TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

OUVRAGES DE L'AUTEUR.

DISCOURS sur l'art du Trait et la Géométrie descriptive ... . 1 fr. 25 c.

TRAITÉ DE PERSPECTIVE, contenant les Tracés pour les Tableaux plans et courbes, les Bas-Reliefs et les Décorations théâtrales, avec une Théorie des effets de perspective; 1 vol. in-4°, avec atlas in-folio de 45 planches, dont 8 doubles......... .... 40 fr.

RECHERCHES sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques... .... 4 fr.

MÉMOIRE sur l'appareil de l'arche biaise, suivi d'une analyse des principaux Ouvrages publiés sur cette question et d'une réponse à des critiques sur l'enseignement de la Stéréotomie à l'École Polytechnique. (Extrait des *Annales du Conservatoire des Arts et Métiers*.)............................ 2 fr.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

PAR JULES DE LA GOURNERIE,

MEMBRE DE L'INSTITUT, INSPECTEUR GÉNÉRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES,
EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

Les Mathématiques ont des inventions très subtiles, et qui peuvent beaucoup servir tant à contenter les curieux qu'à faciliter tous les arts et diminuer le travail des hommes.
DESCARTES (*Discours de la Méthode*).

SECONDE ÉDITION.

DEUXIÈME PARTIE. — TEXTE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DE L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1880

SOMMAIRE DES PREMIÈRE ET TROISIÈME PARTIES

DU TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

PREMIÈRE PARTIE.

([illegible] planches. — Prix : 10 francs.)

LIVRE I.

DES LIGNES DROITES ET DES PLANS.

Chapitre I. — But de la Géométrie descriptive. Méthode des projections.
Chapitre II. — Questions diverses.
Chapitre III. — Points et lignes de construction hors du cadre de l'épure.
Chapitre IV. — Problèmes relatifs aux angles trièdres.

LIVRE II.

CYLINDRES, CONES ET SURFACES DE RÉVOLUTION.

Chapitre I. — Courbes planes et surfaces courbes.
Chapitre II. — Définition, représentation des cylindres et des cônes.
Chapitre III. — Plans tangents au cylindre et au cône.
Chapitre IV. — Sections planes du cylindre et du cône.
Chapitre V. — Surfaces de révolution.
Chapitre VI. — Intersection de surfaces courbes.

LIVRE III.

PROJECTIONS COTÉES.

Chapitre I. — Questions relatives à la ligne droite et au plan.
Chapitre II. — Cônes et cylindres.

LIVRE IV.

PERSPECTIVES AXONOMÉTRIQUE ET CAVALIÈRE.

Chapitre I. — Perspective axonométrique.
Chapitre II. — Perspective cavalière.

TROISIÈME PARTIE.

(46 planches. — Prix : 10 francs.)

LIVRE VIII.

COURBURE DES SURFACES.

Chapitre I. — Théorie générale.
Chapitre II. — Applications diverses.
Chapitre III. — Théorème des tangentes conjuguées.
Chapitre IV. — Lignes tracées sur une surface et relatives à ses courbures.

LIVRE IX.

SURFACES HÉLICOIDALES.

Chapitre I. — Théorie générale.
Chapitre II. — Hélicoïde développable.
Chapitre III. — Surface de la vis à filets triangulaires.
Chapitre IV. — Surface de la vis à filets carrés.
Chapitre V. — Surfaces hélicoïdales non réglées.

LIVRE X.

SURFACES TOPOGRAPHIQUES.

Chapitre I. — Théorie générale.
Chapitre II. — Tableaux graphiques.

AVANT-PROPOS.

Je présente au public une seconde édition de la Partie de mon *Traité de Géométrie descriptive* qui contient les Livres V, VI et VII, relatifs à la détermination des ombres linéaires dans les différents modes de projection, aux surfaces développables et aux surfaces gauches.

J'ai supprimé quelques développements de peu d'intérêt et j'ai modifié un grand nombre de passages, cherchant à rendre l'exposition plus méthodique et plus claire.

Dans ce travail j'ai eu particulièrement égard à des observations qui m'avaient été transmises par M. Ernest Lebon, professeur de l'Université, connu par ses travaux en Géométrie descriptive. Je suis heureux de lui adresser ici mes remercîments.

Paris, 7 octobre 1879.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.	Articles.
Avant-propos	v	

LIVRE V.

OMBRES LINÉAIRES.

CHAPITRE PREMIER.

OMBRES SUR LES FIGURES GÉOMÉTRALES.

	Pages.	Articles.
Considérations générales	1	320
Polyèdres	1	321
Premier exercice. — Ombres d'un prisme et d'une pyramide		322-323
Deuxième exercice. — Ombres d'un perron		324
Troisième exercice. — Ombres d'une maison		325-327
Cylindre, cône et sphère	4	
Premier exercice. — Ombres d'une cheminée ronde		328-329
Deuxième exercice. — Ombres d'un cylindre couché sur un plan horizontal		330-331
Troisième exercice. — Ombres d'un cône percé d'un trou cylindrique		332-335
Quatrième exercice. — Ombres d'une niche sphérique		336-341
Surfaces de révolution	11	
Premier exercice. — Rayons divergents. Point lumineux dans une position quelconque		342
Premier procédé. — Cônes circonscrits		343-345
Deuxième procédé. — Cylindres circonscrits		346-349
Ombre portée		350
Deuxième exercice. — Rayons divergents. Point lumineux dans le plan méridien principal. — Construction des parties parasites de la projection de la courbe d'ombre		351-355
Troisième exercice. — Rayons parallèles dans une direction quelconque. — Premier procédé. — Cônes circonscrits		356-359
Deuxième procédé. — Cylindres circonscrits		360-361
Troisième procédé. — Sphères inscrites		362-366
Détermination des points d'une ellipse où la tangente est parallèle à une droite donnée		367
Transformation qu'éprouve la ligne d'ombre d'une surface de révolution éclairée par des rayons parallèles, lorsque l'on considère la surface engendrée par la méridienne transportée dans son plan parallèlement à elle-même		368
Construction de la tangente d'une conchoïde		369

Pages. Articles.

Quatrième exercice. — Rayons parallèles ayant leurs projections inclinées à 45° sur la ligne de terre. — Méthode des projections obliques........ 370-373

Ombres des cercles horizontaux sur le plan vertical........ 374-375

Avantages de la méthode........ 376

Trait ressenti........ 24 377

CHAPITRE II.

OMBRES SUR LES FIGURES AXONOMÉTRIQUES ET CAVALIÈRES.

Considérations générales........ 24 378

Polyèdres........ 25

Premier exercice. — Ombres d'un prisme et d'une pyramide représentés par une perspective cavalière........ 379-380

Deuxième exercice. — Ombres d'un perron représenté par une perspective cavalière........ 381

Cylindre, cône et sphère........ 26

Premier exercice. — Ombres d'un perron représenté par une perspective isométrique. — Détermination des ombres........ 382-387

Étude des ellipses d'ombre........ 388-391

Deuxième exercice. — Ombres d'une niche représentée par une perspective axonométrique........ 392-396

Troisième exercice. — Ombres d'une niche représentée par une perspective cavalière........ 397-399

CHAPITRE II.

TRANSFORMATION HOMOLOGIQUE.

Notions sur les figures homologiques........ 34

Définition et construction des figures homologiques considérées comme résultant de la projection d'une figure plane et de son ombre sur un plan........ 400-402

Triangles homologiques. — Leur utilité dans les constructions........ 403-405

Des figures homologiques peuvent toujours être rattachées à une question d'ombre. 406

Lignes de fuite........ 407

Les points d'un plan situés à l'infini doivent être considérés comme étant en ligne droite........ 408

Figures homologiques dans le cas où le centre d'homologie est à l'infini........ 409

Application des théories précédentes aux sections coniques. — Propriétés fondamentales des pôles et des polaires........ 37

Homologie de deux sections coniques........ 410-411

Détermination des axes d'une section conique donnée par trois points et deux tangentes : cas où la conique a des asymptotes........ 412-41

	Pages.	Articles.
Cas où la conique n'a pas d'asymptotes		416-418
Propriétés fondamentales des pôles et des polaires		419
Emploi de la transformation homologique comme méthode de recherche	41	
Théorème sur les points de rencontre des diagonales de quadrilatères formés entre deux droites par des sécantes divergentes		420-421

HAPITRE IV.

POINTS BRILLANTS.

Considérations générales	42	
Définition du point brillant		422
Solution générale du problème de la construction des points brillants		423-424
Détermination du point brillant d'un corps représenté par des figures géométrales et éclairé par des rayons parallèles	43	
Construction générale		425-426
Cas où la surface éclairée est un cône ou un cylindre		427
Solution du problème pour une surface de révolution		428
Détermination des points brillants sur une figure axonométrique	44	
Construction générale		429
Application à la sphère		430
Teintes, lumière diffuse, lumière reflétée	45	431

LIVRE VI.

SURFACES DÉVELOPPABLES.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE GÉNÉRALE.

Notions sur les enveloppes	46	
Considérations générales sur les surfaces enveloppées		432-433
Séries de surfaces sans enveloppe		434
Lignes enveloppées. — La ligne d'ombre portée d'une surface est l'enveloppe des ombres de ses génératrices et l'enveloppe des lignes d'ombre de surfaces enveloppées		435
Notions sur les développantes	48	
Développantes d'une courbe plane		436
Rayons de courbure des lignes planes en certains points singuliers		437
Rebroussement des différents ordres		438

	Pages.	Articles.
Rayon de courbure d'une courbe à un point de rebroussement		439
Longueur des arcs d'une développée		440
Développantes d'une courbe gauche, surface des développantes, arête de rebroussement, plan de rebroussement		441-443
Définition, génération et principales propriétés des surfaces développables	52	
Toute surface qui peut être développée sur un plan est l'enveloppe des positions d'un plan mobile		444
Une surface développable a des génératrices rectilignes. — Un même plan lui est tangent le long de chaque génératrice		445
Surfaces à arête de rebroussement. — Cônes et cylindres		446
Les plans tangents d'une développable sont osculateurs de son arête de rebroussement		447
Construction des plans osculateurs d'une courbe gauche considérée comme arête d'une développable		448
Section d'une développable par un plan contenant une génératrice. — Points doubles de la section quand la surface est algébrique		449-450
Relations entre les rayons de courbure des sections d'une développable par des plans parallèles		451
Principales manière de déterminer les développables et les surfaces réglées en général. Cône directeur	55	
Surface réglée déterminée par trois directrices		452
Surface développable déterminée par deux directrices		453-454
Ligne double d'une développable		455
Cas où un plan fait partie d'une développable déterminée par deux directrices		456
La directrice plane d'une développable est touchée par toutes les génératrices qui sont dans son plan		457
Une directrice est généralement divisée en segments utiles et doubles et en segments parasites. — Points limites		458-461
L'arête de rebroussement passe aux points limites et y a des rebroussements. Sommets		462-463
Une droite assujettie à rencontrer une directrice rectiligne engendre une surface gauche ou des cônes		464
Développable osculatrice d'une courbe gauche		465
Cône directeur d'une surface réglée		466
Surface réglée déterminée par deux directrices et un cône directeur. — Surface développable déterminée par une directrice et un cône directeur		467-468
Une surface est développable lorsque des plans parallèles à ses plans tangents, et passant par un même point, enveloppent un cône		469
Utilité du cône directeur dans les constructions		470
Indication de diverses manières de déterminer les positions d'un plan mobile		471
Développement des surfaces développables	61	
Les angles compris entre les courbes tracées sur une développable ne sont pas altérés dans le développement		472
Transformées des développantes de l'arête de rebroussement		473
Rayons de courbure de la transformée d'une courbe quelconque		474-476
Inflexions d'une transformée		477
Rebroussements d'une transformée		478-479
Construction du développement d'une partie limitée d'une développable		480
Relations entre le développement d'une développable et celui de son cône directeur		481
Lignes géodésiques d'une développable. — Développées d'une courbe gauche		482-483

	Pages.	Articles.
Surfaces développables dont les arêtes de rebroussement ont une même transformée		484
Observations sur la distance de deux génératrices consécutives d'une développable	65	
Ordre de grandeur de la distance de deux génératrices dont les points de contact avec l'arête sont infiniment voisins		485
Cône directeur osculateur		486

CHAPITRE II.

SURFACES D'OMBRE ET DE PÉNOMBRE.

Détermination de l'ombre et de la pénombre d'une aire opaque éclairée par une aire lumineuse	67	487
Détermination de l'ombre d'une ellipse éclairée par un cercle	67	
Construction des génératrices et de l'arête de rebroussement. Sommets		488-489
Sections de la surface par des plans		490
Étendue de l'ombre		491
Développement de la surface		492
Courbe limite de l'ombre		493
Étude abstraite de la surface examinée dans le paragraphe précédent	71	
Nature de la ligne limite de l'ombre		494
Les génératrices de la surface de la pénombre se coupent suivant un arc de la même ligne		495
Relations géométriques entre les directrices et la ligne limite de l'ombre		496
La développable complète possède quatre lignes doubles		497
Parties parasites de la projection de l'arête de rebroussement		498-499
Relations générales entre les surfaces d'ombre et de pénombre		500
Observations sur la développable circonscrite à deux sections coniques situées dans des plans parallèles	74	
La développable a deux lignes doubles situées dans les plans des diamètres conjugués parallèles des directrices. — Cas où ces plans sont imaginaires		501-503
Tout point de rencontre de deux génératrices appartient à ces lignes doubles ou aux directrices		504
Développable circonscrite à deux coniques dont une a son centre dans le plan de l'autre. — Discussion des différentes dispositions de cette surface		505-507
Développable circonscrite à deux coniques concentriques		508
Développable circonscrite à deux coniques dont l'une touche le plan de l'autre au centre de celle-ci		509
Développable circonscrite à deux coniques ayant leurs centres sur la droite d'intersection de leurs plans		510
(Dans une note, les résultats précédemment obtenus sont étendus au cas général où les directrices sont deux coniques disposées d'une manière quelconque.)		
Définition du rapport anharmonique. Dans la développable circonscrite à deux coniques, le rapport anharmonique des quatre points où une génératrice rencontre les quatre lignes doubles est constant		511-514

Pages. Articles.

Dans la développable circonscrite à deux coniques concentriques, les segments interceptés sur une génératrice par les trois lignes doubles sont dans un rapport constant. — Si l'on considère les points où une génératrice rencontre deux lignes doubles, leurs abscisses sur la droite diamétrale commune sont dans un rapport constant 515-516

Les génératrices peuvent être considérées comme étant réunies huit par huit de manière à former des groupes. — Les huit génératrices d'un groupe appartiennent à un hyperboloïde. — Les génératrices de groupes différents ne se rencontrent jamais. — Relations géométriques entre les points d'un groupe qui appartiennent à une ligne double 517-519

Groupes simples composés de quatre génératrices 520

Discussion du nombre des sommets et des dispositions générales de la surface .. 521-522

Détermination générale des surfaces d'ombre et de pénombre. Développable circonscrite à deux surfaces du second ordre 85

Considérations générales 523-524

Surfaces du second ordre inscrites dans la développable circonscrite à deux coniques situées dans des plans parallèles 525-527

Position des pôles du plan de l'une des lignes doubles, et d'un plan quelconque, par rapport à toutes les surfaces du second ordre inscrites dans la développable. 528

Chaque surface du second ordre inscrite coupe la développable suivant huit droites (réelles ou imaginaires) qui composent un groupe 529

Étude de la développable considérée comme enveloppe d'une série de surfaces du second ordre. — Équations des caractéristiques, de la surface et de l'arête de rebroussement 530-532

Cas où l'ordre de la développable s'abaisse du huitième au sixième 533

Cas où la développable doit être circonscrite à deux surfaces du second ordre, dans lesquelles les plans conjugués à la droite qui joint les centres sont parallèles 534-536

(Dans une note de l'article 534, on étend les résultats obtenus au cas où les surfaces données ont une position quelconque, et l'on donne une indication sur la disposition générale des surfaces du second ordre qui ont une commune intersection. — Dans une note de l'article 536, on donne les équations de l'arête de rebroussement dans le cas général étudié aux articles 594 et suivants.)

Surfaces du second ordre inscrites dans la développable circonscrite à deux coniques concentriques 537-540

Conique directrice située à l'infini 541-542

Des surfaces du second ordre homofocales sont inscrites dans une même développable qui a pour une de ses lignes doubles un cercle imaginaire à l'infini 543-544

CHAPITRE III.

SURFACES D'ÉGALE PENTE.

Définition et principales propriétés 105 545-546

Exercices 106

Considérations générales 547

Premier exemple. — Excavation faite dans un terrain horizontal avec talus réglés à la pente de 45° 548-549

	Pages.	Articles.
Quand la directrice est une ellipse, la courbe limite de l'excavation est aussi une ellipse		550
Cas où la directrice est la base d'une plate-forme élevée en remblai		551
Deuxième exemple. — Excavation faite dans un terrain incliné avec talus réglés à une pente donnée		552-553
Sur une surface d'égale pente, les deux génératrices qui se croisent en un même point de la directrice font des angles égaux avec cette courbe		554
Étude de la surface d'égale pente circonscrite à une conique, dans le cas où l'un des axes de cette courbe est une ligne de plus grande pente de son plan	110	
Détermination des lignes doubles. Leurs projections horizontales sont homofocales.		555-558
Représentation de la surface en prenant une ellipse pour conique directrice		559-562
Cas où la développable fait avec l'horizon le même angle que le plan de la directrice		563
Discussion des surfaces du second ordre inscrites dans une surface d'égale pente circonscrite à une conique horizontale		564-565
Étude générale de la surface d'égale pente circonscrite à une conique	115	
Difficultés de la question		566
Recherche des équations générales qui contiennent la solution du problème		567-570
Détermination des traces des plans des lignes doubles sur le plan de la conique donnée		571-572
L'intersection des plans de deux lignes doubles est perpendiculaire à la trace horizontale du plan de la troisième		573
Détermination des coniques, projections horizontales des lignes doubles; elles sont homofocales		574
Constructions générales pour la représentation de la surface		575
Représentation de la surface dans un cas particulier		576-579
Cas où la conique donnée est une hyperbole		580-583
Cas où la conique donnée est une parabole		584

LIVRE VII.

SURFACES GAUCHES.

CHAPITRE PREMIER.

PARABOLOIDE.

Définition. — Double système de génératrices rectilignes. — Plans tangents	128	
Rappel des notions déjà données sur les surfaces gauches		585
Définition du paraboloïde hyperbolique		586
Deuxième système de génération rectiligne		587-590
Dans le paraboloïde, un plan directeur considéré comme cône directeur n'a pas de parties parasites		591
Tout plan contenant une génératrice est tangent à la surface en un point		592
Sections planes. — Diamètres. — Axe. — Plans diamétraux	132	

Pages. Articles.

La surface est coupée suivant une hyperbole par tout plan qui n'est pas parallèle à l'intersection des plans directeurs.... 593
Les diamètres sont des droites parallèles à l'intersection des plans directeurs.. 594
Axe et sommet.... 595
Les surfaces diamétrales sont des plans parallèles à l'axe.... 596
Détermination du plan diamétral d'un système de cordes. — Droites conjuguées harmoniques.... 597-598
Les sections planes des surfaces gauches ont des branches infinies de deux genres différents.... 599
Les sections du paraboloïde par des plans parallèles à l'axe sont des paraboles. 600
Digression sur les faisceaux harmoniques.... 135
Rapport anharmonique de quatre droites concourantes. — Cas où le faisceau est harmonique. — Application à une construction précédemment exposée.... 601-602
Représentation du paraboloïde. — Plans principaux. — Paraboles principales.... 137
Projection du paraboloïde sur un plan perpendiculaire à l'axe.... 603
Plans principaux.... 604-605
Paraboles principales. — Paraboloïde isoscele, paraboloïde scalène.... 606
Cônes et cylindres circonscrits. — Courbes d'ombre.... 139
La courbe de contact d'un cône circonscrit est une hyperbole.... 607-608
La courbe de contact d'un cylindre circonscrit est une parabole.... 609
Diverses générations du paraboloïde.... 140
Surface gauche déterminée par trois directrices rectilignes parallèles à un plan, ou par deux directrices rectilignes sur lesquelles les génératrices interceptent des parties proportionnelles.... 610
Projections diverses d'un paraboloïde.... 611
Relation entre les segments interceptés sur deux génératrices d'un système, à partir de deux origines quelconques, par les génératrices de l'autre système. 612

CHAPITRE II.

THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES GAUCHES.

Raccordement des surfaces gauches. — Paraboloïdes de raccordement. — Paraboloïdes normaux.... 141
Deux surfaces gauches qui se touchent en trois points d'une génératrice commune se raccordent le long de cette droite.... 613
Deux surfaces gauches se raccordent le long d'une génératrice commune quand elles se touchent en deux points de cette ligne, et que leurs cônes directeurs ont des plans tangents parallèles le long des génératrices correspondantes... 614
Si l'on coupe une surface gauche par une série de plans parallèles, les tangentes de toutes les sections aux points situés sur une même génératrice formeront un paraboloïde. — Les plans tangents du cône directeur sont respectivement parallèles aux plans passant par les différentes génératrices de la surface et tangents à l'infini.... 615
Une surface gauche a, le long d'une génératrice quelconque, une infinité de paraboloïdes de raccordement. Un de leurs plans directeurs est le plan tangent du cône directeur le long de la génératrice parallèle.... 616

	Pages.	Articles.
Tout plan contenant une génératrice est tangent en un point. La courbe suivant laquelle il coupe la surface passe par ce point. — La courbe de contact d'un cône circonscrit a un point sur chaque génératrice		617
Lignes doubles des surfaces gauches algébriques		618
Une surface gauche admet une infinité de paraboloïdes normaux le long de chaque génératrice		619
Les normales à une surface gauche aux divers points d'une génératrice forment un paraboloïde isoscèle		620
Point central d'une génératrice. — Ligne de striction. — Paramètre de distribution des plans tangents	144	
Définition du point central et de la ligne de striction		621
Définition du plan central et de l'obliquité d'un plan tangent. — La tangente de l'obliquité d'un plan tangent en un point d'une génératrice est proportionnelle à l'abscisse de ce point mesurée à partir du point central		622
Définition du paramètre de distribution		623
Lorsqu'un plan contient une génératrice d'une surface gauche, le produit des distances au point central des deux points où il est tangent et normal est constant		624
Quand deux surfaces gauches ont une génératrice commune, elles se coupent, en général, sous une inclinaison donnée en deux points de cette droite. — Détermination des inclinaisons limites		625-627
Lorsque deux génératrices de deux surfaces gauches ont des paramètres égaux, on peut placer ces surfaces de manière qu'elles se raccordent dans quatre positions relatives différentes		628
Sommets et arêtes	149	
Définition des sommets des surfaces gauches		629
Lorsqu'un plan contient une génératrice d'une surface gauche passant à un sommet, c'est en ce point qu'il touche la surface, sauf dans une position déterminée		630
Points des développables analogues aux sommets des surfaces gauches		631
Sommets considérés comme points limites des arcs multiples des directrices		632-633
Toute ligne d'ombre et de contour apparent d'une surface gauche passe à chaque sommet et y est tangente à la génératrice		634
Définition des arêtes. — Les arêtes d'une surface gauche sont asymptotes de toutes les courbes d'ombre et de contour apparent		635
Point central d'une arête		636
Ligne de striction et paramètres des génératrices d'un cylindre		637
Les lignes d'ombre des surfaces gauches ont des branches infinies de trois espèces différentes		638
Développable asymptote	153	639

CHAPITRE III.

CONOÏDE.

Propriétés générales. — Retour sur le paraboloïde	154	
Définition du conoïde général. — Toute surface réglée à plan directeur qui n'est pas un cylindre est gauche		640

	Pages.	Articles.
Les plans tangents d'un conoïde aux points situés à l'infini sont parallèles au plan directeur, et ce plan est directeur de tous les paraboloïdes de raccordement		641
La ligne de striction d'un conoïde est le contour apparent de cette surface par rapport à son plan directeur. — Les plans centraux de toutes les génératrices sont perpendiculaires au plan directeur		642
Construction des paraboles lignes de striction du paraboloïde scalène. — Les plans principaux sont bissecteurs des plans de ces paraboles. — Les lignes de striction du paraboloïde isoscèle sont des génératrices		643
Plans tangents et lignes d'ombre	155	
Construction du plan tangent au conoïde en un point donné		644-645
Détermination du point de contact d'un plan qui contient une génératrice		646
Branches infinies des courbes d'ombre. — Détermination des arêtes		647
Construction des plans tangents parallèles à un plan donné		648
Cylindroïde	157	
Définition du cylindroïde		649
Tout plan passant par l'intersection des plans des directrices coupe le cylindroïde et le cylindre primitif suivant deux courbes identiques		650
Construction de la tangente à la section d'un cylindroïde par un plan passant par l'intersection des plans des directrices		651
Les sections du cylindroïde par des plans verticaux et parallèles sont équivalentes.		652
Arêtes du cylindroïde. — Le cylindroïde elliptique a une ligne double de contact à l'infini		653
Ligne de striction		654
Paramètres des génératrices. — Les arêtes ont des paramètres finis		655
Détermination du paramètre d'une génératrice d'un paraboloïde, en considérant cette surface comme un cylindroïde		656
Conoïde oblique	161	
Définition du conoïde oblique		657
Sommets et arêtes		658-659
Branches infinies des courbes d'ombre		660
Ligne d'ombre à l'infini		661
Plans tangents parallèles à un plan donné		662
Paramètres des génératrices. — Les arêtes ont des paramètres infinis		663
Représentation d'un conoïde oblique circonscrit à un cercle		664-665
Section de cette surface par un plan passant par un sommet. — Plan de rebroussement		666
Équation du conoïde oblique circonscrit à une conique. — Génération de cette surface par des coniques. — Génératrice double. — Génératrice isolée		667-668
Conoïde droit	168	
Définition du conoïde droit. — Ligne de striction. — Arêtes. — Les arêtes ont des paramètres infinis		669
Intersections des surfaces réglées		670
Intersection du conoïde de la voûte d'arêtes en tour ronde par un tore elliptique de même axe, et par des cylindres de même axe. — La sous-normale de la spirale d'Archimède est constante et égale au paramètre		671-675
Emploi d'un conoïde droit comme surface auxiliaire pour la solution d'un problème de Géométrie plane		676
Nouvelles observations sur les sommets et les arêtes	173	
Distinction des arêtes en trois genres		677

Pages. Articles.

Cas où le point d'une arête situé à l'infini appartient à une ligne double qui n'a que ce point à l'infini 678
Parallèle entre les sommets des surfaces gauches et les sommets des développables 679
Cas où une surface gauche a un sommet qui n'est pas l'extrémité de l'arc utile d'une ligne double 680

CHAPITRE IV.

