TRAITÉ
D'ALGÈBRE
ÉLÉMENTAIRE.

PAR

J. N. NOËL,

PROFESSEUR DES SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES, PRINCIPAL DE L'ATHÉNÉE DE LUXEMBOURG, CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ DES LETTRES, SCIENCES ET ARTS, DE METZ.

DEUXIÈME ÉDITION,

REVUE, CORRIGÉE ET AUGMENTÉE.

LUXEMBOURG,

DE L'IMPRIMERIE DE J. LAMORT, PLACE D'ARMES.

1827.

Les exemplaires voulus par la loi ont été déposés.

AVERTISSEMENT.

La table des matières du présent ouvrage montre assez qu'il renferme tous les objets qui, pour l'ordinaire, font partie de l'enseignement raisonné de l'algèbre. Les principes y sont éclaircis par beaucoup d'exemples et de problèmes; mais la crainte de nuire à la liaison des idées, en séparant les théories par des applications trop multipliées, n'a pas permis de faire entrer dans ce volume, toutes les questions que l'on croit propres à exercer les élèves et à leur inspirer le goût de l'étude de l'algèbre : on a réuni ces questions avec d'autres recherches, dans l'ouvrage publié cette année sous le titre de *Mélanges d'algèbre*. Plusieurs de ces recherches se rattachent à d'importantes théories, et méritent l'attention des élèves, tant par l'intérêt qui leur est propre, que par les exercices variés qu'elles fournissent.

Comme la théorie du plus grand commun diviseur algébrique dépend, sous quelque rapport, de la résolution des équations, il a paru convenable de ne s'en occuper qu'immédiatement avant l'élimination en général et la recherche des racines égales, dont elle est la base. Cette théorie, placée immédiatement après la division, offre des difficultés aux élèves, encore peu familiarisés avec les combinaisons du calcul algébrique; et comme alors elle ne sert qu'à simplifier les fractions littérales, on y supplée souvent par la décomposition en facteurs, ainsi qu'on en a donné plusieurs exemples.

Quant à la méthode du plus grand commun diviseur numérique, on n'a pas cru devoir en grossir ce volume, d'autant plus que cette méthode et les conséquences qu'elle fournit pour la divisibilité des nombres, sont données, avec toute la rigueur et les détails nécessaires, dans l'Arithmétique élémentaire. C'est aussi pour cela qu'on n'a pas parlé des proportions et de leurs applications à la solution des problèmes, qui se trouvent également dans l'Arithmétique.

Les fractions continues servant à compléter plusieurs théories algébriques, on a dû les faire entrer dans le présent ouvrage, avec leurs applications les plus importantes. De cette manière on pourra les supprimer dans l'Arithmétique, où elles reçoivent peu d'applications, et ce traité d'algèbre sera d'une utilité plus étendue; ce qui est conforme au but qu'on s'est proposé, de publier un ouvrage élémentaire, renfermant les notions et les principes propres à faciliter l'étude de la haute analyse. On a voulu en outre donner aux diverses théories, la clarté et la rigueur désirables; et le lecteur jugera jusqu'à quel point on y est parvenu.

Remarque. Les nombres mis entre parenthèses indiquent l'article sur lequel s'appuie celui dont on s'occupe.

TRAITÉ D'ALGÈBRE.

Notions préliminaires.

1. Le but d'un calcul quelconque est toujours de déterminer une ou plusieurs grandeurs inconnues, à l'aide d'un certain nombre de quantités données.

2. Si les valeurs des quantités qu'on regarde comme données, sont réellement déterminées, c'est-à-dire, sont exprimées par des nombres et en chiffres, comme en arithmétique, les opérations pourront s'effectuer à mesure que les raisonnemens y conduiront; le résultat ne conservera donc aucune trace des nombres qui l'auront fourni; et par conséquent, on ne verra pas aisément comment on pourrait obtenir ce résultat, dans les calculs de même espèce, sans recommencer les raisonnemens qui l'ont donné, et qui sont quelquefois très-compliqués.

3. Au contraire, si les quantités données sont énoncées d'une manière *indéterminée*, les raisonnemens auront lieu pour toutes les valeurs possibles de ces quantités; les résultats auront donc aussi lieu pour toutes ces valeurs; et par conséquent, ces résultats seront des *règles* pour calculer les valeurs inconnues dans toutes les *questions* de même nature (*).

4. On voit donc qu'il sera toujours très-avantageux d'énoncer les nombres donnés d'un problème, d'une manière indéterminée. Mais alors, il faudra raisonner et calculer avec ces nombres indéterminés; et c'est ce qu'on fera toujours au moyen de l'*algèbre*. Ainsi,

L'ALGÈBRE est la science du calcul des quantités énoncées d'une manière indéterminée. Son but est non-seulement de

(*) On distingue deux sortes de *questions*, savoir : les *théorèmes* et les *problèmes*. Dans les théorèmes, on se propose d'établir certaines propriétés de nombres, au moyen d'un raisonnement, appelé *Démonstration*. Dans les problèmes, on a pour but de trouver des nombres inconnus, à l'aide d'autres nombres donnés, qui ont avec les premiers, des *relations* indiquées par l'énoncé de la question. *Résoudre* un problème, c'est effectuer les raisonnemens et les calculs qui conduisent aux valeurs des quantités inconnues.

résoudre les questions que l'on peut proposer sur les quantités, mais aussi de donner des règles qui conviennent à tous les cas particuliers d'un même problème, quels que soient les nombres donnés de ce problème.

5. Pour remplir ce double but de l'algèbre, il est nécessaire d'exprimer les quantités indéterminées par des signes plus abrégés que ceux du langage ordinaire (*). Or, on a choisi les lettres de l'alphabet, parce qu'elles n'ont aucune valeur par elles-mêmes, et qu'on sait déjà les nommer et les écrire : on est convenu de représenter les quantités qu'on regarde comme données, par les premières lettres a, b, c, d, etc., et les quantités réellement inconnues, par les dernières lettres x, y, z, etc.

A l'égard des nombres déterminés, on les désigne par des chiffres, comme en arithmétique; ou bien, par les premières lettres a, b, c, etc., de l'alphabet, lorsque les expressions en chiffres sont encore trop longues.

Enfin, comme les phrases qui tiennent aux opérations de l'arithmétique reviennent continuellement dans le calcul, on est convenu, pour mieux abréger, de représenter les expressions, *augmenté de* ou *plus*, *diminué de* ou *moins*, *multiplié par*, *divisé par*, *est égal à* ou *égal*, *est plus grand que*, *est plus petit que*, etc., respectivement par les signes, $+$, $-$, $\times$, $:$, $=$, $>$, $<$, etc. On remplace aussi le signe $\times$ par un point, et le signe $:$ par un trait horizontal, en écrivant le dividende au-dessus et le diviseur au-dessous.

6. D'après ces conventions, on écrit dans un espace beaucoup plus petit, la phrase suivante :

Les trois quarts d'un nombre inconnu, augmentés de douze, égalent le triple du même nombre inconnu, diminué de quarante-huit.

En effet, en désignant par x l'expression *le nombre inconnu*, la phrase dont il s'agit devient :

(*) Lorsque les quantités indéterminées sont énoncées en langage ordinaire, pour peu que les relations entre les quantités connues et les quantités inconnues soient compliquées, les phrases successives des raisonnemens et des calculs deviennent très-longues; il est par conséquent très-difficile d'en saisir toutes les parties, et d'opérer toutes les combinaisons propres à conduire aux valeurs inconnues.

$$\frac{3}{4}x + 12 = 3x - 48.$$

7. Par là on voit qu'en faisant usage des abréviations précédentes et de celles qu'on pourrait encore introduire, on ne sera guère plus de temps pour écrire les phrases successives des raisonnemens et des calculs que pour les énoncer; on pourra donc mettre sous les yeux les phrases dont il s'agit; et c'est là un très-grand avantage; car, par ce moyen, non-seulement on soulagera beaucoup la mémoire, mais encore on rapprochera les objets de manière qu'il sera très-facile d'en saisir les différens rapports, et de voir ce qu'il faut faire pour arriver aux valeurs inconnues. On devra donc toujours se servir des abréviations dont il s'agit; et c'est ce que nous ferons désormais.

8. Par exemple, *connaissant la somme* 14 *et la différence* 6 *de deux nombres, trouver chacun de ces nombres?*

En désignant par x le plus petit des deux nombres cherchés; le plus grand, qui le surpasse de 6, sera $x + 6$: et comme la somme de ces deux nombres égale 14, il s'ensuit qu'on a

$$x + x + 6 = 14.$$

Mais $x + x$, c'est 2 fois x, ou $2x$; donc l'*égalité* précédente est la même chose que

$$2x + 6 = 14 \text{ (*)}.$$

Or, si du tout 14, on ôte une partie 6, il restera l'autre $2x$; et par conséquent, la 2ᵉ égalité précédente équivaut à celle-ci :

$$2x = 14 - 6 = 8.$$

Enfin, puisque 2 fois x valent 8, x seul vaudra la moitié de 8, ou 4; l'égalité qu'on vient de trouver équivaut donc à

$$x = 4.$$

Ainsi, le plus petit des deux nombres cherchés vaut 4; le plus grand vaut donc $4 + 6$, ou 10. En effet, la somme de ces deux nombres est 14, et leur différence, 6 (**).

(*) On appelle *égalité*, toute expression composée de deux quantités séparées par le signe $=$.

(**) La marche que nous venons de suivre ne changerait pas, si l'on résolvait, en langage ordinaire, le problème proposé; et il en résulte qu'en général, pour résoudre un problème, il faut d'abord chercher les phrases ou égalités qui expriment les relations que l'énoncé établit entre les quantités connues et les quantités inconnues; puis, transformer ces

9. Si les nombres donnés du problème étaient différens de 14 et de 6, il faudrait recommencer les raisonnemens et les calculs qu'on vient de faire, pour avoir la valeur du plus petit nombre; et cela tient à ce que la valeur 4, à laquelle on est parvenu, ne conserve aucune trace des nombres qui l'ont fournie. Mais il n'en serait pas de même si l'on énonçait les nombres donnés du problème, d'une manière indéterminée, comme il suit :

Connaissant la somme et la différence de deux nombres, trouver chacun de ces nombres?

En effet, soit a la somme donnée, b la différence donnée, et x le plus petit des deux nombres cherchés; le plus grand, qui le surpasse de b, sera donc $x+b$: et comme la somme de ces deux nombres est égale à a, il s'ensuit qu'on a

$$x+x+b=a.$$

Mais comme $x+x$, c'est $2x$, l'égalité précédente est la même chose que

$$2x+b=a.$$

Or, si du tout a, on ôte une partie b, il restera l'autre $2x$; donc

$$2x=a-b.$$

Enfin, puisque 2 fois x valent $a-b$, x seul vaudra la moitié de $a-b$, et par conséquent

$$x=\frac{a-b}{2}.$$

Ce résultat montre que, *pour avoir le plus petit nombre, il faut ôter la différence donnée de la somme donnée, et prendre la moitié du reste.*

Ainsi, le résultat des raisonnemens et des calculs précédens, est une *règle* pour calculer la valeur du plus petit nombre, dans tous les problèmes de même espèce; et cela ne pouvait manquer d'arriver, car le résultat dont il s'agit ayant été obtenu sans assigner de valeurs particulières aux nombres a et b, doit nécessairement avoir lieu pour toutes les valeurs de ces nombres.

---

phrases en une suite d'autres équivalentes, dont les dernières fassent connaître les valeurs inconnues. Mais, malgré l'emploi des signes abréviatifs, cette méthode serait souvent impraticable, si l'algèbre ne fournissait d'ailleurs des règles pour opérer les transformations que cette même méthode exige.

Donc, si l'on veut connaître la valeur du plus petit nombre, dans l'un des cas particuliers du problème proposé, il suffira de substituer, dans l'expression $x = \frac{a-b}{2}$, les valeurs que prendront a et b, et d'effectuer les opérations indiquées. Par exemple, si a vaut 14, et b, 6, le plus petit nombre x vaudra $\frac{14-6}{2}$ ou 4; si a vaut 105, et b, 57, le plus petit nombre x vaudra $\frac{105-57}{2}$ ou 6; et ainsi de suite.

10. D'après cela, on voit que l'avantage de représenter les nombres donnés du problème, par les premières lettres de l'alphabet, ne consiste pas seulement à abréger les raisonnemens; mais encore à donner des expressions montrant comment on résoudra tous les cas particuliers du problème proposé, sans recommencer aucun raisonnement.

11. On appelle *formule*, l'expression qui montre quelles opérations on doit effectuer sur des nombres donnés, pour en avoir un autre qu'on cherche. Ainsi $x = \frac{a-b}{2}$ est une formule: c'est la traduction, en signes algébriques, de la règle pour résoudre le problème qui l'a donnée.

12. D'après ce qui précède, on voit que l'algèbre est une espèce de langue qui se compose d'une suite de signes abréviatifs et généraux, au moyen desquels on exprime, d'une manière très-facile et très-abrégée, les raisonnemens et les opérations que nécessite le calcul des quantités indéterminées, c'est-à-dire, l'art de résoudre les questions numériques.

Ainsi, pour appliquer l'algèbre à la démonstration d'un théorème, ou à la solution d'un problème, il est nécessaire de connaître les opérations du calcul des quantités indéterminées. Et comme ces opérations deviennent d'autant plus faciles que les expressions des quantités sont plus simples, il faut d'abord apprendre à simplifier les expressions algébriques.

Moyens de simplifier les expressions algébriques.

13. On appelle *expression algébrique* ou *quantité littérale*, toute quantité écrite en langage algébrique, c'est-à-dire exprimée au moyen des signes abréviatifs de l'algèbre. Ainsi $3a - 4b$ est

une quantité littérale; c'est l'expression algébrique de 3 fois le nombre donné a, moins 4 fois le nombre donné b.

14. On appelle *termes* les quantités qui, dans une expression algébrique, sont séparées par les signes $+$ et $-$; cette expression elle-même est un *polynome* ou une quantité *complexe*. Ainsi $3a-b+2c$ est un polynome, dont les termes sont $3a$, $-b$ et $+2c$.

15. Une expression algébrique est appelée *monome*, *binome*, *trinome*, *quadrinome*, etc., suivant qu'elle est composée de 1, 2, 3, 4, etc., termes. Par exemple, $-2a$ est un monome, $a-2b$ un binome, $2a-b-c$ un trinome, etc.

16. Le *signe* d'un terme est le signe $+$ ou le signe $-$ qui précède ce terme; en observant que *si un terme n'a pas de signe écrit, il est censé avoir le signe* $+$. En effet, dans $+a$, le signe $+$ qui précède a, indique que a est ajouté à rien; or, si à rien on ajoute a, on aura nécessairement a pour somme : donc $+a=a$ ou $a=+a$.

Pareillement $+2a-b=2a-b$. D'où il suit que quand un terme, précédé du signe $+$, commence une expression algébrique, on doit, pour abréger, supprimer ce signe $+$. Mais il n'en serait pas de même, si le terme avait le signe $-$; car $-b$, par exemple, n'est pas la même chose que b.

17. Pour abréger un produit indiqué, tel que $3\times a\times b\times c$, on sous-entend le signe $\times$, et on écrit simplement $3abc$. Réciproquement, l'expression $6abcd=6\times a\times b\times c\times d$.

Mais si l'on avait le produit 4×7, on ne pourrait pas supprimer le signe $\times$; car alors on aurait 47, expression identique avec celle du nombre 47, tandis que $4\times 7=28$. Dans ce cas, on remplace le signe $\times$ par un point, et on écrit $4\times 7=4\cdot 7$.

18. Dans le produit $29abc$, 29 est le facteur *numérique*; a, b et c les facteurs *littéraux*, et abc la *partie littérale*.

19. Lorsque dans un terme, il entre un facteur numérique, on le place toujours à la gauche des lettres de ce terme, sur la même ligne, et alors on l'appelle *coefficient*. Ainsi, au lieu de $a9$, on écrira $9a$, et 9 sera le coefficient.

En général, le *coefficient* d'un terme est un nombre qui, placé à la gauche des lettres de ce terme et sur la même ligne, indique combien de fois on doit prendre le nombre exprimé par ces lettres. Par exemple, dans $4ab$, le coefficient 4 indique qu'on doit prendre 4 fois le produit ab. Dans $1a$ le coefficient est 1. Mais alors on peut se dispenser de l'écrire, car $1a = a$. Réciproquement, *lorsque le coefficient n'est pas écrit, il est* 1 ; car $a = 1a$, $x = 1x$, etc.

20. Lorsqu'une même lettre est plusieurs fois facteur dans un produit, on est convenu, pour abréger, de n'y écrire qu'une seule fois cette lettre ; mais d'indiquer, par un nombre placé à sa droite et au-dessus, combien de fois elle est facteur dans le produit proposé : ce nombre s'appelle *exposant* de la lettre. Ainsi, au lieu de $a \times a \times a \times a$, on écrit simplement a^4, qu'on énonce *a quatre*, et 4 est l'exposant de a (*).

En général, l'*exposant* d'une lettre est un nombre qui, écrit à la droite et au-dessus de cette lettre, montre combien de fois elle est facteur dans le produit. Par exemple, dans a^3b^5, l'exposant 3 de a fait voir que a est 3 fois facteur dans le produit, et l'exposant 5 de b montre que b est facteur 5 fois ; de sorte que

$$a^3b^5 = a \times a \times a \times b \times b \times b \times b \times b.$$

Et l'on voit combien l'exposant abrége les expressions des produits. Si a vaut 3, et b, 2, a^3b^5 vaudra $3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ou 864.

21. Lorsque l'exposant est 1, on se dispense de l'écrire ; car on voit aussi bien que b est une fois facteur dans ab que dans ab^1. Réciproquement, *quand l'exposant n'est pas écrit, il est* 1 ; car dans ab, b est une fois facteur et doit avoir 1 pour exposant : on a donc $ab = ab^1$; ce qui exige que $b^1 = b$.

22. D'après la définition de l'exposant, si l'on avait ab^0, l'exposant 0 de b indiquerait que b n'est pas facteur avec a, ou que b ne multiplie pas a : d'où il suit que $ab^0 = a$; ce qui exige que $b^0 = 1$. Ainsi b^0, qu'on énonce *b exposant* 0 ou *b puissance* 0, est un symbole équivalent à l'unité. En général, *toute quantité affectée de l'exposant zéro, donne l'unité.*

(*) Il faut bien prendre garde de confondre l'exposant avec le coefficient ; de confondre, par exemple, a^3 avec $3a$; car a^3 est l'abréviation de $a \times a \times a$, tandis que $3a$ est l'abréviation de $a + a + a$. Si a vaut 4, a^3 vaudra 64, tandis que $3a$ ne vaudra que 12. Au reste, on ne confondra jamais l'exposant avec le coefficient, si l'on fait attention que le coefficient s'énonce toujours avant la lettre, et l'exposant toujours après.

23. On appelle *puissance* d'un nombre le produit formé par des multiplications successives de ce nombre. L'*ordre* ou le *degré* de la puissance est le nombre de facteurs égaux dont cette puissance est formée. Ainsi, b^n, qu'on énonce *b puissance n*, est la puissance $n^{\text{ième}}$ de b, et n est l'*exposant* ou le *degré* de la puissance. D'après cela, a^1, a^2, a^3, a^4, ..., sont respectivement les puissances 1re, 2e, 3e, 4e, ..., de a. On dit aussi que a^2 ou $a\times a$ est le *carré* de a, et que a^3 ou $a\times a\times a$ est le *cube* de a.

24. La première puissance d'un nombre est ce nombre lui-même, puisque $a^1=a$; le carré d'un nombre est le produit de ce nombre par lui-même; le cube d'un nombre est le produit de ce nombre multiplié deux fois de suite par lui-même; en général, la puissance $n^{\text{ième}}$ de b est b multiplié $n-1$ fois de suite par lui-même.

25. Pour indiquer une opération sur un polynome, on met ce polynome entre parenthèses ( ), et l'on indique sur ces parenthèses, l'opération, comme on l'indiquerait sur une seule lettre. Ainsi, pour montrer que $a-b$ est augmenté ou diminué du binome $2a+b$, multiplié ou divisé par ce même binome, on écrit :

$$(a-b)+(2a+b),\ (a-b)-(2a+b),$$
$$(a-b)(2a+b) \text{ et } (a-b):(2a+b) \text{ ou } \frac{a-b}{2a+b}.$$

Pour indiquer la puissance $m^{\text{ième}}$ de $a-b$, on écrira $(a-b)^m$ et on énoncera, $(a-b)$ *puissance m*.

Si l'expression algébrique renfermait déjà des parenthèses, on la mettrait entre *crochets* [ ]; et si elle avait des parenthèses et des crochets, on la placerait entre deux *accolades* { }. Ainsi l'expression $\{2a-b[3b-(a-b)]+3\}(2a-b)$,

signifie qu'on doit ôter b de a, soustraire le reste de 3 fois b, multiplier b par le nouveau reste, retrancher le produit de 2 fois a, ajouter 3 au résultat et multiplier la somme par le reste qu'on trouve en ôtant b de 2 fois a. Cette traduction, beaucoup plus longue que l'expression algébrique qui l'a fournie, montre en quoi sont utiles les signes que nous venons d'employer.

26. Une quantité est appelée *positive* ou *négative*, suivant qu'elle est précédée du signe + ou du signe —. Ainsi $+2a$ est une quantité positive ou un terme *additif*, et $-3ab$ une quantité négative ou un terme *soustractif*.

27. Comme *la soustraction et l'addition d'un même nombre se compensent nécessairement et doivent disparaître du résultat*, nous admettrons toujours désormais que $-a+a=0$.

Et puisque *soustraire un tout, c'est soustraire chacune de ses parties*, nous conviendrons toujours d'écrire, 1° $a-(a+b) = a-a-b$; 2° $-4a=-a-a-a-a$, et en général, n soustractions successives de $a=-na$.

Les soustractions précédentes étant impossibles, les égalités que nous venons de poser ne peuvent être démontrées : ce ne sont que de pures conventions, qu'il faut néanmoins admettre, d'abord parce qu'elles n'ont rien de contraire aux définitions déjà établies, et qu'ensuite elles étendent à un plus grand nombre d'objets, les usages de deux principes de calcul; ce qui est avantageux et conforme au but qu'on se propose en algèbre.

28. Il résulte de ces conventions, que si $b>a$ et qu'on ait $b=a+d$ ou $b-a=d$, on aura

$$a-b=a-(a+d)=a-a-d=-d=-(b-a);$$

de sorte que quand b est plus grand que a, $a-b$ est négatif et égal à $-(b-a)$.

On aurait de même $10-15=10-10-5=-5=-(15-10)$. Ainsi, quoique la soustraction $10-15$ soit évidemment impossible, on peut néanmoins l'effectuer en partie; et le signe $-$ qui précède 5, dans le résultat -5, montre qu'il faudrait encore soustraire 5 unités, pour exécuter réellement la soustraction demandée. On voit donc que toute quantité négative isolée, telle que -5, indique une soustraction impossible.

29. Néanmoins, on doit soumettre ces expressions impossibles à toutes les règles du calcul des nombres. En effet, puisque les nombres abstraits sont représentés par des lettres, qui n'ont aucune valeur numérique significative et explicite, il est impossible de distinguer, dans le cours des raisonnemens et des transformations du calcul, si a, par exemple, est plus grand ou plus petit que b; on sera donc, malgré soi, entraîné à raisonner et à opérer sur $a-b$, comme sur un nombre réel, lorsque a sera moindre que b, c'est-à-dire, lorsque $a-b$ sera au fond un monome soustractif. De sorte que si l'on veut que l'algèbre ait toute la généralité dont elle est susceptible, il faut absolument soumettre au calcul des nombres, tous les monomes négatifs de la forme $-a$; et c'est ce que nous ferons désormais.

Par exemple, supposons que la solution d'un problème ait donné

$$x = a(a - b) - (2a - 9b);$$

pour que le but de l'algèbre soit rempli (4), il faut que cette formule ait lieu, quels que soient les nombres a et b. Or, supposons $a = 3$ et $b = 5$, cette formule deviendra

$$x = 3(-2) - (-39),$$

expression impossible, si l'on ne sait pas multiplier 3 par -2 et soustraire -39 du produit. Mais si l'on fait entrer dans le calcul les quantités négatives isolées, on apprendra que $x = 3(-2) - (-39)$ devient $x = -6 + 39 = 33$. De sorte que la formule proposée sera vraie pour $a = 3$ $b = 5$, et sera générale, comme l'exige l'algèbre (4).

30. *Un polynome ne change pas de valeur, dans quelqu'ordre qu'on écrive ses termes.* Par exemple, je dis que

$$8 - 12 + 6 - 9 + 10 = 8 + 6 + 10 - 12 - 9.$$

En effet, il est facile de voir que le 2ᵉ quintinome se réduit à 3. Quant au 1ᵉʳ, puisque soustraire 12, c'est soustraire 8 et 4; ajouter 6, c'est ajouter 4 et 2; soustraire 9, c'est soustraire 2 et 7; enfin, ajouter 10, c'est ajouter 7 et 3; il s'ensuit que $8 - 12 + 6 - 9 + 10 = 8 - 8 - 4 + 4 + 2 - 2 - 7 + 7 + 3$. Or, $8 - 8 = 0$, ainsi que $-4 + 4$, $+2 - 2$ et $-7 + 7$; donc le 1ᵉʳ quintinome se réduit à $+3$ ou à 3, comme le 2ᵉ.

31. Le principe précédent conduit à la réduction des termes *semblables*. On appelle ainsi les termes qui ont la même partie littérale, c'est-à-dire qui ne peuvent différer que par les signes et les coefficiens, comme $+8a^2b^3$ et $-3a^2b^3$.

32. La partie littérale étant considérée comme une certaine espèce d'unité, les termes semblables renfermeront des nombres d'unités de cette espèce, marqués par leurs coefficiens. On pourra donc ajouter ou soustraire entre eux ces nombres d'unités; et par conséquent, réduire plusieurs termes semblables en un seul, en ajoutant ou en soustrayant leurs coefficiens. C'est ainsi que si $x = 8a^3b^2 - 6a^3b^2 + 2a^3b^2$, on aura $x = 4a^3b^2$.

Ces sortes de réductions sont fort utiles; car pour avoir la valeur de x en chiffres, il faudrait effectuer 17 opérations partielles avant la réduction, et seulement 5 après.

33. *Pour opérer la réduction des termes semblables, il faut prendre la somme de tous ceux qui ont le même signe, soit + soit —, et donner à cette somme le signe commun. Mais quand deux termes semblables ont des signes contraires, on soustrait le plus petit du plus grand, et l'on donne au reste le*

signe de ce plus grand. D'après cette règle, si l'on a le polynome $5a^2b - 3bc + 4c^3 + 2a^2b - 8bc - 6c^3$,
on trouvera $7a^2b - 11bc - 2c^3$.

En effet, on peut, sans changer la valeur du polynome proposé, rapprocher les termes semblables (30); ce qui donne

$$5a^2b + 2a^2b - 3bc - 8bc + 4c^3 - 6c^3.$$

Or, il est évident que $5a^2b + 2a^2b = 7a^2b$. De même $-3bc - 8bc = -11bc$, et enfin $+4c^3 - 6c^3 = +4c^3 - 4c^3 - 2c^3 = -2c^3$. Donc le polynome proposé se réduit réellement à

$$7a^2b - 11bc - 2c^3.$$

On aurait de même $5ab^2 - 2a^2 + 3bc - 4a^2 + 2ab^2 - 9bc + 3a^2 = 7a^2b - 3a^2 - 6bc$. C'est ce qu'on vérifie en prenant, par exemple, $a = 4$, $b = 3$ et $c = 2$; car alors on trouve que le polynome proposé et le trinome qui en résulte, se réduisent chacun à 252.

34. La considération des quantités négatives dans le calcul, conduit à distinguer les opérations algébriques des opérations arithmétiques analogues. Une opération est *algébrique*, lorsqu'on a égard aux signes qui peuvent affecter les quantités. Une opération est *arithmétique*, quand on ne doit avoir égard qu'aux *valeurs absolues* des quantités, c'est-à-dire, qu'aux nombres d'unités que ces quantités renferment.

Le *calcul algébrique* a pour but de trouver la plus simple forme dont un résultat soit susceptible, lorsqu'on n'assigne aucune valeur numérique aux lettres; et on parvient à cette plus simple forme au moyen des quatre 1[res] opérations de l'algèbre.

De l'Addition algébrique.

35. L'*addition algébrique* est une opération par laquelle on réunit plusieurs quantités de même espèce, affectées des signes $+$ et $-$, en une seule quantité appelée *somme.* De sorte que le mot *somme* exprime ici une somme d'opérations, c'est-à-dire le résultat de toutes les opérations indiquées par les expressions algébriques proposées.

36. D'après cette définition, on trouve que

$$+a + (+b) = +a + b,\quad -a + (+b) = -a + b,$$
$$+a + (-b) = +a - b \text{ et } -a + (-b) = -a - b.$$

En effet, ajouter $+b$ à $+a$, c'est ajouter l'addition de b à l'addition de a (*); la somme sera donc composée de l'addition de a et de l'addition de b; elle sera donc $+a+b$. De sorte que $+a+(+b)=+a+b$. On démontrerait de même l'exactitude des trois autres résultats.

37. On voit, par les égalités précédentes, qu'*un terme ajouté est écrit avec son signe*. Or, pour ajouter un polynome, il est évident qu'il faut ajouter chacun de ses termes : et puisque chaque terme ajouté est écrit avec son signe, le polynome ajouté sera lui-même écrit avec ses signes. Ainsi, *pour faire l'addition des quantités algébriques, il faut les écrire les unes à la suite des autres, ou les unes sous les autres, avec leurs signes tels qu'ils sont, puis opérer la réduction des termes semblables.* Par ex., je dis que $3a+(2b-a+3c)=3a+2b-a+3c$.

En effet, ajouter à $3a$ le trinome $2b-a+3c$, c'est y ajouter le trinome $2b+3c-a$, qui a même valeur (30). Or, si on ajoute d'abord à $3a$ le tout $2b+3c$, ce qui se fait évidemment en y ajoutant chacune de ses parties $2b$ et $3c$, la somme sera $3a+2b+3c$. Mais ce n'est pas $2b+3c$ qu'il faut ajouter à $3a$, c'est $2b+3c-a$; on a donc ajouté a de trop; la somme trouvée est donc trop grande de a; il faut par conséquent la diminuer de a, et il viendra $3a+2b+3c-a$ ou $3a+2b-a+3c$, comme on l'a trouvé en appliquant la règle.

38. D'après la même règle, si l'on veut avoir la somme des quantités $3a^2b-5ab^2+4b^3$, $2ab^2+3b^3-4a^2b$ et $5b^3-4ab^2-2a^2b$, on disposera et l'on effectuera l'opération comme il suit :

$$\begin{array}{l} 3a^2b-5ab^2+4b^3 \\ 2ab^2+3b^3-4a^2b \\ 5b^3-4ab^2-2a^2b \\ \hline \text{Somme réduite} \cdots -3a^2b-7ab^2+12b^3. \end{array}$$

Si $a=2$ et $b=3$, les trinomes proposés deviennent respectivement 54, 69 et 39; leur somme est donc 162. La somme

(*) Au premier abord, il peut paraître singulier de dire qu'*on ajoute une addition* ou *une soustraction*. Mais en y réfléchissant un peu, on verra que cette manière de parler n'a rien qui puisse choquer le bon sens; car, par exemple, ajouter à 9 fr. une soustraction de 6^f, c'est réellement faire éprouver à 9^f une diminution de 6^f; le résultat est donc 9^f-6^f. De sorte que $9+(-6)=9-6$.

algébrique trouvée se réduit en effet à 162, lorsqu'on y prend $a=2$ et $b=3$.

De la Soustraction algébrique.

39. La *soustraction algébrique* est une opération par laquelle, connaissant la somme de deux quantités et l'une de ces quantités, on trouve l'autre, appelée *reste*, *excès* ou *différence*.

40. D'où il suit que le reste d'une soustraction algébrique est toujours tel, qu'en l'ajoutant à la quantité à soustraire, la somme se réduit à la quantité dont on doit soustraire.

41. D'après cela, il est clair qu'on aura

$$+a-(+b)=+a-b,\quad +a-(-b)=+a+b,$$
$$-a-(+b)=-a-b \text{ et } -a-(-b)=-a+b.$$

Car chaque reste ajouté à la quantité à soustraire, donne la quantité dont on doit soustraire (40). D'ailleurs, dans le 1$^{\text{er}}$ cas, $+a$ est la même chose que $+a+b-b$; et puisque de ce $+a$, on veut soustraire $+b$, il faut faire en sorte que $+b$ ne s'y trouve plus; il faut donc y effacer $+b$, et il restera $+a-b$. De sorte que $+a-(+b)=+a-b$. On démontrerait de même l'exactitude des trois autres résultats.

42. Les quatre égalités précédentes montrent qu'*un terme soustrait est écrit avec son signe changé*. Or, pour soustraire un polynome, il est clair qu'il faut soustraire chacun de ses termes; et puisque chaque terme soustrait est écrit avec un signe contraire, le polynome soustrait sera écrit avec des signes contraires. Donc *pour faire la soustraction des quantités algébriques, il faut changer les signes de la quantité à soustraire, et l'écrire avec ses signes ainsi changés, à la suite ou au-dessous de l'autre quantité, puis opérer la réduction des termes semblables.* C'est ainsi que $12-2-(8-7+3)=12-2-8+7-3$.

Pareillement, si de $2a^3-4a^2b+3ab^2$
on veut soustraire.. $a^3+2a^2b-5ab^2$

Il restera $2a^3-4a^2b+3ab^2-a^3-2a^2b+5ab^2$,
ou en réduisant, $a^3-6a^2b+8ab^2$.

Et en effet, en ajoutant ce reste au trinome à soustraire, la somme se réduit au trinome dont on doit soustraire; ce reste est donc le véritable (40).

Si $a=5$ et $b=3$, le premier des deux trinomes proposés se réduit à 85 et le second à 50; leur différence est donc 35. Et comme dans ce cas le reste algébrique obtenu se réduit aussi à 35, on voit que la règle employée est exacte.

De la Multiplication algébrique.

43. La *multiplication algébrique*, comme la multiplication arithmétique, est une opération par laquelle, connaissant deux quantités appelées *multiplicande* et *multiplicateur*, on en trouve une troisième en opérant sur le multiplicande, comme on a trouvé le multiplicateur en opérant sur l'unité. Cette troisième quantité s'appelle *produit*; et tous les nombres qu'il faut multiplier entre eux pour avoir le produit, sont les *facteurs* de ce produit.

44. *Le produit de deux monomes a le signe* $+$, *lorsque le multiplicande et le multiplicateur ont leurs signes les mêmes, et le signe* $-$, *quand ils ont des signes différens.* En appliquant ce principe, appelé *la règle des signes*, on aura

$$+a\times+b=+ab,\quad -a\times+b=-ab,$$
$$+a\times-b=-ab \text{ et } -a\times-b=+ab.$$

En effet, 1° suivant que le multiplicateur $+b$ ou b est un nombre entier ou une fraction, le produit est un multiple ou une fraction du multiplicande; il est donc de même nature que ce multiplicande; c'est-à-dire qu'il en a le signe (*). Par conséquent, $+a\times+b=+ab$ et $-a\times+b=-ab$.

2° Le produit se trouve en opérant sur le multiplicande, comme le multiplicateur en opérant sur l'unité : donc, puisque le multiplicateur $-b$ s'obtient en multipliant l'unité par b et en changeant le signe du résultat b; de même, le produit de $+a$ ou de $-a$ par $-b$, s'obtiendra en multipliant $+a$ ou $-a$ par b et en changeant le signe du résultat $+ab$ ou $-ab$ (1°); ce qui donnera $-ab$ ou $+ab$. D'où il suit que $+a\times-b=-ab$ et que $-a\times-b=+ab$ (**).

(*) En général, *tout multiple ou toute fraction d'un monome, a nécessairement le signe de ce monome.* La chose est évidente pour un monome qui a le signe $+$, puisque ce monome peut être écrit sans signe (16). Mais si le monome a le signe $-$, on aura, 1° 4 fois $-a=-a-a-a-a=-4a$ (27); 2° les $\frac{5}{7}$ de $-7a=$ les $\frac{5}{7}$ de 7 fois $-a$ (1°) $=5$ fois $-a=-5a$ (1°).

(**) Il est facile de vérifier qu'*on ajoute ou l'on soustrait un monome*,

45. Les quatre formules que l'on vient de démontrer, s'énoncent en abrégé en disant : + par + donne +, — par + donne —, + par — donne —, et — par — donne +. Et il en résulte, 1° qu'*un produit change toujours de signe avec l'un de ses 2 facteurs ;* 2° que *le produit ne change pas de signe quand on change ceux du multiplicande et du multiplicateur.*

46. Voici encore trois conséquences importantes :

1° *Le produit d'un nombre quelconque de facteurs positifs, est positif lui-même ;* car chaque facteur pouvant être écrit sans signe (16), le produit total n'aura pas de signe et sera par conséquent positif. Ainsi $+a \times +b \times +c \times +d = abcd = +abcd$.

2° *Le produit d'un nombre pair* $2n$ *de facteurs négatifs, est positif ;* car en multipliant ces facteurs deux à deux, on aura n produits positifs ; et en multipliant entre eux ces n produits positifs, le produit sera positif (1°).

3° *Le produit d'un nombre impair* $2n+1$ *de facteurs négatifs, est négatif ;* car en ne considérant pas d'abord le dernier facteur négatif, il en restera un nombre pair $2n$, dont le produit sera positif (2°) ; multipliant ensuite ce produit positif par le dernier facteur négatif, le produit sera négatif.

47. Tout produit indiqué, comme $abcdefg$, s'obtient en multipliant a par b, le résultat par c, le second résultat par d, et ainsi de suite. Mais nous avons démontré en arithmétique, qu'on peut suivre tel autre ordre qu'on voudra dans les multiplications, et que même on peut regarder le produit $abcdefg$ comme fourni par les multiplications des produits ab, cde et fg. Ces deux principes donnent successivement

$$7a^4b^2 \times 4a^3b^3 = 7a^4b^2 4a^3b^3 = 7 . 4a^4a^3b^2b^3 = 28aaaaaaabbbbb = 28a^7b^5.$$

D'où l'on voit que, *pour avoir le produit de deux monomes, il faut, après avoir appliqué la règle des signes* (44), *multiplier l'un par l'autre les deux coefficiens, écrire à la suite du résultat une seule fois chaque lettre, comme facteur, et lui*

---

en l'écrivant avec son signe ou avec un signe contraire. Car dans $-b \times +1 = -b$, le multiplicateur $+1$ s'obtient en ajoutant l'unité ; donc le produit $-b$ s'obtiendra en ajoutant le multiplicande $-b$: donc $-b$ ajouté donne $-b$. On verra de même que $-b$ soustrait fournit $+b$.

donner pour exposant, la somme des exposans qu'elle a au multiplicande et au multiplicateur. D'après cette règle, on aura

$$-9a^6b^4c^3d \times -8a^5b^2c = +72a^{11}b^6c^4d.$$

De même, $a^m \times a^v = a^{m+v}$; car a étant m fois facteur au multiplicande a^m et v fois au multiplicateur a^v, sera nécessairement $m+v$ fois facteur au produit; ce qu'on indique en lui donnant $m+v$ pour exposant, ou en écrivant a^{m+v}. En général, le produit a toujours pour facteurs tous ceux du multiplicande et ceux du multiplicateur.

48. *Pour multiplier un polynome par un monome, il faut multiplier chaque terme du polynome par le monome, comme dans la multiplication des monomes, puis réunir tous les produits partiels.* C'est ainsi qu'on trouve que

$$(a-b+c)\times -d = -ad+bd-cd.$$

En effet, supposons d'abord qu'il faille multiplier $a-b+c$ par d; cela revient à multiplier par d, $a+c-b$ (30). Or, on multiplie le tout $a+c$ par d, en multipliant chacune de ses parties par d, ce qui donne $ad+cd$. Mais ce n'est pas $a+c$ qu'on doit multiplier par d, c'est $a+c-b$; on a donc multiplié dans $a+c$ le nombre b de trop; le produit $ad+cd$ est donc trop grand de $b\times d$ ou de bd; il faut donc le diminuer de bd, et écrire $ad+cd-bd$ ou $ad-bd+cd$. De sorte que

$$(a-b+c)d = ad-bd+cd.$$

Mais puisque le multiplicateur proposé est $-d$, il s'obtient en multipliant l'unité par d et en soustrayant le résultat; donc (43) le produit de $a-b+c$ par $-d$ s'obtiendra en multipliant $a-b+c$ par d, puis en soustrayant le résultat $ad-bd+cd$; ce qui donnera $-ad+bd-cd$, comme on l'a trouvé en appliquant la règle.

49. *Pour multiplier un monome par un polynome, il faut multiplier ce monome par chaque terme du polynome, comme dans la multiplication des monomes, et réunir tous les produits partiels.* D'après cette règle, on aura

$$-d\times(a-b+c) = -ad+bd-cd.$$

En effet, puisque le multiplicateur $a-b+c$ s'obtient en multipliant l'unité par a, b et c, puis en ajoutant le premier résultat a, soustrayant le second b et ajoutant le troisième c; de même, le produit s'obtiendra en multipliant le multiplicande $-d$ par a, b et c, puis en ajoutant le premier résultat $-ad$, soustrayant le second $-bd$, et ajoutant le troisième $-cd$; ce qui donnera $-ad+bd-ed$, comme on l'a obtenu en appliquant la règle.

50. D'après la même règle, on trouve aussi que $(7-2+3)(8-5)=(7-2+3)\times 8+(7-2+3)\times -5=56-16+24-35+10-15$ (48).

En général, puisqu'on multiplie un polynome par un polynome, en réunissant tous les produits du 1er par chacun des termes du second (49), et par suite, en réunissant les produits de chacun des termes du 1er par chacun des termes du 2^e (48), il en résulte que, *pour avoir le produit de deux polynomes, il faut multiplier chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, comme dans la multiplication des monomes, puis réunir tous les produits partiels et opérer la réduction des termes semblables.* D'après cette règle, on a

$$
\begin{array}{ll}
\text{Multiplicande} & 5a^4-2a^3b+4a^2b^2 \\
\text{Multiplicateur} & a^3-4a^2b+2b^3 \\
\hline
\text{Produit par } a^3 \ldots & 5a^7-2a^6b+4a^5b^2 \\
\text{Prod. par } -4a^2b \ldots & -20a^6b+8a^5b^2-16a^4b^3 \\
\text{Prod. par } +2b^3 \ldots & +10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5 \\
\hline
\text{Pr. réduit} \ldots & 5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5.
\end{array}
$$

Si $a=2$ et $b=3$, le multiplicande et le multiplicateur proposés deviendront 176 et 14; donc le produit sera 2464. Le produit algébrique trouvé se réduit effectivement à 2464, lorsqu'on y fait $a=2$ et $b=3$.

On trouvera facilement, d'après la règle précédente, les valeurs de $(2a^3b^2-3a^2b^3)^4$ et de $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)(a^2-b^2)$.

51. *Le terme du produit, où une lettre a le plus haut exposant, résulte de la multiplication des termes du multiplicande et du multiplicateur, où cette même lettre a les plus hauts exposans.*

C'est d'abord ce que l'on peut voir en multipliant deux polynomes l'un par l'autre. Mais en général, soit pa^m un terme du multiplicande, et qa^v un terme du multiplicateur; il est clair que $pa^m \times qa^v$ ou pqa^{m+v} est un terme du produit, puisque chaque terme du multiplicande multiplié par un terme du multiplicateur donne un terme du produit (50). Or, si m et v sont les plus grands exposans de a au multiplicande et au multiplicateur, $m+v$ sera nécessairement le plus grand exposant de a au produit; car la plus grande somme de deux nombres est celle formée par les deux plus grands nombres. Et comme on suppose que pa^m et qa^v soient les seuls termes du multiplicande et du multiplicateur, où la lettre a ait les plus hauts exposans m et v, il est évident que pqa^{m+v} est le seul terme des produits partiels, et par suite du produit total réduit, où la lettre a porte le plus haut exposant $m+v$. Donc, puisque $pqa^{m+v}=pa^m\times qa^v$, il en résulte le principe énoncé d'abord.

On verra de même que *le terme du produit, où une lettre a le moindre exposant, vient du terme du multiplicande, où cette lettre a le moindre exposant, multiplié par le terme du multiplicateur, où la même lettre a le moindre exposant.*

Il résulte de ce principe et du précédent, que le produit de deux polynomes ne peut jamais avoir moins de deux termes.

52. La multiplication algébrique conduit à des résultats qui sont d'un usage fréquent. Pour les faire connaître, nous effectuerons les multiplications que voici :

$$\begin{array}{r|r|r}
a+b & a+b & a-b \\
a-b & a+b & a-b \\
\hline
a^2+ab & a^2+ab & a^2-ab \\
-ab-b^2 & +ab+b^2 & -ab+b^2 \\
\hline
a^2-b^2 & a^2+2ab+b^2 & a^2-2ab+b^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
a^2+2ab+b^2 & a^2-2ab+b^2 \\
a+b & a-b \\
\hline
a^3+2a^2b+ab^2 & a^3-2a^2b+ab^2 \\
\quad +a^2b+2ab^2+b^3 & \quad -a^2b+2ab^2-b^3 \\
\hline
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & a^3-3a^2b+3ab^2-b^3
\end{array}$$

La seconde de ces multiplications donne le carré de $a+b$, la 3e le carré de $a-b$, la 4e le cube de $a+b$, et la 5e le cube de $a-b$; on a par conséquent les formules:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1)$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3)$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \ldots (4)$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \ldots (5)$$

Observant que le double signe $\pm$, qu'on énonce *plus ou moins*, est employé pour indiquer qu'une quantité est ajoutée ou soustraite, on verra que les formules (2), (3), (4) et (5) se réduisent aux deux que voici :

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \ldots (7)$$

Les formules (1), (6), (7), traduites en langage ordinaire, démontrent les trois théorèmes que voici :

1° *La somme de deux quantités multipliée par leur différence, donne pour produit la différence des carrés de ces quantités.*

2° *Le carré de la somme ou de la différence de deux nombres, vaut le carré du 1er, plus ou moins le double produit du 1er par le 2e, plus le carré du 2e.*

3° *Le cube de la somme ou de la différence de deux nombres, est égal au cube du 1er, plus ou moins le triple carré du 1er multiplié par le 2e, plus le triple du 1er multiplié par le carré du 2e, plus ou moins le cube du 2e.*

Il est clair que les *inverses* de ces trois théorèmes existent, et que par exemple, au lieu de $m^2 - x^2$, on peut mettre $(m + x)(m - x)$, qui a même valeur ; et ainsi des autres.

53. Multipliant la valeur de $(a+b)^3$ par $a+b$, puis le résultat par $a+b$, et réduisant, on trouvera

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Ces deux formules en donneront deux autres analogues, si on y change b en $-b$, et qu'on ait égard aux conséquences de la règle des signes (46).

54. Nous remarquerons à cette occasion, que les règles du calcul des polynomes sont vraies quels que soient les nombres qui composent ces polynomes ; et que cela vient uniquement des quantités négatives. En effet, comme ces règles sont démontrées pour tous les cas où les différences sont positives, il suffit de faire voir que les mêmes règles s'appliquent encore lorsque les différences sont négatives. Supposons que dans $a-b$, b soit $> a$; alors $a-b$ sera négatif et égal à $-(b-a)$, (28). D'après cela, il est clair qu'on aura :

1° $p+(a-b)=p+[-(b-a)]=p-(b-a)=p-b+a$
$=p+a-b$;

2° $p-(a-b)=p-[-(b-a)]=p+(b-a)=p+b-a$
$=p-a+b$;

3° $p(a-b)=p[-(b-a)]=-p(b-a)=-pb+pa=$
$ap-bp$;

4° $(a-b)p=[-(b-a)]p=-(b-a)p=-(bp-ap)=$
$-bp+ap=ap-bp$;

5° $(a-b)(c-d)=[-(b-a)][-(d-c)]=(b-a)(d-c)$
$=bd-ad-bc+ac=ac-bc-ad+bd.$

Tous les résultats précédens s'obtiennent par l'application immédiate des règles du calcul des polynomes; ces règles sont donc vraies quelles que soient les valeurs numériques des lettres qui composent ces polynomes.

55. En général, il est fort commode de renfermer dans une seule règle ou formule, la solution de toutes les questions numériques de même nature; puisque dans ce cas, on est dispensé de recommencer à chaque fois les raisonnemens et les calculs, quelquefois longs et compliqués, qui ont fourni la règle proposée. Or, on obtient cet avantage par le calcul des quantités négatives isolées; car alors les règles ou les formules sont vraies quelles que soient les valeurs positives ou négatives des lettres qui les composent. En effet, on sait que

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \ldots (8)$$

Si dans cette formule on fait $a=2$ et $b=7$, le 1^{er} *membre* $(a-b)^2$ sera $(-5)^2$ ou 25; le 2^e *membre* deviendra $4-28+49$ ou encore 25, comme le 1^{er}. Si $b=-c$, le 1^{er} membre sera $[a-(-c)]^2$ ou $(a+c)^2$; le 2^e membre deviendra $a^2-2a\times-c+(-c)^2$ ou $a^2+2ac+c^2$; et l'on sait en effet que $(a+c)^2=a^2+2ac+c^2$. On voit donc que la formule (8) est exacte pour toutes les valeurs positives ou négatives des lettres qui la composent. Et il en est de même de toutes les formules que nous avons obtenues jusqu'à présent, ainsi que de la suivante

$$(x+\tfrac{1}{2}n)^2=x^2+nx+\tfrac{1}{4}n^2,$$

qu'on trouve en multipliant $x+\frac{1}{2}n$ par lui-même.

56. Par analogie avec les puissances, on dit qu'un produit est du *n ième degré*, lorsqu'il renferme n facteurs *littéraux*, c'est-à-dire n facteurs exprimés chacun par une lettre. Les facteurs *numériques* ne comptent pas dans l'estimation du degré.

Ainsi les produits $2a$, $3ab$, $8a^3b^2$, sont respectivement du 1er, du 2e et du 5e degré.

On appelle quantités ou expressions *homogènes*, celles où tous les termes sont du même degré. Ainsi $4a^3b - 2a^2b^2 + 3ab^3$ est une expression homogène du 4e degré. On remarque que la multiplication d'une quantité homogène par une quantité homogène, donne toujours un produit homogène, d'un degré égal à la somme des degrés de ses facteurs. Voyez l'exemple du n° 50.

57. On a déjà pu remarquer (48 et 49) qu'*un produit de deux quantités algébriques quelconques, ne change pas de valeur, dans quelqu'ordre qu'on multiplie.*

La chose est évidente pour deux monomes; car à cause de $ab = ba$, on aura

$$+a \times -b = -ab = -ba = -b \times +a, \text{ etc.}$$

A l'égard des polynomes, quel que soit celui des deux qu'on prenne pour multiplicande, l'opération reviendra toujours à multiplier chaque terme de l'un par chaque terme de l'autre (50); et puisque chacune de ces multiplications partielles fournit le même résultat, quel que soit l'ordre des deux facteurs monomes sur lesquels on l'effectue, il s'ensuit que le produit total sera toujours composé de l'addition des mêmes termes : donc il demeurera toujours le même.

De la Division algébrique.

58. La *division algébrique* est une opération par laquelle, connaissant un produit, appelé *dividende*, et l'un de ses deux facteurs, nommé *diviseur*, on trouve l'autre, appelé *quotient*. D'où il suit que le dividende est le produit du diviseur par le quotient; et qu'en divisant un produit ab par l'un de ses deux facteurs b, on aura toujours l'autre facteur a au quotient; ce qui donne $ab : b = a$.

59. De même, $ab^2cd : b^2c = ad \times b^2c : b^2c = ad$. En général, quand on supprime dans le dividende, les facteurs du diviseur, les facteurs restans forment le quotient.

60. *Le quotient de deux monomes a le signe* $+$, *lorque les signes du dividende et du diviseur sont les mêmes, et le signe* $-$, *quand leurs signes sont différens.* Ce principe, appelé *la règle des signes*, donne les quatre formules que voici :

$$+ab : +b = +a, \quad -ab : +b = -a,$$
$$+ab : -b = -a \text{ et } -ab : -b = +a.$$

En effet, le quotient doit toujours être tel, qu'en multipliant le diviseur par ce quotient, on retrouve le dividende (58). Or, d'après la multiplication eu égard aux signes, tous les quotiens précédens satisfont à cette condition; donc tous ces quotiens sont exacts.

61. Les quatre formules précédentes s'énoncent en abrégé en disant : $+$ divisé par $+$ donne $+$, $-$ divisé par $+$ donne $-$, $+$ divisé par $-$ donne $-$, $-$ divisé par $-$ donne $+$. Et il en résulte, 1° que le quotient change de signe, en même temps que l'un de ses deux termes; 2° que le quotient ne change pas de signe, quand on change ceux du dividende et du diviseur.

62. Dans la division de deux monomes, le dividende est le produit du diviseur par le quotient (58); donc le coëfficient du dividende est le produit du coefficient du diviseur par celui du quotient (47); on aura donc le coefficient du quotient, en divisant le coefficient du dividende par celui du diviseur (58).

63. De même, puisque le dividende est le produit du diviseur par le quotient, l'exposant d'une lettre au dividende est la somme des exposans de cette lettre au quotient et au diviseur (47); on aura donc l'exposant d'une lettre au quotient, en retranchant son exposant au diviseur de son exposant au dividende.

64. De là et de ce qui précède, il suit que, *pour avoir le quotient de deux monomes, il faut, après avoir appliqué la règle des signes, diviser le coefficient du dividende par celui du diviseur, puis écrire à la suite du résultat, une seule fois chaque lettre comme facteur, et lui donner pour exposant, son exposant dans le dividende moins son exposant dans le diviseur.* C'est ainsi qu'on aura

$$-27a^6b^4c^3 : -3a^2b^3c = +9a^4bc^2.$$

Et en effet, le diviseur multiplié par le quotient reproduit le dividende; ce quotient est donc exact. De même, $a^3 : a^3 = a^0$. Mais $a^3 : a^3 = 1$; donc $a^0 = 1$, comme au n° 22. On a encore

$$-12a^7b^3 : 4a^3 = -12a^7b^3 : 4a^3b^0 = -3a^4b^3;$$

car $b^0 = 1$. Pareillement

$$3a^2b^4 : -4a^2b = -\tfrac{3}{4}a^0b^3 = -\tfrac{3}{4}b^3.$$

65. La division de deux monomes est impossible, lorsque le coefficient du dividende n'est pas divisible par celui du diviseur, ou que l'exposant d'une lettre dans le diviseur est plus grand que son exposant dans le dividende, ou enfin quand le diviseur a des lettres qui ne sont pas au dividende. Dans chacun de ces cas, on indique la division et l'on simplifie l'expression du quotient, en divisant ses deux termes par les facteurs qui leur sont communs. Par ex., qu'on ait à diviser $12a^3b^6c^2$ par $8a^7b^3c^2$: cette division ne peut que s'indiquer; mais on peut simplifier l'expression du quotient, en observant que ses deux termes sont divisibles par 4, par a^3, par b^3 et par c^2; c'est-à-dire par $4a^3b^3c^2$. Effectuant donc cette division, le quotient ne changera pas de valeur, comme on le démontrera plus bas, et on aura

$$\frac{12a^3b^6c^2}{8a^7b^3c^2}=\frac{3b^3}{2a^4}.\ \text{De même},\ \frac{7a^3b^2}{14a^4b^4}=\frac{1}{2ab^2},\ \text{et}\ \frac{6a^2bd}{8a^2bc}=\frac{3d}{4c}.$$

66. D'après la multiplication d'un polynome par un monome (48), et en observant que $\frac{a}{d}\times d=a$ (58), ainsi des autres, il est évident que

$$\left(\frac{a}{d}-\frac{b}{d}+\frac{c}{d}\right)d=a-b+c;\ \text{d'où}\ \frac{a}{d}-\frac{b}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a-b+c}{d}.$$

Comparant la dernière expression à son égale, on voit que *pour diviser un polynome par un monome, il faut diviser chaque terme du polynome par le monome, comme dans la division des monomes, et réunir les quotiens partiels.* C'est ainsi qu'on a

$$(45-20+25):5=9-4+5.\ \text{De même},$$
$$(12a^6b^2+9a^5b^3-18a^4b^6):-3a^3b^2=-4a^3-3a^2b+6ab^4.$$

On voit que la division d'un polynome par un monome est impossible, lorsque tous les termes du premier ne sont pas divisibles par le second (65).

67. *Ordonner* un polynome, c'est écrire tous ses termes par rapport à une même lettre, de manière que les exposans de cette lettre aillent en diminuant de gauche à droite. Ainsi la quantité suivante est ordonnée par rapport à la lettre a, qu'on appelle *lettre principale :*

$$a^7-3a^5b^2+4a^3b^4-11b^7.$$

68. Voyons maintenant comment on effectue la division de

deux polynomes ordonnés par rapport à une même lettre. Le dividende étant le produit du diviseur par le quotient cherché (58), il s'ensuit que le premier terme du dividende ordonné, où la lettre a le plus haut exposant, sera le produit du premier terme du diviseur ordonné, où cette lettre a le plus haut exposant, multiplié par le premier terme du quotient, où cette même lettre a le plus haut exposant (51); on aura donc ce terme du quotient, en divisant le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, puisqu'alors on divisera un produit par l'un de ses deux facteurs (58).

Mais le dividende étant la somme des produits du diviseur par chacun des termes du quotient cherché (58 et 48); si de ce dividende on soustrait le produit du diviseur par le premier terme trouvé au quotient, ce qui restera sera le produit du diviseur par tous les autres termes inconnus du quotient.

Or, puisque ce reste est le produit du diviseur par tous les termes du quotient, excepté le premier; on peut raisonner sur ce reste comme sur le dividende proposé : et l'on voit qu'en divisant le premier terme de chaque reste ordonné par le premier terme du diviseur, on aura chaque terme du quotient cherché. Ainsi, en général,

Pour avoir le quotient de deux polynomes, il faut, après les avoir ordonnés par rapport à une même lettre, diviser le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, comme dans la division des monomes; multiplier ensuite tous les termes du diviseur par le quotient trouvé, soustraire le produit du dividende, et opérer la réduction des termes semblables. Diviser de même le premier terme du reste, toujours ordonné, par le premier terme du diviseur, ce qui donnera le second terme du quotient cherché; multiplier tout le diviseur par ce second terme et soustraire le produit du premier reste. On divise encore le premier terme du second reste par le premier terme du diviseur; et l'on continue le même procédé dans les divisions partielles suivantes.

69. Soient à diviser l'un par l'autre les deux polynomes

$$16a^7b^3 - 37a^6b^4 + 10a^8b^2 - 21a^4b^6 + 26a^5b^5$$
$$\text{et} \quad 4a^3b^2 - 7a^2b^3 + 2a^4b.$$

Pour cela, on ordonnera ces deux polynomes par rapport à la lettre a, et on appliquera la règle, en disposant l'opération comme il suit :

$10a^8b^2 + 16a^7b^3 - 37a^6b^4 + 26a^5b^5 - 21a^4b^6$	$2a^4b + 4a^3b^2 - 7a^2b^3$
$-10a^8b^2 - 20a^7b^3 + 35a^5b^4$	$5a^4b - 2a^3b^2 + 3a^2b^3$
1er reste.. $- 4a^7b^3 - 2a^6b^4 + 26a^5b^5 - 21a^4b^6$	
$+ 4a^7b^3 + 8a^6b^4 - 14a^5b^5$	
2e reste... $+ 6a^6b^4 + 12a^5b^5 - 21a^4b^6$	
$- 6a^6b^4 - 12a^5b^5 + 21a^4b^6$	
3e reste... 0	

Puisque le dividende est le produit du diviseur par le quotient cherché, il s'ensuit qu'après avoir ordonné le dividende et le diviseur par rapport à la lettre a, le premier terme $10a^8b^2$ du dividende, où la lettre a a le plus haut exposant, sera le produit du premier terme $2a^4b$ du diviseur, où la lettre a a le plus haut exposant, multiplié par celui des termes du quotient, où la même lettre a a le plus haut exposant (51) ; on aura donc ce terme du quotient, en divisant le premier terme $10a^8b^2$ par $2a^4b$ (58). Or, $10a^8b^2 : 2a^4b = 5a^4b$; donc $5a^4b$ est le premier terme du quotient cherché.

Mais le dividende étant la somme des produits du diviseur par chacun des termes du quotient (58 et 49) ; si de ce dividende, on soustrait le produit du diviseur par le premier terme $5a^4b$ du quotient, ce qui restera sera le produit du diviseur par tous les termes inconnus du quotient. Or, le produit du diviseur par $5a^4b$, est $10a^8b^2 + 20a^7b - 35a^6b^4$; si on soustrait ce produit, du dividende, ce qui se fait en l'écrivant au-dessous avec ses signes changés (42), et réduisant les termes semblables, il restera $- 4a^7b^3 - 2a^6b^4 + 26a^5b^5 - 21a^4b^6$.

Ce reste étant le produit du diviseur par tous les termes du quotient, excepté par le premier $5a^4b$, on voit qu'en divisant le premier terme $- 4a^7b^3$ de ce reste par le premier terme $2a^4b$ du diviseur, le quotient $- 2a^3b^2$ sera le second terme du quotient cherché. Multipliant le diviseur par $- 2a^3b^2$, et soustrayant le produit, du premier reste, on trouvera, réductions faites,

$$+ 6a^6b^4 + 12a^5b^5 - 21a^4b^6.$$

Ce second reste est encore le produit du diviseur par tous les termes du quotient cherché, excepté par les deux premiers. Donc, en divisant le premier terme $+ 6a^6b^4$ de ce reste ordonné, par le premier terme $2a^4b$ du diviseur, le quotient $+3a^2b^3$ sera le troisième terme du quotient cherché. Multipliant le diviseur par $+3a^2b^3$, et soustrayant le produit, du second reste, il ne reste rien. Donc $5a^4b - 2a^3b^2 + 3a^2b^3$, est le quotient exact des deux polynomes proposés.

Si $a=2$ et $b=\frac{1}{2}$, le dividende proposé deviendra $768\frac{3}{4}$, et le diviseur, $20\frac{1}{2}$; donc le quotient sera $37\frac{1}{2}$: et c'est effectivement ce que donne le quotient algébrique trouvé, quand on y fait $a=2$ et $b=\frac{1}{2}$.

On peut s'exercer à diviser $a^6 - 3a^4n^2 + 3a^2n^4 - n^6$ par $a^3 - 3a^2n + 3an^2 - n^3$; à diviser $a^{15} - b^{15}$ par $a^3 - b^3$; $x^6 - a^6$ par $x^3 + 2ax^2 + 2a^2x + a^3$; $64a^3 - z^3$ par $4a - z$; et enfin $21x^3y^2 + 25x^2y^3 + 68xy^4 - 40y^5 - 56x^5 - 18x^4y$ par $5y^2 - 8x^2 - 6xy$.

70. *Dans toute division algébrique, le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient trouvé, plus le reste.*

Car, en effectuant la division, on soustrait du dividende, le produit du diviseur par chacun des termes du quotient trouvé; on soustrait donc du dividende, le produit du diviseur par le quotient total trouvé (49). Par conséquent, en ajoutant le reste à ce produit, on aura le dividende.

71. Lorsque la lettre principale a le même exposant dans plusieurs des premiers termes du dividende, et le même exposant dans plusieurs des premiers termes du diviseur, il faut ordonner ces termes par rapport à une autre lettre.

Car alors, on est sûr que le premier terme du dividende, où cette seconde lettre a le plus haut exposant, est le produit du premier terme du diviseur, où cette seconde lettre a le plus haut exposant, multiplié par celui des termes du quotient, où cette seconde lettre a le plus haut exposant (51).

Sans cette attention, on n'arriverait au vrai quotient qu'après plusieurs calculs inutiles. C'est ce qu'on peut voir en effectuant la division des deux polynomes suivans, ordonnés comme ils le sont :

$$16a^3b^2 - 15a^3b^3 - 4a^3b + 2a^2b^2 - 3a^2b^3 + 20ab^2 - 8ab + 4b^2,$$
$$\text{et} \quad 2a^2b - 3a^2b^2 + 4b :$$

Le vrai quotient est $5ab - 2a + b$.

On pourrait aussi réunir en un seul, tous les multiplicateurs de chaque puissance de la lettre principale, et considérer chaque résultat comme un seul terme : alors, on aurait à opérer la division des deux polynomes suivans :

$$(16b^2 - 15b^3 - 4b)a^3 + (2b^2 - 3b^3)a^2 + (20b^2 - 8b)a + 4b^2,$$
$$\text{et}\quad (2b - 3b^2)a^2 + 4b.$$

De cette manière, les deux polynomes proposés n'ont pas changé de valeurs, puisqu'on n'a fait qu'indiquer des multiplications qui étaient effectuées ; mais la première division partielle exige qu'on divise un trinome en b par un binome en b, en les ordonnant tous les deux par rapport à b ; ce procédé rentre par conséquent dans celui que nous avons indiqué d'abord. Voici encore un exemple : $t^3u^3 - u^3 - t^3u^2 - t^2u^2 + 2u^2 + 4t^2u + 3tu + 2u - 3t - 3$ à diviser par $tu^2 - u^2 - tu + u + 3$.

72. En effectuant les divisions, il est facile de voir qu'on a

$$(a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2,$$
$$(a^4 - b^4) : (a - b) = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3,$$
$$(a^5 - b^5) : (a - b) = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4,$$

et ainsi de suite. D'après cela, on doit avoir

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1} \,..(1)$$

Et en effet, si l'on multiplie la seconde expression par $a - b$, on retrouve, après les réductions faites, le dividende $a^m - b^m$; donc cette seconde expression est réellement le quotient de $a^m - b^m$ par $a - b$. Donc *toute expression de la forme* $\mathrm{a}^m - \mathrm{b}^m$ *est divisible exactement par* $\mathrm{a} - \mathrm{b}$, *et donne un quotient homogène de* m *termes positifs.*

73. L'égalité (1) ayant lieu quels que soient a et b, on peut supposer que b y représente $-c$. Or, toute puissance paire de $-c$, étant le produit d'un nombre pair de facteurs négatifs $-c$, sera positive (46) ; et toute puissance impaire de $-c$, étant le produit d'un nombre impair de facteurs négatifs $-c$, sera négative (46). Changeant donc b en $-c$, dans la formule (1), on verra, 1° que *si* m *est pair*, *toute expression de la forme* $\mathrm{a}^m - \mathrm{c}^m$ *est divisible exactement par* $\mathrm{a} + \mathrm{c}$, *et donne un quotient homogène, de* m *termes alternativement positifs et négatifs ;*

2° Que *si* m *est impair*, *toute expression de la forme* a^m

$+c^m$ *est divisible exactement par* $a+c$, *et donne un quotient homogène, de* m *termes alternativement positifs et négatifs.*

C'est ce qu'on peut d'ailleurs vérifier sur des exemples particuliers, comme x^5+y^5 à diviser par $x+y$ et x^6-1 à diviser par $x-1$.

74. La division de deux polynomes est impossible lorsque le diviseur renferme des lettres qui ne sont pas au dividende, ou lorsque le premier terme de l'un des dividendes partiels n'est pas divisible par le premier terme du diviseur. Dans chacun de ces cas, pour n'avoir qu'un seul terme fractionnaire au quotient, il faut indiquer la division et simplifier l'expression résultante, si cela est possible. Par exemple, en divisant $2a^3-3a^2b-3ab^2+2b^3$ par a^2-4b^2, on trouve $2a-3b$ au quotient, avec le reste $5ab^2-10b^3$. Le plus haut exposant de a, dans ce reste, étant moindre que dans le premier terme du diviseur, il faut indiquer la division sur ce même reste, et ajouter l'expression au quotient trouvé. Mais on peut simplifier cette expression; car $5ab^2-10b^3=5b^2(a-2b)$ et $a^2-4b^2=(a+2b)(a-2b)$; de sorte que le dernier dividende partiel et le diviseur ont le facteur commun $a-2b$. Supprimant donc ce facteur commun, le dernier quotient partiel ne changera pas de valeur, et deviendra $\frac{5b^2}{a+2b}$. D'où il suit qu'on a

$$\frac{2a^3-3a^2b-3ab^2+2b^3}{a^2-4b^2}=2a-3b+\frac{5b^2}{a+2b}.$$

C'est ce qu'on vérifie en faisant, par exemple, $a=6$ et $b=2$; car alors chacune des 2 expressions se réduit à 8. Et l'exemple précédent montre aussi comment on extrait les *entiers* d'une *fraction algébrique*.

Des Fractions algébriques.

75. On appelle *fraction algébrique* ou *fraction littérale*, l'expression de la division de deux quantités, qui en sont les *termes*. Ainsi $\frac{a}{c}$, qu'on énonce *a divisé par c*, est une fraction algébrique : a est son *numérateur* et c son *dénominateur*. Si a vaut $\frac{3}{4}$, et c, $\frac{9}{8}$, la *valeur v* de la fraction algébrique $\frac{a}{c}$ sera $\frac{2}{3}$.

76. Le calcul des fractions algébriques est le même que celui

des fractions arithmétiques; mais les raisonnemens qui établissent le calcul de ces dernières fractions, étant fondés sur ce que leurs deux termes sont toujours des nombres entiers, ne peuvent plus s'appliquer aux fractions algébriques, dont les deux termes représentent souvent des nombres fractionnaires. Il est donc nécessaire de démontrer le calcul des fractions algébriques.

77. *Une fraction algébrique ne change pas de valeur, lorsqu'on multiplie ou qu'on divise ses deux termes par une même quantité.*

Soit $\frac{a}{c}$ la fraction proposée et v sa *valeur*, c'est-à-dire le quotient qu'on obtient en divisant le nombre que représente a par le nombre que désigne c; on aura donc $\frac{a}{c}=v$; d'où $a=cv$ (58). Multipliant les deux quantités égales a et cv par la même quantité quelconque m, les deux produits seront égaux, et il viendra $am=cvm$, ou $am=cmv$. Divisant les deux quantités égales am et cmv par la même quantité cm, les deux quotiens seront égaux, et on aura $\frac{am}{cm}=\frac{cmv}{cm}=v$. Ainsi les deux fractions $\frac{a}{c}$ et $\frac{am}{cm}$, égales au même nombre v, sont égales entre elles, et il vient enfin $\frac{a}{c}=\frac{am}{cm}$. Donc, etc.

78. Au moyen de ce principe, on pourra simplifier toute fraction dont les deux termes auront des facteurs communs; on pourra réduire plusieurs fractions algébriques au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres, ou par des nombres plus petits, comme en arithmétique : chaque fois les fractions ne changeront pas de valeurs.

Par exemple, soit à simplifier la fraction

$$\frac{18a^3b^2c-12a^2b^3c+2ab^4c}{6a^2b^3-2ab^4}:$$

on voit que tous les termes du numérateur et du dénominateur sont divisibles par 2, par a et par b^2, c'est-à-dire par $2ab^2$. Si donc on effectue ces divisions, on divisera réellement le numérateur et le dénominateur par $2ab^2$ (66); donc la fraction ne changera pas de valeur et deviendra

$$\frac{9a^2c-6abc+b^2c}{3ab-b^2}.$$

Pour voir si cette fraction peut encore être simplifiée, on observe que son dénominateur est la même chose que $(3a-b)b$. On essaie ensuite de diviser son numérateur par $3a-b$, et l'on trouve le quotient exact $3ac-bc$: en sorte que la fraction proposée se réduit à

$$\frac{3ac-bc}{b}, \text{ ou à } \frac{3ac}{b}-c.$$

Voici encore quelques fractions à simplifier :

$$\frac{px+x^2}{mp+mx}, \quad \frac{5x^9+45dx^2}{10cx^9+90cdx^2} \quad \text{et} \quad \frac{30x-15y+15}{12x^2-12xy+3y^2-3}.$$

79. *Pour ajouter ou soustraire entre elles plusieurs fractions algébriques, il faut, après les avoir réduites au même dénominateur, prendre la somme ou la différence des nouveaux numérateurs, et donner au résultat le dénominateur commun.* C'est ainsi qu'on aura

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}.$$

En effet, la réduction des fractions algébriques au même dénominateur n'en change pas les valeurs; la première des trois expressions précédentes est donc égale à la seconde. Mais celle-ci est égale à la troisième, puisqu'elle est ce qu'on obtient en effectuant la division indiquée par cette troisième (66) : donc ces trois expressions sont égales entre elles, comme on l'a trouvé en appliquant la règle énoncée d'abord.

80. Par exemple, qu'on ait à calculer l'expression que voici :

$$\frac{3a^3-4b^3}{2a^3-4a^2b+2ab^2}-\frac{5a^2-4b^2}{3a^2+3ab}+\frac{2a^3-b^3}{a^3-ab^2}.$$

Il serait très-long de réduire au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs des deux autres. Mais on peut simplifier cette réduction, en décomposant les dénominateurs proposés dans leurs facteurs *premiers*. En effet, d'après ce qui précède, il est facile de voir que ces dénominateurs valent respectivement

$$2a(a-b)^2,\ 3a(a+b) \text{ et } a(a+b)(a-b).$$

D'où l'on voit que le moindre multiple de tous les dénominateurs est

$$6a(a+b)(a-b)^2.$$

Prenant donc ce moindre multiple pour dénominateur commun ; multipliant le numérateur de chaque fraction par le nombre de fois que son dénominateur est contenu dans ce multiple ; puis effectuant l'addition et la soustraction indiquées sur les nouvelles fractions, et réduisant les termes semblables, on trouvera, pour la valeur de l'expression proposée,

$$\frac{11a^4+17a^3b-2a^2b^2-34ab^3+2b^4}{6a(a+b)(a-b)^2}.$$

81. Opérant de la même manière, on trouvera

$$\frac{4a+b}{2ab-b^2}-\frac{5a-b}{2a^2-ab}=\frac{2a-b}{ab};$$

$$a+x-\frac{2x^2-a^2}{a-x}=\frac{2a^2-3x^2}{a-x};$$

$$\frac{2a-x}{a+x}+\frac{a-2x}{a-x}-\frac{4a^2-4ax-3x^2}{a^2-x^2}=\frac{2x^2-a^2}{a^2-x^2};$$

$$\frac{3a-z}{2a}+\frac{4a+z}{3z}-\frac{8a^2+3az}{6az-6z^2}=\frac{3z^2-14az}{6a(a-z)}.$$

Et nous laissons à calculer l'expression :

$$\frac{a^2-3au+u^2}{a^2-u^2}-\frac{3a^2-5au+u^2}{a^2-2au+u^2}+\frac{3a-u}{a-u}.$$

82. *Pour multiplier une fraction algébrique par une autre, il suffit de multiplier numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur.* C'est ainsi que

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

En effet, soient u et v les valeurs des deux fractions proposées ; on aura donc $\frac{a}{b}=u$ et $\frac{c}{d}=v$; d'où $a=bu$ et $c=dv$. Ce qui donne $ac=budv=bduv$. Divisant les deux quantités égales ac et $bduv$ par la même quantité bd, les deux quotiens seront égaux, et il viendra

$$\frac{ac}{bd}=uv;\ \text{d'où}\ u\times v=\frac{ac}{bd}\ \text{et}\ \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

83. D'après la règle précédente, et en observant que $\frac{a}{1}=a$, etc., il est clair qu'on aura

$$\frac{a}{b}\times c=\frac{a}{b}\times\frac{c}{1}=\frac{ac}{b}=\frac{a}{b:c}\ (77)\ \text{et}\ a\times\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\times\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}.$$

D'où l'on voit, 1° qu'*on multiplie une fraction algébrique par une quantité, en multipliant le numérateur par cette* *quantité; ou bien*, *en divisant le dénominateur par la même quantité; 2° qu'on multiplie une quantité par une fraction algébrique*, *en multipliant cette quantité par le numérateur et en donnant au produit le dénominateur de la fraction.*

Voici plusieurs exemples :

$$\frac{3a+x}{4a^2-8ax+4x^2}\times(2a-2x)=\frac{3a+x}{2a-2x};\ \frac{3ab^2}{14x^3}\times 7x=\frac{3ab^2}{2x^2};$$

$$\frac{2a-z}{4a}\times\frac{6a-2z}{z^2-2az}=\frac{z-3a}{2az};\ \frac{9a^4b}{8c^4}\times\frac{4c^2}{3a^2}=\frac{3a^2b}{2c^2};$$

$$\left(a-2c+\frac{a-2a^2-2c}{2a-1}\right)\left(c-\frac{2ac+c}{4a}\right)=-c^2;$$

$$\frac{26x-13}{x+2}\times\frac{15}{x-1}\times\frac{7x+14}{15}\times\frac{2}{65}=\frac{28x-14}{5x-5}.$$

84. *Pour diviser une fraction algébrique par une fraction algébrique*, *il faut multiplier la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.* C'est ainsi que

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

En effet, en multipliant le quotient trouvé par le diviseur, le produit est $\frac{acd}{bcd}$ et se réduit au dividende $\frac{a}{b}$; donc ce quotient trouvé est le véritable (58).

85. D'après la règle précédente, et en observant que $\frac{1}{a}$ est $\frac{a}{1}$ ou a *renversé*, il est visible qu'on aura

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}=\frac{a:c}{b}\quad\text{et}\quad a:\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}.$$

Ce qui montre, 1° qu'*on divise une fraction algébrique par une quantité*, *en multipliant son dénominateur par cette quantité; ou bien en divisant son numérateur par la même quantité; 2° qu'on divise une quantité par une fraction algébrique*, *en multipliant cette quantité par le dénominateur et en divisant le produit par le numérateur de la fraction.*

Voici quelques exemples :

$$\frac{2a^2-7ab+3b^2}{a+2b}:(2a-b)=\frac{a-3b}{a+2b};\ 8a^9x^4:\frac{4a^5x^2}{3z}=6a^4x^2z;$$

$$(ax-b):\frac{a^2x^2-b^2}{2x-a}=\frac{2x-a}{ax+b};\ \frac{9a^2u}{5x^3}:\frac{3a^3u^2}{10x^4}=\frac{6x}{au};$$

$$\frac{3p}{2p-2}:\frac{2p}{p-1}=\frac{3}{4}\quad\text{et}\quad\frac{x-1}{4x}:\frac{3x}{2x+2}=\frac{x^2-1}{6x^2}.$$

Nota. Dans ce qui précède, on a indiqué les opérations sur les fractions, en plaçant les signes vis-à-vis la barre qui sépare les deux termes et sur la même ligne. Cela dispense d'employer des parenthèses qui, dans ce cas, ne manqueraient pas d'allonger les expressions.

Des Equations.

86. On appelle *équation* l'expression de l'égalité de deux quantités algébriques renfermant les nombres connus et inconnus. Ces deux quantités sont les deux *membres* de l'équation : tout ce qui est à la gauche du signe $=$ s'appelle le *premier membre*, et tout ce qui se trouve à la droite du même signe se nomme le *second membre*. Ainsi l'expression $ax - b = 2a - bx + 4$ est une équation, dont $ax - b$ est le premier membre, et $2a - bx + 4$, le second.

87. Une équation exige toujours que les *inconnues* aient des valeurs numériques propres à faire exprimer le même nombre à ses deux membres.

88. *Résoudre* une équation, c'est en déduire la valeur de l'inconnue qui rend le premier membre égal au second.

Ainsi, pour résoudre une équation, il faut la transformer en une autre, où l'inconnue soit seule dans un membre et les quantités données dans l'autre. Mais cela exige qu'on fasse sur ces deux membres des opérations qui n'en détruisent pas l'égalité ; car autrement l'inconnue devrait changer de valeur pour maintenir cette égalité ; et la valeur qu'on obtiendrait ensuite ne serait plus celle de l'inconnue dans l'équation proposée. Or, puisque les deux membres sont deux quantités égales, si l'on fait la même opération sur eux, les deux résultats seront nécessairement égaux, et l'inconnue ne changera pas de valeur pour maintenir l'égalité ; d'où il suit que la résolution d'une équation se réduit à faire précisément les mêmes opérations sur les deux membres.

89. *Une équation n'est pas détruite lorsqu'on passe tous les termes inconnus dans un membre et les termes connus dans l'autre, avec l'attention de changer les signes des termes qui changent de membre.* (Ce qu'on appelle *transposer*.)

C'est ainsi que l'équation

$$9x+4=24-x, \text{ devient } 9x+x=24-4.$$

En effet, en effaçant $+4$ dans le premier membre, et en écrivant -4 dans le second, on diminue ces deux membres de 4; on diminue donc deux nombres égaux d'un même 3[me]; les deux restes sont par conséquent égaux. Pareillement, en effaçant $-x$ dans le second membre et en écrivant $+x$ dans le premier, on augmente ces deux membres de x; on augmente donc deux quantités égales d'une même 3[me] x; donc les deux sommes sont égales. On voit donc que la *transposition* des termes n'a pas détruit l'égalité.

Effectivement, la nouvelle équation étant la même chose que $10x=20$, donne $x=2$; et cette valeur 2, mise à la place de x, *satisfait* à l'équation proposée, puisqu'elle la réduit à $22=22$.

90. Transposant les termes dans l'équation

$$2ax-3b+4c=cx+a-x,$$

elle devient $2ax-cx+x=a+3b-4c$.

La transposition n'a pas détruit l'égalité; car si on retranche des deux membres de l'équation proposée, le polynome $cx-x-3b+4c$, formé de tous les termes qui doivent être transposés, écrits avec leurs signes, les deux restes nécessairement égaux, se réduisent aux deux membres de la nouvelle équation.

91. *Une équation n'est pas détruite lorsqu'on change les signes des termes de ses deux membres.* Par ex., l'équation $4x-7=8-x$ est la même chose que $-4x+7=-8+x$; car cela revient à multiplier les deux membres par -1. D'ailleurs, si l'on transpose tous les termes du premier membre de l'équation proposée dans le second, et tous les termes du second dans le premier, l'égalité ne sera pas détruite (89). et il viendra $-8+x=-4x+7$. On peut changer l'ordre des deux membres de cette équation, sans en détruire l'égalité; car si $a=b$, réciproquement $b=a$: on a donc $-4x+7=-8+x$, comme on l'a trouvé par l'application du principe.

92. *Une équation n'est pas détruite lorsqu'on réduit tous les termes des deux membres au même dénominateur, et qu'on néglige d'écrire le dénominateur commun.* (Ce qui s'appelle *chasser* ou *faire disparaître* les dénominateurs.)

Soit par exemple

$$\frac{7x}{8} - 6x + \frac{3}{4} = \frac{x}{2} - \frac{5}{12}:$$

Si l'on réduit tous les termes des deux membres au même dénominateur 24, et qu'on néglige d'écrire ce dénominateur commun, on aura $21x - 144x + 18 = 12x - 10$.

En effet, la réduction de tous les termes des deux membres au même dénominateur 24, ne change pas la valeur de ces termes; donc les deux membres eux-mêmes ne changent pas de valeurs, et sont encore égaux. Mais en négligeant d'écrire le dénominateur commun 24, on multiplie tous les termes des deux membres par ce dénominateur; on multiplie donc les deux membres eux-mêmes, ou deux nombres égaux, par ce dénominateur (48); donc les deux produits sont égaux, et l'on a une équation sans diviseur.

Nota. On fait aussi disparaître les diviseurs d'une équation, en multipliant tous les termes des deux membres par le moindre multiple de ces diviseurs, et en effectuant les divisions. Il est visible qu'alors l'égalité n'est pas détruite.

93. *Lorsqu'on ajoute, ou soustrait, ou multiplie, ou divise deux équations entre elles, les deux résultats sont égaux.* En effet,

1° Ajouter une équation à une autre, c'est ajouter le premier membre au premier membre et le second au second. De cette manière, comme les deux membres de la première équation représentent le même nombre, on ajoute ce nombre aux deux membres de la seconde, c'est-à-dire à deux quantités égales; donc les deux sommes sont égales. Donc si $a = b$ et $c = d$, on aura $a + c = b + d$.

2° Soustraire une équation d'une autre, c'est soustraire le premier membre du premier membre et le second du second. Dans ce cas, comme les deux membres de la première équation expriment le même nombre, on soustrait ce nombre des deux membres de la seconde, c'est-à-dire de deux nombres égaux; donc les deux restes sont égaux. Donc si $a = b$ et $c = d$, on aura $a - c = b - d$.

3° Multiplier ou diviser une équation par une autre, c'est multiplier ou diviser le premier membre par le premier membre et le second par le second. Alors, comme les deux membres de la seconde équation représentent le même nombre, on multiplie ou l'on divise par ce nombre les deux membres de la première, c'est-à-dire deux quantités égales ; donc les deux produits ou les deux quotiens sont égaux. Donc si $a = b$ et $c = d$, il vient $ac = bd$ et $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

94. Les principes précédens sont nécessaires à la résolution des équations ; mais ils sont loin de suffire dans tous les cas, parce que la résolution des équations dépend du nombre d'inconnues qu'elles renferment, et sut-tout de leur *degré*.

95. Une équation est du *premier degré*, lorsque l'inconnue n'est multipliée ni par elle-même, ni par d'autres nombres inconnus. Une équation est du n^{me} *degré*, quand le terme qui a le plus de facteurs inconnus, en contient n. Ainsi $3x - 2y + 4 = y - x$ est une équation du premier degré, à deux inconnues ; $3x^2 - 7x + 8 = 0$ est une équation du second degré, à une inconnue ; etc.

96. Une équation est *numérique*, lorsqu'elle n'a d'autres lettres que les inconnues ; elle est *littérale*, quand elle contient encore d'autres lettres que les nombres cherchés : $ax - by = 3a + 6$ est une équation littérale, et $8x - 9 = 5y + 1$, une équation numérique.

97. On distingue trois sortes d'égalités, savoir : les égalités *vérifiées*, comme $7 + 2 = 9$, qui est aussi une *identité* ; les *équations*, qui n'ont lieu que pour certaines valeurs des inconnues, et les *identités*, qui sont vraies pour toutes les valeurs qu'on veut donner aux lettres qui les composent. Ainsi $ax - b = ax - b$ est une identité, de même que $(2a - 3b)\,4a = 8a^2 - 12ab$. En général, il y a identité entre toute opération algébrique indiquée et le résultat qu'elle donne en l'effectuant.

De la résolution des équations du premier degré.

Voyons d'abord la résolution des équations du premier degré, à une inconnue.

98. Pour résoudre une équation quelconque du premier degré, à une inconnue, il faut chasser les dénominateurs, transposer les termes et réduire, puis égaler l'inconnue au nouveau second

membre divisé par le résultat qu'on trouve, en écrivant avec leurs signes tous les multiplicateurs de l'inconnue dans le premier. Par exemple, soit l'équation

$$\frac{bx}{2a} - b = \frac{a^2}{b} + \frac{x}{4ab}.$$

En appliquant la règle précédente, on aura successivement :

$$2b^2x - 4ab^2 = 4a^3 + x,$$
$$2b^2x - x = 4a^3 + 4ab^2,$$
$$\text{et} \quad x = \frac{4a^3 + 4ab^2}{2b^2 - 1}.$$

En effet, on sait déjà que les deux premières transformations ne détruisent pas l'égalité des deux membres (92 et 89) : il reste donc à faire voir qu'il en est de même de la troisième. Or, dans l'équation $2b^2x - x = 4a^3 + 4ab^2$, le premier membre est la même chose que $(2b^2 - 1)x$, puisqu'en effectuant la multiplication par x, on retrouve $2b^2x - x$ au produit (48); on peut donc remplacer ce premier membre par sa valeur $(2b^2 - 1)x$; et alors l'équation devient $(2b^2 - 1)x = 4a^3 + 4ab^2$. On voit que $4a^3 + 4ab^2$ exprime le produit de $2b^2 - 1$ par x; donc en divisant ce produit par $2b^2 - 1$, on aura x au quotient : donc effectivement $x = \frac{4a^3 + 4ab^2}{2b^2 - 1}$.

Actuellement, puisque les transformations qu'on a fait subir aux deux membres de l'équation proposée, n'ont pas détruit leur égalité, l'inconnue x n'a pas dû changer de valeur pour maintenir cette égalité; la valeur trouvée pour x est donc celle qui rend égaux les deux membres de l'équation proposée; cette équation est par conséquent résolue.

Remplaçant x par sa valeur obtenue, on verra aisément que chacun des deux membres proposés se réduit à la même fraction algébrique : donc cette valeur est la véritable.

99. En appliquant la règle que nous venons d'établir, l'équation

$$\frac{2x}{3} - 17 = \frac{11x}{12} - 56,$$

devient (92) $8x - 204 = 11x - 672$,

puis (89) $8x - 11x = 204 - 672$,

ensuite $-3x = -468$, ou $3x = 468$,

et enfin $x = \frac{468}{3} = 156$.

Voici quelques équations à résoudre, d'après la même règle :

$$\frac{x}{5}+\frac{3x}{4}+8=x+\frac{7x}{10}-7,\quad \frac{2ax}{a+b}-\frac{b^2}{a-b}=x,$$

$$\frac{x}{3}-2+\frac{3x}{4}=5+x-\frac{x}{2}\quad \text{et}\quad x-\frac{4a}{3c}=\frac{cx}{2a}-\frac{a^2}{2c}.$$

100. Lorsque les dénominateurs sont des polynomes, on peut, pour soulager l'esprit, indiquer d'abord les multiplications, et les effectuer ensuite ; ce qui est plus facile, en les voyant ainsi indiquées. Par exemple, soit à résoudre l'équation

$$\frac{a(x-b)}{a-b}+3b=\frac{bx}{3a+b}:$$

chassant les dénominateurs, et indiquant, on aura

$$a(x-b)(3a+b)+3b(a-b)(3a+b)=bx(a-b);$$

effectuant les multiplications indiquées, il viendra

$$3a^2x-3a^2b+abx-ab^2+9a^2b-9ab^2+3ab^2-3b^3$$
$$=abx-b^2x;$$

transposant et réduisant, cette équation donne

$$3a^2x+b^2x=7ab^2-6a^2b+3b^3;$$

$$\text{d'où}\quad x=\frac{7ab^2-6a^2b+3b^3}{3a^2+b^2}.$$

Si $a=2$ et $b=3$, on aura $x=\frac{135}{21}$.

Voici deux équations, avec les valeurs qu'elles fournissent

$$\frac{b(x-b^2)}{2a-3b}=a^2-\frac{ax}{2a-b},\quad x=2a^2-3ab+b^2;$$

$$\frac{2a^2x}{4a^2-b^2}+ab=\frac{a(x-b^2)}{2a-b}-\frac{bx}{4a+2b},\quad x=\frac{4a}{b}(2a+b).$$

101. *Lorsque les deux membres de l'équation ont un facteur commun, il faut le supprimer, s'il est connu ; mais s'il n'est pas connu, il faut l'égaler à zéro.* Par ex., l'équation

$$7(2x-7)=9(2x-7),$$

donne, en la résolvant, $x=\frac{7}{2}$; si on avait supprimé le facteur commun $2x-7$, on aurait eu $7=9$, résultat absurde. Mais il faut observer que l'équation proposée ne peut être vraie qu'autant qu'on y regarde $2x-7$ comme égal à zéro ; ce qui donne $x=\frac{7}{2}$. Le facteur $2x-7$ étant donc nécessairement nul, et la suppression de ce facteur nul ayant donné un résultat impossible, on voit qu'il n'est pas permis de diviser ni de multiplier les deux membres d'une équation par zéro.

102. Occupons-nous maintenant de la résolution des équations du premier degré, à plusieurs inconnues. Résoudre de telles équations, c'est trouver des quantités qui, mises à la place des inconnues, rendent le premier membre de chaque équation égal au second; et ces quantités sont une *solution* des équations proposées.

103. Une équation à deux inconnues, telle que $x-2y=12$, admet une infinité de solutions; car pour chaque valeur arbitraire de l'une des inconnues, l'équation détermine la valeur correspondante de l'autre inconnue.

104. En général, une équation ne peut faire connaître qu'une seule inconnue : donc, pour déterminer les quantités cherchées, il faut autant d'équations distinctes qu'il y a de nombres à trouver. Mais de plus, on doit d'abord faire disparaître ou *éliminer* de ces équations, assez d'inconnues, pour qu'on obtienne une équation à une inconnue, qu'on appelle *équation finale*.

105. L'*élimination* peut se faire par différentes méthodes; nous allons commencer par la méthode d'addition et de soustraction, qui est la plus simple. Soit donc à résoudre les deux équations

$$\frac{2x}{3}-1+\frac{y}{2}=\frac{x}{4}-y+16$$
$$2x-\frac{y}{4}-6=\frac{5x}{4}+\frac{y}{8}.$$

Chassant les dénominateurs, transposant et réduisant, on aura

$$\left.\begin{array}{l}5x+18y=204\\6x-3y=48\end{array}\right\}[1]$$

Rendons égaux les multiplicateurs de x, en multipliant la première équation par 6 et la seconde par 5 : les égalités ne seront pas détruites, puisque chaque fois on multiplicra deux nombres égaux par un même 3^{me}; on aura donc

$$30x+108y=1224$$
$$30x-15y=240.$$

Retranchant la seconde de ces équations de la première, les deux restes seront égaux (93), et il viendra, en réduisant,

$$123y=984;\ \text{d'où}\ y=\tfrac{984}{123}=8.$$

Substituant 8 à la place de y dans la première équation [1], l'égalité ne sera pas détruite, et deviendra $5x + 144 = 204$, puis $5x = 60$ et $x = 12$.

Mais on peut arriver directement à cette valeur de x; car si l'on rend égaux les coefficiens de y dans les équations [1], ce qui se fait en multipliant la seconde par 6, et qu'ensuite on ajoute la nouvelle équation $36x - 18y = 288$ à la première, les termes en y se détruiront, et il viendra $41x = 492$ ou $x = 12$.

106. Le résumé des calculs précédens montre, que pour résoudre deux équations du premier degré, à deux inconnues x et y, il faut d'abord chasser les dénominateurs, transposer et réduire; puis rendre égaux les multiplicateurs de x dans les deux équations résultantes, en multipliant la première par le multiplicateur de x dans la seconde, et la seconde par le multiplicateur de x dans la première, ou par des nombres plus petits, comme dans la réduction au même dénominateur. Ensuite on ajoutera ou soustraira les deux nouvelles équations, suivant que les termes en x auront des signes différens ou le même signe. Cette opération faisant disparaître les termes en x, donnera l'équation finale en y, de laquelle on déduira cette inconnue. Connaissant y, on substituera sa valeur dans l'une des deux équations sans diviseur, et l'on aura x.

Il est clair que par ce procédé, les équations subissent des transformations qui ne détruisent pas l'égalité des deux membres de chacune; donc les inconnues x et y ne changent pas de valeurs pour maintenir ces égalités, et les valeurs trouvées sont celles de x et y dans les équations proposées.

Appliquant la règle précédente aux deux groupes d'équations

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{3} - 2 + \frac{y}{5} = \frac{3y}{10} - \frac{5x}{6} + 10 \\ \frac{3x}{4} - \frac{y}{2} + 1 = \frac{2x}{3} - \frac{2y}{5}, \end{array}\right| \begin{array}{l} \frac{2x}{3} + \frac{y}{7} - 3 = \frac{3x}{4} \\ \frac{5x}{6} - \frac{2y}{5} + 2 = \frac{7x}{12} - y + 29; \end{array}$$

on trouvera, pour le premier, $x = 12$ et $y = 20$, et pour le second, $x = 24$ et $y = 35$.

107. Si l'on a trois équations, à trois inconnues x, y, z, il faudra, pour appliquer la règle précédente, chasser les dénominateurs, transposer et réduire; puis éliminer z entre la première et la seconde équations résultantes, ainsi qu'entre la première et la troisième, en rendant les multiplicateurs égaux deux à deux. On parviendra ainsi à deux équations en x et y, entre lesquelles

on élminera y pour avoir x et ensuite y. Connaissant x et y, on les remplacera par leurs valeurs dans l'une quelconque des trois équations sans diviseurs, et l'on aura z.

Qu'on ait par exemple les trois équations

$$\frac{5x}{6}+\frac{3y}{4}-7=z-1$$
$$\frac{2x}{3}-\frac{y}{2}+\frac{4z}{7}=y+z-1$$
$$3z-6y+18=x+\frac{3y}{4}.$$

Faisant disparaître les dénominateurs, et transposant, on aura

$$\left.\begin{array}{l} 10x+9y-12z=72 \\ 28x-63y-18z=-42 \\ 4x+27y-12z=72 \end{array}\right\}[2]$$

Pour éliminer z de ces équations, on multiplie la première par 3 et la seconde par 2, puis on retranche le premier résultat du second; on retranche aussi la troisième équation [2] de la première; et on a ainsi

$$26x-153y=-300$$
$$6x-18y=0 \text{ ou } x-3y=0.$$

Eliminant x de ces équations, il vient $75y=300$; d'où $y=4$. Remplaçant y par sa valeur 4 dans $x-3y=0$, il vient $x-12=0$ ou $x=12$. Substituant les valeurs 12 et 4 de x et de y dans la première des équations [2], on obtient $120+36-12z=72$, ou $z=7$. De sorte que $x=12$, $y=4$ et $z=7$, dans les équations proposées; et c'est ce qu'on peut aisément vérifier.

108. La méthode précédente s'applique à plus de trois équations, avec autant d'inconnues, même quand des inconnues n'entrent pas dans toutes les équations. Voici deux systèmes d'équations à résoudre :

$$\begin{array}{l|l} \frac{2x}{3}+\frac{y}{4}-1=\frac{z}{2}+4 & 3u-5x=3-3y \\ x-4+\frac{3y}{4}=10+\frac{2z}{5} & x-4=2y-z \\ \frac{4z}{5}-\frac{5x}{6}+2=\frac{y}{2}-4 & 3y+z=2u+3 \\ & 2x-3u=y-8. \end{array}$$

Dans le premier système $x=12$, $y=8$, $z=10$, et dans le second $u=4$, $x=3$, $y=2$ et $z=5$.

109. En général, si l'on a m équations à m inconnues, on combinera la plus simple de ces équations avec chacune des $m-1$ autres, pour en éliminer la même inconnue, en rendant ses coefficiens égaux deux à deux; et l'on obtiendra $m-1$ nouvelles équations à $m-1$ inconnues. On opérera de même sur les nouvelles équations, pour en éliminer une autre inconnue; et en continuant ce procédé, on parviendra à une équation ne contenant qu'une inconnue, et de laquelle on déduira la valeur de cette inconnue. Substituant ensuite les valeurs des inconnues, qui sont déterminées, dans l'une des équations qui précèdent immédiatement celles qui contiennent ces inconnues, on aura une nouvelle inconnue; et ainsi de suite, en remontant. Cette méthode se simplifie lorsque quelqu'inconnue n'entre pas dans toutes les équations : par exemple, si l'on a

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= 13 \\ 4u - 2x &= 30 \\ 4y + 2z &= 14 \\ 5y + 3u &= 32, \end{aligned}$$

on verra aisément que l'élimination de z entre la première et la troisième, et l'élimination de u entre la seconde et la quatrième, donnent les deux équations, à deux inconnues

$$\begin{aligned} 7y - 2x &= 1 \\ 20y + 6x &= 38. \end{aligned}$$

Ajoutant la seconde de ces équations à la première multipliée par 3, on a $\quad 41y = 41$; d'où $y = 1$.

Substituant cette valeur dans $7y - 2x = 1$, il vient $x = 3$. Reportant la valeur 3 de x dans la seconde équation proposée, et la valeur 1 de y dans la troisième, on trouve $4u - 6 = 30$ et $4 + 2z = 14$; d'où $u = 9$ et $z = 5$. D'où il suit que, dans les quatre équations proposées, $x = 3$, $y = 1$, $u = 9$ et $z = 5$.

Soient encore à résoudre les deux groupes d'équations

$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} - 3 = \frac{u}{2} - 1$	$7x - 2z + 3u = 17$
$x - \frac{z}{3} - 8 = \frac{y}{2} - 2$	$4y - 2z + t = 11$
$\frac{y}{8} + u - 2 = \frac{z}{3} + 1$	$5y - 3x - 2u = 8$
$u - \frac{z}{6} + 1 = \frac{x}{12} + 3$	$4y - 3u + 2t = 9$
	$3z + 8u = 33.$

On trouve, dans le premier groupe, $x=12$, $y=8$, $z=6$, $u=4$, et dans le second, $x=2$, $y=4$, $z=3$, $u=3$ et $t=1$.

110. Si l'on veut résoudre m équations du premier degré, à m inconnues, par la méthode d'élimination, connue sous le nom de *substitution des valeurs*, on prendra, dans la plus simple de ces équations, la valeur d'une inconnue, et l'on substituera cette valeur dans toutes les autres équations ; ce qui donnera $m-1$ nouvelles équations avec $m-1$ inconnues. Répétant ce procédé sur les nouvelles équations, et ainsi de suite, on finira par tomber sur une équation, à une inconnue, et qui en déterminera la valeur. Substituant cette valeur dans l'expression de l'avant-dernière inconnue, on aura celle-ci. Substituant les valeurs des deux dernières inconnues, dans l'expression de la troisième, et ainsi de suite, en remontant, on déterminera cette troisième et celles qui la précèdent.

D'après cette méthode, soient à résoudre les équations

$$\begin{aligned} 4x-3y+z&=3\\ 10x-3y+4z&=27\\ 12x-5y-3z&=-3. \end{aligned}$$

D'abord, pour éviter un dénominateur, on prend la valeur de z dans la première de ces équations, et on trouve

$$z=3-4x+3y.$$

Comme z a nécessairement la même valeur dans les deux autres équations, si on y substitue cette valeur au lieu de z, les égalités subsisteront encore, et on aura

$$\begin{aligned} 10x-3y+4(3-4x+3y)&=27\\ 12x-5y-3(3-4x+3y)&=-3. \end{aligned}$$

Ces deux équations ne renferment pas l'inconnue z, et deviennent, toute opération faite,

$$\left.\begin{aligned} 9y-6x&=15\\ 24x-14y&=6 \end{aligned}\right\}\text{ ou }\left\{\begin{aligned} 3y-2x&=5\\ 12x-7y&=3. \end{aligned}\right.$$

Prenant la valeur de y dans la 1re de ces équations, on aura

$$y=\tfrac{1}{3}(5+2x).$$

Substituant cette valeur dans la 2e équation, elle deviendra

$$12x-\tfrac{7}{3}(5+2x)=3;\ \text{d'où}\ x=2.$$

Maintenant, si l'on met 2 pour x dans l'expression de y, on aura $y=3$. Mettant 2 pour x et 3 pour y dans l'expression de z, on trouvera $z=4$. On a donc $x=2$, $y=3$ et $z=4$, dans les équations proposées.

Nous laissons à résoudre, d'après la même méthode, les deux groupes d'équations que voici :

$$\begin{array}{l|l} 4u-3x+2y-5z=-24 & u+x+y=z+a \\ 2u+4x-7y+3z=3 & u+x+z=y+b \\ 3u+2x-4y+3z=12 & u+z+y=x+c \\ 6u-9x-5y+4z=-25 & x+y+z=u+d. \end{array}$$

111. On élimine encore par *la comparaison des valeurs*, c'est-à-dire en prenant dans les équations proposées, la valeur d'une même inconnue, et en égalant la plus simple de ces valeurs à chacune des autres; en opérant de même sur les nouvelles équations, et ainsi de suite. Mais cette méthode est beaucoup moins simple que les deux précédentes, à cause des dénominateurs qu'il faut y faire disparaître.

112. En général, de toutes les manières d'éliminer les inconnues dans les équations du premier degré, la méthode par addition et soustraction paraît devoir être préférée, 1° parce qu'elle offre plus d'abréviations particulières; 2° parce qu'elle ne conduit pas, comme les autres méthodes, à de nouvelles équations renfermant des dénominateurs, qu'il faut chasser ensuite; 3° parce que si les coefficiens ne sont pas très-grands, on peut faire l'addition ou la soustraction en même temps que les multiplications pour les rendre égaux; et il y a encore d'autres raisons de préférence, comme on le verra plus bas. Cependant il peut arriver que la résolution des équations ne puisse se faire que par la substitution des valeurs; et c'est pour cela que nous avons aussi développé cette dernière méthode, qu'il faut absolument employer dans les deux équations $x^2+y^2=7y$ et $3x=2y$.

113. Du reste, il existe un grand nombre de manières particulières d'éliminer les inconnues; et l'habitude fera bien vîte reconnaître les simplifications qui peuvent se présenter dans la résolution des équations. Par ex., soient les deux systèmes :

$$\begin{array}{l|l} x+2y+4z=24 & x+y+z=m \\ 3x+3y+2z=23 & ax+by+cz=p \\ 7x+10y+4z=60 & cx+(b+c)y+2cz=q. \end{array}$$

Il suffira, dans le premier système, de soustraire la seconde équation, multipliée par 4, de la somme des deux autres, et dans le deuxième système, d'ajouter à la seconde équation, les produits respectifs des deux autres par c et -1. (Voyez d'ailleurs les Mélanges d'Algèbre, pages 18 et suivantes.)

114. Il est bon de remarquer qu'un système de $n+p$ équations du premier degré, à n inconnues, n'est possible que dans le seul cas où p de ces équations sont des conséquences des n autres. Car ces n équations déterminant les n inconnues, si on substitue les valeurs résultantes dans les p égalités non employées, on aura p équations, nommées *équations de conditions*, parce que n'ayant plus d'inconnues, les données du système doivent y satisfaire, pour que ce système soit possible. Par exemple, soient les trois équations à trois inconnues

$$2x-3y=2,\quad 5x-6y=2 \quad \text{et} \quad 2x+y=14.$$

Les deux premières équations donnent $x=4$ et $y=3$; et ces valeurs ne satisfaisant pas à la troisième équation, il s'ensuit que les trois équations proposées ne sauraient exister ensemble.

115. Remarquons encore que l'équation finale qui résulte de l'élimination entre des équations du premier degré, est aussi du premier degré; car dans les transformations que subissent ces équations, les inconnues ne sont jamais multipliées que par des nombres.

116. Cela suppose néanmoins qu'il n'y ait pas d'inconnues aux dénominateurs en même temps qu'aux numérateurs; car en faisant disparaître ces dénominateurs, les inconnues seraient multipliées par des inconnues, et les équations résultantes ne seraient pas du premier degré. On ne doit donc juger du degré d'une équation qu'après avoir fait disparaître les dénominateurs inconnus.

Problèmes du premier degré.

117. Les équations servent à exprimer, d'une manière abrégée, les raisonnemens et les opérations que nécessite la *solution* d'un problème, c'est-à-dire la détermination des inconnues que ce problème renferme.

118. Tout problème est de même degré que l'équation finale qui le résout.

119. La solution d'un problème est toujours composée de

trois parties distinctes : dans la première, on met le prol
en équations ; dans la seconde, on résout les équations, et
la troisième, on fait la *preuve* du problème, c'est-à-dir
vérifie si les valeurs trouvées pour les inconnues satisfont à t
les conditions de la question.

120. Pour mettre un problème en équations, il suffit
indiquer la preuve, et voici comment : on représente d'a
les nombres donnés par des chiffres ou des lettres, et les
bres inconnus toujours par des lettres ; ensuite on s'atta
bien comprendre l'énoncé, c'est-à-dire à bien reconnaître q
opérations on devrait effectuer sur les nombres connus et i
nus, pour vérifier ces derniers, si leurs valeurs étaient dét
nées, et on indique ces opérations à mesure qu'on les déco

121. Par exemple, *le quantième d'un mois de 30 jou
égal au tiers du nombre de jours écoulés, plus la moi
ceux qui restent à écouler ; quel est ce quantième ?*

Soit x le quantième demandé ; on est donc au x^{me} jo
mois ; il y a par conséquent $x-1$ jours écoulés et $30-(x$
ou $31-x$ jours à écouler. Et puisque le quantième x est
au tiers du nombre de jours écoulés, plus la moitié de c
écouler, il s'ensuit que

$$x=\frac{x-1}{3}+\frac{31-x}{2}.$$

D'où l'on voit qu'en indiquant la preuve du problème
posé, on parvient à le mettre en équation, c'est-à-dire à e
mer par des signes abréviatifs, les relations que son énoncé é
entre les quantités connues et les quantités inconnues.

Résolvant l'équation précédente, on trouve $x=13$, c'
dire qu'on est au 13 du mois. Effectivement, dans ce ca
nombre de jours écoulés est 12, le nombre de jours à éc
est 18 ; et le tiers de 12, plus la moitié de 18, forment le q
tième 13, comme l'exige le problème.

122. *Combien faut-il ajouter d'eau, dont 24 livres con
nent 4 livres de sel, à 36 livres d'eau renfermant 12 livr
sel, pour que 40 livres du mélange ne contiennent que 8 l
de sel ?*

Soit x la quantité d'eau à ajouter ; le mélange aura do
$+x$ livres d'eau : et comme 40 livres de ce mélange con
nent 8 livres de sel, 1 livre en contient $\frac{1}{5}$; donc les 36

livres en contiennent $\frac{36+x}{5}$. D'un autre côté, 24 livres de la première eau proposée contenant 4 livres de sel, 1 livre en renferme $\frac{1}{6}$; donc les x livres en renferment $\frac{x}{6}$. Cette quantité de sel et les 12 livres qui se trouvent déjà dans les 36 livres de la seconde eau, donnent $12+\frac{x}{6}$ pour tout le sel du mélange. Et comme cette quantité de sel est déjà exprimée par $\frac{36+x}{5}$, il faut qu'on ait

$$12+\frac{x}{6}=\frac{36+x}{5}.$$

Cette équation donne $x=144$, et il faut ajouter 144 livres de la première eau à 36 de la seconde. En voici la preuve : 24 livres de la première eau contenant 4 livres de sel, les 144 livres en contiendront 6 fois 4 ou 24 de sel ; donc les $36+144$ ou les 180 livres d'eau du mélange renfermeront $12+24$ ou 36 livres de sel, et 40 livres d'eau du mélange contiendront les $\frac{2}{9}$ de 36 ou 8 livres de sel, ainsi que le demande le problème.

123. On voit que la difficulté de traduire les problèmes en équations, consistera toujours à en indiquer la preuve, c'est-à-dire, à former les expressions algébriques des quantités que la question suppose égales ; mais l'usage diminue de beaucoup cette difficulté ; et les commençans ne sauraient trop s'exercer sur la mise en équations, d'après la règle du n° 120. (Voyez d'ailleurs les Mélanges d'Algèbre, pages 22 et suivantes.)

124. *L'âge d'un père est le triple de celui de son fils, et il y a 10 ans qu'il en était le quintuple ; quel est l'âge du père?*

Soit x cet âge ; celui du fils sera donc $\frac{x}{3}$. Il y a 10 ans, ces âges avaient chacun 10 années de moins ; et puisque celui du père était alors 5 fois celui du fils, il en résulte

$$x-10=5\left(\frac{x}{3}-10\right); \text{ d'où } x=60.$$

Le père a donc 60 ans ; et c'est ce qu'on peut aisément vérifier.

125. *Un homme distribue 240ᶜ à 20 mendians ; il donne 6ᶜ par tête aux uns, et 16ᶜ par tête aux autres ; on demande le nombre des uns et des autres.*

Soit x le nombre de ceux à 6ᶜ ; il y en aura $20-x$ à 16ᶜ, et par conséquent $6x+16(20-x)=240$. De là, $x=8$. Ainsi, il y en a 8 qui reçoivent 6ᶜ, et 12 qui en reçoivent 16.

126. *Une personne ayant dépensé 20^f plus le 10^{me} de ce qui lui est resté, se trouve avoir dépensé 3^f de plus que le quart de son argent. Combien avait-elle ?*

Soit x le nombre de florins qu'elle avait : après avoir dépensé 20^f, il lui en reste $x-20$; sa dépense totale est donc $20+\frac{x-20}{10}$. Mais d'ailleurs cette dépense est $\frac{x}{4}+3$; il faut donc qu'on ait

$$20+\frac{x-20}{10}=\frac{x}{4}+3;\quad \text{d'où}\quad x=100.$$

127. *Trois oranges coûtent autant au-dessus de 8 sous que 5 au-dessous de 24 sous ; quel est le prix* x *de chaque orange ?*

Il est clair que $3x-8=24-5x$, et qu'ainsi $x=4$.

Quinze personnes, hommes et femmes, dépensent 61^f, à 5^f par tête pour les hommes et 3^f pour les femmes. Combien y a-t-il d'hommes et de femmes ? (R. 8 hommes et 7 femmes.)

Le frère et la sœur ont ensemble 75^f, sur lesquels ils dépensent 35^f, et il se trouve que le frère dépense la moitié de ce qu'il avait et la sœur le tiers. Combien avaient-ils chacun ? (R. 60^f et 15^f.)

Deux coupons d'un même drap coûtent respectivement 60 et 78^f. Si le prix de l'aune diminuait de 1^f, le second coupon coûterait 12^f de plus que le premier. Quel est le prix de l'aune ? (R. 3^f.)

Deux personnes entrent au jeu avec la même somme d'argent, et perdent, la première 36^f et la seconde 12^f ; de sorte que le tiers de ce qui reste à la première vaut le 7^{me} de ce qui reste à la seconde. Combien avaient-elles chacune ? (R. 54^f.)

128. On peut se dispenser de vérifier les valeurs trouvées pour les inconnues ; car les équations du problème n'étant que sa *preuve indiquée*, il est clair que les nombres qui satisfont à ces équations, satisfont aussi au problème qu'elles traduisent algébriquement. Il n'y a d'exception à cela que dans le seul cas où le problème proposé renferme des conditions particulières qui n'entrent point dans ses équations. En effet, celles-ci ne sont alors qu'une partie du problème, écrite en d'autres termes ; donc les valeurs des inconnues, dans ces équations, peuvent fort bien n'être pas les valeurs des inconnues dans le problème proposé, c'est-à-dire n'être pas les valeurs demandées. C'est ce qui arrive dans la question suivante :

129. *Une personne veut distribuer une certaine somme d'argent à des pauvres ; en donnant 2^f à chacun, il lui reste 7^f.*

Si elle donnait 4^{s} *à chaque pauvre, il lui manquerait* 6 *sous. Trouver le nombre de pauvres et la somme d'argent.*

Soit x le nombre de pauvres ; il est clair que

$$4x - 6 = 2x + 7 ; \text{ d'où } x = \tfrac{13}{2}.$$

Cette valeur satisfait bien à l'équation ; mais elle ne satisfait pas au problème. Cela vient de la condition particulière *que le nombre de pauvres soit entier* ; car cette condition n'entrant pas et ne pouvant entrer dans l'équation proposée, l'inconnue x n'est pas assujettie à y satisfaire.

Il peut cependant arriver que les valeurs des inconnues satisfassent aussi aux conditions particulières qui n'entrent pas dans les équations ; mais alors ces conditions sont des conséquences des équations dont il s'agit.

130. *Deux écoliers devant se partager également* 28 *oranges, se querellent, et chacun prend de ces* 28 *oranges ce qu'il peut attraper. Leur querelle étant finie, le* 1^{er} *reçoit le cinquième des oranges prises par le* 2^{e}, *et celui-ci le tiers de celles prises par le* 1^{er} ; *alors ils en ont* 14 *chacun. Combien chacun avait-il pris d'oranges?*

Le premier recevant le cinquième du nombre y d'oranges prises par le second, et celui-ci le tiers du nombre x d'oranges prises par le premier, ce premier en possède donc, après cela, $x + \frac{y}{5} - \frac{x}{3}$. Or, il en possède 14 ; on a donc les deux équations

$$x + y = 28 \quad \text{et} \quad x + \frac{y}{5} - \frac{x}{3} = 14,$$

lesquelles donnent $x = 18$ et $y = 10$. De sorte que le premier avait pris 18 oranges et le second 10, comme il est aisé d'en faire la preuve.

131. *En ajoutant* 36 *à un nombre composé de deux chiffres, on obtient une somme égale à ce nombre renversé. En ajoutant* 2 *au chiffre des dizaines, la somme sera les trois quarts du chiffre des unités. Quel est le nombre qui jouit de ces propriétés?*

Soit x le chiffre des dizaines et y celui des unités ; le nombre demandé vaut donc x *dizaines* $+ y$ *unités* ou $10x + y$, et ce nombre *renversé* vaut y *dizaines* $+ x$ *unités* ou $10y + x$; ainsi on a les deux équations :

$$10x + y + 36 = 10y + x \quad \text{et} \quad x + 2 = \frac{3y}{4}.$$

Résolvant ces équations, on trouve $x=4$ et $y=8$. De sorte que le nombre cherché a 4 dizaines et 8 unités; il est donc 48.

On peut remarquer que, dans ce problème et le précédent, les inconnues doivent être des nombres entiers.

132. *Un homme achète une pièce d'étoffe à un prix qu'on ignore. Si elle renfermait 4 aunes de plus, et que l'aune coûtât 3f de moins, il paierait 40f de moins. Si la pièce avait 2 aunes de moins et que l'aune coûtât 5f de plus, il paierait 74f de plus. Trouver le nombre* x *d'aunes et le prix* y *de chacune.*

Il est clair que la pièce d'étoffe coûtera x fois y ou xy. Mais par la première condition, elle coûterait $(x+4)(y-3)$, et par la seconde $(x-2)(y+5)$. Or, par la première condition, la pièce d'étoffe coûterait 40f de moins que xy et par la seconde 74f de plus; on a donc les deux équations

$$(x+4)(y-3) = xy - 40$$
$$(x-2)(y+5) = xy + 74.$$

Effectuant les multiplications, transposant et réduisant, il vient

$$4y - 3x = -28$$
$$5x - 2y = 84,$$

équations desquelles on tire $x = 20$ et $y = 8$. Ainsi la pièce d'étoffe avait 20 aunes de long, à 8 florins chacune.

133. Une personne a des jetons dans les deux mains : si elle en porte un de la droite dans la gauche, il y en aura un nombre égal dans chacune; mais si elle en passe deux de la gauche dans la droite, celle-ci en contiendra le double de l'autre. Combien chaque main avait-elle de jetons? (R. 10 et 8.)

Si on prend les moutons d'un troupeau 7 à 7, il en restera 1; si on les prend 11 à 11, il en restera 10; et le nombre de fois qu'on peut y prendre 7 moutons surpasse de 3 le nombre de fois qu'on peut y en prendre 11. Combien y a-t-il de moutons dans le troupeau? (R. 43.)

On imprime un ouvrage d'un certain format; si on met à une page 3 lignes de plus, et à chaque ligne 4 lettres de plus, chaque page contiendra 228 lettres de plus; mais si on met à une page 2 lignes de moins, et à chaque ligne 3 lettres de moins, chaque page contiendra 147 lettres de moins. On demande le nombre de lignes de chaque page et le nombre de lettres de chaque ligne. (R. 27 et 36.)

Une fraction est telle, que si l'on ajoute 3 à ses deux termes, elle se réduit à 6 septièmes, et que si on retranche 3 de chacun de ses termes, elle devient 3 quarts. Quelle est cette fraction? (R. 9 onzièmes.)

134. *On a trois lingots, dans chacun desquels il entre de l'or, de l'argent et du cuivre. L'alliage est tel que, dans le 1er, sur 16 onces, il y en a 7 d'or, 8 d'argent et 1 de cuivre. Dans le 2^e, sur 16 onces, il s'en trouve 2 d'or, 9 d'argent, et 5 de cuivre. Dans le 3^e, sur 16 onces, il y en a 5 d'or, 7 d'argent et 4 de cuivre. On veut, en prenant différentes parties de ces alliages, former un 4^{me} lingot tel, que sur 16 onces, il s'en trouve 79 seizièmes en or, 122 seizièmes en argent et 55 seizièmes en cuivre. Combien faut-il prendre de chacun des trois lingots proposés pour former 16 onces du 4^{me}?*

Soient x, y, z, les nombres d'onces qu'il faut prendre sur le 1er, le 2^e et le 3^e lingot pour former 16 onces du 4^e. Puisque dans le 1er, sur 16 onces, il y en a 7 d'or, il est clair que sur une once, il y en a $\frac{7}{16}$ d'or, et sur x onces, $\frac{7x}{16}$. On trouverait de même que $\frac{2y}{16}$ et $\frac{5z}{16}$ expriment les quantités d'or, prises sur le 2^e et le 3^e lingot, lorsque le 4^e est formé. Mais d'après l'énoncé, ce 4^e doit contenir 79 seizièmes d'once d'or; on a donc, pour 1re équation et en négligeant le dénominateur commun 16,

$$7x + 2y + 5z = 79.$$

On trouverait de même, par rapport à l'argent et au cuivre,

$$8x + 9y + 7z = 122 \quad \text{et} \quad x + 5y + 4z = 55.$$

Ces trois équations fournissent $x = 4$, $y = 3$ et $z = 9$.

135. Trois hommes emploient tout ce qu'ils ont d'argent sur eux pour acquitter une dépense qu'ils ont faite en commun. Il manque au premier 8^f pour payer les 2 tiers de la dépense, au second 14^f pour en payer les 4 cinquièmes, et au troisième 17^f pour en payer les 5 sixièmes. Combien avaient-ils chacun? (R. 12^f, 10^f et 8^f.)

Si des deux termes d'une fraction, qui se réduit à 4 cinquièmes, on retranche respectivement les deux termes d'une fraction, qui se réduit à 6 septièmes, la nouvelle fraction vaudra 2 tiers, et la somme de ses deux termes sera 20. Quelles sont les 2 premières fractions? (R. $\frac{32}{40}$ et $\frac{24}{28}$.)

Trois joueurs conviennent qu'après chaque partie les deux perdans donneront au gagnant, chacun la moitié de l'argent que ce gagnant avait en commençant cette partie. Chaque joueur ayant gagné une partie, sort du jeu avec 64^f. Combien les joueurs avaient-ils en entrant au jeu? (R. 50, 65 et 77^f.)

Résolvons maintenant quelques problèmes généraux.

136. *Connaissant la somme* a *et le quotient* b *de deux nombres* x *et* y, *trouver chacun de ces nombres.* Il est clair que:

$x+y=a$ et $\frac{x}{y}=b$; d'où $x=\frac{ab}{b+1}$ et $y=\frac{a}{b+1}$.

Si $a=48$ et $b=3$, on aura $x=36$ et $y=12$.

137. *Combien faut-il prendre d'une matière à* b *fl. l'unité, et d'une matière à* d *florins, pour former un mélange de* m *unités à* p *florins chacune?*

Soit x ce qu'il faut prendre de la première matière; $m-x$ sera donc ce qu'on doit prendre de la seconde, et on aura évidemment

$$bx \text{ florins} + d(m-x) \text{ florins} = mp \text{ florins},$$

$$\text{ou } bx+d(m-x)=mp; \text{ d'où } x=\frac{m(p-d)}{b-d}.$$

Cette formule est beaucoup plus simple que la règle qu'elle fournit en la traduisant en langage ordinaire; car voici cette règle : *pour savoir ce qu'on doit prendre de la* 1re *matière, il faut multiplier le nombre d'unités du mélange par le rapport des différences du second prix au prix moyen et au* 1er *prix.*

Lorsque $b=100$, $d=124$, $m=48$ et $p=108$, la formule précédente donne $x=32$. Cette formule résout en outre les deux problèmes que voici : 1° Combien y a-t-il d'or et d'argent dans un alliage de m onces? On sait qu'une once d'or se réduit à b dans l'eau, une once d'argent à d et une once de l'alliage à p.

2° Trouver combien il faut de pièces de b florins et de pièces de d florins pour payer mp florins, avec m de ces pièces.

On voit par là de quelle étonnante fécondité est l'algèbre, puisque cette science résout, par une simple formule, non-seulement tous les problèmes, en nombres infinis, de même espèce que le proposé, mais encore plusieurs questions générales, qui sembleraient d'abord très-différentes de la première.

138. Si dans la formule précédente on regarde successivement comme inconnue, chacune des cinq quantités b, d, m, p, x, il en résultera les solutions générales de cinq problèmes d'espèces différentes. Par exemple, si l'on prend b pour inconnue, la formule donnera

$$b=\frac{m(p-d)+dx}{x}.$$

et le problème résolu est : *dans un mélange de* m *unités, coûtant chacune* p *florins, il entre d'une matière à* d *flor. l'unité, et* x *unités d'une autre matière dont le prix* b *est inconnu;*

quel est ce prix? Si $d = 124$, $m = 48$, $p = 108$ et $x = 32$, la valeur générale de b donnera $b = 100$.

On voit qu'à l'aide de quelques transformations, une même formule pourra résoudre autant de problèmes généraux qu'elle aura de lettres différentes; ce qui est avantageux en ce qu'on sera conduit ainsi à de nouveaux problèmes, pour lesquels on n'aura pas à recommencer les raisonnemens, quelquefois très-compliqués, qui ont donné l'équation du proposé. Cela vient uniquement de la simplicité du langage algébrique, qui, en rapprochant les objets, permet d'en saisir plus facilement les différens rapports.

139. *Depuis qu'un père avait l'âge actuel de son fils, il s'est écoulé un nombre d'années tel que l'âge du fils est devenu* a *fois ce qu'il était alors; et quand l'âge du fils vaudra l'âge actuel du père, les deux âges réunis feront* b *années de plus qu'à présent. Trouver les âges actuels.*

Soient x et y les âges actuels du père et du fils, puisque quand le père avait l'âge actuel y du fils, celui-ci avait a fois moins d'âge qu'à présent ou $\frac{y}{a}$, la différence des deux âges était $y - \frac{y}{a}$. Or, cette différence restera toujours la même, puisque ses deux nombres augmentent tous les ans d'une unité, ainsi l'âge actuel x du père surpasse celui y du fils de $y - \frac{y}{a}$, et il vient

$$x = 2y - \frac{y}{a}.$$

Mais quand le fils aura atteint l'âge actuel x du père, l'âge de celui-ci sera $x + y - \frac{y}{a}$. Et puisqu'alors les deux âges réunis feront b années de plus qu'à présent, il s'ensuit que

$$2x + y - \frac{y}{a} = x + y + b.$$

Cette équation et la précédente fournissent

$$x = \frac{(2a-1)b}{2(a-1)} \quad \text{et} \quad y = \frac{ab}{2(a-1)}.$$

Si $a = 3$ et $b = 40$, on aura $x = 50$ et $y = 30$. Les formules précédentes, très-simples en langage algébrique, seraient très-longues énoncées en langage ordinaire. Ces énoncés seraient cependant les dernières phrases qu'il faudrait employer, si l'on résolvait le problème en langage ordinaire. On voit donc qu'une pareille solution est ici impossible, et qu'il faut nécessairement faire usage des signes abréviatifs de l'algèbre.

140. *Des héritiers doivent se distribuer une somme d'argent, de manière qu'après avoir eu sa part, chacun donnera au suivant, sur le reste, le produit de* a *florins par le rang de ce suivant, plus le* c^{me} *du nouveau resté. Par cette disposition, les héritiers reçoivent la même part. On demande la valeur de la somme* x *distribuée, celle de chaque part* y *et le nombre* z *d'héritiers.*

Le premier reçoit a flor. plus le c^{me} du reste $x-a$; sa part est donc $y=a+\frac{x-a}{c}$. Le second reçoit $2a$ flor. sur le reste $x-a-\frac{x-a}{c}$, plus le c^{me} du nouveau reste $x-3a-\frac{x-a}{c}$; sa part est par conséquent $2a+\frac{x-3a}{c}-\frac{x-a}{c^2}$. Ainsi on a

$$2a+\frac{x-3a}{c}-\frac{x-a}{c^2}=a+\frac{x-a}{c};\ \text{d'où}\ x=a(n-1)^2.$$

De là on tire $y=a(n-1)$ et $z=n-1$.

141. *Trois enfans ayant ensemble un nombre* a *d'années, doivent partager avec leur mère une certaine somme d'argent. Chacun d'eux, à commencer par le plus jeune, prend autant de florins qu'il a d'années et en sus le quart du reste. De cette manière, les enfans sont également partagés, et le dernier a laissé* b *florins pour la mère. Quels sont leurs âges* x, y, z, *et quelle somme* u *ont-ils partagée?*

Puisque la mère a eu b florins, les enfans se sont partagé également $u-b$; chacun a donc reçu $\frac{1}{3}(u-b)$. D'un autre côté, le plus jeune prend d'abord sur la somme u autant de florins qu'il a d'années, c'est-à-dire x florins, et en outre le quart du reste $u-x$; sa part est donc $x+\frac{1}{4}(u-x)$ ou $\frac{1}{4}(3x+u)$, et il reste $u-\frac{1}{4}(3x+u)$ ou $\frac{1}{4}(3u-3x)$. Formant de la même manière les expressions des parts des deux autres enfans, on verra aisément que le problème proposé fournit les quatre équations

$$\begin{aligned}&x+y+z=a,\\&\tfrac{1}{4}(3x+u)=\tfrac{1}{3}(u-b),\\&\tfrac{1}{16}(12y+3u-3x)=\tfrac{1}{3}(u-b),\\&\tfrac{1}{64}(48z+9u-9x-12y)=\tfrac{1}{3}(u-b).\end{aligned}$$

Résolvant ces équations, on trouvera

$u=\frac{1}{2}(3a+5b)$, $x=\frac{1}{6}(a-b)$, $y=\frac{1}{3}a$ et $z=\frac{1}{6}(3a+b)$.

142. Les biens d'un négociant augmentent chaque année de leur c^{me} partie ; combien doit-il prélever tous les ans sur une somme a qu'il a dans le commerce, pour qu'au bout de trois ans, il y ait encore la même somme ? $\left(\text{La valeur simplifiée est } \frac{a}{c+1}\right)$.

Trouver les termes de deux fractions dont a est la somme et b la différence. On sait que c est la somme de leurs numérateurs x et u, et d celle de leurs dénominateurs y et v.

Trouver trois nombres tels, qu'en les divisant respectivement par m, n, p, les trois quotiens soient égaux, et qu'en les augmentant respectivement de a, b, c, la somme de leurs produits 2 à 2 soit augmentée de d.

On partage une somme a entre cinq héritiers, de manière que chacun, à compter du plus jeune, reçoit autant de florins qu'il a d'années, et en sus le c^{me} du reste. Par cette disposition, après que le cinquième a eu sa part, il ne reste rien, et tous les héritiers sont partagés également. Quels sont leurs âges ?

De la discussion des Problèmes du premier degré.

143. *Discuter* un problème ou des équations, c'est interpréter les résultats singuliers auxquels on parvient, quand on donne des valeurs particulières aux lettres qui s'y trouvent.

144. Remarquons d'abord qu'*une équation du premier degré à une inconnue, ne peut jamais admettre qu'une seule valeur pour cette inconnue.*

En effet, quelle que soit l'équation proposée, on pourra toujours la ramener à la forme $ax = b$; car on pourra toujours chasser les dénominateurs, transposer les termes, réunir en un seul tous les multiplicateurs de l'inconnue x, représenter par a le nouveau multiplicateur, et par b le nombre connu qui forme le second membre : et comme ces différentes transformations ne détruisent pas l'égalité, il s'ensuit que l'inconnue x ne change pas de valeur pour maintenir cette égalité ; les valeurs de x, dans l'équation résultante $ax = b$, sont donc les mêmes que dans l'équation proposée.

Or, l'inconnue x n'a qu'une seule valeur dans $ax = b$, car il n'y a qu'un seul nombre qui, multipliant a, puisse donner le produit b ; donc aussi l'inconnue x n'a qu'une seule valeur dans l'équation proposée, du premier degré (*).

(*) Si x pouvait avoir deux valeurs différentes m et p, dans $ax = b$,

145. Ce raisonnement suppose que l'équation proposée ne soit pas identique, comme $mx-k=mx-k$; car si cela était, les quantités a et b seraient nulles, et l'équation deviendrait $0.x=0$: donc cette équation serait *satisfaite* par toutes les valeurs qu'on voudrait donner à x; donc l'inconnue x pourrait avoir une infinité de valeurs différentes, et serait *indéterminée* dans cette équation.

Si l'on veut résoudre l'équation $0.x=0$, on trouvera $x=\frac{0}{0}=0^0$. Or, quel que soit le quotient x de 0 divisé par 0, en multipliant le diviseur 0 par ce quotient, on aura toujours le dividende au produit : donc x, c'est-à-dire $\frac{0}{0}$, est tel nombre qu'on veut, et représente par conséquent *une quantité indéterminée.*

146. Si après avoir ramené l'équation du premier degré à la forme $ax=b$, le coefficient a était nul et b égal à un nombre n, l'équation proposée deviendrait $0.x=n$ ou $0=n$, et serait par conséquent impossible, aussi bien que le problème qui l'a donnée.

Dans ce cas, $0.x=n$ fournit $x=\frac{n}{0}$; et alors la valeur de x est *infinie.* En effet, le dividende n restant le même, si le diviseur était successivement $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, etc., le quotient serait successivement $10n$, $100n$, $1000n$, $10000n$, etc. Donc plus le diviseur est petit, plus le quotient est grand; si le diviseur est très-petit le quotient sera très-grand; si le diviseur est le plus petit possible, ou 0, le quotient sera le plus grand possible, et sera par conséquent *infini.* Donc $\frac{n}{0}$ est le symbole d'une quantité infiniment grande, et ne saurait être exprimé par aucun nombre, quelque grand qu'il soit.

On se sert d'un *huit* renversé ∞ pour désigner l'*infini*; ainsi $\frac{n}{0}=\infty$; d'où $n=\infty\times 0$ et $\frac{n}{\infty}=0$. Il est bon de remarquer que $\frac{n}{0}$ ou ∞ est un signe d'impossibilité.

147. *Les inconnues ne peuvent avoir qu'une valeur chacune dans* m *équations du premier degré à* m *inconnues.*

---

on aurait à la fois $am=b$ et $ap=b$; donc on aurait aussi $am=ap$, ou $m=p$; ce qui est contre l'hypothèse. Donc x n'a qu'une seule valeur dans $ax=b$, et par conséquent dans l'équation proposée, du 1er degré.

En effet, les transformations que l'on fait subir aux deux membres de chaque équation, pour arriver à l'équation finale, ne détruisent pas l'égalité de ces deux membres. Donc les inconnues ne changent pas de valeurs pour maintenir cette égalité. Donc toutes les valeurs de chaque inconnue, dans les équations proposées, se trouvent encore dans les équations qui s'en déduisent, et par conséquent dans l'équation finale. Or, l'inconnue n'a qu'une seule valeur dans l'équation finale, puisque cette équation est du premier degré (144); donc aussi, la même inconnue n'a qu'une seule valeur dans les équations proposées. Et comme cette inconnue est l'une quelconque des proposées, il s'ensuit que ces inconnues n'ont qu'une seule valeur chacune.

148. Cette démonstration suppose qu'il n'y ait pas plusieurs équations proposées qui se réduisent à une seule; car si cela était, on aurait moins d'équations distinctes que d'inconnues; et comme une équation ne peut jamais déterminer qu'une seule inconnue, une au moins des inconnues proposées serait arbitraire; ces inconnues pourraient donc avoir une infinité de valeurs différentes chacune.

149. Si à l'inspection des équations proposées, on ne voyait pas que plusieurs d'entre elles se réduisent à une seule, on le reconnaîtrait par les valeurs $\frac{0}{0}$ qu'on trouverait en résolvant ces équations. Par exemple, soient les deux équations

$$3x - 6y - 45 = 0,$$
$$7y - 2x = 3y - 30.$$

Transposant et réduisant les termes, puis divisant la première par 3 et la seconde par 2, il viendra

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 15, \\ 2y - x = -15 \end{array}\right\} \cdots (1)$$

Pour éliminer y, il suffit d'ajouter la seconde de ces équations à la première; alors écrivant seulement les termes en x, puisque ceux en y doivent se détruire, on aura

$$x - x = 15 - 15, \quad \text{ou} \quad 0.x = 0 \quad \text{et} \quad x = \tfrac{0}{0}.$$

Cette valeur indéterminée nous apprend que les deux équations proposées se réduisent à une seule; et c'est ce qu'on voit par les équations (1); car la seconde n'est que la première, dans laquelle on changerait les signes des deux membres (91).

Voici trois équations, dont deux se réduisent à une seule :

$$\frac{x-10}{y+4}=\frac{2}{3},\ \frac{y-96}{z-24}=\frac{1}{2}\ \text{et}\ \frac{2z}{y-84}=4.$$

150. Lorsque plusieurs équations ne peuvent coexister, on en est averti par les valeurs infinies qu'on trouve en résolvant ces équations. Par exemple, supposons qu'on ait

$$8x-4y=36,$$
$$4x-2y=5.$$

Pour éliminer y, on multiplie la 2^e par 2 et on la retranche de la 1re; alors en n'écrivant que les termes en x, il vient

$$8x-8x=26,\ \text{ou}\ 0.x=26\ \text{et}\ x=\tfrac{26}{0},$$

valeur infinie qui ne saurait être représentée par aucun nombre; donc les deux équations proposées sont impossibles. Et c'est ce qu'on voit en multipliant la seconde par 2; car alors ces deux équations sont une même quantité $8x-4y$ égalée à deux nombres différens 36 et 10.

C'est aussi de cette manière que les trois équations suivantes sont impossibles :

$$2y-x=8-2z,$$
$$6x+13-\tfrac{1}{2}y=4y-1+3z,$$
$$\tfrac{1}{4}y+z-x+\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{3}x+\tfrac{5}{6}z.$$

151. Il peut arriver qu'en résolvant un problème on soit conduit à une valeur négative de la forme $x=-v$: dans ce cas, comme on ne saurait soustraire v, la valeur de x est impossible, aussi bien que le problème proposé.

Mais il est très-important de remarquer qu'il y a cependant un problème résolu par la valeur v; car si l'on change x en $-x$ dans les équations proposées, ce sera changer x en $-x$ dans toutes les équations qui s'en déduisent (*), et par suite dans la dernière $x=-v$, qui deviendra alors $-x=-v$ ou $x=v$ (91) : la valeur de x ne sera donc plus impossible, et il y aura effectivement un problème résolu par cette valeur v. Or, quel est ce nouveau problème? Pour le trouver on observe que les

(*) En effet, si l'on désigne $-x$ par x', et qu'on remplace x par x', dans les équations proposées, il est clair que les nouvelles équations donneront en x', c'est-à-dire en $-x$, toutes les équations que les proposées donnaient en x; elles conduiront donc à $x'=-v$, c'est-à-dire à $-x=-v$; d'où $x=v$.

équations fournies par les proposées, en y changeant x en $-x$, donnent la valeur $x = v$; donc ces nouvelles équations sont celles du nouveau problème, et par conséquent, en les traduisant en langage ordinaire, on aura l'énoncé de ce nouveau problème.

Ainsi, *lorsque la résolution d'un problème conduit à une valeur négative de la forme* $x = -v$, *cette valeur* v *résout le problème que donnent les équations du proposé en y changeant* x *en* $-x$, *et en traduisant les nouvelles équations en langage ordinaire.*

152. Il n'existe point de règle générale et précise pour opérer cette traduction; mais l'usage montrera bientôt comment elle s'effectue. Par exemple, *le poids* x *d'un corps est tel, que son triple augmenté de* 10 *livres, est égal à son double diminué de* 20 *livres. Quel est ce poids?*

L'équation de ce problème est évidemment

$$3x + 10 = 2x - 20;$$

et on en tire $x = -30$: donc le problème est impossible, comme on pouvait bien le prévoir d'ailleurs. Substituant $-x$ à x dans l'équation proposée, elle deviendra $-3x + 10 = -2x - 20$; ou bien, en changeant les signes des deux membres (91),

$$3x - 10 = 2x + 20.$$

Comparant cette équation à la proposée, on verra que les nombres 10 et 20 changent seuls de signes, pour le problème résolu par la valeur $x = 30$, et que ce problème est :

Le poids x *d'un corps est tel, que son triple diminué de* 10 *livres, est égal à son double augmenté de* 20 *livres. Quel est ce poids?* En résolvant directement ce nouveau problème, on trouve effectivement que $x = 30$.

153. *Un joueur donne* 4 *fr. pour chaque partie qu'il perd, reçoit* 2 *fr. pour chaque partie qu'il gagne; et après* 12 *parties, son gain total excède sa perte totale de* 36 *fr. Trouver combien il y a eu de parties gagnées et de parties perdues.*

Soient x et y les nombres de parties gagnées et perdues, on aura

$$x + y = 12 \quad \text{et} \quad 2x - 4y = 36.$$

Ces équations donnent $x = 14$ et $y = -2$. La valeur de y ne saurait être calculée, et par conséquent le problème proposé est impossible. Mais nous avons vu qu'il doit y avoir un problème résolu par les valeurs 14 et 2; et que pour avoir ce nouveau problème, il faut changer y en $-y$ dans les équations proposées, et traduire les équations résultantes

$$x-y=12 \quad \text{et} \quad 2x+4y=36.$$

Or, pour opérer cette traduction, il suffit de se rappeler que x étant le nombre de parties gagnées et y le nombre de parties perdues, $2x$ désigne le gain total et $4y$ la perte totale; alors on verra que le problème résolu par $x=14$ et $y=2$, est celui-ci :

Un joueur donne 4 francs pour chaque partie qu'il perd et reçoit 2 francs pour chaque partie qu'il gagne. Ayant gagné 12 parties de plus qu'il n'en a perdu, son gain total plus sa perte totale font 36 francs. Combien y a-t-il eu de parties gagnées et de parties perdues?

154. On voit que les valeurs négatives prouvent non-seulement l'impossibilité du problème qui les a données, mais que de plus, elles indiquent les changemens à faire dans l'énoncé pour que ce problème n'ait plus rien d'absurde et soit résolu par les valeurs trouvées. Il n'en est pas de même des valeurs infinies; elles indiquent l'impossibilité absolue du problème proposé (146), et ne conduisent à aucun problème nouveau. Nous laissons à interpréter les valeurs négatives dans les problèmes que voici :

Une cuve reçoit l'eau par deux robinets; en les ouvrant l'un 12 et l'autre 7 minutes, la cuve contient 46 litrons; si le premier est ouvert 8' et l'autre 5, la cuve renferme 30 litrons. Combien chacun verse-t-il d'eau par minute?

Quel nombre x doit-on ajouter à chacun des facteurs a et b, pour que le nouveau produit et le premier se contiennent autant de fois que les sommes de leurs facteurs?

Un rentier partage 420 flor. à 3 neveux; il donne au premier le 5e de ce que reçoivent les deux autres ensemble, et au second, 294f de moins que les 3 quarts de ce que reçoit le troisième. Combien chacun a-t-il?

155. De ce qui précède (151) il suit, que si dans la formule et les équations d'un problème proposé, on change a en $-a$, b en $-b$, c en $-c$, etc., la nouvelle formule résoudra le problème qu'on trouve en traduisant les nouvelles équations en langage ordinaire. De cette manière, une même formule peut, par un simple changement de signes dans ses données, résoudre successivement plusieurs problèmes différens, et conduire à des énoncés qui, peut-être, ne se seraient pas offerts à l'esprit. Cette

propriété très-remarquable, vient uniquement du calcul des quantités négatives isolées, et montre par conséquent le but et l'utilité de ce calcul en algèbre.

156. *Un ouvrier reçoit* d *flor. par jour de travail, donne* c *flor. par jour de repos; et après* a *jours, ayant réglé son compte, on lui redoit* b *fl. Combien de jours a-t-il travaillé?*

Soit x le nombre de jours de travail; $a-x$ sera celui des jours de repos, et on aura

$$dx-c(a-x)=b; \text{ d'où } x=\frac{b+ac}{c+d}.$$

Si dans cette équation et cette formule, on change successivement les signes des quantités b, c, d, x, prises d'abord 1 à 1, puis 2 à 2, ensuite 3 à 3, et enfin 4 à 4, on aura les équations et les formules de 15 problèmes faciles à énoncer en langage ordinaire. Par exemple, si l'on change b et d en $-b$ et $-d$, l'équation et la formule deviendront

$$dx+c(a-x)=b \text{ et } x=\frac{ac-b}{c-d} \cdots (1)$$

Donc le problème résolu est : *Un ouvrier se met en pension chez une personne, et lui donne* c *fl. par jour de repos et* d *fl. par jour de travail. Après* a *jours, ayant réglé son compte, il doit* b *fl. en tout. Combien de jours a-t-il travaillé?*

Dans ce problème, b et d désignent des *dépenses*, et n'ont plus la même *acception* que dans le proposé, où ces quantités représentent des *gains*. Si $c>d$ et $b>ac$, la valeur (1) de x sera négative, et le problème impossible. Mais en substituant $-x$ à x, l'équation et la formule (1) deviennent

$$c(a+x)-dx=b \text{ et } x=\frac{b-ac}{c-d}.$$

Le problème résolu est donc : *Un ouvrier se met en pension chez une personne; il lui donne* c *fl. par jour de repos et en reçoit* d *fl. par jour de travail. S'étant reposé* a *jours de plus qu'il n'en a travaillé, il redoit* b *florins en tout. Combien de jours a-t-il travaillé?*

On voit que x a changé de signe sans changer d'*acception*, et qu'au contraire, d a changé d'acception sans changer de signe: cela tient au produit dx, qui change de signe aussi bien quand d devient $-d$ que quand x devient $-x$.

Lorsque $c=d$ et $b=ac$, la formule (1) devient $x=\frac{0}{0}$; donc le problème est alors indéterminé (145). En effet, supposer $c=d$, c'est supposer que l'ouvrier donne, par jour de travail comme par jour de repos, c flor. pour sa pension ; donc après a jours, tant de repos que de travail, la somme b qu'il devra sera ac. Or, c'est précisément ce que le problème demande, puisqu'on y suppose $b=ac$; donc ce problème sera toujours bien résolu quelque valeur qu'on donne au nombre x de jours de travail, pourvu que ce nombre ne surpasse pas a.

On voit d'ailleurs que quand $c=d$, si on avait $b>ac$, le problème serait impossible, puisque $c=d$ conduisant à $b=ac$, b devrait être à la fois plus grand que ac et égal à ac : aussi trouve-t-on, dans ce cas, $x=\infty$ (146), valeur impossible.

157. Une remarque très-importante à faire, c'est que généralement, dès qu'une quantité a est prise dans une acception contraire à ce qu'elle signifiait d'abord, cette quantité diminue tout ce qu'elle augmentait et augmente tout ce qu'elle diminuait; c'est-à-dire que a devient partout $-a$. D'où il faut conclure que *toute quantité prise en sens contraire doit être affectée du signe* $-$, *partout où elle se trouve* (*).

(*) Supposons qu'un ouvrier ait pour m flor. de biens : suivant qu'il gagnera ou qu'il perdra a flor., l'état de sa fortune sera $m+a$ ou $m-a$; dans ces deux états la quantité a aura des acceptions opposées, puisque dans l'un a désigne un *gain* et dans l'autre une *perte*. Or, l'un de ces états devient l'autre, 1° en y prenant a en *sens contraire* et en y changeant a en $-a$; 2° en y changeant a en $-a$ et en y prenant a en sens contraire. D'où il suit que, 1° *toute quantité prise dans une acception opposée, doit recevoir le signe — partout où elle se trouve;* 2° Réciproquement, *toute quantité dont la valeur a le signe* $-$, *doit être prise dans une acception contraire.*

Le premier de ces principes n'est sujet à aucune exception ; et voici plusieurs exemples propres à vérifier le second :

1° Si x désigne le nombre d'années qui doivent encore s'écouler, pour qu'un père, âgé de b ans, ait 2 fois l'âge de son fils, qui a c ans ; il est clair qu'on aura $b+x=2(c+x)$; d'où $x=b-2c$.

On veut que cette formule ait lieu pour toutes les valeurs de b et c (4) : donc, quand b vaudra 60 ans, et c, 32 ans, cette formule donnera $x=60-64=-4$ ans. En sorte qu'il devrait encore s'écouler -4 années pour que l'âge du père fût double de celui du fils. Mais il y a déjà 4 ans que l'âge du père était double de celui du fils, puisqu'alors l'âge du père

Par conséquent, pour avoir sur-le-champ la formule du problème qu'on obtient en prenant en sens contraire une quantité a d'un problème proposé, il suffit de changer a en $-a$ dans la formule de ce proposé ; ce qui dispense de recommencer, pour le nouveau problème, les raisonnemens et les calculs qui ont fourni la formule du premier.

158. Remarquons encore que quand une quantité a devient $-a$, elle diminue tout ce qu'elle augmentait, et augmente tout ce qu'elle diminuait ; elle change donc d'acception, c'est-à-dire devient une *dette* si d'abord elle désignait un *bien*, un temps *à venir* si elle représentait un temps *passé*, une distance *à gauche* d'un point si elle exprimait une distance *à droite* de ce point,

---

était $60-4$ ou 56 ans, et celui du fils, $32-4$ ou 28 ans : donc -4 *années à écouler, sont réellement* 4 *années déjà écoulées.*

2° On sait que pour avoir les biens réels d'un homme qui a des dettes, il faut soustraire la somme qu'il doit de la somme qu'il possède. Cette règle, considérée comme vraie pour toutes les valeurs des nombres indéterminés qu'elle renferme, s'appliquera au cas où un homme aurait 12 fl. et en devrait 16 ; elle donnera donc $12-16$ ou -4 flor. pour les biens réels de cet homme. Mais cet homme n'ayant que 12 florins, n'en peut payer que 12 des 16 qu'il doit ; il en devra donc encore 4. D'où il suit que -4 *florins de biens font réellement* 4 *florins de dettes.*

3° Pour connaître de combien de lieues un voyageur placé en A, serait

B A encore en arrière du point B, après avoir parcouru un certain chemin, il faut soustraire ce chemin de la distance AB. Ce principe appliqué au cas où AB vaudrait 7 lieues et le chemin parcouru 11 lieues, donnera $7-11$ ou -4 lieues, pour la distance dont le voyageur est encore en arrière du point B. Mais ce voyageur est réellement de 4 lieues en avant de ce point B, puisqu'il avait 7 lieues à faire pour être en B, et qu'il en a fait 11 : donc *être de* -4 *lieues en arrière d'un point, c'est réellement être de* 4 *lieues en avant de ce point.*

Il suit de ces exemples et de ceux traités plus haut, qu'en regardant les règles et les formules algébriques comme ayant lieu pour toutes les valeurs imaginables des quantités indéterminées qui les composent, on sera quelquefois conduit à des résultats impossibles, tels que les valeurs infinies et les valeurs négatives, qui montreront par conséquent l'absurdité de la supposition qui les aura donnés. Mais les valeurs négatives indiqueront de plus les changemens à faire dans le problème qui les a fournies, pour que ce problème n'ait plus rien d'impossible, et soit résolu par les valeurs obtenues. De cette manière, les calculs et les raisonnemens par lesquels on est passé, ne seront pas inutiles, puisqu'ils résoudront le nouveau problème.

et ainsi de suite. En un mot, *toute quantité qui devient négative, doit être prise en sens contraire.*

159. Mais il faut pour cela, que cette quantité x augmente ou diminue une certaine quantité concrète de même nature qu'elle; car autrement elle ne serait pas susceptible d'être prise en sens opposé; et pour avoir le problème résolu, il faudrait substituer $-x$ à x dans les équations primitives. Lorsque le problème est un peu compliqué, cette substitution est même le moyen le plus sûr d'avoir une interprétation exacte, bien qu'il puisse suffire alors de prendre l'inconnue en sens contraire (158).

C'est en changeant ainsi x en $-x$ qu'il faudra interpréter la valeur négative dans le problème que voici, où un nombre d'hommes ne saurait changer d'acception, et où l'on facilite la traduction en mettant les trois inconnues en évidence: 100 *hommes sont partagés en trois pelotons tels, que le premier a* 60 *individus de moins que le second et* 49 *de moins que le troisième; combien y a-t-il d'hommes dans chaque peloton?*

Nous pouvons maintenant discuter complétement les problèmes du premier degré, et le suivant offre à peu près toutes les circonstances qui peuvent se présenter dans cette discussion :

160. *Deux courriers, éloignés l'un de l'autre de* a *lieues, suivent la même route et vont dans le même sens; le premier fait par heure* b *lieues et le second* c *lieues. On demande après quel nombre* x *d'heures de marche, le second courrier sera encore de* d *lieues en arrière du premier.*

Il est évident qu'en x heures le premier courrier fait bx lieues et le second cx lieues. Si le second courrier n'avait pas marché, le premier aurait sur lui une avance de $a+bx$ lieues; mais en le poursuivant, le second a fait cx lieues; cette avance se réduit donc à $a+bx-cx$ lieues. Or, elle doit se réduire à d : donc

$$a+bx-cx=d;\ \text{d'où}\ x=\frac{a-d}{c-b}.$$

Cette formule déterminera le nombre x d'heures demandées, tant qu'on aura $a>d$ et $c>b$. Mais on pourrait aussi avoir $a>d$ et $c=b$, $a=d$ et $c=b$, $a>d$ et $c<b$, $a=d$ et $c<b$, $a=d$ et $c>b$, $a<d$ et $c<b$. Voyons comment il faut interpréter les valeurs de x dans les trois premiers cas.

1° Si $a>d$ et $c=b$, on aura $x=\infty$ et le problème proposé sera impossible (146). C'est ce qu'on vérifie d'ailleurs, en observant que, puisque les deux courriers vont également vîte et dans le même sens, jamais le second ne s'approchera du premier pour réduire à d la distance a qui les séparait d'abord.

2° Si $a=d$ et $c=b$, il viendra $x=\frac{0}{0}$: et comme alors l'équation proposée devient identique, il s'ensuit que $\frac{0}{0}$ représente réellement une quantité indéterminée (145), et qu'ainsi x peut être tel nombre d'heures qu'on voudra. Effectivement, puisque $c=b$, les deux courriers vont également vîte, dans le même sens; donc la distance $a=d$ qui les séparait d'abord, restera toujours d, quel que soit le nombre x d'heures de marche.

3° Si $a>d$ et $c<b$, $a-d$ sera positif et $c-b$ négatif; donc la valeur de x sera négative, et le problème proposé impossible (151). Cela devait nécessairement arriver; car le second courrier allant moins vîte que le premier, ne saurait s'en approcher, pour réduire à d la distance a qui les séparait d'abord.

Mais puisque la valeur de x est négative, elle résout le problème que donne le proposé en y prenant l'inconnue x en sens contraire (159), et par conséquent en demandant *depuis quel nombre* x *d'heures de marche le second courrier était en arrière du premier de* d *lieues*. On peut voir d'ailleurs que ce nouveau problème est possible; car ayant $a>d$ et $c<b$, le second courrier va moins vîte que le premier; donc la distance d qui séparait les deux courriers, il y a x heures, a augmenté pendant ce temps : donc elle a pu devenir a.

Changeons maintenant les acceptions de b et d, c'est-à-dire, proposons-nous ce nouveau problème : *Deux courriers, ayant* a *lieues de distance entre eux, suivent la même route, vont l'un contre l'autre, et font par heure, le premier* b *lieues et le second* c *lieues. On demande après quel nombre* x *d'heures de marche ces deux courriers se seront dépassés de* d *lieues.*

Puisque les quantités b et d du premier problème sont prises en sens contraire dans le nouveau, on aura sur-le-champ la formule de ce nouveau, en changeant b et d en $-b$ et $-d$ dans la formule du proposé (157); il viendra donc, pour le nouveau problème,

$$x=\frac{a+d}{c+b};$$

comme il serait aisé de le vérifier, en résolvant directement le nouveau problème. Et si l'on fait partout $d=0$, on aura les formules de la rencontre des courriers.

161. Ce que nous venons de dire, dans la discussion précédente, paraît suffire pour faire voir aux commençans de quelle manière l'algèbre répond à toutes les circonstances d'une question ; mais ils feront bien de s'exercer à la discussion des problèmes que voici :

Un foudre de a mesures a été rempli par deux ouvriers en b heures : le premier y faisait entrer c mesures par heure ; combien le second y faisait-il entrer dans le même temps? (On peut avoir une valeur négative, et c peut changer d'acception, ainsi que a.)

Quel nombre x de jours faut-il encore pour qu'un homme, qui voyage depuis a jours, ait marché pendant c fois autant de jours qu'un autre, qui ne doit se mettre en route que dans b jours? (a et b peuvent changer d'acception, ainsi que x ; x peut devenir infinie, indéterminée ou négative.)

Quels sont les biens x et y de deux personnes? On sait que si elles recevaient respectivement a fl. et b fl., les biens de l'une vaudraient m fois ceux de l'autre, et que si la première recevait c fl. et la seconde d fl., la première aurait p fois autant que la seconde. (Faire $a=40$, $b=8$, $c=39$, $d=12$, $m=3$ et $p=2$; changer les signes des quantités a, b, c, d, prises 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4 ; voir s'il y a des valeurs négatives, infinies ou indéterminées.)

162. Nous avons prouvé (145) qu'en général $\frac{0}{0}$ est le symbole d'une quantité indéterminée ; voyons si cette indétermination a toujours lieu. D'abord, si l'hypothèse de $a=b$, qui anéantit les deux termes de la valeur générale de x, rend nul aussi le premier membre de l'équation proposée, ramenée à la forme $M=0$, cette équation sera satisfaite quelque valeur qu'on donne à l'inconnue x ; donc cette inconnue pourra être prise à volonté et sera indéterminée, à moins que le problème n'ait des conditions particulières, propres à limiter le nombre de solutions (128).

Mais si l'hypothèse $a=b$, qui donne $x=\frac{0}{0}$, ne rendait pas nul le premier membre de l'équation proposée $M=0$, cette équation serait toujours du premier degré en x, et n'admettrait qu'une seule valeur pour cette inconnue (144) : donc $\frac{0}{0}$ ne représenterait pas alors une quantité indéterminée ; et pour avoir la vraie valeur de x, il faudrait d'abord diviser ses deux termes par le facteur $a-b$, qui doit leur être commun, puisqu'ils deviennent nuls en même temps que lui, quand $a=b$.

163. On voit, par cette discussion, que si la seule hypothèse de $a=b$ rend nuls les deux termes de la valeur de x, cette inconnue sera ou ne sera pas indéterminée, suivant que la même hypothèse rendra ou ne rendra pas nul le premier membre de

l'équation proposée, ramenée à la forme $M=0$. Et pour avoir la véritable valeur de x, dans le second cas, il faudra d'abord diviser ses deux termes par le facteur commun $a-b$ et faire ensuite $a=b$.

164. *Quelle somme* x *faudrait-il donner au commencement de chaque année, pour qu'en donnant aussi, à la fin de cette année,* b *flor. sur chaque* c *flor. qu'on doit pendant la même année, on eût acquitté, au bout de 2 ans, une somme* a *qu'on vient d'emprunter?*

Il est aisé de voir que l'équation de ce problème est

$$a-2x-\frac{b}{c}(a-x)-\frac{b}{c}(a-2x)+\frac{b^2}{c^2}(a-x)=0;$$

d'où l'on tire $$x=\frac{ab^2-2abc+ac^2}{b^2-3bc+2c^2}.$$

Lorsque $b=c$, cette formule devient $x=\frac{0}{0}$: et comme $b=c$ rend nul le premier membre de l'équation proposée, il s'ensuit que x serait indéterminée, si le problème n'avait pas une condition particulière, propre à limiter le nombre de solutions. Or cette condition existe; car supposer $b=c$, c'est supposer qu'au bout de chaque année, on paye b fl. sur chaque b fl. qu'on doit; on paye donc tout ce qu'on doit pendant cette année; la somme x qu'il fallait donner au commencement, doit donc être nulle. Ainsi la condition particulière est que quand $b=c$, on ait $x=0$; et le problème n'a que cette seule solution, dans ce cas.

Divisant les deux termes de la valeur générale de x par $b-c$, puis faisant $b=c$ dans la nouvelle formule $x=\frac{ab-ac}{b-2c}$, il viendra $x=0$, comme cela doit être. On aurait aussi cette nouvelle formule, soit en supprimant $1-\frac{b}{c}$ facteur du premier membre de l'équation proposée, soit en observant que la somme $a-2x-\frac{b}{c}(a-x)$, due pendant la seconde année, doit être nulle, puisqu'après en avoir retranché les $\frac{b}{c}$, c'est-à dire quelques-unes de ses parties, le reste est 0.

165. Nous terminerons la discussion des problèmes du premier degré, en observant que quand les deux membres d'une équation ont un facteur commun, indépendant de l'inconnue, il faut, avant de supprimer ce facteur commun, voir s'il ne devient pas nul par des valeurs particulières des lettres qui le

composent; car s'il devenait nul, le problème serait indéterminé pour ces valeurs particulières; et la suppression du facteur n'aurait d'autre effet que de conduire à une ou plusieurs des solutions. Le problème précédent offre un exemple de cette circonstance. Car l'équation proposée pouvant se mettre sous la forme

$$\left[a - 2x - \frac{b}{c}(a-x)\right]\left(1 - \frac{b}{c}\right) = 0;$$

dès qu'on aura $b = c$, cette équation sera satisfaite. Mais si b n'est pas égal à c, on pourra supprimer le facteur connu $1 - \frac{b}{c}$, et l'équation restante donnera la seule valeur de x qui convient alors au problème proposé.

On tire les $\frac{a}{c}$ d'un tonneau de vin et on y remet b litrons de ce vin; on fait deux fois de suite ces deux opérations successives, et alors il reste dans le tonneau $3b - \frac{2ab}{c}$ litrons de vin. Combien y en avait-il d'abord dans le tonneau? (On verra aisément pourquoi ce problème est indéterminé, lorsque $c = a$.)

Formules pour la résolution des équations du premier degré à plusieurs inconnues.

166. Lorsqu'on chasse les dénominateurs et qu'on transpose les termes, on ne détruit pas l'égalité des deux membres d'une équation. D'après cela, on pourra toujours représenter deux équations du premier degré à deux inconnues, par

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c',$$

a, b, c, a', b', c', désignant des nombres entiers, positifs ou négatifs.

Multipliant la première de ces équations par a', et la seconde par a, puis retranchant la première des nouvelles équations de la seconde, on aura

$$(ab' - ba')y = ac' - ca'; \text{ d'où } y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Multipliant la première des équations proposées par b' et la seconde par b, puis retranchant la seconde des nouvelles équations de la première, il viendra

$$(ab' - ba')x = cb' - bc'; \text{ d'où } x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

167. En examinant attentivement les deux valeurs générales de x et de y, on voit que, pour former le dénominateur qui leur est commun, il faut écrire les deux arrangemens ab et ba, des deux lettres a et b; donner le signe — au second arrangement ba, et faire porter un accent à chaque seconde lettre : ce qui donnera effectivement $ab' - ba'$.

A l'égard des numérateurs, on les déduira du dénominateur commun $ab' - ba'$, en y changeant les a en c, pour x, et les b en c, pour y, et en laissant d'ailleurs les accens tels qu'ils sont; de cette manière, on aura dans le premier cas, $cb' - bc'$, c'est-à-dire le numérateur de x, et dans le second, $ac' - ca'$, c'est-à-dire le numérateur de y.

168. Pour montrer l'usage qu'on peut faire des formules ou des règles précédentes, soient les deux équations

$$5x - 7y = 34,$$
$$3x - 13y = -6.$$

En les comparant aux deux équations générales, il vient $a = 5$, $b = -7$, $c = 34$, $a' = 3$, $b' = -13$ et $c' = -6$; ainsi le dénominateur commun $ab' - ba'$ deviendra, $5 \times -13 - (-7) \times 3$, ou $-65 + 21$, ou enfin -44; le numérateur de x, savoir $cb' - bc'$, vaudra $34 \times -13 - (-7) \times -6$, ou $-442 - 42$, ou encore -484; donc on aura $x = -484 : -44 = 11$.

On trouverait semblablement $y = 3$. On voit que si l'on ne soumettait pas au calcul, les quantités négatives isolées, les formules du premier degré ne pourraient pas être appliquées à tout exemple particulier, et la plus importante de leurs propriétés n'existerait pas.

169. Trois équations quelconques du premier degré à trois inconnues, peuvent toujours, en chassant les dénominateurs et en transportant, être représentées par

$$ax + by + cz = d,$$
$$a'x + b'y + c'z = d',$$
$$a''x + b''y + c''z = d''.$$

Les calculs seraient très-longs si l'on voulait appliquer à la résolution de ces équations, l'une quelconque des méthodes d'élimination que nous avons exposées. Mais voici un moyen d'abréviation : on multipliera la première équation par une quantité indéterminée m, la seconde par une quantité indéterminée p; on ajoutera les deux nouvelles équations, et l'on retranchera de la somme, la troisième des équations proposées. L'équation résultante aura lieu pour toutes les valeurs de m et de p, puisque pour toutes ces valeurs, les trois trinomes du premier membre seront respectivement égaux aux trois monomes du second. Réunissant en un seul, tous les multiplicateurs d'une même inconnue, dans cette nouvelle équation, elle deviendra :

$$(am+a'p-a'')x+(bm+b'p-b'')y+(cm+c'p-c'')z = dm+d'p-d''.$$

Cette équation ayant lieu pour toutes les valeurs de m et de p, il est évident qu'on pourra disposer de ces deux indéterminées pour faire évanouir deux quelconques des coefficiens, et par conséquent, pour éliminer deux inconnues (*). Veut-on faire disparaître x et z? Il suffira de poser

$$am+a'p=a'',$$
$$cm+c'p=c'';$$

et alors il viendra $$y=\frac{dm+d'p-d''}{bm+b'p-b''}.$$

(*) Cette méthode d'élimination par *introduction d'indéterminées*, n'abrége les calculs que dans les équations générales, comme on peut s'en convaincre en résolvant, d'après cette méthode, les équations

$$10x+9y-12z=72$$
$$28x-63y-18z=-42$$
$$4x+27y-12z=72.$$

En effet, ces équations donnent d'abord

$$2(5m+14p-2)x+9(m-7p-3)y+6(2-2m-3p)z= 6(12m-7p-12)\cdots(1)$$

Egalant à zéro les coefficiens de x et de y, on aura deux équations qui, résolues par l'introduction d'une nouvelle indéterminée h, donneront $m=\frac{8}{7}$ et $p=-\frac{13}{49}$; d'où $z=7$. Substituant 7 au lieu de z dans l'équation (1), on aura

$$2(5m+14p-2)x+9(m-7p-3)y=12(13m+7p-13).$$

Posant $m-7p-3=0$, ou $m=7p+3$, y disparaîtra et il viendra

$$(98p+26)x=12(98p+26);\ \text{d'où } x=12.$$

Prenant $5m+14p-2=0$, on aura de même $y=4$.

Si l'on résout les équations en m et en p, comme au n° 167, on obtiendra :

$$m=\frac{c'a''-a'c''}{ac'-ca'} \quad \text{et} \quad p=\frac{ac''-ca''}{ac'-ca'}.$$

Substituant ces valeurs dans celle de y, réduisant au même dénominateur $ac'-ca'$ tous les termes du numérateur et du dénominateur de y, et négligeant d'écrire le dénominateur commun $ac'-ca'$, ce qui multipliera les deux termes de y par $ac'-ca'$; il viendra :

$$y=\frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

On trouverait x et z d'une manière absolument semblable.

Mais on peut encore abréger les calculs, en observant que, changer les b en a et réciproquement, dans les équations proposées, et par conséquent dans toutes celles qui s'en déduisent, c'est changer y en x et réciproquement, dans ces équations, et par conséquent, dans l'équation finale en y. Donc, par ces changemens de b en a et réciproquement, l'équation finale en y, c'est-à-dire, la valeur de y, devient l'équation finale en x, c'est-à-dire, la valeur de x. On verra de même qu'en changeant b en c et réciproquement, la valeur de y deviendra celle de z. Effectuant donc, dans la valeur de y, les changemens dont il s'agit, et changeant ensuite les signes du numérateur et du dénominateur de chacune des valeurs résultantes, on trouvera :

$$x=\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$

$$z=\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

170. En examinant les valeurs précédentes de x, y, z, on verra que, pour avoir le dénominateur qui leur est commun, il faut prendre les arrangemens ab, $-ba$; introduire la lettre c successivement dans la troisième, la seconde et la première place de chacun de ces arrangemens, et changer le signe chaque fois qu'on déplace la lettre c, dans un même arrangement : de cette manière, ab donnera, $abc-acb+cab$; $-ba$ donnera, $-bac+bca-cba$. Réunissant tous les résultats, et faisant porter un accent à chaque seconde lettre, et deux accens à chaque troisième, on aura :

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'' ;$$

ce qui est effectivement le dénominateur commun aux valeurs des trois inconnues x, y, z.

A l'égard des numérateurs, on les déduira du dénominateur commun, en y changeant le coefficient de l'inconnue cherchée en la lettre des seconds membres, et en conservant d'ailleurs les accens tels qu'ils sont.

171. L'analogie montre que, si l'on résolvait quatre équations à quatre inconnues, le dénominateur commun s'obtiendrait en formant les six arrangemens, $abc - acb + cab - bac + bca - cba$; en introduisant la lettre d successivement dans toutes les places, comme dans le cas de trois inconnues, et en faisant porter un accent à chaque seconde lettre, deux à chaque trosième et trois à chaque quatrième.. On aurait ainsi un dénominateur commun composé de 24 termes, et duquel on déduirait les numérateurs comme dans le cas de trois inconnues.

172. Mais nous n'en dirons pas davantage sur cet objet, parce que les cas où l'on est appelé à traiter un grand nombre d'équations à plusieurs inconnues, arrivent très-rarement; et que les cas particuliers qui peuvent se présenter, se développent ordinairement d'une manière plus abrégée que par l'application des formules générales. Il y a même plus, c'est que l'emploi des formules générales peut conduire à des valeurs qui ne conviennent pas aux équations proposées. Par exemple, soient les deux systèmes d'équations

$$\begin{array}{r|l} x + 9y + 6z = 16 & 11x - 8y + 6z = 49 \\ 2x + 3y + 2z = 7 & 5x - 12y + 9z = 16 \\ 3x + 6y + 4z = 13 & 4x - 20y + 15z = 15. \end{array}$$

Dans chacun de ces systèmes, les formules donneraient

$$x = \tfrac{0}{0},\ y = \tfrac{0}{0} \text{ et } z = \tfrac{0}{0}.$$

Cependant en opérant directement sur les équations, on trouvera, dans le premier système, $x = 1$, $y = \frac{0}{0}$, $z = \frac{0}{0}$, et dans le second, $x = 5$, $y = \infty$ et $z = \infty$. Effectivement, en prenant $x = 1$, dans le 1$^{\text{er}}$ système et $x = 5$ dans le second, il viendra

$$\begin{array}{r|l} 3y + 2z = 5 & 4y - 3z = 3 \\ 3y + 2z = 5 & 4y - 3z = 3 \\ 3y + 2z = 5 & 4y - 3z = 1. \end{array}$$

D'où l'on voit que les inconnues y et z sont *indéterminées* dans le 1^{er} système, et impossibles ou *infinies* dans le second.

173. Quoique la discussion des équations du premier degré soit la même que celle des problèmes du même degré, dont on s'est déjà occupé, nous allons cependant encore discuter les valeurs générales dans deux équations du premier degré, à deux inconnues. Il est clair d'abord que ces équations générales sont la même chose que

$$ax + by - c = 0,$$
$$a'x + b'y - c' = 0.$$

Or, si l'on divise la seconde de ces équations par la première, le quotient sera $\frac{a'}{a}$, et le reste deviendra $\frac{1}{a}[(ab' - ba')y - (ac' - ca')]$; donc on aura cette *identité* :

$$a'x + b'y - c' = \frac{a'}{a}(ax + by - c) + \frac{(ab' - ba')y - (ac' - ca')}{a} \ldots (1).$$

Il est évident, par cette identité, que tous les couples de valeurs de x et de y, qui satisferont aux équations proposées, satisferont aussi à l'équation
$$(ab' - ba')y - (ac' - ca') = 0,$$
laquelle est par conséquent l'équation finale en y.

D'après cela, 1° si l'équation finale donne $y = \frac{0}{0}$, c'est-à-dire, si l'on a en même temps, $ab' - ba' = 0$ et $ac' - ca' = 0$, l'équation (1) deviendra
$$a'x + b'y - c' = \frac{a'}{a}(ax + by - c);$$
donc tous les couples de valeurs de x et de y, qui satisferont à l'équation $a'x + b'y - c' = 0$, satisferont aussi à l'équation $ax + by - c = 0$: et comme il y a une infinité de couples de valeurs de x et de y qui peuvent satisfaire à l'équation $a'x + b'y - c' = 0$, et par conséquent à l'équation $ax + by - c = 0$, c'est-à-dire, aux deux équations proposées; il s'ensuit que x et y auront une infinité de valeurs différentes, et seront par conséquent *indéterminés*.

Cela devait arriver; car ayant alors $b' = \frac{ba'}{a}$ et $c' = \frac{ca'}{a}$, la seconde équation proposée se réduit à la première, et les deux équations n'en font qu'une (149).

Réciproquement, si x et y sont *indéterminés*, c'est-à-dire, si les deux équations proposées sont satisfaites par toutes les valeurs qu'on voudra donner à x et à y; on verra, par l'identité (1), que l'équation finale en y aura aussi lieu pour toutes les valeurs de y et donnera par conséquent $y = \frac{0}{0}$.

2° Si l'équation finale en y donne $y = \frac{n}{0}$, c'est-à-dire, si l'on a $ab' - ba' = 0$ et $ac' - ca' = n$, l'équation (1) deviendra

$$a'x + b'y - c' = \frac{a'}{a}(ax + by - c) - \frac{n}{a}.$$

Donc il n'y aura aucun couple de valeurs de x et de y capable de satisfaire aux deux équations proposées; car si cela était, on aurait nécessairement $n = 0$; ce qui est contre l'hypothèse. Ainsi, les deux équations proposées ne peuvent avoir lieu en même temps et sont impossibles. Et en effet, il n'est pas difficile de voir que, puisque x et y ont respectivement même valeur dans les deux équations proposées, ces deux équations sont une même quantité égalée à deux quantités différentes, lorsque $ab' - ba' = 0$, et $ac' - ca' = n$.

Réciproquement, si les deux équations proposées sont impossibles, les valeurs de x et de y qui satisferont à l'une, ne satisferont pas à l'autre, et par conséquent, on n'aura jamais $(ab' - ba')y - (ac' - ca') = 0$; ce qui exige qu'on ait $y = \frac{n}{0}$.

3° Supposons que y puisse avoir deux valeurs m et p, qui, avec des valeurs de x, satisfassent aux deux équations proposées; l'identité (1) montre que ces mêmes valeurs satisferont aussi à l'équation finale $(ab' - ba')y - (ac' - ca') = 0$; ce qui est impossible, puisque cette équation est du premier degré en y (144). Donc y n'aura qu'une valeur dans les équations proposées; et cette valeur devant satisfaire à l'équation finale, sera donnée par la résolution de cette équation. Si on éliminait y, on verrait de même que, dans les équations proposées, x n'a qu'une seule valeur donnée par l'équation finale en x.

174. Les propositions précédentes ont lieu aussi pour trois équations du premier degré à trois inconnues, puisque, par l'élimination d'une inconnue, ces trois équations se réduisent à deux, ne contenant que deux inconnues. Mais il serait très-long d'arriver aux propositions dont il s'agit, par la discussion des valeurs générales des inconnues. Nous examinerons seulement le cas où les trois termes connus sont nuls à-la-fois. Dans ce cas, les trois numérateurs seront évidemment nuls; donc, si le dénominateur commun n'est pas nul, on aura $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$. Mais si le dénominateur commun est nul, les inconnues deviendront $\frac{0}{0}$ et seront indéterminées.

C'est ce qu'on peut voir d'ailleurs, car les équations proposées étant alors

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \\ a''x + b''y + c''z = 0 \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} ax' + by' = -c \\ a'x' + b'y' = -c' \\ a''x' + b''y' = -c'', \end{array}\right.$$

en posant $x = x'z$ et $y = y'z$. Les deux premières donnent

$$x' = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}, \quad y' = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'};$$

et il faut que ces valeurs satisfassent à la troisième équation (114); ce qui arrive, puisqu'elles la réduisent au dénominateur commun égalé à zéro, lequel est effectivement nul, par hypothèse. Donc dans ce cas, les trois équations se réduisent aux deux premières, lesquelles ne peuvent déterminer que les rapports x' et y' des deux premières inconnues x et y à la troisième z. Ces trois inconnues sont donc réellement indéterminées.

Des inégalités.

175. Lorsqu'on n'a égard qu'aux *valeurs absolues* des quantités, on peut traiter les inégalités d'après les principes établis pour les équations; car *en effectuant les mêmes opérations sur deux quantité inégales, le plus grand résultat doit correspondre à la plus grande quantité.* Mais si l'on a égard aux signes des quantités, ce principe présente des exceptions, que nous ferons connaître après avoir établi deux propositions, dont on fait un grand usage en algèbre.

