nu} (a_{i\nu}x_\nu + b_{i\nu}y_\nu) \\ \mathfrak{y}_i = \sum\limits_1^n{}_{\nu} (\mathfrak{a}_{i\nu}x_\nu + \mathfrak{b}_{i\nu}y_\nu) \\ \mathfrak{z} = \mathfrak{C}z + \sum\limits_{\mu\nu}^{1\cdots n} (\delta_{\mu\nu}x_\mu x_\nu + \varepsilon_{\mu\nu}x_\mu y_\nu + \vartheta_{\mu\nu}y_\mu y_\nu) \end{cases}$$

nach den x, y, z auflöst.

Aus der Gleichung (6) erhalten wir nunmehr:

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = (\mathfrak{C} + \cdots)(\alpha_\varkappa(x, y, z) + \cdots)$$

oder, wenn wir auf der rechten Seite ausmultipliciren:

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{C} \,.\, \alpha_\varkappa(x, y, z) + \cdots,$$

wo alle weggelassenen Glieder in den x, y, z von höherer Stufe sind als der $\varkappa$-ten. Wir haben schliesslich noch die x, y, z vermöge (5‴) durch die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ auszudrücken, und bekommen:

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \bar{\alpha}_\varkappa(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) + \cdots,$$

wo $\bar{\alpha}_\varkappa$ eine ganze Function von $\varkappa$-ter Stufe in den $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnet, während die weggelassenen Glieder von höherer Stufe sind. Die ganze Function $\bar{\alpha}_\varkappa(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ finden wir augenscheinlich, wenn wir die $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ vermöge der verkürzten Transformation (8) in die ganze Function: $\mathfrak{C} \cdot \alpha_\varkappa(x, y, z)$ einführen. Hierin liegt, dass $\bar{\alpha}_\varkappa$ nicht identisch verschwindet.

Schliesslich wollen wir noch erwähnen, dass die verkürzte Transformation (8) ihrerseits eine Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ ist. Setzen wir nämlich die aus (5″) folgenden Werthe der Ξ_i, H_i, Z in die Identität (7) ein und berücksichtigen wir, dass auf beiden Seiten die Glieder von erster Stufe in den x, y, z übereinstimmen müssen, so ergeben sich gewisse Relationen für die Glieder erster Stufe in der Reihenentwickelung von $\varrho(x, y, z)$, ausserdem aber erkennen wir, dass vermöge der Gleichungen (8) eine Relation von der Form:

$$(9) \qquad d\mathfrak{z} - \sum_1^n{}_i \mathfrak{y}_i d\mathfrak{x}_i = \mathfrak{C}\left(dz - \sum_1^n{}_i y_i dx_i\right)$$

besteht. Demnach stellen die Gleichungen (8) wirklich eine Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ dar.

Durch die vorstehenden Ueberlegungen ist bewiesen, dass jede charakteristische Function $U(x, y, z)$, welche in den x, y, z von der $\varkappa$-ten Stufe ist, bei jeder Berührungstransformation (5) von der auf S. 528 definirten Beschaffenheit in eine charakteristische Function $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ übergeht, welche ihrerseits in den $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ von der $\varkappa$-ten Stufe ist.

Auch die Glieder von $\varkappa$-ter Stufe in der Function $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ lassen sich in sehr einfacher Weise definiren. Denkt man sich nämlich aus $U(x, y, z)$ alle Glieder von $(\varkappa + 1)$-ter und höherer Stufe in den x, y, z weg und aus $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ alle Glieder von $(\varkappa + 1)$-ter und höherer Stufe in den $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, so erhält man zwei verkürzte charakteristische Functionen: $\alpha_\varkappa(x, y, z)$ und $\bar{\alpha}_\varkappa(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, welche beide ganze Functionen von $\varkappa$-ter Stufe in ihren Argumenten sind. Man erhält nun die verkürzte charakteristische Function $\bar{\alpha}_\varkappa(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, indem man auf die verkürzte charakteristische Function $\alpha_\varkappa(x, y, z)$ die verkürzte Berührungstransformation (8) ausführt; diese verkürzte Berührungstransformation (8) aber entsteht dadurch, dass man in den Gleichungen (5) aus den Ξ_i, H_i alle Glieder von zweiter und höherer Stufe in den x, y, z weglässt und aus Z alle Glieder von dritter und höherer Stufe.

Zu jeder Berührungstransformation (5) von der auf S. 528 definirten Beschaffenheit gehört eine verkürzte Berührungstransformation von der

Form (8) und umgekehrt kann man sich jede Berührungstransformation von der Form (8) aus einer Berührungstransformation (5) durch Verkürzung entstanden denken. Will man daher wissen, wie die Glieder niedrigster Stufe einer charakteristischen Function $U(x, y, z)$ bei der allgemeinsten Berührungstransformation (5) von der auf S. 528 definirten Beschaffenheit transformirt werden, so braucht man nur zu untersuchen wie diese Glieder niedrigster Stufe sich bei der allgemeinsten Berührungstransformation von der Form (8) verhalten.

Der Inbegriff aller Berührungstransformationen von der Form (8) bildet augenscheinlich eine gewisse Gruppe Γ. Diese Gruppe Γ braucht allerdings nicht continuirlich zu sein, sie enthält aber jedenfalls (s. Abschnitt I, Kap. 18) eine continuirliche Untergruppe γ, welche von infinitesimalen Berührungstransformationen erzeugt ist. Man sieht leicht, dass γ gerade $n(2n+1)+1$ unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$
(10) \quad \begin{cases} x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i + x_i x_\varkappa r, \quad x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i, \quad y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i + y_i y_\varkappa r \\ \sum_1^n {}^\nu (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr \\ (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{cases}
$$

enthält, dass es also $(n(2n+1)+1)$-gliedrig ist. Die charakteristischen Functionen, welche zu den infinitesimalen Berührungstransformationen (10) gehören, sind sämmtlich von der zweiten Stufe in den x, y, z und lauten, wenn vom Vorzeichen und von Zahlenfaktoren abgesehen wird, folgendermassen:

$$
(11) \quad \begin{cases} x_i x_\varkappa, \quad x_i y_\varkappa, \quad y_i y_\varkappa, \quad z - \frac{1}{2} \sum_1^n {}^\nu x_\nu y_\nu \\ (i, \varkappa = 1 \cdots n). \end{cases}
$$

Es mag dahingestellt bleiben, ob die continuirliche Gruppe γ, welche von den infinitesimalen Transformationen (10) erzeugt wird, mit der vorhin definirten Gruppe Γ zusammenfällt oder nicht.

Hat eine charakteristische Function $U(x, y, z)$ in den x, y, z die *Stufen*zahl m, so ist die *Ordnungs*zahl der zugehörigen infinitesimalen Berührungstransformation:

$$
(\mathrm{A}) \quad \sum_1^n {}^i \left(\xi_i(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \eta_i(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y_i} \right) + \zeta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z}
$$

höchstens gleich m, das sieht man den Ausdrücken:

$$
\xi_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad \eta_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} - y_i \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \zeta = -U + \sum_1^n {}^\nu y_\nu \frac{\partial U}{\partial y_\nu}
$$

der ξ, η, ζ unmittelbar an. Auf der andern Seite gehört zu jeder infinitesimalen Berührungstransformation (A), welche in den x, y, z von der m-ten *Ordnung* ist, eine charakteristische Function:

$$\sum_1^n {}_\nu\, y_\nu\, \xi_\nu(x, y, z) - \zeta(x, y, z),$$

deren *Stufen*zahl in den x, y, z mindestens den Werth m und höchstens den Werth $2m + 1$ besitzt.

Insbesondere ergiebt sich, dass eine infinitesimale Berührungstransformation (A) in den x, y, z dann und nur dann von der ersten oder von höherer Ordnung ist, wenn sie eine charakteristische Function von zweiter oder höherer Stufe besitzt. Also können wir sagen:

Soll eine infinitesimale Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ als infinitesimale Punkttransformation des Raumes $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z$ aufgefasst den Punkt $x_i = y_i = z = 0$ invariant lassen, so ist nothwendig und hinreichend, dass ihre charakteristische Function in den x, y, z von zweiter oder höherer Stufe ist.

Nach S. 466 ordnet die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - \sum_1^n {}_i\, y_i dx_i = 0$$

dem Punkte $x_i = y_i = z = 0$ des Raumes $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z$ ein ebenes Bündel von ∞^{2n-1} Richtungen zu, welches durch die Gleichung: $z' = 0$ dargestellt wird, wofern man $x_1' \cdots x_n', y_1' \cdots y_n', z'$ als homogene Coordinaten der ∞^{2n} durch den Punkt: $x_i = y_i = z = 0$ gehenden Richtungen auffasst. Jede infinitesimale Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$, welche als infinitesimale Punkttransformation des Raumes x_i, y_i, z den Punkt: $x_i = y_i = z = 0$ festhält, lässt natürlich auch das ihm zugeordnete Bündel: $z' = 0$ stehen, transformirt aber im Allgemeinen die einzelnen Richtungen: $x_1' \cdots x_n', y_1' \cdots y_n'$ dieses Bündels; wir wollen näher untersuchen, in welcher Weise sie die betreffenden Richtungen transformirt.

Zu einer charakteristischen Function $U(x, y, z)$, welche in den x, y, z von der vierten oder von höherer Stufe ist, gehört eine infinitesimale Berührungstransformation von mindestens zweiter Ordnung in den x, y, z; diese Transformation lässt als infinitesimale Punkttransformation des Raumes x_i, y_i, z aufgefasst jede einzelne Richtung $x_1' \cdots x_n', y_1' \cdots y_n', z'$ und demnach auch jede einzelne Richtung des Bündels: $z' = 0$ invariant (vgl. S. 469).