HYPERBOLOÏDE.

Définition. — Deux systèmes de génératrices rectilignes 176
Définition de l'hyperboloïde 681
Un hyperboloïde étant donné par trois directrices rectilignes, il existe un second hyperboloïde auquel ces droites appartiennent comme génératrices 682
Le système des deux hyperboloïdes a un centre 683
Ces surfaces ont un même cône directeur qui est du second ordre 684-685
Elles ne forment qu'un seul hyperboloïde ayant deux systèmes de génératrices rectilignes 686-687
Théorèmes relatifs à la double génération par des lignes droites 688-691
Cône asymptote 180
L'hyperboloïde a un cône asymptote qui est du second ordre 692
Les sections faites dans l'hyperboloïde et dans son cône asymptote par un plan quelconque sont des coniques homothétiques et concentriques 693
Division homographique des génératrices 181
Définition et principales propriétés des divisions homographiques 694-696
Dans un hyperboloïde, les génératrices de l'un des systèmes divisent homographiquement les génératrices de l'autre système 697
Quand deux directrices rectilignes sont divisées homographiquement, les droites qui passent par les points homologues forment un hyperboloïde 698
Les points d'intersection des quatre génératrices d'un système avec une génératrice quelconque de l'autre système sont dans un rapport anharmonique constant 699
Quadrilatère formé par quatre génératrices. — Relations entre les segments interceptés par les génératrices sur les côtés de ce quadrilatère 700-701
Propositions relatives aux divisions homographiques 702-704
Plans principaux. — Axes 186
Hyperboloïde de révolution considéré comme une surface gauche ayant pour directrices trois cercles dans de certaines positions relatives 705-706
Un hyperboloïde scalène peut être changé en un hyperboloïde de révolution par une transformation homologique. On reconnaît ainsi qu'il y a trois axes et trois plans principaux 707-709
Sections planes 188
Détermination des branches infinies et de leurs asymptotes 710-713
Cas où la section n'est pas une hyperbole 714
Cônes et cylindres circonscrits 189
Nature et position de la courbe de contact d'un cône et d'un cylindre circonscrit à un hyperboloïde 715-717

	Pages.	Articles.
Les sécantes qui passent par les points homologues de deux droites divisées homographiquement dans un plan ont pour enveloppe une conique		718
Ligne de striction	191	
Construction du point central d'une génératrice		719
Symétries de la ligne de striction		720
(On présente dans une note quelques observations sur les diverses formes de cette ligne.)		
Détermination de la longueur du paramètre d'une génératrice		721
La ligne de striction peut servir pour construire les axes d'un hyperboloïde donné par trois directrices rectilignes		722
Représentation d'un hyperboloïde rapporté à ses plans principaux	195	723-726
Théorèmes et exercices sur l'hyperboloïde de révolution	198	
Détermination de la longueur du paramètre des génératrices		727
Constructions pour reconnaître si un hyperboloïde donné par trois directrices rectilignes est de révolution		728
Représentation de deux hyperboloïdes de révolution tangents le long d'une génératrice commune		729-732
Cas où les hyperboloïdes tangents se coupent suivant deux génératrices		733-735
Cas où les hyperboloïdes se raccordent suivant deux génératrices		736-737
Observations diverses		738
Hyperboloïde employé comme surface auxiliaire	204	
Quand une surface gauche est déterminée par trois directrices, on construit facilement un hyperboloïde de raccordement le long d'une génératrice. — Cas où la surface a un sommet en un point de la génératrice considérée		739
Transformation d'un hyperboloïde de raccordement		740
Si l'on coupe une surface gauche par une série de plans passant par une droite, les tangentes de toutes les sections aux points situés sur une génératrice formeront un hyperboloïde		741
Tous les hyperboloïdes de raccordement à une surface gauche le long d'une génératrice ont leurs centres dans un même plan		742
Une surface gauche se raccorde avec une infinité d'hyperboloïdes de révolution le long d'une génératrice donnée. Les axes de ces hyperboloïdes sont les génératrices du second système du paraboloïde des normales		743

CHAPITRE V.

SURFACES DONT LES GÉNÉRATRICES NE SONT PAS PARALLÈLES A UN MÊME PLAN.

	Pages.	Articles.
Plans tangents. — Cône et cylindre circonscrits. — Sections planes	206	
Solution du problème direct et inverse du plan tangent		744-746
Branches infinies des courbes d'ombre		747
Branches infinies des sections planes		748
Surface du biais passé	208	
Définition de la surface		749
Centre. — Plan principal		750
Sommets		751
Arêtes		752

	Pages.	Articles.
Relations d'homologie		753
Cône directeur..		754
Plans tangents..		755-757
Contour apparent de la surface sur le plan horizontal		758-765
Contour apparent sur un plan vertical parallèle à la directrice rectiligne......		766
Sections faites dans la surface par des plans perpendiculaires à la directrice rectiligne..		767-769
Équation de la surface. — Sections planes diverses........................		770
Génération de la surface par des coniques		771
Lignes de striction. — Paramètre des génératrices........................		772-774
Déformation des surfaces gauches..	222	
Lorsqu'on déforme une surface gauche sans que les génératrices cessent d'être droites, les paramètres de ces lignes ne sont pas modifiés................		775
Il est toujours possible de déformer une surface gauche de manière à rendre les génératrices parallèles à un cône donné ou à un plan....................		776

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

LIVRE CINQUIÈME.

OMBRES LINÉAIRES.

CHAPITRE PREMIER.

OMBRES SUR LES FIGURES GÉOMÉTRALES.

Considérations générales.

320. Souvent, pour mieux faire comprendre la forme des objets représentés par des figures géométrales, on les suppose éclairés et l'on indique leurs ombres. On adopte généralement pour la direction des rayons de lumière une convention que nous ferons connaître (art. **374**).

Quelquefois aussi on construit les ombres sur des figures géométrales pour les reporter sur un tableau, car, dans quelques circonstances, cette méthode indirecte est plus simple que les tracés ordinaires de la perspective. On suppose alors les rayons divergents ou parallèles, suivant les convenances du sujet.

Les problèmes d'ombre ne présentent le plus souvent que des questions de plans tangents et d'intersection de surfaces. Nous en avons résolu quelques-uns dans la première Partie de ce Traité (art. **152** et **289**).

Polyèdres.

321. Pour un polyèdre, on recherche d'abord quelles sont les faces obscures; généralement on les distingue sans difficulté. Lorsqu'on a quelque incertitude, on coupe le corps par des plans passant par le point lumineux ou parallèles aux rayons, et l'on voit comment la lumière est distribuée dans chaque section.

Quand on a ainsi déterminé les *ombres propres*, on fait passer des plans par le point lumineux et par les diverses arêtes qui séparent les faces éclairées de celles qui sont obscures; l'intersection de ces *plans d'ombre* avec les surfaces des corps voisins fait connaître le périmètre de l'*ombre portée*.

Iᵉʳ Exercice. — *Ombres d'un prisme et d'une pyramide.* (*Fig.* 183.)

322. On propose de déterminer les ombres propres d'un prisme vertical et d'une pyramide, et leurs ombres portées sur les plans de projection qui représentent le sol et le parement d'un mur. Les rayons de lumière sont parallèles à une droite donnée (Ss, $S's'$).

On voit tout d'abord, d'après la direction des rayons, que les faces verticales AB et AD du prisme et sa base supérieure $B'D'$ sont éclairées. La ligne brisée formée par les droites (D, $D''D'$), (DC, $D'C'$), (CB, $C'B'$), (B, $B'B''$) sépare donc la partie éclairée de celle qui est obscure. Pour avoir l'ombre portée du prisme, nous allons chercher l'intersection des plans d'ombre de ces arêtes avec la surface horizontale du sol et avec la face exposée de la pyramide.

Les plans d'ombre des arêtes verticales (B, $B''B'$) et (D, $D''D'$) sont verticaux; leurs traces Bp et Dr parallèles à Ss limitent l'ombre du prisme sur le plan horizontal. Pour avoir les projections verticales de leurs intersections avec la face (EGI, $E'G'I'$) de la pyramide, nous remarquons que le plan passant par l'arête (C, $C''C'$), et parallèle aux rayons de lumière, coupe les droites (EG, $E'G'$) et (EI, $E'I'$) aux points (q, q') et (k, k'); par conséquent, si nous menons par les points p' et r', projections verticales de p et de r, des parallèles à $q'k'$, nous aurons les projections verticales cherchées. Il faut les terminer aux points b' et d', où elles sont rencontrées par les projections des rayons qui passent aux extrémités B' et D' des arêtes. On détermine de la même manière l'ombre c' du sommet (C, C'), et l'on ramène ces divers points sur les lignes Bp, Dr, Cq du plan horizontal.

323. Le rayon de lumière qui passe par le sommet (I, I') de la pyramide a sa trace horizontale en i et sa trace verticale en j'. Par suite, les plans d'ombre des arêtes (IE, $I'E'$), (IG, $I'G'$) ont pour traces horizontales les droites Ei et Gi; leurs traces verticales sont uj' et vj'. On obtient ainsi les limites de l'ombre reçue par le plan horizontal, et par le plan vertical.

Les faces (IEF, $I'E'F'$) et (IGF, $I'G'F'$) sont dans l'ombre. Les trois faces de la pyramide seraient éclairées, si la trace i du rayon qui passe par le sommet était dans l'intérieur de la base FEG.

IIe Exercice. — *Ombres d'un perron.* (*Fig.* 185.)

324. On propose de déterminer les ombres d'un perron éclairé par des rayons parallèles à une droite donnée (Ss, $S's'$).

Le plan et l'élévation n'indiquent pas complétement les dispositions du perron, et nous aurions ajouté une coupe transversale, si une perspective cavalière, dont nous nous occuperons plus loin (*fig.* 186), ne levait pas toute incertitude.

Les arêtes projetées horizontalement sur GB séparent les faces éclairées du *rampant* de celles qui sont obscures. Ces arêtes sont (B, B″B′), (BF, B′), (FH, B′G′) et (HG, G′). Le plan d'ombre de la première est vertical, et toutes les lignes d'ombre qu'il détermine se confondent, en projection horizontale, avec sa trace Bp parallèle à Ss. Il est facile de déterminer sur les plans horizontaux des différentes marches les traces du rayon qui passe par le point le plus élevé (B, B′) de l'arête. L'une d'elles p est sur le giron [1] d'une marche : c'est le point où le rayon rencontre la surface de l'escalier, et l'extrémité de la ligne d'ombre Bmn.

Le même plan d'ombre coupe les plans verticaux des marches, suivant des verticales qui correspondent aux points m et n. Il est inutile de dire que l'ombre du point (B, B′) aurait pu se trouver sur un de ces plans verticaux.

La seconde arête (BF, B′) est perpendiculaire au plan vertical; son plan d'ombre coupe le plan horizontal de la troisième marche suivant la droite pp_1 parallèle à BF, et le plan vertical de la quatrième marche suivant la ligne $p'B'$ parallèle à $S's'$. L'extrémité q' de la partie utile est la trace sur ce dernier plan du rayon (Fq, $B'q'$).

L'extrémité inférieure (F, B′) de la troisième arête (FH, B′G′) est dans le plan horizontal de la dernière marche; le rayon passant par l'extrémité supérieure (H, G′) perce ce plan au point h : la trace du plan d'ombre est donc $Fuvh$. Le rayon (Hh, $G'h'$) rencontre le plan horizontal de la marche précédente au point h_1, et par suite la droite h_1ti parallèle à huF est la trace du même plan d'ombre sur le plan horizontal de l'avant-dernière marche. En relevant les points i, t, u, v en i', t', u', v', et déterminant la trace j', sur le plan vertical XY, du rayon qui passe par le point (H, G′), on a les extrémités des lignes d'ombre $q'i'$, $t'u'$ et $v'j'$: ces trois droites doivent être parallèles.

Le plan d'ombre de la quatrième arête (HG, G′) est perpendiculaire au plan vertical, et par suite les lignes de l'ombre portée sont projetées sur sa trace $G'j'$ parallèle à $S's'$.

La détermination des ombres portées par les arêtes de la porte, et par celles qui se projettent horizontalement sur la droite AD, ne présente pas de difficultés.

[1] Le *giron* d'une marche est la face sur laquelle on pose le pied.

III^e Exercice. — *Ombres d'une maison.* (*Pl. II et I*.)

325. On propose de déterminer les ombres d'une maison donnée par un plan et une élévation (*fig.* 188 et 189). Les rayons de lumière sont parallèles à la droite (Ss, $S's'$).

Nous construisons d'abord une projection auxiliaire sur un plan perpendiculaire aux deux premiers (*fig.* 190). Pour avoir la nouvelle projection $S'_1 s'$ du rayon, il suffit de prendre sur l'horizontale du point S' une longueur $s''S'_1$ égale à ss_1 (art. **34**).

Chacun des plans qui reçoivent l'ombre est perpendiculaire à l'un des trois plans de projection, et par suite on détermine facilement le point où il est rencontré par un rayon de lumière.

326. La construction de l'ombre sur le sol présente peu de difficultés. Nous avons représenté sur la *fig.* 195, faite à une échelle triple, quelques détails qui présentent de l'intérêt.

Les droites $j_1 j$ et $i_1 i$ parallèles à Ss sont les ombres des arêtes verticales $J'_1 J'$ et $I'_1 I'$. L'ombre de l'horizontale $J'_1 \alpha'$ est la parallèle à cette droite menée par le point j_1, de sorte que le rayon de lumière qui arrive au point i_2 rencontre les arêtes $I'_1 I'$ et $J'_1 \alpha'$ en des points I'_2 et V. Le segment VJ'_1 porte ombre sur le sol, et le reste de l'arête $\alpha' J'_1$ sur le plan vertical $I'I'_1 \beta'_1$ qui forme le *larmier;* elle y dessine une horizontale qui a son origine au point I'_2.

Des dispositions analogues, et qui par conséquent n'ont pas besoin d'être analysées, se présentent pour les ombres des arêtes $I'_1 \beta'_1$ et $L'_1 \gamma'$.

Si l'on veut avoir les ombres de la façade sans recourir à celles qui sont portées sur le sol, on tracera une droite $\alpha\beta\gamma\delta$ parallèle à Ss, et l'on étudiera la disposition des rayons de lumière dans le plan vertical dont cette ligne est la trace; on obtient sans difficulté les ombres β', δ' et δ'_1 des points (α, α'), (β, β'_1) et (γ, γ').

327. Le plan d'ombre de l'arête (ll_1, l') de la cheminée rectangulaire (*fig.* 188 et 189) a pour trace sur le plan vertical de projection qui lui est perpendiculaire la droite $l'g'e'$; il rencontre la droite (AB, $A'B'$), faite de la maison, au point (g, g'), et le plan voisin des toits des fenêtres le long de la droite (ee_1, e'). On opère d'une manière analogue pour les autres plans d'ombre de la cheminée.

Pour déterminer l'ombre des fenêtres sur le toit, il faut recourir à la *fig.* 190.

Cylindre, cône et sphère.

I^er Exercice. — *Ombre d'une cheminée ronde.* (*Pl. I*.)

328. Les lignes qui limitent l'ombre propre sur les cylindres et sur les cônes sont les génératrices de contact des plans tangents parallèles aux rayons de lumière (art. **132**). En général, on détermine très-facilement ces droites.

La maison représentée sur la *Pl. IV* a une cheminée cylindrique dont les ombres ont été construites sur les *fig.* 191, 192 et 193, qui sont à une échelle triple de celles de la *Pl. IV*.

La droite HC, parallèle à Ss et tangente à la base du cylindre de la cheminée, est la trace de l'un de ses plans d'ombre. Les projections verticales $c'C'$ (*fig.* 192) et $c''C''$ (*fig.* 193) du rayon extrême contenu dans ce plan passent par les points c' et c'', qui correspondent à c; sa trace C'' sur le plan $B''R''$ fait trouver le point (C, C') où se termine la ligne d'ombre $(HC, H'C')$. La génératrice de contact $H'H'_1$ prolongée jusqu'au rayon $c'C'$ est une ligne d'ombre propre de la cheminée. On détermine de la même manière la trace $(LD, L'D')$ de l'autre plan d'ombre sur le toit, et la ligne d'ombre propre $(L, L'L'_1)$.

On obtient facilement l'ombre (β, β') portée par un point (α, α') du cercle inférieur du couronnement sur le cylindre de la cheminée; la courbe lieu des points β' s'étend de L'_1 à H'_1. Le rayon $c'C'$ la touche en H'_1, car il se trouve dans les plans tangents des deux cylindres dont cette courbe est l'intersection.

On détermine sans difficulté sur le cylindre du couronnement les génératrices v'_1v' et u'_1u' qui forment lignes d'ombre.

L'arc $(cv, c'v'_1)$ projette une ombre $(CV_1, C'V'_1)$ que l'on obtient par points, en considérant les rayons sur le plan vertical de la *fig.* 193. On détermine ensuite l'ombre V_1V portée par la génératrice (v, v'_1v'); sur l'autre côté de la cheminée, on trouve l'arc DU_1 et la droite U_1U.

On obtient les ombres portées par l'arc $(uev, u'l'v')$ sur les plans PBQ et RBQ, en considérant pour chacun d'eux les rayons sur le plan vertical qui lui est perpendiculaire.

Les courbes se rejoignent sur l'arête BQ en un point I dont il est utile d'avoir la position d'une manière exacte. Pour l'obtenir, nous considérerons les rayons $(Bb, B''b'')$ et $(Qq, Q''q'')$ qui aboutissent à deux points (B, B'') et (Q, Q'') de cette arête, et nous déterminerons leurs traces b et q sur le plan supérieur $F''v''$ du couronnement de la cheminée. La droite bq de ce plan porterait ombre sur l'arête BQ, et le point i, où elle rencontre le cercle uv, a pour ombre le point cherché I. Il n'y a plus qu'à relever i en i' (*fig.* 192), et à construire son ombre (I, I').

On obtient facilement sur le même plan horizontal $F''v''$ les droites bp et br qui porteraient ombre sur les arêtes BP et BR. Par suite d'une coïncidence fortuite, la seconde passe par le point v; il résulte de là que l'extrémité V de l'ombre de la génératrice v'_1v' (*fig.* 192) est précisément sur l'arête BR (*fig.* 191).

529. La *fig.* 194 représente une coupe de la cheminée par un plan diamétral vertical. La droite $a''a'$ et la courbe $a'B'$ sont les ombres de la génératrice $(A, A''A')$ et de l'arc $(AB, A'B')$. La courbe $a'B'$ appartient à l'intersection du cylindre intérieur de la cheminée par le cylindre d'ombre du cercle supérieur (ABd, $A'B'D'$). Ces deux cylindres ayant pour directrice un même cercle se coupent suivant une seconde conique qui est nécessairement une ellipse (art. **252**, 1°).

II^e Exercice. — *Ombres d'un cylindre couché sur un plan horizontal. Rayons parallèles.* (*Fig.* 196.)

550. On propose de déterminer les ombres d'un cylindre de révolution couché sur un plan horizontal. La génératrice de contact est (Aa, $A'a'$); les bases circulaires sont projetées verticalement suivant deux ellipses identiques, faciles à construire. Nous avons représenté le cercle $\varepsilon'\varphi'$ sur lequel se projette l'une d'elles (ef, $e'f'$) lorsqu'on la rend parallèle au plan vertical par une rotation autour de la verticale du point a où elle touche le plan horizontal.

Pour avoir les lignes d'ombre, il faut mener au cylindre des plans tangents parallèles au rayon (SS_1, $S'S'_1$). Nous allons reproduire la construction donnée pour ce problème à l'article **129**, en ayant égard à la disposition spéciale des données.

D'un point (S_1, S'_1) du rayon, nous menons une droite (S_1S_2, $S'_1S'_2$) parallèle aux génératrices du cylindre; le plan passant par cette ligne et par (SS_1, $S'S'_1$) coupe le plan vertical B_2S de la première base suivant la ligne (SS_2, $S'S'_2$). Les intersections du même plan B_2S avec les plans tangents cherchés ont pour projections verticales les droites $B'B'_2$ et $C'C'_2$ parallèles à $S'S'_2$ et tangentes à la projection verticale de la première base. Les génératrices qui forment séparation d'ombre et de lumière sur le cylindre passent par les points de contact B' et C' : ce sont les droites (Bb, $B'b'$) et (Cc, $C'c'$). La seconde est cachée sur les deux projections.

On peut opérer sur le cercle $\varepsilon'\varphi'$, et cela est même un peu plus exact. Il est facile de déterminer la position ($S\sigma$, $S'\sigma'$) que prend la droite (SS_2, $S'S'_2$) quand on la fait tourner autour de la verticale du point S jusqu'à la rendre parallèle au plan vertical. Une tangente parallèle à $S'\sigma'$ fait connaître le point β que l'on ramène en b'.

551. On reconnaît, d'après la direction de la projection SS_1 d'un rayon, que la seconde base est éclairée et que la première est dans l'ombre. La ligne qui sépare la partie éclairée de celle qui est obscure est formée des génératrices (Bb, $B'b'$), (Cc, $C'c'$), et des deux demi-circonférences $b'e'c'$, $B'M'C'$. L'ombre portée par ce contour mixtiligne sur le plan horizontal se compose des droites B_1b_1, C_1c_1 parallèles aux génératrices, et des demi-ellipses b_1ac_1, $B_1M_1C_1$.

Un point M_1, trace d'un rayon (MM_1, $M'M'_1$), est déterminé par la rencontre de deux droites MM_1 et M'_1M_1 qui se coupent sous un angle assez aigu. Pour donner plus d'exactitude à la construction, on peut mener par le point (M, M') une droite parallèle à $(SS_2, S'S'_2)$ et chercher sa trace M_2 sur B_2S. En menant par M_2 une droite parallèle aux génératrices du cylindre, on a l'ombre de la génératrice qui passe par le point (M, M'); l'intersection de cette droite avec la ligne MM_1 donne le point M_1.

Les ombres portées peuvent être considérées comme des projections obliques, et par conséquent la tangente M_1K_1 en un point M_1 de l'ellipse est l'ombre de la tangente $(MK, M'K')$ au point correspondant du cercle. Pour avoir la première, il suffit donc de chercher l'ombre K_1 d'un point (K, K') de la seconde : nous l'obtenons par la méthode qui vient d'être expliquée.

La droite B_1b_1 est tangente à l'ellipse en B_1, car elle est l'ombre de toutes les lignes contenues dans le plan tangent au cylindre le long de la génératrice $B'b'$, et notamment de la tangente du cercle au point B'.

Les diamètres du cercle projetés sur $B'C'$ et $R'L'$ sont rectangulaires, et par suite leurs ombres B_1C_1 et R_1L_1 sont des diamètres conjugués de l'ellipse (art. **151**).

III^e Exercice. — *Ombre d'un cône percé d'un trou cylindrique. Rayons parallèles.* (*Pl. VII.*)

332. On propose de déterminer les ombres du cône qui a déjà été représenté sur la *fig.* 124. On donne ses deux projections, et l'ombre s de son sommet sur le plan horizontal.

Les droites sa et sd, tangentes à la base du cône, sont les traces horizontales des plans tangents parallèles aux rayons de lumière et les limites de l'ombre portée sur le plan horizontal. Les génératrices de contact $(Sa, S'a')$, $(Sd, S'd')$ sont les limites de l'ombre propre. Ces droites se trouvent interrompues aux points (A, A'), (A_1, A'_1), (D, D') (D_1, D'_1); leurs ombres sont par conséquent limitées aux points correspondants α, α_1, δ et δ_1.

333. Il faut maintenant construire sur le plan horizontal les ombres des deux courbes de pénétration. On détermine la trace μ du rayon de lumière qui passe par un point M de l'une d'elles, sans recourir au plan vertical, en remarquant qu'elle doit être sur l'ombre sm de la génératrice SMm. L'ombre de la courbe DMR passe par les points δ et δ_1, est tangente en ces points à la droite sd limite de l'ombre sur le plan horizontal, et touche aussi la droite sr ombre de la génératrice Sr qui, dans l'espace, est tangente à la courbe de pénétration.

On construit de la même manière l'ombre $\lambda\varepsilon$ de la courbe ALT. La lumière arrive sur la partie du plan horizontal qui est comprise dans l'intérieur des deux lignes que nous venons de déterminer.

La direction des génératrices du cylindre creux est donnée, sur chaque plan de projection, par les tangentes communes aux deux courbes de pénétration. En menant du sommet (S, S') une droite $(SK, S'K')$ parallèle à ces lignes, nous pourrons déterminer la trace SK d'un plan parallèle aux rayons et aux génératrices du cylindre. Les courbes $\delta\gamma\tau$ et $\alpha\gamma\tau$ doivent admettre des tangentes communes $\varphi\lambda$ et $\beta\varepsilon$, parallèles à sK : ces droites sont les traces de plans qui sont tangents au cylindre, et parallèles aux rayons de lumière.

334. La ligne d'ombre sur le cylindre creux est l'intersection de cette surface et du cylindre d'ombre qui a pour directrice la courbe DRM et pour trace horizontale $\delta\gamma\tau$. On construit cette intersection par la méthode ordinaire (art. **223**, **234**). Une droite $\mu\nu$, parallèle à sK, peut être considérée comme la trace d'un plan parallèle aux génératrices rectilignes des deux cylindres. Ce plan auxiliaire coupe le cylindre d'ombre suivant les droites μM et νN, et le cylindre creux suivant deux droites qui passent par les points M et N. Les points I et i où se rencontrent ces lignes appartiennent à la courbe d'ombre ; le premier seul est utile (art. **97**).

Quand les points μ et ν se réunissent, les points M et I se confondent également. L'origne F de l'arc utile correspond donc au point φ de la trace du cylindre d'ombre où la tangente est parallèle à sK. L'extrémité G de l'arc utile est sur le rayon de lumière qui rencontre les deux courbes d'entrée et de sortie du cylindre, et qui par conséquent aboutit au point de croisement γ. La courbe d'ombre portée sur le cylindre creux a un autre arc utile BT, que l'on obtient de la même manière.

On relève sans difficulté sur le plan vertical les lignes d'ombre ainsi déterminées sur le plan horizontal.

335. La *fig.* 197 (*Pl. VI*) représente, dans la même position par rapport aux plans de projection, et éclairé par les mêmes rayons, le solide retiré du cône. Le périmètre de l'ombre portée sur le plan horizontal est formé des quatre droites $\alpha\alpha_1$, $\varepsilon\beta$, $\delta_1\delta$, $\varphi\lambda$ et des arcs des courbes déjà déterminées qui se raccordent avec elles. En ramenant les points λ, φ, β, ε en L, F, B, E, puis en L', F', B', E', nous obtenons les génératrices (LF, L'F') et (BE, B'E') suivant lesquelles la surface cylindrique du solide est touchée par des rayons de lumière : ce sont les limites de l'ombre propre. Ces lignes ne sont pas à considérer sur la *fig.* 198, parce que les rayons qui les rencontrent sont noyés, près le point de contact, dans la partie solide du cône, et n'ont, par conséquent, qu'une existence purement géométrique. Nous dirons que les droites (LF, L'F') et (BE, B'E'), lignes d'ombre *réelles* sur la *fig.* 197, seraient *virtuelles* sur la *fig.* 198.