176. Il est clair qu'on a successivement

$$9 - 9 = 0, \quad 9 - 12 = -3 \ \text{et}\ 9 - 23 = -14.$$

Or, le nombre dont on soustrait restant le même, plus le nombre à soustraire est grand, plus le reste est petit. Ce principe considéré comme vrai, lorsque le nombre à soustraire surpasse l'autre, fait voir que, le reste -3 est plus petit que le reste 0, et le reste -14 plus petit que le reste -3; c'est-à-dire qu'on a $-3 < 0$ et $-14 < -3$. Ces inégalités montrent, 1° que *toute quantité négative est plus petite que zéro;* 2° que *plus une quantité négative a d'unités, plus elle est petite.*

177. Quoique ces deux principes paraissent d'abord absurdes (*), il faut néanmoins les admettre, si l'on veut soumettre les

(*) Il n'existe point de quantités plus petites que zéro; et plus une quantité a d'unités, plus elle est grande. Mais il faut observer que $-b$ n'est pas une quantité : c'est simplement l'indication d'une soustraction à faire. Et cette remarque suffit pour montrer d'où provient l'absurdité apparente des deux propositions énoncées plus haut; c'est de ce qu'on a donné à $-b$ le nom de *quantité* qui ne lui convient pas. Il est clair d'ailleurs que ces deux propositions sont vraies d'*une manière relative*, c'est-à-dire, en regardant les quantités négatives comme diminuant une certaine grandeur fixe, de même espèce. Par exemple, puisque les dettes *expressions négatives* aux mêmes opérations que les nombres absolus. En effet, il est évident que si une quantité est plus petite qu'une autre, en leur ajoutant une même troisième quantité, le premier résultat sera plus petit que le second. D'après cela, si l'on admet que $-13<0$ et $-9<-4$; en ajoutant 13 de part et d'autre, il viendra $0<13$ et $4<9$; ce qui est exact. Mais si l'on avait supposé $-13>0$ et $-9>-4$; en ajoutant 13 à chaque membre, on aurait eu $0>13$ et $4>9$; ce qui est absurde. Enfin, puisqu'il faut ajouter 4 à -4, pour avoir 0, il s'ensuit que $-4<0$. De même, puisqu'il faut ajouter 6 à -10, pour avoir -4, il en résulte que $-10<-4$.

178. Maintenant il est très-facile de comprendre les diverses transformations que l'on peut faire subir aux inégalités, et de connaître les exceptions dont ces transformations sont susceptibles.

1° On peut, sans aucune exception, ajouter, aux deux membres d'une inégalité, ou en retrancher une même quantité; l'inégalité subsiste toujours dans le même sens. C'est ainsi que $8>3$, donne $8+2>3+2$ et $8-1>3-1$. De même l'inégalité $-12<-4$, fournit $-12+3<-4+3$ et $-12-4<-4-4$.

2° On peut, sans exception, ajouter membre à membre, plusieurs inégalités établies dans le même sens; l'inégalité résultante subsiste dans le même sens que les proposées. En effet, de $8>5$, $7>3$ et $9>6$, il résulte évidemment $8+7+9>5+3+6$.

---

diminuent les biens, celui qui doit 6 francs de plus qu'il ne possède, a -6 francs de biens. Or, il a *moins que rien*; car il devrait encore gagner 6 francs pour ne rien avoir : donc $-6<0$. De même, si deux hommes doivent l'un 12 fr. de plus qu'il ne possède et l'autre 8 francs, ils auront respectivement -12 fr. et -8 fr. de biens. Or, le premier est *moins riche* que le second; car pour avoir 2 francs, il devrait gagner 14 fr. et le second seulement 10 fr.; donc $-12<-8$.

Si l'on regardait l'inégalité $-4<2$, comme ayant lieu d'une manière absolue, on en conclurait que $12:-4>12:2$, ou que $-3>6$; ce qui est absurde. Cela vient de ce que l'inégalité $-4<2$ n'a lieu que d'une manière relative, c'est-à-dire en sous-entendant devant -4 et $+2$, une certaine quantité de même espèce, telle que 10 par exemple. Autrement, -4 serait d'une nature différente de $+2$; et il n'y aurait pas de comparaison à établir entre ces deux choses; c'est-à-dire que l'inégalité $-4<2$ serait impossible, aussi bien que $-4<0$.

Pareillement, de $-4 < -1$ et $-5 < -3$, on tire $-4-5 < -1-3$.

Mais il n'en est pas toujours de même, si l'on soustrait, membre à membre, deux inégalités établies dans le même sens. Par exemple, les inégalités $12 > 7$ et $4 > 2$ donnent bien $12-4 > 7-2$; mais les inégalités $8 > 5$ et $6 > 3$ fournissent $8-6 = 5-3$.

3° Si l'on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un nombre positif, cette inégalité ne sera pas détruite; mais si on les multiplie ou divise par une quantité négative, l'inégalité subsistera en sens contraire. Par exemple, l'inégalité $8 < 11$, donne bien $8 \times 3 < 11 \times 3$; mais en multipliant les deux membres par -3, elle donne au contraire, $-24 > -33$ (176).

4° Il n'est pas permis de changer les signes des deux membres d'une inégalité, à moins qu'on n'établisse l'inégalité résultante en sens contraire; car cela revient à multiplier les deux membres par -1. Ainsi $4 < 9$ donne $-4 > -9$ (176).

5° Si les membres de plusieurs inégalités, établies dans le même sens, sont tous positifs, on pourra multiplier ou diviser ces inégalités membre à membre, ou élever les deux membres de l'une à une même puissance; l'inégalité résultante subsistera toujours dans le même sens que les proposées. Mais il n'en serait pas toujours de même, si quelques membres étaient négatifs. Par exemple, les inégalités $3 > -2$ et $-3 > -5$, donnent, en les élevant successivement au carré et au cube, $9 > 4$ et $9 < 25$; puis $27 > -8$ et $-27 > -125$. De même, en multipliant entre elles les deux inégalités $-4 > -7$ et $4 > 2$, on aurait $-16 < -14$.

179. Au moyen des principes que l'on vient d'exposer, il est facile de résoudre les inégalités, qu'on appelle alors *inéquations*. *Résoudre* une inégalité, c'est en déduire une des deux *limites* de l'inconnue, c'est-à-dire une des deux valeurs plus grande ou plus petite que l'inconnue. Soit par exemple, l'inéquation $7x - \frac{1}{2} > \frac{3x}{4} + 27$; on en tire successivement: $28x - 2 > 6x + 108$; $28x - 6x > 108 + 2$; $22x > 110$ et $x > 5$.

180. Le système de deux inégalités en x, donne toujours deux limites de x; et le problème qui conduit à ces inégalités,

peut être déterminé, indéterminé, ou impossible. En voici des exemples :

1° Supposons que x doive être un nombre entier dans les deux inégalités

$$\frac{5x}{6}-\frac{9}{4}>\frac{2x}{3}+3 \quad \text{et} \quad \frac{3x}{4}-1<\frac{5x}{12}+10.$$

Résolvant ces deux inéquations, on aura $x>31\frac{1}{2}$ et $x<33$. Tous les nombres compris entre $31\frac{1}{2}$ et 33, seront les valeurs de x dans les inégalités proposées. Mais comme x doit être un nombre entier, on n'a que la seule valeur $x=32$.

2° Soient les deux inégalités $2x-5<25$ et $3x-7>2x+4$; on en tire $x<15$ et $x>11$. Donc on peut prendre pour x, tous les nombres entiers ou fractionnaires compris entre 15 et 11; et par conséquent le problème est indéterminé dans ce cas.

3° Si $\frac{3x}{4}-5<5$ et $\frac{2x}{3}-2>\frac{x}{5}+5$, on trouvera $x<13\frac{1}{3}$ et $x>15$. Il est clair qu'alors le problème n'admet aucune solution.

181. Lorsqu'on ne peut pas déterminer directement la valeur d'une inconnue x, on a quelquefois recours aux inégalités, pour démontrer que cette inconnue ne peut être ni plus grande, ni plus petite qu'une quantité connue a; d'où l'on conclut que $x=a$. Mais pour opérer avec plus de facilité, on se sert des signes $\ngtr$ et $\nless$, qui signifient *ne peut pas être plus grand que* et *ne peut pas être plus petit que.*

D'après cela, si l'on a les deux relations

$$2x+7\ngtr 19 \quad \text{et} \quad 3x-5\nless 13;$$

la première donnera $2x\ngtr 19-7$, $2x\ngtr 12$ et $x\ngtr 6$. La seconde fournira $3x\nless 13+5$, $3x\nless 18$ et $x\nless 6$. Ainsi, puisque $x\ngtr 6$ et que $x\nless 6$, il s'ensuit que $x=6$.

Voici deux problèmes à résoudre :

1° Trouver un nombre d'oranges tel, que son triple augmenté de 2, surpasse son double augmenté de 61, et que son quintuple diminué de 70, soit moindre que son quadruple diminué de 9.

2° Combien y a-t-il de pièces de 20 francs dans une bourse? On sait que le double du nombre de ces pièces, diminué de 4, ne peut surpasser 2, et que le quintuple du même nombre, diminué de 7, ne peut être moindre que 3.

De l'analyse indéterminée du premier degré.

182. Lorsqu'on a moins d'équations que d'inconnues, ces inconnues ont une infinité de valeurs différentes. Mais il arrive souvent que de toutes ces valeurs, les entières et positives seules peuvent convenir au problème proposé. Il est donc utile de connaître les procédés propres à faire trouver ces valeurs entières et positives ; et tel est le but général de l'*analyse indéterminée*.

Lorsque les équations sont d'un degré supérieur au premier, la recherche des valeurs entières offre de grandes difficultés et sort tout-à-fait des élémens. C'est pourquoi nous ne parlerons ici que de l'analyse indéterminée du premier degré, en nous bornant à ce qu'elle a de plus essentiel.

183. On sait que toute équation du premier degré à deux inconnues, peut être ramenée à la forme $ax+by=c$, a, b, c, désignant des nombres entiers positifs ou négatifs. Or, *si les coefficiens* a *et* b *ont un commun diviseur* d, *qui ne divise pas* c, x *et* y *ne pourront jamais être des nombres entiers.*

En effet, divisons par d les deux nombres de l'équation $ax+by=c$; nous aurons

$$\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y=\frac{c}{d}.$$

Puisque d divise a et b, par hypothèse, il est clair que si x et y pouvaient être des nombres entiers, le premier membre de l'équation précédente serait aussi un nombre entier, ainsi que le second ; d diviserait donc c, ce qui est contre l'hypothèse. Donc x et y ne seront jamais des nombres entiers.

On supposera donc, dans tout ce qui va suivre, que a et b sont des nombres *premiers entre eux*, parce que s'ils avaient un facteur commun, celui-ci devrait aussi diviser c ; et alors il faudrait le supprimer dans l'équation.

184. Le cas le plus simple de la recherche des valeurs entières, a lieu quand le coefficient d'une inconnue est l'unité, comme dans $x-3y=13$; car alors, en ne prenant que des valeurs entières pour la seconde inconnue y, on n'aura pareillement que des valeurs entières pour la premiere inconnue x. Tout se réduit donc à faire dépendre les inconnues proposées,

de celles d'une équation où une inconnue ait l'unité pour coefficient. Voici comment on peut y parvenir :

On prendra dans l'équation proposée, la valeur de l'inconnue qui a le moindre coefficient ; on extraira les entiers contenus dans le terme inconnu de cette valeur ; on égalera la fraction restante de la même valeur, à une nouvelle inconnue, et l'on aura une nouvelle équation, sur laquelle on opérera comme sur la première, et ainsi de suite.

D'après cette marche, si on a l'équation

$$20x - 31y = 7 \ldots (1)$$

on prendra d'abord la valeur de x, qui sera $x = \frac{31y+7}{20}$; on extraira les entiers contenus dans le terme inconnu $\frac{31y}{20}$ de cette valeur, ce qui revient à diviser 31 par 20, et l'on aura $x = y + \frac{11y+7}{20}$. Egalant la fraction restante à une nouvelle inconnue u, il viendra

$$\frac{11y+7}{20} = u \quad \text{et} \quad x = y + u.$$

Traitant la première équation en u comme la proposée, on trouve $y = \frac{20u-7}{11} = u + \frac{9u-7}{11}$; puis

$$\frac{9u-7}{11} = u' \quad \text{et} \quad y = u + u'.$$

La première équation en u' donne successivement

$$u = \frac{11u'+7}{9} = u' + \frac{2u'+7}{9},$$

$$\frac{2u'+7}{9} = u'' \quad \text{et} \quad u = u' + u''.$$

La 1[re] équation en u'' fournit successivement les suivantes :

$$u' = \frac{9u''-7}{2} = 4u'' + \frac{u''-7}{2},$$

$$\frac{u''-7}{2} = u''' \quad \text{et} \quad u' = 4u'' + u'''.$$

Enfin la première équation en u''' donne $u'' = 2u''' + 7$. Nous voici donc parvenus à une équation *auxiliaire* où le coefficient d'une *indéterminée* u'' est l'unité (*). Substituant la valeur de u'' dans celle de u', cette dernière dans celle de u, et ainsi de suite, en remontant aux valeurs de y et x, on trouvera

$$y = 20u''' + 63 \quad \text{et} \quad x = 31u''' + 98 \ldots (2)$$

Ces valeurs substituées dans l'équation proposée (1), la réduisent à $7 = 7$. De sorte que quelle que soit la valeur qu'on donne à u''', x et y prendront toujours des valeurs qui satisferont à l'équation (1); et si u''' est entière, x et y le seront pareillement. Or, il est aisé de voir, par les formules (2), que -3 est la plus petite valeur qu'on puisse donner à u''', pour que x et y soient des nombres entiers positifs. Prenant donc successivement $u''' = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$, etc., on aura successivement

$$y = 3,\ 23,\ 43,\ 63,\ 83,\ 103,\ 303,\ 503, \text{ etc.}$$
$$x = 5,\ 36,\ 67,\ 98,\ 129,\ 160,\ 191,\ 222, \text{ etc.}$$

De sorte que rien ne limite le nombre de solutions entières et positives de l'équation proposée $20x - 31y = 7$.

185. On peut abréger les calculs en prenant des restes négatifs dans l'extraction des entiers, ou en décomposant le numérateur en facteurs, etc. Par exemple, qu'on ait l'équation

$$17x - 49y = -8:$$

on en tire d'abord $x = \frac{49y - 8}{17}$. Mais au lieu de considérer $49y$ comme égal à $34y + 15y$, il sera plus abrégé de prendre $49y = 51y - 2y$; et alors il viendra :

(*) Le procédé qu'on vient de suivre conduira toujours à une pareille équation; car pour extraire les entiers contenus dans le terme inconnu de chaque valeur, on divise le plus grand coefficient 31 par le plus petit 20; le plus petit 20 par le premier reste 11; le premier reste 11 par le second 9 et le second reste 9 par le troisième 2. On cherche donc réellement le plus grand commun diviseur entre les coefficiens 31 et 20 des inconnues, dans l'équation proposée. Et puisque ces coefficiens sont premiers entre eux (183), leur plus grand commun diviseur est l'unité. Mais ce plus grand commun diviseur est celui des restes qui divise exactement le précédent : donc on finira toujours par avoir un reste égal à 1. Or, chaque reste est le coefficient d'une indéterminée dans l'équation auxiliaire suivante; donc on arrivera toujours à une équation où une inconnue aura l'unité pour coefficient. On voit même que le nombre d'équations auxiliaires sera toujours moindre que le plus petit des deux coefficiens proposés.

$$x = \frac{51y - 2y - 8}{17} = 3y - \frac{2(y+4)}{17}.$$

Et comme 17 est premier avec le facteur 2, pour que 17 divise le produit $2(y+4)$, il faut que 17 divise $y+4$ (Arithmét.). Posant donc

$$\frac{y+4}{17} = u, \text{ on aura } x = 3y - 2u.$$

D'où il suit que les valeurs de y et de x sont :

$$y = 17u - 4 \text{ et } x = 49u - 12.$$

On voit que le nombre de solutions entières et positives dont est susceptible l'équation proposée, est illimité; et que la plus petite aura lieu pour $u = 1$.

Voici trois problèmes à résoudre : 1° De combien de manières peut-on faire 49 livres avec des poids de 5 et de 3 liv.? (R. De trois manières.)

2° Partager le nombre 997 en deux parties dont l'une soit divisible par 16 et l'autre par 11. (Cinq solutions.)

3° Une fruitière disait à un jeune algébriste : Pourrez-vous deviner combien il y a de pommes dans ce panier? Il y en a plus de 100 et moins de 300. En les comptant par 3, il n'en reste point; par 7, il en reste une, et par 10, il en reste 6. (Le panier contient 246 pommes.)

186. Si l'on avait une solution entière, rien ne serait plus facile que de trouver toutes les autres. En effet, considérons l'équation

$$ax + by = c \ldots (1)$$

Soient p et q deux valeurs entières de x et de y, dans cette équation; on aura donc $ap + bq = c$. Retranchant cette équation de la précédente, il vient

$$a(x-p) + b(y-q) = 0; \text{ d'où } x - p = \frac{b(y-q)}{a}.$$

Pour que le second membre soit un nombre entier $x - p$, il faut que a divise $q - y$, car a est premier avec b; il faut donc qu'on ait $q - y = au$; ce qui donne $x - p = bu$, et par suite

$$y = q - au, \quad x = p + bu \ldots (2)$$

Ces valeurs satisfont effectivement à l'équation proposée (1); et les termes en u y sont de signes contraires ou de mêmes signes, suivant que les coefficiens a et b sont de mêmes signes ou de signes opposés. On voit en outre que, *dans les solutions entières de l'équation* $ax + by = c$, *les valeurs d'une inconnue augmentent ou diminuent successivement du coefficient de* *l'autre inconnue*. (Ce qu'on reconnaît d'ailleurs dans les exemples des nos 184 et 185) (*).

187. Il suit de là que la résolution de l'équation proposée en nombres entiers positifs, se réduit à trouver une solution entière, positive ou négative ; ce qui est souvent facile. Par exemple, si l'on a

$$7x + 4y = 128;$$

on observera que 4 divise exactement 128, et que par conséquent la première solution est $x = 0$ et $y = 32$. Ce qui donne, pour calculer toutes les autres, les deux formules

$$x = 4u \text{ et } y = 32 - 7u.$$

Si l'on avait l'équation $5x + 11y = 172$; en y faisant $y = 2$, on trouverait $x = 30$; et les solutions en nombres entiers positifs seraient fournies par les formules

$$x = 30 - 11u \text{ et } y = 2 + 5u.$$

Enfin, dans l'équation $11x - 7y = 52$, si l'on faisait $x = 1$ et $y = 1$, le premier membre se réduirait à 4, et serait contenu 13 fois dans le second 52 : donc en prenant x et y chacun 13 fois plus grand, le premier membre se réduira au second. De sorte que $x = 13$ et $y = 13$ est une solution, et qu'on a, pour déterminer les autres,

$$x = 13 + 7u \text{ et } y = 13 + 11u.$$

(*) Quelles que soient les valeurs entières et positives x' et y' de x et de y, qui satisfont à l'équation proposée (1), les formules (2) donneront toujours à u une même valeur entière qui, si elle avait d'abord été substituée dans les équations (2), aurait fourni les valeurs x' et y'. En effet, soient v et v' les valeurs de u, dans les équations (2), quand on y fait $y = y'$ et $x = x'$; on aura donc $y' = q - av$ et $x' = p + bv'$. Substituant ces valeurs dans l'équation proposée (1), et observant que, par hypothèse, $ax' + by' = c$, on trouvera $ab(v - v') = 0$; ce qui exige que $v' = v$. De sorte que pour $x = x'$ et $y = y'$, les équations (2) donnent à u une seule valeur v. De plus, cette valeur est entière; car si elle était une fraction $\frac{n}{d}$, d devrait diviser a et b; ce qui est impossible, puisque a et b sont premiers entre eux. Or si l'on substitue cette valeur entière v pour u, dans les équations (2), il est clair qu'on retrouvera les valeurs x' et y' qui l'ont donnée; ces valeurs sont donc fournies par l'une des valeurs entières de u dans les formules (2). D'où il suit que *pour avoir toutes les valeurs entières et positives de* x *et de* y, *dans la proposée* (1), *il suffira de chercher toutes les valeurs entières et positives de* x *et de* y, *dans les formules* (2).

188. Pour ne pas faire des calculs inutiles, il est bon de savoir d'avance si l'équation proposée admet des solutions entières et positives. Or, 1° toute équation de la forme $ax + by = c$ n'a jamais qu'un nombre limité de solutions; et de plus, elle est impossible, lorsqu'en rejetant les valeurs zéro, la somme des coefficiens a et b est plus grande que c, comme dans $13x + 7y = 17$. 2° Toute équation de la forme $ax - by = c$ peut avoir une infinité de solutions; car les nombres entiers positifs ax et by croissant indéfiniment, leur différence peut conserver la même valeur c. 3° Enfin toute équation de la forme $ax + by = -c$, est impossible; car la somme des deux nombres positifs ax et by ne donnera jamais le nombre négatif $-c$.

189. Si l'on a deux équations à trois inconnues chacune, on en déduira d'abord une équation à deux inconnues, qu'on traitera d'après la méthode (184 ou 186). Et quand on aura les deux inconnues de cette équation, exprimées en *fonctions entières* d'une même indéterminée (*), on substituera leurs valeurs dans la plus simple des équations proposées, et l'on obtiendra une équation à deux inconnues, qu'il faudra encore traiter d'après la méthode. Par exemple, soient les équations

$$3x + 5y + 7z = 560$$
$$9x + 25y + 49z = 2920:$$

l'élimination de z donnera $12x + 10y = 1000$, où

$$6x + 5y = 500.$$

Comme 500 est divisible par le coefficient de y, il est clair que $x = 0$ et $y = 100$ est une première solution, et qu'ainsi on a (187) $\quad x = 5u$ et $y = 100 - 6u$.

Substituant ces valeurs dans la première équation proposée, qui est la plus simple, elle deviendra $7z - 15u = 60$; ce qui donne $z = 15v$ et $u = 7v - 4$. Substituant la dernière valeur dans celles déjà trouvées pour x et y, on verra que les solutions entières et positives des équations proposées sont données par les formules

$$x = 35v - 20,\quad y = 124 - 42v \quad \text{et} \quad z = 15v.$$

(*) On appelle *fonction* d'une lettre, considérée comme *variable*, toute quantité algébrique composée de cette lettre. La fonction est *entière*, lorsqu'elle n'a point de diviseur.

Pour n'avoir que des valeurs entières et positives, v doit être > 0 et < 3. Prenant donc $v = 1$ et $v = 2$, on aura $x = 15$, $y = 82$, $z = 15$, puis $x = 50$, $y = 40$ et $z = 30$.

190. Lorsque dans les deux équations à résoudre, le coefficient de l'une des trois inconnues est l'unité, on abrége les calculs en éliminant d'abord cette inconnue. Soient par exemple, les équations

$$5x + y + 4z = 272 \text{ et } 8x + 3y + 9z = 656;$$

éliminant y, on aura $7x + 3z = 160$; d'où $x = 3u + 1$ et $z = 51 - 7u$. Substituant dans la première équation proposée, elle donnera $y = 13u + 68$. On a donc ainsi, par une seule application de la méthode, les trois inconnues, exprimées en fonctions entières de l'indéterminée u. Ce qui n'aurait pas eu lieu en éliminant d'abord une autre inconnue. On voit d'ailleurs que les équations proposées n'admettent que huit solutions entières et positives.

191. Si l'on avait trois équations à quatre inconnues, on en déduirait d'abord deux équations à trois inconnues, qu'on exprimerait en fonctions entières de u (190). Substituant les valeurs résultantes dans la plus simple des équations proposées, il sera facile d'en tirer les valeurs des quatre inconnues en fonctions entières d'une nouvelle indéterminée v. Voici 3 problèmes à résoudre.

On distribue 6 francs à 30 pauvres; les hommes reçoivent 80 centimes chacun, les femmes 7 centimes et les enfans 3. Combien y a-t-il d'hommes, de femmes et d'enfans? (R. 6 hommes, 12 femmes et 12 enfans.)

Un berger interrogé sur le nombre de ses moutons, répondit : Si vous les comptez 4 à 4, il en restera 3; 5 à 5, il en restera 4; 7 à 7, il en restera 5, et leur nombre est moindre que 200. Combien le berger avait-il de moutons? (R. 19 ou 159.)

La somme des quatre chiffres d'un nombre inconnu est 16; si l'on remplace les trois derniers par trois zéros, le nombre résultant contiendra 125 fois celui formé par les deux derniers chiffres du nombre inconnu; enfin le premier chiffre de ce nombre est contenu 183 fois dans le nombre formé par les trois derniers. Quel est le nombre qui jouit de ces propriétés? (R. 4732.)

192. Lorsqu'on n'a qu'une équation à trois inconnues $ax + by + cz = d$, on passe le terme cz dans le second membre; on fait $d - cz = c'$ et on n'a plus à traiter que l'équation $ax + by = c'$. Une fois parvenu à l'équation où le coefficient d'une inconnue est l'unité, on remonte aux valeurs de x et y, en substituant $d - cz$ au lieu de c'. Et si u est la dernière des incon-

nues auxiliaires, les expressions de x et de y renfermeront alors deux nombres entiers z et u que l'on pourra prendre arbitrairement.

Par exemple, l'équation $3x-7y+11z=80$, donne d'abord $3x-7y=80-11z=c'$, et ensuite

$$x=\frac{c'+7y}{3}=\frac{c'+y}{3}+2y=u+2y,$$

$$\frac{c'+y}{3}=u,\ \text{puis}\ y=3u-c'=3u-80+11z.$$

Substituant cette valeur dans celle de x, l'équation proposée se trouvera remplacée par les deux

$$x=160-5u-22z \quad \text{et} \quad y=3u+11z-80.$$

On peut disposer ici des deux indéterminées u et z, mais de manière cependant qu'il n'en résulte que des valeurs entières et positives pour x et y. Or, si l'on prenait u négatif, il faudrait qu'on eût $11z>80+3u$ et $22z<160+5u$, ou $22z>160+6u$ et $22z<160+5u$; ce qui est visiblement impossible. Ainsi u ne saurait être que positif, et tel qu'on ait $22z+5u<160$, $11z+3u>80$. Faisant dans ces inégalités successivement $z=1$, 2, 3, 4, 5 et 6, on verra que u ne peut avoir que 14 valeurs, et que par conséquent l'équation proposée n'est susceptible que de 14 solutions entières et positives.

193. Les problèmes qui conduisent à une équation finale contenant plus de deux inconnues, sont nommés *plus qu'indéterminés*. Tels sont les suivans :

On propose de payer 5700 fr. avec des billets de 700, 900 et 1100 fr. Comment effectuer ce paiement? (R. En prenant 4 billets de 700 fr., 2 de 900 et 1 de 1100.)

Un fermier achète 100 pièces de bétail pour 100 louis, savoir : des bœufs à 10 louis la pièce, des vaches à 5 louis, des veaux à 2 louis et des moutons à un demi-louis. Combien a-t-il eu d'animaux de chaque espèce? (Il y a dix solutions effectives.)

De l'extraction de la racine carrée des nombres.

194. Les équations les plus faciles à résoudre, après celles du premier degré, sont de la forme $x^2=a$; et en conséquence nous allons nous occuper de la résolution de ces équations.

195. On sait (23) que le *carré* d'un nombre est le produit

de ce nombre par lui-même. Ainsi les carrés des neuf premiers nombres entiers, sont : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 et 81.

Le carré de 10 est 100, le carré de 100 est 10000, le carré de 1000 est 1000000, le carré de 10000 est 100000000, et en général, le carré de 1 *suivi de* n *zéros* est 1 *suivi de* 2n *zéros*.

Le carré d'un nombre composé de deux parties a et b est donné par la formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (52). Si $b=1$, il viendra $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$.

196. La *racine carrée* ou la *racine deuxième* d'un nombre, est un autre nombre qui, élevé au carré ou multiplié par lui-même, reproduit le premier. Ainsi 4 est la racine carrée de 16, parce que 4×4 ou 4^2 donne 16. De même, la racine carrée de 100 est 10, la racine carrée de 10000 est 100, la racine carrée de 1000000 est 1000, et en général, la racine carrée de 1 *suivi de* 2n *zéros* est 1 *suivi de* n *zéros*.

197. Soit x la racine carrée de a; on aura donc $x^2 = a$ ou $a = x^2$. De sorte que tout nombre est le carré de sa racine carrée, et contient par conséquent le carré du premier chiffre de cette racine, celui des 2, des 3, des 4, ..., premiers chiffres. Et comme le produit a augmente, dès que l'un de ses facteurs x augmente, on voit que *plus un nombre* a *est grand*, *plus sa racine carrée* x *est grande*, *et réciproquement*. Et si a devenait, par exemple, 9 fois plus grand, sa racine carrée x ne deviendrait que 3 fois plus grande.

198. On indique la racine carrée d'un nombre a en plaçant devant a le signe $\sqrt{\ }$, qu'on appelle *radical*. Ainsi $\sqrt{a}$ veut dire : *racine carrée de a*. De là et de la définition des racines carrées, il suit que $(\sqrt{a})^2 = a = \sqrt{a^2}$.

199. *La racine carrée d'un nombre entier a toujours autant de chiffres que ce nombre contient de tranches de deux chiffres chacune, sauf la première à gauche qui peut n'avoir qu'un seul chiffre.*

Soit le nombre de 4 tranches $a = 78,45,71,81$. Il est évident que $a > 1000000$ et $a < 100000000$. Extrayant la racine carrée de part et d'autre, on aura $\sqrt{a} > 1000$ et $\sqrt{a} < 10000$. La racine carrée du nombre proposé a n'a donc que 4 chiffres, c'est-à-dire autant que ce nombre a de tranches.

200. *Le plus grand carré contenu dans les* p *premières*

tranches du nombre proposé, est toujours le carré des p *premiers chiffres de la racine carrée de ce nombre.*

Soit le nombre $a = 8,71,63,41,79$. Puisque ce nombre a 5 tranches de chiffres, sa racine carrée aura 5 chiffres (199). Soit x les trois prèmiers chiffres à gauche de cette racine; x sera donc un nombre de *centaines*; son carré x^2 sera un nombre de *dizaines-de-mille*, et ne pourra se trouver que dans les trois premières tranches, qui expriment aussi des *dizaines-de-mille*. De plus, comme la racine carrée n'a que x centaines, elle est moindre que $(x+1)$ centaines; donc son carré, ou le nombre proposé a, est moindre que $(x+1)^2$ dizaines-de-mille; les dizaines-de-mille de ce nombre a, c'est-à-dire ses trois premières tranches, ne contiennent donc pas $(x+1)^2$. D'où il suit que le plus grand carré contenu dans les trois premières tranches est x^2, c'est-à-dire le carré des trois premiers chiffres x de la racine carrée. On verra de même que le plus grand carré contenu dans les deux premières tranches, est le carré des deux premiers chiffres de la racine, et ainsi des autres.

201. Voyons maintenant comment on peut extraire la racine carrée d'un nombre entier, comme 589824. Pour cela, on partage ce nombre en tranches de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche, puis l'on dispose et l'on effectue l'opération ainsi qu'il suit :

58,98,24	768. Racine carrée.	
49	146	1528
99,8	6	8
876	876.	12224.
12224		
1222,4		
0		

1° On sait (200) que le plus grand carré 49 contenu dans la première tranche 58, est le carré du premier chiffre de la racine; de sorte que le premier chiffre est 7. Soustrayant 49 de 58, il reste 9. A côté de ce reste 9 abaissant la seconde tranche 98, il vient 998. Mais le plus grand carré contenu dans les deux 1res tranches, étant celui des deux 1ers chiffres a et x de la racine (200), ce plus grand carré est $(a+x)^2$, ou $a^2+2ax+x^2$. Et puisqu'on vient de soustraire de ces deux tranches, le carré 49 ou a^2 du premier chiffre, le reste 998 doit renfermer $2ax$

$+ x^2$. Or le premier chiffre a désigne des dizaines par rapport au second x; donc $2ax$ exprime aussi des dizaines, et ne peut se trouver que dans les 99 dizaines de 998, qui contiendront en outre les dizaines fournies par les autres parties du carré de la racine. Mais puisque $2ax$ se trouve seul dans 99, il est clair qu'en divisant 99 par $2a$ ou 14, double du premier chiffre 7 de la racine, le quotient sera le second chiffre x; car sauf les dizaines fournies, on divisera un produit par l'un de ses deux facteurs : 14 est bien contenu 7 fois en 99; mais à cause de la retenue, il ne faut mettre que 6 au quotient.

2° Pour vérifier si le quotient 6 est le second chiffre x de la racine cherchée, il faut soustraire du reste 998 la quantité qu'il doit renfermer, savoir $2ax + x^2$ ou $(2a + x)x$. Or, comme a ou 7 exprime des dizaines par rapport à x ou 6, et qu'on ajoute un chiffre d'unités à des dizaines en l'écrivant à la droite de celles-ci, on voit que pour vérifier la racine trouvée 76, il faut écrire le second chiffre 6 à côté du double 14 du premier 7; multiplier le résultat 146 par 6, et soustraire le produit 876 de 998; ce qui donnera 122 pour reste. Mais en opérant ainsi, on soustrait $2ax + x^2$ du reste 998 des deux premières tranches, et par conséquent de ces deux tranches : et comme déjà on en a soustrait a^2, il s'ensuit qu'en tout on a soustrait des deux premières tranches $a^2 + 2ax + x^2$ ou $(a + x)^2$, c'est-à-dire le carré de la racine trouvée 76. Donc, puisque le reste 122 est moindre que $2(76) + 1$, les deux premières tranches elles-mêmes sont moindres que $(76)^2 + 2(76) + 1$, ou que $(76 + 1)^2$, ou enfin que $(77)^2$. D'où il suit que le plus grand carré contenu dans les deux premières tranches est $(76)^2$: et comme ce plus grand carré est celui des deux premiers chiffres de la racine (200), il s'ensuit que 76 exprime ces deux premiers chiffres (*).

3° Pour avoir le troisième chiffre, il suffit de recommencer

(*) Si le reste était $=$ ou $> 2(76) + 1$, les deux premières tranches seraient $=$ ou $> (77)^2$: et comme ces deux tranches expriment des centaines, elles seraient $=$ ou $> (77)^2$ centaines, $=$ ou $> (770)^2$. Le nombre proposé serait donc $> (770)^2$; la racine carrée de ce nombre serait donc > 770 ou que 77 dizaines, et la racine trouvée 76 serait trop petite d'une unité au moins. En principe, la racine trouvée n'est exacte en nombre entier, que quand le reste est moindre que le double de cette racine trouvée, plus l'unité.

les raisonnemens précédens. Ainsi abaissant la troisième tranche 24 à côté du reste 122, ce qui donne 12224, et divisant 1222 par 152, double des deux premiers chiffres 76 de la racine, le quotient 8 exprimera le troisième chiffre ou un chiffre plus grand. Pour vérifier ce quotient, on l'écrit à côté de 152, double des deux premiers chiffres, on multiplie le résultat 1528 par 8, et l'on soustrait le produit 12224 du reste 12224 des trois premières tranches. De cette manière, on a soustrait de ces trois tranches le carré de la racine trouvée 768; donc, puisqu'il ne reste rien, cette racine trouvée est exactement la racine carrée du nombre proposé 589824.

202. Le résumé de toutes les opérations que l'on vient de faire, conduit à la règle que voici : Pour extraire la racine carrée d'un nombre entier, il faut le partager en tranches de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche; extraire ensuite la racine carrée du plus grand carré contenu dans la première tranche, et cette racine sera le premier chiffre de la racine cherchée. Après avoir soustrait le carré de ce premier chiffre de la première tranche, on abaisse la seconde à côté du reste, on sépare le dernier chiffre à droite par une virgule, on divise la partie à gauche de la virgule par le double de la racine trouvée, et le quotient exprime le second chiffre ou un chiffre plus grand. Pour vérifier ce quotient, on l'écrit à côté du double du premier chiffre, on multiplie le résultat par ce quotient, et l'on soustrait le produit du reste de la première tranche réuni à la seconde : le nouveau reste doit être moindre que le double de la racine trouvée, plus l'unité (201, 2°). On abaisse de même la 3^{me} tranche à côté du reste des deux 1res, et l'on continue le même procédé jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de tranches à abaisser.

D'après cette règle, on trouve que $\sqrt{76807696} = 8764$ et que $\sqrt{759278025} = 27555$. Les élèves feront bien de recommencer sur ces exemples, les raisonnemens qui ont conduit à la règle proposée.

203. Remarquons que si l'on voulait opérer l'extraction de la racine carrée en commençant par la droite; comme le carré du premier chiffre à droite de la racine cherchée peut avoir un ou deux chiffres, on ne saurait s'il faut chercher ce carré dans le 1er ou dans les deux 1ers chiffres à droite du nombre proposé : donc il est nécessaire de commencer l'extraction par la gauche.

204. On abrége beaucoup l'extraction de la racine carrée, lorsqu'on fait par la pensée, les opérations que les vérifications exigent. Et s'il arrive que la partie à gauche de la virgule ne contienne pas le double de la racine trouvée, on met o à la racine et on abaisse sur-le-champ la tranche suivante. C'est ainsi qu'on trouve aisément la racine carrée du nombre 54300000000.

Voici l'opération :

5,43,00,00,00,00	233023. Racine.			
14,3	43	463	46602	466043
140,0	3	3	2	3
11000,0	129.	1389.	93204.	1398129.
167960,0				
Reste... 281471				

Puisque cette opération laisse un reste, la racine trouvée est trop faible ; mais comme on ne saurait mettre 4 à la dernière racine particlle, sans y mettre trop, il s'ensuit que la racine totale 233023 ne saurait être augmentée d'une unité ; elle est donc approchée de la véritable, à moins d'une unité près.

205. *Pour extraire la racine carrée d'une fraction, il faut diviser la racine carrée du numérateur par celle du dénominateur.* C'est ainsi qu'on aura

$$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3} \text{ et } \sqrt{\frac{a^2}{c^2}}=\frac{a}{c}.$$

Effectivement, si on élève chaque résultat au carré, on retrouve le nombre qui l'a donné.

La règle précédente n'est plus immédiatement applicable, lorsque les deux termes ne sont pas des *carrés parfaits*, c'est-à-dire les carrés de nombres entiers : alors la racine carrée ne peut plus s'obtenir que par approximation.

206. Pour trouver la racine carrée d'un nombre quelconque a, à moins de $\frac{1}{n}$ près, il faut multiplier ce nombre par n^2 ; puis extraire la racine carrée du plus grand carré r^2 contenu dans la partie entière du résultat an^2, et donner à cette racine r, le nombre n pour dénominateur. De sorte que $\sqrt{a}=\frac{r}{n}$, à moins de $\frac{1}{n}$ près.

En effet, puisque r^2 est le plus grand carré contenu dans an^2, le carré de $r+1$ n'y est pas ; on a donc

$$an^2 > r^2 \text{ et } an^2 < (r+1)^2 \text{; d'où } a > \frac{r^2}{n^2} \text{ et } a < \frac{(r+1)^2}{n^2}.$$

Extrayant la racine carrée de part et d'autre, il vient (197)

$$\sqrt{a} > \frac{r}{n} \quad \text{et} \quad \sqrt{a} < \frac{r}{n} + \frac{1}{n}.$$

On voit que la racine carrée de a ne surpasse pas $\frac{r}{n}$ de $\frac{1}{n}$; on a donc effectivement $\sqrt{a} = \frac{r}{n}$, à moins de $\frac{1}{n}$ près, comme on l'a trouvé en appliquant la règle proposée.

207. Au moyen de cette règle, on pourra toujours trouver un nombre aussi approché qu'on voudra de la racine carrée d'un nombre donné. Mais l'approximation par les décimales étant la plus importante, nous allons d'abord nous en occuper. Soit donc proposé de trouver la racine carrée de 7,451, à moins d'un millième près.

D'après la règle précédente, on multiplie 7,451 par le carré de 1000, ou par 1000000, ce qui donne 7451000 ; on extrait la racine carrée du plus grand carré contenu dans la partie entière du nombre résultant, c'est-à-dire dans 7451000, ce qui fournit 2729 ; enfin, on donne à cette racine 2729, le nombre 1000 pour dénominateur, ce qui se fait en séparant trois chiffres décimaux sur sa droite ; et l'on a ainsi $\sqrt{7,451} = 2,729$, à moins d'un millième près.

C'est ce qu'on peut d'ailleurs démontrer directement, en observant que $7,451 > (2,729)^2$ et que $7,451 < (2,730)^2$.

208. De même, si l'on veut avoir la racine carrée de $13\frac{5}{6}$, à moins d'un centième près, on multipliera $13\frac{5}{6}$ par 10000, carré de 100 ; ce qui donnera, réductions faites, $138333\frac{2}{6}$: la racine carrée de 138333 étant 371, à moins d'une unité près, il en résulte que $\sqrt{13\frac{5}{6}} = 3,71$, à moins d'un centième près.

209. En appliquant la même règle, on trouve : $\sqrt{\frac{7}{8}} = 0,9354$, à moins de 0,0001 près ; $\sqrt{7\frac{8}{11}} = 2,779$, à moins de 0,001 près ; $\sqrt{3\frac{3}{4}} = \frac{116}{60}$, à moins de $\frac{1}{60}$ près, et $\sqrt{223} = \frac{597}{40}$, à moins de $\frac{1}{40}$ près.

210. Lorsque le nombre proposé a plus de deux tranches de chiffres, on peut toujours achever l'extraction de la racine carrée par une simple division. En effet, soit k un nombre dont les n derniers chiffres de la racine carrée sont à trouver ; soit x ces n

derniers chiffres, et a ceux déjà calculés; ces chiffres calculés forment donc un nombre *a suivi de n zéros* ou $a.10^n$ (*); on a par conséquent $a.10^n+x=\sqrt{k}$. Elevant les deux membres au carré, on obtient

$$a^2.10^{2n}+2ax.10^n+x^2=k;$$

d'où en retranchant de part et d'autre $a^2.10^{2n}$ et x^2, il vient

$$2ax.10^n=k-a^2.10^{2n}-x^2.$$

Divisant enfin les deux membres par $2a.10^n$, on trouve

$$x=\frac{k-a^2.10^{2n}}{2a.10^n}-\frac{x^2}{2a.10^n}\cdots(1)$$

Puisque x a n chiffres, x est moindre que le plus petit nombre de $(n+1)$ chiffres, qui est 1 *suivi de* n *zéros* ou 10^n; on a donc $x<10^n$ et $x^2<10^{2n}$. Or, tant que a n'aura pas plus de chiffres que x, la seconde fraction du second membre de (1) pourra surpasser l'unité. Mais si a contient seulement un chiffre de plus que x, c'est-à-dire $(n+1)$ chiffres; en prenant la plus petite valeur de a, qui est le moindre nombre de $(n+1)$ chiffres ou 10^n, la seconde fraction dont il s'agit deviendra $\frac{x^2}{2.10^{2n}}$ et aura sa plus grande valeur; donc, puisque $x^2<10^{2n}$, cette seconde fraction sera toujours moindre que $\frac{1}{2}$; on aura donc toujours

$$x=\frac{k-a^2.10^{2n}}{2a.10^n},\text{ à moins de }\tfrac{1}{2}\text{ près.}$$

De là et de ce que x a moins de chiffres que a, il résulte que s'il reste à trouver moins de chiffres à la racine qu'il n'y en a de calculés, on achevera l'extraction en abaissant toutes les tranches non employées à côté du reste des premières, puis en divisant le nombre résultant $k-a^2.10^{2n}$ par le double de la racine trouvée a suivi d'autant de zéros qu'il y a de chiffres à déterminer, en poussant le quotient jusqu'aux unités seulement (**). Alors

(*) Il est clair que $100=10^2$, $1000=10^3$, $10000=10^4$, et en général, 1 *suivi de* n *zéros* $=10^n$. Multipliant a par chacune de ces expressions égales, on aura *a suivi de n zéros* $=a.10^n$.

(**) On voit par là que si la racine carrée doit avoir $2n+1$ chiffres, la valeur des n chiffres à droite du nombre proposé n'influera pas sur la valeur de la racine carrée de ce nombre. Ainsi, en s'arrêtant aux unités, la racine carrée de 7413589467281 est la même que celle de 7413589467000.

on aura la racine carrée du nombre proposé k, à moins d'une demi-unité près de l'ordre le moins élevé de cette racine.

211. Ainsi la racine carrée de 1111o8889 devant avoir cinq chiffres, on en calculera d'abord les trois premiers, suivant la règle ordinaire, ce qui donnera 333 ; puis on divisera le reste 2198889 par 66600, en poussant le quotient jusqu'aux unités, et ce quotient sera 33. De sorte que $\sqrt{1111o8889} = 33333$, à moins d'une demi-unité près. Et en effet, 33333 est exactement la racine carrée de 1111o8889. C'est ainsi qu'on trouve facilement que

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562 37 \text{ et que } \sqrt{3} = 1{,}7320508076.$$

212. *Si deux nombres, composés d'un même nombre de chiffres, ont plus de la moitié de leurs chiffres formant un même nombre vers la gauche, la demi-somme de ces deux nombres ne surpassera pas la racine carrée de leur produit d'un huitième d'unité.*

Soit a le plus petit des deux nombres proposés et d leur différence ; le plus grand sera $a + d$ et leur demi-somme $a + \frac{1}{2}d$. Or, il est clair qu'on a $(a + \frac{1}{2}d)^2 > a^2 + ad$ et $a + \frac{1}{2}d > \sqrt{a(a+d)}$: D'où l'on voit que la demi-somme des deux nombres proposés est plus grande que la racine carrée de leur produit. Soit x la différence, on aura donc

$$a + \tfrac{1}{2}d = \sqrt{a(a+d)} + x.$$

Elevant de part et d'autre au carré, et réduisant, il vient

$$\tfrac{1}{4}d^2 = 2x\sqrt{a^2 + ad} + x^2 \text{ ; d'où } 8ax < d^2.$$

Soit n le nombre des chiffres qui forment la partie non-commune des deux nombres proposés ; ces deux nombres auront donc au moins $2n + 1$ chiffres, et leur différence d n'en aura que n ; ainsi $d < 10^n$ et $d^2 < 10^{2n}$. D'ailleurs, puisque le plus petit nombre a contient au moins $2n + 1$ chiffres, on a $a > 10^{2n}$; d'où $8ax > 8x . 10^{2n}$. Or, $8ax < d^2$ et $8ax < 10^{2n}$; donc, à plus forte raison, $8x . 10^{2n} < 10^{2n}$; d'où $x < \frac{1}{8}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Le principe s'applique aussi au cas où les deux nombres proposés exprimeraient des décimales de même ordre, en prenant pour unité la partie de la moindre espèce.

Notions sur les irrationnelles et les imaginaires.

213. On appelle *quantité incommensurable*, toute quantité qui n'a point de mesure commune avec l'unité, c'est-à-dire qui ne peut jamais contenir sans reste l'une des parties égales de l'unité. Ainsi une quantité incommensurable ne saurait être ex-

primée exactement par un nombre; car tout nombre contient exactement l'une des parties égales de l'unité : cette quantité n'a donc point de *rapport* exact avec l'unité; et c'est pourquoi on l'appelle aussi *quantité irrationnelle.*

214. Tous les nombres entiers et fractionnaires ont une commune mesure avec l'unité; ils sont donc *commensurables* ou *rationnels*. Par exemple, 29 *huitièmes* est un nombre rationnel, parce que sa commune mesure avec l'unité est un huitième.

215. *On peut toujours trouver un nombre aussi approché qu'on veut a une quantité incommensurable.* Car soit p l'une des parties égales de l'unité, n le plus grand nombre entier de fois que cette partie p est contenue dans l'incommensurable a, et r le reste; on aura donc $a = np + r$. Or, la partie p peut être prise aussi petite qu'on voudra; et comme $r < p$, il en résulte que le nombre np diffère de a d'une quantité r aussi petite qu'on veut.

216. *Si la racine carrée d'un nombre entier* a, *n'est pas un nombre entier, cette racine sera incommensurable.* Car, si la racine carrée de a pouvait être une fraction irréductible $\frac{n}{d}$, on aurait successivement

$$\sqrt{a} = \frac{n}{d}, \quad a = \frac{n^2}{d^2} \quad \text{et} \quad ad = \frac{n^2}{d}.$$

Or, d est premier avec n, par hypothèse; donc d est premier avec chacun des facteurs du produit n^2; d ne divisera donc jamais ce produit (Arithmétique), et ne donnera pas le nombre entier ad au quotient. Ainsi la dernière égalité précédente est impossible; il en est donc de même de la première, c'est-à-dire que la racine carrée de a n'est pas égale à une fraction. Déjà elle n'est pas égale à un nombre entier; donc cette racine ne saurait être exprimée exactement par aucun nombre; elle est par conséquent incommensurable (213).

Ainsi $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, etc., sont des quantités incommensurables, qu'on ne saurait exprimer exactement en nombres; mais dont on peut approcher au point, que la véritable valeur numérique n'aurait aucun avantage réel sur la valeur approchée.

217. *La racine carré d'une fraction irréductible est incommensurable, dès que l'un des termes de cette fraction n'est pas un carré parfait.* Considérons, par exemple, la racine

carrée de la fraction irréductible $\frac{a}{c}$. D'abord cette racine carrée ne sera pas un nombre entier, puisque le carré d'un nombre entier ne peut jamais donner une fraction irréductible. Si cette racine carrée pouvait être une fraction irréductible $\frac{n}{d}$, on aurait

$$\sqrt{\frac{a}{c}}=\frac{n}{d};\ \text{d'où}\ \frac{a}{c}=\frac{n^2}{d^2}\ \text{et}\ a=\frac{cn^2}{d^2}.$$

Si un nombre premier p pouvait diviser n^2 et d^2, il devrait diviser aussi n et d, puisque ne divisant pas n et d, il ne diviserait pas non plus les produits n^2 et d^2 (Arithmétique) : p diviserait donc n et d, et la fraction $\frac{n}{d}$ ne serait pas irréductible, contrairement à l'hypothèse. Donc n^2 et d^2 sont premiers entre eux. Par conséquent, puisque d^2 divise le produit cn^2, il faut qu'il divise le facteur c, et il vient $c=qd^2$; d'où $a=qn^2$. Mais a et c étant premiers entre eux, n'ont d'autre facteur commun que l'unité : donc $q=1$; ce qui donne $a=n^2$ et $c=d^2$. D'où il suit que les deux termes de $\frac{a}{c}$ seraient des carrés parfaits; ce qui est contre l'hypothèse. On voit donc que la racine carrée de $\frac{a}{c}$ ne saurait être exprimée exactement par aucun nombre, et qu'ainsi elle est incommensurable.

218. *Le calcul des nombres incommensurables se fait d'après les mêmes règles que celui des nombres rationnels.* Car on ne saurait trouver que par approximation les valeurs numériques des quantités incommensurables. Or, on peut toujours concevoir que chaque nombre irrationnel soit remplacé par une fraction exacte, qui en diffère d'une quantité moindre que toute quantité donnée (215), et tellement petite, qu'on ne doive avoir aucun égard à l'erreur que l'on commet en négligeant cette petite quantité. De cette manière, les nombres incommensurables proposés ne sont plus que des nombres commensurables, qu'on doit soumettre conséquemment à toutes les règles du calcul des nombres rationnels.

219. Donc, puisqu'un produit de plusieurs facteurs commensurables quelconques, ne change pas de valeur dans quelqu'ordre qu'on multiplie (Arithmétique), la même chose aura lieu pour des facteurs irrationnels. Et il en est de même de toutes les règles établies pour le calcul des entiers et des fractions.

De là résultent plusieurs principes pour les puissances et les racines. Voyons d'abord ceux relatifs aux *carrés* et aux *racines carrées*, et rappelons-nous que, d'après la définition de ces racines, on a $(\sqrt{a})^2 = a = \sqrt{a^2}$.

220. Soit abc un produit dans lequel a, b, c, sont des nombres quelconques, rationnels ou irrationnels; d'après ce qu'on a vu (219), il est clair que

$$(abc)^2 = abcabc = aabbcc = a^2b^2c^2.$$

Comparant la première de ces expressions égales à la dernière, et réciproquement, on verra, 1° que *le carré d'un produit est égal au produit des carrés de ses facteurs;* 2° que *le produit des carrés de plusieurs nombres est égal au carré du produit de ces nombres.* Ainsi

$$(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 \text{ et } (\tfrac{4}{5})^2(\tfrac{15}{4})^2 = (\tfrac{4}{5} \times \tfrac{15}{4})^2 = 3^2.$$

221. Le dernier de ces principes et celui du n° 219 font voir que le carré de $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$ est abc; il faut donc qu'on ait

$$\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c} = \sqrt{abc}.$$

Donc, 1° *la racine carrée d'un produit est égale au produit des racines carrées de ses facteurs;* 2° *le produit des racines carrées de plusieurs nombres est égal à la racine carrée du produit de ces nombres.* Par exemple, on a

$$\sqrt{72} \times \sqrt{8} = \sqrt{(72.8)} = \sqrt{(36.16)} = 6.4 = 24.$$

222. Le second principe que l'on vient d'établir donne

$$\sqrt{\frac{a}{c}} \times \sqrt{c} = \sqrt{a}; \text{ d'où l'on tire } \sqrt{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}.$$

Ainsi, 1° *la racine carrée d'un quotient s'obtient en divisant la racine carrée du dividende par celle du diviseur;* 2° *le quotient des racines carrées des deux nombres est égal à la racine carrée du quotient de ces mêmes nombres.* Appliquant ces principes, on trouve

$$\sqrt{(25:64)} = 5:8; \quad \sqrt{96}:\sqrt{6} = \sqrt{16} = 4 \text{ et}$$
$$\sqrt{18}:\sqrt{8} = \sqrt{(18:8)} = \sqrt{(9:4)} = 3:2.$$

223. *Toute racine carrée doit être précédée du double signe* $\pm$. Car la racine carrée de 9, par exemple, est un monome qui, multiplié par lui-même, reproduit 9; or, -3×-3 donne $+9$, aussi bien que $+3 \times +3$; donc -3 est la racine

carrée de 9, aussi bien que $+3$: donc enfin $\sqrt{9} = \pm 3$. En général, si v désigne la valeur numérique de la racine carrée de a, on aura $\sqrt{a} = \pm v$.

224. *La racine carrée d'une quantité négative n'existe pas.* Car il n'y a aucun monome qui, multiplié par lui-même, donne un résultat négatif, puisque — par — donne $+$, aussi bien que $+$ par $+$ (45) : donc la racine carrée de -16 n'existe pas ou est impossible.

Ainsi $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-a}$, etc. sont des symboles algébriques, qui présentent des opérations impossibles et qu'on appelle *expressions* ou *quantités imaginaires*. Ces symboles, quoique vides de sens, se rencontrent fréquemment dans la résolution des problèmes, et y sont même très-utiles, comme signes d'absurdité, ainsi que nous le verrons dans la suite.

225. De même que les quantités négatives, les imaginaires doivent être soumises à toutes les règles du calcul des nombres; car puisque les lettres n'ont aucune valeur numérique déterminée, il est impossible de connaître d'avance si a, par exemple, est plus grand ou plus petit que b; on est donc conduit, bon gré mal gré, à raisonner et à opérer sur $\sqrt{(a-b)}$, comme si c'était toujours un nombre absolu et réel, même lorsque $a<b$, c'est-à-dire lorsque $\sqrt{(a-b)}$ est au fond une imaginaire. On voit donc qu'il faut opérer sur les imaginaires comme sur les nombres réels : autrement, on devrait toujours supposer $a>b$, dans les formules contenant $\sqrt{(a-b)}$; et l'algèbre n'aurait pas toute la généralité qui en fait le principal avantage.

Ainsi on aura $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$, et $(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1}) = a^2 - b^2(\sqrt{-1})^2 = a^2 + b^2$.

226. D'après ces résultats, considérons le produit

$$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1}) \cdots (1)$$

Si l'on multiplie entre eux les deux premiers facteurs, puis les deux derniers, le produit (1) deviendra

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

Si l'on multiplie entre eux le premier et le troisième facteurs, puis le second et le quatrième, le produit (1) prendra la forme

$$[(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}][(ac-bd)-(ad+bc)\sqrt{-1}];$$

ce produit se réduit donc à $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$. On a par conséquent l'identité

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Cette identité est exacte, comme il est facile de le vérifier, en effectuant les opérations dans les deux membres. Ainsi on voit que la convention d'opérer sur les imaginaires comme sur les quantités réelles, conduit à des résultats exacts, et que par conséquent cette convention est légitime.

227. Ce n'est d'abord qu'avec beaucoup de circonspection que les Algébristes ont opéré sur les quantités négatives et imaginaires, comme sur des nombres réels. Mais l'exactitude des résultats qu'ils ont obtenus de cette manière, et auxquels ils pouvaient parvenir par des moyens plus rigoureux, mais beaucoup plus longs, leur a prouvé qu'on peut, sans aucun inconvénient, traiter les quantités négatives et imaginaires comme de véritables nombres. C'est d'ailleurs le seul moyen de conserver aux règles et aux formules la propriété d'être générales. Or, cette propriété est extrêmement utile en algèbre; car d'abord elle dispense de recommencer, pour chaque cas particulier, les raisonnemens et les calculs, quelquefois très-compliqués, qui ont donné les règles et les formules proposées; elle rend inutile la distinction, si un nombre donné peut être plus grand ou plus petit qu'un autre; enfin elle conduit souvent à des conséquences et à des questions auxquelles peut-être n'aurait-on pas pensé.

De la racine carrée des quantités littérales.

228. D'après la multiplication des monomes, il est clair que

$$(3a^u b^v)^2 = 3a^u b^v \times 3a^u b^v = 9a^{2u} b^{2v}.$$

Ainsi *pour obtenir le carré d'un monome, il faut former le carré du coefficient numérique et doubler les exposans des autres facteurs*. C'est ainsi que $(-7a^3b^2)^2 = 49a^6b^4$.

229. Le carré d'un polynome quelconque est toujours composé du carré du premier terme, du double produit du premier terme par le second et du carré du second, du double produit des deux premiers termes par le troisième et du carré du troisième, du double produit des trois premiers termes par le quatrième et du carré du quatrième; ainsi de suite.

En effet, si l'on considère $a + b$ comme un seul terme, le carré de $a + b + c$ sera le carré d'un binome; on aura donc

$$(a+b+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=$$
$$a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2.$$

De là, en considérant $a+b+c$ comme un seul terme, on trouve

$$(a+b+c+d)^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2=$$
$$a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2.$$

On pourrait continuer ce procédé sur $(a+b+c+d+e)^2$. Mais pour établir d'une manière générale la *loi* qu'on vient d'énoncer, soit $a+b+c+d+\cdots+i+k$ un polynome composé de $m+1$ termes, et considérons les m premiers comme n'en formant qu'un seul; nous aurons évidemment

$$(a+b+c+\cdots+i+k)^2=$$
$$(a+b+c+\cdots+i)^2+2(a+b+c+\cdots+i)k+k^2.$$

Donc si la loi énoncée est vraie pour un polynome de m termes, elle sera vraie aussi pour un polynome de $m+1$ termes. Or, cette loi est démontrée pour un polynome de quatre termes; donc elle sera vraie pour un polynome de cinq termes. Etant vraie pour un polynome de cinq termes, elle sera vraie aussi pour un polynome de six termes, puis pour un de sept, de huit, et en général, d'un nombre quelconque de termes.

230. Au moyen de cette loi de formation, on obtient le carré d'un polynome beaucoup plus simplement que par la multiplication. Par ex., d'après cette loi, on trouve sur-le-champ que

$$(3a^2-2ab+4b^2)^2=$$
$$9a^4-12a^3b+4a^2b^2+24a^2b^2-16ab^3+16b^4.$$

231. Maintenant, puisque $(4a^vb^u)^2=16a^{2v}b^{2u}$, il en résulte que $\sqrt{16a^{2v}b^{2u}}=4a^vb^u$ (196). Donc, *pour avoir la racine carrée d'un monome, il faut extraire la racine carrée du coefficient numérique et prendre la moitié des exposans des lettres.* C'est ainsi qu'on aura

$$\sqrt{25a^8b^6}=5a^4b^3 \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{100a^4}{36b^8}}=\frac{10a^2}{6b^4}\ (205),$$

car chaque résultat élevé au carré reproduit le monome proposé.

232. Après avoir soustrait d'un polynome le carré des N premiers termes de sa racine carrée ordonnée, si l'on divise le premier terme du reste R aussi ordonné, par le double du pre-

mier terme de cette racine, le quotient sera le $(N+1)$ième terme de la même racine.

En effet, soit xa^m+u les N premiers termes de la racine carrée ordonnée, xa^m étant le premier, et soit v les termes suivans; cette racine sera donc $(xa^m+u)+v$; son carré, ou le polynome proposé, sera par conséquent

$$(xa^m+u)^2+2(xa^m+u)v+v^2.$$

Et puisqu'on a soustrait de ce polynome, le carré des N premiers termes de sa racine carrée, c'est-à-dire $(xa^m+u)^2$, le reste R est

$$R=2(xa^m+u)v+v^2 \text{ ou } R=(2xa^m+2u+v)v.$$

Donc le premier terme du reste R, où la lettre a a le plus haut exposant, est le produit de $2xa^m$ par le premier terme du multiplicateur v, où la lettre a a le plus haut exposant (51). Or, le premier terme de v est le $(N+1)$ième terme de la racine cherchée; donc le premier terme du reste R est le produit de $2xa^m$, double du premier terme de la racine, multiplié par le $(N+1)$ième; donc en divisant le 1er terme du reste R par le double du 1er terme de la racine, on aura le $(N+1)$ième (58).

233. D'après ce principe, il est facile de voir comment on peut extraire la racine carrée d'un polynome donné. En effet, en supposant d'abord ce polynome et sa racine carrée, tous les deux ordonnés par rapport à la même lettre a; comme ce polynome est le produit de sa racine carrée par elle-même, le premier terme de ce polynome, où la lettre a a le plus haut exposant, sera le produit du premier terme de la racine par lui-même; c'est-à-dire, sera le carré du premier terme de la racine cherchée (51). On aura donc ce premier terme de la racine, en extrayant la racine carrée du 1er terme du polynome proposé.

Soustrayant du polynome le carré du premier terme de sa racine, et divisant le premier terme du reste ordonné, par le double du premier terme de cette racine, le quotient sera le $(1+1)$ième ou le second terme (232).

Ecrivant ce second terme à côté du double du premier, multipliant le résultat par le même second terme, et soustrayant le produit du premier reste, on aura un second reste. Or, en opérant ainsi, on soustrait du premier reste, c'est-à-dire du polynome proposé, le double produit du premier terme de la racine par le second et le carré du second. Et comme déjà on a soustrait le carré du premier terme, il s'ensuit qu'on a soustrait du polynome, toutes les parties du carré, et par conséquent le carré des deux premiers termes de sa racine carrée ; donc en divisant le premier terme du second reste ordonné, par le double du premier terme de cette racine, le quotient sera le $(2+1)$ième ou le troisième terme (232).

Ecrivant ce troisième terme à côté du double des deux premiers, multipliant le résultat par ce troisième terme, et continuant comme dans le cas précédent, on aura le quatrième terme de la racine. On aura de même le cinquième, le sixième, et ainsi de suite.

234. De là résulte évidemment la règle que voici : Pour extraire la racine carrée d'un polynome, il faut, après avoir ordonné ce polynome, extraire la racine carrée de son premier terme, et cette racine sera le premier terme de la racine cherchée. Soustraire du polynome proposé le carré de ce premier terme de la racine et diviser le premier terme du reste par le double du premier terme trouvé à la racine : le quotient en sera le second terme. Après avoir écrit ce quotient à la droite du double du premier terme de la racine, on multipliera le résultat par ce quotient et l'on soustraira le produit du premier reste. On divisera de même le premier terme du second reste ordonné, par le double du premier terme de la racine, et l'on continuera le même procédé dans tout le cours de l'opération.

D'après cette règle, si l'on a le polynome $4a^4b^2 - 12a^3b^3 + 9a^2b^4 + 16a^2b^3c^3 - 24ab^4c^3 + 16b^4c^6$, on en extraira la racine carrée, en disposant l'opération comme il suit :

$$
\begin{array}{r|l}
4a^4b^2 - 12a^3b^3 + 9a^2b^4 + 16a^2b^3c^3 - 24ab^4c^3 + 16b^4c^6 & 2a^2b - 3ab^2 + 4b^2c^3. \\ \cline{2-2}
-4a^4b^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & 4a^2b - 3ab^2 \\ \cline{1-1}
-12a^3b^3 + 9a^2b^4 + 16a^2b^3c^3 - 24ab^4c^3 + 16b^4c^6 & \qquad\;\; - 3ab^2 \\ \cline{2-2}
+12a^3b^3 - 9a^2b^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & -12a^3b^3 + 9a^2b^4. \\ \cline{1-1}
+16a^2b^3c^3 - 24ab^4c^3 + 16b^4c^6 & 4a^2b - 6ab^2 + 4b^2c^3 \\
-16a^2b^3c^3 + 24ab^4c^3 - 16b^4c^6 & \qquad\qquad\qquad + 4b^2c^3 \\ \hline
0. & 16a^2b^3c^3 - 24ab^4c^3 + 16b^4c^6.
\end{array}
$$

D'où l'on voit que $2a^2b - 3ab^2 + 4b^2c^3$ est la racine carrée exacte du polynome proposé.

Il est facile d'appliquer cette méthode à l'extraction de la racine seconde du polynome $9a^6b^2 - 12a^5b^3 + 28a^4b^4 - 28a^3b^5 + 24a^2b^6 - 16ab^7 + 4b^8$.

235. L'extraction de la racine carrée d'un monome est impossible, lorsque le coefficient n'est pas un carré parfait, ou que tous les exposans ne sont pas des nombres pairs. Quant à la racine carrée d'un polynome, on ne saurait la trouver exactement, dès que le 1er terme n'est pas un carré parfait, ou dès qu'on obtient autant de termes qu'il y en a dans le polynome proposé, car celui-ci doit toujours avoir plus de termes que sa racine (229). Dans chacun de ces cas, on indique l'extraction et l'on soumet l'expression radicale résultante à toutes les règles du calcul des nombres; ce qui conduit au calcul des radicaux du 2^e degré.

Du calcul des radicaux du second degré.

236. On appelle *radical du second degré* ou *quantité radicale*, toute racine carrée indiquée au moyen du signe $\sqrt{\ }$.

Le calcul des radicaux du second degré a pour objet de transformer les expressions des inconnues, de manière que l'extraction de la racine carrée soit la dernière des opérations à effectuer pour résoudre le problème proposé.

237. On sait (221) que $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$; donc si le nombre a était un carré parfait m^2, l'expression proposée se réduirait à $m\sqrt{b}$. C'est en cela que consiste la *simplification* des radicaux du second degré; et il en résulte que

$$\sqrt{27a^3b^2c^7} = \sqrt{9a^2b^2c^6 . 3ac} = 3abc^3\sqrt{3ac}.$$

Cet exemple fait voir que, *pour simplifier un radical du second degré, lorsque cela est possible, il faut décomposer la quantité sous le radical en deux facteurs, dont l'un soit un carré parfait, et multiplier la racine carrée de ce facteur carré par la racine indiquée de l'autre facteur.*

Au moyen de cette règle, il sera facile de comprendre toutes les réductions que voici :

1° $\sqrt{\dfrac{75a^2b}{98c^3}} = \sqrt{\dfrac{25a^2}{49c^2} \cdot \dfrac{3b}{2c}} = \dfrac{5a}{7c}\sqrt{\dfrac{3b}{2c}} = \dfrac{5a}{14c^2}\sqrt{6bc}$;

2° $3a\sqrt{-16a^2} = 3a\sqrt{16a^2 \times -1} = 12a^2\sqrt{-1}$;

3° Réduisant d'abord au même dénominateur tout ce qui est

sous le radical, développant et réduisant les termes, on verra que
$$\sqrt{\frac{b(2a-b)^2}{4(a-2b)^2}-\frac{ab}{a-2b}}=\sqrt{\frac{b^3+4ab^2}{4(a-2b)^2}}=$$
$$\sqrt{\frac{b^2}{4(a-2b)^2}\cdot(b+4a)}=\frac{b}{2(a-2b)}\sqrt{b+4a}.$$

Le but de ces transformations n'est pas seulement de simplifier la quantité soumise au radical; mais aussi de rendre les expressions plus propres au calcul algébrique.

238. Les mêmes motifs portent aussi à faire entrer sous le radical, la quantité qui le multiplie : pour cela, il suffit d'élever cette quantité au carré, et de multiplier par ce carré, la quantité sous le radical. En effet, d'après ce qui précède, il est clair que
$$2a^2b\sqrt{3abc}=\sqrt{4a^4b^2}\sqrt{3abc}=\sqrt{4a^4b^2.3abc}.$$

C'est ainsi que $3a\sqrt{\frac{2b}{3a}}=\sqrt{\frac{2b}{3a}\cdot 9a^2}=\sqrt{6ab}.$

Cette transformation est utile dans les applications numériques, pour bien connaître le degré d'exactitude du résultat. Car si dans $x=120\sqrt{3}$, on extrayait la racine carrée de 3, à moins d'un cent-millième près, on ne serait pas sûr que la valeur qui en résulterait pour x, fût approchée de la véritable, à moins d'un millième d'erreur; tandis qu'en prenant $x=\sqrt{3.14400}$ $=\sqrt{43200}$, on connaîtra toujours de combien on est approché de la vraie valeur de x (206).

239. Deux radicaux du second degré sont nommés *semblables*, lorsque la quantité sous le signe radical est la même pour tous les deux. Ainsi $4a\sqrt{3ab}$ et $-2b\sqrt{3ab}$ sont deux radicaux semblables : les multiplicateurs $4a$ et $2b$ en sont les *coefficiens*.

Les radicaux $3a\sqrt{2ab^3}$ et $2b\sqrt{8a^3b}$ ne paraissent pas semblables; mais ils le deviennent en les simplifiant l'un et l'autre (237); car alors ils se réduisent respectivement à $3ab\sqrt{2ab}$ et $4ab\sqrt{2ab}$.

240. L'addition et la soustraction des radicaux ne peuvent se faire que quand ils sont semblables; alors *il suffit d'ajouter ou de soustraire leurs coefficiens et de multiplier le résultat par la quantité radicale commune.* C'est ainsi que
$$3a\sqrt{5a}+2b\sqrt{5a}-6b\sqrt{5a}=(3a-4b)\sqrt{5a}.$$

De même, $\sqrt{\frac{ab^3}{c^2}} + \frac{1}{2c}\sqrt{a^3b - 4a^2b^2 + 4ab^3} = \frac{a}{2c}\sqrt{ab}$.

241. Maintenant, puisque $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (221), il en résulte que pour multiplier entre eux plusieurs radicaux du second degré, il suffit de multiplier entre elles les quantités qui leur sont soumises, et d'affecter le produit du signe radical commun. Et si les radicaux avaient des coefficiens, il faudrait multiplier ceux-ci l'un par l'autre. D'après cette règle, on aura

$$2a\sqrt{3a} \times 3b\sqrt{6ab} = 6ab\sqrt{18a^2b} = 18a^2b\sqrt{2b}.$$

242. La même règle donne

$$\sqrt{\frac{a}{c}} \times \sqrt{c} = \sqrt{\frac{ac}{c}} = \sqrt{a}; \text{ d'où } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Donc *pour diviser deux radicaux du second degré l'un par l'autre, il suffit de prendre le quotient des quantités qui leur sont soumises, et d'affecter ce quotient du signe radical commun*. C'est ainsi qu'on aura

$6ab\sqrt{15ab} : 3b\sqrt{3b} = 2a\sqrt{5a}$ et $\sqrt{-4} : \sqrt{-2} = \sqrt{2}$.

243. La règle de la multiplication des radicaux du second degré présente une exception, lorsque ces radicaux sont imaginaires. En effet, d'après cette règle, on a $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{a^2} = \pm a$ (223). De sorte qu'il y a incertitude sur le signe dont a doit être affecté, pour former le produit demandé. Cependant le véritable produit est $-a$; car il est clair d'ailleurs que $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = (\sqrt{-a})^2 = -a$ (225).

En général, *le produit de deux radicaux imaginaires du second degré, est toujours négatif et réel*; car il est visible que

$$\sqrt{-a}\sqrt{-b} = \sqrt{a \times -1}\sqrt{b \times -1} = \sqrt{ab(-1)^2} = -\sqrt{ab}.$$

La règle de la division des radicaux présente aussi une exception lorsque le dividende étant réel, le diviseur est imaginaire; car d'après cette règle, on trouve $\sqrt{6} : \sqrt{-3} = \sqrt{-2}$, tandis qu'on doit avoir $\sqrt{6} : \sqrt{-3} = -\sqrt{-2}$.

244. Lorsque le dénominateur d'une fraction est irrationnel, il faut, pour savoir, dans les applications numériques, de combien on est approché de la vraie valeur de la fraction, rendre

Des équations du second degré.

247. On sait qu'une équation est du second degré, lorsque le terme qui a le plus de facteurs inconnus, en contient deux (95).

Une équation du second degré à une inconnue est *incomplète* ou à *deux termes*, lorsqu'elle ne renferme que le carré de l'inconnue, avec des nombres donnés ; elle est *complète* ou à *trois termes*, quand elle contient les deux premières puissances de l'inconnue : $2x^2+3=5x^2-9$ est une équation incomplète, et $5x^2-4=3x$ est une équation complète.

248. Considérons d'abord une équation incomplète en x. Il est clair que si l'on remplaçait x^2 par u, cette équation serait du premier degré en u ; ainsi on pourra toujours résoudre l'équation proposée par rapport à x^2, comme si elle était du premier degré ; ce qui donnera un résultat de la forme $x^2=a$.

On voit que x est la racine carrée de a (196) : et comme toute racine carrée doit être précédée du double signe $\pm$, il s'ensuit que $x=\pm\sqrt{a}$.

Il suit de là que pour résoudre une équation incomplète du second degré, il faut la transformer en une autre, où le carré de l'inconnue soit seul et positif dans le premier membre, puis égaler cette inconnue à plus ou moins la racine carrée du second.

D'après cette règle, si l'on a l'équation

$$\frac{x^2}{3}+2=\frac{3x^2}{5}-58, \text{ on en déduira } x=\pm 5.$$

De même, on tire de l'équation

$$\frac{acx^2}{4b^2}-\frac{a^2}{3c}+2b=\frac{c^2x^2}{3b}+\frac{3b^2c}{a^2},\quad x=\pm\frac{2a^2b-6b^2c}{ac\sqrt{3a-4bc}}.$$

249. Si l'on extrait les racines carrées des deux membres de l'équation $x^2=a$, ces deux racines seront nécessairement égales : et comme toute racine carrée doit avoir le double signe $\pm$, on aura $\pm x=\pm\sqrt{a}$; ce qui donne, on combinant les signes,

$$+x=+\sqrt{a},\quad +x=-\sqrt{a},$$
$$-x=-\sqrt{a},\quad -x=+\sqrt{a}.$$

Changeant les signes des deux membres, dans les deux dernières valeurs, elles deviennent les deux premières (91); donc les quatre valeurs se réduisent à ces deux premières, c'est-à-dire à $x = \pm \sqrt{a}$. Ainsi, *quand on extrait la racine carrée des deux membres d'une équation, on ne doit donner le double signe* $\pm$ *qu'à la racine carrée du second membre;* car on n'aurait rien de plus en donnant aussi le double signe $\pm$ à la racine carrée du premier, comme on vient de le voir.

250. *Une équation complète du second degré peut toujours être ramenée à la forme* $x^2 + nx = p$.

Il suffit pour cela, de faire disparaître les dénominateurs, de transposer et réduire les termes, de dégager x^2 de son multiplicateur, de rendre x^2 positif, s'il se trouvait négatif, de représenter par n le coefficient de x, et par p l'ensemble des nombres connus du second membre. Et comme ces diverses transformations ne détruisent pas l'égalité des deux membres, l'inconnue x ne change pas de valeurs pour maintenir cette égalité; les valeurs de x dans l'équation résultante $x^2 + nx = p$, sont donc les mêmes que dans l'équation proposée.

Par exemple, soit l'équation

$$\frac{2x}{x-5} - 7 = \frac{2}{7-x} + 3;$$

on en déduit, en faisant disparaître les dénominateurs,

$$14x - 2x^2 - 84x + 245 + 7x^2 = 2x - 10 + 36x - 105 - 3x^2;$$

en transposant et réduisant les termes,

$$8x^2 - 108x = -360;$$

enfin, en dégageant x^2 de son multiplicateur 8; ce qui se fait en divisant les deux membres par 8,

$$x^2 - \frac{108}{8}x = -\frac{360}{8}.$$

Cette équation est effectivement de la forme $x^2 + nx = p$.

251. Voyons maintenant comment on peut résoudre les équations complètes du second degré, ramenées à la forme

$$x^2 + nx = p, \ldots (1)$$

n et p étant deux nombres quelconques, positifs ou négatifs.

D'abord, si l'on compare le premier membre $x^2 + nx$ au carré d'un binome dont x serait le premier terme, on verra que x^2 est le carré du premier terme x de ce binome; et que $+nx$

est le produit du premier terme x par le double du second ; ce second vaut par conséquent $+\frac{1}{2}n$. Or, le carré de $x+\frac{1}{2}n$ est $x^2+nx+\frac{1}{4}n^2$. Ainsi, on voit qu'en ajoutant $\frac{1}{4}n^2$ aux deux membres de l'équation proposée, le premier sera le carré exact de $x+\frac{1}{2}n$; on aura donc

$$(x+\tfrac{1}{2}n)^2=p+\tfrac{1}{4}n^2.$$

Extrayant les racines carrées des deux membres, et observant que celle du second doit seule être précédée du double signe $\pm$, il viendra

$$x+\tfrac{1}{2}n=\pm\sqrt{p+\tfrac{1}{4}n^2} \ldots (2) \; (*)$$

Transposant $\frac{1}{2}n$, on trouve enfin

$$x=-\tfrac{1}{2}n\pm\sqrt{p+\tfrac{1}{4}n^2}.$$

Comparant cette formule à l'équation (1), on verra que, pour résoudre une équation complète du second degré, ramenée à la forme $x^2+nx=p$, il faut égaler l'inconnue x à la moitié du coëfficient n du second terme nx, pris en signe contraire, plus ou moins la racine carrée du résultat qu'on trouve en ajoutant au second membre p le carré de cette même moitié.

D'après cette règle, l'équation $x^2-4x=5$ donne sur-le-champ

$$x=+2\pm\sqrt{5+4}=2\pm\sqrt{9}=2\pm3;$$

d'où résultent $x=5$ et $x=-1$. Et en effet, chacune de ces valeurs réduit l'équation proposée à $5=5$.

La même règle appliquée à l'équation

$$x^2-\frac{108}{8}x=-\frac{360}{8},$$

fournit

$$x=\frac{54}{8}\pm\sqrt{-\frac{360}{8}+\frac{2916}{64}}.$$

Réduisant les fractions sous le radical au même dénominateur

(*) Si l'on extrait la racine carrée du premier membre de l'équation (1), on trouvera $x+\frac{1}{2}n$ pour racine, et $-\frac{1}{4}n^2$ pour reste ; de sorte que si l'on avait d'abord ajouté $\frac{1}{4}n^2$ aux deux membres de l'équation (1), $+\frac{1}{4}n^2$ et $-\frac{1}{4}n^2$ se seraient détruits dans l'extraction de la racine carrée du premier membre de la nouvelle équation ; et cette racine aurait été $x+\frac{1}{2}n$ exactement. Et comme la racine du second membre doit seule avoir le double signe, il en résulte l'équation (2) du texte. Ce procédé peut servir à abaisser au second degré, quelques équations du quatrième, comme on le verra plus bas.

64; effectuant la soustraction des deux nouvelles fractions, et extrayant la racine carrée du reste $\frac{36}{64}$, on aura

$$x=\frac{54}{8}\pm\frac{6}{8};\ \text{d'où}\ x=\frac{60}{8}=7\tfrac{1}{2}\ \text{et}\ x=\frac{48}{8}=6.$$

252. Soit à résoudre l'équation littérale

$$\frac{x^2}{b}+\frac{2bx}{a}+a=\frac{x^2}{a}+\frac{2ax}{b}+b;$$

Cette équation devient successivement

$$ax^2+2b^2x+a^2b=bx^2+2a^2x+ab^2,$$
$$(a-b)x^2-2(a^2-b^2)x=-ab(a-b),$$
$$x^2-2(a+b)x=-ab,$$
$$\text{et}\ x=a+b\pm\sqrt{a^2+b^2+ab}.$$

253. Au moyen de la méthode précédente, il sera facile de résoudre les équations que voici :

$$\frac{3x}{x-3}+2=\frac{x-24}{10-x};\ \frac{x^2}{12}-\frac{7x}{8}+\frac{1}{4}=\frac{x^2}{15}-\frac{7x}{10}+10;$$
$$a^2x^2=2a(a+b)x-(a-b)^2;\ x(a-x)+2a^2=9ab-9b^2;$$
$$\frac{x+4}{x-4}-1=\frac{6x-20}{x+2};\ \frac{x^2}{4}-\frac{5x}{6}+1=\frac{2x^2}{9}-\frac{x}{2};$$
$$\frac{x^2}{b}+\frac{2bx}{a}+a=\frac{x^2}{a}+\frac{2ax}{b}+b;\ \frac{(x+a)^2}{(x-b)^2}=ab,\ \text{et enfin}$$
$$\frac{2(a+b)x}{a-b}+\frac{ax^2}{a+b}=\frac{bx^2}{a-b}-\frac{2abx^2}{a^2-b^2}-1.$$

254. Lorsque l'inconnue entre sous un radical du second degré, il faut d'abord faire disparaître ce radical, en le laissant seul dans un membre, puis en élevant au carré de part et d'autre. D'après cela, l'équation $2x-3\sqrt{x}=2$, devient successivement : $2x-2=3\sqrt{x}$, $4x^2-8x+4=9x$ et $x^2-\frac{17}{4}x=-1$; d'où $x=4$ et $x=\frac{1}{4}$.

La première valeur satisfait à l'équation proposée ; mais la seconde n'y satisfait pas : elle résout l'équation $2x+3\sqrt{x}=2$. Cela vient de ce que cette équation et la proposée donnent une même équation sans radical. Voici encore trois équations :

$$3x-2\sqrt{8-x}=8,\ x=c^2+2a\sqrt{x-a^2},$$
$$1+\sqrt{(x^2+3x-2)}=\sqrt{(x^2+4x+4)}.$$

On ferait aussi disparaître un radical en l'égalant à une nouvelle inconnue. C'est même le moyen le plus simple de résoudre l'équation proposée, lorsque l'inconnue est au premier degré sous le radical. Ainsi dans l'équation

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x^2+9x-34}=x+4,$$

on fera $\sqrt{x+4}=u$; d'où $x=u^2-4$.

255. Si l'on a deux équations à deux inconnues, l'une du premier degré et l'autre du second, on prendra, dans la première, la valeur d'une inconnue, et l'on substituera cette valeur dans l'autre équation; ce qui donnera une équation du second degré. C'est ainsi qu'on résoudra chacun des deux systèmes d'équations :

$$3x-2y=6 \text{ et } x^2-3xy+2y^2-y+5=0,$$
$$y+ax=b-ac \text{ et } x^2+y^2=b^2+c^2.$$

Le dernier fournit des valeurs rationnelles à x et à y, aussi bien que le premier.

256. Lorsque les deux équations contiennent chacune les carrés des deux inconnues, il faut en éliminer le carré de l'une d'elles, puis prendre la valeur de cette inconnue dans l'équation résultante, et substituer cette valeur dans l'une des équations proposées. Par exemple, soient les deux équations

$$x^2+y^2=axy \text{ et } x^2-y^2=b:$$

Ajoutant ces deux équations, et prenant la valeur de y dans l'équation résultante $2x^2=axy+b$, cette valeur, substituée dans la seconde équation proposée, donnera

$$(a^2-4)x^4-(a^2-4)bx^2=-b^2.$$

Cette équation du quatrième degré, se résout comme celles du second, en prenant x^2 pour inconnue, ou bien en posant $x^2=u$ et $x^4=u^2$. On pourra faire $a=2\frac{1}{6}$ et $b=-5$.

Voici deux groupes d'équations à résoudre :

$$c^2x^2=b^2+y^2 \text{ et } x^2=b^2+(y-a)^2,$$
$$x^2+y^2=22 \text{ et } xy=7.$$

257. Si l'on résout par substitution les deux dernières équations, on aura $x=\pm\sqrt{11\pm6\sqrt{2}}$,

expression qui, d'après ce qu'on a vu précédemment (246), se réduit à

$$x = \pm(3 \pm \sqrt{2}).$$

On obtient cette dernière valeur en résolvant les équations proposées par addition et soustraction.

258. Considérons les deux équations

$$ax = by - y^2 \quad \text{et} \quad x^2 = b^2 + 2by - 2y^2.$$

Si l'on prend la valeur de x dans la première, et qu'on substitue cette valeur dans la seconde équation, il viendra

$$y^4 - 2by^3 + (2a^2 + b^2)y^2 - 2a^2by = a^2b^2.$$

Cette équation finale du quatrième degré est *complète*, et nous ne pouvons la résoudre, d'après ce qui précède, qu'en la ramenant au second degré. Or pour cela, le moyen qui s'offre d'abord, est d'extraire la racine carrée du premier membre; ce qui donnera $y^2 - by + a^2$ pour racine, et $-a^4$ pour reste. Si donc on ajoute a^4 aux deux membres de l'équation finale; $+a^4$ et $-a^4$ se détruiront dans l'extraction de la racine carrée du premier membre de la nouvelle équation, et cette racine sera exactement $y^2 - by + a^2$: d'ailleurs celle du second membre $a^2b^2 + a^4$ se réduit à $a\sqrt{a^2 + b^2}$; on a par conséquent

$$y^2 - by + a^2 = \pm a\sqrt{a^2 + b^2},$$

équation du second degré, qu'on sait résoudre.

On parviendrait immédiatement à une équation finale du second degré en x, en soustrayant le double de la première équation proposée de la seconde. On peut faire $a = 3$ et $b = 4$.

259. On simplifie quelquefois la résolution des équations proposées par la manière dont on opère l'élimination. Considérons, par exemple, les deux équations

$$x^2 - y = a(xy - 1),$$
$$y^2 - x = b(xy - 1).$$

Ajoutant la seconde à la première multipliée par y, et la première à la seconde multipliée par x, nous aurons

$$x^2y - x = (xy - 1)(ay + b), \text{ ou } (xy - 1)(ay + b - x) = 0,$$
$$xy^2 - y = (xy - 1)(bx + a), \text{ ou } (xy - 1)(bx + a - y) = 0.$$

Ces deux équations sont satisfaites par $xy - 1 = 0$, ou bien par $ay + b - x = 0$ et $bx + a - y = 0$. Ces dernières équations donnent à x et à y, des valeurs qui satisfont effectivement aux deux équations proposées. Quant à l'équation $xy - 1 = 0$, ou $xy = 1$, elle réduit les deux proposées à $x^2 - y = 0$ et $y^2 - x = 0$. L'élimination de y, entre ces deux équations, donne $x(x^3 - 1) = 0$; d'où l'on tire d'abord $x = 0$ et $y = 0$. Mais ces valeurs ne conviennent pas aux équations proposées. On a aussi $x^3 - 1 = 0$, ou bien, en décomposant en facteurs, $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$; de là résulte d'abord $x = 1$, d'où $y = 1$, valeurs qui satisfont aux équations proposées : il vient ensuite $x^2 + x + 1 = 0$. Cette équation et $x^2 - y = 0$, donnent à x et à y, des valeurs imaginaires, qui ne peuvent résoudre aucun problème (224), mais qui conviennent d'ailleurs aux équations proposées.

Si l'on avait pris la valeur de y dans la première équation proposée, et qu'on eût substitué cette valeur dans la seconde équation, on aurait eu, en posant $p = \frac{a^2 + b}{ab - 1}$,

$$x^4 + px^3 - x - p = 0, \quad \text{ou} \quad (x + p)(x^3 - 1) = 0.$$

Cette méthode conduit aux mêmes valeurs que la première; mais elle exige plus de calculs. En général, l'élimination par addition et soustraction doit être préférée, et devient indispensable pour abaisser au second degré les équations $x^4 + y^4 = 97$ et $xy = 6$. [Voyez les Mélanges d'algèbre, pour les équations résolubles comme celles du second degré, pages 38 et suivantes.]

Problèmes du second degré.

260. *Des voyageurs louent une voiture pour* 175 *francs. Arrivés à leur destination, deux d'entre eux s'échappent sans payer, et augmentent par leur fuite, de* 10 *fr. ce que chacun des autres voyageurs avait à payer avant. Combien y avait-il d'abord de voyageurs ?*

Soit x le nombre de voyageurs cherché : Il est clair que chacun avait à payer d'abord $\frac{175}{x}$ de franc. Mais puisque deux d'entre eux s'échappent sans payer, il n'en reste plus que $x - 2$ pour acquitter le prix 175 francs; donc alors chacun donne $\frac{175}{x-2}$ de franc. Mais alors chacun donne 10 fr. de plus qu'auparavant; donc on a l'équation :

$$\frac{175}{x-2}=\frac{175}{x}+10.$$

Cette équation peut se simplifier en divisant ses deux membres par 5; et on en tire, en la résolvant (251),

$$x=7 \text{ et } x=-5.$$

La valeur positive résout le problème proposé; car 7 voyageurs payant 175 francs, chacun donne le septième de 175 fr. ou 25 fr. Mais deux s'échappent sans payer; il n'en reste donc plus que cinq pour acquitter les 175 fr.; chacun donnera donc 35 fr., c'est-à-dire 10 fr. de plus qu'auparavant, comme l'exige le problème proposé.

Quant à la valeur négative $x=-5$, comme un nombre de voyageurs ne saurait être pris en *sens contraire*, il faut, pour trouver l'énoncé du problème résolu par cette valeur, substituer $-x$ à x dans l'équation proposée (159); ce qui donnera

$$\frac{175}{-x-2}=\frac{175}{-x}+10; \quad -\frac{175}{x+2}=-\frac{175}{x}+10; \text{ puis (91)}$$

$$\frac{175}{x+2}=\frac{175}{x}-10.$$

Voilà l'équation du problème résolu par la valeur 5, trouvée avec le signe —. Comparant cette équation à la proposée, on verra que le nouveau problème dont il s'agit est celui-ci : *Des voyageurs louent une voiture pour* 175 *francs. Ils rencontrent en route deux personnes, qu'ils y admettent, à condition qu'elles paieront comme eux; alors chaque voyageur paye* 10$^{\text{fr}}$ *de moins qu'auparavant. Combien y en avait-il d'abord?*

On voit que dans ce problème nouveau l'inconnue x n'est pas prise en sens contraire, mais bien les nombres 2 et 10. Si l'on résolvait ce nouveau problème, on trouverait $x=5$ et $x=-7$; et la valeur négative 7, qui ne résout pas le nouveau problème, résout le proposé.

261. *On a employé deux ouvriers gagnant des salaires différens : le premier ayant été payé après un certain nombre de jours de travail, a reçu* 48 *fr.; et le second ayant travaillé deux jours de moins, n'a reçu que* 20 *fr. Si le premier avait travaillé* 4 *jours de moins, et le second* 6 *jours de plus, ils auraient reçu tous les deux la même somme. On demande combien de jours chacun a travaillé et le prix de sa journée.*

Soit x le nombre de jours de travail du premier ouvrier, et y celui du second. Le gain journalier du premier ouvrier sera donc $\frac{48}{x}$ et celui du second $\frac{20}{y}$. Si le premier ouvrier avait travaillé 4 jours de moins, et le second 6 jours de plus, ils auraient reçu respectivement

$$\frac{48(x-4)}{y} \quad \text{et} \quad \frac{20(y+6)}{y}.$$

Mais alors ils auraient reçu tous les deux la même somme; et le second ouvrier a d'ailleurs travaillé 2 jours de moins que le premier; on a donc les deux équations

$$y = x - 2 \quad \text{et} \quad \frac{48(x-4)}{x} = \frac{20(y+6)}{y}.$$

Ces équations fournissent $x = 12$ et $y = 10$; $x = \frac{8}{7}$ et $y = -\frac{6}{7}$.

Le premier couple de valeurs résout le problème proposé, et donne 4 fr. et 2 fr. pour les gains journaliers des deux ouvriers. Quant au second couple, puisque la valeur de y est négative, elle résout le problème que donnent les équations proposées en y changeant y en $-y$ (151). Or, par ce changement, ces deux équations deviennent d'abord

$$-y = x - 2, \quad \frac{48(x-4)}{x} = \frac{20(6-y)}{-y};$$

ensuite, comme $x-4$ et $x-2$ sont négatifs et égaux à $-(4-x)$ et à $-(2-x)$, ces deux équations se changent en celles-ci:

$$-y = -(2-x), \quad \frac{-48(4-x)}{x} = \frac{20(6-y)}{-y};$$

et deviennent enfin, en changeant les signes des deux membres,

$$y = 2 - x \quad \text{et} \quad \frac{48(4-x)}{x} = \frac{20(6-y)}{y}.$$

Comparant ces deux équations aux deux proposées, on verra que le problème résolu par les deux valeurs $x = \frac{8}{7}$ et $y = \frac{6}{7}$, est celui-ci: *On a employé deux ouvriers gagnant des salaires différens: le premier a été payé au bout d'un certain nombre de jours de travail, et a reçu 48 fr.; le second ayant travaillé 2 jours moins les jours du travail du premier, n'a reçu que 20 fr. Si le premier ouvrier avait travaillé 4 jours moins les jours de son premier travail, et le second 6 jours moins les* *jours de son premier travail, ils auraient reçu tous les deux la même somme. On demande combien de jours chacun a travaillé, et le prix de sa journée.*

On pourrait résoudre le problème proposé en n'employant qu'une inconnue; mais alors il serait impossible de trouver le problème résolu par la valeur négative. Généralement, l'interprétation des valeurs négatives devient plus facile, lorsque toutes les inconnues sont en évidence. Si donc, dans le problème proposé, on désigne par x' et y' les gains journaliers des deux ouvriers, on aura les quatre équations $xx'=48$, $yy'=20$, $y=x-2$ et $x'(x-4)=y'(y+6)$, dans lesquelles il devient aisé d'interpréter les valeurs négatives de y et y'. Et l'on peut remarquer que, dans le nouveau problème, y' n'est pas pris en *sens contraire*; mais cela tient à ce qu'au fond y' n'a pas changé de signe.

262. *Un laboureur ayant semé* 3 *mesures de blé, en a recueilli une quantité inconnue* x; *ayant semé cette quantité et* 4 *mesures de plus, la seconde année, il a récolté* 6 *mesures de moins que la semence de cette année. Combien le laboureur a-t-il récolté la première année, sachant que les récoltes ont été proportionnelles aux semences?*

Cet énoncé conduit évidemment à la proportion

$$3 : x :: x+4 : x+4-6.$$

Cette proportion fournit l'équation du second degré $x^2+(4-3)x=3(4-6)$, de laquelle on tire, en indiquant d'abord les opérations, afin de mieux voir comment l'inconnue se compose des nombres donnés,

$$x=-\frac{4-3}{2}\pm\sqrt{\frac{(4-3)^2}{4}+3(4-6)};$$

d'où $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-23}$. Ces valeurs étant imaginaires ou impossibles (224), il en est de même du problème proposé.

Effectivement, les récoltes ayant été proportionnelles aux semences, et la semence $x+4$ de la seconde année étant plus grande que celle 3 de la première, quel que soit le nombre x, il s'ensuit que la récolte $x+4-6$ de la seconde année devrait être plus grande que la récolte x de la première. Or, au contraire, elle est plus petite; le problème est donc impossible.

En général, lorsqu'on tente de résoudre un problème, on ne sait pas d'abord si ce problème est possible ou absurde ; on est donc obligé d'exprimer algébriquement toutes les conditions de la question, quoiqu'il y en ait peut-être qui se contredisent sans qu'on s'en aperçoive ; et si après avoir examiné tout ce qui peut conduire à la solution, on arrive à une valeur infinie, négative ou imaginaire, on peut en conclure avec certitude que le problème proposé est absurde, et que par conséquent ce problème est résolu.

De même que les valeurs négatives, les expressions imaginaires conduisent à résoudre de nouveaux problèmes, sans qu'on ait à recommencer les calculs et les raisonnemens qui ont fourni ces expressions. Il suffit pour cela, de rendre positive la quantité sous le radical, en y changeant le signe de l'un des nombres qui la composent. Or, si dans l'exemple qui nous occupe, on change 6 en -6, la proportion et l'expression qu'elle a donnée deviendront $3 : x :: x+4 : x+4+6$ et

$$x = -\frac{4-3}{2} \pm \sqrt{\frac{(4-3)^2}{4} + 3(4+6)};$$

d'où $x = 5$ et $x = -6$.

Il est clair que la valeur 5 résout le problème que voici : *Un laboureur ayant semé* 3 *mesures de blé, en a recueilli une quantité inconnue* x ; *ayant semé cette quantité et* 4 *mesures de plus, la seconde année, il a récolté* 6 *mesures de plus que la semence de cette année. Combien a-t-il récolté la première année, sachant que les récoltes ont été proportionnelles aux semences ?*

A l'égard de la valeur négative $x = -6$, en changeant x en $-x$, la proportion précédente peut se mettre sous la forme

$$3 : x :: x-4 : 6-(x-4);$$

le problème résolu par $x = 6$ est donc : *Un laboureur ayant semé* 3 *mesures de blé, en a recueilli une quantité inconnue* x ; *ayant semé cette quantité moins* 4 *mesures, la seconde année, il a récolté* 6 *mesures moins la semence de cette année. Combien a-t-il récolté la première année, sachant que les récoltes ont été proportionnelles aux semences ?*

Le radical imaginaire deviendrait encore réel, si on y changeait, 1° 3 en -3 ; 2° 3 et 4 en -3 et -4 ; 3° 4 et 6 en -4 et -6. Dans le premier cas, la proportion devient $3 : x$

$:: x+4 : 6-(x+4)$, pour la valeur positive de x, et $3 : x :: 4-x : 6-(4-x)$, pour la valeur négative ; dans le second cas, il vient, pour la valeur positive de x, $3 : x :: x-4 : 6-(x-4)$, et pour la valeur négative, $3 : x :: x+4 : x+4+6$; enfin dans le troisième cas, on a $3 : x :: x-4 : x-4+6$, pour la valeur positive, et $3 : x :: x+4 : 6-(x+4)$, pour la valeur négative. Il est facile d'énoncer les problèmes résolus dans ces diverses circonstances.

263. Voici encore plusieurs problèmes où les élèves pourront s'exercer à énoncer les questions résolues par les valeurs négatives et imaginaires :

Un particulier achète une ferme ; il la revend ensuite pour 4160 fr., et gagne autant pour 100 du prix de l'achat qu'il est marqué par la millième partie de ce prix. Quel est-il? (R. 4000 fr. ou — 10400.)

Une personne emploie un certain nombre d'ouvriers, auxquels elle paye 320 fr. ; elle emploie cinq ouvriers de plus, mais donne 2 fr. de moins à chacun de ceux qu'elle fait travailler, et alors elle paye en tout 270 fr. Combien y avait-il d'abord d'ouvriers? (R. 40 ou — 20.)

Quel est le nombre dont le double moins le carré donne 3? (R. Imaginaire.)

Par quel nombre faut-il diviser 20, pour que le diviseur augmenté du quotient, donne 8? (R. Imaginaire.)

Un marchand achète un certain nombre de pièces de drap pour 162 louis. Il y a trois qualités différentes, mais le même nombre de chaque sorte. Chaque pièce de la première espèce coûte autant de louis qu'il y a de pièces de cette espèce ; une de la seconde revient à 3 louis de moins, et une de la troisième vaut la moitié d'une de la seconde. Combien y a-t-il de pièces de chaque espèce? (R. 9 ou — 7,2.)

Le produit de deux nombres est 16, et si on ajoute chacun à 6, le produit des deux sommes sera 88. Quels sont ces deux nombres? (R. Imaginaires.)

Deux marchands partent au même instant de leur endroit pour aller au marché, à 6 milles de là. Le premier fait par heure un mille de plus que l'autre, et arrive une heure avant lui. Combien de milles chacun a-t-il fait par heure? (R. Le premier 3 ou — 2 et le second 2 ou — 3.)

Un homme place 7000^f à intérêts composés, et au bout de deux ans on lui doit une somme telle, qu'en l'ajoutant aux intérêts de la première année, on obtient 9170^f pour résultat. A combien pour 100 l'argent était-il placé? (R. à 10 ou à — 310.)

Deux négocians ont vendu l'un 26 et l'autre 24 aunes d'étoffe. Le premier a donné une aune de moins pour 30^f que le second, et il a reçu 36^f de plus que ce second. Combien chacun a-t-il vendu d'aunes pour 30^f? (R. Le premier 5 ou — 4 et le second 6 ou — 3.)

De la discussion des racines dans les équations du second degré à une inconnue.

264. Les valeurs de l'inconnue, dans une équation du second degré, ne s'obtenant que par une extraction de racine carrée, sont appelées *racines* de cette équation. En général, on appelle *racine* d'une équation, toute valeur qui, mise à la place de l'inconnue, rend le premier membre égal au second.

265. Voyons d'abord comment on peut connaître, à la seule inspection des coefficiens d'une équation du second degré, de quelle nature seront les racines de cette équation. Il est clair que, quelle que soit l'équation proposée, on peut toujours, sans changer les valeurs de l'inconnue, la ramener à l'une des quatre formes que voici :

$x^2+nx=p$; d'où $x=-\frac{1}{2}n\pm\sqrt{(\frac{1}{4}n^2+p)}$;
$x^2-nx=p$; d'où $x=\frac{1}{2}n\pm\sqrt{(\frac{1}{4}n^2+p)}$;
$x^2+nx=-p$; d'où $x=-\frac{1}{2}n\pm\sqrt{(\frac{1}{4}n^2-p)}$;
$x^2-nx=-p$, d'où $x=\frac{1}{2}n\pm\sqrt{(\frac{1}{4}n^2-p)}$.

Dans les deux premières de ces équations, x aura toujours une valeur positive et une valeur négative réelle; car puisque $\frac{1}{4}n^2<\frac{1}{4}n^2+p$, on aura toujours $\frac{1}{2}n<\sqrt{(\frac{1}{4}n^2+p)}$; donc les signes des valeurs de x seront toujours ceux du radical, c'est-à-dire seront toujours $+$ pour une valeur et $-$ pour l'autre. De plus, on voit que ces deux valeurs seront toujours réelles; car la quantité sous le radical sera toujours positive.

Dans la troisième équation les deux valeurs de x seront toujours négatives, et dans la quatrième, toujours positives; car puisque $\frac{1}{4}n^2>\frac{1}{4}n^2-p$, il s'ensuit que $\frac{1}{2}n>\sqrt{(\frac{1}{4}n^2-p)}$; donc les signes des deux valeurs de x seront toujours ceux de $\frac{1}{2}n$; c'est-à-dire seront toujours $-$ dans la troisième équation, et $+$ dans la quatrième.

Dans les équations $x^2+nx=-p$ et $x^2-nx=-p$, les deux valeurs de x seront imaginaires, si $\frac{1}{4}n^2<p$; car alors la quantité $\frac{1}{4}n^2-p$, soumise au radical, sera négative. Dans les mêmes équations, les deux valeurs de x seront *égales*, c'est-à-dire, se réduiront à une seule $-\frac{1}{2}n$ ou $+\frac{1}{2}n$, si $\frac{1}{4}n^2=p$; car alors la quantité $\frac{1}{4}n^2-p$, soumise au radical, deviendra zéro. On peut observer que, dans le cas de $\frac{1}{4}n^2=p$, les deux

équations $x^2+nx=-p$ et $x^2-nx=-p$, deviennent respectivement $(x+\frac{1}{2}n)^2=0$ et $(x-\frac{1}{2}n)^2=0$.

Résumant tout ce qui vient d'être dit, on en conclura 1° que les racines des équations de la forme $x^2+nx=p$ et $x^2-nx=p$, seront toujours réelles, l'une positive et l'autre négative;

2° Que les racines des équations de la forme $x^2+nx=-p$, seront toujours négatives; réelles si $\frac{1}{4}n^2>p$, égales si $\frac{1}{4}n^2=p$, et imaginaires si $\frac{1}{4}n^2<p$;

3° Que les racines des équations de la forme $x^2-nx=-p$, seront toujours positives; réelles si $\frac{1}{4}n^2>p$, égales si $\frac{1}{4}n^2=p$, et imaginaires si $\frac{1}{4}n^2<p$.

266. Prenons maintenant une équation du second degré, plus générale, et observons d'abord que, quelle que soit cette équation, on peut toujours, en chassant les dénominateurs et en transposant, la ramener à la forme $ax^2+bx+c=0$. Or, résolvons cette équation, et soient x', x'', ses deux racines; nous aurons successivement :

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0;\ \ldots(1)$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}};$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a};\ \ldots(2)$$

$$\left.\begin{aligned}x'&=\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\\ x''&=\frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\end{aligned}\right\}\ldots(3)$$

Si a et c sont de même signe, les deux valeurs de x seront réelles, tant qu'on aura $b^2>4ac$; elles seront égales si $b^2=4ac$; mais si $b^2<4ac$, elles seront imaginaires, et par suite, le problème proposé sera impossible.

Or, dans ce cas même, si l'une des quantités a ou c pouvait changer de signe, les deux valeurs de x deviendraient réelles, et résoudraient par conséquent un problème. Mais si l'on change le signe de a, c'est-à-dire, si l'on substitue $-a$ au lieu de a, l'équation et la formule proposées deviendront

$$ax^2-bx-c=0 \text{ et } x=\frac{1}{2a}\left(b\pm\sqrt{b^2+4ac}\right).$$

Ainsi en traduisant la nouvelle équation en langage ordinaire, on aura l'énoncé du problème résolu par les nouvelles valeurs de x.

De même, si l'on change c en $-c$, et qu'on traduise la nouvelle équation en langage ordinaire, on aura l'énoncé d'un troisième problème résolu par les nouvelles valeurs de x.

On voit donc que quand un radical est imaginaire, si l'on change le signe de la quantité qui lui est soumise, en donnant le signe $-$ à l'une a des lettres qui composent cette quantité; la nouvelle formule résoudra le problème qu'on trouve en changeant a en $-a$, dans les équations proposées, et en traduisant les nouvelles équations en langage ordinaire. Et cette manière d'interpréter les racines imaginaires, n'est qu'une extension de l'interprétation des valeurs négatives (151).

267. Lorsque $c=0$ les deux valeurs de x deviennent $x'=0$, et $x''=-\frac{b}{a}$, comme cela doit être. Mais si $a=0$, les deux valeurs de x sont $x'=\frac{0}{0}$ et $x''=-\infty$. Or, x ne doit pas avoir de valeur indéterminée, puisqu'en faisant $a=0$ dans l'équation $ax^2+bx+c=0$, on trouve seulement $x=-\frac{c}{b}$. Il faut donc que la résolution de cette équation ait introduit un facteur étranger, devenant nul lorsque $a=0$ (163).

Pour trouver ce facteur commun, il suffit de multiplier les deux termes de la formule générale (2), par le résultat que donne le numérateur, en y changeant le signe du radical. En effet, en multipliant les deux termes de la formule proposée (2) par $-b\mp\sqrt{(b^2-4ac)}$, le nouveau numérateur sera nécessairement $b^2-[\sqrt{(b^2-4ac)}]^2$ ou b^2-b^2+4ac, ou enfin $4ac$; ce nouveau numérateur et le nouveau dénominateur auront donc le facteur $2a$ commun, facteur qui s'évanouit dès que $a=0$. Supprimant ce facteur commun, la formule sera

$$x=\frac{2c}{-b\mp\sqrt{(b^2-4ac)}}.$$

La supposition de $a=0$ dans cette formule, ne donne plus $x=\frac{0}{0}$; mais elle conduit à $x=-\frac{c}{b}$ et à $x=\infty$, valeurs qu'on devait trouver. On pourrait encore examiner le cas où $a=0$ et $b=0$, et celui où a, b, c, sont nuls en même temps.

268. Ajoutant et multipliant entre elles les valeurs (3) de x' et de x'', on aura, en réduisant

$$x'+x''=-\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x'x''=\frac{c}{a}.$$

Ces relations remarquables montrent que dans toute équation du second degré, ramenée à la forme (1), la somme des deux racines vaut le coefficient du second terme, pris en signe contraire, et le produit de ces mêmes racines est égal au terme tout connu.

Prenant dans les relations que l'on vient de trouver, les valeurs $b=-a(x'+x'')$ et $c=ax'x''$, puis substituant ces valeurs dans ax^2+bx+c, il viendra successivement :

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a(x^2-xx'-xx''+x'x'') \\ &= a[x(x-x')-x''(x-x')]\,; \text{ ou bien} \\ ax^2+bx+c &= a(x-x')(x-x'') \cdots (4) \end{aligned}$$

Cette identité montre comment on peut remplacer tout trinome du second degré par un produit de trois facteurs ; ce qui est quelquefois utile.

269. La même identité fait voir que non seulement il existe deux valeurs de x qui satisfont à l'équation $ax^2+bx+c=0$; mais de plus qu'il n'en existe que deux. En effet, s'il y avait une troisième racine v, différente des deux premières x' et x'', on aurait $(v-x')(v-x'')=0$. Donc le produit de deux quantités différentes de zéro, serait zéro ; ce qui est évidemment impossible. Donc réellement, l'inconnue x n'a que les deux valeurs x' et x'' dans l'équation $ax^2+bx+c=0$; et par suite, dans l'équation proposée. Donc enfin, *toute équation du second degré a deux racines et jamais plus*.

270. Substituons les valeurs (3) de x' et x'' dans l'identité (4) ; nous en déduirons facilement

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+4ac-b^2] \cdots (5)$$

Supposons que les deux racines x' et x'' soient égales ou imaginaires ; les équations (3) montrent qu'alors b^2-4ac est nul ou négatif ; donc $4ac-b^2$ sera nécessairement nul ou positif ; d'ailleurs $(2ax+b)^2$ reste positif pour toutes les valeurs réelles de x. Donc le multiplicateur de $\frac{1}{4a}$ sera toujours positif ; donc le trinome ax^2+bx+c conservera le signe de a pour toutes les valeurs réelles de x. Donc si les deux valeurs x' et x'' de x, qui rendent nul le trinome du second degré ax^2+bx+c, sont égales ou imaginaires, ce trinome conservera le signe de a pour toutes les valeurs réelles qu'on voudra donner à x.

271. Réciproquement, supposons que le trinome ax^2+bx+c, conserve le signe de a pour toutes les valeurs réelles de x; il faudra donc que $4ac-b^2$ soit positif; car s'il était négatif, en prenant $2ax=-b$, le multiplicateur de $\frac{1}{4a}$ deviendrait négatif : faisant ensuite croître x, positivement ou négativement, on finirait par rendre ce multiplicateur positif; ce multiplicateur changerait donc de signe, ainsi que le trinome proposé; ce qui est contre l'hypothèse. Donc $4ac-b^2$ est nécessairement positif; et par suite, les deux valeurs x', x'' de x, sont égales ou imaginaires. Donc si le trinome du second degré ax^2+bx+c conserve le signe de a pour toutes les valeurs réelles de x, on aura $4ac-b^2$ positif; et les deux valeurs x', x'' de x, qui rendent nul ce trinome, seront égales ou imaginaires.

272. Extrayant la racine carrée du trinome ax^2+bx+c, et égalant à zéro le reste indépendant de x, on aura la condition pour que le trinome proposé soit un carré parfait. Cette condition est $b^2-4ac=0$: si elle est remplie, les valeurs x', x'' de x, qui rendent nul ce trinome, sont égales. Réciproquement, quand $x'=x''$, l'identité (4) fait voir que le trinome ax^2+bx+c est le carré exact de $(x-x')\sqrt{a}$.

273. Pour terminer cette discussion, soit m la *valeur absolue* du plus grand des coefficiens a, b, c, dans ax^2+bx+c; on aura nécessairement le nombre $bx+c<mx+m$, ou $<\frac{m(x+1)(x-1)}{x-1}$, ou $<\frac{mx^2}{x-1}-\frac{m}{x-1}$; d'où $\frac{mx^2}{x-1}>bx+c$.

Posant $ax^2=\frac{mx^2}{x-1}$, d'où $x=1+\frac{m}{a}$, on aura toujours $ax^2>bx+c$; et si l'on prend $x>1+\frac{m}{a}$, d'où $ax^2>\frac{mx^2}{x-1}$, il viendra, à plus forte raison, $ax^2>bx+c$. D'où il résulte que dans tout trinome du second degré ax^2+bx+c, on peut toujours trouver pour x, un nombre $1+\frac{m}{a}$, qui rende le premier terme ax^2 plus grand que le nombre formé par les deux autres $bx + c$, et toute valeur $> 1 + \frac{m}{a}$, jouira, à plus forte raison, de cette propriété.

274. Résolvons maintenant quelques problèmes généraux du second degré. En voici un dont la discussion offre de l'intérêt : *Deux corps lumineux* A *et* B *sont éloignés l'un de l'autre de* d *mètres, et fournissent à un mètre de distance, le premier* a *et le second* b *unités de lumière. Trouver sur la droite* DE *qui passe par ces deux corps, un point* P *qui en soit également éclairé. On sait qu'à* m *fois plus de distance, un même corps répand* m^2 *fois moins de lumière.*

D———————————————E
P″ A P B P′

Soit x la distance AP du point cherché P au point A ; sa distance à B sera $d - x$. Cela posé, puisqu'à un mètre de distance, le corps A répand a unités de lumière ; à x mètres, c'est-à-dire à x fois plus de distance, il répandra x^2 fois moins de lumière ou $\frac{a}{x^2}$. De même, à $d - x$ mètres de distance, le corps B répandra $\frac{b}{(d-x)^2}$ de lumière. Or, à ces distances, les lumières fournies au point P, par les deux corps A et B, doivent être égales ; on a donc

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2}.$$

Cette équation se réduit sur-le-champ à une équation du premier degré en extrayant la racine carrée de ses deux membres ; car en faisant $\sqrt{a} = a'$ et $\sqrt{b} = b'$, il viendra (249)

$$\frac{a'}{x} = \pm \frac{b'}{d-x}; \text{ d'où l'on tire } x = d\frac{a'}{a' \pm b'}.$$

On peut supposer $d = 24$, $a = 16$ et $b = 9$. Mais voyons quelle position la formule précédente assignera au point cherché, quand on aura $a > b$, ou $a < b$ ou $a = b$.

1° Si $a > b$; on aura aussi $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ ou $a' > b'$; donc x aura deux valeurs positives, l'une plus petite que d et plus grande que $\frac{1}{2}d$, et l'autre plus grande que d. Donc il y aura deux points P et P′ également éclairés chacun par les lumières A et B, l'un entre ces lumières et l'autre au-dehors, mais tous les deux plus près de la lumière B la moins *intense*, comme cela doit être.

On peut voir d'ailleurs pourquoi l'équation proposée détermine deux points; car à cause que $(d-x)^2$ est identique avec $(x-d)^2$; en désignant par x la distance AP′, on trouverait une équation identique avec la proposée. Cette proposée ne devait donc pas donner AP plutôt que AP′; mais devait donner ces deux distances.

2° Si $a < b$, on aura aussi $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ou $a' < b'$; donc x aura une valeur positive et une négative. La valeur positive étant $< \frac{1}{2}d$, détermine un point P entre les deux corps lumineux A et B, mais plus près de la lumière A la moins *intense*, comme cela doit être. Quant à la valeur négative, elle résout le problème que donne le proposé en y prenant l'inconnue x en sens contraire (158); c'est-à-dire, en mesurant la distance x de A vers D, au lieu de la mesurer de A vers E. Ainsi cette valeur négative détermine un second point P″, qui recevra la même lumière de chacun des corps A et B. Et en effet, en calculant ces quantités de lumière, d'après les conditions du problème et à l'aide de la valeur absolue de AP″, on les trouve égales chacune à $d(b'-a')$.

3° Si $a=b$, on aura aussi $a'=b'$; d'où $x=\frac{1}{2}d$ et $x=\infty$, comme cela doit être, puisque quand $a=b$, les deux corps A et B fournissent la même lumière à des distances égales. Mais le point qui répond à $x=\infty$, étant infiniment éloigné du corps A, sa position ne saurait être déterminée, et le problème n'a réellement que la seule solution $x=\frac{1}{2}d$, qui est le point milieu de AB.

Si a ou b était o, il faudrait remonter à l'équation proposée pour avoir la vraie valeur de x, qui alors est infinie.

Si on avait résolu l'équation proposée, sans extraire d'abord la racine carrée des deux membres, on aurait trouvé

$$x=\frac{d(a\pm\sqrt{ab})}{a-b}.$$

La supposition de $a=b$ dans cette expression, donnerait $x=\frac{0}{0}$ et $x=\infty$, tandis qu'alors on doit avoir $x=\frac{1}{2}d$ et $x=\infty$. Cela provient du facteur $a-b$, commun aux deux termes, et qu'on mettra en évidence, soit par le procédé du n° 267, soit en remplaçant a et b par leurs valeurs a'^2 et b'^2: alors on retrouvera la formule considérée d'abord.

275. Voici trois problèmes que l'on peut discuter comme le précédent:

1° Partager le nombre donné d en deux parties telles, que le rapport des carrés de ces parties soit égal au rapport de a à b.

2° Deux courriers éloignés l'un de l'autre de d lieues, partent en même temps, vont l'un contre l'autre, et marchent tellement, qu'au moment de leur rencontre, il faudrait a heures au premier pour faire le chemin du second, et b heures à celui-ci pour faire le chemin du premier. Combien le premier fait-il de lieues par heure?

3° Deux maquignons fournissent d chevaux à un régiment, et rapportent la même somme chacun, quoique le second ait fourni plus de chevaux que le premier. Le premier dit au second : si j'avais vendu tes chevaux j'en aurais retiré a louis; et moi, lui répond le second, si j'avais vendu les tiens, je n'en aurais retiré que b louis. Combien ont-ils fourni de chevaux chacun? (On peut supposer $a=600$, $b=216$ et $d=48$.)

276. *Un homme achète un cheval qu'il vend au bout de quelque temps pour* a *francs. A cette vente, il perd autant pour* b *fr. du prix de l'achat que le cheval lui a coûté. Combien l'a-t-il payé?*

Soit x ce que le cheval a coûté : on a donc perdu x sur b du prix de l'achat, c'est-à-dire que b du prix de l'achat se réduisent à $b-x$ par la vente; donc 1 du prix de l'achat se réduit à $\frac{b-x}{b}$, et x prix de l'achat se réduit à $\frac{(b-x)x}{b}$. Mais on suppose que le prix x de l'achat se réduit à a par la vente; il faut donc qu'on ait

$$\frac{(b-x)x}{b}=a;\ \text{d'où}\ x=\tfrac{1}{2}b\pm\sqrt{b(\tfrac{1}{4}b-a)}.$$

On peut faire $a=27$ et $b=144$. Les deux valeurs générales de x sont positives tant que $\frac{1}{4}b$ reste plus grand que a; et par conséquent le problème a deux solutions dans ce cas. Mais si $\frac{1}{4}b<a$, la quantité soumise au radical sera négative; les deux valeurs de x seront donc imaginaires, et le problème impossible, comme on le verrait d'ailleurs en faisant $x=\frac{1}{2}b \pm u\sqrt{b}$; car alors l'équation proposée se réduit à $\frac{1}{4}b-u^2=a$.

Quoique le problème proposé soit impossible quand $\frac{1}{4}b<a$, cependant si l'on interprète les valeurs imaginaires, c'est-à-dire, si l'on change le signe de a ou celui de b, le radical deviendra réel, et la nouvelle formule résoudra le problème que donne l'équation proposée en y changeant a en $-a$, ou b en $-b$ (266).

Or, 1° si l'on change le signe de a, l'équation et la formule proposées deviendront :

$$\frac{(x-b)x}{b}=a \text{ et } x=\tfrac{1}{2}b\pm\sqrt{b(\tfrac{1}{4}b+a)}:$$

donc, en observant que $x-b=b-(2b-x)$, on verra que le problème résolu par la valeur positive de x, qu'on vient de trouver, est celui-ci : *Un homme achète un cheval, qu'il vend au bout de quelque temps pour* a *fr. A cette vente, il perd pour* b *fr., le double de* b *diminué du prix de l'achat. Combien a-t-il payé le cheval?*

2° Si l'on change b en $-b$, l'équation et la formule proposées deviendront

$$\frac{(b+x)x}{b}=a \text{ et } x=-\tfrac{1}{2}b\pm\sqrt{b(\tfrac{1}{4}b+a)};$$

et le problème résolu par la valeur positive est celui-ci : *Un homme achète un cheval, qu'il vend au bout de quelque temps pour* a *francs. A cette vente, il gagne autant pour* b *que le cheval lui a coûté. Combien l'a-t-il payé?*

277. On peut remarquer que la valeur négative, dans le dernier problème, résout le précédent, et que la valeur négative, dans ce précédent, résout le dernier. On discuterait, d'une manière semblable, les problèmes que voici : 1° Connaissant les extrêmes a et b d'une proportion, dont l'un a soit la somme des moyens, trouver ces deux moyens.

2° Etant donnée la distance a entre deux points d'une droite, trouver sur cette droite, un troisième point tel, que le produit de ses distances aux deux premiers, ait la valeur connue ab. (On peut faire $a=64$ et $b=7$.)

3° Quel nombre x doit-on ajouter à deux nombres donnés a et b, pour qu'en l'ôtant du premier a et en en ôtant le second b, le produit des deux sommes et celui des deux restes soient entre eux comme a est à b? (On peut supposer $a=30$ et $b=5$.)

278. *Trouver un nombre tel, que si on lui ajoute* a *et qu'on en retranche* b, *le produit des deux résultats vaille* c *fois le carré du nombre cherché.*

Soit x ce nombre ; on aura donc $(x+a)(x-b)=cx^2$. Cette équation donne, toute réduction faite,

$$x=\frac{a-b\pm\sqrt{(a+b)^2-4abc}}{2(c-1)}.$$

On peut faire $a=30$, $b=2$ et $c=4$. Pour discuter les valeurs de x sous les trois hypothèses $c>1$, $c<1$ et $c=1$, il suffira de poser $c=1+d$, et de faire d positif dans le premier cas, d négatif dans le second, et $d=0$ dans le troisième.

Les valeurs de x sont imaginaires, lorsque $4abc > (a+b)^2$. Mais ces valeurs deviennent réelles en changeant le signe de a, ou de b, ou de c, ou à la fois les signes de a, b, c; ce qui, par l'interprétation des valeurs négatives, résoudra de nouveaux problèmes analogues au proposé.

279. Voici des problèmes que l'on peut discuter comme le précédent :

1° Partager le nombre donné a en deux parties telles, que si l'on multiplie leurs carrés par les nombres donnés b et c, la différence des deux produits soit égale au cube de a.

2° Trouver de laquelle de ses parties l'eau d'un vase doit diminuer pendant chaque heure, pour qu'en y ajoutant b litres à la fin de chacune, il y reste c litres au commencement de la troisième. On sait qu'il y avait d'abord a litres d'eau dans le vase.

Questions de maximums et de minimums.

280. On peut voir dans les Mélanges d'algèbre, pages 56 et suivantes, la théorie complète des *maximums* et des *minimums* du second degré. Nous nous bornerons ici à résoudre quelques questions qui s'y rapportent, lesquelles donneront une idée suffisante de cette théorie.

281. *Partager 20 en deux parties dont la somme des carrés soit la moindre possible.*

Soit $2a$ la somme des carrés des deux parties cherchées, et x la première ; la seconde sera $20 - x$, et on aura

$$x^2 + (20 - x)^2 = 2a.$$

Cette équation devient : $2x^2 - 40x + 400 = 2a$, $x^2 - 20x = a - 200$ et $x = 10 \pm \sqrt{a - 100}$.

Plus a diminue, plus aussi $a - 100$ diminue ; et a ne peut diminuer que jusqu'à devenir égal à 100 ; car si a diminuait encore, $a - 100$ deviendrait négatif, et x serait imaginaire ou impossible. La plus petite valeur de a, et conséquemment celle de $2a$, répond donc à $a = 100$; ce qui donne $a - 100 = 0$, $x = 10$ et $20 - x = 10$. D'où il suit que les deux parties cherchées sont égales chacune à 10.

Effectivement, si l'on partage 20 en deux autres parties quelconques, la somme des carrés de ces deux parties sera toujours plus grande que celle des carrés des deux parties 10 et 10.

282. *Partager le nombre donné* a *en deux carrés dont le produit des racines soit le plus grand possible.*

Soient x^2 et y^2 les deux carrés cherchés ; on aura

$$x^2+y^2=a \text{ et } xy=b.$$

Retranchant le double de la seconde de ces équations de la première, on trouvera

$$x-y=\sqrt{a-2b}.$$

Comme a est un nombre donné et que b peut être pris à volonté, on voit que si b augmente, $a-2b$ diminuera ; et b ne saurait augmenter que jusqu'à donner $2b=a$; car si b augmentait encore, $2b$ serait plus grand que a ; donc $a-2b$ serait négatif et $x-y$ imaginaire ou impossible (224). La plus grande valeur de b donne donc $2b=a$ ou $b=\frac{1}{2}a$; et il en résulte $x-y=0$; d'où $x=y=\frac{1}{2}\sqrt{2a}$.

C'est ce qu'on vérifie en posant

$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}+u \text{ et } y=\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}-u;$$

car alors la seconde équation proposée devenant $\frac{1}{2}a-u^2=b$, on voit que le *maximum* de b répond à $u=0$; ce qui donne les valeurs précédentes.

Si b était donné et que a fût *variable*, le *minimum* de a serait $a=2b$, et on aurait $x=y=\sqrt{b}$, comme il serait aisé de le vérifier d'ailleurs.

283. *On veut creuser un réservoir d'eau à faces rectangulaires, qui ait un mètre de profondeur et dont la surface du fond vaille celle qui aurait* a *mètres de long sur un de large. Mais comme on désire que le mur qui revêtira le contour de ce réservoir, coûte le moins possible, on demande quelles doivent être pour cela, la longueur* x *et la largeur* y *du réservoir à creuser.*

Le mur qui revêtira le contour du réservoir, devant avoir partout un mètre de hauteur, et sa longueur étant égale au contour de la surface du fond, il est clair que pour que ce mur coûte le moins possible, il faut que sa longueur, et par conséquent le contour dont il s'agit, ait la plus petite valeur possible.

Or, soit $4c$ le contour : puisque x est sa longueur et y sa largeur, on aura évidemment

$$2x+2y=4c.$$

Mais la surface du fond ayant x mètres de long sur y mètres de large, équivaut à une surface qui aurait y fois plus de long sur y fois moins de large, c'est-à-dire xy mètres de long sur 1 de large : et puisque la surface du fond vaut aussi celle qui aurait a mètres de long sur 1 de large, il s'ensuit que

$$xy = a.$$

Cette équation et la précédente donnent

$$y = 2c - x, \quad 2cx - x^2 = a \quad \text{et} \quad x = c \pm \sqrt{(c^2 - a)} \cdots (1)$$

Comme a est donné et que le contour $4c$ peut être pris à volonté, on voit que la plus petite valeur de c, et par conséquent de $4c$, répond à $c^2 = a$; et il en résulte $c = \sqrt{a}$, $x = c = y = \sqrt{a}$. De sorte que la longueur et la largeur du réservoir à creuser, doivent être égales entre elles et à $\sqrt{a}$.

Si le contour $4c$ est donné et que la surface du fond soit *variable*, a sera aussi variable ; et la formule (1) montre que la plus grande valeur de a est $a = c^2$; ce qui donne $x = c = y$. Ces valeurs résolvent donc ce problème : *Parmi les réservoirs à faces rectangulaires, qui ont un mètre de profondeur et qu'on peut entourer d'un mur de* 4c *mètres de long, trouver celui dont la surface du fond est la plus grande possible, et par conséquent celui qui contient le plus d'eau.*

284. Voici quelques problèmes, faciles à résoudre, d'après ce qui précède : Partager 24 en deux parties dont le produit soit le plus grand possible. (Les parties sont égales chacune à 12.)

Partager 18 en deux parties dont la somme des racines carrées soit la plus grande possible. (Les deux parties sont égales.)

Trouver deux nombres dont la somme soit la plus grande possible, lorsque 72 est la somme de leurs carrés. (Les deux nombres sont égaux chacun à 6.)

Trouver deux nombres dont la somme soit 14 et dont la somme des quotiens, obtenus en divisant chacun par l'autre, soit la moindre possible. (Les deux nombres valent 7 chacun.)

Partager le nombre donné a en deux parties telles, que leur différence divisée par la différence de leurs racines carrées, donne le plus grand quotient possible. (Les deux parties sont égales.)

Décomposer un produit donné a en deux facteurs positifs tels, que leur somme divisée par la différence de leurs racines carrées, donne le moindre quotient possible.

285. *Soit proposé de trouver la plus grande ou la plus petite valeur de* m *dans l'équation* $x^2 - 2x - 11 = 4mx - 5m^2$.

Pour cela, si l'on résout cette équation par rapport à x, on aura
$$x = 1 + 2m \pm \sqrt{12 + 4m - m^2}.$$

Or, si la variable était dans la partie négative sous le radical, il est clair que son *maximum* rendrait nul ce radical; et si elle était dans la partie positive seule, son *minimum* anéantirait le même radical. Mais ici la variable m se trouve dans la partie positive et dans la partie négative; on ignore donc encore dans quel cas il y a *maximum* ou *minimum* pour m. Voici comment on peut le trouver : la quantité sous le radical proposé étant variable et devant être positive ou nulle, pour que x soit réelle, on peut égaler cette quantité sous le radical à la quantité variable et positive u^2; ce qui donnera
$$12 + 4m - m^2 = u^2; \text{ d'où } m = 2 \pm \sqrt{16 - u^2}.$$

Or, quelque valeur positive ou négative qu'on donne à u, le carré u^2 sera toujours positif; donc $16 - u^2$ sera toujours moindre que 16. De sorte que la plus grande valeur du radical de m est 4, et répond à $u = 0$. Mais le radical ayant sa plus grande valeur, la somme $2 +$ *ce radical* sera la plus grande possible, et le reste $2 -$ *le radical* sera le moindre possible : d'où il suit, 1° que le maximum de m est $m = 2 + 4 = 6$ et donne $x = 13$; 2° que le minimum de m est $m = 2 - 4 = -2$ et fournit $x = -3$.

Au moyen de la méthode que nous venons d'employer, on trouve aisément le maximum ou le minimum de m, dans $x^2 + 4x + 4m = 2mx + 3$, ainsi que dans $x^2 + 4a^2 + 5m^2 = 2ax + 4mx$.

286. *Partager le nombre donné* a *en trois parties dont la somme des cubes soit la moindre possible.*

Soient x, y, z, les trois parties cherchées et m la somme de leurs cubes; on aura les deux équations
$$x + y + z = a \quad \text{et} \quad x^3 + y^3 + z^3 = m.$$

Prenant la valeur de z dans la première, et substituant cette valeur dans la seconde, il viendra, toute réduction faite,
$$a^3 - 3a^2(x+y) + 3a(x^2 + 2xy + y^2) - 3xy(x+y) = m \ldots (1)$$

Résolvant cette équation par rapport à x, on trouve d'abord
$$x^2 - (a-y)x = \frac{m - (a-y)^3 - y^3}{3(a-y)},$$

puis $\quad x = \frac{1}{2}(a-y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4m-(a-y)^3-4y^3}{3(a-y)}}.$

Supposons que l'inconnue y ait la valeur qui répond au minimum de m; on voit que ce minimum rendra nulle la quantité sous le radical précédent, et donnera par conséquent

$$4m-(a-y)^3-4y^3=0 \quad \text{et} \quad x=\tfrac{1}{2}(a-y);$$

d'où $\quad m-2x^3-y^3=0 \quad$ et $\quad 2x=a-y \ldots (2)$

Résolvant l'équation (1) par rapport à y, on verra de même que le minimum de m donne

$$m-2y^3-x^3=0 \quad \text{et} \quad 2y=a-x \ldots (3)$$

Les équations $2x=a-y$ et $2y=a-x$ fournissent $x=y=\frac{1}{3}a$; d'où la première équation proposée donne aussi $z=\frac{1}{3}a$. D'où il suit que, pour le minimum de m, les trois parties cherchées sont égales entre elles; et ce minimum est $\frac{1}{9}a^3$.

La valeur générale de x prouve que si m était donnée et a variable, le maximum de a conduirait aux équations (2). La valeur générale de y montre aussi que le maximum de a donne les équations (3). De sorte que, pour ce maximum, on a $x=y=z$. D'où il suit que *s'il faut trouver trois nombres tels, que la somme de leurs cubes étant un nombre donné* m, *la somme de ces trois nombres soit la plus grande possible, on devra prendre ces trois nombres égaux entre eux.* C'est ce qu'on vérifie en posant $x=\frac{1}{3}a+u$ et $y=\frac{1}{3}a-u$; car ces valeurs substituées dans l'équation (1), donnent

$$m=\tfrac{1}{9}a^3+2au^2.$$

Or, puisque les deux parties $\frac{1}{9}a^3$ et $2au^2$ doivent toujours donner la même somme m, il est clair que quand l'une $2au^2$ sera la moindre possible ou nulle, l'autre sera la plus grande possible; le maximum de $\frac{1}{9}a^3$ et conséquemment celui de a, répond donc à $u=0$; ce qui donne les valeurs trouvées par l'autre méthode.

287. Voici quelques problèmes à résoudre, d'après la première des méthodes que nous venons d'employer :

Décomposer le produit donné a^3 en trois facteurs positifs tels, qu'en ajoutant à chacun le même nombre b, la somme des carrés des trois sommes soit un minimum. (Les trois facteurs cherchés sont égaux.)

Partager le nombre donné a en trois ou quatre parties dont la somme des carrés soit un minimum. (Les parties cherchées sont égales entre elles.)

Trouver trois nombres positifs tels, que la somme de leurs carrés étant un nombre donné a, la somme de leurs produits deux à deux soit un maximum. (Les trois nombres cherchés sont égaux.)

Partager un nombre donné a en trois ou quatre parties dont le produit soit un maximum.

Décomposer le produit a^4 en quatre facteurs positifs dont la somme des produits deux à deux soit un minimum.

On veut faire construire un meuble à faces rectangulaires, qu'on puisse recouvrir avec un morceau d'acajou en forme de rectangle, ayant 40 palmes de long sur 10 de large. Comme les douze côtés du meuble seront recouverts de petites bandes d'argent, d'une largeur et d'une épaisseur données, on désire, pour diminuer les frais autant qu'il se peut, que la somme des douze côtés soit la moindre possible. Quelles doivent être être pour cela, la longueur x, la largeur y et la hauteur z du meuble à construire?

Nota. La formule qui montre quand une variable est à son minimum, montre aussi quand une autre variable est à son maximum, et réciproquement. On propose d'énoncer, dans les problèmes précédens, ceux qui sont relatifs aux nouvelles variables.

Principes sur les puissances et les racines.

288. On sait que la puissance m^{me} d'un monome a^v, est un produit de m facteurs égaux à ce monome (23). On indique cette puissance en écrivant $(a^v)^m$. On dit qu'une puissance est *paire* ou *impaire*, suivant que son exposant est un nombre *pair* ou *impair*.

289. *Les puissances des quantités positives sont toujours positives;* car ce sont des produits dont les facteurs peuvent s'écrire sans signes. Ainsi

$$(+a)^3 = aaa = a^3 \text{ et } (+a)^4 = aaaa = a^4.$$

290. *Les puissances paires des quantités négatives sont positives;* car chacune de ces puissances est le produit d'un nombre pair de facteurs négatifs (46). Par exemple,

$$(-a)^6 = -a \times -a \times -a \times -a \times -a \times -a = +a^6.$$

291. *Les puissances impaires des quantités négatives sont négatives;* car chacune de ces puissances est le produit d'un nombre impair de facteurs négatifs (46). C'est ainsi que

$$(-a)^5 = -a \times -a \times -a \times -a \times -a = -a^5.$$

292. Soit abc un produit de trois facteurs quelconques, ra-

tionnels ou irrationnels ; d'après ce qu'on a vu (219), il est clair qu'on aura

$$(abc)^4 = abcabcabcabc = aaaabbbbcccc = a^4b^4c^4.$$

En général, puisqu'on peut rapprocher les facteurs de même nom sans changer la valeur du produit proposé (219), il en résulte que la puissance m^{me} de abc, qui est un produit de m facteurs égaux à abc, sera le produit de m facteurs a, multiplié par le produit de m facteurs b, multiplié par le produit de m facteurs c ; elle sera donc $a^m \times b^m \times c^m$. Ainsi on a

$$(abc)^m = a^m b^m c^m.$$

Cette identité fait voir, 1° que *la puissance* m^{me} *d'un produit est égale au produit des puissances* m^{mes} *de ses facteurs ;* 2° que *le produit des puissances* m^{mes} *de plusieurs nombres est égal à la puissance* m^{me} *du produit de ces nombres.*

293. L'application de ce dernier principe fournit

$$\left(\frac{a}{c}\right)^m \times c^m = a^m \text{; d'où l'on tire } \left(\frac{a}{c}\right)^m = \frac{a^m}{c^m}.$$

Donc 1° pour *élever un quotient ou une fraction à une certaine puissance, il suffit d'élever chacun de ses termes à cette puissance ;* 2° *le quotient des puissances* m^{mes} *de deux nombres est égal à la puissance* m^{me} *du quotient de ces deux nombres.*

294. Cherchons maintenant à développer la puissance m^{me} du binome $x+a$; et pour cela, considérons d'abord les expressions

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$
$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4.$$

Il est clair qu'on peut écrire ces valeurs comme il suit :

$$(x+a)^2 = x^2 + \frac{2}{1}ax + \frac{2.1}{1.2}a^2$$

$$(x+a)^3 = x^3 + \frac{3}{1}ax^2 + \frac{3.2}{1.2}a^2x + \frac{3.2.1}{1.2.3}a^3$$

$$(x+a)^4 = x^4 + \frac{4}{1}ax^3 + \frac{4.3}{1.2}a^2x^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3}a^3x + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}a^4.$$

L'inspection attentive de ces valeurs conduit à penser que, quel que soit l'exposant m, entier et positif, on aura toujours

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} +$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^4x^{m-4}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}a^5x^{m-5} + \ldots + a^m \ldots (1)$$

En effet, pour abréger, représentons cette formule par
$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + Aa^2x^{m-2} + Ba^3x^{m-3} +$$
$$Ca^4x^{m-4} + Da^5x^{m-5} + \ldots + a^m.$$

Multipliant de part et d'autre par $x+a$ et réunissant les multiplicateurs d'une même puissance de x, dans le second membre, on aura
$$(x+a)^{m+1} = x^{m+1} + (m+1)ax^m + (A+m)a^2x^{m-1} +$$
$$(A+B)a^3x^{m-2} + (B+C)a^4x^{m-3} + (C+D)a^5x^{m-4} + \ldots + a^{m+1}.$$

Substituant les valeurs de A, B, C, D, ..., et décomposant en facteurs, on trouvera successivement
$$A+m = \frac{m(m-1)}{1.2} + m = \left(\frac{m-1}{1.2}+1\right)m = \frac{(m+1)m}{1.2};$$
$$A+B = \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} = \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3};$$
$$B+C = \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4};$$
$$C+D = \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4};$$
et ainsi de suite. Avec ces valeurs, il vient
$$(x+a)^{m+1} = x^{m+1} + (m+1)ax^m + \frac{(m+1)m}{1.2}a^2x^{m-1} +$$
$$\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}a^3x^{m-2} + \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4}a^4x^{m-3} + \ldots + a^{m+1}.$$

Cette formule est précisément ce que devient la formule (1), quand on y change m en $m+1$. D'où il suit que si la formule (1) est exacte pour une certaine valeur entière de l'exposant m, elle sera vraie pour une valeur plus grande d'une unité. Or, la formule (1) est démontrée pour $m=4$; elle est donc vraie aussi pour $m=5$. Etant vraie pour $m=5$, elle aura donc encore lieu pour $m=6$, puis pour $m=7$, $m=8$, et en général, pour toutes les valeurs entières et positives de l'exposant m.

La formule (1) est nommée le *binome de Newton* (*); elle fournit plusieurs conséquences importantes, que nous développerons plus bas.

295. *Lorsqu'un nombre* a *surpasse l'unité, sa puissance* m^{me} *peut devenir aussi grande qu'on veut, en prenant* m *suffisamment grand.*

En effet, puisque a surpasse l'unité, on a nécessairement $a = 1 + x$, d'où $a^m = (1 + x)^m = 1 + mx +$ etc.; ce qui donne $a^m > 1 + mx$. Or, m pouvant avoir une valeur aussi grande qu'on voudra, il en est de même de $1 + mx$, et à plus forte raison, de a^m. On voit même que si m était infini, a^m le serait aussi, et qu'on aurait $a^\infty = \infty$.

296. *Lorsqu'un nombre* a *est moindre que l'unité, sa puissance* m^{me} *peut devenir aussi petite qu'on veut, en prenant* m *suffisamment grand.*

En effet, le cas le plus défavorable est celui où $a = \frac{v}{v+1}$. Divisant les deux termes par v et faisant $d = 1 + \frac{1}{v}$, on aura $a = \frac{1}{d}$ et $a^m = \frac{1}{d^m}$ (293). Or $d > 1$; donc d^m est aussi grand qu'on veut, en prenant m suffisamment grand (295). Donc au contraire, $\frac{1}{d^m}$ ou a^m est aussi petit qu'on veut, et peut devenir moindre que toute quantité donnée, quelque petite qu'elle soit. Enfin, si m est infini, d^m le sera aussi (295); $\frac{1}{d^m}$ ou a^m sera donc infiniment petit et pourra être regardé comme nul. D'où il suit que si $a < 1$, on aura $a^\infty = 0$, principe qui nous servira dans la suite.

297. La *racine* r^{me} d'un nombre est un autre nombre qui,

(*) Newton est le premier qui ait fait connaître la formule du binome: il n'en a pas donné de démonstration; mais il paraît être arrivé à cette formule par la méthode qui nous a conduits à la formule (1). « Cette manière de s'élever aux lois générales, par la considération de cas particuliers, se nomme *induction*. Elle est la source de presque toutes les découvertes dans l'analyse et dans la nature. Mais en faisant usage de cette méthode, il faut éviter de généraliser trop promptement; car il arrive quelquefois qu'une loi, qui se soutient dans un assez grand nombre de valeurs particulières, est démentie par les valeurs suivantes. Ainsi la méthode d'induction, quoiqu'excellente pour découvrir des vérités générales, ne doit pas dispenser de les démontrer avec rigueur. »

élevé à la puissance r^{me}, reproduit le premier. Ainsi, x désignant la racine r^{me} de a, on aura $x^r=a$ ou $a=x^r$; c'est-à-dire que tout nombre est la puissance r^{me} de sa racine r^{me}.

298. On indique la racine r^{me} de a, en plaçant devant a le signe $\sqrt{}$, et en mettant entre les branches de ce signe, le nombre r qui marque l'*ordre* ou le *degré* de la racine à extraire. Ainsi, $\sqrt[r]{a}$ signifie : *racine r^{me} de a* : c'est un *radical du r^{me} degré*, dont r est l'*indice*. Le nombre r est aussi l'*indice* ou l'*exposant* de la racine indiquée.

Quand l'indice du radical n'est pas écrit, il est 2; de sorte que $\sqrt{7}$ désigne la racine carrée de 7, aussi bien que $\sqrt[2]{7}$. La racine est dite *paire* ou *impaire*, suivant que son indice est un nombre pair ou impair.

299. D'après la définition des racines, il est clair que

$$(\sqrt[r]{a})^r=a=\sqrt[r]{a^r}.$$

300. *Toute racine paire d'une quantité positive doit être précédée du double signe* $\pm$. Par exemple,

$$\sqrt[4]{256}=\pm 4,\quad \sqrt[6]{64}=\pm 2,\quad \sqrt[8]{1}=\pm 1,\text{ etc.}$$

En général, r étant un nombre pair, on a vu (290) que $(\pm a)^r=a^r$. Mais puisqu'il faut élever $\pm a$ à la puissance r^{me} pour avoir a^r, il s'ensuit que $\pm a$ est la racine r^{me} de a^r (297). Donc, etc.

301. *Les racines impaires des quantités n'ont que le signe de ces quantités.* Ainsi on a

$$\sqrt[3]{125}=5,\quad \sqrt[5]{-243}=-3,\quad \sqrt[7]{-128}=-2,\text{ etc.}$$

En effet, r désignant un nombre impair, on sait (291) que $(\pm a)^r=\pm a^r$. Par conséquent (297) $\sqrt[r]{(\pm a^r)}=\pm a$.

302. *Les racines paires des quantités négatives n'existent pas ou sont imaginaires.* Car il n'y a aucune quantité qui, élevée à une puissance paire, donne un résultat négatif (290). Par exemple, il n'existe aucun monome dont la puissance 6^{me} donne -64, puisque toute puissance paire d'une quantité positive ou négative est positive (290); la racine 6^{me} de -64 est donc impossible.

Ainsi, $\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[6]{-1}$, $\sqrt[8]{-a^8}$, etc., sont des symboles d'opérations inexécutables, nommés expressions imaginaires, et qu'on soumet aux règles du calcul des nombres, pour conserver à l'algèbre toute la généralité dont elle est susceptible (225).

303. Il résulte des n^{os} 299 et 292, que si l'on élève le produit $\sqrt[r]{a}\sqrt[r]{b}\sqrt[r]{c}$ à la puissance r^{me}, on aura abc; par conséquent (297)

$$\sqrt[r]{a}\sqrt[r]{b}\sqrt[r]{c}=\sqrt[r]{abc}.$$

Comparant la seconde de ces expressions à la première, et réciproquement, on verra, 1° que la racine r^{me} d'un produit est égale au produit des racines r^{mes} de ses facteurs; 2° que le produit des racines r^{mes} de plusieurs nombres est égal à la racine r^{me} du produit de ces nombres. C'est ainsi qu'on a

$$\sqrt[3]{64\cdot 729}=\sqrt[3]{64}\sqrt[3]{729}=4\cdot 9=36,$$
$$\sqrt[4]{54}\sqrt[4]{24}=\sqrt[4]{54\cdot 24}=\sqrt[4]{81\cdot 16}=3\cdot 2=6.$$

304. Le dernier des deux principes précédens donne

$$\sqrt[r]{\frac{a}{c}}\times\sqrt[r]{c}=\sqrt[r]{a};\ \text{d'où}\ \sqrt[r]{\frac{a}{c}}=\frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{c}}.$$

Donc, 1° la racine r^{me} d'un quotient ou d'une fraction s'obtient en divisant la racine r^{me} du dividende par celle du diviseur; 2° le quotient des racines r^{mes} des deux nombres est égal à la racine r^{me} du quotient de ces deux nombres. Ainsi

$$\sqrt[5]{243:32}=\sqrt[5]{243}:\sqrt[5]{32}=3:2=\tfrac{3}{2},$$
$$\sqrt[3]{162}:\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{162:6}=\sqrt[3]{27}=3.$$

305. *Lorsque la racine* r^{me} *d'un nombre entier* a *n'est pas un nombre entier, elle est incommensurable.* Car si la racine r^{me} de a pouvait être exprimée exactement par une fraction irréductible $\frac{n}{d}$, on aurait successivement

$$\sqrt[r]{a}=\frac{n}{d},\quad a=\frac{n^r}{d^r}\quad\text{et}\quad ad^{r-1}=\frac{n^r}{d}.$$

Or d est premier avec n, par hypothèse; donc d est premier avec chacun des facteurs du produit n^r; d ne divisera donc pas ce produit et ne donnera pas le nombre entier ad^{r-1} au quotient. Ainsi la dernière égalité précédente est impossible; il en est donc de même de la première. De sorte que la racine r^{me} de a n'est pas égale à une fraction : déjà elle n'est pas égale à un nombre entier; donc elle ne saurait être exprimée exactement par aucun nombre ; elle est par conséquent incommensurable, et ne peut s'obtenir que par approximation.

306. *La racine* r^{me} *d'une fraction irréductible* $\frac{a}{c}$ *est incommensurable, dès que l'un des deux termes de cette fraction n'est pas une puissance* r^{me} *parfaite.* C'est ce qu'on démontre en raisonnant tout-à-fait comme au n° 217.

De l'extraction des racines cubiques.

307. On sait (23) que le cube d'un nombre est le produit de trois facteurs égaux à ce nombre, ou le produit de ce même nombre par son carré. Ainsi les cubes des neuf premiers nombres entiers, sont : 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512 et 729.

Le cube de 10 est 1000, le cube de 100 est 1000000, le cube de 1000 est 1000000000, et en général, le cube de 1 *suivi de* n *zéros* est 1 *suivi de* 3n *zéros.*

Le cube d'un nombre composé de deux parties a et x est donné par la formule $(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$ (52). Si $x = 1$, on aura $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$.

308. La *racine troisième* ou la *racine cubique* d'un nombre a est un autre nombre x qui, élevé au cube, reproduit le 1er a. De sorte que $x^3 = a$ ou $a = x^3$, c'est-à-dire que *tout nombre est le cube de sa racine cubique*, et contient par conséquent le cube du premier chiffre, celui des 2, des 3, des 4, ..., premiers chiffres de cette racine. Et comme le produit a ou x^3 ne peut augmenter que quand l'un de ses facteurs x augmente, on voit que plus un nombre a est grand, plus sa racine cubique x est grande, et réciproquement.

309. *La racine cubique d'un nombre entier a toujours autant de chiffres que ce nombre contient de tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche, excepté la première à gauche, qui pourrait avoir moins de trois chiffres.*

Soit le nombre de quatre tranches $a = 911,456,789,381$. Il est évident que $a > 1000000000$ et $a < 1000000000000$. Extrayant la racine cubique de part et d'autre, il viendra $\sqrt[3]{a} > 1000$ et $\sqrt[3]{a} < 10000$. La racine cubique du nombre proposé a n'a donc que quatre chiffres, c'est-à-dire autant que ce nombre contient de tranches.

310. *Le plus grand cube contenu dans les* p *premières tranches du nombre proposé, est le cube des* p *premiers chiffres de la racine cubique de ce nombre.*

Soit le nombre $a = 61,782,311,415,567$. Puisque ce nombre a cinq tranches de chiffres, sa racine cubique aura cinq chiffres. Soit x les trois premiers chiffres à gauche de cette racine ; x sera donc un nombre de *centaines*, car il y a deux chiffres après ; son cube x^3 sera donc un nombre de *millions*, et ne pourra se trouver que dans les trois premières tranches, qui expriment aussi des *millions*. De plus, comme la racine cubique n'a que x centaines, elle est moindre que $(x+1)$ centaines ; donc son cube, ou le nombre proposé a, est moindre que $(x+1)^3$ millions ; les millions de ce nombre a, c'est-à-dire ses trois premières tranches ne contiennent donc pas $(x+1)^3$. D'où il suit que le plus grand cube contenu dans les trois premières tranches est x^3, c'est-à-dire le cube des trois premiers chiffres x de la racine cubique. On verra de même que le plus grand cube contenu dans les deux premières tranches, est le cube des deux premiers chiffres de la racine, et ainsi des autres.

311. Il est maintenant facile d'extraire la racine cubique d'un nombre entier, tel que 401947272. Pour cela, on partage ce nombre en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche ; puis l'on dispose et l'on effectue l'opération comme il suit :

401,947,272	738. Racine.	213	2198
343	147 ou $3(7)^2$	3	8
589,47	15339 … S	639 … R	17584
46017	639 … R	147	15987
129302,72	$9 \ldots x^2$	15339 … S	1616284
12930272		3	8
0	$15987 \ldots 3(73)^2$	$46017 \ldots Sx$	12930272.

1° On sait (310) que le plus grand cube 343 contenu dans la première tranche 401, est le cube du premier chiffre de la racine cubique ; de sorte que ce premier chiffre est 7. Soustrayant 343 de 401, il reste 58 ; à côté de ce reste abaissant la seconde tranche 947, il vient 58947. Mais le plus grand cube contenu dans les deux premières tranches, étant celui des deux premiers chiffres a et x de la racine cubique (310), ce plus grand cube est $(a+x)^3$ ou $a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$. Et puisqu'on vient de soustraire de ces deux tranches le cube 343 ou a^3 du premier chiffre, le reste 58947 doit renfermer $3a^2x+3ax^2+x^3$. Or, le premier chiffre a exprime des dizaines par rapport au second x; donc $3a^2x$ est un nombre de centaines, et ne peut se trouver que dans les centaines du reste 58947. Divisant donc ces 589 centaines par $3a^2$ ou 147, triple carré du premier chiffre 7 ou a de la racine, on aura le second chiffre x au quotient; car sauf les centaines fournies par le restant du cube de la racine, on divisera un produit de $3a^2x$ par l'un de ses deux facteurs $3a^2$: le quotient serait bien 4, mais à cause des centaines fournies, il ne faut mettre que 3 (*).

2° Pour vérifier si le quotient 3 est réellement le second chiffre x de la racine cubique cherchée, il faut soustraire du reste 58947 la quantité qu'il doit renfermer, savoir : $3a^2x+3ax^2+x^3$, ou $[3a^2+(3a+x)x]x$; ce qui se réduit à Sx, en posant $R=(3a+x)x$ et $S=3a^2+R$. Or, a exprime des dizaines par rapport à x et $3a^2$ des centaines; ainsi, pour vérifier la racine trouvée 73, on écrit le second chiffre x ou 3 à côté du triple 21 du premier a ou 7, on multiplie le résultat par le second chiffre 3, on ajoute le produit R à 147 centaines, c'est-à-dire aux centaines marquées par le triple carré $3a^2$ du 1^{er} chiffre 7, on multiplie la somme S par le second chiffre 3, et l'on soustrait le produit 46017 ou Sx du reste 58947; ce qui donne 12930 pour nouveau reste. Mais en opérant ainsi, on soustrait $3a^2x+3ax^2+x^3$ du reste 58947 des deux premières tranches, et par conséquent de ces deux tranches : et comme déjà on en a soustrait a^3, il s'ensuit qu'en tout on a soustrait des deux premières tranches, $a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$, ou $(a+x)^3$, c'est-à-dire le cube de la racine trouvée 73; et il faut comparer le reste 12930 au trinome $3(73)^2+3(73)+1$.

(*) Pour vérifier le quotient 3, on pourrait soustraire des deux premières tranches 401947 le cube de la racine trouvée 73; car si cette soustraction est possible et que les deux premières tranches soient moindres que le cube de 74, il est clair que le cube de 73 sera le plus grand de tous ceux contenus dans les deux premières tranches, et par conséquent 73 exprimera les deux premiers chiffres de la racine cherchée (310). Mais cette vérification exige beaucoup plus de calculs que celle que nous employons dans le texte.

Or, on forme aisément ce trinome, en observant que $R = 3ax + x^2$ et que $S = 3a^2 + 3ax + x^2$; car en ajoutant x^2 à la somme des deux nombres R et S, déjà calculés, on verra que $S + R + x^2 = 3(a+x)^2 =$ le triple carré de la racine trouvée 73. Si donc on fait la somme des trois nombres S, R et x^2, on verra que $3(73)^2 = 15987$. Et comme $3(73) + 1 = 220$, il s'ensuit que le trinome $3(73)^2 + 3(73) + 1$ se réduit à 16207. Ainsi après avoir soustrait $(73)^3$ hors des deux premières tranches, le reste 12930 est moindre que 16207 ou $3(73)^2 + 3(73) + 1$; donc les deux premières tranches elles-mêmes sont moindres que $(73)^3 + 3(73)^2 + 3(73) + 1$, ou que $(73+1)^3$, ou enfin que $(74)^3$. Par conséquent $(73)^3$ est le plus grand cube contenu dans les deux premières tranches. Et comme ce plus grand cube est celui des deux premiers chiffres de la racine (310), il s'ensuit que 73 exprime ces deux premiers chiffres (*).

3° On aura le troisième chiffre, en recommençant les raisonnemens pour le second. Ainsi abaissant la troisième tranche 272 à côté du reste 12930, ce qui donnera 12930272, et divisant 129302 par 15987, triple carré des deux premiers chiffres 73 de la racine, le quotient 8 exprimera le troisième chiffre, ou un chiffre plus grand. Pour vérifier ce quotient 8, on l'écrit à côté du triple 219 des deux premiers chiffres 73, on multiplie le tout par 8, on ajoute au produit 17584, les centaines marquées par le triple carré des deux premiers chiffres, c'est-à-dire 15987 centaines, on multiplie la somme 1616284 par 8 et l'on soustrait le produit 12930272 du reste des trois premières tranches. De cette manière on soustrait de ces trois tranches $3(73)^2 . 8 + 3(73) . 8^2 + 8^3$: et comme déjà on en a soustrait $(73)^3$, il s'ensuit qu'on a soustrait de ces tranches ou du nombre proposé, $(73)^3 + 3(73)^2 . 8 + 3(73) . 8^2 + 8^3$, ou $(738)^3$, c'est-à-dire le cube de la racine trouvée 738 : donc, puisqu'il ne reste rien,

(*) Si le reste étoit $=$ ou $> 3(73)^2 + 3(73) + 1$, les deux premières tranches seraient $=$ ou $> (74)^3$. Et comme ces tranches expriment des mille, le nombre proposé serait $> (74)^3$ mille, ou $> (740)^3$; donc la racine cubique de ce nombre vaudrait au moins 740 ou 74 dizaines, et la racine trouvée 73 serait trop petite d'une unité au moins. En général, la racine trouvée n'est exacte en nombre entier, que quand le reste est moindre que le triple carré de cette racine trouvée, plus trois fois cette même racine, plus l'unité.

cette racine est exactement la racine cubique du nombre proposé 40194727 2.

312. Le résumé des calculs précédens fait voir que, pour extraire la racine cubique d'un nombre entier, il faut, après l'avoir partagé en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche, prendre la racine cubique du plus grand cube contenu dans la première tranche, et cette racine sera le premier chiffre de la racine cherchée. Soustraire le cube de ce premier chiffre hors de la première tranche, abaisser la seconde tranche à côté du reste, séparer les deux derniers chiffres à droite, par une virgule, et diviser la partie à gauche par le triple carré du premier chiffre de la racine; le quotient exprimera le second chiffre, ou un chiffre plus grand. Pour vérifier ce quotient, on l'écrit à côté du triple du premier chiffre, on multiplie le tout par le même quotient, on ajoute au produit les centaines marquées par le triple carré du premier chiffre, on multiplie la somme par le quotient, et l'on soustrait le produit hors du reste de la première tranche réuni à la seconde : le nouveau reste doit être moindre que le triple carré de la racine trouvée, plus trois fois cette même racine, plus l'unité. A côté de ce second reste, on abaisse la troisième tranche, on sépare les deux derniers chiffres à droite, on divise la partie à gauche par le triple carré des deux chiffres trouvés à la racine, et le quotient, vérifié comme le précédent, exprime le troisième chiffre. On continuera le même procédé jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de tranche à abaisser.

Au moyen de cette règle, on trouvera que $\sqrt[3]{8755000000} = 2061$, à moins d'une unité près, et que $\sqrt[3]{671507968841} = 8756$, à moins d'une unité près. Les élèves doivent répéter sur ces deux exemples, les raisonnemens que nous avons employés dans l'opération précédente (311). Et il est aisé de voir pourquoi il faut commencer l'extraction de la racine cubique par la gauche, plutôt que par la droite.

313. *Pour avoir la racine cubique d'une fraction, il suffit de prendre la racine cubique de chacun de ses termes* (303).

C'est ainsi que $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$ et que $\sqrt[3]{\frac{a^3}{c^3}} = \frac{a}{c}$.

Effectivement, si on élève chaque résultat au cube, on retrouve le nombre qui l'a donné.

314. Dès que l'un des termes de la fraction n'est pas un *cube parfait*, c'est-à-dire n'est pas le cube exact d'un nombre entier, la règle précédente ne doit pas s'appliquer, parce qu'elle ne donnerait, le plus souvent, qu'une approximation insuffisante; et il faudrait même, pour savoir jusqu'à quel point on est approché de la racine cubique cherchée, rendre le dénominateur un cube parfait, en multipliant les deux termes de la fraction par le carré de ce dénominateur. C'est ainsi qu'on aura

$$\sqrt[3]{\frac{7}{9}}=\sqrt[3]{\frac{567}{9^3}}=\frac{1}{9}\sqrt[3]{567}=\frac{8}{9}, \text{ à moins de } \frac{1}{9} \text{ près.}$$

315. Si l'on veut avoir la racine cubique d'un nombre quelconque a, à moins de $\frac{1}{n}$ près, il faudra multiplier ce nombre a par n^3, puis prendre la racine cubique b du plus grand cube b^3 contenu dans la partie entière du résultat an^3 et donner à cette racine b le nombre n pour dénominateur. De sorte que $\sqrt[3]{a}=\frac{b}{n}$, à moins de $\frac{1}{n}$ près.

En effet, puisque b est la racine cubique du plus grand cube b^3 contenu dans la partie entière de an^3, et par conséquent dans an^3, cette racine b ne peut être augmentée que d'une quantité $x<1$, pour donner la véritable racine; on aura donc

$$\sqrt[3]{an^3}=b+x;\text{ d'où (303) } n\sqrt[3]{a}=b+x, \text{ et } \sqrt[3]{a}=\frac{b}{n}+\frac{x}{n}.$$

Ainsi en prenant $\frac{b}{n}$ pour la racine cubique de a, l'erreur est $\frac{x}{n}$: et puisque $x<1$, cette erreur est moindre que $\frac{1}{n}$; on a donc effectivement $\sqrt[3]{a}=\frac{b}{n}$, à moins de $\frac{1}{n}$ près, comme on l'a trouvé en appliquant la règle proposée.

316. Au moyen de cette règle, on pourra toujours trouver un nombre aussi approché qu'on voudra de la racine cubique d'un nombre donné. Par exemple, cherchons la racine cubique de 2,7, à moins d'un centième près. Il faut donc multiplier 2,7 par le cube de 100, c'est-à-dire par 1000000, ce qui donne 2700000; puis extraire la racine cubique du plus grand cube contenu dans la partie entière du résultat, c'est-à-dire dans 2700000, ce qui fournit 139; enfin, donner à cette racine 139 le nombre 100 pour dénominateur, ce qui se fait en séparant deux chiffres décimaux sur sa droite, et l'on a ainsi $\sqrt[3]{2,7}=$

1,39, à moins d'un centième près, comme on peut le vérifier d'ailleurs, en observant que $2,7<(1,40)^3$ et que $2,7>(1,49)^3$.

D'après la même règle, on trouve : $\sqrt[3]{7\frac{3}{11}}=1,937$, à moins d'un millième près ; $\sqrt[3]{0,671507968843 7}=0,8756$, à moins d'un dimillième près, et $\sqrt[3]{67}=4$, à moins de $\frac{1}{14}$ près.

317. Lorsque le nombre proposé a plus de deux tranches de chiffres, on peut achever l'extraction de la racine cubique par la simple division. En effet, soit k un nombre dont les n derniers chiffres de la racine cubique sont à trouver ; soit x ces n derniers chiffres et a ceux déjà calculés ; a est donc un nombre significatif suivi dè n zéros et vaut $a.10^n$; on a par conséquent $\sqrt[3]{k}=a.10^n+x$; d'où l'on tire $k=a^3.10^{3n}+3a^2x.10^{2n}+3ax^2.10^n+x^3$, et

$$x=\frac{k-a^3.10^{3n}}{3a^2.10^{2n}}-\left(\frac{1}{a.10^n}+\frac{x}{3a^2.10^{2n}}\right)x^2 \ldots (1)$$

Pour que le dernier terme du second membre soit <1, il faut que a ait au moins un chiffre de plus que x, c'est-à-dire $(n+1)$ chiffres. Dans ce cas, puisque a renferme au moins $n+1$ chiffres, on a $a>10^n$. D'ailleurs, puisque x n'a que n chiffres, la plus grande valeur de x est $x=10^n-1$. Prenant donc la plus grande valeur de x et la plus petite valeur de a, qui est 10^n ; on verra que le second terme de (1) aura sa plus grande valeur et que cette plus grande valeur est <1. Ainsi dans tous les cas, on a

$$x=\frac{k-a^3.10^{3n}}{3a^2.10^{2n}}, \text{ à moins d'une unité près.}$$

Donc, puisque a renferme plus de chiffres que x, on voit que s'il reste à trouver, dans la racine cubique, moins de chiffres qu'il n'y en a de calculés, on achevera l'extraction en divisant le reste $k-a^3.10^{3n}$ par le triple carré de la racine trouvée a suivi de deux fois autant de zéros qu'il y a de chiffres à déterminer, et en poussant le quotient jusqu'aux unités : alors on aura la racine cubique du nombre proposé, à moins d'une unité près de l'ordre le moins élevé de cette racine. C'est ainsi qu'on trouve que la racine cubique du nombre 5264627832723456 est 173962, en nombre entier (*).

(*) Par là on voit que si la racine cubique doit avoir $2n+1$ chiffres, la valeur des n chiffres à droite du nombre proposé n'influera jamais sur la valeur entière de la racine cubique de ce nombre.

318. Maintenant que nous savons extraire la racine cubique des nombres, indiquons les principes pour trouver celle des polynomes.

Si l'on développe $(a+b+c+d)^3$, comme le cube d'un binome dont $a+b+c$ est le premier terme; que dans le résultat, on développe $(a+b+c)^3$, comme le cube d'un binome dont $a+b$ est le premier terme, et qu'enfin, dans le nouveau résultat, on remplace $(a+b)^3$ par sa valeur, on verra que

$$(a+b+c+d)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+ \\ 3(a+b)c^2+c^3+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3.$$

Cette formule conduit à un énoncé général, au moyen duquel on trouve le cube d'un polynome beaucoup plus simplement que par deux multiplications successives.

319. *Après avoir soustrait d'un polynome proposé le cube des* N *premiers termes de sa racine cubique ordonnée, si l'on divise le premier terme du reste* R, *aussi ordonné, par le triple carré du premier terme de cette racine, le quotient sera le* $(N+1)^{me}$ *terme de la même racine.* C'est ce qu'on démontre comme au n° 232.

320. De là il est aisé de conclure, que pour extraire la racine cubique d'un polynome donné, il faut, après avoir ordonné ce polynome, extraire la racine cubique de son premier terme, et cette racine sera le premier terme de la racine cubique cherchée. Soustrayant du polynome le cube de ce premier terme et divisant le premier terme du reste par le triple carré du terme trouvé à la racine, le quotient en exprimera le second terme. Après avoir soustrait du polynome proposé le cube des deux premiers termes de la racine, on divisera le premier terme du reste ordonné par le triple carré du premier terme de la même racine, et le quotient sera le troisième terme. Soustrayant du polynome le cube des trois termes trouvés à la racine, et continuant le même procédé, on aura le quatrième terme, le cinquième, etc.

D'après cette règle, si l'on a le polynome

$$a^6-9a^5x+21a^4x^2+9a^3x^3-42a^2x^4-36ax^5-8x^6,$$

on verra que sa racine cubique est $a^2-3ax-2x^2$. De même u^3-2u^2+3u-1 est la racine cubique du polynome

$$u^9-6u^8+21u^7-47u^6+75u^5-84u^4+66u^3-33u^2+9u-1.$$

De l'extraction des racines des nombres.

321. Lorsqu'on sait extraire les racines carrées et les racines cubiques, on peut trouver assez facilement les racines *quatrièmes*, les racines *sixièmes*, les racines *huitièmes*, les racines *neuvièmes*, et même les racines *douzièmes*. En effet, la racine quatrième s'obtient en prenant la racine carrée de la racine carrée du nombre proposé, car $\sqrt{(\sqrt{a^4})}=\sqrt{a^2}=a=\sqrt[4]{a^4}$.

La racine 6^{me} se trouve en prenant la racine cubique de la racine carrée du nombre ; car $\sqrt[3]{(\sqrt{a^6})}=\sqrt[3]{a^3}=a=\sqrt[6]{a^6}$.

On verra de même que la racine 8^{me} s'obtient par trois extractions successives de racines carrées ; la racine 9^{me} par deux extractions de racines cubiques, et la racine 12^{me}, par deux extractions de racines carrées suivies d'une extraction de racine cubique.

322. Comme l'extraction des racines exige que l'on connaisse les puissances des neuf premiers nombres entiers, voici les puissances de ces nombres, depuis la quatrième jusqu'à la septième, inclusivement :

1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 651 ;
1, 32, 243, 1024, 3125, 7776, 16807, 32768, 59049 ;
1, 64, 729, 4096, 15625, 46656, 117649, 262144, 531441 ;
1, 128, 2187, 16384, 78125, 279936, 823543, 2097152, 4782969.

323. Puisque le produit a toujours autant de zéros à sa droite qu'il s'en trouve à la suite de tous ses facteurs, il s'ensuit que la puissance r^{me} de 1 *suivi de* n *zéros* est 1 *suivi de* nr *zéros*, et que réciproquement, la racine r^{me} de 1 *suivi de* nr *zéros* est 1 *suivi de* n *zéros*.

324. *La racine* r^{me} *d'un nombre* a *contient toujours autant de chiffres que ce nombre renferme de tranches de* r *chiffres chacune, en allant de droite à gauche, excepté la première à gauche qui peut avoir moins de* r *chiffres.*

Soit n le nombre de tranches ; le nombre a contiendra donc nr chiffres, au plus, et $nr-r+1$ chiffres, au moins ; a sera donc plus grand que le plus petit nombre de $nr-r+1$ chiffres, qui est 1 *suivi de* nr$-$r *zéros*, et qu'on désigne, pour abréger, par $1\,(nr-r)\,0$; on aura par conséquent $a>1\,(nr-r)\,0$. Extrayant la racine r^{me} de part et d'autre, on aura $\sqrt[r]{a}>1\,(n-1)\,0$. Or, $1\,(n-1)\,0$ est le moindre nombre de n chiffres ; donc la racine r^{me} de a, qui est plus grande, aura au moins n chiffres. Mais elle n'en aura pas plus ; car si elle avait $n+1$ chiffres, elle serait au moins $1\,(n)\,0$; donc sa puissance r^{me}, ou le nombre proposé a, serait au moins $1\,(nr)\,0$; ce nombre aurait donc $nr+1$ chiffres ; ce qui est absurde, puisqu'il a nr chiffres, au plus. Donc la racine r^{me} de a n'aura que n chiffres, c'est-à-dire autant que ce nombre a de tranches.

325. *La plus grande puissance* r^{me} *contenue dans les* p *premières tranches du nombre proposé est la puissance* r^{me} *des* p *premiers chiffres de la racine* r^{me} *de ce nombre.*

Supposons que le nombre proposé renferme $p+q$ tranches de chiffres ; sa racine r^{me} aura $p+q$ chiffres (324). Soit x les p premiers chiffres à gauche de cette racine ; ces p premiers chiffres seront donc un nombre significatif x *suivi de* q *zéros*, car il y a q chiffres après ; leur puissance r^{me} sera donc un nombre significatif x^r *suivi de* qr *zéros* ; cette puissance r^{me} x^r ne peut donc se trouver que dans les p premières tranches, qui sont aussi un nombre significatif *suivi de* qr *zéros*, car il y a q tranches de r chiffres après. Ainsi x^r, puissance r^{me} des p premiers chiffres de la racine, se trouve dans les p premières tranches. De plus, je dis que x^r est la plus grande puissance r^{me} contenue dans les mêmes tranches; car si $(x+1)^r$ pouvait s'y trouver, $(x+1)^r$ serait un nombre *suivi de* qr *zéros*, comme appartenant à un nombre *suivi de* qr *zéros*; et le nombre proposé a, qui est plus grand que ses p premières tranches, serait plus grand, à plus forte raison, que le nombre $(x+1)^r\,(qr)$ o contenu dans ces p tranches; on aurait donc $a > (x+1)^r\,(qr)$ o et $\sqrt[r]{a} > (x+1)\,(q)$ o. La racine r^{me} de a aurait donc au moins $x+1$ unités suivies de q zéros; ce qui est absurde, puisqu'on a désigné par x toutes les unités de cette racine qui sont suivies de q zéros. Donc réellement, x^r est la plus grande puissance r^{me} contenue dans les p premières tranches. On voit donc que la plus grande puissance r^{me} contenue dans les p premières tranches du nombre proposé, est x^r, c'est-à-dire la puissance r^{me} des p premiers chiffres de la racine r^{me} de ce nombre.

326. Nous pouvons maintenant trouver comment on calcule la racine r^{me} d'un nombre entier donné. Partageons d'abord ce nombre en tranches de r chiffres, de droite à gauche : la plus grande puissance r^{me} contenue dans la première tranche sera celle du premier chiffre de la racine cherchée (325); donc la racine r^{me} de cette plus grande puissance r^{me} exprimera le premier chiffre lui-même.

Supposons qu'on ait les p premiers chiffres; ôtons leur puissance r^{me} des p premières tranches du nombre, et à côté du reste, abaissons la $(p+1)^{me}$; il viendra un nombre M. Or, la plus grande puissance r^{me} contenue dans les $(p+1)$ premières tranches, est la puissance r^{me} des $p+1$ premiers chiffres de la racine (325), et peut se représenter par $a^r + ra^{r-1}x + \cdots + x^r$, a désignant les p premiers chiffres de la racine et x le $(p+1)^{me}$. Et puisqu'on vient de soustraire de ces $p+1$ premières tranches, la puissance r^{me} des p premiers chiffres, ou a^r, le reste M doit renfermer $ra^{r-1}x + \frac{1}{2}r(r-1)a^{r-2}x^2 +$ etc. Mais les p premiers chiffres a de la racine désignent des dizaines par rapport au $(p+1)^{me}\,x$; donc $ra^{r-1}x$ exprimera des unités *suivies de* $(r-1)$ *zéros*, et ne pourra se trouver que dans les unités de même ordre de M, c'est-à-dire dans la partie de M qui est à gauche de ses $r-1$ derniers chiffres. Divisant donc cette partie à gauche par ra^{r-1}, c'est-à-dire par r fois la puissance $(r-1)^{me}$ des p premiers chiffres a de la racine, on aura très-probablement le $(p+1)^{me}\,x$ au quotient; car sauf la retenue, on divisera un produit par l'un de ses deux facteurs.

Cependant, comme le quotient pourrait surpasser le $(p+1)^{me}$ chiffre, il est nécessaire de vérifier ce quotient, en retranchant des $p+1$ premières tranches du nombre proposé la puissance r^{me} de la racine trouvée u; car si la soustraction est possible et que les $(p+1)$ premières tranches soient moindres que $(u+1)^r$, il est visible que u^r sera la plus grande puissance r^{me} contenue dans ces $p+1$ premières tranches ; u exprimera par conséquent les $p+1$ premiers chiffres de la racine cherchée (325). Mais si les $(p+1)$ premières tranches n'étaient pas moindres que $(u+1)^r$, la racine trouvée u devrait être augmentée au moins d'une unité.

Par ce procédé, après avoir trouvé le premier chiffre de la racine, on aura les deux premiers, puis les trois premiers, les quatre premiers, et ainsi de suite. Donc il en résulte la règle que voici :

327. Pour avoir la racine r^{me} d'un nombre entier, il faut le partager en tranches de r chiffres chacune, en allant de droite à gauche. Prendre la racine r^{me} de la plus grande puissance r^{me} contenue dans la première tranche à gauche, et cette racine r^{me} sera le premier chiffre de la racine cherchée. Soustraire de la première tranche la puissance r^{me} du chiffre trouvé à la racine, et à côté du reste abaisser la seconde tranche ; ce qui donnera un nombre dont on séparera par une virgule les $r-1$ derniers chiffres : divisant la partie à gauche de la virgule par r fois la puissance $r-1$ ième du premier chiffre de la racine, le quotient exprimera le second chiffre ou un chiffre plus grand. Pour vérifier ce quotient, il faut retrancher des deux premières tranches la puissance r^{me} de la racine trouvée ; et si la soustraction est possible et que les deux premières tranches soient moindres que la puissance r^{me} du nombre immédiatement plus grand que la racine trouvée ; cette racine exprimera les deux premiers chiffres de la racine cherchée. A côté du reste on abaissera la troisième tranche ; on séparera les $r-1$ derniers chiffres du nombre résultant, et l'on divisera la partie à gauche par r fois la puissance $(r-1)^{me}$ des deux chiffres trouvés à la racine, et le quotient, vérifié comme le précédent, exprimera le troisième chiffre. On continuera ce procédé jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de tranches à abaisser.

Au moyen de cette règle, on trouve que la racine cinquième de 4567834561 45 est 215, à moins d'une unité près.

328. Si l'on veut avoir la racine r^{me} d'un nombre quelconque a, à moins de $\frac{1}{n}$ près, il faudra multiplier ce nombre par n^r, puis extraire la racine r^{me} de la plus grande puissance r^{me} contenue dans la partie entière du nombre résultant an^r, et donner à cette racine b le nombre n pour dénominateur. De sorte que $\sqrt[r]{a}=\frac{b}{n}$, à moins de $\frac{1}{n}$ près.

C'est ce qu'on démontre en raisonnant comme au n° 315. Ainsi on aura $\sqrt[5]{39}=2,0807$, à moins de 0,0001 près.