Ist die charakteristische Function $U(x, y, z)$ von der dritten Stufe in den x, y, z, so hat sie die Form:

$$\sum_1^n {}_i\,(\alpha_i x_i z + \beta_i y_i z) + \psi^{(3)}(x, y) + \cdots,$$

wo $\psi^{(3)}$ eine ganze homogene Function dritter Ordnung von $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$ bezeichnet und wo die weggelassenen Glieder in den x, y, z von der vierten und von höherer Stufe sind; die zugehörige infinitesimale Berührungstransformation lautet daher bei Weglassung aller Glieder von zweiter und höherer Ordnung:

$$-\sum_1^n {}_i\, \alpha_i z q_i + \sum_1^n {}_i\, \beta_i z p_i + \cdots.$$

Eine infinitesimale Transformation von dieser Form lässt aber nach S. 469 ebenfalls jede einzelne Richtung des Bündels: $z' = 0$ stehen.

Endlich sei die charakteristische Function $U(x, y, z)$ von der zweiten Stufe in den x, y, z, sie habe also die Form:

$$U(x, y, z) = g^{(2)}(x, y, z) + \cdots,$$

wo $g^{(2)}$ eine ganze Function von zweiter Stufe bezeichnet, während die weggelassenen Glieder von höherer Stufe sind. In diesem Falle transformirt die zu U gehörige infinitesimale Berührungstransformation die Richtungen des Bündels: $z' = 0$ offenbar genau so, wie die infinitesimale Berührungstransformation mit der nachstehenden charakteristischen Function:

$$\mathfrak{U}(x, y, z) = g^{(2)}(x, y, z),$$

welche aus U durch Weglassung aller Glieder von höherer als der zweiten Stufe entsteht.

Die charakteristische Function $\mathfrak{U}(x, y, z)$ ist eine ganze Function von zweiter Stufe, sie lässt sich also aus den $n(2n + 1) + 1$ Functionen:

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{c} x_i x_\varkappa, \quad x_i y_\varkappa, \quad y_i y_\varkappa, \quad z - \frac{1}{2} \sum_1^n {}^\nu\, x_\nu y_\nu \\ (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{array} \right.$$

linear ableiten; hieraus ergiebt sich wiederum, dass die infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Function $\mathfrak{U}(x, y, z)$ der $(n(2n + 1) + 1)$-gliedrigen Berührungstransformationsgruppe:

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{c} x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i + x_i x_\varkappa r, \quad x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i, \quad y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i + y_i y_\varkappa r \\ \sum_1^n {}^\nu\, (x_\nu p_\nu + y_\nu q_\nu) + 2zr \\ (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{array} \right.$$

angehört. Endlich wissen wir von früher her (s. S. 466 ff.), dass die ∞^{2n-1} Richtungen $x_1' \cdots x_n'$, $y_1' \cdots y_n'$ des Bündels: $z' = 0$ bei den infinitesimalen Berührungstransformationen (10) durch gewisse infinitesimale Transformationen von der Gestalt:

$$(10') \qquad \left\{ \begin{array}{c} x_i' q_\varkappa' + x_\varkappa' q_i', \quad x_i' p_\varkappa' - y_\varkappa' q_i', \quad y_i' p_\varkappa' + y_\varkappa' p_i' \\ \sum_1^n {}^\nu\, x_\nu' p_\nu' + \sum_1^n {}^\nu\, y_\nu' q_\nu' \\ (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{array} \right.$$

transformirt werden, welche ihrerseits eine $(n(2n + 1) + 1)$-gliedrige Gruppe in den Veränderlichen $x_1' \cdots x_n'$, $y_1' \cdots y_n'$ erzeugen.

Ist also eine charakteristische Function $U(x, y, z)$ in den x, y, z von der dritten oder von höherer Stufe, so lässt die zu ihr gehörige infinitesimale Berührungstransformation alle ∞^{2n-1} Richtungen: $x_1' \cdots x_n'$, $y_1' \cdots y_n'$ des Bündels: $z' = 0$ stehen; ist dagegen die charakteristische Function von der zweiten Stufe in den x, y, z, so transformirt die zugehörige infinitesimale Berührungstransformation die Richtungen des Bündels: $z' = 0$ durch eine in der Gruppe (10') enthaltene infinitesimale Transformation, welche durch *die Glieder zweiter Stufe in der betreffenden charakteristischen Function vollständig bestimmt ist.*

Nicht unerwähnt bleiben darf der Umstand, dass die Functionen von der Form:

$$z - \frac{1}{2}\sum_1^n {}^\nu x_\nu y_\nu + \cdots$$

die einzigen charakteristischen Functionen von zweiter Stufe sind, deren zugehörige infinitesimale Berührungstransformationen jede einzelne Richtung des Bündels: $z' = 0$ festhalten.

Man kann den Begriff „charakteristische Function von m-ter Stufe" auch auf solche charakteristische Functionen übertragen, welche gewöhnliche Potenzreihen von $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0,\ y_1 - y_1^0, \cdots y_n - y_n^0,\ z - z^0$ sind. Zu diesem Zwecke braucht man sich nur die betreffenden Functionen nach Potenzen der $2n + 1$ Grössen:

$$x_i - x_i^0, \quad y_i - y_i^0, \quad z - z^0 - \sum_1^n {}^\nu y_\nu^0 (x_\nu - x_\nu^0)$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

entwickelt zu denken und jedes Glied von der Form:

$$\prod_1^n {}^i (x_i - x_i^0)^{\alpha_i} . (y_i - y_i^0)^{\beta_i} \left(z - z^0 - \sum_1^n {}^\nu y_\nu^0 (x_\nu - x_\nu^0)\right)^\gamma$$

als ein Glied von der Stufe: $\Sigma(\alpha_i + \beta_i) + 2\gamma$ in den $x_i - x_i^0$, $y_i - y_i^0$, $z - z^0 - \Sigma y_\nu^0 (x_\nu - x_\nu^0)$ zu bezeichnen. Dann erhält man ein dem Theoreme 85, S. 527 analoges Theorem, denn setzt man:

$$x_i - x_i^0 = \bar{x}_i, \quad y_i - y_i^0 = \bar{y}_i, \quad z - z_0 - \sum_1^n {}^\nu y_\nu^0 (x_\nu - x_\nu^0) = \bar{z},$$

und versteht man unter U und V gewöhnliche Potenzreihen der $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, so wird augenscheinlich:

$$\{UV\} = \sum_1^n {}^i \left[\frac{\partial U}{\partial \bar{y}_i}\left(\frac{\partial V}{\partial \bar{x}_i} + \bar{y}_i \frac{\partial V}{\partial \bar{z}}\right) - \frac{\partial V}{\partial \bar{y}_i}\left(\frac{\partial U}{\partial \bar{x}_i} + \bar{y}_i \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\right)\right] -$$
$$- U\frac{\partial V}{\partial \bar{z}} - V\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}.$$

Wir werden jedoch von dieser allgemeineren Auffassung des Stufenbegriffs keinen Gebrauch machen.

§ 124.

Sind: $U_1(x, y, z) \cdots U_m(x, y, z)$ charakteristische Functionen und $c_1 \cdots c_m$ irgend welche Constanten, so wollen wir sagen, *dass die charakteristische Function:*

$$c_1 \,.\, U_1(x, y, z) + \cdots + c_m \,.\, U_m(x, y, z)$$

aus den Functionen: $U_1 \cdots U_m$ *linear abgeleitet ist;* es entspricht das der Redeweise, welche wir in Abschnitt I auf S. 61 für infinitesimale Transformationen eingeführt haben. Ferner erinnern wir noch einmal daran, dass wir unter der Combination zweier charakteristischer Functionen U und V die Bildung der charakteristischen Function: $\{UV\}$ verstehen.

Endlich muss erwähnt werden, dass für drei beliebige charakteristische Functionen: $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$ stets die Gleichung:

$$\Big\{\{UV\}W\Big\} + \Big\{\{VW\}U\Big\} + \Big\{\{WU\}V\Big\} = 0 \tag{12}$$

identisch erfüllt ist.

Sind nämlich Af, Bf und Cf die drei infinitesimalen Berührungstransformationen mit den charakteristischen Functionen: U, V, W und setzen wir:

$$ABf - BAf = (AB), \quad u.\ s.\ w.,$$

so besteht, wie wir wissen, die Identität:

$$((AB)C) + ((BC)A) + ((CA)B) \equiv 0.$$

Nun aber ist die linke Seite dieser Identität das Symbol einer infinitesimalen Berührungstransformation, deren charakteristische Function nach Theorem 44, S. 275 durch die linke Seite der Gleichung (12) dargestellt wird, andrerseits ist die charakteristische Function einer infinitesimalen Berührungstransformation, deren Symbol identisch verschwindet, selbst identisch Null (s. S. 255), also ist die Gleichung (12) eine Identität.

Sind U, V und W alle von z frei, so fällt die Identität (12) offenbar mit der *Jacobi*schen Identität (s. S. 171) zusammen.

Nach diesen Vorbemerkungen wenden wir uns zur Untersuchung der endlichen continuirlichen Berührungstransformationsgruppen des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$.

Sollen r charakteristische Functionen: $U_1(x, y, z) \cdots U_r(x, y, z)$ eine r-gliedrige Berührungstransformationsgruppe des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ bestimmen, sollen also die zugehörigen infinitesimalen Berührungstransformationen eine r-gliedrige Gruppe erzeugen, so ist nach Theorem 53, S. 321 nothwendig und hinreichend, dass erstens keine der Functionen $U_1 \cdots U_r$ sich aus den übrigen linear ableiten lässt und dass zweitens Relationen von der Form:

$$(13) \qquad \{U_i U_\varkappa\} = \sum_1^r {}_\tau c_{i\varkappa\tau} U_\tau \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

bestehen. Sind diese Bedingungen erfüllt, so nennen wir die durch $U_1 \cdots U_r$ bestimmte r-gliedrige Berührungstransformationsgruppe einfach *die Gruppe:* $U_1 \cdots U_r$ (s. S. 321).