Une construction analogue fait trouver sur la partie conique du solide les lignes d'ombre (AA_1, $A'A'_1$) et (DD_1, $D'D'_1$).

IVᵉ EXERCICE. — *Ombres d'une niche sphérique.* — *Rayons parallèles.* (*Fig.* 206.)

336. On propose de déterminer les ombres d'une niche sphérique semblable à celles des *fig.* 162 et 163, mais représentée par une élévation sur le plan de tête et par une coupe horizontale que l'on peut supposer faite à la hauteur du plan de naissance $A'B'$ de la voûte sphérique. La droite (R, R') donne la direction des rayons de lumière.

L'ombre portée par l'arête $(A, A'_1 A')$ est l'horizontale $(Aa, A'_1 a'_1)$, et la génératrice $(a, a'_1 a')$ du cylindre de la niche jusqu'au point où elle rencontre le rayon de lumière qui passe à l'extrémité A' de l'arête.

On obtient facilement l'ombre (k, k') portée par un point (K, K') de la courbe de tête, sur le même cylindre, en cherchant l'intersection de cette surface avec le rayon $(Kk, K'k')$.

L'arc $a'k'e'$ appartient à l'intersection du cylindre vertical de la niche avec le cylindre d'ombre qui a pour directrice le cercle $A'E'B'$. Les plans limites (art. **227**) sont les plans $(Aa, A'_1 A')$ et $(Bb, B'_1 B')$, qui sont parallèles aux rayons de lumière, et dont les traces verticales touchent la directrice du cylindre d'ombre aux points A' et B'. Il y a pénétration : l'une des courbes se projette horizontalement sur l'arc aB, l'autre sur l'arc Ab. Nous avons négligé la dernière, mais la première a été représentée même dans ses parties non utiles. Nous verrons plus loin comment on détermine sur la droite $A'B'$ la position précise de l'extrémité e' de l'arc utile.

337. La tangente en un point k' est l'intersection des plans tangents aux deux cylindres. Les traces du plan tangent au cylindre de la niche sont la droite kt sur le plan horizontal, et la verticale tt' sur le plan $K_1 t$ parallèle au plan de tête. La trace du plan tangent au cylindre d'ombre, sur le même plan, est la droite $K'_1 t'$ parallèle à $K'f'$. La tangente est donc $t'k'$.

Les droites kt et $K_1 t$ se rencontrant très-obliquement, il est convenable de tracer d'abord la verticale tt' dans une position arbitraire, et de mener ensuite, par son point de rencontre t avec la tangente ki, une droite tK_1 parallèle à BA.

On peut faire les constructions sur le plan horizontal : en le supposant à la hauteur du plan de naissance, il est rencontré par la tangente $K'f'$ de la directrice $A'K'B'$ au point f, et par le rayon de lumière $(Kk, K'k')$ au point u; la trace du plan tangent au cylindre d'ombre le long de la génératrice $K'k'$ est donc fu; cette ligne coupe la trace du plan tangent au cylindre de la niche en un point i qui, relevé sur $A'B'$, donne un point i' de la tangente $t'k'$.

Le plan d'ombre de l'arête $A'_1 A'$ est tangent au cylindre d'ombre de la courbe de tête le long de la génératrice $A'a'$, et par suite les lignes d'ombre sur le cylindre de la niche se raccordent au point a'.

338. L'arc $e'G$ est l'intersection du cylindre d'ombre avec la sphère. On le détermine en coupant les surfaces par des plans perpendiculaires au plan de tête et parallèles aux rayons. Pour que la construction soit facile, il faut prendre un plan de projection parallèle aux plans sécants, de manière que les cercles d'intersection sur la sphère se projettent en vraie grandeur. La trace de ce plan avec le plan de tête est une droite X″ Y″ parallèle à R′.

Le plan sécant qui passe par le centre (C, C′) a pour trace verticale la droite M′C′ parallèle à R′ : il coupe la sphère suivant un cercle dont nous traçons sans difficulté la projection M″M''_1 sur le nouveau plan, et le cylindre suivant le rayon de lumière (M*c*, M′C′) dont on détermine la projection M″*c*″, en remarquant que le point *c*″, sur lequel se projette le point (*c*, C′), doit être à une distance de C″ égale à C*c* (art. 59). Le rayon M″*c*″ coupe le cercle M″M''_1 en un point μ'' que nous ramenons en μ.

Les sections de la sphère et du cylindre d'ombre par le plan auxiliaire qui a pour trace verticale la droite N′*n*′ parallèle à M′C′ sont, en projection, le cercle décrit du point C″ comme centre avec N″C″ pour rayon, et la droite N″*n*″ parallèle à M″μ''. Le point de rencontre *n*″ est ramené en *n*′.

Les origines M″ et N″ des arcs concentriques M″μ'' et N″*n*″ se trouvent sur un même rayon, et leurs cordes sont parallèles; ces arcs sont donc égaux en degrés, et par suite les points C″, *n*″ et μ'' sont en ligne droite. Il en résulte que la projection de la courbe d'ombre est une droite passant par le point C″; la courbe elle-même est un grand cercle situé dans un plan perpendiculaire aux plans auxiliaires, et sa projection verticale, une ellipse dont le grand axe est égal au diamètre de la sphère. La construction montre que cet axe est le diamètre PG situé dans le plan de tête et perpendiculaire à R′; le petit axe est μC′μ_1.

Les deux surfaces sont du second degré, et se coupent suivant le cercle (AB, A′M′B′); on pouvait donc prévoir que leur intersection complète comprendrait une seconde courbe plane (art. 252, 1°).

En coupant la sphère et le cylindre d'ombre par des plans parallèles au plan de tête, on déterminerait la courbe *e*′G aussi facilement que par la construction que nous venons d'expliquer. Nous nous contentons d'indiquer cette méthode.

559. Le point *e*′ du cercle de naissance, où se joignent les arcs utiles des deux courbes, est sur l'intersection (A′B′, C″μ'') du plan de naissance et du plan de la courbe d'ombre. Si nous considérons un point (*r*′, *r*″) de l'intersection de ces plans, nous déterminerons sa position sur le plan horizontal en prenant le segment R*r* égal à R″*r*″, et nous pourrons tracer la droite d'intersection C*r*; elle rencontre le cercle en un point *e* qui fait trouver *e*′.

Les deux courbes ont au point *e*′ une tangente commune, parce que le cylindre de la niche est circonscrit à la sphère le long du cercle de naissance. On construit cette tangente en considérant le point *e*′ comme appartenant, soit à la ligne d'ombre de la sphère, soit à celle du cylindre, soit à une ellipse dont on connaît les axes. Nous avons employé le premier procédé; les traces sur le plan de tête du plan tangent au cylindre d'ombre, et du plan de la courbe sont E′ε et PG : leur point de rencontre ε appartient à la tangente cherchée.

340. Nous n'avons pas tracé la projection horizontale de la courbe d'ombre portée sur la sphère, parce qu'elle présente peu d'intérêt; mais il serait très-facile de déterminer cette ellipse : son centre est en C; la droite Ce est la moitié de son grand axe; en projetant le point G sur AB, on aurait un point de la courbe, et l'on construirait ensuite la longueur du petit axe (art. **299**).

341. Si le demi-cylindre et le quart de sphère représentés sur la *fig.* 206 étaient en relief, il n'y aurait pas de lignes d'ombre portées sur les surfaces, mais seulement des lignes d'ombre propre qu'il serait très-facile de construire. Nous ne nous arrêterons pas à ce problème; nous voulons simplement faire remarquer que les lignes d'ombre à considérer sur une surface sont différentes, suivant que la partie solide se trouve d'un côté ou de l'autre.

Surfaces de révolution.

I[er] Exercice. — *Rayons divergents. — Points lumineux dans une position quelconque.* (*Pl. XII.*)

342. Lorsqu'une surface courbe est éclairée, le lieu des points de contact des rayons qui lui sont tangents forme la ligne qui sépare la partie éclairée de celle qui est dans l'ombre : nous l'appellerons quelquefois *séparatrice*. On peut la déterminer, soit en coupant la surface par des plans passant par le point lumineux et menant de ce point des tangentes à la section, soit en construisant des plans tangents contenant le point lumineux, et cherchant leur point de contact. Cette dernière méthode est la plus employée; nous allons l'appliquer à la recherche des ombres d'un corps engendré par la révolution, autour de l'axe O′O″, de l'aire O′A′e'A″O″ composée d'un rectangle et d'un demi-cercle. Les rayons divergent du point (S, S′).

343. *Premier procédé : cônes circonscrits.* — Proposons-nous de trouver les points de la courbe d'ombre situés sur un parallèle (RMN, R′M′N′) choisi arbitrairement : si la droite $\lambda' g'_1$, tangente de la méridienne en R′, accompagne cette courbe dans son mouvement de rotation autour de l'axe, elle engendrera un cône qui sera circonscrit à la surface le long du cercle décrit par le point (R, R′) (¹): on voit, en effet, qu'en chacun de ses points les plans tangents des deux sur-

(¹) Une surface est *circonscrite* à une autre ou lui est *inscrite*, quand elle a les mêmes plans tangents en tous les points d'une ligne commune. Ces expressions n'impliquent pas d'ailleurs une idée de grandeur relative nécessaire : ainsi la surface que l'on dit circonscrite, parce qu'elle contient l'autre surface dans la disposition spéciale du système géométrique considéré, peut très-bien, pour une autre disposition des données, être renfermée dans celle-ci.

faces se confondent, parce qu'ils contiennent deux mêmes droites, la tangente du méridien et celle du parallèle. Donc, si par le point lumineux (S, S') nous menons des plans tangents au cône, les points où les génératrices de contact rencontreront le parallèle considéré appartiendront à la courbe d'ombre de la surface de révolution.

Nous prenons pour plan horizontal d'opération le plan xy situé à la hauteur du point lumineux. Tous les tracés seront d'ailleurs projetés sur le plan horizontal qui correspond à la ligne de terre T'A'.

Le cône circonscrit a son sommet sur l'axe $(O, O'O'')$; sa trace horizontale est le cercle $\lambda\mu\nu$. Les traces des plans tangents à cette surface sont les tangentes $S\mu$ et $S\nu$; les génératrices de contact ont pour projections horizontales $O\mu$ et $O\nu$; enfin les points M et N, où elles rencontrent la projection du parallèle, appartiennent à celle de la courbe : on les relève verticalement en M' et en N'.

Il est important de remarquer que si le parallèle considéré et la trace $\lambda\mu\nu$ du cône étaient sur des nappes différentes de cette surface, ce que l'on reconnaîtrait facilement sur le plan vertical, il faudrait prendre les intersections du parallèle avec les prolongements des droites analogues à μO et νO au delà du point O.

Pour éviter de tracer les tangentes $S\mu$ et $S\nu$, et déterminer avec précision les points de contact μ et ν, on décrit un cercle sur OS comme diamètre.

Le point (M, M') est vu sur les deux projections, parce qu'il est en avant du méridien principal, et sur la partie supérieure du corps, au-dessus du parallèle du plus grand rayon. Le point (N, N') est vu sur le plan horizontal et caché sur le plan vertical.

544. Nous avons trouvé deux points M et N sur le parallèle, parce que le point S est en dehors du cercle $\lambda\mu\nu$; la courbe d'ombre n'aurait pas de point sur le parallèle considéré, si la trace du cône auxiliaire renfermait le point S; et enfin elle serait tangente au parallèle, si le cône avait pour trace, sur le plan horizontal xy, le cercle SS_1 décrit du point O comme centre avec OS pour rayon. D'après cela, pour déterminer les parallèles qui sont touchés par la courbe d'ombre, il suffit de relever le point S_1 en S'_1, et de mener par S'_1 des tangentes S'_1P' et S'_1p' à la méridienne : chacun des points de contact P' et p' appartient à un des parallèles cherchés. Il résulte d'ailleurs de la construction générale de l'article précédent que les points M et N, où la courbe d'ombre rencontre un parallèle, ont des positions symétriques par rapport au plan méridien SO, et par suite qu'ils ne peuvent se réunir que dans ce plan; les points (I, I') et (i, i'), où les parallèles des points P' et p' percent le plan SO, sont donc ceux où ils sont touchés par la ligne d'ombre. L'un est le plus élevé de cette courbe, et l'autre celui qui l'est le moins.

545. Le long du parallèle (EUV, $E'e'$) qui a le plus grand rayon, le cône circonscrit se change en un cylindre vertical; les plans tangents sont verticaux, et ceux qui contiennent les points de la courbe d'ombre ont pour traces horizontales les droites SU et SV tangentes à la projection du parallèle, et passant par le point S. Le cercle $O\mu S$ détermine la position des points de contact U et V; ces points limitent la partie vue de la courbe en projection horizontale : on les relève en U' et en V'.

546. *Deuxième procédé : cylindres circonscrits.* — Au lieu de se donner des parallèles, on peut choisir des méridiens, et la même construction faite en ordre inverse résoudra le problème. Si l'on considère le méridien dont la trace est $O\mu M$, son intersection μ avec le cercle OS sera ramenée en λ, puis relevée en λ'. On tracera ensuite les tangentes $\lambda' R'$ et $\lambda' r'$ qui feront connaître les parallèles $R'M'N'$ et $r'm'n'$; les intersections M et m de leurs projections horizontales avec la droite OM appartiendront à la courbe. Les points λ' et r' étant de côtés différents de l'axe, le point m devra être pris au delà du point O par rapport au point μ.

Cette construction est suffisamment établie par les raisonnements des articles précédents, car, lorsqu'elle est terminée, on peut supposer que ce sont les parallèles qui ont été donnés; mais on peut la démontrer directement.

547. Les tangentes des parallèles, aux points où ils coupent le plan méridien MOm, forment un cylindre circonscrit perpendiculaire à ce plan. Tout plan tangent à ce cylindre est tangent à la surface de révolution en un point du méridien considéré. Le problème est donc ramené à déterminer des plans contenant un point (S, S') et tangents à un cylindre. Cette question a été traitée à l'article **128**; nous allons reproduire la solution, en ayant égard à la manière dont les données sont disposées.

La droite ($S\mu$, $S'\mu'$) est parallèle aux génératrices du cylindre, et le point (μ, μ') où elle rencontre le plan MOm appartient aux traces des plans tangents cherchés, sur le plan méridien. Si nous faisons tourner ce plan de manière à le rendre parallèle au plan vertical, le point (μ, μ') se transportera en (λ, λ'), et les tangentes $\lambda' R'$ et $\lambda' r'$ seront les traces des plans tangents : leurs points de contact R' et r' reportés dans le plan méridien en (M, M') et (m, m') appartiendront à la courbe d'ombre.

548. Les tangentes $S'Q'$ et $S'q'$ sont les traces verticales des plans qui contiennent le point (S, S') et qui sont tangents au cylindre circonscrit à la surface le long du méridien de front. La projection verticale de la courbe d'ombre rencontre le contour apparent en Q' et en q', et lui est tangente en ces points.

L'horizontale xy ne rencontrant pas le méridien principal, quelle que soit la position du point λ', on pourra mener deux tangentes $\lambda' R'$ et $\lambda' r'$, et par suite la courbe a deux points dans chaque plan méridien.

549. On emploiera l'un ou l'autre des deux procédés que nous avons expliqués, d'après la nature de la méridienne, suivant qu'il sera plus facile de mener une tangente à cette courbe par un point pris sur elle, ou de déterminer le point de contact d'une tangente. Pour une courbe graphique (art. **98**), la première détermination sera en général plus facile.

550. *Ombre portée.* — Les courbes d'ombre portée sur les plans de projection sont les traces du cône qui a son sommet au point (S, S'), et pour directrice la courbe d'ombre propre. Une génératrice quelconque (SM, S'M') perce le plan horizontal en un point (T, T') qui appartient à la courbe d'ombre portée. La tangente Tg de cette courbe est la trace du plan tangent au cône, qui est également tangent à la surface au point (M, M'); elle est donc perpendiculaire à la trace OM du plan méridien (art. **190**).

La tangente Tg peut être considérée comme l'ombre d'une tangente quelconque de la surface en M; elle est parallèle à la tangente MJ du parallèle. L'ombre O_1T du rayon horizontal OM est perpendiculaire à la tangente Tg, car le rayon OM et son ombre O_1T sont parallèles; par conséquent *les normales à la courbe d'ombre portée d'une surface de révolution sur un plan horizontal sont les ombres des horizontales qui joignent les points de la courbe d'ombre propre à l'axe vertical de la surface.*

On voit qu'il est très-facile de construire les tangentes de la courbe d'ombre portée, tandis que nous n'avons encore exposé aucun procédé pour tracer les tangentes à la courbe d'ombre propre. La construction qui sur la figure fait trouver la tangente αM de la courbe au point M ne sera expliquée que dans la troisième Partie de cet Ouvrage (art. **878**).

Les droites SU et SV qui passent par le point S, et touchent le contour apparent de la surface sur le plan horizontal, forment le contour apparent du cône d'ombre, et sont par conséquent tangentes à la courbe d'ombre portée aux points v et u qui correspondent à V et U.

IIe Exercice. — *Rayons divergents. — Points lumineux dans le plan méridien de front.* (*Fig.* 213.)

551. Le plan vertical de projection étant parallèle au plan méridien qui contient le point lumineux (S, S'), les deux points M et M_1 d'un parallèle qui appartiennent à la ligne d'ombre ont une même projection verticale M', et la courbe, sur le plan vertical, s'arrête aux points Q' et q' où elle rencontre le méridien principal; elle est prolongée par une partie parasite que les constructions exposées aux articles précédents ne font pas connaître, parce que ses points ne correspondent pas à des points de la projection horizontale de la courbe. Pour déterminer cette partie, nous allons chercher un tracé qui donne les points de la projection verticale directement, sans faire intervenir la projection horizontale.

Les triangles rectangles OSμ et OMF sont semblables, et par suite nous avons

$$O\mu : OS :: OF : OM$$

ou bien

$$O''\lambda' : O''S' :: O'M' : O'm'.$$

Ainsi les droites $O''O'$, $\lambda'M'$ et $S'm'$ partagent en parties proportionnelles les horizontales $O''S'$ et $O'm'$, et par conséquent convergent vers un même point M''. D'après cela, pour obtenir le point M' situé sur l'horizontale m'_1m', on peut tracer la tangente $m'\lambda'$, puis la sécante $S'm'$, et joindre par une droite les points λ' et M'' où elles rencontrent, l'une l'horizontale du point S', et l'autre l'axe. On trouverait le même point M' en opérant sur la tangente $m'_1\lambda'_1$ de la méridienne inverse, ainsi qu'il est indiqué sur la figure.

Cette construction fait trouver un point sur la trace verticale du plan de chaque parallèle. Quand la trace considérée passe entre les points Q' et q', le point est en dedans du contour apparent; dans le cas contraire, le point tel que B' est en dehors de ce contour, et par conséquent parasite.

552. La construction montre que la droite A'_1A' rencontre la projection de la ligne d'ombre en un point situé à l'infini. Sa parallèle $b'B'$ passe par ce point; si elle se transporte parallèlement à elle-même jusqu'à coïncider avec A'_1A', le point B' ira rejoindre celui que nous considérons à l'infini. La droite A'_1A' est donc asymptote de la courbe $M'q'B'$ (art. **92**); la droite A''_1A'' l'est également.

La courbe paraît s'arrêter à l'infini, mais cela tient à ce que nous ne nous sommes occupé que de la surface engendrée par la révolution du demi-cercle $A'm'A''$. Si nous avions étendu les constructions à la surface complète, ayant pour méridienne un cercle entier, nous aurions trouvé que la projection verticale de la ligne d'ombre se compose de deux parties qui se rejoignent à l'infini (art. **182**, **185**). Ces parties correspondent à deux branches généralement distinctes, mais qui se réunissent quand le point lumineux est dans le plan du parallèle supérieur ou dans celui du parallèle inférieur. Nous donnerons plus loin quelques indications sur ce cas particulier (art. **879**).

553. Si nous voulons construire la courbe par la méthode de l'article **546**, pour avoir les points M et N situés dans un plan méridien Oμ, il faudra ramener le point μ en λ, le relever ensuite en λ', et mener de ce point des tangentes à la méridienne : les points de contact m' et n' feront connaître les parallèles sur lesquels sont les points cherchés. Il y en a deux, parce que le point λ' est extérieur à la méridienne; s'il était en γ' sur cette courbe, les points m' et n' se confondraient en ce point, et le plan méridien ne contiendrait de la ligne d'ombre qu'un seul point situé sur le parallèle qui est à la hauteur du point lumineux. On voit d'après cela que, si l'on projette γ' en γ, et qu'on ramène γ en C et en C_1 sur le cercle OS, les points C et C_1 appartiendront à la courbe d'ombre, et que les droites OC et OC_1 seront les traces des plans méridiens qui la touchent.

554. Il est facile de reconnaître que, si le point lumineux était dans le plan horizontal $E'e'$ qui contient le cercle décrit par le centre de la méridienne, la projection horizontale de la courbe d'ombre aurait des parties parasites. On détermine facilement ces parties quand la méridienne est un cercle, ou une conique ayant l'un de ses axes parallèle à l'axe de révolution. Nous ne nous arrêterons pas à cette question. On peut remarquer que la construction que nous avons donnée pour les arcs parasites sur le plan vertical est toujours applicable, quelle que soit la méridienne.

555. Les rayons (SQ, S'Q') et (Sq, S'q') sont parallèles au plan vertical, et par suite l'ombre portée sur ce plan a deux branches infinies. Les asymptotes sont les droites S'Q' et S'q', traces, sur le plan de la courbe d'ombre portée, des plans tangents au cône le long des génératrices qui lui sont parallèles.

Le plan vertical SD_1 étant tangent au cône d'ombre, sa trace verticale $\delta\delta'$ touche la courbe d'ombre portée sur le plan vertical de projection, au point δ', ombre de (D, D').

III[e] EXERCICE. — *Rayons parallèles dans une direction quelconque.* (*Fig.* 215.)

556. Les données sont l'axe (O, O'''Z) de la surface, la méridienne $m'_1 a' m' b'$, qui est symétrique par rapport à cette droite, et la direction (R, R') des rayons de lumière.

Premier procédé : cônes circonscrits. — Considérons un parallèle (MNm, M'N'm') choisi arbitrairement, et traçons la tangente $m'z$ de la méridienne à l'un des points où il la rencontre : le cône engendré par la révolution de cette ligne autour de l'axe touche la surface aux différents points du parallèle (Mm, M'm') (art. **545**); par conséquent, si l'on construit les plans qui sont tangents à ce cône et parallèles à la droite (R, R'), les points où les génératrices de contact rencontreront le parallèle appartiendront à la courbe d'ombre.

Pour plusieurs des parallèles que l'on devra successivement considérer, le sommet du cône sera hors du cadre de l'épure. On lève cette difficulté, et l'on simplifie la construction en abaissant ou en élevant le cône, de manière que son sommet arrive à un point fixe (O, O'), choisi arbitrairement sur l'axe. La génératrice (Om, zm') prend la position (Oμ_1, O'μ'_1) et le cercle $\mu_1 \nu \mu$ est la trace horizontale du cône transporté.

Par le point (O, O'), nous menons une droite $(Or, O'r')$ parallèle à (R, R') : les plans qui contiennent cette droite, et qui sont tangents au cône, ont pour traces les tangentes $r\mu$ et $r\nu$ du cercle $\mu_1\nu\mu$ (art. **151**). Les génératrices de contact sont projetées sur les lignes $O\mu$ et $O\nu$. En relevant le cône jusqu'à sa première position, les projections horizontales de ces génératrices ne changent pas, et les plans tangents transportés parallèlement à eux-mêmes sont encore parallèles aux rayons de lumière. Les points M et N où les génératrices $O\mu$ et $O\nu$ rencontrent le parallèle considéré appartiennent alors à la projection horizontale de la courbe de contact : nous les relevons en M' et N'. Ils sont vus sur les deux projections, parce qu'ils se trouvent en avant du méridien principal xy et sur la partie supérieure du solide de révolution.

Un cercle décrit sur Or comme diamètre fait connaître, sur la trace de chaque cône, la position précise des points de contact μ et ν, et dispense de tracer les tangentes $r\mu$ et $r\nu$.

557. La méridienne de la surface prise pour exemple a un centre O'' situé sur l'axe. Il en résulte que les tangentes du méridien en deux points opposés m' et m'_1 sont parallèles, et que les deux cônes circonscrits le long des parallèles de ces points se confondent lorsqu'ils sont ramenés à avoir leur sommet en O'. On trouve ainsi sur le plan horizontal les mêmes génératrices de contact, et les parallèles sont aussi projetés sur un même cercle; mais, comme celui du point m'_1 est sur la nappe supérieure du cône circonscrit, il faut prolonger les génératrices au delà du sommet O jusqu'aux points M_1 et N_1, qui doivent être ensuite relevés en M'_1 et N'_1.

558. Nous avons trouvé deux points sur le parallèle $(Mm, M'm')$, parce que le point r est extérieur à la trace $\mu_1\nu\mu$ du cône auxiliaire transporté. Si ce cercle passait par le point r, les points M et N seraient réunis, et le parallèle toucherait la courbe d'ombre. D'après cela, pour déterminer les parallèles tangents à cette courbe, il suffit de ramener le point r en r_1 par un arc de cercle décrit du point O comme centre, de le projeter en r'_1, et de mener à la méridienne des tangentes parallèles à $O'r'_1$: les points de contact a' et b' appartiennent aux parallèles cherchés. On obtient ensuite sans difficulté les points (A, A') et (B, B') situés sur ces cercles : l'un est le plus haut et l'autre le plus bas.

On voit d'ailleurs, par la construction même, que les points de la courbe d'ombre sont deux à deux sur des cordes horizontales perpendiculaires au plan vertical rO, et divisées par lui en deux parties égales.

559. Le cône auxiliaire devient un cylindre vertical pour le parallèle $F'H'$ qui forme le contour apparent de la surface sur le plan horizontal. La trace horizontale FH du cylindre est la projection du parallèle, et les traces des plans tangents parallèles aux rayons de lumière sont les tangentes de ce cercle parallèles à R. On obtient leurs points de contact G et E en traçant par le centre O une perpendiculaire GE à Or. Ces points sont, sur le plan horizontal, les extrémités de l'arc vu de la courbe d'ombre.