329. L'extraction des racines conduit à résoudre les équations qui ne contiennent qu'une seule puissance de l'inconnue, et qu'on appelle équations *binomes* ou à *deux termes*, parce qu'on peut

toujours les ramener à la forme $x^m = a$. Qu'on ait, par exemple, l'équation

$$\frac{5x^5}{48} - \frac{3}{2} + \frac{7x^5}{32} = \frac{15x^5}{64} - \frac{13}{3}.$$

Si l'on prend, dans cette équation, la valeur de x^5, comme dans une équation du premier degré, on trouvera $x^5 = -32$; ce qui donne $x = -2$.

De même, si l'on a l'équation

$$\frac{5x^4}{36} - 40 = \frac{7x^4}{108} + 56,$$

on en déduira $x^4 = 1296$ et $x = \pm 6$ (300).

330. Au moyen de l'extraction des racines, on peut aussi résoudre toutes les équations ne contenant que deux puissances de l'inconnue, ayant l'une un exposant double de celui de l'autre. Ces équations peuvent donc toujours se ramener à la forme $x^{2m} + px^m = q$.

Pour résoudre cette équation générale, il faut y supposer $x^m = u$; ce qui la réduit à $u^2 + pu = q$, équation du second degré. Connaissant les valeurs u' et u'' de u, dans cette dernière équation, on en conclura $x^m = u'$ et $x^m = u''$, équations à deux termes, qu'on sait résoudre.

C'est ainsi qu'on traitera chacune des équations

$$x^9 + 81x^5 = 82x \quad \text{et} \quad \frac{3x^6}{16} - \frac{5x^3}{8} + 4 = \frac{7x^6}{32} - \frac{x^3}{4} - 1.$$

Du calcul des radicaux.

331. Pour élever un monome à une puissance donnée, il faut élever son coefficient à cette puissance et multiplier l'exposant de chaque lettre par celui de la puissance. C'est ainsi qu'on aura $(3a^4b^3)^4 = 81a^{16}b^{12}$.

En effet, $(3a^4b^3)^4 = 3a^4b^3 \times 3a^4b^3 \times 3a^4b^3 \times 3a^4b^3 = 3.3.3.3a^4a^4a^4a^4b^3b^3b^3b^3 = 81a^{16}b^{12}$.

332. Pour extraire une certaine racine d'un monome, il faut prendre cette racine du coefficient et diviser l'exposant de chaque lettre par l'indice de la racine à extraire. Ainsi

$$\sqrt[5]{-32a^{10}b^{15}} = -2a^2b^3.$$

Effectivement, si on élève $-2a^2b^3$ à la puissance 5^{me}, on retrouve le monome proposé $-32a^{10}b^{15}$. De même, on a

$$\sqrt[6]{729a^6x^{18}} = \pm 3ax^3.$$

333. Lorsque la racine demandée ne peut s'obtenir exactement, il est nécessaire de l'indiquer et de soumettre l'expression radicale résultante à toutes les règles du calcul des nombres; ce qui conduit au calcul des radicaux de tous les degrés.

Le but de ce calcul est de combiner les expressions radicales de manière que l'extraction des racines soit la dernière des opérations à effectuer pour avoir la quantité cherchée, ce qui permet d'apprécier le degré d'approximation obtenu; tandis que si l'on opérait sur les racines approchées, l'erreur pourrait se multiplier au point de n'être plus négligeable dans le résultat final.

334. Il est clair (303) que $b\sqrt[r]{a} = \sqrt[r]{b^r}\sqrt[r]{a} = \sqrt[r]{ab^r}$. Donc pour faire entrer sous un radical du r^{me} degré, le facteur qui le multiplie, il suffit d'élever ce facteur à la puissance r^{me}, et de multiplier, par cette puissance, la quantité sous le radical proposé. D'après cela, on aura

$$2a\sqrt[5]{\frac{3x^2}{8a^2}} = \sqrt[5]{\frac{3x^2}{8a^2} \times 32a^5} = \sqrt[5]{12a^3x^2}.$$

335. La valeur numérique d'une expression radicale ne change pas, lorsqu'on multiplie ou qu'on divise par un même nombre, l'indice du radical et les exposans des facteurs de la quantité qui lui est soumise. En effet, soit $x = \sqrt[r]{a^n}$; on aura donc $x^r = a^n$. Élevant de part et d'autre à la puissance v^{me}, il viendra $x^{rv} = a^{nv}$. Extrayant la racine rv ième des deux membres, et remplaçant x par son expression, on aura

$$x = \sqrt[rv]{a^{nv}} \text{ et } \sqrt[r]{a^n} = \sqrt[rv]{a^{nv}}. \text{ Donc, etc.}$$

336. Ce principe donne le moyen de simplifier une expression radicale, en divisant par un même nombre, l'indice du radical et les exposans des facteurs de la quantité qui lui est soumise. C'est ainsi, par exemple, qu'on aura

$$\sqrt[6]{8a^9x^3} = \sqrt{2a^3x}.$$

337. Il existe une autre manière de simplifier une expression radicale : elle se réduit à décomposer la quantité sous le signe

en deux facteurs dont l'un soit une puissance parfaite de l'ordre de la racine à extraire ; car alors l'expression proposée est égale à la racine du premier facteur multipliée par la racine indiquée du second (303). Par exemple, il est clair qu'on a

$$\sqrt[3]{-81a^5b^7}=\sqrt[3]{-27a^3b^6\cdot 3a^2b}=-3ab^2\sqrt[3]{3a^2b}.$$

338. Deux radicaux sont *semblables*, lorsqu'ayant le même indice, les quantités qu'ils affectent, sont les mêmes. Des radicaux, qui ne paraissent pas semblables, peuvent le devenir en les simplifiant (336 et 337). Par exemple, en simplifiant les radicaux $3\sqrt[8]{9a^6x^{12}}$ et $2a\sqrt[4]{243a^7x^2}$, ils deviennent $3x\sqrt[4]{3a^3x^2}$ et $6a^2\sqrt[4]{3a^3x^2}$, et sont par conséquent semblables. Le multiplicateur d'un radical en est le *coefficient*.

339. L'addition et la soustraction des radicaux ne peuvent s'effectuer que quand ces radicaux sont semblables ; et dans ce cas, il suffit d'ajouter ou de soustraire les coefficiens et de multiplier le résultat par la quantité radicale commune. Par exemple, si l'on veut ôter $-4a\sqrt[3]{3a^2x}$ de la somme des deux quantités $2a\sqrt[3]{3a^2x}$ et $-3b\sqrt[3]{3a^2x}$, on écrira $(2a-3b+4a)\sqrt[3]{3a^2x}$, ou plutôt $(6a-3b)\sqrt[3]{3a^2x}$.

340. Puisque $\sqrt[r]{a}\times\sqrt[r]{b}=\sqrt[r]{ab}$ et que $\sqrt[r]{a}:\sqrt[r]{b}=\sqrt[r]{\frac{a}{b}}$, on voit que pour multiplier ou diviser entre eux des radicaux de même indice, il faut multiplier ou diviser entre elles les quantités qui leur sont soumises, et couvrir le résultat du signe radical commun. Ainsi

$$\sqrt[3]{3a^2z^2}\times\sqrt[3]{18a^2z^4}=\sqrt[3]{54a^4z^6}=3az^2\sqrt[3]{2a},$$
$$\sqrt[4]{64x^{10}y^9}:\sqrt[4]{4x^2y}=\sqrt[4]{16x^8y^8}=\pm 2x^2y^2.$$

341. Si les radicaux avaient des indices différens, il faudrait, pour effectuer la multiplication et la division, les réduire d'abord au même indice, en multipliant l'indice de chacun et les exposans des facteurs placés sous lui, par le produit des indices de tous les autres radicaux, ou par des nombres plus petits, comme dans la réduction des fractions au même dénominateur : il est clair qu'alors les expressions radicales proposées conserveraient toujours leurs valeurs numériques (335). Par exemple,

$$\sqrt{2a^3} \times \sqrt[4]{12a^2} = \sqrt[4]{4a^6} \times \sqrt[4]{12a^2} = \sqrt[4]{48a^8} = \pm 2a^2 \sqrt[4]{3}.$$

342. Pour élever une expression radicale à une certaine puissance, il faut multiplier les exposans des facteurs sous le radical par l'exposant de la puissance ; ou bien, s'il est possible, diviser l'indice du radical par le même exposant. En effet,

1° Soit $x = \sqrt[r]{a^n}$; il est clair qu'on aura successivement

$$x^r = a^n, \quad x^{vr} = a^{nv}, \quad x^v = \sqrt[r]{a^{nv}} \quad \text{et} \quad (\sqrt[r]{a^n})^v = \sqrt[r]{a^{nv}}.$$

2° D'après cela, $(\sqrt[rv]{a^n})^v = \sqrt[rv]{a^{nv}} = \sqrt[r]{a^n}$ (335).

La règle précédente donne

$$(2a\sqrt[6]{a^5u})^3 = 8a^3\sqrt{a^5u} = 8a^5\sqrt{au}.$$

343. Pour extraire une certaine racine d'une expression radicale, il faut multiplier l'indice du radical par celui de la racine à extraire ; ou bien, s'il est possible, diviser par cet indice, les exposans des facteurs sous le radical proposé. En effet,

1° Soit $x = \sqrt[v]{\sqrt[r]{a^n}}$; il est visible qu'on aura successivement

$$x^v = \sqrt[r]{a^n}, \quad x^{vr} = a^n, \quad x = \sqrt[rv]{a^n} \quad \text{et} \quad \sqrt[v]{\sqrt[r]{a^n}} = \sqrt[rv]{a^n}.$$

2° De là $\sqrt[v]{\sqrt[r]{a^{nv}}} = \sqrt[rv]{a^{nv}} = \sqrt[r]{a^n}$ (335).

D'après la règle qu'on vient d'établir, il est clair qu'on a

$$\sqrt[4]{81\sqrt[3]{16}} = 3\sqrt[3]{2} \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{(8\sqrt{16\sqrt{2}})} = 4\sqrt[4]{2}.$$

344. Dans les règles des quatre numéros précédens, si les radicaux avaient des coefficiens, il faudrait opérer sur ces coefficiens. On peut remarquer que les règles du calcul des radicaux reposent sur le principe que toute quantité est égale à la racine r^{me} de sa puissance r^{me} (299). Or, ce principe, qui est vrai tant qu'on ne considère que des nombres absolus, ne l'est pas toujours pour les diverses expressions auxquelles peut conduire l'algèbre, ou du moins il donne lieu à des distinctions, sans lesquelles il cesserait d'être exact. Par exemple, si l'on n'a égard qu'à la valeur *arithmétique*, il est évident que $2 = \sqrt{4}$; mais si l'on devait considérer la valeur négative de $\sqrt{4}$, qui est -2, il est clair qu'on n'aurait plus $2 = \sqrt{4}$.

345. On appelle valeurs *arithmétiques*, les nombres entiers, fractionnaires et irrationnels ; et valeurs *algébriques*, les expressions négatives, infinies et imaginaires.

346. Une expression radicale n'a jamais qu'une seule valeur arithmétique ; mais elle peut avoir plusieurs valeurs algébriques, dont le nombre augmente ou diminue toujours, suivant qu'on multiplie ou qu'on divise par un même nombre l'indice du radical et les exposans des facteurs de la quantité qui lui est soumise. C'est ce qu'on peut aisément vérifier ; car si l'on pose

$$x = \sqrt[3]{a^3} \text{ et } y = \sqrt[6]{a^6},$$

on en déduira $x^3 - a^3 = 0$ et $y^6 - a^6 = 0$.

Or, on peut résoudre chacune de ces équations par la décomposition en facteurs. D'abord la première devient $(x - a)(x^2 + ax + a^2) = 0$. Et puisqu'un produit est nul dès que l'un de ses facteurs est zéro, on voit que l'équation $x^3 - a^3 = 0$ donne $x - a = 0$ et $x^2 + ax + a^2 = 0$; d'où $x = a$ et $x = \frac{1}{2}a(-1 \pm \sqrt{-3})$. De sorte que la racine cubique de a^3 a trois valeurs, dont une seule est arithmétique.

L'équation $y^6 - a^6 = 0$, étant identique avec

$$(y^3 - a^3)(y + a)(y^2 - ay + a^2) = 0,$$

elle fournit à y les trois mêmes valeurs que celles qu'on a trouvées pour x ; mais de plus elle donne à y trois autres valeurs, qu'on obtient en résolvant les équations $y + a = 0$ et $y^2 - ay + a^2 = 0$.

Ainsi on voit qu'en multipliant par 2 l'indice du radical et l'exposant de a, dans $\sqrt[3]{a^3}$, la nouvelle expression $\sqrt[6]{a^6}$ aura la même valeur arithmétique a que la première ; elle aura aussi deux valeurs algébriques communes avec elle ; mais de plus elle renfermera trois autres valeurs qui ne se trouvent pas dans $\sqrt[3]{a^3}$.

347. En général, *la racine* r^{me} *d'un nombre a toujours* r *valeurs, dont une seule arithmétique.* C'est ce dont on fait aisément la preuve pour les racines 2^e, 3^e, 4^e et 6^e, en opérant comme dans l'exemple précédent. Pour montrer que $\sqrt[5]{a}$ a cinq valeurs, soit $x = \sqrt[5]{a}$; nous aurons donc $x^5 - a = 0$. Posant $a = c^5$, il viendra $x^5 - c^5 = 0$; d'où

$$(x - c)(x^4 + cx^3 + c^2x^2 + c^3x + c^4) = 0.$$

Ce qui donne d'abord $x = c$, et ensuite

$$x^4 + cx^3 + c^2x^2 + c^3x + c^4 = 0.$$

Divisant les deux membres de cette équation par x^2, et prenant

$$x + \frac{c^2}{x} = u, \text{ d'où } x^2 + \frac{c^4}{x^2} = u^2 - 2c^2,$$

on aura $u^2 - 2c^2 + cu + c^2 = 0$, ou $u^2 + cu = c^2$.

Cette équation donne à u deux valeurs réelles u' et u'', qui étant substituées dans $x + \frac{c^2}{x} = u$, fourniront deux équations du second degré en u, desquelles on tirera quatre valeurs algébriques pour x. De sorte que $\sqrt[5]{a}$ a cinq valeurs, dont une seule arithmétique.

348. Dans $x = \sqrt[8]{256}$, on trouvera $x = \pm 2$, $x = \pm 2\sqrt{-1}$, $x = \pm 2\sqrt[4]{-1}$ et $x = \pm 2\sqrt{-\sqrt{-1}}$.

De $x = \sqrt[9]{a^9}$, on tire $(x^3 - a^3)(x^6 + a^3x^3 + a^9) = 0$; d'où il n'est pas difficile d'obtenir les neuf valeurs de x.

Enfin l'expression $x = \sqrt[10]{1}$, donnant $(x^5 - 1)(x^5 + 1) = 0$, fournit à x ou à $\sqrt[10]{1}$, dix valeurs dont une est égale à 1.

349. Pour vérifier si $-\frac{1}{2}\sqrt[6]{-1}\,(1 + \sqrt{-3})$ est l'une des six racines 6^{mes} de -1, il faut l'élever à la puissance 6^{me}; or la 6^{me} puissance du premier facteur est $-\frac{1}{64}$, et la 6^{me} puissance du second facteur s'obtient en prenant le cube de son carré, et donne 64; donc la 6^{me} puissance cherchée est $-\frac{1}{64} \times 64$ ou -1, comme cela doit être.

350. Pour former les puissances d'une imaginaire du second degré, telle que $\sqrt{-a}$, il suffit d'observer que l'exposant de la puissance ne peut avoir que l'une des quatre valeurs $4q$, $4q + 1$, $4q + 2$ et $4q + 3$, q étant entier, et que les puissances de $\sqrt{-1}$, marquées par ces quatre valeurs, sont respectivement 1, $\sqrt{-1}$, -1 et $-\sqrt{-1}$. Par exemple, 14 étant de la forme $4q + 2$, la 14^e puissance de $\sqrt{-a}$ ou de $\sqrt{a}\sqrt{-1}$, vaudra $a^7(\sqrt{-1})^{14}$ ou $-a^7$. La règle du n° 342 donnerait $\sqrt{a^{14}}$ ou $\pm a^7$. Cette règle présente donc une exception lorsque l'expression radicale est imaginaire.

351. En général, les règles du calcul des radicaux peuvent conduire à des résultats fautifs lorsque ces radicaux sont imagi-

naires. Par exemple, les règles de la multiplication et de la division des radicaux donnent $\sqrt[4]{-1} \times \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1} = 1$, et $\sqrt[6]{2} : \sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{-2}$; tandis que les véritables résultats doivent être $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt[6]{-2}$.

On remarque que si r est le double d'un nombre impair, on aura $\sqrt[r]{-1} = \sqrt{-1}$.

352. Le calcul des radicaux conduit à rendre rationnels les dénominateurs de certaines fractions, que l'on veut évaluer numériquement. D'abord si le dénominateur est le monome $\sqrt[r]{a}$, il suffira de multiplier les deux termes de la fraction par $\sqrt[r]{a^{r-1}}$, et le nouveau dénominateur sera a.

Mais si le dénominateur proposé est le binome $a \pm \sqrt[n]{b}$, il faudra multiplier les deux termes de la fraction par le quotient de la division des deux binomes $a^n - b$ et $a \pm \sqrt[n]{b}$, ou $a^n \mp b$ et $a \pm \sqrt[n]{b}$, suivant que n sera pair ou impair; et le nouveau dénominateur sera $a^n - b$, dans le premier cas, et $a^n \pm b$, dans le second. Ainsi on trouve

$$\frac{5}{2+\sqrt[3]{3}} = 4 - 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} = 4 - (2 - \sqrt[3]{3})\sqrt[3]{3},$$

$$\text{et} \quad \frac{7}{2-\sqrt[4]{2}} = 4 - 2\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4} - \tfrac{1}{2}\sqrt[4]{8}.$$

Si le dénominateur était $\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$, on le remplacerait par sa valeur $\sqrt[6]{27} - \sqrt[6]{4}$, et on prendrait, pour multiplier les deux termes, le quotient de $27 - 4$ par $\sqrt[6]{27} - \sqrt[6]{4}$.

Lorsque le dénominateur a plus de deux termes, dont deux au moins soient des radicaux d'un degré supérieur au second, il est impossible de rendre rationnel ce dénominateur.

Des exposans négatifs.

353. Les exposans m et v étant deux nombres entiers, si $m > v$, on vérifie aisément que $a^m : a^v = a^{m-v}$; car en multipliant le diviseur par le quotient, on reproduit le dividende. Mais si $m < v$, on ignore encore à quoi répond l'expression

a^{m-v}. Pour le trouver, on observe d'abord que $a^m = \frac{a^m}{a^v} \times a^v$ (58); on remarque ensuite que d'après la définition des exposans (20), l'expression a^{m-v} indique qu'il faut diminuer de v l'exposant m de a dans a^m, ou qu'il faut diminuer de v le nombre m des facteurs a du produit a^m; il faut donc supprimer v facteurs a, ou a^v, dans ce produit a^m ou dans $\frac{a^m}{a^v} \times a^v$; il reste par conséquent $\frac{a^m}{a^v}$ ou $a^m : a^v$. D'où il suit que

$$a^{m-v} = a^m : a^v \dots (1)$$

Cette formule sera vraie pour toutes les valeurs numériques des exposans entiers m et v : seulement, quand m sera moindre que v, a^{m-v} et $a^m : a^v$ seront deux manières d'indiquer la division de a^m par a^v, comme $\frac{7}{100}$ et 0,07 sont deux manières d'indiquer la division de 7 par 100.

354. Si $m = v$, la formule (1) devient $a^{v-v} = a^v : a^v$, ou $a^0 = 1$, comme au n° 22. Si $m = 0$, la même formule donne $a^{0-v} = a^0 : a^v$, ou $a^{-v} = 1 : a^v$. De sorte que l'exposant négatif $-v$ de a, indique la division de l'unité par le produit de v facteurs égaux à a (*).

355. Et comme le dividende 1 est le produit du diviseur a^v par le quotient a^{-v}, si l'on divise ce produit 1 par l'un de ses deux facteurs a^{-v}, on aura l'autre a^v au quotient; de sorte que $a^v = 1 : a^{-v}$. Déjà $a^{-v} = 1 : a^v$; donc

$$a^{\pm v} = 1 : a^{\mp v}.$$

Ainsi toute quantité affectée d'un exposant entier, est égale à l'unité divisée par cette même quantité affectée du même exposant pris en signe contraire; et réciproquement. Ce qui donne le moyen de mettre une fraction sous la forme d'un nombre entier, et réciproquement.

356. Ce principe, la formule (1) du n° 353 et le calcul des fractions, donnent successivement :

(*) On voit que l'exposant positif v indiquant la multiplication de l'unité par le produit de v facteurs a, l'exposant négatif $-v$ aura une signification contraire, c'est-à-dire indiquera la division de l'unité par le produit de v facteurs a; ce qui est conforme à l'interprétation des valeurs négatives (158).

$$a^m \times a^{-v} = a^m \times \frac{1}{a^v} = \frac{a^m}{a^v} = a^{m-v};$$

$$a^{-m} \times a^v = \frac{1}{a^m} \times a^v = \frac{a^v}{a^m} = a^{v-m} = a^{-m+v};$$

$$a^{-m} \times a^{-v} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^v} = \frac{1}{a^{m+v}} = a^{-m-v}.$$

D'ailleurs $a^m \times a^v = a^{m+v}$: cette formule et les trois précédentes, montrent que

$$a^{\pm m} \times a^{\pm v} = a^{\pm m \pm v}.$$

De là, et en multipliant de part et d'autre par $a^{\pm u}$, puis par $a^{\pm n}$, etc., on verra, que quels que soient les signes des exposans entiers d'une même lettre, dans les facteurs proposés, on doit n'écrire qu'une seule fois cette lettre comme facteur au produit, et lui donner pour exposant, la somme algébrique de tous ses exposans dans les facteurs du produit demandé. C'est ainsi qu'on aura

$$-7a^{-4}b^6 \times -2a^{-2}b^{-3} = 14a^{-6}b^3.$$

D'après cela, il est évident que les règles de la multiplication des polynomes doivent encore s'appliquer, lorsqu'il y a des exposans négatifs. Ainsi on trouvera que

$$(4a^{-1}b^{-2} - 3a^{-2}b^{-1} + 2a^{-3})(3a^{-1}b^{-2} - 2a^{-2}b^{-1} + 3a^{-3})$$
$$= 6a^{-6} - 13a^{-5}b^{-1} + 24a^{-4}b^{-2} - 17a^{-3}b^{-3} + 12a^{-2}b^{-4}.$$

357. Il est facile de vérifier que m et v étant entiers, on aura

$$a^{\pm m} : a^{\pm v} = a^{\pm m - (\pm v)};$$

car en multipliant le diviseur par le quotient obtenu, on reproduit le dividende (356). Il suit de là que, pour diviser l'une par l'autre deux puissances entières, positives ou négatives, d'une même lettre, il faut n'écrire qu'une seule fois cette lettre au quotient, et lui donner pour exposant son exposant dans le dividende moins son exposant dans le diviseur. Ainsi on aura

$$-12a^{-4}b^2 : 4a^2b^{-3} = -3a^{-6}b^5.$$

Il est clair, d'après cela, que les règles de la division des polynomes s'appliquent encore, lorsqu'il y a des exposans négatifs, en observant que plus un exposant négatif a d'unités, plus il est petit (176). Ainsi on obtiendra :

$$(a^{-12}-b^{-12}):(a^{-4}-b^{-4})=a^{-8}+a^{-4}b^{-4}+b^{-8},$$

et $(2a^5x-3a^4x^3-6a^2x^3+17ax^4-12x^5):(2a^3x-3a^2x^2)$
$$=a^2x-3a^{-1}x^2+4a^{-2}x^3.$$

358. Lorsqu'on arrive à un reste où le plus haut exposant de la lettre principale est moindre que son exposant dans le dernier terme du dividende moins son exposant dans le dernier terme du diviseur, la division ne saurait se terminer.

Soit pa^m le dernier terme du dividende et qa^n le dernier terme du diviseur. Supposons que, dans un reste, le plus haut exposant de a soit moindre que $m-n$; je dis que la division ne se terminera pas.

En effet, si en continuant cette division, on pouvait arriver à un reste nul; alors, comme l'exposant de a est toujours plus petit dans le quotient partiel que dans le premier terme du dividende partiel, le dernier terme du quotient serait donc de la forme ra^{m-n-v}. Or, le dividende est le produit du diviseur par le quotient; et le terme pa^m de ce produit, où la lettre a a le moindre exposant, vient du terme qa^n du multiplicande, où la lettre a a le moindre exposant, multiplié par le terme ra^{m-n-v} du multiplicateur, où la lettre a a le moindre exposant (51): donc on aurait
$$pa^m=qra^{m-v}\ \dots\ (1)$$

Cette égalité devrait être vraie pour toutes les valeurs de a; de sorte qu'en y faisant $a=1$, ce qui ne change pas les quantités p, q, r, qui ne contiennent pas a, on aurait $p=qr$; et par suite, l'égalité (2) se réduirait à $a^m=a^{m-v}$, égalité évidemment impossible. Donc la division ne se terminera pas.

359. Par exemple, qu'on ait à diviser a^3-x^3 par a^2-x^2: en observant que $-1<0$, $-2<-1$, $-3<-2$, etc., on pourra appliquer la règle du n° 68; et le troisième reste sera $+a^{-1}x^4-a^{-2}x^5$. Le plus haut exposant -1 de a, dans ce reste, étant moindre que $0-0$, c'est-à-dire que l'exposant de a dans le dernier terme du dividende moins l'exposant de a dans le dernier terme du diviseur, il s'ensuit que la division ne se terminera pas, et donnera le quotient que voici :
$$a+a^{-1}x^2-a^{-2}x^3+a^{-3}x^4-a^{-4}x^5+\text{etc., à l'infini.}$$

Si l'on avait indiqué la division sur le premier reste $+ax^2$

$-x^3$, où l'exposant de a est moindre que dans le premier terme du diviseur, on aurait trouvé :

$$\frac{a^3-x^3}{a^2-x^2}=a+\frac{ax^2-x^3}{a^2-x^2}=a+\frac{x^2}{a+x}.$$

Appliquant la règle de l'extraction de la racine carrée des polynomes (233), on trouvera, pour la racine carrée de a^2+1, la suite infinie (235)

$$a+\tfrac{1}{2}a^{-1}-\tfrac{1}{8}a^{-3}+\tfrac{1}{16}a^{-5}-\tfrac{5}{128}a^{-7}+\tfrac{7}{256}a^{-9}-\text{etc.}$$

Du calcul des exposans d'une nature quelconque.

360. Si l'on veut former la puissance m^{me} du monome $a^{\pm v}$, c'est-à-dire si l'on veut former un produit de m facteurs égaux à $a^{\pm v}$, il faudra écrire une seule fois la lettre a au produit, et lui donner pour exposant, la somme algébrique des m exposans $\pm v$ qu'elle a dans les m facteurs $a^{\pm v}$ (356). Or, cette somme étant m fois $\pm v$ ou $\pm v\times m$, on a

$$(a^{\pm v})^m=a^{\pm v\times m}.$$

Il suit de là et de la définition de l'exposant négatif (355), que

$$(a^{\pm v})^{-m}=1:(a^{\pm v})^m=1:a^{\pm v\times m}=a^{\pm v\times -m}.$$

Cette valeur et la précédente démontrent que

$$(a^{\pm v})^{\pm m}=a^{\pm v\times\pm m}.$$

Ainsi pour élever un monome à une puissance entière, il suffit de multiplier les exposans de ce monome par celui de la puissance, quels que soient d'ailleurs les signes de tous ces exposans.

Cette règle et le principe du n° 292, fournissent :

$$(-a^3b^{-2})^{-4}=a^{-12}b^8 \quad\text{et}\quad (-a^{-2}b^{-4})^{-3}=-a^6b^{12}.$$

361. Il est facile de voir, d'après ce qui précède (360 et 299), que m et r désignant deux nombres entiers, positifs ou négatifs, on aura

$$\sqrt[r]{a^{mr}}=\sqrt[r]{(a^m)^r}=a^m=a^{mr:r};$$

d'où il résulte que pour extraire une racine d'un monome, il faut diviser les exposans de ce monome par l'indice de la racine à extraire, quels que soient d'ailleurs les signes des exposans et de l'indice.

Au moyen de cette règle et du principe du n° 303, on trouve

$$\sqrt[-4]{a^8} = \pm a^{-2},\ \sqrt[3]{-a^6b^{-9}} = -a^2b^{-3}$$
$$\text{et } \sqrt[-2]{-a^{-4}b^{-2}} = a^2b\sqrt[-2]{-1}.$$

362. En appliquant la règle précédente, on obtient

$$\sqrt[r]{a^{\pm m}} = a^{\pm\frac{m}{r}} \ldots (1)$$

Si m n'est pas divisible par r, l'exposant de a sera une fraction. Or, comme l'énoncé : *a deux tiers de fois facteur*, signifie plutôt $\frac{2}{3}a$ que $a^{\frac{2}{3}}$, qu'on énonce a puissance deux tiers, on voit que les exposans fractionnaires ne sauraient désigner des nombres de facteurs, et que par suite la formule (1) ne saurait être démontrée, lorsque m n'est pas multiple de r.

Mais puisque le second membre de cette formule exprime la racine r^{me} de $a^{\pm m}$, lorsque m contient exactement r, rien n'empêche de lui faire indiquer la même chose, lorsque m n'est pas divisible par r; car l'expression $a^{\pm\frac{m}{r}}$ n'offrant aucun sens par elle-même, on est maître de lui faire signifier ce qui n'est pas contraire aux conventions établies. Nous supposerons donc toujours désormais, que $a^{\pm\frac{m}{r}}$ désigne la racine r^{me} de $a^{\pm m}$, et en conséquence nous écrirons

$$a^{\pm\frac{m}{r}} = \sqrt[r]{a^{\pm m}}.$$

Cette formule définit l'*exposant fractionnaire*, et fournit deux manières différentes d'indiquer la racine r^{me} de $a^{\pm m}$.

363. Élevant les deux membres de l'identité précédente à la puissance r^{me}, celle du second sera $a^{\pm m}$ (299); donc il en sera de même de celle du premier. Ainsi pour élever une quantité affectée d'un exposant fractionnaire, à une puissance marquée par le dénominateur de cet exposant, il suffit d'y effacer ce dénominateur.

364. Soit $x = a^{\pm\frac{m}{r}}$; en élevant de part et d'autre à la puissance r^{me}, puis à la puissance v^{me}, on aura d'abord $x^r = a^{\pm m}$ (363), et ensuite $x^{rv} = a^{\pm mv}$ (360). Extrayant la racine rv^{me} des deux membres (362), puis remplaçant x par sa valeur primitive, il viendra

$$a^{\pm\frac{m}{r}} = a^{\pm\frac{mv}{rv}}.$$

On peut donc multiplier ou diviser par un même nombre les deux termes de l'exposant fractionnaire, sans changer la valeur numérique de l'expression proposée.

365. Cette expression n'a jamais qu'une seule valeur arithmétique; mais elle peut avoir plusieurs valeurs algébriques, dont le nombre augmente ou diminue toujours, suivant qu'on multiplie ou qu'on divise par un même nombre les deux termes de l'exposant fractionnaire; ce qui ne change pas d'ailleurs la valeur arithmétique. Dans tout ce qui va suivre, la quantité affectée d'un exposant fractionnaire sera un nombre positif, et nous n'aurons égard qu'à la seule valeur numérique que puisse fournir l'expression proposée.

366. Au moyen du principe établi plus haut (364), il sera toujours possible de réduire plusieurs exposans fractionnaires au même dénominateur, sans altérer les valeurs arithmétiques des expressions proposées; car cette réduction consistera toujours à multiplier par un même nombre les deux termes de chaque exposant fractionnaire.

367. Les exposans fractionnaires ne désignant pas des nombres de facteurs, leur calcul ne saurait se démontrer comme celui des exposans entiers, quoiqu'il soit absolument le même, ainsi qu'on va le faire voir, en énonçant d'abord chaque règle et la vérifiant ensuite.

368. Pour élever un monome à une puissance quelconque, il suffit de multiplier les exposans de ce monome par celui de la puissance, quels que soient d'ailleurs tous ces exposans.

En effet, soit $x = a^{\pm\frac{m}{r}}$; on aura $x^r = a^{\pm m}$ (363). Élevant de part et d'autre à la puissance $\pm n$, il viendra $x^{\pm nr} = a^{\pm m \times \pm n}$ (360). Extrayant la racine rv ième des deux membres (362), puis supprimant le facteur r des deux termes de l'exposant de x, et observant que dans la division de $\pm m \times \pm n$ par rv, le quotient peut se mettre sous la forme $\pm\frac{m}{r} \times \pm\frac{n}{v}$, on trouvera:

11*

$$x^{\pm\frac{n}{v}} = a^{\pm\frac{m}{r}\times\pm\frac{n}{v}}; \text{ d'où } \left(a^{\pm\frac{m}{r}}\right)^{\pm\frac{n}{v}} = a^{\pm\frac{m}{r}\times\pm\frac{n}{v}}.$$

369. Pour extraire une racine quelconque d'un monome, il faut diviser les exposans de ce monome par celui de la racine à extraire, quels que soient d'ailleurs tous ces exposans. Ainsi, n et v désignant des nombres entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, on aura $\sqrt[v]{a^n} = a^{n:v}$. Car si on élève à la puissance v^{me} l'expression $a^{n:v}$, on retrouvera le monome proposé a^n (368).

370. Pour multiplier entre elles plusieurs puissances fractionnaires d'une même lettre, il suffit d'écrire une seule fois cette lettre au produit, et de lui donner pour exposant, la somme algébrique des exposans qu'elle a dans les facteurs proposés. C'est ainsi que $a^{\pm\frac{m}{r}} \times a^{\pm\frac{n}{v}} = a^{\pm\frac{m}{r}\pm\frac{n}{v}}$.

En effet, si l'on élève chacune de ces deux expressions à la puissance rv ième (292), et qu'on réduise les exposans (364 et 356), les deux résultats seront égaux : donc réellement, ces deux expressions sont égales ; car il n'y a que deux quantités égales qui, élevées à la même puissance, puissent donner deux résultats égaux.

371. Pour diviser l'une par l'autre deux puissances quelconques d'une même lettre, il suffit d'écrire une seule fois cette lettre au quotient et de lui donner, pour exposant, son exposant dans le dividende moins son exposant dans le diviseur. Ainsi, m et v étant deux nombres entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, on aura $a^m : a^v = a^{m-v}$. Effectivement, si l'on multiplie le diviseur par le quotient, on retrouve le dividende.

372. D'après la règle qu'on vient d'énoncer, u étant un nombre quelconque, positif ou négatif, il viendra $a^0 : a^u = a^{-u}$, ou $1 : a^u = u^{-u}$. Donc l'unité divisée par une quantité ayant un exposant quelconque, équivaut à cette quantité affectée du même exposant, pris en signe contraire ; et réciproquement. De là on déduit que

$$\sqrt[-2]{-1} = (-1)^{-\frac{1}{2}} = 1 : (-1)^{\frac{1}{2}} = 1 : \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}.$$

En général, on trouve que $\sqrt[-2n]{-a} = 1 : \sqrt[2n]{-a}$.

373. Il est bon de remarquer que le calcul des radicaux peut se faire par celui des exposans fractionnaires, en remplaçant chaque radical par l'exposant fractionnaire équivalent (362). Mais il faut des règles particulières pour opérer immédiatement sur les radicaux, tandis qu'il n'en est pas de même des exposans fractionnaires, dont le calcul ne diffère pas des exposans entiers; et cela montre combien le choix du signe d'une opération peut influer sur la simplicité du calcul.

374. Au moyen du calcul des exposans fractionnaires, il est aisé de résoudre les deux problèmes que voici : 1° Si l'on multiplie la puissance — 5 sixièmes de 729 par la puissance 2 tiers de 27, et qu'on élève le produit à la puissance — 3 neuvièmes; combien aura-t-on? (R. 3.)

2° Si l'on multiplie la puissance — 3 quarts de 1296 par la puissance 3 demies de 9, et qu'on prenne la racine — 6 cinquièmes du produit élevé à la puissance — 2; combien aura-t-on? (R. $\frac{1}{32}$.)

Les principes des n°s 295 et 296, conduisent à résoudre ce problème : quelles sont les valeurs des radicaux dont les indices sont ∞, $-\infty$ et 0, la quantité a soumise à ces radicaux, étant $>$ ou $<$ 1?

375. *Le calcul des exposans irrationnels se fait d'après les mêmes règles que le calcul des exposans fractionnaires.* En effet, on ne peut obtenir que par approximation la valeur numérique d'un exposant incommensurable (215) : donc opérer sur un exposant irrationnel, ce n'est réellement opérer que sur l'exposant rationnel, qui en est la valeur aussi approchée qu'on le veut; donc le calcul du premier exposant se réduit à celui du second, et se fait par conséquent d'après les mêmes règles. On connaît donc déjà le calcul des exposans irrationnels; et il est d'ailleurs facile de se donner des exemples de ce calcul.

376. Quant aux exposans imaginaires; comme ce n'est que par convention que l'on opère sur eux d'après les mêmes règles que pour les exposans réels, il n'y a évidemment lieu à aucune démonstration.

Il est nécessaire de bien retenir le calcul des exposans d'une nature quelconque, parce qu'il est employé dans un grand nombre de circonstances. Nous allons en faire usage pour résoudre les équations exponentielles, sur lesquelles est basée l'importante théorie des logarithmes.

Des équations exponentielles.

377. On appelle *équation exponentielle*, toute équation où l'inconnue est à l'exposant.

378. La résolution des équations exponentielles est fondée sur le principe que voici : Si une quantité b est plus grande que l'unité, 1° les valeurs de ses puissances positives augmentent ou diminuent, suivant que les exposans de ces puissances augmentent ou diminuent; 2° réciproquement, si les valeurs des puissances augmentent ou diminuent, les exposans eux-mêmes augmenteront ou diminueront.

En effet, 1° puisque $b > 1$, il est clair qu'on aura

$$b^n > 1,\quad \sqrt[r]{b^n} > 1,\quad b^{\frac{n}{r}} > 1 \quad \text{et} \quad b^{\frac{n}{r}+\frac{m}{v}} > b^{\frac{m}{v}}.$$

2° Réciproquement, si $b^x > b^n$, on n'aura pas $x = n$, sans quoi on aurait aussi $b^x = b^n$; ce qui est contre la supposition : on n'aura pas non plus $x < n$, puisqu'alors, d'après la proposition directe (1°), il viendrait $b^x < b^n$; ce qui est encore contre la supposition. Donc on aura nécessairement $x > n$.

Si b était plus petit que l'unité, les propriétés contraires auraient lieu : l'exposant positif de la puissance augmentant ou diminuant, la valeur numérique de la puissance diminuerait ou augmenterait; et réciproquement.

379. Cherchons la valeur de x dans l'équation

$$8^x = \tfrac{1}{32}.$$

On voit d'abord que x ne saurait avoir de valeur positive; car en faisant $x = 0$, on aurait un nombre $1 > \frac{1}{32}$; et x surpassant 0, 8^x surpasserait à plus forte raison $\frac{1}{32}$: donc x doit être négatif. Prenant donc $x = -u$, il viendra

$$8^{-u} = \frac{1}{32},\ \text{ou}\ \frac{1}{8^u} = \frac{1}{32},\ \text{ou enfin}\ 8^u = 32.$$

Les hypothèses $u = 1$ et $u = 2$ donnent $8^1 < 32$ et $8^2 > 32$; donc $8^u > 8^1$ et $8^u < 8^2$; donc $u > 1$ et $u < 2$ (378). Par conséquent on peut faire $u = 1 + \frac{1}{y}$, y étant plus grand que l'unité. Substituant cette valeur de u dans $32 = 8^u$, on aura successivement, d'après le calcul des exposans fractionnaires,

$$32 = 8^{1+\frac{1}{y}} = 8^1 \times 8^{\frac{1}{y}};\ \text{d'où}\ 4 = 8^{\frac{1}{y}}\ \text{et}\ 4^y = 8.$$

Les suppositions de $y=1$ et $y=2$, donnent $4^1<8$ et $4^2>8$; donc $4^y>4^1$ et $4^y<4^2$; donc $y>1$ et $y<2$ (378). On peut donc faire $y=1+\frac{1}{v}$, v étant plus grand que 1. Substituant cette valeur de y dans l'équation $4^y=8$, on aura

$$8 = 4^{1+\frac{1}{v}} = 4^1 \times 4^{\frac{1}{v}};\ \text{d'où}\ 2 = 4^{\frac{1}{v}}\ \text{et}\ 2^v = 4.$$

Il est évident que $v=2$, dans cette dernière équation. Or, $y=1+\frac{1}{v}$; donc $y=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. Mais $u=1+\frac{1}{y}$; donc $u=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$. Ainsi on a $x=-u=-\frac{5}{3}$: telle est donc la valeur de x dans l'équation $8^x=\frac{1}{32}$.

C'est ce qu'on peut vérifier aisément; car à cause de $8=2^3$, il est clair qu'on aura successivement :

$$8^x = 8^{-\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{8^{-5}} = \sqrt[3]{2^{-15}} = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}.$$

Par une marche analogue à la précédente, les deux équations $128^x=4096$ et $243^y=2187$, donneront $x=\frac{12}{7}$ et $y=\frac{7}{5}$.

380. Considérons maintenant l'équation générale $a^x=b$, dans laquelle a et b sont des nombres positifs donnés et $a>1$. D'abord, on observe que dans cette équation, x ne saurait avoir qu'une seule valeur réelle; car si x avait deux valeurs réelles m et v, on aurait à la fois $a^m=b$ et $a^v=b$; d'où $a^m=a^v$ et par suite $m=v$; ce qui est absurde.

381. Actuellement, pour avoir la valeur réelle de x dans l'équation $a^x=b$, on commencera par substituer au lieu de x, successivement les nombres 0, 1, 2, 3, 4, etc.; et si les deux nombres m et $m+1$ donnent $a^m<b$ et $a^{m+1}>b$, on en conclura que $a^x>a^m$ et $a^x<a^{m+1}$; d'où $x>m$ et $x<m+1$ (378) : par conséquent $x=m+\frac{1}{y}$, y étant nécessairement plus grand que 1. Substituant cette valeur dans l'équation $b=a^x$, on en déduira, en faisant $b : a^m = c$,

$$b = a^{m+\frac{1}{y}} = a^m \times a^{\frac{1}{y}};$$

$$b : a^m = a^{\frac{1}{y}};\ c = a^{\frac{1}{y}}\ \text{et}\ c^y = a.$$

Par hypothèse, $a^m < b$; donc le quotient c de b divisé par a^m est plus grand que l'unité. Ainsi $c^y = a$ est une équation pareille à celle qui contient x; on trouvera donc y précisément comme on a trouvé x; et ainsi de suite. Par ce procédé, on aura la suite de valeurs :

$$x = m + \frac{1}{y},\quad y = n + \frac{1}{z},\quad z = p + \frac{1}{v},\quad v = q + \frac{1}{u},\ \text{etc.}$$

Si l'on arrête cette suite de valeurs à $u = r$; u sera trop petit; donc $\frac{1}{u}$ sera trop grand, ainsi que v; $\frac{1}{v}$ sera donc trop petit, de même que z; $\frac{1}{z}$ sera donc trop grand, ainsi que y; $\frac{1}{y}$ sera donc trop petit, de même que la valeur x' qui en résultera pour x. Mais si l'on arrête la suite de valeurs à $t = s$, on aura t trop petit, $\frac{1}{t}$ trop grand, u trop grand, $\frac{1}{u}$ trop petit, v trop petit, $\frac{1}{v}$ trop grand, z trop grand, $\frac{1}{z}$ trop petit, y trop petit, $\frac{1}{y}$ trop grand, ainsi que la valeur x'' qui en résultera pour x. Ainsi la valeur de x sera toujours comprise entre deux valeurs consécutives x' et x''; elle différera donc moins de l'une de ces valeurs, que celles-ci ne diffèrent entre elles : par conséquent, on pourra toujours connaître le degré d'approximation obtenu.

Nota. En continuant plus loin le procédé, on trouve des valeurs de plus en plus approchées de la véritable; car si l'on remplace dans x, chaque inconnue auxiliaire par l'expression de sa valeur, on aura pour x, cette fraction continue

$$x = m,\ n,\ p,\ q,\ r,\ s,\ \text{etc.}$$

dans laquelle on sait que les réduites successives approchent de plus en plus de la vraie valeur de x, et que l'erreur commise en prenant une réduite pour cette valeur, est toujours moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur de cette même réduite. (Voyez l'Arithmétique.)

382. Cherchons maintenant les conditions nécessaires pour que x soit commensurable dans l'équation $a^x = b$, a et b étant deux nombres entiers positifs. Supposons $x = \frac{m}{r}$, m et r étant entiers; alors il viendra $a^{\frac{m}{r}} = b$ et $a^m = b^r$. Soit p un des facteurs premiers de a; en divisant les deux membres de $a^m = b^r$ par p, le premier quotient sera un nombre entier; le second en sera donc un aussi; ce qui exige que p divise b; car si p ne divisait pas b, p serait premier avec chacun des facteurs du produit b^r; donc il ne diviserait pas ce produit; ce qui est ab-

surde : donc p divise b. On voit par là que a et b admettent précisément les mêmes facteurs premiers.

Soient p et q ces facteurs ; on aura donc $a=p^n q^v$ et $b=p^u q^z$; d'où en substituant dans l'équation $a^m=b^r$, il vient

$$p^{mn}q^{mv}=p^{ru}q^{rz}.$$

Si l'on pouvait avoir $mn>ru$, ou $mn=ru+t$, en divisant les deux membres par p^{mn}, le premier quotient serait un nombre entier, tandis que le second, qui se réduit à $q^{rz}:p^t$, serait un nombre fractionnaire, puisque les deux nombres q^{rz} et p^t sont premiers entre eux : donc les deux quotiens ne seraient pas égaux ; ce qui est absurde. Donc mn ne saurait être plus grand que ru. On verrait de même que mn ne saurait être plus petit que ru : donc $mn=ru$. On aura pareillement $mv=rz$. Cette équation et la précédente donnent

$$\frac{m}{r}=\frac{u}{n}=\frac{z}{v}.$$

On voit donc que si x est commensurable dans l'équation $a^x=b$, 1° a *et* b *renfermeront précisément les mêmes facteurs premiers ; 2° les rapports des exposans des facteurs premiers de* b *aux exposans des mêmes facteurs premiers dans* a, *seront égaux, et* x *vaudra l'un de ces rapports.*

Si ces deux conditions ne sont pas satisfaites, x sera incommensurable ; car si x avait alors une valeur rationnelle, on vient de voir que les deux conditions dont il s'agit seraient satisfaites.

383. *Toutes les fois que les facteurs premiers de* a *se trouvent au premier degré, dans* $a^x=b$, *les valeurs rationnelles de* x *sont des nombres entiers ;* car ayant alors $n=1$ et $v=1$, il vient $x=\frac{m}{r}=u=z$, et $b=p^u q^z=(pq)^u=a^u$.

Ainsi, à cause de $10=2.5$, les valeurs commensurables de x, dans $10^x=b$, sont des nombres entiers, qui rendent b une puissance parfaite de 10 ; et x n'est rationnel que dans ce cas.

384. Qu'on ait par exemple, à résoudre l'équation $10^x=2$. On voit d'abord que x est incommensurable, et que les suppositions de $x=0$ et $x=1$, donnent deux résultats, l'un plus petit et l'autre plus grand que 2 ; de sorte que x est compris entre 0 et 1, et qu'on a $x=\frac{1}{u}$, u étant plus grand que 1. Sub-

stituant cette valeur, il vient $10^{\frac{1}{u}}=2$; d'où $10=2^u$. Il est facile de voir que les hypothèses $u=3$ et $u=4$, donnent $2^3<10$ et $2^4>10$; donc il en résulte $2^u>2^3$ et $2^u<2^4$, ou $u>3$ et $u<4$ (378). Par conséquent, $u=3+\frac{1}{v}$. Substituant cette valeur, on aura

$$10=2^{3+\frac{1}{v}}=2^3\times 2^{\frac{1}{v}}=8\times 2^{\frac{1}{v}};\ \text{d'où}\ \tfrac{5}{4}=2^{\frac{1}{v}}\ \text{et}\ (\tfrac{5}{4})^v=2.$$

On trouve aisément que v est compris entre 3 et 4, et que par conséquent $v=3+\frac{1}{y}$. On a donc

$$2=\left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{y}}=\frac{125}{64}\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{y}};\ \frac{128}{125}=\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{y}}\ \text{et}\ \left(\frac{128}{125}\right)^y=\frac{5}{4}.$$

Après un petit nombre d'essais, on trouve que $y=9+\frac{1}{z}$. On pourrait continuer plus loin les calculs; mais en s'arrêtant à $y=9$ et remontant aux valeurs de v, u, x, on aura successivement $v=3+\frac{1}{9}=\frac{28}{9}$, $u=3+\frac{9}{28}=\frac{93}{28}$ et $x=\frac{28}{93}=0,30107$.

En continuant suffisamment les calculs, on aurait obtenu, à moins d'un dix-millionième près, $x=0,3010300$; d'où il suit qu'on a, d'une manière très-approchée,

$$10^{0,3010300}=2.$$

En appliquant la méthode précédente, on verra que l'équation $10^x=3$, donne $x=0,477$, à moins d'un millième près, et que l'équation $5^x=\frac{2}{3}$ fournit $x=-0,25$, à moins d'un centième près.

385. Lorsque a et b peuvent être négatifs, la résolution de l'équation $a^x=b$ se fait encore d'après la méthode précédente, pourvu qu'on ait égard aux signes qu'il faut donner aux puissances et aux racines (291 et 300). Par exemple, si l'on a les équations

$$4^x=-\tfrac{1}{8},\ (-8)^y=-32,\ (-32)^z=16384,\ (-16)^u=2048,$$

on trouvera $x=-\frac{3}{2}$, $y=\frac{5}{3}$, $z=\frac{14}{5}$ et u imaginaire.

386. Lorsqu'on peut décomposer en facteurs les nombres ou les deux membres de l'équation exponentielle, sa résolution devient beaucoup plus facile. Qu'on ait, par exemple, l'équation

$$9\cdot 16^x+64\cdot 16^{x-1}-256\cdot 16^{x-2}=384;$$

on observera que $64\cdot16^{x-1}=4\cdot16\cdot16^{x-1}=4\cdot16^x$, et que $256\cdot16^{x-2}=16^2\cdot16^{x-2}=16^x$; l'équation deviendra donc $(9+4-1)\,16^x=384$, ou $12\cdot16^x=384$ et $16^x=32$. De là, en décomposant 16 et 32 en facteurs, on aura $2^{4x}=2^5$; ce qui donne $4x=5$ et $x=\frac{5}{4}$.

Si l'on avait $5^{2^x}=390625$, on décomposerait le second membre en facteurs, et il viendrait $5^{2^x}=5^8$; d'où $2^x=8$ et $x=3$. L'équation $4\cdot4^{x^2}=32^x$ se traite d'une manière analogue.

L'équation $162\cdot8^x+5\cdot27^x=37\cdot27^x$, devient $81\cdot8^x=16\cdot27^x$; d'où $(\frac{2}{3})^{3x}=(\frac{2}{3})^4$, $3x=4$ et $x=\frac{4}{3}$.

Si l'on avait $8^x-128=960\cdot8^{4-x}$, on multiplierait les deux membres par 8^{x-4}, puis on prendrait $8^{x-2}=u$, et l'on aurait $u^2-2u=960$; d'où $u=32$ et $u=-30$. La première valeur de u donne $3x-6=5$ ou $x=\frac{11}{3}$, et la seconde rend x imaginaire. Voici encore une équation à résoudre :

$$\sqrt[x]{27^{2x-1}}=\sqrt{9^{2x-1}}.$$

Posant $9^x=y$, dans l'équation $5\cdot9^x+3\cdot81^x=42$, elle deviendra $5y+3y^2=42$.

387. Il n'est pas difficile de résoudre chacun des systèmes d'équations que voici :

$$5^v=625 \text{ et } x^2-5x+10=v,$$
$$3\cdot2^x-4\cdot3^y=-12 \text{ et } 5\cdot2^x+2\cdot3^y=58.$$

On ne sait encore résoudre que par tâtonnemens les équations de l'une des formes $ax^mb^{nx}=c$ et $px^{mx}=q$.

Généralement, les équations exponentielles que l'on peut ramener à la forme $a^x=b$, sont les seules que l'on sache résoudre directement. Telles seraient, par exemple, toutes les équations analogues aux cinq que voici :

$$pa^x+qa^{x-m}=r,\quad pa^{mx}+qb^{nx}=rb^{nx-c},$$
$$a^{c^x}=b,\quad a^{x^c}=b \text{ et } a^{nx^2}=pb^{mx}.$$

Des progressions par différence.

388. On appelle *progression par différence*, ou *progression arithmétique*, une suite de nombres dont chacun surpasse celui qui le précède immédiatement, ou en est surpassé, de la même

quantité, appelée *raison* de la progression. Ainsi la suite de nombres

$$4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, \text{ etc.},$$

est une progression par différence ; car chaque nombre surpasse celui qui le précède immédiatement de la même différence 3, qui est la raison. On indique cette progression en écrivant

$$\div 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 19 \cdot 22 \cdot 25 \cdot \text{ etc.},$$

et en énonçant, 4 est à 7 comme 7 est à 10, comme 10 est à 13, etc. Mais cette indication est fort peu utile.

Les nombres qui entrent dans la progression, en sont les *termes* ; et cette progression est *croissante* ou *décroissante*, suivant que ses termes vont en augmentant ou en diminuant.

389. Cherchons la règle pour calculer un terme quelconque d'une progression par différence, sans passer par tous les termes intermédiaires. Soit a le premier terme, r la raison et t le n^{me} terme de la progression proposée. Si cette progression est croissante, chaque terme surpassera celui qui le précède immédiatement de la raison r ; donc chaque terme sera égal au précédent augmenté de r. Ainsi le premier terme étant a, le second sera $a+r$, le 3[e] $a+2r$, le 4[e] $a+3r$, le 5[e] $a+4r$, le 6[e] $a+5r$, et en général, le $n$ième terme t sera

$$t = a + (n-1)r.$$

Si la progression était décroissante, la raison devrait être retranchée de chaque terme pour avoir le suivant ; les termes successifs seraient donc a, $a-r$, $a-2r$, $a-3r$, $a-4r$, etc., et le $n$ième terme t deviendrait

$$t = a - (n-1)r.$$

Cette formule et la précédente font voir, *qu'un terme quelconque d'une progression par différence est égal au premier, plus ou moins autant de fois la raison qu'il y a de termes avant celui que l'on cherche, suivant que la progression est croissante ou décroissante.*

D'après cela, le douzième terme de la progression croissante 5, 9, 13, 17, ..., est $5+(12-1)4$ ou 49. Le onzième terme de la progression décroissante 100, 97, 94, ..., est $100-(11-1)3$ ou 70. C'est ce qu'on vérifie aisément en formant les termes successifs.

390. Cherchons maintenant la règle pour calculer sur-le-champ la somme des termes d'une progression arithmétique. Soit a le premier terme, t le dernier, r la raison, n le nombre de termes et S leur somme; si la progression est croissante, les termes successifs seront a, $a+r$, $a+2r$, $a+3r$, $a+4r$, $a+5r$, ..., t (*); on aura donc

$$S = a + (a+r) + (a+2r) + (a+3r) + \cdots + t.$$

Prenant la progression dans l'ordre inverse, elle sera décroissante et les termes successifs seront t, $t-r$, $t-2r$, $t-3r$, $t-4r$, $t-5r$, ..., a; il viendra alors

$$S = t + (t-r) + (t-2r) + (t-3r) + \cdots + a.$$

Ajoutant cette égalité à la précédente, et réduisant les r dans la somme des termes qui se correspondent, on aura $a+t$ pour chaque somme partielle; et comme il y a n de ces sommes partielles, c'est-à-dire autant que de termes dans la progression, il en résulte que leur somme 2S vaut n fois l'une; on a donc

$$2S = n(a+t); \text{ d'où } S = \tfrac{1}{2}n(a+t).$$

On obtiendrait la même expression, si la progression était d'abord décroissante; et il en résulte, que *la somme de tous les termes d'une progression arithmétique est égale à la somme des termes extrêmes multipliée par la moitié du nombre de termes.*

Par exemple, le 15ᵉ terme de la progression 860, 850, 840, ..., étant $860-(15-1)10$ ou 720, la somme des 15 premiers termes sera

$$\tfrac{15}{2}(860+720) \text{ ou } 11700;$$

comme on pourrait d'ailleurs le vérifier, en formant les 15 premiers termes et en les additionnant.

391. De même, à l'aide de la règle précédente, on trouve

$$1+2+3+4+\cdots+n = \tfrac{1}{2}n(n+1),$$
$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = n^2,$$
$$2+4+6+8+\cdots+2n = n(n+1).$$

La première de ces valeurs est la somme des n premiers nom-

(*) Les trois points représentent toujours la suite des termes qui ne sont pas écrits. Ainsi dans la *série* 1, 2, 3, 4, ..., 11, les trois points signifient 5, 6, 7, 8, 9, 10. Nous avons déjà fait usage de cette notation dans ce qui précède (72 et 294).

bres entiers, la seconde celle des n premiers nombres impairs, et la troisième celle des n premiers nombres pairs.

392. Les équations $t=a+(n-1)r$ et $S=\frac{1}{2}n(a+t)$ serviront à calculer deux des cinq nombres qui les composent, dès que les trois autres seront connus ; et il en résulte dix problèmes généraux, dans lesquels il faut trouver, 1° t et S ; 2° a et S ; 3° r et S ; 4° r et t ; 5° a et t ; 6° r et n ; 7° n et S ; 8° a et r ; 9° a et n ; 10° n et t. Les deux derniers seuls conduisent à des équations du second degré. Voici quelques applications.

393. Insérer six *moyens arithmétiques* entre 3 et 31, c'est-à-dire, placer six nombres entre 3 et 31, de manière que les huit termes résultans forment une progression par différence. Pour cela, si l'on prend la formule $t=a+(n-1)r$, dans laquelle $a=3$, $t=31$ et $n=8$, on aura $31=3+7r$; d'où $r=4$. La progression cherchée est donc 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31.

Et si entre les termes consécutifs de cette progression, on insère trois moyens arithmétiques, la raison de chacune des progressions partielles sera 1 ; donc toutes ces progressions partielles n'en font qu'une, qui est

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, etc.

En général, *si entre les termes consécutifs d'une progression par différence, on insère le même nombre de moyens arithmétiques, ces termes et les moyens réunis, formeront une nouvelle progression par différence.*

Il n'est pas difficile de démontrer que dans toute progression arithmétique, la somme des deux termes également éloignés des extrêmes, est égale à la somme de ces extrêmes. Cela résulte immédiatement de la formule pour calculer le n^{me} terme.

394. *Trouver le nombre* x *des années qui doivent encore s'écouler pour qu'un fermier ait retiré* 7350 *francs d'une métairie qui lui rapporte* 100 *fr. la première année, et dont le rapport de chaque année augmente de* 10 *fr. l'année suivante.*

Puisque le rapport de chaque année augmente de 10 fr. l'année suivante, ce rapport étant 100 fr. la première année, sera 110 fr. la seconde, 120 fr. la troisième, 130 fr. la quatrième, et ainsi de suite. Par conséquent le rapport pendant les x années cherchées, sera la somme des x premiers termes de la progression arithmétique croissante 100, 110, 120, 130, 140, ... Mais ce rapport est aussi 7350 ; ainsi, dans cette progression, le premier terme $a = 100$, la raison $r = 10$, le nombre de termes $n = x$ et la somme des termes $S = 7350$. On a par conséquent

$$t = 100 + (x - 1)10 \quad \text{et} \quad 7350 = \tfrac{1}{2}x(100 + t).$$

Résolvant ces équations, on trouve $x = 30$ et $t = 390$, $x = -49$ et $t = -400$. Les valeurs positives résolvent le problème proposé. Quant aux valeurs négatives, pour avoir le problème qu'elles résolvent, il faut changer x et t en $-x$ et $-t$ dans les équations proposées ; ce qui donnera

$$t = (x + 1)10 - 100 \quad \text{et} \quad 7350 = \tfrac{1}{2}x(t - 100).$$

Ces équations n'appartiennent pas à une progression arithmétique ; mais en les résolvant, on trouve $x = 49$ et $t = 400$, $x = -30$ et $t = -390$.

395. Voici quelques problèmes, faciles à résoudre :

Combien un propriétaire doit-il être d'années pour que l'entretien d'une vigne, qu'il vient de planter, lui ait coûté 30 louis ? On sait que les frais de chaque année seront moindres d'un louis et que ceux de la première montent à 8 louis. (R. 5 ans ou 12 ans.)

Quelle est la progression arithmétique dont 9, 141 et 900 sont les sommes respectives des deux premiers termes, des deux derniers et de tous les termes ? (R. $a = r = 3$, $t = 72$ et $n = 24$.)

Deux voyageurs partent du même endroit, l'un 5 jours avant l'autre, et vont dans le même sens. Le premier fait une lieue le premier jour et chaque jour une lieue de plus que la veille. Combien le second, qui fait 12 lieues tous les jours, sera-t-il de temps pour atteindre le premier ? (R. 15 ou 8 jours.)

Si le 1er partait 6 jours avant l'autre, le problème serait imaginaire.

Un jardinier doit planter une rangée de 150 arbres dont chacun sera éloigné de son voisin de 4 mètres ; combien fera-t-il de chemin pour cela et combien recevra-t-il ? On sait qu'il doit mettre au pied de chaque arbre une brouettée de terreau, prise sur le prolongement de la ligne des arbres et à 20 mètres du premier, et que chaque brouettée lui est payée 2 centimes de plus que la précédente, la première coûtant 4 centimes. (R. Il fera 95420 mètres, et recevra 22950 centimes.)

Des progressions par quotient.

396. On appelle *progression par quotient*, ou *progression géométrique*, une suite de nombres dont chacun est égal à celui qui le précède immédiatement multiplié par un nombre constant, nommé *raison* de la progression. Ainsi la suite de nombres

4, 12, 36, 108, 324, 972, 2916, etc.,

est une progression par quotient, dont 3 est la raison. On indique quelquefois cette progression en écrivant $\div\div 4 : 12 : 36 : 108 : 324 : 972$, etc., et en énonçant 4 est à 12, comme 12 est à 36, comme 36 est à 108, etc. Mais cette indication est inutile.

Les nombres qui composent la progression géométrique en sont les *termes*; et cette progression est *croissante* ou *décroissante*, suivant que ses termes vont en augmentant ou en diminuant.

397. Soit r la raison de la progression proposée; chaque terme sera donc égal au précédent multiplié par r (396). Ainsi le 1$^{\text{er}}$ terme étant a, le 2$^{\text{e}}$ sera ar; le 3$^{\text{e}}$ ar^2; le 4$^{\text{e}}$ ar^3; le 5$^{\text{e}}$ ar^4; le 6$^{\text{e}}$ ar^5; et en général, le n^{me} terme t sera $t = ar^{n-1}$.

Donc *un terme quelconque d'une progression par quotient est égal au premier multiplié par une puissance de la raison, marquée par le nombre de termes qui précèdent celui que l'on cherche*. Au moyen de ce principe, si l'on a la progression géométrique croissante 2, 6, 18, 54, ..., le 10$^{\text{e}}$ terme sera

$$2 \times 3^{10-1} \text{ ou } 39366,$$

comme on peut le vérifier, en formant les termes successifs.

398. Soit S la somme des n premiers termes d'une progression par quotient; nous venons de voir que ces n termes sont a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^{n-1}; ainsi on a

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1};$$

d'où $$rS = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^n.$$

Retranchant la première de ces égalités de la seconde, et observant que tous les termes du nouveau second membre se détruisent deux à deux, excepté le premier $-a$ et le dernier ar^n, on aura

$$rS - S = -a + ar^n, \text{ ou } (r-1)S = ar^n - a.$$

Le n^{me} terme $t = ar^{n-1}$; d'où $rt = ar^n$ et $(r-1)S = rt - a$. Il vient donc, en divisant par $r-1$,

$$S = \frac{rt-a}{r-1}.$$

Ainsi *on calculera la somme des termes d'une progression géométrique, en multipliant le dernier terme par la raison*, *en soustrayant du produit le premier terme et en divisant le reste par la raison moins l'unité.*

Cette règle est encore applicable lorsque la progression est décroissante. Mais dans ce cas, pour faciliter les calculs, *il faut d'abord former le dernier terme de la progression, et la prendre ensuite à rebours.* Par exemple, s'il est question de trouver la somme des neuf premiers termes de la progression 2187, 729, 243, ..., dans laquelle la raison r est $\frac{1}{3}$; on cherchera d'abord le neuvième terme, qui sera $2187\left(\frac{1}{3}\right)^{9-1}$ ou 1; et alors, la progression prise à rebours sera 1, ..., 243, 729, 2187. Donc, puisque le premier terme de cette progression croissante est $a=1$, la raison $r=3$ et le dernier terme $t=2187$, il s'ensuit que la somme S de tous ses termes est

$$S=\frac{2187\times 3-1}{3-1}=3280,$$

comme il est aisé de le vérifier directement.

399. On peut déterminer les formules pour calculer aisément les valeurs de S′, S″, S‴, dans les trois égalités :

$$S'=a+2a^2+3a^3+4a^4+5a^5+\cdots+na^n,$$
$$S''=a+3a^3+5a^5+7a^7+\cdots+(2n-1)a^{2n-1},$$
$$S'''=2a^2+4a^4+6a^6+8a^8+\cdots+2na^{2n}.$$

Il suffit, pour cela, de retrancher la première de son produit par a, la seconde de son produit par a^2, ainsi que la troisième; puis de remplacer chaque progression géométrique résultante par sa valeur (398). Les formules qui donnent S′, S″, S‴, deviennent $\frac{0}{0}$, dès que $a=1$; mais alors elles se réduisent respectivement aux valeurs du n° 391. Et si $r=1$, au n° 398, on aura $S=an$, bien que la formule devienne d'abord $S=\frac{0}{0}$.

400. Les deux équations $t=ar^{n-1}$ et $S=\frac{rt-a}{r-1}$, serviront à calculer deux des cinq nombres qui les composent, dès que les trois autres seront donnés; et il en résulte dix problèmes généraux. Mais ceux où n est inconnu, ne peuvent être résolus, d'après ce qui précède. Voici quelques applications.

401. Insérer cinq *moyens proportionnels* entre 9 et 6561, c'est-à-dire, placer cinq nombres entre 9 et 6561, de manière que l'ensemble des sept nombres résultans forme une progression par quotient. Pour cela, il faut employer la formule $t=$

ar^{n-1}, dans laquelle $a=9$, $t=6561$ et $n=7$; alors on aura $6561=9\cdot r^6$; d'où $r^6=729=3^6$ et $r=3$. Ainsi la progression demandée est 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561.

Il est facile de démontrer, 1° que si entre les termes consécutifs d'une progression géométrique, on insère le même nombre de moyens proportionnels, ces termes et les moyens réunis, formeront une progression par quotient; 2° que dans toute progression géométrique, le produit de deux termes également éloignés des extrêmes, est égal au produit de ces extrêmes. Et si p désigne le produit de tous les termes, a étant le premier et t le n^{me}, on aura $p^2=(at)^n$.

402. *On demande la somme des* n *premiers termes de la série* 6, 66, 666, 6666, 66666, 666666, etc.

Il est visible que le 6^{me} terme de cette série est la même chose que $6(111111)$, ou que $6(1+10+10^2+10^3+10^4+10^5)$, ou enfin que $\frac{6}{9}(10^6-1)$. D'où l'on peut conclure que la valeur du v^{me} terme est $\frac{6}{9}(10^v-1)$. Prenant successivement, dans cette valeur, $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n$, et ajoutant entre eux les n résultats, il viendra, pour la somme x cherchée,

$$x=\tfrac{6}{9}(10+10^2+10^3+10^4+\cdots+10^n-n)=\tfrac{20}{27}(10^n-1)-\tfrac{2}{3}n.$$

On trouverait, d'une manière analogue, la somme des n premiers termes de chacune des séries

72, 7272, 727272, 72727272, 7272727272, ...
135, 135135, 135135135, 135135135135, ...

En général, si a désigne un nombre de m chiffres, et qu'on forme une série de termes en écrivant le nombre a une fois, puis deux fois de suite, trois fois de suite, quatre fois de suite, etc., la somme x des n premiers termes de la série résultante sera

$$x=\frac{a}{10^m-1}\left[\frac{10^m(10^{mn}-1)}{10^m-1}-n\right].$$

403. *On partage une somme d'argent à* n *pauvres, de manière que chacun reçoit* b *francs plus le* a^{me} *de ce qu'a laissé le précédent, et le dernier laisse un reste égal à* c *fr. Quelle somme* x *a-t-on partagée?*

Pour faciliter la solution de ce problème, soit R ce qui reste avant que le v^{me} pauvre reçoive sa part. On donne à ce pauvre b francs plus le a^{me} du reste R précédent; on lui donne donc $b+\frac{R}{a}$; il reste par conséquent $R-b-\frac{R}{a}$, ou $R\left(1-\frac{1}{a}\right)-b$, ou encore $Rm-b$, en faisant $1-\frac{1}{a}=m$.

L'expression $Rm - b$ montre que, *pour avoir ce qui reste après qu'un pauvre a eu sa part, il faut multiplier par* m *ce qui restait auparavant et retrancher* b *du produit.*

D'après cela, comme x désigne ce qui restait avant que le premier pauvre reçût sa part, il s'ensuit qu'on a, pour les restes successifs :

$$\begin{array}{l} mx - b \\ m^2x - bm - b \\ m^3x - bm^2 - bm - b \\ m^4x - bm^3 - bm^2 - bm - b \\ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Sans qu'il soit besoin de continuer ces résultats, on voit que le reste c après que le n^{me} pauvre a eu sa part, est exprimé par

$$m^nx - bm^{n-1} - bm^{n-2} - \cdots - bm^2 - bm - b;$$

et qu'on a conséquemment

$$m^nx - b(1 + m + m^2 + \cdots + m^{n-1}) = c;$$

$$\text{d'où} \quad m^nx - b\left(\frac{m^n - 1}{m - 1}\right) = c.$$

Observant que $m = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a}$, d'où $m - 1 = -\frac{1}{a}$, il viendra, toute réduction faite,

$$x = (ab + c)\left(\frac{a}{a-1}\right)^n - ab.$$

Si $a = 2$, $b = 10$, $c = 4$ et $n = 5$, on aura $x = 748$ francs, comme il est aisé d'en faire la preuve. On peut changer a en $-a$ ou b en $-b$!

404. A *donne le* c^{me} *de ses jetons à* B *et reçoit le* c^{me} *de ceux de ce dernier. Après avoir répété* (n — 1) *autres fois cette opération*, A *et* B *ont l'un* a *et l'autre* b *jetons. Quels nombres* x *et* y *de jetons avaient-ils d'abord?*

A cause de $x + y = a + b$ ou de $y = a + b - x$, si l'on opère comme dans le problème précédent, on trouvera

$$x = \tfrac{1}{2}(a + b) + \tfrac{1}{2}(a - b)\left(\frac{c}{c-2}\right)^n.$$

Si $a = 12$, $b = 10$, $c = 3$, et $n = 2$, on aura $x = 20$ et $y = 2$.

405. On trouve, dans les Mélanges d'algèbre, pages 69 et suivantes, un grand nombre de problèmes résolubles par les progressions. En voici encore quelques autres, faciles à traiter, d'après ce qui précède.

Un homme gagne chaque année le a^{me} de ce qu'il possède pendant cette année ; et quoiqu'il prélève b francs tous les ans sur son bien, pour sa dépense, il possède après n années, c fois ce qu'il avait d'abord. Quelle somme x avait-il ? $\left[\text{R. } x = \frac{bm(m^n - 1)}{m^n - c} \text{ et } m = 1 + \frac{1}{a}\right]$.

A donne à B, c fois autant de jetons que B en a, et B en rend à A, c fois autant que A en a gardé ; cette double opération étant répétée $(n-1)$ autres fois, A et B ont alors l'un a et l'autre b jetons. Quels nombres x et y de jetons avaient-ils d'abord ? $\left[\text{R. } x = \frac{a - bd}{(d+1)d^{2n}} + \frac{d(a+b)}{d+1}, \right.$ $\left. d = c + 1.\right]$

Les biens d'une personne augmentent tous les ans de leur c^{me} partie, et elle dépense a francs sur ces mêmes biens, au bout de chaque année ; après n années, elle possède b fr. Quelle somme x avait-elle d'abord ? $\left[\text{R. } x = \frac{ac}{c+1} + (b-a)\left(\frac{c}{c+1}\right)^n.\right]$

Si l'on multiplie par n successivement la racine r^{me} de n, la racine r^{me} du produit, la racine r^{me} du second produit, la racine r^{me} du troisième, et ainsi de suite ; quelle sera la racine r^{me} du v^{me} produit ?

Quelle est la progression géométrique dont 2049 est la somme des termes extrêmes, 2048 leur produit, et 4095 la somme de tous les termes ? (R. 1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2048.)

Quelle est la somme x des n premiers termes d'une série, dont chaque terme vaut a fois la somme de tous ceux qui le précèdent, le premier étant 1 ? [R. $x = (1+a)^{n-1}$.]

406. *Proposons-nous maintenant de trouver la somme S de tous les termes d'une progression géométrique, lorsque cette progression décroît sans jamais s'arrêter.*

Dans ce cas, il est clair que la raison $r < 1$ et que le nombre n de termes est infini. L'infinième terme est donc $ar^{\infty - 1}$, et il vient
$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{\infty - 1}.$$

Soustrayant de cette égalité son produit par r, et réduisant, on aura
$$S - rS = a - ar^{\infty}.$$

Or, $r < 1$; donc r^{∞} est infiniment petit ou nul (296), aussi bien que ar^{∞} ; il vient donc $S - rS = a$, ou $(1-r)S = a$; d'où
$$S = \frac{a}{1-r}.$$

Ainsi on aura la somme de tous les termes d'une progression géométrique décroissante et continuée à l'infini, en divisant le premier terme par l'unité moins la raison. Cette règle donne

$\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+$ etc., à l'infini, $=\frac{2}{3}:(1-\frac{2}{3})=2$.

C'est ce qu'on vérifie en observant que 2 valent 2 tiers $+$ 4 tiers, que 4 tiers $=$ 4 neuvièmes $+$ 8 neuvièmes, 8 neuvièmes $=$ 8 vingt-septièmes $+$ 16 vingt-septièmes, 16 vingt-septièmes $=$ 16 quatre-vingt-unièmes $+$ 32 quatre-vingt-unièmes, et ainsi de suite, à l'infini.

407. Les raisonnemens qui ont fourni la règle précédente, ne supposent pas que r soit positif; cette règle s'applique donc encore lorsque la raison est négative, mais < 1. Ainsi on aura

$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+$ etc., à l'infini, $=\frac{1}{2}:(1+\frac{1}{2})=\frac{1}{3}$.

C'est ce dont on fait la preuve en réduisant les termes de 2 en 2, ou bien en convertissant $\frac{1}{3}$ en parties de 2 en 2 fois plus petites, et en prenant tous les quotiens *en dehors*.

Réduisant les fractions de 3 en 3, on obtiendra

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{2}{4^5}+\frac{3}{4^6}+\text{etc.}=\frac{27}{4^3}+\frac{27}{4^6}+\text{etc.}=\frac{3}{7};$$

$$\frac{2}{5}-\frac{4}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{2}{5^4}-\frac{4}{5^5}+\frac{1}{5^6}+\text{etc.}=\frac{31}{5^3}+\frac{31}{5^6}+\text{etc.}=\frac{1}{4}.$$

On vérifie le premier résultat en réduisant $\frac{3}{7}$ en parties de 4 en 4 fois plus petites et en prenant tous les quotiens *en dedans*. Réduisant de même $\frac{1}{4}$ en parties de 5 en 5 fois moindres, et ne prenant *en dehors* que les quotiens 2^e, 5^e, 8^e, 11^e, etc., on retrouvera la seconde série précédente.

408. Si l'on divise a par $1-r$ ou par a^0-r, il viendra

$$\frac{a}{1-r}=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\text{etc., à l'infini} \ldots (1)$$

Mais cette identité n'est exacte qu'en supposant le second membre complété par un terme de la forme $\frac{ar^n}{1-r}$. En effet, si l'on négligeait ce terme, lorsque $r=2$, on aurait

$$-a=a+2a+4a+8a+16a+\text{etc., à l'infini};$$

ce qui est évidemment impossible.

Lorsque $r<1$, le terme complémentaire $\frac{ar^n}{1-r}$ diminue à mesure que n augmente et s'anéantit à l'infini (296); alors l'égalité (1) est rigoureusement exacte, et conduit à la règle du n^o 406.

409. Il est aisé de s'assurer, par des multiplications successives, que quand $r < 1$, on a

$$(1+r)(1+r^2)(1+r^4)(1+r^8)(1+r^{16}) \text{ etc., à l'infini,} =$$
$$1+r+r^2+r^3+r^4+r^5+r^6+ \text{ etc., à l'infini,} = \frac{1}{1-r}.$$

On voit donc que le produit d'une infinité de facteurs, tous plus grands que l'unité, n'est pas toujours infini.

Divisant l'unité par le produit précédent et par sa valeur, on verra facilement que le produit d'une infinité de facteurs, tous plus petits que l'unité, n'est pas toujours infiniment petit.

Ainsi, bien qu'il paraisse évident que s'il y a dans le produit, une infinité de facteurs, tous plus grands, ou tous plus petits que l'unité, ce produit est infiniment grand ou infiniment petit, on voit que cette proposition pourrait être fausse, et qu'elle a besoin d'être démontrée, dans tous les cas.

410. Voici deux problèmes que l'on peut résoudre par les progressions à l'infini, ou plutôt par les séries que fournit la division :

Trouver ce que vaut en argent comptant, un bien-fonds dont le revenu annuel est a florins. Un florin en produit r d'intérêt par an, et l'on doit avoir égard aux intérêts des intérêts. (R. $\frac{a}{r}$ florins.)

Un ouvrier, qui travaille toujours également vîte, aurait mis a heures à sortir l'eau b contenue d'abord dans un bassin, et a été c heures pour sortir l'eau b et celle qui est arrivée uniformément dans le bassin pendant ce temps. On demande combien il arrive d'eau dans le bassin pendant que l'ouvrier en ôte un litron? (R. $1-\frac{a}{c}$; valeur négative, lorsque $c < a$.)

Des premières puissances des nombres naturels.

411. Pour abréger, nous désignerons par S_1 la somme des n premiers nombres entiers, et par S_2, S_3, S_4, ..., celles de leurs carrés, de leurs cubes, de leurs puissances 4^{mes}, etc. S_1, S_2, S_3, S_4, ..., s'énoncent en disant : S premier, S deuxième, S troisième, S quatrième, etc.

Cela posé, on a déjà vu (391) que $S_1 = \frac{1}{2}n(n+1)$. Je dis maintenant que $S_2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

En effet, pour vérifier cette expression, prenons la valeur parcille $\nu(\nu+1)(2\nu+1)$; changeons-y ν en $\nu-1$, ce qui donnera $(\nu-1)\nu(2\nu-1)$, puis retranchons ce résultat de l'expression qui l'a donné; nous aurons

$$\nu(\nu+1)(2\nu+1)-(\nu-1)\nu(2\nu-1)\cdots(1)$$

Or, d'après la multiplication des polynomes, on a

$$\nu(\nu+1)(2\nu+1)=(\nu^2+\nu)(2\nu+1)=2\nu^3+3\nu^2+\nu,$$
$$(\nu-1)\nu(2\nu-1)=(\nu^2-\nu)(2\nu-1)=2\nu^3-3\nu^2+\nu.$$

Retranchant le second résultat du premier, on verra que le reste (1) se réduit à $6\nu^2$, et que par suite, on a, pour toutes les valeurs de ν,

$$6\nu^2=\nu(\nu+1)(2\nu+1)-(\nu-1)\nu(2\nu-1).$$

Faisant successivement $\nu=1, 2, 3, 4, \ldots, n$, on aura

$$6.1^2=1.2.3$$
$$6.2^2=2.3.5-1.2.3$$
$$6.3^2=3.4.7-2.3.5$$
$$6.4^2=4.5.9-3.4.7$$
$$6.5^2=5.6.11-4.5.9$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$6n^2=n(n+1)(2n+1)-(n-1)n(2n-1).$$

Ajoutant ces n égalités entre elles, et observant que tous les termes des seconds membres se détruisent deux à deux, à l'exception de $n(n+1)(2n+1)$, il viendra

$$6(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots+n^2)=n(n+1)(2n+1);$$

d'où l'on tire $\quad S_2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

412. Par une méthode tout-à-fait semblable à la précédente, on fera voir que

$$S_3=\tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
$$S_4=\tfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)[3n(n+1)-1]$$
$$S_5=\tfrac{1}{6}n^2(n+1)^2[n(n+1)-\tfrac{1}{2}]$$
$$S_6=\tfrac{1}{42}n(n+1)(2n+1)\{3n[n^2(n+1)-1]+1\}.$$

Ces formules font parties des séries numériques que nous avons considérées dans les Mélanges d'algèbre, pages 84 et suivantes.

413. Le principal usage des premières puissances des nombres naturels, est de *sommer* toute série dont le *terme général* en ν est une fonction entière et rationnelle de ν. Par exemple, pour avoir la somme de la série dont le terme général est $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$, on développera ce terme, ce qui donnera $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)=\frac{1}{2}\nu^2+\frac{1}{2}\nu$. Prenant successivement, dans cette identité, $\nu=1, 2, 3, 4, \ldots, n$,

et ajoutant entre elles les n égalités résultantes, on aura

$$1+3+6+10+15+\cdots+\tfrac{1}{2}n(n+1)=\tfrac{1}{2}S_2+\tfrac{1}{2}S_1.$$

Remplaçant S_2 et S_1 par leurs valeurs, et décomposant en facteurs, il viendra

$$1+3+6+10+15+\cdots+\frac{n}{2}(n+1)=\frac{n}{6}(n+1)(n+2).$$

Le premier membre de cette formule est la série des n premiers *nombres triangulaires*, et le second membre, la somme de ces n nombres.

414. Opérant d'une manière absolument semblable sur les termes généraux $\frac{v}{6}(v+1)(v+2)$ et $\frac{v}{24}(v+1)(v+2)(v+3)$, on trouvera les deux formules :

$$\begin{aligned}1+4+10+20+35+56+\cdots+\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)\\ =\tfrac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1+5+15+35+70+\cdots+\tfrac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)\\ =\tfrac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).\end{aligned}$$

La première de ces formules est la somme des n premiers *nombres pyramidaux*, et la seconde celle des n premiers *nombres figurés* du *cinquième ordre*. Voici quelques applications.

415. *Deux courriers partent du même endroit, au même instant et vont dans le même sens ; le premier fait 22 lieues $\frac{1}{2}$ par jour, et l'autre n'ayant parcouru qu'une lieue le premier jour, fait chaque jour de plus que la veille, un nombre de lieues égal au rang de ce jour. Combien sera-t-il de jours pour atteindre le premier courrier ?*

Soit n le nombre de jours cherché, x_v et x_{v+1} les nombres respectifs de lieues parcourues le v^{me} et le $(v+1)^{me}$ jour, par le second courrier ; on aura, d'après l'énoncé,

$$x_{v+1}=x_v+v+1\ ;\ \text{d'où}\ x_{v+1}-x_v=v+1.$$

Faisant successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, m-1$, et ajoutant entre elles les égalités résultantes, réduisant dans le premier membre, observant que $x_1=1$, et transposant 1, on aura

$$x_m=1+2+3+4+\cdots+m=\tfrac{1}{2}m(m+1).$$

Prenant successivement $m=1, 2, 3, 4, \ldots, n$, et ajoutant les n égalités, le nouveau premier membre sera le nombre total x de lieues parcourues en n jours par le second courrier, et le nouveau second membre sera la somme des n premiers nombres triangulaires ; on aura donc (413)

$$x = \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

Le premier courrier faisant 22 lieues $\frac{1}{2}$ ou $\frac{45}{2}$ lieues par jour, en n jours il fera $\frac{45}{2}n$. Or, pour que le second courrier atteigne le premier, il faut qu'il fasse le même chemin que ce premier ; il faut donc qu'on ait

$$\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2) = \tfrac{45}{2}n; \text{ d'où } n = 10 \text{ et } n = -13.$$

Ainsi le second courrier atteindra le premier après 10 jours de marche.

416. *Un particulier achète tous les ans un pigeon femelle qui lui donne un pigeon femelle chaque année suivante ; et comme chaque pigeon femelle né une année produit chaque année qui suit trois pigeons mâles, on demande combien le particulier aura de pigeons en tout au bout de* n *années ?*

Soient x_v et x_{v+1} les nombres respectifs de pigeons femelles nés avant et après la v^{me} année, et y_v, y_{v+1} les nombres de pigeons mâles produits avant et après la même année. Puisque chaque pigeon acheté une année donne un pigeon femelle chaque année suivante, les v pigeons achetés au bout de la v^{me} année, donneront v pigeons femelles pendant la $(v+1)^{me}$; on a par conséquent

$$x_{v+1} = x_v + v; \text{ d'où } x_{v+1} - x_v = v.$$

Posant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$ et ajoutant, puis observant que $x_1 = 0$, car il n'est pas né de pigeons la première année, il viendra

$$x_n = \tfrac{1}{2}(n-1)n.$$

D'un autre côté, comme chaque pigeon femelle né une année produit trois pigeons mâles chaque année suivante, il s'ensuit que les x_v pigeons femelles nés la v^{me} année, produiront $3x_v$ pigeons mâles pendant la $(v+1)^{me}$; ainsi on a

$$y_{v+1} = y_v + 3x_v; \text{ d'où } y_{v+1} - y_v = \tfrac{3}{2}(v-1)v.$$

Prenant $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$ et ajoutant, observant que $y_1 = y_2 = 0$, et que le second membre de l'égalité résultante est trois fois la somme des $n-2$ premiers nombres triangulaires (403), on aura

$$y_n = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n-1)n.$$

On voit que le nombre x de pigeons que le particulier possède au bout de n années, est $x = n + x_n + y_n$; d'où, en substituant et réduisant,

$$x = n + \tfrac{1}{2}n(n-1)^2.$$

417. *Quel nombre* x *d'hommes y aura-t-il dans une société au bout de* n *années? On sait que le fondateur enrôle chaque année un premier membre, et que pendant chacune des années qui suivent celle de son enrôlement, chaque premier membre en enrôle 2 deuxièmes, chaque deuxième,* 3 *troisièmes, et chaque troisième,* 4 *quatrièmes, qui n'enrôlent personne.*

Il est d'abord clair que la société contiendra n premiers membres, au bout de n années. Or, soient x_v, y_v et z_v les nombres respectifs de deuxièmes, troisièmes et quatrièmes membres contenus dans cette société au bout de v années, et x_{v+1}, y_{v+1}, z_{v+1} les nombres contenus après la $(v+1)^{me}$. Puisque chaque premier membre en enrôle 2 deuxièmes, les v premiers membres de la v^{me} année, en enrôleront $2v$ deuxièmes pendant la $(v+1)^{me}$, et il vient

$$x_{v+1} = x_v + 2v.$$

De même, on aura $y_{v+1} = y_v + 3x_v$,

et $z_{v+1} = z_v + 4y_v$.

Ces équations *à indices* étant résolues comme celles du problème précédent, ou d'après les méthodes exposées pages 97 et suivantes, des Mélanges d'algèbre, on en déduira

$$x_n = n(n-1),\quad y_n = n(n-1)(n-2)$$
$$\text{et}\quad z_n = n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Substituant ces valeurs dans $x = 1 + n + x_n + y_n + z_n$ et réduisant, il viendra définitivement

$$x = 1 + n + n(n-1)[n(n-4)+5].$$

418. On peut varier d'un grand nombre de manières, l'énoncé du problème que nous venons de résoudre. Par exemple, on peut supposer que *le fondateur enrôle chaque année* a *membres qui, eux-mêmes, enrôlent chacun, pendant chacune des années suivantes,* a *nouveaux membres, enrôlant à leur tour chacun* a *membres, pendant chacune des années qui suivent celle de leur enrôlement, et ainsi de suite, pour chaque membre enrôlé.* Dans ce cas, si l'on désigne par x_v et x_{v+1} les nombres d'hommes contenus dans la société après les années v^{me} et $(v+1)^{me}$, on aura $x_{v+1} = (1+a)x_v$; d'où, en observant que $x_1 = 1 + a$, on déduira

$$x_n = (1+a)^n.$$

Si le fondateur et chaque membre de la société devait enrôler chaque année un nombre d'hommes égal au rang de cette année, à partir de l'époque où la société a commencé; au bout de n années, le nombre de membres serait $2.3.4.5.6.7\ldots(n+1)$.

On peut encore supposer que *le fondateur enrôle chaque année un nombre d'hommes égal au rang de cette année, et que chaque homme qu'il a enrôlé une année, enrôle à son tour, un nombre d'hommes égal au rang de cette même année, pendant chacune des années suivantes.* Alors au bout de n années, les hommes qui composent la société, sont au nombre de $1+\frac{1}{12}n(n+1)[n(n-1)+6]$.

Enfin on peut supposer que *le fondateur enrôle chaque année un premier membre et que les premiers membres en enrôlent des deuxièmes et ceux-ci d'autres, de manière que chaque premier ou deuxième membre enrôlé une année, enrôle chaque année suivante un nombre de membres égal au rang de l'année de son enrôlement.* Dans ce cas, au bout de n années, le nombre total x de membres est

$$x=1+\tfrac{1}{8}n(n+1)[n(n-3)+6].$$

Des Logarithmes.

419. Dans l'équation exponentielle $b^x=n$, on sait toujours trouver pour x une valeur exacte ou aussi approchée qu'on le veut (381), pourvu que b et n soient positifs et qu'on ait $b>$ ou <1, jamais $b=1$. Or, si on laisse toujours la même valeur à b, et qu'on donne à n successivement toutes les valeurs entières 1, 2, 3, 4, 5, etc., il en résultera autant de valeurs pour x, soit positives, soit négatives. Écrivant ensuite toutes les valeurs de n dans des colonnes, et à côté, les valeurs correspondantes de x, on formera des *tables* ou un *système* de logarithmes. La valeur de b, d'après laquelle on calcule toutes les valeurs de x, est la *base* du système de logarithmes. Enfin, les exposans x, dont les valeurs dépendent de celles des nombres n, sont, pour cette raison, appelés les *logarithmes* de ces nombres n. Ainsi,

420. *Les logarithmes des nombres sont les exposans des puissances auxquelles il faut élever un nombre invariable* b, *pour obtenir successivement tous ces nombres. Le nombre invariable* b *est la base du système ou des tables de logarithmes.* Par exemple, dans $b^x=n$, b est la base des tables et x le logarithme de n.

421. Désormais nous désignerons *logarithme de* par la lettre initiale l; et au lieu de $x=$ logarithme de n, nous écrirons

$x = ln$. Pour indiquer le logarithme du résultat d'une ou de plusieurs opérations, on met ce résultat entre parenthèses, que l'on fait précéder de l. Ainsi $l(a-b)$ veut dire : logarithme de la différence $a-b$. Dans tout ce qui va suivre, la base sera positive et > 1.

422. *Dans tout système de logarithmes, le logarithme de la base est l'unité, le logarithme de l'unité est zéro, et le logarithme de zéro est l'infini négatif.* En effet, à cause de $b > 1$, qui donne $\frac{1}{b} < 1$ ou $b^{-1} < 1$, on a $(b^{-1})^{\infty} = 0$ (296), ou $b^{-\infty} = 0$. Et comme $b^1 = b$ et $b^0 = 1$, il s'ensuit que 1, 0 et $-\infty$ sont les exposans des puissances auxquelles il faut élever la base b, pour avoir b, 1 et 0 ; donc 1, 0 et $-\infty$ sont les logarithmes de b, 1 et 0 (420) ; c'est-à-dire qu'on a

$$lb = 1,\quad l1 = 0 \text{ et } l0 = -\infty.$$

Si b était < 1, le logarithme de 0 serait ∞.

423. *Le logarithme du produit de plusieurs nombres est égal à la somme des logarithmes de ces nombres ; et réciproquement.*

En effet, soient m, n, p, etc. plusieurs nombres quelconques ; leurs logarithmes sont désignés par lm, ln, lp, etc. Or, ces logarithmes sont les exposans des puissances auxquelles il faut élever la base b pour avoir les nombres m, n, p, etc. (420) ; on a donc

$$b^{lm} = m,\quad b^{ln} = n,\quad b^{lp} = p, \text{ etc.}$$

Multipliant ces équations entre elles et ayant égard à la règle des exposans (370), on obtiendra

$$b^{lm + ln + lp} = mnp.$$

Mais d'après la définition (420) l'exposant $lm + ln + lp$ de la puissance à laquelle il faut élever la base b pour avoir le nombre mnp, est le logarithme de ce nombre ; par conséquent

$$l(mnp) = lm + ln + lp.$$

424. Élevant les deux membres de l'équation $b^{lm} = m$ à la puissance quelconque v, on aura (368) $b^{vlm} = m^v$. Ainsi vlm est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base b pour avoir le nombre m^v ; donc vlm est le logarithme de ce nombre (420) ; c'est-à-dire qu'on a $l(m^v) = vlm$. D'où l'on voit que *le logarithme d'une puissance quelconque d'un nom-*

bre est égal au produit du logarithme de ce nombre multiplié par l'exposant de la puissance.

425. Soit q le quotient de a par c; on aura donc $q = \frac{a}{c}$ et $cq = a$. Prenant les logarithmes des deux membres, on aura (423) $lc + lq = la$; d'où $lq = la - lc$ et $l\left(\frac{a}{c}\right) = la - lc$. Ainsi *le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur.*

426. Soit x la racine v^{me} de a; on aura $x^v = a$. Prenant les logarithmes de part et d'autre, il viendra (424) $vlx = la$; d'où $lx = \frac{la}{v}$ et $l(\sqrt[v]{a}) = \frac{la}{v}$. Ainsi *le logarithme d'une racine quelconque d'un nombre est égal au quotient qu'on trouve en divisant le logarithme de ce nombre par l'exposant de la racine.*

427. Les quatre principes précédens renferment tout le calcul des logarithmes; ils ont lieu quelle que soit la base b. Mais les logarithmes dont on se sert ordinairement sont ceux dont la base est 10; on les nomme *logarithmes ordinaires*, et ils vont seuls nous occuper. Ainsi, *le logarithme ordinaire d'un nombre est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base* 10 *pour avoir ce nombre.* De sorte que ln étant le logarithme ordinaire du nombre n, on a $10^{ln} = n$.

428. On sait que $10^n = 1$ *suivi de* n *zéros*; donc n est le logarithme ordinaire de 1 *suivi de* n *zéros*. Les logarithmes ordinaires des nombres 1, 10, 100, 1000, 10000, etc., sont donc 0, 1, 2, 3, 4, etc. Quant aux logarithmes ordinaires des nombres compris entre 1 et 10, entre 10 et 100, entre 100 et 1000, etc., on peut les trouver par la résolution des équations exponentielles. Par exemple, x désignant le logarithme ordinaire de 2, on aura à résoudre l'équation $10^x = 2$. Or, c'est ce qu'on a déjà fait (384); et on a trouvé $l2$ ou $x = 0{,}3010300$. Les logarithmes ordinaires des autres nombres premiers s'obtiennent d'une manière absolument semblable.

Cette méthode de calcul est fort pénible; mais elle l'est encore moins que celle employée par les inventeurs des logarithmes. Aussi les tables furent-elles d'abord peu volumineuses. On a trouvé depuis, comme on le verra plus bas, des formules qui conduisent très-promptement aux logarithmes des nombres premiers. Quant aux logarithmes des nombres non-premiers on les obtient par de simples additions ; car, par exemple, $l(210) = l(3.7.10) = l3 + l7 + 1$; $l(1600) = l(100.2^4) = 2 + 4l2$, etc. Enfin, il suffit de placer dans les tables des logarithmes des nombres entiers, puisqu'avec ces logarithmes, on a facilement ceux des fractions (425).

429. Connaissant les logarithmes des nombres dans un système dont b est la base, il est facile d'en déduire les logarithmes des mêmes nombres dans un autre système dont c serait la base. En effet, soit n un nombre, x son logarithme dans le système donné et y son logarithme dans le système cherché ; on aura donc $n = b^x$ et $n = c^y$; d'où $c^y = b^x$. Prenant de part et d'autre les logarithmes relatifs à la base b, lb sera 1, et l'on aura

$$ylc = x = ln, \quad \text{ou} \quad y = \frac{ln}{lc} = ln \times \frac{1}{lc}.$$

Or, $\frac{1}{lc}$ étant un nombre qui restera toujours le même, quel que soit n, on voit qu'une première table étant déjà formée, si l'on veut en construire une nouvelle, on n'aura qu'à multiplier les logarithmes du premier système par la quantité constante $\frac{1}{lc}$.

Cette quantité constante, qui sert à passer d'une table à une autre, s'appelle *module* de la nouvelle table par rapport à l'ancienne.

430. Soit la proportion géométrique $a : b :: c : d$; on en déduit successivement $ad = bc$, $la + ld = lb + lc$ et $ld = lb + lc - la$; c'est-à-dire que dans toute proportion géométrique, le logarithme d'un extrême est égal à la somme des logarithmes de deux moyens, moins le logarithme de l'autre extrême.

431. Considérons la progression par quotient

$$a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, \ldots, aq^{n-1};$$

si l'on prend les logarithmes de ses termes, ces logarithmes formeront la progression par différence que voici :

$$la, la + lq, la + 2lq, la + 3lq, la + 4lq, \ldots, la + (n-1)lq.$$

D'où l'on voit que quand des nombres sont en progression géométrique, leurs logarithmes sont en progression par différence.

Et de là résulte que les logarithmes sont une suite de nombres en progression arithmétique, qui correspondent, terme à terme, à une autre suite de nombres en progression géométrique.

C'est là précisément la définition des logarithmes adoptée par leurs inventeurs, et qu'on retrouve encore dans quelques traités d'Arithmétique. Ainsi la définition des logarithmes, d'après les exposans, et la définition d'après les progressions, rentrent l'une dans l'autre et n'en font qu'une.

De l'usage des tables ordinaires.

432. L'usage des tables de logarithmes ordinaires suppose plusieurs principes. D'abord, soient m et p deux nombres et lm, lp leurs logarithmes; on aura donc $b^{lm} = m$ et $b^{lp} = p$. Si $m > p$, on aura aussi $b^{lm} > b^{lp}$, et par suite $lm > lp$ (378). D'où il suit que *plus un nombre est grand, plus son logarithme est grand; et réciproquement.*

433. Les logarithmes ordinaires sont exprimés en décimales, et renferment une *partie entière*, appelée *caractéristique*, parce qu'elle a toujours une unité de moins que le nombre n'a de chiffres entiers; ce qui permet de fixer ce nombre de chiffres, lorsque la caractéristique est donnée, et réciproquement. Par exemple, si la caractéristique a trois unités, le nombre aura quatre chiffres entiers.

En général, soit a un nombre de n chiffres entiers; ce nombre sera donc $>$ 1 *suivi de* $(n-1)$ *zéros* ou $> 10^{n-1}$, qui est le moindre nombre de n chiffres, et a sera $<$ 1 *suivi de* n *zéros* ou $< 10^n$, qui a $n+1$ chiffres entiers; on aura donc $a > 10^{n-1}$ et $a < 10^n$. Prenant les logarithmes de part et d'autre, il viendra $la > n-1$ et $la < n$. Ainsi le logarithme du nombre a, composé de n chiffres entiers, est compris entre $n-1$ et n; ce logarithme n'a donc que $n-1$ unités entières; sa caractéristique est par conséquent $n-1$. Ce qu'il fallait démontrer.

434. Il est clair, d'après ce qui précède (423 et 428), qu'on a $l(a.10) = la + 1$, $l(a.100) = la + 2$, $l(a.1000) = la + 3$, et en général, $l(a.10^r) = la + r$. Donc, *si l'on multiplie un nombre* a *par* 10, *par* 100, *par* 1000, *etc.*, *son logarithme augmentera de* 1, 2, 3, *etc. unités*. Réciproquement, *si le logarithme d'un nombre* a *augmente de* 1, 2, 3, *etc. unités*, *ce nombre sera multiplié par* 10, *par* 100, *par* 1000, *etc.*

435. Prenant le logarithme de chaque quotient (325), il viendra $l(a:10) = la - 1$, $l(a:100) = la - 2$, $l(a:1000) = la$

-3, et en général, $l(a : 10^r) = la - r$. On voit que *si l'on divise un nombre* a *par* 10, *par* 100, *par* 1000, *etc.*, *son logarithme diminuera de* 1, 2, 3, *etc. unités*. Réciproquement, *si l'on diminue de* 1, 2, 3, *etc. unités le logarithme d'un nombre* a, *ce nombre sera divisé par* 10, *par* 100, *par* 1000, *etc.*

Les principes de ce numéro et des deux précédens n'ont pas lieu dans un autre système; et c'est sur-tout ce qui fait préférer les logarithmes ordinaires.

436. *Les différences des nombres sont entre elles comme les différences de leurs logarithmes.* Cette proportion n'est pas rigoureusement exacte; mais voici comment on peut s'assurer qu'elle est vraie par approximation :

En examinant les tables de logarithmes, on voit que quand les nombres consécutifs sont un peu grands, les accroissemens de leurs logarithmes ne diffèrent pas d'un cent-millième d'unité. Et ces accroissemens seraient encore moins différens, si les nombres, au lieu de croître successivement d'une unité, ne croissaient que de la quantité $d < 1$. Ainsi, en supposant que la totalité des augmentations de chaque nombre ne surpasse pas l'unité, *on pourra toujours admettre, sans erreur sensible, que chaque fois que le nombre croîtra de* d, *son logarithme croîtra de* d': donc, si le nombre a augmente de b fois d ou de c fois d, son logarithme x augmentera de b fois d' ou de c fois d'; on aura par conséquent

$$la = x,\ l(a + bd) = x + bd' \text{ et } l(a + cd) = x + cd'.$$

Or, bd et cd sont les différences du premier nombre a aux deux autres $a + bd$ et $a + cd$; bd' et cd' sont les différences du premier logarithme x aux deux suivans $x + bd'$ et $x + cd'$: donc, puisqu'on a évidemment

$$bd : cd :: bd' : cd',$$

il s'ensuit que la proportion énoncée est vraie, d'une manière approchée, tant que les nombres sont un peu grands et qu'ils ne diffèrent pas entre eux de plus d'une unité.

437. Nous verrons plus bas, que pour les nombres au-dessus de 1000, l'erreur de la proportion ne porte jamais sur les millièmes du nombre cherché, ni sur les millionièmes du logarithme demandé. Dans ce qui va suivre, nous supposerons entre les mains des élèves, les petites tables composées par Lalande ou

celles de M[r] Reynaud. Les tables de Callet seraient préférables ; mais elles sont beaucoup plus chères.

438. *Étant donné un nombre, trouver son logarithme.*

Ce problème présente plusieurs cas particuliers, que nous allons examiner successivement.

Premier cas. Si le nombre proposé est un nombre décimal $p+p'$, p étant sa partie entière et p' sa partie décimale ; on observera que les différences p' et 1 du nombre p aux deux nombres $p+p'$ et $p+1$, sont entre elles comme les différences du logarithme de p aux logarithmes de $p+p'$ et de $p+1$ (436), et que par conséquent

$$p' : 1 :: l(p+p') - lp : l(p+1) - lp;$$
$$\text{d'où}\quad l(p+p') = lp + p'[l(p+1) - lp].$$

Ainsi, pour avoir le logarithme d'un nombre décimal donné, il faut ajouter au logarithme de la partie entière, le produit de la partie décimale par la différence entre le logarithme de la partie entière et celui du nombre entier immédiatement supérieur, différence qui est toujours calculée dans les tables. C'est ainsi qu'on aura $l(2159,8) = l(2159) + 0,8 \times 0,00020 = 3,33425 + 0,00016 = 3,33441$.

Second cas. Comme la règle précédente donne des résultats d'autant plus exacts que les nombres sont plus grands, il faudra toujours avancer la virgule d'assez de rangs vers la droite, pour que la partie entière soit l'un des plus grands nombres des tables, et chercher le logarithme du nombre décimal résultant. Or, en avançant la virgule de trois rangs vers la droite, par exemple, on multiplie le nombre proposé par 1000 ; son logarithme augmente donc de 3 unités (434) ; par conséquent, pour avoir le logarithme demandé, il faut diminuer celui qu'on a trouvé, de trois unités ; c'est-à-dire, d'autant d'unités que la virgule a été avancée de rangs vers la droite. Par ce procédé, on trouve que $l(21,598) = l(2159,8 : 100) = l(2159,8) - 2 = 1,33441$.

De même, $l(0,0215998) = l(2159,8) - 5 = 3,33441 - 5$. Au lieu de soustraire le plus petit nombre du plus grand et de donner au reste le signe —, il est préférable de rendre la caractéristique seule négative, en retranchant 3 de 5 ; mais pour indiquer que le reste 2 est négatif, on met le signe — au-dessus et non avant; de sorte qu'on a $l(0{,}21598) = \bar{2}{,}33441 = -2 + 0{,}33441$.

Le logarithme d'une fraction ordinaire est aussi négatif, lorsque le dénominateur surpasse le numérateur (425). Dans ce cas, pour que la caractéristique soit seule négative, on ajoute au logarithme du numérateur assez d'unités pour que la soustraction indiquée devienne possible, et on retranche le même nombre d'unités du logarithme restant. C'est ainsi qu'on aura $l(\frac{37}{175}) = l37 - l175 = 1{,}56280 - 2{,}24304 = \bar{1}{,}32516$.

Troisième cas. Si le nombre proposé surpasse le plus grand des tables, on avancera la virgule d'assez de rangs vers la gauche pour que la partie entière soit l'un des plus grands nombres *tabulaires*, et on cherchera le logarithme du nombre décimal résultant. Mais en avançant ainsi la virgule de deux rangs vers la gauche, par exemple, on divise le nombre proposé par 100; son logarithme diminue donc de deux unités (435); par conséquent, pour avoir le logarithme cherché, il faut ajouter à celui trouvé, deux unités; c'est-à-dire autant d'unités que la virgule a été avancée de rangs vers la gauche. De cette manière on trouve que $l(21598) = l(2159{,}8) + 1 = 4{,}33441$.

439. *Étant donné un logarithme ordinaire, trouver le nombre qui lui appartient.*

Ce problème présente aussi plusieurs cas à examiner.

Premier cas. Si l'on ne trouve dans les tables que les premiers chiffres du logarithme donné ln, le nombre correspondant n sera compris entre les deux nombres entiers consécutifs p et $p+1$, le premier ayant un logarithme plus petit que le logarithme donné ln, et le second un logarithme plus grand. Or, les différences $n-p$ et 1 du nombre p aux deux n et $p+1$, sont entre elles comme les différences du logarithme de p à ceux de n et de $p+1$ (436); donc on a la proportion

$$n - p : 1 :: ln - lp : l(p+1) - lp;$$

$$\text{d'où} \quad n = p + \frac{ln - lp}{l(p+1) - lp}.$$

Cette formule fait voir que, pour trouver le nombre qui correspond à un logarithme donné, dont les derniers chiffres ne sont pas dans les tables, il faut prendre le nombre appartenant au logarithme immédiatement inférieur, et ajouter à ce nombre la fraction ayant pour numérateur, la différence entre le logarithme donné et celui qui est immédiatement plus petit dans les tables, et pour dénominateur, la différence des logarithmes tabulaires qui comprennent le proposé. C'est ainsi qu'on aura le nombre correspondant au logarithme 3,45936 : on verra que ce logarithme tombe entre 3,45924 et 3,45939, qui sont les logarithmes de 2879 et 2880; et on en conclura que le nombre cherché est $2879\frac{12}{15}$ ou 2879,8.

Second cas. Comme la règle précédente donne des résultats d'autant plus exacts que les nombres sont plus grands, il faudra toujours ajouter assez d'unités à la caractéristique du logarithme donné, pour qu'elle soit la plus grande des tables, et chercher le nombre correspondant au nouveau logarithme. Or, en ajoutant, par exemple, 4 unités au logarithme donné, on multiplie le nombre correspondant par 10000 (434); on aura donc le nombre demandé en divisant le nombre trouvé par 10000; ce qui se fait en avançant la virgule de quatre rangs vers la gauche; c'est-à-dire d'autant de rangs qu'on a ajouté d'unités à la caractéristique du logarithme proposé. Par ex., si $ln = 0,86784$, on ajoutera 3 unités à la caractéristique, et l'on trouvera, comme au numéro précédent, que le nombre correspondant au nouveau logarithme 3,86784 est 7376,3. Par conséquent le nombre cherché $n = 7,3763$. Si l'on avait $ln = \bar{2},86784$, on en déduirait $n = 0,073763$.

Enfin, si l'on a $ln = -0,82074$, on ajoutera 4 unités et on effectuera la soustraction, ce qui donnera $3,17926 = l(1511)$; le nombre cherché est donc $n = 0,1511$.

Troisième cas. Si la caractéristique excède la plus grande des tables, on en soustraira assez d'unités pour qu'elle lui soit égale, puis on cherchera le nombre correspondant au nouveau logarithme. Or, en ôtant ainsi 2 unités du logarithme donné ln, on divise le nombre n par 100 (435); on aura donc ce nombre n en multipliant le nombre trouvé par 100; ce qui se fera en avançant la virgule de deux rangs vers la droite; c'est-à-dire d'autant de rangs qu'on a ôté d'unités de la caractéristique. D'après ce procédé, on trouve que si $ln = 4,47659$, on aura $n = 29963$. En effet, il est clair que $ln = 4,47659 = 3,47659 + 1 = l(2996,3) + l10 = l(2996,3 \times 10) = l(29963)$.

440. Il est d'usage de réduire en décimales la fraction qu'il

faut joindre au nombre tabulaire pour avoir celui que l'on cherche. Mais alors, en se servant des tables de LALANDE, on ne doit pousser l'opération que jusqu'aux dixièmes, parce que c'est le seul chiffre décimal dont on soit sûr. En effet, on voit dans les tables de CALLET, que quand les nombres surpassent 40 ou 50 mille, les logarithmes consécutifs ne diffèrent pas d'une demi-unité décimale du 5^{me} ordre; et par conséquent, si les tables employées n'ont que cinq décimales, il arrivera nécessairement que plusieurs nombres consécutifs au-dessus de 50000 auront le même logarithme. Si donc ce logarithme était donné, on ne serait pas sûr, avec ces tables, de trouver le nombre correspondant à moins d'une unité près. En général, lorsqu'on cherche le nombre qui correspond à un logarithme, on n'est pas sûr de l'avoir à moins d'une unité près, quand ce nombre doit être composé d'autant de chiffres qu'il y a de décimales dans le logarithme donné.

441. On appelle *logarithme limite relatif* à une table, le plus grand de tous ceux qui font trouver les nombres correspondans à moins d'une unité près; de manière que pour les logarithmes supérieurs, on ne serait pas certain, en général, d'avoir le nombre à ce degré d'exactitude.

On voit que le logarithme limite peut avoir plusieurs valeurs. Mais comme on sait de mémoire que 0,3010300 est le logarithme de 2, on est convenu de former le logarithme limite en prenant deux fois celui de 2, plus autant d'unités moins une qu'il y a de décimales dans ce logarithme. Ainsi pour les tables de Lalande, le logarithme limite est 4,60206; qui répond au nombre 40000. Pour les tables à 6 décimales, le logarithme limite est 5,602060, et pour celles de Callet il est 6,602600. Au delà de cette limite on ne peut plus compter en général, à moins d'une unité, sur le nombre trouvé, quoique l'on puisse encore y compter pour quelques nombres.

442. Le résultat de l'addition et de la soustraction de plusieurs logarithmes peut s'obtenir par une seule addition, à l'aide des *complémens arithmétiques*. On appelle complément arithmétique d'un logarithme, ce qu'il faut ajouter à ce logarithme pour avoir 10 unités entières; en d'autres termes, c'est le reste qu'on obtient en soustrayant le logarithme proposé de 10.

On trouve le complément arithmétique, en retranchant le premier chiffre à droite de 10, s'il est significatif, et tous les autres de 9. Ce complément peut donc être formé, pour ainsi dire, d'après l'inspection du logarithme, ou d'après sa dictée.

Cela posé, voici l'usage des complémens arithmétiques. Soit $lx = la + lb - lc - ld - le$, et désignons, pour abréger, par $l'c$ le complément arithmétique de lc, et ainsi des autres; nous aurons évidemment, à cause de $lc = 10 - l'c$, etc., $lx = la + lb - (10 - l'c) - (10 - l'd) - (10 - l'e)$; d'où $lx = la + lb + l'c + l'd + l'e - 30$.

De sorte que *pour avoir le logarithme cherché, il faut faire la somme des logarithmes additifs et des complémens des logarithmes soustractifs, puis retrancher de cette somme autant de fois* 10 *qu'on a pris de complémens.*

D'après cette règle, la proportion $37 : 259 :: 497 : x$, donnant $lx = l259 + l497 - l37$; on en déduira

$$lx = l259 + l497 + l'37 - 10 = 2,41330 + 2,69636 + 8,43180 - 10 = 3,54146. \text{ D'où } x = 3479,1, \text{ à } 0,1 \text{ près.}$$

443. Nous devons faire observer que, comme on n'a considéré et calculé dans les tables, que les logarithmes des nombres absolus, il n'y a pas lieu à chercher le logarithme d'un monome soustractif. Cependant, le logarithme d'une quantité négative peut exister; car si la base est 9, le logarithme de -3 sera $\frac{1}{2}$; et si la base était 64, le logarithme de -32 serait $\frac{5}{6}$. Lors donc qu'on sera conduit à une expression négative, on ne pourra en trouver la valeur numérique à l'aide des logarithmes, qu'après avoir fait disparaître le signe $-$. Et comme une expression négative désigne une impossibilité (151), il en sera de même du logarithme d'une quantité négative.

Application de la théorie des logarithmes.

444. Les logarithmes abrégent tellement le calcul des nombres, que par leur moyen les multiplications, les divisions, les élévations aux puissances et les extractions de racines, se changent respectivement en additions, soustractions, multiplications et divisions très-simples. Aussi fait-on un grand usage des logarithmes, quoique leur emploi ne soit indispensable que quand l'inconnue fait partie des exposans. Par exemple, si l'on a

$$x = \frac{28672 \sqrt{164025}}{675 \sqrt[3]{74088}},$$

on prendra les logarithmes de part et d'autre, et on aura

$$lx = l28672 + \tfrac{1}{2} l164025 - l675 - \tfrac{1}{3} l74088,$$
$$\text{ou } lx = 2,61236; \text{ d'où } x = 409,6.$$

Cette valeur est exacte, comme on peut le vérifier en décomposant les nombres proposés dans leurs facteurs premiers.

445. Opérant par logarithmes, on verra que, dans les deux expressions,

$$x = \frac{78425}{72}\sqrt[3]{54 \times 0{,}864} \quad \text{et} \quad y = \frac{54\sqrt[3]{1728}\sqrt{28224}}{\sqrt{576}\sqrt[4]{243 \cdot 2187}},$$

on a $x = 3921{,}25$ et $y = 168$, valeurs exactes.

446. Le logarithme de $a \pm b$ n'est pas $la \pm lb$. En général, les logarithmes n'abrégent le calcul d'une expression numérique, qu'autant que cette expression peut se décomposer en facteurs; il faudra donc toujours tâcher d'effectuer cette décomposition. Et c'est à quoi l'on parviendra le plus souvent, à l'aide d'*inconnues auxiliaires*. Par exemple, si l'on a

$$(2a^3 - b^2c + 4c^3)\,x = a^2b - bc^2;$$

on en déduira d'abord

$$[2a^3 - c(b + 2c)(b - 2c)]\,x = b(a + c)(a - c).$$

Ensuite, si l'on pose $c(b + 2c)(b - 2c) = 2a^2u$, il viendra

$$2a^2(a - u)\,x = b\,(a + c)(a - c).$$

La valeur de u pouvant se calculer aisément par logarithmes, il en sera de même de celle de x.

De même, si l'on avait à calculer par logarithmes, les valeurs de x, y, z, dans les trois équations

$$x^2 = a^2 + b^2,\quad y = (a^3 - b^3)^m \quad \text{et} \quad (a^4 - b^4)\,z = (a^3 + b^3)^n;$$

la première de ces équations donnerait

$$t^2 = 2ab \quad \text{et} \quad x^2 = (a + b + t)(a + b - t);$$

et l'on décomposerait les deux autres équations en facteurs, d'une manière analogue.

447. La résolution des équations exponentielles s'opère facilement par logarithmes, pourvu que ces équations puissent se décomposer en facteurs, ou bien se ramener à l'une des formes

$$pa^x = q,\quad pa^{mx^c} = b^{x^{2c}},\quad a^x = pb^{x-m},\quad a^{mx-n} = pb^{x^2},\ \text{etc.}$$

Par exemple, si on a $a^{2x} + c^{3x} = 2a^{2x+1}$, on en déduira

$$c^{3x} = a^{2x}(2a - 1).$$

Prenant les logarithmes des deux membres, on obtiendra

$$3xlc = 2xla + l(2a - 1),$$

équation du premier degré en x.

Pour avoir la valeur de x dans l'équation

$a^{x-4} = b\sqrt[r]{\left(\frac{2a^2}{a-c}\right)^n} - 2bc$, on posera $y = \sqrt[r]{\left(\frac{2a^2}{a-c}\right)^n}$.

Si l'on avait $a^{2x} = a\sqrt[3]{a^2b}\,(\sqrt{ab})^{x^2}$, on en déduirait

$$2xla = la + \tfrac{1}{3}(2la + lb) + \tfrac{1}{2}x^2(la + lb),$$

équation du second degré, qu'on sait résoudre.

Si l'équation à résoudre était *double exponentielle*, comme $a^{b^x} = c$, on en tirerait d'abord $b^x la = lc$, $b^x = \frac{lc}{la} = d$, et ensuite $xlb = ld$. On traite de même les équations triples exponentielles.

On peut s'exercer à résoudre par logarithmes, les équations que voici :

$$8^{x^3} = 1469;\ 3\cdot 2^{x-1} = 6144;\ 3^{x-1} = 17\tfrac{3}{4} + 3^{x-3};$$
$$11^{x^2-2x} = 1331;\ \sqrt[x]{6^{6x-1}} = 2^{4x}\cdot 3^{3x-2};\ (\sqrt[7]{8^6})^x = 4^{9x-8}$$
$$\text{et}\ \ 27\cdot 3^{x^2-3x} = \sqrt[x]{19683}.$$

448. *Trouver la somme à rendre au bout de* n *années, pour une somme* a *qu'on vient d'emprunter. L'intérêt annuel de* 1 *est* r, *et l'on a égard aux intérêts des intérêts.*

Il est clair que 1^f au commencement de l'année, vaut à la fin $1 + r$. Soit b cette valeur, ou $b = 1 + r$: puisque 1^f vaut b, a vaudra a fois b ou ab. D'où il suit que *la somme à rendre au bout de l'année s'obtient en multipliant le capital de cette année par* b. Mais les intérêts étant composés, la somme à rendre à la fin de chaque année est le capital de l'année suivante ; par conséquent, le capital de la première année étant a, les sommes à rendre au bout des années 1^re, 2^e, 3^e, ..., n^me, seront ab, ab^2, ab^3, ..., ab^n. Si donc S désigne la somme à rendre au bout de la n^me année, on aura $S = ab^n$.

Prenant les logarithmes de part et d'autre, cette formule conduit aux quatre suivantes :

$$lS = la + nlb,\quad la = lS - nlb,$$
$$lb = \frac{lS - la}{n}\quad \text{et}\quad n = \frac{lS - la}{lb}.$$

Ces quatre formules résolvent quatre problèmes généraux, dont voici des cas particuliers : 1° Trouver ce que deviendra la somme 376^f, prêtée à 6 p. $\frac{0}{0}$ par an, pendant 20 ans, les intérêts étant composés. (R. $1205^f,88$.)

2° Quelle somme devrait-on prêter pendant 25 ans, à 5 p. 100, pour recevoir 3386^f, tant en capital qu'intérêts composés? (R. 1000^f.)

3° A combien p. 100 par an devrait-on prêter 1500^f pendant 3 ans, pour recevoir 2592^f, tant en capital qu'intérêts composés? (R. à 20.).

4° Pendant combien d'années doit-on placer une somme a, à intérêts composés, à 5 et à 10 pour 100 par an, pour recevoir $2a$? (R. Pendant 14 ans 76 jours, à 5, et pendant 7 ans 93 jours, à 10.)

449. *Une personne doit une somme* a, *et demande combien elle doit payer au bout de chaque année, pour qu'après* n *années, elle ait acquitté sa dette avec les intérêts composés pendant ce temps. L'intérêt annuel de* 1 *est* r.

Soit x la somme à payer au bout de chaque année et b la valeur annuelle $1+r$ de 1^f : il est clair que la somme x, payée à la fin de la v^{me} année, reste $n-v$ années chez le prêteur, et y vaut, au bout de la n^{me}, xb^{n-v} (448). Prenant dans cette valeur, successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n$, on aura successivement les valeurs, au bout de la n^{me} année, des sommes x payées à la fin des années 1^{re}, 2^e, 3^e, 4^e, ..., n^{me}; ces valeurs sont donc

$$xb^{n-1},\ xb^{n-2},\ xb^{n-3},\ xb^{n-4},\ \ldots,\ xb^0 \text{ ou } x.$$

Or, la somme de ces valeurs doit former ab^n, qui est ce que vaut la dette a après n années (448). Mais la somme des mêmes valeurs, prises à rebours, est une progression géométrique dont le premier terme est x, le dernier xb^{n-1} et la raison b; on a donc (398)

$$\frac{xb^n - x}{b-1} = ab^n \ldots (1)$$

Posant $y=b^n=(1+r)^n$, et prenant les logarithmes de part et d'autre, on aura

$$ly = nl(1+r) \text{ et } lx = l(ar) + ly - l(y-1) \ldots (2)$$

Par ex., si $a=864^f$, $r=0{,}05$ ou $ar=43{,}20$ et $n=15$, on trouvera $x=83{,}2529$ ou simplement $x=83^f,25$.

Pour trouver a, on a les deux formules

$$ly = nl(1+r) \text{ et } la = lx + l(y-1) - ly - lr.$$

Par exemple, si $n = 3$, $x = 1331$ et $r = 0{,}1$, on aura $a = 3310$.

Enfin, si l'on veut avoir n, l'équation (1) donnera d'abord

$$(1+r)^n = \frac{x}{x-ar}, \text{ puis } n = \frac{lx - l(x-ar)}{l(1+r)}.$$

Lorsque $x < ar$, $x - ar$ est négatif et la formule conduit à prendre le logarithme d'un monome négatif; ce qui ne saurait avoir lieu, puisque les tables ne renferment que les logarithmes des nombres. Cette circonstance fait soupçonner une impossibilité lorsque $x < ar$ ou que $x < a(b-1)$.

Et en effet, on voit qu'alors le premier membre de l'équation (1) est moindre que le second; cette équation est donc impossible, ainsi que le problème qui l'a fournie.

450. *Trouver quelle somme* S *un débiteur redevra après* n *années, s'il paye* x *au bout de chaque année sur une somme* a *qu'il vient d'emprunter? L'intérêt annuel de* 1 *est* r, *et l'on a égard aux intérêts des intérêts.*

Il est clair, d'après le problème précédent, qu'on aura

$$S = ab^n - \frac{x}{r}(b^n - 1), \quad b = 1 + r.$$

Si le débiteur, au lieu de payer x^f au bout de chaque année, empruntait au contraire x^f, x deviendrait $-x$ dans la formule précédente. Suivant que cette formule donnera S positif, nul ou négatif, le débiteur redevra, se sera acquitté, où on lui redevra.

451. *Un particulier qui, pendant* n *années, a placé une somme* a *au commencement de chaque année, veut se faire rembourser ce qui lui est dû à la fin de la* n^{me}, *en* m *paiemens égaux, effectués au commencement de chacune des* m *années qui suivent la* n^{me}. *On demande la valeur* x *de chaque remboursement.*

Il est clair que la somme des valeurs des n placemens, au bout de la $(n+m)^{me}$ année, doit être égale à la somme des valeurs des m remboursemens, à la même époque : on a donc l'équation

$$ab^{m+n-1} + ab^{m+n-2} + \cdots + ab^m = xb^{m-1} + xb^{m-2} + \cdots + x.$$

De cette équation, où $b = 1 + r$, on tire

$$(b^m - 1)x = ab^m(b^n - 1).$$

Si $a=231700$, $n=2$, $m=3$ et $r=0{,}1$, on aura $x=$ 195657.

Faisant successivement $m=n$ et $m=\infty$, on aura successivement $x=ab^m$ et $x=a(b^n-1)$.

452. *Un particulier, âgé de* m *années, place une somme* a *en rente viagère. On demande la valeur* x *de cette rente, dans l'hypothèse que ce particulier doit encore vivre* n *années.* Dans ce problème, il s'agit de rembourser la somme a et ses intérêts composés en n paiemens égaux effectués à la fin de chaque année; chaque paiement sera la valeur x de la *rente viagère.* On aura x par la formule (2) du n° 449.

Lorsqu'un homme place une somme a en rente viagère, il ignore combien il a encore d'années à vivre; mais on détermine ce nombre n au moyen de la table de mortalité que voici :

0.	5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.	55.	60.	65.	70.	75.	80.	85	ans.
15.	43.	41.	37.	35.	31.	29.	27.	24.	20.	18.	14.	12.	10.	8.	5.	4.	3.	

Dans cette table on a mis sous chaque âge, le temps qui reste à vivre, d'après les *probabilités.* Cette table n'est applicable qu'à un grand nombre d'individus, parce que les uns gagnent en durée de la vie ce que les autres perdent. Par exemple, les probabilités indiquent qu'une personne âgée de 45 ans, a encore 20 ans à vivre; pour déterminer le taux de la rente viagère qui correspond à cette probabilité, on fait $a=100$, $n=20$ et $r=0{,}05$ dans la formule (2), et on trouve $x=8$; de sorte que la rente viagère est à 8 p. $\frac{0}{0}$.

453. Quelle somme doit-on placer à présent, pour retirer pendant 12 ans et à la fin de chaque année une somme de 1500^f, de manière à être remboursé du capital et de ses intérêts composés au bout de ces 12 années, l'argent étant à 7^f,50 par an? (R. 11602,91.)

Quelle somme doit-on donner au bout de chaque année, pour acquitter en 10 ans une dette de 14000^f, avec ses intérêts composés pendant ces 10 ans, l'argent étant à 5 pour 100 par an? (R. 1813^f.)

Un particulier qui doit 3310^f, voudrait s'acquitter en donnant 1331^f au bout de chaque année. A quelle époque ne devra-t-il plus rien? L'argent étant à 10 p. $\frac{0}{0}$ et les intérêts étant composés, (R. Dans 3 ans.)

Une population augmente chaque année de la 100^e partie de ce qu'elle était l'année précédente; combien faudrait-il encore d'années pour qu'elle fût 10 fois plus grande? (R. 231, environ.)

Des arrangemens et des combinaisons.

454. Lorsque des expressions, sommes ou produits, sont composées de lettres semblables ou différentes, placées dans divers ordres, chacun de ces assemblages est appelé un *arrangement* des lettres qui le composent ; mais si l'une au moins de ces lettres est différente dans chaque expression et qu'on n'ait pas égard aux rangs des lettres, ces expressions se nomment des *combinaisons*. Ainsi trois lettres a, b, c, ajoutées 2 à 2, donnent les six arrangemens $a+b$, $b+a$, $a+c$, $c+a$, $b+c$, $c+d$, et seulement les trois combinaisons $a+b$, $a+c$, $b+c$. Les mêmes lettres multipliées 3 à 3, donnent les six arrangemens ou *permutations* abc, bac, acb, cab, bca, cba, et seulement la combinaison abc.

On distingue les *permutations* des *arrangemens*, en ce qu'on réserve le premier nom aux arrangemens de p lettres entre elles, ou p à p : mais cette distinction est fort peu utile.

455. *Trouver le nombre* x_n *de tous les arrangemens différens que l'on peut former avec* m *lettres, prises* n *à* n.

Soient x_v et x_{v+1} les nombres respectifs de tous les arrangemens différens que l'on peut former avec m lettres, placées v à v et $v+1$ à $v+1$. Si l'on prend l'un des arrangemens de v lettres, et qu'on écrive à sa droite, successivement chacune des $m-v$ lettres restantes, on formera $m-v$ arrangemens différens de $v+1$ lettres : et si l'on agit de même pour chacun de x_v arrangemens différens de v lettres, on aura à chaque fois $m-v$ arrangemens différens de $v+1$ lettres ; donc en tout, on aura $(m-v)x_v$ arrangemens de $v+1$ lettres : or, ces arrangemens diffèrent tous ; car si deux d'entre eux étaient égaux à $cdef\ldots ab$, on aurait écrit deux fois de suite la même lettre b à côté de l'arrangement $cdef\ldots a$ de v lettres ; ce qui est contre l'hypothèse : les mêmes arrangemens sont tous ceux qu'on peut former avec m lettres, prises $v+1$ à $v+1$; car si un arrangement, tel que $defg\ldots ck$, ne s'y trouvait pas, il faudrait qu'on eût oublié d'écrire la lettre k à la droite de l'arrangement $defg\ldots c$ de v lettres ; ce qui est encore contre l'hypothèse. Donc réellement, $(m-v)x_v$ est le nombre x_{v+1} de tous les arrangemens différens que l'on peut former avec m lettres, placées $v+1$ à $v+1$, et l'on a
$$x_{v+1}=(m-v)x_v.$$

Faisant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$; multipliant entre elles les $n-1$ équations résultantes, supprimant les facteurs communs aux deux membres et observant que m lettres, prises 1 à 1, donnent m arrangemens différens d'une lettre, d'où $x_1 = m$, il viendra

$$x_n = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1).$$

Ainsi le nombre de tous les arrangemens différens que l'on peut former avec m choses, en les plaçant n à n, est égal au nombre m multiplié par le produit de tous les $n-1$ nombres entiers immédiatement inférieurs à m.

D'après cela, les nombres de tous les arrangemens différens de m lettres, prises 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc., sont respectivement: $m(m-1)$, $m(m-1)(m-2)$, $m(m-1)(m-2)(m-3)$, etc.

456. *Déterminer le nombre* y_n *de toutes les combinaisons différentes que l'on peut former avec* m *lettres, en les plaçant* n *à* n.

Si dans chaque combinaison de n lettres, on arrange ces lettres n à n, on aura, d'après ce qui précède (455), $n(n-1)(n-2)\ldots 2.1$ arrangemens différens, pour chaque combinaison de n lettres; donc, pour les y_n combinaisons, on aura $1.2.3\ldots(n-1)ny_n$ arrangemens. Or, puisque toutes les y_n combinaisons diffèrent au moins d'une lettre, le même arrangement n'est pas répété dans tous ceux qu'on vient de former : de plus, on ne saurait en former d'autres; car chaque nouvel arrangement ne pourrait renfermer que n des m lettres proposées; il se trouverait donc avoir précisément les mêmes lettres que l'une des y_n combinaisons, et serait par conséquent l'un des arrangemens fournis par cette combinaison. D'où il suit que le nombre de tous les arrangemens différens que l'on peut former avec m lettres, prises n à n, est $1.2.3\ldots(n-1)ny_n$: et puisque ce nombre est aussi $m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$, (455), il en résulte

$$y_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}\ldots (1)$$

Ainsi pour avoir le nombre de toutes les combinaisons différentes que l'on peut former avec m lettres, prises n à n, il faut multiplier le nombre m par le produit de tous les $n-1$ nombres entiers immédiatement inférieurs à m, puis diviser le produit par celui de tous les nombres entiers, depuis 1 jusqu'à n, inclusivement.

D'après cette règle, les nombres de combinaisons différentes (sommes ou produits), qu'on peut former avec m lettres, prises 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc., sont respectivement :

$$\frac{m(m-1)}{1.2},\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3},\ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4},\ \text{etc.}$$

457. Changeant n en $n-1$ dans la formule (1), on verra que la valeur de y_n a le facteur $\frac{m-n+1}{n}$ de plus que la valeur de y_{n-1}; de sorte qu'on a

$$y_n = \frac{m-n+1}{n} y_{n-1}.$$

De là résulte le moyen de passer du nombre de combinaisons de m lettres, $n-1$ à $n-1$, au nombre de combinaisons de m lettres, n à n.

458. On a $y_p = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p}$.

Si $n > p$, tous les facteurs de y_p entreront dans y_n, qui pourra conséquemment s'écrire comme il suit :

$$y_n = y_p \times \frac{(m-p)(m-p-1)\ldots(m-n+1)}{(p+1)(p+2)\ldots n}.$$

Prenons $p = m - n$; alors les facteurs du numérateur de la fraction qui multiplie y_p, pris dans l'ordre inverse, seront tous égaux à ceux du dénominateur; cette fraction se réduira donc à l'unité, et il viendra

$$y_n = y_p \quad \text{ou} \quad y_n = y_{m-n};$$

c'est-à-dire que m *lettres, prises* n *à* n, *donnent le même nombre de combinaisons que ces* m *lettres, prises* m—n *à* m—n. Ce principe sert à rendre plus faciles les calculs des nombres de combinaisons; car s'il fallait trouver le nombre de tous les résultats fournis par 20 lettres, combinées 17 à 17, il serait beaucoup plus simple de chercher le nombre de résultats que donnent ces 20 lettres, combinées 3 à 3, nombre qui est le même que l'autre et qui se réduit à 1140.

459. Il est aisé de s'assurer que le nombre de combinaisons de $m+1$ lettres, prises n à n, est égal à la somme des nombres de combinaisons de m lettres, prises n à n et $n-1$ à $n-1$.

460. Parmi les m lettres proposées, on peut en désigner m', et chercher le nombre x des combinaisons n à n, dont chacune renferme précisément n' des lettres désignées.

Pour abréger, représentons par $[m\,C\,n]$ le nombre de toutes les combinaisons de m lettres, n à n. Cela posé, on observe que chacune des combinaisons cherchées contient n lettres, dont n' sont prises parmi les m' lettres désignées et les $n-n'$ autres parmi les $m-m'$ non désignées. Opérant donc toutes les y combinaisons des m' lettres, n' à n', et les z combinaisons des $m-m'$ lettres, $n-n'$ à $n-n'$, on aura

$$y=[m'\,C\,n'] \quad \text{et} \quad z=[(m-m')\,C\,(n-n')].$$

A la droite de chacune des combinaisons de m' lettres, n' à n', écrivons chacune des combinaisons de $m-m'$ lettres, $n-n'$ à $n-n'$; alors, comme chaque combinaison de m' lettres, n' à n', en fournira z, n à n, contenant chacune n' lettres désignées; les y combinaisons, n' à n', en fourniront yz, n à n, contenant chacune n' des m' lettres désignées. Toutes ces combinaisons diffèrent évidemment, et on ne saurait en trouver d'autres de n lettres, contenant chacune n' des lettres désignées : car chaque nouvelle combinaison de cette espèce, qu'on voudrait former, devant contenir n' des m' lettres désignées, serait la combinaison de n lettres fournie par la combinaison de ces n' lettres. Ainsi on a $x=yz$,

$$\text{ou} \quad x=[m'\,C\,n']\times[(m-m')\,C\,(n-n')].$$

461. Cette formule résout les cinq problèmes particuliers que voici :

1° Dans combien de combinaisons entre la lettre a? Alors $m'=n'=1$ et $x=[(m-1)\,C\,(n-1)]$. Par exemple, 10 lettres se combinent 4 à 4 de 210 façons, dont 84 contiennent a.

2° Combien de combinaisons contiennent a sans b et b sans a? $m'=2$, $n'=1$ et $x=2\times[(m-2)\,C\,(n-1)]$. Des 210 combinaisons de 10 lettres 4 à 4, il en est 112 qui contiennent a sans b et b sans a.

3° Combien y a-t-il de combinaisons renfermant a et b ensemble? $m'=n'=2$ et $x=[(m-2)\,C\,(n-2)]$. Dans notre exemple, il y a 28 combinaisons contenant a et b.

4° Combien y a-t-il de combinaisons ne contenant ni a, ni b? $m'=2$ et $n'=0$; d'où $x=[(m-2)\,C\,n]$. Il y a 70 combinaisons de 10 lettres 4 à 4, sans a ni b.

5° Sur les combinaisons de m lettres n à n, combien en est-il qui contiennent deux des trois lettres a, b, c? $m'=3$, $n'=2$ et $x=3\times[(m-3)\,C\,(n-2)]$. Voyez le vol. II du Cours de Mathématiques pures de M. Francoeur, 2ᵉ édition.

De la formation des puissances des polynomes.

462. Occupons-nous d'abord des puissances des binomes, et observons que, pour mieux connaître la composition de ces puissances, il est nécessaire d'empêcher les réductions qui proviennent de l'égalité des facteurs. Or, c'est à quoi l'on parvien-

dra en multipliant entre eux plusieurs binomes qui n'aient que le premier terme de commun, tels que $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc.

En effet, si l'on effectue ces multiplications et qu'on réunisse en un seul tous les multiplicateurs d'une même puissance de x, on trouvera :

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab;$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc;$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3+$$
$$(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd;$$

et ainsi de suite. Mais sans continuer plus loin ces produits, on peut déjà reconnaître la *loi* de leur formation; et en général, on voit que,

Si l'on multiplie entre eux m binomes dont le premier terme x est commun, tels que $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, etc., et qu'on réunisse en un seul tous les multiplicateurs d'une même puissance de x, on obtiendra un produit de $m+1$ termes. Dans le premier, x aura un exposant m égal au nombre de binomes; et cet exposant diminuera successivement d'une unité, jusqu'au dernier terme, où il sera zéro. Le coefficient de x, dans le premier terme du produit, sera l'unité; dans le second, il sera la somme des m seconds termes des binomes; dans le troisième, la somme de tous les produits des m seconds termes combinés 2 à 2; dans le quatrième, la somme de tous les produits des m seconds termes combinés 3 à 3; et ainsi de suite, jusqu'au dernier terme, où x^0 aura pour coefficient le produit des m seconds termes des binomes.

De sorte que le produit des m binomes proposés, peut être représenté par

$$x^m+\mathrm{A}x^{m-1}+\mathrm{B}x^{m-2}+\mathrm{C}x^{m-3}+\cdots$$
$$+\mathrm{M}x^{m-n+1}+\mathrm{N}x^{m-n}+\cdots+\mathrm{Z}x^0.$$

Multipliant ce produit par un nouveau binome $x+h$, on obtiendra,

$$x^{m+1}+(\mathrm{A}+h)x^m+(\mathrm{B}+\mathrm{A}h)x^{m-1}+(\mathrm{C}+\mathrm{B}h)x^{m-2}$$
$$+\cdots+(\mathrm{N}+\mathrm{M}h)x^{m-n+1}+\cdots+\mathrm{Z}hx^0.$$

Ce nouveau produit ayant $m+1$ facteurs binomes $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, ..., $x+g$, $x+h$, on voit que les exposans de x suivent la loi énoncée. Mais les coefficiens de x

suivent aussi, dans ce produit, la même loi que dans le précédent. En effet,

1° A étant la somme des seconds termes des m premiers binomes, $A + h$ sera la somme des $m + 1$ seconds termes de ces binomes et du nouveau $x + h$.

2° A étant la somme des m premiers seconds termes, Ah sera la somme de tous les produits des $m + 1$ seconds termes, combinés 2 à 2, où h se trouve : mais déjà B est la somme de tous les produits des $m + 1$ seconds termes, combinés 2 à 2, où h n'entre pas ; donc $B + Ah$ est la somme de tous les produits des $m + 1$ seconds termes, combinés 2 à 2.

3° B étant la somme de tous les produits différens des m seconds termes, combinés 2 à 2, Bh sera la somme de tous les produits des $m + 1$ seconds termes, combinés 3 à 3, où h se trouve. Mais déjà C est la somme de tous les produits différens des $m + 1$ seconds termes, combinés 3 à 3, où h n'entre pas ; donc $C + Bh$ est la somme de tous les produits des $m + 1$ seconds termes, combinés 3 à 3.

4° En général, M étant la somme de tous les produits des m premiers seconds termes, combinés $n - 1$ à $n - 1$, Mh sera la somme de tous les produits des $m + 1$ seconds termes, combinés n à n, où h se trouve. Mais N est la somme de tous les produits des $m + 1$ seconds termes, combinés n à n, où h n'entre pas ; donc $N + Mh$ est la somme de tous les produits des $m + 1$ seconds termes, combinés n à n.

5° Enfin, Z étant le produit des m premiers seconds termes, Zh sera le produit des $m + 1$ seconds termes des binomes.

On voit donc, que si la loi énoncée, pour les exposans et les coefficiens de x, est vraie dans un produit de m binomes, elle sera vraie aussi pour un produit de $m + 1$ binomes. Or, cette loi est démontrée pour un produit de 4 binomes ; elle est donc aussi démontrée pour un produit de 5 binomes. Étant vraie pour un produit de 5 binomes, elle le sera donc encore pour le produit de 6 binomes, et par conséquent pour le produit de 7 binomes, de 8, de 9, et en général, pour le produit d'un nombre quelconque de binomes.

463. Au moyen de cette loi, il est aisé de trouver la formule pour calculer une puissance quelconque d'un binome. En effet,

supposons qu'il y ait m facteurs égaux entre eux et à $x+a$; leur produit sera donc $(x+a)^m$, et l'on aura d'abord

$$(a+x)^m = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots + Mx^{m-n+1} + Nx^{m-n} + \dots + Z.$$

Le coefficient A du second terme, étant la somme de m lettres égales à a, sera ma. Le coefficient B du troisième terme étant la somme de tous les produits de m lettres égales à a, combinées 2 à 2, renfermera, comme on l'a vu (456), $\frac{m(m-1)}{1.2}$ produits : et comme tous ces produits sont égaux à a^2, il s'ensuit que

$$B = \frac{m(m-1)}{1.2}a^2.$$

Le coefficient C du quatrième terme, étant la somme de tous les produits différens de m lettres égales à a, combinées 3 à 3, contiendra $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ produits (456) : et puisque tous ces produits sont égaux à a^3, il en résulte que $C = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3$.

En général, le coefficient M du n^{me} terme, étant la somme de tous les produits de m lettres égales à a, combinées $n-1$ à $n-1$, renfermera $\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+2)}{1.2.3\dots(n-1)}$, ou P produits, tous égaux à a^{n-1} (456), et on aura $M = Pa^{n-1}$. De même, le coefficient N du $(n+1)^{me}$ terme, sera $N = P\frac{m-n+1}{n}a^n$.

Enfin, le dernier terme Z, étant le produit de m lettres égales à a, sera a^m. On a par conséquent la formule

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2..3}a^3x^{m-3} + \dots + Pa^{n-1}x^{m-n+1} + P\frac{m-n+1}{n}a^nx^{m-n} + \dots + a^m.$$

Dans cette formule, $P\frac{m-n+1}{n}a^nx^{m-n}$ est le terme qui en a n avant lui : c'est le *terme général*, puisqu'en y faisant successivement $n = 1, 2, 3, 4, \dots, m$, on en déduit successivement les termes 2^e, 3^e, 4^e, 5^e, ..., $(m+1)^{me}$; et il faut bien remarquer que la formule n'a jamais que $m+1$ termes.

464. Le terme général étant comparé au terme précédent, fait voir que, *pour passer d'un terme quelconque de la valeur de* $(x+a)^m$, *à celui qui le suit immédiatement*, *il faut multi-*

plier le coefficient du terme donné par l'exposant de x *dans ce même terme; diviser le produit par le rang de ce terme; puis augmenter de* 1 *l'exposant de* a, *et diminuer de* 1 *celui de* x : *le résultat sera le terme cherché.*

C'est dans cette loi que consiste principalement le binome de Newton : elle sert à développer une puissance particulière, sans qu'on soit même obligé d'avoir recours à la formule générale. Par exemple, si l'on veut trouver, d'après cette loi, le développement de $(x+a)^6$, on formera d'abord les deux premiers termes x^6+6ax^5, ce qui n'a aucune difficulté, d'après les premiers termes de la formule générale; ensuite, on multipliera le coefficient 6 du second terme par l'exposant 5 de x dans ce terme, on divisera le produit 30 par le rang 2 de ce même terme, on augmentera de 1 l'exposant de a et diminuera de 1 celui de x, et il viendra $15a^2x^4$ pour le troisième terme cherché. On aura de même le quatrième terme $20a^3x^3$, à l'aide du troisième. Continuant cette manière d'opérer, on verra que

$$(x+a)^6 = x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6.$$

465. Ce développement conduit à penser, que *dans la valeur de la puissance* m^{me} *d'un binome* x+a, *les coefficiens en* m *des termes également distans des extrêmes, sont égaux entre eux.*

C'est en effet ce qui a toujours lieu; car dans $(x+a)^m$, Qa^nx^{m-n} est le terme qui en a n avant lui, tandis que $Q'a^{m-n}x^n$ est le terme qui en a n après lui. Or, il est clair que $(x+a)^m$ reste le même lorsqu'on y change x en a et a en x; donc son développement doit aussi rester le même, dans ce cas. Mais par ce changement de a en x et de x en a, le terme Qa^nx^{m-n} du développement devient $Qa^{m-n}x^n$; car Q, qui ne contient ni a ni x, ne change pas. Donc, puisque le développement reste le même, il s'ensuit qu'il renfermait déjà le terme $Qa^{m-n}x^n$. Et comme ce développement contient le terme $Q'a^{m-n}x^n$, et que d'ailleurs, il ne peut avoir qu'un seul terme en $a^{m-n}x^n$, il faut que les deux termes n'en fassent qu'un seul, et qu'on ait $Q=Q'$. Ce qu'il fallait démontrer.

L'égalité $Q=Q'$ prouve aussi le principe du n° 458.

466. Il suit du principe qui vient d'être démontré, que pour avoir le développement de $(x+a)^m$, il suffira de calculer les

coefficiens en m des termes de la première moitié ; et ces coefficiens seront, dans un ordre inverse, ceux des termes de l'autre moitié. C'est ce qu'on verrait encore dans les développemens de $(x+a)^7$ et $(x+a)^8$.

Si l'on veut développer $(2a^3b-3a^2b^2)^5$, on posera $2a^3b=x$ et $3a^2b^2=y$; puis après avoir développé $(x-y)^5$, on substituera les valeurs de x et de y, et on formera les puissances indiquées des deux monomes $2a^3b$ et $3a^2b^2$.

467. Le binome de Newton peut servir à développer les puissances d'un polynome quelconque. En effet, supposons qu'il faille trouver la puissance 4^{me} du quadrinome $a+b+c-d$. On fera d'abord $b+c-d=x$, et l'on aura à développer $(a+x)^4$; ce qui donnera

$$(a+x)^4=a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4.$$

Remplaçant x par le binome $b+y$, et formant les puissances 2^e, 3^e, 4^e, de ce binome, on aura le développement de $(a+b+y)^4$. Remplaçant enfin y par sa valeur $c-d$, et formant les puissances 2^e, 3^e, 4^e de $c-d$, on aura le développement cherché de $(a+b+c-d)^4$.

De la méthode des coefficiens indéterminés, appliquée à la recherche de quelques séries.

468. Voici le principe sur lequel cette méthode est basée.

Si un polynome ordonné par rapport aux puissances positives d'une variable x, *est égal à zéro pour toutes les valeurs possibles de cette variable, les coefficiens de diverses puissances de la même variable, seront nuls séparément.*

Par exemple, supposons qu'on ait toujours, quel que soit x,

$$a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.}=0\ldots(1)$$

Puisque cette équation a lieu pour toutes les valeurs de x, si l'on y fait $x=0$, l'égalité subsistera encore, et deviendra $a=0$. Mais a étant indépendant de x, l'hypothèse $x=0$ ne le change pas ; donc avant cette hypothèse, on avait aussi $a=0$. Supprimant a dans (1) et divisant les deux membres par x, on aura $b+cx+dx^2+\text{etc.}=0$. Opérant sur cette égalité comme sur la première, on en déduira $b=0$, puis $c=0$, $d=0$, et ainsi de suite (*).

(*) Cette démonstration laisse peut-être quelque chose à désirer; car bien que la variable x puisse devenir aussi petite qu'on voudra, il pourrait se faire néanmoins qu'elle ne dût jamais devenir nulle. Dans ce cas, voici comment on démontre le principe énoncé.

L'égalité (1) est évidemment la même chose que

$$a = -bx - cx^2 - dx^3 - \text{etc.}$$

Soit φ la valeur numérique du plus grand des coefficiens du second membre. Comme il ne s'agit ici que des valeurs absolues, a sera nécessairement moindre que ce que devient le second membre, lorsqu'on y suppose tous les coefficiens positifs et égaux à φ; on aura donc

$$a < \varphi\,(x + x^2 + x^3 + \dots + x^n); \dots (2)$$

$$\text{d'où} \quad a < \varphi\left(\frac{x - x^{n+1}}{1 - x}\right).$$

Puisque la variable x peut avoir telle valeur on voudra, si on prend $x < 1$, les coefficiens a et φ, qui ne renferment pas x, resteront toujours les mêmes; et que n soit infini ou non, il viendra, à plus forte raison,

$$a < \frac{\varphi x}{1 - x}.$$

Cette inégalité doit subsister quelque petite que soit la variable x; et puisque a et φ sont des nombres constans, je dis que a est nul. Car si a pouvait avoir une valeur m au-dessus de zéro, on pourrait toujours prendre la variable x assez petite pour que $\frac{\varphi x}{1 - x}$ fût moindre que m; on n'aurait donc pas m ou $a < \frac{\varphi x}{1 - x}$; ce qui est absurde. Donc réellement $a=0$. Supprimant a dans (1) et divisant les deux membres par x, puis raisonnant comme on vient de le faire, on trouvera $b=0$. On verra pareillement que $c=0$, $d=0$, et ainsi de suite.

De $a=0$, il résulte, que si une égalité (1) est vraie, quelque petite qu'on y suppose la variable x, elle sera vraie encore lorsqu'on y fera $x=0$. Et si l'égalité résultante $a=0$ avait aussi lieu quelque petite qu'on y supposât une autre variable y, cette égalité existerait encore quand on y prendrait $y=0$; et ainsi de suite. Donc en général, *si une égalité est vraie quelque petites qu'on y suppose les variables qu'elle renferme, cette égalité sera vraie encore lorsqu'on y supposera nulles les mêmes variables.*

Ce principe conduit à la méthode des limites, et serait encore vrai si la variable x était affectée d'un exposant fractionnaire positif; car à cause de $x<1$, la puissance fractionnaire de x serait moindre que la puissance entière ayant son exposant immédiatement inférieur à l'exposant fractionnaire, et l'on aurait encore l'inégalité (2).

469. Si l'on avait $a + bx + cx^2 +$ etc. $= a' + b'x + c'x^2$ $+$ etc., et que cette égalité dût subsister pour toutes les valeurs de x; alors en passant tous les termes dans le premier membre, la nouvelle égalité serait vraie aussi pour toutes les valeurs de x: donc on aurait $a - a' = 0$, $b - b' = 0$, $c - c' = 0$, etc.; d'où $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, etc. On voit donc, que *si une égalité est vraie quelque valeur qu'on attribue à la variable* x, *les coefficiens d'une même puissance de cette variable*, *dans les deux membres*, *seront égaux entre eux*. Et ce principe est au fond le même que le précédent.

470. Voici maintenant l'objet principal de la méthode des coefficiens indéterminés : c'est de développer les fonctions en séries, en faisant trouver les valeurs particulières que l'on doit donner à des coefficiens inconnus, pour rendre *identiques* les deux membres d'une équation.

Par exemple, soit proposé de développer le quotient de $1 - x^3$ divisé par $1 - x$. Il est clair qu'on peut représenter ce quotient par $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ etc.; et qu'ainsi on aura, quel que soit x,

$$1 - x^3 = (1 - x)(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}).$$

Il s'agit donc de trouver les valeurs des coefficiens A, B, C, D, E, etc., qui rendent identiques les deux membres de l'équation précédente. Or, en effectuant la multiplication par $1 - x$, et ordonnant par rapport à x, cette équation devient

$$1 - x^3 = A + (B-A)x + (C-B)x^2 + (D-C)x^3 + (E-D)x^4 + \text{etc.}$$

Pour que les deux membres de cette équation soient identiques, il faut que les coefficiens d'une même puissance de x soient les mêmes de part et d'autre; il faut donc qu'on ait

$$A = 1,\ B - A = 0,\ C - B = 0,\ D - C = -1,\ E - D = 0,\ \text{etc.};$$
$$\text{d'où}\quad A = 1,\ B = 1,\ C = 1,\ D = 0,\ E = 0,\ \text{etc.}$$

De sorte que le développement de $1 - x^3$ divisé par $1 - x$, se réduit à $1 + x + x^2$, comme on pouvait aisément le prévoir.

471. On voit que quand on introduit dans le développement, des termes qui ne doivent pas y entrer, on trouve zéro pour les valeurs de leurs coefficiens. Mais si l'on omettait quelques termes, l'algèbre en avertirait en conduisant à des équations impossibles. C'est ce qui arriverait, p. ex., si dans la division de

$1-x^4$ par $1-x$, on représentait le quotient par $A+Bx+Cx^3+Dx^4+Ex^5+$ etc.; car alors on trouverait

$$A=1,\ B=1,\ B=0,\ C=0,\ D=0,\ E=0, \text{ etc.}$$

472. Ordinairement, lorsqu'on veut développer en-série une certaine fonction de x, on suppose que le développement procède suivant les diverses puissances ascendantes de cette variable, à partir de x^0; et si cette forme n'est pas convenable, on en est averti par des résultats absurdes. Mais on abrége les calculs en cherchant à connaître à *priori* la forme du développement; ce qui se fait à l'aide des propriétés de la fonction donnée.

Par exemple, si l'on voulait développer la fonction $\frac{1}{x^2+x^4}$, on observerait d'abord que cette fonction étant la même chose que $\frac{x^{-2}}{1+x^2}$, son développement devra contenir x^{-2} : et comme la fonction ne change pas lorsqu'on y change x en $-x$, il en sera de même de son développement, qui devra conséquemment ne contenir que des puissances paires de x; on devra donc poser

$$\frac{1}{x^2+x^4}=Ax^{-2}+Bx^0+Cx^2+Dx^4+Ex^6+\text{ etc.}$$

De là on déduira $A=1$, $B=-1$, $C=1$, $D=-1$, $E=1$, $F=-1$, etc.

473. Appliquons maintenant la méthode des coefficiens indéterminés, et proposons-nous en premier lieu d'élever le binome $1+x$ à une puissance quelconque $\frac{p}{q}$, p et q étant des nombres entiers.

D'abord remarquons que le premier terme du développement de cette puissance est $1^{\frac{p}{q}}$, car c'est à quoi ce développement se réduit dès que $x=0$. Et comme $1^{\frac{p}{q}}$ a une valeur arithmétique égale à 1 et $q-1$ valeurs algébriques, nous prendrons seulement la valeur arithmétique, et nous poserons

$$(1+x)^{\frac{p}{q}}=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\cdots\ (1),$$

A, B, C, D, ..., étant des quantités indépendantes de x. Pour déterminer ces quantités, on observe qu'elles ne changeront pas si l'on remplace x par y, et qu'ainsi

$$(1+y)^{\frac{p}{q}}=1+Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\cdots\ (2)$$

Prenant $(1+x)^{\frac{p}{q}}=u^p$ et $(1+y)^{\frac{p}{q}}=v^p$, on aura $1+x=u^q$ et $1+y=v^q$; d'où $x-y=u^q-v^q$. D'après ces valeurs, si l'on retranche (2) de (1), il viendra

$$u^p-v^p=A(x-y)+B(x^2-y^2)+C(x^3-y^3)+D(x^4-y^4)+\dots(3)$$

Avant d'aller plus loin, il faut distinguer deux cas, suivant que p est positif ou négatif. 1° Si p est positif, on divisera l'égalité (3), d'un côté par u^q-v^q et de l'autre par sa valeur $x-y$: observant alors que tous les termes du second membre sont divisibles par $x-y$ (72), et que $u-v$ divise aussi les deux termes de la fraction $\frac{u^p-v^p}{u^q-v^q}$, il viendra, en effectuant toutes ces divisions,

$$\frac{u^{p-1}+vu^{p-2}+v^2u^{p-3}+\dots+v^{p-1}}{u^{q-1}+vu^{q-2}+v^2u^{q-3}+\dots+v^{q-1}}=$$
$$A+B(x+y)+C(x^2+xy+y^2)+D(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+\dots$$

Cette équation étant vraie pour toutes les valeurs de x et y, si on y prend $x=y$, ce qui donne $u=v$, le premier membre devient $\frac{pu^{p-1}}{qu^{q-1}}$ ou $\frac{pu^p}{qu^q}$. De sorte qu'en multipliant de part et d'autre par u^q, l'égalité précédente se réduit à

$$\frac{p}{q}u^p=(A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+5Ex^4+\dots)u^q\dots(4)$$

2° Si p est négatif et égal à $-r$, le 1$^{\text{er}}$ membre de (3) sera

$$u^{-r}-v^{-r},\text{ ou }\frac{1}{u^r}-\frac{1}{v^r},\text{ ou enfin }-\frac{1}{u^rv^r}(u^r-v^r).$$

Si donc on divise d'un côté par u^q-v^q et de l'autre par sa valeur $x-y$, les deux termes de la fraction du premier membre seront divisibles par $u-v$: effectuant toutes les divisions, puis prenant $x=y$, ce qui donne $u=v$, le premier membre devient

$$-\frac{1}{u^{2r}}\cdot\frac{ru^{r-1}}{qu^{q-1}},\text{ ou }\frac{-ru^{-r}}{qu^q},\text{ ou encore }\frac{pu^p}{qu^q}.$$

Multipliant donc de part et d'autre par u^q, on retrouvera l'identité (4), qui a lieu conséquemment pour toutes les valeurs entières de p, positives ou négatives, ainsi que l'égalité (1).

Cela posé, remettant au lieu de u^p, dans (4), le développement (1) de sa valeur $(1+x)^{\frac{p}{q}}$, et au lieu de u^q, sa valeur

$1+x$; effectuant les multiplications, et posant, pour abréger, $m=\frac{p}{q}$, on aura

$$m+Amx+Bmx^2+Cmx^3+Dmx^4+\dots=A+(A+2B)x+(2B+3C)x^2+(3C+4D)x^3+(4D+5E)x^4+\dots$$

Cette équation a été obtenue sans assigner aucune valeur particulière à x; elle aura donc lieu quelle que soit cette indéterminée; ce qui exige que les coefficiens d'une même puissance de x, dans les deux membres, soient égaux entre eux (469). Ainsi, en comparant ces coefficiens, on aura, $A=m$, puis

$$\begin{aligned} A+2B&=Am, &\text{ d'où } B&=\tfrac{1}{2}A(m-1);\\ 2B+3C&=Bm, &\text{ d'où } C&=\tfrac{1}{3}B(m-2);\\ 3C+4D&=Cm, &\text{ d'où } D&=\tfrac{1}{4}C(m-3);\\ 4D+5E&=Dm, &\text{ d'où } E&=\tfrac{1}{5}D(m-4);\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

La loi d'après laquelle les coefficiens A, B, C, D, E, etc. dérivent les uns des autres, est facile à saisir, et on peut trouver autant qu'on voudra de ces coefficiens. Reportant donc leurs valeurs dans le développement (1), où $\frac{p}{q}=m$, on aura

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^4+\text{etc.}\dots\text{(A)}$$

Telle est donc la formule du binome, qui se trouve démontrée, par les raisonnemens précédens, pour toutes les valeurs entières ou fractionnaires, positives ou négatives de l'exposant m. Mais cette formule étant vraie pour toutes les valeurs rationnelles de m, sera vraie aussi lorsque l'exposant m sera incommensurable (375). Et la généralité de l'algèbre conduit à faire usage de la même formule, lorsque l'exposant m est imaginaire.

Remarquons d'ailleurs que quand $m=\frac{p}{q}$, la formule du binome a une infinité de termes. Et si l'on veut avoir égard aux q valeurs arithmétiques et algébriques de $(1+x)^m$, il faudra multiplier le second membre de la formule précédente par l'expression des q valeurs de 1^m; car en désignant par ϕ cette expression, et opérant comme nous l'avons fait, on aurait $A=m\phi$, et ϕ serait facteur commun à tous les termes du second membre de la formule résultante.

Enfin, comme $(a+b)^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = a^m(1+x)^m$, en faisant $\frac{b}{a}=x$; on voit que le développement de la puissance m^{me} de $a+b$ est ramené à celui de $(1+x)^m$.

On peut voir, pages 316 et suivantes des *Mélanges d'analyse*, par M. de Stainville, une démonstration très-belle et très-générale de la formule du binome, à l'aide de la méthode des indéterminées.

474. Après les séries *binomiales* que nous venons d'établir, les plus utiles à considérer sont les séries *exponentielles*. Proposons-nous donc de développer en série la valeur de a^x. Pour cela, si nous prenons d'abord $a=1+v$, nous aurons

$$a^x=(1+v)^x=1+xv+\frac{x(x-1)}{1.2}v^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}v^3+\text{etc.}$$

Ce résultat fait voir que, quelle que soit la variable x, on a

$$a^x=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{etc. (5)}$$

A, B, C, D, ..., étant des coefficiens fonctions de v, qu'il s'agit de déterminer. Pour y parvenir, on observe que ces coefficiens sont indépendans de x, et que par conséquent on a aussi

$$a^y=1+Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\text{etc. (6)}$$

et $a^{x+y}=1+A(x+y)+B(x+y)^2+C(x+y)^3+\text{etc. (7)}$

Or, quel que soit y, on aura toujours $a^{x+y}=a^xa^y$; donc le développement (7) sera toujours égal au produit des développemens (5) et (6), et par conséquent le coefficient de la première puissance de y, dans (7), sera toujours égal au coefficient de la première puissance de y, dans le produit de (5) par (6); il vient donc, en identifiant ces deux coefficiens,

$$A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\cdots=A+A^2x+ABx^2+ACx^3+\cdots$$

Cette égalité étant vraie pour toutes les valeurs qu'on voudra donner à x, il en résulte (469)

$$2B=A^2,\ 3C=AB,\ 4D=AC,\ 5E=AD,\ \text{etc.};$$

d'où l'on tire aisément

$$B=\frac{A^2}{2},\ C=\frac{A^3}{2.3},\ D=\frac{A^4}{2.3.4},\ E=\frac{A^5}{2.3.4.5},\ \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs dans l'identité (5), elle devient

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^3x^3}{2.3} + \frac{A^4x^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Posons $a = e^A$ et $x = \frac{z}{A}$; nous aurons, réductions faites,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} + \text{etc. (B)},$$

série dont la loi est évidente jusqu'à l'infini.

475. De là il est aisé de tirer les séries *logarithmiques*; car à cause de $a = e^A$ et de $a = 1 + v$, on a $e^A = 1 + v$; ce qui donne $e^{Ax} = (1 + v)^x$. Substituant dans cette identité, les développemens de ses deux membres, il viendra, en supprimant 1 de part et d'autre, et en divisant par x,

$$A + \frac{A^2x}{2} + \text{etc.} = v + \frac{x-1}{2}v^2 + \frac{(x-1)(x-2)}{2.3}v^3 + \text{etc.}$$

Puisque les deux membres de cette égalité sont identiques, ce qui est indépendant de x est le même de part et d'autre. Or, on aura ce qui est indépendant de x en faisant $x = 0$, hypothèse qui est d'ailleurs permise, puisque l'égalité précédente a lieu quel que soit x : on a donc

$$A = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} + \frac{v^5}{5} - \frac{v^6}{6} + \text{etc.}$$

Mais $e^A = 1 + v$, donne $A le = l(1 + v)$; donc enfin

$$l(1 + v) = le\left(v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} + \frac{v^5}{5} - \frac{v^6}{6} + \text{etc.}\right) \cdots \text{(C)}$$

476. Cherchons actuellement la valeur numérique de e; et pour cela, observons que le nombre e est indépendant de z, dans la formule (B), et qu'ainsi, en faisant $z = 1$, e ne changera pas, et aura pour expression

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \text{etc.}$$

Quoique cette série s'étende à l'infini, elle a cependant une valeur finie. En effet, si pour abréger on prend $d = 2.3.4 \ldots v$, le v^{me} terme sera évidemment $\frac{1}{d}$; soit donc S la somme de tous ceux qui le suivent; il est clair qu'on aura

$$S = \frac{1}{d(v+1)} + \frac{1}{d(v+1)(v+2)} + \frac{1}{d(v+1)(v+2)(v+3)} + \text{etc.}$$

Remplaçant par $v+1$ tous les facteurs $v+2$, $v+3$, etc., les dénominateurs diminueront; donc les fractions augmenteront, ainsi que leur somme; et S, qui était égal à la première somme, sera moindre que la seconde; on aura par conséquent

$$S < \frac{1}{d(v+1)} + \frac{1}{d(v+1)^2} + \frac{1}{d(v+1)^3} + \text{etc.}$$

Le second membre est la somme des termes d'une progression géométrique décroissante, continuée à l'infini. Si donc on prend l'expression de cette somme (406), on verra que

$$S < \frac{1}{dv}, \text{ ou que } S < \text{le } v^{\text{me}} \text{ de } \frac{1}{d}.$$

De sorte que la somme de tous les termes qui suivent le v^{me}, est moindre que la v^{me} partie de ce v^{me}, dans la série qui donne e. Donc, puisque le treizième terme est moindre que 0,0000000003, il s'ensuit que la somme de tous ceux qui le suivent est $<$ 0,00000000003. Réduisant donc les treize 1$^{\text{ers}}$ termes de e en décimales, jusqu'aux dix-billionièmes inclusivement, ce qui est facile, en prenant respectivement le tiers, le quart, le cinquième, le sixième, ..., des résultats successifs, la somme de ces 13 premiers termes donnera $e = 2,7182818285$. En poussant plus loin les calculs, on aurait

$$e = 2,71828182845904523536.$$

477. Les formules (A), (B), (C), sont susceptibles d'un grand nombre d'applications importantes; mais avant d'en faire usage, il est essentiel de remarquer que quand une expression en x, que nous désignerons par $f(x)$, et qui s'énonce *fonction de x*, est développée en série, on n'a rigoureusement

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.},$$

qu'autant que l'on conçoit, en s'arrêtant à l'un des termes du second membre, la série complétée par une certaine expression de x.

Si dans les applications particulières, la série est *décroissante*, le terme complémentaire peut être conçu aussi petit qu'on veut, et peut par conséquent être négligé. Mais si la série est *croissante*, le terme complémentaire devient de plus en plus grand, et on ne saurait se dispenser d'y avoir égard. Voilà pourquoi les séries croissantes ne peuvent jamais servir à l'évaluation approchée des nombres. C'est aussi pour cela que les algébristes appellent *convergentes*, les séries dont les termes vont en diminuant, et *divergentes* celles dont les termes vont en augmentant. Dans les premières, plus on prend de termes, plus la somme approche d'être numériquement égale à l'expression dont la série est le développement, tandis qu'au contraire, dans les autres, plus on prend de termes, plus leur somme diffère de l'expression réduite en série.

478. On voit qu'une série ne doit être employée aux évaluations numériques, que quand ses termes vont en diminuant. Mais dans ce cas même, comme elle a une infinité de termes, il est nécessaire de s'assurer que la somme de tous ceux qu'on néglige n'influera pas sur la valeur trouvée. Or, si tous les termes sont positifs, il suffira de comparer la somme de tous ceux qu'on néglige à une progression géométrique décroissante, continuée à l'infini, comme nous l'avons déjà fait dans le calcul du nombre e (476).

479. *Mais si les termes de la série sont alternativement positifs et négatifs, et vont en diminuant, la somme des* n *premiers termes différera de la somme de tous les termes, d'une quantité moindre que le* $(n+1)^{me}$ *terme.* En effet, soit S la valeur totale de la série; puisque ses termes sont alternativement positifs et négatifs, et vont en diminuant, il est clair que deux termes consécutifs quelconques donneront un nombre positif ou négatif, suivant que le premier sera positif ou négatif. D'après cela, si l'on prend la valeur v de tous les termes, jusqu'à un terme négatif, inclusivement, tous ceux qui suivront feront un nombre positif; donc on aura la série $S > v$. Et si à v on ajoute le terme positif t suivant, tous les autres feront un nombre négatif; donc on aura $S < v + t$. Par conséquent, $S = v$, à moins du terme t près. Si l'on avait pris la valeur v jusqu'à un terme négatif $-t$, exclusivement, on aurait eu $S < v$ et $S > v - t$; d'où $S = v$, à moins de t près.

480. Nous pouvons maintenant appliquer les séries à la solution de quelques problèmes. Proposons-nous d'abord de trouver une formule propre à calculer aisément les tables de logarithmes.

Pour cela, on observe que la formule (C) a lieu quel que soit v, et qu'on peut y changer v en $-v$; ce qui donne

$$l(1-v)=le\left(-v-\frac{v^2}{2}-\frac{v^3}{3}-\frac{v^4}{4}-\frac{v^5}{5}-\text{etc.}\right).$$

Soustrayant ce résultat de la formule (C), on aura

$$l\left(\frac{1+v}{1-v}\right)=2le\left(v+\frac{v^3}{3}+\frac{v^5}{5}+\frac{v^7}{7}+\text{etc.}\right)\cdots\text{(D)}.$$

Posant $\frac{1+v}{1-v}=1+\frac{d}{n}$; ce qui donne $v=\frac{d}{2n+d}$ et $l\left(\frac{1+v}{1-v}\right)$ $=l(n+d)-ln$, la formule (D) devient

$$l(n+d)-ln=2le\left[\frac{d}{2n+d}+\frac{1}{3}\left(\frac{d}{2n+d}\right)^3+\text{etc.}\right]\cdots\text{(E)}$$

De là on tire, en faisant $d=1$,

$$l(n+1)=ln+2le\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\text{etc.}\right]\cdots\text{(F)}$$

Cette formule fera connaître le logarithme de $n+1$, dès que ceux de e et de n seront connus.

481. Cherchons la limite de la somme S de tous les termes qui suivent le $v$ième entre crochets, dans la formule (E). Soit $h=\frac{d}{2n+d}$; le $(v+1)^{me}$ terme sera $T=\frac{h^{2v+1}}{2v+1}$, et il est visible qu'on aura

$$S=\frac{h^{2v+1}}{2v+1}+\frac{h^{2v+3}}{2v+3}+\frac{h^{2v+5}}{2v+5}+\text{etc.};$$

d'où l'on tire successivement

$$S<T(1+h^2+h^4+\text{etc.}),\quad S<T\times\frac{1}{1-h^2}$$
$$\text{et}\quad S<T\times\frac{(2n+d)^2}{4n(n+d)}.$$

482. Revenons à la formule (F), et prenons-y successivement $n=1$ et $n=4$; à cause de $l1=0$ et de $l4=2l2$, nous aurons

$$l2=2le\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\frac{1}{7.3^7}+\text{etc.}\right]$$
$$l5=2l2+2le\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\text{etc.}\right].$$

D'après la limite de S, trouvée au numéro précédent, la somme de tous les termes qui suivent le 7^{me} entre crochets, dans la 1^{re} de ces deux séries, est moindre que 0,000000003, et dans la seconde, la somme des termes qui suivent le 4^{me} est plus petite que 0,000000001. Négligeant donc ces deux sommes, et réduisant en décimales tous les termes qui les précèdent, on aura

$$l2 = 0,6931472 \, . \, le,$$
$$l5 = 1,6094379 \, . \, le;$$

d'où $l10 = l2 + l5 = 2,3025851 \, . \, le.$

Pour abréger les calculs algébriques, on prend ordinairement le nombre e pour base du système de logarithmes, ce qui donne $le = 1$; et alors les logarithmes sont nommés *Népériens*. Mais comme ici nous ne considérons que les logarithmes *ordinaires*, nous aurons $l10 = 1$, et par conséquent

$$le = 1 : 2,3025851 = 0,4342945.$$

On voit que $le < \frac{1}{2}$. Si l'on effectuait tous les calculs jusqu'à 20 décimales, on trouverait

$$le = 0,43429448190325182765.$$

Avec cette valeur de le, qui est le *module* des logarithmes ordinaires, la formule (F) donnera aisément les logarithmes ordinaires de tous les nombres premiers des tables, en y faisant successivement $n = 1, 2, 4, 6, 10, 12, 16, 18, 22, 28$, etc. Et comme la somme S de tous les termes qui suivent le premier, dans le multiplicateur de $2le$, est moindre que 1 divisé par $12n(n+1)(2n+1)$, valeur plus petite que 0,0000005, lorsque $n = 100$, on voit que si l'on veut obtenir les logarithmes ordinaires avec 7 décimales exactes, la formule (F) donnera, pour tous les nombres n au-dessus de 100,

$$l(n+1) = ln + \frac{2le}{2n+1} \cdots (G)$$

D'où il est aisé de se convaincre que quand $n > 50000$, les logarithmes de deux nombres consécutifs ne diffèrent pas d'une demi-unité décimale du cinquième ordre (440).

Il existe, pour calculer les logarithmes, des formules encore plus expéditives que la formule (F), et qui servent à exprimer des logarithmes en fonctions d'autres déjà connus. Mais ce qui précède suffit pour donner une idée de la facilité avec laquelle on pourrait construire des tables.

483. Maintenant soit proposé de calculer l'erreur que l'on commet en établissant la proportion que prescrit l'usage des tables de logarithmes. Soient n, $n+d$ et $n+1$ trois nombres quelconques, dans lesquels on suppose $d < 1$. Soient $ln = x$,

$l(n+d)=x+ac$ et $l(n+1)=x+a$; il est clair que $c<1$, et qu'on aura, d'après la définition des logarithmes, b étant la base,

$$n=b^x,\ n+d=b^{x+ac} \text{ et } n+1=b^{x+a}.$$

La dernière de ces équations et la première fournissent

$$b^a=\frac{n+1}{b^x}=1+\frac{1}{n}.$$

Elevant de part et d'autre à la puissance c, et multipliant ensuite par l'équation $b^x=n$, on aura

$$b^{ac+x}=n\left(1+\frac{1}{n}\right)^c \text{ ou } n+d=n\left(1+\frac{1}{n}\right)^c.$$

Développant le second membre d'après la formule du binome, et effaçant n de part et d'autre, on trouve, en observant que $c<1$,

$$d=c-\frac{c(1-c)}{2n}+\frac{c(1-c)(2-c)}{2.3.n^2}-\frac{c(1-c)(2-c)(3-c)}{2.3.4.n^3}+\text{etc.}$$

Les termes de cette série sont alternativement positifs et négatifs, et vont d'ailleurs en diminuant; donc si l'on prend seulement le premier, l'erreur sera moindre que le second, et à plus forte raison, moindre que $\frac{1}{2n}$; on aura donc

$$d=c-<\frac{1}{2n},\ \cdots (6)$$

résultat auquel on parviendrait d'ailleurs en observant que tous les termes qui suivent le 1er c, dans la série, font une somme négative $<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\text{etc., à l'infini}\right)$.

Cela posé, 1° pour trouver le logarithme ordinaire de $n+d$, on fait la proportion :

$$1:d::l(n+1)-ln:l(n+d)-ln, \text{ ou } 1:d::a:ac;$$

et on en tire $ac=ad$. Mais d'après la valeur (6), on doit avoir $ac=ad+<\frac{a}{2n}$; l'erreur due à la proportion est donc $<\frac{a}{2n}$.

Or, a désigne la différence entre deux logarithmes consécutifs; et quand les nombres sont plus grands que 1000; cette différence est moindre que 0,00045. D'où il suit que pour tous les nombres au-dessus de 1000, la proportion donne au logarithme cherché, une valeur qui ne diffère pas de la véritable d'une quantité égale à

$$\frac{0,00045}{2000} \text{ ou à } 0,00000023.$$

Ainsi *pour tous les nombres plus grands que* 1000, *l'erreur de la proportion ne portera jamais sur les millionièmes du logarithme cherché.*

2° Lorsqu'on veut trouver le nombre correspondant au logarithme donné $l(n+d)$, on fait la proportion

$$1 : d :: l(n+1) - ln : l(n+d) - ln, \quad \text{ou} \quad 1 : d :: a : ac.$$

et on en tire $d = c$. Mais d'après l'équation (6), on doit avoir $d = c - < \frac{1}{2n}$; l'erreur due à la proportion est donc moindre que $\frac{1}{2n}$ ou que 0,0005, lorsque $n > 1000$. Ainsi *pour tous les nombres au-dessus de* 1000, *l'erreur de la proportion ne portera jamais sur les millièmes du nombre demandé.*

Ce que nous venons de dire se rapporte aux tables de Lalande. A l'égard de celles de Callet, on trouve, d'une manière analogue, que quand les nombres sont au-dessus de 10000, l'erreur de la proportion n'est pas de 0,00005 pour le nombre, et de 0,0000000025 pour le logarithme. Ce principe et le précédent supposent néanmoins que les logarithmes consécutifs diffèrent dans les dernières décimales conservées. Autrement l'erreur de la proportion pourrait porter même sur les unités du nombre cherché (440).