Bestimmen $U_1 \cdots U_r$ in dem angegebenen Sinne eine r-gliedrige Berührungstransformationsgruppe, so stellt der Ausdruck:

$$e_1 U_1 + \cdots + e_r U_r$$

mit den r willkürlichen Parametern $e_1 \cdots e_r$ offenbar die allgemeinste in dieser Gruppe enthaltene charakteristische Function dar; sind andrerseits V und W irgend zwei charakteristische Functionen der betreffenden Gruppe, so gehört stets auch die durch Combination von V und W entstehende charakteristische Function $\{VW\}$ der Gruppe an.

Es sei: $U_1(x, y, z) \cdots U_r(x, y, z)$ irgend eine r-gliedrige Berührungstransformationsgruppe des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$. Führen wir nun an Stelle der x, y, z neue Veränderliche x', y', z' ein vermöge einer beliebigen Berührungstransformation:

$$x_i' = \Phi_i(x, y, z), \quad y_i' = \Psi_i(x, y, z), \quad z' = \mathsf{X}(x, y, z)$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$, so gehen die r charakteristischen Functionen: $U_1(x, y, z) \cdots U_r(x, y, z)$ in gewisse neue charakteristische Functionen: $V_1(x', y', z') \cdots V_r(x', y', z')$ über und zwar gelten die Gleichungen:

$$(14) \qquad V_\varkappa(x', y', z') = \varrho(x, y, z) \,.\, U_\varkappa(x, y, z) \qquad (\varkappa = 1 \cdots r),$$

wo die Function $\varrho(x, y, z)$ aus der Identität:

$$d\mathsf{X} - \sum_1^n {}_i \Psi_i d\Phi_i = \varrho\left(dz - \sum_1^n {}_i y_i dx_i\right)$$

zu entnehmen ist. Zu gleicher Zeit verwandelt sich die charakteristische Function:

$$\{U_i U_\varkappa\}_{xyz} = \sum_1^n {}_\nu \left[\frac{\partial U_i}{\partial y_\nu}\left(\frac{\partial U_\varkappa}{\partial x_\nu} + y_\nu \frac{\partial U_\varkappa}{\partial z}\right) - \frac{\partial U_\varkappa}{\partial y_\nu}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_\nu} + y_\nu \frac{\partial U_i}{\partial z}\right)\right] -$$
$$- U_i \frac{\partial U_\varkappa}{\partial z} + U_\varkappa \frac{\partial U_i}{\partial z}$$

augenscheinlich in die charakteristische Function:

$$\{V_i V_\varkappa\}_{x'y'z'} = \sum_1^n {}_\nu \left[\frac{\partial V_i}{\partial y_\nu'}\left(\frac{\partial V_\varkappa}{\partial x_\nu'} + y_\nu' \frac{\partial V_\varkappa}{\partial z'}\right) - \frac{\partial V_\varkappa}{\partial y_\nu'}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_\nu'} + y_\nu' \frac{\partial V_i}{\partial z'}\right)\right] -$$
$$- V_i \frac{\partial V_\varkappa}{\partial z'} + V_\varkappa \frac{\partial V_i}{\partial z'},$$

es wird also:

$$\{V_i V_\varkappa\}_{x'y'z'} = \varrho(x, y, z) \, . \, \{U_i U_\varkappa\}_{xyz},$$

oder wegen der Relationen (13) und (14):

$$\{V_i V_\varkappa\}_{x'y'z'} = \sum_1^r{}_\tau \, c_{i\varkappa\tau} V_\tau(x', y', z') \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots r).$$

Demnach sind die Relationen (13) von der Wahl der Veränderlichen unabhängig, vorausgesetzt natürlich, dass man nur solche Variabelnänderungen zulässt, welche Berührungstransformationen des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ sind.

Wir denken uns jetzt die charakteristischen Functionen der Gruppe $U_1 \cdots U_r$ nach Potenzen von $x_i - x_i^0$, $y_i - y_i^0$, $z - z^0$ entwickelt, unter x_i^0, y_i^0, z^0 ein Werthsystem von allgemeiner Lage verstanden (s. Abschnitt I, S. 203) und zwar ein solches, für das nicht alle r Functionen $U_1(x, y, z) \cdots U_r(x, y, z)$ verschwinden. Der Einfachheit wegen wollen wir aber wie auf S. 462 die Veränderlichen vermittelst einer geeigneten Berührungstransformation von vornherein so wählen, dass die Grössen x_i^0, y_i^0, z^0 sämmtlich gleich Null werden.

Im Folgenden setzen wir daher, sobald wir von Berührungstransformationsgruppen im Allgemeinen reden, immer voraus, dass die charakteristischen Functionen der betreffenden Gruppen gewöhnliche Potenzreihen der x, y, z sind und für $x_i = y_i = z = 0$ nicht alle verschwinden; unter $x_i = y_i = z = 0$ verstehen wir dabei jedes Mal ein Werthsystem von allgemeiner Lage.

Da die charakteristischen Functionen der Gruppe $U_1 \cdots U_r$ unter den gemachten Voraussetzungen für: $x_i = y_i = z = 0$ nicht alle verschwinden, so enthält unsre Gruppe jedenfalls eine charakteristische Function, welche in den x, y, z von nullter Stufe ist und die Form besitzt:

$$1 + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder in den x, y, z von der ersten oder von höherer Stufe sind.

Andrerseits gehört zu der Gruppe: $U_1 \cdots U_r$ eine endliche positive ganze Zahl s von solcher Beschaffenheit, dass die Gruppe zwar charakteristische Functionen von s-ter Stufe in den x, y, z enthält, dagegen keine charakteristische Function von $(s+1)$-ter oder höherer Stufe.

In der That, die Gruppe $U_1 \cdots U_r$ ist endlich, es giebt daher nach Abschnitt I, Theorem 29, S. 192 eine endliche positive Zahl s' von solcher Beschaffenheit, dass die Gruppe in der Umgebung von

$x_i = y_i = z = 0$ keine infinitesimale Transformation enthält, deren Reihenentwickelung nach den x, y, z mit Gliedern von höherer als der s'-ten Ordnung beginnt. Nun gehört zu jeder infinitesimalen Berührungstransformation, deren Reihenentwickelung nach den x, y, z mit Gliedern l-ter Ordnung beginnt, eine charakteristische Function von höchstens $(2l + 1)$-ter Stufe in den x, y, z (s. S. 533). Folglich enthält die Gruppe: $U_1 \cdots U_r$ jedenfalls keine charakteristische Function, deren Stufenzahl in den x, y, z grösser ist als $2s' + 1$, mit andern Worten, es giebt wirklich eine endliche positive ganze Zahl s von der oben definirten Beschaffenheit; s ist offenbar $\leqq 2s' + 1$.

Aus dem Gesagten ergiebt sich, dass jede charakteristische Function: $e_1 U_1 + \cdots + e_r U_r$ der Gruppe $U_1 \cdots U_r$ in den x, y, z entweder von s-ter oder von niedrigerer Stufe ist. Folglich muss die Gruppe für jedes ganzzahlige $\varkappa$, welches der Bedingung: $0 \leqq \varkappa \leqq s$ genügt, eine gewisse Anzahl, etwa $m_\varkappa \geqq 0$ charakteristische Functionen:

$$V_1^{(\varkappa)} \cdots V_{m_\varkappa}^{(\varkappa)}$$

enthalten, die in den x, y, z von der $\varkappa$-ten Stufe sind und aus denen sich keine charakteristische Function von $(\varkappa + 1)$-ter oder höherer Stufe linear ableiten lässt. Die Summe der $s + 1$ hierdurch definirten ganzen Zahlen: $m_0, m_1 \cdots m_s$ ist augenscheinlich gleich r; die Zahl m_0 insbesondere hat den Werth 1, die Zahl m_s ist unter den gemachten Voraussetzungen grösser als Null; ob auch die Zahlen $m_1 \cdots m_{s-1}$ sämmtlich von Null verschieden sind, das wollen wir unentschieden lassen.

Denken wir uns in der Gruppe $U_1 \cdots U_r$ für jedes $\varkappa \leqq s$ $m_\varkappa$ charakteristische Functionen:

$$V_1^{(\varkappa)} \cdots V_{m_\varkappa}^{(\varkappa)}$$

von der angegebenen Beschaffenheit ausgewählt, so erscheint unsre Gruppe in der Form:

$$(15) \quad \begin{cases} N = 1 + \cdots \\ V_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = v_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(x, y, z) + \cdots \qquad (i_\varkappa = 1 \cdots m_\varkappa) \\ \qquad (\varkappa = 1 \cdots s). \end{cases}$$

Hier bezeichnen die $v_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$ ganze Functionen von $\varkappa$-ter Stufe in den x, y, z und zwar sind die $m_\varkappa$ ganzen Functionen: $v_1^{(\varkappa)} \cdots v_{m_\varkappa}^{(\varkappa)}$ immer so beschaffen, dass sich keine von ihnen aus den übrigen linear ableiten lässt; die weggelassenen Glieder sind in jedem einzelnen Falle von höherer Stufe in den x, y, z als die geschriebenen.