360. *Deuxième procédé : cylindres circonscrits.* — Au lieu de se donner des parallèles, on peut choisir les méridiens; la même construction, faite en ordre inverse, résout le problème. Si l'on considère le méridien M_1OM, son point de rencontre μ avec le cercle Or sera ramené en μ_1, puis relevé en μ'_1; on mènera ensuite à la méridienne des tangentes parallèles à $O'\mu'_1$, et leurs points de contact m' et m'_1 détermineront les deux parallèles qui passent par les points de la courbe situés dans le méridien donné.

Cette construction est suffisamment établie par les raisonnements de l'article **356**, car, lorsqu'elle est terminée, on peut supposer que ce sont les parallèles qui ont été donnés; mais il est facile de la démontrer directement.

361. Les tangentes des parallèles aux points où ils coupent le plan MOM_1 forment un cylindre perpendiculaire à ce plan et circonscrit à la surface de révolution le long du méridien. Le problème peut donc être ramené à la construction de plans tangents à un cylindre et parallèles à une droite, question traitée à l'article **129**. Nous allons reproduire la solution, en ayant égard à la manière dont les données sont disposées.

La ligne $r\mu$, perpendiculaire à MM_1, est parallèle aux génératrices du cylindre. La droite qui va du point μ au point (O, O') est parallèle aux traces des plans tangents cherchés sur le plan méridien considéré. Si par une rotation autour de l'axe nous ramenons ce plan à être parallèle au plan vertical, le point μ arrivera en μ_1, et la droite dont nous parlons sera projetée sur $O'\mu'_1$. Les traces des plans tangents seront donc les tangentes $m'z$ et m'_1z_1 parallèles à $O'\mu'_1$. Les points de contact (m, m'), (m_1, m'_1), ramenés dans le plan méridien considéré, sont les points cherchés.

On pourra mener à la méridienne principale $F'O^{v}H'O^{iv}$ deux tangentes parallèles à la droite $O'\mu'_1$, quelle qu'en soit la direction, et par conséquent la courbe d'ombre de la surface considérée a deux points dans chaque plan méridien.

Aux points de la courbe situés sur le méridien de front, les plans tangents sont perpendiculaires au plan vertical. Leurs traces verticales sont donc les tangentes de la méridienne parallèles à la projection R' du rayon de lumière. Les points de contact C' et D' de ces droites sont, sur le plan vertical, les extrémités de l'arc vu de la ligne d'ombre.

362. *Troisième procédé : sphères inscrites.* — Considérons un parallèle $(mM, m'M')$, et traçons à la méridienne la normale $m'i$: la sphère qui aurait son centre au point i, où cette droite rencontre l'axe, et im' pour rayon, serait tangente à la surface tout le long du parallèle. Les points de rencontre de ce cercle avec la ligne d'ombre de la sphère appartiendront donc à la courbe que nous cherchons.

La courbe d'ombre de la sphère est un grand cercle situé dans un plan perpendiculaire aux rayons. Par conséquent, si nous faisons tourner tout le système autour de l'axe, de manière que la droite $(Or, O'r')$ prenne la position $(Or_1, O'r'_1)$ parallèle au plan vertical, la ligne d'ombre de la sphère se projettera sur une droite passant par le centre i, et perpendiculaire à $O'r'_1$. Nous n'avons tracé de cette droite que le segment $i\varepsilon'$, utile à la construction. Le point ε' est la projection de deux points de contact qui appartiennent au parallèle commun à la surface de révolution et à la sphère. La projection horizontale ε de ce point doit être ramenée dans sa véritable position e; la droite MeN perpendiculaire à Or est alors la projection horizontale de la ligne qui se projetait verticalement en ε'. Elle détermine les points M et N sur le parallèle considéré $m_1 m$.

563. Si l'on trace la droite $m'k$ parallèle à $O'r'_1$, et par le point k une ligne parallèle à la tangente $m'z$, cette droite coupera la projection $m'M'$ du parallèle au point ε', car les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle $m'ik$ sur les côtés opposés se rencontrent en un même point ε'. Cette construction, n'exigeant que des parallèles, est un peu plus facile que la précédente, dans laquelle il faut abaisser des perpendiculaires.

564. La construction fait trouver un point ε' sur toute droite $M'm'$ trace du plan d'un parallèle, mais quelquefois elle le donne en dehors de la méridienne de front, et alors le point e n'est pas dans l'intérieur du parallèle, et ne correspond à aucun point de la surface.

Le point ε' est la projection d'un point de la courbe d'ombre pour des rayons parallèles à $(Or_1, O'r'_1)$. Lorsqu'il est en dehors du contour apparent de la surface, il appartient à la partie parasite que la courbe doit avoir sur le plan vertical, lorsque les rayons sont parallèles à ce plan (art. **551**). Nous avons donc un moyen facile de déterminer les points parasites.

En appliquant les raisonnements de l'article **552**, on voit que la courbe lieu des points ε' a en général pour asymptotes les tangentes horizontales de la méridienne; mais quand les points O^{IV} et O^{V}, où les tangentes sont horizontales, se trouvent sur l'axe même, la construction n'indique plus sur ces droites des points à l'infini. Dans ce cas, si la méridienne est une courbe graphique, le lieu des points ε' s'arrête brusquement aux horizontales des points O^{IV} et O^{V} (¹).

565. On peut employer le procédé des sphères inscrites dans le cas des rayons divergents, mais alors, pour déterminer le cercle d'ombre de chaque sphère considérée, il faut tracer le grand cercle situé dans le plan méridien principal, et lui mener des tangentes du point lumineux ramené dans ce plan par une rotation. Cette construction peut être employée comme exercice graphique.

(¹) Le lecteur qui voudrait avoir des détails plus étendus sur les arcs parasites des projections des courbes d'ombre des surfaces de révolution pourrait consulter le Mémoire que nous avons publié dans le XXXVᵉ cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (1853).

566. La surface (FH, F′H′) (*fig.* 215) est un ellipsoïde, et par conséquent sa ligne d'ombre est une courbe plane([1]), une ellipse. Les axes de sa projection horizontale sont AB et GE. Les droites A′O″B′ et G′O″E′ sont des diamètres conjugués de la projection verticale.

Si l'on fait tourner tout le système autour de l'axe, jusqu'à ce que la droite (Or, $O'r'$) soit de front, les points A′ et B′ iront en a' et b', et la courbe d'ombre se projettera sur le diamètre $a'O''b'$ conjugué avec la direction des tangentes en a' et en b', qui est celle du rayon $O'r'_1$. Ce diamètre passe nécessairement par le point ε'.

567. On peut déduire des constructions précédentes un moyen pour tracer la tangente en un point donné m' d'une ellipse dont on connaît un axe $O''Z$, un diamètre $a'b'$ et une droite $O'r'_1$ parallèle au diamètre conjugué de $a'b'$. Si, en effet, on trace les lignes $m'k$ et $m'\varepsilon'$, l'une parallèle à $O'r'_1$, l'autre perpendiculaire à $O''Z$, la droite déterminée par les points de rencontre ε' et k sera parallèle à la tangente en m'.

Pour déterminer sur une ellipse les points où la tangente est parallèle à une droite donnée, on tracera à une distance arbitraire une droite $\varepsilon'k$ parallèle à cette tangente (*fig.* 215 ou 258), et par les points k et ε', où elle rencontre l'un des axes et un diamètre quelconque $a'b'$, on tracera les droites km' et $\varepsilon'm'$ respectivement parallèles au diamètre conjugué de $a'b'$ et au second axe. Si le sommet m' du triangle $\varepsilon'km'$ est sur l'ellipse, il sera l'un des deux points cherchés; dans tous les cas, il déterminera un diamètre $O''m'$ qui passera par ces points, car O'' est évidemment un centre de similitude de tous les triangles ainsi formés ([2]).

568. *Transformation qu'éprouve la ligne d'ombre d'une surface de révolution éclairée par des rayons parallèles, lorsque l'on considère la surface engendrée par la méridienne transportée dans son plan parallèlement à elle-même.* — Supposons maintenant que la méridienne ait été éloignée de l'axe par un mouvement de translation dirigé perpendiculairement à cette droite, et considérons la surface qu'elle engendre dans sa révolution.

Si l'on transporte la première surface de manière que son méridien (FH, F′O^IV H′)

([1]) Il sera démontré dans le Livre VII, à l'occasion de l'hyperboloïde, que les lignes d'ombre des surfaces du second ordre sont des courbes planes (art. 716).

([2]) Il est facile de voir que l'on peut remplacer les axes par un second système de diamètres conjugués : on établit d'abord le théorème pour le cercle, puis on l'étend à l'ellipse en faisant une projection. La construction, étant démontrée pour l'ellipse, et ne s'appuyant que sur des lignes et des points qui subsistent dans l'hyperbole, s'applique naturellement à cette courbe.

Pour démontrer la construction dans le cas du cercle, il suffit de remarquer que sur une figure faite pour cette courbe les droites km' et $\varepsilon'm'$ (*fig.* 258) seraient respectivement perpendiculaires aux diamètres $a'b'$ et $O''k$ comme étant parallèles aux diamètres qui leur sont conjugués, et que, les trois hauteurs du triangle $O''\varepsilon'k$ devant se couper en un même point, le diamètre $O''m'$ serait perpendiculaire à $\varepsilon'k$.

aille coïncider avec le méridien ($F_1H_1, F'_1\omega'H'_1$) de la seconde, les deux surfaces seront tangentes le long de cette ligne. Comme d'ailleurs les rayons de lumière sont parallèles, la ligne d'ombre de la surface transportée ne sera pas modifiée. Les points C_1 et D_1, nouvelles positions des points C et D, appartiendront donc à la projection horizontale de la ligne d'ombre de la seconde surface. Cette courbe a sur la droite xy deux autres points correspondant à la méridienne transportée en sens inverse, et dont un seul, C_2, a pu être placé sur la figure. On opérera de la même manière pour un méridien quelconque OO_1; chaque point de l'ancienne ligne d'ombre sur le plan horizontal sera ainsi transporté, d'un côté comme de l'autre, de la longueur constante $O\omega$ dont tous les points de la méridienne ont été déplacés.

La projection horizontale $\delta\psi\ldots, \gamma\varphi\ldots$ étant déterminée, on obtient facilement la projection verticale $\delta'\psi'\ldots, \gamma'\varphi'\ldots$.

La construction que nous venons d'exposer permet de tracer rapidement, dans le cas de rayons parallèles, les lignes d'ombre des surfaces engendrées par la révolution d'une courbe du deuxième degré autour d'une droite située dans son plan et parallèle à l'un de ses axes. Tout le tracé sur le plan horizontal se réduit alors à construire une section conique et à transformer cette courbe en augmentant tous les rayons vecteurs d'une quantité constante (¹).

569. Nous allons rechercher comment on peut obtenir les tangentes de la nouvelle ligne d'ombre lorsque l'on connaît celles de la première courbe GE.

Soient Om et On (*fig.* 216) les rayons vecteurs de deux points m et n d'une courbe, et mg un arc de cercle dont le centre est à l'origine O. Si l'angle mOn est assez petit pour que le triangle mgn puisse être considéré comme rectiligne, on aura

$$\operatorname{tang}\widehat{gmn} = \frac{\overline{gn}}{\overline{Om} \times \widehat{nOm}}.$$

Supposons maintenant que l'on augmente les rayons vecteurs de tous les points de la courbe considérée d'une longueur mM constante, mais d'ailleurs arbitraire; le triangle gmn deviendra GMN, et l'on pourra écrire

$$\operatorname{tang}\mathrm{GMN} = \frac{\overline{\mathrm{GN}}}{\overline{\mathrm{OM}} \times \widehat{\mathrm{NOM}}} = \frac{gn}{\mathrm{OM} \times \widehat{nOm}}.$$

Les tangentes trigonométriques des angles gmn et GMN sont donc inversement proportionnelles aux rayons vecteurs Om et OM.

(¹) Cette construction a été donnée par M. Dunesme (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 2ᵉ semestre de 1857).

Maintenant, traçons mK et OK respectivement perpendiculaires à mn et Om, et joignons KM : les tangentes trigonométriques des angles $\widehat{KmO}$ et $\widehat{KMO}$ sont inversement proportionnelles aux rayons vecteurs Om et OM, mais $\widehat{KmO}$ est égal à $\widehat{gmn}$ comme formé par des perpendiculaires ; donc $\widehat{KMO}$ est égal à $\widehat{GMN}$, et KM est perpendiculaire à MN.

Les droites indéfinies mn et MN sont, à la limite, tangentes aux courbes; les lignes mK et MK sont donc normales, et par conséquent on peut exprimer le résultat auquel nous sommes arrivé en disant que *les sous-normales de la transformée sont égales à celles de la courbe primitive*.

D'après cela, si l'on élève des normales à l'ellipse GE (*fig.* 215) en des points α et β, les points ρ et σ où ces droites seront coupées par le diamètre perpendiculaire à $\alpha\beta$ seront sur les normales de la transformée aux points homologues α_1 et β_1 [1].

IV^e^ Exercice. — *Rayons parallèles ayant leurs projections inclinées à 45° sur la ligne de terre. — Méthode des projections obliques.* (*Fig.* 217.)

570. Une méthode assez commode, et souvent employée pour déterminer les lignes d'ombre des surfaces, consiste à choisir un certain nombre de génératrices convenablement espacées, et à déterminer leurs ombres sur un plan. Pour une surface de révolution, on prend des parallèles; l'ombre de chacun d'eux sur un plan perpendiculaire à l'axe est un cercle de même grandeur.

571. Considérons un vase ayant la forme du solide de révolution représenté sur la *fig.* 217; nous déterminons facilement sur le plan horizontal les ombres du carré supérieur du socle et de différents parallèles. Nous avons fait cette construction sur la figure spéciale 218, en supposant le vase éloigné du plan vertical.

L'ensemble des cercles de cette figure fait connaître avec exactitude le périmètre de l'ombre que projetteraient sur le sol des disques minces qui occuperaient la position des parallèles, et d'une manière approximative la ligne de l'ombre portée par la surface de révolution.

Cette courbe doit être tangente à tous les cercles, car en considérant les ombres sur le sol comme des projections obliques, nous pouvons leur appliquer les raisonnements que nous avons faits à l'article **149** pour les contours apparents : en un point de la courbe d'ombre propre, le plan tangent est parallèle aux rayons de lumière, et par conséquent il projette obliquement sur sa trace toutes les lignes

---

[1] Cette construction est celle que l'on emploie pour les tangentes des conchoïdes. On la rattache généralement à la méthode de M. Chasles pour les normales à la courbe décrite par un point d'une figure de forme invariable (*Aperçu historique*, p. 548); mais nous avons dû présenter une démonstration plus élémentaire.

qu'il contient, et notamment la tangente du parallèle et la tangente de la courbe.

On voit, d'après cela, que l'on peut tracer la ligne ij par la condition de toucher tous les cercles, et qu'ensuite, pour construire la ligne d'ombre propre IJ, il suffit de relever chaque point de contact sur le parallèle correspondant par une droite parallèle aux rayons de lumière. Le point m fait ainsi trouver le point M'.

372. Pour déterminer l'ombre portée par le cercle A''B'' sur la partie supérieure du vase, nous cherchons les points où son ombre a_1 b_1 sur le plan horizontal coupe les ombres des différents parallèles (*fig.* 218). Le rayon qui passe par l'un de ces points, tel que u, rencontre le cercle A''B'' (*fig.* 217) et le parallèle qui a son centre en O'; son intersection N' avec cette ligne est donc un point de la courbe d'ombre portée.

On obtient de la même manière l'ombre portée sur la partie inférieure du vase.

373. On détermine l'ombre portée sur le plan vertical, soit en cherchant la trace du cylindre oblique qui a pour directrice la ligne d'ombre propre déjà obtenue sur la surface du vase, soit en construisant les ombres de quelques parallèles, comme il a été fait pour le plan horizontal. Ces lignes sont des ellipses dont on obtient deux diamètres conjugués en cherchant les ombres de deux diamètres rectangulaires du parallèle.

Pour le cercle (AB, A'B') nous prenons les deux diamètres (AB, A'B') et (CD, C') : leurs ombres sont l'horizontale ab et la droite cd parallèle à R'. Les projections du rayon sont inclinées à 45° sur la ligne de terre, et, par suite, le triangle aod formé par les demi-diamètres conjugués est isoscèle et rectangle. Cette disposition simplifie la construction expliquée à l'article **155** pour la détermination des axes. Nous l'avons faite à une échelle double sur la *fig.* 219 : les axes gh et ef (*fig.* 217) sont parallèles aux droites og et oq (*fig.* 219) et égaux aux segments dq et dp.

374. On suppose généralement dans le dessin géométral que les rayons sont parallèles à une droite (R, R') dont les projections sont inclinées à 45° sur la ligne de terre. Il en résulte quelques simplifications dans les tracés, comme nous venons de le reconnaître, et d'ailleurs cette direction de la lumière est très-convenable pour bien faire ressortir la forme des objets.

375. Les ombres des divers parallèles sur le plan vertical sont des ellipses semblables et semblablement placées, ou *homothétiques*. Les diamètres, dont les ombres sont les grands axes des ellipses, se projettent tous horizontalement sur une certaine droite OG (*fig.* 217 ou 219). On peut obtenir un point de cette ligne en ramenant le point g en G sur le cercle AB; mais nous allons voir qu'il est facile de la déterminer directement.

Nous traçons la tangente GT du cercle et l'ordonnée GN, et nous déterminons leurs ombres gt et gn (*fig.* 219). La droite gn, ombre d'une perpendiculaire au plan vertical, est inclinée à 45° sur la ligne de terre : la hauteur gL du triangle *got* est donc égale au segment Ln, et par suite à G_1N_1 et à la hauteur GN du triangle GOT; les bases *to* et TO de ces triangles sont aussi évidemment égales; l'angle g du premier est droit comme l'angle G du second, car la droite tg, ombre de la tangente TG, touche l'ellipse au sommet g; les deux triangles sont par conséquent égaux. On voit d'ailleurs que le sommet o le plus éloigné du pied L de la hauteur gL est homologue de T. L'angle GOD, égal à GTO, est donc aussi égal à l'angle *goa*. En résumé, *le diamètre du cercle dont l'ombre est le grand axe de l'ellipse fait avec une perpendiculaire au plan vertical le même angle que ce grand axe avec la ligne de terre.*

376. La méthode que nous avons employée dans cet exercice permet de ramener la détermination de l'ombre d'un corps à la construction des ombres d'un certain nombre des génératrices de sa surface, ce qui est généralement facile.

On peut recevoir les ombres sur un plan auxiliaire, si pour les tracés les plans coordonnés ne sont pas bien disposés par rapport au corps.

Trait ressenti.

377. Très-souvent dans le dessin géométral, au lieu de déterminer les ombres, on se contente d'indiquer par un trait plus prononcé, que l'on appelle *trait ressenti* ou *trait de force*, les arêtes qui séparent les faces éclairées de celles qui sont obscures, les rayons de lumière ayant d'ailleurs la direction que nous avons indiquée à l'article **374**.

Cette convention permet de distinguer à la première vue, sur une projection, les positions relatives des diverses parties. Il n'y a pas un accord complet entre les dessinateurs pour le tracé des corps arrondis; quelques-uns mettent un trait ressenti au contour apparent, du côté opposé à celui d'où vient la lumière; mais alors un cylindre est représenté comme un prisme, et la seconde projection seule fait comprendre sa forme.

CHAPITRE II.

OMBRES SUR LES FIGURES AXONOMÉTRIQUES ET CAVALIÈRES.

Considérations générales.

378. Quand on veut résoudre des problèmes sur des figures axonométriques et cavalières, on représente les points et les lignes par leur perspective et par la perspective de leur projection sur un plan horizontal. Ainsi sur la figure cavalière 184, le sommet de la pyramide est déterminé par sa perspective I, et par la perspective I_1 de sa projection sur le plan horizontal de la base. On peut, de cette manière, représenter les points et les lignes sans indétermination, si toutefois les éléments de la perspective sont connus, c'est-à-dire si l'on a la direction des axes de la figure axonométrique, ou la direction des lignes fuyantes, et le rapport de réduction de la figure cavalière.

Les traits de ces deux perspectives diffèrent peu ; les exercices d'ombre que nous allons présenter en feront connaître les principes.

Nous adopterons une notation analogue à celle qui est employée pour les figures géométrales. Ainsi nous dirons que le point (I, I_1) est le sommet de la pyramide représentée sur la *fig.* 184.

Polyèdres.

I^er^ Exercice. — *Ombres d'un prisme et d'une pyramide représentés par une perspective cavalière. — Rayons parallèles.* (*Fig.* 184.)

379. La *figure* 184 représente en perspective cavalière le prisme et la pyramide des *figures* géométrales 183. Les lignes perpendiculaires aux plans de front sont, en perspective, parallèles à la droite ef, et leurs longueurs mesurées à partir de l'axe xy sont réduites à moitié. Les perspectives des rayons de lumière et de leurs projections horizontales sont parallèles aux droites Ss, S_1s_1 perspectives des lignes $(Ss, S's')$ et Ss de la *fig.* 183 (¹). Enfin la ligne XY est la trace sur le sol du parement d'un mur qui reçoit l'ombre de la pyramide.

Les plans d'ombre des arêtes B_1B et D_1D ont pour traces horizontales les droites B_1p et D_1r parallèles à S_1s_1. Le plan d'ombre de l'arête C_1C coupe la droite EG, la projection EI_1 de l'arête EI, et cette arête elle-même, aux points q, k_1 et k. L'intersection de ce plan d'ombre avec le plan EIG est donc qk. Les traces, sur cette face, des plans d'ombre des arêtes B_1B et D_1D sont les lignes pb et rd parallèles à qk : leurs extrémités b et d sont sur les perspectives des rayons qui passent par les points B et D. On détermine de la même manière l'ombre c du sommet (C, C_1).

380. Les perspectives du rayon de lumière qui passe par le sommet de la pyramide et de sa projection sont les droites Ii et I_1i respectivement parallèles à Ss et à S_1s_1. La trace horizontale de ce rayon est au point i où ces deux lignes se rencontrent. Sa trace sur le plan vertical XY est au point j de la verticale j_1j. Les points i et j étant obtenus, on établit sans difficulté les lignes de l'ombre portée par la pyramide.

On peut remarquer que le rapport de réduction et la direction ef des lignes fuyantes ne nous ont été d'aucune utilité pour la détermination des ombres.

(¹) La construction pour déterminer Ss et S_1s_1 est analogue à celle qui est expliquée à l'art. 392 pour un cas plus difficile.

IIe EXERCICE. — *Ombres d'un perron représenté par une perspective cavalière. — Rayons parallèles.* (*Fig.* 186.)

381. Nous allons traiter sur une figure cavalière le problème que nous avons déjà résolu, sur des figures géométrales, à l'article **324**.

L'ombre de l'arête verticale D_1D sur le plan horizontal du sol est une droite D_1d parallèle à la projection S_1s_1 du rayon de lumière; elle se termine au point d sur le rayon qui passe en D. Le plan d'ombre de la droite horizontale DKA_2 coupe le sol suivant une ligne do qui lui est parallèle, et le plan vertical du parement du mur suivant la droite qui passe par les points A_2 et o. Le point k limite du segment utile est sur le rayon du point K : on peut l'obtenir directement en le relevant de sa projection k_1. On construit de cette même manière l'ombre r du point R. Les lignes Ar et A_2o doivent être parallèles comme étant les ombres sur un même plan des droites parallèles RA et DA_2.

La ligne brisée $Ggg'j$ est l'ombre de GH; le segment gg' est parallèle à cette droite, et les deux autres à Ar. L'extrémité j se trouve sur le rayon du point H.

L'ombre de l'arête FH sur le plan de la marche supérieure est déterminée par le point F et par le point h, ombre de H et intersection du rayon Hj avec sa projection H_1j_1 : la partie uv est seule utile. L'ombre it de la même arête sur la marche précédente passe par l'ombre h_1 du point H sur ce plan, et est parallèle à Fh. Les droites jv, ut et iq, ombres de l'arête FH sur des plans de front, sont parallèles à rk.

Au-delà du point q situé sur le rayon du point F, nous avons l'ombre de l'arête FB formée de deux segments qp_1 et p_1p respectivement parallèles à Ar et à FB, et l'ombre de BB_1 formée de droites alternativement parallèles à Ss et à BB_1.

Cylindre, cône, sphère.

Ier EXERCICE. — *Ombres d'un perron représenté par une perspective isométrique. — Rayons parallèles.* — (*Pl. VIII.*)

382. La *fig.* 199 est une perspective isométrique, et par conséquent les lignes A_1B_1 et B_1k_1, qui représentent des droites parallèles aux directions principales horizontales, font des angles de 60° avec une verticale telle que B_1B. Les demi-cercles des marches sont projetés sur des moitiés d'ellipses isométriques : les demi-axes de la première sont les droites cg et ch, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle à B_1B. Leurs longueurs ont été prises sur les échelles (*fig.* 200), ainsi qu'il est expliqué à l'article **309**.

Le demi-cercle de tête est représenté par la moitié ANB d'une ellipse isométrique. La droite ACB est l'un des deux diamètres isométriques; l'autre, qui n'a pas été tracé, est vertical. La droite CL, perpendiculaire à la direction isométrique CC′, est la moitié du grand axe (art. **309**).

Les rayons de lumière sont parallèles à la droite R, et leurs projections horizontales, à la droite R_1.

383. Les droites A_1a_1 et Aa, respectivement parallèles à R_1 et à R, font trouver l'ombre A_1a_1a de l'arête A_1A sur le plan horizontal de la marche supérieure, et sur le plan vertical dont la trace est k_1a_1.

Ce plan étant parallèle au plan de tête, tous les rayons de lumière Aa, Ee, ... ont la même longueur entre la courbe de tête et son ombre. Les deux lignes AEK et *aek* sont identiques : ce sont des projections sur un même plan des intersections d'un cylindre par deux plans parallèles.

Pour avoir la position précise du point k où la courbe d'ombre rencontre l'arête verticale, on trace k_1K_1 parallèlement à R_1, et relevant le point K_1 sur la courbe de tête, on obtient le point K dont l'ombre est le point cherché.

384. L'ombre de la courbe de tête sur l'intrados (¹) de la voûte est l'intersection de deux cylindres du second degré qui ont une directrice plane commune, la courbe ANB; nous concluons de là que la ligne d'ombre est plane (art. **252**, 1°); c'est une ellipse, mais nous la construirons sans avoir égard à ses propriétés spéciales, et par la méthode générale que nous avons fait connaître pour les intersections des surfaces cylindriques (art. **223**).