On trouve dans les Mélanges d'algèbre, un grand nombre d'applications des séries, et entre autres, l'extraction des racines des nombres au moyen des séries binomiales.

De la composition des équations.

484. Jusqu'à présent les algébristes ont fait des efforts inutiles pour résoudre généralement les équations des degrés supérieurs au quatrième; et les formules qu'ils ont obtenues pour les valeurs de l'inconnue dans lès équations du troisième et du quatrième degré, sont si compliquées et d'un usage si peu commode, lorsque toutefois on peut les appliquer, ce qui n'est pas toujours possible, qu'on doit regarder le problème de la résolution des

équations générales de degrés supérieurs au second, comme n'étant réellement d'aucune utilité. Aussi les analystes ont-ils dirigé principalement leurs recherches vers la résolution des *équations numériques*; et ils ont trouvé des méthodes au moyen desquelles une équation numérique quelconque étant donnée, on peut toujours déterminer les racines qu'elle renferme. Nous allons nous occuper de ces méthodes; mais nous ne parlerons pas de la recherche des racines imaginaires, parce qu'elle nous paraît beaucoup plus curieuse qu'utile.

485. Quelle que soit l'équation à une inconnue x, on peut toujours, sans altérer les valeurs de cette inconnue, chasser les dénominateurs, transposer les termes dans le premier membre, réduire et diviser par le coefficient de la plus haute puissance de x; ce qui donnera une équation de la forme

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0,$$

P, Q, ..., T et U étant des nombres positifs, nuls ou négatifs. Nous supposerons toujours qu'on ait préparé l'équation ainsi qu'on vient de l'indiquer; et pour abréger, nous représenterons l'équation transformée par $X = 0$.

On sait qu'une *racine* de l'équation $X = 0$, est une quantité a qui, mise à la place de x, réduit X à zéro, ou donne

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + \dots + Ta + U = 0.$$

Or, une équation devant toujours être considérée comme la traduction algébrique des relations qu'ont entre elles les données et l'inconnue d'un problème, on est conduit naturellement au principe que *toute équation a au moins une racine*. A la vérité, les conditions de l'énoncé peuvent être incompatibles; mais alors on doit supposer qu'on en serait averti par quelques symboles d'absurdité, tels que des expressions infinies ou imaginaires, et il n'en existerait pas moins une expression algébrique qui, substituée à la place de x, dans l'équation, y satisferait. Nous admettrons donc le principe précédent, qui sera d'ailleurs vérifié pour le plus grand nombre d'équations.

486. Soit a une quantité prise au hasard : divisons le polynome X par $x - a$, soit q le quotient et r le reste, qui sera indépendant de x; nous aurons l'identité $X = q(x-a) + r$.

Si l'on fait $x = a$, le reste r ne changera pas, puisqu'il ne contient pas x : et comme alors on aura $X = r$, il s'ensuit que

r est précisément ce que devient le polynome proposé X lorsqu'on y change x en a. D'après cela, si a est ou n'est pas racine de $X=0$, le reste r sera ou ne sera pas nul ; et le polynome X sera ou ne sera pas divisible exactement par $x-a$. Réciproquement, si X est ou n'est pas divisible exactement par $x-a$, le reste r sera ou ne sera pas nul, et a sera ou ne sera pas racine de $X=0$. Donc *si* a *est une racine de l'équation* $X=0$, *le premier membre* X *sera divisible exactement par* $x-a$, *et ne le sera que dans ce cas.*

Si l'on effectue réellement la division du polynome X par $x-a$, le quotient q sera de la forme

$$q=x^{m-1}+P'x^{m-2}+Q'x^{m-3}+\dots+T'x+U',$$

et on verra que, dans ce quotient, on a $P'=a+P$;
$Q'=a^2+aP+Q$, ou $Q'=aP'+Q$;
$R'=a^3+a^2P+aQ+R$, ou $R'=aQ'+R$;
$S'=a^4+a^3P+a^2Q+aR+S$, ou $S'=aR'+S$;
et ainsi de suite.

D'où il suit qu'*on aura un coefficient quelconque du quotient de* X *par* $x-a$, *en multipliant le coefficient précédent par* a, *et en ajoutant au produit le coefficient qui, dans le dividende, occupe le même rang que celui que l'on cherche.* C'est ainsi que, dans la division de x^3-5x^2+4x-6 par $x-2$, on trouve, pour les coefficiens successifs du quotient : 1, puis $1\times2-5$ ou -3, et $-3\times2+4$ ou -2 : le reste est $-2\times2-6$ ou -10. Et en effet, on obtient x^2-3x-2 pour quotient et -10 pour reste.

487. Nous venons de voir que l'équation $X=0$ ayant a pour racine, le premier membre X est divisible exactement par $x-a$, et donne un quotient q du degré $m-1$ en x : on a donc

$$X=q(x-a).$$

Si b est racine de l'équation $q=0$, q sera divisible exactement par $x-b$, et donnera un quotient q' du degré $m-2$ en x ; de sorte qu'on aura $q=q'(x-b)$ et

$$X=(x-a)(x-b)q'.$$

De même, c étant racine de l'équation $q'=0$, q' sera divisible exactement par $x-c$, et il viendra $q'=q''(x-c)$; d'où

$$X=(x-a)(x-b)(x-c)q''.$$

Raisonnant de même pour $q''=0$, $q'''=0$, et ainsi de suite, on verra que le plus haut exposant de x diminue continuellement d'une unité dans les quotiens successifs q, q', q'', q''', ...; et qu'après $m-2$ divisions, il y aura $m-2$ facteurs binomes en évidence, et un quotient du second degré, décomposable lui-même en $(x-h)(x-l)$. Donc, *en admettant que toute équation ait une racine, le polynome* X *sera formé du produit de* m *facteurs binomes du premier degré en* x, et l'on aura

$$X=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\cdots(x-h)(x-l)\cdots(1).$$

Cette équation est *identique*, c'est-à-dire qu'il n'y a d'autre différence entre les deux membres que dans leur expression analytique, différence qui cesse dès qu'on exécute les opérations indiquées.

488. Maintenant, si a' est différent de chacune des quantités a, b, c, d, ..., l, je dis que le polynome X ne sera pas divisible exactement par $x-a'$. En effet, si cette division était possible; en désignant par A le quotient exact, on aurait $X=A(x-a')$: donc, en faisant $x=a'$, il viendrait $X=0$, et par suite

$$(a'-a)(a'-b)(a'-c)(a'-d)\ldots(a'-l)=0\ldots(2)$$

Or, a' n'étant pas égal à a, $a'-a$ n'est pas nul : de même, aucun des facteurs $a'-b$, $a'-c$, $a'-d$, ..., $a'-l$, n'est zéro. Donc en divisant les deux membres de l'équation (2), successivement par chacun des facteurs du premier, à l'exception de $a'-l$, tous les quotiens successifs du second membre seront nuls, et l'on aura $a'-l=0$, ou $a'=l$, ce qui est contre l'hypothèse. Donc X n'est pas divisible par $x-a'$. Donc enfin, *tout polynome du degré* m *en* x *a* m *facteurs binomes du premier degré, et ne peut en avoir davantage.*

489. L'identité (1) montre que l'équation $X=0$ est satisfaite par chacune des m valeurs $x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=d$, ..., $x=l$. Mais elle ne peut l'être par aucune autre valeur différente; car l'existence d'une racine a' différente de a, b, c, d, ..., l, entraîne l'existence d'un diviseur $x-a'$ différent de $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, ..., $x-l$; ce qui est impossible (488). Donc en général, *toute équation du degré* m *a* m *racines, et ne peut en avoir davantage.*

Ce principe est vrai encore quand l'équation $X=0$ a n facteurs égaux à $x-a$, p facteurs égaux à $x-b$, etc.; mais alors on dit que cette équation a n *racines égales à* a, p *racines égales à* b, etc.

490. Multipliant deux à deux, trois à trois, etc., les m diviseurs binomes de X, lesquels sont du premier degré en x, on formera $\frac{1}{2}m(m-1)$ diviseurs du second degré (456), $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$ du troisième, et ainsi de suite.

491. L'identité (1) étant la même chose que

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\cdots=(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-l);$$

si l'on effectue la multiplication des m facteurs du second membre, les coefficiens d'une même puissance de x, dans les deux membres, seront nécessairement égaux (468) : donc, en se rappelant la loi établie (462) pour avoir le produit de m facteurs binomes, et observant que les seconds termes de ceux que nous considérons ici, sont sous la forme négative, on verra que,

1° Le coefficient P du second terme, pris en signe contraire, est la somme des m racines ; 2° le coefficient Q du troisième terme est la somme de tous les produits différens des racines, combinées deux à deux ; 3° le coefficient R du quatrième terme, pris en signe contraire, est la somme de tous les produits des racines, combinées trois à trois ; et ainsi de suite. Enfin, le dernier terme U, pris en signe contraire, si le degré est impair, est le produit de toutes les racines (*). C'est ce qu'on vérifie aisé-

(*) Les relations que nous venons d'énoncer entre les racines et les coéfficiens d'une équation, ne suffisent pas pour déterminer les racines de cette équation. Par exemple, considérons l'équation du troisième degré $x^3+Px^2+Qx+R=0$, et soient a, b, c, ses trois racines, nous aurons donc

$$a+b+c=-P,\quad ab+ac+bc=Q \quad\text{et}\quad abc=-R.$$

Multipliant la première de ces équations par a^2, la seconde par $-a$, et ajoutant la troisième à la somme des deux résultats, il viendra $a^3+Pa^2+Qa+R=0$. On aurait de même, $b^3+Pb^2+Qb+R=0$ et $c^3+Pc^2+Qc+R=0$. De sorte qu'on doit résoudre une équation semblable à la proposée, soit pour avoir a, soit pour avoir b ou c. Et c'est ce qui devait arriver ; car les quantités a, b, c, étant toutes disposées de la même manière dans chacune des trois équations à résoudre, il n'y a pas de raison pour que l'une soit déterminée par une équation différente de celle qui détermine l'autre ; les trois quantités a, b, c, doivent donc être racines d'une même équation qui, par conséquent, doit être du troisième degré. En général, *lorsque des inconnues entrent de la même manière dans des équations, ces inconnues sont toutes racines de la même équation finale.*

ment dans l'équation $x^4 - x^3 - 25x^2 + 37x + 60 = 0$, dont les racines sont 4, -1, $+3$ et -5.

Au moyen de ces relations, on trouve facilement l'équation dont les racines sont données, et l'on ramène au second degré les problèmes que voici :

1° Résoudre une équation du troisième degré dont les racines sont en progression géométrique, comme $x^3 - 14x^2 - 84x + 216 = 0$.

2° Résoudre l'équation du quatrième degré dont les racines forment une équidifférence, telle que $x^4 - 14x^3 + 67x^2 - 126x + 72 = 0$.

3° Résoudre une équation du quatrième degré dont les racines sont en proportion géométrique, comme $x^4 - 20x^3 + 108x^2 - 360x + 324 = 0$.

4° Enfin, résoudre une équation dont les racines sont en progression arithmétique, telle que $x^5 - 40x^4 + 595x^3 - 4040x^2 + 12164x - 12320 = 0$.

De la transformation des équations.

492. Le but général de la transformation des équations, est de les ramener à d'autres plus faciles à traiter; ce qui donne lieu à plusieurs questions, dont nous allons examiner les plus importantes.

Proposons-nous d'abord *de transformer une équation en une autre dont tous les coefficiens soient entiers, et dont celui du premier terme soit l'unité*. Pour cela, on commence par chasser les dénominateurs et par transposer les termes dans le premier membre, ce qui donne une équation de la forme

$$Nx^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \cdots + Tx + U = 0; \ldots (1)$$

Ensuite, on pose $x = \frac{y}{N}$, et il vient

$$\frac{y^m}{N^{m-1}} + \frac{Py^{m-1}}{N^{m-1}} + \frac{Qy^{m-2}}{N^{m-2}} + \cdots + \frac{Ty}{N} + U = 0; \text{ d'où}$$

$$y^m + Py^{m-1} + NQy^{m-2} + \cdots + N^{m-2}Ty + N^{m-1}U = 0,$$

équation demandée dont les racines sont N fois plus grandes que celles de l'équation proposée (1), car $y = Nx$. Ainsi pour transformer une équation en une autre dont tous les coefficiens soient des nombres entiers et celui du premier terme l'unité, il faut, après avoir chassé les dénominateurs et avoir transposé, égaler l'inconnue à une autre divisée par le coefficient N du premier terme; calcul qui revient à multiplier les coefficiens, à partir du second terme, par N^0, N^1, N^2, ..., N^{m-1}.

Soit par exemple, $x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{2} = 0$; on en déduira d'abord $12x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 9x - 42 = 0$; faisant ensuite $x = \frac{1}{12}y$, c'est-à-dire, multipliant les coefficiens 10, 9 et 42 par 12, 12^2 et 12^3, il viendra *la transformée*

$$y^4 - 8y^3 + 120y^2 - 1296y - 72576 = 0.$$

493. On peut quelquefois obtenir une transformée ayant des coefficiens plus simples que par la méthode précédente : il suffit, pour cela, dans $x = \frac{y}{D}$, de choisir D de manière que D^m étant divisible par N, l'expression $\frac{PD^m}{N}$ soit un multiple de D^{m-1}. Dans l'exemple précédent, on prendra $x = \frac{1}{6}y$, et la transformée sera $y^4 - 4y^3 + 30y^2 - 162y - 4536 = 0$.

D'après cette méthode, si l'on avait les équations

$$x^3 - \frac{7x^2}{3} + \frac{11x}{36} - \frac{25}{72} = 0 \text{ et } x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{5x^2}{12} - \frac{7x}{9} + \frac{23}{108} = 0,$$

on poserait $x = \frac{1}{6}y$ dans la première et $x = \frac{1}{12}y$ dans la seconde.

Si l'on avait $x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{11}{12}x^2 + \frac{7}{150}x - \frac{113}{9000} = 0$, on prendrait $x = \frac{1}{30}y$.

494. *Etant donnée une équation, trouver sa réciproque.*

Soit $Nx^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0$ l'équation donnée. Si l'on fait $x = \frac{1}{y}$, les plus grandes valeurs de x répondront aux plus petites de y, et réciproquement : la transformée sera donc la *réciproque* de la proposée, et deviendra

$$Uy^m + Ty^{m-1} + \dots + Qy^2 + Py + N = 0.$$

Ce calcul revient, comme on voit, à distribuer les puissances de y en ordre inverse de celles de x. Et si l'on veut en outre chasser le coefficient U, on posera $x = \frac{U}{y}$, transformation qui remplit d'un seul coup les deux conditions imposées.

495. *Faire évanouir le second terme d'une équation.*

Soit $Nx^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0$ l'équation proposée. Faisons $x = u + y$; développons d'après le binome de Newton, et ordonnons par rapport aux puissances descendantes de y; nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} Ny^m + mNuy^{m-1} + \frac{m}{2}(m-1)Nu^2y^{m-2} + \dots + Nu^m \\ \quad + \quad Py^{m-1} + \quad (m-1)\ Puy^{m-2} + \dots + Pu^{m-1} \\ \qquad\quad + \qquad\qquad\quad Qy^{m-2} + \dots + Qu^{m-2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \dots + \dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0.$$

Comme u est arbitraire, on peut en disposer pour satisfaire à l'équation $mNu + P = 0$, condition qui fait évanouir le second terme de la transformée en y, et qui donne $u = -\frac{P}{mN}$; d'où $x = y - \frac{P}{mN}$. Ainsi pour faire disparaître le second terme d'une équation, il faut remplacer l'inconnue par une autre, augmentée du coefficient du second terme, pris en signe contraire et divisé par autant de fois le degré de l'équation qu'il y a d'unités dans le coefficient du premier terme.

Par exemple, si l'on a l'équation $2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 7 = 0$, et qu'on veuille faire disparaître le second terme, on posera $x = y + \frac{4}{2.4} = y + \frac{1}{2}$, et la transformée en y sera $2y^4 + 2y^3 + 3y - \frac{49}{8} = 0$.

496. Au lieu de faire disparaître le second terme, on peut demander que l'équation soit privée du troisième, du quatrième, etc. Il suffit, pour cela, d'égaler à zéro le coefficient de y^{m-2}, de y^{m-3}, etc.; ce qui conduit à résoudre une équation du second, du troisième degré en u, et il en résulte par conséquent plusieurs valeurs de u qui satisfont à la condition demandée.

Enfin, pour faire disparaître le dernier terme, il faudra résoudre l'équation

$$Nu^m + Pu^{m-1} + Qu^{m-2} + \dots + Tu + U = 0,$$

qui n'est autre chose que la proposée, dans laquelle on a remplacé x par u. Et en effet, égaler à zéro le dernier terme de la transformée en y, terme qui est le produit de toutes les valeurs de y, c'est supposer nulle une de ces valeurs; la valeur correspondante de x est donc $x = u$.

Il est bon de remarquer que les racines de la transformée en y, trouvée plus haut, sont égales à celles de l'équation proposée, diminuées chacune de u.

497. *Trouver une méthode pour obtenir aisément, dans la pratique, le polynome que fournit la supposition de* $x=u+y$ *dans un polynome donné.*

Soit $Nx^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\dots+Tx+U$ le polynome proposé. Si l'on y fait $x=u+y$, et qu'on développe, d'après la formule du binome, on aura, en ordonnant suivant les puissances ascendantes de y,

$$\begin{array}{l}
Nu^m+mNyu^{m-1}+\frac{m}{2}(m-1)Ny^2u^{m-2}+\dots+Ny^m\\
+Pu^{m-1}+(m-1)Pyu^{m-2}+\frac{m-1}{2}(m-2)Py^2u^{m-3}+\dots\\
+Qu^{m-2}+(m-2)Qyu^{m-3}+\frac{m-2}{2}(m-3)Qy^2u^{m-4}+\dots\\
+\dots\dots+\dots\dots\dots\dots+\dots\dots\dots\dots\dots\dots+\dots\\
+Tu\quad+\quad Ty\\
+U
\end{array}$$

Ce résultat peut être représenté par

$$X+X_1y+\tfrac{1}{2}X_2y^2+\tfrac{1}{6}X_3y^3+\dots+Ny^m,$$

en faisant

$$\begin{array}{l}
X=Nu^m+Pu^{m-1}+Qu^{m-2}+\dots+Tu+U,\\
X_1=mNu^{m-1}+(m-1)Pu^{m-2}+(m-2)Qu^{m-3}+\dots+T,\\
X_2=m(m-1)Nu^{m-2}+(m-1)(m-2)Pu^{m-3}+\dots\\
X_3=m(m-1)(m-2)Nu^{m-3}+(m-1)(m-2)(m-3)Pu^{m-4}+\dots\\
\text{etc.}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

On voit que X désigne le polynome proposé, après avoir changé x en u; que X_1 *se déduit du polynome* X *en multipliant chaque terme de ce polynome par l'exposant de* u *dans ce même terme, et en diminuant cet exposant d'une unité;* sur quoi il faut observer que U ou Uu^0 devient alors $0\cdot Uu^{-1}$ ou 0. De même, X_2 se déduit de X_1 d'après la loi que l'on vient d'énoncer pour déduire X_1 de X; X_3 se déduit de X_2, d'après la même loi; et ainsi de suite. De sorte que les quantités X, X_1, X_2, X_3, etc., se déduisent les unes des autres d'après une loi constante. Cette propriété leur a fait donner le nom de *fonctions dérivées* : X_1 est la *dérivée* de X, X_2 la *dérivée* de X_1, et ainsi des autres. En général, la *dérivée* d'un polynome en x est un autre polynome formé en multipliant chaque terme du premier par l'exposant de x dans ce même terme, et en diminuant cet exposant d'une unité.

498. Pour appliquer cette loi, proposons-nous de faire évanouir le second terme de l'équation

$$x^4 - 12x^3 + 17x^2 - 9x + 7 = 0.$$

D'après la règle du n° 495, il faut poser $x = y + 3$, ce qui donnera une transformée du quatrième degré de la forme

$$X + X_1 y + \tfrac{1}{2}X_2 y^2 + \tfrac{1}{6}X_3 y^3 + y^4 = 0;$$

et tout se réduit à calculer X, X_1, X_2 et X_3, d'après la loi précédente. Or, X est ce que devient le premier membre de l'équation proposée en y remplaçant x par 3; ainsi

$$\begin{array}{ll}
X = 3^4 - 12.3^3 + 17.3^2 - 9.3 + 7; & \text{d'où } X = -110; \\
X_1 = 4.3^3 - 36.3^2 + 34.3 - 9; & \text{d'où } X_1 = -123; \\
X_2 = 12.3^2 - 72.3 + 34; & \text{d'où } \tfrac{1}{2}X_2 = -37; \\
X_3 = 24.3 - 72; & \text{d'où } \tfrac{1}{6}X_3 = 0.
\end{array}$$

Donc la transformée devient

$$y^4 - 37y^2 - 123y - 110 = 0.$$

Nous aurons dans la suite de fréquentes occasions d'employer les polynomes dérivés; et il est par conséquent utile de retenir la loi de leur formation.

Des limites des racines.

499. On appelle *limite supérieure* des racines positives d'une équation, tout nombre qui surpasse la plus grande de ces racines positives; et l'on nomme *limite inférieure*, le nombre moindre que la plus petite racine positive.

500. Soit $A - B$ une équation du degré m, dans laquelle A désigne la somme de tous les termes positifs et B celle de tous les termes négatifs. Soit S le plus grand coefficient et n le plus grand exposant pris parmi les termes négatifs; la somme B de ces termes sera donc moindre que si tous leurs coefficiens étaient égaux au plus grand S d'entre eux; et on aura

$$B < S(x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x + 1); \text{ d'où}$$

$$B < S\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad \text{et} \quad B < \frac{Sx^{n+1}}{x-1}.$$

Soit Rx^r un terme positif de l'équation proposée, dans lequel $r > n$; il est clair que $A > Rx^r$. Prenons x de manière qu'on ait

$$Rx^r > \frac{Sx^{n+1}}{x-1}, \quad \text{ou} \quad (x-1)x^{r-n-1} > \frac{S}{R} \cdots (1)$$

Il est clair, à plus forte raison, qu'on aura $Rx^r > B$ et $A > B$. Mais $x^{r-n-1} > (x-1)^{r-n-1}$; donc $(x-1)x^{r-n-1} > (x-1)^{r-n}$. Si donc on pose

$$(x-1)^{r-n} = \frac{S}{R}, \quad \text{ou} \quad x = 1 + \sqrt[r-n]{\frac{S}{R}} = L,$$

l'inégalité (1) sera satisfaite; et toute valeur de x plus grande que la précédente L, satisfera, à plus forte raison, à cette inégalité, et donnera conséquemment $A > B$. D'où il suit que L et tout nombre plus grand, mis à la place de x, dans l'équation $A - B = 0$, rendent la partie positive A supérieure à la partie négative B, et donnent constamment $A - B > 0$. Donc L est une limite supérieure des racines positives de l'équation proposée.

501. Si $R = 1$, c'est-à-dire, si R est le coefficient du premier terme de l'équation $A - B = 0$; comme ce premier terme est x^m, on aura $r = m$, et la limite supérieure des racines positives sera $1 + \sqrt[m-n]{S}$.

D'ailleurs, la racine $(m-n)^{me}$ de S étant moindre que S, cette limite sera, à plus forte raison, $1 + S$, ou l'*unité augmentée du plus grand coefficient négatif.*

Soit l'équation $x^5 + 10x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 12x - 40 = 0$: d'après la première limite L trouvée plus haut (500), il est clair que dans cette équation, on aura toujours $x < 1 + \sqrt{4}$ ou $x < 3$; c'est-à-dire que la plus grande racine positive est moindre que 3. La seconde limite trouvée au numéro précédent donnerait $x < 1 + \sqrt[4]{40}$ ou $x < 5$; et la troisième $1 + S$ fournirait $x < 41$.

502. La limite $1 + S$ jouissant de la propriété de rendre le premier terme x^m de l'équation, supérieur à la somme arithmétique de tous les autres, on la préfère quand il ne s'agit que de démontrer des propositions générales, parce qu'elle se forme à vue et sans aucun calcul. Mais lorsqu'on procède à la recherche

des valeurs numériques des racines, il importe beaucoup de choisir pour limite supérieure un nombre le moins élevé possible et le plus près qu'il se peut de la plus grande racine. Il est donc plus avantageux d'employer, quand il est possible, la première limite $1 +$ *la racine* $(r-n)^{me}$ *de* $\frac{S}{R}$, ou encore la seconde, $1 +$ *la racine* $(m-n)^{me}$ *de* S. On doit même chercher à s'en procurer une plus petite que ces dernières; et c'est à quoi l'on parvient souvent par une transformation exécutée sur l'équation proposée. Par exemple, si l'on a l'équation

$$x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 25x^2 + 4x - 39 = 0,$$

on la mettra sous la forme

$$x^4(x-3) + 8x^2(x - \tfrac{25}{8}) + 4(x - \tfrac{39}{4}) = 0.$$

Sous cette forme on voit qu'en mettant pour x, 10 ou tout autre nombre plus grand, on obtiendra constamment un résultat positif; donc 10 est une limite des racines positives.

L'équation $x^5 - 5x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 69 = 0$, étant mise sous la forme $x^3(x^2 - 5x - 13) + 17(x^2 - \frac{69}{17}) = 0$, on voit que si la moindre valeur positive de x, qui rend nul le trinome $x^2 - 5x - 13$, rend positif le binome $x^2 - \frac{69}{17}$, cette moindre valeur sera une limite supérieure. Or, $x^2 - 5x - 13 = 0$ donne $x = \frac{13}{2}$ et $x = -\frac{3}{2}$: et comme $(\frac{13}{2})^2 > \frac{69}{17}$, il s'ensuit que $x < 7$, dans l'équation proposée.

503. La méthode *des transformations* consiste, comme on voit, à décomposer le premier membre en plusieurs produits de deux facteurs, dont le premier soit un monome positif et le second un binome ou un trinome en x; puis à déterminer x de manière que tous les facteurs entre parenthèses soient positifs.

Par exemple, l'équation

$$x^6 - 20x^5 + 260x^4 + 3x^3 - 1000x^2 - 40000x - 8600 = 0,$$

peut s'écrire comme il suit:

$$x^4(x^2 - 20x + 100) + 160x^4 + 3x^3 - 1000x^2 - 40000x - 8600 = 0.$$

Or, le trinome $x^2 - 20x + 100$ étant le carré de $x - 10$, sera positif pour toutes les valeurs réelles de x; donc il suffit de prendre x de manière que $160x^4$ soit $>$ que la partie négative; on doit donc faire usage de la première limite (500), et on verra que $x < 1 + \sqrt{\frac{40000}{160}}$; d'où $x < 16$.

Considérons encore l'équation

$$x^5 - 10x^4 - 11x^3 + 7x^2 - 29x + 35 = 0\,;$$

elle devient $x^3(x^2 - 10x - 11) + 7(x^2 - \frac{29}{7}x + 5) = 0$.

Les racines de $x^2 - \frac{29}{7}x + 5 = 0$ étant imaginaires, le second trinome sera positif pour toutes les valeurs positives de x; il suffit donc de chercher les valeurs de x qui rendent nul le trinome $x^2 - 10x - 11$. Or, ces valeurs sont $x = 11$ et $x = -1$; 11 est donc la limite supérieure des racines positives de l'équation proposée.

L'équation $x^6 - 8x^5 + 17x^4 - 30x^3 + 300x^2 - 480x + 40 = 0$, devient $x^4(x^2 - 8x + 17) - 30x(x^2 - 10x + 16) + 40 = 0$.

Le premier trinome sera toujours positif et plus grand que le second; si donc on prend $x^4 = 30x$, d'où $x < 4$, le premier membre sera nécessairement positif; 4 est donc une limite supérieure des racines positives.

504. La méthode qui fournit la limite la plus simple, bien qu'elle donne lieu à des calculs assez longs, est celle des *dérivées successives*, due à Newton. Voici cette méthode : Dans l'équation proposée, faisons $x = u + y$, u étant quelconque; la transformée sera (497) $X + X_1 y + \frac{1}{2}X_2 y^2 + \cdots + Ny^m = 0$. Prenant l'arbitraire u telle que tous les coefficiens X, X_1, X_2, etc. soient positifs, aucune valeur positive de y ne pourra satisfaire à cette équation; les valeurs réelles de x correspondent donc à des racines négatives de $y = x - u$; u sera donc plus grand que x. D'où il suit que *tout nombre* u, *qui mis à la place de* x *dans l'équation* $X = 0$ *et dans ses dérivées successives* X_1, X_2, *etc.*, *n'en rend aucune négative*, *est une limite supérieure des racines positives de cette équation*.

Par exemple, soit l'équation

$$x^4 - 5x^3 - 6x^2 - 19x + 7 = 0.$$

Comme u est un signe indéterminé, on peut conserver la lettre x dans la formation des polynomes dérivés, et il vient

$$X = x^4 - 5x^3 - 6x^2 - 19x + 7,$$
$$X_1 = 4x^3 - 15x^2 - 12x - 19,$$
$$\tfrac{1}{2}X_2 = 6x^2 - 15x - 6,$$
$$\tfrac{1}{6}X_3 = 4x - 5.$$

On voit que $x = 2$ rend le dernier polynome positif : 2 substitué dans le polynome du second degré, donne un résultat négatif ; il en est de même de 3 ; mais 4 ou tout nombre > 4, donne un résultat positif : 4 substitué dans le polynome du 3^{me} degré, donne un résultat négatif, mais 5 donne un résultat positif ; et il en serait de même de tout nombre plus grand. Enfin, 5 substitué dans X, donne un résultat négatif, et il en est de même de 6 ; mais $x = 7$ donne un résultat positif. Donc 7 est la limite supérieure des racines positives de la proposée ; et c'est la plus simple en nombre entier, puisque $x = 6$ donne un résultat négatif.

505. Cherchons maintenant la limite numériquement supérieure des racines négatives, et les limites inférieures des racines positives et négatives.

1° Si dans l'équation $X = 0$, on fait $x = -y$, ce qui donne la transformée $Y = 0$, qu'on trouve en changeant simplement les signes des termes à puissances impaires de $X = 0$, il est clair que les racines négatives de x répondent aux racines positives de y, et réciproquement. Si donc L' est la limite supérieure des racines positives, dans $Y = 0$, $-L'$ sera *la limite numériquement supérieure des racines négatives de* x, *dans* $X = 0$.

2° Si dans $X = 0$, on fait $x = \frac{1}{y}$, aux plus grandes valeurs positives de y répondront les plus petites de x, et réciproquement : donc L étant la limite supérieure des racines positives de la transformée $Y = 0$, d'où $y < L$, on aura $x > \frac{1}{L}$, et $\frac{1}{L}$ sera *la limite inférieure des racines positives de* x.

3° Enfin, si dans $X = 0$, on fait $x = -\frac{1}{y}$, et qu'on cherche la limite supérieure L des racines positives de y dans la transformée $Y = 0$, $-\frac{1}{L}$ sera *la limite inférieure des racines négatives de la proposée.*

De l'existence des racines réelles.

506. L'existence des racines réelles d'une équation est fondée sur le principe que voici : *Si deux nombres substitués à la place de* x, *dans une équation numérique, donnent deux ré-*

sultats de signes contraires, ces deux nombres interceptent au moins une racine réelle de la proposée.

Soit $Nx^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \cdots + Tx + U = 0$ l'équation. Son premier membre renfermant en général des termes positifs et des termes négatifs, désignons par A l'ensemble des termes positifs, et par $-$ B l'ensemble des termes négatifs; l'équation prend alors la forme $A - B = 0$.

Supposons d'abord que les nombres p et q, substitués à x, soient positifs, et qu'on ait $p < q$; supposons de plus que $x = p$ donne un résultat négatif ou $A < B$, et que $x = q$ donne un résultat positif ou $A > B$. Comme les quantités A et B ne contiennent que des termes additifs, et des puissances entières et positives de x, il est clair que ces quantités croissent l'une et l'autre à mesure que x augmente : concevant donc que l'on fasse croître x par degrés insensibles, depuis p jusqu'à q, les quantités A et B augmenteront aussi par degrés insensibles (*). Cependant, puisque A, d'abord plus petit que B, devient ensuite plus grand, il faut nécessairement qu'il ait un accroissement plus rapide que B, qui détruise insensiblement l'excès que B avait sur A, et finisse par produire un excès en sens contraire. On conçoit, d'après cela, que du passage de $A < B$ à $A > B$, il doit y avoir un point intermédiaire où A devient égal à B; donc le nombre positif qui produit cette égalité de A à B, donnant $A - B = 0$, est nécessairement une racine positive de l'équation proposée $A - B = 0$.

Supposons maintenant que les nombres substitués à x soient négatifs, et posons $x = -y$: il est clair qu'en faisant $y = p$

(*) En effet, considérons le polynome A, par exemple, soit fait $x = a$ et $x = a + u$, les résultats A' et $A' + Bu + Cu^2 + Du^3 +$ etc. ont pour différence $u(B + Cu +$ etc.$)$; il s'agit de trouver pour u, une valeur qui rende cette différence moindre que toute quantité h donnée. Tout est ici positif, u très-petit et < 1; donc

$$u(B + Cu + \text{etc.}) < u(B + C + \text{etc.}).$$

Si donc on prend pour u une valeur telle que $u(B + C + \text{etc.}) = h$, valeur nécessairement finie et au-dessus de 0, on aura réellement la différence $u(B + Cu + \text{etc.}) < h$. On peut donc toujours donner à x une suite de valeurs telles, que les polynomes A et B croissent de quantités aussi petites qu'on voudra, et finissent par différer l'un de l'autre d'une quantité moindre que toute grandeur donnée.

et $y=q$, dans la transformée, on aura précisément les mêmes résultats qu'en faisant $x=-p$ et $x=-q$ dans la proposée; on aura donc deux résultats de signes contraires. Par conséquent, d'après ce qu'on vient de voir, l'équation en y aura au moins une racine réelle positive, comprise entre p et q; donc l'équation en x aura au moins une racine réelle négative entre $-p$ et $-q$.

Enfin, supposons que les deux nombres substitués à x, soient l'un positif et l'autre négatif; en faisant $x=0$ dans l'équation, son premier membre se réduit à son dernier terme, qui est nécessairement d'un signe contraire à celui que donne $x=p$ ou $x=-q$; il y a donc au moins une racine réelle comprise entre 0 et p, ou entre 0 et $-q$.

On voit donc, dans tous les cas, que *si deux nombres etc.*

507. Il est bon d'observer qu'il pourrait exister plusieurs racines réelles a, b, c, etc., entre les deux nombres substitués p et q. Or, soit $f(x)$ le produit des facteurs simples en x correspondant aux racines réelles non interceptées et aux racines imaginaires. Le premier membre de l'équation proposée sera nécessairement de la forme

$$f(x)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots.$$

Substituons maintenant p et q à la place de x, nous aurons

$$f(p)(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)\ldots, \quad (1)$$
$$f(q)(q-a)(q-b)(q-c)(q-d)\ldots. \quad (2)$$

Les deux quantités $f(p)$ et $f(q)$ sont nécessairement de même signe, puisqu'autrement, en vertu du principe précédent, $f(x)=0$ aurait au moins une racine réelle comprise entre p et q, ce qui est contre l'hypothèse.

Cela posé, p étant supposé moindre que q, et les racines a, b, c, etc., se trouvant entre p et q, il s'ensuit que p est moindre que chacune de ces racines et q plus grand; donc tous les facteurs $q-a$, $q-b$, $q-c$, ..., sont positifs, et le produit (2) a le même signe que $f(q)$ ou que $f(p)$: tous les facteurs $p-a$, $p-b$, $p-c$, ..., sont négatifs; donc suivant que le nombre de ces facteurs est impair ou pair, le produit (1) a un signe contraire ou un signe pareil à celui de $f(p)$, c'est-à-dire à celui du produit (2). Par conséquent, *suivant que le nombre des racines réelles, comprises entre les nombres substitués* p *et* q, *est impair ou pair, les résultats* (1) *et* (2) *des substitutions sont de signes contraires ou de même signe.*

On voit par là que si deux nombres substitués à la place de x, dans une équation, donnent deux résultats de signes contraires, ils interceptent au moins une racine réelle; mais ils peuvent aussi en intercepter un nombre impair quelconque : et s'ils donnent deux résultats de même signe, ou ils n'interceptent pas de racines, ou bien ils en comprennent un nombre pair quelconque.

Le principe fondamental que nous avons considéré (506) fournit plusieurs conséquences importantes que nous allons faire connaître.

508. *Toute équation de degré impair, dont les coefficiens sont réels, a au moins une racine réelle de signe contraire à son dernier terme.*

En effet, soit $Nx^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0$ l'équation proposée, et considérons d'abord le cas où le dernier terme est négatif. En faisant $x = 0$ dans l'équation, le premier membre se réduit à $-U$: d'un autre côté, si l'on substitue à la place de x, $S + 1$, c'est-à-dire le plus grand coefficient de l'équation augmenté de l'unité, le premier terme Nx^m sera positif et plus grand à lui seul que la somme arithmétique de tous les autres termes (501); le résultat de la substitution sera par conséquent positif. Donc il y a au moins une racine réelle comprise entre o et $S + 1$, laquelle racine est positive, c'est-à-dire de signe contraire au dernier terme.

Supposons actuellement le dernier terme positif; en faisant toujours $x = 0$, on trouve pour résultat $+ U$: mais en mettant pour x, $-(S + 1)$, on obtiendra nécessairement un résultat négatif, puisque le premier terme Nx^m devient négatif par cette substitution, et donne son signe à toute l'expression (501) : donc l'équation a au moins une racine réelle comprise entre o et $-(S + 1)$, c'est-à-dire négative ou de signe contraire au dernier terme.

509. *Toute équation de degré pair, à coefficiens réels, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative.*

En effet, soit $-U$ son dernier terme; en faisant $x = 0$, on trouve pour résultat $-U$; mais en substituant à x, soit $S + 1$, soit $-(S+1)$, S étant toujours le plus grand coefficient; alors, comme m est pair, le premier terme Nx^m sera positif : d'ailleurs il devient plus grand, par ces substitutions, que la somme de tous les autres (501); donc les deux résultats sont positifs et de signes contraires à celui que donne $x = 0$. Ainsi l'équation a au moins deux racines réelles, l'une comprise entre o et $S + 1$ ou positive, et l'autre entre o et $-(S + 1)$ ou négative.

510. En rapprochant les conséquences précédentes, on voit qu'il est prouvé, sans se fonder sur le théorème du n° 487, que *toute équation a au moins une racine réelle :* le seul cas où cette proposition ne soit pas démontrée, est celui où le degré de l'équation est pair et le dernier terme U positif; car alors, en substituant à x, $S + 1$ ou $-(S + 1)$, les deux résultats sont positifs et de même signe que le nombre U fourni par $x = 0$: donc on ne peut rien en conclure pour l'existence d'une racine réelle. Mais si dans ce cas, les racines de l'équation ne sont pas réelles, on conçoit du moins qu'elles peuvent être imaginaires, comme on le voit dans les équations du second degré. On est donc fondé à admettre le principe que *toute équation a une racine.* C'est d'ailleurs ce que MM. de Stainville et Cauchy ont démontré; mais leurs démonstrations ne sont pas de nature à trouver place dans les élémens.

511. *Lorsqu'un polynome* X, *fonction de* x, *égalé à zéro, n'a pas de racines réelles, il conserve le signe de son dernier terme, quelque nombre qu'on y substitue pour* x. Car on peut toujours donner à x une valeur telle, que le premier terme Nx^m surpasse la somme de tous les autres (501); et alors le polynome aura le signe de ce premier terme. Si ensuite une autre valeur substituée à x pouvait changer le signe du polynome X, l'équation $X = 0$ aurait au moins une racine réelle comprise entre les deux nombres substitués; ce qui est contre l'hypothèse.

La réciproque de ce théorème est fausse, c'est-à-dire que des polynomes en x, qui ne peuvent jamais changer de signe, sont quelquefois réduits à zéro par des valeurs réelles de x. L'équation $(x-3)^4(x-1)^2 = 0$ est dans ce cas.

512. Toute équation qui n'a que des permanences de signe, c'est-à-dire, dont tous les termes sont positifs, ne peut avoir pour racines réelles que des nombres négatifs; car tout nombre positif mis à la place de x, rendrait le premier membre essentiellement positif.

513. Toute équation complète dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, c'est-à-dire, qui n'a que des variations de signe, ne peut avoir pour racines réelles que des nombres positifs; car il est aisé de reconnaître que tout nombre négatif mis à la place de x dans la proposée, rend tous les termes positifs, si l'équation est de degré pair, et tous les termes négatifs, si l'équation est de degré impair. Donc, dans aucun cas, la somme des termes ne peut devenir nulle.

Il en est de même de toute équation incomplète, telle que, si l'on y change x en $-y$, il en résulte une transformée n'ayant que des permanences.

De la recherche des racines commensurables.

514. Nous observerons d'abord que *toute équation dont le premier terme a pour coefficient l'unité et dont tous les autres coefficiens sont des nombres entiers, ne peut avoir pour racines commensurables que des nombres entiers.*

Soit en effet l'équation

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \cdots + Tx + U = 0,$$

dans laquelle P, Q, ..., T, U, sont des nombres entiers, et supposons qu'elle puisse avoir pour racine une fraction commensurable et irréductible $\frac{a}{c}$; nous aurons par conséquent

$$\frac{a^m}{c^m} + \frac{Pa^{m-1}}{c^{m-1}} + \frac{Qa^{m-2}}{c^{m-2}} + \cdots + \frac{Ta}{c} + U = 0.$$

Multipliant par c^{m-1} et transposant, il viendra

$$\frac{a^m}{c} = -Pa^{m-1} - Qca^{m-2} - \cdots - Tac^{m-2} - Uc^{m-1}.$$

Or, c étant premier avec a, c est premier avec chacun des facteurs du produit a^m; c ne divisera donc jamais ce produit; l'équation précédente est donc impossible, puisque le premier membre est une fraction et le second un nombre entier. Ainsi l'équation ne peut avoir pour racine une fraction commensurable et irréductible.

515. Et comme on peut toujours ramener une équation dont les coefficiens sont des fractions rationnelles, à une autre dont les coefficiens sont entiers et le premier l'unité (492), on voit

que la recherche des racines commensurables d'une équation se réduit à trouver les racines entières de la transformée.

On y parviendra sans doute en remplaçant l'inconnue par tous les nombres entiers potitifs ou négatifs, depuis 1 et -1 jusqu'aux limites supérieures $+L$ et $-L'$ (500 et 505); car les nombres qui satisferont à l'équation à résoudre seront reconnus racines. Mais on conçoit que ces essais deviendront souvent longs et pénibles; et il faut chercher une méthode plus expéditive et plus facile à pratiquer.

516. Pour mieux fixer les idées, considérons l'équation

$$x^5+Px^4+Qx^3+Rx^2+Sx+T=0.$$

Soit a une de ses racines; on aura

$$a^5+Pa^4+Qa^3+Ra^2+Sa+T=0;$$

$$\text{d'où } \frac{T}{a}=-S-Ra-Qa^2-Pa^3-a^4.$$

Le second membre de cette égalité étant un nombre entier, il faut que $\frac{T}{a}$ soit aussi un nombre entier. Ainsi *les racines entières d'une équation sont comprises parmi les diviseurs du dernier terme.*

Maintenant, passons $-S$ dans le premier membre de la dernière égalité précédente, et faisons pour abréger $\frac{T}{a}+S=S'$, il viendra, en divisant les deux membres par a,

$$\frac{S'}{a}=-R-Qa-Pa^2-a^3;$$

d'où l'on conclut que $\frac{S'}{a}$ doit être un nombre entier.

Passant $-R$ dans le premier membre, faisant $\frac{S'}{a}+R=R'$ et divisant de part et d'autre par a, on obtient

$$\frac{R'}{a}=-Q-Pa-a^2;$$

d'où l'on conclut que $\frac{R'}{a}$ doit être un nombre entier.

Transposant $-Q$, prenant $\frac{R'}{a}+Q=Q'$ et divisant par a, il vient

$$\frac{Q'}{a}=-P-a;$$

ainsi $\frac{Q'}{a}$ doit être un nombre entier.

Passant enfin $-P$ dans le premier membre, et faisant $\frac{Q'}{a}+P=P'$, ou trouve $P'=-a$

En rapprochant les conditions précédentes, on verra que pour qu'un nombre entier a, positif ou négatif, soit racine de l'équation proposée, il faut, 1° que ce nombre a soit un des diviseurs du dernier terme; 2° qu'en ajoutant au quotient le coefficient de x, pris avec son signe, la somme soit divisible par a; 3° qu'en ajoutant au second quotient le coefficient de x^2, pris toujours avec son signe, la somme soit divisible par a; 4° qu'en ajoutant au troisième quotient le coefficient de x^3, la somme soit divisible par a; et ainsi de suite. Enfin, qu'en ajoutant le coefficient du second terme de l'équation, au quotient précédent, la somme soit égale au diviseur a, pris en signe contraire.

Tout nombre qui satisfera à ces épreuves réunies, sera racine, et ceux qui n'y satisferont pas devront être rejetés.

517. De là résulte la méthode suivante, pour déterminer à la fois toutes les racines entières d'une équation donnée :

Après avoir trouvé tous les diviseurs du dernier terme, qui sont compris entre les limites $+L$ et $-L'$, on écrit ces diviseurs sur une même ligne horizontale, et tant avec le signe $+$ qu'avec le signe $-$; on place au-dessous de ces diviseurs les quotiens du dernier terme par chacun d'eux; on ajoute ensuite à chacun de ces quotiens le coefficient de x, ce qui donne des sommes qu'on écrit au-dessous des quotiens qui leur correspondent. On divise de même chacune de ces nouvelles sommes par le diviseur placé dans la même colonne, et on écrit le quotient sous le dividende, ayant soin de rejeter les quotiens fractionnaires et les diviseurs qui les ont donnés. On ajoute aussi le coefficient de x^2, et l'on continue le même procédé, en observant que si quelques termes manquaient dant l'équation particulière proposée, on en tiendrait compte, en regardant chacun de leurs coefficiens comme égal à zéro.

518. D'après cette méthode, cherchons les valeurs entières de x dans l'équation

$$x^4-5x^3-6x^2+46x-24=0.$$

D'abord on observe qu'il est inutile d'appliquer le procédé aux diviseurs $+1$ et -1, parce qu'on les éprouve plus facilement par leur substitution immédiate dans l'équation proposée : on trouve ainsi qu'ils ne satisfont pas à cette équation. Et puisque $x > 1$ donne $46x > 24$, on voit que la limite supérieure des racines positives est la valeur positive de x qui rend nul le trinome $x^2 - 5x - 6$; cette limite est donc 6. Changeant x en $-y$, on verra que la limite supérieure des racines négatives est $-(1 + \sqrt{46})$ ou -8 (501). Ainsi on doit soumettre aux épreuves tous les diviseurs positifs de 24 compris entre 1 et 6, et tous les diviseurs négatifs entre -1 et -8 ; il faut donc employer les diviseurs 2, 3, 4, -2, -3, -4 et -6. Voici le tableau des calculs où * marque les diviseurs à rejeter :

+ 4	+ 3	+ 2	− 2	− 3	− 4	− 6
− 6	− 8	− 12	+ 12	+ 8	+ 6	+ 4
+ 40	+ 38	+ 34	+ 58	+ 54	+ 52	+ 50
+ 10	*	+ 17	− 29	− 18	− 13	*
+ 4		+ 11	− 35	− 24	− 19	
+ 1		*	*	+ 8	*	
− 4				+ 3		

La 1^re ligne horizontale est celle des diviseurs ; la seconde celle des quotiens du dernier terme -24 par chacun des diviseurs ; la troisième ligne est celle des quotiens que l'on vient d'obtenir, augmentés du coefficient $+46$ de x, et la quatrième celle des quotiens de ces sommes par les diviseurs correspondans : cette seconde condition exclut les diviseurs 3 et -6. La cinquième ligne est celle des derniers quotiens, augmentés du coefficient -6 de x^2, et la sixième celle des quotiens des nouvelles sommes par chacun des diviseurs : cette troisième condition exclut les diviseurs 2, -2 et -4. Enfin la septième ligne est celle des troisièmes quotiens, augmentés du coefficient -5 du second terme de la proposée. Comme alors les deux sommes -4 et $+3$ sont respectivement égales aux diviseurs $+4$ et -3, pris en signes contraires, ces diviseurs sont les seules racines entières de la proposée, et l'on a $x = 4$ et $x = -3$.

Divisant $x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 46x - 24$ par $(x-4)(x+3)$ ou par $x^2 - x - 12$, on aura le quotient exact $x^2 - 4x + 2$ qui, égalé à zéro, donnera $x = 2 \pm \sqrt{2}$ pour les deux autres racines de l'équation proposée.

Nous laissons à résoudre, d'après la méthode précédente, les trois équations :

$$x^4 - 4x^3 - 16x^2 + 115x - 150 = 0,$$
$$x^5 - 11x^4 + 32x^3 + 4x^2 - 128x + 192 = 0,$$
$$x^4 - 5x^3 + 25x - 21 = 0.$$

519. Lorsque le nombre des diviseurs du dernier terme, qui se trouvent compris entre les limites $+L$ et $-L'$, est très-grand, il est fort important de restreindre ce nombre. Or, soit l'équation

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \cdots + Tx + U = 0.$$

Soit a l'une de ses racines, le premier membre sera divisible exactement par $x - a$, et il viendra l'identité

$$x^m + Px^{m-1} + \cdots + U =$$
$$(x-a)(x^{m-1} + P'x^{m-2} + Q'x^{m-3} + \cdots + U').$$

D'après la loi de formation des coefficiens $P', Q', \ldots, U'$ (486), ces coefficiens sont entiers, avec $P, Q, R, \cdots, U$. Cela posé, l'identité précédente ayant lieu quel que soit x, si l'on y fait $x = 1$, et qu'ensuite on divise de part et d'autre par $a - 1$, on aura

$$\frac{1 + P + Q + \cdots + U}{a - 1} = -(1 + P' + Q' + \cdots + U').$$

Le second membre de cette équation est un nombre entier; donc il en est de même du premier. Ainsi a étant un nombre entier positif ou négatif, ne peut être racine, qu'autant que $a - 1$ divise le résultat de la substitution de $+1$ dans la proposée. On verra de même, en faisant $x = -1$, que $a + 1$ doit diviser le résultat de la substitution de -1; d'où résulte la règle que voici :

Substituez successivement $+1$ et -1 dans la proposée, et soient M et M' les deux résultats : 1° Tout diviseur positif du dernier terme, qui, diminué de 1, ne divise pas M, ou qui, augmenté de 1, ne divise pas M', doit être rejeté; 2° Tout diviseur négatif, dont la valeur numérique augmentée de 1, ne divise pas M, et diminuée de 1, ne divise pas M', doit être rejeté.

520. Soit proposé, par exemple, de déterminer les racines entières de l'équation

$$x^4 - x^3 - 89x^2 + 138x + 432 = 0.$$

Il est clair que le premier membre de cette équation sera positif pour toutes les valeurs positives de x égales ou plus grandes que celle qui rend nul le trinome $x^2 - x - 80$; la limite supérieure des racines positives est donc 10. Quant à la limite supérieure des racines négatives, elle est $-(1+\sqrt{138})$ ou -13. Donc les diviseurs de 432, que l'on doit soumettre aux épreuves du n° 519, sont : 2, 3, 4, 6, 8, 9, -2, -3, -4, -6, -8, -9 et -12.

Substituant $+1$ et -1 au lieu de x, dans la proposée, les résultats seront $M = 490 = 10 \cdot 7^2$ et $M' = 216 = 2^3 \cdot 3^3$. Cela posé, examinons les diviseurs positifs : $9-1$ ou 8 ne divise pas $M = 490$; ainsi 9 doit être rejeté : $8-1$ ou 7 divise M, et $8+1$ ou 9 divise $M' = 216$; donc 8 doit être conservé. On rejetera 6 et 4, et l'on conservera 3 et 2. A l'égard des diviseurs négatifs, comme $12+1$ ou 13 ne divise pas 490, 12 doit être rejeté ; et il en est de même de 8. Mais 9 doit être conservé, ainsi que 6 et 4, tandis qu'il faut rejeter 3 et 2. On voit donc qu'on ne doit soumettre aux épreuves de la méthode du n° 518, que les diviseurs 8, 3, 2, -4, -6 et -9. De cette manière, on trouvera $x=8$ et $x=-9$; d'où l'on déduit $x = 1 \pm \sqrt{7}$.

On peut traiter d'après la méthode que nous venons d'indiquer, les deux équations :

$$x^4 - 5x^3 - 37x^2 + 257x - 360 = 0,$$
$$x^5 - 4x^4 - 97x^3 + 472x^2 + 204x - 2160 = 0.$$

Dans la dernière équation, les limites supérieures sont 13 et -11.

521. On sait maintenant trouver les racines commensurables de toute équation dont les coefficiens sont rationnels, entiers ou fractionnaires. Mais dans ce dernier cas, il faudra d'abord ramener l'équation à n'avoir que des coefficiens entiers, et 1 pour celui du premier terme (492). Cependant, si l'inconnue proposée ne doit avoir que des valeurs entières, on n'aura pas à opérer cette transformation, qui a l'inconvénient de conduire à des coefficiens très-grands ; il suffira d'appliquer sur-le-champ la méthode du n° 518 ; et lorsqu'on sera parvenu à la dernière des conditions, le résultat, au lieu d'être $-a$, devra être $-a$N, N étant le coefficient du premier terme.

C'est ainsi que, dans l'équation $6x^3 + 5x^2 - 33x + 18 = 0$, on verra qu'après avoir ajouté aux derniers quotiens le coefficient 5 du second terme, la somme correspondante au diviseur -3, sera $+18$, ou le produit de $+3$ par le coefficient 6 du premier terme; donc -3 est une racine entière de l'équation proposée, laquelle admet en outre les deux racines fractionnaires $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$.

D'après ce qu'on vient de dire, il sera aisé de résoudre les trois problèmes qui suivent, dans lesquels les inconnues doivent être des nombres entiers positifs :

Quelle est la base x du système de numération dans lequel le nombre cinq cent trente-huit est exprimé par les caractères (4123)? [R. $x=5$.]

Quelle est la base x du système dans lequel 81479, système décimal, est représenté par (456356), système cherché? [R. $x=7$.]

Les trois chiffres d'un nombre sont tels, 1° que leur produit fait 54; 2° que le chiffre du milieu vaut la sixième partie de la somme des deux autres; 3° qu'en les écrivant dans l'ordre inverse, le nombre résultant surpasse de 594 le nombre proposé. Quel est ce nombre? [R. 923.]

522. La recherche des racines commensurables sert à trouver, quand cela se peut, la racine n^{me} d'une expression telle que $a \pm \sqrt{b}$, comme on le voit dans les Mélanges d'algèbre, pages 78 et suivantes. Pour donner une idée de la méthode que nous avons suivie dans ces Mélanges, et qui est plus simple que celle dont on fait ordinairement usage, proposons-nous d'*extraire, s'il est possible, la racine cubique de* $a \pm \sqrt{b}$.

D'abord, puisque le cube de $(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{3}$ est $21+\sqrt{450}$, on voit que la forme la plus générale de la racine cubique demandée est $x\sqrt[3]{z}$, et que par conséquent on a $\sqrt[3]{(a\pm\sqrt{b})}= x\sqrt[3]{z}$. Elevant de part et d'autre au cube, puis faisant disparaître le radical carré, il vient $a^2 - 2azx^3 + z^2x^6 = b$; d'où

$$x^3 + \frac{a^2-b}{z^2x^3} = \frac{2a}{z}.$$

On peut disposer de l'arbitraire z pour que le second terme du premier membre de cette équation soit un cube parfait de la forme $\frac{c^3}{x^3}$; ce qui se fera en posant

$$c^3 = \frac{a^2-b}{z^2}; \text{ d'où il vient } x^3 + \frac{c^3}{x^3} = \frac{2a}{z}.$$

Faisant $x+\frac{c}{x}=u$, puis élevant au cube de part et d'autre, on aura

$$x^3 + 3cx + \frac{3c^2}{x} + \frac{c^3}{x^3} = u^3; \text{ d'où } u^3 - 3cu - \frac{2a}{z} = 0.$$

Et comme $x+\frac{c}{x}=u$ donne $x=\frac{1}{2}u\pm\sqrt{\frac{1}{4}u^2-c}$, on voit que u doit être rationnel pour que la racine demandée soit possible. Ainsi on a, pour résoudre le problème proposé,

$$c=\frac{1}{z}\sqrt[3]{(a^2-b)z},\quad u^3-3cu-\frac{2a}{z}=0$$

$$\text{et}\quad \sqrt[3]{a\pm\sqrt{b}}=\left(\tfrac{1}{2}u\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}u^2-c}\right)\sqrt[3]{z}.$$

Par exemple, s'il faut trouver la racine cubique de $78-\sqrt{6075}$, on aura $a=78$, $b=6075$ et $a^2-b=9$; d'où, en prenant $z=3$, on a $c=1$ et $u^3-3u-52=0$. La seule racine commensurable de cette équation étant $u=4$, on en conclut que $\sqrt[3]{(78-\sqrt{6075})}=(2-\sqrt{3})\sqrt[3]{3}$.

On peut chercher la racine cubique de $52+30\sqrt{3}$ et celle de $2+2\sqrt{-1}$.

523. La méthode des racines commensurables (518) sert aussi à faire connaître combien chacune des racines de cette espèce entre de fois dans l'équation proposée : il suffit pour cela, de diviser le premier membre par le produit des binomes qui proviennent des racines a, b, c, ..., déjà mises en évidence, et de soumettre la nouvelle équation aux épreuves de la méthode; ou bien, après avoir divisé le premier membre par $x-a$, on divisera le quotient par $x-a$, le second quotient par $x-a$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la division soit impossible. Par exemple, soit l'équation

$$x^5-12x^4+57x^3-134x^2+156x-72=0.$$

Cette équation complète n'ayant que des variations de signes, n'a point de racines négatives (513). La limite des racines positives est 12; et si l'on soumet l'équation aux épreuves de la méthode (518), on aura d'abord les deux racines $x=2$ et $x=3$. Divisant le premier membre par $(x-2)(x-3)$, il vient pour résultat

$$x^3-7x^2+16x-12=0,$$

équation qui a encore pour racines $x=2$ et $x=3$. Divisant cette équation par $(x-2)(x-3)$, le quotient exact sera $x-2$, Donc l'équation proposée peut se mettre sous la forme

$$(x-2)^3(x-3)^2=0.$$

On résoudra, d'après cette méthode, les deux équations :

$$x^5 + 5x^4 - 5x^3 - 45x^2 + 108 = 0,$$
$$9x^6 + 30x^5 + 22x^4 + 10x^3 + 17x^2 - 20x + 4 = 0.$$

Le procédé que nous venons d'employer ne détermine que les *racines égales* qui sont rationnelles; pour obtenir aussi les racines égales irrationnelles ou imaginaires, il faut connaître la recherche du plus grand commun diviseur algébrique, qui va nous occuper.

Du plus grand commun diviseur algébrique.

524. Dans tout ce qui va suivre nous ne considérerons que des polynomes *entiers* et *rationnels*, c'est-à-dire des polynomes dans lesquels il n'y a ni divisions ni racines indiquées. Ces polynomes ne contiendront par conséquent que des coefficiens entiers et des exposans entiers positifs.

525. Lorsqu'en divisant un polynome par un autre, le quotient est *entier*, le premier polynome est divisible par le second, et le second *divise* le premier. Ce second polynome est alors *facteur exact* ou simplement *facteur* de l'autre.

526. Un polynome est *premier* lorsqu'il n'est divisible que par lui-même et par l'unité, comme $a-2b$, $2a+3b-c$, etc.

A proprement parler, il n'y a que les polynomes du premier degré qui puissent être regardés comme *premiers*; car tous les autres sont décomposables en facteurs, ainsi que le prouve la théorie des équations. Par exemple, soit le trinome $a^2-2ab-b^2$. Pour le décomposer en facteurs, égalons-le à zéro, et résolvons l'équation résultante par rapport à a; nous aurons $a=b\pm b\sqrt{2}$. D'où l'on tire (487)

$$a^2 - 2ab - b^2 = (a - b - b\sqrt{2})(a - b + b\sqrt{2}).$$

Soit encore le polynome

$$2ac^2 + 2a^2b - 3ab^2 - abc - 4bc^2 + 3b^2c + c^3.$$

Si on l'égale à zéro, et qu'on résolve l'équation résultante par rapport à a, on verra que ce polynome revient à

$$(ab - bc + c^2)(2a - 3b + c).$$

En général, tant que le polynome égalé à zéro, donne une équation qu'on sait résoudre par rapport à l'une des lettres qui s'y trouvent, on peut décomposer ce polynome en facteurs, d'après la méthode que nous venons d'employer.

On voit que tous les polynomes d'un degré supérieur au premier peuvent se décomposer en facteurs. Mais comme nous ne voulons considérer désormais que des *facteurs rationnels et entiers*, il est clair que nous aurons des polynomes *premiers* de degrés quelconques.

527. Deux polynomes sont *premiers entre eux*, lorsqu'ils n'ont d'autres diviseurs communs que l'unité, comme $a^2 - b^2$ et $x^2 - 2ax + a^2$.

528. Le *plus grand commun diviseur* de deux polynomes est le produit de tous les facteurs premiers communs à ces deux polynomes (*).

D'où il suit, 1° que *deux polynomes ne peuvent avoir qu'un seul plus grand commun diviseur*, car les facteurs premiers communs à ces deux polynomes ne donnent jamais qu'un seul produit;

2° Que *si l'on divise deux polynomes par leur plus grand commun diviseur, les deux quotiens seront premiers entre eux*, car s'ils avaient un facteur commun, ce facteur serait aussi commun aux deux polynomes proposés; et le plus grand commun diviseur de ces polynomes ne serait pas le produit de tous leurs facteurs premiers communs; ce qui est contre la définition.

A l'avenir, p. g. c. d. signifiera *plus grand commun diviseur*.

529. *Le plus grand commun diviseur de deux polynomes* A *et* B *est toujours celui du plus petit* B *et du reste* R *de leur division.*

Car soit Q le quotient entier de cette division et D le p. g. c. d. de A et B; on aura donc

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \frac{A}{D} = \frac{B}{D}Q + \frac{R}{D}.$$

Puisque D divise A et B, D divise aussi R; D est donc commun diviseur à B et R; et il est le plus grand. Car si Dx pouvait diviser B et R, Dx diviserait aussi A; Dx serait donc commun diviseur aux deux polynomes A et B; ce qui est impossible, puisque D est le p. g. c. d. de ces polynomes. Donc D est aussi le p. g. c. d. de B et R.

530. Il résulte de ce principe, que la recherche du p. g. c. d.

(*) Soit x le produit de tous les facteurs premiers communs aux deux quantités P et Q, et y le *p. g. c. d.* de ces deux quantités; y est donc facteur commun à P et Q; y doit donc se trouver dans x, qui est le produit de tous les facteurs premiers communs à P et Q. Et si x avait d'autres facteurs que ceux de y, x serait plus grand que y; y ne serait donc pas le *p. g. c. d.* de P et Q; ce qui est contre l'hypothèse. Donc x renferme tous les facteurs de y et n'en contient pas d'autres; donc $x = y$.

de deux polynomes doit s'opérer d'après la même règle que pour les nombres. Mais comme le principe suppose que tous les quotiens obtenus soient entiers, ce qui souvent n'a pas lieu lorsqu'on opère sur des polynomes, il faut, pour trouver le plus grand commun diviseur algébrique, d'après la même règle que pour les nombres, faire en sorte que tous les quotiens soient entiers; il faut par conséquent mettre en pratique les deux préceptes que voici :

1° Rendre la division possible en multipliant tout le dividende par un facteur qui n'ait point de facteur commun à tous les termes du diviseur, et qui soit tel que le premier terme du produit soit divisible par le premier terme du diviseur;

2° Supprimer le facteur commun à tous les termes de l'une des quantités, lorsqu'il ne l'est pas à tous les termes de l'autre, et qu'il n'a point de facteur commun avec eux.

Par ces deux préceptes, on introduit ou l'on supprime dans l'une des quantités proposées, un facteur qui n'est pas facteur de l'autre quantité, et qui n'a point de facteurs communs avec elle. Donc les facteurs communs à ces deux quantités ne sont ni augmentés ni diminués (*); par conséquent, le p. g. c. d., qui est le produit de tous les facteurs communs, n'est pas changé.

531. Par ex., cherchons le p. g. c. d. des deux polynomes

$$18a^4 - 19a^2c^2 + 6c^4$$
$$8a^3 - 10a^2c - 12ac^2 + 15c^3.$$

Nous diviserons le premier de ces polynomes par le second. Mais il faut d'abord rendre la division partielle possible; ce qui se fera en multipliant tout le dividende par 4, et le produit sera

$$40a^4 - 76a^2c^2 + 24c^4.$$

Par cette multiplication le plus grand commun diviseur cherché n'est pas changé, puisque 4 n'est pas facteur du diviseur et

(*) Cette assertion est assez claire pour n'avoir pas besoin de démonstration; car elle suppose qu'un produit n'ait jamais d'autres facteurs premiers que ceux contenus dans le multiplicande et le multiplicateur; et ce principe me paraît évident. On le démontre d'ailleurs pour les nombres, en arithmétique; mais je crois très-difficile de l'établir rigoureusement pour les quantités algébriques, considérées dans leur état général.

Voyez d'ailleurs la divisibilité des *fonctions entières*, dans l'Algèbre de M. Bourdon, 4me édition, pages 384 et suivantes.

n'a point de facteur commun avec lui. Le premier quotient partiel sera $5a$, et le reste, $50a^3c - 16a^2c^2 - 75ac^3 + 24c^4$.

Comme le p. g. c. d. des deux polynomes proposés est toujours celui du plus petit et du reste (529), ce p. g. c. d. ne changera pas, si on divise le reste par c et si on le multiplie par 4; car c et 4 ne sont pas facteurs du diviseur. De cette manière, le nouveau dividende partiel sera $200a^3 - 64a^2c - 300ac^2 + 96c^3$. Donc le second reste deviendra $186a^2c - 279c^3$.

Pour simplifier l'opération, on supprime $93c$, facteur du second reste, sans l'être du diviseur, et il vient $2a^2 - 3c^2$. Cette suppression ne change pas le p. g. c. d., lequel est par conséquent celui du diviseur et du second reste simplifié $2a^2 - 3c^2$. On aura donc ce p. g. c. d., en déterminant celui des deux polynomes

$$8a^3 - 10a^2c - 12ac^2 + 15c^3 \quad \text{et} \quad 2a^2 - 3c^2.$$

Or, ce dernier p. g. c. d. est $2a^2 - 3c^2$, puisque $2a^2 - 3c^2$ divise l'autre quantité; donc aussi $2a^2 - 3c^2$ est le p. g. c. d. demandé.

532. La recherche que l'on vient d'expliquer fournit plusieurs remarques très-importantes :

I. Pour avoir des quotiens entiers dans la première division, on a multiplié le dividende et le premier reste chacun par 4 : on aurait eu les mêmes résultats, si l'on avait d'abord multiplié le dividende par le carré de 4, ou par 16; et la marche aurait été plus directe. Désormais nous multiplierons le dividende proposé par le facteur propre à rendre la première division partielle possible, élevé à une puissance marquée par le nombre de divisions partielles à effectuer avant d'arriver au *reste* de la division proposée.

II. Si l'on avait oublié de supprimer le facteur $93c$, commun aux deux termes du second reste $186a^2c - 279c^3$; en continuant la recherche, on serait parvenu à un reste ne contenant plus que la première puissance de a, et qui aurait été pris pour diviser $186a^2c - 279c^3$: ce diviseur et tous les suivans n'auraient donc pas conduit au véritable p. g. c. d., puisque celui-ci est en a^2. D'ailleurs le reste $186a^2c - 279c^3$ serait devenu diviseur dans une nouvelle division; et alors pour rendre la première division partielle possible, il aurait fallu multiplier le dividende par $93c$, facteur dans tous les termes du diviseur; donc le p. g. c. d. aurait été changé. Cette remarque prouve qu'il faut absolument faire usage du second précepte (530); ce qui peut conduire à chercher le p. g. c. d. entre plus de deux quantités.

III. On trouverait immédiatement le p. g. c. d. des deux polynomes proposés, en observant que le premier décomposé en facteurs (526), devient $(5a^2-2c^2)(2a^2-3c^2)$, et que le second divisé par $2a^2-3c^2$, prend la forme $(4a-5c)(2a^2-3c^2)$; alors $5a^2-2c^2$ et $4a-5c$ étant premiers entre eux, on voit que le p. g. c. d. des deux polynomes est $2a^2-3c^2$, comme par l'autre méthode.

A l'aide de l'une ou de l'autre méthode, on trouvera que $x-y$ est le p. g. c. d. des deux polynomes

$$3x^3-3x^2y+xy^2-y^3$$
$$\text{et}\quad 4x^2y-5xy^2+y^3.$$

533. Lorsque l'exposant de la lettre principale est le même dans les deux ou trois premiers termes du diviseur, il faut, pour que le plus haut exposant de cette lettre diminue dans chaque reste, réunir en un seul, tous les multiplicateurs de la plus haute puissance de cette lettre dans le diviseur; essayer ensuite, avant de rendre la division possible, si le nouveau multiplicateur ne serait pas facteur de tous les autres termes du diviseur.

Si on négligeait d'opérer la réunion qu'on vient de prescrire, le produit du diviseur par le premier quotient partiel, renfermerait plusieurs termes où l'exposant de la lettre principale serait le même que dans le premier terme du dividende; un seul de ces termes détruirait le premier du dividende; et par conséquent le plus haut exposant de la lettre serait encore le même dans le reste que dans le dividende proposé.

Au moyen de l'observation que l'on vient d'énoncer, on trouve $c-2a$ et $2x^2+3y$ pour les p. g. c. d. respectifs des deux couples de polynomes

$$20a^4-10a^3c-12a^2c+6ac^2 \text{ et } 6a^3-3a^2c+10ac^2-5c^3;$$
$$6x^5y+9x^3y^2-10x^2y^3-15y^4 \text{ et } 8x^3-6x^2y+12xy-9y^2.$$

Mais ces deux p. g. c. d. se trouveraient aussi par la décomposition en facteurs (526).

534. *Lorsqu'un polynome a un diviseur indépendant de la lettre principale, ce diviseur divise exactement chacun des coefficiens des puissances successives de cette lettre.*

En effet, soit $a+bx+cx^2+dx^3+$ etc. un polynome ordonné par rapport à x, et supposons que ce polynome soit divisible par une quantité v indépendante de x; le quotient sera nécessairement de la forme $a'+b'x+c'x^2+d'x^3+$ etc., c'est-à-dire, aura autant de termes en x que le dividende; car v ne contenant pas x, la multiplication du quotient par v ne changera pas les exposans de x. Ainsi on aura

$$a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.}=a'v+b'vx+c'vx^2+d'vx^3+\text{etc.}$$

Les quantités séparées par le signe $=$ devant être *les mêmes*, quelle que soit la valeur de x, il faut qu'on ait, pour cela, $a=a'v$, $b=b'v$, $c=c'v$, $d=d'v$, etc. D'où il suit que le diviseur v indépendant de x divise chacun des coefficiens a, b, c, d, etc.

535. Ce principe conduit à trouver le p. g. c. d. indépendant de la lettre principale x. En effet, ce p. g. c. d. divise les deux polynomes proposés; il divise donc les coefficiens des diverses puissances de x dans ces deux polynomes; il est par conséquent le p. g. c. d. de ces coefficiens. Or, pour trouver ce p. g. c. d., on pourra chercher celui d entre les deux premiers coefficiens, celui d' entre d et le troisième coefficient, celui d'' entre d' et le quatrième coefficient, ainsi de suite; et le dernier p. g. c. d. obtenu sera celui de tous les coefficiens proposés. Ce qu'on démontre comme en arithmétique. (Voyez l'Arithmét. élément., 2^{me} partie.)

Par exemple, qu'on ait les deux polynomes

$$x^4y^2+xy^5-2x^4yz+x^4z^2+xy^3z^2-2xy^4z,$$
$$2x^4y^2-5x^2y^4+3y^6-2x^4z^2+5x^2y^2z^2-3y^4z^2;$$

si l'on réunit les multiplicateurs des diverses puissances de x, ces deux polynomes ne changeront pas de valeurs et deviendront

$$(y^2-2yz+z^2)x^4+(y^5-2y^4z+y^3z^2)x,$$
$$(2y^2-2z^2)x^4+(5y^2z^2-5y^4)x^2+3y^6-3y^4z^2.$$

Pour avoir le p. g. c. d. des coefficiens de x, on pourrait appliquer la règle qui vient d'être énoncée; mais il sera plus court de décomposer ces coefficiens en facteurs; ce qui est facile; et les deux polynomes deviendront ainsi

$$(y-z)^2x^4+y^3(y-z)^2x,$$
$$2(y^2-z^2)x^4-5y^2(y^2-z^2)x^2+3y^4(y^2-z^2).$$

Sous cette forme on voit que $y-z$ est le p. g. c. d. de tous les coefficiens; $y-z$ est donc aussi le p. g. c. d. sans x des deux polynomes proposés.

Pour avoir le p. g. c. d. affecté de x, on simplifiera d'abord l'opération, en divisant les deux polynomes précédens par $y-z$; ce qui donnera

$$(y-z)x^4+(y-z)xy^3,$$
$$2(y+z)x^4-5(y+z)x^2y^2+3(y+z)y^4.$$

On peut supprimer le facteur $(y-z)x$ dans le premier de ces polynomes et le facteur $y+z$ dans le second; et alors on trouvera aisément que $x+y$ est le p. g. c. d. des deux quantités résultantes

$$x^3+y^3 \text{ et } 2x^4-5x^2y^2+3y^4.$$

D'où l'on voit que le p. g. c. d. des deux polynomes proposés est $(y-z)(x+y)$, ou $xy+y^2-xz-yz$.

536. La manière la plus facile d'obtenir le p. g. c. d. est, 1° de déterminer le p. g. c. d. monome et de le supprimer ensuite; 2° de chercher le p. g. c. d. indépendant de la lettre principale, dans les deux quantités restantes, et de l'y supprimer également; 3° enfin, après avoir trouvé le p. g. c. d. des deux nouvelles quantités, il faut le multiplier par le produit des diviseurs communs supprimés; et le résultat exprime le p. g. c. d. demandé. De cette manière, on trouve $3ab(2b+c)(a+b)$, pour le p. g. c. d. des deux polynomes

$$12a^3b^3-12ab^5-3a^3bc^2+3ab^3c^2,$$
$$18a^4b^3-3a^4b^2c-6a^4bc^2+18ab^6-3ab^5c-6ab^4c^2.$$

537. Si l'on parvenait à un reste ne contenant pas la lettre principale, il est clair que le p. g. c. d. ne dépendrait point de cette lettre. Et si une lettre se trouvait dans l'un des polynomes proposés, sans être dans l'autre, le p. g. c. d. cherché serait celui qui existe entre le second polynome et les coefficiens des diverses puissances de cette lettre dans le premier.

538. Remarquons aussi que quand le reste du second degré en x donne, en l'égalant à zéro, une valeur rationnelle v à x, et que cette valeur, mise à la place de x, rend nul le reste précédent du troisième degré; $x-v$ est un diviseur commun aux deux polynomes proposés. En général, la résolution des équations peut conduire au p. g. c. d., plus facilement que la méthode ordinaire. Par exemple, soient les deux polynomes

$$x^5-2ax^4+4a^3x^2-4a^4x,$$
$$x^4-4ax^3+6a^2x^2+4a^3x.$$

Résolvant par rapport à x le second polynome égalé à zéro, ce qui se sera par extraction de racine carrée (258), on verra que ce polynome est la même chose que $x(x-2a)(x^2-2ax+2a^2)$.

Divisant le 1er polynome par $x^2-2ax+2a^2$, on verra que ce polynome revient à $x(x^2-2a^2)(x^2-2ax+2a^2)$.

Le p. g. c. d. cherché est donc $x(x^2-2ax+2a^2)$.

Des racines égales et des équations qui s'abaissent à d'autres de degrés moindres.

539. Soit $X=0$ une équation du m^{me} degré en x, et soient $a, b, c, d, \ldots, l$, ses m racines; on aura

$$X=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-l).$$

Cette identité ayant lieu quel que soit x, on ne la détruira pas si l'on y change x en $x+u$; ce qui donnera, en ordonnant le premier membre par rapport aux puissances ascendantes de u,

$$X+X_1u+\tfrac{1}{2}X_2u^2+\cdots+u^m=$$
$$(u+x-a)(u+x-b)\cdots(u+x-l);$$

X_1 étant la dérivée de X, X_2 la dérivée de X_1, etc. (497).

Regardant chacune des quantités $x-a$, $x-b$, $x-c$, ..., $x-l$, comme un monome, le second membre de l'identité que l'on vient de trouver sera le produit de m facteurs binomes, ayant tous le premier terme u commun, et pourra être représenté par $u^m+Au^{m-1}+Bu^{m-2}+\cdots+Tu+U$ (462); il viendra donc $X+X_1u+\tfrac{1}{2}X_2u^2+\cdots=U+Tu+Su^2+\cdots$

Cette identité ayant lieu pour toutes les valeurs de u, même quand $u=0$, il s'ensuit que les coefficiens d'une même puissance de u dans les deux membres, sont égaux; on a donc

$$X=U,\ X_1=T,\ \tfrac{1}{2}X_2=S, \text{ etc.}$$

Or, T est la somme de tous les produits différens des m seconds termes $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, ..., $x-l$, combinés $m-1$ à $m-1$; donc *pour former* T, *valeur de* X_1, *il faudra, dans le produit* U *ou* X *de ces* m *seconds termes, omettre successivement chacun des* m *facteurs, et ajouter entre eux les* m *résultats.*

540. D'après cela, supposons que l'équation proposée $X=0$ ait n racines égales à a et p à b; il viendra donc

$$X = (x-a)^n (x-b)^p (x-c)(x-d)\dots(x-l).$$

On vient de voir que pour avoir X_1, il faut, dans le second membre, 1° omettre successivement chacun des n facteurs $x-a$ et ajouter entre eux les n résultats, ce qui donne $n(x-a)^{n-1}$ $(x-b)^p(x-c)(x-d)\dots(x-l)$; 2° omettre successivement chacun des p facteurs $x-b$, et ajouter entre eux les p résultats, ce qui fournit $p(x-a)^n(x-b)^{p-1}(x-c)(x-d)$ $\dots(x-l)$; 3° omettre successivement chacun des facteurs $x-c$, $x-d$, ..., $x-l$, et ajouter les résultats, ce qui produit $(x-a)^n(x-b)^p R$, R désignant la somme des produits qui restent en supprimant successivement chacun des facteurs dans $(x-c)(x-d)\dots(x-l)$; 4° enfin, ajouter entre elles toutes les valeurs obtenues de cette manière, ce qui fournira

$$X_1 = (x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}\left[Q + R(x-a)(x-b)\right],$$

Q désignant $n(x-b)(x-c)\dots(x-l) + p(x-a)(x-c)\dots(x-l)$.

Il est clair que chacun des facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, ..., $x-l$, manquent dans un terme de la quantité entre crochets; donc aucun de ces binomes ne divise cette quantité : par conséquent le p. g. c. d. entre X et X_1 est $(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}$ $= D$. Ainsi *le plus grand commun diviseur entre l'équation proposée et sa dérivée, se compose du produit des facteurs qui entrent plusieurs fois dans cette proposée, élevés respectivement à une puissance moindre d'une unité.*

541. De là on peut conclure la méthode suivante :

Pour connaître si une équation $X = 0$ a des racines égales, il faut former sa dérivée X_1, puis chercher le p. g. c. d. entre X et X_1; s'il est l'unité ou $(x-a)^0(x-b)^0$, ce qui suppose $n=1$ et $p=1$, l'équation n'a pas de racines égales ou de facteurs égaux. Mais s'il y a un diviseur commun D, fonction de x, on cherchera le plus grand commun diviseur E entre D et sa dérivée D_1; puis le p. g. c. d. F entre E et sa dérivée E_1, le p. g. c. d. G entre F et sa dérivée F_1, et ainsi de suite. Soit p_1 le produit des facteurs inégaux ou *simples* de la proposée $X=0$; soient p_2, p_3, p_4, ..., les produits des facteurs *doubles*, *triples*, *quadruples*, ..., c'est-à-dire des facteurs élevés, dans X, aux puissances 2^e, 3^e, 4^e, ...; il est clair qu'on aura le tableau que voici :

$$X = p_1 (p_2)^2 (p_3)^3 (p_4)^4 (p_5)^5 \ldots \qquad \frac{X}{D} = q_1 = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \ldots$$

$$D = p_2 (p_3)^2 (p_4)^3 (p_5)^4 \ldots \qquad \frac{D}{E} = q_2 = p_2 p_3 p_4 p_5 \ldots$$

$$E = p_3 (p_4)^2 (p_5)^3 \ldots \qquad \frac{E}{F} = q_3 = p_3 p_4 p_5 \ldots$$

$$F = p_4 (p_5)^2 \ldots \qquad \frac{F}{G} = q_4 = p_4 p_5 \ldots$$

$$G = p_5 \ldots$$

etc. ... | etc. ....

D'où l'on voit qu'en divisant q_1 par q_2, q_2 par q_3, q_3 par q_4, et ainsi de suite, les quotiens seront respectivement p_1, p_2, p_3, etc. On a donc ainsi les expressions algébriques des produits p_1, p_2, p_3, ...; et la résolution de la proposée $X = 0$, se réduit à traiter les équations beaucoup plus simples $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$, etc., lesquelles ont toutes des racines inégales.

542. Considérons, par exemple, l'équation

$$X = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0;$$

nous aurons donc, d'après la méthode précédente,

$$D = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2; \quad q_1 = q_2 = x^2 - x - 2,$$
$$E = x^2 + 2x + 1 \qquad q_3 = q_4 = x + 1,$$
$$F = x + 1, \qquad q_5 = 1 = q_6, \text{ etc.}$$
$$G = 1 = H, \text{ etc.}$$

Ce qui donne $p_1 = 1$, $p_2 = x - 2$, $p_3 = p_5 = 1$, $p_4 = x + 1$. Ainsi on voit que $X = 0$ n'a point de facteurs simples, ni de facteurs triples, etc.; mais que X a deux facteurs égaux à $x - 2$ et quatre facteurs égaux à $x + 1$: et comme $(x + 1)^4 (x - 2)^2$ est de même degré que X, il en résulte $X = (x + 1)^4 (x - 2)^2$.

543. Soit encore l'équation

$$X = x^{10} - 4x^9 + 5x^8 - 8x^7 + 10x^6 + 10x^4 + 8x^3 + 5x^2 + 4x + 1 = 0;$$

on en déduit

$$D = x^6 - 2x^5 + x^4 - 4x^3 - x^2 - 2x - 1, \quad E = x^2 + 1,$$
$$F = 1 = G, \text{ etc}, \quad q_1 = x^4 - 2x^3 - 2x - 1 = q_2,$$
$$q_3 = x^2 + 1, \quad q_4 = 1 = q_5, \text{ etc.}$$

D'où résulte $p_1 = 1$, $p_2 = x^2 - 2x - 1$, $p_3 = x^2 + 1$, $p_4 = p_5 = 1$. Donc $X = (x^2 + 1)^3 (x^2 - 2x - 1)^2$.

Ce procédé conduit, comme on voit, aux racines imaginaires et incommensurables de l'équation proposée.

On peut s'exercer sur les équations

$$x^3 - 27x + 54 = 0,$$
$$x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0,$$
$$x^7 + 5x^6 + 6x^5 - 6x^4 - 15x^3 - 3x^2 + 8x + 4 = 0,$$
$$9x^6 + 30x^5 + 22x^4 + 10x^3 + 17x^2 - 20x + 4 = 0.$$

544. Si le polynome $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ était une puissance 4^{me} exacte, de la forme $(x + z)^4$, sa dérivée serait $4(x + z)^3$; par conséquent cette dérivée diviserait exactement le produit du polynome proposé par 16. Effectuant donc cette division, le reste sera

$$(8b - 3a^2)x^2 + 2(6c - ab)x + (16d - ac).$$

Et puisque la division doit se faire exactement, ce reste est nul, quel que soit x; ce qui exige qu'on ait séparément

$$8b - 3a^2 = 0, \quad 6c - ab = 0 \quad \text{et} \quad 16d - ac = 0;$$

d'où l'on tire $b = \frac{3}{8}a^2$, $c = \frac{1}{16}a^3$ et $d = \frac{1}{256}a^4$.

Substituant ces valeurs dans le polynome proposé, on verra qu'alors il se réduit au développement de $(x + \frac{1}{4}a)^4$.

Par cette manière d'opérer, on trouvera toujours les relations qui doivent exister entre les coefficiens d'un polynome *complet* du n^{me} degré en x, pour que ce polynome soit la puissance n^{me} exacte d'un binome de la forme $x + z$. Et l'on peut obtenir aisément les conditions pour que $ax^3 + bx^2 + cx + d$ soit un cube parfait.

545. Nous avons vu (541) que quand une équation a des racines égales, elle peut *s'abaisser* à d'autres de degrés moins élevés. Or, la décomposition d'une équation en d'autres plus simples, s'opère facilement lorsque cette équation a des racines égales deux à deux et de signes contraires, comme

$$(x^2 - a^2)(x^2 + b^2) \times f(x) = 0.$$

En effet, si dans cette équation l'on change x en $-x$, ce qui donne $(x^2 - a^2)(x^2 + b^2) \times f(-x) = 0$, le p. g. c. d. entre la nouvelle équation et la proposée sera $(x^2 - a^2)(x^2 + b^2)$ ou le produit des binomes résultans des racines qui sont égales 2 à 2 et de signes contraires. Si donc on cherche ce p. g. c. d. et qu'on l'égale à zéro, ainsi que le quotient $f(x)$ qu'il donne en divisant par lui l'équation proposée, les racines de cette équation seront celles des deux équations beaucoup plus simples

$$(x^2-a^2)(x^2+b^2)=0 \text{ et } f(x)=0.$$

546. Qu'on ait, par exemple, l'équation

$$x^7+5x^6-24x^4-13x^3+7x^2-12x+36=0;$$

en y changeant x en $-x$, la transformée sera

$$-x^7+5x^6-24x^4+13x^3+7x^2+12x+36=0.$$

Le plus grand commun diviseur entre cette équation et la proposée est x^4-3x^2+4. Divisant l'équation proposée par ce p. g. c. d., le quotient sera x^3+5x^2+3x-9. Ainsi l'équation proposée est abaissée aux deux

$$x^4-3x^2+4=0 \text{ et } x^3+5x^2+3x-9=0.$$

Les racines de cette équation sont par conséquent $2, -2, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}, -3, -3, 1$.

On peut traiter d'une manière semblable l'équation

$$x^{10}+4x^9-8x^8-48x^7-18x^6+120x^5+92x^4-112x^3-103x^2+36x+36=0.$$

547. Parmi les équations susceptibles d'abaissement, on distingue les *équations réciproques*, ainsi nommées, parce que leurs racines sont *inverses* ou *réciproques* deux à deux, en sorte qu'une racine étant a, l'autre est $\frac{1}{a}$. Ces équations doivent donc rester les mêmes quand on y change x en $\frac{1}{x}$, et il faut par conséquent que les coefficiens des termes également distans des extrêmes soient égaux entre eux (494).

548. Considérons d'abord l'équation réciproque de degré pair

$$Nx^8+Px^7+Qx^6+Rx^5+Sx^4+Rx^3+Qx^2+Px+N=0.$$

Divisant les deux membres par x^4, l'équation pourra se mettre sous la forme

$$N\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+P\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+Q\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+R\left(x+\frac{1}{x}\right)+S=0.$$

Posant $x+\frac{1}{x}=u$; d'où $x^2+\frac{1}{x^2}=u^2-2$, $x^3+\frac{1}{x^3}=u^3-3u$ et $x^4+\frac{1}{x^4}=u^4-4u^2+2$, il viendra, réductions faites,

$$Nu^4+Pu^3+(Q-4N)u^2+(R-3P)u+2N-2Q+S=0.$$

Cette équation, d'un degré deux fois moindre que celui de la proposée, fera connaître les quatre valeurs du u, au moyen desquelles l'équation $x+\frac{1}{x}=u$ ou $x^2-ux=-1$ fournira les huit valeurs de x.

549. On résoudra d'une manière analogue, 1° toute équation réciproque de degré pair; 2° toute équation de degré pair dont les termes également éloignés des extrêmes ont leurs coefficiens égaux et tels, que ceux qui suivent celui du milieu ont alternativement des signes contraires et des signes pareils à ceux des coefficiens égaux qui précèdent, comme dans l'équation

$$Nx^6+Px^5+Qx^4+Rx^3-Qx^2+Px-N=0.$$

550. Quant aux équations réciproques de degrés impairs, elles sont toujours divisibles par $x+1$, et le quotient égalé à zéro, est une équation réciproque de degré pair. C'est de quoi l'on se convaincra en opérant sur l'équation

$$Nx^7+Px^6+Qx^5+Rx^4+Rx^3+Qx^2+Px+N=0.$$

On traitera de même toute équation de degré impair dont les coefficiens des termes également distans des extrêmes, sont égaux et de signes contraires, comme

$$Nx^5+Px^4+Qx^3-Qx^2-Px-N=0.$$

551. Voici des équations à résoudre, d'après les méthodes que nous venons d'indiquer :

$$24x^6-122x^5-43x^4+606x^3-43x^2-122x+24=0,$$
$$12x^7-28x^6-79x^5+131x^4+131x^3-79x^2-28x+12=0,$$
$$32x^6-288x^5+714x^4-99x^3-714x^2-288x-32=0,$$
$$6x^5-13x^4-29x^3+43x^2-x-6=0.$$

552. Les principes précédens peuvent aussi servir à résoudre les équations à deux termes, comme on l'a déjà vu dans le calcul des radicaux (347). En effet, l'une des racines de l'équation $x^m-1=0$ est $x=1$; et si l'on divise cette équation par $x-1$, le quotient égalé à zéro, sera une équation réciproque, réductible à une équation d'un degré deux fois moindre, au moins. Par exemple, l'équation $x^5+1=0$ donne d'abord $x=-1$, puis $x^4-x^3+x^2-x+1=0$; d'où $u^2-u=1$, en posant $x+\frac{1}{x}=u$. De là on tire aisément les quatre valeurs de x.

On peut donc résoudre complétement l'équation $x^{10}+31x^5-32=0$, ainsi que $nx^{10}+cpx^8+c^2qx^6-c^3qx^4-c^4px^2-c^5n=0$.

De l'Elimination.

553. On sait que *résoudre* deux équations à deux inconnues x et y, de la forme $A=0$ et $B=0$, c'est déterminer tous les *couples* ou *systèmes* de valeurs de ces inconnues, capables de *satisfaire* à ces équations, c'est-à-dire, de rendre nuls leurs premiers membres A et B. Or, cela exige qu'on sache *éliminer* une inconnue, de manière à trouver une équation *finale*, ne contenant plus que l'autre inconnue et des nombres donnés.

554. Si les équations à résoudre contenaient des radicaux, on ferait d'abord disparaître ces radicaux, à l'aide d'inconnues *auxiliaires*. Par exemple, qu'on ait les deux équations

$$\sqrt[3]{(u+z)^2}-3\sqrt{u-z}+2=0 \quad \text{et} \quad uz+u-z-16=0;$$

pour faire disparaître les radicaux, on posera

$$u+z=x^3 \quad \text{et} \quad u-z=y^2;$$

$$\text{d'où} \quad u=\tfrac{1}{2}(x^3+y^2) \quad \text{et} \quad z=\tfrac{1}{2}(x^3-y^2).$$

Avec ces valeurs, les deux équations proposées deviennent

$$x^2-3y+2=0 \quad \text{et} \quad x^6-y^4+4y^2-64=0.$$

On peut éliminer x de ces équations, en prenant la valeur de x^2, dans la première, et substituant cette valeur dans la 2ᵉ équation.

Désormais nous ne résoudrons que des équations à coefficiens entiers et où les exposans des inconnues seront des nombres entiers positifs.

555. Soient d'abord les deux équations

$$2x^2+3xy-2xy^2-3y^3=0,$$
$$x^2+3x-2xy-6y=0.$$

Comme l'inconnue y est au premier degré, dans la seconde de ces équations, il convient de la résoudre par rapport à cette inconnue, et on aura

$$y=\frac{x^2+3x}{2x+6}, \quad \text{ou} \quad y=\frac{x(x+3)}{2(x+3)}.$$

Avant de simplifier l'expression de y, en supprimant le facteur $x+3$, commun à ses deux termes, il faut égaler ce facteur à zéro ; car $x+3$ étant nécessairement facteur aussi du premier membre de la seconde équation proposée, en égalant $x+3$ à zéro, cette équation sera satisfaite. Or, $x+3=0$ donne $x=-3$; substituant -3 à x dans la première équation proposée, elle deviendra

$$y^3-2y^2+3y-6=0,\quad \text{ou}\quad (y-2)(y^2+3)=0.$$

Cette équation donne $y=2$ et $y=\pm\sqrt{-3}$. Ces valeurs et $x=-3$ satisfont effectivement aux équations à résoudre.

Supprimant le facteur $x+3$ dans les deux termes de l'expression générale de y, ce qui donnera $y=\frac{1}{2}x$, et substituant dans la première équation proposée, elle deviendra

$$x^3-4x^2=0,\quad \text{ou}\quad x^2(x-4)=0.$$

Cette équation et $y=\frac{1}{2}x$ donnent $x=0$ et $y=0$, $x=0$ et $y=0$, $x=4$ et $y=2$.

De sorte que les deux équations proposées admettent les six *solutions* que voici :

$$\begin{aligned} y &= 2,\ \sqrt{-3},\ -\sqrt{-3},\ 0,\ 0,\ 2,\\ x &= -3,\ -3,\ -3,\ 0,\ 0,\ 4\,; \end{aligned}$$

et rien n'aurait indiqué les trois premières si, dans la vue de simplifier, on avait supprimé le facteur $x+3$, sans l'égaler d'abord à zéro.

556. Considérons actuellement les deux équations

$$\begin{aligned} &x^3+2x^2y+2xy^2-4xy+y^2-4=0,\\ &x^2+2xy+2y^2-5y+2=0. \end{aligned}$$

Bien que ces équations ne soient pas du premier degré en x ou en y, elles conduisent cependant à une telle équation, par rapport à x, en retranchant de la première le produit de la seconde par x, car alors on trouve

$$xy-2x+y^2-4=0\,;\quad \text{d'où}\quad x=-\frac{y^2-4}{y-2}.$$

Avant de supprimer le facteur commun $y-2$, on l'égale à zéro, et l'on substitue la valeur $y=2$ qui en résulte, dans la seconde équation proposée, laquelle se réduit à $x^2+4x=0$, et donne $x=0$ et $x=-4$.

Supprimant le facteur commun $y-2$, ce qui donnera $x=-y-2$, et substituant dans la seconde équation proposée, on aura $y^2-5y+6=0$; d'où $y=3$ et $y=2$.

Ainsi les équations proposées se résolvent par les quatre systèmes :

$$\begin{array}{llll} x=0, & -4, & -5, & -4, \\ y=2, & 2, & 3, & 2. \end{array}$$

557. Il est toujours possible, par des éliminations successives d'un ou de plusieurs termes, de tirer de deux équations proposées, une équation du premier degré, par rapport à une inconnue. Mais les calculs ne sont guères praticables, en général, que pour les équations du second ou du troisième degré. Prenons par ex., les équations générales du troisième degré que voici :

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$
$$x^3+p'x^2+q'x+r'=0.$$

Dans ces équations, p, q, r, p', q', r', sont des fonctions de y et de nombres donnés. Retranchant la seconde équation de la première, et posant, pour abréger $p-p'=e$, $q-q'=e'$ et $r-r'=e''$, on aura

$$ex^2+e'x+e''=0 \ldots (1).$$

Soustrayant de cette équation multipliée par x, la première proposée multipliée par e, il viendra

$$(e'-ep)x^2+(e''-eq)x-er=0 \ldots (2).$$

Eliminant x^2 entre les deux équations (1) et (2), on trouve

$$[e'(e'-ep)-e(e''-eq)]x+e''(e'-ep)+e^2r=0;$$

d'où l'on tire $$x=\frac{e''(e'-ep)+e^2r}{e(e''-eq)-e'(e'-ep)}.$$

Substituant dans l'équation (1), chassant les dénominateurs, et décomposant en facteurs les deux termes multipliés par e' et e'', on aura

$$[e(e''-eq)-e'(e'-ep)][ee'r+e''(e''-eq)]+$$
$$[e''(e'-ep)+e^2r]^2=0 \ldots (3).$$

Telle est l'équation finale en y; et il est facile d'en conclure que x a aussi pour expression

$$x=-\frac{ee'r+e''(e''-eq)}{e''(e'-ep)+e^2r} \ldots (4).$$

Posant $r' = 0$, ce qui répond aux deux équations

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$
$$x^2 + p'x + q' = 0,$$

les formules (3) et (4), deviendront, réductions faites,

$$(r - eq')^2 + (e' - ep')(e'q' - rp') = 0,$$
$$x = -\frac{r - eq'}{e' - ep'} = \frac{e'q' - rp'}{r - eq'}.$$

Enfin, si dans ces dernières formules, on prend $r = 0$, il viendra

$$x^2 + px + q = 0, \quad x^2 + p'x + q' = 0,$$
$$e'^2 + e(pq' - qp') = 0 \text{ et } x = \frac{eq'}{e' - ep'} = -\frac{e'}{e},$$

Ces formules rentrent dans celles qu'on trouve, pages 122 et suivantes des Mélanges d'algèbre, et dont nous avons donné alors plusieurs applications.

558. Toutes les fois que les équations à résoudre peuvent se décomposer en facteurs, fonctions de l'une ou des deux inconnues, il ne faut pas manquer d'opérer cette décomposition; car alors en combinant chaque facteur d'une équation, égalé à zéro, avec chaque facteur de l'autre équation, égalé aussi à zéro, on n'a plus à éliminer qu'entre des équations de degrés moins élevés; et les procédés de l'élimination deviennent beaucoup plus simples. Prenons, par exemple, les deux équations

$$x^3y - 6x^2 - xy + 6 = 0,$$
$$2x^3 - 3x^2y - 2xy^2 + 3y^3 = 0.$$

Si l'on réunit les multiplicateurs de xy et de -6, dans la première, et les multiplicateurs de $2x$ et de $-3y$, dans la seconde, on verra facilement que ces équations se réduisent aux deux que voici :

$$(xy - 6)(x + 1)(x - 1) = 0,$$
$$(x + y)(x - y)(2x - 3y) = 0.$$

Or, un produit est nul dès que l'un de ses facteurs est zéro; les deux équations précédentes sont donc satisfaites par les neuf systèmes d'équations qui suivent :

$xy - 6 = 0$ et $x + y = 0$; $xy - 6 = 0$ et $x - y = 0$;
$xy - 6 = 0$ et $2x - 3y = 0$; $x + 1 = 0$ et $x + y = 0$;
$x + 1 = 0$ et $x - y = 0$; $x + 1 = 0$ et $2x - 3y = 0$;

$$x-1=0 \text{ et } x+y=0;\quad x-1=0 \text{ et } x-y=0;$$
$$x-1=0 \text{ et } 2x-3y=0.$$

De ces neuf systèmes d'équations, on tire aisément les douze couples de valeurs :

$$y=\pm\sqrt{-6},\ \pm\sqrt{6},\ \pm 2,\quad 1,\ -1,\ -\tfrac{2}{3},\ -1,\ 1,\ \tfrac{2}{3};$$
$$x=\mp\sqrt{-6},\ \pm\sqrt{6},\ \pm 3,\ -1,\ -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\ 1;$$

et chacun de ces couples de valeurs satisfait en effet aux deux équations proposées, qu'on pourrait aussi résoudre, mais par des calculs beaucoup plus compliqués, d'après la méthode du n° 555.

559. On voit combien il importe de décomposer les équations à résoudre, en facteurs inconnus, lorsque cela est possible; mais l'habitude du calcul peut seule indiquer comment il faut opérer cette décomposition. Par ex., si l'on avait les deux équations

$$2x^2-3xy-2y^2-3x+6y=0,$$
$$x^3-4xy-x^2y+4y^2+x^2-4y=0;$$

on observerait que les deux derniers termes de la première sont la même chose que $-3(x-2y)$; et que si l'on divise les trois premiers par $x-2y$, le quotient est exactement $2x+y$; d'où il est aisé de voir que la première équation revient à

$$(x-2y)(2x+y-3)=0.$$

A l'égard de la seconde, si l'on y réunit les multiplicateurs de $-4y$, on verra ensuite qu'elle équivaut à

$$(x^2-4y)(x-y+1)=0.$$

Il est donc aisé de résoudre ces équations, en combinant chaque facteur de la première, égalé à zéro, avec chaque facteur de la seconde, égalé aussi à zéro.

560. Considérons encore les deux équations

$$x^3-(3y+9)x^2+(3y^2+18y+23)x-y^3-9y^2-23y-15=0,$$
$$x^3+(3y-3)x^2+(3y^2-6y-1)x+y^3-3y^2-y+3=0.$$

Les premiers termes de ces équations donnent l'idée de comparer la première au cube de $x-(y+3)$ et la seconde à celui de $x+(y-1)$; alors si l'on ajoute ou retranche à ces cubes les termes nécessaires pour les réduire aux deux équations proposées, et si l'on observe qu'en général $a^3-ab^2=a(a+b)(a-b)$ on verra que ces équations peuvent s'écrire comme il suit:

$$(x-y-3)(x-y-1)(x-y-5)=0,$$
$$(x+y-1)(x+y+1)(x+y-3)=0.$$

On peut aussi résoudre par la décomposition en facteurs les deux systèmes d'équations :

$$x^3-(3y-3)x^2+(3y^2-6y-1)x-y^3+3y^2+y-3=0,$$
$$x^2+(2y+4)x+y^2+4y+3=0;$$
$$x^4-4x^3y+6x^2y^2-4(y^3+2)x+y^4+8y=0,$$
$$x^3+(3y-3)x^2+(3y^2-6y-1)x+y^3-3y^2-y+3=0.$$

561. Soient à résoudre les deux équations

$$x^3-y^3=a \text{ et } x^2y-xy^2=b.$$

Ces deux équations peuvent se traiter par diverses méthodes. On pourrait substituer dans la première la valeur de x tirée de la seconde; ce qui donnerait une équation contenant un radical qu'il faudrait faire disparaître : on pourrait aussi employer des inconnues auxiliaires et poser $x=u+v$ et $y=u-v$. Mais ce second procédé, quoique plus simple que l'autre, exige encore assez de calculs. Voici la marche la plus facile :

Retranchant de la première équation proposée, le triple de la seconde et extrayant la racine cubique de part et d'autre, on aura

$$x-y=\sqrt[3]{a-3b}.$$

La deuxième équation étant la même que $xy(x-y)=b$, elle devient $xy\sqrt[3]{(a-3b)}=b$. Cette équation et celle en $x-y$, feront connaître aisément x et y. On peut faire $a=26$ et $b=6$.

Voici encore deux équations à résoudre

$$x^4+2x^2y^2+y^4=a=169,$$
$$x^3y-x^2y^2+xy^3=b=42.$$

562. Presque toutes les méthodes précédentes d'élimination ne conviennent qu'à de certaines équations et ne sont point générales; mais il est bon de les connaître, parce que souvent elles donnent, avec peu de calculs, les valeurs que les méthodes générales ne fourniraient que par des opérations longues et compliquées. Il existe d'ailleurs, dans la manière d'éliminer les inconnues, des simplifications accidentelles, que l'habitude du calcul algébrique fait bien vite apercevoir, et dont nous avons donné beaucoup d'exemples dans nos Mélanges d'algèbre.

563. La méthode d'élimination qui paraît devoir être préférée, en général, est celle du commun diviseur, que nous allons, en conséquence, présenter avec les détails convenables.

564. Soit donc à éliminer x entre les deux équations $A=0$ et $B=0$, qui ne contiennent que des puissances entières et positives de x et de y. Si l'on connaissait une des valeurs *convenables* de y, en substituant cette valeur dans les équations proposées, celles-ci ne contiendraient plus d'inconnues que x, et seraient satisfaites par la même valeur $x=a$: donc leurs premiers membres A et B seraient divisibles par $x-a$, et auraient par conséquent un commun diviseur en x. Ainsi en traitant A et B comme pour en trouver le plus grand commun diviseur en x, les vraies valeurs de y rendront nul le reste R indépendant de x, et seront données par l'équation $R=0$. Mais puisque le reste précédent Q est alors le plus grand commun diviseur entre A et B ; en posant $Q=0$, A et B auront un facteur nul, et par conséquent les équations proposées $A=0$ et $B=0$ seront satisfaites. D'où il suit que l'équation $Q=0$ donnera les vraies valeurs de x, après qu'on y aura substitué celles de y, tirées de $R=0$.

On voit donc, que pour résoudre deux équations à deux inconnues x et y, il faut chercher le plus grand commun diviseur en x des premiers membres A et B, et continuer l'opération jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un reste ne contenant plus d'inconnue que y. Ce reste égalé à zéro, sera l'équation finale, qu'il faudra résoudre. Substituant ensuite les valeurs de y, tirées de cette équation, dans l'avant-dernier reste égalé à zéro, il en résultera les valeurs correspondantes de x.

565. Qu'on ait, par exemple, les deux équations

$$x^2-(2y+5)x+y^2+5y+6=0,$$
$$x^2-4xy+4y^2-1=0.$$

Divisant le premier membre de la première par le premier membre de la seconde, on aura 1 pour quotient et pour reste

$$(2y-5)x-3y^2+5y+7.$$

Pour éviter les quotiens et les restes fractionnaires, il faut multiplier le diviseur, qui doit devenir dividende, par $(2y-5)^2$: de cette manière, on pourra faire deux divisions partielles consécutives, sans introduire de nouveaux facteurs (532). Effectuant ces deux divisions partielles, on tombera sur le reste indépendant de x, $y^4 - 10y^3 + 35y^2 - 50y + 24$.

Ainsi, tous les couples de valeurs de x et de y, capables de satisfaire aux équations proposées, seront donnés par les deux équations $$y^4 - 10y^3 + 35y^2 - 50y + 24 = 0,$$
$$(2y - 5)x - 3y^2 + 5y + 7 = 0 \ldots (1).$$

La première de ces équations, qui est l'équation finale en y, étant résolue par la méthode des diviseurs commensurables, donne $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, $y = 4$. Substituant ces valeurs dans l'équation (1), il vient, pour les valeurs correspondantes de x, $x = 3$, $x = 5$, $x = 5$ et $x = 7$. De sorte que les équations proposées admettent les quatre systèmes de valeurs :

$$y = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$
$$x = 3,\ 5,\ 5,\ 7;$$

Et en effet, chacun de ces systèmes, satisfait aux deux équations qu'il fallait résoudre.

566. La règle que nous venons d'appliquer, ne paraît d'abord devoir offrir d'autres difficultés que la longueur des calculs; néanmoins elle est susceptible de plusieurs modifications importantes, sans lesquelles on obtiendrait souvent une équation finale compliquée de *facteurs étrangers* à la question.

En effet, reprenons les équations $A = 0$ et $B = 0$, et opérons sur les polynomes A et B, comme pour en trouver le plus grand commun diviseur en x. Soient M, M', M'', M''', etc., les facteurs introduits dans les dividendes successifs, pour avoir des quotiens entiers (532); ces facteurs seront des nombres donnés ou des *fonctions* de y seul. Désignons par Q, Q', Q'', Q''', etc., les quotiens successifs, et par R, R', R'', R''', etc., les restes correspondans; on aura cette suite d'identités :

$$MA = BQ + R$$
$$M'B = RQ' + R'$$
$$M''R = R'Q'' + R''$$
$$M'''R' = R''Q''' + R'''$$
etc. . . . .

Pour fixer les idées, supposons que R''' soit le reste indépendant de x. Puisque toutes les quantités qui composent les identités précédentes, sont *entières* et ne renferment que des puissances entières et positives de x et de y, aucune de ces quantités ne deviendra infinie. D'après cela, on voit que tous les couples de valeurs de x et de y, qui réduiront A et B à zéro, donneront aussi $R = 0$, $R' = 0$, $R'' = 0$ et $R''' = 0$. Ces couples réduisant donc à zéro tous les restes successifs, seront donnés par les équations $R'' = 0$ et $R''' = 0$, l'une du premier degré en x et l'autre indépendante de x. Ainsi après avoir résolu l'équation $R''' = 0$, il faudra substituer les valeurs de y dans l'équation $R'' = 0$, et il en résultera les valeurs correspondantes de x.

De cette manière, on aura tous les couples de valeurs de x et de y, capables de satisfaire aux équations proposées $A = 0$ et $B = 0$. Mais on pourra aussi en avoir d'autres; car bien que les valeurs $x = a$ et $y = b$, tirées de $R'' = 0$ et $R''' = 0$, donnent $M'''R' = 0$, cependant ces valeurs pourraient fournir $M''' = 0$, sans donner $R' = 0$; ou bien, si elles fournissaient $R' = 0$, et par suite $M''R = 0$, elles pourraient conduire à $M'' = 0$, sans donner $R = 0$; etc. Supposons, par exemple, que ces valeurs donnent $M'' = 0$, sans annuler le reste R; alors ces mêmes valeurs ne satisferont pas aux équations proposées $A = 0$ et $B = 0$. Car si cela était, on aurait aussi $R = 0$; ce qui est contre l'hypothèse. Et comme les équations $R''' = 0$ et $M'' = 0$, ne renferment pas x, la valeur $y = b$, qui satisfait à la première, doit aussi satisfaire à la seconde; ces deux équations sont donc divisibles par $y - b$; elles ont par conséquent $y - b$ pour facteur commun.

567. Il suit de là que les solutions étrangères, telles que $x = a$ et $y = b$, viennent de ce que les coefficiens des premiers termes des diviseurs successifs, ont des facteurs fonctions de y, communs avec l'équation finale $R''' = 0$. En effet, si ces coefficiens n'avaient pas de facteurs communs avec R''', tout système de valeurs, tel que $x = a$ et $y = b$, qui satisferaient aux équations $R''' = 0$ et $R'' = 0$, ne rendrait nul aucun des coefficiens des premiers termes des diviseurs; et par conséquent ne ferait évanouir aucune des quantités M, M', M'', M''', etc., qui sont des puissances ou des facteurs de ces coefficiens. Car si $y = b$ donnait $M'' = 0$, par exemple, M'' serait divisible par $y - b$ et aurait $y - b$ pour facteur commun avec R'''; ce qui est contre la supposition. Mais puisqu'aucune des quantités M, M', M'',

M''', etc., ne sera annulée par les systèmes de valeurs, tirées des équations $R''' = 0$ et $R'' = 0$, il s'ensuit que tous ces systèmes donneront $R' = 0$, $R = 0$, $B = 0$ et $A = 0$; ces systèmes satisferont donc aux équations proposées $A = 0$ et $B = 0$, et seront par conséquent les véritables.

568. Ainsi, en général, *si aucun des facteurs des premiers termes de chaque diviseur ne divise le dernier reste, ce reste et l'avant-dernier, égalés à zéro, fourniront tous les couples de valeurs de* x *et de* y, *capables de satisfaire aux équations proposées, et n'en donneront point d'autres.* Par conséquent, avant de résoudre l'équation finale, il faudra la débarrasser, par la division, des facteurs qu'elle pourrait avoir de communs avec les premiers termes de diviseurs, parce que ces facteurs fournissent seuls les solutions étrangères. Par exemple, soient les deux équations

$$x^3y - 3x + 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^2(y-1) + x - 2 = 0.$$

Pour avoir le plus grand commun diviseur en x, multiplions la première par $(y-1)^2$, et divisons par la deuxième : le premier reste sera

$$-x(y^2 - 5y + 3) + y^2 - 4y + 1.$$

Multipliant le premier diviseur par $(y^2 - 5y + 3)^2$, et divisant par le premier reste, le second reste sera

$$y^5 - 10y^4 + 37y^3 - 64y^2 + 52y - 16.$$

Avant d'égaler ce reste à zéro, il faut le débarrasser des facteurs qu'il peut avoir de communs avec les premiers termes des diviseurs. Or, ce deuxième reste n'est pas divisible par $y^2 - 5y + 3$; mais on trouve qu'il l'est par $(y-1)^2$ (*), et l'on a, pour équation finale,

---

(*) *Le facteur introduit pour rendre une division possible, est toujours diviseur du reste de la division suivante.* En effet, l'équation $M'' = 0$ en y seul, donne des valeurs telles que $y = \beta$: substituons-les dans R', R'', R''', qui deviendront fonctions de x seul. Par sa nature, M'' est facteur de a dans $R' = ax^v + bx^{v-1} + \cdots$, et $M'' = 0$ abaisse R' au degré $v-1$, qui est celui de R''. Ainsi les équations $R' = 0$ et $R'' = 0$, pour $y = \beta$, ont chacune $v-1$ valeurs de x, qui doivent être les mêmes respectivement, puisque dès que M'' est nul avec R', R'' l'est aussi, d'après les identités du n° 566, et réciproquement. Mais alors R''' est nul; ce qui suppose qu'en faisant $y = \beta$ dans $R''' = 0$, on peut tirer de

$$y^3 - 8y^2 + 20y - 16 = 0.$$

Cette équation donne $y = 4$, 2 et 2. Substituant ces valeurs dans le premier reste égalé à zéro, il viendra $x = -1$, 1 et 1.

Si l'on n'avait pas dégagé l'équation finale du facteur $(y-1)^2$, elle aurait été annulée par $(y-1)^2 = 0$, équation qui, avec l'avant-dernier reste égalé à zéro, aurait donné les deux systèmes de solutions étrangères $y = 1$ et $x = 2$, $y = 1$ et $x = 2$.

569. *Lorsque l'un* R'' *des restes successifs a un facteur* k *fonction de* y, *sans l'être de* x, *il faut égaler à zéro ce facteur* k, *ainsi que le reste précédent* R', *puis résoudre les deux équations résultantes* k = 0 *et* R' = 0. *Continuer ensuite l'opération de l'élimination.* De cette manière, on obtiendra des couples de valeurs beaucoup plus simplement que par la méthode générale. Et si k n'a point de facteurs communs avec les premiers termes des diviseurs employés R', R et B, les valeurs trouvées ne pouvant annuler les quantités M, M', M'' (566), donneront nécessairement R = 0, B = 0 et A = 0, et satisferont par conséquent aux équations proposées.

Mais si k contenait des facteurs communs avec les premiers termes des diviseurs employés, il faudrait, pour reconnaître les vrais couples de valeurs, les substituer successivement dans les équations à résoudre.

570. Pour appliquer la règle précédente, reprenons les équations déjà résolues au n° 560, savoir :

$$x^3 - (3y+9)x^2 + (3y^2+18y+23)x - y^3 - 9y^2 - 23y - 15 = 0,$$
$$x^3 + (3y-3)x^2 + (3y^2-6y-1)x + y^3 - 3y^2 - y + 3 = 0.$$

Effectuant la première division, on aura pour reste :

---

cette équation, du degré $v-2$ en x, toutes les $v-1$ valeurs de x; chose impossible (489), à moins que $y = \beta$ ne rende nul R''' sans le secours d'aucune valeur de x, c'est-à-dire, à moins que $y - \beta$ ne divise R'''. Donc R''' est divisible par tous les facteurs de M''; il l'est donc par M'' lui-même.

Ce principe est général; et si l'on a les deux équations

$$y^3x^2 - 3y^3x - y^2 + 2 = 0,$$
$$(y^2 - 3y + 2)x^2 + (y-1)x - 3y + 1 = 0,$$

et qu'en éliminant x, on prenne la première pour dividende, on verra que le reste indépendant de x sera divisible par $(y^2 - 3y + 2)^2$.

$$-(6y+6)x^2+(24y+24)x-2y^3-12y^2-22y-18\ldots(1)$$

Avec un peu d'attention, on reconnaît que $2(y+1)$ est facteur de ce reste; car $y=-1$ fait évanouir la partie indépendante de x. Et comme $2(y+1)$ n'a pas de facteur commun, fonction de y, avec le coefficient 1 du premier terme du diviseur, il faut poser $y+1=0$ ou $y=-1$; ce qui réduit le diviseur égalé à zéro, à l'équation

$$x^3-6x^2+8x=0;\ \text{d'où}\ x=0,\ x=4\ \text{et}\ x=2.$$

On trouve effectivement que chacune de ces valeurs avec $y=-1$, satisfait aux équations proposées.

Supprimant le facteur $2(y+1)$, dans le premier reste, et changeant les signes, il vient, pour second diviseur,

$$3x^2-12x+y^2+2y+9;\ \ldots(2)$$

et l'on a, pour second reste,

$$(24y^2+48y)x-48y^2-96y.\ \ldots(3)$$

Il est aisé de voir que $24y(y+2)$ est facteur de ce second reste. Egalant donc ce facteur à zéro, ainsi que le second diviseur (2), il viendra deux équations, qui fourniront les quatre systèmes de valeurs $y=0$ et $x=3$, $y=0$ et $x=1$, $y=-2$ et $x=3$, $y=-2$ et $x=1$. Et ces quatre systèmes satisfont aux équations proposées, parce qu'en effet, le facteur $24y(y+2)$ n'a point de facteurs, fonctions de y, qui soient communs aux premiers termes des diviseurs employés.

Supprimant le facteur $24y(y+2)$ dans le second reste (3), il vient $x-2$ pour troisième diviseur; et l'on trouve, pour reste indépendant de x, y^2+2y-3. Les équations

$$y^2+2y-3=0\ \text{et}\ x-2=0,$$

donnant les deux couples de valeurs $y=-3$ et $x=2$, $y=1$ et $x=2$, on en conclut que les proposées sont vérifiées par les neuf systèmes de valeurs :

$$\begin{array}{l} y=-1,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0,\ -2,\ -2,\ -3,\ +1, \\ x=\ \ 0,\ +4,\ +2,\ 3,\ 1,\ +3,\ +1,\ +2,\ +2. \end{array}$$

571. On voit par cet exemple, combien il importe, pour la simplicité des calculs, de supprimer les facteurs fonctions de y, lorsqu'il s'en rencontre; mais on voit aussi qu'il ne faut opérer la suppression, qu'après avoir égalé ces facteurs à zéro; car au-

trement, on ferait disparaître plusieurs solutions. Nous laissons à traiter, d'après la même méthode, 1° les équations

$$\left.\begin{array}{l} x^3-2x^2+y^2=0 \\ (y-2)x^2+xy=0 \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} y=0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 4, \\ x=0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ -2; \end{array}\right.$$

2° Les deux équations

$$x^3-(3y-3)x^2+(3y^2-6y-1)x-y^3+3y^2+y-3=0,$$
$$x^3+(3y-3)x^2+(3y^2-6y-1)x+y^3-3y^2-y+3=0,$$

qui donnent les neuf systèmes de valeurs :

$$\begin{array}{l} y=1,\ 1,\ \ 1,\ 0,\ \ 0,\ 2,\ \ 2,\ 3,\ -1, \\ x=0,\ 2,\ -2,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 0,\ \ 0; \end{array}$$

3° Enfin les équations

$$3x^3-2yx^2-3y^2x+2y^3=0,$$
$$(y^3-y)x-6y^2+6=0,$$

qui admettent les douze solutions :

$$\begin{array}{l} y=1,\ \ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 3,\ -3,\ \pm\sqrt{6},\ \pm\sqrt{-6}, \\ x=1,\ -1,\ \tfrac{2}{3},\ \ 1,\ -\tfrac{2}{3},\ 2,\ -2,\ \pm\sqrt{6},\ \mp\sqrt{-6}. \end{array}$$

Il est bon d'observer que les trois systèmes d'équations, que nous venons d'énoncer, pourraient se résoudre par d'autres méthodes que celle du commun diviseur.

572. L'élimination par le plus grand commun diviseur, donne lieu à plusieurs remarques, qu'il est bon de connaître.

I. *A chaque valeur que l'équation finale donne à* y, *il ne peut répondre d'autres valeurs de* x *que celles fournies par l'avant-dernier reste égalé à zéro*. Car après avoir remplacé y par une de ses valeurs, chaque valeur de x, qui répond à cette valeur, réduit les deux équations proposées à zéro; elle réduit donc aussi à zéro tous les restes et par conséquent l'avant-dernier; elle est donc fournie par cet avant-dernier reste égalé à zéro.

Il n'y a d'exception que quand plusieurs valeurs de x répondent à une valeur de y; alors ces valeurs de x ne peuvent être données par l'avant-dernier reste égalé à zéro, qui est du premier degré en x. Et comme pour chacune de ces valeurs de x ce reste doit être zéro, il devient nul de lui-même par la valeur de y, et donne $x=\frac{0}{0}$. Suivant donc qu'il y a 2, 3, 4, ..., valeurs de x qui répondent à une même valeur de y, cette valeur de y rend nuls d'eux-mêmes les restes où x est au 1er, 2e, 3e, ..., degré. Mais cette circonstance n'a lieu que quand, dans la recherche du plus grand commun diviseur, on a négligé de supprimer, dans l'un des restes, le facteur fonction de y, après l'avoir égalé à zéro (569).

Réciproquement, lorsque l'une des vraies valeurs de y rend nul de lui-même l'avant-dernier reste, et donne par conséquent $x = \frac{0}{0}$, le reste précédent, qui est du second degré en x, devient le plus grand commun diviseur des deux équations proposées. Ainsi en égalant ce reste à zéro, ces deux proposées sont satisfaites, puisqu'un de leurs facteurs est nul : donc il en résulte deux valeurs de x, correspondantes à la valeur de y.

Si cette valeur de y faisait encore évanouir le reste du second degré en x, le reste précédent, du troisième degré en x, deviendrait plus grand commun diviseur aux deux équations proposées; elles seraient donc annulées en égalant ce reste à zéro; il y aurait conséquemment trois valeurs de x, qui, avec la valeur de y, satisferaient aux équations proposées : ainsi de suite.

II. Si l'on arrive à un reste R'' du premier degré en x, en égalant ce reste à zéro, le reste précédent deviendra diviseur commun aux deux équations proposées, qui seront par conséquent satisfaites par $R' = 0$. Substituant dans $R' = 0$, la valeur de x, tirée de $R'' = 0$, on aura l'équation finale en y, car toutes les valeurs de y, qui satisferont à cette équation $R' = 0$, satisferont aussi aux équations proposées. De cette manière, on abrége quelquefois le procédé de l'élimination. C'est ainsi qu'on résoudra les deux équations

$$2x^3y + (2y^2 - 4y - 2)x^2 + (2y^4 - 6y^3 - 2y^2 + 6y + 1)x - 2 = 0,$$
$$x^2y + (y^2 - 2y - 1)x + y^4 - 3y^3 - y^2 + 3y = 0.$$

III. Si l'on trouve un reste ne contenant que des nombres donnés, il n'y aura aucun couple de valeurs de x et de y, capable de satisfaire aux équations proposées; car toutes les valeurs de x et de y, qui réduiraient à zéro les deux équations proposées, réduiraient aussi à zéro tous les restes successifs (566); ce qui est impossible, puisque le dernier sera toujours un nombre donné. Dans ce cas, les deux équations à résoudre sont incompatibles et ne peuvent coexister. Telles sont les deux équations

$$x^3y - (y^3 - 3y - 1)x + y = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - y^2 + 3 = 0.$$

IV. Lorsque l'une des vraies valeurs de y réduit l'avant-dernier reste à un nombre connu, et donne par conséquent $x=\infty$, il n'y a qu'une valeur infinie de x, qui, avec cette valeur de y, puisse satisfaire aux équations proposées ; car toute autre valeur de x ne pourrait pas réduire à zéro l'avant-dernier reste, qui est un nombre connu. Par exemple, les deux équations

$$x^3y^3+xy^3(y-1)-1=0 \quad \text{et} \quad x^2y^2+y^3-y^2-1=0,$$

ont pour équation finale $y^2(y-1)=0$, et pour avant-dernier reste, $xy-1=0$: donc $y=0$ et $x=\infty$, $y=1$ et $x=1$.

V. Supposons que l'un R''' des restes successifs s'évanouisse de lui-même. Dans ce cas, le reste précédent R'', devient réellement diviseur commun aux deux équations proposées, qui prennent par conséquent la forme

$$N\times R''=0 \quad \text{et} \quad P\times R''=0.$$

Ces deux équations sont donc satisfaites par $R''=0$. Or, si R'' ne renferme que x, y pourra être pris à volonté ; si R'' contient x et y, on pourra donner à y telle valeur qu'on voudra : de sorte que dans l'un et l'autre cas, *le problème est indéterminé*, à moins que $R''=0$ ne fournisse que des valeurs impossibles, comme cela arriverait si R'' était x^4+16 ou x^2+y^2+1. Les solutions déterminées sont données par les équations $N=0$ et $P=0$, qui vérifient aussi les proposées.

Par exemple, en traitant les deux équations

$$x^3-3x^2y+3xy^2-5x^2+10xy-y^3-5y^2-6y+6x=0$$
$$x^3-5x^2y+8xy^2-x-4y^3+y=0,$$

le reste de la seconde division pourra se mettre sous la forme

$$(y^4-10y^3+35y^2-50y+24)(x-y).\ldots(1)$$

Supprimant le multiplicateur de $x-y$, et divisant le reste précédent par $x-y$, on aura un quotient exact. Donc $x-y$ est un diviseur commun aux deux équations proposées ; et conséquemment x et y ont une infinité de valeurs, dans ces équations.

Les solutions déterminées fournies par $N=0$ et $P=0$, sont précisément celles que donne le multiplicateur de $x-y$ dans (1), quand on l'égale à zéro, ainsi que le reste précédent, débarrassé du facteur $x-y$. Car si l'on divisait les proposées par leur facteur commun $x-y$, et qu'on opérât sur les quotiens

N et P, pour en trouver le plus grand commun diviseur en x, les restes des divisions successives n'auraient pas le facteur $x-y$, qui n'est pas dans N et P ; ces restes s'obtiendraient donc en divisant par $x-y$ ceux de l'élimination de x entre les équations proposées.

Si l'on traitait les deux équations

$$x^3-(3y-1)x^2+(y^2-2y)x+y^3+y^2=0$$
$$x^3-(y-1)x^2-(y-1)x+1=0,$$

le second reste pourrait se mettre sous la forme

$$(y^4-5y^2+2y-1)(x+1),$$

et le reste précédent serait divisible exactement par $x+1$.

VI. Bezout a remarqué le premier que le degré de l'équation finale ne peut être plus grand que le produit des degrés des deux équations proposées ; et qu'il est justement égal à ce produit, lorsque les équations sont les plus générales de leur degré.

Il nous serait impossible de démontrer ici cette proposition ; mais on peut aisément en reconnaître l'exactitude sur les exemples que nous avons traités, et sur ceux qu'on pourrait se proposer d'ailleurs ; et il en résulte que si le degré de l'équation finale surpasse le produit des degrés des équations proposées, cette équation finale sera compliquée de facteurs étrangers.

573. Pour terminer ce que nous avions à dire sur l'élimination, nous ferons observer que dès qu'on sait éliminer une inconnue entre deux équations, il est facile de comprendre comment on peut éliminer entre m équations à m inconnues. En effet, dans ce cas, il suffit de combiner la plus simple des équations proposées, successivement avec chacune des $m-1$ autres, pour en chasser une même inconnue ; puis de répéter le même procédé sur les nouvelles équations, et ainsi de suite. Mais les calculs se compliquent singulièrement à mesure que le degré et le nombre d'équations deviennent plus considérables. Par ex., pour trois équations complètes du troisième degré, à trois inconnues, l'équation finale devrait s'élever au 81^{me} degré. Il arrive cependant quelquefois que l'on peut abréger les calculs par la manière d'éliminer les inconnues. Voyez, par exemple, l'emploi des *inconnues auxiliaires*, dans les Mélanges d'algèbre, pages 46, 47, 81, 82, 83, etc.

De la recherche des racines réelles incommensurables d'une équation numérique.

574. Après avoir trouvé toutes les racines commensurables, égales et inégales, d'une équation numérique, et après l'avoir débarrassée de ces racines par la division, il reste encore les racines incommensurables *réelles* ou *imaginaires*. Les valeurs incommensurables réelles, ont une partie entière suivie d'une fraction; il faudra donc déterminer d'abord la partie entière, et ensuite la partie fractionnaire, avec un certain degré d'approximation.

Pour avoir la partie entière, le moyen qui s'offre naturellement à l'esprit, est de substituer à la place de x, tous les nombres consécutifs $0, 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots$, compris entre les limites $+L$ et $-L'$; et toutes les fois que deux nombres consécutifs donneront deux résultats de signes contraires, on en conclura que ces deux nombres interceptent au moins une racine réelle (506), et que par conséquent, la partie entière de cette racine est le plus petit de ces deux nombres.

575. Mais cette opération est souvent insuffisante pour mettre en évidence toutes les racines réelles, puisqu'il peut s'en trouver plusieurs entre deux nombres consécutifs (507) : il faut donc mettre entre les nombres à substituer, un intervalle tel qu'il ne puisse tomber qu'une seule racine entre deux substitutions successives. Or, *cet intervalle doit être moindre que la plus petite différence des racines réelles de la proposée*. En effet, soient M et M' deux nombres dont la différence est moindre que la plus petite différence des racines réelles a, b, c, d, etc., de la proposée $X=0$; supposons qu'en faisant $x=M$ et $x=M'$, on ait deux résultats de signes contraires; il y aura donc au moins une racine réelle a comprise entre M et M', et il viendra $M<a$ et $M'>a$. Mais je dis qu'il n'y aura pas une seconde racine b comprise entre M et M'; car si cela était, on aurait aussi $M<b$ et $M'>b$; donc, puisque $M'>a$, il viendrait $M'-b>a-b$, et, à plus forte raison, $M'-M>a-b$, ce qui est contre l'hypothèse. Donc en général, si δ est moindre que la plus petite différence entre les racines réelles, et que, partant de la limite inférieure l, on substitue les nombres l, $l+\delta$, $l+2\delta$, ..., jusqu'à la limite supérieure L, on obtiendra autant de résultats de signes différens qu'il y a de racines réelles. Chaque changement

de signe accusera l'existence d'une seule racine entre les deux nombres substitués; et il n'y en aura pas d'intermédiaire, si les signes des résultats sont les mêmes.

576. Il reste à déterminer l'intervalle δ. On y parviendra, quoique ne connaissant pas les racines de la proposée, si on peut cependant former une autre équation, dont les valeurs de l'inconnue soient toutes les différences des racines de la proposée, prises 2 à 2; car la limite inférieure des racines de la nouvelle équation sera la valeur cherchée de δ. Or, soit a une des racines de l'équation proposée $X=0$, et faisons $x=a+y$; nous aurons (497)

$$X+X_1y+\tfrac{1}{2}X_2y^2+\cdots+Ny^m=0.$$

Et puisque a est racine de l'équation $X=0$, le premier terme X disparaît; divisant le reste par y, il vient

$$X=0 \text{ et } X_1+\tfrac{1}{2}X_2y+\cdots+Ny^{m-1}=0 \ldots \text{(d)}.$$

Ces deux équations sont entre les deux inconnues a et y : et comme $y=x-a$; *y est la différence entre la racine* a *et chacune des autres* b, c, d, *etc.*, *représentées par* x. Eliminons a entre les deux équations (d), il viendra l'équation $Y=0$, dont l'inconnue y sera la différence entre deux quelconques des racines de la proposée $X=0$; car l'équation $Y=0$ ne renfermant que l'inconnue y et les coefficiens de la proposée, est précisément la même que l'on obtiendrait si l'on faisait $x=b+y$, $x=c+y$, etc., c'est-à-dire, si y désignait la différence entre la racine b et chacune des autres, entre la racine c et chacune des autres, etc. Donc, réellement, l'équation $Y=0$ a pour racines toutes les différences des m racines a, b, c, d, etc., prises deux à deux; elle a donc $m(m-1)$ racines (455); elle est par conséquent du $m(m-1)^{me}$ degré en y.

De plus, cette même équation $Y=0$ ne doit contenir que des puissances paires de y; car ses racines $y=a-b$, $y=b-a$, $y=a-c$, $y=c-a$, $y=a-d$, $y=d-a$, etc., sont égales deux à deux et de signes contraires; de sorte que si l'on a $y=a'$, $y=b'$, $y=c'$, etc., on aura aussi $y=-a'$, $y=-b'$, $y=-c'$, etc., et par suite, $Y=0$ sera de la forme

$$(y^2-a'^2)(y^2-b'^2)(y^2-c'^2)\cdots=0,$$

$$\text{ou } y^{2n}+py^{2n-2}+qy^{2n-4}+\cdots+ty^2+u=0.$$

On peut donc poser $y^2=z$ sans introduire de radicaux; et l'on aura ainsi une équation $Z=0$, dont l'inconnue z est le carré de toutes les différences des racines de la proposée $X=0$: et c'est ce qui a fait nommer $Z=0$, l'*équation aux carrés des différences*.

577. Voyons maintenant l'usage de l'équation $Z=0$ pour calculer l'intervalle δ. D'abord, comme δ doit être la moindre différence des racines réelles de $X=0$, et que le carré de la différence de deux nombres réels est toujours positif, on voit qu'il suffit de chercher la limite inférieure des racines positives de $Z=0$. Faisant donc $z=\frac{1}{u}$, dans $Z=0$, puis déterminant la limite supérieure l des racines positives de la transformée $U=0$; $\frac{1}{l}$ sera la limite inférieure des racines positives de $Z=0$; c'est-à-dire, qu'on aura toujours $z>\frac{1}{l}$ ou $y>\frac{1}{\sqrt{l}}$. Ainsi, en posant $\delta=\frac{1}{\sqrt{l}}$, on aura l'intervalle à mettre entre deux substitutions successives.

Il peut se faire que l soit <1; dans ce cas, $\delta>1$, et en substituant pour x tous les nombres entiers positifs et négatifs compris entre les limites $+L$ et $-L'$, on aura le nombre de toutes les racines réelles, et la partie entière de chacune. Mais en général, $l>1$, et par suite $\delta<1$. Et comme $\sqrt{l}$ est le plus souvent incommensurable, il faudra prendre le nombre entier h immédiatement au-dessus, ce qui donne $\delta=\frac{1}{h}$, et $\frac{1}{h}$ sera l'intervalle cherché entre deux substitutions successives. On fera donc, dans $X=0$, successivement :

$$x=0,\ \frac{1}{h},\ \frac{2}{h},\ \frac{3}{h},\ \ldots,\ -\frac{1}{h},\ -\frac{2}{h},\ -\frac{3}{h},\ \ldots.$$

Enfin, on peut éviter la substitution de nombres fractionnaires dans l'équation $X=0$, en y faisant d'abord $x=\frac{v}{h}$ ou $v=hx$, ce qui donnera une transformée $V=0$, dont les racines seront chacune h fois plus grandes que celles de la proposée. Or, soit $a-b$ la plus petite différence des racines de $X=0$; on aura donc $a-b>\frac{1}{h}$ ou $ah-bh>1$, et par conséquent, toutes les différences des racines de $V=0$ sont plus grandes que l'unité. D'où il suit que si l'on fait successivement $v=0$, $1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots$, on sera sûr d'obtenir autant de changemens de signes que $V=0$ a de racines réelles.

578. Récapitulant ce qui vient d'être dit, on verra que, pour mettre en évidence toutes les racines réelles incommensurables d'une équation, et obtenir la partie entière de chacune, il faut, 1° former l'équation aux carrés des différences $Z=0$; 2° déterminer la limite inférieure des racines positives de $Z=0$, et prendre la fraction commensurable $\frac{1}{h}$ immédiatement au-dessous de la racine carrée de cette limite; 3° faire dans la proposée $x=\frac{v}{h}$, ce qui donne la transformée $V=0$; 4° substituer dans $V=0$, à la place de v, les nombres consécutifs 0, 1, 2, 3, ..., -1, -2, -3, ..., compris entre les limites supérieures des racines positives et négatives de cette dernière équation.

Observons d'ailleurs que $\frac{1}{h}$ se tire de $Y=0$, en y posant $y^2=\frac{1}{v}$, et qu'ainsi l'équation $Z=0$ est inutile à former. De plus, dès qu'on a la partie entière des racines de $V=0$, on a les racines de $X=0$, à une fraction $\frac{1}{h}$ près.

579. Par exemple, considérons l'équation $x^3-12x^2+41x-29=0$. Pour avoir l'équation aux carrés des différences, posons $x=a+y$; nous aurons

$$X+X_1y+\tfrac{1}{2}X_2y^2+y^3=0,$$

équation dans laquelle

$$X=a^3-12a^2+41a-29,$$
$$X_1=3a^2-24a+41,$$
$$\tfrac{1}{2}X_2=3a-12.$$

D'après ces valeurs, et en observant que a est une racine de la proposée, il vient

$$a^3-12a^2+41a-29=0,$$
$$\text{et}\quad 3a^2-24a+41+(3a-12)y+y^2=0.$$

Eliminant a entre ces deux équations, on trouvera, pour l'équation aux carrés des différences,

$$y^6-42y^4+441y^2-49=0.$$

Posant $y^2=\frac{1}{u}$, il viendra, pour la transformée, $U=0$,

$$49u^3-441u^2+42u-1=0,\ \text{ou}\ 49u^2(u-9)+42(u-\tfrac{1}{42})=0.$$

On voit que la limite supérieure des racines positives de cette équation, est $u=9$; d'où $y<\frac{1}{3}$. Faisant donc, dans l'équation proposée, $x=\frac{v}{3}$, on aura, pour la transformée $V=0$,

$$v^3-36v^2+369v-783=0.$$

Telle est l'équation qu'il s'agit de résoudre. Elle n'a pas de racines négatives ; et la limite supérieure de ses racines positives, est 36. Faisant donc $v=0, 1, 2, 3, \ldots, 35$, on verra que v est entre 2 et 3, entre 16 et 17, et entre 17 et 18. Donc x est entre 1 et $\frac{2}{3}$, entre $\frac{16}{3}$ et $\frac{17}{3}$, et entre $\frac{17}{3}$ et 6; en sorte que x a deux racines comprises entre 5 et 6, qui n'auraient pas été aperçues sans ce calcul.

La méthode que nous venons d'employer est générale, et ne laisserait rien à désirer, si elle n'entraînait pas dans des calculs tellement laborieux, que, passé le quatrième degré, ils sont impraticables. Mais pour ce qui regarde la théorie, elle est claire, complète et sans embarras, et conduira toujours à la partie entière de chacune des racines de la proposée.

580. Occupons-nous maintenant de la détermination de ces racines, avec un certain degré d'approximation. Il existe pour cela les méthodes de Lagrange, de Newton, de Legendre, de Budan, etc. ; mais nous ne rapporterons que celles de Lagrange et de Newton, qui suffiront au but que nous nous sommes proposé.

Méthode de Lagrange. Soit $X=0$ une équation dont toutes les racines réelles ont une partie entière différente, que l'on suppose déjà déterminée ; soient a et $a+1$ deux nombres entiers consécutifs qui ne comprennent qu'une *seule* racine réelle, dont la partie entière est a : il faut tâcher d'obtenir cette racine par approximation.

Pour cela, faisons $x=a+\frac{1}{y}$, dans l'équation $X=0$, et désignons par $Y=0$ la transformée, qui est de même degré que la proposée, et qui a par conséquent m racines. Une seule de ces m valeurs de y est plus grande que l'unité ; car s'il y en avait plusieurs, alors x ou $a+\frac{1}{y}$, aurait plusieurs valeurs comprises entre a et $a+1$; ce qui est contre l'hypothèse. Il suffira donc de substituer au lieu de y, dans la transformée $Y=0$, la série des nombres naturels 0, 1, 2, 3, 4, ..., et tôt ou tard on aura les nombres b et $b+1$ qui donneront deux résultats de signes contraires; et par conséquent ces deux nombres intercepteront la valeur cherchée de y.

On peut donc faire $y=b+\frac{1}{y'}$, dans $Y=0$, ce qui donnera la transformée $Y'=0$. Cette équation n'aura encore qu'une seule racine positive plus grande que l'unité; et l'on mettra cette racine en évidence par la substitution des nombres naturels 1, 2, 3, 4, ..., dans $Y'=0$. Soient c et $c+1$ les deux nombres qui interceptent la valeur cherchée de y', et soit fait $y'=c+\frac{1}{y''}$, dans $Y'=0$, on aura une nouvelle équation $Y''=0$, sur laquelle il faudra opérer comme sur les précédentes; et ainsi de suite. Par cette manière d'opérer, on obtiendra cette suite de valeurs :

$$x=a+\frac{1}{y},\ y=b+\frac{1}{y'},\ y'=c+\frac{1}{y''},\ y''=d+\frac{1}{y'''},\ \text{etc.};$$

d'où l'on déduira cette fraction continue $x=a, b, c, d$, etc. (Voyez ci-après la théorie des fractions continues.)

Or, on sait que dans une fraction continue, plus on prend de fractions intégrantes, plus on approche de la valeur du nombre réduit en fraction continue; et l'erreur commise est moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur de la dernière réduite employée (598 et 599); donc la méthode précédente donnera la valeur cherchée de x, *avec tel degré d'approximation que l'on voudra*.

581. Appliquons cette méthode à l'équation

$$x^3-6x-7=0.$$

Il faut d'abord déterminer la partie entière. Or, la limite supérieure des racines positives de cette équation, est évidemment 3. Changeant x en $-y$, il vient $y^3-6y+7=0$, équation dont les racines positives ont encore 3 pour limite supérieure; ainsi -3 est le limite supérieure des racines négatives de la proposée. Il faut donc d'abord substituer les nombres 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3 :

$x=0$ donne	-7,	$x=0$ donne	-7,
$x=1$	-12,	$x=-1$	-2,
$x=2$	-11,	$x=-2$	-3,
$x=3$	$+2$,	$x=-3$	-16;

on voit, par ces substitutions, que 2 et 3 sont les seuls nombres qui donnent des signes contraires. Formons l'équation aux carrés des différences ; nous aurons (576)

$$y^6 - 36y^4 + 324y + 459 = 0.$$

Posons $y^2 = \frac{1}{u}$; il en résulte

$$u^3 + \frac{324}{459}u^2 - \frac{36}{459}u + \frac{1}{459} = 0,$$

$$\text{ou} \quad u^3 + \frac{36u}{459}(9u - 1) + \frac{1}{459} = 0 ;$$

or, il est visible que $u = \frac{1}{9}$ rend le premier membre essentiellement positif ; ainsi la limite supérieure l des racines positives de cette équation est < 1 ; d'où l'on peut conclure que $\frac{1}{\sqrt{l}} > 1$. Donc les différences entre les racines réelles de la proposée sont plus grandes que l'unité ; d'ailleurs, la substitution des nombres naturels n'a produit qu'un changement de signe. Donc l'équation proposée n'a qu'une seule racine réelle, comprise entre les deux nombres 2 et 3.

582. Cherchons la valeur approchée de cette racine. Reprenons l'équation $x^3 - 6x - 7 = 0$, et faisons $x = 2 + \frac{1}{y}$; il en résulte $\quad Xy^3 + X_1y^2 + \frac{1}{2}X_2y + 1 = 0,$

et les coefficiens X, X_1 et $\frac{1}{2}X_2$ ont pour valeurs (497)

$$\begin{aligned} X &= (2)^3 - 6(2) - 7 = -11, \\ X_1 &= 3(2)^2 - 6 \cdots\cdots = \quad 6, \\ \tfrac{1}{2}X_2 &= 3(2) \cdots\cdots\cdots\cdots = \quad 6. \end{aligned}$$

Ainsi, la transformée est, en changeant les signes,

$$11y^3 - 6y^2 - 6y - 1 = 0.$$

Pour mettre en évidence la seule racine positive plus grande que l'unité, de cette équation, soit fait $y = 1, 2, 3, \ldots$: $y = 1$ donne -2 et $y = 2$ donne $+51$; ainsi la valeur cherchée est comprise entre 1 et 2. Posons donc $y = 1 + \frac{1}{y'}$; on obtient un résultat de la forme

$$Xy'^3 + X_1y'^2 + \tfrac{1}{2}X_2y' + 11 = 0,$$

$$\begin{aligned} X &= 11(1)^3 - 6(1)^2 - 6(1) - 1 = -2, \\ X_1 &= 33(1)^2 - 12(1) - 6 \cdots\cdots = \quad 15, \\ \tfrac{1}{2}X_2 &= 33(1) - 6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \quad 27, \end{aligned}$$

ce qui donne, pour la transformée, en changeant les signes,

$$2y'^3 - 15y'^2 - 27y' - 11 = 0;$$

comme cette équation revient à $y'^2(2y'-15) - 27y' - 11 = 0$, on doit supposer y' au moins égal à 8, pour obtenir des résultats positifs. Soit donc $y' = 8, 9, 10, \ldots$: $y' = 8$ donne -163, $y' = 9$ fournit -11 et $y' = 10$ donne $+219$; ainsi la valeur de y' est comprise entre 9 et 10.

Posons $y' = 9 + \frac{1}{y''}$; il vient, pour nouvelle transformée,

$$\begin{aligned} &Xy''^3 + X_1 y''^2 + \tfrac{1}{2}X_2 y'' + 2 = 0, \\ &X = 2(9)^3 - 15(9)^2 - 27(9) - 11 = -11, \\ &X_1 = 6(9)^2 - 30(9) - 27 \cdots\cdots = 189, \\ &\tfrac{1}{2}X_2 = 6(9) - 15 \cdots\cdots = 39; \end{aligned}$$

d'où $$11y''^3 - 189y''^2 - 39y'' - 2 = 0,$$

ou $$y''^2(11y'' - 189) - 39y'' - 2 = 0;$$

$y'' = 17$ donne -1243 et $y'' = 18$ fournit $+2212$; ainsi la valeur de y'' est comprise entre 17 et 18.

Rapprochons actuellement les équations

$$x = 2 + \frac{1}{y},\ y = 1 + \frac{1}{y'},\ y' = 9 + \frac{1}{y''},\ y'' = 17 + \frac{1}{y'''};$$

on obtient la fraction continue

$$x = 2,\ 1,\ 9,\ 17,\ \text{etc.}$$

Les quatre premières réduites sont $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{29}{10}$, $\frac{496}{171}$; la troisième réduite $\frac{29}{10}$, ou 2,9, donne un degré d'approximation marqué par $\frac{1}{10 \times 171}$, ou $\frac{1}{1710}$; c'est-à-dire que 2,9 représente la vraie valeur de x à 0,001 près; la quatrième réduite $\frac{496}{171}$, ou 2,9005, exprime la valeur de x, à $\frac{1}{(171)^2}$, ou à 0,0001 près; et en effet, si dans la proposée $x^3 - 6x - 7 = 0$, on fait successivement $x = 2,9005$ et $x = 2,9006$, on obtient deux résultats de signes contraires.

583. La méthode d'approximation que nous venons d'employer, suppose que l'équation proposée n'ait pas plusieurs racines comprises entre deux nombres entiers consécutifs n et $n + 1$. Mais si cela était, il faudrait commencer par transformer l'équation dont il s'agit en une autre dont les différences des

racines fussent toutes plus grandes que l'unité; ce qu'on peut faire en posant $x = \frac{y}{h}$, puis en donnant à h les valeurs 2, ou 3, ou 4, ou 5, etc. C'est même là un moyen d'éviter la formation de l'équation *aux carrés des différences*, si souvent impraticable par la longueur des calculs qu'elle exige.

584. Considérons, par exemple, l'équation

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Les limites supérieures des racines positives et négatives étant $+1$ et -1, on voit que si cette équation a plusieurs racines réelles, leurs différences seront moindres que l'unité. Ainsi, pour mettre ces racines en évidence, il faudrait recourir à l'équation *aux carrés des différences*, qui est

$$64y^6 - 288y^4 + 324y^2 - 81 = 0.$$

Mais on peut éviter la formation de cette équation, en posant dans la proposée, $x = \frac{y}{2}$; car alors la transformée étant

$$y^3 - 3y - 1 = 0,$$

on trouve que cette transformée a ses trois racines réelles, l'une entre 1 et 2, l'autre entre 0 et -1, et la troisième entre -1 et -2.

Appliquant donc la méthode de Lagrange, on trouvera, à moins de 0,0001 près,

$$y = 1{,}8794,\ y = -0{,}3474 \text{ et } y = -1{,}5320;$$
d'où $x = 0{,}9397,\ x = -0{,}1737$ et $x = -0{,}7660$.

585. ***Méthode de Newton.*** Soient p et $p+1$ deux nombres qui interceptent une *seule* racine positive de l'équation $X = 0$. Si l'on fait $x = q$, q étant entre p et $p+1$, on jugera par le signe du résultat, si la racine est comprise entre p et q, ou entre q et $p+1$. Supposons que le premier de ces cas ait lieu. Faisant de nouveau $x = q'$, q' étant entre p et q, on saura si la racine est entre p et q', ou entre q' et q; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une valeur a qui ne diffère pas de 0,1 de celle de x. En désignant par y l'erreur, on a $x = a + y$. Introduisons ce binome dans la proposée $X = 0$, ou $Nx^m + Px^{m-1} + \cdots + Tx + U = 0$; nous aurons

$$X + X_1 y + \tfrac{1}{2} X_2 y^2 + \cdots + N y^m = 0.$$

Mais y est par supposition une petite quantité; la méthode de Newton consiste à regarder les termes affectés de y^2, y^3, ..., comme assez petits pour pouvoir être négligés ; ce qui réduit la transformée à $X + X_1 y = 0$; d'où $y = -\frac{X}{X_1}$, ou

$$y = -\frac{Na^m + Pa^{m-1} + \dots + Ta + U}{mNa^{m-1} + (m-1)Pa^{m-2} + \dots + T} \dots (1).$$

Appelons a' cette fraction, ou seulement sa valeur approchée ; nous aurons $x = a + a'$ pour seconde approximation. Faisant $a + a' = b$, et $x = b + y'$, y' sera donné par la fraction (1), après y avoir remplacé a par b ; et ainsi de suite.

586. Soit l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$; si l'on y substitue pour x la série des nombres entiers 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3, on trouve que $x = 2$ et $x = 3$ donnent -1 et $+16$; donc il y a une racine réelle positive entre 2 et 3, plus proche de 2 que de 3. Comme $x = 2,1$ donne 0,061, on reconnaît que 2,1 est plus grand que x, et plus voisin de la racine que 2. Ainsi, 2,1 est la valeur de cette racine, à moins de 0,1 près. Faisant $a = 2,1$, dans la fraction (1), il vient

$$y = -\frac{a^3 - 2a - 5}{3a^2 - 2} = -\frac{0{,}061}{11{,}23} = -0{,}0054.$$

Ainsi, en se bornant aux dix-millièmes, on a $x = 2,0946$. Faisons de nouveau $a = 2,0946$; nous aurons

$$y = -\frac{0{,}000541550536}{11{,}16204748} = -0{,}00004851.$$

Ainsi la quatrième décimale était défectueuse, et on trouve $x = 2,09455149$. On pourrait de même pousser le calcul plus loin, corriger les dernières décimales, ou s'assurer de leur exactitude.

587. Cet exemple suffit pour donner une idée de la méthode de Newton et de l'approximation rapide qu'elle fournit. Cependant cette méthode est quelquefois en défaut, ainsi que Lagrange le prouve dans son *traité de la résolution des équations numériques*, et auquel nous renvoyons. Mais comme les cas d'exception sont rares et se manifestent en fournissant des valeurs successives, d'abord croissantes, puis décroissantes, ou réciproquement, on l'emploie ordinairement à cause de sa grande facilité.

On a d'ailleurs un moyen de s'assurer, à la fin de chaque opération, si la méthode a donné le degré d'approximation que l'on désirait; car si après avoir remplacé l'inconnue x par la valeur trouvée, on substitue ensuite cette valeur augmentée ou diminuée d'une unité de la dernière décimale, et que la seconde substitution donne un signe contraire à celui fourni par la première, il est clair que la valeur cherchée sera comprise entre les deux nombres substitués. S'il n'y avait pas de changement de signes, il faudrait augmenter ou diminuer le dernier chiffre décimal, jusqu'à ce qu'on parvînt à deux résultats de signes différens.

588. La méthode d'approximation de Lagrange, quoiqu'en général moins expéditive que celle de Newton, a sur celle-ci l'avantage de donner à chaque opération une approximation toujours certaine : elle peut servir à trouver exactement les racines commensurables, même lorsque quelques-uns des coefficiens sont irrationnels; tandis qu'il n'en est pas de même de la méthode de Newton.

En appliquant l'une ou l'autre méthode à l'équation

$$x^3 - 5x - 3 = 0,$$

on trouvera $x = 2{,}4908$, $x = -0{,}6566$ et $x = -1{,}8342$. De même, en résolvant l'équation

$$3x^6 + 16x^5 - 24x^4 - 238x^3 - 259x^2 + 174x + 72 = 0,$$

ou aura $x = -3$, $x = -3$. $x = \frac{2}{3}$, $x = 3{,}7505$, $x = -0{,}3099$ et $x = -3{,}4405$.

589. Nous terminerons ce que nous avions à dire sur la résolution des équations numériques, en observant qu'on peut toujours réduire à de telles équations, les *équations homogènes* qui ne renferment que deux lettres a et x. Par exemple, soit l'équation homogène

$$x^4 + ax^3 - 7a^2x^2 - a^3x + 6a^4 = 0;$$

si l'on fait, dans cette équation, $x = ay$, elle deviendra

$$y^4 + y^3 - 7y^2 - y + 6 = 0.$$

Cette équation numérique donne $y = 1$, -1. 2 et -3; donc il en résulte $x = a$, $-a$, $2a$ et $-3a$.

De même, en faisant $x = ay$, l'équation $x^m - a^m = 0$ devient $y^m - 1 = 0$.

Des fractions continues.

590. On appelle *fraction continue*, une expression composée d'un entier (qui peut être o), plus une fraction qui a pour numérateur l'unité et pour dénominateur un nombre entier, plus une fraction qui a elle-même pour numérateur l'unité et pour dénominateur un entier, plus une fraction formée de la même manière, et ainsi de suite. Telle est l'expression

$$x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9 + \text{etc.}}}}}$$

Nous appellerons *termes* de la fraction continue, les nombres entiers 2, 3, 4, 7, 9, etc. : les fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, etc., sont nommées *fractions intégrantes*.

591. *Pour réduire une fraction ordinaire en fraction continue, il faut diviser le numérateur par le dénominateur, celui-ci par le premier reste, le premier reste par le second, le second par le troisième, et ainsi de suite : les quotiens successifs seront les termes de la fraction continue demandée.*

En effet, soit $x = \frac{a}{b}$ la fraction proposée; soient u, u', u'', u''', etc., les quotiens successifs, et r, r', r'', r''', etc. les restes correspondans; on aura évidemment

$$\begin{aligned}
x &= \frac{a}{b} = u + \frac{r}{b} = u + \frac{1}{b:r},\\
b:r &= u' + \frac{r'}{r} = u' + \frac{1}{r:r'},\\
r:r' &= u'' + \frac{r''}{r'} = u'' + \frac{1}{r':r''},\\
r':r'' &= u''' + \frac{r'''}{r''} = u''' + \frac{1}{r'':r'''},\\
&\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Substituant chaque valeur dans celle qui la précède immédiatement, il en résulte

$$x = u + \cfrac{1}{u' + \cfrac{1}{u'' + \cfrac{1}{u''' + \text{etc.}}}}$$

592. Désormais nous écrirons cette fraction continue sous la forme abrégée et plus commode

$$x = u,\ u',\ u'',\ u''',\ \ldots,\ z,\ z',\ z'',\ \text{etc.}$$

z, z', z'', etc. seront des termes successifs de *rangs* quelconques. Si donc on réduit $x = \frac{65}{149}$ en fraction continue, on trouvera

$$x = 0,\ 2,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2.$$

593. Voyons maintenant comment on convertit une fraction continue en fraction ordinaire. D'abord, si l'on arrête la fraction continue successivement aux termes

$$u,\ u',\ u'',\ u''',\ \ldots,\ z,\ z',\ z'',\ \text{etc.},$$

on aura successivement pour x des fractions que nous désignerons par

$$\frac{a}{a'},\ \frac{b}{b'},\ \frac{c}{c'},\ \frac{d}{d'},\ \ldots,\ \frac{m}{m'},\ \frac{n}{n'},\ \frac{p}{p'},\ \text{etc.}$$

ces fractions sont appelées *réduites* ou *convergentes*.

Il est facile de s'assurer qu'on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{u}{1},\ \frac{b}{b'} = \frac{uu'+1}{u'} \text{ et } \frac{c}{c'} = \frac{uu'u''+u''+u}{u'u''+1}.$$

On voit que, pour avoir le numérateur de $\frac{c}{c'}$, il suffit de multiplier $uu'+1$ par u'' et d'ajouter u au produit ; que pour avoir le dénominateur, on multiplie u' par u'' et on ajoute 1 au produit. Donc on est conduit à cette *loi* de formation :

Le numérateur d'une réduite quelconque se trouve en multipliant le terme auquel on arrête la fraction continue, par le numérateur de la réduite précédente et en ajoutant au produit le numérateur de la réduite qui précède de deux rangs celle que l'on veut former. Le dénominateur s'obtient d'après la même loi, au moyen des deux dénominateurs précédens. Cette loi s'étend d'ailleurs à toute la série des convergentes.

En effet, supposons que cette loi soit vérifiée pour trois réduites consécutives quelconques $\frac{m}{m'}$, $\frac{n}{n'}$, $\frac{p}{p'}$; de manière que z'' étant

l'entier auquel on a terminé la fraction continue pour avoir $\frac{p}{p'}$, on ait
$$p = nz'' + m \quad \text{et} \quad p' = n'z'' + m'.$$

Prenons un nouveau terme z''' et soit $\frac{q}{q'}$ la réduite qui en proviendra ; on aura donc

$$\frac{p}{p'} = u,\, u',\, u'',\, \ldots,\, z,\, z',\, z'', \text{ et } \frac{q}{q'} = u,\, u',\, u'',\, \ldots,\, z,\, z',\, z'',\, z'''.$$

On voit que l'on passera de la valeur de $\frac{p}{p'}$ à celle de $\frac{q}{q'}$, en remplaçant z'' par $z'' + \frac{1}{z'''}$; il viendra par conséquent

$$\frac{q}{q'} = \frac{n\left(z'' + \frac{1}{z'''}\right) + m}{n'\left(z'' + \frac{1}{z'''}\right) + m'} = \frac{(nz'' + m)\, z''' + n}{(n'z'' + m')\, z''' + n'} = \frac{pz''' + n}{p'z''' + n'}.$$

Ainsi $\frac{q}{q'}$ se déduit des deux réduites précédentes $\frac{n}{n'}$ et $\frac{p}{p'}$, d'après la loi énoncée plus haut. Donc, si cette loi est démontrée pour trois réduites consécutives quelconques, elle aura lieu également pour la réduite suivante. Or, cette même loi est vérifiée pour les trois premières réduites ; donc elle a lieu pour la quatrième, puis pour la cinquième, la sixième, et en général, pour toutes les réduites.

Au moyen de cette loi, si l'on a la fraction continue $x = 2$, 1, 3, 2, 4, on trouve cette suite de réduites : $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{25}{9}$, $\frac{111}{40}$. La dernière est précisément la valeur de x.

594. D'après la loi que l'on vient d'établir, on aura toujours $p = nz'' + m$ et $p' = n'z'' + m'$. Donc *les deux termes de chaque réduite sont respectivement plus grands que ceux de la réduite précédente.*

595. En substituant les valeurs précédentes de p et de p' dans $pn' - np'$, on aura
$$\frac{p}{p'} - \frac{n}{n'} = \frac{pn' - np'}{p'n'} = \frac{mn' - nm'}{p'n'};$$
d'ailleurs
$$\frac{n}{n'} - \frac{m}{m'} = \frac{nm' - mn'}{m'n'}.$$

Donc on voit que, *si l'on retranche chaque réduite de celle qui la suit immédiatement, les numérateurs de deux différences consécutives seront égaux et de signes contraires.*

Mais $\frac{uu'+1}{u'} - \frac{u}{1} = \frac{1}{u'}$; ainsi le numérateur de la première différence est 1; donc, d'après ce qu'on vient de voir, le numérateur de la seconde différence est -1; celui de la troisième est 1; celui de la quatrième -1; et en général, *le numérateur d'une différence quelconque est* 1 *ou* -1, *suivant que la seconde des réduites que l'on considère est de rang pair ou de rang impair.*

596. Il suit de là qu'*une réduite quelconque* $\frac{p}{p'}$ *est toujours irréductible.* Car si p et p' avaient un diviseur commun h; comme d'ailleurs, d'après le principe précédent, on a $pn'-np' = 1$, il viendrait, en divisant de part et d'autre par h,

$$\frac{p}{h}n' - n\frac{p'}{h} = \frac{1}{h};$$

et un nombre entier serait égal à une fraction; ce qui est absurde. Ainsi, *la dernière réduite est toujours la plus simple expression de la fraction ordinaire qui a fourni la fraction continue.*

597. Les réduites sont alternativement plus petites et plus grandes que le nombre x réduit en fraction continue. En effet, l'expression de x, dans le n° 591, montre d'abord que $\frac{u}{1} < x$. Mais si l'on arrête la fraction continue au terme u', ce terme sera trop petit; donc $\frac{1}{u'}$ sera trop grand, ainsi que $u + \frac{1}{u'} = \frac{uu'+1}{u'}$. Donc la seconde réduite est plus grande que x. On verra de même que la troisième réduite est $< x$, la quatrième $> x$, et ainsi de suite. En général, à cause de

$$\frac{p}{p'} = \frac{nz''+m}{n'z''+m'} = u,\ u',\ u'',\ \ldots,\ z,\ z',\ z'',$$

si l'on remplace z'' par la valeur y de la fraction continue, prise depuis z'' jusqu'à la fin, d'où $y = z'', z''',$ etc., il est clair qu'au lieu d'avoir une réduite, on aura la valeur totale x de la fraction continue, et qu'il viendra

$$x = \frac{ny+m}{n'y+m'}.$$

Or, $\frac{m}{m'}$ et $\frac{n}{n'}$ sont deux réduites consécutives : supposons que la première soit de rang impair et la seconde de rang pair; on aura donc $nm' - mn' = 1$ (595) ou $nm'y - mn'y = y$. Avec ces valeurs on trouve

$$\left.\begin{array}{l} x - \dfrac{m}{m'} = \dfrac{ny+m}{n'y+m'} - \dfrac{m}{m'} = \dfrac{y}{m'(n'y+m')} \\ \dfrac{n}{n'} - x = \dfrac{n}{n'} - \dfrac{ny+m}{n'y+m'} = \dfrac{1}{n'(n'y+m')} \end{array}\right\} \cdots (1).$$

Ainsi l'on voit que $x > \frac{m}{m'}$ et $< \frac{n}{n'}$. Si $\frac{m}{m'}$ était de rang pair et $\frac{n}{n'}$ de rang impair, on aurait d'abord $mn' - nm' = 1$, et ensuite $x < \frac{m}{m'}$ et $x > \frac{n}{n'}$. Donc, en général, *la valeur totale de la fraction continue est toujours comprise entre deux réduites consécutives quelconques : elle est plus grande que chaque réduite de rang impair et plus petite que chaque réduite de rang pair.*

598. Il est clair que $y > 1$; et comme d'ailleurs $n' > m'$ (594), on voit par les différences (1), qu'on a, $x - \frac{m}{m'} > \frac{n}{n'} - x$; donc $\frac{n}{n'}$ est plus approché de x que $\frac{m}{m'}$. Donc les *réduites successives approchent de plus en plus de la valeur du nombre réduit en fraction continue :* et c'est de là qu'elles tirent leur nom de *convergentes.*

599. Puisque $y > 1$, il s'ensuit que $n'(n'y + m') > n'(n' + m')$; et par suite, la seconde différence (1) donne

$$\frac{n}{n'} - x < \frac{1}{n'(n'+m')};\ \text{d'où}\ \frac{n}{n'} - x < \frac{1}{n'n'}\ \text{et}\ x = \frac{n}{n'} - < \frac{1}{n'n'}.$$

Ainsi *l'erreur commise en prenant une réduite pour la valeur totale de la fraction continue, est toujours moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur de cette réduite.*

600. Soient $\frac{m}{m'}$, $\frac{n}{n'}$ deux réduites consécutives, et soit $\frac{t}{t'}$ une fraction comprise entre elles ; je dis que $\frac{t}{t'}$ est plus compliquée que ces deux réduites. En effet, puisque $\frac{t}{t'}$ est comprise entre les deux réduites proposées, $\frac{t}{t'}$ diffère moins de l'une de ces deux réduites que celles-ci ne diffèrent entre elles ; on a donc (595)

$$\frac{tm' - mt'}{m't'} < \frac{1}{m'n'}\quad \text{et}\quad \frac{nt' - tn'}{n't'} < \frac{1}{m'n'}.$$

On ne saurait avoir $tm' = mt'$, puisqu'alors en divisant de part et d'autre par $m't'$, il viendrait $\frac{t}{t'} = \frac{m}{m'}$, ce qui est contre l'hypothèse. Donc les numérateurs $tm' - mt'$ et $nt' - tn'$ ne sont pas nuls ; et comme ils sont nécessairement entiers, ils valent 1, au moins ; ce qui exige qu'on ait $m't' > m'n'$ et $n't' > m'n'$, ou $t' > n'$ et $t' > m'$.

A cause de $\frac{t}{t'} > \frac{m}{m'}$ et de $\frac{t}{t'} < \frac{n}{n'}$, il vient $\frac{t'}{t} < \frac{m'}{m}$ et $\frac{t'}{t} > \frac{n'}{n}$; donc la fraction $\frac{t'}{t}$ est comprise entre les deux $\frac{m'}{m}$ et $\frac{n'}{n}$. Par conséquent, on a aussi $t > n$ et $t > m$. Donc la fraction $\frac{t}{t'}$ est plus compliquée que les deux réduites $\frac{m}{m'}$ et $\frac{n}{n'}$. Donc toute fraction plus simple que ces deux réduites, ne saurait tomber entre elles. Donc enfin, *chaque réduite approche plus de la valeur totale* x *de la fraction continue, que toute autre fraction conçue en termes plus simples.*

601. Les fractions continues doivent leur naissance à l'évaluation approchée des fractions dont les termes sont trop considérables et premiers entre eux. Pour en montrer l'usage, considérons la fraction $x = \frac{314159}{100000}$. Si l'on réduit cette expression en fraction continue, on trouvera (591)

$$x = 3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 25,\ 1,\ 7,\ 4.$$

Ainsi les réduites consécutives seront (593) :

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{9208}{2931},\ \frac{9563}{3044},\ \frac{76149}{24239},\ \frac{314159}{100000}.$$

En prenant d'abord $\frac{22}{7}$ pour la valeur du nombre proposé, on commettrait une erreur moindre que $1 : 7(7+1)$ ou que $\frac{1}{56}$ (599) ; mais cette réduite donne encore une approximation plus considérable ; car x étant compris entre $\frac{22}{7}$ et $\frac{333}{106}$, il s'ensuit que $\frac{22}{7}$ diffèrent de x d'une quantité $< \frac{22}{7} - \frac{333}{106}$ ou $\frac{1}{742}$; ainsi l'erreur commise est beaucoup moindre que $\frac{1}{100}$.

La quatrième réduite $\frac{355}{113}$, qui n'est guère plus compliquée que la troisième, donne une valeur bien plus approchée ; car x étant compris entre $\frac{355}{113}$ et $\frac{9208}{2931}$, il s'ensuit que $x = \frac{355}{113}$, à moins de $\frac{1}{113 \times 2931}$ près, c'est-à-dire, à moins de 0,00001 près. Les réduites suivantes sont trop compliquées pour être substituées avec avantage à la fraction proposée. Cette fraction est d'ailleurs le rapport approché de la circonférence à son diamètre, comme on le voit en géométrie.

602. On peut réduire un nombre donné en fraction continue, par un procédé qu'il est bon de connaître. Soit a le nombre donné et a' sa partie entière ; le reste $a-a'$ étant <1, le quotient b de 1 par $a-a'$ sera >1. Soit b' la partie entière de b ; le reste $b-b'$ sera donc <1, et le quotient c de 1 par $b-b'$ sera >1. Soit c' la partie entière de c ; le reste $c-c'$ étant <1, le quotient d de 1 par $c-c'$ sera >1 ; et ainsi de suite. On a par conséquent

$$b=\frac{1}{a-a'},\quad c=\frac{1}{b-b'},\quad d=\frac{1}{c-c'},\quad e=\frac{1}{d-d'},\ \text{etc.}$$

Ces équations donnent

$$a=a'+\frac{1}{b},\quad b=b'+\frac{1}{c},\quad c=c'+\frac{1}{d},\quad d=d'+\frac{1}{e},\ \text{etc.}$$

Ainsi on a cette fraction continue :

$$a=a',\ b',\ c',\ d',\ e',\ \text{etc.}$$

603. Cette méthode s'applique aussi aux racines carrées irrationnelles. Mais alors, pour évaluer la partie entière de chaque quotient, il faut multiplier les deux termes de ce quotient par ce que devient son diviseur en y changeant le signe du terme *soustractif*. Par exemple, cherchons à réduire $\sqrt{3}$ en fraction continue : on aura donc $a=\sqrt{3}$. La partie entière de a est évidemment $a'=1$; d'où $a-a'=\sqrt{3}-1$, puis $a=1+\frac{1}{b}$ et $b=\frac{1}{\sqrt{3}-1}$.

Multipliant les deux termes de ce quotient par $\sqrt{3}+1$, il ne changera pas de valeur ; et comme $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)=(\sqrt{3})^2-1=3-1=2$, il viendra

$$b=\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}+1).$$

On voit que la partie entière de b est $b'=1$; d'où $b-b'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)-1=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$, puis $b=1+\frac{1}{c}$ et $c=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}+1$.

Il est clair que la partie entière de c est $c'=2$; ce qui donne $c-c'=\sqrt{3}-1$, puis $c=2+\frac{1}{d}$ et $d=\frac{1}{\sqrt{3}-1}$.

Cette valeur de d est absolument la même que celle de b ; donc, puisqu'on a trouvé $b=1+\frac{1}{c}$ et $c=2+\frac{1}{d}$, on obtiendra de même $d = 1 + \frac{1}{e}$, $e = 2 + \frac{1}{f}$, et ainsi de suite, à l'infini. On a par conséquent cette fraction continue *périodique* :

$$\sqrt{3} = 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2, \text{ etc. à l'infini.}$$

On trouverait de même $\sqrt{2} = 1,\ 2,\ 2,\ 2$, etc. à l'infini, et $\sqrt{5} = 2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4$, etc. à l'infini.

604. Cherchons maintenant les nombres générateurs des fractions continues périodiques. Comme les *périodes* de ces fractions peuvent être composées d'une, de deux, de trois, de quatre, ..., fractions intégrantes, soit d'abord $x = a,\ b,\ b,\ b,\ b,\ b$, etc. ; nous aurons

$$x - a = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}}$$

Puisque le nombre de fractions intégrantes est infini, il est clair que tout ce qui suit le dénominateur b de la première, forme une fraction continue parfaitement égale à celle dont la valeur est $x - a$; on a par conséquent

$$x - a = \frac{1}{b + x - a}\,;\ \text{d'où}\ (x-a)^2 + b(x-a) = 1.$$

Résolvant cette équation du second degré, on en déduira la formule

$$a,\ b,\ b,\ b,\ b,\ b, \text{ etc.} = a - \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4}.$$

Soit maintenant $x = a,\ b,\ c,\ b,\ c,\ b,\ c,\ b,\ c$, etc. Si l'on raisonne comme dans le cas précédent, on verra que

$$a,\ b,\ c,\ b,\ c,\ b,\ c,\ b,\ c, \text{ etc.} = a - \tfrac{1}{2}c + \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + \frac{c}{b}}.$$

Enfin, si l'on pose

$$x = a,\ b,\ c,\ d,\ b,\ c,\ d,\ b,\ c,\ d,\ b,\ c,\ d, \text{ etc.},$$
$$y = a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ b,\ c,\ d,\ e,\ b,\ c,\ d,\ e, \text{ etc.},$$

on verra que les valeurs x et y de ces fractions continues périodiques sont données par les équations

$$(bc+1)(x-a)^2 + (bcd + b + d - c)(x-a) = cd + 1 \quad \text{et}$$
$$(bcd + b + 1)(y-a)^2 + (bcde + bc + be + de - cd)(y-a)$$
$$= cde + c + e.$$

Au moyen des formules précédentes, il est aisé de s'assurer qu'on a

$$3, 6, 6, 6, 6, 6, \text{etc.} = \sqrt{10};$$
$$2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \text{etc.} = \sqrt{6};$$
$$3, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, \text{etc.} = \sqrt{11};$$
$$1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, \text{etc.} = \sqrt{\tfrac{5}{2}},$$
et $2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \text{etc.} = \sqrt{7}.$

On peut vérifier ces résultats en opérant comme au n° 603.

605. Les propriétés des fractions continues fournissent une méthode pour calculer les solutions entières de l'équation

$$ax + by = c, \ldots (1)$$

a, b, c, étant des nombres entiers, positifs ou négatifs, et a et b premiers entre eux (183). En effet, convertissons la fraction $\frac{b}{a}$ en fraction continue, et soit $\frac{q}{p}$ la réduite qui précède la dernière $\frac{b}{a}$; nous aurons (595)

$$aq - bp = \pm 1; \text{ d'où } acq - bcp = \pm c.$$

1° Si $aq - bp = +1$, on aura $acq - bcp = c$; donc l'une des solutions entières de l'équation (1) sera $x = cq$ et $y = -cp$. Ainsi les autres solutions se déduiront des formules (186)

$$x = cq - bu \text{ et } y = au - cp.$$

2° Si $aq - bp = -1$, il viendra $-acq + bcp = c$; donc l'une des solutions entières de l'équation (1) sera $x = -cq$ et $y = cp$. Les autres solutions sont déterminées par les formules

$$x = bu - cq \text{ et } y = cp - au.$$

Par exemple, si l'on a l'équation $31x + 7y = 45$, on convertira $\frac{7}{31}$ en fraction continue; ce qui donnera 0, 4, 2, 3. Les réduites seront donc $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{9}$ et $\frac{7}{31}$. Ainsi on aura $a = 31$, $b = 7$, $c = 45$; $p = 9$ et $q = 2$; d'où $aq - bp = -1$ et

$$x = 7u - 90, \; y = 405 - 31u.$$

On résoudrait de même l'équation $29x + 17y = 250$.

Problèmes divers.

On propose de démontrer, 1° que si l'on ajoute 5 au carré de tout nombre non multiple de 3, la somme sera divisible par

3; 2° que si l'on ajoute 5 au carré de tout nombre premier plus grand que 3, la somme sera divisible par 6.

Quels sont les deux nombres entiers x et y dont le produit est divisible exactement par la somme? (R. Il y a une infinité de ces nombres, qu'on trouvera en désignant d'abord par d le p. g. c. d. de x et y, etc.)

A dimensions égales, le drap de Sedan ne vaut que les $\frac{6}{7}$ du drap de Verviers. Si les prix de ces draps venaient à diminuer, de manière que celui de Verviers coûtât 10^f de moins par aune, 100 aunes de drap de Sedan à $\frac{7}{8}$ coûteraient alors autant que 96 aunes de drap de Verviers à $\frac{5}{8}$, avant la diminution. Quel était à cette époque, le prix d'une aune de drap de Verviers à $\frac{5}{8}$? (R. 50^f.)

Un bâton est en partie plongé dans l'eau et en partie hors de l'eau. Si on le retire de a palmes, la partie dans l'eau vaudra b fois l'autre, et si on l'enfonce de c palmes, la partie hors de l'eau vaudra d fois la seconde. On demande la longueur du bâton?

Il y a 2 ans l'âge d'un père était quadruple de celui de son fils, et dans 10 ans il n'en sera plus que le double. Quels sont leurs âges actuels? (R. 26 et 8 ans.)

Des joueurs conviennent que l'enjeu sera 1^f; le jeu étant terminé, deux joueurs se retirent l'un avec 39^f de gain et l'autre avec 1^f de perte : aussi le premier a-t-il gagné 10 parties et le second seulement 2. Combien y avait-il de joueurs et combien ont-ils joué de parties? (R. 5 joueurs et 11 parties, valeurs qui ne satisfont pas à l'énoncé.)