Zu den schon getroffenen Festsetzungen wollen wir jetzt noch die hinzufügen, dass unsre Berührungstransformationsgruppe: $U_1 \cdots U_r$ als Gruppe von Punkttransformationen des $(2n+1)$-fach ausgedehnten Raumes: $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$, z *transitiv* sein soll, sie soll also in der Umgebung des Werthsystems: $x_i = y_i = z = 0$ von allgemeiner Lage $2n+1$ unabhängige infinitesimale Transformationen nullter Ordnung enthalten, aus denen sich keine infinitesimale Transformation von erster oder höherer Ordnung linear ableiten lässt. Da jede infinitesimale Transformation von nullter Ordnung in den x, y, z eine charakteristische Function von nullter oder erster Stufe besitzt, so kommt unser Verlangen offenbar darauf hinaus, dass die Gruppe $2n+1$ charakteristische Functionen von nullter oder erster Stufe enthalten soll, aus denen sich keine charakteristische Function von zweiter oder höherer Stufe in den x, y, z linear ableiten lässt. Folglich muss es in unsrer Gruppe $2n+1$ charakteristische Functionen von der Form:

$$1 + \cdots, \quad x_i + \cdots, \quad y_i + \cdots \qquad {\scriptstyle (i=1 \cdots n)}$$

geben. Wir können demnach sagen:

Ist die r-gliedrige Berührungstransformationsgruppe $U_1 \cdots U_r$ des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ als Gruppe von Punkttransformationen des Raumes $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$, z transitiv, so enthält sie r charakteristische Functionen von der Form:

$$(16) \qquad \begin{cases} N = 1 + \cdots, \quad X_i = x_i + \cdots, \quad Y_i = y_i + \cdots \\ \qquad V_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = v_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(x, y, z) + \cdots \\ \qquad {\scriptstyle (i=1 \cdots n;\ i_\varkappa = 1 \cdots m_\varkappa;\ \varkappa = 2 \cdots s).} \end{cases}$$

Hier bedürfen die $v^{(\varkappa)}(x, y, z)$ wohl keiner nochmaligen Erklärung. Die Summe: $2n+1+m_2+\cdots+m_s$ ist selbstverständlich gleich r.

Während wir vorhin unentschieden liessen, ob alle die Zahlen: $m_2 \cdots m_{s-1}$ von Null verschieden sind, können wir in dem gegenwärtigen Falle beweisen, dass keine einzige dieser Zahlen gleich Null ist. Wir brauchen dabei natürlich nur den Fall: $s > 2$ zu berücksichtigen.

Da m_s sicher grösser ist als Null, so giebt es in unsrer Gruppe mindestens eine charakteristische Function von s-ter Stufe; wir wählen eine aus, etwa:

$$V_1^{(s)} = v_1^{(s)}(x, y, z) + \cdots$$

und combiniren sie mit $X_1 \cdots X_n$, $Y_1 \cdots Y_n$. Auf diese Weise bekommen wir die folgenden $2n$ in unsrer Gruppe enthaltenen charakteristischen Functionen:

$$\left\{X_i V_1^{(s)}\right\} = -\frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial y_i} - x_i \frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial z} + \cdots$$

$$\left\{Y_i V_1^{(s)}\right\} = \frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial z} - y_i \frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial z} + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder von s-ter und höherer Stufe in den x, y, z sind. Gäbe es nun in unsrer Gruppe keine charakteristische Function $(s-1)$-ter Stufe, so müssten die ganzen Functionen $(s-1)$-ter Stufe:

$$\frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial y_i} + x_i \frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial z} \qquad (i = 1 \cdots n)$$

sämmtlich identisch verschwinden, es müsste also $v_1^{(s)}$ von allen x, y, z frei sein, das aber ist unmöglich, denn $v_1^{(s)}$ ist eine ganze Function von s-ter Stufe und s können wir > 2 voraussetzen. Demnach enthält unsre Gruppe mindestens eine charakteristische $(s-1)$-ter Stufe und die Zahl m_{s-1} ist jedenfalls > 0. Hieraus folgt in derselben Weise, dass auch $m_{s-2} > 0$ ist u. s. w., kurz man sieht, dass unter den Zahlen $m_2 \cdots m_{s-1}$ keine verschwinden kann.

Wir wollen von jetzt an, um uns bequemer ausdrücken zu können, die r-gliedrige Berührungstransformationsgruppe, welche durch die r charakteristischen Functionen (16) bestimmt ist, kurz die Gruppe G nennen.

Combinirt man die m_2 charakteristischen Functionen zweiter Stufe:

$$V_j^{(2)} = v_j^{(2)}(x, y, z) + \cdots \qquad (j = 1 \cdots m_2)$$

paarweise mit einander, so erhält man nach Theorem 85, S. 527:

$$\left\{V_i^{(2)} V_j^{(2)}\right\} = \left\{v_i^{(2)} v_j^{(2)}\right\} + \cdots \qquad (17)$$

$$(i, j = 1 \cdots m_2),$$

wo $\left\{v_i^{(2)} v_j^{(2)}\right\}$ eine ganze Function zweiter Stufe ist, während die weggelassenen Glieder von dritter und höherer Stufe sind. Da sich nun die Functionen (17) offenbar aus den $r - 2n - 1$ Functionen:

$$\left\{ V_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = v_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(x, y, z) + \cdots \right. \qquad (18)$$

$$(i_\varkappa = 1 \cdots m_\varkappa; \quad \varkappa = 2 \cdots s)$$

linear ableiten lassen müssen, so ergiebt sich, dass jedes $\left\{v_i^{(2)} v_j^{(2)}\right\}$ aus $v_1^{(2)} \cdots v_{m_2}^{(2)}$ linear abgeleitet werden kann, mit andern Worten: die m_2 ganzen Functionen zweiter Stufe:

$$(19) \qquad \overline{V}_j^{(2)} = v_j^{(2)}(x,\, y,\, z) \qquad (j = 1 \cdots m_2)$$

bestimmen als charakteristische Functionen aufgefasst eine Berührungstransformationsgruppe des Raumes $z,\, x_1 \cdots x_n$. Diese Gruppe, welche g heissen mag, ist augenscheinlich m_2-gliedrig und eine Untergruppe der $(n(2n+1)+1)$-gliedrigen Berührungstransformationsgruppe:

$$(20) \qquad x_i x_\varkappa, \quad x_i y_\varkappa, \quad y_i y_\varkappa, \quad z - \tfrac{1}{2} \sum_1^n {}_\nu\, x_\nu y_\nu$$
$$(i,\, \varkappa = 1 \cdots n).$$

Wir sehen also: *Zu jeder r-gliedrigen Berührungstransformationsgruppe des Raumes $z,\, x_1 \cdots x_n$, welche als Gruppe von Punkttransformationen des Raumes $x_1 \cdots x_n,\, y_1 \cdots y_n,\, z$ transitiv ist*), gehört eine ganz bestimmte Untergruppe der Berührungstransformationsgruppe* (20). Die allgemeinste charakteristische Function dieser Untergruppe wird gebildet von den Gliedern zweiter Stufe der allgemeinsten in der Gruppe G enthaltenen charakteristischen Function von zweiter Stufe.

Die Gruppe g hat eine sehr einfache Bedeutung.

Wir bemerken zunächst, dass auch die $r - 2n - 1$ charakteristischen Functionen (18) für sich genommen eine $(r-2n-1)$-gliedrige Berührungstransformationsgruppe G' bestimmen, welche in G als Untergruppe enthalten ist. Als Gruppe von Punkttransformationen des Raumes $x_1 \cdots x_n,\, y_1 \cdots y_n,\, z$ aufgefasst, lässt G' den Punkt: $x_i = y_i = z = 0$ invariant, ja es ist sogar die grösste in G enthaltene continuirliche Untergruppe, welche diesen Punkt invariant lässt, das folgt ohne Weiteres aus der auf S. 533 gemachten Bemerkung. Nun ordnet die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - \sum_1^n {}_\nu\, y_\nu dx_\nu = 0$$

dem Punkte $x_i = y_i = z = 0$ ein gewisses ebenes Bündel von ∞^{2n-1} Richtungen: $x_1' \cdots x_n',\, y_1' \cdots y_n',\, z'$ zu, welches durch die Gleichung $z' = 0$ dargestellt wird. Bei der Gruppe G' bleibt dieses Bündel natürlich ebenfalls invariant, dagegen werden die einzelnen Richtungen des Bündels im Allgemeinen unter einander vertauscht. Erinnern wir uns schliesslich daran, dass nach S. 533 f. jede charakteristische Function, welche von dritter oder höherer Stufe ist, eine infinitesimale Berührungs-

---

*) Eigentlich müsste noch hinzugefügt werden, dass sich die charakteristischen Functionen von G alle in der Umgebung von $x_i = y_i = z = 0$ regulär verhalten sollen und dass $x_i = y_i = z = 0$ ein Punkt von allgemeiner Lage sein soll; vgl. jedoch das auf S. 538 Gesagte.

transformation liefert, welche als infinitesimale Punkttransformation des Raumes $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z$ aufgefasst, jede einzelne Richtung des Bündels $z' = 0$ stehen lässt, so ergiebt sich: die Gruppen G' und g transformiren die ∞^{2n-1} Richtungen des Bündels: $z' = 0$ beide in genau derselben Weise.

Deuten wir demnach die Gruppe G als eine Gruppe von Punkttransformationen des Raumes $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z$ und halten wir den Punkt $x_i = y_i = z = 0$ fest, so werden die ∞^{2n-1} Richtungen des Bündels: $z' = 0$ bei den übrig bleibenden Transformationen von G genau so transformirt wie bei der Gruppe g.