En menant du point a_1 des droites a_1F et $a_1\varphi$ respectivement parallèles à R et à k_1B_1, on détermine, sur le plan de tête, la trace $F\varphi$ du plan passant par le point a_1 et parallèle aux droites R et k_1B_1 qui déterminent les directions des génératrices des deux cylindres.

Une sécante NN′, parallèle à $F\varphi$, peut être considérée comme la trace d'un plan sécant auxiliaire. Par conséquent, le rayon de lumière qui passe par le point N rencontre la génératrice de l'intrados qui aboutit en N′. On détermine ainsi un point n de la courbe de l'ombre portée.

Les traces, sur le plan de tête, des plans tangents aux deux cylindres sont les tangentes Nt et $N't$: leur intersection t appartient à la tangente nt de la courbe d'ombre au point n.

Lorsque les points N et N′ se réunissent, le triangle $NN'n$ se réduit à un point; l'extrémité de l'arc utile se trouve donc au point où la tangente à la courbe ANB est parallèle à NN′ ou à $F\varphi$. Son origine est sur la génératrice de naissance Bu, au point u dont on obtient la position précise en menant par le point B une parallèle BU à $F\varphi$, et par le point U une droite Uu parallèle à R.

(¹) L'*intrados* d'une voûte en est la surface inférieure et concave. L'intrados de la porte que nous considérons est un cylindre qui a pour directrice la courbe de tête ANB, et dont les génératrices sont perpendiculaires au plan de tête. Les génératrices de naissance sont celles qui passent par les extrémités A et B de la courbe de tête.

585. La ligne uk est l'ombre de l'arc UK sur le plan du pied-droit. On l'obtient par la même construction, en regardant ce plan comme un cylindre qui a pour directrice la verticale B_1B, et dont les génératrices sont parallèles à B_1k_1. On pourrait aussi obtenir le point où un rayon rencontre le plan du pied-droit, en relevant l'intersection de sa projection horizontale avec B_1k_1.

586. En menant aux ellipses qui représentent les cercles inférieurs des cylindres des marches les tangentes $\alpha_1\gamma$ et $\beta_1\delta$ parallèles à R_1, on détermine les extrémités α_1 et β_1 des génératrices de séparation d'ombre et de lumière. Les droites $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$, parallèles à R, font connaître les extrémités γ et δ des ombres de ces génératrices.

On obtient l'ombre δ' d'un point β' de l'arête saillante d'une marche, sur le plan horizontal de la marche voisine, en portant sur la parallèle à R menée par le point β' une longueur égale à $\beta\delta$. Les arcs γx et $\delta\eta$ sont évidemment identiques à ceux dont ils sont les ombres.

587. Pour construire l'ombre de l'arête $\beta'\rho$ sur le plan de tête, par un point m de cette courbe nous faisons passer un plan parallèle aux rayons de lumière et à la droite B_1k_1; ses intersections avec le plan supérieur de la marche, le cylindre d'ombre et le plan de tête, sont les droites mm_1, $m\mu$ et $m_1\mu$, respectivement parallèles à B_1k_1, R et $F\varphi$. Le point μ, où se rencontrent les deux dernières, est l'ombre de m. L'ombre de la ligne $m\rho$ sur le plan de tête est l'arc $\rho\mu$; on obtiendrait deux diamètres conjugués de l'ellipse à laquelle il appartient, en déterminant les ombres des axes ou celles des diamètres isométriques de l'ellipse $\beta\beta'\rho$.

L'ombre γx rencontre en un point x l'arête $\beta\beta'\rho$. Le rayon de lumière qui passe à ce point rencontre l'arête $\alpha\varepsilon$ en un point y, et est l'intersection des cylindres d'ombre des deux arêtes. La courbe $\rho\mu$ n'est utile qu'à partir du point π où ce rayon la rencontre, jusqu'au point η où elle coupe la ligne de terre du mur. La courbe $\varepsilon\pi$ est l'ombre de l'arc εy.

588. *Étude des ellipses d'ombre.* — Nous avons vu comment on peut construire la courbe kpn; nous allons maintenant étudier les ellipses auxquelles appartiennent les deux arcs dont elle est formée, et voir quelles relations géométriques elles ont avec l'ellipse perspective de la courbe de tête.

Nous nous occuperons d'abord de l'ellipse d'ombre sur l'intrados de la voûte. La courbe de tête étant ANB (*fig.* 202), pour obtenir un point n, on trace une sécante NN' dans une direction donnée, puis deux droites Nn et N'n respectivement parallèles aux rayons de lumière et aux génératrices du berceau.

Si nous ne savions pas que le lieu des points n doit être une ellipse, quand la courbe ANB en est une, il serait facile de le reconnaître. Traçons le diamètre IJ qui passe par le milieu O de la corde NN', et joignons le point O au point n; ensuite par le centre C de la courbe ANB menons les droites MM' et mm' respectivement parallèles à NN' et à On, et concevons que les deux courbes soient rapportées l'une aux axes IJ et MM', l'autre aux axes IJ et mm' : deux points homologues N et n auront la même abscisse CO, et des ordonnées ON et on qui seront dans un rapport constant; les équations auront donc la même forme, ce qui prouve la proposition énoncée. Par la construction, les diamètres IJ et MM' sont conjugués dans la première ellipse : les diamètres IJ et mm' seront donc conjugués dans la deuxième.

Les tangentes aux points homologues N et n rencontrent l'axe IJ en un même point t.

389. Le quatrième sommet n' du parallélogramme $NnN'n'$ appartient à la courbe mn.

Si l'on mène à l'ellipse MNB une tangente VV' parallèle à $N'n$, cette droite sera le contour apparent du cylindre d'intrados; la seconde ellipse devra donc lui être tangente. On voit ainsi que le parallélogramme formé par les tangentes communes aux deux ellipses a ses côtés parallèles à ceux du parallélogramme $NnN'n'$.

390. Les relations qui existent entre les ellipses résultent uniquement de ce qu'elles ont un diamètre commun IJ; elles se coupent d'ailleurs en deux points autres que I et J, et le diamètre sur lequel ils se trouvent jouit, dans le système des courbes, des mêmes propriétés que IJ. Les deux ellipses sont donc reliées par une seconde suite de parallélogrammes ayant également leurs côtés parallèles aux tangentes communes, et dont les diagonales sont les cordes conjuguées au nouveau diamètre.

391. Occupons-nous maintenant de la courbe d'ombre sur le parement du pied-droit. La courbe de tête étant ANB (*fig.* 201), nous traçons dans une direction donnée une sécante PG qui coupe la tangente verticale BT au point P', et l'ellipse d'abord au point P, puis en un autre point très-voisin de P'. Par les points P et P' nous menons des droites respectivement parallèles à des lignes données : leur point d'intersection p appartient à la courbe. Les milieux G et g des cordes correspondantes des deux ellipses sont sur une droite parallèle à Pp.

Le mode de transformation est facile à saisir, et l'on voit que la nouvelle courbe st une ellipse comme la courbe donnée. Le diamètre SH conjugué aux cordes parallèles à PP' a pour homologue le diamètre sh conjugué à la direction pP'. Les ellipses ont deux tangentes communes parallèles à Pp.

Dans la transformation, les points de l'ellipse SH sont tous rapprochés de la tangente S'H', et par suite des deux côtés du point de contact B, la courbe sh se trouve entre la tangente et la courbe SH. Si les données étaient telles qu'un point P s'éloignât de la tangente en passant à sa nouvelle position, tous les points de la courbe primitive s'éloigneraient également de S'H', et près du point B, la transformée serait dans la concavité de la courbe SH. Enfin si la droite Pp était parallèle à S'H', tous les points de la courbe primitive seraient transportés parallèlement à cette ligne, et la transformée traverserait tangentiellement la courbe SH au point B; elle aurait, par conséquent, un contact du second ordre avec elle.

Ces résultats dépendent évidemment du mode de transformation, et nullement de la nature de la courbe.

IIe Exercice. — *Ombre d'une niche représentée par une perspective axonométrique. — Rayons parallèles.* (*Fig.* 208.)

592. Nous nous proposons de déterminer les ombres de la niche représentée sur la figure axonométrique 208 reproduite de la *Pl. XLIX* de la première Partie de ce Traité. Cette niche est la même que celle dont nous avons construit les ombres sur un plan et une élévation (art. **536-541**); nous la supposons éclairée par les mêmes rayons.

La *fig.* 209 donne les projections des axes, et leurs inclinaisons (art. **82** et **298**). Les trois directions principales sont une horizontale du plan de tête, une verticale et une perpendiculaire à ces deux lignes. Nous appelons *plan de front* tout plan parallèle au plan de projection.

Les longueurs des projections du rayon de lumière (Mc, M'C') (*fig.* 206) sur les directions principales sont MC, Cc et M'd. Nous portons ces segments sur A'_1S', B'_1S' et C'S' (*fig.* 209), et les projetant sur XY, nous obtenons les grandeurs en perspective des trois projections d'un rayon. Si maintenant nous prenons sur l'axe Sx, et sur des parallèles aux deux autres axes des segments Sα, $\alpha\delta$ et $\beta\delta$ respectivement égaux aux longueurs $A'_1\alpha_1$, $B'_1\beta_1$ et $C'\gamma_1$ que nous venons de trouver, nous pourrons tracer les droites Sδ et Sβ perspectives d'un rayon de lumière, et de sa projection horizontale. Les flèches R et R_1 sont tracées parallèlement à ces lignes.

Nous déterminerons la projection Sγ du rayon de lumière sur le plan zSx, par une construction analogue à celle qui nous a fait trouver la projection Sβ.

593. Les constructions à faire sur la perspective axonométrique sont analogues à celles que nous avons expliquées aux articles **536** et suivants.

Nous traçons la droite A_1a_1 parallèle à R_1, nous élevons la verticale a_1a, et nous la terminons au point a sur le rayon issu du point A.

La courbe *ake* est l'intersection du cylindre d'ombre qui a pour directrice la courbe de tête AKB, avec le cylindre de la niche.

Le plan vertical qui contient le rayon Kk coupe le plan de naissance et le cylindre de la niche suivant les droites K_1k_1 et k_1k; l'ombre du point K est donc en k. La tangente de la courbe d'ombre en ce point est l'intersection des plans tangents aux deux cylindres. Le plan tangent au cylindre d'ombre contient la tangente Kf à la courbe de tête, et le rayon Kk; sa trace sur le plan de naissance est la droite *fui* qui passe par les traces f et u de ces deux droites. La trace du plan tangent au cylindre de la niche est la droite k_1i en k_1 à l'ellipse k_1eB. Le point de rencontre i appartient à la tangente cherchée.

594. Il faut maintenant déterminer l'intersection de la sphère par le cylindre d'ombre. Nous traçons tout d'abord le cercle qui serait le contour apparent de la sphère si elle était en relief : son rayon est égal au demi grand axe de l'ellipse AB. On l'obtient en traçant la droite Cv (*fig.* 208) parallèle à CA (*fig.* 209) (art. **299**).

Nous coupons les deux surfaces par des plans auxiliaires parallèles aux rayons de lumière et perpendiculaires aux plans de tête (art. **338**).

La projection $S\gamma$ du rayon de lumière perce le plan de la figure au point E où il coupe la droite CA trace du plan xSz (*fig.* 209) : le point B est la trace de l'axe Sy perpendiculaire à ce plan; la droite BE est donc la trace du plan qui projette le rayon $S\delta$ sur le plan xSz.

Nous menons par le point C (*fig.* 208) deux droites CM et CL, respectivement parallèles à ES et EB (*fig.* 209) : ce sont les traces du plan auxiliaire passant par le point C, sur le plan de tête, et sur le plan de front qui contient le centre de la sphère. Si nous faisons tourner ce plan auxiliaire autour de CL pour le rabattre sur le plan de front, le cercle suivant lequel il coupe la sphère se placera sur le cercle dont le rayon est Cv. Dans ce mouvement, le point M se transportera en M_1 sur une perpendiculaire MM_1 à CL.

Le rayon de lumière qui passe par le point M coupe en un point l l'axe du mouvement. Il devient donc après le rabattement $M_1 l$, et il rencontre la sphère au point M' du cercle vL. Lorsque le plan auxiliaire est remis dans sa position, le point M' se projette en μ à l'intersection du rayon Ml avec la perpendiculaire abaissée du point M' sur CL.

Si nous traçons $C\mu$, le triangle $CM\mu$ sera la perspective du triangle $C''M''\mu''$ de la *fig.* 206.

L'intersection du plan de la courbe d'ombre et du plan de tête est perpendiculaire au plan auxiliaire; sa projection est donc la droite CG, perpendiculaire à la trace CL de ce plan.

393. Sur la *fig.* 206, un point n' de la courbe d'ombre $e'G$ est donné par un triangle $C''N''n''$ homothétique à $c''M''\mu''$; le point N'' est sur la courbe $A'E'B'$, et le point C'' sur le diamètre PG. D'après cela, si nous traçons une droite NN' parallèle à MC (*fig.* 208), puis les lignes Nn et $N'n$ respectivement parallèles à $M\mu$ et à $C\mu$, le point n appartiendra à la ligne d'ombre Ge, qui est évidemment une ellipse. Cette courbe prolongée passerait par le point μ.

La tangente $n\nu$ est l'intersection du plan de la courbe avec le plan tangent au cylindre d'ombre.

Les rayons $C'M'$ et $C'G$ (*fig.* 206) sont rectangulaires; leurs projections CM et CG (*fig.* 208) sont donc des demi-diamètres conjugués de l'ellipse AMB. La construction qui fait trouver l'ellipse μeG est identique avec la transformation que nous avons exposée aux articles **154** et **314**. On voit d'après cela que CG et $C\mu$ sont des diamètres conjugués de cette conique; on peut donc obtenir ses axes par la construction expliquée à l'article **155**, mais il est plus simple de remarquer que le grand axe est sur la droite d'intersection du plan de la courbe d'ombre avec le plan de front du centre de la sphère. Les droites $S\lambda$ et $S\rho$ (*fig.* 209), respectivement parallèles à CG et à $C\mu$, sont les traces d'un plan mené par le point S parallèlement au plan d'ombre, sur les plans xSz et BSE, parallèles l'un au plan de tête, et l'autre aux plans auxiliaires. Ces lignes percent le plan de la figure aux points λ et ρ : le grand axe de l'ellipse μeG est donc parallèle à la droite $\lambda\rho$; sa longueur est d'ailleurs égale au diamètre de la sphère.

La droite Ce est dans le plan de naissance et dans celui de la courbe. Les traces des plans menés par le point S parallèlement à ceux-là sont AB et $\lambda\rho$ (*fig.* 209). La ligne Ce est donc parallèle à la droite qui irait du point S à celui où les traces AB et $\lambda\rho$ se rencontrent. Nous n'avons pas tracé cette droite par crainte de confusion.

596. Nous croyons que cet exercice suffira pour montrer comment on doit disposer, sur une perspective axonométrique, les constructions qui correspondent aux divers tracés des figures géométrales. Il n'est pas toujours nécessaire d'établir une figure auxiliaire représentant les projections de l'angle trièdre des axes, et d'y déterminer les directions des principales lignes, mais cette méthode introduit beaucoup de clarté dans l'épure, et il est bon de l'adopter comme règle générale.

III[e] Exercice. — *Ombres d'une niche représentée par une perspective cavalière. — Rayons parallèles.* (*Fig.* 203.)

597. La niche représentée sur la figure cavalière 203 est la même que celle qui vient de nous occuper, mais la direction (R, R_1) des rayons est différente. Les lignes perpendiculaires aux plans de front sont réduites à la moitié de leur grandeur; la droite F fait connaître leur direction.

Les droites A_1a_1 et Aa, respectivement parallèles à R_1 et à R, font trouver l'ombre A_1a_1a de l'arête A_1A sur le plan horizontal A_1B_1, et sur le cylindre de la niche.

Une génératrice (Kk, K_1k_1) du cylindre d'ombre perce le cylindre de la niche en un point k que nous déterminons d'après sa projection k_1. Les plans tangents aux deux cylindres en k ont pour traces sur le plan de tête KT et T_1T : la droite Tk est donc la tangente de la courbe en k.

598. Pour construire l'intersection de la sphère par le cylindre d'ombre, nous emploierons, comme précédemment, des plans auxiliaires parallèles aux rayons de lumière et perpendiculaires aux plans de tête. Si du point a_1 nous menons les droites a_1A' et a_1a' respectivement parallèles à R et à F, nous pourrons tracer la droite $A'a'$ qui sera parallèle aux intersections des plans auxiliaires avec le plan de tête.

Considérons maintenant le plan auxiliaire passant par le centre de la sphère : ses intersections avec le plan de tête, le cylindre d'ombre et le plan de naissance sont les droites CM, MD et CD respectivement parallèles aux trois côtés du triangle $a'A'a_1$. Si nous rabattons ce plan sur le plan de tête par une rotation autour de CM, la ligne fuyante CD se placera sur la droite Cd d'une longueur double, et perpendiculaire à CM ; le rayon de lumière MD deviendra Md, et le cercle de section avec la sphère se confondra avec BMAm'. L'ombre de M se trouvera donc au point m' ; on la ramènera en m sur MD, en traçant les droites m'M' et M'm respectivement parallèles à dC et à CD. On pourrait, sans déterminer le point M', tracer une droite $m'm$ parallèle à celle qui irait du point d au point D. L'intersection du plan d'ombre avec le plan auxiliaire est Cm.

Le plan de la courbe d'ombre et le plan de tête sont perpendiculaires aux plans auxiliaires, et notamment à celui qui contient le centre de la sphère ; leur intersection est donc la droite CG perpendiculaire à la trace MC de ce plan et passant d'ailleurs par le centre C.

Maintenant, pour avoir un point n de l'ellipse d'ombre, il suffit de tracer les droites N'N, Nn et N'n respectivement parallèles à CM, Mm et Cm. La génération de cette courbe et la construction de ses tangentes donnent lieu aux mêmes observations que dans l'exercice précédent : ainsi Cm et CG sont deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse emnG.

On pourrait construire cette courbe en coupant la sphère et le cylindre par des plans de front.

599. Pour avoir le point e où se joignent les deux ellipses, nous remarquons que le plan auxiliaire qui passe par le centre, le plan de naissance et le plan de la courbe d'ombre sur la sphère, se coupent suivant les droites Cm, CD et Ce, dont la troisième seule est inconnue. Les traces de ces trois plans sur le plan de tête sont CM, AB et CG. Donc, si nous les coupons par un plan de front passant par un point quelconque α de Cm, les intersections seront $\alpha\beta$ parallèle à CM, et des droites passant l'une par β, l'autre par α, et respectivement parallèles à AB et à CG : leur intersection donnera un point γ de la droite Ce.

CHAPITRE III.

TRANSFORMATION HOMOLOGIQUE.

Notions sur les figures homologiques.

400. Nous allons généraliser les constructions que nous avons présentées aux articles **388-391**, sur les ellipses produites par les ombres des cercles, et rechercher les relations qui existent entre les projections d'une figure plane et de son ombre sur un plan. Les résultats auxquels nous parviendrons sont utiles non-seulement pour le tracé des ombres, mais encore pour diverses autres constructions, notamment dans la perspective.

Si un plan XYZV ou P′ (*fig.* 221) reçoit l'ombre M′ d'une figure plane M éclairée par un point lumineux S, les relations suivantes existeront évidemment entre les deux figures M et M′ :

1° Deux points homologues, c'est-à-dire un point quelconque A et son ombre A′, seront sur un rayon de lumière SAA′.

2° Les points qui sont en ligne droite sur l'une des figures auront pour homologues des points de l'autre figure également en ligne droite.

3° Les points de l'une des figures qui sont sur l'intersection XY des deux plans seront leurs homologues dans l'autre figure.

Si la figure M s'étendait sur le prolongement du plan P au delà de P′, un point de cette figure situé au delà de XY ne pourrait pas porter ombre sur P′, mais au contraire recevrait l'ombre d'un point de ce plan, qui serait son homologue. Pour que les considérations que nous allons présenter puissent être admises sans restriction, il faut considérer la figure M′ comme la *projection conique* de la figure M, c'est-à-dire comme la section par le plan P′ d'un cône qui aurait son sommet au point fixe S, et les différentes lignes de la figure M pour directrice [1]. Toutefois nous continuerons à employer les mots d'*ombre* et de *rayon de lumière*, qui font image et qui montrent la connexion de cette question avec notre sujet.

401. Les relations que nous avons reconnues entre les figures M et M′ existent entre leurs projections m et m' sur un plan Q, et par suite :

1° Les figures m et m' se correspondent point à point, et de telle sorte que deux points homologues sont sur des droites qui divergent d'un point s.

[1] Nous avons déjà eu l'occasion de parler de la projection conique dans une note de l'article 183.

2° Les points qui sont en ligne droite sur l'une des figures ont pour homologues des points de l'autre figure également en ligne droite.

3° Les points de l'une des figures qui sont sur une certaine droite xy sont leurs homologues dans l'autre figure.

M. Poncelet a appelé *homologiques* les figures tracées sur un plan et qui ont entre elles les relations que nous venons d'exposer. La droite xy et le point s sont l'*axe* et le *centre* d'homologie; les droites qui divergent du point s sont *les rayons d'homologie;* enfin l'une quelconque des figures est la *transformée* de l'autre par homologie ([1]).

402. La transformée homologique m' d'une figure donnée m est déterminée quand on connaît le centre et l'axe d'homologie, et le point a' homologue d'un point quelconque a de la figure m. On peut en effet obtenir le point b' homologue d'un point b choisi arbitrairement, par la rencontre du rayon d'homologie sb, et de la droite $a'd$ homologue de abd.

403. Quand les côtés de deux triangles ABC, A'B'C', situés dans des plans différents, se rencontrent deux à deux en des points D, E, F nécessairement en ligne droite, ils déterminent trois plans qui se coupent deux à deux suivant les droites AA', BB' et CC'; ces lignes convergent par conséquent vers un point S.

On peut étendre cette proposition à deux triangles abc, $a'b'c'$ situés sur un plan : s'ils ont un axe d'homologie, c'est-à-dire si leurs côtés se rencontrent deux à deux sur une droite xy, ils ont un centre d'homologie vers lequel convergent les droites qui passent par les sommets homologues. Car si nous relevons les triangles sur deux plans P et P' dont l'intersection XY se projette sur xy, d'après ce que nous venons de voir, les droites qui passeront par les sommets homologues se rencontreront en un point S; les projections de ces lignes sur le plan des triangles abc et $a'b'c'$ passent donc par la projection s de S.

Réciproquement, deux triangles qui ont un centre d'homologie ont aussi un axe d'homologie, car on voit facilement qu'ils peuvent être considérés comme les projections de deux triangles dont l'un serait l'ombre de l'autre ([2]).

([1]) Les figures homologiques sont très-souvent considérées en dehors des questions d'ombre auxquelles nous les rattachons ici. M. Poncelet les a présentées comme résultant de la projection conique (ou perspective) de deux figures homothétiques situées sur un même plan (*Propriétés projectives*, art. 297 et suivants).

([2]) Nous donnerons ici l'énoncé d'un double théorème qui peut être utilisé en perspective : *Quand deux figures* A *et* A' *sont homologiques d'une troisième* B, *elles sont homologiques entre elles, pourvu toutefois que les deux premières homologies aient pour axe la même droite, ou pour centre le même point. Dans le premier cas, les centres d'homologie des figures prises deux à deux sont en ligne droite; dans le second, les trois axes d'homologie passent par un même point.*

Pour la démonstration, il faut regarder les figures B, A et A', dans le premier cas, comme les projections d'une figure plane éclairée par deux points lumineux et de ses ombres sur un plan; dans le second, comme les projections d'une figure plane éclairée par un point lumineux et de ses ombres sur deux plans.

404. On peut justifier par ce théorème une construction que nous avons établie à l'article **226** par d'autres raisonnements. Il s'agit d'avoir la tangente de la courbe QQ_1 au point C (*fig.* 124), et pour cela de faire passer une droite par le point C et par le point éloigné où les deux droites cG et mE se rencontrent. Nous coupons ces lignes par deux droites cmK et GFK; nous traçons ensuite mC et cCS, puis par les points K et F deux lignes KS et FI parallèles à mC, enfin la droite GS. Nous avons ainsi deux triangles mcC et FGI dont les côtés se rencontrent deux à deux au point K, au point S, et au point de KS situé à l'infini; cette droite est ainsi un axe d'homologie, et les droites mF, cG et CI, rayons d'homologie, doivent se rencontrer en un même point.

405. On voit que la construction donnée à l'article **68** peut être généralisée, et qu'il n'est pas nécessaire que les triangles ABC et abc (*fig.* 53) soient semblables, mais seulement que les points de concours de leurs côtés homologues soient en ligne droite. On peut ainsi simplifier quelquefois les tracés, en utilisant des lignes déjà établies.

406. Deux figures homologiques m et m' (*fig.* 221) peuvent toujours être considérées comme les projections sur un plan Q de deux figures planes dont l'une serait l'ombre de l'autre.

Supposons en effet qu'on relève la figure m et l'axe xy sur un plan quelconque P, le centre s en un point S hors de ce plan et un point a' de m' en A' sur le rayon SA : si l'on fait passer un plan P' par la droite XY et par le point A', qu'on reçoive sur lui l'ombre M' de M et qu'on la projette sur le plan Q, on aura une figure homologique de m, dont le point S et la droite xy seront le centre et l'axe d'homologie, et dont le point homologue de a sera a'; elle se confondra nécessairement avec m' (art. **402**).

Il résulte de là que dans les figures homologiques la courbe homologue d'une section conique est une section conique, et que, quand deux courbes sont tangentes l'une à l'autre, leurs homologues sont également tangentes.

407. Un plan RII'K ou P'_1 mené par le point S parallèlement à P' coupe le plan P suivant une droite II' dont tout point a pour homologue sur P' un point à l'infini. La projection ii' de cette ligne, qui est évidemment parallèle à xy, représente sur la figure m tous les points de la figure m' qui sont à l'infini : c'est la *ligne de fuite* de la figure m relativement à la figure m'. Pour en déterminer graphiquement un point u, on mène par le centre s un rayon d'homologie parallèle à une droite quelconque ea' de la figure m', jusqu'à la rencontre de son homologue ea.

Si la courbe m avait rencontré la droite ii', son homologue m' aurait eu des branches infinies.

Il y a entre les deux figures un parallélisme complet de propriétés et de relations; par conséquent la figure m' a relativement à la figure m une ligne de fuite

jj' parallèle à xy : on en détermine un point t par une construction analogue à celle que nous avons expliquée, c'est-à-dire en menant par le centre s un rayon d'homologie parallèle à une droite ac de la figure m, jusqu'à la rencontre de son homologue $a'c'$.