Trois joueurs de force inégale, conviennent que le gagnant recevra des deux autres, savoir : a francs si ce gagnant est le premier joueur, b francs si c'est le second, et c francs si c'est le troisième. Après d parties, ils sont dans le même cas que s'ils entraient au jeu. Quel est le nombre de parties gagnées par chaque joueur?

On a payé respectivement a, b et c florins à trois troupes d'ouvriers, dont les deux dernières contiennent chacune 2 ouvriers de moins que la première, l'une ayant travaillé 3 jours de moins et l'autre 3 jours de plus que cette première. Combien y avait-il d'ouvriers en tout?

La somme des quatre chiffres d'un nombre inconnu est 17;

si l'on supprime successivement le premier, le second et le troisième chiffre à droite, les nombres résultans, retranchés du proposé, donneront respectivement les restes 6358, 6360 et 6300. Quel est ce nombre? (R. 7064.)

Quel est le nombre dont la racine cubique est le tiers de la racine carrée? (R. 729.)

Démontrer que si les quatre nombres a, b, c, d, sont proportionnels, les deux expressions $a+b+\sqrt{ab}$ et $c+d+\sqrt{cd}$ auront pour somme $a+b+c+d+\sqrt{(a+c)(b+d)}$, et pour différence $a+b-c-d+\sqrt{(a-c)(b-d)}$. La première propriété a lieu dans toute suite de rapports égaux.

Des droites situées dans un même plan, de manière qu'il n'en existe point de parallèles ni plus de deux concourant au même point, se rencontrent en 21 points; quel est ce nombre de droites? (R. 7.)

Partager le nombre donné a en quatre parties proportionnelles, dont le produit soit un maximum.

Quels doivent être les deux facteurs d'un produit donné a, pour qu'en divisant chacun par la racine carrée de l'autre, la somme des deux quotiens soit un minimum? Ou pour qu'en divisant le cube de chacun par l'autre, la somme des quotiens soit la moindre possible?

Quel nombre n d'années a-t-il fallu à un particulier pour avoir 781 pigeons? On sait que chaque année il a acheté un nombre de pigeons femelles égal au rang de cette année, et que chaque pigeon femelle acheté une année, a produit chaque année suivante un nombre de pigeons mâles égal au rang de cette année suivante, à partir de celle de l'achat.

On trouve l'équation résoluble comme celles du 2ᵉ degré :

$$\tfrac{1}{24}n(n+1)[n(n+1)+10]=781.$$

Partager le nombre donné a en trois parties telles, qu'en divisant par chacune d'elles la somme des deux autres, la somme des trois quotiens soit un minimum.

Combien y a-t-il de plans qui se rencontrent en 220 points, sachant qu'il n'en existe pas de parallèles ni plus de trois concourant au même point? (R. 12.)

Résoudre l'équation $x^4-ax^3-(b+7)x^2+7ax+a^2b=0$, où a et b sont inconnus et dont le premier membre se réduit à 24 ou à -24, suivant qu'on y suppose $x=1$ ou $x=3$.

Etant donné un polynome réciproque du 4^me degré, comme $12x^4+8x^3+41x^2+8x+12$, décomposer ce polynome en deux facteurs du second degré tels, que les coefficiens de l'un soient ceux de l'autre, écrits dans un ordre rétrograde.

Plusieurs particuliers, au nombre de n, sont convenus que chacun achetera chaque année un nombre de pigeons femelles égal au produit du rang de cette année par celui de l'acheteur. Et comme on suppose que chaque pigeon femelle acheté ou né une année produit un pigeon femelle chaque année suivante, on demande combien ces particuliers auront de pigeons femelles au bout de m années?

Réponse : $\frac{1}{2}n(n+1)[2^{m+1}-(m+2)]$.

Quel est le nombre de choses dont le nombre de combinaisons 3 à 3 vaut 5 fois celui des combinaisons 6 à 6? (R. 7.)

Quelle est la somme de tous les nombres de combinaisons que l'on peut former en prenant n choses 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, ..., n à n? (R. 2^n-1.)

Résoudre l'équation $ax^6-(2a+b+2)x^4-(a+2b)x^3+cx^2+(2c+10)x+36=0$, dont le premier membre est le carré exact de px^3-qx-6 : les nombres a, b, c, p et q étant d'ailleurs inconnus.

Soient S_1, S_2, S_3, S_4, ..., les sommes des puissances 1^re, 2^e, 3^e, 4^e, ..., des racines a, b, c, d, ..., l, d'une équation $X=0$ du degré m en x; si on divise le polynome X successivement par $x-a$, $x-b$, $x-c$, ..., $x-l$ (486), la somme des quotiens sera la dérivée X_1 de X (539). On aura donc ainsi une identité qui établira les relations existantes entre les coefficiens de $X=0$ et les sommes S_1, S_2, S_3, S_4, etc. On propose de calculer ces relations, d'après la méthode que l'on vient d'indiquer.

(Voyez les Mélanges d'algèbre, pour un plus grand nombre d'applications et d'exercices, propres à exciter la curiosité et l'intérêt.)

FIN.

Note I.

Sur les quantités négatives isolées.

« Les quantités négatives naissent de l'extension et de la généralité que l'on accorde volontairement aux opérations et aux formules algébriques ; en sorte qu'en admettant à *priori* ces quantités et en les soumettant aux mêmes règles de calcul que les nombres absolus, les formules deviennent par là générales et applicables à toutes les valeurs des lettres ou des quantités indéterminées qui les composent.

Mais l'algèbre n'opérant que sur des grandeurs indéterminées, sur des signes abstraits, il est même absolument impossible qu'elle ne traite pas les quantités négatives, et en général, les êtres de non existence, comme s'ils étaient absolus et réels ; car les lettres n'ayant, par elles-mêmes, aucune valeur significative et explicite, il est également impossible de distinguer, dans le cours des raisonnemens et des transformations du calcul, si a, par exemple, est plus petit ou plus grand que b ; ainsi quel que soit l'ordre de grandeur de ces deux quantités, on sera, malgré soi, entraîné à raisonner et à opérer sur les expressions $a-b$, $\sqrt{a-b}$, etc., comme si c'étaient toujours des quantités positives et absolues, quels que soient a et b. Or, cela arrive non-seulement quand on emploie les signes et les notations de l'algèbre, mais aussi toutes les fois qu'en raisonnant sur des grandeurs, on fait abstraction de leur valeur numérique et absolue : c'est ce qui arrive, en particulier, dans la géométrie, lorsque la figure se complique ou que les rapports qui en lient les parties se multiplient, parce qu'il n'est plus possible alors de discerner, au simple coup-d'œil, l'ordre de grandeur et de situation de ces parties. C'est encore ce qui a lieu quand certaines de ces parties sont l'objet d'une recherche faite sur la figure, et qu'on les suppose inconnues à la fois de grandeur et de situation. Enfin, et c'est sur-tout ce qui arrive quand on fait abstraction de la figure ou qu'on se dispense de la décrire ; de là cette généralité des conceptions et cette grande extension de la géométrie, qui considère les objets dans l'espace, et dont Monge peut, à de si justes titres, être appelé le créateur.

Telle est l'origine commune de toutes les notions abstraites de l'étendue et de la grandeur en général, et par conséquent telle est aussi l'origine des êtres de non existence.

Ainsi, non-seulement, il peut être utile d'admettre les quantités négatives et imaginaires en algèbre, et de les soumettre aux mêmes règles de calcul que les nombres absolus, mais la chose est même tout-à-fait indispensable par la nature propre de cette science, puisqu'elle opère nécessairement sur des signes abstraits et qui n'ont, par eux-mêmes, aucune valeur significative. »

On peut voir (29 et 225) que nous avons mis à profit les réflexions précédentes; elles sont extraites du rapport fait à la Société Académique de Metz, sur la 1re édition de ce traité, par M. PONCELET, capitaine du génie.

Comme la réduction des termes semblables se présente au commencement de l'algèbre, et comme cette réduction peut donner et donne en effet des quantités négatives isolées, on est ainsi conduit à considérer ces sortes de quantités dès les premières opérations algébriques. Voilà pour quoi nous avons cru devoir les faire entrer immédiatement dans le calcul. Il en résulte l'avantage de donner sur-le-champ aux premières opérations de l'algèbre toute la généralité dont elles sont susceptibles.

Sans doute qu'il arrivera quelquefois aux commençans de demander ce que signifie une quantité négative isolée, telle que -6, par exemple; et cette question, qui se présente naturellement à l'esprit des élèves désireux de se rendre compte de leurs opérations, est absolument de même nature que celle où l'on voudrait savoir ce que signifie un nombre isolé, tel que 17, par exemple, et à quoi ce nombre répond.

Le nombre isolé 17 est censé augmenter une certaine grandeur de même espèce, dont on ne fait pas mention dans le calcul, et ce nombre doit conséquemment être précédé du signe $+$; de même, la quantité négative isolée -6 est censée diminuer une certaine quantité de même espèce, qui n'est pas l'objet particulier du calcul actuel.

En général, il nous paraît, avec un grand nombre de géomètres, qu'on levera toutes les difficultés, en regardant les quantités positives ou négatives comme augmentant ou diminuant une certaine grandeur fixe, dont on ne fait pas mention dans le calcul.

De cette manière, l'expression $-a+a$ signifiera qu'il faut soustraire et ajouter une même quantité a à une grandeur de même espèce; or, l'effet de l'une de ces opérations détruit celui de l'autre; donc $-a+a=0$. On verra aussi que $-3a=-a-a-a$. On est donc ainsi conduit aux principes du n° 27, sur lesquels est basé le calcul des quantités négatives isolées.

Nous aurions pu d'abord expliquer ces deux principes comme nous venons de l'indiquer; mais nous avons mieux aimé en faire l'objet de conventions spéciales, afin de fixer les idées et de n'avoir pas à fatiguer l'attention par des développemens, inutiles pour le moment, et qui sont beaucoup mieux compris lorsqu'on en vient aux applications des premières règles du calcul algébrique.

Ces développemens, au surplus, se réduisent toujours à montrer ce que signifie une quantité négative isolée, et réciproquement à faire voir dans quel cas une quantité doit prendre le signe $-$. Or, lorsqu'une quantité x d'un problème reçoit une valeur négative, elle diminue la grandeur fixe qu'elle augmentait d'abord; elle doit donc changer d'acception, c'est-à-dire, par exemple, exprimer une *perte*, si d'abord elle désignait un *gain*. Réciproquement, lorsqu'une quantité a change d'acception, elle diminue la grandeur fixe qu'elle augmentait d'abord; elle doit donc prendre le signe —. Et tel est, en résumé, ce à quoi se réduit l'interprétation des solutions négatives.

Il peut cependant arriver que l'inconnue x ne soit pas susceptible de changer d'acception; mais alors le signe — de sa valeur, provient du changement de signe de quelques-uns des nombres donnés du problème; et pour savoir quels sont ces nombres, il suffit de changer x en $-x$ dans les équations proposées.

Il est bon d'observer qu'un nombre absolu, comme 12, peut aussi bien être destiné à une diminution qu'à une augmentation. Mais on est convenu de ranger les nombres absolus dans la classe des quantités positives; de sorte que 4, par exemple, est la même chose que $+4$. Cette convention est légitime; car le nombre 4 ne saurait diminuer une certaine grandeur, sans augmenter en même temps une autre grandeur d'une acception contraire à celle de la première : diminuer les dettes d'une personne, par exemple, c'est réellement augmenter ses biens.

En partant des principes précédens, rien n'est plus facile que de comprendre l'addition algébrique. En effet, qu'il s'agisse, par ex., d'ajouter -10 à $+7$: comme alors les nombres 7 et 10 sont censés augmenter et diminuer certaines grandeurs n et p, dont on ne fait pas mention dans le calcul; si on y fait paraître ces grandeurs, l'expression $(+7)+(-10)$ sera la même chose que $(n+7)+(p-10)$. Or, il est aisé de démontrer que p étant >10, ce qu'on peut toujours supposer, on a

$$(n+7)+(p-10)=n+7+p-10=n+p-3.$$

Si donc on fait abstraction des grandeurs n et p, qui ne doivent pas entrer dans le calcul, ce qui revient à les supposer nulles, l'égalité précédente deviendra $$(+7)+(-10)=-3.$$

D'où l'on voit que l'addition algébrique est une opération par laquelle on réunit plusieurs quantités de même espèce, affectées des signes + et —, pour en former une seule quantité, appelée *somme*. Ce qui est la définition du n° 35.

Les mêmes principes appliqués à la règle des signes, dans la multiplication, servent à expliquer comment il se fait, par exemple, que $-a\times -b=+ab$. En effet, dans $-a\times-b$, les nombres a et b diminuent certaines grandeurs n et p, qui ne sont pas l'objet du calcul actuel; de sorte que si on y fait paraître ces grandeurs, $-a\times-b$ sera la même chose que $(n-a)(p-b)$. Or, n étant plus grand que a, et p plus grand que b, ce qu'on peut toujours admettre, il est aisé de démontrer que $$(n-a)(p-b)=np-ap-bn+ab.$$

Faisant donc abstraction des grandeurs n et p, qui ne doivent pas entrer dans le calcul, et qui doivent par conséquent y être supposées nulles, l'égalité précédente deviendra

$$-a\times-b=+ab.$$

Et l'on voit aussi par là comment il arrive qu'en supposant les formules vraies pour toutes les valeurs des lettres qui les composent, on soit conduit au calcul des quantités négatives isolées.

NOTE II.

Sur la multiplication et la division des monomes.

La règle (47) pour multiplier un monome par un monome est composée des quatre règles particulières que voici : 1° La *règle des signes* qui consiste à donner au produit le signe +, lorsque les signes du multiplicande et du multiplicateur sont les mêmes, et le signe —, quand les signes sont différens ; 2° La *règle des coefficiens* qui se réduit à multiplier le coefficient du multiplicande par le coefficient du multiplicateur pour avoir celui du produit ; 3° La *règle des lettres* qui consiste à écrire les lettres du multiplicande et du multiplicateur les unes à la suite des autres, en suivant l'ordre alphabétique et sans placer aucun signe entre elles ; 4° Enfin, la *règle des exposans* qui revient à n'écrire qu'une seule fois chaque lettre comme facteur au produit, et à lui donner pour exposant, la somme de ses exposans au multiplicande et au multiplicateur.

Au moyen de ces règles particulières, on aura

$$-5a^3b^4d \times +3a^4b^2c = -15a^7b^6cd.$$

En effet, d'après la règle des signes (44) et parce qu'un produit ne change pas de valeur, dans quelqu'ordre qu'on multiplie, il est clair que

$$-5a^3b^4d \times +3a^4b^2c = -5a^3b^4d \,.\, 3a^4b^2c = -5 \,.\, 3a^3a^4b^4b^2cd$$
$$= -15 \,.\, a^3a^4 \,.\, b^4b^2 \,.\, cd = -15a^7b^6cd,$$

en observant que le produit a^3a^4 contient 3 facteurs a et 4 facteurs a, ou 7 facteurs a, et vaut par conséquent a^7 (20) ; que de même le produit b^4b^2 renferme 4 facteurs b et 2 facteurs b, ou 6 facteurs b, et vaut b^6.

La règle de la division des monomes (64) se compose des quatre règles particulières que voici : 1° La *règle des signes ;* elle consiste à donner au quotient le signe +, lorsque les signes du dividende et du diviseur sont les mêmes, et le signe —, quand les signes sont différens. 2° La *règle des coefficiens ;* elle se réduit à diviser le coefficient du dividende par le coefficient du diviseur pour avoir celui du quotient. 3° La *règle des lettres ;* elle revient à ne pas écrire au quotient les lettres communes au dividende et au diviseur, et qui ont le même exposant. 3° Enfin, la *règle des exposans ;* elle consiste à n'écrire qu'une seule fois chaque lettre comme facteur au quotient, et à lui donner pour exposant son exposant au dividende moins son exposant au diviseur.

Au moyen de ces règles particulières, on trouve que

$$-15a^7b^4c^2d : -3a^3bc^2d = +5a^4b^3.$$

Et en effet, en multipliant ce quotient par le diviseur, on reproduit le dividende (47) : donc ce quotient est le véritable.

En général, soit $ca^m b^n$ le dividende, $c'a^v b^n$ le diviseur et $c''a^x b^y$ le quotient, c, c', c'' désignant les coefficiens ; on aura donc

$$ca^m b^n = c'a^v b^n \times c''a^x b^y, \quad \text{ou} \quad ca^m b^n = c'c''a^{v+x} b^{n+y}.$$

Le produit du diviseur par le quotient devant toujours être le même que le dividende, il faut que les coefficiens soient les mêmes de part et d'autre, ainsi que les exposans de a et ceux de b ; on a par conséquent $c'c'' = c$, $v + x = m$ et $n + y = n$; d'où l'on tire $c'' = c : c'$, $x = m - v$ et $y = 0$.

Ainsi on aura le coefficient du quotient en divisant le coefficient du dividende par celui du diviseur ; on trouvera l'exposant de a au quotient en retranchant son exposant au diviseur de son exposant au dividende ; enfin, comme l'exposant y de b au quotient est o, cette lettre n'y est pas facteur et ne doit pas y entrer.

Fautes à corriger.

Page 25, ligne 4e : $+ 35a^5b^4$, *lisez* $+ 35a^6b^4$.

» 77, » 20e, *supprimez les mots :* ou diviser.

» 77, » 4e, en remontant : $\frac{3x}{4}$, *lisez* $\frac{6x}{4}$.

» 82, » 11e, en remont. : $\frac{b(y-q)}{a}$, *lisez* $\frac{b(q-y)}{a}$.

» 94, » 3e : 111108889, *lisez* 1111088889.

» 108, » 10e, en remont. : ± 5, *lisez* ± 15.

» 112, » 10e, en remont. : $= - b^2$, *lisez* $= b^2$.

» 116, » 6e : $\frac{48(x-4)}{y}$, *lisez* $\frac{48(x-4)}{x}$.

» 129, » 10e, en rem. plus o diminue, *lis.* plus *a* diminue.

» 129, » 15e, en remont. : Soit 2o, *lisez* Soit 2*a*.

» 133, » 5e, en rem., *supprimez les mots* : des carrés.

» 136, *le dénom. de la valeur* C+D *doit être* 1.2.3.4.5.

» 142, ligne 10e : produit de $3a^2x$, *lisez* produit $3a^2x$.

» 147, » 2e : $>(1,49)^3$, *lisez* $>(1,39)^3$.

» 148, » 11e : 651, *lisez* 6561.

» 169, » 13e, *supprimez le mot* Cette.

» 173, » 13e, en remontant : 11700, *lisez* 11850.

TABLE SOMMAIRE.

Nota. Il sera très-utile aux élèves de construire eux-mêmes et sous la direction de leur Professeur, la *table analytique* des matières contenues dans cet ouvrage. Cette table leur servira pour bien se préparer aux examens et mieux connaître l'enchaînement des objets qu'ils auront appris.

FIN DE LA TABLE.

MÉLANGES D'ALGÈBRE,

OU RECUEIL

D'UN GRAND NOMBRE DE PROBLÈMES

ET

D'APPLICATIONS ALGÉBRIQUES.

Par J. N. Noël,

PROFESSEUR DES SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES, PRINCIPAL DE L'ATHÉNÉE DE LUXEMBOURG, CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ DES LETTRES, SCIENCES ET ARTS, DE METZ, ETC.

LUXEMBOURG,

DE L'IMPRIMERIE DE J. LAMORT, PLACE D'ARMES.

1827.

Ouvrages du même Auteur qui se trouvent à Luxembourg et chez les principaux Libraires du Royaume :

1° Arithmétique à l'usage des Ecoles primaires, 2me édition, 1826;
2° Arithmétique élémentaire, raisonnée et appliquée, 3e édit. 1825;
3° Algèbre élémentaire, raisonnée et appliquée, 1821;
4° Mélanges de Mathématiques, ou Application de l'Algèbre à la géométrie élémentaire, suivie de plusieurs propositions de Statique, et précédée d'un Recueil de Théorèmes et de Problèmes de géométrie, 1822.
5° Note sur la géométrie élémentaire, 1825;
6° Supplément d'Arithmétique, 1825.

Les nombres placés entre parenthèses, indiquent l'article sur lequel s'appuie celui dont on s'occupe.

Les exemplaires voulus par la loi ont été déposés.

MÉLANGES D'ALGÈBRE,
OU RECUEIL
D'UN GRAND NOMBRE DE PROBLÈMES
ET D'APPLICATIONS ALGÉBRIQUES.

J'AI réuni, dans le présent ouvrage, les matières qui ne font pas parties essentielles des traités d'Arithmétique et d'Algèbre, ce qui me permettra de rendre ces ouvrages moins volumineux et moins chers, même en y comprenant le prix de celui-ci.

Tous les Professeurs savent que, pour éclaircir les théories et les mieux fixer dans la mémoire, il faut les faire suivre de quelques applications; ils savent que les problèmes, en excitant la curiosité, font naître le désir de les résoudre; ce qui procure aux élèves le double avantage de développer leur intelligence et de les familiariser avec les combinaisons du langage analytique. Sous ce point de vue, quel que soit d'ailleurs l'ouvrage qu'ils auront à suivre, celui-ci leur sera toujours très-utile, tant pour appliquer les principes et les règles du calcul analytique, que pour se familiariser avec les moyens de simplifier ce calcul et d'en éluder les difficultés; ce qui est l'objet le plus important de l'étude de l'algèbre.

De l'Arithmétique devinatoire.

1. L'Arithmétique *devinatoire* proprement dite, n'est autre chose que la manière de *deviner* le nombre qu'une personne a pensé, en lui faisant effectuer certaines opérations numériques propres à découvrir ce nombre. Rien n'est donc plus facile que de se créer des méthodes pour trouver le nombre pensé : aussi les faiseurs de tours ont-ils toujours bonne provision de ces méthodes. Voici un exemple bien remarquable de la manière de deviner des nombres :

2. Un joueur de gobelets promet de nommer la personne qui aura pris une bague en secret, et de déterminer la main, le doigt et la jointure où cette bague sera, à condition qu'on fera les cinq choses, qu'il va prescrire, dans l'ordre suivant :

1° Doublez, dit-il, le nombre qui marque le rang de la personne qui a pris la bague, et ajoutez 5 à ce nombre;

2° Multipliez la somme par 5 et ajoutez-y 10;

3° Ajoutez à la dernière somme, 1 pour la main droite, et 2 si c'est la gauche, et multipliez le tout par 10;

4° Joignez-y le rang du doigt, en commençant par le pouce, et multipliez le tout par 10;

5° Enfin, joignez à cela le rang de la jointure et 35, et donnez cette dernière somme.

De cette somme, le joueur de gobelets soustrait 3535, et le reste est composé de 4 chiffres, dont le 1er indique le rang de la personne, le 2^e le rang de la main, le 3^e celui du doigt, et le 4^e celui de la jointure.

Par exemple, si c'est la 4^e personne de la compagnie, suivant le rang, qui ait pris la bague; qu'elle l'ait mise à la main gauche, désignée par 2; que ce soit au 4^e doigt et à la 2^e jointure; en faisant les cinq opérations prescrites, on trouvera 7777.

Soustrayant 3535, on aura 4242, dont le 1er chiffre 4 est effectivement le rang de la personne, le 2^e 2 la main gauche, le 3^e 4 le rang du doigt et le 4^e 2 celui de la jointure.

Pour voir comment on est ainsi conduit à trouver ces quatre nombres, soit p le rang de la personne, m la main, d le rang du doigt et f celui de la phalange; en exécutant les cinq opérations prescrites, on obtient $1000p + 100m + 10d + f + 3535$; et comme ce nombre est égal à 7777, il vient, en retranchant 3535 de part et d'autre,

$$1000p + 100m + 10d + f = 4242.$$

Cette égalité ne peut subsister que quand on a $p = 4$, $m = 2$, $d = 4$ et $f = 2$.

3. Cet exemple suffit bien pour montrer que l'arithmétique devinatoire n'est qu'une espèce de jeu, dont la subtilité consiste à faire dire aux spectateurs la chose qu'on demande, en l'enveloppant dans différentes opérations, afin de leur en dérober la connaissance. C'est aussi à cette arithmétique qu'on peut rapporter divers tours de cartes, tel que le suivant:

4. On prend un jeu de m cartes, où les as et les figures comptent pour 10 points; on en forme p paquets contenant chacun n points, de manière que la première carte de chaque

paquet compte pour le nombre de points qu'elle indique, et toutes les autres pour un point chacune. Trouver le moyen de deviner le nombre total de points indiqués par les premières cartes de tous les paquets.

Soient a, b, c, d, ..., les nombres de points respectifs des 1^{res} cartes des p paquets; il est clair que les nombres de cartes qu'il aura fallu ajouter aux p premières, pour former tous les paquets, sont respectivement : $n-a$, $n-b$, $n-c$, $n-d$, ...; le nombre de cartes employé est donc $p+pn-a-b-c-d-\cdots$; par conséquent le nombre de cartes restantes est $m-p-pn+a+b+c+d+\cdots$ Si donc à ce nombre de cartes restantes, on ajoute le nombre connu $(1+n)p-m$, la somme $a+b+c+d+\cdots$ sera égale au nombre de tous les points indiqués par les p premières cartes des p paquets.

Soit donc x le nombre total de points indiqués par les 1res cartes des p paquets et k le nombre de cartes non employées, on aura, pour résoudre le problème proposé, la formule

$$x=k+(1+n)p-m.$$

5. A *parie avec* B *qu'il devinera, dans un jeu de 27 cartes, celle que* B *aura pensée. Comment* A *pourra-t-il gagner le pari?*

A gagnera le pari, en opérant comme il suit: 1° après avoir mêlé à volonté les 27 cartes, *A* fera trois paquets de 9 cartes chacun, en posant d'abord de gauche à droite, la première carte de chaque paquet, la couleur en dessous, puis la seconde sur la première, toujours de gauche à droite, puis la troisième, et ainsi de suite, ayant soin, avant de poser chaque carte, de la montrer à *B*, de manière qu'il ne puisse la voir lui-même : et cela fait *A* placera les paquets les uns sur les autres, sans les mêler. 2° *A* recommencera à faire trois nouveaux paquets, exactement comme la première fois, avec les mêmes attentions, et les relevera encore sans les mêler. 3° *A* fera de nouveau trois paquets, comme dans le premier cas, et les relevera de la même manière. Alors, les rangs étant comptés du dessus vers le dessous, *B* dira que le paquet contenant la carte pensée, occupait dans le jeu, le rang a après la première opération, le rang b après la seconde, et le rang c après la troisième; et au moyen de ces seules données, *A* connaîtra le rang x de la carte pensée, dans le jeu, et pourra par conséquent la deviner.

En effet, 1° après la première opération, la carte pensée ne peut occuper dans son paquet que le rang 1 au moins, et le rang 9 au plus. Mais puisqu'on n'assigne à ce paquet que le rang a, on met donc $(a-1)$ autres paquets de 9 cartes chacun, au-dessus de lui ; il s'ensuit, qu'après les cartes relevées, la carte pensée se trouve occuper dans le jeu, au moins le rang $9(a-1)+1=9a-8$, et au plus le rang $9(a-1)+9=9a$.

2° En formant de nouveau les paquets, on pose d'abord au moins $9(a-1)$ cartes distribuées en trois paquets de chacun $3(a-1)$ cartes, dont aucune ne sera la carte pensée, laquelle, conséquemment, en aura au moins $3(a-1)$ sous elle, dans son paquet ; tandis qu'on ne pourra pas en poser $9a$, et conséquemment, $3a$ dans chaque paquet, sans faire passer la carte pensée qui, en conséquence, en aura au moins $3a-1$ sous elle, dans son paquet ; donc puisque chaque paquet contient 9 cartes, il s'ensuit que la carte pensée occupera, dans son paquet, au moins le rang $9-(3a-1)=10-3a$, et au plus le rang $9-3(a-1)=12-3a$.

Mais puisqu'on n'assigne à ce paquet que le rang b, on met donc au-dessus de lui $(b-1)$ autres paquets de 9 cartes chacun ; d'où il suit qu'après la seconde opération, la carte pensée occupera dans le jeu, au moins le rang $9(b-1)+10-3a=9b-3a+1$, et au plus le rang $9(b-1)+12-3a=9b-3a+3$.

3° Il suit de là qu'en reformant les paquets, on pose au moins dans chacun, $3b-a$ cartes, sans avoir employé la carte pensée, mais qu'on ne peut en poser dans chacun, $3b-a+1$, sans avoir fait passer cette carte ; elle aura donc, dans son paquet, au moins $3b-a$ et au plus $3b-a$ cartes sous elle ; elle y occupera donc au moins le rang $9-3b+a$, et au plus le rang $9-3b+a$; c'est-à-dire qu'elle y occupera précisément le rang $9-3b+a$.

Mais puisqu'on n'assigne à ce paquet que le rang c, on place donc au-dessus de lui $(c-1)$ autres paquets de 9 cartes chacun ; d'où il suit qu'après la 3^{me} opération, la carte pensée occupera dans le jeu, le rang $x=9(c-1)+9-3b+a$, ou

$$x=a-3b+9c.$$

Ainsi, *après la 3^e opération, la carte pensée occupe dans le jeu, et du dessus vers le dessous, un rang égal au premier rang du paquet contenant cette carte, moins 3 fois le second rang de ce paquet, plus 9 fois le 3^{me}.*

6. Ce tour est généralisé dans le tome 4^{me} des *Annales de Mathématiques*, par M. GERGONNE. Consultez cet excellent Recueil, ainsi que les *Récréations physiques et mathématiques d'*OZANAM, *refondues par M.* DE M***, où l'on donne plusieurs applications de l'Arithmétique devinatoire. En voici encore un exemple :

Dans un jeu de c *cartes, on en tire* b, *dont on vous demande de deviner la somme* p *des points, le valet étant de* 11 *points, la dame de* 12 *et le roi de* 13.

Pour cela, vous prenez un nombre a qui surpasse le nombre de points de la plus haute carte; vous dites à une personne de compter en secret le nombre p de points des b cartes tirées; de prendre à part, dans le restant du jeu, autant de cartes qu'il y a d'unités dans $ab-p$ et de faire connaître le nombre d de cartes qui restent; alors vous aurez

$$p=d+b(a+1)-c.$$

De quelques séries périodiques, fournies par la division numérique.

7. J'appellerai *série périodique*, toute suite infinie de fractions dont les dénominateurs sont les puissances successives d'un même nombre entier, et dont un ou plusieurs numérateurs reviennent sans cesse dans le même ordre. L'ensemble des fractions dont les numérateurs reviennent, forme une *période* de la série périodique. Par exemple, la suite

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{27}+\frac{2}{81}+\frac{1}{243}+\frac{2}{729}+\text{etc. à l'infini},$$

est une série périodique, dont $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}$ est la première période.

8. Voyons d'abord comment on peut réduire une fraction en série périodique. Proposons-nous, par exemple, de réduire $\frac{1}{3}$ en parties de 4 en 4 fois plus petites. Pour cet effet, nous dirons: $\frac{1}{3}=$ le tiers de $1=$ le tiers de $\frac{4}{4}$. Or le tiers de $\frac{4}{4}$ est $\frac{1}{4}$, pour $\frac{3}{4}$, et il reste $\frac{1}{4}$, qui vaut $\frac{4}{16}$: le tiers de $\frac{4}{16}$ est $\frac{1}{16}$, pour $\frac{3}{16}$, et il reste $\frac{1}{16}$, qui vaut $\frac{4}{64}$: le tiers de $\frac{4}{64}$ est $\frac{1}{64}$, pour $\frac{3}{64}$, et il reste $\frac{1}{64}$, qui vaut $\frac{4}{256}$: ainsi de suite, à l'infini. On a par conséquent

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\text{etc., à l'infini.}$$

Il résulte de ces calculs, que *pour convertir une fraction en une suite d'autres dont les dénominateurs deviennent de* c *en* c *fois plus grands, il faut diviser par le dénominateur proposé, le* 1[er] *numérateur et ceux des fractions que l'on trouve en convertissant chaque reste en parties* c *fois plus petites.*

9. D'après cette règle, si l'on réduit $\frac{637}{729}$ en parties de 3 en 3 fois plus petites, et $\frac{3}{7}$ en parties de 4 en 4 fois moindres, on trouvera

$$\frac{637}{729}=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}+\frac{1}{82}+\frac{2}{243}+\frac{1}{729},\ \text{et}$$

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{2}{4^5}+\frac{3}{4^6}+\text{etc., à l'infini.}$$

La 1[re] de ces fractions se réduit exactement en parties de 3 en 3 fois plus petites, parce que son dénominateur 729 est une puissance de 3; mais la 2[e] fraction $\frac{3}{7}$ ne peut se réduire exactement en parties de 4 en 4 fois plus petites, et donne lieu à une série périodique, parce que son dénominateur est 1[er] avec 4.

10. En général, *lorsque le dénominateur d'une fraction irréductible est premier avec* c, *cette fraction ne peut jamais se convertir exactement en parties de* c *en* c *fois plus petites.* En effet, soit $\frac{a}{bd}$ la fraction irréductible proposée, dans laquelle b est premier avec a et c. Si cette fraction pouvait se réduire exactement en parties de c en c fois plus petites, c'est-à-dire en une suite de fractions dont les dénominateurs successifs fussent c, c^2, c^3, ..., c^m; la somme de ces fractions prendrait la forme $\frac{k}{c^m}$, et l'on aurait

$$\frac{a}{bd}=\frac{k}{c^m};\ \text{d'où}\ \frac{ac^m}{b}=dk.$$

Or, b est premier avec chacun des facteurs du produit ac^m; donc b ne divise pas ce produit; donc dk n'est pas un nombre entier. Mais d en est un; donc k ne serait pas un nombre entier; ce qui est absurde, puisque k est la somme de plusieurs nombres entiers: donc réellement la fraction proposée ne saurait se réduire exactement en parties de c en c fois plus petites.

11. Si le dénominateur bd n'avait d'autres facteurs premiers que ceux de c, élevés chacun à une certaine puissance, on pourrait toujours prendre m assez grand pour que c^m fût divisible par bd; donc k serait un nombre entier, et la fraction proposée

pourrait se réduire exactement en parties de c en c fois plus petites.

12. Voyons maintenant ce qui arrive quand on veut exprimer en parties de c en c fois plus petites, une fraction irréductible dont le dénominateur est premier avec c. D'abord si cette fraction est plus grande que l'unité, on en extraira les entiers, et on n'aura plus à considérer qu'une fraction moindre que l'unité.

Soit donc $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible < 1, dont le dénominateur b est premier avec a et c. Pour réduire cette fraction en parties de c en c fois plus petites, appliquons la règle du n° 8. Soient $q, q', q'', q''', \ldots$, les quotiens successifs, et r, r', r'', $r''', \ldots$ les restes correspondans; les dividendes successifs seront $ac, cr, cr', cr'', \ldots$; on aura par conséquent

$$\begin{aligned} ac &= bq + r \\ cr &= bq' + r' \\ cr' &= bq'' + r'' \\ cr'' &= bq''' + r''' \\ &\text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Comme $\frac{a}{b}$ ne saurait se réduire exactement en parties de c en c fois plus petites (10), les divisions se continueront sans jamais donner un reste nul; et comme chaque reste est moindre que le diviseur b, il y aura tout au plus $b - 1$ restes différens : donc on retrouvera nécessairement l'un des restes déja obtenus, et la série sera périodique.

Soit r''' le 1er reste égal à l'un de ceux qui le précèdent : on n'aura pas $r''' = r''$; car si cela était, on aurait aussi

$$c(r' - r'') = b(q'' - q''') \ldots (1)$$

Or, r' et r'' étant chacun moindre que b, $r' - r''$ est aussi moindre que b. D'ailleurs le second membre de l'équation (1) étant divisible par b, il en est de même du premier. Mais b est premier avec c; il faut donc que b divise $r' - r''$, nombre moindre que lui; ce qui ne saurait arriver que dans le seul cas de $r' - r'' = 0$ ou de $r'' = r'$. Ainsi r''' ne serait pas le premier reste égal à l'un de ceux qui le précèdent; ce qui est contre l'hypothèse : donc on n'aura pas $r''' = r''$. On verra de même qu'on ne saurait avoir $r''' = r'$, ni $r''' = r$; et si l'on n'avait pas $r''' = a$, r''' ne serait égal à aucun des restes précédens; ce qui est contre la supposition. Donc il faut que $r''' = a$; ce qui donne $cr''' = ac$. Mais puisque les dividendes ac et cr''' sont les mêmes, les quotiens q et q^{IV} seront aussi les mêmes, ainsi que les restes r et r^{IV}. D'où il suit que la valeur cherchée de $\frac{a}{b}$ est une série périodique, commençant par la fraction $\frac{q}{c}$, et dont les numérateurs, dans chaque période, sont q, q', q'' et q'''. De plus, la division qui donne le dernier numérateur q''', dans chaque période, laisse un reste r''' égal au numérateur a de la fraction proposée.

13. En général donc, *si l'on réduit en parties de* c *en* c *fois plus petites une fraction irréductible, dont le dénominateur est premier avec* c, *on trouvera une série périodique, commençant par la* 1^re^ *fraction de la* 1^re^ *période; et le reste obtenu, après avoir calculé le numérateur de la dernière fraction de chaque période, sera égal au numérateur de la fraction proposée.* C'est par exemple, ce qu'on verrait, en réduisant la fraction $\frac{13}{24}$ en une suite d'autres, dont les dénominateurs soient les puissances successives de 5 (8).

14. Supposons maintenant que b et c aient des facteurs communs et qu'on ait, par exemple, $b = kd^5e^3$ et $c = k'd^3e^2$. Il est clair que dans la 1^re^ division, le dividende et le diviseur sont $ak'd^3e^2$ et kd^5e^3; ils donnent donc un quotient q avec un reste de la forme rd^3e^2. Dans la 2^e^ division, le dividende et le diviseur sont rd^6e^4 et kd^5e^3; ils fournissent par conséquent un quotient q' et un reste de la forme $r'd^5e^3$. De sorte que

$$\frac{a}{b} = \frac{q}{c} + \frac{q'}{c^2} + \frac{r'd^5e^3}{c^2kd^5e^3}, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{q}{c} + \frac{q'}{c^2} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{r'}{k}.$$

Si la fraction $\frac{r'}{k}$ n'était pas irréductible, on la rendrait telle en supprimant le facteur commun à ses deux termes. Et comme le dénominateur k était premier avec c, avant cette suppression, il est clair qu'il le sera encore après. De sorte qu'on peut toujours admettre que $\frac{r'}{k}$ est une fraction dont le dénominateur est premier avec r' et c. Si donc on réduit cette fraction en parties de c en c fois plus petites, on aura une série périodique, commençant à la première fraction *partielle*; donc $\frac{a}{b}$ sera égale à une série périodique *mixte*, dont la période commence immédiatement après les deux premières fractions partielles.

On verra de même que si $b = kd^7e^6$ et $c = k'd^4e^2$, la fraction $\frac{a}{b}$ sera égale à une série périodique mixte, dont la période commence après les trois ou $\frac{6}{2}$ premières fractions partielles. Si $b = kd^4e$ et $c = k'd^6e^4$, la période commencera après la 1[re] fraction partielle; et il en sera de même pour $b = kd^3e^2$ et $c = k'd^7e^4$.

15. De là et de ce que le quotient *en dehors* de 7 par 4, par exemple, est $\frac{7+1}{4}$ ou 2 (*), il résulte, que *toutes les fois que le dénominateur* b *a des facteurs communs avec* c, *la fraction proposée est égale à une série périodique mixte, dont la période commence immédiatement après autant de fractions partielles qu'il y a d'unités dans le plus grand quotient en dehors qu'on obtient en divisant l'exposant de chacun des facteurs dans* b *par l'exposant du même facteur dans* c. C'est d'ailleurs ce que l'on peut vérifier en réduisant $\frac{153}{160}$ en parties de 6 en 6 fois plus petites et $\frac{17}{24}$ en parties de 20 en 20 fois moindres.

16. Cherchons actuellement à déterminer la génératrice d'une série périodique donnée. Supposons d'abord cette série périodique *simple*, et prenons, par exemple,

$$\frac{n}{d} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{2}{5^5} + \frac{3}{5^6} + \text{etc., à l'infini} \ldots (2)$$

Cette égalité fait voir qu'en réduisant $\frac{n}{d}$ en parties de 5 en 5 fois plus petites, on a divisé $5n$ par d, ce qui a donné 1 au quotient avec le reste r; on a divisé $5r$ par d, et on a trouvé 2 au quotient avec le reste r'; enfin on a divisé $5r'$ par d, et il est venu 3 au quotient avec le reste r'', qui doit être égal à n (13). On a par conséquent les équations

$$\left.\begin{aligned} 5n &= d + r \\ 5r &= 2d + r' \\ 5r' &= 3d + n \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} 25n &= 7d + r' \\ 125n &= 38d + n \\ \text{et } 124n &= 38d. \end{aligned}\right.$$

Cette dernière équation fournit $\frac{n}{d} = \frac{38}{124} = \frac{19}{62} = \frac{38}{5^3 - 1}$.

(*) On appelle *quotient en dehors*, celui qu'on trouve en ajoutant au dividende assez d'unités pour qu'il contienne exactement le diviseur. Ainsi les quotiens en dehors de 17, 18, 19 par 4, sont tous égaux à 5.

On aurait trouvé la valeur précédente en multipliant les deux membres de (2) par 5^3, puis en observant que tout ce qui suit les trois premiers termes dans le nouveau second membre, est une série périodique simple parfaitement égale à la proposée, et doit être remplacé par $\frac{n}{d}$.

17. On voit, par le résultat précédent, que *pour trouver la génératrice d'une série périodique simple, il faut prendre la somme des fractions partielles qui composent la* 1re *période et diminuer de* 1 *le dénominateur de la fraction qui en résulte.* C'est ainsi que

$$\frac{2}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\text{etc., à l'infini}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5},$$

$$\text{et } \frac{4}{5}-\frac{2}{5^2}+\frac{4}{5^3}-\frac{2}{5^4}+\text{etc., à l'infini}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}.$$

On vérifie aisément cette dernière valeur, d'après la règle du n° 8 et en prenant tous les quotiens en dehors.

18. Si la série périodique est mixte, il suffira de remplacer la série périodique simple qui suit les 1res fractions partielles par sa valeur, trouvée au moyen de la règle précédente (17). Ainsi

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\frac{3}{7^4}+\text{etc.}=\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\text{etc.}\right)$$
$$=\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{7}+\frac{1}{14}=\frac{5}{14}.$$

19. Il est évident que tout ce qui vient d'être dit sur la réduction des fractions ordinaires en séries périodiques, et réciproquement, s'applique de point en point à la conversion des fractions ordinaires en décimales, et des fractions décimales périodiques en fractions ordinaires.

De la divisibilité des nombres.

20. Soit k un nombre entier quelconque. Concevons qu'on ait partagé ce nombre en tranches de m chiffres chacune, en allant de droite à gauche, sauf la première tranche à gauche, qui peut avoir moins de m chiffres; et soient, en allant aussi de droite à gauche, a, b, c, d, e, etc., ces tranches, considérées comme autant de nombres isolés : puisque 1 *suivi de* m *zéros* $=10^m$, 1 *suivi de* 2m *zéros* $=10^{2m}$, etc., on aura évidemment

$$k = a + b\,10^m + c\,10^{2m} + d\,10^{3m} + e\,10^{4m} + \text{etc.}$$

Faisant $10^m = x$; d'où $10^{2m} = x^2$, $10^{3m} = x^3$, etc., il viendra

$$k = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \text{etc.}$$

Cette équation peut être mise sous l'une des trois formes que voici :

$$k = a + [b + cx + dx^2 + ex^3 + fx^4 + \text{etc.}]\,x,$$

$$k = [b(x-1) + c(x^2-1) + d(x^3-1) + \text{etc.}] + (a + b + c + d + e + f + \text{etc.}),$$

$$k = [b(x+1) + c(x^2-1) + d(x^3+1) + e(x^4-1) + \text{etc.}] + (a + c + e + \ldots) - (b + d + f + \ldots).$$

Les premières parties des deux dernières expressions de k sont divisibles, l'une par $x-1$ et l'autre par $x+1$ (Algèbre). Donc, si l'on désigne par p et q les quotiens respectifs et par r le multiplicateur de x, dans la première expression de k, il est clair que p, q, r seront des nombres entiers, et il viendra, en remplaçant x par 10^m,

(1) ... $k = a + r \cdot 10^m$,

(2) ... $k = p(10^m - 1) + (a + b + c + d + e + f + \text{etc.})$,

(3) ... $k = q(10^m + 1) + (a + c + e + \ldots) - (b + d + f + \ldots)$.

Ces équations fournissent un grand nombre de conséquences. D'abord, à cause de $10^m = 2^m \cdot 5^m$, l'équation (1) prouve que, tout nombre, dont les m premiers chiffres a à droite forment un multiple de 2^m ou de 5^m, et divisible exactement par 2^m ou par 5^m.

Si $m = 1$, a sera le premier chiffre à droite du nombre k, et l'équation (1) montre, 1° que si a est ou n'est pas l'un des chiffres 0, 2, 4, 6, 8, le nombre k sera ou ne sera pas divisible par 2; 2° que si a est ou n'est pas 0 ou 5, le nombre k sera ou ne sera pas divisible par 5; 3° enfin, que si a est ou n'est pas 0, le nombre k sera ou ne sera pas divisible par 10. Donc il en résulte trois principes démontrés en arithmétique.

Lorsque $m=1$, on a $10^m - 1 = 9$, et $a+b+c+d+f+\text{etc.}$ est la somme de tous les chiffres du nombre k. L'équation (2) montre que si cette somme est ou n'est pas multiple de 3 ou de 9, le nombre k sera ou ne sera pas divisible par 3 ou par 9. Ce qui est encore un principe démontré en arithmétique.

Quand $m=1$, il vient $10^m+1=11$; et alors $a+c+e+\dots$ est la somme des chiffres de rangs impairs du nombre k; $b+d+f+\dots$ est la somme des chiffres de rangs pairs. L'équation (3) montre que, dans ce cas, *tout nombre est ou n'est pas divisible par* 11, *lorsque la somme de ses chiffres de rangs impairs, moins la somme de ses chiffres de rangs pairs, donne un reste multiple ou non de* 11. Par exemple, 11 divise 2134 et 31537.

En posant $m=2$, $10^m-1=99=11.9$ et $a+b+c+d+$ etc., désigne la somme des tranches de deux chiffres du nombre k, et l'équation (2) fait voir que si cette somme est ou n'est pas divisible par 11 ou 99, le nombre k sera ou ne sera pas divisible par 11 ou 99.

Si $m=3$, on aura $10^m-1=999=27.37$; et l'équation (2) prouve que tout nombre k est ou n'est pas divisible par 27 ou 37, lorsque la somme de ses tranches de trois chiffres est ou n'est pas un multiple de 27 ou de 37.

La même hypothèse de $m=3$, donne $10^m+1=1001=7.11.13$; et l'équation (3) fait voir que *tout nombre est ou n'est pas divisible par* 7, *par* 11 *ou par* 13, *lorsque la somme de ses tranches de trois chiffres de rangs impairs, moins la somme de ses tranches de trois chiffres de rangs pairs, donne un reste multiple ou non de* 7, *de* 11 *ou de* 13. Ainsi les deux nombres 34168897 et 567123889356 74 sont divisibles, le 1^er^ par 7 et le 2^e^ par 13.

Il existe des principes analogues aux précédens pour tous les systèmes de numération.

21. Après avoir trouvé les diviseurs *premiers* du nombre entier N (Arithmétique), et l'avoir ramené à la forme $N=a^m b^n c^p\dots$, si l'on veut obtenir tous ses diviseurs *composés*, on formera d'abord les *séries*

$$1, a, a^2, a^3, \dots, a^m; \quad 1, b, b^2, b^3, \dots, b^n; \quad 1, c, c^2, c^3, \dots, c^p; \text{ etc.}$$

Ensuite, on multipliera chaque terme de la 1^re^ série par chaque terme de la 2^e^; puis chaque terme de la série résultante par chaque terme de la 3^e^, et ainsi de suite. En effet, de cette manière, on a tous les produits des diviseurs simples a, b, c, etc., multipliés 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, etc.; et dans tous ces produits, les exposans de a, b, c, ..., ne surpassent pas m, n, p, etc.

Donc tous ces produits sont diviseurs de $a^m b^n c^p$ etc. ou de N, et il n'y en a pas d'autres.

22. La 1^{re} série a $m+1$ termes, la 2^e $n+1$, la 3^e $p+1$, etc. Or, en multipliant les $m+1$ termes de la 1^{re} série par un terme quelconque de la 2^e, on a évidemment $m+1$ produits : donc en multipliant chaque terme de la 1^{re} série par chaque terme de la 2^e, on aura $(m+1)(n+1)$ produits; en multipliant chaque terme de la série qui en résulte par chaque terme de la 3^e série, on aura $(m+1)(n+1)(p+1)$ produits; et ainsi de suite. Et comme ces produits sont tous les diviseurs de N, il s'ensuit que *pour savoir combien un nombre entier a de diviseurs, il faut le décomposer dans ses facteurs simples, puis ajouter l'unité à l'exposant de chacun de ces facteurs, et le produit des sommes résultantes sera le nombre de diviseurs demandé.*

Par exemple, le nombre $360 = 2^3 . 3^2 . 5^1$; donc le nombre de diviseurs de 360 est $(3+1)(2+1)(1+1)$ ou 24. En effet, si l'on forme les trois séries : 1, 2, 4, 8; 1, 3, 9 et 1, 5; qu'ensuite on opère comme il est dit plus haut (21), on verra que les diviseurs de 360, sont: 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180 et 360.

On reconnaîtra de même que 144 a 15 diviseurs, savoir : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72 et 144. On peut chercher tous les diviseurs de 5821200 et de 4370265900.

23. On appelle nombre *parfait* tout nombre égal à la somme de ses diviseurs, excepté lui-même. Cherchons un nombre N qui satisfasse à cette condition. D'abord N ne saurait être un nombre premier, car la somme de ses diviseurs, hors lui-même, ne serait que l'unité. Supposons donc que N soit de la forme $a^m b$, a et b étant premiers. Puisque $a^m b$ doit être égal à la somme de ses diviseurs, excepté lui-même, on a (22)

$$a^m b = (1+a+a^2+a^3+\dots+a^m)(1+b) - a^m b;$$

$$\text{d'où } b = \frac{a^m + (1+a+a^2+a^3+\dots+a^{m-1})}{a^m - (1+a+a^2+a^3+\dots+a^{m-1})}.$$

Or, b doit être un nombre entier; il faut donc que le dénominateur soit égal à l'unité, car si cela n'était pas, le reste de la division du numérateur de b par le dénominateur, serait $2(1+a+a^2+a^3+\dots+a^{m-1})$, et a étant positif, ce reste ne se réduirait pas à zéro; on doit donc avoir

$$a^m-(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{m-1})=1.$$

Cette équation détermine a, car elle revient à

$$a^m-\frac{a^m-1}{a-1}=1,\ \text{ou à}\ \frac{1+(a-2)a^m}{a-1}=1;$$

et on voit que l'hypothèse $a=2$ satisfait seule à la dernière égalité. La valeur 2 de a, donne

$$b=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{m-1}+2^m,$$
$$N=(1+2+2^2+2^3+\cdots+2^m)\times 2^m;$$

et pourvu que b soit premier, a l'étant déjà, cette valeur de N jouira de la propriété demandée. Ainsi, *pour avoir le nombre* N, *on additionnera les nombres* 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, *etc., jusqu'à ce qu'on obtienne une somme égale à un nombre premier; on multipliera cette somme par la dernière puissance de* 2, *à laquelle on s'est arrêté, et le produit satisfera à la question.* Par exemple, $1+2$, $1+2+4$, $1+2+4+8+16$, etc. donnent des nombres premiers; et en appliquant la règle précédente, on trouvera les nombres parfaits que voici :

6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, etc.

24. Il y a des nombres qu'on nomme *amiables* entre eux, à cause d'une propriété qui leur donne une sorte d'affinité. Elle consiste en ce que les parties aliquotes de l'un sont ensemble égales à l'autre, et que réciproquement, les parties aliquotes de celui-ci donnent une somme égale au premier. Par exemple, les deux nombres 220 et 284 sont amiables entre eux; car les parties aliquotes du 1^{er} sont 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 et celles du 2^{me}, 1, 2, 4, 71, 142; or, la somme des premières parties aliquotes donne 284, et la somme des dernières fournit 220. De même, 17296 et 18416 sont amiables, ainsi que 9363584 et 9437056. Nous ne pouvons démontrer ici la méthode pour trouver deux nombres amiables entre eux.

25. On sait que $2n$ exprime le n^{me} nombre pair et $2n-1$ le n^{me} nombre impair; car en faisant successivement $n=1$, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc., $2n$ fournit la suite des nombres pairs 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, etc., et $2n-1$ la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, etc. On place 0 parmi les nombres pairs.

26. *Suivant que le nombre* x *des diviseurs d'un nombre entier* N *est impair ou pair, ce nombre* N *est ou n'est pas un*

carré parfait. Car $N = a^m b^n c^p$ etc. et $x = (m+1)(n+1)(p+1)$ etc. (22); or, x ne saurait être impair que quand $m+1$, $n+1$, $p+1$, etc. sont des nombres impairs eux-mêmes; ce qui exige que m, n, p, etc. soient des nombres pairs, et que par suite, N soit un carré parfait. Ainsi 144 ayant 15 diviseurs est un carré parfait.

27. *La différence des carrés de deux nombres impairs est divisible par* 8; car on a $(2a-1)^2-(2b-1)^2 = 4(a-b)(a+b-1)$.

La différence entre le cube d'un nombre et ce nombre même est toujours divisible par 6; comme on le voit par $a^3 - a = a(a+1)(a-1)$.

28. *Tout nombre premier, excepté* 2 *et* 3, *augmenté ou diminué de l'unité, donne un résultat divisible par* 6; car tout nombre entier est compris dans l'une des 6 expressions $6n+1$, $6n+2$, $6n+3$, $6n+4$, $6n+5$ et $6n+6$. Mais les deux expressions $6n+1$ et $6n+5$ peuvent seules renfermer les nombres premiers; de sorte que si elles ne contenaient pas d'autres nombres, on en déduirait facilement tous les nombres premiers.

On n'a pas de formule qui renferme tous les nombres premiers seuls.

29. Voici encore plusieurs principes de divisibilité, faciles à démontrer par les premières règles de l'algèbre :

Tout nombre carré est divisible par 3, ou le devient étant diminué de l'unité.

Tout carré est divisible par 4, ou le devient dès qu'on le diminue de l'unité.

Tout carré est divisible par 5, ou le devient étant augmenté ou diminué de l'unité.

Tout carré impair, divisé par 8, donne 1 pour reste.

Si on prend au hasard deux nombres entiers, l'un des deux, ou leur somme, ou leur différence, est nécessairement divisible par 3.

Si deux nombres diffèrent de 2, leur produit augmenté de l'unité sera divisible par le nombre intermédiaire.

Le produit de deux nombres, augmenté du carré de leur demi-différence, est divisible par leur demi-somme.

Tout produit multiplié par la somme de ses deux facteurs augmentée de l'unité, donne un nombre divisible par 2.

La somme de trois nombres entiers consécutifs quelconques est toujours divisible par 3, ainsi que leur produit.

Soit un nombre quelconque de cinq chiffres ; soit posée une addition en écrivant les uns sous les autres et en avançant chaque fois d'un rang vers la droite, le premier chiffre à gauche du nombre de cinq chiffres, la somme des deux premiers, des 3 et des 4 premiers, v fois successives la somme des 5 chiffres, puis les sommes des 4, des 3, des 2 derniers chiffres et le dernier lui-même ; je dis que la somme des nombres ainsi disposés sera divisible par le nombre proposé de 5 chiffres, et donnera un quotient composé de $v + 4$ chiffres 1. Le nombre v peut être 0, 1, 2, 3, 4, ..., n.

Le principe précédent est vrai pour un nombre entier quelconque, quel que soit le nombre de chiffres.

De quelques équations résolubles comme celles du premier degré.

30. Il existe plusieurs méthodes particulières d'élimination, qu'il est utile de connaître, d'abord parce qu'elles rendent possible la résolution de certaines équations, et qu'ensuite elles font souvent trouver des simplifications qu'on ne saurait indiquer à l'avance. Voici par exemple, quatre équations où, en modifiant un peu la méthode par addition et soustraction, l'élimination devient très-facile :

$$\begin{aligned} x + y + z + u &= a \\ 2x + 2^2y + 2^3z + 2^4u &= b \\ 3x + 3^2y + 3^3z + 3^4u &= c \\ 4x + 4^2y + 4^3z + 4^4u &= d. \end{aligned}$$

En effet, si l'on prend la somme des produits respectifs de ces équations par -4, $+6$, -4 et $+1$, on aura

$$24u = 6b + d - 4(a+c);$$

d'où l'on tire la valeur de u. De même, la somme des produits respectifs des trois premières équations par -3, $+3$ et -1, donnera z au moyen de u ; la somme des produits des deux premières par -2 et $+1$, donnera y à l'aide de z et u, et l'on aura ensuite x.

Pour cinq équations pareilles aux précédentes, on prendrait la somme des produits par -5, $+10$, -10, $+5$ et -1, puis le reste s'achèverait comme on vient de l'indiquer.

31. Les équations suivantes se résoudront de la même manière :

$$ax + by + cz + du = h$$
$$a^2x + b^2y + c^2z + d^2u = h^2$$
$$a^3x + b^3y + c^3z + d^3u = h^3$$
$$a^4x + b^4y + c^4z + d^4u = h^4.$$

Prenons, en effet, la somme des produits respectifs de ces équations par $-bcd$, $+(bc+bd+cd)$, $-(b+c+d)$ et $+1$, réduisons et observons que $a(a-b)(a-c)(a-d)$ donne $a^4-(b+c+d)a^3+(bc+bd+cd)a^2-abcd$; nous trouverons

$$x = \frac{h(h-b)(h-c)(h-d)}{a(a-b)(a-c)(a-d)}.$$

Cette valeur de x fournira celles de y, z, u, en y changeant a en b et b en a, a en c et c en a, a en d et d en a. On résoudrait semblablement un plus grand nombre d'équations de même forme.

32. Voici deux systèmes d'équations qu'on ne saurait résoudre que par la substitution des valeurs :

$$axy = mx + a - m \text{ et } bxy = my + b - m;$$
$$xy = a(x+y),\; xz = b(x+z) \text{ et } yz = c(y+z).$$

Considérons seulement le 1er système, et substituons dans la 2^{me} équation, la valeur de y tirée de la 1re; alors, après avoir chassé le dénominateur, transposé dans le 1er membre, et réuni les multiplicateurs de $x-1$, nous aurons

$$(x-1)(bx+a-m) = 0.$$

On satisfait à cette équation finale de deux manières, ou par $x-1=0$, qui donne $x=1$ et $y=1$; ou bien par $bx+a-m=0$, qui fournit

$$x = \frac{m-a}{b} \text{ et } y = \frac{m-b}{a}.$$

Ces deux couples de valeurs satisfont effectivement aux deux équations proposées.

33. Généralement, lorsque les deux membres d'une équation ont des facteurs communs en x, cette équation est satisfaite en égalant chaque facteur à zéro, et sa résolution peut se trouver ainsi ramenée à celle d'équations du premier degré. Il est donc utile de chercher à décomposer les équations en facteurs inconnus; et c'est ce qu'on peut faire dans les deux systèmes d'équations que voici :

$axyz = m(xy + x) + a + m$	$x + y^2 + yz^2 = a(xyz - 1)$
$bxyz = m(yz + y) + b + m$	$y + z^2 + zx^2 = b(xyz - 1)$
$cxyz = m(xz + z) + c + m$	$z + x^2 + xy^2 = c(xyz - 1)$

Ces deux systèmes se traitant absolument par la même méthode, nous considérerons seulement le 1er. Retranchant donc successivement la 1re équation de la 2me multipliée par x, la 2me de la 3me multipliée par y et la 3me de la 1re multipliée par z; réduisant, transposant et réunissant les multiplicateurs de $xyz - 1$, on aura

$$\left.\begin{array}{l}(xyz - 1)(bx - a - m) = 0 \\ (xyz - 1)(cy - b - m) = 0 \\ (xyz - 1)(az - c - m) = 0.\end{array}\right\} \cdots (1)$$

Ces équations donnent d'abord

$$bx - a - m = 0, \quad cy - b - m = 0, \quad az - c - m = 0;$$

et les valeurs qui en résultent pour x, y, z, satisfont en effet aux équations proposées.

Les équations (1) donnent aussi $xyz - 1 = 0$, ou $xyz = 1$, valeur qui réduit les équations proposées aux trois

$$xy + x + 1 = 0, \quad yz + y + 1 = 0 \quad \text{et} \quad xz + z + 1 = 0.$$

Mais ces trois équations n'en font qu'une; car à cause de $xyz = 1$, les produits de la 1re par z et par yz donnent les deux autres équations. On n'a donc réellement, pour déterminer les trois inconnues x, y, z, que les deux équations

$$xyz = 1 \quad \text{et} \quad xy + x + 1 = 0;$$

ces inconnues ont donc une infinité de valeurs différentes. Par exemple, si $x = \frac{1}{2}$, on aura $y = -3$ et $z = -\frac{2}{3}$; valeurs qui rendent effectivement égaux les deux membres de chacune des équations proposées : si $x = 1$, il viendra $y = -2$ et $z = -\frac{1}{2}$; et ainsi de suite.

34. On résoudrait semblablement les trois groupes d'équations :

$$x + y^2 = a(xy - 1) \text{ et } y + x^2 = b(xy - 1);$$

$$\begin{array}{l} axyzu = m(xyz - xy + x) + a - m \\ bxyzu = m(yzu - yz + y) + b - m \\ cxyzu = m(zux - zu + z) + c - m \\ dxyzu = m(uxy - ux + u) + d - m; \end{array}$$

$$x+v^2+vz^2+vzu^2=a(xvzu-1)$$
$$v+z^2+zu^2+zux^2=b(xvzu-1)$$
$$z+u^2+ux^2+uxv^2=c(xvzu-1)$$
$$u+x^2+xv^2+xvz^2=d(xvzu-1).$$

On a des équations semblables pour 5, 6, 7, ..., inconnues. Il est aisé de résoudre l'équation

$$(1+a^2)(x^2-c^2)=2a(b-ac)(x-c).$$

35. L'emploi d'inconnues *auxiliaires* simplifie souvent la résolution des équations. Par exemple, si l'on a les trois égalités

$$x^2+v^2+z^2=a(x+v)=b(x+z)=c(v+z);$$

on posera $x^2+v^2+z^2=t$, puis on cherchera les valeurs de x, v, z, dans les trois équations résultantes

$$a(x+v)=t,\ b(x+z)=t \text{ et } c(v+z)=t;$$

ce qui donnera des expressions de la forme

$$x=pt,\ v=qt,\ z=rt,$$

p, q, r étant des nombres donnés. Substituant ces valeurs dans $x^2+v^2+z^2=t$, les deux membres seront divisibles par t, et il viendra $(p^2+q^2+r^2)t=1$. Cette équation faisant connaître l'auxiliaire t, on aura ensuite x, v et z.

36. C'est ainsi qu'on résoudra aisément chacun des groupes d'équations que voici :

$$x^2+v^2+s^2+u^2=\frac{423x}{8}=\frac{141v}{2}=\frac{423s}{5}=\frac{423u}{4};$$

$$x+\tfrac{1}{2}(v+s+u)=v+\tfrac{1}{3}(x+s+u)=$$
$$s+\tfrac{1}{4}(x+v+u)=u+\tfrac{1}{5}(x+v+s)=3700;$$

$$x+v+s=2u,\ v+s+u=\tfrac{2}{3}x,\ s+u+x=4v,$$
$$u+x+v=5s \text{ et } x^2+v^2+s^2+u^2=3872x.$$

Dans le deuxième système, l'inconnue auxiliaire est la somme des 4 inconnues proposées. Nous laissons encore à résoudre les systèmes d'équations qui suivent :

$$x+v=83s,\ x-v=17s \text{ et } xv=4950s;$$
$$x+v=38s,\ x-v=23s \text{ et } x^2+v^2=13811s;$$
$$x+v=as,\ x-v=bs \text{ et } x^2-v^2=cs;$$
$$\frac{x}{a^2-b^2}-\frac{(a-b)x}{(a+b)^2}-4ab(a-b)^2=\frac{x}{(a+b)(a-b)^2}-(a-b)(a+b)^2.$$

Nota. Le Recueil de problèmes d'Algèbre par M. LOBATO, contient un grand nombre d'équations qui se résolvent par une méthode particulière d'éliminer. Ce recueil, auquel je dois plusieurs idées, se distingue par le choix des questions qu'il renferme, et les élèves le consulteront avec fruit.

Problèmes résolubles comme ceux du 1er degré.

37. *Huit bœufs ont mangé en 7 semaines l'herbe d'un pré de 4 arpens et telle qui a crû pendant ce temps; 9 bœufs ont mangé en 8 semaines l'herbe d'un pré de 5 arpens et celle qui a crû pendant ces 8 semaines. Combien faudrait-il de bœufs pour manger en 12 semaines l'herbe d'un pré de 6 arpens et celle qui croîtra pendant ce temps? On suppose que les bœufs mangent tous également, que les prés sont également bons et que l'herbe y croît uniformément.*

Soit x le nombre de bœufs cherché, h l'herbe contenue d'abord sur chaque arpent et hu celle qui croît sur cet arpent par semaine. Puisque l'herbe croît uniformément, il est clair qu'en 7 semaines il en croîtra $7hu$, sur un arpent, et sur 4 arpens, qui produisent tous également, il en croîtra 4 fois $7hu$ ou $28hu$. D'ailleurs, l'herbe contenue d'abord sur ces 4 arpens est $4h$; donc 8 bœufs en 7 semaines ont mangé $4h+28hu$: et comme tous les bœufs mangent également, il s'ensuit qu'un bœuf en 1 semaine mange $\frac{1}{56}(4h+28hu)$.

On verra de même qu'un bœuf en une semaine mange, dans le 2e et le 3e pré, respectivement $\frac{1}{72}(5h+40hu)$ et $\frac{1}{12x}(6h+72hu)$: on a donc les deux équations

$$\frac{4h+28hu}{56}=\frac{5h+40hu}{72} \quad \text{et} \quad \frac{4h+28hu}{56}=\frac{6h+72hu}{12x}.$$

La 1re de ces équations donne $u=\frac{1}{28}$. Avec cette valeur, la 2e équation fournit $x=8$. Ce problème, traité d'une manière générale par Newton, a beaucoup d'analogie avec celui que voici :

38. *Quatre bassins d'eau, à faces rectangulaires, dans lesquels la pluie tombe et qui sont alimentés chacun par une source, ont respectivement pour surfaces de niveau 12, 20, 42 et 14 mètres carrés. On évacuerait l'eau de ces bassins en employant 5 ouvriers pendant 3 heures pour le 1er; 7 ouvriers*

pendant 4 heures, pour le 2e, et 12 ouvriers pendant 6 heures, pour le 3e. On demande le nombre z d'ouvriers qu'il faudra, pendant 7 heures, pour évacuer l'eau du 4e bassin. On suppose que l'eau est à la même hauteur inconnue x *dans les 4 bassins, au moment où l'opération commence; que la pluie y tombe avec une égale intensité; que les sources y amènent le même volume d'eau inconnu* u, *par heure, et qu'enfin tous les ouvriers évacuent chacun par heure, la même quantité d'eau inconnue* t.

Soit v la quantité dont la pluie qui tombe augmenterait par heure la hauteur de chaque bassin, s'il ne recevait et ne perdait point d'eau. La surface de l'eau dans un bassin étant a et sa hauteur x, son volume sera ax (*). De même, le volume d'eau de pluie qui tombe par heure dans ce bassin est av; et le volume qui y tomberait en h heures est ahv. Et comme le volume d'eau fourni par la source au même bassin en h heures est hu, il s'ensuit que le volume d'eau évacué de ce bassin, après h heures, est $ax + ahv + hu$. Mais en une heure chaque ouvrier évacue hors du bassin le volume t d'eau; donc n ouvriers en h heures évacueront le volume hnt. Et puisqu'après ces h heures le bassin est vide, il s'ensuit que $ax + ahv + hu = hnt$.

Substituant dans cette équation générale, les valeurs de a, h et n, relatives à chaque bassin, on aura

$$\begin{aligned} 12x + 36v + 3u &= 15t \\ 20x + 80v + 4u &= 28t \\ 42x + 252v + 6u &= 72t \\ 14x + 98v + 6u &= 6zt. \end{aligned}$$

Ces équations donnent $x = \frac{2}{3}t$, $v = \frac{1}{6}t$, $u = \frac{1}{3}t$ et $z = 4$. De sorte que le nombre d'ouvriers cherché est 4. Et si on suppose que chaque ouvrier évacue par heure 3 mètres cubes d'eau, on aura $x = 2$, $v = \frac{1}{2}$ et $u = 1$.

39. *Deux ouvriers travaillent immédiatement l'un après l'autre à un ouvrage, et le terminent 6 jours plus tard qu'il ne l'eût été s'ils avaient travaillé ensemble. Le 1er y a travaillé pendant les 3 cinquièmes du temps que le 2e emploierait seul pour faire tout l'ouvrage, et en a fait les 2 tiers de ce qu'il a*

(*) Les notions de géométrie que nous emploierons quelquefois dans ce traité, seront toujours peu étendues, et on pourra les considérer comme faisant partie des conditions de la question.

laissé. Combien de jours chaque ouvrier emploierait-il seul pour faire l'ouvrage proposé n ?

Soient x et u les nombres de jours cherchés : puisque le 1^{er} ouv. fait n d'ouvrage en x jours, en 1 jour il en fait $\frac{n}{x}$; donc en $\frac{3}{5}u$ de jours, temps pendant lequel il a travaillé à l'ouvrage n, il en a fait $\frac{3nu}{5x}$: il en a donc laissé à faire au 2^{me}, $n - \frac{3nu}{5x}$. Or, il a fait les $\frac{2}{3}$ de ce qu'il a laissé : on a donc cette 1^{re} équation

$$\frac{3nu}{5x} = \frac{2}{3}\left(n - \frac{3nu}{5x}\right).$$

D'un autre côté, il est clair qu'autant de fois l'ouvrage d'un jour du 2^{me} ouvrier sera contenu dans l'ouvrage qui lui a été laissé, autant de jours il aura mis à faire cet ouvrage ; ce nombre de jours est donc

$$\left(n - \frac{3nu}{5x}\right) : \frac{n}{u}, \text{ ou } u - \frac{3u^2}{5x}.$$

Donc, puisque les deux ouvriers ont travaillé immédiatement l'un après l'autre, l'ouvrage n'a été terminé qu'en

$$u - \frac{3u^2}{5x} + \frac{3}{5}u \text{ jours.}$$

Il est clair d'ailleurs que les 2 ouvriers emploient ensemble, pour faire l'ouvrage n, un nombre de jours marqué par

$$n : \left(\frac{n}{x} + \frac{n}{u}\right), \text{ ou } n : \frac{n(u+x)}{ux}, \text{ ou enfin } \frac{ux}{u+x}.$$

Mais d'après l'énoncé, ce dernier temps a 6 jours de moins que le temps précédent ; on a par conséquent cette 2^e équation

$$u - \frac{3u^2}{5x} + \frac{3}{5}u = \frac{ux}{u+x} + 6.$$

Il reste maintenant à résoudre les deux équations que l'on vient de trouver. Or, en chassant les dénominateurs dans chacune et réduisant, ces deux équations deviennent

$$3u = 2x \text{ et } 3x^2u + 5xu^2 - 3u^3 - 30x^2 - 30xu = 0.$$

Il est évident que l'élimination par addition et soustraction ne saurait être employée ici. Mais en prenant dans la 1^{re}, la valeur de u, puis substituant cette valeur dans la 2^{me} équation ; chassant les dénominateurs et réduisant les termes semblables, on aura

$$10x^3 - 150x^2 = 0, \text{ ou } 10x^2(x-15) = 0.$$

On peut satisfaire à cette équation finale en posant $x=0$, ce qui donne $s=0$; mais ces deux valeurs ne conviennent pas au problème proposé. Il faut donc prendre $x-15=0$, ou $x=15$, ce qui fournit $u=10$; et ces deux valeurs satisfont en effet à la question.

40. *Deux cuves renferment, l'une* a *mesures d'eau et l'autre* b *mesures; elles reçoivent par heure la* 1re c *mesures d'eau et la* 2e d *mesures. Trouver après quel nombre* x *d'heures la* 1re *cuve renfermera* n *fois autant d'eau que la* 2e.

Il est visible qu'après x heures, la 1re cuve renfermera $a+cx$ mesures d'eau et la 2e $b+dx$ mesures; on a par conséquent

$$a+cx = n(b+dx); \text{ d'où résulte } x = \frac{bn-a}{c-dn}.$$

Si $a=24$, $b=10$, $c=5$, $d=2$ et $n=2$, on aura $x=-4$; le problème est donc impossible, dans ce cas. Effectivement, puisque $24 > 2$ fois 10 et que $5 > 2$ fois 2, on voit que la 1re cuve aura toujours plus que 2 fois autant d'eau que la 2me; elle ne pourra donc jamais en avoir seulement 2 fois autant.

D'un autre côté, la valeur 4 de x étant négative, elle résout le problème que donne le proposé en y prenant l'inconnue x en *sens contraire*; c'est-à-dire en demandant *depuis quel nombre* x *d'heures la* 1re *cuve renfermait* 2 *fois autant d'eau que la* 2e. De sorte qu'il y a déjà 4 heures que la 1re cuve avait 2 fois autant d'eau que l'autre.

En effet, il y a 4 heures la 1re cuve renfermait 24—4 fois 5, ou 4 mesures d'eau, et la 2e, 10—4 fois 2, ou 2 mesures; la 1re cuve avait donc effectivement 2 fois autant d'eau que la 2e.

Si l'on change d en $-d$ et x en $-x$ dans l'équation et la formule primitives, elles deviendront:

$$a-cx = n(b+dx) \quad \text{et} \quad x = \frac{a-bn}{c+dn};$$

le problème résolu est donc alors : *Deux cuves renferment, l'une* a *mesures d'eau et l'autre* b *mesures; par heure la* 1re *reçoit* c *mesures d'eau et la* 2me *en perd* d *mesures. Trouver depuis quel nombre* x *d'heures la* 1re *avait* n *fois autant d'eau que la* 2me.

Examinons ce que devient la formule proposée sous les trois hypothèses $bn = a$ et $c = dn$, $bn > a$ et $c = dn$, $bn > a$ et $c < dn$.

1° Si $a = bn$ et $c = dn$, on aura $x = \frac{0}{0}$, et le problème sera indéterminé. En effet, $a = bn$ dit que la 1re cuve avait d'abord n fois autant d'eau que la 2e; et $c = dn$ montre que la 1re cuve reçoit par heure n fois autant d'eau qu'en reçoit l'autre; la 1re cuve aura donc toujours n fois autant d'eau que la 2e, quel que soit le nombre x d'heures employé; ce nombre d'heures est donc arbitraire.

2° Si $a < bn$ et $c = dn$, il viendra $x = \infty$, et conséquemment le problème est alors impossible. Effectivement, la 1re cuve reçoit bien par heure n fois autant d'eau que la 2me; mais comme d'abord elle n'en avait pas n fois autant, il s'ensuit que jamais la 1re cuve n'aura n fois autant d'eau que l'autre, et que par conséquent le problème demande une chose impossible.

3° Enfin, si $a < bn$ et $c < dn$, la valeur de x sera négative; le problème sera donc impossible. Cela doit être en effet, car les deux parties a et cx de l'eau de la 1re cuve étant moindres que n fois les deux parties b et dx de l'eau de la 2e, jamais la 1re cuve n'aura n fois autant d'eau que l'autre.

Mais puisque la valeur de x est négative, elle résout le problème que donne le proposé en y prenant l'inconnue x dans une acception opposée, et par conséquent en demandant *depuis quel nombre* x *d'heures la* 1re *cuve avait* n *fois autant d'eau que la* 2me.

La discussion précédente, suffit pour montrer comment on traiterait tout autre problème du premier degré.

41. Voici les énoncés d'un grand nombre de problèmes, propres à exercer à la mise en équation, et même à la discussion :

Quel est le nombre qui en contient un autre 3 fois et qui le surpasse de 8? (R. c'est 12.)

Dans la composition d'une certaine quantité de poudre, il fallait la moitié de tout le poids, plus 6 livres de salpêtre; le tiers, moins 5 livres de souffre, et le quart, moins 3 livres de charbon. Quel est ce poids? (R. 24 livres.)

On distribue 252ˢ à un certain nombre de pauvres, hommes, femmes et enfans; les hommes reçoivent 12ˢ chacun, les femmes 6ˢ et les enfans 3ˢ; le nombre des femmes est double de celui des hommes, moins 2, et celui des enfans triple de celui des femmes, moins 4. Combien y a-t-il d'hommes, de femmes et d'enfans? (R. 7, 12 et 32.)

Les biens de A sont les 3 quarts de ceux de B; mais A perdant 24^f et B en gagnant 16, les biens de A ne se trouvent plus que les 2 tiers de ceux de B. Combien avaient-ils chacun? (R. 312^f et 416.)

Quel est le nombre x dont le cube de la moitié vaille 9 fois le carré de son tiers? (R. c'est 8.)

Si un homme était mort 12 ans plutôt, il aurait été marié le tiers de sa vie; mais s'il eût vécu encore 8 ans, il eût été marié pendant les 4 septièmes de son âge. A quel âge est-il mort et pendant combien de temps a-t-il été marié? (R. à 62 ans; pendant 32 ans.)

Deux voyageurs se mettent en route chacun avec une certaine somme d'argent. Arrivés dans un bois, ils sont rencontrés par des voleurs qui prennent au 1er le tiers de ce que possède le 2^e, et à celui-ci le quart de ce que possède l'autre; en sorte que le 1er n'a plus que les 2 cinquièmes de ce qui reste au second. A l'issue de la forêt, ils sont rencontrés encore par d'autres voleurs; mais ceux-ci n'ayant pris que 4 fr. au 1er voyageur, après en avoir pris 50 au 2^e, ce dernier n'a plus que la moitié de l'autre. Combien avaient-ils chacun en partant? (R. 72^{fr} et 48.)

Un colonel voulant attaquer un poste ennemi avec l'un des 3 bataillons qu'il commande, promet une récompense de 901 louis, qui sera distribuée comme il suit: chaque soldat du bataillon qui attaquera recevra un louis et le reste sera partagé également entre les soldats des deux autres bataillons. Or, suivant que l'attaque est faite par le 1er, ou par le 2^e, ou par le 3^e bataillon, les soldats des deux autres reçoivent chacun un demi, ou un tiers, ou un quart de louis. Combien y a-t-il de soldats dans chacun des bataillons? (R. 265, 583 et 689.)

La somme des trois produits différens qu'on obtient en multipliant 2 à 2 trois nombres inconnus, augmente de 100, lorsque ces nombres augmentent respectivement de 3, de 2 et de 1; la même somme diminue de 7, quand le 1er nombre augmente de 4 et le 2^{me} diminue de 3; enfin, cette somme diminue de 47, lorsque le 1er nombre augmentant de 6, les deux autres diminuent respectivement de 2 et de 5. Quels sont ces trois nombres inconnus? (R. 8, 6 et 9.)

Un marchand achète un certain nombre d'aunes d'une toile dont 18 aunes coûtent 62^f. S'il eût acheté 6 aunes de moins et qu'il eût revendu ensuite le quart de sa toile à 12^f pour 9 aunes et les trois autres quarts à 26^f pour 12 aunes, il aurait reçu 56^f un tiers de moins qu'il n'a d'abord payé. Combien d'aunes a-t-il donc achetées? (R. 30.)

Chaque partie perdue prend à un joueur le 5^{me} de l'argent qu'il avait en commençant cette partie, et chaque partie gagnée lui donne le tiers de ce qu'il avait en la commençant. Une personne joue 4 parties : elle perd la 1re et dépense en outre 30^f; elle gagne la 2^{me} et donne 4^f à un pauvre; elle perd la 3^e et donne 60^f à son domestique; enfin, elle gagne la 4^{me} et paie une dette de 200^f. Alors il lui reste les 5 sixièmes de ce qu'elle avait en entrant au jeu. Combien avait-elle? (R. 1200^f.)

Partager 317 en 4 parties telles, que la 1[re] plus le tiers des trois autres, la 2[e] plus le quart des 3 autres, et la 3[e] plus le 5[e] des trois autres, donnent trois nombres égaux. Quelles sont ces parties? (R. 47, 77, 92 et 101.)

Cinq enfans et leur mère ont à se partager 135 louis, de manière que chaque enfant, à partir du plus jeune, prendra autant de louis qu'il a d'années et en sus le 10[e] du reste. Par cette disposition, les enfans ont des parts égales, et la mère reçoit autant de louis qu'il y a d'unités dans la somme des âges des cinq enfans. Quels sont ces âges? (R. 5, 7, 9, 11 et 13 ans.)

Trouver deux nombres dans le rapport de 3 à 4, et dont la somme soit à celle de leurs carrés :: 7 : 50. (Les nombres sont 6 et 8.)

La somme des carrés de deux nombres vaut 17 fois la différence de ces nombres, laquelle n'est que le quart de leur somme. Quels sont ces deux nombres? (R. 5 et 3.)

Le produit de deux nombres est 12, tandis que la différence de leurs cubes est au cube de leur différence :: 13 : 4. Quelles valeurs ont-ils? (R. 6 et 2.)

On avait une certaine somme pour acheter 1 aune de drap de Louvier à 5 huitièmes de large. Comme on vient de dépenser une partie de cette somme, le reste ne peut payer qu'une aune de drap d'Elbeuf à 7 huitièmes. Mais si chacun des 15^s de ce reste devenait 5#, on pourrait acheter une aune de drap d'Elbeuf à 7 huitièmes, 2 aunes de drap de Sedan à 7 huitièmes et acquitter une dette de 140#. Combien avait-on d'abord? On sait qu'à dimensions égales le drap d'Elbeuf vaut les 2 tiers du drap de Louvier et le drap de Sedan en vaut les 4 tiers. (R. 90#.)

Deux joueurs conviennent que celui qui perdra triplera l'argent de l'autre. Ayant perdu chacun une partie, le premier sort du jeu avec 45[f] et le 2[e] avec 30[f] de moins que 3 fois son argent avant de jouer. Combien avaient-ils chacun en entrant au jeu? (Indéterminé.)

En 1812 il s'était écoulé, depuis la mort de Newton, autant d'années que ce savant a vécu. Si Descartes était mort 15 ans plus tard, il aurait eu les 2 tiers de son âge au moment où Newton naquit. Celui-ci était au 17[e] de son âge 3 ans avant la mort de Descartes. Enfin 23 ans après la mort de Newton, il y avait un siècle que Descartes avait cessé de vivre. On demande les époques de la naissance et de la mort de chacun de ces deux grands géomètres.

Quel nombre x devrait-on ajouter à deux nombres donnés a et b, pour que la 1[re] somme valût c fois la 2[e]? (Si $a = 24$, $b = 10$ et $c = 3$, on aura $x = -3$.)

Quel nombre x faut-il ajouter à 4 nombres donnés a, b, c, d, pour que le produit des deux premières sommes soit égal au produit des deux autres? (On peut changer les signes de a, b, c, d.)

Une personne dépense tous les ans la c^{me} partie de l'argent qu'elle a entre les mains. Elle reçoit a flor. au bout de chaque année, et possède, après 4 ans, une somme qui excède de a florins la somme qu'elle avait d'abord, diminuée de son quotient par c^2. Combien cette personne avait-elle d'abord ? (On peut faire $a=120$ et $c=3$.)

Les biens d'un négociant, qui possède a flor., produisent b flor. pour c flor. d'intérêt par an. Combien doit-il dépenser au commencement de chaque année, pour qu'après 3 ans, non-seulement il n'ait plus rien, mais doive le produit de la dépense cherchée par la somme du carré et du cube du quotient de b par c ? (Dans ce problème et le précédent, la formule se simplifie en divisant ses deux termes par une même quantité.)

Quels sont les biens de trois personnes ? On sait que les biens de chacune, plus n fois les biens des deux autres, font a pour la 1^re^, b pour la 2^me^ et c pour la 3^me^.

Quels sont les biens de trois personnes ? On sait que les biens de la 1^re^, plus a fois ceux des deux autres ; les biens de la 2^e^, plus b fois ceux des deux autres ; les biens de la 3^e^, plus c fois ceux des deux autres, donnent trois sommes égales chacune à d. (Prendre $a=2$, $b=3$, $c=4$ et $d=1200$.)

Trouver trois nombres proportionnels à m, n, p, et tels qu'en les augmentant respectivement de a, b, c, la somme de leurs produits deux à deux soit augmentée de d.

Trouver les deux facteurs d'un produit, de manière qu'étant proportionnels aux deux nombres a et b, si on les augmente respectivement de ces deux nombres, le nouveau produit surpasse le 1^er^ de c. (Faire $a=6$, $b=4$ et $c=48$.)

Quels sont les biens x et y de deux personnes ? On sait que si elles recevaient chacune a fl., la 1^re^ aurait m fois autant que la 2^e^ ; mais que si elles perdaient chacune b florins, la 2^e^ aurait n fois autant que la 1^re^. (Prendre $a=360$, $b=120$, $m=2$ et $n=4$.)

Trouver les termes de deux fractions dont a est la somme et b la différence. On sait que c est la somme de leurs numérateurs et d celle de leurs dénominateurs.

Trouver six quantités A, B, C, D, E, F, connaissant les différences a, b, c, de B à A, de D à C, de F à E, ainsi que les rapports m, n, p, de A à C, de D à E et de F à B. (Toutes les inconnues dépendent de C. Même problème pour 8, pour n quantités.)

On a deux vases contenant chacun un mélange d'eau et de vin ; on verse le c^{me} du 1^er^ dans le 2^e^, puis le c^{me} du 2^e^ dans le 1^er^. Alors les deux vases contiennent chacun a litrons d'eau et b de vin. Combien y avait-il d'abord d'eau dans chacun ?

Il y a de l'eau dans trois vases : on verse le c^{me} de l'eau du 1^er^ dans le 2^e^, puis le c^{me} de l'eau du 2^e^ dans le 3^e^ et le c^{me} de l'eau du 3^e^ dans le 1^er^ ; alors les trois vases contiennent chacun a litrons d'eau : Combien y en avait-il d'abord dans chacun ?

Il y a de l'eau dans trois vases : on verse dans le 1^er^, le n^{me} de l'eau des deux autres; dans le 2^e, le n^{me} de l'eau des deux autres; dans le 3^e, le n^{me} de l'eau des deux autres : alors les vases renferment chacun a litrons d'eau. Combien en avaient-ils d'abord chacun?

Un homme a trois espèces de vins dans trois tonneaux A, B, C, contenant le 1^{er} a litrons de vin, le 2^{me} b litrons et le 3^{me} $a+b$. Il verse la moitié des vins de A et B dans C, puis le tiers du mélange dans B et b litrons du 2^e mélange dans A. Sachant que le litron du 1^{er} mélange vaut celui du 1^{er} vin, celui du 2^e mélange un du 2^e vin, et que le litron du 2^e mélange coûte $a+b$ centimes, on demande quels sont les prix des vins proposés? (Si $a=10$ et $b=6$, le 1^{er} vin coûtera 48^c et le 3^e 6^c.)

Problèmes d'analyse indéterminée.

42. *Former la longueur du mètre en plaçant des pièces d'or de 20 francs et de 40 fr. les unes à la suite des autres et en ligne droite.*

On sait que les longueurs respectives des diamètres des pièces de 20 et de 40 fr., sont 21 et 26 millimètres; donc si l'on prend x pièces de 20 fr. et v de 40, la somme $21x+26v$ millimètres des longueurs des diamètres de ces pièces devra égaler le mètre ou 1000 millimètres. Il suffit donc de chercher les valeurs entières de x et de v qui satisfont à l'équation

$$21x+26v=1000.$$

Or, d'après la méthode tracée en algèbre, on aura successivement :

$$x=47-v+\frac{13-5v}{21},\quad x=47-v+u \text{ et } u=\frac{13-5v}{21};$$

$$v=2-4u+\frac{3-u}{5},\quad v=2-4u+u' \text{ et } u'=\frac{3-u}{5};$$

$$\text{d'où } u=3-5u'.$$

D'après ces valeurs, on trouve, en remontant à celles de v et de x,

$$v=21u'-10 \text{ et } x=60-26u'.$$

Ainsi le problème n'a que les deux solutions entières et positives qui répondent à $u'=2$ et $u'=1$, savoir :

$$v=32 \text{ et } x=8,\quad v=11 \text{ et } x=34.$$

Par conséquent pour former la longueur du mètre avec le plus petit nombre possible de pièces de 20 fr. et de 40 fr., il faut prendre 8 pièces de 20 fr. et 32 de 40. La 2^{me} solution fournit le moyen de composer la longueur du mètre avec la plus petite somme d'argent possible.

Lorsqu'on assigne d'autres valeurs à u', l'une des inconnues x et v devient négative. Par exemple, si l'on prend $u'=3$, on aura $v=53$ et $x=-18$; ce qui indique qu'on forme la longueur du mètre en plaçant en ligne droite 53 pièces de 40 fr. les unes à la suite des autres, puis en portant 18 pièces de 20 fr. en sens contraire, en revenant de la dernière pièce de 40 fr. à la première : la distance de la dernière pièce de 20 fr. à la première de 40, est 1000 millimètres ou un mètre.

43. *Trouver de combien de manières on peut remplir l'espace autour d'un point sur un plan, en y réunissant l'angle d'un carré avec les angles de deux autres polygones réguliers.*

Soit d l'angle droit; on sait que les angles de deux polygones réguliers, ayant l'un x et l'autre v côtés, valent respectivement

$$\frac{2d}{x}(x-2) \quad \text{et} \quad \frac{2d}{v}(v-2).$$

Et comme l'espace autour d'un point vaut $4d$, il s'ensuit que

$$d+\frac{2d}{x}(x-2)+\frac{2d}{v}(v-2)=4d;\ \text{d'où}\ xv=4x+4v.$$

Cette équation donne $x=\frac{4v}{v-4}=4+\frac{16}{v-4}$:

donc, pour que x soit un nombre entier positif, il faut que $v-4$ soit un des diviseurs positifs de 16. Prenant donc successivement

$$\begin{aligned} v-4&=1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\\ \text{on aura}\quad v&=5,\ 6,\ 8,\ 12,\ 20,\\ x&=20,\ 12,\ 8,\ 6,\ 5. \end{aligned}$$

On voit que les valeurs de x sont, dans un ordre inverse, les mêmes que celles de v; ce qui doit être, puisque l'équation du problème est *symétrique* par rapport à x et v, c'est-à-dire ne change pas en y mettant x à la place de v et v à la place de x. On ne doit donc considérer que les trois premiers systèmes de valeurs; et il en résulte, qu'on peut remplir l'espace autour d'un point sur un plan, en y réunissant l'angle d'un carré, 1° avec l'angle d'un pentagone et celui d'un polygone régulier de 20 côtés; 2° avec l'angle d'un hexagone et celui d'un dodécagone régulier; 3° enfin, avec deux angles d'un octogone régulier.

44. *Trois femmes portent au marché, l'une 10 perdrix, l'autre 25 et la 3^{me} 30. Ayant vendu de leurs perdrix à un certain prix, elles vendent le reste à un autre prix, et rapportent chacune la même somme d'argent. Combien ont-elles vendu de perdrix chacune à chaque prix, et quels sont ces prix?*

Soit u le 1er prix, v le 2^{e} et x, t, s les nombres de perdrix vendues respectivement par les trois femmes au 1er prix; les nombres de perdrix vendues au 2^{me} prix, sont respectivement $10-x$, $25-t$ et $30-s$. On n'aura donc que deux équations différentes, que l'on peut écrire comme il suit :

$$t=x-\frac{15v}{u-v} \quad \text{et} \quad s=x-\frac{20v}{u-v}.$$

Comme x ne saurait surpasser 10, on ne peut supposer $u-v=v$; il faut donc que $u-v$ divise 15 et 20, sans quoi t et s ne pourraient être des nombres entiers. Mais 5 est le seul nombre >1 qui divise 15 et 20; on doit donc avoir $u-v=5$, puis $t=x-3v$ et $s=x-4v$. Enfin, à cause que x ne saurait surpasser 10, v ne peut avoir que les deux valeurs 1 et 2. De là résulte donc que le problème n'est susceptible que des 10 solutions que voici :

1° pour $v=1$, qui donne $u=6$, on aura $x=4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$,
$t=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ et $s=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$;

2° pour $v=2$, qui fournit $u=7$, il vient $x=8, 9, 10$,
$t=2, 3, 4$ et $s=0, 1, 2$.

45. *Une montre marque les heures, les minutes et les secondes; les trois aiguilles sont sur la 12^{e} heure; il s'agit de trouver les rencontre deux à deux et trois à trois de ces aiguilles.*

Le cadran étant divisé en 60 parties égales, il est clair que pendant une heure, les aiguilles parcourent respectivement 5, 60 et 3600 de ces divisions. Or, pour que deux aiguilles se rencontrent, il faut et il suffit que la distance parcourue par l'une soit égale à celle que l'autre aiguille a parcourue dans le même temps, plus un nombre exact de circonférences. Si donc x désigne le nombre d'heures employées par la 2^{e} aiguille pour atteindre la 1re, et que n soit un nombre entier positif quelconque, on aura $$60x=5x+60n.$$

De même, t et s étant les nombres respectifs d'heures employées par la 3^{me} aiguille, pour rencontrer la 1^{re} et la 2^{me}, il viendra

$$3600t = 5t + 60n' \text{ et } 3600s = 60s + 60n''.$$

On tire de ces trois équations

$$x = \frac{12n}{11}, \quad t = \frac{12n'}{719} \quad \text{et} \quad s = \frac{12n''}{708}.$$

Il est visible qu'une aiguille qui va plus vîte qu'une autre, l'a rencontrée autant de fois qu'elle a décrit de circonférences de plus qu'elle, dans le même temps ; de sorte que la 2^{me} aiguille rencontre n fois la 1^{re}, dans un temps marqué par la valeur précédente de x ; et ainsi des autres.

Maintenant, puisque la 2^{me} aiguille rencontre la 1^{re} dans un temps x, et que la 3^{e} rencontre aussi la 1^{re} dans un temps t, il est évident que les deux dernières aiguilles seront au-dessus de la 1^{re}, dès que les temps x et t seront égaux. Par conséquent la rencontre des trois aiguilles est réduite à trouver les valeurs entières et positives de n et n' qui satisfont à l'équation

$$\frac{12n}{11} = \frac{12n'}{719}, \quad \text{ou} \quad n = \frac{11n'}{719}.$$

Or, ces valeurs de n et n' sont données par les deux formules

$$n' = 719v \text{ et } n = 11v; \text{ d'où } x = 12v.$$

Ainsi, la 1^{re} rencontre des trois aiguilles aura lieu dans 12 heures, l'aiguille des minutes aura rencontré 11 fois celle des heures, l'aiguille des secondes aura rencontré 719 fois celle des heures et 708 fois celle des minutes.

46. L'analyse indéterminée peut s'appliquer à la construction des *carrés magiques*, ainsi nommés, parce que les anciens leur attribuaient de grandes vertus, et que la disposition des nombres qui composent ces carrés, formait la base et le principe de plusieurs de leurs talismans.

On appelle carré magique, un carré divisé en plusieurs autres petits carrés égaux, dans lesquels se trouvent des nombres tels, que ceux de chaque bande, soit horizontale, soit verticale, soit diagonale, donnent toujours la même somme ou le même produit.

47. Considérons, par exemple, un carré divisé en neuf carrés

égaux ; il s'agit de placer dans chacun de ces carrés, un nombre tel, que les trois nombres qui composent chaque bande horizontale, verticale et diagonale, donnent une somme constante n. On aura donc les huit équations que voici :

g	h	i
d	e	f
a	b	c

$$a+b+c=n$$
$$d+e+f=n$$
$$g+h+i=n$$
$$a+d+g=n$$
$$b+e+h=n$$
$$c+f+i=n.$$
$$a+e+i=n$$
$$c+e+g=n.$$

Eliminant entre ces équations, prises deux à deux, ce qui peut se faire de plusieurs manières, on trouvera toujours des résultats qui fourniront les mêmes conséquences. Par exemple, si l'on élimine d'abord i, puis f, c, e, h, d, on trouvera les valeurs que voici :

$$b=\tfrac{1}{3}n+g-a,\quad d=n-a-g,\quad h=\tfrac{1}{3}n+a-g,\quad e=\tfrac{1}{3}n,$$
$$c=\tfrac{2}{3}n-g,\quad i=\tfrac{2}{3}n-a \text{ et } f=a+g-\tfrac{1}{3}n.$$

Il existe une infinité de carrés magiques qui satisfont aux conditions demandées, car les trois quantités a, g, n peuvent être prises à volonté, pourvu cependant qu'il n'en résulte pas de nombres fractionnaires, ni de nombres négatifs. Par exemple, les trois hypothèses $n=15$, $a=4$ et $g=2$, puis $n=24$, $a=3$ et $g=7$, enfin $n=33$, $a=7$ et $g=6$, fournissent les trois carrés magiques qui suivent :

2	7	6
9	5	1
4	3	8

7	4	13
14	8	2
3	12	9

6	12	15
20	11	2
7	10	16

48. Proposons-nous maintenant de placer, dans chacun des 9 carrés qui composent le carré primitif, un nombre tel, que le produit des trois nombres qui forment chaque bande horizontale, verticale et diagonale, soit un nombre constant n. Il est clair qu'on aura à traiter en nombres entiers les huit équations que voici :

$$abc=n,\quad def=n,\quad ghi=n,\quad adg=n,$$
$$beh=n,\quad cfi=n,\quad aei=n,\quad ceg=n.$$

Prenant les valeurs de f, d, e, i, h, g, on trouvera

$$c=\frac{n}{ab},\quad d=\frac{n}{a^2b}\sqrt[3]{n},\quad e=\sqrt[3]{n},\quad f=\frac{a^2b}{n}\sqrt[3]{n},$$

$$g=\frac{ab}{n}\sqrt[3]{n^2},\quad h=\frac{1}{b}\sqrt[3]{n^2}\ \text{ et }\ i=\frac{1}{a}\sqrt[3]{n^2}.$$

On voit que les nombres a, b, n sont arbitraires ; il faudra seulement les choisir tels que toutes les valeurs soient des nombres entiers. Par exemple, on peut faire les trois suppositions, 1° $a=4$, $b=9$ et $n=1728=(12)^3$; 2° $a=8$, $b=256$ et $n=4096=(16)^3$; 3° $a=6$, $b=100$ et $n=27000=(30)^3$; il en résultera les trois carrés magiques que voici :

3	16	36
144	12	1
4	9	48

128	1	32
4	16	64
8	256	2

20	9	150
225	30	4
6	100	45

49. Les exemples précédens suffisent pour montrer comment on construirait des carrés magiques d'un plus grand nombre de petits carrés ; on peut consulter à ce sujet le premier volume des Récréations mathématiques et physiques d'Ozanam. Voici encore trois carrés magiques :

20	28	1	9	17
27	5	8	16	19
4	7	15	23	26
11	14	22	25	3
13	21	29	2	10

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

1	63	62	4
60	6	7	57
8	58	59	5
61	3	2	64

50. *Déterminer deux nombres entiers* x *et* y, *dont la somme des carrés soit aussi un carré.*

L'identité $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$ satisfait à cette condition, en prenant $x=a^2-b^2$, $y=2ab$ et $z=a^2+b^2$; car alors on aura

$$x^2+y^2=z^2,$$

quelques valeurs qu'on donne aux deux nombres a et b ; de sorte que si on ne prend pour a et b que des nombres entiers, x, y, z seront entiers pareillement. Par exemple, si on fait successivement

$a=2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, \ldots$
$b=1, 2, 1, 3, 2, 4, 1, 5, 2, 4, 6, 1, 3, 5, 7, 2, 4, 8, \ldots$

il viendra successivement

$x=3, 5, 15, 7, 21, 9, 35, 11, 45, 33, 13, 63, 55, 39, 15, 77, 65, 17, \ldots$
$y=4, 12, 8, 24, 20, 40, 12, 60, 28, 56, 84, 16, 48, 80, 112, 36, 72, 144, \ldots$
$z=5, 13, 17, 25, 29, 41, 37, 61, 53, 65, 85, 65, 73, 89, 113, 85, 97, 145, \ldots$

C.

Et comme on a aussi $z^2 - y^2 = x^2$, ces valeurs résolvent aussi le problème où l'on demanderait deux carrés entiers, dont la différence fût un carré entier.

51. *Trouver deux carrés entiers dont la différence soit un nombre entier donné.* Il s'agit de résoudre en nombres entiers l'équation $x^2 - y^2 = a$. Pour cela, il suffira de prendre $x = y + z$; car alors on aura

$$y = \frac{a - z^2}{2z} \quad \text{et} \quad x = \frac{a + z^2}{2z}.$$

Il ne reste plus qu'à choisir z de manière que ces deux valeurs soient des nombres entiers. Par exemple, si l'on prend successivement

$$\begin{array}{rl} & a = 12,\ 15,\ 24,\ 35,\ 48,\ 63, \ldots \\ & z = \ 2,\ \ 3,\ \ 4,\ \ 5,\ \ 6,\ \ 7; \ldots \\ \text{on aura} & y = \ 2,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1, \ldots \\ & x = \ 7,\ \ 4,\ \ 5,\ \ 6,\ \ 7,\ \ 8, \ldots \end{array}$$

De là il est facile de trouver des nombres entiers pour u et v, dans les deux équations $x \pm a = u^2$ et $x \pm b = v^2$, ou dans les deux $a - x = u^2$ et $b - x = v^2$, a et b étant entiers : il suffira de retrancher ou d'ajouter ces équations.

52. Si l'on voulait trouver pour x et y des valeurs rationnelles propres à rendre un carré parfait le binome $x^2 + my^2$, ou le trinome $x^2 - 2mxy + ny^2$, il faudrait égaler ce binome ou ce trinome à $(x + u)^2$, et résoudre l'équation résultante par rapport à x.

53. Pour donner à x et y des valeurs rationnelles propres à rendre des carrés parfaits les deux quantités $mx^2 + nxy$ et $(mx + ny)(m'x + n'y)$, on égalera la première à $\frac{p^2}{q^2}x^2$ et la deuxième à $\frac{p^2}{q^2}(mx + ny)^2$.

54. Considérons le trinome $ax^2 + bxy + cy^2$, et prenons $x = y + z$ et $a + b + c = m^2$; nous le réduirons ainsi à $m^2y^2 + (2a + b)yz + az^2$. Egalant ce dernier trinome à $(my + u)^2$, on verra qu'on peut toujours trouver pour x et y des valeurs rationnelles capables de rendre le premier trinome proposé, un carré, pourvu que $a + b + c$ soit le carré d'un nombre m, comme cela a lieu dans chacun des polynomes : $2x^2 + 2y^2$, $2x^2 - y^2$, $3x^2 + 6xy + 7y^2$, $7x^2 - 3xy + 5y^2$.

55. Si l'on veut résoudre en nombres rationnels, l'équation $x^2+y^2=a^2+b^2$, il suffira de prendre

$$a-x=\frac{v}{u}(y-b); \text{ d'où } a+x=\frac{u}{v}(y+b).$$

Ces deux équations feront connaître les valeurs cherchées de x et de y, en fonctions des arbitraires u et v et des nombres donnés a et b.

56. Pour avoir les valeurs de t et de v qui rendent x et y rationnels dans les deux équations

$$x^2 \pm a(x+y)=t^2 \text{ et } y^2 \pm b(x+y)=v^2,$$

on posera $t=x+z$ et $v=y+u$.

57. S'il faut trouver les valeurs de v qui rendent l'inconnue x rationnelle dans chacune des équations

$$x^2=a^2v^2+b, \quad x^2=av^2+b^2 \text{ et } x^2=(av+b)(a'v+b'),$$

on fera $x=av+u$ dans la première, $x=uv+b$ dans la deuxième, et $x=u(av+b)$ dans la troisième.

58. Nous ne pousserons pas plus loin la recherche des valeurs rationnelles des inconnues dans les équations indéterminées d'un degré supérieur au premier, parce que cette recherche est une des plus difficiles de l'analyse algébrique. Nous renvoyons pour cet objet, au 2e volume de l'Algèbre d'Euler, enrichie de notes par Lagrange, ainsi qu'à la théorie des nombres de M. Legendre, et aux recherches arithmétiques de M. Gauss.

59. Voici quelques problèmes faciles à résoudre, d'après ce qui précède :

Un laboureur doit 400f. N'ayant point d'argent, il offre en paiement des brebis à 14f pièce et des agneaux à 10f. De combien de manières peut-il acquitter sa dette? (R. De cinq manières.)

Trouver en nombres entiers les côtés d'un rectangle, dont la surface contienne 4 fois autant de mètres carrés que son contour contient de mètres. (Quatre solutions.)

De combien de manières peut-on remplir l'espace autour d'un point avec l'angle d'un triangle équilatéral et les angles de deux autres figures régulières? (De cinq manières.)

Trouver en nombres entiers les côtés d'un rectangle qui soit à un carré dont le côté vaut 12, comme le contour du premier est au contour du deuxième. (Quatre rectangles.)

Le côté d'un cube est 8; on demande, en nombres entiers, les dimensions d'un parallélipipède rectangle, à base carrée, de manière que sa capacité et celle du cube soient entre elles comme leurs surfaces? (Quatre solutions.)

Trouver en nombres entiers les dimensions d'un parallélipipède rectangle à base carrée, dont la capacité vaut 5 fois autant de mètres cubes que sa surface contient de mètres carrés. (Douze solutions.)

Une marchande modiste a échangé du mérinos à 8^f la robe contre des chapeaux de paille à 19^f et a donné 43^f de retour. De combien de manières a-t-elle pu varier son marché?

Pour 1964^f on achète 100 bêtes, savoir : des veaux à 24^f pièce, des chèvres à 20 et des moutons à 18. Combien aura-t-on de bêtes de chaque espèce?

On a des vins à 50, à 80, à 100 et à 150 cents le litron. Trouver en nombres entiers le nombre de litrons de chaque espèce qu'il faut prendre pour former un mélange de 100 litrons, coûtant 90 florins en tout.

Un nombre multiple de 3 et compris entre 100 et 300, étant divisé par 7, donne 1 pour reste; mais si on le divise par 10, il restera 6. Quel est ce nombre?

Trente pauvres reçoivent 50 cents, à raison de 3 cents par homme, de 2 par femme et de 1 par enfant. Combien y a-t-il d'hommes, de femmes et d'enfans?

Un étourdi passant sur un pont, fit tomber dans l'eau une corbeille d'œufs qu'une femme portait au marché. Obligé de donner 2 centimes par œuf, il demanda combien il y en avait dans la corbeille? La femme répondit : je ne me souviens pas bien du nombre; mais je sais qu'il est entre 100 et 150, et qu'en comptant les œufs par 2, il en restait 1; par 3, il en restait 2; par 4, il en restait 3; par 5, il en restait 4; par 6, il en restait 5, et par 7, il n'en restait point. Quel est ce nombre d'œufs?

Trouver deux nombres entiers tels, qu'en ajoutant l'un au carré de l'autre, les deux sommes soient des carrés.

Trouver un nombre entier tel, que le carré de son double plus 3 fois ce nombre cherché, donne un carré parfait.

Trouver un nombre entier dont le triple carré augmenté de 16, donne un carré.

Trouver un nombre tel, qu'en y ajoutant 19, la somme soit un carré parfait.

Trouver deux nombres entiers tels, que la somme de leurs carrés, plus 7 fois leur produit, donne un nombre carré.

De quelques équations résolubles comme celles du second degré.

60. Lorsqu'on a deux équations du second degré, à deux inconnues, il faut, pour éviter les radicaux dans l'élimination

d'une inconnue, commencer par faire disparaître le carré de cette inconnue; prendre ensuite la valeur de la même inconnue, dans le résultat, et substituer cette valeur dans l'une des équations proposées. Mais dans ce cas, l'équation finale pourra être du quatrième degré; il faudra donc, pour pouvoir la résoudre d'après les méthodes des deux premiers degrés, la ramener à une équation du second; ce qui n'est possible que dans quelques cas particuliers, que nous allons examiner.

61. Considérons d'abord les deux équations

$$x^2 - xv + v^2 = 7 \quad \text{et} \quad 2x^2 - 2v^2 = 16 - xv.$$

Pour appliquer la règle que nous venons d'indiquer, on retranche la 2e équation du double de la 1re, et il vient

$$4v^2 - 3xv = -2; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{4v^2+2}{3v}.$$

Substituant cette valeur dans la première équation proposée, on trouve, toute réduction faite,

$$13v^4 - 53v^2 = -4.$$

Cette équation finale se résoudra comme celles du second degré, en y prenant v^2 pour inconnue : on trouvera ainsi

$$v^2 = 4 \quad \text{et} \quad v^2 = \frac{1}{13};$$

d'où il sera facile de tirer les quatre couples de valeurs de x et de v.

On résoudra de même chacun des groupes d'équations

$$x^2 - v^2 = 7 \quad \text{et} \quad x^2 + v^2 + xv = 37,$$
$$x^2 + xv = a \quad \text{et} \quad x^2 - v^2 = b,$$
$$x + z = 2v, \quad v + u = 2z, \quad vz = a \quad \text{et} \quad x^2 + u^2 = b,$$
$$x + z = 2v, \quad v + u = 2z, \quad vz = a \quad \text{et} \quad ux = b.$$

62. En général, lorsque l'équation finale est de la forme

$$x^{2n} + px^n = q,$$

on doit prendre x^n pour inconnue; ou bien poser $x^n = u$, ce qui donne $x^{2n} = u^2$ et $u^2 + pu = q$. Cette équation faisant connaître les deux valeurs u' et u'' de u, on aura les valeurs de x par les équations $x^n = u'$ et $x^n = u''$. C'est ainsi qu'on résoudra l'équation finale dans

$$x^4 - 4v^4 = 17 \quad \text{et} \quad xv = 6.$$

63. Soit à résoudre les deux équations

$$xv = ax + av \quad \text{et} \quad x^2 = a^2 + v^2.$$

Si l'on prend la valeur de v dans la 1re de ces équations et qu'on substitue cette valeur dans la 2me, on obtiendra

$$x^4 - 2ax^3 - a^2x^2 + 2a^3x = a^4.$$

Cette équation finale du 4me degré est *complète*; mais en extrayant la racine carrée de son 1er membre, on a $x^2 - ax - a^2$ pour racine et $-a^4$ pour reste. D'où il suit que si l'on avait d'abord ajouté a^4 aux deux membres de l'équation finale; $+a^4$ et $-a^4$ se seraient détruits dans l'extraction de la racine carrée du 1er membre de la nouvelle équation, et cette racine carrée aurait été exactement $x^2 - ax - a^2$: d'ailleurs, celle du second membre $2a^4$ est $a^2\sqrt{2}$; par conséquent

$$x^2 - ax - a^2 = \pm a^2\sqrt{2}; \text{ d'où } x = \frac{a}{2}\left(1 \pm \sqrt{5 \pm 4\sqrt{2}}\right).$$

64. Il suit de cet exemple, que *quand l'équation finale du 4me degré, est complète, si l'on extrait la racine carrée de son premier membre, et que le reste soit indépendant de l'inconnue, la racine trouvée sera égale à ± la racine-carrée du résultat qu'on obtient en ajoutant au second membre, le reste pris avec un signe contraire.* On aura donc alors une équation du second degré, qu'on sait résoudre.

C'est ainsi qu'on traitera l'équation finale dans chacun des systèmes d'équations que voici :

$$\begin{array}{l}
x + y = a \text{ et } x^4 + y^4 = b, \\
x - y = a \text{ et } x^5 - y^5 = b, \\
x + y = a \text{ et } x^4 + y^4 - x^2y^2 = b, \\
y - x = a \text{ et } x^2y^2 + b(x^2 + y^2) = c, \\
x + y = a,\ u + z = b,\ ux = yz \text{ et } x^4 + y^4 + z^4 + u^4 = c.
\end{array}$$

65. Supposons maintenant que l'équation finale soit de la forme

$$x^4 + px^3 + qx^2 + prx + r^2 = 0,$$

p, q, r, ayant des signes quelconques, mais x^4 et r^2 étant positifs. Si l'on divise les deux membres de cette équation par x^2, elle devient

$$x^2 + \frac{r^2}{x^2} + p\left(x + \frac{r}{x}\right) + q = 0.$$

Posant $x + \frac{r}{x} = u$; d'où $x^2 + \frac{r^2}{x^2} = u^2 - 2r$, on aura

$$u^2 + pu + q - 2r = 0.$$

Cette équation du second degré fera connaître les deux valeurs u' et u'' de u. Substituant ces valeurs, on aura celles de x par les équations

$$x + \frac{r}{x} = u' \text{ et } x + \frac{r}{x} = u''.$$

Au moyen de cette méthode, on résoudra non seulement les deux équations

$$x^4 - 6x^3 + 24x + 16 = 0,$$
$$x^4 - 14x^3 + 58x^2 - 70x + 25 = 0;$$

mais de plus, on trouvera toutes les racines des équations $x^5 - a^5 = 0$ et $x^5 + a^5 = 0$, en observant que la 1re est le produit d'un quintinome en x par $x - a$ et la seconde par $x + a$.

66. Dans les deux équations

$$ax = cv - xv \text{ et } x^2 = a^2 + v^2,$$

l'élimination de v conduit à une équation finale du quatrième degré, résoluble par extraction de racine carrée (64). Si on élimine x, l'équation finale du quatrième degré, se résoudra en divisant ses deux membres par v^2 (65).

On voit que le choix de l'inconnue peut influer sur l'équation finale. Mais ce qui est très-remarquable, c'est que la possibilité de résoudre l'équation finale peut dépendre de la manière d'éliminer les inconnues. En effet, qu'on ait, par exemple, les deux équations

$$xv + x + v = 4,$$
$$x^2 + v^2 + x + v = 10.$$

Pour opérer l'élimination, on est naturellement porté à prendre la valeur de v dans la 1re et à substituer cette valeur dans la 2me. Or, en opérant ainsi, on obtient l'équation finale

$$x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 24x + 10 = 0;$$

et cette équation ne saurait se résoudre par aucune des méthodes exposées dans ce qui précède; pas même par celle *des diviseurs commensurables*. Mais en suivant une autre marche dans l'élimination, on arrive aisément aux valeurs inconnues.

En effet, si à la 2^{me} équation proposée, on ajoute le double de la 1^{re}, l'équation résultante prendra la forme

$$(x+v)^2+3(x+v)=8\,;\ \text{d'où}\ x+v=-\tfrac{3}{2}\pm\tfrac{9}{2}\,;$$

et par conséquent $x+v=3$ et $x+v=-6$. Combinant chacune de ces valeurs de $x+v$ avec la première équation proposée, on en déduira facilement les 4 couples de valeurs de x et de v, lesquelles sont irrationnelles et imaginaires.

67. Cet exemple montre très-bien que la manière d'éliminer les inconnues peut influer sur le degré de l'équation finale et sur la simplicité des résultats. C'est de quoi l'on se convaincra encore en résolvant les équations

$$xz=ac,\ vz-cv=ac\ \text{et}\ x^2+v^2=c^2.$$

En effet, l'élimination de x et de v conduit à une équation finale du 4^e degré en z, résoluble par extraction de racine carrée. Mais si on élimine z entre les deux premières, et que dans l'équation résultante, on prenne la valeur de v, pour la substituer dans la 3^e équation proposée, l'équation finale du 4^e degré ne sera pas résoluble, d'après ce qui précède. Enfin, comme l'élimination de z donne $xv=a(v-x)$, si l'on retranche le double de cette équation de la 3^e proposée, il viendra

$$(v-x)^2+2a(v-x)=c^2.$$

Cette équation fournit pour $v-x$, deux valeurs qui étant combinées avec $xv=a(v-x)$, donnent les quatre valeurs de x et de v.

68. Les exemples précédens font voir que l'élimination par addition et soustraction, simplifie souvent la résolution des équations du second degré à plusieurs inconnues, et que cette méthode est généralement préférable à la substitution des valeurs. Voici des équations à traiter par addition et soustraction :

$x^2+y^2+xy=100$ et $xy+x-y=19$,
$x^2+y^2+z^2=29$, $yz=12$ et $x(z-y)=2$,
$x+y=a$, $bz=xy$ et $x^2+y^2=z^2$,
$(x+y)xy=a$ et $(x+y)(x^2+y^2)=b$,
$(x+y)(x^2+y^2)=a$ et $(x-y)(x^2-y^2)=b$,
$x(a-x)=y(b-y)$ et $2x(x-a)=y^2-a^2$,
$x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=b$ et $xy-(x+y)z=c$.
$x+y+z+a=b$, $xy=az$ et $x^2+y^2=a^2$.

Dans le dernier exemple, si l'on élimine z entre les deux 1res équations, puis y par substitution, entre le résultat et la 3me, l'équation finale du 4me degré, ne se résoudra qu'en la comparant au carré du trinome $x^2 + ax + ab$.

69. Lorsque tous les termes de l'équation finale du 4e degré sont dans le premier membre comme dans

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

et que le terme connu $s = hk$, on peut regarder ce 1er membre comme le produit des deux facteurs trinomes

$$x^2 + ux + h \text{ et } x^2 + tx + k.$$

De cette manière, on pose une identité qui exige que les coefficiens d'une même puissance de x soient égaux dans les deux membres, et que par suite ont ait, entre les deux inconnues u et t, les trois équations

$$u + t = p,\ ht + ku = r \text{ et } tu + h + k = q.$$

Si les valeurs des inconnues, tirées des deux 1res équations, satisfont à la 3e, l'équation du 4e degré sera le produit des deux facteurs trinomes proposés. Mais si les valeurs de u et t ne satisfont pas à la 3e condition, il faudra décomposer s en deux autres facteurs, positifs ou négatifs, et prendre ces facteurs pour h et k. On voit que cette méthode peut donner lieu à plusieurs essais inutiles; mais le nombre en diminuera avec celui des diviseurs de s. Au reste, on peut souvent suppléer à la méthode précédente, par la manière d'éliminer les inconnues. Par exemple, voici deux équations qui se résolvent aisément par addition et soustraction :

$$x^2 + v^2 - x - v = 8 \text{ et } x^2 + xv + v^2 = 19.$$

Eliminant v, d'après la méthode du n° 60, l'équation finale sera

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - 49x + 102 = 0.$$

On peut résoudre cette équation, en la décomposant en facteurs trinomes; car à cause de $102 = 17 \times 6$, on trouve que ces deux facteurs sont $x^2 - 6x + 17$ et $x^2 - 5x + 6$. Egalant donc chacun de ces trinomes à zéro, l'équation finale sera satisfaite, et on aura aisément les quatre valeurs de x et de v.

On peut appliquer cette méthode à la résolution des équations finales

$$x^4 + 12x^3 + 35x^2 + 6x - 9 = 0,$$
$$x^4 - x^3 - 31x^2 + 25x + 150 = 0,$$
$$x^4 - 2bx^3 + (a^2 + b^2)x^2 - (2a^2b + 2ab^2)x + a^4 - b^4 = 0.$$

70. Il existe dans la manière d'éliminer les inconnues, des simplifications accidentelles, qu'il serait impossible d'indiquer en général; mais que l'habitude du calcul algébrique fait bientôt apercevoir. Par exemple, dans les équations

$$xv^3 + v^2 = 36 \text{ et } x^3v + x^2 = 144,$$

il faudra diviser la seconde par la première et mettre $xv + 1$ en facteur commun. Dans les deux équations

$$(x+v)xv = a \text{ et } (x^2+v^2)xv = b(x+v),$$

on multipliera la seconde par xv et on aura égard à la première.

Les équations $(x^2+v^2)(x+v) = a$ et $(x^4-v^4)(x^2-v^2) = b$, se résolvent par division, addition et soustraction, de même que $xv(x-v) = a$ et $x^2v^2(x^2-v^2) = b$.

71. Si l'on a les deux équations

$$x^2 + 2xv + v^2 - 10x - 10v + 21 = 0,$$
$$x^2 - 2xv + v^2 + 6x - 6v + 5 = 0,$$

on observera que la première peut se résoudre immédiatement par rapport à $x+v$ et la seconde par rapport à $x-v$. Si on avait

$$x^3 + 2x^2v + 2xv^2 - 4xv + v^2 - 4 = 0,$$
$$x^2 + 2xv + 2v^2 - 5v + 2 = 0,$$

on soustrairait la 1re de la 2e multipliée par x, et l'on aurait

$$xv - 2x + v^2 - 4 = 0, \text{ ou } (v-2)(x+v+2) = 0.$$

Cette équation est satisfaite par $v - 2 = 0$ et par $x + v + 2 = 0$. Combinant chacune de ces dernières équations avec la seconde proposée, on trouvera $x = 0$ et $v = 2$, $x = -4$ et $v = 2$, $x = -5$ et $v = 3$.

72. Dans les deux équations

$$x^4 + v^4 + 2xv = 109 \text{ et } x^2 + v^2 = 13,$$

on retranche la 1re du carré de la 2e et l'on prend xv pour inconnue, dans l'équation résultante. On opère de même sur les deux équations $(x^2+v^2)x^2v^2 = 2900$ et $(x+v)xv = 70$, ainsi que sur les deux $x + v - \sqrt{xv} = 7$ et $\sqrt{x} - \sqrt{v} = 5$.

73. Voici encore plusieurs systèmes d'équations à résoudre:

$$xy = a \text{ et } x^5 + y^5 + b(x^3+y^3) = c(x+y),$$

$xyz + xy - y = a$	$x + y = az$	$x + y = az$
$xyz - xy + y = b$	$xy = z^2$	$xy = z^2$
$xy + y - xyz = c$	$x^4 + y^4 + z^4 = b$	$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = b.$

$xyz = zuv$	$uvxyz = 5681$	$y^4 + z^4 + u^4 = 353$
$yzu = avx$	$2u = v + x + y + z$	$x + y + z = \frac{3}{2}u$
$zuv = bxy$	$3v = u + x + y + z$	$x + y + u = \frac{7}{3}z$
$uvx = cyz$	$4x = u + v + y + z$	$x + u + z = 4y$
$vxy = duz$	$5y = u + v + x + z$	

74. Considérons encore les deux équations

$$xy + a = b\sqrt{1 + x^2} \quad \text{et}$$

$$\left[y - \frac{ax + c}{\sqrt{1 + x^2}}\right]^2 + \left[a - \frac{a - cx}{\sqrt{1 + x^2}}\right]^2 = d^2.$$

Développant la seconde équation et substituant la valeur de $\sqrt{1 + x^2}$, tirée de la première, on aura, en réduisant,

$$y^2 + 2a^2 + c^2 - 2ab - 2bc\frac{y - ax}{xy + a} = d^2.$$

Substituant, dans cette équation, la valeur de x, tirée de la première proposée, et réduisant, on obtiendra

$$y^2 + 2a^2 + c^2 - 2ab - 2c\frac{b^2y - y^3 - a^2y \mp ab\sqrt{y^2 + a^2 - b^2}}{ab \pm y\sqrt{y^2 + a^2 - b^2}} = d^2$$

A cause de $b^2y - y^3 - a^2y = -y(y^2 + a^2 - b^2)$, on voit que le numérateur est divisible par le dénominateur. De sorte que si l'on chasse ce dénominateur et qu'on transpose dans le premier membre, celui-ci sera le produit des deux facteurs

$$ab \pm y\sqrt{y^2 + a^2 - b^2} \quad \text{et}$$

$$y^2 + 2a^3 + c^2 - 2ab - d^2 \pm 2c\sqrt{y^2 + a^2 - b^2}.$$

Egalant donc chacun de ces facteurs à zéro, l'équation finale sera satisfaite, et on aura deux équations qui feront connaître les valeurs de y; d'où l'on aura ensuite celles de x. La dernière de ces deux équations pourra même se mettre sous la forme

$$\left(c \pm \sqrt{y^2 + a^2 - b^2}\right)^2 = d^2 - (a - b)^2;$$

il sera donc facile de la résoudre. On peut traiter l'équation

$$\frac{x^2}{a} = \sqrt{x^2 - \frac{a^4}{x^2}} + \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{x^2}}.$$

75. Lorsque deux inconnues entrent de la même manière dans les équations proposées, on obtient presque toujours une équation finale d'un degré moins élevé, en remplaçant ces inconnues par d'autres qui en dépendent également, telles que leur demi-somme, leur demi-différence, leur produit, la somme de leurs carrés, une moyenne proportionnelle entre elles, etc. C'est ce qu'on peut voir sur plusieurs des équations traitées dans ce qui précède; et c'est d'ailleurs ce que nous allons établir directement par des exemples. Soient d'abord les deux équations

$$(x+v)(x^2+v^2)=a,$$
$$(x^2+v^2)(x^4+v^4)=b.$$

On voit que les inconnues x et v entrent de la même manière dans ces deux équations; il faut donc remplacer x et v par d'autres inconnues, et faire, par exemple,

$$x+v=\varphi \quad \text{et} \quad x^2+v^2=\omega; \ldots (1)$$

d'où en élevant au carré de part et d'autre,

$$2xv=\varphi^2-\omega \quad \text{et} \quad x^4+v^4=\omega^2-\tfrac{1}{2}(\varphi^2-\omega)^2.$$

Substituant ces valeurs, les équations proposées deviennent

$$\varphi\omega=a \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}\omega(\omega^2+2\varphi^2\omega-\varphi^4)=b.$$

Eliminant φ, l'équation finale prend la forme

$$\omega^6-2(b-a^2)\omega^3=a^4.$$

Cette équation peut se résoudre en prenant d'abord ω^3 pour inconnue (62); on connaîtra donc ω et φ. Avec ces valeurs les équations (1) déterminent x et v.

Par exemple, si $a=65$ et $b=1261$, on aura

$$\omega^6-2(2964)\omega^3=17850625;$$

d'où en se bornant aux valeurs réelles, $\omega=13$, $\varphi=5$, $x=3$ et $v=2$.

Sans l'usage des inconnues auxiliaires φ et ω, il serait impossible de résoudre les équations proposées, d'après ce qui précède.

76. On apprendra bien vîte à connaître dans quels cas les inconnues cherchées pourront être remplacées par d'autres plus faciles à déterminer. Par exemple, dans les équations

$$x+y+z=a, \quad xz+y=b \quad \text{et} \quad x^3+y^3+z^3=c,$$

il faudra poser $x+y=2\varphi$ et $x-y=2\omega$.

Dans les équations $xy = 216$ et $\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{y^4} = 97$, on prendra $x^4 = \varphi^3$ et $y^4 = \omega^3$. Dans les équations $x + y = 72$ et $\sqrt[3]{x^2 y} + \sqrt[3]{xy^2} = 48$, on fera $x = \varphi^3$ et $y = \omega^3$.

Pour les équations $xy = uz$, $x + y = 2a$, $u + z = 2b$ et $x^4 + y^4 - u^4 - z^4 = c$, on posera $x - y = 2\varphi$ et $u - z = 2\omega$; ou bien on prendra seulement $xy = t$.

77. Dans chacun des groupes d'équations

$x + y = az$	$x + y + z = a$	$x + y - z = a$
$x^2 + y^2 = z^2$	$x^2 + y^2 = z^2$	$x^2 + y^2 = z^2$
$x^4 + y^4 + z^4 = b$	$x^3 + y^3 + z^3 = b$	$xy + xz + yz = b$,

on fera $x + y = 2\varphi$ et $x - y = 2\omega$. Il faudra prendre $x + y = 2\varphi$ et $xy = \omega$, dans les deux systèmes :

$xy = uz$	$xy = uz$
$x + y + u + z = a$	$x + y + u + z = a$
$x^2 + y^2 + u^2 + z^2 = b$	$x^2 + y^2 + u^2 + z^2 = b$
$x^4 + y^4 + u^4 + z^4 = c$	$x^3 + y^3 + u^3 + z^3 = c$.

Problèmes résolubles comme ceux du second degré.

78. *Trois tuyaux coulant ensemble dans un bassin, le remplissent en 6 heures. Si chaque tuyau coulait seul, le second remplirait le bassin dans les 3 quarts du temps employé par le 1er seul, et le 3e mettrait 10 heures de plus que le 2e. Quel temps chaque tuyau serait-il seul pour remplir le bassin?*

Soit x le temps employé par le 1er seul; $\frac{3x}{4}$ sera donc le temps employé par le 2me seul, et $\frac{3x}{4} + 10$ ou $\frac{1}{4}(3x + 40)$ celui employé par le 3e. Soit c la capacité du bassin : puisque le 1er tuyau verse c unités d'eau en x heures, en une heure il versera $\frac{c}{x}$ et en 6 heures, $\frac{6c}{x}$. De même, en 6 heures le 2e et le 3e tuyaux verseront $\frac{24c}{3x}$ et $\frac{24c}{3x+40}$. Or, en 6 heures, les trois tuyaux, coulant ensemble, remplissent le bassin c; donc on a l'équation

$$\frac{6c}{x} + \frac{24c}{3x} + \frac{24c}{3x+40} = c.$$

Cette équation peut se simplifier; et on en tire $x = \frac{56}{3}$ et $x = -10$. La 1re valeur donne $\frac{3x}{4} = 14$ et $\frac{3x}{4} + 10 = 24$. Donc le 1er tuyau remplirait seul le bassin en 18 heures 40 minutes, le 2me en 14 heures et le 3me en un jour. Et c'est de quoi l'on peut aisément faire la preuve.

Quant à la valeur négative $x=-10$, pour avoir le problème qu'elle résout, on change x en $-x$, dans l'équation proposée, et l'on a

$$-\frac{6c}{x}-\frac{24c}{3x}+\frac{24c}{40-3x}=c.$$

Les quantités $\frac{6c}{x}$ et $\frac{24c}{x}$, ayant le signe $-$, ne désignent plus l'eau qui entre dans le bassin par les deux premiers tuyaux, en 6 heures, mais désignent au contraire l'eau qui en sort. D'ailleurs, comme $3x$ ou 30 est <40, la quantité $\frac{24c}{3x+40}$, qui est devenue $\frac{24c}{40-3x}$, reste positive et désigne toujours l'eau qui entre dans le bassin par le 3e tuyau, coulant 6 heures. Donc le problème résolu par la valeur $x=10$ est celui-ci :

L'eau sort d'un bassin par deux tuyaux et y entre par un 3me : en faisant couler les trois tuyaux ensemble, le bassin, d'abord vide, est rempli en 6 heures. Si chaque tuyau coulait seul, le 2e viderait le bassin dans les 3 quarts du temps employé par le 1er seul, et le 3e remplirait le bassin en 10 heures moins le temps du 2e. Quel temps chacun serait-il seul pour verser l'eau que peut contenir le bassin?

Résolvant directement ce problème, on trouvera $x=10$ et $x=-\frac{56}{3}$.

79. *Trouver de laquelle de ses parties une somme* a *doit augmenter tous les ans, pour qu'en ajoutant au bout de chaque année,* b *fr. à cette somme, elle soit nulle après 2 ans.*

Soit x le dénominateur de la partie cherchée : l'équation du problème sera

$$a+\frac{a}{x}+b+\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+b=0;$$

et on en déduira

$$x=\frac{-(2a+b)\pm\sqrt{b^2-4ab}}{2(a+2b)}.$$

On peut faire $a=24$ et $b=100$; on peut trouver aisément le *maximum* de a, b étant *constant*, et le *minimum* de b, a étant *constant*.

Il est visible que le radical sera toujours moindre que b; et, à plus forte raison, moindre que $2a+b$; donc les deux valeurs de x seront toujours négatives, et le problème résolu sera :

Trouver de laquelle de ses parties une somme a *doit diminuer tous les ans, pour qu'en ajoutant au bout de chaque année,* b *francs à cette somme, elle soit nulle après 2 ans.*

On voit que les valeurs de x seront réelles, égales, imaginaires, suivant qu'on aura $b>4a$, $b=4a$, $b<4a$. Dans ce dernier cas, si l'on change le signe de la quantité $4ab$, qui rend le radical imaginaire, ce qui se fera en changeant le signe de a ou le signe de b, on résoudra un problème analogue au proposé. En effet, en changeant le signe de a, l'équation et la formule proposées traduiront et résoudront le problème :

Trouver de laquelle de ses parties une dette a *doit augmenter tous les ans, pour qu'en payant* b *francs de cette dette, au bout de chaque année, elle soit acquittée après 2 ans.*

En changeant le signe de b, l'équation proposée et la formule deviendront :

$$a+\frac{a}{x}-b+\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}-b=0, \ldots (1)$$

$$x=\frac{-(2a-b)\pm\sqrt{b^2+4ab}}{2(a-2b)}.$$

Donc le problème résolu sera : *Trouver de laquelle de ses parties une somme* a *doit augmenter tous les ans, pour qu'en dépensant* b *francs de cette somme au bout de chaque année, elle soit nulle après 2 ans.*

Et ce problème est au fond le même que le précédent.

Pour discuter le dernier problème qu'on vient d'énoncer, on observe que le numérateur de x prend le signe du radical, lorsqu'on a

$$\sqrt{b^2+4ab}>2a-b; \text{ d'où } b^2+4ab>4a^2-4ab+b^2, \text{ et } 2b>a.$$

Mais lorsque $2b>a$, le dénominateur $2(a-2b)$ est négatif; et par suite, les deux valeurs de x sont l'une positive et l'autre négative. Il est facile de voir aussi que si $2b<a$, les deux valeurs de x seront négatives. Enfin, si $2b=a$, les deux valeurs de x deviendront :

$$x = \frac{0}{0} \quad \text{et} \quad x = \frac{-3b}{0}.$$

La première de ces valeurs prend une forme indéterminée qu'elle ne doit pas avoir; car la supposition de $2b = a$, dans l'équation (1), donnant

$$\frac{b}{x}\left(3 + \frac{2}{x}\right) = 0, \text{ il en résulte } x = -\frac{2}{3} \text{ et } x = \frac{b}{0}.$$

L'indétermination de l'une des valeurs de x, vient du facteur $2(a - 2b)$, qu'on trouve être commun aux deux termes de la formule. Supprimant donc ce facteur commun, on aura une formule, qu'on trouverait d'ailleurs, en observant que l'équation (1) est la même chose que

$$a\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - b\left(1 + \frac{1}{x}\right) = b,$$

$$\text{et donne } 1 + \frac{1}{x} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ab}}{2a}.$$

Voici un problème dont la discussion offre précisément les mêmes circonstances que celle du problème qui a fourni les deux précédens :

De laquelle de ses parties le bien d'une personne doit-il augmenter tous les ans, pour que, recevant a *francs au commencement de chaque année, et devant* b *francs avant la première, cette personne ait* c *francs au bout de deux ans.*

80. *On demande quatre nombres pairs, en progression arithmétique, tels qu'en multipliant la somme des deux du milieu par celle des trois derniers, le produit soit égal au cube de la demi-somme des deux premiers.*

Ce problème, dont voici la solution donnée dans le tome III des *Annales de Mathématiques*, ne paraît difficile qu'en ce que, s'élevant naturellement au troisième degré, il faut le rabaisser au second. Or, c'est à quoi l'on parvient en procédant comme il suit :

Soit $2x$ le premier terme et $2v$ la raison de la progression; ses quatre termes seront donc

$$2x, \quad 2x + 2v, \quad 2x + 4v \quad \text{et} \quad 2x + 6v;$$

et l'on devra avoir, d'après l'énoncé du problème,

$$(6x + 12v)(4x + 6v) = (2x + v)^3.$$

Posant $2x + v = z$, d'où $2x = z - v$, cette équation deviendra

$$(2z + 4v)(3z + 9v) = z^3,$$

ou bien, en posant $6v = t$ et développant,

$$t^2 + 5zt = z^2(z-6)\,;\ \text{d'où}\ t = \tfrac{1}{2}z\left(-5 \pm \sqrt{4z+1}\right).$$

Soit fait $\pm\sqrt{4z+1} = u$, ou $4z+1 = u^2$ et $z = \frac{1}{4}(u^2-1)$; on aura

$$t = \frac{(u^2-1)(u-5)}{8}\,;\ \text{d'où}\ v = \frac{(u^2-1)(u-5)}{48}\ \text{et}\ x = \frac{(u^2-1)(17-u)}{96}.$$

Par l'inspection de ces valeurs, il est clair que u ne peut être qu'un nombre impair; posant donc $u = 2n+1$, il viendra enfin

$$v = \frac{n(n+1)(n-2)}{6}\quad \text{et}\quad x = \frac{n(n+1)(8-n)}{12}.$$

La nécessité d'avoir x positif, renferme les valeurs de n entre -1 et $+8$; mais attendu que les valeurs $+1$, $+4$, $+5$, $+7$ de n rendent x fractionnaire, on ne peut admettre que les six systèmes que voici :

$$\begin{aligned} n &= -1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 6,\ 8,\\ x &= 0,\ 0,\ 3,\ 5,\ 7,\ 0,\\ v &= 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 28,\ 72. \end{aligned}$$

Et comme les valeurs -1 et 0 de n donnent les mêmes valeurs pour x et v, le problème n'a réellement que 5 solutions.

81. *Trouver quatre nombres* u, x, y, z, *en progression géométrique, connaissant leur somme* a *et la somme* b *de leurs carrés.*

A cause de $\frac{x}{u} = \frac{y}{x} = \frac{z}{y}$, on a évidemment les 4 équations

$$x^2 = uy,\ y^2 = xz,\ u + x + y + z = a$$
$$\text{et}\ x^2 + y^2 + u^2 + z^2 = b.$$

Prenant les valeurs de u et z dans les deux 1res équations, et substituant ces valeurs dans les deux autres équations, on aura

$$x + y + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = a\quad \text{et}\quad x^2 + y^2 + \frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{x^2} = b.$$

Chassant les dénominateurs, et décomposant en facteurs, ces deux équations deviennent

$$(x+y)(x^2+y^2) = axy\quad \text{et}\quad (x^2+y^2)(x^4+y^4) = bx^2y^2 \ldots (1)$$

Les inconnues x et y entrant de la même manière dans ces équations, prenons $x + y = \varphi$ et $xy = \omega$; d'où $x^2 + y^2 = \varphi^2$

-2ω et $x^4+y^4=\varphi^4-4\varphi^2\omega+2\omega^2$. Avec ces valeurs, les équations (1) se réduisent à

$$\varphi(\varphi^2-2\omega)=a\omega \text{ et } (\varphi^2-2\omega)(\varphi^4-4\varphi^2\omega+2\omega^2)=b\omega^2.$$

Eliminant ω, l'équation finale sera

$$\varphi^2+\frac{b}{a}\varphi=\frac{1}{2}(a^2-b).$$

Cette équation du second degré, fera connaître φ; et on aura ensuite ω, x, y, z et u.

Par exemple, si $a=45$ et $b=765$, on trouvera $\varphi=18$, $\omega=72$, $x=6$, $y=12$, $z=24$ et $u=3$. La valeur négative $\varphi=-35$, conduirait à des expressions imaginaires.

82. Voici plusieurs problèmes à résoudre :

Un jardin a 432 aunes carrées de surface, et sa longueur a 6 aunes de plus que sa largeur. Quelle longueur a-t-il? (R. 24 aunes.)

Un parc renferme plusieurs fontaines; à chacune correspond deux fois autant d'allées qu'il y a de fontaines, et chaque fontaine communique à trois grottes. Trouver le nombre de grottes, sachant qu'il surpasse 56 de 10 fois le nombre de fontaines. (Il y a 96 grottes.)

Un marchand a reçu 196 fr. pour deux ballots, contenant l'un 200 et l'autre 160 aunes d'étoffes. Pour 7 francs il donne 4 aunes de plus de la première étoffe que pour 6 francs de la seconde. On demande le prix de l'aune de chaque étoffe. (R. 50 et 60 centimes.)

Trouver deux nombres en raison de 4 à 5, tels qu'en ajoutant 6 au plus grand et 1 au plus petit, les racines carrées des deux sommes diffèrent de l'unité. (Le 1er est 30 ou 10 et le 2e 24 ou 8.)

Le produit de deux nombres, dont le premier est un carré, est à la somme de leurs carrés comme 30 est à 61; la différence des deux mêmes nombres est égale à la racine carrée du premier. Quels sont ces deux nombres? (R. Le 1er 25 ou 36 et l'autre 20 ou 30.)

Diviser 20 en deux parties telles, que leur différence soit à leur somme comme leur double produit est à la différence de leurs carrés. (La 1re partie vaut $10\pm\frac{10}{3}\sqrt{3}$).

Deux marchands vendent chacun d'une certaine étoffe; le 2e en vend 3 aunes de plus que l'autre, et ils retirent ensemble 140 florins. Si l'un avait vendu l'étoffe de l'autre, ils auraient reçu respectivement 96 et 50f. Combien chacun a-t-il vendu d'aunes? (R. L'un 15 ou 5, l'autre 18 ou 8.)

On a un verger carré, dont le côté diffère de 24 pieds, en plus et en moins, de la largeur et de la longueur d'un terrain rectangulaire, ayant 621945 pieds carrés de superficie. On veut faire entourer ce verger d'un mur de 4 pieds de hauteur, et on demande combien ce mur coûtera, sachant que la toise carrée sera payée 6 francs et que la toise vaut 6 pieds? (R. 2104 francs.)

Un nombre est composé de trois chiffres tels, que la somme des carrés de ces chiffres, regardés comme exprimant des unités simples, est 104, et que le carré du second chiffre surpasse le double produit des deux autres de 4 unités. Si l'on soustrait 594 du nombre proposé, le reste sera égal au même nombre renversé. Quel est ce nombre proposé? (R. 862.)

On a deux nombres dont la somme, le produit et la différence de leurs carrés ont des valeurs égales. Quels sont ces deux nombres? (R. Le plus petit vaut $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$.)

Deux personnes entrent en société avec un fonds de 6500^f; la première laisse son argent dans la société pendant 4 ans, la seconde y laisse le sien seulement pendant 2 ans, et chacune retire 4200^f de capital et d'intérêt simple. Combien avaient-elles mis séparément?

Devinez ce que le commandant d'une place assiégée mande à son général? la dépêche porte ce qui suit : En ajoutant 2000 au nombre de soldats de la garnison, la somme fera le 30^e du nombre de livres de pain à consommer. Si nous avions 1000 hommes de moins et 10000 livres de pain de plus à consommer, la garnison pourrait être nourrie pendant 160 jours. Enfin, si le soldat avait une ration journalière deux fois plus petite, nos troupes pourraient encore manger pendant 200 jours.

Une personne qui ne reçoit que les intérêts simples de son argent, place 2400^f en deux sommes, dont l'une devient 600^f au bout de 25 mois et l'autre 1200^f après 10 mois. Quel est l'intérêt simple d'un florin par mois?

Le problème résolu par la valeur négative, est celui-ci : Les biens d'une personne surpasse ses dettes de 2400^f. Les biens se réduiraient à 1200^f après 10 mois, si chacun de leurs florins éprouvait une certaine diminution par mois. Les dettes deviendraient 600^f, si chacun de leurs florins devenait 1 de moins que 25 fois la diminution dont on vient de parler. Quelle est cette diminution?

Deux marchands entrent en société avec un fonds de 2400^f. L'argent de l'un y reste pendant 3 mois et celui de l'autre pendant 2 mois. Ils retirent chacun 2376^f tant de capital que d'intérêt simple. Quelles sont les mises de ces marchands, et quel est l'intérêt simple d'un flor. par mois?

Le problème résolu par les valeurs négatives est celui-ci : Deux personnes qui doivent l'une 2400^f de plus que l'autre, paient une certaine somme par mois sur chacun des florins de leurs dettes; et après 2 mois, la 1^{re} redoit encore 2376^f, tandis qu'au contraire, on redoit la même somme à la 2^{me}, après trois mois. De combien sont les dettes de chaque personne, et combien acquittent-elles sur chaque florin par mois?

Trouver trois nombres, connaissant les trois produits a, b, c, qu'ils donnent en multipliant chacun d'eux par la somme des deux autres. (Faire $a = 27$, $b = 32$ et $c = 35$.)

Partager un nombre donné a en deux parties, dont la somme des cubes, plus leur somme multipliée par leur produit, donne b.

Trouver quatre nombres en proportion, connaissant la somme a des antécédens, la somme b des conséquens, et le produit c des quatre termes. (Interpréter les valeurs imaginaires; faire $a=81$, $b=20$ et $c=810000$).

Trouver une proportion, connaissant la somme a des extrêmes, la somme b des moyens et la somme c des carrés des quatre termes. (Prendre $a=18$, $b=12$ et $c=576$.)

Trouver deux nombres, connaissant leur produit a et la somme b des quotiens qu'ils donnent quand on divise le carré de chacun par celui de l'autre. (Supposer dans la formule $a=32$ et $b=17$ quarts.)

Partager le nombre donné a en deux parties telles, que la somme des deux quotiens qu'elles donnent en divisant chacune par le carré de l'autre, soit $\frac{1}{a}$.

Partager le nombre donné a en deux parties telles, que b soit la somme des deux quotiens que l'on trouve en divisant le carré de chacune par l'autre. (Interpréter les valeurs imaginaires.)

Trouver deux nombres tels, que leur produit vaille a fois leur somme, et que la différence de leurs carrés soit égale au carré de a.

Partager le nombre donné a, deux fois de suite en deux parties, de manière que le produit b de la première partie d'une division par la 1^{re} partie de l'autre, soit donné; et que la somme c des carrés des deux autres parties, soit aussi donnée.

Décomposer un produit donné a en deux facteurs positifs tels, que leur somme vaille b fois la différence de leurs racines carrées.

La somme de deux nombres est a et la somme de leurs carrés vaut b fois la racine carrée de leur produit. Quels sont ces deux nombres?

Trouver les facteurs de deux produits égaux, connaissant la somme a de leurs multiplicandes, et les valeurs b et c que prennent ces produits, quand le multiplicateur de l'un devient celui de l'autre.

Trouver deux produits, connaissant leur somme a, la somme b de leurs multiplicandes, et les valeurs c et d que prennent ces produits, quand le multiplicateur de l'un devient celui de l'autre. (Interpréter les valeurs imaginaires; voir quand a et b sont des différences.)

Quel nombre x doit-on ajouter à deux nombres donnés a et b, et en retrancher ensuite, pour que le produit des deux sommes et celui des deux différences aient le rapport de a à b?

Trouver deux nombres ayant c pour quotient, et tels, que la somme des carrés de leurs différences aux deux nombres a et b, vaille le carré de la différence des deux nombres cherchés. (Interpréter les valeurs négatives et imaginaires.)

Partager les nombres donnés a, b, c, d, chacun en deux parties telles, que p soit le produit de la 2^e partie de a par la 1^{re} de b, de la 2^e de b par la 1^{re} de c, de la 2^e de c par la 1^{re} de d et de la 2^e de d par la 1^{re} de a. (Même problème pour m nombres donnés.)

Trouver quatre nombres en progression arithmétique, connaissant la somme a des extrêmes et celle b des moyens. (Faire $a=78$ et $b=70$.)

Trouver quatre nombres en progression par différence, connaissant la somme a des carrés des moyens, et le produit ou la somme b des carrés des extrêmes.

Partager le nombre donné a en quatre parties qui forment une progression arithmétique et dont la somme des carrés soit égale à b.

Trouver trois nombres dont le carré de l'un vaille la somme des carrés des deux autres : on connaît la somme a de ces trois nombres et la somme b de leurs produits deux à deux.

Trouver trois nombres en proportion géométrique continue, connaissant leur somme a et celle b de leurs carrés.

Trouver trois nombres en proportion continue, connaissant la différence a du moyen à la somme des extrêmes, ainsi que la différence b de la somme des carrés de ces extrêmes au carré du moyen.

Trouver une proportion, connaissant la somme a des extrêmes, la somme b des moyens et la somme c des puissances 5^{mes} des 4 termes.

Trouver quatre nombres en proportion, connaissant la somme ou la différence des extrêmes, la somme ou la différence des moyens et la somme des cubes des quatre termes.

Trouver quatre nombres en progression géométrique, connaissant la somme des extrêmes et celle des moyens.

Trouver quatre nombres en progression géométrique, connaissant la somme ou la différence des termes impairs et la somme ou la différence des termes pairs.

Trouver 4 nombres en progression géométrique, connaissant l'excès de la somme des extrêmes sur celle des moyens, et l'excès de la somme des carrés des extrêmes sur celle des carrés des moyens.

Trouver cinq nombres en progression géométrique, connaissant la somme a des termes pairs et celle b des termes impairs.

Trouver 6 nombres en progression par quotient, connaissant la somme a des deux extrêmes et la somme b des deux moyens.

Trouver trois nombres en proportion géométrique, connaissant leur produit a et la somme b de leurs cubes. (Prendre $a=74088$ et $b=2077208$.)

Trouver une proportion géométrique, connaissant le produit a des deux premiers termes, le produit b des deux derniers, ainsi que leur somme c. (Prendre $a=63$, $b=847$ et $c=80$.)

Trouver quatre nombres en proportion géométrique, connaissant leur produit a, leur somme b et la somme c de leurs carrés. (Faire $a=11025$, $b=64$ et $c=1700$.)

Trouver cinq nombres en progression arithmétique, connaissant leur somme a et la somme b de leurs carrés. (Prendre $a=35$ et $b=765$.)

Nota. Plusieurs problèmes supposent seulement que l'on connaisse les définitions des progressions arithmétique et géométrique, et ne sortent pas de la liste des questions résolubles comme celles du 2^me^ degré.

Des maximums et minimums du second degré.

83. J'appellerai *maximum* et *minimum du second degré*, la plus grande et la plus petite valeur que puisse avoir une *variable*, entrant dans une équation du second degré, ou résoluble par celles du second degré.

84. Soit d'abord une équation du second degré en x, contenant une variable v; résolvons cette équation par rapport à x, et rendons entière la quantité sous le radical; nous aurons une expression de la forme

$$x = \mathrm{M} \pm \mathrm{N}\sqrt{\mathrm{A} - \mathrm{B}}.$$

Il est clair que la variable v n'est susceptible de maximum, ni de minimum, que quand elle entre dans la quantité $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ sous le radical. Or, supposons que cette variable v soit dans B, sans être dans A; à mesure que v croîtra, $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ diminuera, et v ne pourra croître que jusqu'à donner $\mathrm{A} - \mathrm{B} = 0$; car si v croissait encore, $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ deviendrait négative et x imaginaire ou impossible : donc, dans ce cas, le maximum de v fournit $\mathrm{A} - \mathrm{B} = 0$ et $x = \mathrm{M}$. La première de ces équations donne le maximum de v et la seconde fait connaître la valeur de x qui correspond à ce maximum.

Pareillement, si la variable v entrait dans A, sans être dans B, on verrait que le minimum donne $\mathrm{A} - \mathrm{B} = 0$ et $x = \mathrm{M}$.

Enfin, lorsque la variable v entre dans A et dans B, il peut se présenter trois cas; 1° ou la quantité $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ sous le radical diminue pendant que v augmente : dans ce cas le maximum de v a lieu lorsque $\mathrm{A} - \mathrm{B} = 0$ et $x = \mathrm{M}$; ou la quantité $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ diminue avec v : alors le minimum de v fournit $\mathrm{A} - \mathrm{B} = 0$ et $x = \mathrm{M}$; 3° enfin, $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ augmente, soit que v augmente, soit que v diminue : dans ce cas il est clair que v n'est susceptible ni de maximum, ni de minimum.

On voit par cette discussion, que le maximum et le minimum de la variable rendent toujours nulle la quantité $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ sous le radical; que si la variable n'entre que dans la partie négative $-\mathrm{B}$, il y a maximum; que si elle entre dans la partie positive

A seule, il y a minimum ; que si elle se trouve à la fois dans la partie positive et dans la partie négative, il peut y avoir à la fois maximum et minimum, et même n'en point avoir du tout.

85. Ainsi en général, *pour avoir la plus grande ou la plus petite valeur d'une variable entrant dans une équation du second degré à une inconnue, il faut résoudre cette équation par rapport à l'inconnue ; rendre, si l'on veut, entière la quantité sous le radical, et égaler cette quantité à zéro : l'équation résultante fera connaître le maximum ou le minimum cherché, et l'équation restante donnera la valeur de l'inconnue qui répond à ce maximum ou à ce minimum.* Au moyen de cette règle, on aura facilement le maximum ou le minimum de a dans les équations

$$(36-x)x=a;\quad x^2-8x+4a=a^2-11;$$
$$ax^2+c^2x^2=(x+c)^2;\quad 2ac-ax=\sqrt{(4c^2-4x^2)};$$
$$x^2+(a-x)^2=b\sqrt{ax-x^2}.$$

86. Cherchons d'après la règle précédente, le maximum de c dans l'équation $2(a+bc)x=d+2cx^2$.

Résolvant cette équation par rapport à x, on trouve

$$x=\frac{1}{2c}\left[a+bc\pm\sqrt{(a+bc)^2-2cd}\right].$$

Comme la variable c entre dans la partie positive et dans la partie négative sous le radical, il peut y avoir à la fois maximum et minimum (84). Or, pour connaître chacun d'eux, on observe que la quantité sous le radical devant toujours être positive et variable ; si on l'égale à la quantité positive et variable u^2, qu'ensuite on résolve l'équation en u^2 par rapport à c, on verra facilement si la valeur de c devient la plus grande ou la moindre possible, quand on y fait $u^2=0$, puisque pour $u^2=0$, il y a nécessairement maximum ou minimum (84). Or, en opérant comme on vient de le dire, on a

$$(a+bc)^2-2cd=u^2 \quad\text{et}\quad x=\frac{1}{2c}(a+bc\pm u);$$

et la 2^{me} valeur, substituée dans l'équation proposée, donnerait la 1re. Résolvant l'équation en u^2 par rapport à c, il vient

$$c=\frac{1}{b^2}\left[d-ab\pm\sqrt{(d^2-2abd+b^2u^2)}\right].$$

Le carré u^2 étant toujours positif et variable, tandis que a,

b, d, sont des nombres donnés, on voit que pour toutes les valeurs réelles de u, positives ou négatives, les valeurs du radical sont plus grandes que celle qui a lieu lorsque $u=0$. Mais quand le radical est le moindre possible, le nombre qu'on doit ajouter ou retrancher à $d-ab$, pour avoir c, est aussi le moindre possible; donc la somme est la plus petite possible, et le reste le plus grand possible. D'où l'on tire, pour le maximum et le minimum de c,

$$c=\frac{1}{b^2}\left[d-ab-\sqrt{(d^2-2abd)}\right],$$

$$c=\frac{1}{b^2}\left[d-ab+\sqrt{(d^2-2abd)}\right].$$

Le minimum de c surpasse son maximum; mais cela tient à ce que les valeurs de c résolvent deux problèmes : dans l'un on demande le maximum de c et dans l'autre le minimum. Les valeurs de x qui répondent à ce maximum et à ce minimum, sont données par l'équation

$$x=\frac{1}{2c}(a+bc)=\sqrt{\frac{d}{2c}}\ (*).$$

87. On voit, par cet exemple, que *pour avoir le maximum et le minimum de la variable, lorsqu'elle entre dans la partie positive et dans la partie négative sous le radical, il suffit d'égaler tout ce qui est sous ce radical à* u^2, *puis de prendre, dans l'équation résultante, la valeur de la variable, et de comparer cette valeur à ce qu'elle devient lorsque* $u=0$. C'est ce qu'on verra encore, en cherchant, d'après cette règle, le maximum ou le minimum de a dans chacune des équations

$$2(a+b)x=x^2+2a^2-2b^2;\quad x^2+(a-x)^2=bx;$$

$$x^2+(a+b)^2=2abx;\quad (x+a)(x-b)=cx^2.$$

88. Voyons maintenant comment on trouve le maximum et le minimum, lorsque la variable entre dans une équation à plusieurs inconnues, résoluble par rapport à chacune de ces incon-

(*) On peut remarquer que si, dans le minimum trouvé pour c, les quantités a et b sont supposées constantes, mais d variable; à mesure que d diminuera, le minimum de c diminuera aussi : et comme d ne peut diminuer que jusqu'au terme $d=2ab$, il s'ensuit qu'à ce terme, c aura atteint le plus petit de ses *minima*, c'est-à-dire, son *minimum-minimorum*, lequel est par conséquent $c=\frac{a}{b}$, et donne $x=b$.

nues, comme les équations du second dégré. Cette recherche repose sur le principe que voici :

Lorsqu'une variable entre, avec plusieurs inconnues, dans une équation résoluble comme celles du second degré, le maximum ou le minimum de cette variable rend nulle la quantité sous le radical de chaque inconnue.

En effet, prenons d'abord dans l'équation proposée, la valeur de l'une quelconque x des inconnues, et supposons que les autres aient les valeurs qui conviennent au maximum ou au minimum de la variable v : si ce maximum ou ce minimum ne rendait pas nulle la quantité sous le radical de x; comme cette quantité sous le radical doit toujours être positive, pour que x soit réelle, il est clair que la variable v pourrait encore augmenter et diminuer, sans que la quantité sous le radical devînt négative, et conséquemment, sans que la valeur de x devînt impossible : dônc cette variable v ne serait ni à son maximum, ni à son minimum; ce qui est contre l'hypothèse. Donc la quantité sous le radical de x est nulle; et il en sera de même des quantités sous les radicaux des autres inconnues.

89. De là résulte que *pour avoir le maximum ou le minimum d'une variable, dans une équation résoluble comme celles du second degré, il faut prendre dans cette équation, successivement la valeur de chaque inconnue, et égaler à zéro la quantité sous chaque radical : les équations résultantes et les équations restantes serviront à déterminer le maximum ou le minimum demandé, ainsi que les valeurs correspondantes des inconnues proposées.* D'après cette règle, cherchons le minimum de b dans les équations

$$xyz = a^3 \text{ et } xy + xz + yz = b^2.$$

Eliminant d'abord z, il vient

$$x^2y^2 + (x+y)a^3 = b^2xy. \ldots (1)$$

Résolvons cette équation, d'abord par rapport à x; nous aurons

$$x = \frac{1}{2y^2}\left[b^2y - a^3 \pm \sqrt{(b^2y-a^3)^2 - 4a^3y^3}\right].$$

On voit que b est susceptible de minimum (84). Et puisque ce minimum rend nulle la quantité sous le radical (88), il en résulte, en chassant le dénominateur $2y^2$,

$$2xy^2 = b^2y - a^3 \text{ et } (b^2y - a^3)^2 = 4a^3y^3.$$

Elevant la première de ces équations au carré et ayant égard à la seconde, on aura

$$4x^2y^4 = 4a^3y^3;\ \text{d'où}\ x^2y = a^3.$$

Résolvant l'équation (1) par rapport à y, on verra de même que le minimum de b, donne $xy^2 = a^3$. Ce qu'on pouvait d'ailleurs prévoir ; car l'équation (1) étant *symétrique* par rapport à x et y, elle reste la même quand on y change x en y et y en x ; le résultat qu'elle fournit, doit donc aussi demeurer le même.

Les équations $x^2y = a^3$ et $xy^2 = a^3$, donnent $x = y = a$; d'où $z = a$. Et l'équation $2xy^2 = b^2y - a^3$, fournit, pour le minimum de b, $b = a\sqrt{3}$.

90. Si b était donné et que a fût variable, le maximum ou le minimum de a serait $a = \frac{1}{3}b\sqrt{3}$ et donnerait $x = y = z = a$.

Dans ce cas, comme la variable a entre dans la partie positive et dans la partie négative de la quantité sous le radical, il reste encore à savoir lequel du maximum ou du minimum rend nul ce radical, et donne les valeurs précédentes. Pour y parvenir, on pose

$$x = \tfrac{1}{3}b\sqrt{3} + \varphi \ \text{ et } \ y = \tfrac{1}{3}b\sqrt{3} - \varphi,$$

et alors l'équation (1) devient

$$a^3 \cdot \tfrac{2}{3}b\sqrt{3} = \tfrac{2}{9}b^4 - \left(\tfrac{1}{3}b^2\varphi^2 + \varphi^4\right).$$

On voit que le maximum de a répond $\varphi = 0$; et il en résulte les valeurs trouvées d'abord.

Il suit de cet exemple, que *quand on ne saura laquelle de la plus grande ou de la plus petite valeur a été obtenue, il faudra égaler les inconnues proposées, à leurs valeurs trouvées, augmentées ou diminuées des auxiliaires* φ, ω, *etc ; substituer les résultats dans l'équation proposée, résoudre l'équation résultante par rapport à la variable, et comparer sa valeur à ce qu'elle devient lorsqu'on y suppose nulles les auxiliaires* φ, ω, *etc. : alors on aura le maximum ou le minimum demandé.* C'est ce qu'on verra d'ailleurs, en cherchant le maximum de a dans l'équation $xy - x^2y^2 = a(x+y)$.

91. On peut s'exercer à chercher le maximum ou le minimum, soit de a, soit de b, dans les équations que voici :

$x^2 + y^2 + b = a(x + y)$;
$x + y + z = a$ et $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = b$;
$vxyz = a^4$ et $v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = b^2$;
$x + y + z + u = a$ et $uyz + uxz + uxy + xyz = b$;
$u + v + x + y + z = a$ et $u^3 + v^3 + x^3 + y^3 + z^3 = b^3$.

92. Si l'on devait trouver le minimum de a, dans l'équation

$$2a\sqrt{x^2 - c^2} + 2a\sqrt{y^2 - c^2} = (x + y)^2,$$

cette équation ne pourrait s'abaisser au second degré, que par l'usage d'inconnues auxiliaires; et voici comment : posons $x^2 - c^2 = z^2$ et $y^2 - c^2 = v^2$, ou $x = \sqrt{(c^2 + z^2)}$ et $y = \sqrt{(c^2 + v^2)}$; substituons ces valeurs, et faisons, dans l'équation résultante, $z + v = 2u$ et $z - v = 2t$, ou $z = u + t$ et $v = u - t$: nous aurons une nouvelle équation qui, après avoir chassé le radical et avoir divisé par u, donnera, pour le minimum de a,

$$a = 2c \text{ et } x = y = c\sqrt{2}.$$

C'est d'ailleurs ce qu'on pourrait vérifier, en posant, dans l'équation proposée, $x = c\sqrt{2} + \varphi$ et $y = c\sqrt{2} - \varphi$ (90).

93. En général, lorsque l'équation ou les équations proposées, sont symétriques par rapport aux inconnues, le maximum et le minimum de la variable rendent toujours ces inconnues égales entre elles. Et pour obtenir ce maximum ou ce minimum, il suffit d'égaler l'une des inconnues à $v + \varphi$, l'autre à $v - \varphi$, etc. C'est ainsi qu'on traitera chacun des systèmes d'équations qui suivent, pour y avoir le minimum de a :

$$(a - x)^m + (a - y)^m = b \text{ et } x^n + y^n = c;$$
$$x^m + y^m + z^m = a \text{ et } x + y + z = b;$$

dans chacun de ces groupes d'équations, les exposans sont entiers et positifs.

94. *On veut faire construire un coffre en fer, à faces rectangulaires, de* a^3 *centimètres cubes de capacité, et dont l'enveloppe ait partout* $\frac{1}{2}$ *centimètre d'épaisseur. On veut d'ailleurs que ce coffre coûte et pèse le moins possible; quelles dimensions doit-il avoir pour cela?*

Soient x, y, z les dimensions intérieures de ce coffre; soit m le volume de son enveloppe : puisque cette enveloppe doit avoir $\frac{1}{2}$ centimètre d'épaisseur, il est clair que les dimensions extérieures seront $x+1$, $y+1$ et $z+1$. Or, le volume d'un parallélipipède rectangle étant le produit de ses trois dimensions, il est facile de voir que le problème proposé fournit les deux équations :

$$xyz = a^3 \text{ et } (x+1)(y+1)(z+1) - xyz = m;$$

d'où l'on tire, pour le minimum de m, $m = (1+a)^3 - a^3$ et $x = y = z = a$.

Les calculs précédens résolvent aussi le problème où, le volume m de l'enveloppe étant donné, on demanderait que le coffre eût la plus grande capacité possible.

95. *Si l'on veut partager le nombre donné* k *en* n *parties telles, que la somme de tous les produits différens qu'on obtient en combinant ces parties* m *à* m, *soit un maximum, il faut prendre toutes ces parties égales entre elles.*

En effet, désignons par x et y deux quelconques de ces n parties, et par s la somme de toutes les autres; nous aurons donc

$$x + y + s = k.$$

Soit h la somme de tous les produits différens qu'on obtient en multipliant les n parties cherchées m à m : pour cette somme, les parties n'entrent qu'une fois dans un produit; ainsi le produit xy est multiplié par la somme a de tous les produits différens des $n-2$ autres parties, $m-2$ à $m-2$; tandis que chacune des parties x et y est multipliée par la somme b des $n-2$ autres, $m-1$ à $m-1$: de sorte qu'en désignant par c la somme de tous les produits différens des $n-2$ autres parties, prises m à m, il viendra

$$axy + bx + by + c = h.$$

Cette équation et la précédente donnent

$$x = \tfrac{1}{2}(k-s) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(k-s)^2 + \tfrac{b}{a}(k-s) + \tfrac{c}{a} - \tfrac{h}{a}}.$$

Supposons que toutes les parties de k, excepté x et y, aient les valeurs qui conviennent au maximum de h : on voit que c'est ce maximum qui rend nulle la quantité sous le radical de x et qui donne

$$x = \tfrac{1}{2}(k-s) = y.$$

Donc, pour le maximum de h, deux quelconques des n parties de k sont égales entre elles : donc toutes ces parties sont égales. C.Q.F.D.

Réciproquement, il est aisé de voir qu'étant donné la somme h des produits différens des n nombres inconnus, combinés m à m; pour que la somme de ces nombres soit un minimum, il faut que ces mêmes nombres soient égaux entre eux.

96. *Si l'on veut partager un nombre donné* k *en* n *parties, dont le produit soit un maximum, il faut prendre ces parties égales entre elles.*

En effet, soient x et y deux quelconques de ces parties, s la somme des $n-2$ autres et p leur produit; on aura

$$x+y+s=k \quad \text{et} \quad pxy=h.$$

Opérant comme dans la démonstration précédente, on verra que le maximum de h, donne $x=\frac{1}{2}(k-s)=y$. D'où il suit que pour le maximum de h, deux quelconques des parties cherchées, sont égales entre elles: donc toutes ces parties sont égales.

Réciproquement, on voit que pour décomposer un produit donné h en n facteurs positifs, dont la somme soit un minimum, il faut prendre tous ces facteurs égaux entre eux.

97. *Les exposans étant des nombres quelconques positifs, on demande le maximum ou le minimum de* ω *dans les équations*

$$\left.\begin{array}{c} a_1x_1^p+a_2x_2^q+a_3x_3^r+\dots+a_nx_n^t=\varphi \\ \text{et} \quad x_1^h x_2^i x_3^k \dots x_n^m=\omega \ (*) \end{array}\right\} \dots (1)$$

Posant d'abord

$$a_1x_1^p=y_1,\ a_2x_2^q=y_2,\ a_3x_3^r=y_3,\ \dots,\ a_nx_n^t=y_n;$$

puis substituant les valeurs de x_1, x_2, x_3, ..., x_n, tirées de ces équations, on aura

$$\left.\begin{array}{l} y_1+y_2+y_3+\dots+y_n=\varphi, \\ y_1^{\frac{h}{p}} y_2^{\frac{i}{q}} y_3^{\frac{k}{r}} \dots y_n^{\frac{m}{t}} = \omega a_1^h a_2^i a_3^k \dots a_n^m=\omega' \end{array}\right\} \dots (2)$$

Soit v le moindre multiple des dénominateurs des exposans réduits, dans le 1er membre de la 2e équation, et soit élevé de part et d'autre à la puissance v: si nous posons, pour abréger,

---

(*) Les expressions x_1, x_2, x_3, ..., x_n, s'énoncent x premier, x deuxième, x troisième, ..., x, $n$ième.

$$\frac{hv}{p}=a,\ \frac{iv}{q}=b,\ \frac{kv}{r}=c,\ldots,\ \frac{mv}{t}=g;$$

il est clair que a, b, c, ..., g, seront des nombres entiers positifs, et que nous aurons à traiter les deux équations

$$\left.\begin{array}{c} y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n=\varphi \\ \text{et } y_1^{\,a}y_2^{\,b}y_3^{\,c}\ldots y_n^{\,g}=\omega^{IV} \end{array}\right\}\ldots(3)$$

Il est visible que le maximum ou le minimum de ω^{IV} donnera le maximum ou le minimum de ω. Or, la dernière équation revient à

$$a^ab^bc^c\ldots g^g\left(\frac{y_1}{a}\right)^a\left(\frac{y_2}{b}\right)^b\left(\frac{y_3}{c}\right)^c\cdots\left(\frac{y_n}{g}\right)^g=\omega^{IV};$$

donc ω^{IV} ne saurait être un maximum, à moins que le produit qui multiplie $a^ab^bc^c\ldots g^g$, n'en soit un. Or, ce produit contient a facteurs $\frac{y_1}{a}$, dont la somme est y_1; b facteurs $\frac{y_2}{b}$, dont la somme est y_2; c facteurs $\frac{y_3}{c}$, dont la somme est y_3, ...; enfin, g facteurs $\frac{y_n}{g}$, dont la somme est y_n; ce produit contient donc $a+b+c+\cdots+g$, ou s facteurs, dont la somme est $y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n$ ou φ : par conséquent, pour que le même produit soit un maximum, il faut, d'après ce qui précède (96), que tous ses s facteurs soient égaux entre eux : l'un quelconque de ces mêmes facteurs est donc $\frac{\varphi}{s}$. Et comme y_1 contient a de ces facteurs, on aura $y_1=\frac{a\varphi}{s}$. De même, $y_2=\frac{b\varphi}{s}$, $y_3=\frac{c\varphi}{s}$, ..., $y_n=\frac{g\varphi}{s}$.

Ces valeurs feront connaître celles de x_1, x_2, x_3, ..., x_n qui répondent au maximum de ω' ou de ω. On tire aussi, des valeurs précédentes,

$$y_1:\frac{h}{p}::y_2:\frac{i}{q}::y_3:\frac{k}{r}::\cdots::y_n:\frac{m}{t}.$$

Comparant cette suite de rapports égaux aux équations (2), on verra que *pour partager un nombre donné φ en* n *parties telles, qu'en les élevant chacune à une puissance quelconque positive, le produit de ces puissances soit un maximum, il faut prendre ces parties proportionnelles à leurs exposans.*

Les valeurs précédentes auraient lieu pareillement si, ω étant donné, on cherchait le minimum de φ.

98. *Partager un nombre donné* a *en* n *parties telles, qu'en multipliant chacune par celle qui la suit immédiatement et la dernière par la première, la somme des produits résultans soit un maximum.*

Soient x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n les n parties cherchées; on aura

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+\cdots+x_n=a,$$
$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_6+\cdots+x_nx_1=b.$$

Pour éliminer une inconnue entre ces équations, prenons la valeur de x_3 dans la première, et posons, pour abréger, $h=x_6+x_7+\cdots+x_n$; nous obtiendrons

$$x_3=a-x_1-x_2-x_4-x_5-h.$$

Substituant cette valeur dans la seconde équation proposée et développant, il viendra

$$x_1x_2+ax_2-x_1x_2-x_2^2-x_2x_4-hx_2+ax_4-x_1x_4-x_2x_4-$$
$$x_2x_5-x_4^2-x_4x_5-hx_4+x_4x_5+x_5x_6+\cdots+x_nx_1=b.$$

Réduisant et changeant les signes des deux membres, on aura

$$\left.\begin{array}{l} x_2^2+2x_2x_4-ax_2+x_2x_5+hx_2-ax_4+x_1x_4 \\ +x_4^2+hx_4-x_5x_6-x_6x_7-\cdots-x_nx_1=-b. \end{array}\right\}\ldots(3)$$

Préparant cette équation pour la résoudre par rapport à x_2, il vient d'abord

$$x_2^2-(a-2x_4-x_5-h)x_2=ax_4-x_1x_4-x_4^2-$$
$$x_4x_5-hx_4+x_5x_6+x_6x_7+\cdots+x_nx_1-b;$$

d'où $x_2^2-(a-2x_4-x_5-h)x_2=p-b$,

p désignant une quantité positive. Cette équation donne

$$x_2=\tfrac{1}{2}(a-2x_4-x_5-h)\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(a-2x_4-x_5-h)^2+p-b}.$$

On voit que si les inconnues proposées ont les valeurs qui conviennent au maximum de b, ce maximum rendra nul le radical de x_2 et donnera

$$x_2=\tfrac{1}{2}(a-2x_4-x_5-h).$$

Résolvant l'équation (3) par rapport à x_4, on verra pareillement que le maximum de b fournit

$$x_4=\tfrac{1}{2}(a-2x_2-x_1-h).$$

Retranchant cette valeur de la précédente, on aura, toute réduction faite, $\quad x_1=x_5.$

Si l'on avait d'abord éliminé x_4, on aurait trouvé $x_2 = x_6$; si l'on avait éliminé x_2, on aurait eu $x_4 = x_n$; ainsi de suite. Ces résultats prouvent, que *pour le maximum de* b, *les coefficiens des deux multiplicateurs de l'inconnue éliminée, dans la* 2^e^ *équation proposée, sont égaux entre eux.*

Ce principe ne saurait s'appliquer au cas de trois inconnues; mais alors le problème peut se résoudre directement, et donne, pour le maximum de b,

$$x_1 = x_2 = x_3 = \tfrac{1}{3}a.$$

Lorsqu'il y a quatre inconnues, suivant qu'on élimine x_4, x_3, x_2, x_1, le principe précédent donne, pour le maximum de b,

$$x_2 = x_2,\ x_1 = x_1,\ x_4 = x_4 \text{ et } x_3 = x_3,$$

équations qui n'apprennent rien sur les inconnues proposées; le problème est donc alors indéterminé. C'est ce qu'on peut vérifier directement; car alors les équations du problème, sont

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 = b.$$

La première donne $x_4 = a - x_1 - x_2 - x_3$: substituant cette valeur dans la seconde équation, mise sous la forme,

$$x_2(x_1 + x_3) + x_4(x_1 + x_3) = b,$$

on aura, en réduisant,

$$a(x_1+x_3)-(x_1+x_3)^2=b;\ \text{d'où}\ x_1+x_3=\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-b}.$$

On voit que le maximum de b donne $x_1 + x_3 = \frac{1}{2}a$; d'où $x_2 + x_4 = \frac{1}{2}a$. Le maximum de b ne pouvant donc fournir que deux équations entre les quatre inconnues x_1, x_2, x_3, x_4, le problème est évidemment indéterminé.

Lorsqu'il y a cinq inconnues, suivant qu'on élimine x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, le principe énoncé plus haut, donne, pour le maximum de b,

$$x_2 = x_3,\ x_1 = x_2,\ x_1 = x_5,\ x_4 = x_5 \text{ et } x_3 = x_4;$$

ces valeurs et la première équation proposée, fournissent $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \frac{1}{5}a$.

Si $n = 6$, en éliminant d'abord x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, le maximum de b donnera

$$x_2 = x_4,\ x_1 = x_3,\ x_2 = x_6,\ x_1 = x_5,\ x_4 = x_6 \text{ et } x_3 = x_5,$$

d'où $x_1 = x_3 = x_5$ et $x_2 = x_4 = x_6$. Ces valeurs réduisent les deux équations proposées à

$$x_1 + x_2 = \tfrac{1}{3}a \text{ et } x_1 x_2 = \tfrac{1}{6}b;$$

d'où il est facile de conclure que le maximum de b répond à $x_1 = x = \frac{1}{6}a$, et que par conséquent ce maximum a lieu lorsque

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = \tfrac{1}{6}a.$$

En général, les parties de a sont égales entre elles, pour le maximum de b; mais le problème est indéterminé lorsque le nombre n de ces parties, est un multiple de 4. Par exemple, supposons $n = 8$; nous aurons, d'après le principe énoncé plus haut,

$$x_2 = x_6,\ x_1 = x_5,\ x_4 = x_8 \text{ et } x_3 = x_7;$$

d'où les équations du problème deviendront

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \tfrac{1}{2}a,$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_1 = \tfrac{1}{2}b;$$

elles sont par conséquent de même forme que quand $n = 4$; et conséquemment le problème est indéterminé.

Lorsque $n = 12$, on trouve $x_2 = x_6 = x_{10}$, $x_1 = x_5 = x_9$, $x_4 = x_8 = x_{12}$, et $x_3 = x_7 = x_{11}$; d'où les équations du problème se réduisent encore à celles qui ont lieu pour $n = 4$; ce problème est donc aussi indéterminé pour $n = 12$. Il en sera de même pour $n = 16, 20, 24$, etc.