Denken wir uns jetzt in die Gruppe G an Stelle der x, y, z neue Veränderliche $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ eingeführt vermöge einer Berührungstransformation:

$$(5) \qquad \mathfrak{x}_i = \Xi_i(x, y, z), \quad \mathfrak{y}_i = \mathsf{H}_i(x, y, z), \quad \mathfrak{z} = \mathsf{Z}(x, y, z) \quad (i = 1 \cdots n)$$

von der auf S. 528 definirten Beschaffenheit. Die Berührungstransformationsgruppe des Raumes $\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n$, welche wir so erhalten, möge $\mathfrak{G}$ heissen. Ihre charakteristischen Functionen ergeben sich durch Ausführung der Berührungstransformation (5) auf die charakteristischen Functionen (16), sie haben daher nach den Entwickelungen der SS. 528 ff. die Gestalt:

$$(21) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{W}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = \mathfrak{v}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) + \cdots \\ (i_\varkappa = 1 \cdots m_\varkappa; \ \varkappa = 0, 1 \cdots s; \ m_0 = 1, m_1 = 2n), \end{array} \right.$$

wo $\mathfrak{v}_1^{(\varkappa)} \cdots \mathfrak{v}_{m_\varkappa}^{(\varkappa)}$ ganze Functionen von $\varkappa$-ter Stufe in den $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ sind und zwar solche ganze Functionen, unter denen sich keine aus den übrigen linear ableiten lässt.

Will man die ganze Function $\mathfrak{v}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ wirklich berechnen, so hat man nur nach Anleitung von S. 531 die zu (5) gehörige verkürzte Berührungstransformation:

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{x}_i = \sum_1^n {}_\nu (a_{i\nu} x_\nu + b_{i\nu} y_\nu) \\ \mathfrak{y}_i = \sum_1^n {}_\nu (\mathfrak{a}_{i\nu} x_\nu + \mathfrak{b}_{i\nu} y_\nu) \\ \mathfrak{z} = \mathfrak{C} z + \sum_{\mu\nu}^{1 \cdots n} (\delta_{\mu\nu} x_\mu x_\nu + \varepsilon_{\mu\nu} x_\mu y_\nu + \vartheta_{\mu\nu} y_\mu y_\nu) \\ (i = 1 \cdots n) \end{array} \right.$$

zu bilden, dann besteht vermöge (8) die Gleichung:

$$\mathfrak{v}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(\mathfrak{x},\, \mathfrak{y},\, \mathfrak{z}) = \mathfrak{C}\,.\, v_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(x,\, y,\, z)\,,$$

es ist also $\mathfrak{v}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(\mathfrak{x},\, \mathfrak{y},\, \mathfrak{z})$ diejenige charakteristische Function, in welche die charakteristische Function $v_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(x,\, y,\, z)$ bei der verkürzten Berührungstransformation (8) übergeht.

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist natürlich aufgefasst als Gruppe von Punkttransformationen des Raumes $\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n,\, \mathfrak{y}_1 \cdots \mathfrak{y}_n,\, \mathfrak{z}$ transitiv, es gehört daher nach S. 542 zu ihr eine gewisse Untergruppe $\mathfrak{g}$ der Berührungstransformationsgruppe:

$$\mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_\varkappa, \quad \mathfrak{x}_i \mathfrak{y}_\varkappa, \quad \mathfrak{y}_i \mathfrak{y}_\varkappa, \quad \mathfrak{z} - \tfrac{1}{2} \sum_1^n {}^{\nu}\, \mathfrak{x}_\nu \mathfrak{y}_\nu$$

$$(i,\, \varkappa = 1 \cdots n);$$

diese Untergruppe $\mathfrak{g}$ ist augenscheinlich m_2-gliedrig und hat die Form:

$$\overline{\mathfrak{V}}_j^{(2)} = \mathfrak{v}_j^{(2)}(\mathfrak{x},\, \mathfrak{y},\, \mathfrak{z}) \qquad (j = 1 \cdots m_2).$$

Erinnern wir uns aber des vorhin auseinandergesetzten Zusammenhangs zwischen $v_j^{(2)}(x,\, y,\, z)$ und $\mathfrak{v}_j^{(2)}(\mathfrak{x},\, \mathfrak{y},\, \mathfrak{z})$, so erkennen wir unmittelbar, dass $\mathfrak{g}$ mit der früher definirten Gruppe g durch die verkürzte Berührungstransformation (8) ähnlich ist. Also können wir sagen:

Sind die beiden r-gliedrigen Berührungstransformationsgruppen G und $\mathfrak{G}$ des Raumes $z,\, x_1 \cdots x_n$ aufgefasst als Gruppen von Punkttransformationen des Raumes $x_1 \cdots x_n,\, y_1 \cdots y_n,\, z$ transitiv und sind sie durch eine Berührungstransformation (5) *von der auf S.* 528 *definirten Beschaffenheit mit einander ähnlich, so sind die beiden nach S.* 542 *zu ihnen gehörigen Untergruppen g und $\mathfrak{g}$ der Berührungstransformationsgruppe* (20) *durch die zu* (5) *gehörige verkürzte Berührungstransformation* (8) *mit einander ähnlich.*

Die vorstehenden Ueberlegungen führen uns zu einer naturgemässen Eintheilung der Berührungstransformationsgruppen des Raumes $z,\, x_1 \cdots x_n$, welche als Gruppen von Punkttransformationen des Raumes $x_1 \cdots x_n,\, y_1 \cdots y_n,\, z$ transitiv sind. *Wir wollen nämlich zwei solche Gruppen G und $\mathfrak{G}$ immer dann in dieselbe Klasse rechnen, wenn die zu ihnen gehörigen Untergruppen g und $\mathfrak{g}$ der Berührungstransformationsgruppe* (20) *durch eine Berührungstransformation von der Form* (8) *mit einander ähnlich sind; dagegen rechnen wir G und $\mathfrak{G}$ zu verschiedenen Klassen, wenn g und $\mathfrak{g}$ nicht durch eine Berührungstransformation von der Form* (8) *ähnlich sind.*

Man vergesse nicht, dass der Inbegriff aller Berührungstransformationen (8) eine Gruppe bildet, in welcher die Gruppe (20) als grösste continuirliche Gruppe steckt (s. S. 532). Sollte es sich herausstellen, dass der Inbegriff aller Berührungstransformationen (8) mit dem Inbegriff aller endlichen Transformationen der Gruppe (20) zusammenfällt, so würde unsre Klassifikation einfach so zu verstehen sein, dass G und $\mathfrak{G}$ dann und nur dann in dieselbe Klasse gehören, wenn die zugehörigen Gruppen g und $\mathfrak{g}$ innerhalb der Gruppe (20) mit einander gleichberechtigt sind.

Die soeben auseinandergesetzte Klassifikation der Berührungstransformationsgruppen des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$, welche als Gruppen von Punkttransformationen des Raumes $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z$ transitiv sind, könnten wir nun ähnlich wie in Abschnitt I, S. 605 ff. benutzen, um einen Ansatz zur Bestimmung aller dieser Gruppen zu geben. Wir wollen das jedoch unterlassen und wollen in den beiden nächsten Paragraphen nur noch einen besonderen Fall erledigen, der allerdings von grosser Wichtigkeit ist.

§ 125.

Combiniren wir die charakteristische Function zweiter Stufe:

$$Z = z - \tfrac{1}{2} \sum_1^n {}_\nu\, x_\nu y_\nu + \cdots$$

mit der charakteristischen Function m-ter Stufe:

$$W = w^{(m)}(x, y, z) + \cdots,$$

wo $w^{(m)}$ eine ganze Function m-ter Stufe bezeichnet, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
\{ZW\} &= \left\{z - \tfrac{1}{2} \sum_1^n {}_\nu\, x_\nu y_\nu,\ w^{(m)}\right\} + \cdots \\
&= -\tfrac{1}{2} \sum_1^n {}_\nu\, x_\nu \left(\frac{\partial w^{(m)}}{\partial x_\nu} + y_\nu \frac{\partial w^{(m)}}{\partial z}\right) - \\
&\quad - \tfrac{1}{2} \sum_1^n {}_\nu\, y_\nu \frac{\partial w^{(m)}}{\partial y_\nu} + w^{(m)} - \\
&\quad - \left(z - \tfrac{1}{2} \sum_1^n {}_\nu\, x_\nu y_\nu\right) \frac{\partial w^{(m)}}{\partial z} + \cdots
\end{aligned}$$

oder mit Benutzung der Relation:

$$\sum_1^n {}_\nu \left(x_\nu \frac{\partial w^{(m)}}{\partial x_\nu} + y_\nu \frac{\partial w^{(m)}}{\partial y_\nu}\right) + 2z \frac{\partial w^{(m)}}{\partial z} = m \,.\, w^{(m)}$$

einfach:

$$\{Z W\} = \frac{2-m}{2} \cdot w^{(m)}(x, y, z) + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder von der $(m+1)$-ten und von höherer Stufe sind. Es gilt also der

Satz 1. *Combinirt man die charakteristische Function:*

$$Z = z - \tfrac{1}{2} \sum_1^n {}_\nu \, x_\nu y_\nu + \cdots$$

mit einer charakteristischen Function W, welche in den x, y, z von der m-ten Stufe ist, so wird die entstehende charakteristische Function $\{Z W\}$ wieder von der m-ten Stufe in den x, y, z und zwar ergeben sich ihre Glieder m-ter Stufe aus den Gliedern m-ter Stufe von W durch Multiplication mit $\frac{1}{2}(2-m)$.

Den vorstehenden Satz wollen wir jetzt auf gewisse Gruppen von Berührungstransformationen anwenden.