408. Des points situés sur le plan P' sont en ligne droite, quand leurs homologues du plan P se trouvent eux-mêmes sur une droite; or les homologues des points à l'infini du plan P' sont sur une ligne II', intersection de deux plans : donc tous les points d'un plan situés à l'infini doivent être considérés comme étant distribués sur une droite située elle-même à l'infini [1]. En général la direction de cette ligne est indéterminée, mais dans une question spéciale on peut être conduit à lui attribuer une direction : ainsi les points à l'infini du plan Q, regardés comme appartenant à la figure m', homologue de m, sont sur une droite parallèle à xy.

409. Quand les rayons de lumière sont parallèles, les rayons d'homologie le sont également. Le centre s et les lignes de fuite ii' et jj' disparaissent à l'infini. Aucun point à distance finie sur l'une des figures ne peut correspondre à un point à l'infini sur l'autre : une ellipse a nécessairement pour homologue une ellipse.

Cette circonstance se présente sur les *fig.* 201 et 202. L'axe d'homologie est pour la première S'T, et pour la seconde IJ. Les rayons d'homologie sont parallèles à R; on peut aussi, sur la *fig.* 202, les prendre parallèles aux génératrices de l'intrados, car sous le rapport géométrique il n'y a aucune différence essentielle entre les cylindres qui se coupent suivant les deux courbes dont nous considérons les projections. Le point M a pour homologue dans le premier mode m et dans le second m'.

Le demi-cercle de tête d'une niche sphérique, et son ombre sur la sphère, qui est une courbe plane, donnent lieu à des observations analogues (*fig.* 203, 206 et 208).

Quand les plans P et P' (*fig.* 221) sont parallèles, l'axe xy et les lignes de fuite s'éloignent à l'infini, et les courbes m et m', projections de deux sections parallèles d'un cône, sont homothétiques. La similitude est donc un cas particulier de l'homologie.

Application des théories précédentes aux sections coniques. Propriétés fondamentales des pôles et des polaires.

410. Considérons deux sections coniques M et M' tracées sur un plan (*fig.* 225), et le point de concours s de deux quelconques de leurs tangentes communes : nous pouvons regarder M comme la trace d'un cône dont le sommet S se projette

[1] M. Poncelet (*Propriétés projectives*, art. 96).

en s, et M' comme la trace d'un cylindre perpendiculaire au plan de la figure que nous supposons horizontal. Chacune de ces surfaces est tangente le long d'une droite aux plans verticaux dont les traces sont sE et sG; elles se touchent donc en deux points; et, comme elles sont du second ordre, leur intersection est composée de deux courbes planes (art. **252**, 2°) que nous appellerons N et N' (¹).

La courbe M peut être considérée comme l'ombre de la conique N éclairée par un point lumineux placé en S. La ligne M', projection de N sur le plan de M, est donc homologique avec cette courbe par rapport au point s. On trouve une seconde homologie en regardant les coniques M et M' comme l'ombre et la projection de la ligne N' pour des rayons divergents du point S. Les axes d'homologie sont les traces des plans des courbes N et N'.

Nous voyons donc que *deux sections coniques tracées sur un plan sont homologiques de deux manières différentes, par rapport au point de concours de deux quelconques de leurs tangentes communes, considéré comme centre d'homologie.*

Les points A et a situés sur une droite divergeant du point s sont respectivement homologues de A' et de a' dans un des modes, de a' et de A' dans l'autre. Les points de contact E et G sont toujours homologues de E' et de G'. D'après cela, et en opérant comme il a été dit plus haut, on trouve facilement les axes d'homologie XY, X_1Y_1 et les lignes de fuite qui leur correspondent (art. **407**). L'une des deux lignes de fuite parallèles à X_1Y_1 n'a pas pu être placée sur la figure.

411. Le point de contact de deux sections coniques tangentes peut être considéré comme le point de concours de deux tangentes communes qui se sont confondues en une seule : c'est donc un centre d'homologie des sections coniques.

On peut démontrer directement cette proposition, en s'appuyant sur le quatrième théorème de l'article **252**, et raisonnant d'ailleurs comme nous l'avons fait à l'article précédent.

412. Comme application de ces théories, nous allons nous proposer de déterminer le centre et les axes d'une section conique dont nous connaissons trois points N, M, Q (*fig.* 222), et les tangentes NS et MS. Cette question s'est présentée à l'article **258** pour la projection verticale de l'intersection de deux ellipsoïdes de révolution dont les axes se rencontrent, mais nous ne pouvions pas alors développer la solution. Les données de la *fig.* 222 sont relevées sur la *fig.* 137, de sorte que la première doit être considérée comme un complément de celle-ci.

Tout cercle qui touche les deux tangentes MS et NS est homologique de la courbe, par rapport au point S, centre d'homologie. On prend les points de contact m et n homologues de M et de N, à une même distance de S; on détermine ensuite le centre O, et on trace la circonférence.

(¹) En se donnant la hauteur du sommet du cône au-dessus du plan de la courbe M, on peut se proposer, comme exercice graphique, de déterminer les vraies grandeurs des deux courbes N et N'.

On peut prendre à volonté pour point homologue de Q l'un ou l'autre des deux points où le rayon d'homologie QS coupe le cercle : nous avons choisi celui qui est indiqué par la lettre q. Toutes les relations du système sont maintenant déterminées.

413. Le point situé à l'infini sur la sécante MQ a pour homologue le point i, intersection de mq et du rayon d'homologie Si, parallèle à MQ. On détermine de la même manière le point i', homologue du point situé à l'infini sur MN, et on trace la ligne de fuite ii'. Elle coupe le cercle en deux points r et t auxquels correspondent sur la section conique deux points à l'infini. Cette courbe est donc une hyperbole, ainsi que nous l'avons dit dans la note de l'article **258**.

Les asymptotes étant tangentes à la courbe aux points situés à l'infini sont homologues des tangentes rr' et tt' du cercle; par conséquent, en reportant sur la droite MN par des rayons d'homologie les points d et e où la sécante mn rencontre les tangentes, on obtient des points D et E qui appartiennent aux asymptotes. Ces lignes sont d'ailleurs parallèles aux rayons d'homologie Sr et St qui passent par les points situés à l'infini; il est donc facile de les tracer et d'obtenir ensuite les axes qui sont leurs bissectrices.

414. On peut disposer la construction d'une autre manière en déterminant l'axe d'homologie.

Les couples de droites homologues déjà établies sur la figure ont leur point de concours hors du cadre, et par conséquent nous devons en tracer de nouvelles, convenablement choisies. Prenons sur la ligne ii' un point p, et joignons-le à S et à q : le point homologue de p est à l'infini sur Sp, et la ligne homologue de qp est la droite Qβ, parallèle à Sp. Le point de rencontre β de deux droites homologues appartient à l'axe d'homologie que nous savons être parallèle à la ligne de fuite ii'.

Les tangentes $r'r$ et $t't$ rencontrent l'axe d'homologie en r_1 et en t_1; les asymptotes passent donc respectivement par ces points.

415. Si l'on veut avoir la position exacte du sommet A sur l'axe transverse BB', on déterminera la droite $h\alpha$, homologue de cet axe, et l'on ramènera sur BB', par un rayon d'homologie, le point a où elle rencontre le cercle. La droite $h\alpha$ passe par le point α de l'axe d'homologie, et par le point h, homologue du point H où BB' coupe MN. Nous n'avons pas laissé subsister le rayon d'homologie Hh, pour ne pas augmenter le nombre des droites qui se croisent au point S.

416. Nous avons résolu le problème pour le cas où la conique a des asymptotes; il nous reste à établir des relations générales qui permettent d'opérer lorsque la ligne de fuite ne rencontre pas le cercle auxiliaire.

Soit A (*fig.* 223 ou 224) une conique qui doit éprouver la transformation homologique, et ii' la droite dont les points s'éloigneront à l'infini. Deux tangentes lm et ln issues d'un point l de cette ligne auront pour homologues deux droites parallèles; la sécante *mn* deviendra donc un diamètre. Le point homologue du centre de la transformée est l'intersection de cette ligne, et d'une autre sécante *m'n'* déterminée de la même manière.

Une droite *mn* qui passe par les points de contact de deux tangentes issues d'un point *l* est dite la *polaire* de ce point, et celui-ci est le *pôle* de la droite.

Nous voyons donc que les polaires des différents points de la ligne de fuite passent toutes par un même point qui est homologue du centre de la transformée.

D'après une propriété connue des courbes du second ordre, le point *c* est sur le diamètre conjugué de *ii'*, et sa distance au centre O est donnée par la relation

$$Oc \times Ob = \overline{Oe}^2.$$

Quelles que soient la nature de la conique considérée et la position de la ligne *ii'* dans son plan, la quantité $\overline{Oe}^2$ sera réelle, et l'équation fera connaître une grandeur également réelle pour le segment O*c*.

Le point *c* est le pôle de la droite *ii'* (*fig.* 223), car si l'on suppose que la sécante *mn* tourne autour du point *c* jusqu'à devenir tangente, les points *m* et *n* situés de part et d'autre de *ii'* se réuniront sur cette ligne, avec le point *l*, en *k* ou en *k'*. Sur la *fig.* 224 les tangentes issues du point *c* sont imaginaires, mais ce point jouit, par rapport au système de la section conique A et de la droite *ii'*, de toutes les propriétés dans lesquelles ces tangentes ne figurent pas : on dit encore que c'est le pôle de la ligne *ii'*, et que cette droite est sa polaire. On peut donc énoncer la proposition que nous avons établie plus haut, en disant que, *lorsqu'une section conique éprouve la transformation homologique, le pôle de la ligne de fuite est homologue du centre de la transformée.*

D'après cela, le point de concours des tangentes *tt'* et *rr'*, pôle de la ligne de fuite *ii'* (*fig.* 222), est homologue du centre C de l'hyperbole, et doit se trouver sur la droite CS.

417. La droite *cl* et les tangentes *ml* et *nl* (*fig.* 223 ou 224) deviennent parallèles dans la transformation; les lignes *cl* et *mn* sont donc homologues de deux diamètres conjugués. Par conséquent, si l'on a un cercle homologique d'une conique déterminée par certaines conditions, on pourra obtenir des diamètres conjugués de cette courbe, et les points où ils la rencontrent; ce qui permettra de déterminer les axes, dans le cas où elle serait une ellipse, qui est celui que nous avions encore à résoudre.

418. Les propriétés des sections coniques permettent de ramener dans bien des cas la recherche du centre, des axes, des asymptotes,... d'une de ces courbes, au problème que nous nous sommes proposé à l'article **412** [1]. Nous rappellerons

---

[1] On peut consulter M. Brianchon (*Correspondance sur l'École Polytechnique*, IIIe vol., p. 383), M. Poncelet (*Propriétés projectives*, art. 338 et 339).

d'ailleurs que, pour tracer un cercle homologique d'une section conique, il suffit de connaître sa tangente en un point (art. **411**).

419. Toute droite tracée sur le plan d'une conique pouvant être prise pour ligne de fuite dans une certaine transformation homologique, les raisonnements que nous venons de faire établissent deux théorèmes fort importants :

1° *Les polaires des différents points d'une droite passent par le pôle de cette droite;*

2° *Les pôles des diverses droites qui passent par un point sont sur la polaire de ce point.*

Le pôle l d'une sécante mn (*fig.* 223) étant le point de concours des tangentes aux points m et n, la même relation subsistera après la transformation homologique. Ainsi quelque part que l'on place l'axe et le centre d'homologie, le point homologue de l sera le pôle de la droite homologue de mn. Il en serait de même si la figure était transformée par une projection cylindrique, ou par une projection conique.

Si le point c était le centre de la courbe (*fig.* 224), les points l et l', et par suite la droite ii', s'éloigneraient à l'infini. La polaire du centre est donc la droite sur laquelle on peut concevoir tous les points du plan situés à l'infini (art. **408**).

Emploi de la transformation homologique comme méthode de recherche.

420. La transformation homologique est souvent employée comme méthode de recherche et de démonstration. Nous allons établir de cette manière un théorème qui est quelquefois utile dans les constructions.

Si trois droites AD, BE, CF (*fig.* 226) *divergeant d'un même point* P *sont coupées par deux sécantes* DF *et* AC, *les points de rencontre* M *et* N *des diagonales des quadrilatères* ABED *et* BCFE, *et le point de concours* Q *des sécantes sont en ligne droite.*

Nous construisons une figure $adfc$ homologique de la proposée, et de manière que la droite homologue de PQ soit à l'infini : la position du centre d'homologie S, et la grandeur Sa du rayon d'homologie de l'un des points sont d'ailleurs choisies arbitrairement. Les droites qui convergent vers les points P et Q ont pour homologues des droites respectivement parallèles à SP et à SQ. Les quadrilatères sont ainsi changés en parallélogrammes, et les points m et n où se coupent les diagonales, se trouvant au milieu de ces lignes, sont sur une droite parallèle à ac et à df. La droite homologue MN passe nécessairement par le point Q qui représente le point où se rejoignent à l'infini les droites de la figure transformée qui sont parallèles à SQ.

Les diagonales du quadrilatère DACF n'ont pas été tracées; elles se croisent évidemment sur la droite MNQ.

Nous avons construit la figure homologique af, bien que cela ne fût pas nécessaire pour le raisonnement, mais afin de donner un nouvel exemple graphique de ce genre de transformation.

421. Le théorème que nous venons de démontrer donne un procédé pour tracer une droite qui passe par un point M, et par le point éloigné où deux droites DF et AC se rencontrent. On trace une droite quelconque AD, les deux transversales DE et AE, la droite BE qui coupe AD au point P, une droite PF, enfin les transversales EC et BF qui se rencontrent en N : la droite MN passe par le point éloigné Q. Cette construction est assez commode, quand le point M est notablement plus rapproché de l'une des deux lignes que de l'autre, parce qu'alors le point P se trouve généralement à une petite distance. Si au contraire le point M était voisin de la bissectrice de l'angle DQA, quelque direction que l'on donnât aux transversales DB et EA, le point P lui-même serait éloigné, comme nous le montrerons plus loin (art. **602**).

CHAPITRE IV.

POINTS BRILLANTS.

Considérations générales.

422. Un corps poli éclairé par des rayons directs peut présenter une ou plusieurs images du corps lumineux. Si ce dernier corps est réduit à un point S (*fig.* 227), son image sera produite par la réflexion sur un seul point G que l'on appelle *point brillant*, et qui est déterminé par les conditions que la droite GI, normale à la surface du corps poli, fasse des angles égaux avec le rayon de lumière SG et le rayon visuel GO, et qu'elle se trouve dans le plan de ces deux lignes [1].

Si le corps est mat, sa surface se compose en réalité d'une multitude de petites facettes qui réfléchissent la lumière dans toutes les directions. Il n'y a plus de points brillants, mais le point G, déterminé comme nous l'avons dit, est le plus éclairé.

[1] La vision est produite pour chaque point regardé par un *faisceau* de rayons, mais on peut ne considérer que le rayon qui, passant au centre optique du cristallin, n'éprouve pas de déviation sensible. Le faisceau issu du point S est réfléchi sur une petite surface, mais l'image n'est qu'un point situé dans la direction OG.

423. Un ellipsoïde engendré par la révolution autour de son grand axe d'une ellipse E dont le point lumineux S et l'œil O du spectateur sont les foyers réfléchirait les rayons de lumière vers ce dernier point. Si nous supposons que les axes de l'ellipse augmentent graduellement, en conservant entre eux la relation exigée par la condition que les points O et S soient les foyers, il arrivera que l'ellipsoïde touchera la surface du corps C d'abord au point G, puis en un point H, ayant le même caractère géométrique, mais placé de telle sorte que le rayon de lumière qui y parviendrait se trouve arrêté par le corps. Le point G est évidemment brillant; le point H le serait, si le corps se trouvait de l'autre côté de la surface, et si rien n'empêchait les rayons d'y arriver : nous dirons que le point H est un point brillant *virtuel*. Le point brillant réel de la partie sphérique d'une niche serait virtuel sur la sphère en relief.

424. Le lieu des pieds des normales abaissées des différents points de la droite SO sur la surface C (*fig.* 227) passe par les points G et H. En déterminant sur chacune de ces normales le point où elle est rencontrée sous des inclinaisons égales par des droites issues des points S et O, on obtient une seconde courbe dont l'intersection avec la première fait connaître la position des points brillants.

Cette méthode, due à Hachette, peut être appliquée aux surfaces de révolution, et donne lieu à un bon exercice graphique.

Détermination du point brillant d'un corps représenté par des figures géométrales et éclairé par des rayons parallèles.

425. Dans le cas d'une projection, on doit considérer le spectateur comme étant à l'infini (art. **12**); les rayons visuels sont alors les projetantes, et, si les rayons de lumière sont parallèles, on aura la direction de la normale de la surface au point brillant, en construisant la bissectrice de l'angle formé par un rayon visuel et une projetante. Le problème sera ainsi ramené à *déterminer le point de la surface où la normale est parallèle à une droite donnée*. Ce point est le point de contact d'un plan parallèle à un plan perpendiculaire à la normale.

426. Si l'on veut avoir le point brillant sur la projection verticale, par exemple, on commencera par construire la bissectrice de l'angle formé par le rayon de lumière (SA, S'A') (*fig.* 228), et par une projetante (AB, A'). Pour cela, on rend horizontal le plan de ces deux droites, en le faisant tourner autour de la dernière, et, après avoir obtenu la véritable grandeur S_1AB de l'angle, on trace la bissectrice D_1A, et on la ramène à sa véritable position (AD, A'D'). Menant ensuite par un point de la ligne de terre deux droites P et P' respectivement perpendiculaires à AD et à A'S', on obtient les traces d'un plan auquel les plans tangents de la surface aux points brillants sont parallèles.

427. Nous avons vu, aux articles **129** et **131**, qu'un plan tangent à un cône ou à un cylindre était déterminé par la seule condition d'être parallèle à une droite; ces surfaces n'ont donc pas, en général, de points brillants. Si un cône avait un plan tangent parallèle au plan (P, P') (*fig.* 228), tous les points de la génératrice de contact seraient brillants sur la projection verticale.

428. Considérons maintenant la surface de révolution représentée sur la *fig.* 228, supposons-la éclairée par des rayons parallèles à (SA, S'A'), et proposons-nous de déterminer son point brillant sur la projection verticale, c'est-à-dire le point où le plan tangent est parallèle au plan dont les traces sont P et P', ou P et $e'g$, en prenant le plan méridien cox pour plan vertical de projection. Le plan méridien du point brillant doit être perpendiculaire au plan (P, $e'g$) (art. **186**), et comme d'ailleurs il est vertical, sa trace horizontale est la droite ok, perpendiculaire à P.

Au point cherché la tangente de la méridienne est parallèle à l'intersection du plan ok de cette courbe, avec le plan (P, $e'g$); par conséquent, si nous faisons tourner le plan ok autour de l'axe, de manière à le rendre parallèle au plan vertical, et si nous déterminons la position gk'_1 que prend son intersection avec le plan (P, $e'g$), les tangentes $m'_1 t$ et $n'_1 s$, parallèles à gk'_1, feront connaître des points (m_1, m'_1) et (n_1, n'_1) qui, ramenés en (m, m') et (n, n') dans le plan ok, seront les points brillants; le premier de ces points est réel et l'autre virtuel.

On construirait d'une manière analogue les points brillants sur la projection horizontale.

Détermination du point brillant sur les figures axonométriques.

429. Nous allons nous occuper du point brillant en perspective axonométrique. Les axes sont Sx, Sy et Sz (*fig.* 187); les droites Ss et Ss_1 représentent un rayon de lumière et sa projection horizontale.

Nous déterminons les traces AB, AC et BC des plans principaux sur un plan parallèle au plan de la figure (art. **82**). Le plan qui projette le rayon de lumière sur le plan horizontal xSy contient la droite Ss_1 et l'axe Sz; sa trace sur le plan ABC est donc CG, et la trace du rayon Ss est au point F de cette ligne. Nous rabattons le plan projetant dont la trace est Ss : le sommet S, dont nous avons préalablement déterminé la hauteur SS', se place en S'', et par suite le rayon de lumière devient S''F. L'angle SS''F est formé par une projetante et un rayon; sa bissectrice S''R a sa trace en R, et le plan qui la projette sur le plan horizontal xSy contenant l'axe Sz a pour trace CRL. La bissectrice cherchée est donc (Ss, SL).

430. Proposons-nous maintenant de déterminer le point brillant d'une sphère DgD$_1$ (*fig.* 187). Si nous supposons que le plan projetant dont la trace est le diamètre DD$_1$, parallèle à Ss, ait été rabattu sur le plan de front qui passe par le centre o, le diamètre rr_1, parallèle à la bissectrice S″R, fera connaître les points r et r_1 où la normale partage en parties égales l'angle du rayon de lumière et de la projetante. Ces points après le relèvement sont k et k_1 : le premier est réel et le second virtuel.

Le diamètre ff_1, perpendiculaire à S″F, est, après le rabattement, la projection du cercle de séparation d'ombre et de lumière. En relevant on trouve une ellipse dont les axes sont gh et EE_1.

Teintes. Lumière diffuse. Lumière reflétée.

451. Un corps est de moins en moins éclairé depuis le point où le rayon incident est réfléchi vers l'œil du spectateur, jusqu'à la ligne d'ombre propre. La dégradation n'est pas toujours la même dans les différentes directions : elle dépend non-seulement de l'incidence des rayons, mais encore de la rugosité de la surface. Au delà de la courbe d'ombre, le corps ne doit pas être représenté dans une ombre complète, parce qu'il reçoit la *lumière diffuse* formée par les rayons réfléchis sur les molécules de l'air (¹). On doit encore avoir égard aux reflets des corps voisins. Ces diverses questions sont du ressort de la perspective aérienne, et nous avons seulement voulu les indiquer ici.

(¹) Les expériences les plus précises sur ces divers phénomènes sont dues à Bouguer. Nous avons examiné la question de la dégradation des teintes dans un Mémoire inséré au *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, en 1873, p. 577.

LIVRE SIXIÈME.
SURFACES DÉVELOPPABLES.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE GÉNÉRALE.

Notions sur les enveloppes.

432. Supposons qu'une surface A se meuve en conservant sa forme, ou en se modifiant suivant une loi continue; considérons-la après un temps T et après un temps $T + t$; enfin désignons-la à ces deux instants par A_T et A_{T+t} : si T varie d'une manière continue, t ayant une valeur constante, la courbe d'intersection de A_T avec A_{T+t} engendrera une surface B_t.

Chaque surface A_T contient deux génératrices de la surface B_t, qui sont ses intersections avec A_{T+t} et avec A_{T-t}. Quand l'intervalle t est petit, ces courbes sont peu éloignées l'une de l'autre. Si l'on suppose que t diminue indéfiniment sans devenir nul, la surface B_t tendra vers une certaine surface limite B, sur laquelle les deux courbes d'intersection avec chaque surface A_T seront réunies en une ligne de contact.

Nous voyons que les surfaces A_T sont inscrites [1] dans une même surface B; on dit que cette surface est leur *enveloppe* et qu'elles en sont les *enveloppées*. Les lignes de contact, intersections de deux enveloppées consécutives et génératrices de l'enveloppe, sont appelées *caractéristiques* [2].

433. Un exemple fera bien comprendre ces considérations générales.

Supposons qu'une droite se meuve en restant toujours tangente à une courbe plane χ (*fig.* 229), et considérons-la dans plusieurs de ses positions $m, n, o, p, \ldots$, à des intervalles de temps égaux, dont nous représentons la grandeur par t. Les intersections successives $i, j, k, \ldots$ de ces lignes appartiennent à une courbe, dont chaque point est sur la droite mobile considérée dans deux positions occupées à

[1] Ou circonscrites (*voir* la note de l'article 343).

[2] La théorie des enveloppes est due à Monge.

un intervalle de temps t. Si tout le système de ces droites est entraîné dans un mouvement commun de révolution autour d'un axe Az situé dans le plan de la courbe χ, les droites engendreront des cônes, et les intersections successives de ces surfaces seront les cercles décrits par les points $i, j, k, \ldots$, lesquels appartiendront à une surface de révolution qui sera d'autant plus rapprochée de celle dont la méridienne est χ, que l'intervalle t sera plus petit. A la limite les cercles deviendront les parallèles de cette surface, qui sera ainsi l'enveloppe des cônes. Elle touche chacun d'eux le long d'une caractéristique, c'est-à-dire d'un parallèle.

Les cônes que nous venons de considérer sont ceux qui nous ont servi pour les constructions des articles **545** et **556**. On peut encore regarder une surface de révolution comme enveloppe de cylindres circonscrits le long des méridiens, et perpendiculaire à leurs plans (art. **546** et **560**), ou de sphères inscrites le long des divers parallèles (art. **562**). Les raisonnements de l'article **568** montrent que le tore elliptique de la *Pl. XIV* est l'enveloppe des positions d'un ellipsoïde de forme invariable; les caractéristiques sont les méridiens.

434. Si une sphère de rayon constant se meut suivant une loi quelconque, ses intersections consécutives seront de grands cercles, et l'on déterminera facilement l'enveloppe; mais si le centre de la surface est fixe et son rayon variable, deux sphères consécutives ne se couperont pas, et les caractéristiques seront imaginaires (1). On voit donc que des surfaces peuvent ne pas avoir d'enveloppe réelle, bien qu'elles forment une série continue.

435. Quand une ligne se meut en conservant sa forme ou en se modifiant d'une manière continue, si elle est toujours tangente à une courbe fixe, cette courbe est dite son *enveloppe*, et la ligne mobile considérée dans ses différentes positions prend par rapport à elle le nom d'*enveloppée*.

On reconnaît, par des considérations analogues à celles de l'article **432**, que, quand une courbe plane se meut dans son plan, elle a une enveloppe lieu de ses intersections consécutives. Cette enveloppe peut d'ailleurs être imaginaire, ainsi qu'il arriverait si les enveloppées étaient des cercles concentriques.

---

(1) Si le rayon de la sphère a un maximum ou un minimum, lorsqu'il sera parvenu à cette grandeur, deux sphères consécutives se confondront, et la caractéristique jusque-là imaginaire deviendra une surface qui devra être considérée comme l'enveloppe.

Des surfaces n'ont pas d'enveloppe lorsqu'il en passe un même nombre (non infini) par tous les points de l'espace. Quand, sous le rapport du nombre de surfaces qui passent par un point, l'espace est divisé en régions, la surface qui limite les différentes régions forme l'enveloppe; c'est, en général, une surface nouvelle, mais quelquefois elle se compose de surfaces distinctes appartenant à la série que l'on considère.

Des considérations analogues peuvent être présentées sur les lignes enveloppes; elles montrent que les théorèmes de l'article 435 sont généraux, et que le cercle FEH (*fig.* 215), qui serait l'ombre sur le plan horizontal de l'ellipsoïde $O^{iv}O^{v}$ si on l'éclairait par des rayons verticaux, est bien l'enveloppe des projections horizontales des parallèles.