Il résulte de la discussion précédente, qu'en général, *pour que les parties d'un nombre donné soit telles, qu'en multipliant chacune par celle qui la suit immédiatement et la dernière par la première, la somme des produits résultans soit un maximum, il suffit que ces parties soient égales entre elles.*

Réciproquement, les calculs que nous venons d'employer démontrent, que *si l'on connaît la somme des produits obtenus, au moyen de n nombres inconnus, en multipliant chacun par celui qui le suit immédiatement et le dernier par le premier, la somme de ces n nombres sera la moindre possible, quand ils seront égaux entre eux* (*).

(*) Ce principe et le précédent servent à démontrer les deux théorèmes que voici : 1° Parmi tous les polygones de n côtés et d'une même somme de droites menées des sommets à un point intérieur et divisant l'espace autour de ce point en parties égales, celui dont l'aire est la plus grande, est le polygone régulier ayant son centre au point donné.

2° Parmi les polygones de n côtés et de même surface s, dans lesquels

99. Voici quelques problèmes et théorèmes pour servir d'exercices :

Décomposer le produit donné a en deux facteurs positifs tels, qu'en multipliant chacun par la racine carrée de l'autre, la somme des deux produits soit un minimum.

Connaissant la somme a des racines carrées de deux nombres, quelles valeurs doivent-ils avoir, pour que leur somme divisée par la racine carrée de leur produit, donne le plus petit quotient possible ?

Quel nombre x doit-on retrancher de a et ajouter à b, pour que la somme des racines carrées des deux résultats soit un maximum ?

Trouver quatre nombres en proportion, dont le produit soit le plus grand possible, connaissant la somme a des deux premiers et la somme b des deux derniers.

Partager le nombre donné a en trois parties telles, qu'en les multipliant deux à deux et multipliant chaque produit par la somme de ses facteurs, la somme des nouveaux produits soit la moindre possible.

On veut creuser près d'une rivière, un bassin à faces rectangulaires, propre à rendre plus claire et plus saine l'eau qu'il reçoit de cette rivière, et qui ait a mètres cubes de capacité. Le contour intérieur de ce bassin sera revêtu d'un mur dont chaque mètre carré de surface coûtera b fr. Le prix pour creuser le bassin croîtra comme la profondeur et sera c fr. pour le premier mètre. Quelles doivent être les dimensions de ce bassin, pour que le prix de sa construction soit un minimum ?

Un particulier a une masse d'argent fin de a centimètres cubes de volume. Il veut employer cette masse à la confection d'une tabatière à faces rectangulaires, dont l'enveloppe ait partout $\frac{1}{4}$ de centimètre d'épaisseur. Mais comme les 12 côtés seront des filets d'or, tous de même grosseur, il voudrait, pour diminuer les frais autant qu'il se peut, que la somme de ces 12 côtés fût un minimum. Quelles doivent être, pour cela, les dimensions de la tabatière à construire ?

Pour décomposer un produit donné en n facteurs positifs, de manière que la somme de leurs puissances m^{mes} soit un minimum, on doit prendre tous ces facteurs égaux entre eux.

Si l'on veut trouver n nombres positifs tels, que la somme de leurs puissances m^{mes} étant un nombre donné, le produit de ces n nombres

---

les droites menées des sommets à un même point intérieur, divisent l'espace autour de ce point en parties égales, celui où la somme de ces droites est la moindre possible, est le polygone régulier dont le centre est au point donné.

J'ai démontré ces deux théorèmes dans le 2e vol. de la *correspondance Mathématique et Physique*, publiée par MM. Garnier et Quetelet ; ouvrage où les élèves des cours de Physique et de Mathématiques supérieures trouveront de quoi les intéresser.

soit un maximum, il faut prendre tous ces n nombres égaux entre eux.

S'il faut trouver n nombres positifs, de manière que la somme de tous les produits différens qu'ils donnent en les multipliant m à m, étant un nombre donné, le produit de ces m nombres soit un maximum, on devra prendre tous ces nombres égaux entre eux.

Pour décomposer un produit donné en n facteurs positifs tels, que la somme des produits qu'ils donnent en les multipliant m à m, soit un minimum, il faut prendre tous ces facteurs égaux entre eux.

Etant donnée la somme des carrés de n nombres inconnus; pour que la somme de leurs produits par des nombres déterminés, soit un maximum, il faut que ces nombres inconnus soit proportionnels à leurs multiplicateurs donnés.

Connaissant la somme des produits respectifs de n nombres inconnus par des nombres donnés; pour que la somme des carrés de ces n nombres inconnus soit un minimum, il faut que ces mêmes nombres inconnus soient proportionnels à leurs multiplicateurs donnés.

Pour partager un nombre donné a en n parties telles, que la somme de leurs carrés moins k fois la somme des produits qu'on obtient en multipliant chacune de ces parties par celle qui la suit immédiatement et la dernière par la première, donne le moindre reste possible, il fau prendre toutes ces mêmes parties égales entre elles.

La somme des carrés de n nombres inconnus, moins k fois la somme des produits qu'ils fournissent en multipliant chacun par celui qui le suit immédiatement et le dernier par le premier, donnant un reste connu; pour que la somme de ces n nombres soit un minimum, ils doivent être égaux entre eux.

Nota. Les 8 théorèmes qu'on vient d'énoncer, confirment l'assertion du n° 93; les deux premiers se démontrent par les mêmes calculs, ainsi que le 3ᵉ et le 4ᵉ, le 5ᵉ et le 6ᵉ, le 7ᵉ et le 8ᵉ.

Problèmes résolubles par les progressions.

100. *On a deux tonneaux de vin dans chacun desquels on prend une certaine partie du vin qu'il contient et on verse dans l'un le vin extrait de l'autre : on fait* n *fois successives cette double opération, en prenant successivement le quart, le* 5ᵉ, *le* 6ᵉ, *le* 7ᵉ, ..., *le* $(n+3)^{me}$; *et alors les deux tonneaux renferment l'un* a *et l'autre* b *litrons de vin : combien en avaient-ils d'abord chacun ?*

Soit $a+b=h$; il est clair qu'il y aura toujours h litrons de vin dans les deux tonneaux. Soit R_v le vin restant dans le 1ᵉʳ avant la v^{me} opération, et R_{v+1} le vin restant après, le vin qui reste dans le 2^e tonneau, avant la v^{me} opération, est $h - R_v$; on a par conséquent

$$R_{v+1} = R_v - \frac{R_v}{v+3} + \frac{h-R_v}{v+3};$$

d'où l'on tire $(v+3)R_{v+1} - (v+1)R_v = h$, et

$$(v+2)(v+3)R_{v+1} - (v+1)(v+2)R_v = (v+2)h.$$

Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, et observant que $R_{n+1} = a$, on aura

$$\begin{aligned}
&3 \cdot 4R_2 - 2 \cdot 3R_1 = 3h \\
&4 \cdot 5R_3 - 3 \cdot 4R_2 = 4h \\
&5 \cdot 6R_4 - 4 \cdot 5R_3 = 5h \\
&6 \cdot 7R_5 - 5 \cdot 6R_4 = 6h \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&(n+2)(n+3)a - (n+1)(n+2)R_n = (n+2)h.
\end{aligned}$$

Ajoutant ces équations entre elles et observant que tous les termes des premiers membres se détruisent deux à deux, excepté $(n+2)(n+3)a$ et $-2 \cdot 3R_1$, on trouvera

$$(n+2)(n+3)a - 2 \cdot 3R_1 = h[3+4+5+6+\cdots+(n+2)];$$

d'où l'on tire, en prenant la somme de la progression,

$$R_1 = \frac{1}{6}(n+2)(n+3)a - \frac{n}{12}(n+5)(a+b).$$

Les quantités de vin R_1 et $a+b-R_1$, que les tonneaux contenaient d'abord, se trouvent ainsi déterminées.

101. *Un pigeon femelle donne tous les ans 4 pigeons femelles et 4 mâles; et chaque pigeon femelle d'une année est tué l'année suivante, après avoir fourni 4 pigeons femelles et 4 mâles. On demande combien il y aura de pigeons produits au bout de* n *années?*

Puisque le 1^{er} pigeon et la moitié des P pigeons produits la v^{me} année, sont des femelles, chacun d'eux en produira 8 l'année suivante; le nombre de pigeons fournis pendant cette année suivante est donc $8 + \frac{1}{2}P \times 8$, ou $8 + 4P$. De sorte que le nombre de pigeons produits chaque année est 8 plus 4 fois ceux produits l'année précédente. D'après cela, le nombre de pigeons produits la première année étant 8, les pigeons fournis pendant les années 2^e, 3^e, 4^e, 5^e, ..., sont respectivement :

$8+8\cdot4$
$8+8\cdot4+8\cdot4^2$
$8+8\cdot4+8\cdot4^2+8\cdot4^3$
$8+8\cdot4+8\cdot4^2+8\cdot4^3+8\cdot4^4$
etc.............................

D'où l'on voit que le nombre de pigeons produits pendant la v^{me} année est

$$8+8\cdot4+8\cdot4^2+8\cdot4^3+\cdots+8\cdot4^{v-1},\ \text{ou}\ \tfrac{8}{3}(4^v-1).$$

Prenant successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n$, et ajoutant, on aura pour le nombre x de tous les pigeons produits pendant n années,

$$x=\tfrac{8}{3}(4+4^2+4^3+\cdots+4^n-n);\ \text{d'où}\ x=\tfrac{8}{9}(4^{n+1}-4-3n).$$

102. *Deux vases* A *et* B, *dont les capacités sont respectivement* a *et* b, *sont remplis l'un et l'autre d'un mélange de vin et d'eau, dont la proportion est connue pour chaque vase. On a deux mesures égales, dont la contenance commune est* x, *et qu'on remplit en même temps dans les deux vases* A *et* B, *pour verser ensuite dans chacun le liquide extrait de l'autre. Ayant fait* n—1 *autres fois cette opération, on veut savoir,* 1° *combien il y a alors d'eau et de vin dans chaque vase?* 2° *quelle doit être la contenance commune* x, *pour que les deux derniers mélanges soient exactement de même nature?*

1° Soient c et d les deux quantités connues d'eau qui entrent d'abord dans les deux mélanges a et b. Il est clair que les deux vases A et B contiendront toujours les mêmes quantités a et b de liquide, après chaque opération. Soit R la quantité d'eau contenue dans le vase A, avant la v^{me} opération; l'eau contenue dans le vase B, avant la même opération, sera évidemment $c+d-R$. Or, prendre x litrons sur a litrons, c'est prendre les $\frac{x}{a}$ de a litrons; c'est donc prendre les $\frac{x}{a}$ de l'eau et les $\frac{x}{a}$ du vin qui composent le liquide a, puisque l'eau et le vin y sont exactement mêlés. Ainsi, par la v^{me} opération, on extrait du vase A, le nombre $\frac{x}{a}R$ litrons d'eau, et du vase B, le nombre $\frac{x}{b}(c+d-R)$ litrons d'eau. Donc, après cette opération, le vase A contient une quantité d'eau exprimée par

$$\left(1-\frac{x}{a}-\frac{x}{b}\right)R+\frac{x}{b}(c+d),\text{ ou par } mR+k,$$

et posant, pour abréger, $m=1-\frac{x}{a}-\frac{x}{b}$ et $k=\frac{x}{b}(c+d)$.

L'expression $mR+k$ montre que *pour avoir l'eau contenue dans le vase A, après une opération quelconque, il faut multiplier par* m *l'eau qu'il renfermait avant et ajouter* k *au produit.* D'après cette règle, puisque A contenait d'abord c litrons d'eau, il en contiendra, après les opérations 1^re^, 2^e^, 3^e^, 4^e^, 5^e^, ..., respectivement

$$\begin{array}{l} cm+k \\ cm^2+km+k \\ cm^3+km^2+km+k \\ cm^4+km^3+km^2+km+k \\ cm^5+km^4+km^3+km^2+km+k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Sans qu'il soit besoin de continuer ces résultats, on voit que la quantité z d'eau contenue dans le vase A, après la n^{me} opération, est

$$z=cm^n+k+km+km^2+km^3+\dots+km^{n-1};$$

d'où l'on tire

$$z=cm^n+k\frac{m^n-1}{m-1}.$$

Substituant la valeur de k et celle de m au dénominateur, on aura, réductions faites,

$$z=\frac{(bc-ad)}{a+b}m^n+\frac{a(c+d)}{a+b}\dots\text{(1)}$$

Avec cette valeur de z, on aura aisément les quantités de vin et d'eau contenues dans les deux vases, après la n^{me} opération. On peut faire $n=\infty$.

2° Puisqu'après la n^{me} opération le vase A contient toujours a litrons de liquide, chaque litron sera le a^{me} de ce liquide, et contiendra par conséquent le a^{me} de l'eau z qu'il renferme. De même, chaque litron du dernier mélange, dans le vase B, contiendra le b^{me} de l'eau $c+d-z$ que ce mélange renferme. Or, pour que les deux derniers mélanges soient exactement de même nature, il faut qu'un litron du premier contienne autant d'eau qu'un litron du second; on a par conséquent

$$\frac{z}{a}=\frac{c+d}{b}-\frac{z}{b};\ \text{d'où}\ z=\frac{a(c+d)}{a+b}.$$

Substituant la valeur (1) de z, puis supprimant le dénominateur commun $a+b$, ainsi que le terme $a(c+d)$, commun aux deux membres, il vient

$$(bc-ad)m^n=0\ \ldots\ (2)$$

Lorsque $bc=ad$, ou que $a:b::c:d$, l'équation (2) est satisfaite, quelle que soit la valeur de x, et le problème est indéterminé. C'est aussi ce que montre l'équation (1); car cette équation devenant alors $z=c$; quelque multipliées que soient les opérations et quelque valeur qu'on donne à x, l'état des deux mélanges demeure invariable.

Si bc n'est pas égal à ad, l'équation (2) donnera $m^n=0$ et par conséquent $m=0$; d'où l'on tire

$$1-\frac{x}{a}-\frac{x}{b}=0,\ \text{ou}\ x=\frac{ab}{a+b}\ \ldots\ (3)$$

Comme cette valeur ne dépend pas de n et que $m^n=0$ ne peut avoir lieu que quand n n'est pas nul, on voit qu'en donnant à x la valeur (3), les deux mélanges seront exactement de même nature, dès la 1^re^ opération. C'est ce que montre encore la formule (1), qui se réduit à son second terme, par $m=0$.

103. *On a* b *litrons d'eau dans* m *vases; on prend du 1^er^ vase pour verser dans les* m — 1 *autres, de manière que chacun de ceux-ci renferme* a *fois autant d'eau qu'il en contenait auparavant; on fait la même opération avec le 2^e^ vase, puis avec le 3^e^, le 4^e^, le 5^e^ ..., le* m^me^. *Après avoir recommencé ces* m *opérations successivement* n — 1 *autres fois, les vases contiennent chacun la même quantité d'eau; on demande combien chacun en contenait avant la 1^re^ opération.*

Soient R_1, R_2, R_3, R_4, ..., R_m, les quantités respectives d'eau contenues dans les vases proposés, avant de faire pour la v^{me} fois les m opérations successives. A cette v^{me} fois, on verse du 1^er^ dans les $m-1$ autres, de manière que chacun de ceux-ci renferme a fois autant d'eau qu'il en contenait auparavant; on ajoute par conséquent à chacun de ces derniers $(a-1)$ fois l'eau qu'il renfermait; il restera donc dans le premier, après cette opération,

$$R_1-(a-1)(R_2+R_3+R_4+\cdots+R_m).$$

Et comme on a toujours $R_1+R_2+R_3+R_4+\dots+R_m=b$, il s'ensuit qu'il reste dans le 1^er vase, $R_1-(a-1)(b-R_1)$ ou $aR_1-(a-1)b$, ou encore aR_1-h, en posant $h=(a-1)b$.

L'expression aR_1-h nous apprend que pour avoir ce qui reste dans le vase duquel on a versé dans les $m-1$ autres, il faut multiplier par a ce qu'il contenait auparavant et soustraire h du produit. Quant aux $m-1$ autres vases, on sait déjà qu'après le versement, chacun renferme a fois autant d'eau qu'il en contenait auparavant. D'après cela, il est clair que les quantités d'eau contenues dans les vases, après les versemens 1^er, 2^e, 3^e, 4^e, ..., m^{me}, sont respectivement:

$$\begin{array}{lllll}
aR_1-h, & aR_2, & aR_3, & \dots, & aR_m \\
a^2R_1-ah, & a^2R_2-h, & a^2R_3, & \dots, & a^2R_m \\
a^3R_1-a^2h, & a^3R_2-ah, & a^3R_3-h, & \dots, & a^3R_m \\
a^4R_1-a^3h, & a^4R_2-a^2h, & a^4R_3-ah, & \dots, & a^4R_m \\
\dots & & & & \\
a^mR_1-a^{m-1}h, & a^mR_2-a^{m-2}h, & a^mR_3-a^{m-3}h, & \dots, & a^mR_m-h.
\end{array}$$

D'où l'on voit qu'après avoir fait pour la v^{me} fois les m versemens successifs, l'eau contenue dans le u^{me} vase est

$$a^mR_u-a^{m-u}h,\quad\text{ou encore}\quad a^mR_u-p,$$

en posant $p=ha^{m-u}=(a-1)ba^{m-u}$. L'expression a^mR_u-p nous apprend qu'on aura l'eau qui reste dans le u^{me} vase, après avoir fait, pour la v^{me} fois, les m versemens successifs, en multipliant par a^m celle qu'il contenait avant cette fois, et en ôtant p du produit. Ainsi les quantités d'eau contenues dans le u^{me} vase après avoir fait les m versemens successifs, 1, 2, 3, 4, ..., n fois, x étant l'eau qu'il renfermait d'abord, sont respectivement:

$$\begin{array}{l}
a^mx-p \\
a^{2m}x-pa^m-p \\
a^{3m}x-pa^{2m}-pa^m-p \\
a^{4m}x-pa^{3m}-pa^{2m}-pa^m-p \\
\dots \\
a^{mn}x-pa^{mn-n}-pa^{mn-2n}-\dots-pa^m-p.
\end{array}$$

Or, l'eau contenue dans le u^{me} vase, après avoir fait n fois les m versemens successifs, est $\frac{b}{m}$; on a donc

$$a^{mn}x - p\,(1 + a^m + a^{2m} + \cdots + a^{mn-m}) = \frac{b}{m};$$

d'où
$$x = \frac{mp\,(a^{mn} - 1) + b\,(a^m - 1)}{ma^{mn}\,(a^m - 1)}.$$

Cette formule s'appliquera aux vases 1^{er}, 2^e, 3^e, 4^e, ..., m^{me}, en faisant successivement $u = 1, 2, 3, 4, \ldots, m$, dans la valeur de p.

104. Nous laissons à traiter par les progressions, les théorèmes et problèmes que voici :

La somme de n nombres entiers consécutifs quelconques est divisible par n ou par $\frac{1}{2}n$, suivant que n est impair ou pair.

Toute puissance de 2, diminuée de 1, est égale à la somme des diviseurs de cette puissance, excepté elle-même.

Trouver une progression arithmétique de $n+7$ termes, dont la somme des n premiers fasse 40, celle des 4 termes suivans 86, et celle des 3 derniers 96.

Trouver une progression arithmétique telle, que la somme des 7 premiers termes soit 49, celle des 7 derniers 651 et celle de tous les termes 2500.

Dans une progression géométrique, le produit des deux extrêmes est 576; la somme des carrés des 2 premiers termes 45, et la somme des carrés des deux derniers 46080. Quelle est cette progression?

Quelle est la progression géométrique dont le nombre de termes est impair? On sait que 140 est la somme du premier et du moyen termes, 3780 celle du dernier et du moyen, et que la somme de tous les termes surpasse la raison de 5462.

Un pigeon femelle donne tous les ans 6 pigeons, 3 femelles et 3 mâles; de même, chaque femelle produite fournit tous les ans 6 pigeons, 3 femelles et 3 mâles, et ainsi de suite. Combien y aura-t-il de pigeons produits au bout de n années?

Un particulier achète tous les ans un pigeon femelle, qui lui donne 3 pigeons mâles chaque année suivante; combien aura-t-il de pigeons mâles après n années.

Une génisse donne un veau mâle la 1^{re} année, un veau femelle la 2^e, et ainsi de suite, alternativement; il en est de même de chaque veau femelle produit : on demande combien il y aura de veaux en tout, après n années.

Trouver un nombre tel, qu'en en prenant la moitié et le nombre a; le tiers du reste et le nombre a; le quart du 2^e reste et le nombre a; le cinquième du 3^e reste et le nombre a, et ainsi de suite, il reste b après la n^{me} opération.

Deux vases renferment l'un a et l'autre b litrons d'eau : on prend une certaine partie de l'eau du 1^{er} pour la verser dans le 2^{me}, et ensuite la même partie de l'eau du 2^{me} pour la verser dans le 1^{er} : on fait n fois successives ce couple de versemens. Combien y a-t-il alors d'eau dans chaque vase, sachant qu'on a pris successivement la moitié, le tiers, le quart, le 5^e, le 6^e, le 7^e, ..., le $(n+1)^{me}$. [Même problème, lorsqu'on prend constamment la c^{me} partie.]

Dans deux vases, on a deux mélanges d'eau et de vin, l'un de a et l'autre de b litrons de liquide, contenant respectivement o et d litrons d'eau. On verse x litrons du 1^{er} mélange dans le 2^{me}, et ensuite, après avoir bien laissé mêler l'eau et le vin, on verse x litrons du 2^{me} mélange dans le 1^{er} : on fait $n-1$ autres fois de suite ce couple de versemens, et l'on demande, 1° combien il y aura d'eau alors dans le 1^{er} vase; 2° quelle devra être la valeur de x pour que les deux derniers mélanges soient exactement de même nature.

On a trois vases A, B, C, contenant respectivement a, b, c, litres d'eau. On verse dans B le d^{me} de l'eau de A et m litres de C, puis dans A le d^{me} de l'eau de B et m litres de C : on fait $n-1$ autres fois ces deux opérations successives; combien y a-t-il alors d'eau dans chacun des vases proposés?

On a m vases contenant des mélanges d'eau et de vin, composés respectivement de a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_m litres de vin, et de b_1, b_2, b_3, b_4, ..., b_m litres d'eau. On verse dans le 1^{er}, le c^{me} des mélanges de tous les autres, puis dans le 2^e, le c^{me} des mélanges de tous les autres, dans le 3^e, le c^{me} des mélanges de tous les autres, ..., enfin, dans le m^{me}, le c^{me} des mélanges de tous les autres : après avoir fait n fois ces m opérations successives, on voudrait savoir quelles seront alors les quantités d'eau et de vin contenues dans chacun des vases proposés. [On peut supposer tous les a égaux entre eux, ainsi que tous les b; on peut aussi faire croître ou décroître tous les a d'après une certaine loi, de même que tous les b.]

Exercices sur le calcul des Radicaux.

105. Réduire à leurs plus simples expressions les quantités :

$$\sqrt{(a^2b-4ab+4b)},\ \sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{8},\ \sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{24},$$

$$\sqrt{27(x+1)(x^2-1)},\ \sqrt[3]{x^4+18x^3+108x^2+216x},$$

$$\sqrt[3]{(8a+24)}-\sqrt[3]{(125a+375)},\ \sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{128},$$

$$a\sqrt{\left(\frac{a^2-a}{a+1}\right)}+a\sqrt{\left(\frac{a}{a^2-1}\right)}-\sqrt{\left(\frac{a}{a^2-1}\right)},$$

$$\sqrt[4]{an^4-n^4x}-\sqrt[4]{a-x},\ \sqrt[5]{a^7(a^2-x^2)^6(a+x)^4},$$

$$\sqrt{27(a^2-b^2)(a+b)}-\sqrt{12a^3-12a^2b},\ \sqrt{2\sqrt[3]{16}}.$$

106. Trouver les formes les plus simples des produits :

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1),\ (6\sqrt{3}-6)(2+2\sqrt{3}),$$
$$\left(\sqrt[3]{12+\sqrt{19}}\right)\left(\sqrt[3]{12-\sqrt{19}}\right),\ (x+y\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1}),$$
$$\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right),\ \sqrt[3]{5\sqrt{2}}\times\sqrt[3]{25\sqrt{6}}.$$

107. Trouver les expressions les plus simples des quotiens, dans les divisions que voici indiquées :

$$8:(2-\sqrt{3}),\ (a^3b-ab^2c):(a^2+a+\sqrt{bc}),$$
$$(18+9\sqrt{3}+12\sqrt{5}+6\sqrt{15}):(3+2\sqrt{5}),$$
$$(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}):(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}),\ 2\sqrt[4]{24\sqrt[3]{18}}:\sqrt{2\sqrt{12}},$$
$$5\sqrt[3]{9\sqrt{72}}:\sqrt[4]{27\sqrt{18}},\ 6:(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}).$$

Lorsque le diviseur a plusieurs termes, on doit chercher à le rendre rationnel. Or, s'il était $\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$, il suffirait de multiplier le dividende et le diviseur par $\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$; et ainsi des autres.

108. Développer les puissances que voici indiquées :

$$(\sqrt{5}-1)^2,\ (\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3})^3,\ \left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)^2$$
$$(1+\sqrt{7})^5,\ (1+\sqrt{3}-\sqrt{2})^2,\ (2-\sqrt{2})^4 \text{ et } \left(\sqrt{2\sqrt[3]{18}}\right)^3.$$

109. Il est aisé de trouver les racines carrées des quantités :

$$2\sqrt[3]{18},\ \sqrt[5]{a^2-2ab+b^2} \text{ et } a^2-2x\sqrt{a^2-x^2}.$$

En général, si l'on regarde chaque radical comme portant sur tout ce qui le suit, on aura

$$\sqrt{4}\sqrt[3]{16}\sqrt[5]{4}\sqrt[6]{4}\sqrt[7]{64}\sqrt[8]{256}=2\sqrt[4]{8},$$
$$\sqrt[2n+1]{a^n}\sqrt[2n-1]{a^{n-1}}\ldots\sqrt[9]{a^4}\sqrt[7]{a^3}\sqrt[5]{a^2}\sqrt[3]{a}\sqrt{a}=\sqrt{a},$$
$$\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3} \text{ etc., à l'infini, } =3.$$

110. *Extraire s'il est possible, la racine* n^{me} *de* a $\pm\sqrt{b}$.

Pour y parvenir, soit posé $\sqrt[n]{(a\pm\sqrt{b})}=x\sqrt[n]{z}$; d'où

$$a \pm \sqrt{b} = zx^n \text{ et } x^{2n} - \frac{2a}{z}x^n + \frac{a^2-b}{z^2} = 0 \ldots (1)$$

Prenons $\sqrt[n]{\frac{a^2-b}{z^2}} = c$, ou $\frac{a^2-b}{z^2} = c^n$, et divisons les deux membres de l'équation (1) par x^n; nous aurons

$$x^n + \frac{c^n}{x^n} - \frac{2a}{z} = 0 \ldots (2)$$

Posons $x + \frac{c}{x} = u$; d'où $x = \frac{1}{2}u \pm \sqrt{\frac{1}{4}u^2 - c} \ldots (3)$.

Si c n'était pas rationnel, cette nouvelle expression de x serait plus compliquée que la première, et la racine n^{me} de $a \pm \sqrt{b}$ ne serait pas possible. Il faudra donc toujours disposer de z, de manière que c soit commensurable; et si aucune des valeurs entières de z ne satisfait à cette condition, la racine demandée n'existera pas.

Supposons donc que c soit rationnel; alors la formule (3) fera connaître x dès que u sera déterminé. Or, pour trouver u, soit élevée l'équation $x + \frac{c}{x} = u$, successivement aux puissances 2^e, 3^e, 4^e, 5^e, 6^e, 7^e, etc.; soit mis partout u à la place de $x + \frac{c}{x}$, et successivement dans chaque résultat les valeurs de

$$x^2 + \frac{c^2}{x^2},\ x^3 + \frac{c^3}{x^3},\ x^4 + \frac{c^4}{x^4},\ x^5 + \frac{c^5}{x^5}, \ldots,$$

tirées des résultats précédens; ayant égard en outre à l'équation (2), où n vaudra successivement 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc., et posant, pour abréger, $\frac{2a}{z} = d$, on aura

$$\begin{array}{l}
u^2 - 2c - d = 0 \\
u^3 - 3cu - d = 0 \\
u^4 - 4cu^2 + 2c^2 - d = 0 \\
u^5 - 5cu^3 + 5c^2u - d = 0 \\
u^6 - 6cu^4 + 9c^2u^2 - 2c^3 - d = 0 \\
u^7 - 7cu^5 + 14c^2u^3 - 7c^3u - d = 0 \\
\text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Dans ces équations, u doit être rationnel, ainsi que c, qui désigne successivement la racine 2^e, 3^e, 4^e, 5^e, 6^e, 7^e, etc. de $\frac{a^2-b}{z^2}$.

Connaissant u, par ces équations, d'après la méthode des diviseurs commensurables, on en substituera la valeur dans la formule (3), ce qui fera connaître x, et $x\sqrt[n]{z}$ sera la racine 2^e, 3^e, 4^e, 5^e, 6^e, 7^e, ..., de $a \pm \sqrt{b}$, suivant que n vaudra 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., c'est-à-dire, suivant qu'on aura employé la 1re, la 2^e, la 3^e, la 4^e, la 5^e, la 6^e, la 7^e, ..., des équations en u.

111. Pour appliquer la méthode précédente, proposons-nous d'extraire la racine cubique de $148 + 46\sqrt{11}$: on aura $a = 148$, $b = 23276$; d'où $a^2 - b = 21904 - 23276 = -1372 = -343 \times 4 = -4 \cdot 7^3$. Si donc on prend $z = 2$, il viendra $c = -7$ et $d = 148$. La 2^e équation en u sera donc

$$u^3 + 21u - 148 = 0.$$

La seule racine commensurable de cette équation étant $u = 4$, cette valeur et celle de c donnent $x = 2 \pm \sqrt{11}$; on a donc

$$\sqrt[3]{148 + 46\sqrt{11}} = (2 + \sqrt{11})\sqrt[3]{2}.$$

112. Si l'on veut trouver la racine 4^{me} de $17 - 12\sqrt{2}$, on aura $a = 17$, $b = 288$ et $a^2 - b = 1$; d'où $z = 1$, $c = \pm 1$ et $d = 34$. Pour $c = 1$, la 3^e des équations en u ne donne à u que des valeurs irrationnelles; il faut donc prendre $c = -1$; et alors on trouvera $u = 2$, $x = 1 \pm \sqrt{2}$ et

$$\sqrt[4]{17 - 12\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}.$$

On voit qu'il faut avoir égard à la double valeur de c, quand elle a lieu. Si l'on applique la méthode dont nous venons de fournir deux exemples, on obtiendra

$$\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2},\quad \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} = -1 + \sqrt{-1},$$

$$\sqrt[6]{289 - 323\sqrt{20}} = 2 - \sqrt{5},\quad \sqrt[7]{8 + 8\sqrt{-1}} = 1 - \sqrt{-1}$$

et $\sqrt[5]{288 + 132\sqrt{3}} = (1 + \sqrt{3})\sqrt[5]{3}$.

Dans l'avant dernier exemple, il faut donner le signe $-$ au radical de la racine, quoique celui de l'expression proposée ait le signe $+$, parce que la puissance 7^{me} de $1 + \sqrt{-1}$ est $8 - 8\sqrt{-1}$. Cette exception vient du radical imaginaire $\sqrt{-1}$.

Exercices sur la résolution de certaines équations.

113. Qu'on ait d'abord à résoudre les équations

$x=(27)^{\frac{1}{3}}$ et $y=(27)^{\frac{2}{6}}$; d'où $x^3-3^3=0$ et $y^6-3^6=0$.

Il est clair que ces deux équations peuvent s'écrire comme il suit :

$$(x-3)(x^2-3x+9)=0,$$

$$(y-3)(y+3)(y^2-3y+9)(y^2+3y+9)=0.$$

La première équation a trois racines, dont deux imaginaires; la seconde a les trois mêmes racines, plus trois autres, dont deux imaginaires.

114. Lorsque l'équation à résoudre contient des radicaux, il faut d'abord les faire disparaître. Or, pour chasser un radical d'une équation, il suffit de le laisser seul dans un membre et d'élever de part et d'autre à la puissance marquée par l'indice de ce radical. Par exemple, si on a

$$\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x-5}=1,$$

on chassera successivement le radical cube et le radical carré; ce qui donnera $x^3-24x^2+21x+46=0$;

d'où $x=2$, 23, -1. La dernière racine satisfait à l'équation que donne la proposée en y prenant $\sqrt{x+2}$ avec le signe $-$.

115. Si d'abord on avait fait disparaître le radical carré, il aurait été impossible de chasser ensuite le radical cubique. En général, il n'est pas toujours possible de faire disparaître les radicaux d'une équation, d'après la méthode précédente. Mais on évite toutes les difficultés en représentant chaque radical par une inconnue auxiliaire. Par exemple, qu'on ait

$$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}-7\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}+6=0:$$

on fera seulement $x=z^6$, et la transformée sera

$$z^4-z^3-7z^2+z+6=0;$$

d'où $z=1$, 3, -1, 2 et $x=1$, 729, 1, 64. La valeur $x=64$ ne satisfait pas à l'équation proposée; mais bien à celle qu'on trouve en y changeant les signes des radicaux de degré pair.

116. Considérons encore l'équation

$$\sqrt[5]{x^{18}} - 794\sqrt[5]{x^{12}} + 47449\sqrt[5]{x^6} - 46656 = 0:$$

si l'on pose $x^6 = z^5$, la transformée sera

$$z^3 - 794z^2 + 47449z - 46656 = 0.$$

Cette transformée donne $z = 1, 64, 729$; d'où à cause de $x^6 = z^5$ ou de $x^6 - z^5 = 0$, on tire les trois équations

$$x^6 - 1 = 0,\ x^6 - 32^6 = 0 \text{ et } x^6 - 243^6 = 0.$$

Ces équations font aisément connaître les 18 valeurs de x qui satisfont à l'équation proposée en mettant dans celle-ci les cinq valeurs dont chaque radical du 5ᵉ degré est susceptible.

117. Lorsqu'on prend $z = x^3$ et $t = y^2$, il est aisé de résoudre les deux équations :

$$\sqrt[3]{z^2} - 2\sqrt[3]{z}\sqrt{t} + t - 1 = 0 \text{ et } \sqrt[3]{z^2} + 6\sqrt{t} - t - 9 = 0.$$

En représentant chaque radical par une inconnue auxiliaire, on résout facilement les équations que voici :

$$\sqrt[3]{(x+2)} - \sqrt[3]{(x-17)} = 1;$$
$$\sqrt[5]{(x+43)} - \sqrt[5]{(x-199)} = 2;$$
$$x + y - \sqrt[3]{xy} = a \text{ et } \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = b;$$
$$xy = a \text{ et } \sqrt[r]{x^m} + \sqrt[r]{y^m} = b;$$
$$x + y + \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2} = 154 \text{ et } \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 7.$$

118. Nous avons déjà vu plusieurs fois que les inconnues auxiliaires peuvent simplifier la résolution des équations. C'est ce que nous allons voir encore. Considérons d'abord les deux groupes ou systèmes d'équations :

$xyz(x+y+z) = 216$	$p(x^2+y^2+z^2) = a$
$x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2) = 16704$	$p(x^3+y^3+z^3) = b$
$x^3y^3z^3(x^3+y^3+z^3) = 1368576$	$p(x^4+y^4+z^4) = c,$

p désignant $x+y+z$. Pour résoudre chacun de ces systèmes, on prendra

$$x + y + z = p,\ xy + xz + yz = q \text{ et } xyz = r;$$

alors, d'après la composition des équations, x, y, z, seront les racines de l'équation

$$\varphi^3 - p\varphi^2 + q\varphi - r = 0:$$

F

et il reste à déterminer p, q, r, en élevant les deux membres de la première équation auxiliaire, successivement aux puissances 2^e, 3^e, 4^e, puis en substituant dans les équations proposées.

On résoudrait de même les deux systèmes d'équations :

$(x+y+z)(x+y+z)=a$	$xyz(x+y+z)=a$
$(xy+xz+yz)(x^2+y^2+z^2)=b$	$xyz(xy+xz+yz)=b$
$xyz(x^3+y^3+z^3)=c$	$(x+y+z)(xy+xz+yz)=c.$

119. Considérons actuellement les deux groupes :

$uxy(u+x+y)=a$	$uxyz(u+x+y)=a$
$xyz(x+y+z)=b$	$uxyz(x+y+z)=b$
$yzu(y+z+u)=c$	$uxyz(y+z+u)=c$
$zux(z+u+x)=d$	$uxyz(z+u+x)=d.$

Pour résoudre ces deux systèmes, on posera dans chacun

$$u+x+y+z=\varphi \text{ et } uxyz=\omega.$$

Remarquons bien que les deux méthodes précédentes s'appliquent à n équations de même forme que les équations des systèmes que ces méthodes résolvent.

120. Soient encore à résoudre les trois équations

$$xyz(x^2+y^2+z^2)=-12$$
$$x^2y^2z^2(x^4+y^4+z^4)=72$$
$$x^4y^4z^4(x^8+y^8+z^8)=4128.$$

On posera d'abord

$$x^2+y^2+z^2=v,\quad xyz=u \text{ et } x^4+y^4+z^4=t.$$

Elevant au carré la première de ces équations, ainsi que l'équation résultante, et ayant égard aux deux autres équations auxiliaires, on aura les valeurs de $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2$ et $x^4y^4+x^4z^4+y^4z^4$. Ces valeurs étant substituées dans le carré de la troisième équation auxiliaire, donneront

$$x^8+y^8+z^8=\tfrac{1}{2}(t^2-v^4+2v^2t)+4u^2v.$$

Ainsi les équations proposées deviennent

$$uv=-12,\ u^2t=72 \text{ et } u^4t^2-u^4v^4+2u^4v^2t+8u^6v=8256;$$

d'où l'on tire, en négligeant les valeurs imaginaires,

$$u=-2,\ v=6 \text{ et } t=18.$$

Ces valeurs donnent aisément

$x^2+y^2+z^2=6$, $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=9$ et $x^2y^2z^2=4$.

De sorte que x^2, y^2, z^2 sont les racines de l'équation

$$\varphi^3-6\varphi^2+9\varphi-4=0,$$

et qu'on a par conséquent $x^2=4$, $y^2=1$ et $z^2=1$; d'où l'on tire les 8 systèmes de valeurs :

$$x=2,\ +2,\ +2,\ +2,\ -2,\ -2,\ -2,\ -2;$$
$$y=1,\ +1,\ -1,\ -1,\ +1,\ +1,\ -1,\ -1;$$
$$z=1,\ -1,\ +1,\ -1,\ +1,\ -1,\ +1,\ -1.$$

Mais quatre seulement de ces systèmes satisfont aux équations proposées.

Voici encore deux systèmes d'équations à résoudre :

$x^2+y^2=13$ et $x^3+y^3=35$;

$x+y+z=6$, $x^2+y^2+z^2=14$ et $x^3+y^3+z^3=36$.

121. En faisant un usage convenable d'inconnues auxiliaires, il ne sera pas difficile de résoudre les divers systèmes d'équations que voici :

$(x+y)(x^2+y^2)=a$ et $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=b$;

$$\left.\begin{aligned} xyz(x+y+z)&=a\\ xyz(x^2+y^2+z^2)&=b\\ xyz(x^4+y^4+z^4)&=c \end{aligned}\right|\begin{aligned} (x+y+z)(x^2+y^2+z^2)&=a\\ (x+y+z)(x^3+y^3+z^3)&=b\\ (x+y+z)(x^4+y^4+z^4)&=c \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} (x+y+z)(x^2+y^2+z^2)&=a\\ (x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)&=b\\ (x^3+y^3+z^3)(x^4+y^4+z^4)&=c \end{aligned}\right|\begin{aligned} xyz(xy+xz+yz)&=a\\ xyz(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)&=b\\ xyz(x^3y^3+x^3z^3+y^3z^3)&=c \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} (xy+xz+yz)(x+y+z)&=a\\ (xy+xz+yz)(x^2+y^2+z^2)&=b\\ (xy+xz+yz)(x^3+y^3+z^3)&=c \end{aligned}\right|\begin{aligned} (x+y+z)(xy+xz+yz)&=a\\ (x^2+y^2+z^2)(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)&=b\\ (x^3+y^3+z^3)(x^3y^3+x^3z^3+y^3z^3)&=c \end{aligned}$$

122. Voici plusieurs équations, où les exposans sont des nombres quelconques, positifs ou négatifs :

$$\left.\begin{aligned} x^n+y^n&=ax^m+ay^m\\ x^n+y^n&=bx^m-by^m \end{aligned}\right|\begin{aligned} (x^m+y^m)x^n&=ay^v\\ (x^m+y^m)y^n&=bx^v \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} (xyz)^m(x^n+y^n)&=a\\ (xyz)^m(x^n+z^n)&=b\\ (xyz)^m(y^n+z^n)&=c \end{aligned}\right|\begin{aligned} (xyz)^m(x^ny^n+x^nz^n)&=a\\ (xyz)^m(x^ny^n+y^nz^n)&=b\\ (xyz)^m(x^nz^n+y^nz^n)&=c \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^m y^p z^q = a & x^m y^m (x^n y^n + x^n z^n + y^n z^n) = az^v \\
x^p y^m z^q = b & x^m z^m (x^n y^n + x^n z^n + y^n z^n) = by^v. \\
x^q y^p z^m = c & y^m z^m (x^n y^n + x^n z^n + y^n z^n) = cx^v.
\end{array}$$

$$x^n y^n + x^n z^n + y^n z^n = ax^v = by^v = cz^v = d\,;$$

$$x^n + y^n + z^n + u^n = ax^v = by^v = cz^v = du^v = \varphi.$$

123. Il n'est pas nécessaire de faire usage des logarithmes pour résoudre les équations exponentielles que voici :

$$\begin{array}{l|l}
36^x = 8.9^x & 8^x - 4 = 4.8^{1-x} \\
27^{2x-3} = 243^{-1} & 9^x + 5.9^{x-1} = 6.7^{2x-2} \\
16^{x-1} = 4 & 2.4^x - 3.4^{x-1} + 5.4^{x-2} = 400 \\
16^{x^2-x} = 128 & 9^x - 5.8^y = 7 \text{ et } 2.9^x + 8^y = 58 \\
5^{8^x} = 625 & x^x = y^8 \text{ et } y^x = x^2 \\
8^{9^{x-1}} = 16^{\frac{1}{3}}.2^{3^x} & x^{x+y} = y^3 \text{ et } y^{x+y} = x^{12} \\
6^{2^{2x-10}} = 16.3^{2^y}. & x^x = y^{2x+5} \text{ et } x^{x-3} = y^{x+1}
\end{array}$$

Dans la dernière équation de la première colonne, on donne, pour condition, que x et y soient des nombres entiers. Et la même condition a lieu dans $(x^2 + y^2).2^{x-y} = x^2 + 6y^2$. Enfin, si l'on a les trois équations

$$x^{x-3} = y^y,\quad x^{y+1} = y^{x+2} \text{ et } x^{2y-1} = y^{3y},$$

les inconnues seront déterminées ; mais elles ne le seraient pas si l'on ne prenait que deux quelconques de ces équations : il faudrait alors ajouter la condition que x et y fussent des nombres entiers.

De quelques séries numériques finies.

124. On appelle *série* une suite de quantités qui croissent ou décroissent d'après une certaine loi. Le *terme général* d'une série est celui qui fournit tous les autres par ses valeurs particulières. Une série est *numérique*, lorsque tous ses termes sont exprimés en chiffres. *Sommer* une série, c'est trouver une formule propre à calculer aisément sa valeur.

125. Voyons d'abord comment on trouve la série au moyen de la *partie variable* qui entre dans la somme de tous ses ter-

mes. Soit par exemple $(-1)^v . v(v+1)$ cette partie variable; changeons-y v en $v-1$, puis retranchons-la du résultat et réunissons les multiplicateurs de $(-1)^{v-1}.v$; nous aurons

$$2(-1)^{v-1}.v^2 = -(-1)^v.v(v+1)+(-1)^{v-1}(v-1)v.$$

Faisant dans cette identité, successivement $v = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n$, il viendra

$$\begin{array}{l}
+2.1^2 = +1.2+0 \\
-2.2^2 = -2.3-1.2 \\
+2.3^2 = +3.4+2.3 \\
-2.4^2 = -4.5-3.4 \\
+2.5^2 = +5.6+4.5 \\
-2.6^2 = -6.7-5.6 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pm 2.n^2 = \pm n(n+1) \pm (n-1)n.
\end{array}$$

Ajoutant ces n identités entre elles, puis observant que les termes des seconds membres se détruisent deux à deux, excepté $\pm n(n+1)$, il viendra, en divisant par 2,

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots \pm n^2 = \pm \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

Le premier membre est la série cherchée, et le second, la somme de cette série. On voit d'ailleurs que le signe $+$ n'a lieu que pour n impair.

126. Il résulte de cet exemple, que *pour trouver la série numérique dont on connaît la partie variable de la somme des* v *premiers termes*, *il faut indiquer la différence entre cette partie et ce qu'elle fournit quand on y change* v *en* v$-$1 *ou en* v$+$1; *décomposer cette différence en facteurs fonctions de* v; *puis faire successivement*, *dans l'identité résultante*, v $=$ 1, 2, 3, 4, 5, ..., n; *ajouter entre elles les* n *nouvelles équations*, *et réduire dans le second membre seulement : le premier sera la série cherchée.*

127. D'après cette règle, si l'on veut avoir la série que fournit le produit de $v+1$ facteurs $(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+v+1)$, il faudra changer v en $v-1$, retrancher le résultat de l'expression qui l'a donné et décomposer la différence en facteurs. Or, en opérant ainsi, on trouvera

$$(a+1)(a+2)(a+3)\cdots(a+v-1)(a+v)^2 =$$
$$(a+1)(a+2)\cdots(a+v+1)-(a+1)(a+2)\cdots(a+v).$$

Faisant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$; ajoutant les n identités résultantes et réduisant dans le second membre seulement, il viendra la formule

$$(a+1)^2+(a+1)(a+2)^2+\cdots+(a+1)\cdots(a+n-1)(a+n)^2$$
$$= -(a+1)+(a+1)(a+2)(a+3)\cdots(a+n+1).$$

128. Soit encore le produit $\frac{1}{a+1}\, v(v+1)(v+2)\cdots(v+a)$. Si l'on y change v en $v-1$, et que l'on opère comme dans le cas précédent, on trouvera la formule

$$1\cdot2\cdot3\cdots a + 2\cdot3\cdot4\cdots(a+1) + 3\cdot4\cdot5\cdots(a+2)+\cdots+$$
$$n(n+1)(n+2)\cdots(n+a-1) = \frac{n}{a+1}(n+1)(n+2)\cdots(n+a).$$

Dans cette formule, chaque terme du premier membre a pour facteurs a nombres entiers consécutifs, dont le 1[er] est 1 dans le 1[er] terme, 2 dans le 2[e], 3 dans le 3[e], etc. Il existe deux autres formules analogues, l'une pour les nombres pairs et l'autre pour les nombres impairs. Si l'on fait successivement $a=2, 3, 4$, etc., on aura successivement

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+\cdots+n(n+1)=\frac{n}{3}(n+1)(n+2),$$
$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3),$$

etc. ....

129. La valeur *réciproque* d'une quantité est l'unité divisée par cette quantité; mais on appelle *inverse* d'une série, la suite de quotiens obtenus en divisant l'unité par chaque terme de cette série. Il est facile de s'assurer, au moyen de la valeur réciproque du produit $(v+1)(v+2)(v+3)\cdots(v+a)$, que l'inverse de la série générale du n° précédent est

$$\frac{1}{1\cdot2\cdots(a+1)}+\frac{1}{2\cdot3\cdots(a+2)}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+a)}$$
$$=\frac{1}{a\cdot2\cdot3\cdots(a+1)}-\frac{1}{an(n+1)(n+2)\cdots(n+a)}.$$

130. Les séries numériques que l'on considère ordinairement, sont celles des *nombres figurés*, ainsi nommés à cause de leurs rapports avec certaines figures de géométrie. Prenons, par ex., l'expression $\frac{1}{6}v(v+1)(av-2v-a+5)$, et traitons cette expression, d'après la règle du n° 126; nous en déduirons la formule :

$$1+a+(3a-3)+(6a-8)+(10a-15)+(15a-24)+\cdots+$$
$$\tfrac{1}{2}n(an-2n-a+4)=\tfrac{n}{6}(n+1)(an-2n-a+5).$$

Cette formule est celle des nombres *polygones* : en y faisant successivement $a=2$, 3, 4, 5, 6, etc., elle donne les séries des nombres *naturels*, des nombres *triangulaires*, des nombres *carrés*, des nombres *pentagones*, des nombres *hexagones*, etc. Voici ces séries :

$$1+2+3+4+5+\cdots+n=\tfrac{1}{2}n(n+1)$$
$$1+3+6+10+\cdots+\tfrac{1}{2}n(n+1)=\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$
$$1+4+9+25+\cdots+n^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$1+5+12+22+\cdots+\tfrac{1}{2}n(3n-1)=\tfrac{1}{2}n^2(n+1)$$
$$1+6+15+28+\cdots+n(2n-1)=\tfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

etc. ....

131. En appliquant la règle du n° 126, les deux expressions

$$\frac{(u+c)(u+2c)\cdots(u+vc)}{c\cdot 2c\cdots vc}\quad\text{et}\quad\frac{c\cdot 2c\cdots(v+1)c}{(u+c)(u+2c)\cdots(u+vc)},$$

fourniront les deux séries générales que voici :

$$1+\frac{u}{c}+\frac{u(u+c)}{c\cdot 2c}+\cdots+\frac{u(u+c)\cdots(u+nc-c)}{c\cdot 2c\cdots nc}$$
$$=\frac{(u+c)(u+2c)(u+3c)\cdots(u+nc)}{c\cdot 2c\cdot 3c\cdots nc};$$

$$\frac{c}{u+c}+\frac{c\cdot 2c}{(u+c)(u+2c)}+\cdots+\frac{c\cdot 2c\cdots nc}{(u+c)(u+2c)\cdots(u+nc)}$$
$$=\frac{c}{u-1}\left[1-\frac{2c\cdot 3c\cdots(n+1)c}{(u+c)(u+2c)\cdots(u+nc)}\right].$$

La seconde de ces formules est l'inverse de la première. Remplaçant vc par $2v-1$; ce qui sera remplacer c par 1, $2c$ par 3, $3c$ par 5, $4c$ par 7, ..., nc par $2n-1$, les deux séries précédentes en fourniront deux autres, qui seront pour les nombres impairs, ce que les formules données par la supposition de $c=2$, sont pour les nombres pairs.

132. Les deux séries du n° précédent ont lieu qu'elles que soient les valeurs positives ou négatives des lettres qui les composent ; on peut donc en déduire une infinité de séries numériques. Par exemple, si dans la première on fait successivement $c=1$ et $u=2$, 3, 4, 5, etc. ; qu'ensuite on change $n+1$ en n dans les résultats, on aura

$$1+2+3+4+5+\cdots+n=\tfrac{1}{2}n(n+1),$$
$$1+3+6+10+15+\cdots+\tfrac{1}{2}n(n+1)=\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2),$$
$$1+4+10+20+35+\cdots+\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$
$$=\tfrac{n}{24}(n+1)(n+2)(n+3),$$
$$1+5+15+35+70+\cdots+\tfrac{n}{24}(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$=\tfrac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4),$$
etc. ....

La première de ces séries est la somme des nombres naturels, ou des *nombres figurés du second ordre*; la seconde, celle des nombres *triangulaires*, ou des nombres figurés du 3^e *ordre*; la troisième, celle des nombres *pyramidaux*, ou des nombres figurés du 4^e *ordre*; la quatrième est la somme des nombres figurés du 5^e *ordre*; et ainsi de suite. On voit que le terme général de chaque série est la somme de la série précédente (*).

133. En traitant les deux quantités $(a+vr)(a+vr+r)$ et aq^v, on aura la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique et d'une progression géométrique. Si l'on considère les expressions

$$\frac{v+1}{v^2},\ \frac{(-1)^v}{v},\ \frac{(-1)^v(u+1)(u+2)\cdots(u+v)}{1\cdot 2\cdots v},\ (-1)^v v,$$
$$\frac{1}{v},\ \frac{1}{v(v+1)},\ \frac{1}{(v+1)\,2^{v+1}}\ \text{et}\ \frac{(-1)^v\cdot m^v}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(v+1)},$$

on en déduira huit formules assez remarquables. Il en sera de même des formules fournies par les quatre expressions

$$(-1)^v v(v+1),\ (-1)^v v(v+1)(v+2),\ \frac{(-1)^v}{v(v+1)}\ \text{et}\ \frac{(-1)^v}{v(v+1)(v+2)}.$$

134. Soient considérés les deux termes généraux

$$\frac{(a+b)\,(a+2b)\,(a+3b)\,(a+4b)\cdots\ (a+vb)}{(c+d)\,(c+2d)\,(c+3d)\,(c+4d)\cdots(c+vd-d)},$$
$$\frac{(a+bv)\,(a+bv+b)\,(a+bv+2b)\cdots\ (a+bv+br)}{(c+dv)\,(c+dv+d)\,(c+dv+2d)\cdots(c+dv+dr-d)},$$

(*) Il est aisé de voir que 91 est le 13^e nombre triangulaire; 1540 le 20^e nombre pyramidal; 17300 le 24^e nombre figuré du 4^e ordre; et ainsi de suite. Par exemple, si l'on demande le rang n du nombre pyramidal dont la valeur est a, on aura $\frac{1}{6}n\ (n+1)\ (n+2)=a$; d'où $n^3<6a$ et $(n+1)^3>6a$. Donc n est la racine cubique du plus grand cube contenu dans $6a$.

dans chacun desquels le numérateur a un facteur de plus que le dénominateur. En y appliquant la méthode, on en déduira deux formules tellement générales, qu'on pourra y donner telles valeurs qu'on voudra, positives ou négatives, aux lettres a, b, c, d. Et ces formules feront toujours prévoir la forme des séries dont elles donnent la sommation ; ce qui est avantageux.

135. Maintenant qu'on sait déterminer la série numérique finie dont la somme est donnée, il reste à résoudre le problème inverse, c'est-à-dire à trouver la somme lorsque la série est connue. Ce problème est beaucoup plus difficile que l'autre ; il est même souvent impossible. La règle suivante dit tout ce que nous pouvons prescrire à ce sujet :

Pour sommer, quand cela se peut, une série numérique donnée, il faut tâcher d'égaler son terme général en v, *soit à une fonction de termes généraux de séries dont on ait les sommations, soit à la différence de deux quantités variables en* v *telles, qu'en faisant* $\mathrm{v} = \mathrm{n}$ *dans l'une, on ait le même résultat qu'en faisant* $\mathrm{v} = \mathrm{n} + 1$ *dans l'autre. On obtiendra ainsi une identité qui conduira à la somme cherchée, en y faisant* $\mathrm{v} = 1, 2, 3, 4, \ldots, \mathrm{n}$ *et en ajoutant les résultats.*

Par exemple, soit la série

$$2\tfrac{1}{2} + 6\tfrac{1}{6} + 12\tfrac{1}{12} + 20\tfrac{1}{20} + 30\tfrac{1}{30} + 42\tfrac{1}{42} + \text{etc.};$$

il est aisé de voir que son terme général en v est $v(v+1) + \frac{1}{v(v+1)}$, et que par suite on a l'identité

$$v(v+1) + \frac{1}{v(v+1)} =$$
$$\frac{v}{3}(v+1)(v+2) - \tfrac{1}{3}(v-1)v(v+1) + \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}.$$

Le second membre de cette identité est composé de deux différences, et les quantités de chaque différence sont telles, qu'en faisant $v = n$ dans l'une, on a le même résultat qu'en posant $v = n + 1$ dans l'autre. De là, en faisant $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, on trouve que la somme de la série proposée est

$$\tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2) + \frac{n}{n+1}.$$

136. Soit encore la série

$$1.3 - 1.2.4 + 1.2.3.5 - 1.2.3.4.6 + 1.2.3.4.5.7 - \text{etc.}$$

Son terme général en v est $(-1)^{v-1}.1.2.3.4\ldots v(v+2)$, et il n'est pas bien difficile de s'assurer qu'on a

$$(-1)^{v-1}.1.2.3.4\ldots v(v+2)=$$
$$(-1)^{v-1}.1.2.3.4\ldots v-(-1)^{v}.1.2.3.4\ldots v(v+1),$$

identité dans laquelle le second terme du second membre donne, en y faisant $v=n$, le même résultat qu'en prenant $v=n+1$ dans le premier. De là il est aisé de voir que la somme de la série proposée est

$$1\pm 1.2.3.4.5\ldots n(n+1).$$

137. On peut appliquer la méthode précédente à la recherche des identités qui produisent les formules que voici :

$$\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}+\cdots+\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots\quad 2n}$$
$$=\frac{3.5.7.9\ldots(2n+1)}{2.4.6.8\ldots\quad 2n}-1;$$

$$\frac{2}{1}+\frac{2.4}{1.3}+\frac{2.4.6}{1.3.5}+\frac{2.4.6.8}{1.3.5.7}+\cdots+\frac{2.4.6.8\ldots\quad(2n)}{1.3.5.7\ldots(2n-1)}$$
$$=\frac{2.4.6.8\ldots(2n+2)}{3.1.3.5\ldots(2n-1)};$$

$$\frac{2.7}{3}-\frac{2.4.11}{3.5}+\frac{2.4.6.15}{3.5.7}-\frac{2.4.6.8.19}{3.5.7.9}+\cdots$$
$$+\frac{2.4\ldots(2n-2)(4n-1)}{3.5\ldots\quad(2n-1)}=\pm\frac{2.4.6\ldots\quad 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}+2;$$

$$\frac{3}{(1.2)^2}+\frac{5}{(2.3)^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2};$$

$$\frac{3}{1.2}-\frac{5}{2.3}+\frac{7}{3.4}-\frac{9}{4.5}+\cdots\pm\frac{2n+1}{n(n+1)}=1\pm\frac{1}{n+1};$$

$$\frac{a}{a+1}+\frac{a+1}{(a+1)(a+2)}+\frac{a+2}{(a+1)(a+2)(a+3)}+\cdots$$
$$+\frac{a+n-1}{(a+1)\cdots(a+n)}=1-\frac{1}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)};$$

$$1-2+3-4+5-6+\cdots\pm n=\pm\tfrac{1}{4}(2n+1)+\tfrac{1}{4};$$
$$1^2-3^2+5^2-7^2+\cdots\pm(2n-1)^2=\pm\tfrac{1}{2}(2n-1)(2n+1)-\tfrac{1}{2};$$
$$1^3-2^3+3^3-4^3+\cdots\pm n^3=\pm\tfrac{1}{8}(2n+1)[2n(n+1)-1]-\tfrac{1}{8};$$
$$1^4-2^4+3^4-4^4+\cdots\pm n^4=\pm\tfrac{1}{2}n(n+1)[n(n+1)-1];$$
$$1.3.1^2+2.4(1.2)^2+3.5(1.2.3)^2+4.6(1.2.3.4)^2+\cdots$$
$$+(n-1)(n+1)[1.2.3\ldots(n-1)]^2=(2.3.4.5\ldots n)^2-1;$$
$$1.2-2.3+3.4-4.5+\cdots\pm n(n+1)=\pm\tfrac{1}{2}(n+1)^2+k;$$

$$(a+r)^2-(a+2r)^2+(a+3r)^2-(a+4r)^2+\cdots\pm(a+nr)^2$$
$$=\frac{a}{2}(a+r)\pm\frac{1}{2}(a+nr)(a+nr+r).$$

Dans l'avant-dernière de ces formules, k est nul ou $\frac{1}{2}$ suivant que n est impair ou pair.

138. Les sommes les plus utiles à connaître, dans les séries numériques, sont celles des premières puissances des n premiers nombres entiers. Or, pour trouver ces sommes, désignons par S_m (qu'on énonce S, *m ième*), la quantité $1^m+2^m+3^m+4^m+\cdots+n^m$, de manière que S_1 représente la somme des n premiers nombres entiers, S_2 la somme de leurs carrés, S_3 celle de leurs cubes, S_4 celle de leurs puissances quatrièmes, etc. Cela posé, on a évidemment, d'après la formule du binome, et m étant entier positif,

$$(1+v)^m=1+mv+c_2v^2+c_3v^3+\cdots+mv^{m-1}+v^m.$$

Faisant successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n$, puis ajoutant les n identités résultantes et effaçant les termes communs aux deux membres de la nouvelle équation, on obtiendra

$$(1+n)^m=n+1+mS_1+c_2S_2+c_3S_3+c_4S_4+\cdots+mS_{m-1}.$$

D'après la manière dont on a trouvé cette formule, il est clair qu'on ne doit prendre, dans le second membre, que la somme de tous les termes qui précèdent celui dans lequel le numéro de S est égal à la valeur de l'exposant m.

Faisant donc successivement $m=2, 3, 4, 5, 6, 7$, etc., cette formule donnera, en ayant égard aux valeurs en m des coefficiens c_2, c_3, c_4, etc. :

$$(1+n)^2=1+n+2S_1$$
$$(1+n)^3=1+n+3S_1+3S_2$$
$$(1+n)^4=1+n+4S_1+6S_2+4S_3$$
$$(1+n)^5=1+n+5S_1+10S_2+10S_3+5S_4$$
$$(1+n)^6=1+n+6S_1+15S_2+20S_3+15S_4+6S_5$$
$$(1+n)^7=1+n+7S_1+21S_2+35S_3+35S_4+21S_5+7S_6$$

etc. ....

De ces formules il est aisé de tirer les valeurs de S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, etc. ; car en substituant chaque valeur dans toutes celles qui la suivent et décomposant en facteurs, on trouve

$$S_1 = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$
$$S_2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$S_3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
$$S_4 = \tfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)[3n(n+1)-1]$$
$$S_5 = \tfrac{1}{12}n^2(n+1)^2[2n(n+1)-1]$$
$$S_6 = \tfrac{1}{42}n(n+1)(2n+1)\{3n[n^2(n+1)-1]+1\}.$$

139. Effectuant les multiplications indiquées et réduisant, on obtient

$$S_1 = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$$
$$S_2 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n$$
$$S_3 = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2$$
$$S_4 = \tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n$$
$$S_5 = \tfrac{1}{6}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 + \tfrac{5}{12}n^4 - \tfrac{1}{12}n^2$$
$$S_6 = \tfrac{1}{7}n^7 + \tfrac{1}{2}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 - \tfrac{1}{6}n^3 + \tfrac{1}{42}n.$$

Observant que si une puissance de n, depuis la plus grande jusqu'à la plus petite, vient à manquer dans l'une des valeurs précédentes, cette puissance forme un terme ayant o pour coefficient, on verra, en examinant avec attention ces valeurs, que *pour trouver celle de* S_m, *il faut multiplier par* m *chaque terme de* S_{m-1} *et augmenter de* 1 *l'exposant de* n *dans chacun de ces termes, puis diviser le premier terme du résultat par* $m+1$, *le* 2^e^ *par* m, *le* 3^e^ *par* $m-1$, *le* 4^e^ *par* $m-2$, *le* 5^e^ *par* $m-3$, *et ainsi de suite, jusqu'au dernier : faisant* $n=1$ *dans l'expression résultante et retranchant de l'unité la valeur qui en proviendra, le reste sera le multiplicateur de* n *dans le dernier terme de* S_m, *et l'expression dont il s'agit sera le surplus des termes.*

D'après cette règle, si l'on veut trouver S_7, la valeur de S_6 donnera d'abord

$$\tfrac{1}{8}n^8 + \tfrac{1}{2}n^7 + \tfrac{7}{12}n^6 - \tfrac{7}{24}n^4 + \tfrac{1}{12}n^2.$$

Posant ensuite $n=1$, dans ce résultat, ce qui fournit $\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{7}{12} - \tfrac{7}{24} + \tfrac{1}{12}$ ou 1, puis retranchant cette valeur de l'unité, le reste o sera le multiplicateur de n dans le dernier terme de S_7 ; de sorte qu'on a

$$S_7 = \tfrac{1}{8}n^8 + \tfrac{1}{2}n^7 + \tfrac{7}{12}n^6 - \tfrac{7}{24}n^4 + \tfrac{1}{12}n^2,$$

comme on le vérifierait d'ailleurs à l'aide des formules du n° 138.

Avec cette valeur de S_7 la règle précédente donnera

$$S_8 = \tfrac{1}{9}n^9 + \tfrac{1}{2}n^8 + \tfrac{2}{3}n^7 - \tfrac{7}{15}n^5 + \tfrac{2}{9}n^3 - \tfrac{1}{30}n,$$

et ainsi de suite, pour S_9, S_{10}, S_{11}, etc.

140. Comme toute expression de la forme $A + < B$ signifie A *plus une quantité plus petite que* B, il est facile de voir, par les valeurs du n° précédent, qu'on a

$$S_1 = \tfrac{1}{2}n^2 + < n,\ S_2 = \tfrac{1}{3}n^3 + < n^2,\ S_3 = \tfrac{1}{4}n^4 + < n^3,$$
$$S_4 = \tfrac{1}{5}n^5 + < n^4,\ S_5 = \tfrac{1}{6}n^6 + < n^5,\ S_6 = \tfrac{1}{7}n^7 + < n^6,$$

et ainsi de suite. Donc en général,

$$S_m = \frac{1}{m+1}\,n^{m+1} + < n^m.$$

Cette formule est utile en géométrie et en mécanique, comme nous l'avons fait voir dans le tome 1[er] de la *Correspondance Mathématique et Physique*, déjà citée, page 68.

141. Les sommes des premières puissances des nombres naturels ont un grand nombre d'applications; mais leur principal usage est de sommer toute série numérique dont le terme général en v est une fonction entière et rationnelle de v. Par exemple, si le terme général d'une série est $av^p - bv^q + cv^r$, la somme de cette série sera $aS_p - bS_q + cS_r$.

C'est ainsi qu'on obtient les formules :

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \tfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1),$$
$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$
$$1^4 + 3^4 + 5^4 + \cdots + (2n-1)^4 = \frac{n}{15}[8n^2(6n^2-5)+7]$$
$$1.4 + 4.9 + \cdots + n^2(n+1)^2 = \frac{n}{15}(n+1)\{n[3n(n+4)+13]+2\}$$

142. *Trouver le nombre de boulets contenus dans une pile à base triangulaire.*

Cette pile est composée de *tranches*, en allant du sommet à la base; et ces tranches sont telles, que si au nombre de boulets de l'une d'elles, on ajoute le numéro de la suivante, la somme sera le nombre de boulets de cette suivante. Donc, puisque la 1[re] tranche n'a qu'un boulet, la 2[e] en aura $1+2$, la 3[e] $1+2+3$, la 4[e] $1+2+3+4$, en général, la v^{me} en aura

$$1+2+3+4+\cdots+v, \text{ ou } \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{2}v.$$

Faisant dans cette valeur successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, on aura successivement les nombres de boulets contenus dans les tranches 1^{re}, 2^e, 3^e, 4^e, ..., n^e; la somme de tous ces nombres sera donc le nombre x de tous les boulets contenus dans la pile; il viendra par conséquent $x = \frac{1}{2}S_2 + \frac{1}{2}S_1$; d'où (139)

$$x = \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

Par exemple, *un fermier vient de vendre à 24 centimes la douzaine, une pile d'œufs, à base triangulaire, composée de 15 tranches. On veut savoir combien il recevra d'argent, sans défaire la pile pour en compter les œufs; ce qui serait assez long et exposerait à les casser.* En faisant $n = 15$ dans la valeur précédente de x, on trouvera que la pile est composée de 680 œufs; coûtant par conséquent 13^f, 60.

143. *Trouver le nombre de boulets contenus dans une pile à base rectangulaire.*

Dans cette pile les tranches sont formées de *rangées* de boulets. Le nombre de rangées d'une tranche quelconque est égal au numéro de cette tranche; tandis que le nombre de boulets qui forment chaque rangée est égal au même numéro augmenté d'un nombre donné k. De sorte que dans la $v^{ième}$ tranche, il y a v rangées contenant chacune $v + k$ boulets; ce qui fait v fois $(v + k)$ boulets, ou $v^2 + kv$.

Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, on aura successivement les nombres de boulets contenus dans les tranches 1^{re}, 2^e, 3^e, 4^e, ..., n^e; la somme de tous ces nombres sera donc le nombre x de boulets contenus dans la pile proposée; il viendra conséquemment, $x = S_2 + kS_1$; d'où (139)

$$x = \tfrac{1}{6}n(n+1)(3k+2n+1).$$

Pour la pile à base carrée, $k = 0$ et $x = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

144. *Le directeur d'un arsenal doit faire transporter à 10 lieues le reste d'une pile de boulets, à base rectangulaire, contenant encore 12 tranches, dont celle du haut a 7 rangées de 11 boulets chacune. Comme chaque boulet pèse 12 livres, et que les voitures ne peuvent porter que de 15 à 18 cents liv.; on demande combien il faudra de voituriers et combien chacun recevra, sachant qu'on paie 50 cents par quintal conduit à une lieue?*

Il est clair que la tranche du haut est la 7^e de la pile totale, et que par suite $7 + k = 11$; d'où $k = 4$. On voit de plus que le nombre z de boulets restans est la différence entre deux piles à bases rectangulaires, pour lesquelles $k=4$, l'une ayant 18 tranches et l'autre 6; on a donc

$$z=\tfrac{1}{6}.18.19(3.4+2.18+1)-\tfrac{1}{6}.6.7(3.4+2.6+1),$$

ou $z=2618$ boulets. D'après cela, il est facile de voir qu'il faudra 20 voitures, portant chacune 130 boulets, sauf la dernière qui en aura 148; et que les voituriers recevront chacun 78^f, excepté le 20^{me} qui aura $88^f,80$.

145. *Etant donné un polynome de* n *termes de la forme* a + b + c + d + e + f + *etc., trouver combien il restera de termes dans sa puissance* m^{me}, *après qu'on aura effectué toutes les réductions possibles.*

Soit x la somme de tous les termes du polynome, excepté a; la puissance m^{me} de ce polynome sera donnée par la formule

$$(a+x)^m=a^m x^0+ma^{m-1}x+c_2a^{m-2}x^2+\dots+x^m.$$

On voit que, pour calculer tous les monomes qui composent la puissance m^{me} du polynome proposé, il suffit de développer les puissances 0, 1, 2, 3, 4, ..., m^{me} du polynome x, qui contient $n-1$ termes. Si donc on désigne par t_n et u_m les nombres respectifs de termes des puissances m^{mes} d'un polynome de n termes et d'un polynome de $n-1$ termes, on aura

$$t_n=u_0+u_1+u_2+u_3+\dots+u_m. \dots (1)$$

Cette formule fournit la solution du problème proposé. En effet, pour un trinome, $n=3$ et u_m désigne le nombre de termes de la puissance m^{me} d'un binome. Or, ce nombre de termes est $m+1$; donc alors $u_m=m+1$.

Faisant successivement $m=0, 1, 2, 3, 4, \dots, m$, on aura successivement $u_0=1$, $u_1=2$, $u_2=3$, $u_3=4, \dots, u_m=m+1$. Substituant ces valeurs dans l'équation (1), le nombre t_3 de termes de la puissance m^{me} d'un trinome, sera

$$t_3=1+2+3+4+\dots+(m+1)=\tfrac{1}{2}(m+1)(m+2).$$

Pour un quadrinome, $n=4$ et u_m exprime le nombre de termes de la puissance m^{me} d'un trinome; donc, d'après ce qu'on vient de trouver, on a $u_m=\tfrac{1}{2}(m+1)(m+2)$.

Prenant dans cette équation, successivement $m=0, 1, 2, 3, 4, \dots, m$, on verra, d'après l'équation (1), que le nombre t_4 de termes de la puissance m^{me} d'un quadrinome, est

$$t_4 = 1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \tfrac{1}{2}(m+1)(m+2), \text{ ou} \quad (132)$$
$$t_4 = \tfrac{1}{6}(m+1)(m+2)(m+3).$$

En général, le nombre t_v des termes de la puissance m^{me} d'un polynome de v termes, est

$$t_v = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+v-1)}{1.2.3\ldots(v-1)},$$

$$\text{ou} \quad t_v = \frac{v(v+1)(v+2)\ldots(v+m-1)}{1.2.3\ldots m}; \ldots (2)$$

car si l'on réduit ces deux fractions au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacune par le dénominateur de l'autre, leurs numérateurs seront égaux, comme étant chacun le produit des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, ..., $(m+v-1)$: donc ces deux fractions sont égales.

En supposant que la formule (2) soit vraie pour un polynome de v termes, je dis qu'elle sera vraie aussi pour un polynome de $v+1$ termes. Car dans le premier cas, la formule (2) désigne le nombre u_m de termes de la puissance m^{me} d'un polynome de v termes; et si on y fait successivement $m=0$, 1, 2, 3, 4, ..., m, qu'on substitue les valeurs résultantes dans (1) et qu'on ait égard à ce que devient la première formule du numéro 131, lorsque $c=1$, on trouvera ce que donne la formule (2), quand on y change v en $v+1$. D'où il suit que si cette formule est vraie pour une certaine valeur de v, elle sera vraie aussi pour une valeur plus grande d'une unité. Or, cette formule (2) est démontrée pour $v=4$; elle a donc lieu aussi pour $v=5$. Etant vraie pour $v=5$, elle sera vraie aussi pour $v=6$, puis pour $v=7$, $v=8$, et enfin pour $v=n$. De sorte que

$$t_n = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{1.2.3\cdots m},$$

ce qu'il fallait trouver.

D'après cette formule, pour savoir si un polynome de 20 termes peut être le cube parfait d'un autre polynome, on fera $m=3$ et $t_n=20$, et il viendra

$$\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2) = 20.$$

Et comme $n=4$ est la seule hypothèse qui satisfasse à cette équation, on en conclut qu'un polynome de 20 termes peut être le cube parfait d'un quadrinome de la forme $a+b+c+d$.

146. Voici encore quelques problèmes à résoudre :

Un particulier achète tous les ans un pigeon femelle qui lui donne cette année et les suivantes un nombre de pigeons mâles égal au rang de cette même année. Comb. aura-t-il de pigeons mâles au bout de n années?

Pendant n années un particulier a reçu tous les ans un nombre de pigeons femelles égal au nombre impair de même rang que cette année. Comme chaque pigeon femelle d'une année lui donne tous les 12 mois un nombre de pigeons mâles égal au nombre impair de même rang que l'année où il a reçu ce pigeon femelle, on veut savoir combien il y a eu de pigeons mâles produits pendant les n années proposées. [On pourrait supposer les pigeons femelles reçus une année, en nombre égal au rang de cette année, ou au carré de ce rang, etc.]

Trouver combien il y a d'unités dans la somme de tous les produits différens des n premiers nombres entiers multipliés 2 à 2, un nombre ne devant pas être multiplié par lui-même.

Un propriétaire convient avec un maçon de lui donner $\frac{1}{2}$ cents pour chaque palme cube de pierre employé à la construction d'un escalier massif, dont les faces latérales sont perpendiculaires à la bâse horisontale, laquelle est un trapèze ayant ses deux côtés parallèles à angles droits sur l'un des deux autres côtés. Le plus grand côté parallèle vaut 30 palmes, le plus petit 10 et la hauteur 240. Chaque degré a 4 palmes de large et 3 de haut : de sorte que l'escalier a 60 degrés et commence au plus petit côté parallèle 10. Combien a-t-il dû coûter? (R. 255590 cents.)

Des équations à indices.

147. La notation des numéros des lettres conduit à des équations qui se résolvent par une manière particulière d'éliminer. Cette notation n'est pas nouvelle ; mais personne, que je sache, n'en a fait l'usage que je vais faire connaître, et qui offre de grands avantages.

148. On appelle *numéro* ou *indice* d'une lettre, le nombre écrit à la droite et un peu au-dessous : ce nombre indique quel rang la quantité représentée par la lettre, tient dans une suite de quantités de même nature qu'elle. Ainsi dans une suite de quantités, toutes désignées par x, x_v (qu'on énonce x, v^{me}), sera la v^{me}, et v sera le numéro ou l'indice de x.

Résoudre l'équation qui lie deux x consécutifs tels que x_v et x_{v+1}, c'est en déduire une équation entre x_1 et x_n et des nombres donnés.

149. Considérons, par exemple, l'équation

$$px_{v+1} = qx_v + r, \ldots (1)$$

dans laquelle p, q, r, sont des quantités connues, positives ou négatives. Pour résoudre cette équation, divisons ses deux membres par q, posons $\frac{p}{q} = a$, $\frac{r}{q} = b$ et multiplions de part et d'autre par a^{v-1}; nous aurons, en transposant,

$$a^v x_{v+1} - a^{v-1} x_v = ba^{v-1}.$$

Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$, il viendra

$$\begin{aligned} &ax_2 - x_1 = b \\ &a^2x_3 - ax_2 = ba \\ &a^3x_4 - a^2x_3 = ba^2 \\ &a^4x_5 - a^3x_4 = ba^3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a^{n-1}x_n - a^{n-2}x_{n-1} = ba^{n-2}. \end{aligned}$$

Ajoutant entre elles ces $n-1$ équations et observant que tous les termes des premiers membres se réduisent deux à deux, excepté x_1 et $a^{n-1}x_n$, on aura

$$a^{n-1}x_n - x_1 = b(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-2}).$$

Pour trouver la valeur de la progression géométrique entre parenthèses, on la désignera par S et on la soustraira de son produit par a; alors on verra que l'équation précédente se réduit à

$$a^{n-1}x_n - x_1 = b\,\frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}.$$

Substituant les valeurs de a et b, et réduisant, on obtiendra

$$x_n = \frac{r}{p-q} + \left(x_1 - \frac{r}{p-q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} \cdots (2)$$

Si $p = q$, cette formule est en défaut; mais alors l'équation (1) se réduit en la divisant par p, et on en tire

$$x_n = x_1 + \frac{r}{p}(n-1).$$

La formule (2) peut servir à résoudre tous les problèmes relatifs aux progressions géométriques; car tous ces problèmes peuvent avoir des équations de même forme que l'équation (1), comme il est aisé de s'en assurer.

150. Si l'on avait les deux équations

$$vx_{v+1} = (v+1)x_v + av^2 \quad \text{et} \quad (v+3)x_{v+1} = vx_v + av,$$

on les résoudrait par addition, comme l'équation (1), en divisant la première par $v(v+1)$ et en multipliant la seconde par $(v+1)(v+2)$.

151. Considérons maintenant l'équation

$$x_v = vx_{v+1} - av.$$

Cette équation ne saurait se résoudre par addition ; mais on peut la traiter par la substitution des valeurs. En effet, prenons successivement, dans cette équation, $v=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, etc., nous aurons successivement

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_2 - a \\
x_2 &= 2x_3 - 2a \\
x_3 &= 3x_4 - 3a \\
x_4 &= 4x_5 - 4a \\
x_5 &= 5x_6 - 5a \\
x_6 &= 6x_7 - 6a \\
x_7 &= 7x_8 - 7a \\
&\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Substituant successivement $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \ldots$, dans la valeur de x_1, on aura les valeurs successives

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2x_3 - a(1+2) \\
x_1 &= 2.3x_4 - a(1+2+2.3) \\
x_1 &= 2.3.4x_5 - a(1+2+2.3+2.3.4) \\
x_1 &= 2.3.4.5x_6 - a(1+2+2.3+2.3.4+2.3.4.5) \\
&\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Il est aisé de voir, par ces résultats, qu'en général, on a

$$x_1 = 2.3.4\ldots(n-1)x_n - a[1+2+2.3+2.3.4+\cdots+2.3\ldots(n-1)].$$

Cette formule résout l'équation proposée, puisqu'elle établit une relation entre x_1, x_n et des nombres donnés.

On résoudrait de même l'équation $x_{v+1} = vx_v + a$.

152. Quelquefois on peut éliminer par élévation aux puissances. Considérons par exemple, l'équation

$$\frac{a(v+1)}{v+2}(x_v)^m = x_{v+1},$$

dans laquelle m est quelconque. Pour résoudre cette équation, il faut élever ses deux membres à la puissance m^{n-v}; puis faire successivement $v=1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1$, et multiplier entre elles les $n-1$ équations résultantes. Effaçant ensuite les facteurs communs aux deux membres, simplifiant la fraction du premier, chassant le dénominateur et posant, pour abréger, $p=\frac{m^n-m}{m-1}$, on aura définitivement

$$a^p(2x_1^m)^{m^{n-1}}=(3^{m^{n-2}}.4^{m^{n-3}}.\ldots n^m)^{m-1}(ax_n+x_n)^m.$$

On traitera semblablement les deux équations

$$(x_{v+1})^m=a(x_v)^p \text{ et } (x_{v+1})^2=\frac{bv}{c^v}x_v.$$

153. Nous savons résoudre les équations contenant deux x consécutifs quelconques, tels que x_v et x_{v+1}. Voyons maintenant comment on traitera deux équations renfermant x_v, x_{v+1}, y_v et y_{v+1}. D'abord si ces quatre quantités se trouvent dans chaque équation, il sera impossible, par la simple algèbre, de résoudre ces deux équations; parce qu'on ne pourra jamais en déduire une équation ne contenant que x_v et x_{v+1}, ou que y_v et y_{v+1}. Mais si quelques-unes de ces quatre quantités manquent dans les deux équations proposées, il sera possible quelquefois d'arriver à des valeurs déterminées pour x_n et y_n.

154. Par exemple, supposons que dans les équations

$$x_{v+1}=2y_v \text{ et } y_{v+1}=2x_v+a,$$

on doive avoir $y_0=0$ et $y_1=a$, et cherchons x_n et y_n. Or, si l'on change v en $v-1$ dans la première équation, elle donne $x_v=2y_{v-1}$. Substituant cette valeur, dans la seconde équation, elle devient

$$y_{v+1}=2^2y_{v-1}+a.$$

Divisant par 2^v et faisant successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$, ajoutant et réduisant, on trouve

$$y_n+2y_{n-1}=a(2^n-1).$$

Changeant n en v, posant $2=-c$, divisant par c^v, puis prenant $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n$ et ajoutant, on aura, réductions faites,

$$y_n=\frac{a}{6}[3.2^n-(-2)^n-2].$$

Avec cette valeur on trouve facilement celle de x_n.

155. On peut aussi résoudre les deux équations

$$x_{v+1}=y_v-x_v+a \text{ et } y_{v+1}=y_v+x_v-a,$$

dans lesquelles on sait que $y_0 = 0$ et $y_1 = a$. En effet, on en tire d'abord

$$x_{v+1} + y_{v+1} = 2y_v; \text{ d'où } x_v + y_v = 2y_{v-1};$$

ce qui réduit la seconde équation proposée à

$$y_{v+1} - 2y_{v-1} = -a.$$

Posant $2 = c^2$, ou $c = \sqrt{2}$, et opérant comme dans l'exemple précédent, on aura y_n et par suite x_n.

156. En traitant les deux équations

$$x_{v+1} = y_v + a(2v - 1) \text{ et } y_{v+1} = x_v,$$

où l'on suppose $x_0 = 0$ et $x_1 = a$, on obtiendra

$$x_n = \tfrac{1}{2}a(1 \pm 1) + \tfrac{1}{2}an(n-1),$$

le signe supérieur n'ayant lieu que pour n impair.

157. Voici quelques équations pour appliquer les méthodes de résolution que nous venons d'indiquer :

$$vx_{v+1} = (v+1)x_v + av(v+1);$$
$$(v+1)x_{v+1} = vx_v + av;$$
$$v^m(x_{v+1} - a) = (v+1)(x_v - a);$$
$$x_{v+1} = ax_v \text{ et } ay_{v+1} = ax_v + y_v;$$
$$x_v y_{v+1} = ax_{v+1} \text{ et } y_v x_{v+1} = vy_{v+1};$$
$$x_v y_v = v^2 x_{v+1} \text{ et } x_v = a^2 y_v x_{v+1};$$
$$(x_v)^2 + (y_v)^2 = ax_{v+1} \text{ et } x_v y_v = bx_{v+1};$$
$$2x_{v+1} = x_v + y_v \text{ et } 2y_{v+1} = x_{v+1} + y_v.$$

Les deux premières équations se résolvent par addition ; la troisième par multiplication ; les deux quatrièmes par multiplication et addition ; les deux cinquièmes par substitution, élévation aux puissances et multiplication ; les deux sixièmes par multiplication ; les deux septièmes en ajoutant et soustrayant le double de la seconde à la première, en prenant les racines carrées et en ajoutant ; enfin les deux dernières par addition et en y supposant $x_1 = a$ et $y_1 = b$.

158. Ce que nous venons de dire sur l'emploi des numéros des lettres, sert à résoudre une classe de problèmes très-curieux, qu'il serait difficile ou même impossible de traiter par une autre méthode. On a d'ailleurs remarqué que la sommation des séries numériques est nécessaire pour mettre les expressions des incon-

nues sous la forme la plus simple ; et c'est ce qu'on peut voir encore dans les problèmes que nous allons résoudre.

159. *Soient marqués à volonté, sur une droite indéfinie, deux points* 1 *et* 2*; puis sur la même droite, soient marqués successivement un point* 3 *également distant de* 1 *et* 2*; un point* 4 *également distant de* 2 *et* 3*; un point* 5 *également distant de* 3 *et* 4*; et ainsi de suite. Trouver sur la droite, la position du* n^{me} *des points marqués de cette manière.*

Soient x_v, x_{v+1} et x_{v+2} les distances de 1 aux points v, $v+1$ et $v+2$: puisque le point $v+2$ est également distant de v et $v+1$, il est visible qu'on a

$$x_v + x_{v+1} = 2x_{v+2}.$$

Prenant dans cette équation, successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, u$; puis ajoutant les u équations résultantes, effaçant les termes communs aux deux membres, observant que $x_1 = 0$ et que $x_2 =$ l'intervalle entre 1 et 2, $= a$, on trouvera

$$x_{u+2} = a - \tfrac{1}{2}x_{u+1}.$$

Multipliant les deux membres de cette équation par $(-2)^u$; puis faisant successivement $u = 1, 2, 3, 4, \ldots, n-2$, ajoutant et observant que $x_2 = a$, il viendra, toutes les réductions faites,

$$x_n = \tfrac{2}{3}a + \frac{a}{3.(-2)^{n-2}}.$$

Lorsque n est infini, cette formule se réduit à $\frac{2}{3}a$.

160. *Un négociant gagne, pendant chaque année, une partie de son bien de cette année, marquée par ce qui reste en ôtant de* m *le rang de cette même année; il dépense à la fin de chaque année,* a *fois l'excès de* m *sur le rang de l'année immédiatement précédente. Après* n *années, il possède* b *francs; combien avait-il d'abord?*

Soient x_v et x_{v+1} les biens du négociant au commencement de la v^{me} et de la $(v+1)^{me}$ année ; il est clair qu'on aura

$$x_v + \frac{x_v}{m-v} - a(m-v+1) = x_{v+1}.$$

Résolvant cette équation, d'après l'une des méthodes qui précèdent, on trouvera

$$mx_1 - (m-n)b = am(m - 2S_1 + n) + a[1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \cdots + (n-1)n].$$

Substituant la valeur de S_1 (138), ainsi que celle du multiplicateur de a (128), il viendra, en réduisant,

$$x_1 = \frac{m-n}{m}(amn+b) + \frac{an}{3m}(n-1)(n+1).$$

161. *Les nombres à soustraire croissent comme les nombres impairs* 1, 3, 5, 7, 9, *etc.; les nombres dont on soustrait, sont: 2 fois un nombre donné* a, 4 *fois le* 1er *reste*, 6 *fois le* 2e, 8 *fois le* 3e; ...; 2n *fois le* (n — 1)me, *et le* nme *reste vaut* b. *Trouver le premier nombre* z *à soustraire.*

Soit x_v le v^{me} nombre dont on soustrait et x_{v+1} le suivant; on aura évidemment

$$2vx_v - (2v-1)z = x_{v+1}.$$

Cette équation donne, à cause de $x_1 = a$ et de $x_{n+1} = b$,

$$a = \frac{b}{2.4\ldots 2n} + z\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2.4} + \frac{5}{2.4.6} + \cdots + \frac{2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\right).$$

Comme la somme de la série est $1 - \frac{1}{2.4.6\ldots 2n}$, il vient

$$z = \frac{a(2.4.6\ldots 2n) - b}{(2.4.6\ldots 2n) - 1}.$$

162. *Etant donnés* n *nombres* a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, *partager ces* n *nombres chacun en deux parties telles, que* r *soit le rapport constant entre la* 1re *partie de chaque nombre et la* 2e *du nombre immédiatement suivant, et aussi le rapport entre la* 1re *partie de* a_n *et la* 2e *de* a_1.

Soient x_v et y_v les deux parties de a_v et x_{v+1}, y_{v+1} celle du nombre suivant a_{v+1}; on aura donc, d'après l'énoncé,

$$x_v + y_v = a_v \quad \text{et} \quad x_v = ry_{v+1}; \quad \text{d'où } y_v + ry_{v+1} = a_v.$$

Posant $h = -r$; multipliant les deux membres par h^v; prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$ et ajoutant, puis $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, u-1$ et additionnant; faisant, pour abréger,

$$\varphi = a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + \cdots + a_nh^n$$
$$\varphi' = a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + \cdots + a_{u-1}h^{u-1};$$

observant enfin que $y_{n+1} = y_1$, on trouvera

$$y_1 = \frac{-\varphi}{h(h^n-1)} \quad \text{et} \quad y_u = \frac{hy_1 - \varphi'}{h^u}.$$

A l'aide de ces formules, on calculera toutes les deuxièmes parties cherchées; et il sera facile ensuite d'avoir les premières.

Supposons que les nombres donnés soient les n premiers nombres entiers, de manière que $a_v = v$, et ainsi des autres; nous aurons donc

$$\varphi = h + 2h^2 + 3h^3 + \cdots + nh^n$$
$$\varphi' = h + 2h^2 + 3h^3 + \cdots + (u-1)h^{u-1}.$$

Retranchant chacune de ces équations de son produit par h et réduisant, on aura les valeurs de φ et φ', lesquelles substituées dans celles de y_1 et de y_u, après avoir mis partout $-r$ au lieu de h, donneront

$$y_1 = \frac{1}{(r+1)^2} + \frac{n(-r)^n}{(r+1)[(-r)^n-1]}$$
$$y_u = \frac{1}{(r+1)^2} + \frac{u-1}{r+1} + \frac{n(-r)^{n+1-u}}{(r+1)[(-r)^n-1]}.$$

La seconde de ces formules devient la première, quand $u=1$; ce qui doit être.

On peut faire un grand nombre d'autres suppositions sur les valeurs des n nombres à partager; par ex., on peut admettre que ce soit les n premières puissances d'un nombre donné a, de manière que $a_v = a^v$: on peut supposer aussi que $a_v = va^v$; que $a_v = v(v+1)$; $a_v = \frac{1}{v(v+1)k^v}$; $a_v = bv$; enfin $a_v = v$ et $r = 1$. Chaque fois on déterminera y_1 et y_u, par des calculs analogues à ceux où $a_v = v$.

163. *Un rentier a placé une somme* x *à intérêt composé, pendant* n *années, au taux de* r *pour* 1 *par an. Sur les valeurs de cette somme au bout des années* 1re, 2^e, 3^e, 4^e, ..., n^{me}, *il a dépensé* c, 2c, 3c, 4c, ..., nc. *On demande combien il lui est resté à la fin de la* n^{me} *année.*

Soient x_{v-1} et x_v ce qui lui est resté à la fin des années $(v-1)^{me}$ et v^{me}. La somme x_{v-1} qui lui est restée au bout de la $(v-1)^{me}$ année, a été placée pendant la v^{me} à r pour 1 d'intérêt; elle a donc valu, au bout de cette v^{me} année, $(1+r)x_{v-1}$: et comme alors le rentier a dépensé vc sur cette valeur, il s'ensuit qu'à la fin de la v^{me} année, il lui est resté

$$x_v = (1+r)x_{v-1} - vc.$$

Divisant les deux membres par $1+r$ et posant $a = \frac{1}{1+r}$, puis multipliant de part et d'autre par a^{v-1}, on aura une équation qui, à cause de $x_0 = x$, donnera :

$$a^n x_n - x = -c(1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots + na^{n-1});$$

ou bien, en prenant la somme de la série entre parenthèses,

$$a^n x_n = x - c\left[\frac{na^n}{a-1} - \frac{a^n - 1}{(a-1)^2}\right].$$

Substituant la valeur de a et réduisant, il viendra enfin

$$x_n = (1+r)^n x - \frac{c}{r^2}\left[(1+r)^{n+1} - (1+n)r - 1\right].$$

Cette formule donnerait aussi la valeur de x, ainsi que celle de c, les autres quantités étant données; mais on ne saurait en tirer ni r, ni n, même en s'aidant des logarithmes.

164. *Un père ordonne par son testament que l'aîné de ses* n *enfans prendra une somme* a *sur l'héritage, plus la moitié du reste; le* 2ᵉ *une somme* 2a *sur ce qu'aura laissé le* 1ᵉʳ, *plus les deux tiers du reste; le* 3ᵉ *une somme* 3a *sur ce qu'aura laissé le* 2ᵉ, *plus les* 3 *quarts du reste; ainsi de suite, jusqu'au* nᵉ *enfant, qui reçoit une somme* na, *plus* (n — 1) *fois le* nᵐᵉ *du reste : alors il reste* b *pour la mère. Quel est l'héritage?*

Soit x_v ce qui reste de l'héritage avant que le v^{me} enfant prenne sa part, et x_{v+1} ce qui reste après; on aura évidemment

$$x_v - va - \frac{v(x_v - va)}{v+1} = x_{v+1}, \text{ ou } x_v = (v+1)x_{v+1} + av.$$

Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, et substituant successivement $x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_n$ dans x_1, il viendra, à cause de $x_{n+1} = b$,

$$x_1 = 1.2.3.4\ldots n(n+1)b +$$
$$a[1 + 1.2^2 + 1.2.3^2 + 1.2.3.4^2 + \cdots + 1.2.3\ldots(n-1)n^2].$$

Substituant la valeur de la série (127), et réduisant, il vient

$$x_1 = 2.3.4.5\ldots n(n+1)(a+b) - a.$$

On peut varier de sept manières l'énoncé du problème du testament :

1° Les parts sont successivement a, $2a$, $3a$, $4a$, ..., na, plus la moitié, le tiers, le quart, le cinquième, ..., le $(n+1)^{me}$ du reste correspondant, le dernier étant toujours b;

2° Les parts sont successivement a, $3a$, $5a$, $7a$, ..., $(2n-1)a$, diminués respectivement de la moitié, du quart, du sixième, du huitième, ..., du $2n$ ième du reste correspondant, le dernier étant b;

3° Les parts successives, sont a, $3a$, $5a$, $7a$, ..., $(2n-1)a$, diminués respectivement du *unième*, du tiers, du cinquième, du septième, ..., $(2n-1)$ième du reste correspondant, le dernier étant b;

4° Les parts sont $2a$, $4a$, $6a$, $8a$, ..., $2na$, diminués respectivement de la moitié, du quart, du sixième, du huitième, ..., du $2n$ième du reste correspondant, le dernier étant b;

5° Les parts sont $2a$, $4a$, $6a$, $8a$, ..., $2na$, diminués respectivement du *unième*, du tiers, du cinquième, du septième, ..., $(2n-1)$ième du reste correspondant, le dernier étant b;

6° Les parts sont le nombre a diminué successivement de la moitié, du quart, du sixième, ..., du $2n$ième du reste correspondant;

7° Enfin, les parts sont le nombre a diminué successivement du tiers, du cinquième, du septième, ..., du $(2n+1)^{me}$ du reste correspondant.

165. *On distribue à* n *pauvres une certaine somme d'argent: on donne au* 1^{er} a *florins, plus le* c^{me} *de ce qui reste; au* 2^e 2a *fl., plus le* c^{me} *de ce qui reste; au* 3^e 3a *fl., plus le* c^{me} *de ce qui reste; ainsi de suite : alors il reste* b *fl. Quelle somme a-t-on distribuée?*

Soit x_v ce qui reste de la somme avant que le v^{me} pauvre reçoive sa part, et x_{v+1} ce qui reste après; il est clair qu'on aura

$$x_v - av - \frac{x_v - av}{c} = x_{v+1}, \text{ ou } x_v - \frac{c}{c-1}\, x_{v+1} = av.$$

Cette équation est résoluble par addition (149), et donne, toutes réductions faites,

$$x_1 = a(c-1)^2 + [b + an(c-1) - a(c-1)^2]\left(\frac{c}{c-1}\right)^n.$$

Il est facile de résoudre le même problème,

1° Lorsque les premières portions des parts des pauvres successifs étant a, $3a$, $5a$, ..., $(2n-1)\,a$, les secondes portions sont le c^{me} des restes, ou encore 2 fois le $(2c+1)^{me}$;

1° Lorsque les premières portions des parts étant $2a$, $4a$, $6a$, ..., $2na$, les secondes portions sont le c^{me} des restes;

2° Lorsque les premières portions étant $1a$, $4a$, $7a$, ..., $(3n-2)\,a$, les secondes portions sont 3 fois le $(3c+1)^{me}$ des restes;

4° Enfin, lorsque les premières portions étant $1.2a$, $2.3a$, $3.4a$, ..., $n(n+1)\,a$, les secondes portions sont le c^{me} des restes.

166. Voici encore plusieurs problèmes à résoudre par les équations à indices :

Les nombres à soustraire croissent comme les nombres pairs 2, 4, 6, 8, etc.; les nombres dont on soustrait, sont : 3 fois un nombre donné a, 5 fois le 1^{er} reste, 7 fois le 2^e, 9 fois le 3^e, ..., $(2n+1)$ fois le $(n-1)^{me}$, et le n^{me} reste vaut b. Trouver le premier nombre z à soustraire.

On ajoute constamment le nombre donné a à un nombre inconnu; au tiers de la somme, aux 3 cinquièmes de la 2^e somme, aux 5 septièmes de la 3^e, ainsi de suite, et il vient, après la n^{me} opération, le n^{me} résultat qu'on obtient en ajoutant a au nombre inconnu cherché, aux 2 quarts de la somme, aux 4 sixièmes de la 2^e somme, aux 6 huitièmes de la 3^e, ainsi de suite. Quel est ce nombre inconnu?

Une personne gagne, au bout de chaque année, la moitié de ses biens pendant cette année, et dépense à la fin a francs. Après n années, elle possède autant qu'elle aurait eu au bout de n années, si elle avait dépensé à la fin de chaque année a francs de moins que la moitié de son bien pendant cette année. Combien avait-elle d'abord?

Quel nombre x faut-il retrancher constamment d'un nombre donné a, des 4 demies du premier reste, des 5 tiers du second, des 6 quarts du troisième, ..., de $(n+2)$ fois le n^{me} du $(n-1)^{me}$ reste, pour que le dernier vaille b?

Quel nombre x faut-il ajouter au tiers d'un nombre donné a, aux 2 quarts de la 1^{re} somme, aux 3 cinquièmes de la 2^e, aux 4 sixièmes de la 3^e, aux 5 septièmes de la 4^e, ..., à n fois le $(n+2)^{me}$ de la $(n-1)^{me}$ somme, pour que la dernière vaille b? [Même problème, lorsque les dénominateurs des fractions successives, sont: m, $m+1$, $m+2$, $m+3$, ..., $m+n-1$.]

Une personne dépense, pendant chaque année, a fois ce qu'elle a dépensé l'année immédiatement précédente, et gagne a fois ce qu'elle a gagné et dépensé cette même année précédente. Combien possédera-t-elle au bout de la n^{me} année? On sait que n'ayant rien au commencement de la première année, elle gagne b flor. et dépense c flor. pendant cette année.

Une personne gagne, pendant chaque année, une partie de son bien marquée par le rang de cette année, et dépense à la fin de cette même année, le produit de a fl. par le rang de l'année suivante. Quels seront les biens de cette personne à la fin de la n^{me} année, sachant qu'elle possédait b florins au commencement de la première?

Dans des additions de chacune deux nombres, les nombres à ajouter croissent comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, ..., n; les nombres auxquels on ajoute sont: 2 fois un nombre donné a, 3 fois la 1^{re} somme, 4 fois la 2^e, 5 fois la 3^e, ..., $(n+1)$ fois la $(n-1)^{me}$, et la n^{me} somme vaut b. Quel est le premier nombre x à ajouter?

On prend successivement le double d'un nombre inconnu et le double de a, les 4 tiers du résultat et les 4 tiers de a, les 6 cinquièmes du second résultat et les 6 cinquièmes de a, ..., $2n$ fois le $(2n-1)^{me}$ du $(n-1)^{me}$ résultat et $2n$ fois le $(2n-1)^{me}$ de a: alors le dernier résultat vaut b. Quel est le nombre inconnu?

On retranche constamment le nombre a, de la moitié d'un nombre inconnu, plus la moitié de a; du quart du premier reste, plus le quart de a; du sixième du second reste, plus le sixième de a; ...; du $2n^{me}$ du $(n-1)^{me}$ reste, plus le $2n$ ième de a: alors il reste b. Quel est ce nombre inconnu? [Même problème, lorsque les dénominateurs des parties successives, sont : 3, 5, 7, 9, ..., $(2n+1)$].

Une marchande, à qui il ne reste plus que b pommes, en a vendu à n personnes, de manière que chacune a eu k pommes, plus $(m-a)$ fois le quotient de ce qui restait avant de lui donner ce k pommes, divisé par la somme de m joint à c fois le rang de cette personne. Combien la marchande avait-elle d'abord de pommes?

On retranche constamment le nombre a, du $(c+d)^{me}$ d'un nombre inconnu augmenté de a, du $(c+2d)^{me}$ du premier reste augmenté de a, du $(c+3d)^{me}$ du second reste augmenté de a, ..., du $(c+nd)^{me}$ reste augmenté de a, et le dernier reste vaut b. Quel est ce nombre inconnu? [Même problème, lorsque les parties successives sont prises d fois chacune].

Problèmes qui dépendent des combinaisons.

167. *Trouver les relations qui existent entre les sommes des puissances semblables de* n *quantités quelconques* a, b, c, d, ..., k, *et les sommes des produits différens de ces quantités multipliées* 2 *à* 2, 3 *à* 3, 4 *à* 4, *etc., une même quantité n'étant facteur qu'une fois dans un même produit.*

Désignons par S_m la somme des puissances m ièmes des n quantités proposées, et par p_m la somme des produits différens de ces quantités combinées m à m. Soit d'ailleurs a_m la somme de tous les produits différens m à m où a se trouve, b_m la somme de tous les produits m à m qui contiennent b, et ainsi de suite. Il s'agit d'abord de trouver la somme

$$x = a_m + b_m + c_m + \cdots + k_m.$$

A cet effet, prenons un produit de m facteurs, par exemple $abef\ldots h$: puisque a_m est la somme de tous les produits différens de m facteurs où a se trouve, il s'ensuit que a_m renferme seulement une fois $abef\ldots h$; d'où il suit que le produit $abef\ldots h$ ne se trouve qu'une fois dans chacune des m quantités a_m, b_m, e_m, f_m, ..., h_m; il est par conséquent contenu seulement une fois dans la somme x qui renferme ces m quantités. On voit par là que chacun des produits différens des n quantités a, b, c, d, ..., k, combinées m à m, n'est contenu que m fois dans x; donc la somme p_m de tous ces produits m à m n'y est contenu non plus que m fois : et comme x ne renferme pas d'autres quantités que ces produits m à m, il en résulte $x = mp_m$, ou bien

$$a_m + b_m + c_m + \cdots + k_m = mp_m \cdots (1)$$

Il reste maintenant à déterminer a_m, b_m, c_m, etc. Or, comme a_m est la somme de tous les produits où a se trouve, il faut en conclure que a_m vaut a multiplié par la somme p_{m-1} des produits des n quantités proposées combinées $m-1$ à $m-1$, à l'exception de la somme a_{m-1} de ceux de ces produits $m-1$ à $m-1$ où a se trouve; on a donc

$$a_m = ap_{m-1} - a.a_{m-1} \cdots (2)$$

Posant $u = -\frac{1}{a}$, l'équation précédente devient, en multipliant ses deux membres par u^{m-1},

$$u^{m-1}p_{m-1} = u^{m-1}a_{m-1} - u^m a_m.$$

Prenant successivement $m = 2, 3, 4, 5, \ldots, m$, ajoutant et réduisant, en observant que $a_1 = a$ et que $ua_1 = -1$, on aura, en transposant -1,

$$1 + up_1 + u^2p_2 + u^3p_3 + \cdots + u^{m-1}p_{m-1} = -u^m a_m.$$

Multipliant les deux membres par a^m et observant que $u = -\frac{1}{a}$, on trouvera, réductions faites,

$$a^m - p_1a^{m-1} + p_2a^{m-2} - p_3a^{m-3} + \cdots \mp ap_{m-1} = \mp a_m.$$

Ajoutant cette formule avec les résultats qu'elle fournit en y changeant successivement a en b, c, d, ..., k, et réduisant d'après (1), il viendra

$$\begin{aligned}S_m - p_1S_{m-1} + p_2S_{m-2} - p_3S_{m-3} + \cdots\\ \mp S_1p_{m-1} \pm mp_m = 0 \cdots (3)\end{aligned}$$

Il est impossible de former un produit de $n+v$ facteurs avec n quantités n'y entrant qu'une fois chacune; donc chacun des produits de plus de n facteurs doit être regardé comme nul; on doit donc avoir $a_{n+v} = 0$ et $p_{n+v} = 0$. D'après cela, il est clair que l'équation (2) est encore vraie pour $m > n$; il en est donc de même de la série (3), pourvu qu'on l'arrête au terme affecté de p_n, car lorsque $m > n$, on a $p_m = 0$. Faisant donc, dans cette série, successivement $m = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n$ et $m > n$, elle donnera successivement

$$\begin{aligned}
&S_2 - p_1S_1 + 2p_2 = 0\\
&S_3 - p_1S_2 + p_2S_1 - 3p_3 = 0\\
&S_4 - p_1S_3 + p_2S_2 - p_3S_1 + 4p_4 = 0\\
&S_5 - p_1S_4 + p_2S_3 - p_3S_2 + p_4S_1 - 5p_5 = 0\\
&S_6 - p_1S_5 + p_2S_4 - p_3S_3 + p_4S_2 - p_5S_1 + 6p_6 = 0
\end{aligned}$$

....

$$S_n - p_1 S_{n-1} + p_2 S_{n-2} - \cdots \mp p_{n-1} S_1 \pm n p_n = 0$$

$$S_m - p_1 S_{m-1} + p_2 S_{m-2} - p_3 S_{m-3} + \cdots \pm p_n S_{m-n} = 0.$$

Telles sont les relations qui résolvent le problème proposé.

168. Prenant dans ces formules, les valeurs de S_1, S_2, S_3, S_4, etc. et observant que $S_1 = p_1$, on aura successivement

$$S_2 = p_1^2 - 2p_2$$

$$S_3 = p_1^3 - 3p_1 p_2 + 3p_3$$

$$S_4 = p_1^4 - 4p_1^2 p_2 + 4p_1 p_3 + 2p_2^2 - 4p_4$$

$$S_5 = p_1^5 - 5p_1^3 p_2 + 5p_1^2 p_3 + 5p_1 p_2^2 - 5p_1 p_4 - 5p_2 p_3 + 5p_5$$

etc. ....

Ces valeurs feront donc trouver les sommes des puissances semblables de n quantités quelconques, dès que l'on connaîtra les sommes des produits différens de ces quantités combinées 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc.

169. Les relations trouvées plus haut, donnent encore, en y prenant successivement les valeurs de p_1, p_2, p_3, p_4, etc.,

$$p_1 = S_1$$

$$2p_2 = S_1^2 - S_2$$

$$6p_3 = S_1^3 - 3S_1 S_2 + 2S_3$$

$$24p_4 = S_1^4 - 6S_1^2 S_2 + 8S_1 S_3 + 3S_2^2 - 6S_4$$

$$120p_5 = S_1^5 - 10S_1^3 S_2 + 20S_1^2 S_3 + 15S_1 S_2^2 - 20S_2 S_3 - 30S_1 S_4 + 24S_5$$

etc. ....

Ces formules résolvent le problème où, étant données les sommes des puissances semblables de n quantités inconnues, on demande les sommes des produits différens de ces quantités, combinées 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc.

170. Le problème proposé plus haut (167) a été résolu par M. Gergonne, dans le tome III des Annales de Mathématiques. La solution que l'on vient de lire, est analogue à la sienne, mais paraît plus simple et plus directe. M. Bret, dans le tome IV des mêmes Annales, s'est aussi occupé du même problème; et il en déduit la formule du binome, par un procédé très-simple, que nous allons modifier comme il suit :

Supposons que les n quantités proposées a, b, c, d, ..., k, soient égales entre elles et à a; l'équation (3) prendra alors la forme

$$mp_m - nap_{m-1} + na^2p_{m-2} - na^3p_{m-3} + \cdots \pm na^m = 0;$$

d'où, en y changeant m en $m-1$, on aura

$$(m-1)p_{m-1} - nap_{m-2} + na^2p_{m-3} - \cdots \mp na^{m-1} = 0.$$

Ajoutant cette équation multipliée par a, à la précédente, et réduisant, on obtiendra

$$mp_m - (n-m+1)\,ap_{m-1} = 0,$$

$$\text{ou}\quad p_m = \frac{n-m+1}{m}\,ap_{m-1}.$$

Prenant successivement $m = 2, 3, 4, 5, \ldots, m$, multipliant entre elles les équations résultantes, supprimant les facteurs communs aux deux membres, et observant que $p_1 = na$, on aura

$$p_m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\;\cdots\;m}\,a^m.$$

Le coefficient de a^m, dans cette valeur, désigne évidemment le nombre de tous les produits différens de n quantités combinées m à m. Substituant les valeurs de $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$, tirées de cette formule, dans le produit de n facteurs binomes égaux à $x+a$, lequel est, comme on sait,

$$(x+a)^n = x^n + p_1ax^{n-1} + p_2a^2x^{n-2} + \cdots + p_ma^mx^{n-m} + \cdots + a^n,$$

il en résultera la formule connue du binome.

171. A l'aide des relations du n° 169, on résout aisément les deux systèmes d'équations que voici :

$$\begin{array}{l|l}
p_1(u^2+x^2+y^2+z^2)=a & uxyz(u+x+y+z)=a\\
p_1(u^3+x^3+y^3+z^3)=b & u^2x^2y^2z^2(u^2+x^2+y^2+z^2)=b\\
p_1(u^4+x^4+y^4+z^4)=c & u^3x^3y^3z^3(u^3+x^3+y^3+z^3)=c\\
p_1(u^5+x^5+y^5+z^5)=d & u^4x^4y^4z^4(u^4+x^4+y^4+z^4)=d.
\end{array}$$

p_1 désignant $u+x+y+z$, dans le premier système.

Considérons seulement le premier système et posons

$$\begin{aligned}
&u+x+y+z=p_1\\
&ux+uy+uz+xy+xz+yz=p_2\\
&uxy+uxz+uyz+xyz=p_3\\
&uxyz=p_4;
\end{aligned}$$

il est clair, d'après la composition des équations, que u, x, y, z, sont les racines de l'équation :

$$\varphi^4 - p_1\varphi^3 + p_2\varphi^2 - p_3\varphi + p_4 = 0, \ldots (1);$$

et les quatre équations proposées deviennent

$$p_1S_2 = a,\ p_1S_3 = b,\ p_1S_4 = c,\ p_1S_5 = d.$$

Substituant les valeurs de S_2, S_3, S_4, S_5, tirées de ces équations, dans les relations du n° 169, et observant que $p_5 = 0$, on aura quatre équations qui feront connaître p_1, p_2, p_3, p_4. Substituant les valeurs résultantes dans l'équation (1), les racines de cette équation seront les valeurs de u, x, y, z.

172. *Connaissant les sommes des puissances semblables de* n *nombres quelconques, trouver la somme* φ *des puissances* u^{mes} *de toutes les sommes partielles qu'on obtient en ajoutant ces* n *nombres* m *à* m, *un même nombre n'entrant qu'une fois dans une même somme partielle, et la puissance* u^{me} *d'une même somme partielle n'entrant qu'une fois non plus dans* φ.

Il me semblait, en me donnant ce problème, qu'on devait aisément en trouver la solution d'après la théorie des combinaisons et les relations du n° 167. Mais tous mes efforts n'ont abouti qu'à le résoudre pour $u = 1$, $u = 2$ et $u = 3$.

Soient S_1, S_2, S_3, S_4, etc., les sommes des puissances 1re, 2^{e}, 3^{e}, 4^{e}, etc. des n nombres proposés; soit A le nombre de toutes les sommes partielles différentes de $n-1$ nombres pris $m-1$ à $m-1$, B celui des sommes partielles de $n-2$ nombres pris $m-2$ à $m-2$, et C celui des sommes partielles de $n-3$ nombres ajoutés $m-3$ à $m-3$; d'après la théorie des combinaisons, on aura

$$A = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)},$$

$$B = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)\cdots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-2)},$$

$$C = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)\cdots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-3)}.$$

Cela posé, lorsque $u = 1$, il est clair qu'un même nombre a est ajouté à chacune des sommes partielles qu'on obtient en prenant $m-1$ à $m-1$ les $n-1$ autres nombres. Or, le nombre de ces dernières sommes partielles est A; donc φ renferme A fois a: et comme ce qu'on vient de dire de a, se dira de chacun des n nombres proposés, il s'ensuit que φ contient A fois la somme S_1 de tous ces nombres. On a par conséquent

$$\varphi = AS_1.$$

Quand $u=2$, φ exprime la somme des carrés des sommes de n nombres simples ajoutés m à m ; φ ne peut donc renfermer que des termes tels que a^2 et ab. Or, dans toutes les sommes partielles m à m, un même nombre a est ajouté à chacune de A sommes des $n-1$ autres nombres pris $m-1$ à $m-1$. Et comme a^2 ne se trouve qu'une fois dans chacun des carrés des A sommes où a se trouve, il s'ensuit que φ contient A fois a^2. De même, φ contient A fois b^2, A fois c^2, etc.; de sorte que φ renferme AS_2.

D'un autre côté, dans les sommes partielles m à m, la somme $a+b$ de deux nombres a et b, est ajoutée à chacune des B sommes partielles des $n-2$ autres nombres pris $m-2$ à $m-2$; le carré de $a+b$, et par conséquent $2ab$, se trouve donc pris B fois dans la somme φ des carrés des sommes partielles m à m: et comme il en est de même du double de chacun des p_2 produits différens des n nombres proposés multipliés 2 à 2, il en résulte que φ est encore composé de B fois $2p_2$. On a donc enfin

$$\varphi = AS_2 + 2Bp_2.$$

Mais $2p_2 = S_1^2 - S_2$ et $A = \frac{n-1}{m-1}B$; il vient donc

$$\varphi = B\left[\frac{n-m}{m-1}S_2 + S_1^2\right].$$

Prenons maintenant $u=3$; alors φ sera la somme des cubes de chacune des sommes partielles obtenues en ajoutant m à m les n nombres proposés. Ainsi φ ne peut contenir que des termes tels que a^3, a^2b et abc. Or, comme dans les sommes partielles m à m, un nombre a est ajouté à chacune des A sommes partielles des $n-1$ autres nombres pris $m-1$ à $m-1$, il s'ensuit que a entre dans A sommes m à m; et que par suite a^3 entre A fois dans φ : et comme il en est de même des cubes de chacun des n nombres proposés, il s'ensuit que φ contient AS_3.

D'un autre côté, $3a^2$ est multiplié par chacun des A sommes partielles qu'on obtient en ajoutant $m-1$ à $m-1$ les $n-1$ autres nombres : et comme dans ces A sommes, le nombre b est ajouté avec chacune des B sommes partielles des $n-2$ autres nombres pris $m-2$ à $m-2$, il s'ensuit que b entre dans B des sommes partielles $m-1$ à $m-1$ qui multiplient $3a^2$; donc $3a^2b$ entre B fois dans φ. Ce que l'on vient de dire pour b, se dirait pour chacun des $n-1$ nombres différens de a; donc, dans φ, $3Ba^2$ est multiplié par la somme des n nombres proposés, excepté a, c'est-à-dire par $S_1 - a$. De sorte que φ renferme $3Ba^2(S_1 - a)$ ou $3Ba^2S_1 - 3Ba^3$. Mais ce que l'on vient de dire pour a, se dira pour chacun des n nombres proposés; donc φ contient $3BS_1S_2 - 3BS_3$.

Enfin dans les sommes partielles m à m, $a+b$ est ajouté à chacune des B sommes partielles des $n-2$ autres nombres pris $m-2$ à $m-2$; ainsi dans φ, $3(a+b)^2$ est multiplié par chacune des B sommes $m-2$ à $m-2$. Or, dans ces B sommes, le nombre c est ajouté avec chacune des C sommes partielles qu'on trouve en prenant $m-3$ à $m-3$ les $n-3$ autres nombres; il en résulte donc que φ contient C fois $3(a+b)^2c$, et par conséquent C fois $6abc$. Et comme il en sera de même de 6 fois chacun des p_3 produits différens des n nombres proposés multipliés 3 à 3, il s'ensuit que $6Cp_3$ se trouve dans φ.

On voit donc que φ renferme les trois quantités AS_3, $3BS_1S_2 - 3BS_3$ et $6Cp_3$. Par conséquent

$$\varphi = AS_3 + 3BS_1S_2 - 3BS_3 + 6Cp_3.$$

Mais $B = \frac{n-2}{m-2}C$ et $6p_3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3$ (169): donc

$$\varphi = C\left[\frac{n-m}{m-1}\left(\frac{n-2m}{m-2}S_3 + 3S_1S_2\right) + S_1^3\right].$$

On entrevoit bien ce qu'il faudrait faire pour $u = 4$; mais alors les raisonnemens paraissent devoir être si longs, que nous n'entreprendrons pas de les développer.

273. La valeur qu'on vient de trouver pour φ est en défaut dès que $m = 2$; mais il est aisé de s'assurer qu'alors

$$\varphi = (n-4)S_3 + 3S_1S_2.$$

Lorsque les n nombres proposés sont les n premiers nombres entiers, les valeurs de φ, pour $u = 1$, 2 et 3, deviennent respectivement

$$\tfrac{1}{2}An(n+1),\ \tfrac{1}{2}Bn(n+1)\left[\frac{(n-m)(2n+1)}{3(m-1)} + \tfrac{1}{2}n(n+1)\right] \text{ et}$$

$$\tfrac{1}{4}Cn^2(n+1)^2\left[\frac{n-m}{m-2}\left(\frac{n-2m}{m-1} + 2n + 1\right) + \tfrac{1}{2}n(n+1)\right].$$

274. *De combien de manières peut-on faire* n *parts, avec* m *choses, toutes différentes les unes des autres, avec la faculté de faire des parts aussi inégales qu'on voudra; mais*

sous la condition d'admettre au moins une chose dans chaque part, et d'employer la totalité des choses dans chaque système de répartition?

Voici de ce problème très-remarquable, une solution analogue à celle qu'on trouve dans le tome XI de Annales de Mathématiques; mais qui est beaucoup moins longue :

Considérons d'abord comme systèmes différens de répartitions, ceux-là même où les mêmes parts sont disposées dans un autre ordre. Soit $f(n, m)$ le nombre total de manières de faire n parts avec m choses. Il est clair que si l'on forme d'abord la première part de k choses, on pourra choisir cette part d'un nombre de manières représenté par

$$c_k = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}:$$

il restera à faire $n-1$ parts avec les $m-k$ choses restantes; et le nombre de manières différentes de choisir ces $n-1$ parts sera $f(n-1, m-k)$. Or, puisque pour une part de k choses, le nombre de manières différentes de former $n-1$ parts des $m-k$ choses restantes est $f(n-1, m-k)$, il s'ensuit que pour les c_k parts de k choses, ce nombre de manières différentes sera

$$c_k\, f(n-1, m-k).$$

Prenant successivement $k=1, 2, 3, 4, \ldots, m-2, m-1$, on aura successivement les nombres de manières différentes de faire n parts avec m choses, lorsque la première part est formée de $1, 2, 3, 4, \ldots, m-2, m-1$ de ces choses; la somme de tous ces nombres de manières différentes sera par conséquent le nombre $f(n, m)$ de toutes les répartitions possibles de m choses en n parts; ainsi on aura

$$f(n,m) = \begin{cases} mf(n-1, m-1) + c_2 f(n-1, m-2) + c_3 f(n-1, m-3) \\ + \ldots + c_2 f(n-1, 2) + mf(n-1, 1) \ldots\ldots (A) \end{cases}$$

Lorsqu'il y a deux parts, ou que $n=2$, chaque fonction du second membre de (A), exprime qu'il faut former une part avec un certain nombre de choses; ce qui n'est possible que d'une seule manière, en prenant toutes ces choses; ainsi chaque fonction du second membre vaut 1, et il vient

$$f(2, m) = m + c_2 + c_3 + \cdots + c_2 + m.$$

Or, d'après la formule du binome, cette valeur se réduit à

$$f(2,m)=(1+1)^m-2, \text{ ou à } f(2,m)=2^m-2.$$

S'il y a 3 parts, ou si $n=3$, la formule qu'on vient de trouver donnera les valeurs des fonctions dans le second membre de (A); substituant ces valeurs et réunissant les termes positifs, ainsi que les termes négatifs, on aura

$$f(3,m)=\begin{cases} m2^{m-1}+c_2 2^{m-2}+c_3 2^{m-3}+\cdots+m.2 \\ -2(m+c_2+c_3+\cdots+c_2+m); \end{cases}$$

réduisant cette formule, d'après celle du binome, il viendra

$$f(3,m)=(2+1)^m-2^m-1-2[(1+1)^m-2], \text{ ou}$$
$$f(3,m)=3^m-3.2^m+3.$$

Supposons qu'il y ait 4 parts, ou que $n=4$; la valeur que nous venons d'obtenir, fera connaître celles des fonctions, dans le second membre de (A); substituant ces valeurs et réunissant les multiplicateurs de -3 et $+3$, il viendra

$$f(4,m)=\begin{cases} m3^{m-1}+c_2 3^{m-2}+c_3 3^{m-3}+\cdots+m.3 \\ -3[m2^{m-1}+c_2 2^{m-2}+c_3 2^{m-3}+\cdots+m.2] \\ +3(m+c_2+c_3+c_4+\cdots+c_2+m); \end{cases}$$

d'où l'on tire, en réduisant, d'après la formule du binome,

$$f(4,m)=4^m-4.3^m+6.2^m-4.$$

Continuant cette manière d'opérer, on verra que pour 5 parts, la formule précédente et la formule (A) donnent

$$f(5,m)=5^m-5.4^m+10.3^m-10.2^m+5.$$

Pour 6 parts on trouvera

$$f(6,m)=6^m-6.5^m+15.4^m-20.3^m+15.2^m-6.$$

En général, on voit que le nombre total de manières différentes de choisir n parts avec m choses, est $f(n,m)$ ou

$$n^m-n(n-1)^m+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^m-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^m$$
$$+\cdots\pm\frac{n(n-1)}{1.2}2^m\mp n\ldots \text{ (B)}$$

Dans cette formule, on regarde comme systèmes différens de répartitions, ceux où les parts ne sont simplement que transposées. Mais le problème, au contraire, n'admet comme systèmes différens, que ceux qui ne sont pas en totalité composés des mêmes parts.. Dans ce cas, on observe que, pour n parts, un seul système pris au hasard, peut, par la simple permutation des parts dont il est formé, en fournir un nombre

$$1.2.3.4\ldots n,$$

lesquelles ne doivent plus compter que pour une part unique; d'où il suit que le nombre de systèmes de répartitions réellement différens, s'obtient en divisant la valeur précédente de $f(n, m)$ par $1.2.3.4\ldots n$; ce qui résout le problème proposé.

275. Il est essentiel de remarquer que, comme il est impossible de faire n parts effectives avec un nombre de choses inférieur à n; et que comme, d'un autre côté, les diverses manières de faire n parts avec n choses, ne sont que les diverses manières de permuter ces choses entre elles; il s'ensuit, 1° que *pour toutes les valeurs de* m *moindres que* n, *la formule* (B) *est nulle;* 2° que *quand* m = n, *la formule* (B) *se réduit à*

$$1.2.3.4\ldots n.$$

Ces deux théorèmes servent à résoudre n équations du 1er degré, de même forme que celles que nous avons considérées au n° 30.

276. *Soit* p *un nombre premier et* n *un nombre entier quelconque, non divible par* p; *je dis que le nombre* $n^{p-1}-1$, *sera divisible par* p.

En effet, soit x un nombre entier quelconque, on aura

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{1.2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ n}x^n + \cdots + x^p.$$

Or, je dis que tous les termes du second membre ont leurs coefficiens divisibles par p, excepté le premier et le dernier. Car prenons le coefficient du terme général en x^n; il est nécessairement entier : et comme p est premier et que $n<p$, il s'ensuit que le facteur p du numérateur, ne peut détruire aucun des facteurs du dénominateur; ceux-ci sont donc détruits par les facteurs $p-1$, $p-2$, ..., $p-n+1$; et par conséquent p restera facteur du quotient. On voit donc que $(1+x)^p-1-x^p$ est divisible par p, quel que soit l'entier x.

Posons maintenant $1+x=n$; on aura alors $n^p-(n-1)^p-1$

qui devra être divisible par p. Soit q_n le quotient ; il viendra

$$n^p-(n-1)^p-1=pq_n.$$

Prenant successivement $n=1, 2, 3, 4, \ldots, n$, ajoutant et faisant, pour abréger, $k=q_1+q_2+q_3+\cdots+q_n$, on trouvera

$$n^p-n=kp, \text{ ou } n(n^{p-1}-1)=kp.$$

On voit que p divise le produit $n(n^{p-1}-1)$; et puisque p est supposé premier avec n, il faut que p divise l'autre facteur $n^{p-1}-1$. Ce qu'il fallait démontrer.

277. *Si* p *est un nombre premier, le produit* 1.2.3...(p—1), *augmenté de l'unité, sera divisible par* p*; et réciproquement, tout nombre qui satisfera à cette condition, sera premier.*

En effet, on a vu (275) que quand $m=n$, la formule (B) se réduit à

$$1.2.3\ldots n=n^n-(n-1)^n+c_2(n-2)^n-c_3(n-3)^n$$
$$+\cdots\pm c_2.2^n\mp n\ldots(1)$$

Soit $n=p-1$, ou $p=n+1$; n sera un nombre pair, et il est clair que p ne divise ni n, ni les nombres au-dessous de n ; p doit donc diviser $n^{p-1}-1$ (276). Soit q_n le quotient ; on aura

$$n^{p-1}-1=pq_n \text{ ; d'où } n^{p-1}=1+pq_n.$$

Prenant successivement $n=1, 2, 3, 4, \ldots, n$, remplaçant l'exposant $p-1$ par sa valeur n ; puis substituant dans la formule (1) et désignant par k l'ensemble des multiplicateurs de p, il viendra

$$1.2.3\ldots(p-1)=kp+1-n+c_2-c_3+\cdots\pm c_2\mp n.$$

Ce qui suit kp, dans le second membre, vaut $(1-1)^n-1$ ou -1 ; on a donc $1.2.3\ldots(p-1)=kp-1$; d'où

$$1.2.3\ldots(p-1)+1=kp.$$

Ce qui démontre le théorème proposé.

Réciproquement, il n'y a qu'un nombre premier p qui puisse diviser $1.2.3\ldots(p-1)+1$. Car si p était composé de deux facteurs inégaux, ils seraient compris tous les deux dans la suite $1, 2, 3, \ldots, p-1$, et par conséquent le produit $1.2.3\ldots(p-1)$ serait divisible par p, et p ne diviserait pas ce produit augmenté de 1 : si p était le produit de deux facteurs égaux à a, on aurait $a<\frac{1}{2}(p-1)$; donc la suite 1, 2, 3, ... $(p-1)$, renfermerait a et $2a$, et le produit serait encore divisible par a^2 ou par p.

Donc enfin, la quantité $1.2.3\ldots(p-1)+1$ n'est divisible par p que quand p est premier.

Il résulte de là que pour s'assurer si un nombre p est premier, il suffira de voir si le produit des nombres naturels au-dessous de p, plus l'unité, donne une somme divisible par p. Mais quand p a une valeur un peu élevée, ce produit devient si grand, que ce moyen de vérification est réellement impraticable, et bien moins prompt que l'essai par la division, même malgré les abréviations dont il est susceptible.

278. *Tout nombre de la forme* $(1+2a)^{v\cdot 2^n}-1$ *est toujours divisible par* 2^{n+2}.

On peut voir la démonstration de cette proposition, dans le tome IX des Annales de Mathématiques. On trouve aussi, dans la théorie des nombres de M. Legendre, plusieurs beaux théorèmes sur les nombres, dont nous citerons ceux que voici :

Un nombre quelconque est toujours un carré, ou la somme de deux carrés, ou celle de trois, ou enfin celle de quatre au plus.

Tout nombre premier de la forme $4n+1$ est la somme de deux carrés.

Tout nombre premier de la forme $8n+3$ est la somme de trois carrés, dont deux sont égaux.

Tout nombre impair, non compris dans $8n+7$, est la somme de trois carrés.

Tout nombre double d'un impair est la somme de trois carrés, au plus.

Tout nombre est ou triangulaire, ou composé de deux ou trois nombres triangulaires.

Elimination entre deux équations de degrés quelconques, à deux inconnues.

279. Soient les deux équations, ordonnées par rapport à x,

$$x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\cdots+t=0,$$
$$x^n+p'x^{n-1}+q'x^{n-2}+\cdots+t'=0,$$

dans lesquelles les coefficiens $p, q, r, \ldots, t, p', q', r', \ldots, t'$, sont fonctions de la seconde inconnue y et de nombres donnés.

Supposons que y ayant une valeur convenable, les deux équations précédentes soient satisfaites par $x=\alpha$; alors elles seront divisibles par $x-\alpha$, et on aura

$$\left.\begin{array}{l} x^m + px^{m-1} + \cdots + t = (x-\alpha)\,(x^{m-1} + ax^{m-2} + \cdots + h) \\ x^n + p'x^{n-1} + \cdots + t' = (x-\alpha)\,(x^{n-1} + a'x^{n-2} + \cdots + h'), \end{array}\right\} (1)$$

a, b, c, ..., h, a', b', c', ..., h', sont des indéterminées; au nombre de $m-1$ dans la première identité et de $n-1$ dans la seconde. Eliminant $x-\alpha$, il viendra

$$(x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \cdots + t)\,(x^{n-1} + a'x^{n-2} + \cdots + h')$$
$$= (x^n + p'x^{n-1} + q'x^{n-2} + \cdots + t')\,(x^{m-1} + ax^{m-2} + \cdots + h).$$

Effectuant les multiplications, transposant et réunissant les multiplicateurs d'une même puissance de x, on aura une identité $V = 0$, du $m+n-2$ ième degré en x, composée par conséquent de $m+n-1$ termes et ayant $m+n-1$ coefficiens fonctions de p, q, r, ..., t, p', q', r', ..., t', et des indéterminées a, b, c, ..., h, a', b', c', ..., h', dont le nombre est $m+n-2$.

Cela posé, puisque les identités n'ont pas été détruites, les valeurs de x dans la dernière $V = 0$, sont les mêmes que dans les proposées (1). Mais dans les identités (1), x peut avoir telle valeur qu'on voudra; donc, dans $V = 0$, x peut aussi avoir telle valeur qu'on voudra; ce qui exige que tous les coefficiens de x, dans $V = 0$, soient nuls séparément. Ainsi, en les égalant chacun à zéro, on aura $m+n-1$ équations, évidemment du premier degré entre les indéterminées introduites : le nombre de celles-ci est $m+n-2$; il ne faudra donc que $m+n-2$ équations pour les déterminer toutes; conséquemment, il y aura une équation qui ne sera pas employée, et dans laquelle substituant, pour les indéterminées qui s'y trouvent, leurs valeurs obtenues en fonctions des coefficiens des équations proposées, on aura une équation ne contenant que y et des nombres donnés; ce sera donc l'équation finale cherchée.

Quant aux valeurs de x, elles seront données par $x-\alpha = 0$, lorsqu'on aura déterminé $x-\alpha$. Or, en divisant le premier membre de la première identité (1), par le multiplicateur de $x-\alpha$, dans cette identité, le quotient $x+p-a$ est la valeur de $x-\alpha$; de sorte que les valeurs de x seront données par $x+p-a=0$, et seront

$$x = a - p : \text{ Elles seraient aussi } x = a' - p'.$$

280. Si ces équations fournissent $x = \frac{0}{0}$, cela annoncera que plusieurs des valeurs de x répondent à la valeur de y qu'on aura

employée, et ces valeurs seront données par un commun diviseur d'un degré supérieur au premier, lequel se trouvera par la méthode connue, après avoir substitué la valeur de y dans les équations proposées.

281. Lorsque $y=\beta$ donne $x=\frac{0}{0}$, les deux termes de x ont le facteur commun $y-\beta$. Si donc on avait supprimé d'abord ce facteur commun, dans la vue de simplifier l'expression générale de x, la valeur $y=\beta$ n'aurait pas donné $x=\frac{0}{0}$, et rien n'aurait indiqué que plusieurs valeurs de x répondent à $y=\beta$. On serait alors parvenu à une valeur de x qui, avec $y=\beta$, n'aurait pas satisfait aux équations proposées, comme cela doit arriver; car puisque plusieurs valeurs de x répondent à $y=\beta$, il n'y a pas de raison pour que l'expression simplifiée de x, donne l'une de ces valeurs plutôt que les autres; elle doit donc les donner toutes; ce qui est impossible, puisque cette expression est du premier degré en x. On voit par là que *si les deux termes de l'expression générale de* x *ont un facteur commun fonction de* y, *on doit ne pas supprimer ce facteur commun.*

282. La méthode d'élimination que nous venons de faire connaître, est due à Euler : si on l'applique aux équations

$$x^3+px^2+qx+r=0 \text{ et } x^2+p'x+q'=0 \ldots (2)$$

on aura d'abord les deux identités

$$x^3+px^2+qx+r=(x-\alpha)(x^2+ax+b),$$
$$x^2+p'x+q'=(x-\alpha)(x+a');$$

d'où éliminant $x-\alpha$ et passant les termes dans le 1$^{\text{er}}$ membre, il viendra, en ordonnant par rapport à x,

$$(p+a'-p'-a)x^3+(pa'+q-ap'-q')x^2+$$
$$(qa'+r-q'a-p'b)x+(ra'-q'b)=0.$$

Si donc on pose, pour abréger, $p-p'=e$ et $q-q'=e'$, on aura les équations

$$a-a'=e$$
$$p'a-pa'+b=e'$$
$$q'a-qa'+p'b=r$$
$$q'b-ra'=0.$$

Prenant la valeur de a dans la première, et substituant dans les deux équations suivantes, puis la valeur de b dans la première équation résultante, et substituant dans la seconde, ainsi que dans $q'b - ra' = o$, l'élimination de a' entre les deux nouvelles équations, donnera l'équation finale

$$q'(ep' - e')^2 + (r - eq')^2 + p'(ep' - e')(r - eq') = o,$$

qui revient à

$$(e'q' - rp')(e' - ep') + (r - eq')^2 = o \dots (3).$$

Substituant les valeurs de a et a' dans $x = a - p$ et $x = a' - p'$, on trouvera

$$x = \frac{e'q' - rp'}{r - eq'} \quad \text{et} \quad x = -\frac{r - eq'}{e' - ep'} \dots (4)$$

L'équation (3) faisant connaître les valeurs de y, l'une des formules (4) déterminera les valeurs correspondantes de x.

283. Par exemple, prenons les deux équations

$$x^3 - 3ax^2 + 2a^2x - 6ay^2 = o$$
$$x^2 - 2ay = o.$$

Ces équations se résolvent aisément par substitution; mais si on les compare aux équations (2), on verra que

$$p = -3a,\ q = 2a^2,\ r = -6ay^2,\ p' = o,\ q' = -2ay,$$
$$e = -3a \ \text{et} \ e' = 2a^2 + 2ay,$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (3) et dans la première formule (4), on trouvera, en décomposant en facteurs,

$$4a^2y(a+y)^2(9y - 2a) = o \quad \text{et} \quad x = \frac{2ay(a+y)}{3y(a+y)}.$$

La première de ces équations donne

$$y = \tfrac{2}{9}a,\ y = -a \ \text{et} \ y = o;$$

la seconde devient alors

$$x = \tfrac{2}{3}a,\ x = \tfrac{o}{o} \ \text{et} \ x = \tfrac{o}{o}.$$

Puisque $y = -a$ donne $x = \frac{o}{o}$, il y a plusieurs valeurs de x qui répondent à la valeur $-a$ de y (280). Faisant donc $y = -a$ dans les équations proposées, puis cherchant le plus grand commun diviseur entre les polynomes résultans $x^3 - 3ax^2 + 2a^2x - 6a^3$ et $x^2 + 2a^2$, on verra que ce plus grand commun diviseur est $x^2 + 2a^2$, et qu'ainsi les deux équations proposées sont satisfaites par $y = -a$ et $x^2 + 2a^2 = o$, c'est-à-dire par les deux couples de valeurs $y = -a$, $x = a\sqrt{-2}$ et $y = -a$, $x = -a\sqrt{-2}$. Si on avait supprimé le facteur

$a+y$ commun aux deux termes de x, rien n'aurait indiqué l'existence de ces deux couples de valeurs.

La valeur $y=0$ donnant aussi $x=\frac{0}{0}$, il semblerait que plusieurs valeurs de x correspondent à la valeur o de y; mais cela n'est pas, car après avoir fait $y=0$ dans les deux équations proposées, on trouve que le plus grand commun diviseur entre les deux polynomes résultans est x, et que par conséquent $y=0$ ne donne que la seule valeur $x=0$.

Cela vient de ce qu'au fond x n'est pas $\frac{0}{0}$, lorsque $y=0$; car si l'on substituait les valeurs de e, e', p', q', r dans la 2^{me} formule (4), elle deviendrait $x=\frac{6ay(a+y)}{2a(a+y)}$, formule qui se réduit à $x=0$, quand $y=0$.

Si l'on avait supprimé les facteurs communs, on aurait eu ou $x=3y$ ou $x=\frac{2}{3}a$ pour toutes les valeurs de y; ce qui est absurde, comme on vient de le voir, et comme on l'a d'ailleurs démontré (281).

284. Considérons actuellement les deux équations générales du second degré

$$x^2+px+q=0 \quad \text{et} \quad x^2+p'x+q'=0, \ldots (5)$$

Pour avoir les formules qui résolvent ces équations, il suffit de faire $r=0$ dans les équations (3) et (4) : on trouvera alors

$$e'^2+e(pq'-qp')=0, \quad x=-\frac{e'}{e} \quad \text{et} \quad x=\frac{eq'}{e'-ep'} \cdots (6)$$

La première de ces formules est l'équation finale en y; elle fera donc connaître les valeurs de cette inconnue; et chacune des 2 autres équations donnera les valeurs correspondantes de x.

285. Par exemple, qu'on ait les deux équations

$$x^2+(\tfrac{3}{2}y-y^2)x-\tfrac{3}{2}y^3=0$$
$$x^2+(3-2y)x-6y=0.$$

Dans ce cas, $p=-\frac{1}{2}y(2y-3)$, $q=-\frac{3}{2}y^3$, $p'=-(2y-3)$, $q'=-6y$, $e=\frac{1}{2}(2y-3)(2-y)$ et $e'=\frac{3y}{2}(4-y^2)$. Substituant ces valeurs dans les deux premières formules (6), on trouvera aisément

$$y^2(2-y)^2(y^2+3)=0 \quad \text{et} \quad x=-\frac{3y(2-y)(2+y)}{(2-y)(2y-3)}.$$

La première de ces équations donne

$$y=0,\ y=0,\ y=2,\ y=\sqrt{-3} \text{ et } y=-\sqrt{-3};$$

la seconde fournit, en rendant rationnels les dénominateurs,

$$x=0,\ x=\tfrac{0}{0},\ x=-3 \text{ et } x=-3.$$

On voit qu'il y a plusieurs valeurs de x qui répondent à $y=2$. Or, cette valeur 2 de y réduisant chacune des équations proposées à $x^2+x-12=0$, (d'où $x=2$ et $x=-3$), il y a deux valeurs de x qui correspondent à $y=2$.

Les deux équations proposées pourraient aussi se résoudre par substitution (60).

286. Prenons encore les deux équations du troisième degré

$$x^3+px^2+qx+r=0 \text{ et } x^3+p'x^2+q'x+r'=0.$$

Si on applique la méthode d'Euler, et que pour abréger, on fasse toujours $p-p'=e$, $q-q'=e'$ et $r-r'=e''$, on aura d'abord les cinq équations

$$\begin{aligned}
&a-a'=e\\
&p'a-pa'+b-b'=e'\\
&q'a-qa'+p'b-pb'=e''\\
&r'a-ra'+q'b-qb'=0\\
&r'b-rb'=0.
\end{aligned}$$

Prenant les valeurs de a' et b' dans la première et la dernière de ces équations, puis substituant dans les trois autres; substituant aussi dans la troisième des équations résultantes, les valeurs de a et b tirées des deux autres, et réduisant, il viendra, pour déterminer y, l'équation

$$\left.\begin{aligned}
&(rq'-qr')\left[e'(e'-ep)-e(e''-eq)\right]+ree'e''-\\
&(rp'-pr')\left[e''(e'-ep)+re^2\right]+e''^2(e''-eq)=0
\end{aligned}\right\}\cdots(7)$$

Quant aux valeurs de x, on les aura par la formule

$$x=\frac{e'(rp'-pr')-e''(e''-eq)-pe'e''}{e'e''-e(rp'-pr')}\cdots(8).$$

Lorsqu'on fait $r'=0$ dans les formules (7) et (8), on retrouve la formule (3) et la seconde formule (4).

287. Pour appliquer les formules (7) et (8), soient les deux équations

$$\begin{aligned}
&x^3-2yx^2-4x+8y=0\\
&x^3+2yx^2-yx-2y^2=0.
\end{aligned}$$

Il est clair qu'ici $p=-2y$, $q=-4$, $r=8y$, $p'=2y$, $q'=-y$, $r'=-2y^2$, $e=-4y$, $e'=y-4$, $e''=2y^2+8y$, $e'-ep=y-4-8y^2$, $e''-eq=2y^2-8y$, $p'r-pr'=16y^2-4y^3$, $q'r-qr'=-16y^2$. Substituant ces valeurs dans (7), et réduisant, on trouvera

$$16y^2(4y^5-33y^4+68y^3+17y^2-72y+16)=0.$$

Les mêmes valeurs substituées dans (8) fournissent

$$x=\frac{16y^3-2y^4-32y^2}{33y^3-8y^4-16y}.$$

L'équation finale en y étant résolue, donnera

$$y=0,\ y=0,\ y=1,\ y=-1,\ y=\tfrac{1}{4} \text{ et } y=4;$$

les valeurs correspondantes de x seront :

$$x=\tfrac{0}{0},\ x=\tfrac{0}{0},\ x=-2,\ x=2,\ x=\tfrac{1}{2} \text{ et } x=\tfrac{0}{0}.$$

Il n'y a pas plusieurs valeurs de x qui répondent à chacune des valeurs 0 de y; car lorsque $y=0$, le plus grand commun diviseur des premiers membres des équations proposées est x, et par conséquent on a seulement $x=0$, quand $y=0$. A l'égard de $y=4$, comme alors le plus grand commun diviseur est x^2-4, il y a deux valeurs de x qui répondent à la valeur 4 de y. De sorte que les équations proposées admettent les 7 solutions que voici :

$$\begin{aligned} y&=0,\ 0,\ +1,\ -1,\ +\tfrac{1}{4},\ +4,\ +4,\\ x&=0,\ 0,\ -2,\ +2,\ +\tfrac{1}{2},\ +2,\ -2.\end{aligned}$$

En résolvant les équations proposées par substitution, l'équation finale en x serait du septième degré. Mais on parvient à résoudre très-facilement les mêmes équations, en cherchant à les décomposer en facteurs; car on trouve sans peine qu'elles se réduisent à celles-ci :

$$(x-2y)(x^2-4)=0 \text{ et } (x^2-y)(x+2y)=0.$$

Si donc on combine chacun des facteurs de la 1re, égalés à zéro, avec chacun des facteurs de la seconde, égalés aussi à zéro, on retrouvera les sept solutions précédentes.

288. De tout ce qui précède, il est aisé de conclure que les méthodes particulières d'élimination peuvent l'emporter en simplicité sur les méthodes générales. Aussi ne doit-on employer ces dernières, que quand les équations à résoudre n'offrent point

de simplifications dont on puisse profiter; ce que l'habitude du calcul, éclairée par les nombreux exemples que nous avons considérés, peut seule faire connaître. Il convient d'autant mieux de s'exercer à ces procédés particuliers, que la méthode l'Euler, d'ailleurs quelquefois plus simple que celle du plus grand commun diviseur, exige déjà, pour les équations complètes du troisième degré, des calculs fort longs; et pour les degrés plus élevés, ces calculs deviennent impraticables.

Problèmes résolubles par des séries dont les sommes dépendent des progressions.

289. *On forme une série avec les nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de* m *chiffres, en écrivant chaque nombre autant de fois de suite qu'il renferme d'unités. On demande la valeur de tous les nombres que donnent les termes de cette série, en ajoutant dans chacun, les chiffres considérés comme exprimant des unités simples* (*).

Pour bien comprendre la solution de ce problème, considérons d'abord les nombres de trois chiffres, et soient a, b, c, les chiffres de l'un quelconque de ces nombres, lequel vaut par conséquent

$$100a + 10b + c.$$

Comme ce nombre est écrit autant de fois qu'il a d'unités pour former un terme de la série proposée, la somme des chiffres de ce terme sera $a + b + c$ pris autant de fois que le nombre est écrit; cette somme sera donc

$$(100a + 10b + c)(a + b + c), \text{ ou bien}$$
$$100a^2 + 110ab + 10b^2 + 101ac + 11bc + c^2.$$

(*) Voici un problème qui a de l'analogie avec celui qu'on vient de lire, mais qui est fort loin de pouvoir se résoudre de la même manière :

On forme une série avec les nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de m chiffres, en écrivant chaque nombre à la suite de tous les inférieurs, placés les uns à la droite des autres. On demande la somme des nombres fournis par les termes de cette série, en ajoutant dans chacun, les chiffres considérés comme exprimant des unités simples.

J'ai vainement cherché la solution générale de ce problème; et je ne le rapporte ici que parce qu'il offre de l'intérêt et que probablement beaucoup de lecteurs sauront éluder ou vaincre les difficultés qui m'ont arrêté.

Or, si dans cette expression, l'on prend successivement $c=$ 0, 1, 2, 3, 4, ..., 9 et qu'on ajoute entre eux les 10 résultats; que dans la somme on donne à b les valeurs successives 0, 1, 2, 3, ..., 9, et qu'on réunisse les 10 résultats entre eux; qu'enfin, dans la dernière somme, on prenne successivement $a=1$, 2, 3, 4, ..., 9, et qu'on fasse la somme des 9 résultats, il est visible que cette somme sera la valeur t_3 de toutes les sommes obtenues en additionnant les chiffres, comme exprimant des unités simples, dans chacun des termes de la série, qui sont donnés par tous les nombres depuis 100 jusqu'à 999 inclusivement. Si donc on pose, pour abréger

$$h=1+2+3+4+\cdots+9=45,$$
$$k=1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2=15.19,$$

on trouvera, en opérant comme il vient d'être dit,

$$t_3=10990k+2209h^2.$$

Les calculs précédens donneront successivement les valeurs t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, etc., de toutes les sommes fournies par les termes de la série proposée qui sont donnés par tous les nombres de 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. chiffres : on obtiendra

$$\begin{aligned}
t_1 &= k\\
t_2 &= 109k+11h^2\\
t_3 &= 10990k+2209h^2\\
t_4 &= 1099900k+331080h^2\\
t_5 &= 109999000k+44110700h^2\\
t_6 &= 10999990000k+5511106000h^2\\
&\text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La loi des premiers termes de ces expressions est facile à saisir; mais il n'en est pas de même de celle des derniers : heureusement, les valeurs précédentes en fournissent d'autres, qui conduisent aisément à la solution cherchée. En effet, soient x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, etc., les sommes des nombres fournis par les termes de la série, depuis le premier 1 jusqu'à celui donné par le plus grand nombre de 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. chiffres; d'après les valeurs précédentes, il est clair qu'on aura

$$x_1 = k$$
$$x_2 = 110k + 11h^2$$
$$x_3 = 11100k + 2220h^2$$
$$x_4 = 1111000k + 33330oh^2$$
$$x_5 = 111110000k + 44444000h^2$$
$$x_6 = 11111100000k + 5555550000h^2$$
etc. ....

La loi de ces valeurs est évidente; et si l'on désigne par 1 (m) *fois* le nombre composé de m chiffres 1, on aura, d'après l'induction,

$$x_m = 1\,(m)\,fois \times 10^{m-1}k + (m-1) \times 1\,(m)\,fois \times 10^{m-1}h^2.$$

Mais $1\,(m)\,\text{fois} = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{m-1} = \frac{1}{9}(10^m - 1)$.

Substituant cette valeur, ainsi que celles de h et k, on trouvera, réductions faites,

$$x_m = \tfrac{1}{12}(27m + 11)(10^m - 1)\,10^m.$$

290. *Les nombres étant écrits avec* u *chiffres désignés, on demande,* 1° *le nombre* p_m *de tous les nombres de* m *de ces* u *chiffres;* 2° *la somme* x_m *de tous les nombres de* m *chiffres;* 3° *la somme* y_m *de tous les nombres, depuis le plus petit de* 1 *chiffre jusqu'au plus grand de* m *chiffres.*

1° Si à la droite de chacun des p_v nombres de v chiffres, on écrit successivement chacun des u chiffres, on aura up_v nombres de $v+1$ chiffres; et ce sera tous ceux que l'on peut former avec les u chiffres donnés; car chaque nouveau nombre de $v+1$ chiffres, que l'on voudrait écrire avec les u chiffres proposés, serait nécessairement un nombre de v chiffres, suivi de l'un des u chiffres; il serait par conséquent l'un des nombres de $v+1$ chiffres, déjà formés. Ainsi on a, pour le nombre p_{v+1} de tous les nombres de $v+1$ chiffres,

$$p_{v+1} = up_v.$$

Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, m-1$, puis multipliant entre elles les $m-1$ équations résultantes, on aura, réductions faites,
$$p_m = p_1 u^{m-1}.$$

2° La somme de tous les nombres de v chiffres étant désignée par x_v, soit h un de ces nombres de v chiffres : en écrivant à la droite de h le chiffre 2, par exemple, le nombre de $v+1$ chiffres qui en proviendra, vaudra $10h+2$. De sorte que si à la droite de chacun des $p_1 u^{v-1}$ nombres de v chiffres (1°), on écrit le chiffre 2, la somme des nombres résultans de $v+1$ chiffres, aura pour valeur $10x_v + 2.p_1 u^{v-1}$.

On aurait une expression semblable pour chacun des u chiffres proposés; si donc on désigne par a la somme de ces u chiffres, il viendra, pour la somme x_{v+1} de tous les nombres de $v+1$ des mêmes chiffres,

$$x_{v+1} = 10ux_v + ap_1 u^{v-1}.$$

Préparant cette équation pour la résoudre par addition, elle deviendra

$$\left(\frac{1}{10u}\right)^{v+1} x_{v+1} - \left(\frac{1}{10u}\right)^{v} x_v = \frac{ap_1}{10u^2}.10^{-v}.$$

Faisant successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, m-1$; ajoutant entre elles les équations résultantes, réduisant et observant que $x_1 = a$, on aura

$$\left(\frac{1}{10u}\right)^{m} x_m - \frac{a}{10u} = \frac{ap_1}{10u^2}(10^{-1}+10^{-2}+10^{-3}+\cdots+10^{-m+1});$$

d'ou $$x_m = \frac{a}{9u}\left[(9u+p_1)(10u)^{m-1} - p_1 u^{m-1}\right].$$

3° Prenant dans cette formule, successivement $m=1, 2, 3, 4, \ldots, m$; ajoutant et faisant la somme des nombres en progression géométrique, on trouvera, pour la somme y_m de tous les nombres entiers depuis o jusqu'au plus grand de m chiffres, écrits avec les u chiffres proposés,

$$y_m = \frac{a}{9u}\left[(9u+p_1)\frac{(10u)^m - 1}{10u-1} - p_1\frac{u^m-1}{u-1}\right].$$

Les valeurs générales de p_m, x_m et y_m fourniront aisément celles qui répondent aux cas où l'on prend les dix chiffres ordinaires, les 9 chiffres significatifs, les 5 chiffres impairs, les 4 chiffres pairs; les 3 chiffres 2, 4, 8; etc. Par exemple, pour les dix chiffres ordinaires, $u=10$, $p_1=9$, $a=45$; d'où résultent $p_m = 9.10^{m-1}$,

$$x_m = 45.10^{m-2}(11.10^{m-1}-1) \text{ et } y_m = \frac{10^m}{2}(10^m-1).$$

291. *Considérant les nombres écrits avec* u *des chiffres ordinaires; soit pris un de ces nombres de* m *chiffres, et soit*

posée une addition, en écrivant les uns sous les autres et en avançant chaque fois d'un rang vers la droite, le 1^{er} *chiffre à gauche du nombre de* m *chiffres, la somme des deux premiers, celles des* 3, *des* 4, ..., *des* m — 1 *premiers,* v *fois successives la somme des* m *chiffres, puis la somme des* m — 1 *derniers, celles des* m — 2, ..., *des* 3, *des* 2 *derniers et le dernier lui-même. La somme de tous les nombres ainsi disposés sera divisible par le nombre proposé, et donnera un quotient de* m + v — 1 *chiffres* 1. *Ayant formé avec chacun des nombres de* m *chiffres, les* n + 1 *sommes qui répondent successivement à* v = 0, 1, 2, 3, 4, ..., n, *on demande,* 1° *la valeur* P *de toutes les sommes fournies de cette manière par tous les nombres de* m *des* u *chiffres désignés;* 2° *la valeur* Q *de toutes les sommes que l'on peut ainsi produire avec tous les nombres entiers, depuis le plus petit d'un chiffre jusqu'au plus grand de* m *des chiffres proposés;* 3° *le nombre* R *d'additions à faire et le nombre* S *de tous les nombres à écrire pour avoir toutes les sommes qui entrent dans la valeur de* Q.

1° Soient conservées les dénominations du problème du précédent n°, et soient A, B, C, D, E, etc., les nombres de m chiffres, écrits avec les u chiffres désignés; on aura évidemment

$$x_m = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D} + \mathrm{E} + \cdots.$$

Représentons par $1\,(v)$*fois*, le nombre composé de v chiffres 1, de manière, par exemple, que $1111 = 1\,(4)$*fois*; d'après l'énoncé précédent, le nombre A de m chiffres, donne $n+1$ sommes toutes divisibles par A, et dont les quotiens respectifs sont :

$$1\,(m-1)\textit{fois},\ 1\,(m)\textit{fois},\ 1\,(m+1)\textit{fois},\ \ldots,\ 1\,(m+n-1)\textit{fois};$$

de sorte que la valeur de toutes les sommes fournies par A, est

$$\mathrm{A}\left[1\,(m-1)\textit{fois} + 1\,(m)\textit{fois} + 1\,(m+1)\textit{fois} + \cdots + 1\,(m+n-1)\textit{fois}\right].$$

Pour avoir la valeur du multiplicateur de A, on observe que

$$1\,(v)\textit{fois} = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{v-1} = \tfrac{1}{9}(10^v - 1).$$

Prenant successivement $v = m-1,\ m,\ m+1,\ m+2,\ \ldots,\ m+n-1$, et ajoutant, la somme sera le multiplicateur ω de A; on aura donc, réductions faites,

$$\omega = \tfrac{1}{81}.10^{m-1}(10^{n+1} - 1) - \tfrac{1}{9}(n+1).$$

Cela posé, puisque la valeur de toutes les sommes fournies par A, est $A\omega$; de même, les valeurs des sommes fournies respectivement par A, B, C, D, ..., sont $B\omega$, $C\omega$, $D\omega$, etc. On a par conséquent

$$P = \omega(A + B + C + D + \cdots), \text{ ou } P = \omega x_m,$$

la valeur de x_m étant celle du numéro précédent.

2° Faisant successivement $m = 1, 2, 3, 4, \ldots, m$, dans la valeur de P; ajoutant et opérant comme au n° 290, 3°, on verra que la valeur Q de toutes les sommes fournies par tous les nombres entiers, depuis le plus petit d'un chiffre jusqu'au plus grand de m des u chiffres, se réduit à

$$Q = \omega y_m,$$

y_m ayant la valeur calculée au n° 290.

3° Il est clair que chaque nombre d'un chiffre fournit $n - 1$ additions, et qu'ainsi les p_1 nombres d'un chiffre fournissent $p_1(n - 1)$ additions. Quant à ceux de plusieurs chiffres, comme chaque nombre de m chiffres fournit $n + 1$ additions, les p_1u^{m-1} en fourniront $(n + 1)p_1u^{m-1}$. Prenant successivement $m = 2, 3, 4, 5, \ldots, m$, et ajoutant avec $p_1(n - 1)$, on aura

$$R = p_1(n - 1) + (n + 1)p_1(u + u^2 + u^3 + \cdots + u^{m-1}),$$

$$\text{d'où } R = p_1(n - 1) + (n + 1)p_1\frac{u^m - u}{u - 1}.$$

D'un autre côté, il est aisé de voir que pour obtenir les sommes fournies par chaque nombre d'un chiffre, il faut écrire

$$1 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n + 1), \text{ ou } \tfrac{1}{2}n(n + 3) - 1 \text{ nombres};$$

donc, pour avoir toutes les sommes fournies par tous les nombres d'un chiffre, il faudra écrire $\frac{1}{2}p_1n(n + 3) - p_1$ nombres.

A l'égard des nombres de m chiffres, il est clair que pour faire l'addition où la somme des m chiffres est placée v fois, il faut écrire

$$m - 1 + v + m - 1 + 1, \text{ ou } 2m - 1 + v \text{ nombres}.$$

Prenant successivement $v = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$, et ajoutant, on verra que pour former toutes les sommes fournies par un nombre de m chiffres, il faut écrire $(2m - 1)(n + 1) + \frac{1}{2}n(n + 1)$, ou $2(n + 1)m - \frac{1}{2}(n + 1)(n - 2)$ nombres : donc, pour former toutes les sommes fournies par tous les nombres de m chiffres, il faudra écrire

$2p_1(n+1)mu^{m-1} - \frac{1}{2}(n+1)(n-2)p_1u^{m-1}$ nombres.

Posant successivement $m = 2, 3, 4, 5, \ldots, m$, et ajoutant avec $\frac{1}{2}p_1n(n+3) - p_1$, il viendra

$$S = \begin{cases} 2p_1(n+1)[2u + 3u^2 + 4u^3 + \cdots + mu^{m-1}] \\ -\frac{1}{2}(n+1)(n-2)p_1(u+u^2+u^3+\cdots+u^{m-1}) \\ +\frac{1}{2}p_1n(n+3) - p_1; \end{cases}$$

d'où l'on tire aisément

$$S = \begin{cases} 2p_1(n+1)\left[\frac{mu^m - u}{u-1} - \frac{u^m - u}{(u-1)^2}\right] - p_1 \\ -\frac{1}{2}(n+1)(n-2)p_1\frac{u^m - u}{u-1} + \frac{1}{2}n(n+3)p_1. \end{cases}$$

292. *Tous les nombres entiers consécutifs, exprimés avec les* 10 *chiffres ordinaires, étant écrits les uns à la suite des autres, de cette manière :*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 etc.;

on demande d'assigner le chiffre z *qui occupe le rang* R *dans la suite résultante, sans être obligé d'écrire ceux qui le précèdent.*

Puisqu'il y a 9.10^{v-1} nombres de v chiffres (290), il est clair que pour écrire tous ces nombres, il faudra $9v.10^{v-1}$ chiffres. Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, m$, et ajoutant, la somme sera le nombre t de chiffres qu'il faut pour écrire la suite des nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de m chiffres; il viendra donc, après les réductions faites,

$$t = m.10^m - \frac{10^m - 1}{9}.$$

De là, si l'on fait $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, etc., on aura

$$t = 9,\ 189,\ 2889,\ 38889,\ 488889,\ 5888889, \text{ etc.}$$

Par ces valeurs on voit que pour écrire, par exemple, tous les nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de 5 chiffres, il faut employer 488889 chiffres.

Il est maintenant facile de résoudre le problème proposé; car si le rang R du chiffre cherché z est, par exemple, 50640; alors, comme pour écrire tous les nombres de 4 ou 5 chiffres, il faut 38889 ou 488889 chiffres, on voit que le chiffre demandé z appartient à un nombre de 5 chiffres. Et puisque 50640 —

$38889 = 11751$, il est clair que z est le 11751^{me} dans les nombres de 5 chiffres. Or, 11751 chiffres contiennent 5 chiffres, 2350 fois, avec le reste 1 ; ce qui fait voir que z est le premier à gauche du 2351^{me} nombre de 5 chiffres. Mais les nombres de 5 chiffres forment la progression arithmétique 10000, 10001, 10002, 10003, ..., dont le 2351^{me} terme est $10000 + 2350$ ou 12350. Ainsi le 2351^{me} nombre de 5 chiffres est 12350, et par conséquent $z = 1$.

Il résulte de ces calculs, que pour avoir le chiffre z qui occupe le rang R dans la suite proposée, il faut recourir aux valeurs successives du nombre t de chiffres employés pour écrire tous les nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de m chiffres inclusivement ; prendre la valeur t' de t, immédiatement inférieure à R, ainsi que la valeur m' de m, qui correspond à t'; retrancher t' de R, et diviser la différence par $m' + 1$, ce qui donnera un quotient q et un reste r' ; ajouter q à 1 *suivi de* m' *zéros*, et le r'ième chiffre à gauche de la somme résultante, sera le chiffre demandé z. Si r' était nul, le premier chiffre de la somme $q - 1 + 1$ *suivi de* m' *zéros*, serait le chiffre z.

De cette manière, si $R = 6192$, on aura $z = 2$; si $R = 3157$, il viendra $z = 6$; et si $R = 59439$, on trouvera $z = 9$.

293. *Trouver le nombre* x *de chiffres qu'il faut pour écrire la série formée en plaçant les uns à la droite des autres le premier nombre entier, les 2 premiers, les 3 premiers, les 4 premiers, ..., et enfin, tous les nombres entiers, jusqu'au plus grand de* m *chiffres.*

Soient t_v et t_{v+1} les nombres de chiffres qu'il faut pour écrire les deux termes de la série, qui sont terminés par les plus grands nombres de v et de $v + 1$ chiffres ; il est aisé de voir que le nombre total de chiffres employés à écrire les termes terminés par les $9 . 10^v$ nombres de $v + 1$ chiffres, est

$$[t_v + (v + 1)] + [t_v + 2(v + 1)] + [t_v + 3(v + 1)] \\ + [t_v + 4(v + 1)] + \cdots + [t_v + 9 . 10^v (v + 1)] ;$$

ou bien encore, en réduisant,

$$9 . 10^v t_v + \tfrac{9}{2} . 10^v (9 . 10^v + 1) \cdots (1)$$

On a d'ailleurs $t_{v+1} = t_v + 9(v + 1) . 10^v$. Cette équation servirait à trouver t_v ; mais on y parvient immédiatement, en observant que t_v étant le nombre de chiffres qu'il faut pour écrire tous les nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de v chiffres, on a, d'après ce qui précède (292),

$$t_v = v.10^v - \frac{10^v - 1}{9}.$$

Cette valeur de t_v, substituée dans l'expression (1), la réduit à

$$\tfrac{99}{2}.v.10^{2v} + \tfrac{79}{2}.10^{2v} + \tfrac{9}{2}.v.10^v + \tfrac{11}{2}.10^v.$$

Prenant successivement $v = 0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$, on aura successivement les nombres de chiffres qu'il faut pour écrire les termes de la série, depuis 1 jusqu'à celui terminé par le plus grand nombre de 1, 2, 3, 4, ..., m chiffres; la somme des résultats sera donc le nombre x demandé. Ainsi, en réduisant, on trouvera

$$x = \tfrac{5}{99}[(99m-20)10^{2m-1} + 11(9m-1)10^{m-1} - 11].$$

294. *Trouver la somme* x *des nombres que fournit la suite des nombres entiers, depuis* 1 *jusqu'au plus grand de* m *chiffres, en prenant, dans chacun, la somme des chiffres regardés comme exprimant des unités simples.*

Soient S_v et S_{v+1} les sommes des nombres fournis ainsi par la suite des nombres de v et de $v+1$ chiffres : si à côté de chacun des 9.10^{v-1} nombres de v chiffres, on écrit successivement chacun des 10 chiffres, la somme des nombres fournis par tous les nombres de $v+1$ chiffres qui en résultent, sera

$$S_{v+1} = 10S_v + 9.45.10^{v-1}.$$

Cette équation donne aisément

$$S_v = \tfrac{9}{2}(11.10^{2v-2} - 10^{v-1}).$$

Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, m$, et ajoutant, il viendra

$$x = 5.10^{m-1}(10^m - 1).$$

295. Voici plusieurs problèmes à résoudre :

Trouver la somme de tous les nombres qu'on obtient en écrivant chacun des nombres de m chiffres, autant de fois qu'il a d'unités.

On demande la formule pour calculer la somme des n premiers termes de chacune des séries :

17, 277, 3777, 47777, 577777, 6777777, etc.
18, 3888, 588888, 78888888, 9888888888, etc.

En général, a étant un nombre de m chiffres, on demande la formule pour calculer la somme des n premiers termes de la série, dont le v^{me} terme est le nombre v suivi de a écrit v fois de suite. [Le v^{me} terme pourrait être le nombre impair $2v-1$ suivi de a écrit $2v-1$ fois successives : on peut trouver aussi la valeur de tous les chiffres considérés comme exprimant des unités simples.]

A la suite des 9 chiffres significatifs écrits v fois, on place successivement les 1, 2, 3, 4, ..., 9 premiers chiffres ; ce qui fournit 9 termes pour chaque valeur de v. On demande, 1° la somme de tous les termes ainsi formés qui répondent aux valeurs de v, depuis 0 jusqu'à m ; 2° le nombre total de chiffres qu'il faut pour écrire tous ces termes ; 3° enfin la valeur de toutes les sommes qu'on obtient en additionnant, dans chacun des mêmes termes, les chiffres considérés comme exprimant des unités simples ?

Trouver la somme de tous les termes formés avec les nombres de m chiffres, en écrivant successivement le premier de ces nombres, les 2 premiers, les 3 premiers, ..., et enfin tous les mêmes nombres.

On forme une série avec les nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de m chiffres, en écrivant chaque nombre à la droite de celui qui est immédiatement plus petit. On demande, 1° la somme de tous les termes de la série ; 2° la valeur de tous les nombres obtenus en prenant, dans chaque terme de cette série, la somme des chiffres, considérés comme exprimant des unités simples ; 3° enfin le nombre total de chiffres employés pour écrire la série proposée.

On écrit un nombre donné a à la droite de chacun des nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de m chiffres ; on demande, 1° la somme de tous les termes de la série résultante ; 2° la valeur de toutes les sommes qu'on trouve en additionnant, dans chaque terme, les chiffres considérés comme exprimant des unités simples.

Trouver combien il faut de chiffres pour composer une table de logarithmes, depuis 1 jusqu'à 10^n, inclusivement, n étant < 10 et les logarithmes ayant p décimales.

Trouver combien il faut de chiffres pour écrire la série formée avec les nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de m chiffres, en plaçant chaque nombre autant de fois qu'il a d'unités.

Combien faut-il de chiffres pour écrire la série formée avec les nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de m chiffres, en plaçant chaque nombre à la droite de celui moindre d'une unité ?

Soient tous les nombres entiers que l'on peut écrire avec u des chiffres ordinaires ; soit un de ces nombres de m chiffres ; soient placés les uns sous les autres, et en avançant chaque fois de k rangs vers la droite, le nombre proposé, puis successivement son double, son triple, son quadruple, ..., son produit par v, et soit prise la somme de tous les nombres ainsi disposés. Ayant formé ainsi, avec chaque nombre de m des u chiffres, les n sommes qui répondent à $v = 1, 2, 3, 4, ..., n$, on demande, 1° la valeur P de toutes les sommes formées de cette manière avec tous les nombres de m chiffres ; 2° la valeur Q de toutes les sommes que l'on peut ainsi produire avec tous les nombres entiers, depuis le plus petit d'un jusqu'au plus grand de m des u chiffres proposés ; 3° le nombre R des opérations à faire pour avoir ces dernières sommes ; 4° enfin, le nombre S de tous les nombres à écrire pour former les mêmes sommes, en supposant qu'on écrive les nombres et le résultat de chaque opération. [On pourrait écrire les uns sous les autres et en avançant chaque fois de k rangs vers la droite, le nombre proposé, puis successivement ce nombre augmenté de φ, de 2φ, de 3φ, ..., de $v\varphi$.]

De quelques séries infinies.

296. Lorsque l'exposant m est un nombre entier positif, il est démontré, dans tous les traités d'algèbre, que

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\text{etc.} \quad \text{(C)}$$

Voyons si cette formule est exacte lorsque m est un nombre quelconque, positif ou négatif. A cet effet, considérons les v séries indéfinies

$$a' = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{1.2}x^2 + \text{etc.}$$

$$b' = 1 + bx + \frac{b(b-1)}{1.2}x^2 + \text{etc.}$$

$$c' = 1 + cx + \frac{c(c-1)}{1.2}x^2 + \text{etc.}$$

....

$$k' = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{1.2}x^2 + \text{etc.}$$

Dans ces v valeurs, les nombres a, b, c, ..., k, sont quelconques, mais tous sous la forme positive. Si l'on conçoit que le produit $a'b'c' \ldots k'$ de ces v valeurs soit ordonné par rapport aux puissance ascendantes de x ; qu'ensuite on y suppose entiers et réellement positifs tous les nombres a, b, c, ..., k ; ce produit, d'après la formule (C), aura alors pour facteurs

$$(1+x)^a,\ (1+x)^b,\ (1+x)^c,\ \ldots,\ (1+x)^k;$$

de sorte que si l'on fait $a+b+c+\cdots+k=r$, on aura

$$a'b'c' \ldots k' = (1+x)^r.$$

Et puisqu'on vient de supposer entiers et réellement positifs les nombres a, b, c, ..., k, il s'ensuit que r est aussi un nombre entier positif, et qu'ainsi on a

$$a'b'c' \dots k' = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{1.2} x^2 + \text{etc.} \dots (1)$$

Or, il est évident que *si le produit* a'b'c' ... k' *a une certaine forme lorsque* a, b, c, ... k *sont des nombres quelconques, il conservera la même forme quand* a, b, c, ... k *deviendront des nombres entiers indéterminés, sans changer de signes;* car il est visible qu'alors il n'y aura pas de nouvelles réductions dans ce produit, et que par suite sa forme restera la même. Donc le probuit $a'b'c' \dots k'$ avait la forme (1) avant d'y supposer entiers et réellement positifs les nombres a, b, c, ..., k. De sorte que quels que soient ces nombres, le produit $a'b'c' \dots k'$ aura toujours la forme (1).

Cela posé, si l'on suppose égaux entre eux les v nombres positifs quelconques $a, b, c, \dots, k$, on aura $r = a + b + c + \dots + k = va$; puis $a' = b' = c' = \dots = k'$ et $a'b'c' \dots k' = a'^v$. D'ailleurs, en prenant a égal à la fraction positive $\frac{u}{v}$, il viendra $r = va = u$, nombre entier positif; donc le second membre de l'identité (1) est le développement de $(1+x)^u$; déjà le premier membre vaut a'^v; donc $(1 + x)^u = a'^v$, ou $(1 + x)^{\frac{u}{v}} = a'$. Si donc on remplace, dans l'expression de a', le nombre a par sa valeur $\frac{u}{v}$, on aura

$$(1 + x)^{\frac{u}{v}} = 1 + \frac{u}{v} x + \frac{\frac{u}{v}\left(\frac{u}{v} - 1\right)}{1.2} x^2 + \text{etc.} \dots (2)$$

Or, ce résultat est ce que devient la formule (C) du binome, quand on y change l'exposant m en $\frac{u}{v}$. Cette formule est donc vraie lorsque l'exposant m est un nombre fractionnaire positif.

Je dis aussi que la même formule a lieu quand l'exposant m est un nombre quelconque négatif. En effet, la formule (1) n'est démontrée que pour les cas où les nombres a, b, c, ..., k, ont une forme positive. Mais cette forme positive existe encore lorsqu'on suppose que b représente le nombre négatif $-p$, p étant entier ou fractionnaire; car dans la multiplication de a' par b', on n'a considéré que b et non pas $-p$; et d'ailleurs les règles de cette multiplication demeurent les mêmes, soit que b représente un nombre positif, soit que b représente un nombre négatif

$-p$. Ainsi l'identité (1) est vraie encore quand on y fait $b = -p$. Si donc on pose en même temps $a = p$, $c = 0$, $d = 0$, ..., $k = 0$, ce qui donne $c' = 1$, $d' = 1$, ..., $k' = 1$ et $r = a + b = p - p = 0$, l'identité (1) deviendra $a'b' = 1$. Remplaçant dans a', la quantité a par sa valeur p, on verra par les formules (C) et (2), que $a' = (1+x)^p$. Donc l'équation $a'b' = 1$, donne $b' = (1+x)^{-p}$. Changeant donc b en $-p$, dans b', on trouvera

$$(1+x)^{-p} = 1 - px + \frac{p(p+1)}{1.2}x^2 - \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$$

Or, ce résultat est ce que devient la formule (C) du binome, lorsqu'on y change l'exposant m en $-p$. Par conséquent cette formule est vraie quand l'exposant m est un nombre quelconque négatif (*).

(*) Si l'on fait $a + x = 1 - z$ et $m = -1$, le binome de Newton donnera, pour la puissance -1 de $1 - z$, une valeur qu'on trouverait aussi en divisant 1 par $1 - z$. De sorte que le binome de Newton est vrai lorsque l'exposant $m = -1$. S'il était vrai encore quand l'exposant m est un nombre entier négatif $-u$, il donnerait une formule que, pour abréger, nous représenterons par

$$(1 - z)^{-u} = 1 + uz + c_2z^2 + \cdots + c_nz^n + \text{etc.} \ldots (1)$$

Divisant les deux membres de cette équation par $1 - z$, on aura une équation (2) dont le premier membre sera la puissance $-(u+1)$ de $1 - z$; et dans le second membre, *le coefficient d'une puissance de z, sera la somme des coefficiens de cette puissance et de toutes les puissances inférieures dans le dividende.* Et en effet, il est aisé de voir que cette loi ayant lieu pour le $n$ième terme du quotient, aura lieu aussi pour le suivant; et que par conséquent elle est générale. De sorte que le $(n+1)$ième terme du second membre de l'équation (2) est

$$(1 + u + c_2 + c_3 + \cdots + c_n)\, z^n.$$

Substituant et réduisant d'après la première formule (131), où $c = 1$, on verra que le $(n+1)$ième terme de la puissance $-(u+1)$ de $1 - z$ est ce que devient le $(n+1)^{me}$ terme du binome de Newton, lorsqu'on y change l'exposant m en $-(u+1)$. D'où il suit que, *si le binome de Newton est vrai lorsque l'exposant* m $= -$u, *il sera vrai aussi lorsque l'exposant* m *vaudra* $-(u+1)$. Or, le binome de Newton est vrai lorsque l'exposant $m = -1$; donc il sera vrai aussi lorsque l'exposant $m = -2$. Etant vrai pour $m = -2$, il sera vrai aussi pour $m = -3$, pour $m = -4$, $m = -5$, et en général, pour toutes les valeurs négatives entières de l'exposant m. Et l'on doit bien observer que cette conclusion aurait encore lieu, si le binome était $1 + x$; car les raisonnemens précé-

La formule du binome étant ainsi démontrée pour tous les cas où l'exposant est un nombre commensurable, positif ou négatif, aura lieu encore quand l'exposant sera irrationnel; et la généralité de l'algèbre conduit à faire usage de la même formule, lorsque l'exposant est imaginaire.

On doit observer d'ailleurs que quand l'exposant m n'est pas un nombre entier positif, le second membre de la formule (C) est composé d'une infinité de termes, car aucun des coefficiens en m ne devient nul.