Es sei:

$$W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = w_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(x, y, z) + \cdots$$
$$(\varkappa = 0, 1 \cdots s; \quad i_\varkappa = 1 \cdots m_\varkappa)$$

irgend eine $(m_0 + m_1 + \cdots + m_s)$-gliedrige Berührungstransformationsgruppe des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$, welche für jedes $\varkappa \leqq s$ gerade $m_\varkappa$ charakteristische Functionen: $W_1^{(\varkappa)} \cdots W_{m_\varkappa}^{(\varkappa)}$ von $\varkappa$-ter Stufe enthält, aus denen sich keine Function von $(\varkappa+1)$-ter oder höherer Stufe linear ableiten lässt. Dabei setzen wir nicht gerade voraus, dass die Zahlen m_0, $m_1 \cdots m_{s-1}$ alle von Null verschieden sind, während m_s natürlich nicht verschwinden darf. Dagegen wollen wir annehmen, dass unter den m_2 charakteristischen Functionen zweiter Stufe in unsrer Gruppe eine Function von der Gestalt:

$$Z = z - \tfrac{1}{2} \sum_1^n {}_\nu \, x_\nu y_\nu + \cdots$$

vorhanden ist.

Unter den gemachten Voraussetzungen bestehen zwischen Z und den charakteristischen Functionen s-ter Stufe: $W_1^{(s)} \cdots W_{m_s}^{(s)}$ Relationen von der Gestalt:

$$\left\{Z W_j^{(s)}\right\} = \frac{2-s}{2} \cdot W_j^{(s)} \qquad (j = 1 \cdots m_s). \tag{22}$$

Ferner bestehen zwischen Z und den charakteristischen Functionen $(s-1)$-ter Stufe: $W_1^{(s-1)} \cdots W_{m_{s-1}}^{(s-1)}$ Relationen von der Gestalt:

$$\left\{Z W_j^{(s-1)}\right\} = \frac{3-s}{2} \cdot W_j^{(s-1)} + \sum_1^{m_s} {}_\tau C_{j\tau} W_\tau^{(s)}$$

oder, wenn wir setzen:

$$\mathfrak{W}_j^{(s-1)} = W_j^{(s-1)} + \sum_1^{m_s} {}_\tau \lambda_{j\tau} W_\tau^{(s)},$$

die nachstehenden:

$$\left\{Z \mathfrak{W}_j^{(s-1)}\right\} = \frac{3-s}{2} \cdot \mathfrak{W}_j^{(s-1)} + \sum_1^{m_s} {}_\tau (C_{j\tau} - \tfrac{1}{2}\lambda_{j\tau}) W_\tau^{(s)};$$

wählen wir daher $\lambda_{j\tau} = 2C_{j\tau}$ und schreiben wir für $\mathfrak{W}_j^{(s-1)}$ wieder $W_j^{(s-1)}$, so haben wir einfach:

$$\left\{Z W_j^{(s-1)}\right\} = \frac{3-s}{2} W_j^{(s-1)} \qquad (j = 1 \cdots m_{s-1}).$$

Hiermit sind alle charakteristischen Functionen $(s-1)$-ter Stufe in unsrer Gruppe normirt (vgl. Abschnitt I, S. 610).

In derselben Weise können wir die charakteristischen Functionen $(s-2)$-ter Stufe normiren, setzen wir nämlich:

$$\mathfrak{W}_j^{(s-2)} = W_j^{(s-2)} + \sum_1^{m_{s-1}} {}_\tau \mathrm{K}_{j\tau} W_\tau^{(s-1)} + \sum_1^{m_s} {}_\tau \Lambda_{j\tau} W_\tau^{(s)}$$
$$(j = 1 \cdots m_{s-2}),$$

verfügen wir über die K und Λ in geeigneter Weise und schreiben wir zuletzt wieder $W_j^{(s-2)}$ für $\mathfrak{W}_j^{(s-2)}$, so erhalten wir:

$$\left\{Z W_j^{(s-2)}\right\} = \frac{4-s}{2} W_j^{(s-2)} \qquad (j = 1 \cdots m_{s-2}).$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so gelangen wir schliesslich soweit, dass alle charakteristischen Functionen unsrer Gruppe normirt sind, mit alleiniger Ausnahme der Function Z selbst, und dass Relationen von der einfachen Form:

$$(23) \qquad \left\{Z W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}\right\} = \frac{2-\varkappa}{2} W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$$
$$(\varkappa = 0, 1 \cdots s; \quad i_\varkappa = 1 \cdots m_\varkappa)$$

bestehen.

Andrerseits sind nun irgend zwei charakteristische Functionen: $W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$ und $W_{j_l}^{(l)}$ unsrer Gruppe durch eine Relation von der Gestalt:

$$(24)\quad \begin{cases} \left\{ W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} W_{j_l}^{(l)} \right\} = \sum_1^{m_{\varkappa+l-2}} {}_\tau\, c_{i_\varkappa j_l \tau} W_\tau^{(\varkappa+l-2)} + \\ \qquad + \sum_{\varkappa+l-1}^{s} {}_\pi \sum_{\tau_\pi}^{1\cdots m_\pi} C_{i_\varkappa j_l \tau_\pi}^{(\pi)} W_{\tau_\pi}^{(\pi)} \\ (i_\varkappa = 1 \cdots m_\varkappa;\; j_l = 1 \cdots m_l;\; \varkappa, l = 0, 1 \cdots s) \end{cases}$$

verknüpft, in welcher die $c_{i_\varkappa j_l \tau}$ durch die Glieder niedrigster Stufe von $W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$ und $W_{j_l}^{(l)}$ vollständig bestimmt sind und jedesmal verschwinden, sobald $\varkappa + l - 2 > s$ oder < 0 ist. Um auch die C zu finden, bilden wir die Identität:

$$\left\{ Z \left\{ W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} W_{j_l}^{(l)} \right\} \right\} + \left\{ W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} \left\{ W_{j_l}^{(l)} Z \right\} \right\} + \left\{ W_{j_l}^{(l)} \left\{ Z W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} \right\} \right\} = 0,$$

welche bei Benutzung der Relationen (23) die Form:

$$\left\{ Z \left\{ W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} W_{j_l}^{(l)} \right\} \right\} = \frac{4 - \varkappa - l}{2} \left\{ W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} W_{j_l}^{(l)} \right\}$$

annimmt. Setzen wir in diese Identität an Stelle von $\left\{ W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} W_{j_l}^{(l)} \right\}$ den Ausdruck (24) ein, so bekommen wir nach Fortlassung der sich weghebenden Glieder mit $W_\tau^{(\varkappa+l-2)}$ die Relation:

$$\sum_{\varkappa+l-1}^{s} {}_\pi \sum_{\tau_\pi}^{1\cdots m_\pi} \frac{2 - \pi}{2} \cdot C_{i_\varkappa j_l \tau_\pi}^{(\pi)} W_{\tau_\pi}^{(\pi)} = \frac{4 - \varkappa - l}{2} \sum_{\varkappa+l-1}^{s} {}_\pi \sum_{\tau_\pi}^{1\cdots m_\pi} C_{i_\varkappa j_l \tau_\pi}^{(\pi)} W_{\tau_\pi}^{(\pi)},$$

welche sich in die folgenden zerlegt:

$$(2 + \pi - \varkappa - l)\, C_{i_\varkappa j_l \tau_\pi}^{(\pi)} = 0$$

$$(\pi = \varkappa + l - 1,\; \varkappa + l,\; \cdots s),$$

es müssen also die C sämmtlich verschwinden.

Um dieses Ergebniss bequem aussprechen zu können, wollen wir darauf aufmerksam machen, dass zu jeder Berührungstransformationsgruppe:

$$W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = w_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(x, y, z) + \cdots$$

$$(\varkappa = 0,\; 1 \cdots s;\quad i_\varkappa = 1 \cdots m_\varkappa)$$

eine ebensovielgliedrige verkürzte Berührungstransformationsgruppe:

$$\overline{W}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = w_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(x, y, z)$$

$$(\varkappa = 0,\; 1 \cdots s;\quad i_\varkappa = 1 \cdots m_\varkappa)$$

gehört, deren charakteristische Functionen $\varkappa$-ter Stufe aus den $m_\varkappa$ Functionen $\varkappa$-ter Stufe: $W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$ dadurch entstehen, dass man alle Glieder

$(\varkappa + 1)$-ter und höherer Stufe weglässt. Wenn wir das berücksichtigen, können wir sagen:

Satz 2. *Enthält eine $(m_0 + m_1 + \cdots + m_s)$-gliedrige Berührungstransformationsgruppe des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ für jedes $\varkappa \leqq s$ gerade $m_\varkappa$ charakteristische Functionen $\varkappa$-ter Stufe:*

$$W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = w_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(x, y, z) + \cdots \qquad (i_\varkappa = 1 \cdots m_\varkappa),$$

aus denen sich keine Function von $(\varkappa + 1)$-ter oder höherer Stufe linear ableiten lässt, und enthält sie insbesondere eine charakteristische Function zweiter Stufe von der Form:

$$Z = z - \tfrac{1}{2} \sum_1^n {}^\nu x_\nu y_\nu + \cdots,$$

so ist sie gleichzusammengesetzt mit der verkürzten Berührungstransformationsgruppe:

$$\overline{W}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = w_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(x, y, z)$$
$$(\varkappa = 0,\ 1 \cdots s;\quad i_\varkappa = 1 \cdots m_\varkappa),$$

deren charakteristische Functionen $\varkappa$-ter Stufe $\overline{W}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$ aus den Functionen $W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$ durch Fortlassung aller Glieder $(\varkappa + 1)$-ter und höherer Stufe entstehen; zugleich ist es stets möglich, die charakteristischen Functionen $W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$ so zu normiren, dass zwischen den $W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$ dieselben Beziehungen:

$$\left\{ W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} W_{j_l}^{(l)} \right\} = \sum_1^{m_{\varkappa+l-2}} {}^\tau c_{i_\varkappa j_l \tau} W_\tau^{(\varkappa+l-2)}$$
$$(\varkappa, l = 0,\ 1 \cdots s;\quad i_\varkappa = 1 \cdots m_\varkappa;\quad j_l = 1 \cdots m_l)$$

mit denselben Constanten bestehen, wie zwischen den $\overline{W}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$:

$$\left\{ \overline{W}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} \overline{W}_{j_l}^{(l)} \right\} = \sum_1^{m_{\varkappa+l-2}} {}^\tau c_{i_\varkappa j_l \tau} \overline{W}_\tau^{(\varkappa+l-2)}$$
$$(\varkappa, l = 0,\ 1 \cdots s;\quad i_\varkappa = 1 \cdots m_\varkappa;\quad j_l = 1 \cdots m_l).$$

§ 126.