La courbe ij, et celle qui lui est symétrique par rapport à la droite O_1O_2 (*fig.* 218), forment l'enveloppe des cercles qui sont les ombres des parallèles de la surface de révolution. Les considérations qui ont été présentées à l'article **371** montrent que *l'ombre portée par une surface est l'enveloppe des ombres portées par ses génératrices*, et que *le cylindre* (*ou le cône*) *d'ombre d'une surface est l'enveloppe des cylindres* (*ou des cônes*) *d'ombre de ses génératrices*.

On peut ajouter que *le cône d'ombre d'une surface enveloppe est l'enveloppe des cônes d'ombre de ses enveloppées*, car l'intersection des lignes d'ombre de l'enveloppe et d'une enveloppée particulière est un des points de contact de ces surfaces, et leurs cônes d'ombre se touchent le long de la génératrice qui passe en ce point. Le cône d'ombre de l'enveloppe est ainsi touché par celui d'une de ses enveloppées, le long de chacune de ses génératrices.

Notions sur les développantes.

436. *Développantes d'une courbe plane.* Considérons un polygone A, B, C, ..., H, I, inscrit dans une courbe plane (*fig.* 231), et prolongeons-en les côtés. Si par des rotations autour des sommets B, C, D, ... nous amenons la droite indéfinie AB à coïncider successivement avec les autres droites, l'un quelconque M de ses points décrira une série d'arcs de cercle MN, NO, ..., Qx, puis le centre du mouvement passant de F en G, le point s'éloignera par un arc xR.

Eu égard à la grandeur relative des rayons, si l'on prolonge un arc ON, il laissera les arcs contigus NM et OP de côtés différents.

En passant à la limite, on voit que si une droite am roule sur une courbe χ (*fig.* 230), c'est-à-dire si elle se meut en restant toujours tangente à cette courbe et sans glisser sur elle, un quelconque m de ses points décrira une ligne ω, composée d'une infinité d'arcs de cercle infiniment petits, qui, s'ils étaient prolongés, la traverseraient tangentiellement et dont les centres sont sur la courbe χ. Les rayons de courbure de la ligne ω sont donc les segments ma, nb, ... de la droite mobile, mesurés jusqu'au point de contact. Cette ligne est une *développante* de la première, et celle-ci prend par rapport à elle le nom de *développée*. La développée d'une courbe plane est à la fois le lieu de ses centres de courbure et l'enveloppe de ses normales.

Les développantes décrites par les différents points de la droite am (*fig.* 230) ont évidemment les mêmes normales, et sont à la même distance les unes des autres dans la direction de ces droites. Chacune d'elles rencontre, en général, la développée χ, et a un rebroussement au point commun x; le rayon de courbure de la développante est alors nul, ainsi que cela doit être (art. **94**).

437. La considération des développantes jette du jour sur la question des rayons de courbure des lignes planes en leurs points singuliers.

A chaque point d'inflexion b_1 d'une courbe χ (*fig.* 232) correspond un rebroussement de seconde espèce a_1 sur chaque développante ω (art. **219**). On voit qu'en général le rayon de courbure n'est pas nul en ces points, comme aux rebroussements de première espèce.

L'une des développantes de la courbe χ passe par le point d'inflexion b_1 ; elle y a une inflexion d'une nature particulière : les rayons de courbure des points voisins sont très-petits, et leur longueur varie très-rapidement ; la continuité s'établit entre eux par un rayon nul qui correspond au point b_1 considéré isolément.

Quand une courbe a une branche infinie dont les bras sont d'un même côté de l'asymptote (art. **182**), ses développantes ont un rebroussement de première espèce où le rayon de courbure est infini, et qui, par conséquent, diffère beaucoup des rebroussements où le rayon de courbure est nul.

438. La question des rebroussements ayant une grande importance, nous nous y arrêterons quelques instants.

Une courbe plane qui a un rebroussement peut être considérée comme la projection d'une courbe gauche sur un plan perpendiculaire à l'une de ses tangentes (art. **217**). La trace du plan osculateur est la tangente au rebroussement.

Si le plan osculateur a simplement un contact du second ordre avec la courbe, c'est-à-dire s'il n'a en commun avec elle que trois points réunis en un seul, il la traverse (art. **214**), et les deux bras du rebroussement, qui est alors du *premier ordre,* se trouvent de part et d'autre de la tangente.

Quand le plan osculateur a un contact du troisième ordre avec la courbe, il ne la traverse pas; le rebroussement devient de *second ordre,* et ses deux bras sont d'un même côté de la tangente.

L'ordre du rebroussement s'élève ainsi en même temps que celui du contact de la courbe gauche avec son plan osculateur. Suivant qu'il est impair ou pair, la tangente laisse les deux bras du rebroussement de côtés différents ou d'un même côté.

Les rebroussements de premier et de second ordre sont les rebroussements ordinaires de première espèce et de seconde espèce. Le rayon de courbure des uns est nul; celui des autres a, en général, une grandeur finie.

Quand le contact de la courbe gauche avec son plan osculateur augmente d'une unité, celui de sa projection avec la trace du plan osculateur augmente aussi d'une unité. A un rebroussement du troisième ordre, la courbe a donc avec sa tangente un contact d'un degré plus élevé d'une unité qu'à un rebroussement de second ordre : le rayon de courbure y est donc infini. Il l'est de même aux rebroussements d'ordre plus élevé [1].

---

[1] Dans une étude complète, il serait nécessaire d'avoir égard à l'ordre de multiplicité du sommet, et si le rebroussement est de seconde espèce à l'ordre de contact des deux bras.

Quand une courbe gauche a un contact du troisième ordre avec l'une de ses tangentes, sa pro-

439. Lorsqu'une courbe ABC (*fig.* 257) a un rebroussement de premier ordre, le rayon de courbure au point correspondant de ses développantes est, en grandeur absolue, un maximum pour celles qui sont du côté de la convexité, telles que *rstu*, et un minimum pour les autres, telles que *mn*. On peut, en ayant égard au signe des rayons, les considérer tous comme à leur maximum ou tous comme à leur minimum. La développante qui passe au point de rebroussement y a un rayon de courbure nul, mais sans changement de signe, et par suite il n'y a pas de rebroussement.

Lorsque les deux bras de la ligne ABC sont resserrés sur la tangente au rebroussement, le rayon de courbure de la développante qui passe au sommet varie avec une extrême rapidité, et cette courbe, même construite avec un grand soin, ne présente aucune singularité apparente.

Quand une courbe a un rebroussement de second ordre, ses développantes en ont un du même ordre au point correspondant; en considérant celle qui passe au point de rebroussement, on reconnaît qu'à un rebroussement de second ordre le rayon de courbure peut être accidentellement nul.

En général, une développée a un rebroussement quand la courbe primitive a un *sommet*, c'est-à-dire un point où le rayon de courbure atteint une valeur maximum ou minimum. Une courbe peut avoir un sommet à un point de rebroussement de second ordre, puisque le rayon de courbure n'y change pas de signe, et alors sa développée a un rebroussement qui est nécessairement du même ordre. Dans le cas ordinaire, à un rebroussement de second ordre sur la courbe primitive, correspond une inflexion sur la développée (art. 437).

440. La différence de deux rayons CN et FQ (*fig.* 231) est égale à la somme des côtés du polygone compris entre les points C et F; la longueur de l'arc *ab* d'une développée (*fig.* 230) est donc la différence des rayons de courbure qui le touchent à ses extrémités.

Si ces points étaient, tels que *b* et *c*, de côtés différents du rebroussement, la longueur de l'arc serait la somme des longueurs absolues des rayons.

441. *Développantes d'une courbe gauche. Surface des développantes.* Une courbe gauche a, comme celles qui sont planes, une infinité de développantes, *trajectoires* des divers points d'une tangente qui roule sur elle sans glisser. Chaque développante rencontre en général la courbe et a un rebroussement au point commun.

Les développantes peuvent être considérées comme des génératrices curvilignes de la surface décrite par la tangente mobile. La courbe gauche, lieu des

jection sur un plan perpendiculaire possède un rebroussement dont le sommet est un point quadruple.
On peut consulter sur ces questions notre *Note sur les singularités élevées des courbes planes* (*Journal de Mathématiques*, 1869).

points de rebroussement, forme sur cette surface une *arête de rebroussement* qui la divise en deux nappes.

Comme cette circonstance est fort importante, nous allons l'étudier d'une autre manière.

442. Nous considérons une courbe gauche projetée sur deux plans rectangulaires, dont l'un, que nous supposons horizontal, lui est osculateur en un point M (*fig.* 238) : sa projection sur l'autre plan est une ligne A'B', osculatrice en M' de la ligne de terre (art. **217**).

Nous prenons un second plan vertical xy passant par le point M, et nous le rabattons, après avoir éloigné sa trace en x_1y_1 pour éviter que les figures ne se superposent.

La tangente de la courbe en un point (A, A') voisin de M rencontre le plan xy au point (α, α') qui est rabattu en α''. Si le point A se rapproche du point M et vient se confondre avec lui, α'' décrira une courbe et viendra coïncider avec M''; la droite α''M'', trace du plan qui contient le point M et la tangente en A, tournera autour de M'' et deviendra la trace x_1y_1 du plan osculateur en M. La ligne courbe α''M'', lieu des traces des tangentes de l'arc (AM, A'M'), est donc tangente en M'' à la droite x_1y_1. On peut faire le même raisonnement pour la ligne M''β'', lieu des traces des tangentes de l'arc (MB, M'B'); d'ailleurs, si la courbe gauche n'a pas d'inflexion en M, les segments curvilignes M''α'' et M''β'' seront d'un même côté de la projetante MM''; donc la trace α''M''β'' de la surface formée par les tangentes à la courbe gauche (AB, A'B') a un rebroussement de premier ordre, dont la tangente x_1y_1 est la trace du plan osculateur de la courbe.

Si le plan sécant était oblique sur le plan osculateur, la figure serait un peu moins simple, mais les raisonnements et les conclusions resteraient les mêmes; il n'y a d'exception que quand la droite xy est tangente en M, parce qu'alors les points α et β ne sont pas d'un même côté de ce point. Nous voyons d'après cela que la surface des tangentes est telle, que sa section par un plan présente un rebroussement au point où elle rencontre la courbe gauche; cette surface a donc un rebroussement tout le long de cette ligne, sauf toutefois à ses points d'inflexion, ce qui est conforme aux résultats de l'article **438**. En un point M, les tangentes au rebroussement pour les différentes sections sont dans le plan osculateur de la courbe, qui est le *plan de rebroussement* pour le point M.

Toute droite passant par le point de rebroussement d'une courbe plane et située dans son plan peut être regardée comme une sécante sur laquelle deux points d'intersection se sont réunis en un seul, et par conséquent comme une tangente; mais, si l'on considère une droite qui roule sur la courbe, lorsque le point de contact sera arrivé au rebroussement, la droite aura une position déterminée, celle de la tangente au rebroussement, qui a trois points de section confondus, et qui seule présente tous les caractères de tangente à la courbe en ce point.

D'après cela, tous les plans contenant la tangente de la courbe gauche en M (*fig.* 238) sont, sous certains rapports, tangents à la surface des développantes, mais cependant le plan de rebroussement doit être considéré comme le plan tangent en ce point.

443. Si l'on projette une courbe gauche sur un plan quelconque, tous les points de la surface des tangentes, voisins d'un point quelconque M de la courbe (*fig.* 233), se trouveront d'un même côté de sa projection ω, celui de sa convexité. Une ligne gauche présente donc sur la surface de ses tangentes le caractère de contour apparent, par rapport à tout plan de projection, ce qui montre, d'une nouvelle manière, qu'elle forme arête de rebroussement.

Définition, génération et principales propriétés des surfaces développables.

444. *On appelle* surfaces développables *celles qui, supposées flexibles et inextensibles, peuvent être déroulées sur un plan, sans déchirure ni duplicature.*

Quand un polyèdre est formé d'une série de faces planes A, B, C, ..., qui se succèdent (*fig.* 234), après l'avoir ouvert le long d'une arête Q, on peut amener l'une des faces contiguës D dans le plan de la suivante C, par un mouvement de rotation autour de l'arête commune P, puis toutes les deux dans le plan de la troisième B, et développer ainsi toute la surface ([1]). Si, au contraire, les faces planes du polyèdre ne forment pas une seule série, elles seront coupées par d'autres faces, il y aura des angles trièdres, et dans le développement il sera nécessaire d'ouvrir chacun d'eux; la surface sera donc non pas seulement déformée, mais décomposée.

Ainsi un polyèdre développable est celui qui est formé d'une série de faces planes qui se succèdent, et dont par conséquent les arêtes peuvent être regardées comme les intersections consécutives d'un plan mobile, considéré dans diverses positions. Cette proposition, étant indépendante du nombre et de la grandeur des faces, subsistera si on les suppose de plus en plus nombreuses et petites, et enfin à la limite quand le polyèdre sera devenu une surface courbe. *Une surface développable est donc l'enveloppe des positions d'un plan mobile.*

445. Les caractéristiques sont des lignes droites, intersections des plans qui forment les enveloppées particulières. Les surfaces développables sont donc *réglées*, c'est-à-dire qu'elles peuvent être engendrées par le mouvement d'une ligne droite.

Nous avons vu qu'une enveloppée touche l'enveloppe en tous les points de la caractéristique correspondante (art. **432**); une surface développable est donc tangente à un même plan le long de chacune de ses génératrices rectilignes.

([1]) Cette déformation est la même que celle que nous avons expliquée à l'article 117 pour un prisme sans base.

Réciproquement, toute surface réglée qui jouit de cette propriété est l'enveloppe d'un plan mobile, et peut être développée.

446. Chaque face B d'un polyèdre développable contient deux arêtes N et O (*fig.* 234); toutes ces droites se coupent donc deux à deux, et dans le cas général leurs intersections successives forment les sommets d'un polygone *abcd*..., qui, à la limite, devient une courbe enveloppe des génératrices. Nous voyons donc que les surfaces développables sont précisément celles dont nous nous sommes occupés aux articles **441**, **442** et **445**, et qui sont engendrées par une droite toujours tangente à une courbe gauche. Il faut y joindre le cône et le cylindre qui, comme nous l'avons reconnu, sont les limites des polyèdres développables, dont les arêtes sont convergentes vers un même point ou parallèles : ces surfaces n'ont pas d'arête de rebroussement, et l'enveloppe des génératrices se réduit à un point situé à une distance finie ou à l'infini.

447. Une face B du polyèdre développable que nous considérons contient trois sommets a, b et c du polygone formé par les arêtes. On voit, en passant à la limite, que *les plans tangents d'une développable sont osculateurs de son arête.*

Le contour apparent d'une surface développable est formé par les génératrices le long desquelles le plan tangent est perpendiculaire au plan de projection. L'arête de rebroussement étant osculatrice de tous les plans tangents, sa projection a une inflexion au point où elle rencontre la projection de chacune des génératrices du contour apparent (art. **217**) [1].

448. La propriété que les plans tangents aux surfaces développables ont d'être osculateurs de l'arête de rebroussement donne un moyen de construire le plan osculateur d'une courbe (ω, ω'), en un point donné (M, M') (*fig.* 235).

Nous cherchons les traces horizontales d'un certain nombre de tangentes de la courbe, et nous déterminons ainsi la trace $\gamma\delta$ de la développable dont cette ligne serait l'arête de rebroussement. Le plan osculateur en (M, M') est tangent à la surface tout le long de la génératrice $(M\mu, M'\mu')$; sa trace est donc la droite P tangente en μ à la courbe $\gamma\delta$.

Si l'on a des moyens géométriques d'obtenir les tangentes des courbes ω et ω', la seule incertitude du tracé consistera dans la construction de la tangente P. On pourra employer une courbe d'erreur (art. **100**), en ayant soin, au préalable, de déterminer quelques points de la trace $\gamma\delta$ suffisamment éloignés de μ, et ensuite de vérifier le tracé par la construction directe de la trace verticale P'.

Pour faire commodément les opérations, il faut que la partie considérée $\gamma\delta$ de la trace n'ait pas de rebroussement, et par conséquent que la ligne de terre ne rencontre pas la courbe ω' entre les points extrêmes C' et D'. On la déplacerait (art. **49**) s'il en était autrement.

---

[1] Ainsi la droite $j'j'_1$ a un contact du second ordre avec la courbe $A'A'_1$ (3ᵉ Partie, art. 948, *fig.* 393).

Nous verrons dans la troisième Partie que l'on peut quelquefois déterminer d'une manière plus précise la position du plan osculateur d'une courbe donnée par ses projections (art. **859-862**).

449. Si l'on coupe un polyèdre développable par un plan contenant une arête O (*fig.* 234), l'intersection se composera de cette droite indéfinie, et d'un polygone dont les sommets seront les traces sur le plan sécant des différentes arêtes M, N, P, Q, ... Les points b et c où les droites N et P rencontrent l'arête O seront deux de ces sommets. De là, et en passant à la limite, on voit que l'intersection d'une développable, avec un plan qui contient une génératrice rectiligne, se compose de cette droite, et d'une courbe qui lui est tangente, au point où elle touche l'arête de rebroussement.

Une courbe peut donc passer sans rebroussement d'une nappe à l'autre en touchant l'arête (¹). Nous serions parvenu à la même conséquence, en étudiant le chemin décrit par un point qui se meut sur la génératrice rectiligne, pendant que celle-ci roule sur son enveloppe.

450. Si la développable est algébrique et de l'ordre n, un plan contenant une génératrice la coupera, en général, suivant une courbe de l'ordre $n-1$, qui descendra à l'ordre $n-2$ quand le plan sera tangent, car alors il contiendra deux fois la génératrice de contact. Il suit de là qu'une développable algébrique à arête de rebroussement est au moins du quatrième ordre, car si une telle surface pouvait n'être que du troisième ordre, sa section par un plan tangent serait une droite tangente à la génératrice de contact, c'est-à-dire cette génératrice elle-même. Chaque génératrice rencontrerait donc toutes les autres, et, comme un même plan est tangent tout le long d'une quelconque de ces lignes, la surface serait un plan.

La développable du quatrième ordre est coupée par un plan tangent quelconque suivant une conique (²).

451. Supposons que l'on coupe une développable par deux plans parallèles P et Q (*fig.* 214), et soient A et B les courbes de section. Le cône qui a pour directrices les cercles osculateurs de ces lignes en deux points m et n appartenant à une génératrice G traverse tangentiellement la surface le long de cette droite (³). Toute section faite par un plan dans le cône et la surface développable donnera donc deux courbes osculatrices au point où la génératrice G sera coupée.

Plus le plan sécant que nous pouvons supposer parallèle à P et à Q sera rap-

(¹) Cette proposition, presque évidente, s'étend à toutes les surfaces qui ont une arête de rebroussement. Nous en avons vu un exemple à l'article 217.

(²) Pour établir l'existence de la développable du quatrième ordre, il suffit d'en donner un exemple. On trouve par un calcul facile que la surface lieu des tangentes à la courbe gauche représentée par les équations $z^2 + ax = 0$, $zy + b^2 = 0$, a une équation du quatrième degré.

(³) Il est facile de démontrer que deux cercles situés dans des plans parallèles déterminent un cône dont le sommet est sur la ligne des centres.

proché du sommet du cône, plus le rayon de courbure de la section faite dans la surface sera petit; il sera nul quand le plan passera par le sommet, et par suite ce point est sur l'arête de rebroussement. Comme d'ailleurs la direction des plans P et Q est tout à fait arbitraire, nous pouvons conclure qu'*une surface développable est osculatrice, le long de chacune de ses génératrices, d'une infinité de cônes du second ordre qui ont tous leur sommet au point où cette droite touche l'arête de rebroussement*, et que *les sections faites dans une surface développable par des plans parallèles ont, aux points situés sur une même génératrice, des rayons de courbure proportionnels aux longueurs de cette droite mesurées à partir de l'arête de rebroussement.*

Si deux sections rencontraient la génératrice considérée de côtés différents du point où elle touche l'arête, la concavité des courbes serait tournée en sens contraire.

Principales manières de déterminer les développables et les surfaces réglées en général. Cône directeur.

452. *Trois directrices* A, B et C *déterminent une surface réglée*, car on obtient sans incertitude les génératrices qui passent par un point m d'une directrice A (*fig.* 236), en prenant l'intersection des deux cônes qui ont leur sommet en ce point et respectivement pour directrices les courbes B et C. On dit que la surface est *circonscrite* aux lignes A, B et C.

Les directrices n'ayant entre elles aucune relation nécessaire, il arrivera, en général, que leurs tangentes aux points m, n et p ne seront pas dans un même plan, et par suite que la surface ne sera pas développable (art. **445**). Les surfaces développables forment donc une classe spéciale de surfaces réglées.

Les surfaces réglées qui ne peuvent pas être développées sur un plan sont dites *gauches*. Nous les étudierons plus loin.

453. *Une surface est déterminée quand elle doit être développable, et que la génératrice rectiligne est assujettie à rencontrer deux directrices données* A et B, car le plan mobile dont la surface est l'enveloppe touche toujours les deux courbes; il roule donc sur elles, et cette condition suffit pour fixer ses positions successives.

Si un plan passant par une tangente mT de la directrice A (*fig.* 237) tourne autour de cette droite, il arrivera, en général, que dans un certain nombre de ses positions il touchera la directrice B. Les droites qui vont du point m à chacun des points de contact n et n_1 sont des génératrices de la développable circonscrite aux deux courbes.

454. Le cône qui aurait son sommet en m et la ligne B pour directrice serait tangent à la développable le long des génératrices G et G_1. Cette surface est donc l'enveloppe d'un cône qui a l'une des courbes données pour directrice, et dont le sommet parcourt l'autre courbe.

Chacun de ces cônes est une développable dont toutes les génératrices rencontrent les deux lignes A et B, et si nos raisonnements ne nous ont fait trouver que leur enveloppe, c'est que nous avons supposé que le plan tangent de la surface le long d'une génératrice contenait les tangentes des deux directrices aux points où elle les rencontre, ce qui n'a pas lieu dans le cas d'un cône.

C'est en faisant abstraction des cônes que nous avons dit qu'une développable était déterminée par deux directrices.

Dans les opérations graphiques, on obtient les génératrices G et G_1, en menant par la droite mT des plans tangents au cône qui a son sommet en m et B pour directrice.

455. Si les directrices A et B sont planes (*fig.* 242), on leur mènera des tangentes d'un point T pris arbitrairement sur l'intersection XY de leurs plans, puis, joignant les points de contact deux à deux, on obtiendra des génératrices de la surface circonscrite, car deux tangentes TM et TN peuvent être considérées comme les traces d'un plan tangent à A et à B.

Quand les directrices sont des coniques, à chaque point T correspondent deux tangentes de chaque courbe et quatre génératrices de la surface. Les points M, M_1, N et N_1 sont des points doubles (art. 89), et les courbes A et B des *lignes doubles* de la développable. Si de chaque point de XY on pouvait mener à l'une des directrices trois, quatre, ... tangentes, l'autre directrice serait sur la développable une ligne triple, quadruple, ..., intersection de trois, quatre, ... parties de cette surface.

456. Quand la directrice A est tangente à l'intersection XY (*fig.* 243), le point de contact M varie seul avec la position de T, l'autre point M_1 est fixe, et les génératrices qui en divergent sont toutes dans le plan Q de la directrice B. Par conséquent, si l'on suppose que la directrice A (*fig.* 242) se meuve dans son plan, au moment où elle sera tangente à XY, la développable circonscrite se décomposera en une autre développable, et un plan, celui de la courbe B, qui pourra d'ailleurs avoir des parties parasites, c'est-à-dire n'être pas entièrement couvert par les droites allant du point M_1 aux différents points de B.

Si la directrice B est du second ordre, lorsque le point T parcourra la droite XY (*fig.* 243), chacun des rayons vecteurs M_1N_1 et M_1N décrira le plan Q, et la développable complète contiendra deux fois ce plan.

La forme de la directrice A est sans influence sur ces résultats; elle peut être plane ou gauche; il suffit qu'elle soit tangente au plan Q.

457. Supposons maintenant que la directrice A coupe l'intersection XY en un point E (*fig.* 244) : lorsque le point T mobile sur XY sera en E, la tangente TN et la génératrice MN seront confondues sur une droite EI. Réciproquement, la génératrice MN ne peut se placer dans le plan Q que si le point M est en E, et alors elle se confond avec la tangente TN : par conséquent, *la directrice plane d'une* *surface développable est touchée par toutes les génératrices qui sont dans son plan.*

458. Les droites qui touchent la directrice B en des points n et N, situés de part et d'autre de I et à de petites distances (*fig.* 244), rencontrent la droite XY en deux points t et T, placés l'un dans la concavité de A, l'autre du côté de sa convexité. On ne peut mener du premier aucune tangente à A; du second on en mène deux TM et TM_1 ([1]); il passe, par conséquent, deux génératrices de la développable par le point N, et il n'en passe pas par le point n. La directrice B forme donc une ligne double d'un côté de I, tandis qu'elle est parasite de l'autre.

Sur la *fig.* 244, la courbe A rencontre la droite XY en deux points E et F, à chacun desquels correspondent deux points limites. La directrice B est ainsi divisée en quatre arcs IJ_1, J_1J, JI_1 et I_1I : le premier et le troisième sont parasites, les autres utiles et doubles.

Dans le cas de la *fig.* 243, les tangentes menées du point M_1 à la directrice B sont des génératrices, mais cette courbe n'a sur la développable ni arc double, ni arc parasite.

459. La réciproque de la proposition que nous avons établie à l'article précédent est vraie; ainsi, si le point I est l'extrémité d'un arc utile I_1I d'une directrice B, les tangentes aux points voisins n et N auront leurs traces t et T placées de telle manière que de l'une on ne pourra pas mener des tangentes à A, et que de l'autre on en mènera deux : ce qui exige que la tangente de la directrice B en I ait sa trace sur la courbe A.

460. Si les courbes A et B sont gauches, les mêmes dispositions se reproduiront dans les mêmes circonstances, c'est-à-dire chaque fois qu'une génératrice EI sera tangente à une directrice B. Pour le prouver, on substituera à A sa projection sur son plan osculateur en E, et l'on supposera les points N et n infiniment rapprochés de I.

461. En résumé, *quand une surface développable est donnée par deux directrices, chacune de ces lignes est en général divisée en parties parasites et en parties utiles et doubles.* Il suit de là qu'on ne peut pas prendre indifféremment pour directrices d'une surface développable deux courbes quelconques tracées sur elle. Ainsi deux cercles situés dans des plans parallèles étant pris pour direc-

([1]) La directrice A peut avoir une forme telle, qu'il soit possible de lui mener des tangentes du point t, mais on en trouverait deux de plus du point T. Le point I serait alors à la limite d'un arc quadruple, par exemple, et d'un arc double. Pour éviter une complication tout à fait inutile dans les problèmes que nous avons à examiner, nous négligerons le cas où la directrice a un degré élevé de multiplicité. Ce degré est d'ailleurs le même sur toute la longueur de la courbe, si l'on a égard aux nappes imaginaires.