297. Les séries binomiales conduisent aux séries *exponentielles*, et voici comment : soit e la valeur de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, lorsque n est infini, et soit élevé de part et d'autre à la puissance x, x étant quelconque; on aura donc $e^x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$. Développant le second membre, d'après la formule du binome, il viendra

$$e^x=1+x+\frac{nx(nx-1)}{1\,.\,2\,.\,n^2}+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,n^3}+\ldots$$
$$+\frac{nx(nx-1)(nx-2)\ldots(nx-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,r\,.\,n^r}+\text{etc.}$$

Cette formule peut s'écrire comme il suit :

$$e^x=1+x+\left(x-\frac{1}{n}\right)\frac{x}{2}+\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{n}\right)\frac{x}{3}+\ldots$$
$$+\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(\frac{x}{r-1}-\frac{1}{n}\right)\frac{x}{r}+\text{etc.}$$

Or, n est infini, par hypothèse; donc $\frac{1}{n}=0$, et par suite, il vient

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+\cdots+\frac{x^r}{2.3.4\ldots r}+\text{etc.}\ldots\text{(D)}$$

298. Comme e est indépendant de x, e ne changera pas en faisant $x=1$; ce qui donnera

$$e=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\text{etc., à l'infini.}$$

---

dens ne changent pas quand on y suppose que x représente $-z$; ce qui donne $1+x=1-z$.

Le binome de Newton étant ainsi démontré pour un exposant négatif entier, on fera voir, en raisonnant comme nous l'avons fait pour l'exposant positif, que ce binome est vrai aussi pour un exposant négatif quelconque.

Je dis que e est incommensurable. D'abord, comme la série qui suit le premier terme 2 du second membre est plus petite que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\text{etc. à l'infini, ou est} < 1,$$

on voit que e est compris entre 2 et 3, et ne saurait être un nombre entier. Si e pouvait être un nombre fractionnaire exact $\frac{m}{n}$, on aurait

$$\frac{m}{n}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\dots+\frac{1}{2.3.4\dots n}+\frac{1}{2.3\dots n(n+1)}+\text{etc.}$$

Multipliant de part et d'autre par $2.3.4\dots(n-1)n$, il viendrait

$$2.3.4\dots(n-1)m=2.2.3.4\dots n+3.4\dots n+4.5\dots n+\dots+n+1$$
$$+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\text{etc.}\dots(1)$$

Or, cette égalité est impossible; car le premier membre est un nombre entier, tandis que le second membre n'en est pas un, puisque la seconde série de ce second membre est plus petite que

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\text{etc. à l'infini, ou est} < \frac{1}{n}.$$

Donc e est un nombre irrationnel, et ne peut s'obtenir que par approximation. On a vu en algèbre que $e=2,7182818285$, à moins d'un billionième près (*).

(*) La formule (D), quoique donnée par la considération de l'infini, n'en est pas moins très-exacte, et peut se vérifier comme il suit : soient a', b', c', ..., k' les valeurs de x séries indéfinies, composées respectivement en a, b, c, ..., k, précisément comme la formule (D) est composée en x. Si l'on multiplie la série a' par la série b', le premier terme du produit $a'b'$ sera l'unité, et les autres se composeront des termes du premier degré, du second, du troisième, etc., à l'infini. Pour obtenir tous les termes du degré r, il faudra multiplier le terme du degré r, dans a', par le premier terme de b'; puis ajouter au résultat, le produit du terme du degré $r-1$, dans a', par le second terme de b'; ajouter au résultat, le produit du terme du degré $r-2$, dans a', par le terme du degré 2 de b'; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'en prenant ainsi les termes à rebours dans a', et en avançant toujours dans b', on soit arrivé au produit du 1[er] terme de a' par le terme du degré r dans b' : en procédant ainsi, on trouve que la somme des termes du degré r dans le produit $a'b'$, est

$$\frac{a^r}{2.3\dots r}+\frac{a^{r-1}b}{2.3\dots(r-1)}+\frac{a^{r-2}b^2}{2.3\dots(r-2).2}+\frac{a^{r-3}b^3}{2.3\dots(r-3).2.3}$$

299. Des calculs absolument pareils à ceux du n° 297, prou-

$$+\cdots+\frac{a^2b^{r-2}}{2.2.3\ldots(r-2)}+\frac{ab^{r-1}}{2.3\ldots(r-1)}+\frac{b^r}{2.3\ldots r}.$$

Mettant en facteur commun $\frac{1}{2.3\ldots r}$, on verra, d'après la formule du binome, que le terme du degré r dans le produit $a'b'$, se réduit à $\frac{(a+b)^r}{2.3\ldots r}$. De sorte que le produit $a'b'$, des deux séries a' et b', est composé avec $a+b$, comme la série a' est composée avec a.

Multipliant $a'b'$ par c', puis le produit par d', et ainsi de suite, on verra de la même manière que le produit $a'b'c' \ldots k'$ est composé avec $a+b+c+\cdots+k$, comme la série a', est composée avec a. Si l'on suppose tous les x nombres a, b, c, ..., k, égaux entre eux, leur somme sera ax et le produit $a'b'c' \ldots k'$ vaudra la puissance $x$ième de a'. De sorte qu'on aura

$$a'^x = 1+ax+\frac{a^2x^2}{2}+\frac{a^3x^3}{2.3}+\cdots+\frac{a^rx^r}{2.3\ldots r}+\cdots (1)$$

Soit $a=1$, la valeur de la série a' sera alors celle que nous avons désignée par e; et dans ce cas, la formule (1) devient la formule (D); celle-ci est donc vraie lorsque x est un nombre entier positif quelconque. D'un autre côté, comme la formule (1) est vraie pour toutes les valeurs qu'on voudra donner à a, si l'on y fait $a=\frac{u}{x}$, elle donnera la puissance x^{me} de a', égale à une série, qui, à cause de u entier positif, se réduira à la puissance u^{me} de e. D'où en extrayant la racine x^{me} de part et d'autre, on aura la puissance $\frac{u}{x}$ième de e, égale à a', c'est-à-dire, à cause de $a=\frac{u}{x}$, égale à ce que devient la formule (D), lorsqu'on y change x en $\frac{u}{x}$.

Enfin, cette formule (D) est vraie aussi lorsque l'exposant x est un nombre quelconque négatif; car la valeur de $a'b'$ ayant lieu quels que soient les nombres a et b, si on y fait $a=x$ et $b=-x$, elle donnera $a'b'=1$. D'où, à cause que la valeur de a' se réduit, d'après ce qui précède, à la puissance $x$ième de e, on aura la puissance $-x$ième de e égale à b', c'est-à-dire, à ce que devient la formule (D), quand on y change x en $-x$.

Ainsi, la formule (D) est démontrée pour toutes les valeurs commensurables, positives ou négatives, de l'exposant x. Cette formule aura donc lieu aussi lorsque l'exposant x sera incommensurable; et on pourra encore employer la même formule, lorsque l'exposant x sera imaginaire.

(Les idées de cette démonstration et de celle qui a donné la formule (D), sont dues à l'ouvrage intitulé : *Mélanges d'analyse algébrique et de géométrie*, par M. de Stainville. Paris, 1815.

vent que si n est infini, et qu'on ait égard à la formule (D), on aura

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^{nx}=\left(1-\frac{z}{n}\right)^{-nx}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nxz}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-nxz}=e^{xz},$$

$$\left(1-\frac{z}{n}\right)^{nx}=\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-nx}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nxz}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-nxz}=e^{-xz}.$$

Nous ferons usage de ces formules.

300. A l'aide des séries binomiales et exponentielles, il est facile de trouver les séries *logarithmiques*. En effet, nous venons de voir que quand n est infini, on a $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z$. Posons $e^z=1+v$; d'où $zle=l(1+v)$: nous aurons $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ $=1+v$ et $z=n(1+v)^{\frac{1}{n}}-n$. Multipliant de part et d'autre par le et substituant, il viendra

$$l(1+v)=le\left[n(1+v)^{\frac{1}{n}}-n\right].$$

Développant d'après la formule du binome, réduisant et observant que n est infini, ce qui donne $\frac{1}{n}=0$, on trouvera

$$l(1+v)=le\left[v-\frac{v^2}{2}+\frac{v^3}{3}-\frac{v^4}{4}+\frac{v^5}{5}-\text{etc.}\right], \ldots \text{(E)}$$

série dont la loi est évidente jusqu'à l'infini et dans laquelle v est un nombre quelconque, positif ou négatif.

301. La série (E) est démontrée en algèbre, sans le secours de l'infini, et on en déduit d'autres séries, propres à calculer, avec la plus grande facilité, les tables de logarithmes. Ici nous nous bornerons à tirer de la série (E), deux résultats assez remarquables.

D'abord si l'on change v en $-v$ dans la formule (E) et qu'on en retranche le résultat, il est clair que, comme $l(1+v)$ $-l(1-v)=l\left(\frac{1+v}{1-v}\right)$, on aura

$$l\left(\frac{1+v}{1-v}\right)=2le\left[v+\frac{v^3}{3}+\frac{v^5}{5}+\frac{v^7}{7}+\text{etc.}\right].$$

Prenant dans cette formule, $v=\sqrt{-1}$, doublant les deux membres et observant que $2la=l(a^2)$, on verra que le premier membre devient $l(-1)$: et comme $(\sqrt{-1})^{2m+1}=$ $(-1)^m\sqrt{-1}$, on trouvera

$$l(-1)=\left(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\text{etc.}\right)4le\sqrt{-1}.$$

Or, la série entre parenthèses a une valeur finie ; car elle représente le quart du rapport de la circonférence au diamètre, comme on le verra en trigonométrie ; ainsi on a $l(-1) = \pi le \sqrt{-1}$, c'est-à-dire que *le logarithme d'une quantité négative est imaginaire.*

302. Pour tirer une autre conséquence de la formule (E), faisons $v = -1$; le 1$^{\text{er}}$ membre sera $l0$ ou $-\infty$; on aura donc

$$\infty = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \text{etc.} \ldots (2)$$

Le second membre de cette formule est la série *harmonique* ; la valeur de cette série est donc infinie. C'est ce qu'on peut démontrer directement. En effet, imaginons que l'on groupe les termes de la série harmonique, de manière que chaque groupe contienne toutes les fractions dont les dénominateurs sont les nombres entiers, depuis une puissance de 2 exclusivement jusques et y compris la puissance de 2 immédiatement supérieure ; le n^{me} de ces groupes sera

$$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \frac{1}{2^n+3} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n}.$$

Or, chacune des 2^n fractions qui composent ce groupe, est plus grande que la dernière, qui se réduit à $\frac{1}{2^{n+1}}$; donc le groupe lui-même est plus grand que $\frac{2^n}{2^{n+1}}$ ou que $\frac{1}{2}$. Mais il y a, dans la série harmonique, autant de groupes que de puissances de 2, c'est-à-dire une infinité ; cette série est donc plus grande qu'un nombre infini de fois $\frac{1}{2}$; elle est par conséquent infinie.

303. Il est bon de remarquer que plusieurs séries numériques, continuées à l'infini, ont une valeur finie, c'est-à-dire une *limite*.

Par exemple, si l'on prend la somme des n premiers termes, et que dans cette somme, on fasse n infini, on verra que

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \text{etc., à l'infini,} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \text{etc., à l'infini,} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2.4} + \frac{5}{2.4.6} + \frac{7}{2.4.6.8} + \text{etc., à l'infini,} = 1;$$

$$\frac{1}{1.3} - \frac{2}{3.5} + \frac{3}{5.7} - \frac{4}{7.9} + \text{etc., à l'infini,} = \frac{1}{4}.$$

304. *Trouver la vraie valeur d'une fraction qui se réduit à $\frac{0}{0}$ par l'hypothèse de* x = a.

Puisque $x = a$ réduit à zéro chacun des deux termes de la fraction proposée, ces deux termes ont nécessairement pour facteur commun, une certaine puissance de $x-a$; on mettra donc ce facteur commun en évidence, en transformant le binome $x-a$ en un monome u, c'est-à-dire, en supposant $x-a=u$, ou $x=a+u$. Alors, effectuant tous les développemens indiqués, au moyen des séries binomiales, exponentielles ou logarithmiques, etc.; ordonnant par rapport aux puissances ascendantes de u; supprimant le facteur en u commun au numérateur et au dénominateur, et faisant ensuite $u=0$, ce qui donne $x=a$, le résultat sera la valeur de la fraction proposée qui répond à $x=a$.

Par exemple, si l'on a $y=\frac{lx-la}{x-a}$, l'hypothèse $x=a$ donnera $y=\frac{0}{0}$. Mais en faisant $x=a+u$, et développant d'après la série (E), on aura

$$y=\frac{l(a+u)-la}{u}=\frac{1}{u}\,l\left(1+\frac{u}{a}\right),$$

$$\text{ou}\quad y=\frac{le}{a}-\frac{ule}{2a^2}+\text{etc.};\ \text{d'où}\ y=\frac{le}{la},$$

lorsque $u=0$, ou $x=a$.

Le procédé s'applique aux fractions rationnelles aussi bien qu'aux fractions irrationnelles. Nous laissons à chercher les vraies valeurs des quatre fractions

$$\frac{\sqrt[3]{(x^2-1)}-\sqrt{(x-1)}}{x-1+\sqrt[3]{(x^2+2x-3)}},\quad \frac{x^3-12x+16}{x^3-3x^2+4},\quad \frac{\sqrt{x-a^2}}{-a+\sqrt{x}}\quad \text{et}\quad \frac{a^x-b^x}{x}.$$

Ces fractions sont réduites à $\frac{0}{0}$ par les hypothèses $x=1$, $x=2$, $x=a^2$ et $x=0$. On aurait la valeur de la dernière fraction en y substituant les développemens des exponentielles qui y entrent.

305. *Un vase peut se remplir par un tuyau et se vider par un autre. Pendant combien de temps doit-on faire couler les deux tuyaux, le premier ne fournissant que de l'eau, pour que le vase, contenant d'abord* a *litrons de vin, n'en contienne plus que* b *litrons? On suppose que les tuyaux versent uniformément chacun* c *litrons de liquide par heure, et que l'eau*

qui entre dans le vase, se mêle sur-le-champ et exactement avec le liquide que ce vase contient.

Soit x le nombre d'heures cherché, et n le nombre infini d'instans contenus dans une heure; x heures en contiendront donc nx. Soient x_v et x_{v+1} les quantités de vin pur que le vase contient avant et après le v^{me} instant. Puisque par heure, ou n instans, chaque tuyau verse uniformément c litrons de liquide; à chaque instant il en verse $\frac{c}{n}$; et par conséquent, après chaque instant il y aura toujours a litrons de liquide dans le vase. Or, comme $\frac{c}{n}$ sont c fois le an ième de a, il s'ensuit qu'à chaque instant il sort c fois le an ième du mélange : et puisque l'eau est exactement mêlée avec le vin, on voit qu'à chaque instant il sort du vase c fois le an ième du vin et c fois le an ième de l'eau que ce vase contient. Donc pendant le v^{me} instant, il sort du vase c fois le an ième du vin x_v; par conséquent, après le v^{me} instant, la quantité de vin x_{v+1} qui reste dans le vase, est

$$x_{v+1} = \left(1 - \frac{c}{an}\right) x_v.$$

Posant $\frac{c}{a} = d$, et faisant $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, nx$, puis multipliant, observant que $x_1 = a$ et que $x_{nx+1} = b$, il viendra

$$b = a\left(1 - \frac{d}{n}\right)^{nx}; \text{ d'où } b = a.e^{-dx},$$

car n est infini (299). Cette équation facile à résoudre par logarithmes, fera connaître x. Si $a = b$, on aura $x = 0$, comme cela doit être. Si $b = 0$, x sera infini; et si $b = 10a$, x sera négatif, comme il est aisé de voir pourquoi.

306. *On a deux vases* V *et* V', *en forme de prismes ou de cylindres droits, dont les bases* b *et* b' *sont horizontales. Le vase* V *est rempli d'eau jusqu'à la hauteur* h *et le vase* V' *est vide. On ouvre les robinets adaptés aux bases* b *et* b', *et l'eau du vase* V *tombe dans le vase* V', *d'où elle est évacuée au-dehors. En supposant que l'eau sorte de chaque vase avec une vitesse variable, proportionnelle à chaque instant à la hauteur de l'eau dans ce vase, et que les vitesses soient* a *et* a', *quand les hauteurs sont égales à* 1, *dans les vases* V *et* V'; *on demande,* 1° *quelles seront les hauteurs* ω *et* φ *du liquide dans les deux vases après le temps* m; 2° *à quelle époque*

l'eau aura atteint sa plus grande hauteur dans le vase V', et quelle sera alors cette plus grande hauteur ?

Il faut d'abord remarquer que la *vitesse* d'écoulement à un instant quelconque, est la quantité d'eau qui sortirait du vase pendant l'unité de temps, si, à partir de cet instant, le mouvement du liquide devenait uniforme. Or, si l'on imagine l'unité de temps divisée en une infinité d'instans égaux et infiniment petits, il est clair que la vitesse d'écoulement pourra être considérée comme ne variant qu'au commencement de chaque instant ; car cela reviendra à supposer que cette vitesse varie à des intervalles de temps infiniment petits, et par conséquent d'une manière continue, comme cela est effectivement.

Cela posé, 1° soit n le nombre infini d'instans contenus dans l'unité de temps ; les m unités en contiendront donc mn. Soient x_v et y_v les hauteurs respectives de l'eau dans les vases V et V', avant le v ième instant, et x_{v+1}, y_{v+1} les hauteurs après. Par l'énoncé, les vitesses du liquide, au commencement du v ième instant, sont les quatrièmes termes des proportions

$$1 : x_v :: a : ax_v, \quad 1 : y_v :: a' : a'y_v.$$

Or, il suit de la définition du mot *vitesse*, que si l'écoulement devenait constant au commencement du v^{me} instant, il sortirait des vases V et V', et d'une manière uniforme, les volumes d'eau ax_v et $a'y_v$, pendant l'unité de temps ou n instans ; donc à chaque instant, il en sortirait $\frac{a}{n}x_v$ et $\frac{a'}{n}y_v$. Et puisque la vitesse du liquide est constante pendant le v^{me} instant, il s'ensuit que pendant cet instant, il sort réellement des vases V et V' les volumes d'eau $\frac{a}{n}x_v$ et $\frac{a'}{n}y_v$. Donc, après le v^{me} instant, les vases V et V' renferment respectivement les volumes d'eau que voici :

$$bx_v - \frac{a}{n}x_v \quad \text{et} \quad b'y_v - \frac{a'}{n}y_v + \frac{a}{n}x_v.$$

Et comme ces volumes sont les produits respectifs des bases b et b' par les hauteurs x_{v+1} et y_{v+1} ; si on divise ces mêmes volumes par les bases b et b', on aura les hauteurs x_{v+1} et y_{v+1}. Posant donc, pour abréger,

$$\frac{a}{b} = c, \quad \frac{a'}{b'} = d, \quad 1 - \frac{c}{n} = k, \quad 1 - \frac{d}{n} = p \quad \text{et} \quad \frac{a}{b'} = r,$$

on verra qu'après le v^{me} instant, les hauteurs de l'eau dans les deux vases V et V', sont respectivement :

$$x_{v+1} = kx_v \quad \text{et} \quad y_{v+1} = py_v + \frac{r}{n}x_v \ldots (1)$$

Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, mn$, dans la première de ces équations, multipliant et observant que $x_1 = h$ et $x_{mn+1} = \omega$, on aura

$$\omega = hk^{mn}; \text{ d'où } x_v = hk^{v-1}.$$

Par cette valeur la seconde équation (1) devient

$$y_{v+1} = py_v + \frac{hr}{n}k^{v-1},$$

et prend la forme

$$\left(\frac{1}{p}\right)^v y_{v+1} - \left(\frac{1}{p}\right)^{v-1} y_v = \frac{hr}{np}\left(\frac{k}{p}\right)^{v-1}.$$

Faisant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, mn$ et ajoutant; observant d'ailleurs que $y_1 = 0$, $y_{mn+1} = \varphi$ et $k - p = \frac{d-c}{n}$, on trouvera

$$\varphi = \frac{hr}{d-c}[k^{mn} - p^{mn}].$$

Or, n est infini; donc on a (299)

$$k^{mn} = \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{mn} = e^{-cm} \quad \text{et} \quad p^{mn} = \left(1 - \frac{d}{n}\right)^{mn} = e^{-dm}.$$

Avec ces valeurs, on trouve définitivement

$$\omega = he^{-cm} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{hr}{d-c}[e^{-cm} - e^{-dm}].$$

2° Il est évident que la plus grande hauteur de l'eau dans le vase V', aura lieu lorsque ce vase perdra précisément autant d'eau, dans un instant, que le vase V lui en fournira; car l'instant suivant, V' perdra plus d'eau et en recevra moins. Or, soit nx le rang de cet instant, et par conséquent x le nombre d'unités de temps; il est clair qu'on aura $ax_{nx} = a'y_{nx}$, ou bien

$$ahe^{-cx+c} = \frac{a'hr}{d-c}[e^{-cx+c} - e^{-dx+d}].$$

Cette équation donne, pour déterminer le temps x de la plus grande hauteur y_{nx} dans le vase V',

$$e^{-(d-c)(x-1)} = 1 - \frac{b'(d-c)}{a'}; \text{ d'où } y_{nx} = \frac{a'h}{a}e^{-cx+c}.$$

Quoique toutes les valeurs relatives au second vase V' prennent la forme $\frac{0}{0}$, lorsque $d = c$, c'est-à-dire lorsque $a' : b' :: a : b$, il n'y a cependant point d'indétermination dans ce cas. En effet, si l'on pose $d=c+u$, qu'on substitue les développemens des exponentielles e^{-mu} et $e^{-(x-1)u}$, qu'on réduise et divise par u, et qu'enfin on pose $u=0$ ou $d=c$, comme au n° 304, on verra qu'alors

$$\varphi = hmre^{-cm} \quad \text{et} \quad x = 1 + \frac{b'}{a'},$$

valeurs qu'on obtiendrait d'ailleurs en refaisant les calculs de 1° et 2°, dans l'hypothèse de $d=c$, qui donne $p=k$.

Dans le problème que nous venons de résoudre, on pourrait supposer que l'eau sort du vase V avec la vitesse constante a; c'est-à-dire, que l'eau y est entretenue à la même hauteur. On pourrait encore supposer que le 2ᵉ vase V' ne contenant d'abord que du vin pur, à la hauteur h', l'eau qu'il reçoit du 1ᵉʳ V se mêle sur-le-champ et exactement avec le liquide que le 2ᵉ vase renferme, et demander combien il restera de vin pur, dans ce 2ᵉ vase, 1° après le temps m; 2° à l'époque de la plus grande hauteur du liquide dans le même vase.

307. *Combien un vase qui a coulé pendant* a *heures, a-t-il versé d'eau? On suppose que ce vase ait perdu pendant un instant quelconque, une quantité d'eau égale à la valeur de cet instant multipliée par le rapport de* c *heures à* c *heures augmentées d'un nombre d'instans marqué par le rang de celui que l'on considère.*

Soit n le nombre infini d'instans égaux à x qui composent le temps a; on aura donc $nx=a$. D'après l'énoncé, il est clair que l'eau sortie du vase, pendant le v^{me} instant, a pour valeur $\frac{cx}{c+vx}$, ou $cx(c+vx)^{-1}$, ou enfin

$$x - \frac{x^2}{c}v + \frac{x^3}{c^2}v^2 - \frac{x^4}{c^3}v^3 + \frac{x^5}{c^4}v^4 - \text{etc.}$$

Prenant successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n$, on aura successivement les quantités d'eau sorties du vase pendant les instans 1ᵉʳ, 2ᵉ, 3ᵉ, 4ᵉ, ..., nᵉ; la somme z de ces quantités sera donc toute l'eau versée par le vase en a heures; on aura par conséquent

$$z = nx - \frac{x^2}{c}S_1 + \frac{x^3}{c^2}S_2 - \frac{x^4}{c^3}S_3 + \frac{x^5}{c^4}S_4 - \text{etc.}$$

Substituant les valeurs de S_1, S_2, S_3, S_4, ..., tirées de la formule du n° 140, puis divisant les deux membres par c, observant que $nx=a$ et posant $\frac{a}{c}=b$, on trouvera

$$\frac{z}{c}=\left\{\begin{array}{l} b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\frac{b^5}{5}-\text{etc.} \\ -x[<b-<b^2+<b^3-<b^4+\text{etc.}]. \end{array}\right.$$

On sait (300) que la première ligne du second membre se réduit à $\frac{l(1+b)}{le}$: quant à la seconde ligne, il est clair que le multiplicateur de x est plus petit que la série $b+b^2+b^3+b^4$ + etc., série qui est le développement de $b(1-b)^{-1}$ ou de $\frac{b}{1-b}$. Ainsi on a

$$z=\frac{c}{le}l(1+b)-<cx\frac{b}{1-b}.$$

Mais $x=\frac{a}{n}$: et puisque n est infini, x est une quantité infiniment petite, qu'on peut regarder comme nulle; il vient donc enfin

$$z=\frac{c}{le}l\left(\frac{a+c}{c}\right).$$

308. *Extraire les racines des nombres au moyen des séries binomiales.*

D'abord, comme

$$\sqrt[r]{a^r+b}=a\left(1+\frac{b}{a^r}\right)^{\frac{1}{r}},$$

si l'on pose $x=\frac{b}{a^r}$ et qu'on développe d'après la formule du binome, on aura

$$\sqrt[r]{a^r+b}=a\left[1+\frac{x}{r}-\text{A}\frac{r-1}{2r}x+\text{B}\frac{2r-1}{3r}x-\text{C}\frac{3r-1}{4r}x+\text{etc.}\right],$$

A, B, C, D, ..., désignant respectivement les 2ᵉ, 3ᵉ, 4ᵉ, 5ᵉ, ..., termes entre crochets carrés.

Si donc on veut extraire la racine r^{me} d'un nombre donné, à l'aide de cette formule, il faudra partager ce nombre en deux autres, l'un a^r qui soit la plus grande puissance r^{me} possible, et l'autre b qui soit moindre que le premier et le moindre possible à l'égard de ce premier; ce qui pourra donner b négatif. De cette manière, x sera plus petit que l'unité et le moindre possible à l'égard de l'unité; tous les termes de la série iront donc en diminuant, et il n'en faudra pas un grand nombre pour donner le degré d'approximation demandé.

Par exemple, soit proposé de trouver la racine 5^{me} de 260, à moins d'un cent-millième près. Dans ce cas, comme 243 est la plus grande puissance 5^{me} contenue dans 260, on aura

$$260 = 3^5 + 17, \quad r = 5 \quad \text{et} \quad x = \tfrac{17}{243};$$

la série deviendra donc

$$\sqrt[5]{260} = 3\left[1 + \frac{17}{1215} - A\frac{2.17}{1215} + B\frac{3.17}{1215} - C\frac{7.17}{2430} + \text{etc.}\right].$$

Réduisant les termes en décimales jusqu'aux millionièmes, inclusivement, on verra que $\sqrt[5]{260} = 3{,}040848$. Le 5^{me} terme entre crochets carrés ne donne pas de millionièmes ; et puisque les termes sont alternativement positifs et négatifs, et vont en diminuant, l'erreur commise en prenant les quatre premiers est moindre que le 5^{me} (Algèbre) : donc, comme ce 5^{me} terme est négatif, la valeur précédente est un peu trop grande ; mais on voit d'ailleurs qu'on a $\sqrt[5]{260} = 3{,}04084$, à moins d'un cent-millième près.

Pour second exemple, soit proposé de trouver la racine cubique de 56, à moins d'un dimillième près. Le plus grand cube contenu en 56 étant 27, si l'on prenait $56 = 27 + 29$, x vaudrait $\frac{29}{27}$ et les termes de la série iraient en augmentant. Mais on peut aussi prendre $56 = 64 - 8$; et alors x vaudra $-\frac{1}{8}$. La série deviendra donc

$$\sqrt[3]{56} = 4\left[1 - \frac{1}{24} - \frac{A}{24} - \frac{5B}{72} - \frac{5C}{72} - \frac{11D}{120} - \text{etc.}\right].$$

Or, x étant négatif, dans la série générale, tous les termes qui suivent le v^{me}, sont négatifs ; et comme leurs coefficiens en r vont en diminuant ; si l'on représente par S la somme de tous ces termes et par k le coefficient du v^{me}, lequel sera akx^{v-1}, on aura

$$S < akx^v(1 + x + x^2 + x^3 + \text{etc.}),$$

$$\text{ou} \quad S < akx^{v-1} \times \frac{x}{1-x}.$$

Ainsi l'erreur commise en ne prenant que les 4 premiers termes de la série qui donne $\sqrt[3]{56}$, est moindre que le septième du quatrième terme, qui se réduit à 0,000482 ; cette erreur est donc moindre que 0,000069. On a par conséquent $\sqrt[3]{56} = 3{,}8256$, à moins d'un dimillième près.

Soit $\sqrt[r]{a^r+b}=a+y$; d'où $b=y\left(ra^{r-1}+\frac{r(r-1)}{2}y+\text{etc.}\right)$

. Si y doit être une petite fraction, on pourra négliger tous les termes qui suivent le premier entre parenthèses, et on aura, pour 1re approximation, $y=\frac{b}{ra^{r-1}}$. Substituant cette valeur dans le second terme entre parenthèses, et négligeant tous les suivans, on aura une seconde valeur de y, beaucoup plus approchée que la première, et qui donnera la formule

$$\sqrt[r]{a^r+b}=a+\frac{2ab}{2ra^r+(r-1)b}.$$

D'après cette formule, si $a=3$, $b=17$ et $r=5$, on trouvera $\sqrt[5]{260}=3,04083$, comme plus haut, à l'exception du dernier chiffre.

Voici encore quelques problèmes :

Combien un vase qui a coulé pendant a heures, a-t-il versé d'eau? On suppose que ce vase ait perdu, pendant un instant quelconque, une quantité d'eau égale à la valeur de cet instant multiplié par le carré du rapport de c heures à c heures augmentées d'un nombre d'instans marqué par le rang de celui que l'on considère. $\left(\text{Réponse : } \frac{ac}{a+c}\right)$.

Quelle somme x devrait-on rendre au bout de n années, pour une somme a prêtée pendant ce temps, au taux de r pour 1 par an, si à chaque instant de la durée de l'année, l'intérêt échu se joignait au capital pour porter intérêt l'instant suivant? (R. $x=ae^{nr}$. Si $a=10000$, $n=1$, $r=0,05$, on aura $x=10512,71$.)

On retranche constamment d'un nombre donné a, la $a$ième partie de 2 fois un nombre inconnu ; la $2a$ième partie de 3 fois le 1er reste ; la $3a$ième partie de 4 fois le 2^e ; la $4a$ième partie de 5 fois le 3^e, et ainsi de suite. Quelle devrait être la valeur x de ce nombre inconnu, pour que les restes diminuant sans cesse, ne pussent cependant devenir nuls qu'à l'infini? $\left(\text{R. } x=a-\frac{l(1+a)}{le}\right)$.

On retranche constamment l'unité d'un certain nombre inconnu, et des quotiens que l'on trouve en divisant par a, le double du 1er reste, 3 fois le 2^e, 4 fois le 3^e, 5 fois le 4^e, et ainsi de suite. Quelle devrait être la valeur x de ce nombre inconnu, pour que les restes diminuant sans cesse, ne pussent cependant devenir nuls qu'à l'infini? (Réponse : $x=e^a-1$.)

Une personne va et vient dans une allée d'un jardin et s'astreint à ne faire chaque fois qu'une certaine fraction du chemin qu'elle vient de parcourir en sens contraire. Elle continue ainsi jusqu'à ce qu'il ne lui reste plus de chemin à faire. On demande quel sera alors le chemin total x qu'elle aura parcouru et à quelle distance y elle sera du premier point de départ? On suppose que la personne ait fait a mètres la première fois, et que la fraction de chemin soit successivement un quart, 2 sixièmes, 3 huitièmes, 4 dixièmes, 5 douzièmes, etc. [Réponse : $x = \frac{2al2}{le}$ et $y = \frac{2a}{le}(l3 - l2)$].

Dans ce problème, la fraction de chemin pourrait être constamment $\frac{1}{2}$; et alors on aurait $x = 2a$ et $y = \frac{2}{3}a$: la fraction de chemin pourrait être successivement une demie, un tiers, un quart, un cinquième, un sixième, etc.; dans ce cas il viendrait $x = ae - a$ et $y = \frac{a}{e}$.

Du maximum et du minimum.

309. Si φ est une fonction connue de x et qu'on donne à x une suite de valeurs très-peu différentes les unes des autres, il en résultera nécessairement pour φ autant de valeurs généralement inégales. Et si ces valeurs de φ, d'abord croissantes, deviennent ensuite décroissantes, puis croissent et décroissent de nouveau, ainsi de suite, la valeur qui surpassera les deux qui la précèdent et la suivent immédiatement sera un *maximum* de φ; au contraire, la valeur surpassée par les deux qui la précèdent et la suivent immédiatement, en sera un *minimum*.

310. La méthode du maximum et du minimum repose sur le principe suivant :

Si dans la série $Au + Bu^2 + Cu^3 + Du^4 +$ etc., A, B, C, ..., *sont des quantités indépendantes de* u, *je dis qu'on pourra toujours prendre* u *assez petit pour que le premier terme* Au *surpasse la somme* S *de tous ceux qui le suivent.*

En effet, soit N le plus grand des coefficiens A, B, C, D, ..., on aura nécessairement

$$S < Nu^2(1 + u + u^2 + u^3 + \text{etc.});$$

d'où, en prenant $u < 1$, il vient

$$S < \frac{Nu^2}{1-u}.$$

Mais N étant un nombre fini indépendant de u, il est clair qu'on peut toujours donner à u une petitesse telle qu'on ait

$$A > \frac{Nu}{1-u}; \text{ d'où } Au > \frac{Nu^2}{1-u} \text{ et } Au > S.$$

311. Maintenant, supposons que, dans l'équation à une inconnue $\varphi = f(x)$, l'inconnue x ait la valeur qui donne le minimum de φ. Si l'on y change x en $x + u$ et qu'on développe suivant les puissances ascendantes de u, le premier terme du développement sera φ, car c'est à quoi ce développement se réduit quand on y fait $u = 0$; on aura donc

$$\varphi' = \varphi + Au + Bu^2 + Cu^3 + Du^4 + \text{etc.},$$

A, B, C, D, etc., étant des quantités en x, mais indépendantes de u. Changeant u en $-u$, on aura le résultat de la substitution de $x - u$ au lieu de x dans l'équation $\varphi = f(x)$: il viendra donc

$$\varphi'' = \varphi - Au + Bu^2 - Cu^3 + Du^4 - \text{etc.}$$

Cela posé, si A n'était pas zéro, on pourrait toujours prendre u assez petit pour que le terme Au surpassât la somme de tous ceux qui le suivent dans les valeurs de φ' et φ''; donc, puisque ce terme entre avec des signes contraires dans ces valeurs, soit que A soit positif ou négatif, l'une serait plus grande et l'autre plus petite que φ, quelque petite que fût d'ailleurs la quantité u; donc φ ne serait pas à son minimum; ce qui est contre l'hypothèse. Donc on a nécessairement $A = 0$. De plus, le coefficient B doit être positif; car si ce coefficient était négatif et égal à $-B'$; à cause de $A = 0$, et parce que $-B'u^2$ peut toujours surpasser la somme de tous les termes suivans dans φ' et φ'', on verra que φ' et φ'' seraient moindres que φ; ce qui est absurde, puisque φ est à son minimum. Donc B est nécessairement positif. Donc lorsque φ est un minimum, on a $A = 0$ et B positif.

On démontrerait de même que, quand φ est un maximum, il vient $A = 0$ et B négatif.

On voit par là que, *pour avoir les valeurs de l'inconnue* x *qui portent la variable* $\varphi = f(x)$ *à son maximum ou à son minimum, il faut remplacer* x *par* $x + u$ *dans l'équation* $\varphi = f(x)$; *puis développer et réduire de manière à trouver un résultat de la forme* $\varphi' = \varphi + Au + Bu^2 + \text{etc.}$; *poser ensuite* $A = 0$ *et résoudre cette équation par rapport à* x *: les valeurs résultantes devront donner* B *négatif pour le maximum de* φ *et* B *positif pour le minimum.*

Si ces valeurs rendaient B nul, il est clair, par ce qui précède, qu'elles devraient d'abord donner aussi $C = 0$, puis D négatif pour le maximum de φ et D positif pour le minimum.

312. On peut aisément appliquer la règle précédente à la détermination du maximum de φ dans l'équation $\varphi = x^2(3a - x)$. Mais si l'on a $\varphi = (x+1)\sqrt{(11-x)}$,

on y changera x en $x+u$; et pour développer le nouveau second membre de manière à trouver un résultat de la forme $\varphi' = \varphi + Au + Bu^2 + \text{etc.}$, on prendra la formule

$$\sqrt{k+hu} = \sqrt{k} + \frac{hu}{2\sqrt{k}} - \frac{h^2u^2}{8k\sqrt{k}} + \text{etc.}$$

On y fera $k = 11 - x$ et $h = -1$; multipliant ensuite par $x + 1 + u$ et ordonnant par rapport à u, on trouvera

$$A = \frac{21-3x}{2\sqrt{(11-x)}} \quad \text{et} \quad B = -\frac{45-3x}{8\sqrt{(11-x)^3}}.$$

L'équation $A = 0$ donnant $x = 7$ et cette valeur rendant B négatif, il s'ensuit que le maximum de φ répond à $x = 7$, et que ce maximum est $\varphi = 16$; ce qu'on peut d'ailleurs vérifier en posant $x = 7 + z$.

313. La chose essentielle à la règle précédente est, qu'en substituant $x+u$ au lieu de x, on sache développer le résultat sous la forme $\varphi' = \varphi + Au + Bu^2 + \text{etc.}$; ce qui est quelquefois difficile. Mais souvent on y parviendra au moyen de la multiplication, de la division et de l'extraction de la racine carrée des quantités algébriques : on y parviendra encore en se servant des séries binomiales, exponentielles et logarithmiques. Si cependant tous ces moyens ne suffisaient pas, la question sortirait tout-à-fait des élémens, et ne pourrait se résoudre que par le calcul *différentiel*.

314. Pour donner une nouvelle application de la règle du n° 311, cherchons le minimum de φ, dans les équations

$$x^2y = a \quad \text{et} \quad \varphi = 2xy + x^2 \text{ (*)}.$$

Eliminant d'abord y, il viendra

$$\varphi = \frac{2a}{x} + x^2.$$

Si l'on change x en $x+u$ et qu'on développe de manière à avoir un résultat de la forme $\varphi' = \varphi + Au + Bu^2 + \text{etc.}$; ce qui

(*) Ces équations appartiennent au problème : Parmi tous les vases cylindriques de même capacité πa, quel est celui dont la surface interne $\pi\varphi$ est un minimum ?

se réduit à former le carré de $x+u$ et à diviser $2a$ par $x+u$, jusqu'à ce qu'on ait le terme du quotient affecté de u^2, on trouvera

$$\varphi' = \varphi + 2\left(\frac{x^3-a}{x^2}\right)u + \left(\frac{x^3+2a}{x^3}\right)u^2 + \text{etc.}$$

Le coefficient de u devant être nul, cela donne $x^3-a=0$; d'où $x=\sqrt[3]{a}$. Comme cette valeur rend positif le coefficient de u^2, elle répond au minimum de φ, et donne, par la première équation proposée, $y=\sqrt[3]{a}$. De sorte que, pour le minimum de φ, on a $x=y=\sqrt[3]{a}$; et ce minimum est $3\sqrt[3]{a^2}$.

315. Soit encore à trouver le minimum de φ dans l'équation

$$\varphi = n\sqrt{a^2+x^2} + p\sqrt{b^2+(c-x)^2}\ (*).$$

Changeant x en $x+u$, et exécutant les calculs, comme au n° 312, on trouvera, sans beaucoup de difficultés, que

$$\varphi' = \varphi + \left[\frac{nx}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{p(c-x)}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}\right]u +$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{a^2n}{(\sqrt{a^2+x^2})^3} + \frac{b^2p}{(\sqrt{b^2+(c-x)^2})^3}\right]u^2 + \text{etc.}$$

Pour que φ soit à son minimum, il faut que le coefficient de u soit nul et celui de u^2 positif (311). La seconde condition est visiblement remplie, et la première donne, pour déterminer la valeur de x qui répond au minimum de φ,

$$\frac{n^2x^2}{a^2+x^2} = \frac{p^2(c-x)^2}{b^2+(c-x)^2}.$$

Si $n=p=1$, cette équation donnera $a : b :: x : c-x$ (**).

(*) Cette équation appartient au problème : Deux plaines sont séparées par une droite; l'une est un sable mouvant, où un cheval vigoureux ne peut faire qu'une lieue par heure, et l'autre est une belle pelouse, où le même cheval peut faire, sans se fatiguer davantage, 2 lieues par heure. Quel chemin le cheval doit-il suivre, pour aller, dans le moindre temps possible, d'un point situé dans la première plaine à un point de la seconde? On sait que les perpendiculaires menées de ces points sur la droite de séparation sont a et b lieues, et comprennent, sur cette droite, une distance de c lieues.

(**) Cette proportion résout le problème que voici : En quel point d'un canal rectiligne faut-il établir un pont, pour que les deux branches de route qui vont de ce pont à deux villes situées d'un même côté du canal, donnent la moindre somme possible?

316. Considérons à présent l'équation $\varphi = f(x, y)$, dans laquelle on suppose que x et y aient les valeurs qui donnent le maximum ou le minimum de φ. Si l'on change x en $x + u$ et y en $y + v$, il faudra développer de manière à avoir un résultat de la forme

$$\varphi' = \varphi + Au + Bv + Cu^2 + Dv^2 + Euv + \text{etc.},$$

A, B, C, D, ..., étant indépendans de u et de v.

Changeant u en $-u$ et v en $-v$, dans φ', on aura la valeur φ'' que fournit $f(x, y)$, quand on y remplace x et y par $x - u$ et $y - v$; il viendra donc

$$\varphi'' = \varphi - Au - Bv + Cu^2 + Dv^2 + Euv - \text{etc.}$$

Soit $v = \omega u$, les valeurs φ' et φ'' seront alors

$$\varphi' = \varphi + (A + B\omega)u + (C + D\omega^2 + E\omega)u^2 + \text{etc.},$$
$$\varphi'' = \varphi - (A + B\omega)u + (C + D\omega^2 + E\omega)u^2 - \text{etc.}$$

Raisonnant comme au n° 311, on verra d'abord que, pour le maximum ou le minimum de φ, on doit avoir $A + B\omega = 0$, quel que soit ω ; ce qui exige que $A = 0$ et $B = 0$. On verra ensuite que le coefficient $C + D\omega^2 + E\omega$ doit être positif pour le minimum de φ et négatif pour le maximum. Mais ce coefficient revient à

$$\frac{1}{4D}\left[(2D\omega + E)^2 + 4CD - E^2\right];$$

pour qu'il reste toujours positif ou négatif, c'est-à-dire, pour qu'il ne puisse jamais changer de signe, il faut que $4CD - E^2$ soit positif. En effet, si $4CD - E^2$ était négatif, en prenant $2D\omega = -E$, le multiplicateur de $\frac{1}{4D}$ deviendrait négatif : faisant ensuite croître ω positivement ou négativement, on finirait par rendre $(2D\omega + E)^2 > 4CD - E^2$, et par conséquent le multiplicateur de $\frac{1}{4D}$ serait positif et changerait de signe ; donc aussi le coefficient de u^2 changerait de signe, et φ ne serait ni à son maximum, ni à son minimum ; ce qui est contre l'hypothèse. Donc on aura $4CD - E^2 > 0$, et par conséquent C et D de même signe. Le multiplicateur de $\frac{1}{4D}$ sera donc toujours positif ; par conséquent, suivant que D sera positif ou négatif, le coefficient de u^2 sera positif ou négatif, et la valeur de φ sera un minimum ou un maximum.

Le résumé de ce qu'on vient de dire, montre que *pour trouver les valeurs de* x *et de* y *qui portent la fonction* $\varphi = f(x, y)$ *à son maximum ou à son minimum, il faut changer* x *en* $x + u$ *et* y *en* $y + v$; *développer et réduire de manière à trouver un résultat de la forme*

$$\varphi' = \varphi + Au + Bv + Cu^2 + Dv^2 + Euv + \text{etc.};$$

puis résoudre les équations $A = 0$ *et* $B = 0$; *et les valeurs qui en résulteront pour* x *et pour* y, *devront rendre positive la quantité* $4CD - E^2$, *et donner en outre* D *positif pour le minimum de* φ *et* D *négatif pour le maximum.*

317. D'après cette règle, pour avoir le maximum de φ dans l'équation
$$\varphi = x^2y^2(5a - x - y),$$
on y changera x et y en $x + u$ et $y + v$; et, après tous les développemens nécessaires, on trouvera

$$\begin{aligned} A &= xy^2(10a - 2y - 3x), \\ B &= x^2y(10a - 2x - 3y), \\ C &= y^2(5a - 3x - y), \\ D &= x^2(5a - 3y - x), \\ E &= 2xy(10a - 3x - 3y). \end{aligned}$$

Les équations $A = 0$ et $B = 0$ donnent $x = y = 2a$.

De là, $C = -12a^3$, $D = -12a^3$ et $E = -16a^3$.

Ainsi la condition $4CD - E^2 > 0$ est satisfaite : et comme D est négatif, il s'ensuit que les valeurs $x = y = 2a$ répondent au maximum de φ, et que ce maximum est $\varphi = 16a^5$, comme on peut le vérifier d'ailleurs en posant

$$x = 2a + z \quad \text{et} \quad y = 2a - z.$$

Des calculs semblables aux précédens conduisent au maximum de φ dans l'équation $\varphi = x^m y^n (a - x - y)^p$, m, n et p étant des nombres quelconques positifs ou négatifs.

318. Soit à trouver le minimum de φ dans les deux équations à trois inconnues

$$6a = 6x^2y + 3x^2z + z^3 \quad \text{et} \quad \varphi = 2xy + 2x^2 + z^2.$$

Si d'abord on élimine y de ces équations, le résultat pourra se mettre sous la forme

$$\varphi = \frac{6a + 5x^3 + (x - z)^3}{3x}.$$

D'après la règle du n° 316, si l'on substitue $x+u$ à x et $z+v$ à z, il faudra, pour avoir $\varphi'=\varphi+Au+Bv+Cu^2+Dv^2+Euv+$ etc., développer le numérateur, après y avoir posé $x-z=m$, et y prendre ensuite $6a+5x^3+m^3=n$; puis multiplier le numérateur ainsi préparé, par le développement de $\frac{1}{3}(x+u)^{-1}$, poussé jusqu'au terme en u^2. De cette manière on trouvera

$$A=\frac{m^2}{x}+5x-\frac{n}{3x^2},\ B=-\frac{m^2}{x},\ C=\frac{n}{3x^3}+\frac{m}{x}-\frac{m^2}{x^2},$$

$$D=\frac{m}{x},\ E=\frac{m^2}{x^2}-\frac{2m}{x},\ \text{etc.}$$

Pour le minimum de φ, il faut que A et B soient nuls et que le trinome $C+D\omega^2+E\omega$ soit positif (316). La première condition donne $m=0$ et $5x-\frac{n}{3x^2}=0$; d'où $x=z=\sqrt[3]{\frac{3}{5}a}$. Ces valeurs réduisent $C+D\omega^2+E\omega$ à $\frac{n}{3x^3}$ ou à 5, quantité positive : donc le minimum de φ a lieu, et il donne $x=y=z=\sqrt[3]{\frac{3}{5}a}$ (*).

319. Si l'on avait les deux équations

$$xyz=1728=a$$
$$\text{et}\ 8(x+y)z+12xy+48z=\varphi,$$

on en déduirait sans doute le minimum de φ par la méthode précédente; mais il sera beaucoup plus facile d'employer celle du n° 89, laquelle donnera, pour le minimum de φ, les deux équations

$$12x^2y^2=48a+8ay$$
$$\text{et}\ 12x^2y^2=48a+8ax;$$

d'où l'on tire d'abord $x=y$, et ensuite, à cause de $a=1728$,

$$x^4-1152x-6912=0.$$

(*) Ces valeurs résolvent le problème que voici : On veut construire un vase cylindrique, dont l'intérieur du couvercle soit un segment sphérique à une base; on veut que la capacité, tant du cylindre que du segment, soit de $a\pi$ centimètres cubes. Et comme la surface interne $\pi\varphi$ du vase et du couvercle, doit être dorée, on désire, pour diminuer les frais autant que possible, que cette surface soit un minimum. Quels doivent être, pour cela, le rayon x de la base du cylindre, sa hauteur y et celle z du segment ?

La seule racine réelle positive de cette équation étant $x=12$, on en conclut $x=y=z=12$ et $\varphi=4608$ (*).

320. Enfin, si l'on a les deux équations

$$\varphi=xyz \text{ et } (x+1)(y+1)(z+2)-xyz=1000a,$$

on trouvera, pour le maximum de φ,

$$x=y=-\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{3}(500a-1)},\quad z=2x$$
$$\text{et } \varphi=2x^3 \text{ (**)}.$$

321. De toutes les fractions, quelle est celle qui surpasse sa puissance $m$ième du plus grand nombre possible?

Quelle doit être la valeur du nombre x, pour que la racine $x$ième de ax soit un maximum, ou pour que la puissance $x$ième de x soit un minimum?

(*) Ces valeurs résolvent le problème suivant : On veut construire une citerne à faces rectangulaires et de la contenance de 17280 hectolitres. Le revêtement de la surface convexe et de celle du fond sera payé 4 flor. l'aune carrée; la voûte à anse de panier placée au-dessus, coûtera 8f par aune carrée de projection horizontale, et le prix pour creuser la citerne sera de 48f par aune de profondeur. On demande quelles doivent être les dimensions x, y, z de cette citerne, pour que sa construction coûte le moins possible?

(**) Voici le problème résolu par ces valeurs : On a une masse d'argent fin du poids de $a\tau$ grammes, dont on veut construire un vase cylindrique, à base elliptique. Comme les parois devront avoir partout un millimètre d'épaisseur, aussi bien que le couvercle, on demande la hauteur z du vase et les demi-axes x et y de son couvercle et de sa base, pour que la capacité $\pi\varphi$ du même vase soit un maximum?

FIN.

TABLE SOMMAIRE.

FIN DE LA TABLE.

NOTIONS

DE

GÉOMÉTRIE

ANALYTIQUE,

APPLIQUÉES

A LA RECHERCHE DES PROPRIÉTÉS DES COURBES DU SECOND DEGRÉ;

Par J. N. Noël,

PROFESSEUR DES SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES,
PRINCIPAL DE L'ATHÉNÉE DE LUXEMBOURG,
CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DE METZ.

LUXEMBOURG,

DE L'IMPRIMERIE DE J. LAMORT, PLACE D'ARMES.

—

1830.

Les exemplaires voulus par la loi ont été déposés.

Noël

****

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Les sections coniques ont des usages si importans, dans les arts et les sciences, qu'on doit s'attacher à rendre leurs propriétés accessibles et familières à tous ceux qui étudient la géométrie (*). Le véritable moyen, sans doute, est de faire entrer la recherche de ces propriétés dans l'enseignement élémentaire : aussi le présent ouvrage forme-t-il la quatrième partie du traité de géométrie que nous avons publié.

Les méthodes purement géométriques, du moins celles employées dans les élémens, bien que fort claires et fort simples, ont cependant l'inconvénient de trop isoler les principes et d'en rendre l'enchaînement difficile à saisir : il nous a paru préférable de faire usage des méthodes analytiques, dont l'avantage est de conduire aux théorèmes de la manière la plus naturelle, si ce n'est la plus simple. Par cette marche, non-seulement ce petit ouvrage fait connaître les propriétés les plus usuelles des courbes du second degré; mais en outre, il devient une introduction utile à l'étude de la Géométrie analytique.

Equations du point.

1. La *Géométrie analytique* fait partie de l'Application de l'Algèbre à la Géométrie en général; son but est de fournir les principes pour résoudre toute question de géométrie, indéterminée ou non, à l'aide des équations qui *représentent* les points, les lignes ou les surfaces d'une figure, sans qu'il soit même nécessaire de tracer d'abord cette figure.

(*) C'est à quoi M. *Bergery* est parvenu, avec beaucoup de succès, dans sa Géométrie des courbes, appliquée à l'industrie. Metz, 1826.

A l'avenir, une indication telle que (G. 400), signifiera le n° 400 de la Géométrie dont ce traité forme la 4^{me} partie.

Comme la plupart des problèmes de géométrie se réduisent, en dernière analyse, à trouver les distances d'un ou de plusieurs points inconnus à d'autres points ou à des droites fixes, il faut d'abord savoir comment on détermine les différens points d'un plan.

2. Pour obtenir la position d'un point M sur un plan, on conçoit deux droites AX et AY indéfinies, se coupant en A (fig. 1re); puis on mène MP parallèle à AY et terminée à AX : il est clair que le point M est déterminé dès que l'on connaît les longueurs AP et PM. Or, ces longueurs sont appelées *coordonnées* du point M; les droites AX et AY sont les *axes* des coordonnées, et le point commun A en est l'*origine*. Suivant que l'angle YAX est droit ou non, les coordonnées sont dites *rectangulaires* ou *obliques*. La distance AP est nommée l'*abscisse* du point M et la longueur PM en est l'*ordonnée*. On désigne généralement les abscisses par x et les ordonnées par y : AX est alors l'*axe des* x ou *des abscisses* et AY l'*axe des* y ou *des ordonnées*.

On regarde comme positives, toutes les abscisses mesurées sur AX, de A vers X, et toutes les ordonnées mesurées sur AY au-dessus de l'axe des x : alors les abscisses mesurées en sens contraire de A vers X', sont négatives, de même que les ordonnées mesurées au-dessous de AX, de A vers Y' (G. 400). Si donc on veut trouver le point dont l'abscisse $x = -2$ et l'ordonnée $y = 3$, on prendra d'abord la distance $AP' = 2$, puis on mènera, par le point P', une parallèle à AY, et on prendra sur cette parallèle la longueur $P'M' = 3$; le point M' ainsi déterminé, sera le point cherché.

3. On appelle *équations d'un point*, les équations qui expriment les valeurs de l'abscisse et de l'ordonnée de ce point. De sorte que si a et b sont ces valeurs, les équations du point seront

$$x = a \text{ et } y = b.$$

La première de ces équations, considérée comme si elle était seule, convient à tous les points pour lesquels l'abscisse est égale à a; elle convient par conséquent à tous les points de la parallèle à l'axe des ordonnées, menée à la distance $AP = a$, et *représente* cette parallèle. De même, l'équation $y = b$ appartient à tous les points de la parallèle à l'axe des abscisses, menée à la distance $AQ = b$. Le système des équations $x = a$ et $y = b$ appartient donc au point qui se trouve à la fois sur les deux parallèles, c'est-à-dire à leur intersection M; et voilà pourquoi $x = a$ et $y = b$ sont dites les *équations* du point M.

4. La parallèle à l'axe des ordonnées, représentée par l'équation $x = a$, se trouve à la *droite* de cet axe si a est positif, à la *gauche* si a est négatif, et coïncide avec le même axe si a est nul; de sorte que l'équation $x = 0$ appartient à tous les points de l'axe des ordonnées et ne convient qu'à eux seuls. De même, la parallèle à l'axe des abscisses, représentée par l'équation $y = b$, est au-dessus ou au-dessous de l'axe des x, suivant que b est positif ou négatif; et si b est nul, elle coïncide avec cet axe, pour lequel, conséquemment, on a toujours $y = 0$.

Enfin, l'ensemble des équations $x = 0$ et $y = 0$ appartient au point commun aux deux axes et caractérise l'origine A des coordonnées.

5. Cherchons maintenant la distance de deux points dont on connaît les coordonnées rectangulaires. Soient M et M' ces deux points (fig. 2), d leur distance MM', x et y les coordonnées AP et PM du point M, x' et y' les coordonnées du point M' : si l'on mène M'N parallèle à AX, on aura $MN = y - y'$ et $NM' = x - x'$; le triangle rectangle MNM' donnera donc, pour déterminer la distance d cherchée,

$$d^2 = (y - y')^2 + (x - x')^2.$$

Cette formule convient à toutes les positions des deux points proposés, pourvu qu'on y donne le signe — aux coordonnées mesurées dans un sens contraire à celui que nous venons de considérer. C'est ce qu'on vérifie aisément, en supposant successivement les deux points dans chacun des angles des axes, ou de part et d'autre des mêmes axes.

Si le point M' tombe à l'origine A, pour laquelle $x' = 0$ et $y' = 0$, il viendra, pour déterminer la distance d du point (x, y) ou M à l'origine des coordonnées,

$$d^2 = x^2 + y^2, \quad \text{ou} \quad d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

6. Dans tout ce qui va suivre, nous ne calculerons les formules de la géométrie analytique que pour les points situés dans l'angle des coordonnées positives. Si donc on veut appliquer les mêmes formules aux points situés dans les autres angles des axes, il suffira d'y affecter du signe — les lignes qui prendront une direction contraire à celle qu'elles avaient dans l'angle proposé

(G. 400); et les formules, ainsi modifiées, seront celles que l'on trouverait directement en recommençant les raisonnemens, les constructions et les calculs qui ont fourni les premières.

Equations de la ligne droite.

7. Lorsque les coordonnées x et y de chacun des points d'une ligne doivent satisfaire à la même équation; en prenant pour x un nombre quelconque a, cette équation donnera à y une valeur b, au moins; et si b est réelle, le point dont a et b sont les coordonnées, sera nécessairement un de ceux de la ligne. De cette manière, l'équation proposée fait connaître successivement tous les points de la ligne et peut servir à la tracer.

On voit par là qu'une équation entre deux variables x et y, *représente* une ligne dont chacun des points a ces variables pour coordonnées. Aussi appelle-t-on *équation d'une ligne* la relation qui existe entre les coordonnées de chacun des points de cette ligne; et celle-ci à son tour est appelée le *lieu* de l'équation.

8. Cherchons l'équation d'une droite AE passant par l'origine A des coordonnées (fig. 3). Soient AX et AY deux axes quelconques; prenons l'abscisse positive AO $= 1$ et soit a la valeur de l'ordonnée correspondante OV; soit M un point quelconque de la droite AE, x et y les coordonnées AP et PM du point M : les deux triangles semblables AOV et APM donnent $1 : x :: a : y$; d'où l'on tire

$$y = ax.$$

Telle est l'équation de la droite AE; car non-seulement cette équation détermine tous les points de AE, situés dans l'angle YAX; mais aussi tous les points dans l'angle RAY'. C'est ce qu'on vérifie, par exemple, en faisant $x = -3$, dans $y = ax$; car la valeur résultante $y = -3a$ étant négative, détermine un point au-dessous de l'axe AX (G. 401), et ce point tombe sur le prolongement de EA. Effectivement, les coordonnées de ce point étant -3 et $-3a$, ont pour valeurs absolues 3 et $3a$; et si l'on prend du côté des abscisses négatives, la distance AI $=$ 3, et qu'on mène l'ordonnée IG, les triangles semblables AOV et AIG donneront $1 : 3 :: a : \mathrm{IG}$; d'où IG $= 3a$; les coordonnées -3 et $-3a$ déterminent donc, en effet, le point G de la droite EAG.

9. Non-seulement l'équation $y = ax$ appartient à tous les points de la droite AE, indéfiniment prolongée; mais de plus, en y faisant varier a, cette équation détermine toutes les droites qui peuvent passer par l'origine. En effet, comme a est l'ordonnée correspondante à l'abscisse positive AO $= 1$; si $a = \infty$, ce qui arrive quand la droite est parallèle à son ordonnée, cette droite coïncidera avec l'axe AY; et c'est ce que montre l'équation $y = ax$; car ayant alors $x = \frac{y}{\infty} = 0$, quel que soit y, tous les points de la droite se trouvent sur l'axe des ordonnées (4).

Partant de cette position, il est clair qu'à mesure que a diminuera, la droite approchera de l'axe AX; et si a devient nul, c'est-à-dire si le point V tombe en O, la droite aura deux points communs A et O avec l'axe AX et coïncidera avec cet axe. C'est encore ce qu'indique l'équation $y = ax$, qui donne alors $y = 0$, quel que soit x.

Enfin, a devenant négatif et égal à $-$ OV', la droite tombe au-dessous de l'axe des x et prend la position AN. C'est ce qu'on voit encore par l'équation $y = ax$, qui devient alors $y = -$ OV' $\times x$; car tant que x est positif, y est négatif, et on ne peut avoir y positif qu'en prenant x négatif: ce qui montre que la droite reste au-dessous de l'axe des x du côté des abscisses positives et ne passe au-dessus de cet axe que du côté des abscisses négatives.

On voit donc, par cette discussion, que l'équation $y = ax$ représente successivement toutes les droites qui passent par l'origine des coordonnées et peut servir à les décrire.

10. Considérons maintenant une droite BH rencontrant l'axe des y à une distance AB $= b$ de l'origine A. Soit D un point quelconque de cette droite, x et y les coordonnées de ce point. Menons par l'origine A la parallèle AE à BH, rencontrant PD en M; nous aurons, d'après ce qui précède, PM $= ax$. Ajoutant d'un côté MD et de l'autre son égale AB ou b, puis observant que PM $+$ MD vaut y, il viendra

$$y = ax + b.$$

Cette équation ayant lieu pour tous les points de la droite BH, indéfiniment prolongée dans les deux sens, est l'équation de cette droite.

11. Réciproquement, *toute équation du premier degré entre*

les variables x *et* y, *représente une ligne droite et en détermine la position*. En effet, cette équation peut toujours se ramener à la forme $y = ax + b$. Si l'on y fait d'abord $x = 0$, pour avoir le point situé sur l'axe des y, il viendra $y = b$; et suivant que b sera positif ou négatif, ce point sera au-dessus ou au-dessous de l'axe des abscisses. Supposons b positif et prenons $AB = b$; menons BF parallèle à AX et soient D, D', D'', ..., les points dont les coordonnées satisfont à l'équation $y = ax + b$ ou $y - b = ax$; nous aurons donc, en observant que les parallèles PC. P'C', P''C'', ..., sont égales à b,

$$CD = a.BC,\ C'D' = a.BC',\ C''D'' = a.BC'', \ldots;$$

d'où $CD : BC :: C'D' : BC' :: C''D'' : BC'', \ldots$

Et comme les angles BCD, BC'D', BC''D'', ..., sont égaux, il s'ensuit que les triangles BDC, BD'C', BD''C'', ..., sont équiangles; donc toutes les droites BD, BD', BD'', ..., coïncident et tous les points B, D, D', D'', ..., sont à une même droite: donc enfin, toute équation de la forme $y = ax + b$, représente une ligne droite, dont x et y sont les coordonnées de chacun de ses points.

12. Dans cette équation, b est la distance de l'origine au point où la droite coupe l'axe des ordonnées, et a est l'ordonnée correspondante à l'abscisse positive $x = 1$, pour la parallèle à la droite proposée, menée par l'origine; a *représente aussi le rapport des sinus des angles que cette droite fait avec les axes des* x *et des* y. Car soit θ l'angle YAX, de ces deux axes et α l'angle que la droite BH fait avec l'axe des x; son angle avec l'axe des y sera donc $\theta - \alpha$. Menant AE parallèle à BH et prenant $AO = 1$; dans le triangle AOV, on aura $OV = a$, l'angle $OAV = \alpha$ et l'angle $AVO = \theta - \alpha$; il viendra donc $1 : a :: \sin(\theta - \alpha) : \sin \alpha$; d'où $a = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)}$. Et si $\theta = 90°$, on aura $a = \text{tang } \alpha$.

13. Tant que a et b sont indéterminés, la situation de la droite n'est pas connue; mais si a et b sont donnés, ou si l'on a des conditions qui les déterminent, il sera bien facile d'en conclure la position de la droite. Pour cela, le moyen le plus simple, en général, est de chercher les points où cette droite coupe les axes, en faisant successivement $x = 0$ et $y = 0$, dans son équation. C'est ainsi qu'on trouvera la droite représentée par l'équation

$$\frac{2x}{3} - 4 + \frac{y}{2} = \frac{5y}{6} + \frac{3x}{4} - 1.$$

14. *Trouver l'équation d'une ligne droite passant par deux points donnés, l'angle des axes étant d'ailleurs quelconque.*

Soient (x', y') le premier point, (x'', y'') le second et $y = ax + b$ l'équation de la droite cherchée, a et b étant inconnus. Puisque cette droite passe par les points dont les coordonnées sont x' et y', x'' et y'', son équation sera satisfaite lorsqu'on y remplacera x par x' et y par y', puis x par x'' et y par y''; ainsi on a les trois équations

$$y = ax + b,$$
$$y' = ax' + b,$$
$$y'' = ax'' + b.$$

Prenant dans les deux dernières équations les valeurs de a et b, puis substituant dans la première, le résultat sera l'équation demandée. Mais l'élimination se fait beaucoup plus simplement, en retranchant la seconde équation de la première et la troisième de la seconde; car on a, par ce moyen,

$$y - y' = a(x - x'),$$
$$y' - y'' = a(x' - x'');$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{y' - y''}{x' - x''} \quad \text{et} \quad y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

Il est aisé de vérifier que la seconde de ces équations est celle de la droite qui passe par les deux points (x', y') et (x'', y''); car si $y = y'$, elle donne $x = x'$; et si $y = y''$, elle fournit $x = x''$. On voit d'ailleurs que le b de cette droite a pour valeur $b = \frac{x'y'' - y'x''}{x' - x''}$.

Remarquons de plus, que si une droite passe par le point (x', y'), son équation sera toujours de la forme

$$y - y' = a(x - x').$$

15. *L'angle des axes étant quelconque, si les deux droites* $y = ax + b$ *et* $y = a'x + b'$, *sont parallèles, on aura toujours* $a = a'$; *et réciproquement.* Car puisque les deux droites proposées sont parallèles, les parallèles p et p', à ces deux droites, menées par l'origine, coïncident nécessairement; il en est donc de même des ordonnées a et a', qui, pour ces parallèles p et p', correspondent à la même abscisse 1 positive (12); c'est-à-dire que $a = a'$.

Réciproquement, si $a = a'$, les parallèles p et p' aux deux droites proposées, menées par l'origine, auront deux points de communs et coïncideront ; les deux droites proposées seront donc alors parallèles à une même troisième, et conséquemment parallèles entre elles.

16. Il est bon d'observer que quand deux droites se coupent, les coordonnées x et y du point d'intersection, sont respectivement les mêmes dans les équations de ces droites ; et réciproquement. Si donc on résout les deux équations

$$y = ax + b \text{ et } y = a'x + b',$$

les valeurs résultantes seront communes à ces équations et seront les coordonnées du point de rencontre des droites que ces mêmes équations représentent : on aura

$$x = \frac{b' - b}{a - a'} \text{ et } y = \frac{ab' - ba'}{a - a'}.$$

Si $a = a'$, sans qu'on ait $b = b'$, ces valeurs seront infinies ; le point d'intersection sera donc infiniment éloigné : aussi alors les deux droites sont parallèles.

Si on avait à la fois $a = a'$ et $b = b'$, les deux droites se confondraient et auraient une infinité de points communs : c'est aussi ce qu'indiquent les valeurs $x = \frac{0}{0}$ et $y = \frac{0}{0}$, que l'on trouve dans ce cas.

17. *Calculer l'angle de deux droites, rapportées à des axes rectangulaires.*

Menons par l'origine A les parallèles AE et AF aux deux droites proposées $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$; l'angle EAF sera donc le même que celui de ces deux droites (fig. 4). Soient α et α' les angles que les droites proposées font avec l'axe des x ; on aura donc l'angle EAX $= \alpha$ et l'angle FAX $= \alpha'$; d'où l'angle EAF $= \alpha' - \alpha$, et en outre $a = \text{tang}\,\alpha$ et $a' = \text{tang}\,\alpha'$ (12). Soit t la tangente de l'angle $\alpha' - \alpha$ des deux droites proposées, de sorte que $t = \text{tang}\,(\alpha' - \alpha)$. Développant le second membre, il viendra

$$t = \frac{\text{tang}\,\alpha' - \text{tang}\,\alpha}{1 + \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha'}, \text{ ou } t = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Soit s le sinus de l'angle $\alpha' - \alpha$ des deux droites ; son cosinus sera $\sqrt{1 - s^2}$ et on aura

$$t = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}; \text{ d'où } s = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Substituant la valeur précédente de t et réduisant, on trouvera

$$s = \frac{a'-a}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}.$$

Cette formule, ou celle qui donne t, suffira pour construire l'angle des deux droites $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, rapportées à des axes rectangulaires.

18. Si cet angle $\alpha' - \alpha$ est droit, sa tangente t sera infinie et son sinus s égal au rayon 1 ; donc les formules précédentes donneront chacune $aa' + 1 = 0$. Réciproquement, si $aa' + 1 = 0$, on aura $t = \infty$ et $s = 1$; l'angle des deux droites proposées sera donc droit. Ainsi on a ce théorème, que nous emploierons souvent :

Lorsque deux droites $y = ax + b$ *et* $y' = a'x + b'$, *rapportées à des axes rectangulaires, sont perpendiculaires l'une à l'autre, on a toujours* $aa' + 1 = 0$; *et réciproquement.* C'est d'ailleurs ce que l'on peut démontrer directement, par la construction d'une figure, et sans le secours de la Trigonométrie.

19. Pour avoir l'angle $\alpha' - \alpha$ des deux droites proposées $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, lorsque les axes sont obliques et font entre eux un angle θ, on observe qu'alors $a = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)}$ (12). Développant $\sin(\theta - \alpha)$, puis chassant le dénominateur et divisant les deux membres par $\cos \alpha$, on aura

$$a \sin \theta - a \cos \theta \tang \alpha = \tang \alpha; \text{ d'où } \tang \alpha = \frac{a \sin \theta}{1 + a \cos \theta}.$$

L'équation $a' = \frac{\sin \alpha'}{\sin(\theta - \alpha')}$, donne de même $\tang \alpha' = \frac{a' \sin \theta}{1 + a' \cos \theta}$.

Posant toujours $t = \tang(\alpha' - \alpha)$, développant et substituant les valeurs que l'on vient de trouver pour $\tang \alpha$ et $\tang \alpha'$, il viendra

$$t = \frac{(a' - a) \sin \theta}{1 + aa' + (a + a') \cos \theta}.$$

Si les deux droites sont parallèles, $\alpha' = \alpha$, $t = \tang(\alpha' - \alpha) = 0$ et par suite $a' = a$, comme au n° 15.

Si les deux droites sont perpendiculaires, l'angle $\alpha' - \alpha = 90°$ et $t = \tang 90° = \infty$; ce qui exige qu'on ait

$$1 + aa' + (a + a') \cos \theta = 0,$$

condition qui, lorsque $\theta = 90°$, se réduit à $1 + aa' = 0$, comme au n° 18.

20. *Trouver l'aire du parallélogramme* ABCD, *dont le sommet d'un angle est à l'origine des coordonnées rectangulaires, connaissant d'ailleurs les équations* $y = ax$ *et* $y = a'x$ *des côtés* AB *et* AD *qui comprennent cet angle, ainsi que les longueurs* A' *et* B' *de ces côtés* (fig. 4). Soient α et α' les angles BAX et DAX; soit s le sinus de l'angle BAD ou $\alpha' - \alpha$. Menant la hauteur DG du parallélogramme ABCD, le triangle rectangle ADG donnera $1 : s :: B' : DG = B's$, et l'aire de ce parallélogramme sera AB $\times$ DG ou $A'B's$. Substituant la valeur de s, trouvée plus haut (17), il viendra

$$A'B's = \frac{A'B'(a'-a)}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}.$$

Soient x', y' les coordonnées du point B et x'', y'' celles du point D; on trouve aisément que $A'B's = x'y'' - y'x''$.

21. *Les coordonnées étant rectangulaires, la distance* P *du point* (x', y') *à la droite* $y = ax + b$, *sera toujours* $P = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1+a^2}}$.

Soit EF la droite $y = ax + b$, M' le point (x', y') et M'M $= P$ la perpendiculaire cherchée (fig. 5). L'angle de EF avec AX étant égal à l'angle de AX avec AV, parallèle à EF; si l'on prend AO $= 1$, ce qui donne la perpendiculaire OV $= a$, les deux triangles AOV et IMM' seront semblables; on aura donc AO : MM' :: AV : IM', ou $1 : P :: \sqrt{1+a^2} : IM' = P\sqrt{1+a^2}$. Mais ayant $AP' = x'$ et I étant un point de la droite proposée EF ou $y = ax + b$, il vient $IP' = ax' + b$. Donc comme $M'P' = y'$, on a $IM' = y' - ax' - b$; d'où l'on tire

$$P\sqrt{1+a^2} = y' - ax' - b \text{ et } P = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Il est facile de vérifier que si le point (x', y') tombait en M'', au-dessous de la droite proposée EF, la valeur de P serait négative.

On parviendrait d'ailleurs à la formule précédente, au moyen de l'équation de la droite donnée, de celle de sa perpendiculaire menée par (x', y') et de la distance P entre le pied (x, y) et le point (x', y') : on aurait alors à combiner les équations

$$y = ax + b,\quad y - y' = a'(x - x'),$$
$$1 + aa' = 0,\quad P^2 = (y - y')^2 + (x - x')^2;$$

et on serait ainsi dispensé de construire une figure.

22. Le petit nombre de principes qui précèdent, suffit pour résoudre très-simplement tous les problèmes qui ne dépendent que de la ligne droite, sur un plan. On aura, dans la suite, souvent l'occasion d'appliquer ces principes ; nous nous bornerons donc, pour le moment, au théorème que voici :

Si des extrémités de la base AB *d'un triangle quelconque* ABC, *on mène des parallèles aux deux autres côtés, et que par deux points quelconques* P *et* Q, *pris à volonté sur ces parallèles, on mène aux mêmes côtés, deux nouvelles parallèles, se coupant en* D*; je dis que les trois droites* AQ, BP *et* DC *se rencontreront en un même point* (fig. 6).

Prenons les côtés CA et CB pour les axes des x et des y obliques ; faisons $CA=a$, $CB=b$, $AP=p$ et $BQ=q$: la droite AQ passant par les deux points $(a,\ o)$ et $(-q,\ b)$, aura pour équation (14)

$$y=\frac{-b}{a+q}(x-a).$$

De même, la droite BP passant par les deux points $(o,\ b)$ et $(a,\ -p)$, aura pour équation

$$y-b=\frac{b+p}{-a}x.$$

Enfin, l'équation de la droite DC, qui passe par les points $(o,\ o)$ et $(-p,\ -q)$, sera de la forme

$$y=\frac{q}{p}x.$$

Pour le point où les deux premières droites se coupent, les x et les y sont respectivement les mêmes dans les équations de ces droites. Résolvant donc ces deux équations, les valeurs résultantes seront les coordonnées x et y du point commun aux deux droites AQ et BP : et puisque ces valeurs satisfont à l'équation de la droite DC, il s'ensuit que le point d'intersection de AQ et BP, se trouve sur DC.

Et comme les signes de p et q peuvent être quelconques, il faut en conclure que les droites AP et BQ peuvent être menées indistinctement de part et d'autre de la base du triangle, sans que le théorème cesse pour cela d'avoir lieu.

23. On démontrerait, d'une manière tout-à-fait analogue, les théorèmes des n^{os} 125 et 126 de la Géométrie, après avoir établi que *les coordonnées du milieu de la droite qui joint les*

deux points (x′, y′) *et* (x″, y″), *sont* $x = \frac{1}{2}(x' + x'')$ *et* $y = \frac{1}{2}(y' + y'')$.

24. *Si l'on veut trouver analytiquement le point également distant de trois droites qui se coupent et forment un triangle*, on verra qu'il existe quatre de ces points et qu'ils se trouvent aux intersections des bisectrices de deux angles du triangle avec leurs perpendiculaires aux sommets des mêmes angles. De là, en cherchant le point également éloigné des trois sommets du même triangle, on sera conduit aux propriétés indiquées, page 294 de la Géométrie.

25. Enfin, voici encore quelques propositions à traiter :

I. Trouver l'aire d'un triangle, au moyen des coordonnées des sommets de ses angles.

II. Trouver le lieu de tous les points également distants chacun de deux points donnés.

III. Quel est le lieu de tous les points tels, qu'en menant de chacun deux droites à deux points donnés, la différence des carrés de ces droites vaille un carré donné c^2 ?

IV. Lorsque des extrémités de la base d'un triangle, on mène des droites à deux points semblablement placés sur les deux autres côtés, ces deux droites se coupent sur la droite menée du sommet au milieu de la base.

V. D'un point donné hors d'un angle tracé, mener une sécante telle, que les distances de ce point aux deux où cette sécante coupe les deux côtés de l'angle, aient le rapport donné n.

Equations de la circonférence et de sa tangente.

26. Soient p et q les coordonnées rectangulaires du centre d'un cercle donné, x et y celles d'un point quelconque de sa circonférence et R la distance de ces deux points ou le rayon; d'après ce qu'on a vu (5), il est clair qu'on aura toujours

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = R^2 \cdots (1)$$

Telle est l'équation la plus générale de la circonférence : elle renferme trois *constantes* indéterminées, parce qu'il faut trois conditions pour déterminer le centre et le rayon d'un cercle.

27. Lorsque l'origine est un point de la circonférence, on a $p^2 + q^2 = R^2$; et l'équation du cercle devient

$$y^2 + x^2 - 2px - 2qy = 0.$$

Alors si on y fait $y = 0$, pour avoir les points où la circonférence coupe l'axe des x, il viendra $x = 0$ et $x = 2p$; ainsi les points d'intersection sont l'origine et celui dont l'abscisse $2p$ est double de l'abscisse p du centre. D'où il suit que *la perpendicu-*

laire q, *menée du centre sur la corde* 2p, *divise cette corde en deux parties égales.*

28. Si l'origine est à l'extrémité d'un diamètre, pris pour axe des x, les coordonnées du centre seront nécessairement $p=R$ et $q=0$; alors l'équation de la circonférence prend la forme

$$x^2+y^2=2Rx;$$

et comme $\sqrt{x^2+y^2}$ exprime la distance du point (x, y) de la circonférence à l'origine des coordonnées (5), ou représente une corde, on voit que *cette corde est moyenne proportionnelle entre le diamètre* 2R *et le segment* x *adjacent à cette même corde.*

29. La même équation prend aussi la forme

$$y^2=2Rx-x^2 \text{ ou } y^2=(2R-x)x.$$

Or, x et $2R-x$ sont les segmens du diamètre, déterminés par l'ordonnée y; de là résulte donc que *si d'un point de la circonférence, on abaisse une perpendiculaire sur le diamètre, cette perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les deux segmens qu'elle détermine sur ce diamètre.*

30. Enfin, si l'origine des coordonnées rectangulaires est au centre, p et q seront nuls; et l'équation (1) deviendra

$$x^2+y^2=R^2.$$

Cette équation est la plus simple de la circonférence : aussi est-ce celle qu'on emploie le plus fréquemment.

Par ce qui précède, on voit que les coordonnées x et y étant rectangulaires, l'équation de la circonférence est toujours du second degré et ne contient pas le produit xy.

31. Réciproquement, *les coordonnées* x *et* y *étant rectangulaires, toute équation qui ne contient pas le produit* xy, *mais renferme les carrés* x^2 *et* y^2, *avec des coefficiens égaux et de même signe, représente une circonférence.* Car cette équation peut toujours se ramener à la forme $(x-p)^2+(y-q)^2=R^2$. C'est ainsi, par exemple, que l'équation

$$Ax^2+Ay^2+Bx+Cy+D=0,$$

devient $\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{C}{2A}\right)^2=\frac{B^2+C^2-4AD}{4A^2}.$

Cette équation est celle de la circonférence, dont les coordonnées du centre et le rayon, sont respectivement (26)

$$p=-\frac{B}{2A},\quad q=-\frac{C}{2A} \text{ et } R=\frac{1}{2A}\sqrt{B^2+C^2-4AD}.$$

Il est aisé, d'après cela, de trouver le centre et le rayon de la circonférence représentée par l'équation

$$4x^2 - 12x + 4y^2 + 20y - 2 = 0.$$

32. L'équation de la circonférence nous a déjà donné plusieurs propriétés de cette ligne; et elle doit les fournir toutes, puisqu'elle la représente complétement. Voyons, par exemple, si les deux droites menées des extrémités d'un diamètre à un même point de la courbe, sont perpendiculaires l'une à l'autre (fig. 7).

D'abord l'équation de la droite BM étant de la forme $y = ax + b$, la condition de passer par le point B ou $(-R, 0)$, donnera $0 = -aR + b$. Retranchant cette équation de la précédente, on aura, pour l'équation de la droite BM,

$$y = a(x + R).$$

De même, l'équation de la droite CM sera

$$y = a'(x - R).$$

D'ailleurs, l'équation de la circonférence est

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Les deux droites devant se couper en M sur la circonférence, les coordonnées du point d'intersection, sont respectivement les mêmes dans les trois équations précédentes. Si donc on prend les valeurs de x et de y, dans les deux premières, et qu'on substitue dans la troisième, celle-ci sera satisfaite, et on aura ainsi, réductions faites,

$$x = \frac{a' + a}{a' - a} R, \quad y = \frac{2aa'}{a' - a} R \quad \text{et} \quad aa'(aa' + 1) = 0.$$

La dernière équation donne d'abord $aa' + 1 = 0$; ce qui prouve que les droites menées des extrémités d'un diamètre à un même point de la circonférence, sont perpendiculaires l'une à l'autre (18). La même équation fournit ensuite $aa' = 0$; d'où $a = 0$ et $a' = \frac{0}{0}$, ou bien $a' = 0$ et $a = \frac{0}{0}$. Cela signifie que, si l'une des deux droites est menée suivant l'axe des x, l'autre aura telle direction qu'on voudra.

Il est visible, en effet, que dans cette dernière supposition, les deux droites se coupent toujours sur la circonférence, conformément à l'hypothèse; mais cette seconde solution ne fournit aucune propriété, et on aurait pu se dispenser d'y avoir égard.

Remarquons que si, dans le produit des deux premières équations proposées, on substitue la valeur de aa' tirée de $aa'+1=0$, on résoudra le problème où il faut trouver le lieu des sommets de tous les angles droits, dont les côtés passent constamment par deux points donnés.

33. Cherchons actuellement les relations nécessaires pour que deux circonférences se coupent ou se touchent. Prenons pour axe des x la droite d qui joint les deux centres, l'origine des coordonnées rectangulaires étant au centre du plus grand des deux cercles et l'abscisse positive du second centre étant la droite d elle-même : il est clair que les équations des deux circonférences sont respectivement

$$x^2+y^2=R^2 \text{ et } (x-d)^2+y^2=R'^2.$$

Pour les points où les deux circonférences se coupent, les x et les y sont respectivement les mêmes dans les équations précédentes ; de sorte, qu'en résolvant ces équations, on trouvera, pour les coordonnées des points d'intersection,

$$x=\frac{1}{2d}(d^2+R^2-R'^2);$$

$$y=\pm\frac{1}{2d}\sqrt{(d+R+R')(d+R-R')(d+R'-R)(R+R'-d)}.$$

1° On voit qu'il y a deux points d'intersection, pour lesquels x n'a qu'une seule valeur ; ce qui prouve que *la droite qui joint les deux points de rencontre est perpendiculaire à la droite qui joint les deux centres*. De plus, comme les deux valeurs de y sont égales et de signes contraires, *la première droite est divisée en deux parties égales par la seconde*.

2° R étant le plus grand rayon, les deux premiers facteurs sous le radical de y sont positifs ; donc si les deux autres facteurs sont positifs aussi, c'est-à-dire si l'on a en même temps $d<R+R'$ et $d>R-R'$, les deux valeurs de y seront réelles et les deux circonférences se couperont en deux points. Donc, *lorsque la distance des centres de deux cercles est moindre que la somme de leurs rayons, mais plus grande que leur différence, les deux circonférences se coupent.*

Les deux valeurs de y seraient encore réelles, si l'on pouvait avoir en même temps $R>d+R'$ et $d>R+R'$. Mais ces inégalités sont impossibles ; car dès que $R>d+R'$, à plus forte raison $R+R'>d$.

3° Lorsqu'on a $d>R+R'$, l'un des deux derniers facteurs sous le radical de y est négatif, tandis que les trois autres sont positifs ; donc alors les deux valeurs de y sont imaginaires et les deux cercles ne se coupent pas. Il en serait de même si l'on avait $d<R-R'$.

4° Si $d=R+R'$, le dernier facteur sous le radical de y sera nul ; les deux valeurs se réduiront à une seule 0, et par conséquent les deux circonférences n'auront qu'un seul point de commun, placé sur la distance des centres. Il en serait encore de même si l'on avait $d=R-R'$.

5° Réciproquement, dès que les deux circonférences n'ont qu'un seul point de commun, les deux valeurs de y se réduisent à une seule; ce qui ne peut arriver qu'autant qu'elles sont nulles toutes les deux, et par suite qu'autant que l'un des deux derniers facteurs sous le radical est zéro. On a donc $y=0$ et $d=R+R'$, ou $d=R-R'$; ainsi *quand deux circonférences se touchent, le point de contact est placé sur la distance des centres, et cette distance vaut la somme ou la différence des rayons.*

6° Enfin, si $d=0$ et $R>R'$, les deux valeurs de y sont imaginaires; mais si $d=0$ et $R=R'$, x et y sont indéterminés: aussi les circonférences sont-elles intérieures l'une à l'autre, dans le premier cas, et coïncident dans le second.

34. Examinons maintenant les propriétés qui résultent de l'intersection d'une circonférence par une droite ou plusieurs. Soient x', y' les coordonnées d'un point donné sur le plan d'un cercle. L'origine des coordonnées rectangulaires étant au centre, les équations de la circonférence et d'une sécante menée par le point (x', y'), seront respectivement

$$x^2+y^2=R^2 \text{ et } y-y'=a(x-x').$$

Soit z la distance du point (x',y') à l'un des points d'intersection de la sécante avec la circonférence; pour ce point d'intersection, les x et les y seront respectivement les mêmes dans les deux équations précédentes et dans celle-ci:

$$z^2=(x-x')^2+(y-y')^2.$$

Prenant donc les valeurs de x et de y dans la seconde et la troisième équation; puis substituant dans la première, après avoir posé $\sqrt{1+a^2}=m$; observant d'ailleurs que si d désigne la distance du point (x',y') à l'origine, on a $d^2=x'^2+y'^2$, on obtiendra

$$z^2+\frac{2}{m}(x'+ay')z+d^2-R^2=0 \ldots (1).$$

Cette équation n'ayant que deux racines, il s'ensuit qu'une droite ne peut jamais couper la circonférence qu'en deux points. Soient z' et z'' les deux valeurs de z; on aura, d'après la composition des équations,

$$z'+z''=-\frac{2}{m}(x'+ay'),$$
$$z'z''=d^2-R^2.$$

Le produit $z'z''$ étant indépendant de la valeur de a, qui détermine la direction de la sécante, on voit que si par le même point (x',y'), on mène une autre sécante et qu'on désigne par v', v'' les distances de ce point aux deux points d'intersection, on trouvera pareillement $v'v''=d^2-R^2$: donc $z'z''=v'v''$, et conséquemment

$$z' : v' :: v'' : z''.$$

Cette proportion a lieu, 1° lorsque le point (x', y') est dans l'intérieur du cercle; 2° lorsqu'il est au-dehors; 3° lorsqu'étant au-dehors, on a $v'=v''$. De là résultent donc les trois théorèmes qu'on démontre en géométrie.

Maintenant, supposons que les deux valeurs z' et z'' de z, dans l'équation (1), soient égales : dans ce cas, la droite $y-y'=a(x-x')$ sera tangente à la circonférence, puisque ses deux points d'intersection avec cette courbe, se réuniront en un seul ; on aura donc alors $z'+z''=2z'$, $z'z''=z'^2$, et ensuite

$$z'=-\frac{x'+ay'}{m} \text{ et } z'=\pm\sqrt{d^2-R^2}.$$

Si donc le point (x', y') est hors du cercle, on aura $d>R$ et les deux valeurs de z' seront réelles et égales ; on peut donc, *par un point hors du cercle, mener à la circonférence, deux tangentes égales entre elles.*

Si le point (x', y') était dans l'intérieur du cercle, c'est-à-dire si l'on avait $d<R$; z' serait imaginaire et il n'y aurait point de tangente ; ce qui est d'ailleurs évident.

Enfin, si le point (x', y') est sur la circonférence ; en désignant par x'' et y'' ses coordonnées, on aura $x'=x''$, $y'=y''$ et $x''^2+y''^2=R^2$; et comme alors $d=R$, il vient $z'=0$ et $x''+ay''=0$; d'où $a=-\frac{x''}{y''}$. Cette valeur de a étant unique, on voit que *par un point* (x'', y'') *donné sur la circonférence, on ne peut mener qu'une seule tangente à cette ligne.* De là on tire $yy''+xx''=R^2$ pour l'équation de la tangente ; mais nous allons chercher cette équation d'une autre manière.

35. Proposons-nous de trouver l'équation d'une droite (D) perpendiculaire à l'extrémité (x'', y'') du rayon R. D'abord l'équation de ce rayon est de la forme $y=a'x$; et puisque le point (x'', y'') appartient à la fois au même rayon et à la circonférence $x^2+y^2=R^2$, on a à la fois

$$y''=a'x'' \text{ et } x''^2+y''^2=R^2.$$

L'équation de la droite (D), passant par le point (x'', y''), est de la forme $$y-y''=a(x-x'');$$
la condition d'être perpendiculaire au rayon R, donne $aa'+1=0$; d'où à cause de $a'=\frac{x''}{y''}$, il vient $a=-\frac{y''}{x''}$. Substituant cette valeur dans l'équation de (D) et réduisant d'après la relation $x''^2+y''^2=R^2$, on trouvera l'équation cherchée

$$yy''+xx''=R^2.$$

Maintenant pour montrer que la droite (D) représentée par cette équation, est tout entière hors du cercle, retranchons le double de la même équation hors de celle-ci : $x''^2+y''^2=R^2$; nous aurons $$y''^2-2yy''+x''^2-2xx''=-R^2$$

Cette soustraction n'ayant pas changé les valeurs des coordonnées x et y d'un point quelconque de la droite (D), l'équation résultante représente toujours la même droite. Soit d la distance du point (x, y) au centre; on aura $x^2 + y^2 = d^2$. Ajoutant cette équation à la précédente, il viendra

$$(y - y'')^2 + (x - x'')^2 = d^2 - R^2.$$

Cette équation représente encore la même droite (D). Or, le premier membre étant toujours positif, quel que soit le point (x, y) de cette droite, la distance d de ce point au centre sera toujours plus grande que le rayon R; tous les points de (D) sont donc hors du cercle, à l'exception du point (x'', y''), qui est sur la circonférence; la droite (D) n'a donc que le seul point (x'', y'') de commun avec cette courbe : donc elle lui est tangente en ce point.

On voit ainsi que *la perpendiculaire à l'extrémité* (x'', y'') *d'un rayon est tangente à la circonférence.* L'équation de cette tangente est $yy'' + xx'' = R^2$, et sa direction est déterminée par $a = -\frac{y''}{x''}$.

36. Voyons maintenant comment on peut mener une tangente à la circonférence, par un point donné (x', y'). Soit d la distance de ce point à l'origine ou au centre; on aura d'abord

$$x'^2 + y'^2 = d^2 \ldots (1)$$

De plus, le point de contact cherché (x'', y''), étant sur la circonférence, on a

$$x''^2 + y''^2 = R^2 \ldots (2)$$

Enfin, la tangente $yy'' + xx'' = R^2$, devant passer par le point (x', y'), pour lequel $x = x'$ et $y = y'$, il vient

$$y'y'' + x'x'' = R^2 \ldots (3)$$

Résolvant les deux dernières équations, par rapport à x'' et à y'', on aura les coordonnées du point de contact cherché; et les valeurs résultantes montreront de plus dans quels cas il y aura deux tangentes, une seule ou aucune.

Mais il sera beaucoup plus simple de déduire des trois équations précédentes, le moyen de construire la tangente menée par le point (x', y') hors du cercle. Or, ajoutant la seconde équation au quart de la première et retranchant la troisième, on trouvera

$$(y'' - \tfrac{1}{2}y')^2 + (x'' - \tfrac{1}{2}x')^2 = \tfrac{1}{4}d^2 \ldots (4)$$

Les coordonnées x'' et y'' n'ayant pas changé de valeurs, elles appartiennent, dans cette équation, au même point que dans les équations proposées. Mais il est visible que la nouvelle équation représente une circonférence, dont $\frac{1}{2}y'$ et $\frac{1}{2}x'$ sont les coordonnées du centre (26); conséquemment ce centre est le milieu de la distance d. Et comme le rayon est $\frac{1}{2}d$, on voit que cette circonférence est décrite sur la distance d, prise pour diamètre. D'ailleurs, les coordonnées x'' et y'' du point de contact cherché, doivent satisfaire à l'équation (4); ce point appartient donc à la nouvelle circonférence : déjà il appartient à la proposée; il se trouve donc aux intersections de ces deux courbes. De sorte que si l'on joint par des droites ces deux points d'intersection au point donné (x', y'), on aura les deux tangentes que l'on peut mener à la circonférence, par un point situé hors du cercle; et telle est précisément la construction prescrite en géométrie pour mener une tangente à la circonférence, d'un point donné hors de cette courbe.

37. *Un cercle, dont* O *est le centre, et un point* P *étant donnés sur un plan, trouver le lieu des intersections des tangentes aux points où la circonférence est coupée par une droite quelconque menée du point* P.

Plaçons l'origine des coordonnées rectangulaires au centre O et l'axe des x suivant la droite d qui joint ce centre au point P. Soient (x', y') et (x'', y'') les points où la droite tirée de P coupe la circonférence; l'équation de cette droite sera donc

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

Et puisque le point P ou (d, o) se trouve sur la même droite on a

$$-y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(d - x'); \text{ d'où } \frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{-y'}{d - x'}.$$

Les tangentes menées aux points (x', y') et (x'', y''), ont respectivement pour équations

$$yy' + xx' = R^2,$$
$$yy'' + xx'' = R^2.$$

Pour le point d'intersection de ces tangentes, les x et les y sont respectivement les mêmes dans leurs équations. Retranchant la seconde de ces équations de la première, puis remplaçant, dans l'équation résultante, la fraction $\frac{y'-y''}{x'-x''}$, par sa valeur trouvée plus haut, et réduisant, il viendra

$$yy' + xx' = dx; \text{ d'où } R^2 = dx \text{ et } x = \frac{R^2}{d}.$$

Cette valeur de x étant constamment la même, quelle que soit la sécante menée de P, c'est-à-dire quelle que soit l'ordonnée y, représente évidemment une parallèle à l'axe des y. Et suivant que d sera $>$ ou $<$ R, c'est-à-dire suivant que le point P sera au-dehors ou dans l'intérieur du cercle, cette parallèle, au contraire, coupera le cercle, ou lui sera extérieure.

Il résulte donc des calculs précédens, que *si d'un point situé dans le plan d'un cercle, on mène autant de sécantes qu'on voudra, les points de rencontre des deux tangentes aux intersections de chaque sécante, seront tous sur une perpendiculaire à la droite qui joint le centre du cercle au point proposé.*

38. On peut donc dire que la sécante *pivote* sur le point P, quand le point de rencontre des deux tangentes correspondantes parcourt la perpendiculaire P$'$, dont on vient de parler. Pour exprimer plus brièvement ce fait, on a donné au point P, un nom qui signifie *pivot de rotation*; il s'appelle *pôle* de la perpendiculaire P$'$, et celle-ci est dite la *polaire* du point P. Rien n'est plus facile que de trouver le pôle, lorsque la polaire est donnée, et réciproquement; il suffit pour cela, de déterminer d ou x dans $dx = R^2$.

Soit P$''$ le point où la perpendiculaire P$'$ rencontre la droite d, c'est-à-dire l'extrémité de l'abscisse x; on a nommé *pôles conjugués* d'un cercle, deux points P et P$''$ en ligne droite avec son centre, de manière que le rayon R soit moyen proportionnel entre leurs distances d et x à ce centre. D'où il suit que le sommet d'un angle circonscrit au cercle et le milieu de la corde qui joint les deux contacts, sont deux pôles conjugués l'un de l'autre.

39. On appelle *axe radical* de deux cercles, une droite telle, qu'en menant de l'un quelconque de ses points, des tangentes aux deux circonférences, ces tangentes sont égales entre elles. Voyons s'il peut exister une telle droite. Soit d la distance des centres des deux cercles proposés; R et R$'$ leurs rayons. Plaçons l'origine des coordonnées rectangulaires au centre du premier cercle et l'axe des x suivant la droite d. Soit (x', y') un point

tel, qu'en menant de ce point des tangentes aux deux circonférences, les longueurs de ces tangentes, depuis le point (x', y') jusqu'aux deux contacts, soient égales chacune à c; il est visible que les distances de (x', y') à l'origine et au centre du second cercle, forment deux triangles rectangles, ayant l'un R et c pour côtés de l'angle droit, et l'autre R' et c : on a par conséquent

$$x'^2 + y'^2 = R^2 + c^2,$$
$$(d - x')^2 + y'^2 = R'^2 + c^2.$$

Retranchant la seconde de ces équations de la première, on aura

$$x' = \frac{d^2+R^2-R'^2}{2d}, \text{ ou } x' = \tfrac{1}{2}d + \frac{(R+R')(R-R')}{2d}.$$

Cette équation représente une droite d', parallèle à l'axe des ordonnées; car elle reste la même, quelle que soit la longueur c des deux tangentes égales menées du point (x', y'), c'est-à-dire quel que soit ce point et par conséquent son ordonnée y'. De plus, comme cette équation est unique et qu'elle est vraie, quelles que soient les trois quantités R, R' et d, il s'ensuit que deux cercles ont toujours et n'ont jamais qu'un seul axe radical, tel que nous l'avons défini : c'est la droite d' perpendiculaire à la distance d des centres et éloignée du premier de la distance x', que nous venons de calculer. Il est bien facile, d'après cette valeur, de construire l'axe radical de deux cercles donnés.

40. Il résulte aussi de la valeur précédente de x', 1° que si deux cercles se coupent, leur axe radical est dirigé suivant la corde commune; 2° que si deux cercles se touchent, intérieurement ou extérieurement, leur axe radical est la tangente commune au point qu'ils ont de commun; 3° enfin, que la différence des carrés des rayons de deux cercles, est égale à la différence des carrés des distances de leurs centres au point où l'axe radical coupe la droite qui joint ces deux centres. Ce point est dit le *centre radical* des deux cercles proposés.

41. *Les axes radicaux de trois cercles quelconques, pris deux à deux, se coupent toujours en un même point, appelé* centre radical *de ces cercles.*

Supposons d'abord que les trois cercles proposés A, B, C, ne se coupent pas, ou du moins que l'un d'eux ne coupe pas les deux autres; soit P le point de rencontre de l'axe radical des deux cercles A et B, avec l'axe radical des deux cercles A et C;

du point P menons les tangentes A', B', C', aux cercles A, B, C. Puisque P appartient à l'axe radical des deux cercles A et B, les tangentes A' et B' sont égales (39). De même, puisque P appartient à l'axe radical des deux cercles A et C, les tangentes A' et C' sont égales. Donc les tangentes B' et C', égales à la même A', sont égales entre elles, et par conséquent P est un point de l'axe radical des deux cercles B et C : donc enfin les trois axes radicaux se rencontrent au même point P.

Supposons actuellement que les trois cercles A, B, C se coupent ; soient R, R', R'' leurs rayons ; les équations de ces cercles seront respectivement

$$(x-p)^2+(y-q)^2=R^2 \text{ ou } A''=0,$$
$$(x-p')^2+(y-q')^2=R'^2 \text{ ou } B''=0,$$
$$(x-p'')^2+(y-q'')^2=R''^2 \text{ ou } C''=0.$$

Les équations des cordes communes à ces trois cercles, c'est-à-dire de leurs axes radicaux, sont respectivement

$$A''-B''=0,\ A''-C''=0 \text{ et } B''-C''=0.$$

Or, pour le point P d'intersection des deux premiers axes, les x et les y sont respectivement les mêmes dans leurs équations; donc, puisqu'en retranchant la première de ces équations de la seconde, on obtient $B''-C''=0$, c'est-à-dire l'équation du troisième axe radical, il s'ensuit que le point P tombe aussi sur cet axe.

42. Voici quelques problèmes à résoudre :

I. Trouver le lieu de tous les points tels, que la somme des carrés des distances de chacun à deux points donnés, vaille un carré donné c^2.

II. Connaissant l'angle de deux droites qui se coupent au centre d'un cercle donné, mener à celui-ci une tangente telle, que ses parties comprises entre le point de contact et les deux droites proposées, aient un rapport connu n. (Ce problème peut avoir huit solutions.)

III. Par un point donné sur le plan d'un cercle connu, mener deux sécantes perpendiculaires entre elles, de manière que les parties interceptées par la circonférence, soient dans le rapport donné n. (La solution conduit à un théorème assez remarquable.)

IV. Etant donnés tant de points qu'on voudra sur un plan, en trouver un autre tel, que la somme des carrés de ses distances aux premiers, vaille un carré donné c^2. (On pourrait aussi demander que cette somme fût la moindre possible; et alors, s'il y a seulement trois points, sommets d'un triangle, le point cherché sera le centre de gravité de ce triangle.)

V. Trouver le lieu des sommets de tous les angles égaux à A, dont les côtés passent constamment par deux points donnés B et C. (La solution analytique conduit à la construction pour décrire sur la corde BC un segment capable de l'angle donné A; mais il faut pour cela, que l'origine des coordonnées rectangulaires soit au milieu de la corde BC et l'axe des x dirigé suivant cette corde : autrement, il serait fort difficile d'arriver à la construction du problème.)

De la Transformation des coordonnées.

43. Lorsqu'on veut résoudre une question à l'aide des principes de la géométrie analytique, la première chose à faire est de choisir les axes des coordonnées, de manière à simplifier les calculs et à fournir les résultats les plus faciles à interpréter géométriquement. Or, pour cela, les axes doivent être le plus souvent rectangulaires; quelquefois cependant il faut les prendre obliques; d'autres fois l'un d'eux doit être dirigé suivant une droite donnée, l'origine doit être placée à un certain point, etc. Mais l'usage seul peut apprendre comment il faut disposer les axes et l'origine, pour que l'équation à considérer ait le moindre nombre de termes qu'il se puisse.

Comme il n'arrive pas toujours qu'on ait pu faire le meilleur choix à cet égard, et que souvent les axes sont déjà déterminés, on a recours à *la transformation des coordonnées*, dont le but est de faire disparaître quelques termes de l'équation proposée, en changeant l'origine et la direction des axes; préparation qui la met en état d'être résolue et discutée plus aisément.

44. Quand on veut ainsi passer d'un système de coordonnées à un autre, on cherche, pour un point quelconque, les valeurs des anciennes coordonnées en fonction des nouvelles : en substituant ces valeurs dans l'équation proposée, elle appartient toujours aux mêmes points; mais ces points s'y trouvent rapportés aux nouveaux axes. Par conséquent les propriétés de la courbe restent toujours les mêmes, et il n'y a de changement que dans la manière dont elles sont exprimées.

45. Voyons d'abord comment on passe d'un système de coordonnées rectangulaires, à un système de coordonnées obliques, d'une autre origine. Soient h et k les coordonnées AQ et QA′ de la nouvelle origine A′ (fig. 8); soient A′X′ et A′Y′ les nouveaux axes des x' et des y'; M un point quelconque de la ligne; x et

y ses coordonnées rectangulaires AP et PM ; x' et y' ses nouvelles coordonnées A'P' et P'M ; soient enfin $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ les équations des nouveaux axes A'X' et A'Y'. Menant A'E et P'D parallèles à AX ; prenant A'I $= 1$ et tirant IK perpendiculaire à A'E, on aura IH $= a$ et IK $= a'$. De sorte, qu'en désignant A'H par m et A'K par m', il viendra $m^2 = 1 + a^2$ et $m'^2 = 1 + a'^2$.

Cela posé, on a évidemment

$$x = h + \text{A'C} + \text{P'D},$$
$$y = k + \text{CP'} + \text{DM}.$$

Les triangles semblables A'IH et A'CP' donnent

$$m : x' :: 1 : \text{A'C} = \frac{x'}{m} \text{ et } m : x' :: a : \text{CP'} = \frac{ax'}{m}.$$

Pareillement, les triangles semblables A'IK et P'DM fournissent

$$m' : y' :: 1 : \text{P'D} = \frac{y'}{m'} \text{ et } m' : y' :: a' : \text{DM} = \frac{a'y'}{m'}.$$

Substituant ces valeurs, on trouve

$$\left.\begin{array}{l} x = h + \frac{x'}{m} + \frac{y'}{m'}, \quad m^2 = 1 + a^2, \\ y = k + \frac{ax'}{m} + \frac{a'y'}{m'}, \quad m'^2 = 1 + a'^2. \end{array}\right\} (1)$$

Telles sont les formules générales pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires, à un système de coordonnées obliques, d'une autre origine. Si l'origine était la même, h et k seraient nuls.

46. Si l'angle des nouveaux axes était droit, on aurait $aa' + 1 = 0$; d'où à cause de $m^2 = 1 + a^2$, il vient $a' = -\frac{1}{a}$, $m' = \frac{m}{a}$ et par suite

$$\left.\begin{array}{l} x = h + \frac{x'}{m} + \frac{ay'}{m}, \\ y = k + \frac{ax'}{m} - \frac{y'}{m} \end{array}\right\} (2)$$

Ces formules sont donc pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires, à un système de coordonnées rectangulaires, d'une autre origine.

47. Maintenant, si l'on veut passer d'un système d'axes obliques, à un système d'axes rectangulaires, de même origine, il

suffira de faire $h=0$ et $k=0$, dans les formules (1) et de résoudre ces mêmes formules par rapport à x' et y' : on trouvera ainsi

$$y'=\frac{m'(y-ax)}{a'-a} \text{ et } x'=\frac{m(a'x-y)}{a'-a} \ldots (3)$$

48. Enfin, si l'on veut passer d'un système quelconque, à un autre parallèle, on prendra

$$x=h+x' \text{ et } y=k+y',$$

comme il est bien facile de le vérifier.

Il resterait encore à trouver les formules pour passer d'un système de coordonnées obliques, à un autre oblique pareillement ; mais comme nous ne ferons pas usage de ces formules, nous ne les rapporterons pas ici.

49. Pour donner une application des formules précédentes, supposons que les axes étant obliques, l'équation d'une ligne soit

$$x^2+y^2+\tfrac{48}{25}xy=64, \ldots (4)$$

et proposons-nous de transformer les coordonnées, de manière à faire disparaître le produit xy. Pour cela, on prendra les formules pour passer d'un système d'axes obliques, à un système d'axes rectangulaires, de même origine ; on remplacera donc, dans l'équation précédente, y et x par les seconds membres des formules (3) ; puis après avoir développé, on égalera à zéro le coefficient du produit xy, et on aura ainsi les deux équations

$$(a^2m'^2+a'^2m^2-\tfrac{48}{25}aa'mm')x^2+(m^2+m'^2-\tfrac{48}{25}mm')y^2= 64(a'-a)^2 \text{ et}$$

$$2am'^2+2a'm^2-\tfrac{48}{25}(a+a')mm'=0.$$

Remettant les valeurs de m et m', dans la dernière de ces équations, et supprimant le facteur $2(a+a')$, on aura

$$aa'+1-\tfrac{24}{25}\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}=0.$$

Cette équation entre les deux indéterminées a et a' fera connaître l'une d'elles, dès que l'autre sera donnée. Si l'on prend, par exemple, $a=0$, il en résultera $a'=\frac{7}{24}$; et alors l'équation de la courbe représentée par l'équation (4), deviendra

$$x^2+y^2=64;$$

cette courbe est donc une circonférence ayant 8 pour rayon.

On pourrait prendre toute autre valeur pour a ; par exemple, en faisant $a=\frac{3}{4}$, il vient $a'=\frac{4}{3}$ et encore $x^2+y^2=64$.

50. Une équation du second degré, à deux variables x et y, peut représenter quatre courbes différentes, nommées *courbes du second degré*, savoir : la circonférence, l'ellipse, la parabole et l'hyperbole. Ces courbes sont aussi appelées *sections coniques*, parce qu'on les obtient en coupant un cône droit par des plans diversement inclinés.

Nous allons chercher les principales propriétés des trois dernières courbes.

De l'Ellipse.

51. On appelle *ellipse*, une courbe plane telle, que la somme des distances de chacun de ses points à deux points donnés F, F', est constamment la même et égale à une droite donnée 2A. Ces points F et F' sont dits les *foyers* de l'ellipse, et les droites menées des foyers à un point quelconque de la courbe, sont les *rayons vecteurs* de cette courbe.

52. Pour construire l'ellipse, d'après sa définition, prenons le milieu O de la distance FF' (fig. 9) ; portons sur cette droite prolongée, les distances OB et OB' égales chacune à la moitié de 2A ; les points B et B' appartiendront d'abord à la courbe cherchée. Car ayant $FB = A - OF$ et $F'B = A + OF$, il vient $FB + F'B = 2A$. On verra de même que $FB' + F'B' = 2A$.

Pour avoir d'autres points, prenons sur FF' un point quelconque I, puis des foyers F et F' comme centres et avec des rayons respectivement égaux à IB et IB', décrivons deux arcs se coupant en M et M' ; ces deux points appartiennent à l'ellipse. Car puisque $FM = IB$ et $F'M = IB'$, on a $FM + F'M = BB' = 2A$. De même $FM' + F'M' = 2A$. Ainsi M et M' sont deux points de l'ellipse ; et on en trouverait quatre, si l'on portait successivement chacune des deux ouvertures de compas aux deux foyers. On voit d'ailleurs que BB' est perpendiculaire au milieu de MM'.

Après avoir trouvé ainsi une série de points suffisamment approchés les uns des autres, on les joindra par une ligne continue BCB'C', qui sera l'ellipse demandée.

On peut aussi construire l'ellipse d'un mouvement continu, en fixant aux foyers F et F' deux épingles, auxquelles soit attaché un fil dont la longueur égale 2A ; puis en faisant glisser un style ou un crayon qui tienne ce fil toujours tendu : la courbe sera tracée quand l'instrument mobile aura fait deux demi-révolutions, l'une au-dessus de FF′ et l'autre au-dessous.

Enfin si l'ellipse doit être tracée sur le terrain, on se sert d'un cordeau ayant 2A pour longueur, et de trois piquets, dont deux fixent les extrémités du cordeau aux foyers F, F′, et le troisième sert à tracer la courbe, en tenant le cordeau toujours tendu.

Il est clair que quand les deux foyers coïncident, l'ellipse est une circonférence de cercle; et à mesure que les deux foyers s'éloignent l'un de l'autre, l'ellipse s'alonge de plus en plus, jusqu'à devenir enfin une ligne droite, lorsque les deux foyers sont arrivés aux extrémités de la droite $BB' = 2A$.

53. Maintenant que nous avons une idée de la forme de l'ellipse, cherchons l'équation de cette courbe. Pour cet effet, plaçons l'origine des coordonnées rectangulaires au milieu O de la droite FF′, que nous prendrons égale à $2c$, et dirigeons l'axe des x suivant cette droite. Soit M un point quelconque de la courbe; soient x, y les coordonnées OP et PM du point M; enfin, soient r et r' les deux rayons vecteurs FM et F′M, dont la somme, d'après la définition, doit toujours être égale à la droite donnée 2A : on aura donc d'abord $r' + r = 2A$.

Ensuite, à cause de $FP = x - c$ et $F'P = x + c$, les deux triangles rectangles FMP, F′MP, fournissent

$$r^2 = y^2 + (x-c)^2 \text{ et } r'^2 = y^2 + (x+c)^2.$$

Prenant successivement la somme et la différence de ces équations, il viendra, en réduisant,

$$r'^2 + r^2 = 2y^2 + 2x^2 + 2c^2 \text{ et } r'^2 - r^2 = 4cx.$$

Mais $r'^2 - r^2$ étant la même chose que $(r'+r)(r'-r)$, si dans ce produit, on substitue

$$r' + r = 2A,$$

on trouvera
$$r' - r = \frac{2cx}{A}.$$

Ces deux équations donnent

$$r' = A + \frac{cx}{A} \text{ et } r = A - \frac{cx}{A}.$$

Substituant ces valeurs dans $r'^2 + r^2 = 2y^2 + 2x^2 + 2c^2$, on obtiendra

$$A^2 + \frac{c^2x^2}{A^2} = x^2 + y^2 + c^2;$$

d'où $A^2y^2 + (A^2 - c^2)x^2 = A^2(A^2 - c^2)$.

Il est clair que FF′ ou $2c < 2A$; donc $A^2 - c^2$ est essentiellement positif; et si l'on pose $A^2 - c^2 = B^2$, B sera connu, et l'on aura enfin $$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2.$$

Telle est l'équation la plus simple de l'ellipse.

54. Discutons cette équation; et pour cela, résolvons-la par rapport à y ; nous aurons

$$y = \pm \frac{B}{A}\sqrt{A^2 - x^2}.$$

Ces deux valeurs étant égales et de signes contraires, on voit que pour une même abscisse AP, il y a deux ordonnées égales PM, PM′, et que par suite la courbe est divisée en deux parties égales par l'axe des x. On verra de même qu'elle est divisée en deux parties par l'axe des y. De plus, P étant le milieu de la *corde* MM′, parallèle à OC, il s'ensuit que chaque axe des coordonnées divise en deux parties égales toute corde parallèle à l'autre.

Faisant successivement $x = 0$ et $y = 0$, pour avoir les points où la courbe rencontre les axes des coordonnées, on trouvera $y = \pm B$ et $x = \pm A$. L'ellipse coupe donc l'axe des ordonnées en deux points C et C′, placés à la même distance B de l'origine O et de part et d'autre. De même, elle coupe l'axe des abscisses en deux points B et B′, à la même distance A et de part et d'autre de l'origine.

L'abscisse augmentant depuis $x = 0$ jusqu'à $x = A$, l'ordonnée diminue depuis $y = B$ jusqu'à $y = 0$. De plus, $x = A$ représentant une parallèle à l'axe des ordonnées (3), et les deux valeurs de y étant alors nulles, les deux points où cette parallèle coupe l'ellipse, se réunissent en un seul B; donc cette parallèle est tangente à la courbe en B. Cette courbe ne saurait donc s'étendre dans le sens OB au-delà de l'abscisse $x = A = OB$. Effectivement, pour $x > A$, les deux valeurs de y sont imaginaires. Ainsi l'ellipse est renfermée dans le rectangle qu'on obtient en menant des parallèles aux axes des coordonnées, par les quatre points B, C, B′, C′, où elle coupe ces axes. En outre $x = A$ est la plus grande abscisse et $y = B$ la plus grande ordonnée.

Les droites $2A = BB'$ et $2B = CC'$ s'appellent les *axes* de l'ellipse ; la première $2A$ en est le *grand axe*, la seconde $2B$ le *petit axe* et l'origine O le *centre*.

L'ellipse est dite *rapportée à ses axes et au centre*, lorsqu'elle est représentée par l'équation $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$, les coordonnées étant rectangulaires. Les extrêmités B et B' du grand axe $2A$ sont les *sommets* de l'ellipse, et la demi-distance c des deux foyers se nomme *excentricité*. Si les axes $2A$ et $2B$ sont égaux, l'excentricité c est nulle, puisqu'elle est donnée par $A^2 - c^2 = B^2$; les deux foyers coïncident donc avec l'origine, et l'ellipse n'est plus qu'un cercle, ayant A pour rayon. Aussi l'équation de l'ellipse se réduit-elle alors à celle de la circonférence $x^2+y^2=A^2$. La circonférence n'est donc qu'une ellipse dont les deux axes sont égaux.

55. Pour construire les deux foyers, et conséquemment l'excentricité c lorsque les axes sont donnés, il suffit de décrire un arc de l'extrémité C du petit axe, comme centre, et avec un rayon A égal au demi-grand axe ; cet arc coupera ce grand axe BB' aux deux foyers F et F'.

56. Il importe de remarquer actuellement, que réciproquement, *toute équation de la forme* $My^2+Nx^2=P$, M, N *et* P *étant positifs et les coordonnées rectangulaires, représente une ellipse*. D'abord si M n'était pas plus grand que N ; en prenant alors l'axe des x pour celui des y et réciproquement, le coefficient de y^2, dans l'équation résultante, serait plus grand que celui de x^2. Nous pouvons donc supposer $M > N$. Dans ce cas, multiplions les deux membres de l'équation proposée par $\frac{P}{MN}$, et posons $\frac{P}{N} = A^2$ et $\frac{P}{M} = B^2$; cette équation deviendra

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2 \ldots (1)$$

Dans cette équation A et B sont connus, et A est plus grand que B. Or, prenant sur l'axe des x, deux points F et F', de part et d'autre de l'origine et à une distance c telle qu'on ait $c^2 = A^2 - B^2$, puis désignant par d et d' les distances de F et F' à un point quelconque (x, y) de la courbe (1), on aura

$$d^2 = y^2 + (x-c)^2 \text{ et } d'^2 = y^2 + (x+c)^2.$$

Développant ces valeurs, observant que $c^2 = A^2 - B^2$ et que l'équation (1) donne $y^2 = B^2 - \frac{B^2x^2}{A^2}$, il viendra

$$d^2 = B^2 - \frac{B^2x^2}{A^2} + x^2 - 2cx + A^2 - B^2 = A^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{A^2};$$

d'où $d^2 = \left(A - \frac{cx}{A}\right)^2$. Comme la plus grande valeur de x est A et que $c < A$, on voit que la valeur absolue de d, la seule qu'il nous faille considérer ici, est $d = A - \frac{cx}{A}$.

Par des calculs tout-à-fait semblables, on trouvera $d' = A + \frac{cx}{A}$; donc $d + d' = 2A$. Ainsi l'équation (1), et conséquemment l'équation proposée $My^2 + Nx^2 = P$, représente une courbe telle, que la somme des distances de chacun de ses points à deux points donnés F et F', est constamment égale à la droite donnée 2A; donc cette courbe est une ellipse, dont 2A et 2B sont les axes, F et F' les foyers et c l'excentricité (54).

Il est facile, d'après cela, de tracer les ellipses exprimées par les équations

$$\tfrac{2}{3}x^2 - 2 + \tfrac{1}{12}y^2 = 1 - \tfrac{2}{3}y^2,$$

$$7y^2 + 6x - \tfrac{11}{24} + \frac{x^2}{5} = 6 - x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 + 5y.$$

Dans la dernière de ces équations, on fera d'abord disparaître les premières puissances de x et de y, en employant les formules $x = h + x'$ et $y = k + y'$.

Les valeurs trouvées plus haut pour d et d' font voir que la distance d'un foyer à un point quelconque de l'ellipse, est une fonction *rationnelle* de l'abscisse de ce point. Il serait bien aisé de démontrer que les foyers sont les seuls points du plan de l'ellipse qui jouissent de cette propriété.

57. *Si l'on coupe la surface convexe d'un cône droit par un plan incliné à l'axe* CV *et rencontrant toutes les génératrices, l'intersection* MNGR *sera une ellipse* (fig. 10).

Par l'axe CV, menons le plan HCI perpendiculaire au plan coupant MNGR et le rencontrant suivant la droite RN que nous désignerons par 2A. Plaçons l'origine des coordonnées rectangulaires au milieu O de RN et l'axe des x suivant cette droite. Soient x et y les coordonnées OP et PM d'un point quelconque M de la courbe MNGR; nous aurons $PN = A - x$ et $PR = A + x$. Or, PM étant perpendiculaire à l'intersection RN, le sera aussi au plan HCI; donc si par la droite PM, on mène un plan perpendiculaire à l'axe CV, ce plan coupera la surface conique suivant une circonférence, dont DS sera le diamètre. Mais M est un point de cette circonférence, et MP, perpendiculaire au plan HCI, l'est aussi au diamètre DS; donc $MP^2 = PS \times PD$, ou $y^2 = PS \times PD$.

Reste à déterminer PS et PD. Pour cela, on observe que les deux droites SD et IH sont parallèles, tandis que les deux droites non-parallèles IH et NR, situées dans le même plan CIH, finiront toujours par se rencontrer en un point K; les triangles KRH et RDP sont donc semblables, aussi bien que KNI et PNS, et il vient

$$KR : A + x :: KH : DP, \quad KN : A - x :: KI : PS.$$

Prenant les valeurs de DP et PS dans ces proportions, puis substituant ces valeurs dans celle de y^2, on aura, pour tous les points de l'intersection MNGR,

$$y^2 = \frac{KH.KI}{KR.KN}(A^2 - x^2).$$

Faisant $x = 0$ dans cette équation, on aura les distances de l'origine O aux points où la courbe coupe l'axe des y : désignant ces distances par B, on obtiendra

$$B^2 = \frac{KH.KI}{KR.KN}A^2, \text{ ou } \frac{B^2}{A^2} = \frac{KH.KI}{KR.KN}.$$

Il est clair que B est connu, puisque les droites KH, KI, KR, KN, sont déterminées par les dimensions du cône et la position du plan coupant, qui sont données. Ainsi l'équation de l'intersection devient $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$;

cette courbe est donc une ellipse, dont 2A et 2B sont les axes, O le centre, et R et N les sommets (56).

58. Voyons maintenant comment l'équation de l'ellipse conduit aux diverses propriétés de cette courbe. D'abord il est facile de voir que la double ordonnée qui passe par un foyer, vaut $\frac{2B^2}{A}$. On la nomme *paramètre* : c'est une troisième proportionnelle aux deux axes.

Ensuite, soient (x, y) et (x', y') deux points quelconques de l'ellipse; on aura

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A - x^2), \, y'^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x'^2);$$

d'où l'on tire $y^2 : y'^2 :: (A - x)(A + x) : (A - x')(A + x')$; c'est-à-dire, que dans l'ellipse, les carrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des distances des pieds de ces ordonnées aux extrémités du grand axe.

59. *Toute droite* MON *menée par l'origine* O *et terminée de part et d'autre à l'ellipse, est divisée en deux parties égales par cette origine* (fig. 9). En effet, les équations de l'ellipse et de la droite MON, étant

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2 \text{ et } y = ax\,;$$

pour les points où ces deux lignes se coupent, leurs équations sont satisfaites par les mêmes valeurs de x et les mêmes valeurs de y. Si donc on élimine y entre ces équations, on trouvera pour x deux valeurs égales et de signes contraires; de sorte que l'une étant OP, l'autre sera OP′; et les deux triangles rectangles OMP et ONP′ seront égaux : donc OM = ON.

Les droites terminées à l'ellipse et menées par l'origine, étant divisées chacune en deux parties égales par cette origine, sont appelées *diamètres* de l'ellipse (ce qui a fait donner à l'origine le nom de *centre* de la courbe).

Il est bien aisé de prouver qu'une droite $y = ax + b$ ne peut jamais couper l'ellipse en plus de deux points.

60. *Les deux axes de l'ellipse sont l'un le plus grand et l'autre le plus petit de tous ses diamètres.* Car en désignant par d le demi-diamètre OM, on aura $d^2 = x^2 + y^2$. Substituant dans cette équation la valeur de y^2, tirée de l'équation de l'ellipse, il viendra

$$d^2 = B^2 + \frac{A^2 - B^2}{A^2}\,x^2.$$

Comme $A > B$, il est clair, par cette égalité, que la plus grande et la plus petite valeur de d, répondent à la plus grande et à la plus petite valeur de x, c'est-à-dire à $x = A$ et $x = 0$; la plus grande et la plus petite valeur de d sont donc en effet, $d = A$ et $d = B$.

Il suit de là que si du centre de l'ellipse et avec des rayons égaux à ses demi-axes, on décrit deux circonférences de cercle, l'ellipse comprendra la plus petite et sera comprise dans la plus grande.

61. *Suivant qu'un point est situé sur l'ellipse, au-dehors ou au-dedans, le trinome* $A^2y^2 + B^2x^2 - A^2B^2$ *est nul, positif ou négatif.* En effet, on sait déjà que pour tout point sur l'ellipse, ce trinome est nul. Mais l'abscisse x restant la même, si le point

(x, y) est au-dehors ou au-dedans de l'ellipse, l'ordonnée y sera plus grande ou plus petite que sur l'ellipse; le trinome sera donc plus grand ou plus petit que zéro; il sera par conséquent positif ou négatif. La réciproque est vraie.

62. *Lorsque deux droites* $y = ax + b$ *et* $y = a'x + b'$, *menées des extrémités du grand axe, se coupent sur l'ellipse, on a toujours* $A^2aa' + B^2 = 0$. D'abord ces droites passant par les points $(A, 0)$ et $(-A, 0)$, leurs équations deviennent respectivement

$$y = a(x - A),$$
$$y = a'(x + A).$$

L'équation de l'ellipse est d'ailleurs

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2.$$

Puisque les deux premières lignes se coupent sur la troisième, il s'ensuit que y a les mêmes valeurs dans les trois équations précédentes, ainsi que x. Si donc on prend ces valeurs de y et de x dans les deux premières équations, et qu'on les substitue dans la troisième, celle-ci sera satisfaite et deviendra

$$aa'(A^2aa' + B^2) = 0.$$

Cette équation fournit d'abord $aa' = 0$, qui n'apprend rien; elle donne ensuite $A^2aa' + B^2 = 0$. Ce qu'il fallait démontrer.

On aurait encore la même relation si les droites qui se coupent sur l'ellipse, partaient des extrémités du petit axe.

Il est facile de voir que réciproquement, si deux droites $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, partant des extrémités de l'un des axes, ont leurs a et a' tels, qu'on ait $A^2aa' + B^2 = 0$, ces deux droites se couperont sur l'ellipse.

63. On appelle *cordes supplémentaires* d'une ellipse, les droites qui, partant des extrémités d'un même diamètre, se coupent sur la courbe.

Soit v l'angle compris par deux cordes supplémentaires menées des extrémités du grand axe, du côté des y positifs, et v' l'angle des cordes supplémentaires tirées des extrémités du petit axe, du côté des x positifs; on aura donc à la fois, pour les deux premières cordes,

$$y = a(x - A), \; y = a'(x + A) \text{ et } \tang v = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Substituant dans la dernière équation, les valeurs de a et a', tirées des deux autres, puis ayant égard à l'équation de l'ellipse, on trouvera

$$\text{tang } v = \frac{-2AB^2}{(A^2-B^2)y}.\ \text{De même, tang } v' = \frac{2A^2B}{(A^2-B^2)x}.$$

Puisque tang v est négative et tang v' positive, l'angle v est obtus et l'angle v' aigu. De plus, dès que y aura sa plus grande valeur B et x sa plus grande valeur A, l'angle v sera le plus grand possible et l'angle v' le moindre possible. D'où il suit, 1° que *l'angle compris entre les cordes supplémentaires menées des extrémités du grand axe, est toujours obtus, et atteint son maximum, lorsque son sommet tombe à l'extrémité du petit axe*; 2° que *l'angle des deux cordes supplémentaires, qui partent des extrémités du petit axe, est toujours aigu, et parvient à son minimum, lorsque son sommet arrive à l'extrémité du grand axe*; 3° enfin que *l'angle obtus maximum et l'angle aigu minimum, valent ensemble deux angles droits*; car ayant alors tang $v' =$ — tang v, il vient $v + v' = 180°$.

64. *Pour une même abscisse, les ordonnées de l'ellipse et de la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre, sont entre elles comme le petit axe est au grand.* Car soient y et y' les ordonnées de l'ellipse et de la circonférence, pour une même abscisse x; les équations de ces deux courbes seront respectivement $\quad A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$ et $y'^2 + x^2 = A^2$.

On tire de ces équations

$$y'^2 = A^2 - x^2 \text{ et } y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2) = \frac{B^2}{A^2}y'^2.$$

De là résulte $y : y' :: B : A :: 2B : 2A$.

65. Cette propriété donne le moyen de décrire une ellipse par points, lorsqu'on connaît ses deux axes. On trace d'abord deux circonférences ayant ces deux axes pour diamètres; on mène ensuite, d'un point de la plus grande, une ordonnée sur le grand axe et une droite au centre; enfin, on tire, par le point où cette droite coupe la petite circonférence, une parallèle à l'axe des x : cette parallèle rencontre l'ordonnée précédente, en un point de l'ellipse cherchée.

66. On peut aussi tracer, d'un mouvement continu, l'ellipse dont on connaît les axes. Pour cela, on prend une règle dont la longueur RM $=$ A, et sur laquelle on marque la distance MI $=$

B (fig. 11); faisant ensuite mouvoir cette règle, de manière que R soit toujours sur CC′ et I toujours sur BB′, l'extrémité M décrira l'ellipse demandée.

Car soient x et y les coordonnées OP, PM du point M, et menons RQ parallèle à OB; nous aurons

$$\mathrm{B} : \mathrm{A} :: y : \mathrm{MQ} = \frac{\mathrm{A}y}{\mathrm{B}} \text{ et } \mathrm{MQ}^2 + x^2 = \mathrm{A}^2;$$

d'où il vient $\mathrm{A}^2y^2 + \mathrm{B}^2x^2 = \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2$:

le point M est donc en effet sur l'ellipse cherchée.

Ce moyen est le plus ordinairement employé pour décrire une ellipse sur le papier; et dans ce cas, une petite bande de papier remplace la règle.

67. *Si les extrémités d'une droite donnée qui se meut, sont assujéties à rester respectivement sur deux droites perpendiculaires entre elles, un point quelconque donné sur la droite mobile, décrira une ellipse.*

Ce théorème, que nous laissons à démontrer, a pu suggérer la construction suivante d'un instrument très-simple, pour décrire d'un mouvement continu, l'ellipse dont les axes 2A et 2B sont donnés. On compose cet instrument de trois règles (fig. 12) : la plus grande FF′ $= 2\mathrm{A} + 2\mathrm{B}$, et les deux autres OM, MC, sont égales chacune à $\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$. La règle EF a son milieu O sur le centre et son arête E′F′ sur le grand axe de l'ellipse. Une cheville ronde passe dans les trous percés au milieu O de EF et à l'extrémité O de OM. Les règles OM et MC sont réunies par une articulation en M à leur extrémité commune. La règle OM est placée au-dessus des deux autres. Enfin, sur MC est un trou N qui reçoit la pointe à tracer et qui est tel qu'on ait MN $= \frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})$.

Rien n'est plus facile que l'usage de cet instrument, appelé *triangle variable* (voyez page 26 de la Géométrie des courbes, par M. Bergery) : on fait glisser la pointe C, placée d'abord en F′, le long de F′O, et pendant ce mouvement, la pointe N décrit un quart de l'ellipse. Pour tracer un second quart, on fera passer MC sous OM, de manière que le point C se meuve de O en E′. Enfin, la grande règle étant retournée bout à bout et appliquée de nouveau sur le grand axe, on tracera de même la seconde moitié de l'ellipse.

Pour démontrer que le point N du triangle variable est constamment sur l'ellipse dont les axes ont fourni les dimensions de l'instrument, désignons par x et y les coordonnées OP et PN du point N, et menons NR parallèle à OM; à cause de OM $=$ MC, nous aurons RN $=$ NC et PR $=$ PC. En outre, comme CM $= \frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ et CN $=$ B, il est clair qu'on a

$$y^2 = \mathrm{B}^2 - \mathrm{PC}^2 \text{ et } \mathrm{B} : \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) :: 2\mathrm{PC} : x - \mathrm{PC}.$$

De là on déduit $\mathrm{PC} = \frac{\mathrm{B}x}{\mathrm{A}}$ et $\mathrm{A}^2y^2 + \mathrm{B}^2x^2 = \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2$, équation de l'ellipse proposée; donc le point N est constamment sur cette ellipse et la décrit.

68. Cherchons actuellement l'équation d'une tangente à l'ellipse représentée par l'équation $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$.

Pour cela, considérons d'abord une sécante rencontrant l'ellipse aux deux points (x', y') et (x'', y'') : l'équation de cette sécante sera donc (14)

$$y - y'' = a(x - x'') \text{ et } a = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

Les deux points (x', y') et (x'', y'') se trouvant sur l'ellipse, on doit avoir

$$A^2y'^2 + B^2x'^2 = A^2B^2,$$
$$A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2.$$

Retranchant la seconde de ces équations hors de l'autre, il viendra $A^2(y'^2 - y''^2) + B^2(x'^2 - x''^2) = 0$;

d'où $A^2(y' + y'')\dfrac{y' - y''}{x' - x''} + B^2(x' + x'') = 0$,

et $A^2a(y' + y'') + B^2(x' + x'') = 0$.

Si les deux points d'intersection (x', y') et (x'', y'') se réunissent en un seul, la sécante n'aura que ce seul point de commun avec l'ellipse; elle lui sera donc *tangente*. Alors, comme $x' = x''$ et $y' = y''$, on aura

$$2A^2ay'' + 2B^2x'' = 0, \text{ ou } a = -\frac{B^2x''}{A^2y''}.$$

Substituant cette valeur de a dans l'équation $y - y'' = a(x - x'')$, qui représente maintenant la tangente à l'ellipse au point (x'', y''); chassant le dénominateur et réduisant, d'après $A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2$, on trouvera, pour l'équation cherchée de la tangente à l'ellipse en (x'', y''),

$$A^2yy'' + B^2xx'' = A^2B^2.$$

Il est facile de vérifier qu'en effet, la droite (D) représentée par cette équation, est tout entière hors de l'ellipse. Car si on retranche le double de la même équation hors de $A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2$, il viendra

$$A^2(y''^2 - 2yy'') + B^2(x''^2 - 2xx'') = -A^2B^2;$$

d'où en complétant les carrés, on déduit

$$A^2(y - y'')^2 + B^2(x - x'')^2 = A^2y^2 + B^2x^2 - A^2B^2.$$

Cette équation représente toujours la même droite (D). Or, on voit que le trinome $A^2y^2+B^2x^2-A^2B^2$ est positif pour tous les points de cette droite, excepté pour le point (x'', y''); donc tous les points de (D), excepté (x'', y''), sont hors de l'ellipse (61); donc la droite (D) n'a que le seul point (x'', y'') de commun avec l'ellipse; donc elle lui est tangente en ce point.

69. Comme le coefficient a, qui détermine la direction de la tangente (12), n'a qu'une seule valeur, il s'ensuit que par un point (x'', y'') donné sur l'ellipse, on ne peut mener qu'une seule tangente à cette courbe.

C'est ce qu'on vérifie d'ailleurs en cherchant le point de contact (x'', y'') d'une tangente à l'ellipse, menée par un point donné (x', y'). Dans ce cas, les équations de l'ellipse et de la tangente, sont :

$$A^2y''^2+B^2x''^2=A^2B^2,$$
$$A^2y'y''+B^2x'x''=A^2B^2.$$

Eliminant y'' de ces équations, on trouvera, pour x'',

$$x''=\frac{A^2B^2x'\pm A^2y'\sqrt{A^2y'^2+B^2x'^2-A^2B^2}}{A^2y'^2+B^2x'^2}.$$

Si le point (x', y') est hors de l'ellipse, le trinome sous le radical sera positif (61); x'' et y'' auront donc deux valeurs réelles, et il y aura deux tangentes. Mais si le point (x', y') est sur l'ellipse, le trinome sous le radical sera nul; x'' et y'' n'auront alors qu'une seule valeur réelle chacune, et il n'y aura qu'une tangente. Enfin, si le point (x', y') est dans l'intérieur de la courbe, le trinome sous le radical sera négatif; donc x'' et y'' seront imaginaires, et il n'y aura pas de tangentes. Ce qui est d'ailleurs évident.

70. Remarquons en passant, que si des équations $A^2y''^2+B^2x''^2=A^2B^2$ et $A^2ay''=-B^2x''$, on tire les valeurs de y'' et x'', qu'ensuite on substitue ces valeurs dans l'équation $y''=ax''+b$, qui est celle de la tangente au point (x'', y''), cette équation deviendra

$$A^2a^2+B^2=b^2.$$

D'où il est aisé de voir que la tangente ne peut être parallèle à l'un des deux axes, que quand le point de tangence est à une extrémité de l'autre axe.

71. Si dans l'équation de la tangente MT à l'ellipse (fig. 13), on fait $y=0$, on aura l'abscisse x ou OT du point T où cette tangente coupe l'axe des x, et il viendra $OT=\frac{A^2}{x''}$. Mais OF

$= OF' = c$, $FM = A - \frac{cx''}{A}$ (53) et $F'M = A + \frac{cx''}{A}$; donc

$$TF = OT - OF = \frac{A^2}{x''} - c = \frac{A}{x''}\left(A - \frac{cx''}{A}\right) = \frac{A}{x''} \times FM,$$

$$TF' = OT + OF' = \frac{A^2}{x''} + c = \frac{A}{x''}\left(A + \frac{cx''}{A}\right) = \frac{A}{x''} \times F'M.$$

Prenant $ME = FM$, on aura $TF' : TF :: F'M : FM$ ou ME; d'où il suit que FE est parallèle à TM, et qu'ainsi l'angle GMF' = MEF = EFM = FMT. De sorte que *dans l'ellipse, les rayons vecteurs* FM, F'M, *menés au point de tangence* M, *font avec la tangente* MT *et d'un même côté de cette ligne, deux angles égaux.*

D'après cette propriété importante, on démontre en Physique, que tous les rayons calorifiques émanés du point F, se réfléchissent sur l'ellipse et vont se réunir au point F'; et réciproquement. C'est de là que les points F et F' ont reçu leur nom de *foyer*.

72. Nous avons résolu plus haut (69), par l'analyse, le problème de mener une tangente à l'ellipse, par un point donné. Voici la solution graphique de ce problème (fig. 13):

1° Supposons que le point donné soit sur l'ellipse, par exemple en M. Menant alors les rayons vecteurs FM et F'M, prolongeant l'un d'eux F'M de la longueur $MK = MF$ et tirant la droite MIT perpendiculaire à FK, cette perpendiculaire sera la tangente demandée. Car les deux triangles rectangles MIF et MIK étant égaux, on a l'angle FMT = IMK = F'MG; les deux rayons vecteurs FM et F'M font donc avec la droite MT et d'un même côté, deux angles égaux; cette droite MT coïncide donc avec la tangente en M (71). Il serait d'ailleurs facile de démontrer que tous les points de la droite GMT sont hors de l'ellipse, à l'exception du point M.

2° Supposons actuellement le point donné hors de l'ellipse, et soit G ce point. Du foyer F' comme centre et avec le grand axe 2A pour rayon, on décrira un arc de cercle; du point G comme centre et avec le rayon GF, on décrira un second arc, coupant le premier en K et K'; on mènera les droites F'K et F'K': ces deux droites couperont l'ellipse aux deux points M et M' de tangence, et GM, GM', seront les tangentes demandées. En effet, par construction, $F'MK = 2A$. Mais le point M étant sur l'ellipse, on a aussi $F'MF = 2A$; donc $MK = MF$. D'ailleurs, par construction, GF $=$ GK ; donc la droite GMT est perpendiculaire au milieu de FK ; cette droite est donc tangente au point M (1°). On démontrera de même que GM$'$ est tangente en M$'$.

73. Il résulte de la construction (1°) de la tangente MT, que I étant le milieu de FK et O le milieu de FF$'$, la droite OI est la moitié de F$'$K. Mais F$'$K $=$ F$'$M $+$ MF $= 2$A ; donc OI $=$ A. Donc *les pieds des perpendiculaires menées d'un foyer sur les tangentes à l'ellipse, appartiennent à la circonférence ayant le grand axe pour diamètre.*

74. On appelle *normale* d'une courbe, la perpendiculaire à sa tangente au point de contact. Ainsi *dans l'ellipse, la normale* MN *divise en deux parties égales l'angle* FMF$'$, *formé par les rayons vecteurs menés au point de tangence.*

75. Si l'on veut trouver l'équation d'une normale à l'ellipse, il suffira d'observer d'abord que cette droite passe par le point de tangence (x'', y''), et que par suite son équation est de la forme $y - y'' = a'(x - x'')$.

De plus, cette droite étant perpendiculaire à la tangente, pour laquelle $a = -\frac{B^2x''}{A^2y''}$, il faut qu'on ait la relation $aa' + 1 = 0$, qui donne $a' = \frac{A^2y''}{B^2x''}$. Ainsi l'équation de la normale devient

$$y - y'' = \frac{A^2y''}{B^2x''}(x - x'').$$

Pour le point N où cette normale rencontre l'axe des abscisses, on a $y = 0$; ce qui donne

$$x = \text{ON} = \frac{A^2 - B^2}{A^2}x''.$$

On voit que la distance ON sera toujours plus petite que OF ou c. Retranchant cette valeur hors de OP ou x'', on aura la distance du pied de l'ordonnée au pied de la normale. Cette distance se nomme *sounormale* ; sa valeur est donc

$$\text{PN} = \frac{B^2}{A^2}x''.$$

Elle est par conséquent de même signe que l'abscisse du point de tangence et moindre que cette abscisse.

76. Quant à la tangente, pour avoir le point où elle rencontre

l'axe des x, on fera $y = o$ dans son équation, qui donnera alors, comme on l'a vu (75)

$$x \text{ ou } OT = \frac{A^2}{x''}.$$

Si de cette valeur on retranche OP ou x'', il restera la distance PT du pied de l'ordonnée au point où la tangente rencontre l'axe des x. Cette distance se nomme *soutangente*; son expression est

$$PT = \frac{A^2 - x''^2}{x''}.$$

Cette valeur étant indépendante du second axe 2B, convient aussi à la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre. Si donc on trace cette circonférence et qu'on lui mène une tangente au point où elle est rencontrée par le prolongement de l'ordonnée PM de l'ellipse, cette tangente coupera l'axe des x au point T; et TM sera tangente à l'ellipse au point M.

77. On peut aisément démontrer les théorèmes que voici:

I. Si on prend sur les prolongemens des axes de l'ellipse, quatre points dont les distances au centre soient égales chacune à la corde qui joint les extrémités des mêmes axes, on aura les sommets d'un carré circonscrit à la courbe.

II. Les tangentes aux extrémités d'un même diamètre, sont parallèles entre elles; et réciproquement, si deux tangentes à l'ellipse sont parallèles, la droite qui joint les deux points de contact, passe par le centre.

De là il suit que trois tangentes à l'ellipse ne peuvent jamais être parallèles entre elles.

III. La plus courte distance d'un point du grand axe à l'ellipse, est la normale menée par ce point.

IV. L'origine étant au sommet $(-A, o)$ et les coordonnées parallèles aux axes 2A et 2B, l'ellipse est représentée par $A^2y^2 + B^2x^2 = 2AB^2x$, et sa tangente au point (x'', y''), par $A^2yy'' + B^2xx'' = AB^2(x + x'')$.

V. Le demi-petit axe B est moyen proportionnel, 1° entre les distances des deux foyers à la tangente; 2° entre les deux ordonnées de la tangente qui ont leurs pieds aux extrémités du grand axe; 3° entre les distances d'un foyer aux deux sommets; 4° enfin, entre la normale et la perpendiculaire menée du centre sur la tangente. En outre, si p et r sont les distances d'un foyer à la tangente et au point de contact, r' désignant la distance de ce point à l'autre foyer, on aura $p^2 : B^2 :: r : r'$.

VI. Si le sommet d'un angle droit est à l'un des foyers de l'ellipse et que l'un des côtés de cet angle passe par le point de tangence, l'autre côté rencontrera la tangente sur une perpendiculaire au grand axe, qui sera la même pour toutes les tangentes, et qu'on nomme la *directrice* de l'ellipse. De plus, les distances d'un point de l'ellipse au foyer et à la directrice voisine sont entre elles comme $c : A$.

VII. Le sommet d'un angle droit mobile, dont les côtés sont continuellement tangens à l'ellipse, décrit une circonférence de même centre que cette courbe et d'un rayon égal à la droite qui joint les extrémités des deux axes.

VIII. Lorsque la portion d'une tangente à l'ellipse, comprise entre les perpendiculaires aux extrémités du grand axe, est le diamètre d'une circonférence, cette circonférence passe par les deux foyers.

78. On appelle *diamètres conjugués* de l'ellipse, deux diamètres tels, qu'en les prenant pour axes des coordonnées, l'équation de la courbe conserve la même forme que pour ses axes rectangulaires.

Cherchons ces diamètres, et prenons, à cet effet, les formules pour passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système de même origine (45), savoir :

$$x = \frac{x'}{m} + \frac{y'}{m'} \quad \text{et} \quad y = \frac{ax'}{m} + \frac{a'y'}{m'},$$

formules dans lesquelles $m^2 = 1 + a^2$ et $m'^2 = 1 + a'^2$. Substituant ces valeurs de x et de y dans l'équation $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$, qui est celle de l'ellipse rapportée à ses axes et au centre, on trouvera

$$\frac{A^2a'^2 + B^2}{m'^2}y'^2 + \frac{A^2a^2 + B^2}{m^2}x'^2 + \frac{A^2aa' + B^2}{mm'}2x'y' = A^2B^2.$$

Pour que cette équation soit de même forme que celle qui est relative aux axes $2A$ et $2B$, il faut qu'elle ne contienne pas le produit $x'y'$ des nouvelles coordonnées ; il faut donc profiter de l'indétermination de a et a' pour faire disparaître ce terme, en rendant son coefficient nul, ce qui donne la condition

$$A^2aa' + B^2 = 0, \ldots (1)$$

et l'équation de la courbe devient, en y supprimant les accens des coordonnées, dont on n'a plus besoin, pourvu qu'on se rappelle que ces coordonnées sont en général obliques,

$$\frac{A^2a'^2 + B^2}{m'^2}y^2 + \frac{A^2a^2 + B^2}{m^2}x^2 = A^2B^2 \ldots (2)$$

La condition (1) qui existe entre a et a', étant du premier degré par rapport à chacune de ces quantités, déterminera l'une d'elles quand l'autre sera connue, et en ne prenant pour a', par exemple, que des valeurs réelles, il est clair qu'on n'en aura non plus que de réelles pour a et les coefficiens de y'^2 et x'^2. Il existe donc une infinité de systèmes d'axes des coordonnées, pour lesquels l'équation de l'ellipse ne contient que les carrés y'^2, x'^2 des variables, avec un terme constant. Mais pas un seul de ces systèmes ne sera rectangulaire, puisqu'alors on devrait avoir $aa'+1=0$; ce qui réduit la relation (1) à $A^2=B^2$, chose impossible dans l'ellipse.

A la vérité, en prenant $a'=\infty$ et $a=0$, les relations (1) et $aa'+1=0$ seraient bien satisfaites; mais alors on retomberait sur l'équation aux axes 2A et 2B.

79. Actuellement, si l'on fait successivement $y=0$ et $x=0$, dans l'équation (2), on aura les distances de l'origine aux points où l'ellipse coupe les axes des x et des y obliques : en désignant ces distances par A' et B', la première étant comptée sur l'axe des abscisses et la seconde sur l'axe des ordonnées, on trouvera

$$A'^2=\frac{A^2B^2m^2}{A^2a^2+B^2} \text{ et } B'^2=\frac{A^2B^2m'^2}{A^2a'^2+B^2} \cdots (3)$$

Prenant dans ces équations les valeurs des dénominateurs, et substituant dans l'équation (2) de l'ellipse, elle devient

$$A'^2y^2+B'^2x^2=A'^2B'^2.$$

Dans cette équation, 2A' et 2B' sont les *diamètres conjugués* auxquels l'ellipse est rapportée. En prenant à volonté un diamètre pour 2A', ce qui fera connaître a, la relation (1) donnera a' et la seconde valeur (3) déterminera 2B', conjugué de 2A'. De sorte que *tout diamètre de l'ellipse a son conjugué.*

80. Remarquons présentement que *si deux diamètres* 2A' *et* 2B' *sont conjugués, les tangentes aux extrémités de l'un, seront parallèles à l'autre.* Soit en effet, (x'', y'') une extrémité du diamètre 2A'; l'équation de ce diamètre sera $y=ax$ et la condition de passer par le point (x'', y'') donnera $y''=ax''$, ou $a=\frac{y''}{x''}$. Mais pour la tangente $y=a''x+b$, au point (x'', y''), on a $a''=-\frac{B^2x''}{A^2y''}$; ainsi $aa''=-\frac{B^2}{A^2}$. D'un autre côté, la relation (1) donne aussi $aa'=-\frac{B^2}{A^2}$: donc $aa''=aa'$ et $a''=a'$. La tangente à l'extrémité de 2A', est donc parallèle à 2B' (15). On verra de même que la tangente à l'extrémité de 2B' est parallèle à 2A'.

81. Réciproquement, *si les tangentes aux extrémités de deux*

diamètres d *et* d′, *leur sont respectivement parallèles, ces diamètres seront conjugués.* Car si d' n'était pas le conjugué de d, soit d'' ce conjugué ; les tangentes aux extrémités de d'' seront donc parallèles à d, et conséquemment parallèles à la tangente à une extrémité de d' ; ce qui est absurde (77, II). Donc d et d' sont conjugués l'un de l'autre.

82. Remarquons encore que *deux diamètres conjugués* $2A'$ *et* $2B'$, *sont toujours parallèles à deux cordes supplémentaires* $y = px + b$ *et* $y = p'x + b'$. Car pour ces cordes, on a $A^2pp' + B^2 = 0$ (62) ; et pour les diamètres conjugués $2A'$ et $2B'$, on a pareillement $A^2aa' + B^2 = 0$: donc $aa' = pp'$. Rien n'empêche de mener la première corde parallèlement à $2A'$, ce qui donne $p = a$ (15) ; alors il viendra $p' = a'$, et la seconde corde sera parallèle à $2B'$.

83. Etant donc donnés une ellipse et ses deux axes, rien n'est plus facile que de trouver deux diamètres conjugués, comprenant entre eux un angle donné. Il suffit pour cela, de décrire sur l'un des deux axes, un segment capable de l'angle donné, et de mener des cordes supplémentaires à l'un des points d'intersection de l'arc avec l'ellipse : les diamètres parallèles à ces cordes, seront les diamètres conjugués demandés.

Bien entendu que cette construction doit être faite sur le grand axe, si l'angle donné est obtus, et sur le petit, si l'angle est aigu. Il faut de plus que l'angle donné soit moindre que le plus grand angle obtus et plus grand que le plus petit angle aigu (63) : autrement, le problème serait impossible.

84. Cherchons maintenant si l'ellipse peut avoir des diamètres conjugués égaux entre eux ; et pour cela, observons d'abord que dans les expressions (3) de A'^2 et B'^2, on a $m^2 = 1 + a^2$, $m'^2 = 1 + a'^2$ et $B^2 = -A^2aa'$. Substituant ces valeurs et réduisant, il viendra

$$A'^2 = \frac{A^2a'(1+a^2)}{a'-a} \quad \text{et} \quad B'^2 = \frac{-A^2a(1+a'^2)}{a'-a} \cdots (4)$$

Si les diamètres conjugués $2A'$ et $2B'$ sont égaux, les valeurs précédentes de A'^2 et B'^2 seront égales aussi, et réciproquement. Egalant donc ces deux valeurs et simplifiant, on aura, pour déterminer les directions des deux diamètres conjugués égaux,

$$a'(1+a^2) = -a(1+a'^2); \text{ d'où } (a+a')(aa'+1) = 0.$$

On ne saurait avoir $aa' + 1 = 0$; il faut donc que $a + a' = 0$; d'où $a' = -a$, ou bien $a = -a'$; ce qui fournit toujours les deux mêmes droites. Ainsi, *bien que l'ellipse ait une infinité de diamètres égaux deux à deux, elle n'a cependant que deux diamètres conjugués qui soient égaux entre eux : ce sont les diamètres parallèles aux cordes qui joignent les extrémités des deux axes.*

Effectivement, en faisant $a' = -a$, dans la relation $A^2aa' + B^2 = 0$, on en tire $a = \frac{B}{A}$ et $a' = -\frac{B}{A}$; d'où $1 : a :: A : B$, $1 : -a' :: A : B$. Ce qui montre que les diamètres conjugués égaux, sont parallèles aux cordes qui joignent les extrémités des deux axes, et sont dirigés conséquemment suivant les diagonales du rectangle que forment les tangentes aux extrémités des mêmes axes.

L'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués égaux, a pour équation

$$y'^2 + x'^2 = A'^2,$$

qui est analogue à celle du cercle entre coordonnées rectangulaires.

85. Ajoutons présentement entre elles les équations (4), et réduisons ; nous aurons

$$A'^2 + B'^2 = A^2 - A^2aa', \quad \text{ou} \quad A'^2 + B'^2 = A^2 + B^2.$$

Ainsi *dans l'ellipse, la somme des carrés de deux diamètres conjugués quelconques, est égale à la somme des carrés des deux axes.*

86. Multipliant l'une par l'autre les valeurs (4) de A'^2 et B'^2, et observant toujours que $B^2 = -aa'A^2$, il viendra

$$A'^2B'^2 = \frac{A^2B^2(1+a^2)(1+a'^2)}{(a'-a)^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{A'B'(a'-a)}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}} = AB.$$

La figure formée par les demi-diamètres A' et B', et les tangentes à leurs extrémités, est évidemment un parallélogramme (80). Si donc s désigne le sinus de l'angle compris entre A' et B', l'aire de ce parallélogramme sera $A'B's$. Or, nous avons vu (20) que cette aire a pour valeur le premier membre de la dernière équation précédente ; ainsi on a

$$A'B's = AB, \quad \text{ou} \quad 4A'B's = 4AB;$$

c'est-à-dire que *le parallélogramme construit sur deux diamètres* *conjugués, est équivalent au rectangle construit sur les deux axes.*

87. Il est facile de voir que *les coordonnées comprenant un angle* θ, *toute équation de la forme* $My^2 + Nx^2 = P$, M, N, P, *étant des nombres positifs, représente une ellipse.* D'abord si l'on prend les nombres A′ et B′ tels qu'on ait $A'^2 = \frac{P}{N}$ et $B'^2 = \frac{P}{M}$, cette équation deviendra

$$A'^2 y^2 + B'^2 x^2 = A'^2 B'^2 \ldots (5).$$

Or, on peut toujours trouver une ellipse dont 2A′ et 2B′ soient les diamètres conjugués, comprenant l'angle θ; car en désignant par s le sinus de cet angle, les axes 2A et 2B seront donnés par les relations $A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2$ et $AB = A'B's$, desquelles on tire

$$A+B = \sqrt{A'^2 + B'^2 + 2A'B's} \text{ et } A-B = \sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B's};$$

les valeurs de A et B seront donc toujours réelles.

Connaissant les axes 2A et 2B, on pourra tracer l'ellipse; et cette ellipse, rapportée à ses diamètres conjugués 2A′ et 2B′, sera représentée, comme on l'a vu (79), par l'équation (5), et conséquemment par l'équation proposée $My^2 + Nx^2 = P$.

88. Il résulte aussi des valeurs que l'on vient de trouver pour A + B et A — B, que *si l'on prend sur la perpendiculaire au diamètre* 2A′, *menée d'une extrémité de son conjugué* 2B′, *deux points éloignés chacun de cette extrémité d'une distance égale à* A′, *les deux axes seront respectivement la somme et la différence des droites qui joignent ces deux points au centre.*

De là, étant donnés, de longueurs et de positions, deux diamètres conjugués de l'ellipse, on en déduira les grandeurs des deux axes; et on aura ensuite leurs positions, en prenant la valeur de a dans la première des équations (3); ce qui donnera

$$a = \frac{B}{A}\sqrt{\frac{A^2 - A'^2}{A'^2 - B^2}}, \text{ ou } a = \frac{B}{A}\sqrt{\frac{(A+A')(A-A')}{(A'+B)(A'-B)}}.$$

89. Reprenons maintenant l'équation de l'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués 2A′ et 2B′, savoir :

$$A'^2 y^2 + B'^2 x^2 = A'^2 B'^2.$$

Cette équation étant absolument de même forme que celle qui est relative aux axes, toutes les propriétés indépendantes de l'inclinaison des coordonnées, seront communes aux axes de l'ellipse et à ses diamètres conjugués. Ainsi, 1° *Chaque diamètre divise les cordes parallèles à son conjugué en deux parties égales, et partage conséquemment l'ellipse en deux parties superposables.* D'où il suit que pour avoir un diamètre et le centre d'une ellipse tracée, il suffit de mener une droite par les milieux de deux cordes parallèles.

2° *Les carrés des ordonnées, aux diamètres conjugués, sont entre eux comme les produits des distances des pieds de ces ordonnées aux points où l'axe des abscisses coupe la courbe.*

De sorte que pour décrire une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués et l'angle qu'ils font entre eux, il faut d'abord tracer une ellipse sur ces diamètres, pris pour axes rectangulaires, puis incliner les ordonnées de cette ellipse sous l'angle donné, sans changer leurs longueurs : les points ainsi trouvés, appartiendront à l'ellipse demandée.

3° Pour deux cordes supplémentaires $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, on aura toujours $A'^2aa' + B'^2 = 0$; et réciproquement.

4° La tangente $y = ax + b$, au point (x'', y''), a pour équation

$$A'^2yy'' + B'^2xx'' = A'^2B'^2 \quad \text{et} \quad a = -\frac{B'^2x''}{A'^2y''}.$$

Ce qui donne le moyen de calculer les coordonnées du point de contact d'une tangente à l'ellipse, menée par un point donné. L'équation de cette tangente devient aussi $A'^2a^2 + B'^2 = b^2$.

5° *Si une corde supplémentaire est parallèle au diamètre mené au point de tangence, l'autre corde sera parallèle à la tangente.* Ainsi on peut, sans connaître les axes, mener une tangente à l'ellipse, soit par un point donné sur cette courbe, soit parallèlement à une droite donnée.

6° Enfin, si deux diamètres sont respectivement parallèles à deux cordes supplémentaires, les tangentes aux extrémités de ces diamètres, seront respectivement parallèles à ceux-ci (5°); ces diamètres seront donc conjugués l'un de l'autre (81), et comprendront entre eux un angle égal à celui des deux cordes supplémentaires proposées.

De là, si l'ellipse est tracée ; en décrivant sur un diamètre quelconque un segment capable de l'angle formé par deux diamètres conjugués demandés, on pourra décrire ces diamètres; et si l'angle est droit, les deux diamètres cherchés seront les deux axes de l'ellipse.

90. *Les parallélogrammes ayant respectivement pour diagonales deux diamètres conjugués de l'ellipse et dont les côtés sont parallèles à deux autres diamètres conjugués, sont équivalens.*

Soient 2A, 2B deux diamètres conjugués quelconques et 2A', 2B' deux autres diamètres aussi conjugués. Soit (x', y') une extrémité de 2A' et (x'', y'') une extrémité de 2B'; l'équation de l'ellipse rapportée aux diamètres 2A et 2B, donnera donc

$$A^2y'^2 + B^2x'^2 = A^2B^2 \text{ et } A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2 \ldots (1)$$

L'équation du diamètre 2A' étant $y = a'x$, fournit $y' = a'x'$ ou $a' = \frac{y'}{x'}$. La tangente à l'extrémité (x'', y'') de 2B', étant parallèle à 2A' (80), il vient

$$-\frac{B^2x''}{A^2y''} = \frac{y'}{x'}, \text{ ou } A^2y'y'' + B^2x'x'' = 0 \ldots (2)$$

Cette équation et la première (1) donnent

$$B^2 = \frac{y'}{x''}(y'x'' - x'y'') \text{ et } A^2 = -\frac{x'}{y''}(y'x'' - x'y'') \ldots (3)$$

Avec ces valeurs, la seconde équation (1) se réduit à $x'y' = -x''y''$. Multipliant de part et d'autre par le sinus s de l'angle compris entre A et B, et supprimant le signe —, qui est inutile pour la propriété à démontrer, on aura $x'y's = x''y''s$. Or, s étant le sinus de l'angle entre x' et y' et entre x'' et y'', les produits $x'y's$ et $x''y''s$ expriment les aires respectives des parallélogrammes construits sur les coordonnées x', y' et x'', y'', et ayant pour diagonale, le premier 2A' et le second 2B': donc, etc.

91. Remarquons que comme $x'y' = -x''y''$, les deux équations (3) deviennent

$$B^2 = y'^2 + y''^2 \text{ et } A^2 = x'^2 + x''^2.$$

D'après ces deux relations remarquables, si A et B sont les demi-axes de l'ellipse, ce qui donne $A'^2 = x'^2 + y'^2$ et $B'^2 = x''^2 + y''^2$, on trouvera

$$A'^2 + B'^2 = A^2 + B^2,$$

comme au n° 85. De plus, si s désigne le sinus de l'angle des deux diamètres conjugués 2A' et 2B', la multiplication des équations (3) donnera

$$AB = y'x'' - x'y'' = A'B's \quad (20),$$

relation trouvée au n° 86.

92. *Le diamètre de la base d'un cylindre droit étant égal au second axe* 2B *d'une ellipse donnée, on peut toujours couper ce cylindre par un plan, de manière que la section résultante soit égale à l'ellipse proposée.* Pour cela, menons le plan LKIH suivant l'axe CV du cylindre (fig. 14); prenons $OR = A$, $2A$ étant le grand axe, et tirons RON; nous aurons $RN = 2A$. Suivant RN menons sur le plan HK, un plan perpendiculaire, dont l'intersection avec la surface convexe du cylindre sera la courbe fermée NMRG. Soit M un point quelconque de cette courbe, et x, y les coordonnées rectangulaires OP, PM, de ce point; on aura $PR = A - x$ et $PN = A + x$. Par la droite MP, perpendiculaire au plan HK, soit mené le plan DMS perpendiculaire à l'axe CV; ce plan coupera le cylindre suivant un cercle ayant $DS = IH = 2B$ pour diamètre, et il viendra $PS = B - PQ$ et $PD = B + PQ$. Comme M est un point de la circonférence du cercle précédent et que MP ou y est perpendiculaire au diamètre DS, on a $y^2 = PS \times PD = B^2 - PQ^2$. D'ailleurs, dans le triangle PND, $DQ : NO :: PQ : OP$ ou $B : A :: PQ : x$; donc $PQ = \frac{Bx}{A}$, et il vient, pour tous les points de la courbe NMRG,

$$y^2 = B^2 - \frac{B^2x^2}{A^2} \quad \text{ou} \quad A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2 :$$

donc cette courbe est l'ellipse proposée. Ce qu'il fallait démontrer.

On voit que les sections faites dans un cylindre droit, par des plans, ne sauraient être que des rectangles, des cercles ou des ellipses.

93. Remarquons d'ailleurs que les deux plans HTI et NMR, étant perpendiculaires au plan HK, leur intersection commune est perpendiculaire au même plan, ainsi qu'aux deux droites IH et NR; l'angle de ces deux droites, ou son égal NOF, mesure donc le coin des deux plans HTI et NMR. Et comme la base πB^2 du cylindre est évidemment la projection de l'aire E terminée par l'ellipse NMRG, il s'ensuit que $\pi B^2 = E \times \cos NOF$ (G. 258). Mais le triangle rectangle NOF donne $\cos NOF = \frac{B}{A}$; il vient donc $E = \pi AB$, valeur que nous trouverons plus bas, d'une autre manière.

94. Il résulte de ce qui précède (92) qu'*une ellipse donnée peut toujours être disposée à l'égard d'un plan, de manière que*

sa projection sur ce plan soit un cercle, ayant le second axe pour diamètre; ce qui permet de démontrer, pour l'ellipse, plusieurs propriétés analogues à celle dont jouit le cercle. En voici une :

De tous les quadrilatères qu'on peut inscrire dans une même ellipse, le plus grand est un parallélogramme dont les sommets sont aux extrémités de deux diamètres conjugués. Pour démontrer ce théorème, soit M un quadrilatère inscrit dans l'ellipse proposée et N la projection de M sur le plan du cercle qui est la projection de l'ellipse; N sera un quadrilatère inscrit dans le cercle, et on aura, en désignant par v l'angle des deux plans, $N = M \cos v$ (G. 258).

Puisque $\cos v$ est constant, tandis que M et N sont variables, il est clair que quand N sera un maximum, ce qui arrive dès que N est un carré, M sera aussi un maximum. Les diagonales d et d' du quadrilatère maximum M ayant pour projections les diagonales D et D′ du carré N, et celles-ci se coupant au centre du cercle, il s'ensuit que d et d' se coupent au centre de l'ellipse. De plus, dans l'ellipse, toute corde c parallèle à d, a pour projection dans le cercle, la corde C parallèle à D; et puisque D′ divise évidemment C en deux parties égales, de même d' divisera c en deux parties égales. Ainsi les diagonales d et d' du quadrilatère maximum M, sont telles que chacune divise en deux parties égales toute corde parallèle à l'autre; donc ces diagonales sont deux diamètres conjugués (89, 1°) et le quadrilatère maximum M, un parallélogramme.

On voit en outre, que comme il y a une infinité de quadrilatères maximums égaux, inscrits dans le cercle, il y a aussi une infinité de quadrilatères maximums équivalens, inscrits dans l'ellipse : tous sont des parallélogrammes, dont un seul rectangle, ayant pour diagonales les deux diamètres conjugués égaux, et un seul losange, ayant pour diagonales les deux axes.

95. Par des raisonnemens analogues aux précédens, on démontrera aisément les théorèmes que voici :

I. De tous les quadrilatères circonscrits à la même ellipse, le plus petit est un parallélogramme, dont les points de tangence sont aux extrémités de deux diamètres conjugués; et il y a une infinité de quadrilatères circonscrits, de même surface minimum, dont un seul rectangle, touchant l'ellipse aux extrémités des deux axes, et un seul losange, ayant les points de contact aux extrémités des diamètres conjugués égaux.

II. De tous les triangles inscrits dans l'ellipse, le plus grand renferme les trois quarts du diamètre mené par son sommet, sa base étant parallèle au conjugué de ce diamètre.

III. De tous les triangles circonscrits à la même ellipse, le plus petit a la base parallèle à un diamètre et le sommet sur le prolongement du conjugué de ce diamètre, à une distance du centre égale à ce conjugué.

IV. La droite qui joint le centre d'une ellipse au sommet de l'angle circonscrit, divise la corde de contact en deux parties égales.

D.

96. On appelle *aire* ou *surface* de l'ellipse la portion plane terminée par cette courbe. Pour mesurer cette surface, décrivons une circonférence sur le grand axe comme diamètre : le cercle n'étant qu'un polygone régulier d'une infinité de côtés, infiniment petits ; si de deux sommets voisins D et D′ de ce polygone (fig. 15), on mène les ordonnées DP et D′P′, elles couperont l'ellipse aux points M et M′ ; et comme les cordes des arcs infiniment petits DD′ et MM′, coïncident nécessairement avec ces arcs, les deux figures PP′D′D et PP′M′M, sont deux trapèzes de même hauteur PP′ ; donc PD′ : PM′ :: PD + P′D′ : PM + P′M′. Mais 2A et 2B désignant les deux axes de l'ellipse proposée, on a vu (64) que PD : PM :: P′D′ : P′M′ :: A : B ; d'où l'on tire PD + P′D′ : PM + P′M′ :: A : B. Ainsi, à cause du rapport commun, il vient

$$PD' : PM' :: A : B.$$

On voit, par cette proportion, que chacun des trapèzes qui composent l'aire du cercle est au trapèze correspondant de l'aire de l'ellipse, comme A : B ; donc la somme des trapèzes qui composent l'aire du cercle est à la somme des trapèzes qui forment l'aire de l'ellipse :: A : B ; c'est-à-dire que l'aire πA^2 du cercle est à l'aire E de l'ellipse :: A : B. Cette proportion donne $E = \pi AB$. Donc, *l'aire de l'ellipse est égale au nombre π multiplié par le produit des deux demi-axes.*

Soit θ l'angle de deux diamètres conjugués $2A'$ et $2B'$; on aura aussi $E = \pi A'B' \sin \theta$.

97. On voit d'ailleurs que *le secteur elliptique* ABM *est au secteur circulaire* ABD, *comme le second axe est au premier.* Car en raisonnant comme on vient de le faire, on trouvera que le segment elliptique PBM est au segment circulaire PBD, comme B : A. Mais il est de plus visible que APM : APD :: B : A :: PBM : PBD ; donc enfin ABM : ABD :: B : A.

98. Soit θ l'angle des deux diamètres conjugués $2A'$ et $2B'$, s un segment d'ellipse entre une portion de $2A'$ et deux ordonnées parallèles à $2B'$, s' un segment du cercle décrit sur le diamètre $2A'$, compris entre la portion précédente de $2A'$ et les perpendiculaires élevées sur $2A'$, aux extrémités de cette portion ; on trouvera $s = \frac{B'}{A'} s' \sin \theta$.

99. La géométrie élémentaire ne fournit aucun moyen de

mesurer la longueur de l'ellipse, ni celle d'un arc de cette courbe. Il faut se résoudre à envelopper d'un fil l'arc ou l'ellipse et à prendre la longueur du fil pour celle qu'il s'agit de déterminer. Ce procédé n'est pas exact; mais il suffira dans bien des circonstances.

100. Nous dirons que deux lignes brisées sont *semblables*, lorqu'elles ont un même nombre de droites homologues proportionnelles, comprenant un même nombre d'angles homologues égaux. Et par courbes *semblables*, nous entendrons deux courbes telles, qu'en inscrivant dans l'une une ligne brisée quelconque, on pourra inscrire dans l'autre une ligne brisée semblable.

101. *Deux ellipses sont semblables, dès qu'elles ont les axes proportionnels.* Car il est facile de voir qu'en inscrivant dans l'une un polygone formé d'une série de trapèzes, ayant chacun deux côtés perpendiculaires au grand axe, on pourra toujours inscrire dans l'autre un polygone semblable au précédent; de sorte qu'il sera toujours possible d'inscrire des lignes brisées semblables, dans les deux ellipses proposées; ces deux ellipses sont donc semblables (100).

De là résulte que les longueurs des ellipses semblables, sont entre elles comme leurs grands ou leurs petits axes. Il est clair aussi que leurs aires sont proportionnelles aux carrés des mêmes axes (96).

102. Dans deux ellipses semblables, on appelle points *homologues*, deux points dont les coordonnées rectangulaires sont proportionnelles, et arcs *homologues*, deux arcs terminés à des points homologues chacun à chacun. D'où il est aisé de démontrer que dans deux ellipses semblables, 1° les arcs homologues sont semblables et proportionnels aux deux grands axes ou aux deux petits; 2° les segmens compris entre deux arcs homologues et leurs cordes, sont semblables et entre eux comme les carrés des deux grands axes.

103. Voici encore quelques problèmes et théorèmes, faciles à traiter, d'après ce qui précède:

I. Tracer une tangente à l'ellipse, de manière que le point de contact divise en deux parties égales la portion de cette tangente, entre les deux axes.

II. Trouver le plus grand et le plus petit des angles compris par deux rayons vecteurs, menés à différens points de l'ellipse.

III. Soient S et S' les segmens de deux tangentes parallèles, compris entre les points de contact et une troisième tangente à l'ellipse, et soit 2B' le diamètre qui joint les deux premiers points de contact; je dis qu'on aura toujours $SS' = B'^2$.

IV. Si l'on divise en trois parties égales chacune des cordes parallèles à l'un des axes d'une ellipse, les points de division appartiendront à une ellipse concentrique à la première et dont l'aire sera le tiers de l'aire de cette première.

V. Si l'on fixe en un point l'un des sommets du losange formé par quatre règles, mobiles autour de leurs extrémités, et qu'on fasse mouvoir le sommet de l'angle opposé suivant une droite invariable, passant par le point fixe; deux points pris sur les côtés de l'angle mobile et à la distance B du sommet, décriront une ellipse ayant 2B pour petit axe et le point fixe pour centre.

VI. Construire une ellipse semblable à une ellipse donnée et dont l'aire soit à celle de cette dernière dans un rapport connu. Construire une ellipse semblable à deux ellipses données, et dont l'aire vaille la somme ou la différence des aires de ces ellipses.

VII. Le point du cercle qui roule intérieurement sur la circonférence d'un autre cercle de rayon double, décrit une ellipse dont les demi-axes sont la plus grande et la plus petite distance de ce point à la circonférence du cercle auquel il appartient; et suivant que ce point est à la circonférence ou au centre, il décrit une droite ou un cercle égal au cercle mobile.

VIII. Si deux droites $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, touchant continuellement une même ellipse, se meuvent de manière que le produit aa' soit constamment égal à $-p^2$, le point d'intersection des deux tangentes décrira une seconde ellipse. Si l'on conçoit deux tangentes à la seconde ellipse, mobiles comme les deux premières et donnant encore continuellement $aa' = -p^2$, l'intersection de ces dernières décrira une troisième ellipse, de laquelle, d'après les mêmes procédés, on déduira une quatrième ellipse, et ainsi de suite. Cela posé, 1° toutes les ellipses construites sur la première seront semblables entre elles, lui seront concentriques et leurs axes auront les mêmes directions que les siens; 2° les aires de ces ellipses formeront une progression par quotient, dont la raison sera 2.

(Pour la démonstration il faudra d'abord observer que la première tangente est représentée à la fois par les deux équations $y = ax + b$ et $A^2a^2 + B^2 = b^2$, puis on éliminera b. On procédera de même pour la seconde tangente; et alors on verra que a et a' sont racines d'une même équation du second degré; ce qui fournira l'équation de la seconde ellipse; et de même pour la troisième, etc. On pourra aussi examiner les deux hypothèses $aa' = -1$ et $aa' = -\frac{B^2}{A^2}$).

IX. Si un angle droit se meut autour de son sommet placé au centre d'une ellipse, les cordes qui joindront les intersections de ses côtés avec a courbe, seront continuellement tangentes au cercle du même centre que l'ellipse et ayant pour rayon la perpendiculaire abaissée du centre sur la corde qui joint les extrémités de deux demi-axes.

De l'Hyperbole.

104. L'*hyperbole* est une courbe plane telle, que la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes F et F', est constamment égale à une droite donnée 2A. Ces deux

points F et F′, sont dits les *foyers* de l'hyperbole, et les droites menées des foyers à un point quelconque de la courbe, sont les *rayons vecteurs* de cette courbe.

105. Pour construire l'hyperbole, on prend une règle F′D, ayant une extrémité percée d'un trou dont le centre soit sur le prolongement de l'une des longues arêtes (fig. 16). On engage dans ce trou, une pointe plantée au foyer F′, par exemple. A l'autre foyer F est plantée une pointe, autour de laquelle peut tourner l'extrémité d'un fil, dont l'autre extrémité est attachée au point D de la règle. La longueur du fil doit être telle, qu'en la retranchant de F′D, il reste 2A. Faisant glisser une pointe à tracer M le long du fil, on le force à s'appliquer toujours contre la règle qui tourne autour de F′; et alors, par ce mouvement, la pointe M décrit une portion de l'hyperbole demandée. Il est visible, en effet, que dans le mouvement de la règle, on aura toujours $F'M - FM = F'MD - FMD = 2A$; la pointe M sera donc toujours sur l'hyperbole cherchée, et en tracera une portion d'autant plus grande, que la règle F′D sera plus longue.

Faisant tourner de même la règle autour de F et le fil autour de F′, on décrira une autre *branche* de la même hyperbole. De sorte que cette courbe se compose de deux branches égales et opposées, MBM′ et $mB'm'$, qui s'étendent indéfiniment dans les deux sens, au-dessus et au-dessous de la droite FF′.

Cette construction montre d'ailleurs que $FB = F'B'$, et que quand le point M est en B, on a $2A = F'B - FB = F'B - F'B' = BB'$.

Il est clair, d'après cela, que $2A < FF'$. C'est ce qu'on peut voir autrement; car appelant M un point quelconque de l'hyperbole, on aura, d'après la définition, $F'M - FM = 2A$. Mais dans le triangle F′MF, on a $F'M - FM < FF'$; donc $2A < FF'$.

106. On peut aussi décrire l'hyperbole par points, comme il suit : soit O le milieu de la droite FF′, et soient prises les distances OB et OB′ égales chacune à A : les points B et B′ appartiendront d'abord à la courbe cherchée. Car ayant $FB = FO - A$ et $F'B = FO + A$, il vient $F'B - FB = 2A$. De même, $FB' - F'B' = 2A$.

Pour avoir d'autres points, prenons *sur le prolongement* de OF, un point quelconque I; puis des foyers F et F′, comme centres, avec des rayons respectivement égaux à IB et IB', décrivons deux arcs se coupant en M et M'; des mêmes centres F, F' et avec les rayons IB', IB, décrivons deux nouveaux arcs se coupant en m et m'; les points M, M' appartiendront à une branche de la courbe, et les points m, m' à l'autre branche. Car puisque $FM = IB$ et $F'M = IB'$, on a $F'M - FM = BB' = 2A$; donc le point M est à l'hyperbole demandée; et il en est de même des points M', m et m'.

En répétant ces constructions avec des points sur le prolongement de F'F; mais de plus en plus éloignés de F, on obtiendra autant de points qu'il sera nécessaire pour tracer, à la main, la courbe avec quelqu'exactitude.

107. Maintenant que nous savons tracer l'hyperbole et que nous avons une idée exacte de la forme qu'elle affecte, cherchons son équation. A cet effet, plaçons l'origine des coordonnées rectangulaires au milieu O de la droite FF', que nous représenterons par $2c$, et dirigeons l'axe des x suivant cette droite (fig. 16). Soit M un point quelconque de la courbe; soient x, y les coordonnées OP, PM du point M; enfin, soient r et r' les rayons vecteurs FM et F'M, dont la différence, d'après la définition, est constamment égale à la droite donnée 2A : on aura d'abord $r' - r = 2A$.