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen wollen wir jetzt auf den besonderen Fall anwenden, dass die betreffende Berührungstransformationsgruppe des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ als Gruppe von Punkttransformationen des Raumes $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z$ transitiv ist.

Wir betrachten also jetzt eine $(2n + 1 + m_2 + \cdots + m_s)$-gliedrige Berührungstransformationsgruppe, welche $2n + 1$ charakteristische Functionen nullter und erster Stufe von der Form:

$$N = 1 + \cdots, \quad X_i = x_i + \cdots, \quad Y_i = y_i + \cdots$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

enthält und ausserdem noch für jedes $\varkappa$, das der Bedingung: $2 \leqq \varkappa \leqq s$ genügt, gerade $m_\varkappa$ charakteristische Functionen $\varkappa$-ter Stufe:

$$W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = w_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(x, y, z) + \cdots \qquad (i_\varkappa = 1 \cdots m_\varkappa),$$

aus denen sich keine Function $(\varkappa + 1)$-ter oder höherer Stufe linear ableiten lässt. Insbesondere setzen wir natürlich voraus, dass es unter den charakteristischen Functionen zweiter Stufe unsrer Gruppe eine von der Form:

$$Z = z - \tfrac{1}{2} \sum_1^n {}_\nu\, x_\nu y_\nu + \cdots$$

giebt. Erwähnt mag auch werden, dass die Zahlen $m_2, m_3 \cdots m_s$ sämmtlich von Null verschieden sind (vgl. S. 540 f.).

Auf Grund der Entwickelungen des vorigen Paragraphen wollen wir uns von vornherein die charakteristischen Functionen $N, X_i, Y_i, W_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$ unsrer Gruppe so normirt denken, dass zwischen ihnen genau dieselben Beziehungen bestehen, wie zwischen den charakteristischen Functionen:

$$\overline{N} = 1, \quad \overline{X}_i = x_i, \quad \overline{Y}_i = y_i$$
$$\overline{W}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = w_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(x, y, z)$$
$$(i = 1 \cdots n, \quad \varkappa = 2 \cdots s; \quad i_\varkappa = 1 \cdots m_\varkappa)$$

der zugehörigen verkürzten Berührungstransformationsgruppe. Es werden demnach die $2n + 2$ charakteristischen Functionen:

$$(25) \qquad \left\{ \begin{array}{c} N = 1 + \cdots, \quad X_i = x_i + \cdots, \quad Y_i = y_i + \cdots \\ Z = z - \tfrac{1}{2} \sum_1^n {}_\nu\, x_\nu y_\nu + \cdots \\ (i = 1 \cdots n) \end{array} \right.$$

für sich genommen eine $(2n + 2)$-gliedrige Berührungstransformationsgruppe bestimmen, deren Zusammensetzung durch die Relationen:

$$(26) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \{X_i X_\varkappa\} = 0, \quad \{Y_i X_\varkappa\} = \varepsilon_{i\varkappa} N, \quad \{Y_i Y_\varkappa\} = 0 \\ \{N X_i\} = 0, \quad \{N Y_i\} = 0 \\ \{Z N\} = N, \quad \{Z X_i\} = \tfrac{1}{2} X_i, \quad \{Z Y_i\} = \tfrac{1}{2} Y_i \\ (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{array} \right.$$

dargestellt wird.

Wir schreiben jetzt die Berührungstransformationsgruppe (25) nach Anleitung von S. 273, Satz 10 als eine Gruppe von homogenen

Berührungstransformationen in den $2n+2$ Veränderlichen: $\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n+1}$, $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{n+1}$, wir setzen also:

$$(27) \quad \begin{cases} x_1 = \mathfrak{x}_1, \cdots x_n = \mathfrak{x}_n, \quad z = \mathfrak{x}_{n+1} \\ y_1 = -\dfrac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{p}_{n+1}}, \cdots y_n = -\dfrac{\mathfrak{p}_n}{\mathfrak{p}_{n+1}} \end{cases}$$

und multipliciren ausserdem noch jede einzelne der charakteristischen Functionen (25) mit: $-\mathfrak{p}_{n+1}$. Auf diese Weise erhalten wir die $(2n+2)$-gliedrige homogene Berührungstransformationsgruppe:

$$(25') \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_i(\mathfrak{x}, \mathfrak{p}) = -\mathfrak{p}_{n+1} X_i, \quad \mathfrak{X}_{n+1}(\mathfrak{x}, \mathfrak{p}) = -\mathfrak{p}_{n+1} Z \\ \mathfrak{P}_i(\mathfrak{x}, \mathfrak{p}) = -\mathfrak{p}_{n+1} Y_i, \quad \mathfrak{P}_{n+1} = -\mathfrak{p}_{n+1} N \\ \qquad (i = 1 \cdots n), \end{cases}$$

deren Zusammensetzung nach den Entwickelungen der SS. 274 und 275 durch die Relationen:

$$(26') \begin{cases} (\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_\varkappa)_{\mathfrak{x}\mathfrak{p}} = 0, \quad (\mathfrak{P}_i \mathfrak{X}_\varkappa)_{\mathfrak{x}\mathfrak{p}} = \varepsilon_{i\varkappa} \mathfrak{P}_{n+1}, \quad (\mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_\varkappa)_{\mathfrak{x}\mathfrak{p}} = 0 \\ (\mathfrak{P}_{n+1} \mathfrak{X}_i)_{\mathfrak{x}\mathfrak{p}} = 0, \quad (\mathfrak{P}_{n+1} \mathfrak{P}_i)_{\mathfrak{x}\mathfrak{p}} = 0 \\ (\mathfrak{X}_{n+1} \mathfrak{P}_{n+1})_{\mathfrak{x}\mathfrak{p}} = \mathfrak{P}_{n+1}, \quad (\mathfrak{X}_{n+1} \mathfrak{X}_i)_{\mathfrak{x}\mathfrak{p}} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{X}_i, \quad (\mathfrak{X}_{n+1} \mathfrak{P}_i)_{\mathfrak{x}\mathfrak{p}} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}_i \\ \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{cases}$$

definirt ist. Man beachte nun, dass die $2n+2$ Functionen:

$$\mathfrak{X}_i' = -\mathfrak{x}_i' \mathfrak{p}_{n+1}', \quad \mathfrak{X}_{n+1}' = -\mathfrak{x}_{n+1}' \mathfrak{p}_{n+1}' - \tfrac{1}{2} \sum_1^n{}_\nu \mathfrak{x}_\nu' \mathfrak{p}_\nu'$$

$$\mathfrak{P}_i' = \mathfrak{p}_i', \quad \mathfrak{P}_{n+1}' = -\mathfrak{p}_{n+1}'$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

ihrerseits Relationen von der Form:

$$(26'') \begin{cases} (\mathfrak{X}_i' \mathfrak{X}_\varkappa')_{\mathfrak{x}'\mathfrak{p}'} = 0, \quad (\mathfrak{P}_i' \mathfrak{X}_\varkappa')_{\mathfrak{x}'\mathfrak{p}'} = \varepsilon_{i\varkappa} \mathfrak{P}_{n+1}', \quad (\mathfrak{P}_i' \mathfrak{P}_\varkappa')_{\mathfrak{x}'\mathfrak{p}'} = 0 \\ (\mathfrak{P}_{n+1}' \mathfrak{X}_i')_{\mathfrak{x}'\mathfrak{p}'} = 0, \quad (\mathfrak{P}_{n+1}' \mathfrak{P}_i')_{\mathfrak{x}'\mathfrak{p}'} = 0 \\ (\mathfrak{X}_{n+1}' \mathfrak{P}_{n+1}')_{\mathfrak{x}'\mathfrak{p}'} = \mathfrak{P}_{n+1}', (\mathfrak{X}_{n+1}' \mathfrak{X}_i')_{\mathfrak{x}'\mathfrak{p}'} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{X}_i', (\mathfrak{X}_{n+1}' \mathfrak{P}_i')_{\mathfrak{x}'\mathfrak{p}'} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}_i' \\ \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n) \end{cases}$$

erfüllen und demnach auch eine $(2n+2)$-gliedrige homogene Berührungstransformationsgruppe bestimmen. Man beachte ferner, dass sowohl $\mathfrak{X}_1 \cdots \mathfrak{X}_{n+1}$, $\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_{n+1}$ unabhängige Functionen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{p}$ sind, als auch $\mathfrak{X}_1' \cdots \mathfrak{X}_{n+1}'$, $\mathfrak{P}_1' \cdots \mathfrak{P}_{n+1}'$ unabhängige Functionen der $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{p}'$. Hieraus folgt sofort (s. Theorem 52, S. 311), dass es zwischen den Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{p}'$ eine homogene Berührungstransformation giebt, welche $\mathfrak{X}_1 \cdots \mathfrak{X}_{n+1}$, $\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_{n+1}$ bezüglich in $\mathfrak{X}_1' \cdots \mathfrak{X}_{n+1}'$, $\mathfrak{P}_1' \cdots \mathfrak{P}_{n+1}'$ überführt. Diese homogene Berührungstransformation ist augenscheinlich durch die $2n+2$ Gleichungen:

$$(28) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_1' = \mathfrak{X}_1, \cdots \mathfrak{X}_{n+1}' = \mathfrak{X}_{n+1} \\ \mathfrak{P}_1' = \mathfrak{P}_1, \cdots \mathfrak{P}_{n+1}' = \mathfrak{P}_{n+1} \end{cases}$$

vollständig bestimmt, denn dieselben lassen sich sowohl nach den $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{p}'$ als nach den $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{p}$ auflösen.