Ensuite, à cause de $FP = c - x$ et de $F'P = c + x$, les triangles FMP, F'MP fournissent

$$r^2 = y^2 + (c - x)^2 \text{ et } r'^2 = y^2 + (c + x)^2.$$

Prenant successivement la somme et la différence de ces équations, et réduisant, il viendra

$$r'^2 + r^2 = 2y^2 + 2x^2 + 2c^2 \text{ et } r'^2 - r^2 = 4cx.$$

Or, $r'^2 - r^2$ étant la même chose que $(r' - r)(r' + r)$, si dans ce produit, on substitue

$$r' - r = 2A,$$

on en déduira $$r' + r = \frac{2cx}{A}.$$

Ces deux équations donnent

$$r' = \frac{cx}{A} + A \text{ et } r = \frac{cx}{A} - A.$$

Substituant ces valeurs dans $r'^2 + r^2 = 2y^2 + 2x^2 + 2c^2$,
on aura $$A^2 + \frac{c^2x^2}{A^2} = x^2 + y^2 + c^2;$$

d'où $A^2y^2 + (A^2 - c^2)x^2 = A^2(A^2 - c^2)$.

Mais on a vu (105) que $2A < 2c$ ou $A < c$; donc $c^2 - A^2$ est positif. Posons $c^2 - A^2 = B^2$, B sera une quantité donnée et réelle, et nous aurons $A^2 - c^2 = -B^2$; d'où l'on tire

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2;$$

et telle est l'équation la plus simple de l'hyperbole.

Cette équation se déduit de celle de l'ellipse, en changeant, dans cette dernière, B^2 en $-B^2$ ou B en $B\sqrt{-1}$. Ce changement dans les propriétés de l'ellipse, conduira donc à celles de l'hyperbole. Ainsi ces deux courbes jouissent de propriétés analogues, bien que leurs formes soient très-différentes.

108. Prenant la valeur de y dans l'équation précédente de l'hyperbole, on aura

$$y = \pm \frac{B}{A}\sqrt{x^2 - A^2}.$$

Ces deux valeurs étant égales et de signes contraires, il s'ensuit que pour une même abscisse OP, il y a deux ordonnées égales PM et PM'; la courbe est donc divisée en deux parties égales par l'axe des x.

Faisant $x = 0$, pour avoir les points où la courbe rencontre l'axe des y, on aura $y = \pm B\sqrt{-1}$; ces deux valeurs étant imaginaires ou impossibles, l'hyperbole ne rencontre pas l'axe des ordonnées. Tant qu'on aura $x < A$, les valeurs de y seront imaginaires et il n'y aura pas de courbe : si l'on prend $x = \pm A$, ou $x = OB$ et $x = -OB'$, il viendra $y = \pm 0$; l'hyperbole rencontre donc l'axe des abscisses aux deux points B et B', qui donnent $BB' = 2A$. De plus, $x = A$ représentant une parallèle à l'axe des ordonnées, et les deux valeurs de y étant alors nulles, les deux points où cette parallèle rencontre l'hyperbole, se réunissent en un seul en B; donc cette parallèle RR' est tangente à la courbe au point B. On verra de même que la parallèle $x = -A$ ou SS', à l'axe des y, est tangente à l'hyperbole au point B'.

Si l'on prend l'abscisse x positive ou négative, mais numériquement plus grande que A, les deux valeurs de y seront chaque fois réelles, et d'autant plus grande, que x sera plus grande elle-même; la courbe s'étend donc indéfiniment à la droite du point B et à la gauche du point B'.

Enfin on voit que l'hyperbole est composée de deux branches égales, opposées et indéfinies, dont la plus petite distance est BB′ ou 2A (car la plus petite abscisse est $x = A$ ou $x = -A$); et en pliant la figure soit suivant l'axe des x, soit suivant l'axe des y, les quatre parties de la courbe se couvriront parfaitement, et sont égales. Cela résulte aussi de la construction donnée plus haut (105).

109. Les quantités 2A et 2B sont dites les *axes principaux*, ou simplement les *axes* de l'hyperbole, bien qu'elle ne détermine que le premier, égal à BB′, par sa rencontre avec l'axe des abscisses; 2A est le *premier axe*, 2B le *second* et l'origine O le *centre* de la courbe. Les extrémités B et B′ du premier axe, sont les *sommets* de l'hyperbole; et quand elle est représentée par l'équation $A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2$, on dit qu'elle est *rapportée à ses axes et au centre.*

Lorsque les deux axes sont égaux, l'hyperbole est dite *équilatère*; son équation est alors

$$y^2 - x^2 = -A^2;$$

l'hyperbole équilatère est donc entre les hyperboles, ce que le cercle est entre les ellipses.

110. Connaissant le premier axe BB′ et les foyers F, F′, rien n'est plus facile que de construire le second axe 2B; car ayant $B^2 = c^2 - A^2 = OF^2 - OB^2$, si du sommet B comme centre et d'un rayon égal à OF, on décrit un arc coupant l'axe des ordonnées aux points C et C′, on aura $2B = CC'$.

Si l'on veut trouver les deux foyers, connaissant les deux axes BB′ et CC′, on observera que $c^2 = A^2 + B^2 = OB^2 + OC^2$, et alors décrivant du centre O et avec le rayon CB, un arc, cet arc coupera l'axe des x aux deux foyers F et F′.

111. *Toute équation de la forme* $My^2 - Nx^2 = -P$, M, N *et* P *étant des nombres positifs, et les coordonnées étant rectangulaires, représente une hyperbole.* D'abord en multipliant les deux membres de cette équation par $\frac{P}{MN}$, puis posant $A^2 = \frac{P}{N}$ et $B^2 = \frac{P}{M}$, on aura

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2 \dots (1)$$

Dans cette équation A et B sont connus. Prenant sur l'axe des x, de part et d'autre de l'origine O, deux points F et F′, tels que $OF = OF' = c$ (fig. 16) et qu'on ait $c^2 = A^2 + B^2$;

désignant par d et d' les distances FM et F'M du point M ou (x, y) de la courbe (1) aux deux F et F'; on aura évidemment

$$d^2 = y^2 + (c - x)^2 \text{ et } d'^2 = y^2 + (c + x)^2.$$

Développant et observant que $y^2 = \frac{B^2x^2}{A^2} - B^2$ et $c^2 = A^2 + B^2$, on verra, en opérant comme pour l'ellipse (56), que

$$d = \frac{cx}{A} - A \text{ et } d' = \frac{cx}{A} + A; \text{ d'où } d' - d = 2A.$$

Ainsi la courbe représentée par l'équation (1) et conséquemment par l'équation proposée $My^2 - Nx^2 = -P$, est telle que la différence des distances de chacun de ses points aux deux F et F', est constamment égale à 2A; donc cette courbe est une hyperbole (104), dont 2A et 2B sont les axes et F, F' les foyers.

D'après cela, si on avait $\frac{3}{4}y^2 - \frac{1}{2}y - 2x + \frac{34}{3} - \frac{4}{3}x^2 = 0$, rien ne serait plus facile que de tracer la courbe représentée par cette équation, après en avoir chassé les premières puissances de x et de y, en y faisant $x = h + x'$ et $y = k + y'$.

112. *Si l'on coupe les deux nappes opposées d'un cône droit, par un plan perpendiculaire au plan* HCIN' *conduit suivant l'axe* VCV', *l'intersection* FNMT *sera une hyperbole* (fig. 17).

Les deux surfaces convexes pouvant être prolongées à l'infini, il est clair que le plan coupant rencontre HICN' suivant la droite KNN' et les surfaces convexes suivant une courbe composée de deux branches infinies, telles que FNT. Plaçons l'origine au milieu O de la droite NN' $= 2A$, et l'axe des x suivant cette droite. Soit M un point quelconque de la courbe, et MP $= y$, OP $= x$, les coordonnées rectangulaires de ce point; nous aurons NP $= x - A$ et N'P $= x + A$. Menons suivant la droite MP, perpendiculaire au plan HIC, un plan perpendiculaire à l'axe CV; ce plan coupera le cône suivant un cercle, ayant DS pour diamètre. Mais M étant un point de la circonférence de ce cercle; et MP, perpendiculaire au plan HIC, étant aussi perpendiculaire au diamètre DS, il vient $y^2 =$ PS$\times$PD. D'ailleurs, les triangles HN'K et DN'P sont semblables, de même que KIN et PNS; on a donc

$$\text{KN}' : x + A :: \text{KH} : \text{DP} \text{ et } \text{KN} : x - A :: \text{KI} : \text{PS}.$$

Substituant les valeurs de DP et PS, tirées de ces proportions, dans l'expression de y^2, on aura, pour tous les points de la courbe,

$$y^2 = \frac{HK \cdot KI}{KN' \cdot KN}(x^2 - A^2).$$

Pour avoir les distances de l'origine aux points où la courbe coupe l'axe des coordonnées, il faut faire $x = 0$ dans son équation ; ce qui donnera

$$y^2 = -\frac{HK \cdot KI}{KN' \cdot KN} A^2.$$

Donc ces distances sont imaginaires : si on les représente chacune par $B\sqrt{-1}$, B sera connu, et l'équation de la courbe proposée deviendra

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2.$$

cette courbe est par conséquent une hyperbole (111), dont 2A, 2B sont les axes, N et N' les sommets et O le centre.

113. Il est aisé maintenant de tirer de l'équation de l'hyperbole, les diverses propriétés de cette courbe, lesquelles, comme on a vu (107), sont analogues à celles de l'ellipse.

D'abord en résolvant l'équation $A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2$, par rapport à y^2, on verra que dans l'hyperbole, les carrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des distances des pieds de ces ordonnées aux sommets de la courbe.

Ensuite, il est facile de voir que la double ordonnée qui passe par un foyer, vaut $\frac{2B^2}{A}$. On la nomme *paramètre :* c'est une troisième proportionnelle aux deux axes 2A et 2B.

114. *Toute droite* m'OM *menée par le centre* O *est terminée de part et d'autre à l'hyperbole, en est un* diamètre, *parce qu'elle est divisée par ce centre en deux parties égales* (fig. 16). En effet, les équations de la droite m'OM et de l'hyperbole, étant

$$y = ax \text{ et } A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2 ;$$

si on élimine y de ces équations, l'équation finale donnera les abscisses des intersections de la droite m'OM et de l'hyperbole : on aura

$$x = \pm \frac{AB}{\sqrt{B^2 - a^2A^2}}.$$

Ces deux valeurs étant égales et de signes contraires, si l'une est OP, l'autre sera OP' = OP ; et les deux triangles rectangles OPM et OP'm' seront égaux : donc OM = Om'.

115. Pour que le diamètre soit *réel*, il faut qu'on ait $B^2 >$

a^2A^2 : si B^2 était moindre que a^2A^2, les valeurs de x seraient impossibles, aussi bien que celles de y; le diamètre n'existerait donc pas, ou serait *imaginaire*. Enfin, si $B^2 = a^2A^2$, les valeurs de x et de y seront infinies, et le diamètre lui-même aura une longueur infinie.

Dans ce cas, $a = \pm\frac{B}{A}$, et les droites $y = \frac{B}{A}x, y = -\frac{B}{A}x$, ne rencontrent l'hyperbole qu'à une distance infinie : on les appelle *asymptotes* de la courbe ; pour les construire, il suffit de mener à BB′ et par le sommet B, une perpendiculaire, sur laquelle on prendra les longueurs BR et BR′, égales chacune au demi-second axe B : OR et OR′ seront les directions des deux asymptotes cherchées.

Soient y et y' les ordonnées de l'hyperbole et d'une asymptote, qui répondent à la même abscisse x; on aura donc

$$y^2 = \frac{B^2x^2}{A^2} - B^2 \text{ et } y'^2 = \frac{B^2x^2}{A^2}; \text{ d'où } y' - y = \frac{B^2}{y'+y}.$$

Par ces valeurs, il est clair qu'à mesure que l'abscisse x augmente, les ordonnées y, y' augmentent aussi, et leur différence diminue ; la courbe approche donc de plus en plus de l'asymptote ; enfin, si x est infinie, il en sera de même de y, y' et la différence $y'-y$ sera nulle. D'où il suit que *les asymptotes de l'hyperbole, à partir du centre* O, *vont continuellement en s'approchant de cette courbe, sans néanmoins pouvoir la rencontrer, autre part qu'à l'infini*. Et c'est de là que ces droites ont reçu le nom d'*asymptote*.

Il est clair que les asymptotes de l'hyperbole séparent ses diamètres réels de ses diamètres imaginaires ; et que si une ellipse et une hyperbole ont le même centre et les mêmes axes, les diamètres égaux de la première formeront, étant prolongés, les asymptotes de la seconde.

116. *Le premier axe de l'hyperbole est le plus petit de tous ses diamètres.* Car soit d un demi-diamètre et (x, y) son extrémité ; on aura à la fois

$$y^2 = \frac{B^2x^2}{A^2} - B^2 \text{ et } d^2 = y^2 + x^2; \text{ d'où } d^2 = \frac{A^2+B^2}{A^2}x^2 - B^2.$$

On voit que d sera le moindre possible quand l'abscisse x aura sa moindre valeur A ; ce qui donne $d = A$.

Il est aisé de voir aussi qu'une ligne droite ne peut couper l'hyperbole en plus de deux points.

117. *Lorsque deux droites* $y = ax + b$ *et* $y = a'x + b'$ *menées des extrémités du premier axe, se coupent sur l'hyperbole, on a toujours* $A^2aa' - B^2 = 0$; *et réciproquement.* Même démonstration qu'au n° 62. Cela résulte d'ailleurs de ce que B^2, pour l'ellipse, devient $-B^2$ pour l'hyperbole.

Les deux droites précédentes sont des *cordes supplémentaires* de l'hyperbole, parce qu'on appelle ainsi deux droites qui, partant des extrémités d'un même diamètre, se coupent sur la courbe.

118. *Suivant qu'un point* (x, y) *est sur l'hyperbole, au-dehors ou au-dedans, le trinome* $A^2y^2 - B^2x^2 + A^2B^2$ *est nul, positif ou négatif; et réciproquement.* On sait déjà que ce trinome est nul pour tout point (x, y) sur l'hyperbole. Mais l'abscisse x restant la même, si le point (x, y) est au-dehors ou au-dedans de l'hyperbole, l'ordonnée y sera plus grande ou plus petite que sur la courbe; le trinome sera donc plus grand ou plus petit que zéro; il sera par conséquent positif ou négatif.

119. La tangente à l'hyperbole n'étant qu'une sécante, dont les deux points d'intersection avec la courbe, se réunissent en un seul, il est clair qu'en opérant comme pour l'ellipse, on trouvera que la tangente $y = ax + b$, à l'hyperbole, au point (x'', y''), a pour équation

$$A^2yy'' - B^2xx'' = -A^2B^2, \ldots (1)$$

et que la direction de cette tangente est donnée par la valeur

$$a = \frac{B^2x''}{A^2y''}.$$

Tout cela résulte encore de ce que B^2, pour l'ellipse, devient $-B^2$, pour l'hyperbole. Mais on ne peut plus vérifier, comme dans l'ellipse, que la droite représentée par l'équation (1), n'a que le seul point (x'', y'') de commun avec l'hyperbole. Voici alors comment il faut procéder :

Prenons la valeur de y dans l'équation (1) et substituons cette valeur dans le trinome $A^2y^2 - B^2x^2 + A^2B^2$; en réduisant au même dénominateur $A^2y''^2$, puis en remettant au numérateur, au lieu de $A^2y''^2$, sa valeur $B^2x''^2 - A^2B^2$, tirée de l'équation de l'hyperbole, nous aurons

$$A^2y^2 - B^2x^2 + A^2B^2 = \frac{A^2B^4(x - x'')^2}{A^2y''^2}.$$

Le second membre de cette égalité sera toujours positif; il en sera donc de même du trinome $A^2y^2 - B^2x^2 + A^2B^2$, pour tous les points (x, y) de la droite (1); tous ces points, à l'exception du point (x'', y''), sont par conséquent hors de l'hyperbole (118). Ainsi la droite (1) n'a que le seul point (x'', y'') de commun avec l'hyperbole; donc elle lui est tangente en ce point.

120. La valeur de a, qui détermine la direction de la tangente, étant unique, il s'ensuit que par un point (x'', y''), donné sur l'hyperbole, on ne peut mener qu'une seule tangente à cette courbe.

C'est ce qu'on vérifie d'ailleurs en cherchant le point de contact (x'', y'') d'une tangente à l'hyperbole, menée par un point (x', y') donné. Dans ce cas, les équations de l'hyperbole et de la tangente, sont :

$$A^2y''^2 - B^2x''^2 = -A^2B^2,$$
$$A^2y'y'' - B^2x'x'' = -A^2B^2.$$

Eliminant y'' de ces équations, on trouvera, pour x'',

$$x'' = \frac{A^2B^2x' \pm A^2y'\sqrt{A^2y'^2 - B^2x'^2 + A^2B^2}}{B^2x'^2 - A^2y'^2}.$$

Par cette formule et le principe du n° 118, il est visible que, suivant que le point (x', y') est hors de l'hyperbole, sur cette courbe ou dans l'intérieur, x'' et y'' ont deux valeurs réelles, une seule, ou deux valeurs imaginaires; donc il y a deux tangentes, une seule ou aucune.

121. La valeur précédente de x'', peut aussi s'écrire comme il suit :

$$x'' = \frac{A^2B}{B^2x'^2 - A^2y'^2}\left(Bx' \pm Ay'\sqrt{1 + \frac{A^2y'^2 - B^2x'^2}{A^2B^2}}\right).$$

Cela posé, 1° lorsque le point (x', y') sera entre la courbe et une asymptote, dont l'équation est $Ay = Bx$ (115), on aura $Ay' < Bx'$; la fraction sous le radical sera négative; donc la quantité affectée du double signe $\pm$ sera moindre que Ay', et à plus forte raison, moindre que Bx'; donc, puisque $A^2y'^2 < B^2x'^2$, les deux valeurs de x'' seront positives. De sorte que *par un point pris entre l'hyperbole et une asymptote, on peut toujours mener deux tangentes à une même branche.*

2° Si le point (x', y') est entre les asymptotes, on aura $Ay' > Bx'$; le numérateur de x'' aura donc deux valeurs de signes opposés : et comme alors le dénominateur est négatif, il s'ensuit que x'' aura une valeur positive et une négative. Donc il y aura une tangente à une branche et une à l'autre.

3° Enfin, si le point (x', y') est sur une asymptote, on aura $Ay' = B'x$, et les deux valeurs de x'' deviendront $x'' = \frac{0}{0}$ et $x'' = \infty$. Opérant pour faire disparaître le facteur commun aux deux termes de x'', la première valeur de cette abscisse devient $x'' = \frac{A}{2Bx'}(y'^2 + B^2)$. Quant à la seconde valeur, elle reste toujours infinie. Ainsi, par un point pris sur une asymptote, on ne peut mener qu'une seule tangente à l'hyperbole.

Il y a bien, si l'on veut, une seconde tangente; mais son point de contact avec la courbe est infiniment éloigné. Effectivement, ce point étant sur l'hyperbole et son abscisse x'' étant infinie, son ordonnée y'' est aussi infinie et se réduit à $y'' = \frac{Bx''}{A}$. Et comme la valeur de a, qui convient à la tangente, est $a = \frac{B^2x''}{A^2y''}$, en y substituant la valeur qu'on vient de trouver pour y'', on aura $a = \frac{B}{A}$. Or, cette valeur détermine la direction d'une asymptote; donc la seconde tangente qui nous occupe, coïncide avec cette asymptote.

122. Si dans l'équation de la tangente MT au point M, on fait $y = 0$, on aura l'abscisse x ou OT du point T où cette droite rencontre l'axe des x (fig. 17), et il viendra $OT = \frac{A^2}{x''}$; ce qui montre que la tangente ne passe par le centre que quand le point de tangence est à l'infini. Mais F et F' étant les foyers, on a $OF = OF' = c$, $FM = \frac{cx''}{A} - A$ et $F'M = \frac{cx''}{A} + A$ (107); donc

$$TF = OF - OT = c - \frac{A^2}{x''} = \frac{A}{x''}\left(\frac{cx''}{A} - A\right) = \frac{A}{x''} \times FM,$$

$$TF' = OF' + OT = c + \frac{A^2}{x''} = \frac{A}{x''}\left(\frac{cx''}{A} + A\right) = \frac{A}{x''} \times F'M.$$

De là résulte $TF : TF' :: FM : F'M$; ce qui montre que MT divise l'angle FMF' en deux parties égales. Ainsi *dans l'hyperbole, les droites menées des foyers au point de tangence, font avec la tangente et de part et d'autre de cette ligne, deux angles égaux.*

D'où il est visible que *la normale* MN *divise en deux parties* *égales le supplément* FMK *de l'angle formé par les rayons vecteurs menés au point de tangence.*

123. Proposons-nous maintenant de construire une tangente à l'hyperbole, par un point donné. Supposons d'abord ce point sur la courbe, en M; menons les rayons vecteurs FM et F'M; prenons MH = MF et tirons MT perpendiculaire à FH; cette perpendiculaire sera la tangente demandée. Car les deux triangles rectangles MIF et MIH étant égaux, la droite MT divise en deux parties égales l'angle FMF' des deux rayons vecteurs FM et F'M; donc MT coïncide avec la tangente au point M (122). Il serait d'ailleurs facile de démontrer que tous les points de la droite MT sont hors de l'hyperbole, excepté le point M.

Supposons maintenant que le point donné soit hors de l'hyperbole, par exemple en G: de ce point G comme centre et du rayon GF, décrivons un arc; du foyer F' comme centre et avec le premier axe 2A pour rayon, décrivons un second arc qui coupera le premier en H et H': les droites F'H, F'H', iront couper l'hyperbole aux points de contact des deux tangentes que l'on peut mener à la courbe, par le point G; de sorte que M étant l'un de ces points, GMT sera tangente en M. En effet, par construction, F'M — HM = F'H = 2A. Mais M étant sur l'hyperbole, on a aussi F'M — FM = 2A; donc MH = MF. D'ailleurs GF = GH; donc la droite GMT est perpendiculaire au milieu de FH; ainsi, d'après le premier cas, elle est tangente en M.

124. Le point I étant le milieu de FH et le point O le milieu de FF', il est clair que la droite OI est la moitié de F'H ou de 2A. Ainsi *les pieds des perpendiculaires menées d'un foyer sur les tangentes à l'hyperbole, appartiennent à la circonférence ayant le premier axe pour diamètre.*

Menant Oz parallèle à MT, on verra que la figure OIMz est un parallélogramme, et qu'ainsi Mz = OI = A. D'où il suit que *dans l'hyperbole (comme dans l'ellipse), la partie d'un rayon vecteur comprise entre la tangente et sa parallèle menée par le centre, est égale à la moitié du premier axe.*

Cette propriété et la précédente donnent le moyen de *construire l'hyperbole (ou l'ellipse) dont on connaît le centre* O, *la longueur du premier axe* 2A, *une tangente et son point de contact* M. Car les perpendiculaires à la tangente, aux points I et I' où elle est coupée par la circonférence décrite du centre O et du rayon A, passent par les foyers, ainsi que les parallèles menées par M aux droites OI et OI'.

125. Il est facile de voir que l'équation de la normale à l'hyperbole, est

$$y-y''=-\frac{A^2y''}{B^2x''}(x-x'').$$

Les valeurs de la *soutangente* et de la *sounormale*, sont respectivement

$$PT=\frac{x''^2-A^2}{x''} \text{ et } PN=\frac{B^2x''}{A^2}.$$

126. Voici quelques théorèmes à démontrer :

I. Si la droite $y=ax+b$ est tangente à l'hyperbole, on aura toujours $A^2a^2-B^2=b^2$.

II. Les tangentes aux extrémités d'un même diamètre de l'hyperbole, sont parallèles entre elles; et réciproquement, si deux tangentes à l'hyperbole, sont parallèles, la droite qui joint les deux points de contact, passe par le centre.

Il suit de là que trois tangentes à l'hyperbole ne peuvent jamais être parallèles entre elles.

III. La plus courte distance entre l'hyperbole et un point du prolongement du premier axe, est la normale qui passe par ce point.

IV. L'origine étant au sommet $(-A, o)$ et les coordonnées parallèles aux axes 2A et 2B, l'hyperbole est représentée par $A^2y^2-B^2x^2=-2AB^2x$, et sa tangente au point (x'', y''), par $A^2yy''-B^2xx''=-AB^2(x+x'')$.

V. Dans l'hyperbole, le demi-second axe B est moyen proportionnel, 1° entre les distances des deux foyers à la tangente; 2° entre les ordonnées de la tangente qui ont leurs pieds aux sommets de la courbe; 3° entre les distances d'un foyer aux deux sommets; 4° enfin entre la normale et la perpendiculaire menée du centre sur la tangente.

VI. Le sommet d'un angle droit mobile, dont les côtés sont continuellement tangens à l'hyperbole, décrit une circonférence de même centre et ayant $\sqrt{A^2-B^2}$ pour rayon.

VII. La portion d'une tangente à l'hyperbole, comprise entre les perpendiculaires aux extrémités du premier axe, est le diamètre d'une circonférence qui passe par les deux foyers.

Tous ces théorèmes sont analogues à ceux énoncés pour l'ellipse (77) et s'en déduisent en y changeant B^2 en $-B^2$.

VIII. Les droites qui vont d'un même point quelconque de l'hyperbole équilatère aux extrémités d'un même diamètre réel (ou *transverse*), font des angles égaux avec l'une quelconque des deux asymptotes. (On démontrera d'abord que pour les droites proposées, les a et a' sont tels, qu'on a toujours $aa'=1$, etc.)

127. On appelle *diamètres conjugués* de l'hyperbole, deux diamètres tels, qu'en les prenant pour axes des coordonnées, l'équation de la courbe conserve la même forme que pour ses axes rectangulaires.

Pour trouver ces diamètres, prenons les formules qui servent à passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système de même origine (45), savoir :

$$x=\frac{x'}{m}+\frac{y'}{m'} \text{ et } y=\frac{ax'}{m}+\frac{a'y'}{m'},$$

formules dans lesquelles $m^2=1+a^2$ et $m'^2=1+a'^2$. Substituant ces valeurs de x et de y dans l'équation $A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2$, qui est celle de l'hyperbole rapportée à ses axes et au centre, on trouvera

$$\frac{A^2a'^2-B^2}{m'^2}y'^2+\frac{A^2a^2-B^2}{m^2}x'^2+2x'y'\frac{A^2aa'-B^2}{mm'}=-A^2B^2\dots(a)$$

Pour que cette équation soit de même forme que celle qui est relative aux axes 2A et 2B, il faut qu'elle ne contienne pas le produit $x'y'$ des nouvelles coordonnées ; il faut donc profiter de l'indétermination de a et a' pour faire disparaître ce terme, en rendant son coefficient nul ; ce qui donne la condition

$$A^2aa'-B^2=0 ;\ \dots(1)$$

et l'équation de la courbe devient, en y supprimant les accens des coordonnées obliques x' et y',

$$\frac{A^2a'^2-B^2}{m'^2}y^2+\frac{A^2a^2-B^2}{m^2}x^2=-A^2B^2\dots(2).$$

La condition (1) qui existe entre les inconnues a et a' étant du premier degré, admet une infinité de valeurs réelles pour ces inconnues ; il y a donc une infinité de systèmes d'axes de coordonnées, pour lesquels l'équation de l'hyperbole ne contient que les carrés y^2, x^2 des variables, avec un terme constant. Mais pas un seul de ces systèmes, autre que celui des axes, ne sera rectangulaire, puisqu'alors on devrait avoir $aa'+1=0$; ce qui réduit la relation (1) à $A^2+B^2=0$, chose évidemment impossible.

128. Nous avons vu (115) que les diamètres dirigés suivant les droites $y=ax$ et $y=a'x$ ne sont réels, c'est-à-dire ne rencontrent l'hyperbole, qu'autant que $B^2>A^2a^2$ et $B^2>a'^2A^2$, ou $B>Aa$ et $B>a'A$. Mais ces inégalités ne sauraient exister en même temps, pour les diamètres conjugués ; car d'après la

relation (1), si $B > aA$, on aura $B < a'A$, et réciproquement. L'hyperbole ne rencontre donc jamais à la fois ses diamètres conjugués.

Supposons qu'elle coupe l'axe des x ; alors on aura $B > aA$ et $B < a'A$. Faisant $y = 0$ et $x = 0$, dans l'équation (2), on aura les distances de l'origine aux points où l'hyperbole rencontre les axes des x et des y obliques : en désignant ces distances par A' et D, la première étant comptée sur l'axe des abscisses et la seconde sur l'axe des ordonnées, on trouvera

$$A'^2 = \frac{A^2B^2m^2}{B^2 - a^2A^2} \quad \text{et} \quad D^2 = \frac{-A^2B^2m'^2}{A^2a'^2 - B^2}.$$

Comme $B > aA$ et $B < Aa'$, on voit que la distance A' est réelle et la distance D imaginaire, comme cela doit être, puisque la courbe ne rencontre pas l'axe des y. Cependant on a coutume de prendre, sur l'axe des y, deux points C et C' éloignés chacun de l'origine d'une distance B' telle, qu'on ait $B'^2 = -D^2$. Alors $2A'$ et $2B'$ sont appelés les *diamètres conjugués* de l'hyperbole, bien que le premier $2A'$ soit le seul terminé à la courbe : $2A'$ est le *premier* diamètre conjugué et $2B'$ le *second*.

129. On voit d'ailleurs que, pour déterminer les longueurs A' et B', on a

$$A'^2 = \frac{A^2B^2m^2}{B^2 - a^2A^2} \quad \text{et} \quad B'^2 = \frac{A^2B^2m'^2}{A^2a'^2 - B^2} \cdots (3)$$

Prenant dans ces équations, les valeurs des dénominateurs, et substituant dans l'équation (2) de l'hyperbole, on obtient

$$A'^2y^2 - B'^2x^2 = -A'^2B'^2,$$

équation qui se déduit de l'équation analogue de l'ellipse, en changeant B'^2 en $-B'^2$ dans cette dernière.

130. Soit s le sinus de l'angle compris par les diamètres conjugués $2A'$ et $2B'$; il est clair qu'en raisonnant comme pour l'ellipse, les équations (1) et (3) donneront

$$A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2 \quad \text{et} \quad A'B's = AB,$$

relations fournies par celles analogues de l'ellipse, en changeant dans ces dernières B^2 et B'^2, respectivement en $-B^2$ et $-B'^2$.

La seconde de ces relations nous apprend que *le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques de l'hyperbole, est équivalent au rectangle construit sur les deux axes.*

Quant à l'égalité $A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2$, elle *montre que la différence des carrés de deux diamètres conjugués de l'hyperbole, vaut la différence des carrés des deux axes.*

Il n'y a donc que l'hyperbole équilatère qui ait ses diamètres conjugués égaux ; et tous les siens le sont deux à deux.

131. L'équation de l'hyperbole, rapportée à ses diamètres conjugués $2A'$ et $2B'$, étant $A'^2y^2 - B'^2x^2 = -A'^2B'^2$, on tire de cette équation et de la relation (1), les théorèmes que voici à démontrer, et qui sont analogues à ceux énoncés (89) pour l'ellipse :

1° *Chaque diamètre divise les cordes parallèles à son conjugué en deux parties égales.* D'où il suit que pour avoir un diamètre et le centre d'une hyperbole tracée, il suffit de mener une droite par les milieux de deux cordes parallèles et de répéter cette opération pour deux autres cordes parallèles.

2° *Les carrés des ordonnées aux diamètres conjugués, sont entre eux comme les produits des distances des pieds de ces ordonnées aux points où l'axe des abscisses coupe la courbe.*

De sorte que pour décrire une hyperbole dont on connaît deux diamètres conjugués et l'angle qu'ils font entre eux, il faut d'abord tracer une hyperbole sur ces diamètres, pris pour axes rectangulaires, puis incliner les ordonnées de cette hyperbole sous l'angle donné, sans changer leurs longueurs : les points ainsi obtenus appartiendront à l'hyperbole demandée.

3° *Les tangentes aux extrémités d'un diamètre réel de l'hyperbole, sont parallèles à son conjugué ; et réciproquement.*

4° *Deux diamètres conjugués de l'hyperbole, sont toujours parallèles à deux cordes supplémentaires menées des extrémités du premier axe.*

Ce qui donne le moyen, connaissant une hyperbole et ses deux axes, de trouver deux diamètres conjugués, comprenant entre eux un angle donné.

5° Pour deux cordes supplémentaires $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, menées des extrémités de $2A'$, on aura toujours $A'^2aa' - B'^2 = 0$; et réciproquement.

6° La tangente $y = ax + b$ à l'hyperbole, au point (x'', y''), a pour équation

$$A'^2yy'' - B'^2xx'' = -A'^2B'^2, \quad \text{ou} \quad A'^2a^2 - B'^2 = b^2,$$

la valeur de a étant $a = \frac{B'^2x''}{A'^2y''}$.

7° *Si une corde supplémentaire est parallèle au diamètre mené au point de tangence, l'autre corde sera parallèle à la tangente.*

On peut donc, sans connaître les axes, mener une tangente à l'hyperbole, soit par un point donné sur cette courbe, soit parallélement à une droite donnée.

8° Si un diamètre réel de l'hyperbole est parallèle à une corde supplémentaire, son conjugué sera parallèle à l'autre corde, comme étant tous les deux parallèles à la tangente à une extrémité du premier diamètre (3° et 7°); l'angle entre ces diamètres conjugués sera donc le même que celui des deux cordes supplémentaires.

De là, si l'hyperbole est tracée, on trouvera aisément deux diamètres conjugués, comprenant un angle donné, lesquels seront les axes, quand l'angle sera droit.

132. *Dans l'hyperbole rapportée à ses axes, les rectangles construits sur les coordonnées des extrémités positives de deux diamètres conjugués, sont équivalens entre eux.* Soient (x, y) et (x', y') les extrémités positives des diamètres conjugués $2A'$ et $2B'$; les équations de ces diamètres donneront évidemment $a = \frac{y}{x}$ et $a' = \frac{y'}{x'}$. Substituant ces valeurs dans la relation $A^2aa' = B^2$ et dans la seconde relation (3), puis observant que $x'^2 + y'^2 = B'^2$, on trouvera

$$A^2yy' = B^2xx',$$
$$A^2y'^2 - B^2x'^2 = A^2B^2.$$

De plus, comme l'extrémité (x, y) appartient à l'hyperbole, on a

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2.$$

Substituant dans cette équation, les valeurs de A^2 et B^2, tirées des deux équations précédentes, et réduisant, on obtiendra $xy = x'y'$. Ce qu'il fallait démontrer.

Au moyen de $xy = x'y'$, les valeurs que l'on vient de trouver pour A^2 et B^2, deviennent $A^2 = x^2 - x'^2$ et $B^2 = y'^2 - y^2$, relations fort remarquables.

133. *Le produit des distances du point de tangence à ceux où la tangente rencontre les axes de l'hyperbole, est égal au carré du demi-diamètre* B' *parallèle à cette tangente* (fig. 18). Car la tangente MTU rencontrant les axes en T et U, et le diamètre ON = B', conjugué de OM = A', étant parallèle à MT (131, 3°); si l'on mène MR parallèle à OP, les triangles MRU et MTP, semblables à ONQ, donneront

$$x : x' :: \mathrm{MU} : \mathrm{B}',$$
$$y : y' :: \mathrm{MT} : \mathrm{B}'.$$

Multipliant par ordre, et observant que $xy = x'y'$, on trouvera $\mathrm{MU} \times \mathrm{MT} = \mathrm{B}'^2$.

134. Décrivant sur TU comme diamètre, une circonférence rencontrant OM en O et en I, on aura $\mathrm{OM} \times \mathrm{IM} = \mathrm{MU} \times \mathrm{MT}$, ou $\mathrm{A}' \times \mathrm{IM} = \mathrm{B}'^2$, ou encore $\mathrm{IM} = \frac{\mathrm{B}'^2}{\mathrm{A}'}$.

De là résulte le moyen de *construire les axes de l'hyperbole, connaissant deux diamètres conjugués* $2\mathrm{A}'$ *et* $2\mathrm{B}'$, *ainsi que l'angle* MON *qu'ils font entre eux*. Pour cela, sur le premier diamètre $\mathrm{OM} = \mathrm{A}'$, on prendra $\mathrm{MI} = \frac{\mathrm{B}'^2}{\mathrm{A}'}$; par le milieu de OI, on élevera une perpendiculaire, qui coupera en V la parallèle MU à $\mathrm{ON} = \mathrm{B}'$; du centre V et du rayon VO, on décrira une circonférence, qui coupera MU aux points T et U où cette parallèle rencontre les axes cherchés: menant alors les droites OT et OU, puis MP perpendiculaire à OT; le premier axe 2A se construira par la formule $\mathrm{A}^2 = \mathrm{OP} \times \mathrm{OT}$. On aurait de même $\mathrm{B}^2 = \mathrm{MP} \times \mathrm{OU}$.

135. *Les coordonnées comprenant un angle* θ, *toute équation de la forme* $\mathrm{M}y^2 - \mathrm{N}x^2 = -\mathrm{P}$, (M, N *et* P *étant des nombres positifs*) *représente une hyperbole*. D'abord si l'on prend les nombres A' et B' tels qu'on ait $\mathrm{A}'^2 = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{N}}$ et $\mathrm{B}'^2 = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}$, cette équation deviendra

$$\mathrm{A}'^2y^2 - \mathrm{B}'^2x^2 = -\mathrm{A}'^2\mathrm{B}'^2 \ldots (4)$$

Or, on peut toujours trouver une hyperbole dont $2\mathrm{A}'$ et $2\mathrm{B}'$ soient les diamètres conjugués, comprenant l'angle θ; car en désignant par s le sinus de cet angle, les axes 2A et 2B seront donnés par les relations $\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2 = \mathrm{A}'^2 - \mathrm{B}'^2$ et $\mathrm{AB} = \mathrm{A}'\mathrm{B}'s$, desquelles on tire

$$\mathrm{A}^2 = \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}'^2 - \mathrm{B}'^2) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(\mathrm{A}'^2 - \mathrm{B}'^2)^2 + \mathrm{A}'^2\mathrm{B}'^2s^2},$$
$$\mathrm{B}^2 = -\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}'^2 - \mathrm{B}'^2) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(\mathrm{A}'^2 - \mathrm{B}'^2)^2 + \mathrm{A}'^2\mathrm{B}'^2s^2};$$

d'où il est visible que les valeurs de 2A et 2B seront toujours réelles.

Connaissant les axes 2A et 2B, on pourra tracer l'hyperbole; et cette hyperbole, rapportée à ses diamètres conjugués $2\mathrm{A}'$ et $2\mathrm{B}'$, sera représentée, comme on l'a vu (129), par l'équation (4) et conséquemment par l'équation proposée $\mathrm{M}y^2 - \mathrm{N}x^2 = -\mathrm{P}$.

136. Lorsque les deux diamètres conjugués $2\mathrm{A}'$ et $2\mathrm{B}'$ sont donnés, ainsi que l'angle compris θ, on peut calculer les longueurs des deux axes, par les formules que l'on vient d'obtenir; mais ces formules sont com-

pliquées et difficiles à construire ; il importe donc de déterminer la position des axes, sans faire usage de leurs valeurs. Or, α étant l'angle compris entre A et A′, l'angle entre A et B′ sera $\theta+\alpha$; ainsi dans les formules (3), on a $\tang \alpha = a$ et $\tang(\theta+\alpha)=a'$. Divisant donc ces deux formules l'une par l'autre, après y avoir substitué A^2aa' au lieu de B^2; réduisant d'ailleurs, au moyen des principes de la trigonométrie, on obtiendra

$$\tang 2\alpha = \frac{B'^2 \sin 2\theta}{A'^2 - B'^2 \cos 2\theta},$$

formule qui s'appliquera à l'ellipse, en y changeant B'^2 en $-B'^2$.

137. L'équation de l'hyperbole prend une forme très-simple, lorsqu'on choisit ses asymptotes pour axes des coordonnées. En effet, comme alors les a et a', qui déterminent les nouveaux axes des x' et des y', à l'égard du premier axe 2A de la courbe, ont respectivement pour valeurs $a=-\frac{B}{A}$ et $a'=\frac{B}{A}$ (115); d'où $m^2=1+a^2=\frac{A^2+B^2}{A^2}=m'^2$; l'équation ($\alpha$) du n° 127, qui est celle de l'hyperbole rapportée aux nouveaux axes, se réduit à

$$x'y'=\frac{A^2+B^2}{4} \cdots (\varphi)$$

Dans cette forme nouvelle de l'équation de l'hyperbole, on reconnaît aisément la propriété caractéristique des asymptotes de s'approcher sans cesse de la courbe ; car y' devient nul dès que x' est infini, et réciproquement.

138. *Le parallélogramme construit sur les coordonnées d'un point quelconque de l'hyperbole, rapportée à ses asymptotes, est équivalent au losange ayant pour diagonales les deux demi-axes de la courbe* (fig. 19).

Soient OX′ et OY′ les asymptotes, c'est-à-dire les nouveaux axes des x' et des y' ; soient B et B′ les sommets de la courbe; x', y' les coordonnées du point M et OPMQ le parallélogramme construit sur ces coordonnées. Par les sommets B et B′ menons des parallèles aux asymptotes ; d'après la construction de ces lignes, la perpendiculaire BH = le demi-second axe B = OC; la figure OBHC est donc un rectangle. De plus, comme l'angle BOH = BOD′ = OBD, le côté OD = BD et le parallélogramme ODBD′ est un losange, dans lequel les diagonales OB = A DD′ = BH = B ; de sorte qu'on a $4OD^2=A^2+B^2$.

Cela posé, soit s le sinus de l'angle QOP ; nous avons vu (20) que les aires des parallélogrammes OPMQ et ODBD′ qui ont l'angle commun QOP, sont respectivement $x'y's$ et $OD\cdot OD'\cdot s = OD^2\cdot s = \frac{A^2+B^2}{4}\cdot s$. Ainsi d'après l'équation (φ) de l'hyperbole, ces deux aires sont équivalentes. Mais il est visible d'ailleurs que l'aire du losange ODBD' est $\frac{1}{2}AB$; donc

$$x'y's = \tfrac{1}{2}AB.$$

139. Divisant cette équation par celle de l'hyperbole, on aura

$$s = \frac{2AB}{A^2+B^2},$$

formule que l'on obtiendrait d'ailleurs en substituant les valeurs précédentes de a et a' dans l'expression de s, trouvée au n° 17.

140. Lorsque l'hyperbole est équilatère, $s=1$: le losange ODBD' devient un carré, et reste toujours équivalent au rectangle des coordonnées. Le grand losange BCB'C', quadruple de ODBD', se nomme la *puissance* de l'hyperbole : c'est le demi-rectangle des axes 2A et 2B.

141. Pour plus de simplicité, nous supprimerons les accens des variables x' et y', en nous rappelant qu'étant comptées sur les asymptotes, elles sont en général obliques. De plus, nous poserons $A^2+B^2=4H^2$; et alors, l'équation de l'hyperbole, rapportée à ses asymptotes, sera $xy=H^2$.

142. Réciproquement, *toute équation de la forme* $xy=H^2$, *représente une hyperbole, rapportée à ses asymptotes.* Car soit θ l'angle des coordonnées proposées; il est clair qu'on peut toujours trouver une hyperbole dont l'angle des asymptotes étant égal à θ et son sinus désigné par s, ce sinus et les axes 2A et 2B satisfassent aux relations

$$A^2+B^2=4H^2 \quad\text{et}\quad s=\frac{2AB}{A^2+B^2}.$$

Ces équations, en effet, fournissent

$$A+B=2H\sqrt{1+s} \quad\text{et}\quad A-B=2H\sqrt{1-s},$$

formules qui donneront toujours pour A et B des valeurs réelles.

Connaissant ainsi les deux axes 2A et 2B, on connaîtra aussi leurs directions, car le premier 2A divise en deux parties égales l'angle des asymptotes, c'est-à-dire l'angle θ des axes des coordonnées; l'hyperbole pourra donc être construite (105). Or, si l'on rapporte cette hyperbole à ses asymptotes, on trouvera, comme on l'a vu (137), $xy=\frac{1}{4}(A^2+B^2)$ ou $xy=H^2$, c'est-à-dire l'équation proposée, l'angle des asymptotes étant θ. Cette équation représente donc une hyperbole, rapportée à ses asymptotes ; ce qu'il fallait démontrer.

143. Pour avoir l'équation de la tangente à l'hyperbole $xy = H^2$, nous considérerons cette tangente, comme une sécante dont les points d'intersection (x', y') et (x'', y'') avec la courbe se réunissent en un seul. L'équation de cette sécante sera

$$y - y'' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x''),\quad a = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

On a d'ailleurs $x'y' = H^2$ et $x''y'' = H^2$; d'où $y' = \frac{x''y''}{x'}$. Substituant cette valeur et réduisant, on aura, pour l'équation de la sécante,

$$y - y'' = -\frac{y''}{x'}(x - x'') \text{ et } a = -\frac{y''}{x'}.$$

Maintenant, si le second point d'intersection (x', y') coïncide avec le premier, ce qui donne $y' = y''$ et $x' = x''$, la sécante proposée sera tangente au point (x'', y'') et aura pour équation

$$y - y'' = -\frac{y''}{x''}(x - x'') \text{ et } a = -\frac{y''}{x''}.$$

144. En faisant $y = 0$ dans cette équation, on aura l'abscisse x du point T où la tangente rencontre l'axe des abscisses, et $x - x''$ sera la valeur de la soutangente PT ; il viendra donc PT $= x'' =$ OP ; c'est-à-dire que, *lorsque l'hyperbole est rapportée à ses asymptotes, la soutangente, pour chaque point, est égale à l'abscisse qui lui correspond.*

Si donc par le point M de l'hyperbole, on veut lui mener une tangente, il faudra prendre sur l'asymptote OX', et à partir du pied de l'ordonnée PM, la distance PT $=$ OP ; et TMR sera la tangente demandée.

145. Les triangles TOR et TPM étant semblables, il en résulte TM $=$ MR. *La portion de la tangente, entre les asymptotes, est donc divisée en deux parties égales par le point de contact.*

146. Soit une droite II' coupant l'hyperbole en G et G' et les asymptotes en I et I' ; je dis que IG $=$ I'G'. D'abord on peut toujours mener une tangente RMT parallèle à la droite II' (131, 7°). Et puisque le point de contact M est le milieu de RT, la droite OMM' divise la parallèle II' à RT, en deux parties égales au point M'. D'ailleurs le conjugué du diamètre OM est paral-

lèle à RT (131, 3°); il est donc aussi parallèle à la corde GG′; celle-ci est donc divisée en deux parties égales, en M′, par le diamètre OM (131, 1°). De sorte qu'ayant à la fois M′I = M′I′ et M′G = M′G′, il vient IG = I′G′. Donc, *si une droite coupe l'hyperbole et ses asymptotes, les parties de cette droite comprises entre les asymptotes et la courbe, sont égales entre elles.*

147. Cette propriété fournit un moyen bien simple de construire l'hyperbole, connaissant un de ses points et ses deux asymptotes. On mènera par ce point G une droite quelconque IGI′, terminée en I et I′ aux asymptotes OX′ et OY′; on prendra I′G′ = IG, et le point G′ appartiendra à l'hyperbole. On trouvera donc ainsi autant de points qu'on voudra de la courbe. Pour éviter la confusion d'un grand nombre de droites, tirées d'un même point, on pourra faire servir quelques-uns des points déjà déterminés, à en trouver d'autres.

Et comme l'angle des asymptotes peut se construire, dès que l'on connaît le rapport des axes (115), il résulte encore de la propriété précédente, le moyen de *tracer l'hyperbole, dont on connaît deux points, une asymptote et le rapport des axes principaux.*

148. *La portion de la tangente, comprise entre les deux asymptotes, est égale en longueur au conjugué du diamètre mené au point de tangence.* D'abord TR étant tangente en M, l'aire du triangle TRO est double de celle du parallélogramme OPMQ, et vaut par conséquent AB (138). Soit la demi-tangente MT $= m$ et le demi-diamètre OM $= A'$; l'angle OMR est évidemment égal à celui que le diamètre $2A'$ fait avec son conjugué $2B'$. Si donc on désigne par s le sinus de cet angle, l'aire du parallélogramme construit sur les demi-diamètres conjugués A' et B', sera $A'B's = AB$ (130), et l'aire du parallélogramme construit sur A' et m, vaudra $A'ms$. Ce parallélogramme, double du triangle OMT, vaut le triangle OTR ou AB; donc $A'B's = A'ms$, et par suite $B' = m$.

149. On voit de plus, qu'*en menant du centre de l'hyperbole, une parallèle à la tangente à une extrémité d'un diamètre* $2A'$, *la portion de cette parallèle entre les parallèles aux asymptotes tirées de la même extrémité, exprime en grandeur et en direction le conjugué* $2B'$ *du diamètre proposé.*

De là résulte le moyen de trouver le conjugué d'un diamètre donné, connaissant les asymptotes; et aussi de tracer les asymptotes, connaissant deux diamètres conjugués, en longueurs et en directions.

150. *L'hyperbole étant rapportée à ses asymptotes*, OX *et* OY, *trouver l'aire* S *du segment* BCPM, *compris entre la courbe, une asymptote et les deux ordonnées* BC *et* MP (fig. 20).

L'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes étant de la forme $xy = m^2$, les coordonnées du sommet B seront $BC = OC = m$. Soient x et y les coordonnées du point M, de manière que $OP = x$ et $PM = y$. Appelons e la valeur que l'on trouve en supposant n infini, dans le développement de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; on aura donc

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ et } \sqrt[n]{e} - 1 = \frac{1}{n}.$$

Le nombre infini n étant supposé entier, la formule de Newton donnera, pour le développement de la valeur de e,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n}\right) + \text{etc.}$$

Le nombre n étant infini, il est clair que le quotient $\frac{1}{n}$ est infiniment petit, et doit être considéré comme nul; il vient donc

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \text{etc};$$

ce qui donne, à moins d'un dibillionième près,

$$e = 2,718281828 45;$$

d'où l'on a trouvé pour le logarithme ordinaire de e,

$$le = 0,4342944819 0.$$

Cela posé, prenons sur CP n points (en y comprenant C et P) tels, que leurs distances au point O forment une progression géométrique croissante, dont m soit le premier terme et $\sqrt[n]{e} = r$ la raison, n étant toujours infini. Les ordonnées menées par ces n points divisent le segment BCPM en $n - 1$ trapèzes mixtilignes. Soit QRIN le v^{me} de ces trapèzes, à partir du point C; à cause de n infini, il est clair que la raison r diffère infiniment peu de l'unité, et que par conséquent les abscisses OC et OR sont presqu'égales, ainsi que les ordonnées QN et RI; la figure QRIN est donc un parallélogramme. Si donc on désigne par s

le sinus de l'angle YOP, on aura, pour l'aire du parallélogramme, $QRIN = s \times QR \times QN$.

Or, par construction $OQ = m.r^{v-1}$ et $OR = m.r^{v}$; donc $QR = mr^{v-1}(r-1)$, $QN = \frac{m^2}{OQ} = mr^{-v+1}$, et par suite $QRIN = m^2 s(r-1)$.

Cette valeur étant indépendante de v, il s'ensuit que les $n-1$ trapèzes qui composent le segment S sont tous équivalens, et qu'ainsi on a $S = m^2 s(n-1)(r-1)$.

Mais OP ou $x = mr^{n-1}$, parce que x est le n^{me} terme de la progression : prenant de part et d'autre les logarithmes ordinaires, on trouvera, à cause de $\mathrm{l}\, r = \frac{\mathrm{l}\, e}{n}$

$$n-1 = (\mathrm{l}\, x - \mathrm{l}\, m)\frac{n}{\mathrm{l}\, e} = \frac{n}{\mathrm{l}\, e}\, \mathrm{l}\left(\frac{x}{m}\right).$$

Substituant cette valeur dans celle de S, puis observant que $r - 1 = \sqrt[n]{e} - 1 = \frac{1}{n}$, on obtiendra définitivement

$$S = \frac{m^2 s}{\mathrm{l}\, e} \cdot \mathrm{l}\left(\frac{x}{m}\right).$$

Il est aisé de voir que l'erreur commise en prenant QRNI pour un parallélogramme, est moindre que $\frac{m^2}{rn^2}$; ainsi l'erreur qui en résulte sur la mesure du segment S, est moindre que $\frac{m^2}{n}$, ou qu'une quantité infiniment petite, puisque n est infini.

151. Si l'on veut calculer l'aire du segment BMM′, formé par l'hyperbole, le prolongement de son premier axe et l'ordonnée MM′ parallèle au second, on remarquera que l'aire du triangle OPM ou de son équivalent OCB, est $\frac{1}{2}m^2 s$. Et comme l'espace $BOM = BOC + BCPM - OPM = BCPM = \frac{m^2 s}{\mathrm{l}\, e} \cdot \mathrm{l}\left(\frac{x}{m}\right)$, on en déduit

$$\text{segment } BMM' = \tfrac{1}{2}OM' \times MM' - \frac{OC^2.s.}{\mathrm{l}\, e}\, \mathrm{l}\left(\frac{OP}{OC}\right).$$

152. D'après les valeurs précédentes, si l'hyperbole est équilatère, il sera bien facile de calculer le volume décrit autour de l'asymptote OX, par le segment BCPN ou S. En effet, le v^{me} parallélogramme QRIM devenant alors un rectangle, le volume décrit par ce rectangle, autour de OX, aura pour mesure $\pi QN^2 \times QR$ ou $\pi m^3 r(r-1) \times \frac{1}{r^v}$.

Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$, on aura successivement les volumes produits autour de OX par les $n-1$ rectangles qui composent le segment proposé S ; la somme de tous ces volumes sera donc celui engendré par ce segment ; de sorte qu'on aura

$$\text{vol. S} = \pi m^3 r (r-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots + \frac{1}{r^{n-1}}\right),$$

ou bien
$$\text{vol. S} = \pi m^3 r \left(1 - \frac{1}{r^{n-1}}\right).$$

Mais à cause de OP ou $x = m r^{n-1}$, il vient

$$\text{vol. S} = \pi m^3 r \left(1 - \frac{m}{x}\right).$$

Enfin, $r = \sqrt[n]{e}$ donne $r = e^{\frac{1}{n}}$: et puisque n est infini, on a $\frac{1}{n} = 0$, puis $r = e^0 = 1$; d'où résulte le volume cherché

$$\text{vol. S} = \pi m^3 \left(1 - \frac{m}{x}\right).$$

Lorsque l'abscisse x est infinie, l'aire du segment S est aussi infinie (150), tandis que le volume décrit par ce segment a la valeur finie πm^3.

Quelque singulier que paraisse ce résultat, il n'en est pas moins exact ; mais pour mieux concevoir comment il peut se faire que l'espace ZBCX, qui est infini en étendue et en surface, engendre néanmoins un corps dont le volume est fini, prenons sur l'asymptote OX et à partir de C, des longueurs égales respectivement aux termes de la suite infinie m, $2m$, $4m$, $8m$, $16m$, ... ; et concevons sur ces longueurs, des rectangles extérieurs à l'espace ZBCX. Ces rectangles engendreront des cylindres dont les hauteurs croîtront en raison double, tandis que les bases décroîtront en raison quadruple ; ainsi ces cylindres décroîtront seulement en raison double. Or, le premier $= \pi m^3$; donc la somme de tous ces cylindres est

$$\pi m^3 \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \text{etc., à l'infini}\right) = 2\pi m^3.$$

Il est évident que le solide engendré par l'espace infini ZBCX est moindre que tous les cylindres extérieurs, c'est-à-dire moindre que $2\pi m^3$; ce solide a par conséquent un volume fini. (Voyez les Mélanges d'analyse et de géométrie, page 664 ; par M. de Stainville. Paris, 1815).

153. *Deux hyperboles sont semblables, lorsqu'elles ont leurs axes*

homologues proportionnels. Soient M et N deux points quelconques de la première, M' et N' deux points *homologues* de la seconde, c'est-à-dire deux points dont les coordonnées rectangulaires soient respectivement proportionnelles à celles des deux points M et N. En inscrivant à volonté une ligne brisée dans l'arc MN, il est facile de voir qu'on pourra toujours inscrire, dans l'arc *homologue* M'N', une ligne brisée semblable; de sorte que les arcs homologues MN et M'N' sont semblables (100). Ainsi les deux hyperboles proposées renferment un même nombre d'arcs homologues semblables; donc elles sont semblables elles-mêmes.

154. Puisque dans deux hyperboles semblables, les arcs semblables ne sont que des lignes brisées semblables, composées d'une infinité de droites homologues, infiniment petites, il s'ensuit, 1° que les longueurs de ces arcs sont entre elles comme leurs cordes, et par conséquent comme les premiers axes; 2° que les segmens compris par deux arcs semblables et leurs cordes, sont eux-mêmes semblables et proportionnels aux carrés des premiers ou des seconds axes.

155. *Lorsque deux hyperboles semblables ont le même centre et les premiers axes suivant la même droite, elles ont les mêmes asymptotes; et réciproquement.* Car une asymptote de la première et une asymptote correspondante ou homologue de la seconde, font avec l'axe des x et d'un même côté, des angles égaux dirigés dans le même sens; donc elles coïncident. La réciproque est évidente; car deux hyperboles qui ont les mêmes asymptotes, ont nécessairement leurs axes proportionnels.

156. Voici plusieurs problèmes et théorèmes sur l'hyperbole :

I. Trouver les conditions nécessaires pour qu'une droite ne rencontre l'hyperbole qu'en un seul point, ou pour qu'elle ne la rencontre pas.

II. Etant donnés, dans l'hyperbole, la direction du premier axe, deux points et un foyer, décrire la courbe.

III. Trouver la courbe passant par les points qui divisent chacune des cordes parallèles au premier axe de l'hyperbole, en trois parties égales.

IV. Si par chaque point d'une tangente à un cercle donné, on élève sur cette tangente, une perpendiculaire égale à la partie extérieure de la sécante menée par ce point et par le centre, le lieu des extrémités de ces perpendiculaires sera une hyperbole.

V. Si d'un foyer de l'hyperbole, on mène une perpendiculaire à une asymptote, les distances du pied de cette perpendiculaire au centre et au foyer proposé, vaudront respectivement le demi-premier axe et le demi-second.

VI. Tracer l'hyperbole, 1° dès que l'on connaît un foyer, une asymptote et le premier axe ou le rapport des deux axes; 2° lorsque l'on connaît un foyer et les directions du premier axe et d'une asymptote. (Les solutions dépendent du théorème V.)

VII. Si par un point quelconque de l'hyperbole, on mène une parallèle à la droite d qui joint les extrémités de deux diamètres conjugués, la différence des carrés des distances du point proposé à ceux où la parallèle coupe ces deux diamètres, sera égale au carré de la droite *d*.

VIII. Comment tracer les bords d'une allée d'un parterre, pour que cette allée paraisse avoir partout la même largeur à un œil placé verticalement au-dessus de la droite qui divise en deux parties égales la même allée, dans le sens de sa longueur? On admet que deux droites paraissent égales, dès qu'elles sont vues sous des angles égaux.

IX. Le lieu de tous les centres de gravité des triangles de même surface et de même angle au sommet, est une hyperbole, dont les asymptotes sont les deux côtés du sommet commun aux triangles.

X. Le lieu de tous les milieux des segmens qu'interceptent deux axes rectangulaires, sur les droites tirées d'un point donné dans le même plan, est une hyperbole équilatère, dont le centre est au milieu de la droite qui joint le point donné à l'origine des axes proposés. (Ces deux axes pourraient être obliques.)

De la Parabole.

157. La *parabole* est une courbe plane telle, que les distances de l'un quelconque de ses points à un point fixe F et à une droite donnée DE, sont égales entre elles. Le point fixe F est dit le *foyer* de la parabole, la droite donnée DE en est la *directrice*, et la distance du foyer à un point de la courbe est le *rayon vecteur* de cette courbe.

158. D'après cette définition, pour construire la parabole, le foyer F et la directrice DE étant donnés, on prend une équerre ABC (fig. 21); on attache en C et en F les extrémités d'un fil; dont la longueur est égale au côté AC de l'angle droit de l'équerre; on applique l'autre côté AB contre la directrice, qui sera, si l'on veut, une règle tenue immobile; puis on fait glisser l'équerre suivant la directrice, ayant soin de tenir le fil toujours tendu au moyen d'un crayon ou style qui s'appuie constamment sur le côté AC. La trace de ce style sera la parabole demandée.

Effectivement, à cause de la ligne $CmF = CA$, on aura toujours $mF = mA$.

Le côté AC de l'équerre étant parvenu sur la perpendiculaire FG, menée du foyer à la directrice, donnera le point O où cette perpendiculaire est coupée par la courbe. Ce point O est appelé le *sommet* de la parabole et la perpendiculaire OFX, à la directrice, est l'*axe* de la courbe.

Renversant l'équerre autour de l'axe GX et continuant le mouvement suivant la directrice, on décrira la seconde portion OV′ de la parabole, égale à la première OV.

Par ce procédé on obtient une portion VOV′ de la courbe, et cette portion est d'autant plus grande, que le côté AC de l'équerre est plus grand lui-même.

159. On peut aussi décrire la parabole par points. Soit toujours F le foyer et DE la directrice. Menons FG perpendiculaire à DE, et prenons le milieu O de la distance FG du foyer à la directrice; ce milieu O sera évidemment le sommet de la parabole. Pour avoir d'autres points, prenons sur la perpendiculaire GFX, et à partir du point G, une distance quelconque GP, plus grande que GO; puis du foyer F comme centre et du rayon GP, décrivons un arc; cet arc coupera la perpendiculaire tirée de P sur GP, aux deux points M et M′, qui seront à la parabole cherchée.

Menant en effet, MQ perpendiculaire à la directrice, on aura MQ = GP = FM; le point M est donc à égales distances du foyer F et de la directrice; il appartient conséquemment à la parabole. Il en est de même du point M′. On voit que par cette construction, on trouvera autant de points qu'on voudra de la courbe à décrire; et ces points seront deux à deux de part et d'autre et à égales distances de l'axe OX.

160. Cherchons actuellement l'équation de la parabole. Désignons par p la distance FG du foyer F à la directrice DE, puis plaçons l'origine des coordonnées rectangulaires au milieu O de cette distance et dirigeons l'axe des x suivant FG. Soit M un point quelconque de la courbe, x et y les coordonnées OP et OM de ce point, et r le rayon vecteur FM = MQ = GP : il est clair qu'on aura d'abord $r = x + \frac{1}{2}p$.

Ensuite, le triangle rectangle FMP donne

$$r^2 = y^2 + (x - \tfrac{1}{2}p)^2.$$

Substituant la valeur précédente de r, développant et réduisant, il viendra

$$y^2 = 2px.$$

Telle est l'équation de la parabole rapportée à ses *axes principaux* OX et OY, bien que le premier OX soit seul un *axe* de la courbe : aussi le nomme-t-on *premier axe* ou simplement l'*axe* de la parabole. Le coefficient $2p$ est le *paramètre* : c'est la double distance du foyer à la directrice, ou encore la double ordonnée qui passe par le foyer.

161. L'équation précédente donne

$$y = \pm \sqrt{2px}.$$

Ces deux valeurs étant égales et de signes contraires, on voit que *le premier axe de la parabole divise en deux parties égales, toutes les cordes de cette courbe qui sont perpendiculaires au même axe.*

Posant $x = 0$, pour avoir les points où la courbe coupe l'axe des ordonnées, on aura $y = \pm 0$; les deux points d'intersection se réunissent donc à l'origine O. Ainsi le *second axe* de la parabole lui est tangent au sommet; et la courbe ne s'étend pas à la gauche de cet axe, comme on le voit d'ailleurs, puisque x négatif donne y imaginaire. Et comme x positif donne à y des valeurs réelles, d'autant plus grandes que x est plus grand lui-même, il s'ensuit que la parabole s'étend indéfiniment à la droite de son second axe, *symétriquement* au-dessus et au-dessous du premier.

162. Remarquons d'ailleurs que dans la parabole $y^2 = 2px$, le paramètre $2p$ peut varier depuis zéro jusqu'à l'infini. Lorsque ce paramètre est nul, ce qui donne $y = 0$, quel que soit x, la parabole se réduit à son axe. A mesure que le paramètre augmente, la parabole devient de plus en plus ouverte, s'approche de plus en plus de la tangente menée par le sommet, pour laquelle $y^2 = 0$, et se confond avec cette tangente, lorsque le paramètre $2p$ devient infini; car alors, quel que soit y, on a toujours $x = \frac{y^2}{\infty} = 0$.

163. Nous venons de voir que la parabole a pour équation $y^2 = 2px$. Réciproquement, *les coordonnées étant rectangulaires, toute équation qui peut se ramener à la forme* $y^2 = 2px$, *représente une parabole, ayant le sommet à l'origine et l'axe dirigé suivant celui des abscisses* (fig. 21).

Prenons en effet, sur l'axe des x et de part et d'autre de l'origine O, les distances $OF = OG = \frac{1}{2}p$, et par le point G, menons DE perpendiculaire à GF; si M ou (x, y) est un point de la courbe, on aura évidemment

$$FM^2 = y^2 + (x - \tfrac{1}{2}p)^2 = 2px + x^2 - px + \tfrac{1}{4}p^2;$$

d'où $FM = x + \frac{1}{2}p$. Mais il est visible que la perpendiculaire

$MQ = PG = x + \frac{1}{2}p$; donc $MF = MQ$. Ainsi la courbe représentée par l'équation $y^2 = 2px$, et conséquemment par l'équation proposée, est telle, que les distances de chacun de ses points à un point fixe F et à une droite donnée DE, sont égales entre elles; donc cette courbe est une parabole (157), dont F est le foyer, DE la directrice, O le sommet et $2p$ le paramètre.

D'après cela, si on a l'équation $2y^2 + 3y - 8x + 9 = 0$, et qu'on passe du système de coordonnées à un autre parallèle, en posant $x = h + x'$ et $y = k + y'$, on verra qu'en prenant $h = \frac{63}{64}$ et $k = -\frac{3}{4}$, l'équation proposée se réduit à $y'^2 = 4x'$; cette équation représente donc une parabole, facile à construire.

164. ***Si l'on coupe la surface convexe d'un cône droit par un plan parallèle à une génératrice* CH *et perpendiculaire au plan conduit suivant cette génératrice et l'axe* CV *du cône, la section résultante sera une parabole*** (fig. 22).

Soit M un point quelconque de l'intersection FNMT. Prenons le point N pour origine et NK pour axe des x. Soient x et y les coordonnées rectangulaires NP et PM du point M. Puisque PM est aussi perpendiculaire au plan HCI; en conduisant par la droite MP, un plan perpendiculaire à l'axe CV, ce plan coupera le cône suivant un cercle, ayant son intersection DS avec HCI pour diamètre. Or, M est un point de la circonférence de ce cercle et MP une perpendiculaire au diamètre DS; donc $y^2 = DP \times PS$. Les triangles semblables KNI et PNS donnant $KN : x :: KI : PS$, et ayant d'ailleurs $PD = HK$, il vient

$$y^2 = \frac{KI.KH}{KN}x.$$

Représentant le coefficient de x par $2p$, p sera donné, et on aura, pour tous les points de la courbe indéfinie FNMT, $y^2 = 2px$; donc cette courbe est une parabole (163), dont N est le sommet, NK l'axe et $2p$ le paramètre.

165. On peut considérer la parabole comme une ellipse dont le grand axe est infini. Prenons en effet, une ellipse dont OI soit le demi-grand axe A (fig. 21), l'origine des coordonnées rectangulaires étant au sommet O et les x positifs étant comptés suivant OX; l'équation de cette courbe sera

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(2Ax - x^2).$$

La distance du centre I de cette ellipse au foyer F est IF =

F.

$\sqrt{A^2 - B^2}$; en la retranchant du demi-grand axe A, il restera la distance OF du sommet au foyer le plus proche. Regardons cette distance comme une constante représentée par $\frac{1}{2}p$; nous aurons $\frac{1}{2}p = A - \sqrt{A^2 - B^2}$; d'où $B^2 = Ap - \frac{1}{4}p^2$.

Substituant cette valeur de B^2 dans l'équation précédente de l'ellipse, elle devient, réductions faites,

$$y^2 = 2px - \frac{p}{A}(x^2 + \tfrac{1}{2}px) + \frac{p^2x^2}{4A^2}.$$

Si dans cette équation, on donne successivement à A différentes valeurs, p restant toujours le même, on aura une suite d'ellipses dont les grands axes seront différens, mais qui auront toutes le même foyer F et la même distance de ce foyer au sommet de la courbe. Enfin, si l'abscisse x conservant une valeur finie, on suppose A infiniment grand, les termes divisés par A et A^2 seront infiniment petits et devront être regardés comme nuls; il viendra donc alors

$$y^2 = 2px,$$

équation d'une parabole. On passe donc de l'ellipse à la parabole, en supposant le grand axe infini. Ce qui peut conduire aux propriétés de la parabole, à l'aide de celles de l'ellipse.

166. Il est bien facile de s'assurer que, suivant que le point (x, y) est sur la parabole, au-dehors ou au-dedans, le binome $y^2 - 2px$ est nul, positif ou négatif; et réciproquement.

167. Pour trouver l'équation d'une tangente à la parabole, il faut regarder cette droite comme une sécante, dont les points d'intersection (x', y') et (x'', y'') avec la courbe se réunissent en un seul. Il est clair que l'équation de cette sécante est

$$y - y'' = a(x - x'') \text{ et } a = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

Les deux points (x', y') et (x'', y'') étant sur la parabole, on a

$$y'^2 = 2px' \text{ et } y''^2 = 2px''; \text{ d'où } a = \frac{2p}{y' + y''}.$$

Pour la tangente, les deux points d'intersection (x', y') et (x'', y'') coïncident et donnent $y' = y''$, $x' = x''$ et $a = \frac{p}{y''}$. Par cette valeur de a on voit qu'au sommet la tangente coïncide avec le second axe; mais qu'elle ne peut devenir parallèle au premier que quand y'' est infini. Substituant la valeur $a = \frac{p}{y''}$, on aura, pour l'équation de la tangente à la parabole, au point (x'', y''),

$$y - y'' = \frac{p}{y''}(x - x''); \text{ d'où } yy' = p(x + x'') \ldots (1)$$

Retranchant le double de cette équation de $y''^2 = 2px''$, puis ajoutant de part et d'autre y^2, on trouvera

$$(y - y'')^2 = y^2 - 2px.$$

Cette équation représente toujours la droite exprimée par l'équation (1). Or pour tout point (x, y) situé sur la même droite, le binome $y^2 - 2px$ est positif ; tous les points de la droite (1) sont donc hors de la parabole, à l'exception du point (x'', y''), qui est sur la courbe ; cette droite (1) est donc effectivement tangente à la parabole au point (x'', y'').

168. La valeur $a = \frac{p}{y''}$, qui détermine la direction de la tangente, étant unique, il s'ensuit que par un point (x'', y'') donné sur la parabole, on ne peut mener qu'une seule tangente à cette courbe.

C'est ce qu'on vérifie d'ailleurs en cherchant le point de contact (x'', y'') d'une tangente à la parabole, menée par un point donné (x'', y''). Dans ce cas, les équations de la parabole et de la tangente donnent

$$y''^2 = 2px'' \text{ et } y'y'' = p(x' + x'').$$

Eliminant y'' de ces équations, l'équation finale fournit

$$x'' = \frac{y'^2 - px'}{p} \pm \frac{y'}{p}\sqrt{y'^2 - 2px'}.$$

Suivant donc que le point (x', y') sera hors de la parabole, sur cette courbe ou dans son intérieur, les deux valeurs de x'' seront réelles et inégales, réelles et égales ou imaginaires, et il y aura deux tangentes, une seule ou aucune.

Nous venons de résoudre analytiquement le problème de mener une tangente à la parabole : nous verrons bientôt les moyens de construire ce problème.

169. Pour avoir le point où la tangente rencontre l'axe des x, il faut faire $y = 0$ dans l'équation $yy'' = p(x + x'')$; ce qui donnera $x = -x''$. Ce point T sera donc toujours situé du côté des abscisses négatives, à la distance OT = OP du sommet O (fig. 23). Par conséquent la soutangente PT = 2OP = $2x''$;

c'est-à-dire que *dans la parabole, la soutangente est double de l'abscisse du point de tangence.* Ceci fournit un moyen très-simple de mener une tangente à cette courbe, quand on connaît le point de contact M, ou seulement son abscisse OP.

170. Nous venons de voir que OT = OP; mais OF = OG (160); donc TF = PG = MH = MF; le triangle TFM est donc isocèle et donne l'angle FMT = FTM = TMH = SMF'. Ainsi, *dans la parabole, les droites menées du point de tangence au foyer et parallèlement à l'axe, font avec la tangente des angles égaux;* propriété qui devait naturellement résulter de ce que la parabole est une ellipse dont le grand axe est infini, et dont les foyers sont par conséquent infiniment éloignés l'un de l'autre.

171. De là résulte un moyen très-simple de mener une tangente à la parabole par un point extérieur K (fig. 23). De ce point comme centre et d'un rayon égal à KF, soit décrit un arc coupant la directrice aux points H et H'; soient menées de ces points deux parallèles à l'axe; ces parallèles couperont la parabole en M et M', qui seront les points de tangence, et KM, KM' les tangentes demandées.

En effet, par construction KF = KH; mais d'ailleurs MF = MH : donc les deux triangles KFM et KMH sont égaux. Par conséquent, l'angle TMF = TMH = SMF'; ce qui exige que KM soit tangente au point M (170). On verra de même que KM' est tangente en M'.

Si le point de tangence devait être très-éloigné et qu'on eût besoin seulement de la direction de la tangente, il serait plus commode de mener KS perpendiculaire à FH; KS serait la tangente demandée.

Si la tangente devait être parallèle à une droite donnée, on ferait, au foyer F, l'angle NFM double de l'angle que cette droite forme avec l'axe; et le point M serait le point de contact de la tangente cherchée.

172. Il est clair que *la normale* MN *divise en deux parties égales l'angle* FMF' *formé par les droites menées du point de tangence au foyer et parallèlement à l'axe.*

On trouve bien facilement que l'équation de cette normale est

$$y - y'' = -\frac{y''}{p}(x - x'').$$

Si on y prend y nul, on aura, pour la sounormale PN, $x - x''$

$=p$; de sorte que *dans la parabole, la sounormale est constante et égale à la moitié du paramètre.* Ce qui donne le moyen de mener une normale, et par suite une tangente, à la parabole, par un point donné sur cette courbe.

173. La tangente TM est perpendiculaire au milieu I de FH (171). Mais le sommet O étant au milieu de FG, la droite OI est parallèle à GH, et coïncide avec l'axe des y. D'où il suit que, *dans la parabole, les pieds des perpendiculaires menées du foyer à toutes les tangentes à cette courbe, appartiennent au second axe principal.* Ce qui vient de ce que la parabole est une ellipse dont le centre est à une distance infinie du sommet O; en sorte que la circonférence décrite de ce centre et d'un rayon égal à cette distance, coïncide avec l'axe des y (73).

174. Voici quelques théorèmes à démontrer :

I. Si des extrémités d'une corde passant par le foyer de la parabole, on mène deux tangentes à cette courbe, elles se couperont à angle droit sur la directrice.

II. Le foyer est le seul point du plan de la parabole, dont la distance à un point quelconque de la courbe, soit une fonction rationnelle de l'abscisse de ce point.

III. Si d'un point du second axe de la parabole, on mène une droite au foyer et une tangente à la courbe, ces deux droites seront perpendiculaires entre elles.

IV. La plus courte droite menée de la parabole à un point donné sur l'axe, est la normale qui passe par ce point.

V. Dans la parabole, les carrés des distances du point d'intersection de deux tangentes à leurs points de contact, sont entre eux comme les rayons vecteurs menés à ces deux points, et le produit de ces distances vaut le carré de la droite qui joint le foyer au point d'intersection dont il s'agit.

175. Dans la parabole, on appelle *diamètre*, la droite qui passe par les milieux d'un système de cordes parallèles. Soit $y=ax+b$ l'équation de l'une quelconque de ces cordes. Pour les extrémités de cette corde, son équation et celle de la parabole $y^2=2px$, admettent les mêmes valeurs pour x et les mêmes valeurs pour y. Eliminant x entre ces équations, on aura pour déterminer y,

$$y^2-\frac{2p}{a}y+\frac{2bp}{a}=0.$$

Les racines de cette équation, sont les ordonnées des extrémités de la corde, et l'ordonnée y'' du milieu de cette corde est égale à la demi-somme des mêmes racines, c'est-à-dire à $\frac{p}{a}$. Cette valeur est la même pour le milieu de toute autre corde parallèle à la première, puisqu'alors p et a restent les mêmes ; donc la droite qui passe par les milieux de toutes les cordes proposées est parallèle à l'axe des x ; c'est-à-dire que *tous les diamètres de la parabole sont parallèles à son axe*. Ce qui vient d'ailleurs de ce que le centre de cette courbe est situé sur l'axe, à une distance infinie.

176. Et comme en faisant varier a, l'ordonnée $y'' = \frac{p}{a}$, qui est aussi celle de l'origine du diamètre, peut avoir telle valeur on voudra, il s'ensuit que *par chaque point de la parabole, on peut mener un diamètre*.

Réciproquement, *toute parallèle à l'axe de la parabole est un diamètre*. Car elle coïncide avec le diamètre mené par le même point.

177. L'ordonnée du point où un diamètre coupe la parabole, étant $y'' = \frac{p}{a}$, on en déduit $a = \frac{p}{y''}$. Cette valeur de a est celle qui convient à la tangente au point dont y'' est l'ordonnée (167); ainsi *dans la parabole, la tangente à l'origine d'un diamètre est parallèle aux cordes que ce diamètre divise en deux parties égales*.

178. On appelle *axes conjugués* de la parabole, tout système d'axes de coordonnées, pour lequel l'équation de la courbe est de même forme que par rapport à ses axes principaux.

Cherchons les axes conjugués ; et prenons, à cet effet, les formules pour passer d'un système d'axes rectangulaires, à un autre de différente origine, savoir :

$$x = h + \frac{x'}{m} + \frac{y'}{m'},\quad y = k + \frac{ax'}{m} + \frac{a'y'}{m'},$$

formules dans lesquelles $m^2 = 1 + a^2$, $m'^2 = 1 + a'^2$ et (h, k) la nouvelle origine.

Substituant ces valeurs de x et de y dans l'équation $y^2 - 2px = 0$, qui est celle de la parabole rapportée à ses axes principaux ; chassant les dénominateurs et ordonnant, il viendra

$$a'^2m^2y'^2 - 2mm'^2px' + 2m'm^2(a'k - p)y' +$$
$$a^2m'^2x'^2 + 2aa'mm'x'y' + m^2m'^2(k^2 - 2ph) = 0.$$

Si l'on observe que les quantités m et m' ne peuvent jamais devenir nulles, on verra que, pour que l'équation précédente soit de même forme que celle qui est relative aux axes, il faut qu'on ait

$$q=0,\quad m=1,\quad q'k-p=0,\quad k^2-2ph=0;$$

et alors l'équation de la parabole se réduit à

$$a'^2y'^2-2m'^2px'=0\ldots(1)$$

La condition $k^2-2ph=0$ ou $k^2=2ph$, fait voir que les coordonnées k et h satisfont à l'équation $y^2=2px$ de la parabole, et qu'ainsi *la nouvelle origine est un point de la courbe.* La relation $a'k=p$, donnant $a'=\frac{p}{k}$, montre que *le nouvel axe des ordonnées touche la parabole à la nouvelle origine* (167). Enfin la condition $q=0$, nous apprend que le nouvel axe des abscisses est parallèle à l'axe de la parabole; il est donc un diamètre de cette courbe (176).

Substituant les valeurs précédentes de m'^2 et a'^2 dans l'équation (1), on trouvera $y'^2=2(p+2h)x'$. Supprimant les accens des variables y' et x', en se rappelant toutefois qu'elles se comptent sur des axes obliques; posant d'ailleurs $p'=p+2h$, on aura, pour l'équation de la parabole, rapportée à ses axes conjugués,

$$y^2=2p'x.$$

Comme dans cette équation l'axe des x est un diamètre, puisqu'il divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à son conjugué; la parabole est dite *rapportée à son diamètre.* Le coefficient $2p'$ est le *paramètre* relatif à ce diamètre. De plus, les coordonnées de la nouvelle origine pouvant avoir telles valeurs qu'on voudra, il s'ensuit que *la parabole admet une infinité de systèmes d'axes conjugués.*

179. Soit r le rayon vecteur mené à la nouvelle origine (h, k); on a vu (178) que $r=\frac{1}{2}p+h$. Mais $p'=p+2h$; donc $2p'=4r$. Donc *dans la parabole, le paramètre d'un diamètre quelconque est quadruple de la distance du foyer à l'origine de ce diamètre.* Cette propriété subsiste également pour l'axe.

180. Remarquons maintenant que *l'angle des coordonnées étant désigné par θ, toute équation qui peut se ramener à la forme* $y^2=2p'x$, *représente une parabole.* Soit en effet $y^2=2px$ une parabole, rapportée à son axe, dans laquelle le paramètre $2p$ et l'un de ses points (h, k) soient tels, qu'on ait $p+2h=p'$

et que la tangente à ce point fasse avec l'axe des x un angle égal à θ ; il est clair que si l'on désigne tang θ par a', on aura à la fois

$$k^2 = 2ph,\quad a'k = p \quad \text{et} \quad p + 2h = p' ; \ldots (2)$$

ce qui donne, en posant $1 + a'^2 = m'^2$,

$$h = \frac{p'}{2m'^2},\quad p = \frac{a'^2p'}{m'^2} \quad \text{et} \quad k = \frac{a'p'}{m'^2} \cdots (3)$$

Ces valeurs étant nécessairement réelles, il en sera de même de la parabole $y^2 = 2px$.

Cela posé, transformons les coordonnées de cette parabole, de manière que la nouvelle origine étant (h, k), l'axe des ordonnées soit la tangente en ce point, l'angle des coordonnées étant égal à l'angle donné θ, et par conséquent le nouvel axe des x étant parallèle à l'ancien. Dans ce cas, puisque les nouveaux axes des x et des y font avec l'ancien axe des abscisses, les angles o et θ, il est clair qu'on aura $a =$ tang o $= 0$, $m^2 = 1 + a^2 = 1$ ou $m = 1$, $a' =$ tang θ, $m'^2 = 1 + a'^2$, et que par suite, les formules (45) pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre, d'origine différente, deviendront

$$x = h + x' + \frac{y'}{m'} \quad \text{et} \quad y = k + \frac{ay'}{m'}.$$

Substituant ces valeurs dans $y^2 = 2px$, réduisant d'après les équations (2) ou (3), il viendra, pour l'équation de la parabole, rapportée aux nouveaux axes, $y'^2 = 2p'x'$. Or, cette équation coïncide avec la proposée $y^2 = 2p'x$, car le coefficient $2p'$ est le même, ainsi que l'angle θ des coordonnées. Donc l'équation $y^2 = 2p'x$ représente une parabole ; et il en est de même de toute équation réductible à cette forme, par la transformation des coordonnées, telle, par exemple, que $y^2 + My + Nx + P = 0$, qui en y posant

$$y = y' - \tfrac{1}{2}M \quad \text{et} \quad x = x' + \frac{M^2 - 4P}{4N},\ \text{devient}\ y'^2 = -Nx'.$$

181. Les valeurs (3) fournissent le moyen de décrire la parabole $y^2 = 2p'x$; car menant par l'origine la perpendiculaire k sur l'axe des x et par l'extrémité de k une parallèle d à cet axe, puis prenant sur d un point à la distance h de l'extrémité dont il s'agit, ce point sera le sommet et d l'axe de la parabole cherchée ; on tracera donc facilement cette parabole, puisque son paramètre $2p$ est d'ailleurs connu.

182. L'équation $y^2 = 2p'x$ de la parabole, rapportée à ses axes conjugués, étant de même forme que par rapport à ses axes principaux, les propriétés indépendantes de l'inclinaison des coordonnées seront communes à l'un et à l'autre système. Ainsi,

1° *Les carrés des ordonnées au diamètre, sont entre eux comme les abscisses correspondantes.* Connaissant donc le paramètre d'un diamètre et l'angle des axes conjugués; il est bien facile de tracer la parabole, en décrivant d'abord une parabole sur ce diamètre, pris pour axe, avec le paramètre donné, puis en inclinant sous l'angle donné, les ordonnées de cette courbe, sans changer leurs longueurs.

2° Suivant que le point (x, y) est sur la parabole, au-dehors ou au-dedans, le binome $y^2 - 2p'x$ est nul, positif ou négatif; et réciproquement.

3° La tangente $y = ax + b$, au point (x'', y''), a pour équation $yy'' = p'(x + x'')$, la valeur de a, qui détermine la direction de cette tangente, étant $a = \frac{p'}{y''}$. On trouve aussi que l'équation de la tangente $y = ax + b$, se réduit à $2ab = p'$.

4° La soutangente est encore $2x''$, c'est-à-dire double de l'abscisse du point de contact. Ce qui fournit un moyen bien simple de mener une tangente à la parabole, rapportée à son diamètre, par un point (x'', y'') donné sur cette courbe.

183. On appelle *segment parabolique*, la surface comprise entre un arc de parabole et sa corde. Cherchons l'aire du segment ABD (fig. 24). Pour y parvenir, circonscrivons-lui le parallélogramme ADRV et par le point de contact B, menons le diamètre BX. Il est clair que BX et BV sont deux axes conjugués de la parabole (178) et qu'ainsi C est le milieu de AD.

Divisons l'arc AOB en une infinité d'élémens infiniment petits, tels que OM, et par chaque point de division, menons une ordonnée au diamètre BX; nous partagerons la surface BCAO en une infinité de trapèzes mixtilignes, tels que MOQN. Puisque l'arc MO est infiniment petit, on peut le considérer comme une droite; et si on mène BH parallèle à cette droite, le triangle BOM sera évidemment la moitié du parallélogramme OMKu. Soit I le milieu de OM; soient menées l'ordonnée IP et la tangente IT; il est visible qu'on aura BT = BP = $\frac{1}{2}$TP : donc, à cause de la similitude des triangles TBE et TPI, on aura aussi

BE ou IF $=\frac{1}{2}$IP. Le parallélogramme OMKu est donc la moitié du trapèze MOQN; par conséquent, le triangle BOM est le quart du trapèze MOQN.

Ainsi chaque triangle élémentaire, du segment BAO, est le quart du trapèze correspondant, dans la surface BCAO; donc le segment BAO est lui-même le quart de BCAO. Mais le triangle BCA étant la moitié du parallélogramme CV, il est visible que BCAO $=\frac{1}{2}$CV $+\frac{1}{4}$BCAO; d'où l'on tire

$$\text{BCAO}=\tfrac{2}{3}\text{CV}.$$

On démontrerait de même que BCDM′ $=\frac{2}{3}$CR; donc le segment ABD $=\frac{2}{3}$ADRV; c'est-à-dire que *l'aire de tout segment parabolique est les deux tiers du parallélogramme circonscrit.*

On voit en outre que le segment BAO est le 6^{me} de BCAV.

184. Dans deux paraboles, rapportées à leurs axes, on appelle *points homologues* deux points de ces courbes, dont les abscisses, et par conséquent les ordonnées, sont entre elles comme les paramètres. Les *droites homologues* sont terminées à des points homologues chacun à chacun; et il en est de même des *arcs homologues*.

185. *Toutes les paraboles sont des courbes semblables.* Soient MN et M′N′ deux arcs homologues de deux paraboles quelconques : en inscrivant à volonté une ligne brisée dans le premier MN, il est facile de démontrer qu'on pourra toujours inscrire, dans le second M′N′, une ligne brisée semblable; de sorte que les arcs homologues MN et M′N′ sont semblables (100). Les deux paraboles proposées renferment donc un même nombre d'arcs homologues semblables; elles sont par conséquent semblables elles-mêmes.

186. Puisque les arcs homologues de deux paraboles, ne sont que des lignes brisées semblables, composées d'une infinité de droites homologues, infiniment petites, et que par conséquent les segmens terminés par ces arcs et leurs cordes, sont eux-mêmes semblables et homologues; il en résulte que dans deux paraboles quelconques, 1° les arcs ou les droites homologues, sont comme les paramètres; 2° les segmens homologues sont comme les carrés des mêmes paramètres.

187. Voici quelques théorèmes et problèmes sur la parabole:

I. Dans deux paraboles ayant le même sommet et le même axe, les tangentes en deux points homologues sont parallèles.

II. Si l'on divise en trois parties égales chacune des cordes perpendiculaires à l'axe de la parabole, les points de division seront sur une parabole, de même axe et de même sommet que la première, divisant en trois parties équivalentes, tout segment de cette première terminé par l'une des cordes proposées.

III. Les milieux des ordonnées de la parabole sont à une autre parabole, ayant même axe et même sommet que la première, et divisant en deux portions équivalentes, tout segment de cette première, terminé par l'arc, l'abscisse et l'ordonnée.

IV. Trouver les conditions nécessaires pour qu'une droite coupe la parabole en un seul point.

V. Une parabole étant tracée, déterminer, 1° son axe; 2° un système d'axes conjugués, faisant entre eux un angle donné; 3° enfin, le paramètre à l'axe ou à un diamètre quelconque donné.

VI. Si d'un point pris sur l'axe de la parabole, on mène deux rayons à la courbe, on formera un *secteur* que l'on demande de partager en deux parties proportionnelles à deux nombres donnés, par une droite tirée du point proposé. (Cette droite rencontre la parabole au point où passe une hyperbole équilatère, dont une asymptote est dirigée suivant l'axe de la parabole proposée.)

De l'équation commune aux sections coniques et de quelques propriétés résultantes.

188. Les équations de l'ellipse et de l'hyperbole, rapportées aux centres et aux diamètres conjugués 2A et 2B (qui pourraient être les axes), sont

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2 \text{ et } A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2.$$

Si on transporte l'axe des ordonnées parallèlement à lui-même, de manière que l'origine soit à l'extrémité $(-A, o)$ du diamètre 2A, suivant lequel est dirigé l'axe des x; il est clair que le nouvel axe des y sera tangent à la courbe (89 et 131), que de plus l'ordonnée y restera toujours la même, mais que l'abscisse x deviendra $x - A$; on aura donc alors, pour les équations des deux courbes,

$$y^2 = \frac{2B^2}{A}x - \frac{B^2}{A^2}x^2 \text{ et } y^2 = -\frac{2B^2}{A}x + \frac{B^2}{A^2}x^2.$$

Ces deux équations et celle $y^2 = 2px$ de la parabole, montrent que l'axe des x étant un diamètre et l'axe des y tangent à l'origine, l'équation de toute section conique est de la forme

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

équation dans laquelle on a, pour la parabole, $q = o$; pour l'ellipse, $p = \frac{B^2}{A}$ et $q = -\frac{B^2}{A^2}$; pour l'hyperbole, $p = -\frac{B^2}{A}$ et $q = \frac{B^2}{A^2}$.

189. Réciproquement, *toute équation de la forme* $y^2 = 2px$

$+ qx^2$, *représente une section conique, dont l'axe des* x *est un diamètre.*

D'abord *la courbe est une parabole, si* $q = 0$; car alors son équation devient $y^2 = 2px$ (180). *La courbe est une ellipse, lorsque* p *est positif et* q *négatif;* car en prenant $p = \frac{B^2}{A}$, $q = -\frac{B^2}{A^2}$ et $x = A + x'$, l'équation proposée prend la forme $A^2y^2 + B^2x'^2 = A^2B^2$, et représente une ellipse rapportée à ses diamètres conjugués 2A et 2B (87). Enfin, *la courbe est une hyperbole, si* p *est négatif et* q *positif;* car en faisant $p = -\frac{B^2}{A}$, $q = \frac{B^2}{A^2}$ et $x = A + x'$, l'équation proposée devient $A^2y^2 - B^2x'^2 = -A^2B^2$; elle représente conséquemment une hyperbole, rapportée à ses diamètres conjugués 2A et 2B (135).

Il est clair, dans chacun de ces cas, que si l'angle des coordonnées est droit, la courbe sera rapportée à ses axes principaux.

190. Il est facile de démontrer que le trinome $y^2 - 2px - qx^2$ est nul, positif ou négatif, suivant que le point (x, y) est sur la courbe, au-dehors ou au-dedans; et réciproquement.

191. Soient (x', y') et (x'', y'') les points où une sécante $y = ax + b$ rencontre la section conique $y^2 = 2px + qx^2$; on aura à la fois

$$y'^2 = 2px' + qx'^2, \ldots (1)$$
$$y''^2 = 2px'' + qx''^2, \ldots (2)$$
$$y - y'' = a(x - x'') \text{ et } a = \frac{y' - y''}{x' - x''} \ldots (3).$$

Retranchant (2) de (1) et ayant égard à (3), il viendra

$$(y' + y'')a = 2p + q(x' + x'').$$

Si l'on suppose que les deux points d'intersection (x', y') et (x'', y'') se réunissent en un seul, la sécante $y - y'' = a(x - x'')$ sera alors tangente à la section conique au point (x'', y''): et comme dans ce cas $y' = y''$ et $x' = x''$, il viendra

$$2ay'' = 2p + 2qx'', \text{ ou } a = \frac{p + qx''}{y''}.$$

Avec cette valeur, l'équation de la tangente au point (x'', y''), se réduit à

$$yy'' = p(x + x'') + qxx'' \ldots (4)$$

Prenant dans cette équation, la valeur de y, pour la substituer dans le trinome $y^2-2px-qx^2$, puis réduisant au même dénominateur et ayant égard à l'équation (2), on trouvera

$$y^2-2px-qx^2=\frac{p^2}{y''^2}(x-x'')^2.$$

Ainsi pour tout point de la droite (4), le trinome $y^2-2px-qx^2$ est positif; tous les points de cette droite sont donc hors de la courbe proposée, à l'exception du point (x'', y''). De sorte que la droite (4) n'a que le seul point (x'', y'') de commun avec la section conique; elle lui est par conséquent tangente en ce point. Et elle est la seule; car la valeur de a, qui détermine sa direction est unique.

192. ***Les cordes qui joignent les points de contact de chaque couple de tangentes menées à une section conique, par les points d'une droite quelconque, se coupent toutes en un même point, situé sur le conjugué du diamètre parallèle à cette droite.***

Soit $y^2=2px+qx^2$ la section conique, dans laquelle on suppose l'axe des y parallèle à la droite proposée (D), ce qui est toujours possible; l'équation de cette droite sera donc $x=n$, n étant la distance de l'origine au point où la droite coupe l'axe des x. Soit (n, m) un point quelconque de la droite (D), (x', y') et (x'', y'') les contacts des deux tangentes menées par ce point à la section conique; les équations de ces tangentes sont donc

$$my'=p(n+x')+qnx',$$
$$my''=p(n+x'')+qnx''.$$

L'équation de la corde qui joint les deux contacts, est

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x'').$$

Substituant dans cette équation, la valeur de $\frac{y'-y''}{x'-x''}$, tirée des deux précédentes, on trouvera, réductions faites,

$$my=p(n+x)+qnx.$$

Pour avoir le point P où la corde de contact rencontre l'axe des x, il suffit de poser $y=0$, dans son équation: il viendra alors, pour l'abscisse de l'intersection P,

$$x=\frac{-pn}{p+qn}.$$

Comme p, q, n sont donnés invariables, et que la valeur précédente de x ne dépend pas de l'ordonnée m du point de la droite (D), d'où l'on a mené les deux tangentes, il s'ensuit que pour les deux tangentes tirées d'un autre point de (D), la corde de contact passera par le même point P que la précédente. Donc puisque P est situé sur le conjugué du diamètre parallèle à (D), il en résulte le théorème énoncé d'abord.

L'inverse de ce théorème est également vraie.

Le point P est dit le *pôle* de la droite (D), et celle-ci est la *polaire* du point P. D'après la valeur précédente de x, il est facile de trouver le pôle, lorsque la polaire est donnée; et réciproquement.

193. *Si les côtés d'un angle droit mobile sont continuellement tangens à une section conique, le sommet décrira une circonférence de même centre que la courbe proposée.*

Soit (x', y') le sommet de l'angle droit proposé; l'équation de l'un de ses côtés sera de la forme $y - y' = a(x - x')$. Ce côté devant être tangent à la section conique $y^2 = 2px + qx^2$, si l'on désigne par (x'', y'') le point de contact, on aura à la fois

$$y'' - y' = a(x'' - x'),$$
$$y''^2 = 2px'' + qx''^2.$$

Éliminant y'' et résolvant l'équation finale, par rapport à x'', les deux valeurs résultantes seront les abscisses des deux points où la droite $y'' - y' = a(x'' - x')$ peut couper la section conique proposée; mais puisque cette droite est tangente, les deux points d'intersection coïncident en un seul; les deux valeurs de l'abscisse x'' sont donc égales; la quantité sous le radical est conséquemment nulle; ce qui donne

$$a^2 - \frac{2y'(p + qx')}{qx'^2 + 2px'}a + \frac{p^2 + qy'^2}{qx'^2 + 2px'} = 0 \ldots (1).$$

Chacun des côtés de l'angle droit proposé conduira évidemment à cette équation; les deux valeurs a' et a'' de a, dans cette même équation, appartiennent donc, l'une à un côté de l'angle droit et l'autre au second côté: et puisque ces deux côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre, il est clair qu'en supposant les coordonnées rectangulaires, on aura $a'a'' + 1 = 0$ (18), ou $a'a'' = -1$. De plus, le produit $a'a''$ des racines de l'équation (1) étant égal au terme indépendant de a, il vient, en chassant le dénominateur,

$$qy'^2 + qx'^2 = -2px' - p^2 \ldots (2)$$

Cette équation entre les coordonnées x', y' du sommet de l'angle droit mobile, représente évidemment une circonférence (31), de même centre que l'ellipse ou l'hyperbole proposée, et dont le rayon est $\sqrt{(A^2+B^2)}$, pour l'ellipse, et $\sqrt{(A^2-B^2)}$, pour l'hyperbole, 2A et 2B désignant les axes de ces deux courbes. Quant à la parabole, où $q=0$, le lieu géométrique du sommet de l'angle droit, se réduit à $x'=-\frac{1}{2}p$ et représente la directrice de la courbe. Cette directrice peut être considérée comme une circonférence, dont le centre, situé à l'infini, coïncide avec celui de la parabole.

194. *Trouver une courbe telle, que les distances de chacun de ses points à un point fixe* F *et à une droite donnée* DE, *aient le rapport connu* m.

Soit placé l'axe des x suivant la perpendiculaire FH, menée de F sur DE, et l'origine des coordonnées rectangulaires au point O, divisant FH en deux parties FO et OH dont m soit le rapport FO : OH; on verra, qu'en désignant FO par d, l'équation de la courbe cherchée sera

$$y^2=2d(1+m)x-(1-m^2)x^2.$$

Suivant donc que le rapport m sera plus petit que l'unité, plus grand ou égal, la courbe sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole (189). Or, dans la parabole, où $m=1$, $4d$ est le paramètre; donc F est le foyer et DE la directrice. Il est clair d'ailleurs que O est le sommet, dans chacune des trois courbes; et si 2A désigne le premier axe, 2B le second et c l'excentricité, il est facile de voir qu'on aura, 1° pour l'ellipse, où $m<1$,

$$A=\frac{d}{1-m},\ B=\frac{d}{1-m}\sqrt{1-m^2},\ c=\frac{dm}{1-m}=mA \text{ et } d=A-c;$$

2° pour l'hyperbole, où $m>1$,

$$A=\frac{d}{m-1},\ B=\frac{d}{m-1}\sqrt{m^2-1},\ c=\frac{dm}{m-1}=mA \text{ et } d=c-A.$$

Et puisque d est la distance du sommet O au point F, on voit que dans les deux dernières courbes, comme dans la première, le point fixe F est un foyer.

195. La droite DE étant la directrice de la parabole précédente, sera aussi appelée, par analogie, la *directrice* des deux autres courbes. Ainsi la directrice d'une section conique est une perpendiculaire au premier axe principal telle, que les distances

du foyer et de cette perpendiculaire à un point quelconque de la courbe, sont dans un rapport constant (celui de l'égalité, pour la parabole, et celui de l'excentricité au demi-premier axe, pour l'ellipse et l'hyperbole). Il est clair en outre que l'hyperbole et l'ellipse ont chacune deux directrices.

196. *La droite* FR *qui joint le foyer* F *d'une section conique au point* R *où une sécante* MN *rencontre la directrice voisine* DE, *divise en deux parties égales le supplément de l'angle* MFN *compris par les rayons vecteurs, menés aux points d'intersection de la sécante avec la courbe* (fig. 25).

Menons en effet, NI parallèle à MF et MP, NQ, perpendiculaires à la directrice DE. Les triangles RMP et RNQ étant semblables, aussi bien que RMF et RNI, on aura deux proportions qui, à cause du rapport commun RM : RN, donneront MP : NQ :: MF : NI, ou MP : MF :: NQ : NI. Mais d'après la définition de la directrice DE (195), on a MP : MF :: NQ : NF; donc NQ : NI :: NQ : NF, et par suite NI = NF. Le triangle NIF étant donc isocèle, il s'ensuit que l'angle NFI = NIF = IFM'. Ce qu'il fallait démontrer.

197. Ce théorème fournit le moyen de *tracer la section conique dont on connaît le foyer et trois points.* Effectivement, il en résultera d'abord deux points de la directrice. Connaissant la directrice et le foyer, on aura la direction du premier axe, puis le rapport entre les distances de l'un des trois points au foyer et à la directrice voisine; d'où l'on déduira l'*espèce* de courbe demandée, puis son sommet et ses deux axes, lorsqu'elle sera une ellipse ou une hyperbole.

Si elle doit être une parabole, on n'aura besoin, pour la construire, que de connaître son foyer et deux de ses points; car il en résultera d'abord un point de la directrice; et la tangente menée par ce point à la circonférence décrite de l'un des points donnés, comme centre, avec la distance de ce point au foyer pour rayon, sera la directrice elle-même.

198. La construction d'une section conique, d'après certaines conditions, est, en général, un problème assez facile à résoudre, au moyen des propriétés de la courbe. Par exemple, *si l'on veut décrire la section conique tangente à trois droites données et dont un foyer soit un point donné;* on mènera de ce point des perpendiculaires aux droites proposées : si les pieds de ces perpendicu-

laires sont en ligne droite, cette droite sera le second axe d'une parabole (173), bien facile à tracer, puisqu'on aura sur-le-champ sa directrice. Mais si les trois pieds forment un triangle, le centre et le rayon de la circonférence circonscrite à ce triangle, seront respectivement le centre et le demi-premier axe de l'ellipse ou de l'hyperbole à construire (73 et 124); et on en déduira les données nécessaires à cette construction.

199. Voici encore quelques théorèmes et problèmes à traiter :

I. Si un côté de l'angle droit, dont le sommet est au foyer d'une section conique, passe par le point de tangence, l'autre côté coupera la tangente sur la directrice. (Ce théorème est déjà énoncé pour l'ellipse, page 42.)

II. Trouver le lieu de tous les sommets des triangles de même base d, dans chacun desquels un des angles à la base est double de l'autre. (Ce lieu est une branche d'hyperbole, ayant pour premier axe les deux tiers de d et pour centre l'un des points qui divisent d en trois parties égales. Cette branche coupe l'arc dont d est la corde, en deux parties doubles l'une de l'autre, et résout le problème de la *trisection* de l'angle.)

III. Les deux droites menées des extrémités d'un diamètre d'une section conique aux extrémités de toute corde parallèle au conjugué de ce diamètre, se coupent sur une autre section conique; et suivant que la courbe proposée est une ellipse ou une hyperbole, la nouvelle courbe, au contraire, est une hyperbole ou une ellipse. Si la courbe donnée était une parabole, la seconde courbe serait une parabole égale, mais tournée en sens opposé; d'où résulte un théorème, que nous laissons à énoncer.

IV. Dans toute section conique $y^2 = 2px + qx^2$, si par un point de l'axe des y et à la distance $2p$ de l'origine, on mène une parallèle à l'axe des x, la portion de cette parallèle, entre l'axe des ordonnées et le prolongement de l'une des deux cordes supplémentaires menées des extrémités du diamètre placé sur l'axe des abscisses, sera égale à la distance de l'origine au point où l'autre corde prolongée coupe l'axe des y. (Cette propriété donne le moyen de trouver autant de points qu'on voudra de la section conique proposée.)

V. Trouver sur le plan d'une section conique, un point dont la distance à un point quelconque de la courbe, soit une fonction rationnelle de l'abscisse de ce dernier point. (Le point cherché est l'un des foyers.)

VI. Trouver le lieu géométrique de tous les milieux d'une série de cordes parallèles, dans une section conique. (Ce lieu est un diamètre de la courbe.)

VII. Une portion de section conique étant tracée sur un plan, trouver la nature de la courbe.

200. *Dans une section conique, la corde d'un segment étant perpendiculaire au premier axe principal, trouver la mesure du*

volume engendré par le demi-segment autour d'un axe extérieur CZ, *dans le même plan et parallèle au premier axe* OX (fig. 26 et 27).

Soit OMP $=$ S le demi-segment proposé ; plaçons l'origine des coordonnées rectangulaires au sommet O de la courbe et l'axe des x suivant le premier axe principal OX. Soient h et k les coordonnées OP et PM du point M. Divisons l'abscisse h en un nombre infini n de parties égales à z, de manière qu'on ait $h = nz$ et que z puisse être regardée comme infiniment petite : il est clair que les ordonnées dont les pieds tombent aux points de division de h, partagent le demi-segment S en trapèzes mixtilignes, tels que HILK, qui, à cause de la hauteur IL ou z infiniment petite, pourront être regardés comme des rectangles. Soit I le v ième point de division de h, à partir du sommet O, et soit t_v le v ième trapèze HILK ; on aura donc OI $= vz$. Soit d la distance OC du sommet O à l'axe de rotation CZ et IH $= y$. Le v ième trapèze t_v pouvant être regardé comme un rectangle, il est visible que le volume décrit par le trapèze, autour de CZ, est la différence des cylindres décrits par EFHK et EFIL ; ainsi on a, lorsque l'arc du demi-segment S est concave vers l'axe CZ,

$$\text{vol. } t_v = \pi (d + y)^2 z - \pi d^2 z = t_v \cdot 2\pi d + \pi y^2 z,$$

et lorsque l'arc du demi-segment est convexe vers le même axe,

$$\text{vol. } t_v = \pi d^2 z - \pi (d - y)^2 z = t_v \cdot 2\pi d - \pi y^2 z\,;$$

ce qui donne, pour les deux cas,

$$\text{vol. } t_v = t_v \cdot 2\pi d \pm \pi y^2 z.$$

L'équation commune aux trois sections coniques est (188)

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

Pour le point H, où IH $= y$ et OI $= x = vz$, il vient

$$y^2 = 2pvz + qv^2z^2.$$

Substituant cette valeur de y^2 dans l'expression précédente de vol. t_v, on aura

$$\text{vol. } t_v = t_v \cdot 2\pi d \pm \pi (2pvz^2 + qv^2z^3).$$

Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, on aura successivement les volumes décrits autour de CZ par les trapèzes qui composent le demi-segment S ; la somme de ces volumes sera donc celui engendré par ce demi-segment : observant que

$t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n = S$; que $nz = h$ et que n étant infini, on a $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{1}{2}n^2$ (G. page 239) et $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}n^3$; on trouvera, réductions faites,

$$\text{vol. } S = S \cdot 2\pi d \pm \pi h^2 (p + \tfrac{1}{3}qh) \ldots (1)$$

Cette formule fera connaître la mesure du volume décrit par le demi-segment S de l'ellipse, de l'hyperbole ou de la parabole, en y substituant les valeurs de p et q qui appartiennent à la courbe que l'on considère (188). Par exemple, pour la parabole, où $q = 0$ et $2ph = k^2$, on trouvera

$$\text{vol. } S = S \cdot 2\pi d \pm \tfrac{1}{2}\pi k^2 h ;$$

c'est-à-dire que *le volume décrit par un demi-segment de parabole autour d'un axe extérieur, dans le même plan et parallèle à l'axe de la courbe, lui-même perpendiculaire à la corde de ce segment, a pour mesure l'aire du demi-segment multipliée par la circonférence que décrit le sommet, plus ou moins le demi-cylindre dont la hauteur et le rayon de la base sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée qui terminent ce demi-segment;* plus *si l'arc du demi-segment est concave et* moins *s'il est convexe vers l'axe de rotation.*

201. Supposons que le demi-segment dont l'arc est concave et le demi-segment dont l'arc est convexe vers l'axe CZ, aient le même sommet O et la même abscisse h ; la distance d sera la même, pour tous les deux ; et si l'on prend le signe $+$, puis le signe $-$, dans la formule (1), les valeurs résultantes exprimeront les volumes décrits par le premier et le second demi-segment ; la somme de ces volumes sera par conséquent celui décrit par le segment entier 2S ; ainsi on aura

$$\text{vol. } 2S = 2S \cdot 2\pi d.$$

D'où il suit que *le volume engendré par un segment de section conique, autour d'un axe extérieur, dans le même plan et perpendiculaire à la corde du segment, elle-même perpendiculaire au premier axe principal, a pour mesure l'aire de ce segment multipliée par la circonférence que décrit le sommet de la courbe.* Par exemple, si le segment devient l'ellipse entière πAB, le grand axe 2A étant parallèle à l'axe de rotation, on aura, pour le volume de l'*anneau applati* engendré, $2\pi^2 ABd$.

202. Pour l'*ellipsoïde allongé* que produit la demi-ellipse S

autour de son grand axe $2A$, on a $d=0$, $h=2A$, $p=-\frac{B^2}{A}$, $q=\frac{B^2}{A^2}$, et la formule (1) donne

$$\text{vol. } S=\tfrac{4}{3}\pi AB^2.$$

D'où l'on voit que *l'ellipsoïde allongé a pour mesure les quatre tiers du cylindre dont la hauteur et le rayon de la base, sont respectivement le demi-grand et le demi-petit axe de l'ellipse génératrice.*

Raisonnant comme pour la formule (1), on verra que l'*ellipsoïde applati*, engendré par la révolution d'une demi-ellipse, autour de son petit axe $2B$, a pour mesure $\frac{4}{3}\pi A^2B$. De sorte que l'ellipsoïde applati est plus grand que l'ellipsoïde allongé.

203. La formule (1) conduit aussi à la mesure du corps décrit par un secteur de section conique, ou par un segment à deux bases. Enfin on a ce théorème, que nous laissons à démontrer :

La corde d'un segment de parabole étant perpendiculaire à son axe, l'anneau engendré par ce segment, autour d'un axe extérieur, dans le même plan et parallèle à la corde, a pour volume l'aire de ce segment multipliée par la circonférence que décrit le sommet, plus ou moins les quatre cinquièmes du cylindre produit autour de la tangente au sommet, par le rectangle circonscrit au segment proposé ; *plus* si l'arc du segment est convexe et *moins* s'il est concave vers l'axe de rotation.

Nous laissons aussi à résoudre ce problème : On veut construire un vase cylindrique d'argent fin, à base elliptique, et surmonté d'un couvercle dont l'intérieur soit égal au demi-ellipsoïde allongé décrit par cette base. La capacité intérieure, tant du vase que du couvercle, sera de 4 litres et l'épaisseur aura partout un millimètre. Comme on désire ménager autant qu'il se pourra la matière, on demande quelles devront être les dimensions du vase à construire, pour que la quantité d'argent employé soit un minimum ?

Des courbes que peut représenter une équation du second degré, à deux variables, et de quelques problèmes qui en dépendent.

204. Les courbes dont les équations sont du second degré, s'appellent aussi *courbes du second ordre*. Pour trouver ces courbes, considérons l'équation la plus générale du second degré à deux variables x et y, savoir

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0, \ldots (1)$$

l'angle des coordonnées x et y étant quelconques. Supposons d'abord que A ne soit pas nul, c'est-à-dire que l'équation renferme au moins le carré y^2. Dans ce cas, en résolvant l'équation par rapport à y et posant, pour abréger,

$$y_1 = -\frac{B}{2A}x - \frac{D}{2A}, \dots (2)$$

il viendra

$$y = y_1 \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF}.$$

Ainsi, pour la même abscisse x, l'ordonnée y aura deux valeurs et déterminera deux points de la ligne représentée par l'équation proposée, en supposant toutefois que cette équation ne soit pas impossible.

Pour trouver ces deux points, il faut d'abord construire la droite que représente l'équation (2). Or, soient OX et OY les axes des x et des y, O étant l'origine (fig. 28), et supposons tous les nombres A, B, D, positifs (les raisonnemens seraient les mêmes, si un ou plusieurs de ces nombres étaient négatifs). Il est clair que la droite (2) coupe les axes des x et des y en des points éloignés de l'origine O des distances $-\frac{D}{B}$ et $-\frac{D}{2A}$. La seconde n'étant pas infinie, représentons-la par OG. Quant à la première, si elle était infinie, c'est-à-dire si B était nul, la droite (2) serait parallèle à l'axe des x et pourrait aisément se construire; mais supposons que cette première distance ait une valeur finie et soit égale à OH; la droite HGX′ sera donc celle que représente l'équation (2).

Cela posé, soit OP une abscisse de la ligne (1); l'ordonnée correspondante de la droite (2) sera — PP′. Et puisqu'à cette ordonnée, il faut ajouter et retrancher le terme irrationnel de y, pour avoir les valeurs de l'ordonnée de la ligne (1) qui répondent à l'abscisse OP; on voit que si l'on prend les droites P′M et P′M′ égales chacune au terme contenant le radical, M et M′ seront deux points de la ligne (1) cherchée.

Transformons actuellement les coordonnées, et prenons GX′ et GY pour les nouveaux axes des x' et des y', G étant la nouvelle origine. Les anciennes coordonnées étant $OP = x$ et $PM = y$, les nouvelles seront $GP' = x'$ et $P'M = y'$. Si donc on observe que $PP' = -\frac{B}{2A}x - \frac{D}{2A}$, et que les triangles GOH et PHP′ sont semblables, on trouvera

$$y = -\frac{B}{2A}x - \frac{D}{2A} + y' \text{ et } x = \frac{OH}{GH}x' = vx'.$$

Substituant ces valeurs dans celle de y fournie par l'équation (1), réduisant et élevant au carré, on verra que la ligne (1) est représentée par l'équation

$$4A^2y'^2 = (B^2-4AC)v^2x'^2 - 2(BD-2AE)vx' + D^2 - 4AF \ldots (3).$$

Si donc $B^2 - 4AC$ était nul, il est clair qu'en passant à des coordonnées parallèles, l'équation (1) pourrait se ramener à la forme $y^2 = 2px$, et représenterait une parabole (180). Il est facile de voir d'ailleurs que cette parabole se réduirait à deux droites parallèles à l'axe des y, ou à cet axe lui-même, ou à deux droites imaginaires, si $BD - 2AE$ étant nul, on avait en même temps $D^2 - 4AF$ positif, nul ou négatif.

Admettons que $B^2 - 4AC$ ne soit pas nul : dans ce cas, si nous transportons l'origine sur GX', de G en I, de manière qu'on ait

$$GI = \frac{BD - 2AE}{(B^2 - 4AC)v},$$

le nouvel axe des abscisses étant toujours dirigé suivant GX' et le nouvel axe des ordonnées étant parallèle à GY; il est visible que la nouvelle ordonnée sera toujours P'M ou y', et que si l'on désigne par x'' la nouvelle abscisse IP', on aura

$$x' = \frac{BD - 2AE}{(B^2 - 4AC)v} + x''.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (3) et réduisant, on trouvera, pour représenter la ligne (1), l'équation

$$4A^2y'^2 = (B^2 - 4AC)v^2x''^2 - \frac{(BD - 2AE)^2}{B^2 - 4AC} + D^2 - 4AF \ldots (4)$$

Suivant donc que $B^2 - 4AC$ sera négatif ou positif, cette équation pourra évidemment prendre la forme $My^2 + Nx^2 = P$ ou $My^2 - Nx^2 = P$, M et N étant deux nombres positifs ; ainsi l'équation (4) et conséquemment l'équation (1), représentera une ellipse (87), ou une hyperbole (135), rapportée à des diamètres conjugués.

L'ellipse se réduirait même à un point, ou bien serait impossible, si P était nul ou négatif, tandis que l'hyperbole se réduirait à deux droites, si l'on avait $P = 0$.

On voit que *l'équation* (1) *représente une parabole, une ellipse* *ou une hyperbole, suivant que la quantité* $B^2 - 4AC$ *est nulle, négative ou positive.* Et cela serait encore si l'une des quantités B, C, D, E, était nulle, ou s'il y en avait plusieurs égales à zéro.

205. Maintenant, pour connaître toutes les courbes représentées par l'équation (1), il ne nous reste plus qu'à examiner le cas où A et C sont nuls en même temps. Dans ce cas, $B^2 - 4AC$ étant positif, l'équation représentera sans doute une hyperbole. Or, c'est ce qui a lieu en effet; car l'équation du second degré devenant alors $Bxy + Dy + Ex + F = 0$,

on peut la mettre sous la forme

$$B\left(x + \frac{D}{B}\right)\left(y + \frac{E}{B}\right) - \frac{DE}{B} + F = 0.$$

Et si l'on passe à un système de coordonnées parallèles, en posant

$$x = x' - \frac{D}{B} \quad \text{et} \quad y = y' - \frac{E}{B},$$

$-\frac{D}{B}$ et $-\frac{E}{B}$ seront l'abscisse et l'ordonnée de l'origine des nouvelles coordonnées x' et y'; et l'équation proposée deviendra

$$x'y' = \frac{DE - BF}{B^2}.$$

Sous cette forme, elle représente, comme on l'a vu (142), une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Il résulte de la discussion précédente, qu'*une équation du second degré entre deux variables* x *et* y, *ne peut représenter d'autres courbes que l'ellipse* (*ou la circonférence*), *la parabole et l'hyperbole, c'est-à-dire l'une des sections coniques;* et nous avons vu plus haut (204) à quel caractère on reconnaît chaque espèce de courbe.

206. La marche que nous venons de suivre est analogue à celle qu'on trouve pag. 776 et suiv. de la Géométrie analytique de M. Biot, 6^{me} édition; cette méthode est aussi très-propre à fournir la construction de la courbe proposée, comme on le verra dans le problème que voici :

Les côtés PQ *et* PR *d'un angle tracé étant donnés de longueurs* (fig. 29), *si on divise chacun de ces côtés en* n *parties égales, et que l'on compte les points de division de* P *vers* R, *pour le côté* PR, *et de* Q *vers* P, *pour le côté* PQ; *les droites qui joindront les extrémités* P *et* Q, *des deux côtés, aux deux points de division* *de même rang, se couperont sur une courbe, qu'il s'agit de construire.*

Pour cet effet, prenons le sommet P de l'angle pour origine des coordonnées obliques, PQ étant l'axe des x et PR l'axe des y. Soient S et T les $v$ièmes points de division des côtés PQ et PR; soient a et b les longueurs de ces côtés; on aura donc, d'après l'énoncé, $QS=\frac{v}{n}a$ et $PT=\frac{v}{n}b$. Soit M le point où se coupent les droites RS et QT, et soient x et y les coordonnées PN et NM du point M. Il est clair, par les triangles semblables QMN et QTP, RSP et SMN, qu'on aura

$$a-x:a::y:\frac{v}{n}b \quad \text{et} \quad a-\frac{v}{n}a-x:a-\frac{v}{n}a::y:b.$$

Egalant entre elles les valeurs de $\frac{v}{n}$, tirées de ces proportions, puis chassant les dénominateurs et réduisant, il viendra

$$a^2y^2+abxy+b^2x^2-2a^2by-2ab^2x+a^2b^2=0\ \dots (1)$$

Cette équation étant indépendante des nombres n et v, sera vraie quels que soient ces nombres; elle représente donc le lieu de tous les points d'intersection M des droites menées conformément à l'énoncé. Or, ce lieu est une ellipse, puisque pour l'équation proposée, la quantité B^2-4AC est négative et se réduit à $-3a^2b^2$ (204).

Actuellement, pour trouver les moyens de décrire cette ellipse, résolvons l'équation (1) par rapport à y; nous aurons

$$y=b-\frac{bx}{2a}\pm\frac{b}{2a}\sqrt{4ax-3x^2}.$$

La droite $y_1=b-\frac{bx}{2a}$ rencontre l'axe des y au point R et l'axe des x au point G tel, que $PG=2a$; cette droite est donc RG. De plus, d'après les deux valeurs générales de y, il est clair que RG divise en deux parties égales toutes les cordes de l'ellipse cherchée, parallèles à l'axe des ordonnées; RG est donc un diamètre (89).

D'un autre côté, dans les points de l'ellipse, où les ordonnées sont tangentes, les deux valeurs de y sont égales; le radical est donc nul; ces points appartiennent par conséquent à la droite RG. Effectivement, les coordonnées de ces deux points sont $x=0$ et $y=b=PR$, $x=\frac{4}{3}a=PI$ et $y=\frac{1}{3}b=IR'$. De sorte que les deux parallèles PK et IK touchent la courbe en R et R'.

Résolvant l'équation (1) par rapport à x et raisonnant comme pour y, on verra qu'en prenant $PH = 2b = 2PR$, la droite RQ sera un diamètre de l'ellipse, et que les points où les parallèles à l'axe des abscisses sont tangentes, sont Q et Q', sur HQ, les coordonnées du dernier point étant $x = \frac{1}{2}a$ et $y = \frac{4}{3}b = PL$. De sorte que les parallèles PQ et LK touchent la courbe en Q et Q', L'ellipse est donc inscrite dans le parallélogramme PIKL. On sait d'ailleurs que si deux diamètres de l'ellipse sont tels, que les tangentes aux extrémités de l'un soient parallèles à l'autre, ces deux diamètres sont conjugués (81); donc RR' et QQ' sont deux diamètres conjugués de la courbe : on connaît leurs longueurs et l'angle qu'ils font entre eux; on peut donc en déduire les deux axes, de longueur et de position (88), et conséquemment décrire l'ellipse demandée.

Il est aisé de s'assurer que cette ellipse est inscrite dans le triangle PHG, et touche les côtés, chacun dans son milieu.

207. Si les points de division des côtés PR et PQ, se comptaient à partir du point commun P, les droites joignant les extrémités R et Q de ces côtés à deux de leurs points de division de même rang, se couperaient sur la diagonale du parallélogramme construit sur les côtés PR, PQ et l'angle compris RPQ, et dont RQ serait la seconde diagonale. C'est ce qu'on peut aisément vérifier.

208. Remarquons encore que *si les points qui divisent les côtés* PQ *et* PR *en* n *parties égales chacun, se comptent de* Q *vers* P *pour l'un et de* P *vers* R *pour l'autre, la droite joignant deux points de division de même rang et la droite joignant les deux points de division d'un rang immédiatement supérieur, se couperont sur une parabole.*

Pour le faire voir, prenons les côtés $PQ = a$ et $PR = b$ pour axes des coordonnées, PQ étant celui des abscisses. Soient S et T les $v$ièmes points de division des côtés PQ et PR; on aura donc $QS = \frac{v}{n}a$, $PS = \frac{n-v}{n}a$ et $PT = \frac{v}{n}b$. Ainsi l'équation de la droite ST se réduit à

$$n(n-v)ay + nvbx = v(n-v)ab \ldots (1)$$

Changeant v en $v+1$, dans cette équation, on aura celle de la droite qui joint les $(v+1)$ièmes points de division, il viendra donc

$$n(n-v-1)ay+n(v+1)bx=(v+1)(n-v-1)ab \ldots (2)$$

Pour le point où les deux droites se coupent, les x et les y sont respectivement les mêmes dans les deux équations précédentes. Si donc on élimine v de ces équations, l'équation résultante renfermera les coordonnées de l'intersection de deux droites consécutives quelconques, menées conformément à l'énoncé, et représentera le lieu de toutes les intersections. Or, pour éliminer v avec plus de facilité, retranchons (2) de (1); nous aurons

$$nay-nbx=(2v-n+1)ab;$$

d'où nous pouvons déduire aisément les valeurs de v et de $n-v$. Substituant ces valeurs dans l'équation (1) et réduisant, on trouvera, pour l'équation du lieu géométrique cherché,

$$(ay-bx-ab)^2-4ab^2x-\frac{a^2b^2}{n^2}=0;$$

ce lieu est par conséquent une parabole (204).

Lorsque n est infini, on est conduit à ce théorème : Si une droite ST rencontrant continuellement deux côtés PQ et PR d'un triangle donné PRQ, se meut de manière à couper constamment ces deux côtés en parties donnant la proportion QS : SP :: PT : TR; les intersections successives de chaque position de la droite mobile avec la position immédiatement suivante, décriront une parabole, à laquelle la droite mobile restera toujours tangente. De plus, cette parabole, tangente en Q et P aux deux côtés PQ et PR, aura deux diamètres dirigés suivant les prolongemens de deux côtés opposés du parallélogramme dont PQ et PR sont les demi-diagonales.

209. Voici une propriété commune aux courbes du second ordre et de laquelle on a déduit le moyen de les construire :

Si une section conique est coupée par deux droites non-parallèles AB *et* CD; *que d'un point* P *de la première droite* AB, *on mène une sécante* PN *parallèle à la seconde* CD *et d'un point* Q *de la seconde, une sécante* ST *parallèle à la première; les deux rapports* $PM\times PN : PB\times PA$ *et* $QC\times QD : QS\times QT$ *seront égaux et invariables, quels que soient les points* P *et* Q (fig. 30).

Prenons les droites proposées AB et CD pour axes des x et des y obliques, O étant l'origine; l'équation de la section conique étant nécessairement du second degré en x et y (204), sera de la forme

$$y^2+axy+bx^2+cy+dx+e=0, \dots (1)$$

a, b, c, d, e étant des nombres donnés, positifs ou négatifs. Cette équation est la même que celle-ci :

$$y^2+(ax+c)y+b\left(x^2+\frac{d}{b}x+\frac{e}{d}\right)=0 \dots (2)$$

Dans les points A et B, où la courbe coupe l'axe des x, on a $y=0$; ce qui donne, pour déterminer les abscisses OB et OA des points d'intersection,

$$x^2+\frac{d}{b}x+\frac{e}{d}=0.$$

Désignant par x' et x'' les racines de cette dernière équation, on aura $x'=\text{OB}$, $x''=-\text{OA}$, et le trinome $x^2+\frac{d}{b}x+\frac{e}{d}$ prendra la forme $(x-x')(x-x'')$. Si donc x désigne l'abscisse OP, dans l'équation (2), les valeurs correpondantes de y seront PM et PN, et le dernier terme de cette équation deviendra $b\times$ PB$\times$PA. Or, le produit des valeurs de y, dans l'équation (2), est égal au dernier terme ; ainsi on a PM$\times$PN$=b\cdot$PB$\times$PA, ou PM$\times$PN : PB$\times$PA$=b$. On aurait de même, P'M'$\times$P'N' : P'B$\times$P'A.

Maintenant, si l'on remarque que l'équation (1) revient à

$$x^2+\frac{1}{b}(ay+d)x+\frac{1}{b}(y^2+cy+e)=0,$$

on verra, en raisonnant comme pour l'équation (2), que QS$\times$QT$=\frac{1}{b}\cdot$QC$\times$QD, ou que QC$\times$QD : QS$\times$QT$=b$. Tous les rapports PM$\times$PN : PB$\times$PA, P'M'$\times$P'N' : P'B$\times$P'A, QC$\times$QD : QS$\times$QT, etc., sont donc égaux au nombre constant b. Ce qu'il fallait démontrer.

Il est clair que le théorème précédent aurait encore lieu, si les parallèles aux axes étaient tangentes à la courbe.

210. De ce théorème, on tire le moyen de faire passer une section conique par cinq points donnés, sommets d'un pentagone. Proposons-nous, par exemple, *de décrire l'ellipse circonscrite au pentagone donné* AA'BB'G (fig. 31).

Supposons le problème résolu, et soit I le point de rencontre des deux droites A'A et B'B ; par le point G, menons les droites

GG″ et GG′, respectivement parallèles aux deux B′B et A′A et rencontrant l'ellipse demandée en G″ et G′. Pour déterminer ces deux points, le théorème précédent donne

$$IA \cdot IA' : IB \cdot IB' :: HA \cdot HA' : HG \cdot HG'' :: KG \cdot KG' : KB \cdot KB';$$

d'où l'on tire

$$HG'' = \frac{HA \cdot HA' \cdot IB \cdot IB'}{HG \cdot IA \cdot IA'} \text{ et } KG' = \frac{IA \cdot IA' \cdot KB \cdot KB'}{IB \cdot IB' \cdot KG}.$$

Ces valeurs, faciles à construire, feront connaître les points G′ et G″ de l'ellipse cherchée.

Pour avoir le centre, on mènera, par les milieux des cordes parallèles AA′ et GG′, BB′ et GG″, les droites CC′ et EE′, qui se couperont au centre O. Ces droites, en effet, seront deux diamètres, car le conjugué du diamètre parallèle à deux cordes, passe par les milieux de celle-ci (89, 1°).

Les droites QA et Q′G, moitiés des cordes parallèles AA′ et GG′, étant deux ordonnées au diamètre CC′, il est clair qu'on aura

$$\frac{QA^2}{Q'G^2} = \frac{OC^2 - OQ^2}{OC^2 - OQ'^2};$$

d'où l'on tire $OC^2 = \dfrac{QA^2 \cdot OQ'^2 - OQ^2 \cdot Q'G^2}{QA^2 - Q'G^2}.$

De là, en posant $h^2 = QA.Q'O$, $m^2 = OQ \cdot Q'G$ et $n^2 = QA^2 - Q'G^2$, valeurs dont la construction est fort simple, il viendra

$$OC^2 = \frac{(h^2 + m^2)(h^2 - m^2)}{n^2},$$

formule dont la construction est également fort simple.

Le diamètre CC′ étant ainsi connu, on trouvera son conjugué MM′ ou 2A′, au moyen de l'équation $A'^2 \cdot OQ^2 + OC^2 \cdot QA^2 = A'^2 \cdot OC^2$, de laquelle on tire la formule, facile à construire,

$$A'^2 = \frac{OC^2 \cdot QA^2}{CQ.QC'}.$$

Enfin, connaissant les deux diamètres conjugués CC′ et MM′, ainsi que l'angle COM = CQA qu'ils font entre eux, on construira l'ellipse, soit comme il a été dit (89, 2°), soit en déterminant d'abord les deux axes, de grandeur et de position (88).

Il suit de cette solution, qu'une ellipse est complétement déterminée, dès qu'elle doit passer par cinq points donnés. Mais le problème serait impossible, si trois de ces points étaient en ligne droite; et si les cinq points étaient les sommets d'un pentagone régulier, l'ellipse demandée serait une circonférence.

211. En général, une section conique pouvant être construite, lorsqu'on connaît les cinq coefficiens de son équation $y^2+axy+bx^2+cy+dx+e=0$; on voit que *pour déterminer une courbe du second degré, il faut généralement cinq conditions ou cinq données, lesquelles se réduisent à quatre pour la parabole et l'hyperbole équilatère, et à trois pour la circonférence;* car l'égalité des deux axes, dans l'hyperbole équilatère, fait déjà une donnée; et pour la parabole, on a toujours la condition $a^2-4b=0$ (204). Quant à la circonférence, elle est bien fournie par la seule égalité des deux axes de l'ellipse; mais cette égalité faisant coïncider les deux foyers avec le centre, équivaut à deux conditions distinctes.

D'ailleurs, on a vu (197) que l'ellipse et l'hyperbole sont déterminées, dès qu'on a un foyer avec trois autres données, et que la parabole peut se construire, quand on a son foyer et deux de ses autres élémens. Il s'ensuit donc que la connaissance d'un foyer équivaut à deux des conditions nécessaires à la construction de toute section conique.

212. *Trouver l'aire de l'ellipse représentée par l'équation* $Ay^2+Bxy+Cx^2+S=0$, *l'angle des coordonnées étant désigné par* v.

D'abord puisque l'équation précédente représente une ellipse, la quantité B^2-4AC est négative (204). De plus, l'origine est au centre; car si (α, β) est un point de la courbe, $(-\alpha, -\beta)$ en sera un autre; et il est facile de voir que la droite joignant ces deux points, passe par l'origine et se trouve divisée en deux parties égales, par cette origine, laquelle conséquemment est le centre de l'ellipse.

Soit $y=px$ l'équation de l'un des diamètres de l'ellipse proposée et d la demi-longueur de ce diamètre; d, x et y sont donc les côtés d'un triangle dont l'angle entre x et y vaut $180°-v$, et il est clair (G. 381) qu'on aura $d^2=x^2+y^2+2xy\cos v$. De sorte que pour l'extrémité (x,y) de d, les valeurs des coordonnées x et y sont respectivement les mêmes dans les trois équations
$$Ay^2+Bxy+Cx^2+S=0,$$
$$y=px \text{ et } d^2=x^2+y^2+2xy\cos v.$$
Eliminant x et y de ces équations, on trouvera

$$(Ad^2+S)p^2+(Bd^2+2S\cos v)p+Cd^2+S=0.$$

Dans cette équation, d et p sont variables ; et comme la plus grande et la plus petite valeur du diamètre $2d$, sont l'une le grand et l'autre le petit axe de l'ellipse proposée (60), il faut d'abord trouver cette plus grande et cette plus petite valeur. Or, résolvant l'équation finale précédente par rapport à p, puis observant que le maximum et le minimum de d doivent rendre nulle la quantité sous le radical (*Mélanges d'algèbre*, page 59), on aura, pour déterminer ce maximum et ce minimum, l'équation

$$d^4-\frac{4S(B\cos v-A-C)}{4AC-B^2}d^2+\frac{4S^2\sin^2 v}{4AC-B^2}=0.$$

Désignant donc par a le maximum de d et par b le minimum, $2a$ et $2b$ seront les deux axes de l'ellipse proposée, et il viendra, d'après la composition des équations,

$$a^2+b^2=\frac{4S(B\cos v-A-C)}{4AC-B^2} \text{ et } a^2b^2=\frac{4S^2\sin^2 v}{4AC-B^2}\cdots(1)$$

Soit E l'aire cherchée de l'ellipse ; on aura donc (96)

$$E=\pi ab\,;\text{ d'où } E=\frac{2\pi S\sin v}{\sqrt{4AC-B^2}}.$$

Les équations (1) feront connaître les axes de l'ellipse représentée par l'équation proposée. (On en déduirait aussi les axes de l'hyperbole représentée par cette même équation, si B^2-4AC était positif.)

213. *Déterminer l'ellipse de la plus grande surface qu'on peut inscrire dans un triangle donné.*

Soient m et n deux côtés du triangle donné et v l'angle compris. Soit
$$Ay^2+Bxy+Cx^2+1=0,$$
l'équation de l'ellipse cherchée, rapportée à des axes obliques parallèles aux côtés m et n, et comprenant entre eux, conséquemment, un angle égal à v. Portons l'origine au point où se coupent les côtés m et n, en laissant toujours les axes parallèles à eux-mêmes ; soient x, y les coordonnées du centre de l'ellipse, par rapport aux nouveaux axes ; x', y' les nouvelles coordonnées et x'', y'' les anciennes ; on aura donc $x'=x+x''$ et $y'=y+y''$, ou $x''=x'-x$ et $y''=y'-y$. Substituant ces valeurs dans $Ay''^2+Bx''y''+Cx''^2+1=0$, il viendra, pour l'équation de l'ellipse, rapportée aux nouveaux axes,

$$A(y'-y)^2+B(x'-x)(y'-y)+C(x'-x)^2+1=0,$$

A, B, C, étant des coefficiens qui, avec x et y, forment les inconnues du problème.

Il faut d'abord exprimer que l'ellipse touche les côtés m et n, qui sont ici les axes des x' et des y'. Pour cela, faisons d'abord $y'=0$ dans son équation, et exprimons que les valeurs qui en résultent pour x', sont égales; nous trouverons, pour l'abscisse x_1 du point de contact avec le côté m, $x_1=x+\frac{B}{2C}y$, avec la condition $\quad (B^2-4AC)y^2=4C \ldots (1)$

Si dans l'équation de l'ellipse on fait $x'=0$ et qu'on exprime que les valeurs qui en résultent pour y' sont égales, on trouvera, pour l'ordonnée y_2 du point de contact avec le côté n, $y_2=y+\frac{B}{2A}x$, avec la condition

$$(B^2-4AC)\,x^2=4A \ldots (2).$$

L'équation du troisième côté du triangle proposé est $y'=-\frac{n}{m}x'+n$, ou

$$m(y'-y)+n(x'-x)+nx'+my'-mn=0.$$

Pour le point de contact de ce côté avec l'ellipse, les équations de ces deux lignes admettent les mêmes valeurs pour x' et les mêmes valeurs pour y': de plus, les deux valeurs qui en résultent pour x' se réduisent à une seule, de même que les deux valeurs qui en résultent pour y': on a donc, pour les coordonnées x_3 et y_3 du point de contact avec le troisième côté,

$$x_3=x+\frac{(Bm-2An)(nx+my-mn)}{2(An^2-Bmn+Cm^2)}.$$

$$y_3=y+\frac{(Bn-2Cm)(nx+my-mn)}{2(An^2-Bmn+Cm^2)},$$

avec la condition $(B^2-4AC)(nx+my-mn)^2-4An^2+4Bmn-4Cm^2=0$, laquelle, si l'on en retranche les produits respectifs des équations (1) et (2) par m^2 et n^2, se réduit à $(B^2-4AC)(2xy-2nx-2my+mn)+4B=0$; ou bien, en posant $D=2xy-2nx-2my+mn$, cette condition prend la forme $\quad (B^2-4AC)D=-4B \ldots (3)$

Retranchant du carré de cette équation, 4 fois le produit des équations (1) et (2), et réduisant, on obtiendra

$$(4AC-B^2)(4x^2y^2-D^2)=16.$$

Prenant dans cette équation la valeur de $4AC-B^2$ et substituant cette valeur dans $E=\frac{2\pi \sin v}{\sqrt{4AC-B^2}}$, E désignant l'aire de l'ellipse cherchée (212), il viendra

$$E^2=\tfrac{1}{4}\pi^2 \sin^2 v\,(4x^2y^2-D^2).$$

Posant $E=\frac{1}{2}\pi z \sin v$ et remettant la valeur de D, on trouvera $$z^2=4x^2y^2-(2xy-2nx-2my+mn)^2 \ldots (4)$$
Dans cette équation, x, y et z sont variables ; et il s'agit de trouver le maximum de z, puisque z étant à son maximum, il en sera de même de l'aire E de l'ellipse demandée. Or, résolvant l'équation (4) par rapport à x et supposant que l'inconnue y ait la valeur qui convient au maximum de z, on verra que pour ce maximum, la quantité sous le radical est nulle et qu'il en résulte

$$x=\frac{m}{2n}(n-y) \ldots (5)$$

De même, résolvant l'équation (4) par rapport à y, on verra que le maximum de z donne

$$y=\frac{n}{2m}(m-x) \ldots (6)$$

Le maximum de z et conséquemment celui de E, fournit donc les équations (5) et (6). Ainsi, d'après ces équations, les coordonnées du centre de la plus grande ellipse inscrite dans le triangle proposé, sont

$$x=\tfrac{1}{3}m \text{ et } y=\tfrac{1}{3}n\,;$$

ce centre coïncide donc avec le centre de gravité du triangle.

Au moyen de ces valeurs, on trouve $A=-\frac{12}{n^2}$, $B=-\frac{12}{mn}$ et $C=-\frac{12}{m^2}$, puis $x_1=\frac{1}{2}m$, $y_2=\frac{1}{2}n$, $x_3=\frac{1}{2}m$ et $y_3=\frac{1}{2}n$. De sorte que les points de contact sont les milieux des côtés du triangle proposé. Soit T l'aire de ce triangle ; celle de l'ellipse maximum inscrite sera $E=\frac{1}{9}\pi T\sqrt{3}$.

Il résulte des calculs précédens, que *la plus grande ellipse inscrite dans un triangle donné, touche les côtés en leurs milieux et son centre coïncide avec le centre de gravité du triangle.*

Ce théorème remarquable, auquel M. *Bérard* est parvenu, par le calcul différentiel, tome IV des Annales de Mathématiques, fournit le moyen de tracer la plus grande ellipse inscriptible, et montre *comment il faut s'y prendre pour couper, dans une pièce de bois triangulaire, la plus grande table ovale qu'il se puisse.*

En effet, l'un des diamètres $2A'$ de cette ellipse est dirigé suivant la droite d, menée du milieu du côté m du triangle, au sommet opposé : et puisque le centre est au tiers de cette droite, à partir du côté m, il s'ensuit que $A' = \frac{1}{3}d$. Le conjugué $2B'$ du diamètre $2A'$ est parallèle au côté m, tangent à l'ellipse à l'extrémité de $2A'$ (80). De plus, la droite qui joint les points de contact avec les deux autres côtés du triangle, passe par leurs milieux ; elle est donc parallèle au troisième côté m, et en vaut la moitié. En outre, la moitié de cette droite, étant l'ordonnée de l'un des points de contact, vaut évidemment $\frac{1}{4}m$; et quant à l'abscisse du même point, il est facile de voir que sa valeur est $d - \frac{1}{3}d - \frac{1}{2}d$ ou $\frac{1}{6}d$. Ainsi, pour ce point de contact, l'équation de l'ellipse maximum, rapportée à ses diamètres conjugués $2A'$ et $2B'$, devient

$$\tfrac{1}{16}A'^2m^2 + \tfrac{1}{36}B'^2d^2 = A'^2B'^2 ;$$

d'où à cause de $A' = \frac{1}{3}d$, on tire $B'^2 = \frac{1}{12}m^2$, valeur bien facile à construire.

Connaissant donc les deux diamètres conjugués $2A'$ et $2B'$, ainsi que l'angle qu'ils font entre eux, on en déduira la grandeur et la position des deux axes $2A$ et $2B$ (88) ; d'où il sera aisé de tracer la plus grande ellipse inscriptible demandée.

Voici encore deux théorèmes :

I. Le lieu de tous les sommets des triangles ayant une même base et la même différence des angles adjacens, est une hyperbole équilatère, dont le centre est au milieu de la base commune.

II. Si sur les 3 côtés d'un triangle, pris tour à tour comme diagonales, on construit des parallélogrammes, dont les côtés soient parallèles à deux droites données, les trois autres diagonales se couperont en un même point, centre d'une hyperbole équilatère circonscrite au triangle proposé. (Voyez la démonstration, page 184 du tome III de la Correspondance Mathématique et Physique, de M. *Quetelet.*)

NOTE.

Notre but, dans ce qui précède, a été de faire connaître les principales propriétés des courbes du second ordre, au moyen de l'algèbre et de la géométrie élémentaire seules, et de fournir ainsi une utile introduction à l'étude de la *Géométrie analytique.* Mais pour prendre une connaissance plus complète et plus approfondie de cette partie importante des Mathématiques, nous renvoyons aux ouvrages publiés sur cette matière, tels que ceux de MM. Biot, Bourdon, Boucharlat, Garnier, Lacroix, etc.

Si nous avons quelquefois invoqué, dans ce petit traité, les principes de la Trigonométrie rectiligne, c'est parce qu'ils sont si simples et si faciles à acquérir, qu'il n'y aurait aucun avantage réel à ne pas les employer. Cependant, pour comprendre ce livre, la trigonométrie n'est pas rigoureusement nécessaire; et nous indiquerons le moyen de s'en passer, d'autant plus volontiers, qu'il peut se présenter des circonstances où l'on ait besoin d'étudier les propriétés des sections coniques, sans connaître la trigonométrie. Il suffit, à cet effet, de remplacer, par ce que nous allons dire, les nos 17, 18 et 19.

Construire l'angle de deux droites, rapportées à des axes quelconques (fig. 32).

Menons par l'origine A les parallèles AK et AM aux deux droites proposées $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$; l'angle MAK de ces deux parallèles sera évidemment le même que celui ω des deux droites. Prenons $AO = 1$ et menons OM parallèle à AY; nous aurons $OI = a$ et $OM = a'$. Prenons aussi $AN = 1$ et menons NR perpendiculaire à AK et NV à AM : il est clair qu'on pourra aisément construire l'angle $MAK = \omega$, dès que l'on connaîtra la longueur t de la perpendiculaire NR, ou la longueur s de la perpendiculaire NV. Ces longueurs dépendent évidemment de l'angle ω : aussi appelle-t-on NR la *tangente*, NV le *sinus* et AV le *cosinus* de cet angle; et on a ainsi, en abrégé, NR ou $t = \tang \omega$, NV ou $s = \sin \omega$ et $AV = \cos \omega$.

Cela posé, pour trouver t, menons sur AY les perpendiculaires OB et AD ; il est clair qu'en désignant par θ l'angle YAX des deux axes, on aura $AB = OD = \cos\theta = c$ et $OB = AD = \sin\theta = d$; d'où $c^2 + d^2 = 1$. On a aussi $AR^2 = 1 + t^2$. Les aires des triangles ANR et AIM, sont respectivement $\frac{1}{2}t$ et $\frac{1}{2}(a' - a)d$: et puisque ces triangles ont l'angle MAI commun, il en résulte

$$\tfrac{1}{2}t : \tfrac{1}{2}(a'-a)d :: AR : AI \times AM;$$

d'où $t^2 : (a'-a)^2 d^2 :: 1 + t^2 : AI^2 \times AM^2$;

$$1 : AI^2 \times AM^2 - (a'-a)^2 d^2 :: t^2 : (a'-a)^2 d^2;$$

$$t^2 = \frac{(a'-a)^2 d^2}{AI^2 \times AM^2 - (a'-a)^2 d^2}.$$

A cause de $c^2 + d^2 = 1$, les deux triangles rectangles AID et AMD donnent

$$AI^2 = (a+c)^2 + d^2 = a^2 + 2ac + 1,$$
$$AM^2 = (a'+c)^2 + d^2 = a'^2 + 2a'c + 1.$$

Substituant donc ces valeurs et développant, après avoir remplacé d^2 par $1 - c^2$, on verra que la racine carrée du dénominateur de t^2 est $(a + a')c + aa' + 1$; ainsi on aura

$$t = \frac{(a'-a)d}{(a+a')c + aa' + 1}.$$

De là, pour avoir s, les deux triangles semblables ANR et ANV fournissent $1 : AR :: s : t$, ou $1 : 1 + t^2 :: s^2 : t^2$; d'où l'on tire

$$s = \frac{(a'-a)d}{\sqrt{(1+a^2+2ac)(1+a'^2+2a'c)}}.$$

Chacune de ces formules suffit pour construire l'angle ω des deux droites proposées $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.

Si la première droite tombe au-dessous de l'axe des x, a sera négatif; si la seconde se trouve à la gauche de l'axe des y, a' deviendra $-a'$; si l'angle ω des deux droites est obtus, t prendra le signe $-$; comme réciproquement, si t est négatif, l'angle ω sera obtus : enfin, si cet angle est droit, on aura t infini et $s = 1$; ce qui donnera chaque fois

$$(a + a')c + aa' + 1 = 0.$$

Réciproquement, cette relation ayant lieu, on aura $t = \infty$, $s = 1$ et l'angle ω droit.

Lorsque les deux axes sont rectangulaires, on a $d = 1$, $c = 0$ et par suite

$$t = \frac{a' - a}{1 + aa'} \quad \text{et} \quad s = \frac{a' - a}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + a'^2)}}.$$

Telles sont donc les formules pour construire l'angle ω de deux droites $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, rapportées à des axes rectangulaires.

Et si alors l'angle ω est droit, il viendra $t = \infty$, $s = 1$ et $1 + aa' = 0$. Réciproquement, les coordonnées étant rectangulaires, si $1 + aa' = 0$, on aura $t = \infty$, $s = 1$ et l'angle ω droit.

Trouver la distance d'un point donné à une droite donnée, l'angle θ des deux axes étant quelconque (fig. 33).

Soit M' ou (x', y') le point donné et $y = ax + b$ la droite donnée EF ; soit MM' = P la distance cherchée, x et y les coordonnées du point M. En menant MN parallèle à AX et MH perpendiculaire à M'P', on aura $MN = x - x'$ et $M'N = y' - y$. Tirant AV parallèle à EF, prenant AO = 1 et menant OV parallèle et OB perpendiculaire à l'axe AY, les triangles AOV et MNI seront semblables, de même que les triangles AOB et MNH. Si donc on pose $AB = c$ et $OB = d$, on aura, en comparant les côtés homologues,

$$\begin{aligned} 1 : x - x' :: a : IN &= a(x - x'), \\ 1 : x - x' :: c : NH &= c(x - x'), \\ 1 : x - x' :: d : MH &= d(x - x'). \end{aligned}$$

D'après ces valeurs, le triangle MNI, où l'angle N est obtus, donne

$$MI^2 = (x - x')^2 + a^2 (x - x')^2 + 2ac (x - x')^2,$$
$$\text{ou } MI^2 = (x - x')^2 (1 + a^2 + 2ac).$$

D'ailleurs, $P'I = y - a(x - x') = ax + b - a(x - x') = ax' + b$ et $M'I = y' - ax' - b$. Et comme les triangles semblables IMM' et HMM' fournissent

$$MI : MH :: IM' : P = \frac{IM' \times MH}{MI},$$

il vient, en substituant les valeurs précédentes de IM', MH et MI,

$$P = \frac{(y' - ax' - b)\, d}{\sqrt{1 + a^2 + 2ac}}.$$

Si le point M' tombait au-dessous de la droite EF, la valeur de P serait négative ; et si l'angle des deux axes était droit, ce qui donne $c=0$ et $d=1$, on aurait

$$P=\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}:$$

Telle est donc la formule pour calculer la distance d'un point donné (x', y') à une droite $y=ax+b$, rapportée à des axes rectangulaires.

Il est bien facile maintenant de *trouver la distance* P *de deux points* M *et* M' *ou* (x, y) *et* (x', y') *les coordonnées n'étant pas rectangulaires;* car dans le triangle MNM', où l'angle N est aigu, on a $P^2=MN^2+M'N^2-2M'N\times NH$. Mais $MN=x-x'$, $M'N=y'-y$ et $NH=c(x-x')$: donc

$$P^2=(x-x')^2+(y-y')^2+2c(x-x')(y-y').$$

Si le point (x', y') vient à coïncider avec l'origine, ce qui suppose x' et y' nuls, on aura, pour la distance du point (x, y) à l'origine des coordonnées obliques,

$$P^2=x^2+y^2+2cxy;$$

d'où à cause de $c=AB=\cos\theta$, il vient

$$P^2=x^2+y^2+2xy\cos\theta,$$

formule employée page 111.

Voici trois fautes essentielles à corriger :

Page 13, ligne 21, $(-p, -q)$, lisez $(-q, -p)$.

Même page, ligne 22, au lieu de $\frac{q}{p}$ lisez $\frac{p}{q}$.

Page 59, ligne 18, au lieu de (fig. 17), lisez (fig. 17, bis).

FIN.

TABLE SOMMAIRE DES MATIÈRES.

Ici comme pour la géométrie, nous conseillerons aux élèves de dresser eux-mêmes la table détaillée, en écrivant dans un cahier d'un très-petit format, les énoncés des théorèmes et des problèmes, et en traçant à côté les figures ou les principales formules qui s'y rapportent. Une table ainsi formée, leur sera fort utile dans les répétitions et pour bien connaître l'enchaînement des principes.

Remarque. On trouvera des théorèmes à démontrer ou des problèmes à résoudre, pages 14, 24, 42, 51, 53, 66, 79, 87, 92, 99, 102 et 115.

NOTES ET ADDITIONS.

Note sur la transformation des coordonnées.

Il est bien facile de trouver les formules pour passer d'un système d'axes quelconques AX et AY (fig. 8), à un système d'axes aussi quelconques A'X' et A'Y', d'une autre origine A'. Conservant en effet, les dénominations et les constructions du n° 45, où IK est alors parallèle à AY, et répétant les raisonnemens et les calculs de ce n°, on aura, pour les formules cherchées,

$$x = h + \frac{x'}{m} + \frac{y'}{m'} \text{ et } y = k + \frac{ax'}{m} + \frac{a'y'}{m'} \cdots \text{(A)}$$

Mais en désignant par c le cosinus de l'angle θ des deux axes proposés, les valeurs de m et m', dans ces formules, sont

$$m^2 = 1 + a^2 + 2ac \text{ et } m'^2 = 1 + a'^2 + 2a'c \ldots (1)$$

Cela résulte de la dernière formule de la page 119 et des triangles A'IH et A'IK, où $A'H = m$ et $A'K = m'$.

Lorsque l'angle θ est droit, ce qui donne $c = 0$, on a encore les formules (A), dans lesquelles alors $m^2 = 1 + a^2$ et $m'^2 = 1 + a'^2$, comme au n° 45. De là on tire les formules du n° 46; et quant à celles du n° 47, on peut les remplacer par les formules (A). Mais comme on a, dans ce cas, $aa' + 1 + (a + a')c = 0$ (p. 117), cette équation et les équations (1), que l'on vient de considérer, donnent, en éliminant c,

$$m^2 = \frac{(a'-a)(1-a^2)}{a+a'} \text{ et } m'^2 = \frac{(a'-a)(a'^2-1)}{a+a'}.$$

Ces valeurs et les formules (A) sont pour passer d'un système d'axes obliques à un système d'axes rectangulaires, d'origine différente. Je les crois préférables à celles du n° 47, du moins pour l'application du n° 49, où l'on peut d'ailleurs simplifier en posant d'abord $a = 0$; car n'ayant que le terme en $x'y'$ à faire disparaître, l'indéterminée a' suffira à cet effet.

On voit que la transformation des coordonnées sur un plan, peut s'opérer sans la trigonométrie. Si l'on voulait employer les principes de cette science, les formules précédentes prendraient d'autres formes, moins commodes à la vérité pour les calculs et la théorie, en plusieurs circonstances; mais qu'il est bon de connaître, parce qu'on en fait usage dans tous les traités de géométrie analytique.

Reprenons donc la figure 8, et soient α, α', les angles EA'X' et EA'Y' des nouveaux axes A'X', A'Y' avec l'ancien axe des x, l'angle des deux axes proposés étant désigné par θ. Il est clair qu'on aura l'angle IHA' = $\theta - \alpha$, l'angle IKA' = $\theta - \alpha'$, et les triangles A'IH, A'IK fourniront:

$m=\frac{\sin\theta}{\sin(\theta-\alpha)}$, $a=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$, $m'=\frac{\sin\theta}{\sin(\theta-\alpha')}$ et $a'=\frac{\sin\alpha'}{\sin(\theta-\alpha')}$.

Substituant ces valeurs dans les formules (A), il viendra, pour passer d'un système d'axes obliques à un système d'axes obliques, d'une autre origine, les formules :

$$\left.\begin{aligned} x &= h+\frac{x'\sin(\theta-\alpha)+y'\sin(\theta-\alpha')}{\sin\theta} \\ y &= k+\frac{x'\sin\alpha+y'\sin\alpha'}{\sin\theta} \end{aligned}\right\}\ \text{(B)}$$

Si l'angle θ est droit, il viendra $\sin\theta=1$, $\sin(\theta-\alpha)=\cos\alpha$ et $\sin(\theta-\alpha')=\cos\alpha'$; donc on aura, pour passer d'un système d'axes rectangulaires à un système d'axes obliques,

$$\begin{aligned} x &= h+x'\cos\alpha+y'\cos\alpha' \\ y &= k+x'\sin\alpha+y'\sin\alpha'. \end{aligned}$$

L'angle θ n'étant pas droit, si les nouveaux axes sont rectangulaires, ce qui suppose $\alpha'-\alpha=90^\circ$ ou $\alpha'=90^\circ+\alpha$, on aura $\sin\alpha'=\cos\alpha$ et $\sin(\theta-\alpha')=\sin(\theta-90^\circ-\alpha)=-\cos(\theta-\alpha)$. De sorte que les formules (B) donneront, pour passer d'un système d'axes obliques à un système d'axes rectangulaires,

$$\begin{aligned} x &= h+\frac{x'\sin(\theta-\alpha)-y'\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta}, \\ y &= k+\frac{x'\sin\alpha+y'\cos\alpha}{\sin\theta}. \end{aligned}$$

De là, si les premiers axes sont rectangulaires, aussi bien que les nouveaux, il viendra, pour passer du premier système au second,

$$\begin{aligned} x &= h+x'\cos\alpha-y'\sin\alpha, \\ y &= k+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha. \end{aligned}$$

Des courbes semblables.

La définition des courbes semblables, donnée au n° 100, n'est qu'une extension de celle des polygones semblables, et fournit plusieurs conséquences importantes, que nous allons indiquer.

Deux courbes sont semblables, lorsque les coordonnées rectangulaires de leurs différens points, sont proportionnelles. (Le lecteur tracera facilement les deux figures qui se rapportent à ce théorème.)

Soient O et O′ les origines, OX et O′X′ les axes des abscisses et ACE un arc de la première courbe. Inscrivons à volonté la ligne brisée ABCDE, dans cet arc; je dis qu'il est toujours possible d'inscrire une ligne brisée semblable, dans un arc de la seconde courbe. Menons en effet, les ordonnées AP, BQ, CR, DS et ET; prenons sur la seconde courbe le point A′ dont les coordonnées O′P′ et A′P′ soient proportionnelles à celles du point A; on aura donc AP : A′P′ :: OP : O′P′. Soit r la valeur de chacun de ces rapports égaux; il viendra AP$=r$.A′P′ et OP$=r$.O′P′. Si donc on prend dans la seconde courbe, les abscisses O′P′, O′Q′, O′R′, etc., de manière qu'on ait OP$=r$.O′P′, OQ$=r$.O′Q′, OR$=r$.O′R′, etc., ce qui donne PQ$=r$.P′Q′, QR$=r$.Q′R′, etc.; il est clair qu'en menant les ordonnées P′A′, Q′B′, R′C′, etc., et observant que par hypothèse, les coordonnées sont proportionnelles, on aura AP $=r$.A′P′, BQ$=r$.B′Q′, CR$=r$.C′R′, etc. Ainsi les trois rapports AP : A′P′, PQ : P′Q′ et BQ : B′Q′, sont égaux à r; donc les deux trapèzes PB et P′B′ sont semblables, comme ayant deux angles homologues égaux, compris entre trois côtés homologues proportionnels (G. p. 106. Théor. VII). On verra de même que les deux trapèzes QC et Q′C′ sont semblables, de même que les deux RD et R′D′, et les deux SE, S′E′. Donc les deux lignes brisées ABCDE et A′B′C′D′E′, sont composées d'un même nombre de droites homologues proportionnelles, comprenant le même nombre d'angles homologues égaux; donc ces deux lignes brisées sont semblables (100).

Ainsi les deux arcs ACE et A′C′E′ sont tels, qu'en inscrivant à volonté une ligne brisée dans l'un, on peut inscrire une ligne brisée semblable dans l'autre; donc ces deux arcs sont semblables (100). Et comme ces deux arcs peuvent être les courbes entières, il s'ensuit que ces deux courbes elles-mêmes sont semblables.

De là, puisque les points A et A′ sont *homologues*, on voit que dans deux courbes semblables, les points dont les coordonnées rectangulaires sont proportionnelles, sont deux points *homologues* ou semblablement placés sur ces courbes. On voit de plus que les droites AE et A′E′, terminées à des points homologues chacun à chacun, sont elles-mêmes *homologues*, car les deux trapèzes PE et P′E′ sont semblables. De même les deux arcs ACE et A′C′E′ sont *homologues*.

Il suit de là que *dans deux courbes semblables*, *les arcs homologues sont semblables et entre eux comme leurs cordes*. Effectivement, les arcs homologues ACE et A′C′E′, n'étant au fond que deux lignes brisées semblables, composées d'un même nombre infini de droites homologues, infiniment petites; les *segmens* compris entre ces arcs et leurs cordes, ne sont que deux polygones semblables, d'une infinité de côtés homologues. On a donc ACE + AE : A′C′E′ + A′E′ :: AE : A′E′; d'où ACE : A′C′E′ :: AE : A′E′.

Enfin, il est clair que *dans deux courbes semblables*, *les lignes homologues*, *droites ou arcs*, *sont proportionnelles; tandis que les aires homologues*, *telles que segmens ou secteurs*, *sont semblables et entre elles comme les carrés des droites homologues.* Par exemple, ACETP et A′C′E′T′P′ sont deux segmens homologues; et si l'on mène les droites OA, OE, O′A′, O′E′, les figures OACE et O′A′C′E′, seront deux secteurs homologues.

Deux ellipses ou deux hyperboles sont semblables, dès que leurs axes homologues sont proportionnels. Soient $2A$ et $2B$ les axes de la première courbe, et $2A'$, $2B'$ les axes homologues de la seconde. Puisque $A : A' :: B : B'$, soit r la valeur de chacun de ces rapports égaux; on aura donc $A = rA'$ et $B = rB'$. Soit (x, y) un point de la première courbe et (x', y') un point de la seconde tel, qu'on ait $x = rx'$. Il est clair qu'en multipliant par r^4 l'équation de la seconde courbe, rapportée à ses axes, et ayant égard à l'équation de la première et aux valeurs précédentes, on aura $y = ry'$. D'où il suit que dans les deux courbes proposées, les coordonnées rectangulaires de leurs différens points, sont proportionnelles; donc ces deux courbes sont semblables.

Toutes les circonférences des cercles sont donc semblables, de même que toutes les hyperboles équilatères.

Il résulte aussi de ce qu'on a vu plus haut, que dans deux ellipses ou deux hyperboles semblables, 1° les lignes homologues, telles que cordes, diamètres, excentricités, rayons vecteurs, tangentes, soutangentes, normales et sounormales, sont entre elles comme les axes homologues, de même que les arcs homologues et semblables; 2° les aires homologues et semblables, telles que segmens ou secteurs, sont comme les carrés des mêmes axes.

Il est clair aussi que si E et E' sont les aires de deux ellipses semblables, et $2A$, $2A'$ leurs premiers axes, on aura $E : E' :: A^2 : A'^2$; ce qui résulte d'ailleurs des mesures de E et E' (96). Enfin, S et S' désignant les aires de deux segmens homologues, dans deux hyperboles semblables, rapportées à leurs asymptotes, et $2A$, $2A'$ les premiers axes, on a $S : S' :: A^2 : A'^2$, ce qu'on trouve d'ailleurs par les mesures de S et S' (150).

Deux paraboles quelconques sont toujours semblables. C'est ce qu'on démontre, comme pour deux ellipses, en désignant d'abord par r le rapport des paramètres $2p$ et $2p'$.

On voit donc que dans deux paraboles quelconques, 1° les lignes homologues, droites, cordes, arcs, rayons vecteurs, tangentes, soutangentes, normales et sounormales, sont proportionnelles aux paramètres; 2° les aires homologues et semblables, segmens ou secteurs, sont comme les carrés des paramètres.

Enfin, on peut démontrer, 1° que les sections faites dans un même cône, droit ou oblique, par des plans parallèles, sont des courbes semblables; 2° que les sections faites dans deux cylindres semblables, droits ou obliques, par des plans également inclinés sur les axes, sont des ellipses semblables.

Des équations polaires des sections coniques.

Jusqu'à présent nous avons déterminé les différens points d'un plan, en les rapportant à des axes tracés dans ce plan; mais il est souvent utile, et particulièrement en astronomie, de fixer la position de chaque point

M du plan, au moyen de sa distance MF à un point donné F et de l'angle MFR que cette distance fait avec une droite FR, invariable de position, et partant du point fixe F. Ce point fixe s'appelle le *pôle* ou l'*origine* du point M, et la distance FM en est le *rayon vecteur*, que nous désignerons toujours par r. Nous désignerons aussi constamment par ω l'angle RFM que ce rayon *décrit* autour du pôle F, à partir de la droite *invariable* FR.

Les quantités r et ω, qui servent à fixer la position de chaque point M du plan, sont dites *les coordonnées polaires* du point M; et on appelle *équation polaire* d'une ligne, la relation qui existe entre les coordonnées polaires de chaque point de cette ligne.

Cherchons l'équation polaire de l'ellipse, en prenant pour pôle le foyer positif, et pour droite invariable, le prolongement positif de l'excentricité c. Nous avons vu (53) que dans ce cas, r étant le rayon vecteur du point M (fig. 9), et x l'abscisse OP du même point, on a

$$r = A - \frac{cx}{A}.$$

Mais le triangle rectangle FMP, où l'angle MFP $= \omega$, donne FP $= r\cos\omega$; donc OP ou $x = c + r\cos\omega$. Substituant cette valeur dans celle de r, et résolvant l'équation résultante par rapport à r, il viendra

$$r = \frac{A^2 - c^2}{A + c\cos\omega} \cdots (1)$$

Désignant par p le demi-paramètre $\frac{B^2}{A}$ et par e le rapport de l'excentricité c au demi-grand axe A, on aura

$$e = \frac{c}{A} \quad \text{et} \quad r = \frac{p}{1 + e\cos\omega} \cdots (2)$$

Il est clair qu'ayant $c < A$ ou $e < 1$, si l'on fait varier l'angle ω depuis o jusqu'à 360°, les valeurs de r seront toutes positives, car le plus grand cosinus est 1 ou -1; ces valeurs détermineront donc successivement tous les points de l'ellipse représentée par l'une des équations (1) et (2).

Quant à l'hyperbole, prenons encore pour pôle le foyer positif et pour droite invariable le prolongement positif de l'excentricité c. Si alors r désigne le rayon vecteur du point M (fig. 16) et x l'abscisse OP, nous avons vu (107) que

$$r = \frac{cx}{A} - A.$$

Désignant toujours par ω l'angle *décrit* XFM, observant que cos PFM $= -\cos\omega$, on verra que le triangle rectangle FMP fournit FP $= -r\cos\omega$; d'où $x = \text{OF} - \text{FP} = c + r\cos\omega$. Substituant cette valeur et posant $p = \frac{B^2}{A}$, $e = \frac{c}{A}$, l'équation résultante

$$r = \frac{c^2 - A^2}{A - c\cos\omega}, \quad \text{donnera} \quad r = \frac{p}{1 - e\cos\omega} \cdots (3)$$

Ici $c > A$ ou $e > 1$: de plus, les valeurs positives du rayon vecteur r se mesurant sur le côté mobile de l'angle décrit ω, *les valeurs négatives devront se mesurer en sens contraire, sur le prolongement du même côté;* enfin l'angle v d'une asymptote avec l'axe des x, ayant pour tangente $\frac{B}{A}$, on a $\cos v = \frac{A}{c}$. Cela posé, il est facile de voir que tant que les valeurs positives de $\cos \omega$ seront moindres que $\cos v$, c'est-à-dire, tant que le côté mobile de l'angle ω sera dans l'angle $2v$, formé en menant par le pôle F des parallèles aux asymptotes, les valeurs de r seront négatives et numériquement plus grandes que $c + A$; elles détermineront donc la branche négative de l'hyperbole représentée par l'une des équations (3). Si $\cos \omega = \frac{A}{c} = \cos v$, le rayon r coïncidera avec l'un des côtés de l'angle $2v$, et aura une valeur infinie, comme cela doit être. Enfin, si l'angle ω est plus grand que l'angle v, c'est-à-dire si $\cos \omega < \frac{A}{c}$, les valeurs de r seront positives, et elles le seront encore tant que $\cos \omega$ sera négatif; ces valeurs détermineront par conséquent la branche positive de l'hyperbole proposée.

Passons à la parabole, et cherchons son équation polaire, le pôle étant le foyer F et la droite invariable, la partie positive de l'axe (fig. 21). Comme p désigne le demi-paramètre et x l'abscisse OP, on a vu (160) que

$$r = x + \tfrac{1}{2}p.$$

Le triangle rectangle FMP, où l'angle $\text{PFM} = \omega$, donne $\text{FP} = r \cos \omega$; d'où $x = \text{OF} + \text{FP} = \frac{1}{2}p + r \cos \omega$. On a donc, pour l'équation polaire de la parabole,

$$r = \frac{p}{1 - \cos \omega} \cdots (4)$$

Il est visible que les valeurs de r sont toutes positives, puisque $\cos \omega$ ne saurait surpasser l'unité. Si $\cos \omega = 1$, c'est-à-dire si l'angle ω est nul ou 360°, le rayon vecteur sera infini, comme cela doit être (165).

Il est aisé de voir que quand le pôle est le foyer négatif, l'équation polaire de l'ellipse devient

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \omega}.$$

Cette équation polaire s'appliquera évidemment aux trois sections coniques, pourvu qu'on y suppose simplement $e < 1$ pour l'ellipse, $e > 1$ pour l'hyperbole et $e = 1$ pour la parabole.

Voyons présentement comment on passe d'un système quelconque de coordonnées *ordinaires* à un système de coordonnées polaires. Soit θ l'ange des deux axes auxquels une ligne est rapportée, par les coordonnées x et y de l'un quelconque M de ses points; soient r et ω les coordonnées polaires de M; h l'abscisse et k l'ordonnée du pôle F, et φ l'angle que la droite invariable FR forme avec l'axe des x. Il est facile de voir qu'en menant par F des parallèles aux axes proposés, on aura

$$x = h + \frac{r\sin(\theta - \varphi - \omega)}{\sin\theta} \text{ et } y = k + \frac{r\sin(\varphi + \omega)}{\sin\theta} \dots (5)$$

Ces formules se simplifient lorsque $\theta = 90^\circ$ et deviennent

$$x = h + r\cos(\varphi + \omega) \text{ et } y = k + r\sin(\varphi + \omega) \dots (6)$$

Si outre $\theta = 90^\circ$, la droite invariable est parallèle à l'axe des x, ce qui suppose $\varphi = 0$, on aura

$$x = h + r\cos\omega \text{ et } y = k + r\sin\omega \dots (7)$$

Suivant que le pôle est sur l'axe des x, ou sur l'axe des y, ou à l'origine, on a $k = 0$, ou $h = 0$, ou à la fois $h = 0$ et $k = 0$, dans les trois systèmes de formules précédentes. Les deux derniers sont d'un usage plus fréquent que le premier.

Si donc on substitue, dans l'équation d'une ligne entre les coordonnées ordinaires x et y, l'un des trois systèmes de valeurs que l'on vient de calculer, on aura l'équation de cette ligne rapportée aux coordonnées polaires r et ω. C'est ainsi que pour la droite $y = ax + b$, l'équation polaire, déduite des formules (7), est

$$r = \frac{k - ah - b}{a\cos\omega - \sin\omega} \dots (8)$$

Supposons le rayon vecteur r perpendiculaire à la droite $y = ax + b$, et soit α l'angle de cette droite avec l'axe des x; on aura $a = \tang\alpha$ et $\omega = 90^\circ + \alpha$; d'où

$$\sin\omega = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \text{ et } \cos\omega = -\sin\alpha = -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

D'après ces valeurs, la formule (8) donne, pour la distance r du point (h, k) à la droite $y = ax + b$,

$$r = \frac{k - ah - b}{\sqrt{1+a^2}},$$

comme au n° 21.

L'angle v des deux droites $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, étant le même que celui de leurs parallèles menées par l'origine; si on prend sur la parallèle $y = a'x$, un point (h, k) à la distance 1 de l'origine, que de ce point on mène la perpendiculaire s sur l'autre parallèle $y = ax$; il est clair que s sera le sinus de l'angle v et en même temps la distance du point (h, k) à la droite $y = ax$; on aura donc à la fois

$$s = \frac{k - ah}{\sqrt{1+a^2}}, \quad h^2 + k^2 = 1 \quad \text{et} \quad k = a'h;$$

d'où l'on tire, comme au n° 17,

$$s = \frac{a' - a}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}.$$

On voit que les équations polaires peuvent conduire aux propriétés des lignes, plus simplement que les coordonnées ordinaires. C'est ainsi que l'équation polaire du cercle fournit immédiatement les propriétés des droites qui rencontrent la circonférence, en se coupant au pôle (propriétés démontrées au n° 34). De même le pôle étant au centre, l'équation polaire de l'hyperbole conduit sur-le-champ aux diamètres et aux asymptotes (114 et 115).

Voici quatre théorèmes, qui se démontrent d'une manière analogue à ceux du n° 95, page 51. (Voyez tome XVI des Annales de mathématiques, page 373.)

I. Dans tout parallélogramme circonscrit à une ellipse, les diagonales se coupent au centre et suivent les directions de deux diamètres conjugués.

II. L'ellipse est toujours partagée en quatre portions équivalentes, par un système de diamètres conjugués.

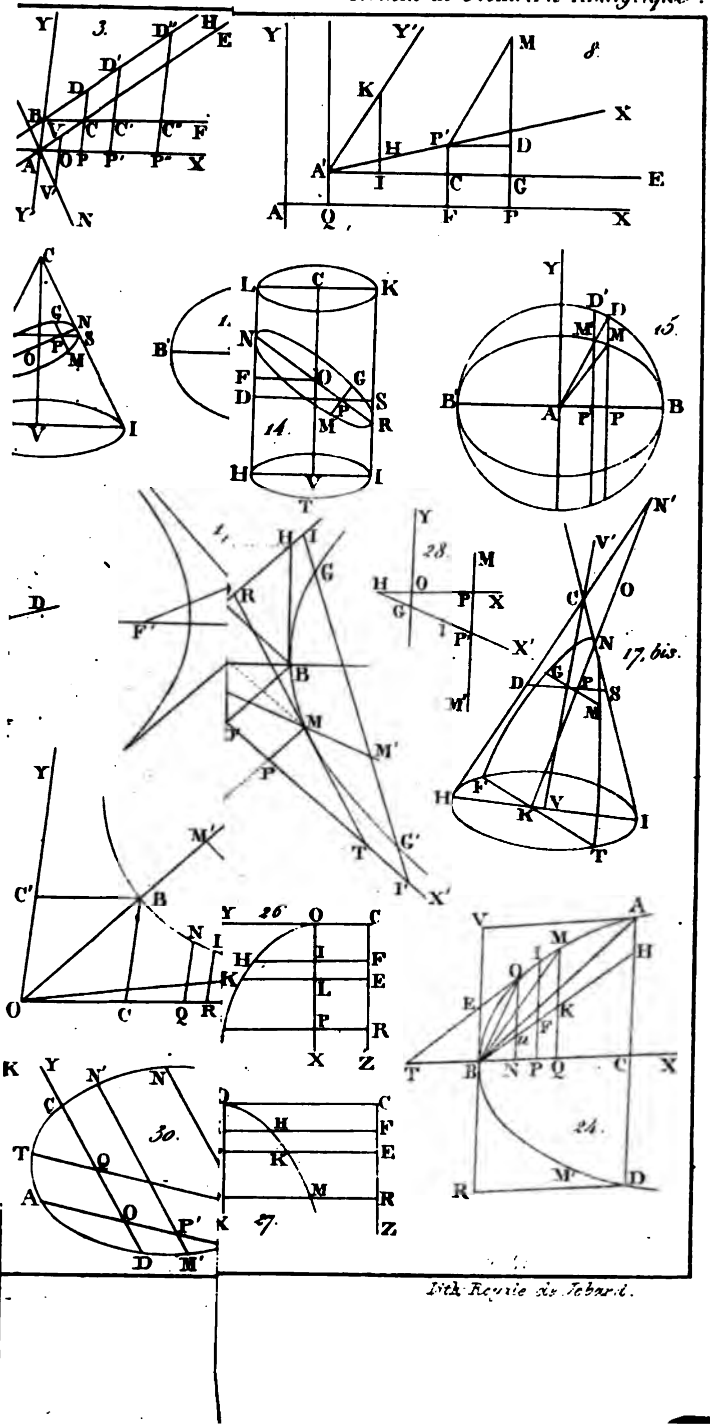
III. Le lieu des sommets de tous les parallélogrammes *conjugués* circonscrits à l'ellipse, est une autre ellipse concentrique et semblable à la première, et semblablement située.

IV. Si deux ellipses tracées sur un même plan, sont à la fois concentriques, semblables et semblablement situées sur ce plan, toute corde de la plus grande, tangente à la plus petite, sera divisée en deux parties égales par le point de contact.

Il résulte aussi du théorème I, que le lieu des sommets de tous les rectangles circonscrits à une même ellipse, est une circonférence de même centre que cette ellipse (ce qui est un cas particulier du n° 193).

Enfin, on peut démontrer, 1° que de tous les quadrilatères inscrits dans l'ellipse et ayant une diagonale dirigée suivant un diamètre, celui de plus grand périmètre, est un parallélogramme, dont la seconde diagonale est le conjugué du diamètre proposé, le périmètre maximum ayant d'ailleurs sa plus grande valeur pour le losange;

2° Que de tous les quadrilatères circonscrits à l'ellipse et ayant une diagonale dirigée suivant un diamètre, celui de plus grand périmètre, est un parallélogramme, dont la seconde diagonale est dirigée suivant le conjugué du diamètre proposé, le périmètre maximum étant d'ailleurs le plus grand possible pour le rectangle circonscrit.



Lith. Royale de Jobard.