Um die homogene Berührungstransformation (28) als eine Berührungstransformation des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ zu schreiben, müssen wir (vgl. S. 139 ff.) vermöge der Gleichungen (27) und der Gleichungen:

$$\mathfrak{x}_1' = x_1', \cdots \mathfrak{x}_n' = x_n', \quad \mathfrak{x}_{n+1}' = z'$$
$$-\frac{\mathfrak{p}_1'}{\mathfrak{p}_{n+1}'} = y_1', \cdots -\frac{\mathfrak{p}_n'}{\mathfrak{p}_{n+1}'} = y_n'$$

an Stelle der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{p}'$ die Veränderlichen z, x, y, z', x', y' einführen, dann bekommen wir aus den Gleichungen (28) die nachstehenden:

$$x_i' = \frac{X_i}{N}, \quad y_i' = \frac{Y_i}{N}, \quad z' - \tfrac{1}{2}\sum_1^n {}^{\nu}\, x_\nu' y_\nu' = \frac{Z}{N}$$
$$(i = 1 \cdots n),$$

welche sich unmittelbar nach $x_1' \cdots x_n'$, z', $y_1' \cdots y_n'$ auflösen lassen:

$$(29) \quad \begin{cases} x_1' = \dfrac{X_1}{N}, \cdots x_n' = \dfrac{X_n}{N}, \quad z' = \dfrac{Z}{N} + \tfrac{1}{2}\displaystyle\sum_1^n {}^{\nu}\, \frac{X_\nu}{N}\frac{Y_\nu}{N} \\ \qquad y_1' = \dfrac{Y_1}{N}, \cdots y_n' = \dfrac{Y_n}{N}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (29) stellen natürlich eine Berührungstransformation des Raumes z, $x_1 \cdots x_n$ dar und zwar besteht vermöge ihrer augenscheinlich die Relation:

$$dz' - \sum_1^n {}^{\nu}\, y_\nu' dx_\nu' = \frac{1}{N}\left(dz - \sum_1^n {}^{\nu}\, y_\nu dx_\nu\right).$$

Es folgt aus dem vorhin über die homogene Berührungstransformation (28) Gesagten und ist auch unmittelbar ersichtlich, dass die $(2n+2)$-gliedrige Berührungstransformationsgruppe (25) bei der Berührungstransformation (29) die einfache Form:

$$(30) \quad \begin{cases} \overline{N} = 1, \quad \overline{X}_i = x_i', \quad \overline{Y}_i = y_i' \\ \overline{Z} = z' - \tfrac{1}{2}\displaystyle\sum_1^n {}^{\nu}\, x_\nu' y_\nu' \\ (i = 1 \cdots n) \end{cases}$$

erhält. Nunmehr muss noch untersucht werden, wie sich die übrigen charakteristischen Functionen $V_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$ unsrer Gruppe bei der Berührungstransformation (29) verhalten.

Wir bemerken zunächst, dass die Berührungstransformation (29) die einfache Form:

$$x_i' = x_i + \cdots, \quad y_i' = y_i + \cdots, \quad z' = z + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

besitzt, wo auf der rechten Seite die weggelassenen Glieder stets von höherer Stufe in den x, y, z sind als die geschriebenen. Es werden demnach auch umgekehrt die x, y, z gewöhnliche Potenzreihen der x', y', z' und zwar:

$$x_i = x_i' + \cdots, \quad y_i = y_i' + \cdots, \quad z = z' + \cdots \quad (i = 1 \cdots n).$$

Führen wir nun die Berührungstransformation (29) auf die charakteristische Function $\varkappa$-ter Stufe:

$$V_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = v_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(x, y, z) + \cdots$$

aus, so erhalten wir nach S. 528 ff. eine charakteristische Function von der Form:

$$\overline{V}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = \frac{1}{N} V_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = v_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(x, y, z) + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder von $(\varkappa + 1)$-ter oder höherer Stufe in den x, y, z sind. Augenscheinlich wird $\overline{V}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$ auch in den x', y', z' von der $\varkappa$-ten Stufe und erhält einfach die Gestalt:

$$\overline{V}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = v_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(x', y', z') + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder von $(\varkappa + 1)$-ter und höherer Stufe in den x', y', z' sind.

Schliesslich ist noch zu beachten, dass zwischen Z und $V_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$ eine Relation von der Form:

$$\left\{ Z V_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} \right\}_{x,y,z} = \frac{2 - \varkappa}{2} V_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$$

besteht, zwischen $\overline{Z}$ und $\overline{V}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$ wird daher (vgl. S. 537 f.) eine Relation von der entsprechenden Form:

$$\left\{ \overline{Z} \overline{V}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} \right\}_{x', y', z'} = \frac{2 - \varkappa}{2} \overline{V}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$$

bestehen. Hieraus ergiebt sich wegen der Form von $\overline{Z}$, dass in der Reihenentwickelung von $\overline{V}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$ kein Glied von $(\varkappa + 1)$-ter oder höherer Stufe in den x', y', z' vorkommen kann, dass $\overline{V}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$ vielmehr eine ganze Function $\varkappa$-ter Stufe der x', y', z' sein muss:

$$\overline{V}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = v_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(x', y', z') \quad (\varkappa = 2 \cdots s, \; i_\varkappa = 1 \cdots m_\varkappa).$$

Damit haben wir das wichtige

Theorem 86. *Es sei G eine endliche continuirliche Berührungstransformationsgruppe des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ und zwar eine, die als Gruppe von Punkttransformationen des Raumes $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z$ transitiv ist, G enthalte also in der Umgebung des Werthsystems $x_i = y_i = z = 0$ von allgemeiner Lage $2n+1$ charakteristische Functionen nullter und erster Stufe von der Form:*

$$N = 1 + \cdots, \quad X_i = x_i + \cdots, \quad Y_i = y_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

und ausserdem noch für jedes $\varkappa$, welches der Bedingung $2 \leqq \varkappa \leqq s$ genügt, gerade $m_\varkappa > 0$ charakteristische Functionen $\varkappa$-ter Stufe von der Form:

$$V_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = v_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(x, y, z) + \cdots \quad (i_\varkappa = 1 \cdots m),$$

aus denen sich keine Function von $(\varkappa+1)$-ter oder höherer Stufe linear ableiten lässt. Hierbei bezeichnet $v_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}$ eine ganze Function $\varkappa$-ter Stufe von den x, y, z, die weggelassenen Glieder sind von $(\varkappa+1)$-ter oder höherer Stufe; die Summe $2n+1+m_2+\cdots+m_s$ ist die Gliederzahl der Gruppe G. Enthält nun G unter seinen charakteristischen Functionen zweiter Stufe insbesondere eine von der Form:

$$Z = z - \tfrac{1}{2} \sum_1^n {}_\nu \, x_\nu y_\nu + \cdots,$$

so ist es durch eine Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \cdots x_n$ mit der verkürzten Berührungstransformationsgruppe:

$$\overline{N} = 1, \quad \overline{X}_i = x_i, \quad \overline{Y}_i = y_i$$
$$\overline{V}_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = v_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}(x, y, z)$$
$$(i = 1 \cdots n; \quad \varkappa = 2 \cdots s; \quad i_\varkappa = 1 \cdots m_\varkappa)$$

ähnlich, deren charakteristische Functionen m-ter Stufe aus den charakteristischen Functionen m-ter Stufe von G durch Weglassung aller Glieder von $(m+1)$-ter und höherer Stufe entstehen.

Auf Grund der Entwickelungen des gegenwärtigen Kapitels, namentlich mit Hülfe des vorstehenden Theorems würden sich die Untersuchungen des vorhergehenden Kapitels wesentlich vereinfachen lassen; wir wollen uns jedoch mit dem Hinweise hierauf begnügen. —

Berichtigungen.

Zu Abschnitt I.

S. 17, Z. 17 v. u.: statt (1) lies: (2).
S. 159, Z. 14 v. o.: statt $Z_m f$ und m-gliedrige lies: $Z_l f$ und l-gliedrige.
S. 193, Z. 9 v. u. lies: $\frac{\partial f}{\partial x_j}$.
S. 241, Z. 11 v. u. lies: Allgemeinen.
S. 252, Z. 8 v. o.: statt $X_\varkappa f$ lies: $X'_\varkappa f$.
S. 291, Z. 18 v. o. ist das Wort „offenbar“ zu tilgen.
S. 402, Z. 6 v. u.: statt jetzt lies: da.
S. 552, Z. 16 v. u.: statt doch lies: jedoch.
S. 606, Z. 4 v. o.: statt $T_\varkappa^{(1)}$ lies: $T_j^{(1)}$.

Zu Abschnitt II.

S. 25, Z. 11 v. u.: statt Punkt lies: Fusspunkt.
S. 27, Z. 3 v. o.: statt $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x}$ lies: $\frac{\partial X}{\partial y}$.
S. 96 ist in der ersten Zeile der Formeln (18) hinzuzufügen: $= 0$.
S. 141, Z. 22 v. o.: statt $\sigma(z, x, p)$ lies: $\varrho(z, x, p)$.
S. 177, Z. 2 v. o. lies: transformationen.