Cette restriction conduit à ne considérer, pour directrices, que des coniques, courbes qui n'ont ni rebroussements ni inflexions.

trices, la développable complète est composée de deux cônes, et ces cercles sont les seules directrices qui déterminent exclusivement le système de ces cônes.

462. Nous allons maintenant démontrer que l'arête de rebroussement passe à tout point limite d'un arc utile, et qu'elle y a un rebroussement.

Considérons d'abord deux courbes A et B (*fig.* 240) situées dans un même plan, et supposons qu'elles soient parcourues par deux points M et N mobiles suivant des lois quelconques, mais telles que la vitesse de M soit toujours de même sens, et que celle de N devienne nulle en un point I et change ensuite de signe; concevons enfin qu'on joigne par des droites les positions des deux points aux mêmes instants : l'enveloppe de ces lignes passera par le point I, car la droite correspondante IE rencontre de part et d'autre de I la droite qui la précède et celle qui la suit. Si, de plus, la droite IE est la tangente de B au point limite I (*fig.* 239), elle rencontrera près de ce point, mais d'un même côté, les deux droites entre lesquelles elle se trouve comprise; l'enveloppe aura donc un rebroussement en I.

463. Revenons maintenant à la *fig.* 244 : la tangente de la directrice B au point I rencontre la directrice A, et nous avons vu qu'il résulte de là que le point I est l'extrémité d'un arc utile et double de la courbe B. Par conséquent, si nous projetons sur un plan les deux directrices et les génératrices, nous aurons un système géométrique analogue à celui de la *fig.* 239. La projection de l'arête de rebroussement enveloppe des génératrices a donc un rebroussement, et, comme le plan de projection n'a pas une position déterminée par rapport à cette courbe, elle doit avoir elle-même un rebroussement.

La droite EI, étant une génératrice de la surface, se trouve tangente à l'arête de rebroussement; quand elle est normale à la directrice A, le segment compris entre le point E et l'arête est un maximum ou un minimum.

Nous appellerons *sommets* d'une développable les points qui sont les extrémités des arcs utiles d'une directrice.

464. Un plan assujetti à toucher une droite ne peut prendre qu'un mouvement de rotation autour de cette ligne; elle est le lieu de ses intersections successives, et il n'a d'autre enveloppe qu'elle. Il résulte de là que *les seules développables dont les génératrices puissent rencontrer une même droite sont des cônes ayant leur sommet sur cette ligne.*

465. Une seule directrice suffit pour déterminer une développable, quand on exige que la génératrice la rencontre deux fois. La surface est alors l'enveloppe d'un plan qui roule sur la courbe en la touchant en deux points. Elle se compose, en général, de plusieurs parties distinctes; ainsi l'intersection de deux cônes du second ordre est rencontrée deux fois par les génératrices de chacune de ces surfaces, et, suivant la position initiale du plan bitangent mobile, son enveloppe sera l'un ou l'autre de ces cônes. On pourrait même, par cette génération, obtenir deux autres cônes [1].

466. Si l'on conçoit que les génératrices d'une surface réglée soient transportées parallèlement à elles-mêmes, de manière à passer toutes par un même point choisi arbitrairement, on aura le *cône directeur* de la surface. On peut de même pour un polyèdre développable former une *pyramide directrice,* et alors le parallélisme des arêtes entraîne évidemment celui des faces. Nous concluons de là, en passant à la limite, que les plans tangents d'une surface développable sont respectivement parallèles à ceux de son cône directeur. Si on place le sommet en un point de la surface, le cône la touchera le long de la génératrice qui y passe.

Le cône directeur d'une surface réglée peut être considéré comme ayant pour directrice la section de la surface par un plan situé à l'infini.

Nous dirons que le cône directeur est *simple, double, triple*, ..., suivant que chacune de ses génératrices sera parallèle à une, deux, trois, ... génératrices de la surface.

467. *Une surface réglée est déterminée, quand la génératrice est assujettie à rencontrer deux directrices* A *et* B, *et à être toujours parallèle à l'une des génératrices d'un cône directeur* C (*fig.* 250), car la droite de la surface qui passe par le point m d'une directrice A est l'intersection du cône qui a son sommet au point m et B pour directrice, et du cône directeur transporté parallèlement à lui-même de manière que son sommet soit en m.

Si l'on exige que la surface soit développable, une seule directrice A *et le cône directeur* C (*fig.* 248) *suffisent pour la déterminer,* car, d'après ce que nous avons vu à l'article précédent, elle doit être tangente le long d'une génératrice au cône C transporté parallèlement à lui-même, de manière que son sommet se trouve en un point quelconque de A; elle est donc l'enveloppe d'un cône C' identique à C, toujours semblablement placé, et dont le sommet parcourt la directrice A.

468. Pour avoir les génératrices G' et G'_1 qui passent par un point donné m de cette courbe, on mène au cône C des plans tangents parallèles à la tangente de la directrice en m; les génératrices de contact G et G_1 sont parallèles aux droites cherchées. On trouve deux droites quand la tangente mT est du côté de la convexité du cône G'; il n'y en a pas quand la tangente est dans la concavité, et alors le point m est sur un arc parasite. Si le point m était l'extrémité d'un arc utile, la tangente mT serait une génératrice du cône et de la développable, ce que nous avons déjà reconnu par d'autres raisonnements (art. 458).

Dans le cas où le cône a des inflexions, il pourrait arriver que par une tan-

[1] Poncelet a démontré que la développable qui a pour directrice double l'intersection de deux surfaces du second ordre se compose de quatre cônes de cet ordre (*Propr. project.*, art. 611-616).

gente MT on pût lui mener plus de deux plans tangents : le point m appartiendrait alors à un arc multiple de la directrice.

469. On peut considérer le cône directeur d'une surface développable comme l'enveloppe des positions d'un plan assujetti à passer par un point fixe et à être successivement parallèle aux divers plans tangents de la surface.

En général, les plans tangents d'une surface transportés tous parallèlement à eux-mêmes, jusqu'à passer par un point fixe, ne sont pas tangents à un même cône; ils n'ont pas d'enveloppe, à moins qu'on ne considère comme telle le point qui leur appartient à tous. Lorsque ces plans sont tangents à un cône, la surface primitive est développable, car un plan qui roulerait sur elle ne pourrait après chaque position en occuper indifféremment plusieurs autres; obligé de rester parallèle au plan qui dans son mouvement toucherait toujours le cône, les positions qu'il doit successivement occuper sont déterminées, et la surface est leur enveloppe.

470. Le cône directeur sert à résoudre, pour les développables, plusieurs problèmes que nous examinerons rapidement.

1° *Plan tangent par un point extérieur.* Si l'on prend le point donné pour sommet du cône, le plan cherché lui sera tangent comme à la développable; sa trace sur un plan quelconque sera donc tangente aux traces des deux surfaces, ce qui permettra de la déterminer. Les tangentes de ces traces en deux points homologues sont parallèles et, en général, elles se confondent pour un certain nombre de couples de points. Une tangente commune dont les points de contact ne seraient pas les traces de génératrices parallèles ne correspondrait pas à un plan satisfaisant aux conditions. On arrive facilement à comprendre les différentes dispositions, en considérant un cône de révolution. Le cône directeur sera identique à cette développable, et l'on devra conduire des tangentes communes à deux cercles : on obtiendra en général quatre droites, dont deux ne seront pas les traces de plans tangents communs.

2° *Plan tangent parallèle à une droite.* On mène au cône directeur des plans tangents parallèles à la droite, et l'on cherche les génératrices de la développable qui sont parallèles aux génératrices de contact. Les plans cherchés passent par ces droites et sont respectivement parallèles aux plans tangents du cône.

3° *Branches infinies des sections planes.* On détermine les génératrices du cône directeur parallèles au plan sécant, et ensuite leurs homologues sur la développable. Les asymptotes sont les intersections des plans tangents le long de ces droites avec le plan sécant.

Ces diverses constructions sont simples quand la détermination du cône directeur ne présente pas de difficulté. Nous aurons l'occasion d'en présenter des applications dans la troisième Partie (art. **970** et suiv.).

471. Nous avons examiné les principales manières de déterminer les surfaces développables, mais il y en a plusieurs autres : ainsi un plan mobile est quelquefois assujetti à être toujours normal à une courbe; d'autres fois il doit toucher une ou plusieurs surfaces qui remplacent autant de lignes directrices.

Développement des surfaces développables.

472. Considérons un polygone rectiligne *mnop* ... (*fig.* 234) tracé sur un polyèdre développable : si nous supposons qu'on fasse tourner la face A de manière à l'amener dans le plan de la face B, le côté *mn* fera toujours le même angle avec la génératrice N, axe du mouvement. Nous concluons de là, en passant à la limite, que les angles formés par les tangentes d'une courbe tracée sur une surface développable, avec les génératrices des points de contact, ne sont pas altérés par le développement. L'angle compris entre les tangentes de deux lignes qui se coupent conserve également sa grandeur, parce qu'il est la somme ou la différence d'angles qui ne sont pas modifiés. Nous avons déjà établi cette proposition pour le cône et le cylindre (art. **115** et **122**).

473. D'après ce que nous venons de voir, les angles droits que les développantes de l'arête de rebroussement font avec les génératrices restent droits dans le développement; il en résulte que les transformées de ces courbes sont des développantes de la transformée de l'arête de rebroussement.

474. Nous allons maintenant rechercher la relation qui existe entre les rayons de courbure d'une ligne tracée sur une surface développable et ceux de sa transformée par développement.

Les côtés *on* et *op* du polygone *mr* (*fig.* 234) comprennent avant le développement un angle que nous appellerons ω, et après le développement un angle égal à $\widehat{nob} + \widehat{bop}$ ou $\beta + \gamma$. Les trois angles plans ω, β et γ forment un trièdre, et, si nous désignons par N le dièdre dont la droite *on* est l'arête, nous aurons, par la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique,

$$\cos N = \frac{\cos\gamma - \cos\omega\cos\beta}{\sin\omega\sin\beta}.$$

Posant ensuite

$$\varepsilon = 180^\circ - \omega, \quad \varepsilon' = 180^\circ - (\beta + \gamma)$$

et éliminant ω et γ, nous obtenons

$$\cos N = \frac{-\cos(\varepsilon' + \beta) + \cos\varepsilon\cos\beta}{\sin\varepsilon\sin\beta}.$$

Si le polyèdre devient une surface développable, ε et ε' seront les angles de contingence de la courbe dans laquelle se change le polygone considéré, et de sa transformée (art. **95**); N sera l'angle du plan osculateur de la courbe avec le plan tangent. Les deux plans *nop*, *nob* qui comprennent l'angle N seront l'un osculateur de la courbe en O, l'autre tangent de la surface au même point. Comme d'ailleurs le sinus d'un angle infiniment petit est égal à l'arc qui le mesure, et son cosinus à l'unité, la formule se réduit à

$$\cos N = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}.$$

Dans le développement, la longueur d'un arc n'est pas modifiée : les rayons de courbure d'une ligne et de sa transformée sont donc inversement proportionnels aux angles de contingence ε et ε'. En appelant R et R' ces rayons, nous aurons

$$\frac{R}{R'} = \frac{1}{\cos N}.$$

Par conséquent, *le rapport des rayons de courbure en deux points correspondants d'une ligne tracée sur une surface développable et de sa transformée par développement est égal à l'inverse du cosinus de l'angle que forme le plan osculateur de la ligne avec le plan tangent de la surface* [1].

475. Si l'angle *nop* avait un de ses côtés confondu avec une arête, l'autre côté tournerait autour de celui-là, et l'angle n'éprouverait aucune modification. Nous voyons ainsi que, quand une courbe tracée sur une surface développable touche une génératrice, son rayon de courbure au point de contact n'est pas altéré dans le développement, ce qui, d'après la formule précédente, exige que l'angle N soit nul, et par suite que le plan osculateur soit tangent à la surface. Le théorème démontré à l'article **216** pour le cône s'étend donc à toutes les surfaces développables.

L'arête de rebroussement étant en tout point tangente à une génératrice, ses rayons de courbure sont les mêmes que ceux de sa transformée.

476. Dans le développement, une ligne double se divise, et les deux rayons de courbure sont déterminés par les inclinaisons du plan osculateur sur les deux plans tangents. Du reste, les considérations que nous venons de présenter ne sont pas applicables aux sommets; ainsi, bien que la courbe B supposée gauche soit tangente en I à la génératrice EI (*fig.* 244), son plan osculateur ne touche pas la développable le long de cette droite : on voit en effet que, des deux éléments infiniment petits qui déterminent ce plan, l'un seulement est sur la surface, l'autre se trouvant sur la partie parasite de la directrice.

477. D'après la formule de l'article **474**, toutes les fois que l'angle N sera

[1] Ce théorème est dû à M. Catalan (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1843).

droit, R′ sera infini, et la transformée de la courbe considérée aura une inflexion. Si le plan osculateur est perpendiculaire à une génératrice, il coupera à angle droit deux plans tangents consécutifs, et la transformée de la courbe aura avec sa tangente un contact du troisième ordre. Nous avons déjà établi ces propositions pour le cône (art. **169**).

478. Une courbe tracée sur une surface développable passe d'une nappe à l'autre avec un rebroussement de premier ordre, à moins qu'elle ne soit tangente à l'arête enveloppe des génératrices. Le rayon R étant nul, R′ le sera également, et la transformée aura, elle aussi, un rebroussement de premier ordre. Si cependant le plan osculateur de la courbe est perpendiculaire au plan tangent, au point où elle rencontre l'arête de rebroussement, cos N sera nul comme R, et la formule ne donne aucune indication sur la grandeur de R′.

Pour voir ce qui arrive, supposons que le plan osculateur soit perpendiculaire au plan tangent de la surface, non pas au sommet du rebroussement, mais à une petite distance de ce point : la courbe ABC (*fig.* 246), transformée par développement de la courbe primitive, aura une inflexion en un point i voisin du rebroussement, et le bras BA traversera la tangente BT. Quand le point d'inflexion est très-rapproché de B, le point i se trouve sensiblement sur la tangente BT, et le rebroussement, quoique mathématiquement de premier ordre, se présente graphiquement comme de second ordre. Si la courbe tracée sur la surface éprouve des modifications telles, que le point d'inflexion de la transformée se déplace, lorsque ce point sera parvenu en B, le rebroussement sera rigoureusement du second ordre, et il paraîtra l'être jusqu'à ce que l'inflexion i soit assez éloignée pour que la partie du bras BC passée de l'autre côté de la tangente se détache de cette ligne.

On voit donc que, quand le plan osculateur de la courbe au point de rebroussement est perpendiculaire au plan tangent de la surface, le rebroussement de la transformée est géométriquement du second ordre, et qu'il paraît avoir les deux bras d'un même côté de la tangente, quand la perpendicularité a lieu près du point de rebroussement.

479. La réunion d'un point d'inflexion à un point de rebroussement élevant l'ordre du rebroussement d'une unité, si deux points d'inflexion i et i' viennent se confondre en B (*fig.* 247), le rebroussement deviendra du troisième ordre; mais alors le plan osculateur, étant perpendiculaire à deux plans tangents consécutifs, sera perpendiculaire à leur intersection, c'est-à-dire à la génératrice qui passe par le point et à l'arête de rebroussement qui lui est tangente.

Le rebroussement de la transformée est donc du troisième ordre, quand le plan osculateur de la courbe au point de rebroussement est normal à l'arête.

480. Pour faire le développement d'une surface développable, on considère un certain nombre de génératrices assez rapprochées pour que les parties de la surface qu'elles comprennent puissent être regardées comme planes, et on l'assimile ainsi à un polyèdre développable ayant un grand nombre de *facettes*. La construction se fait ensuite facilement : nous en donnerons plus loin un exemple (art. **492**). Dans quelques cas particuliers on peut simplifier les opérations, en ayant égard aux formes spéciales des transformées de certaines courbes.

481. Si l'on développe un polyèdre développable sur le plan d'une face, et sa pyramide directrice sur le plan de la face parallèle, les arêtes homologues des deux surfaces seront évidemment parallèles après le développement, comme elles l'étaient auparavant. Nous voyons donc, en passant à la limite, que, *si l'on développe une surface développable sur son plan tangent le long d'une génératrice, et le cône directeur sur son plan tangent le long de la génératrice parallèle, les génératrices homologues seront encore parallèles après le développement.*

482. Les *lignes géodésiques* d'une surface développable, c'est-à-dire celles dont la longueur entre deux points donnés, sur une même nappe, est un minimum, ont pour transformées des droites; leurs rayons de courbure deviennent donc infinis dans le développement, et par suite, les angles N étant droits, les plans osculateurs sont normaux à la surface.

483. Pendant qu'on déroule une développable, la partie transformée d'une ligne géodésique est droite, et l'un quelconque de ses points décrit une développante de cette courbe. La trajectoire d'un point est donc une développante de l'une quelconque des lignes géodésiques qui passent par ce point. Inversement ces lignes sont les développées de la trajectoire.

Toute ligne peut être décrite de cette manière par un point déterminé du plan de développement de la surface développable enveloppe de ses plans normaux. On voit donc qu'une courbe a une infinité de développées; elle est l'intersection commune de toutes les surfaces développables dont ces lignes sont les arêtes de rebroussement.

Nous n'avons considéré pour une courbe plane qu'une développée, celle qui est dans son plan, mais il y en a, comme on voit, une infinité; elles sont situées sur un même cylindre.

484. Deux surfaces développables flexibles peuvent être appliquées l'une sur l'autre, de manière que leurs génératrices restent droites, toutes les fois que leurs arêtes de rebroussement ont une même transformée plane; car elles ont alors un développement commun que l'on peut ramener à l'une ou l'autre des deux formes primitives.

Deux cônes quelconques sont applicables l'un sur l'autre avec coïncidence des génératrices; il en est de même de deux cylindres. Nous supposons que ces diverses surfaces peuvent être déroulées indéfiniment; sans cela, deux cylindres ne pourraient être complétement appliqués l'un sur l'autre, que si leurs sections droites avaient la même longueur.

Observations sur la distance des génératrices consécutives d'une surface développable.

485. Deux arêtes consécutives d'un polyèdre développable appartiennent à une même face et par conséquent deux génératrices infiniment voisines d'une surface développable sont dans un même plan. D'un autre côté, deux tangentes d'une courbe gauche ne se rencontrent pas, si rapprochés que soient les points de contact. Pour concilier ces résultats, qui semblent contradictoires, nous allons chercher quel est l'ordre de grandeur de la distance de deux tangentes à une courbe gauche, quand l'arc qui sépare les points de contact est infiniment petit; en d'autres termes, quelle est la limite du rapport de cette distance à l'arc.

La *fig.* 204 représente les projections d'une courbe gauche sur trois plans rectangulaires : le premier, que nous supposons horizontal, est parallèle aux droites qui touchent cette ligne en deux points peu éloignés M et N; les deux autres sont l'un parallèle et l'autre perpendiculaire à la tangente au point M.

La droite $(i, i'_1 i')$ est la commune perpendiculaire des deux tangentes; sa longueur $i'i'_1$ est égale à $N''n$, et en traçant la droite $N''M''$ on obtient

$$\overline{i'i'_1} = \overline{M''n}\,\mathrm{tang}\,\widehat{nM''N''} = Mg\,\mathrm{tang}\,\widehat{NMg}\,\mathrm{tang}\,\widehat{nM''N''}.$$

Si l'on suppose que le point (N, N') se rapproche du point (M, M'), le plan horizontal de projection tournera autour de la tangente MM'', et le plan osculateur en M sera la limite de ses positions. Le plan (MM'', M''N'') qui contient la tangente en M et le point (N, N'') a la même limite, et par suite l'angle $N''M''n$ devient infiniment petit quand la distance des points considérés est elle-même infiniment petite. Les deux premiers facteurs du second membre de l'équation deviennent également infiniment petits, et en conséquence la distance des deux génératrices est un infiniment petit du troisième ordre ([1]).

Quand deux quantités infiniment petites se trouvent en présence, on doit négliger celle qui est de l'ordre le plus élevé; par conséquent, on peut dire que deux droites qui touchent une courbe gauche en des points infiniment rapprochés se rencontrent; mais si, dans une question relative à une surface développable, autre qu'un cône, il y avait lieu de considérer des infiniment petits de troisième ordre, la distance de deux génératrices consécutives ne serait pas négligeable.

Des considérations de cette nature se présentent assez souvent dans la théorie des lignes et des surfaces courbes. L'angle de contingence d'une courbe est infiniment petit (art. **95**), et par conséquent on le néglige devant des quantités finies;

([1]) Ce théorème est dû à M. Bouquet (*Journal de M. Liouville*, t. XI, 1846).

on dit ainsi que l'angle d'une courbe avec une droite est égal à l'angle de sa tangente avec cette droite, bien qu'il y ait une différence égale à la moitié de l'angle de contingence. Mais il y a beaucoup de questions, telle que celle de la détermination du rayon de courbure, où cet angle ne doit pas être négligé, parce qu'il n'est pas ajouté à une grandeur finie et qu'il intervient par son rapport avec une quantité de même ordre de grandeur.

Lorsque deux courbes se rencontrent sur une développable, l'angle formé par les arcs dont les concavités sont opposées s'accroît, dans le développement de la surface, de la moitié de la somme des augmentations des angles de contingence; mais cette quantité doit être négligée auprès de la grandeur finie de l'angle des courbes, et par suite les transformées comprennent le même angle que les lignes primitives (art. **472**).

Quand on rencontre des difficultés du genre de celle à l'examen de laquelle nous consacrons cet article, on doit toujours rechercher l'ordre de grandeur des différentes quantités que l'on considère; on peut alors remplacer par des propositions rigoureuses des énoncés qui ne paraissent être en contradiction que parce qu'ils sont incomplets. Jusqu'à présent, pour éviter toutes difficultés et toutes objections, nous avons employé la méthode des limites; mais dans la suite de ce Traité, quand, dans une question relative à une surface développable, il n'y aura pas lieu d'avoir égard aux infiniment petits du troisième ordre, nous dirons que deux génératrices consécutives se rencontrent.

486. Pour donner un exemple des circonstances où l'on peut être conduit à considérer des infiniment petits d'ordre différent, nous allons démontrer que *le cône directeur d'une développable en est osculateur le long de la génératrice commune, quand son sommet se trouve en un point de l'arête de rebroussement*, et pour cela nous allons faire voir que les sections faites dans la surface et dans le cône ainsi placé, par un plan perpendiculaire à la génératrice commune, sont osculatrices.

Considérons trois arêtes consécutives am, bn et bo d'un polyèdre développable (*fig.* 205), et coupons-les par un plan P perpendiculaire à bo : si nous supposons que la pyramide directrice ait son sommet au point a, les arêtes am et an lui appartiendront, et l'arête parallèle à bo sera une droite ao' située dans le plan nbo. A la limite, les angles man et nbo seront infiniment petits, ainsi que le segment ab compris sur l'arête de rebroussement entre les points de contact des deux génératrices consécutives. Il suit de là que les côtés mn et no seront infiniment petits du premier ordre, et le segment oo' infiniment petit du second, car il est égal à $\overline{ab} \sin \widehat{nbo}$; on doit donc le négliger auprès des longueurs mn et no, et par conséquent les sections faites dans les deux surfaces par le plan P ont trois points communs infiniment voisins et sont osculatrices.

CHAPITRE II.

SURFACES D'OMBRE ET DE PÉNOMBRE.

Détermination de l'ombre et de la pénombre d'une aire opaque éclairée par une aire lumineuse.

487. Si une aire opaque B (*fig.* 237) arrête les rayons émis par une aire lumineuse A, le cône qui a pour directrice la courbe B et dont le sommet est en un point m de la ligne A renferme, au delà de B, les points qui ne reçoivent pas de lumière du point m. L'espace compris dans tous les cônes ayant pour directrice la courbe B et pour sommets les différents points de A ne reçoit donc aucune lumière du périmètre de l'aire lumineuse, et à plus forte raison de l'intérieur de cette aire; il est dans l'ombre. L'espace qui n'est contenu que dans quelques cônes se trouve privé d'une partie de la lumière qu'il recevrait sans l'interposition de l'écran B, et est dans la *pénombre*. Nous voyons donc que l'enveloppe de ces cônes, c'est-à-dire la développable circonscrite aux courbes A et B (art. **454**), détermine l'étendue de l'ombre et celle de la pénombre. Elle se divise en deux parties, la *développable externe* et la *développable alterne*, enveloppes respectives des plans qui touchent les deux périmètres en laissant les aires, les unes d'un même côté, et les autres de côtés différents. La première surface limite l'ombre, et la seconde la pénombre.

Détermination de l'ombre d'une ellipse éclairée par un cercle.

488. Nous allons appliquer cette théorie à un exemple très-simple, la détermination de l'ombre d'une ellipse éclairée par un cercle. Nous supposons les plans de ces aires perpendiculaires à la droite qui passe par leurs centres, et par conséquent parallèles entre eux, et, prenant un plan de projection qui leur soit parallèle, nous traçons les périmètres en véritable grandeur (*fig.* 255).

Les tangentes du cercle et de l'ellipse aux points situés sur une même génératrice de la surface d'ombre doivent être dans un même plan et sont par conséquent parallèles. Nous avons d'ailleurs un procédé facile pour déterminer les points d'une ellipse où la tangente est parallèle à une droite donnée (art. **367**); nous pouvons donc tracer les projections des génératrices qui passent par des points choisis sur le cercle. En construisant un nombre suffisant de ces droites, on détermine leur enveloppe, qui est la projection de l'arête de rebroussement.

489. Si nous concevons que l'ellipse soit remplacée par son cercle osculateur en un point m, la surface d'ombre sera un cône dont le sommet aura la position du point où la génératrice Mm rencontre l'arête de rebroussement (art. **451**).

On obtient par la considération de ce cône

$$g = \frac{Rl}{R-r}, \quad g' = \frac{Rl'}{R-r},$$

en appelant l et g les longueurs d'une génératrice mesurées depuis le cercle jusqu'à l'ellipse et jusqu'à l'arête de rebroussement, l' et g' les projections de ces longueurs sur le plan de l'une des courbes, R le rayon du cercle et r le rayon de courbure de l'ellipse.

Si l'un des rayons de courbure de l'ellipse était égal au rayon du cercle, la longueur g' serait infinie, et la génératrice correspondante serait asymptote de l'arête de rebroussement.

Sur notre figure les données sont telles, que le plus grand rayon de courbure de l'ellipse est plus petit que le rayon du cercle; par suite, l'arête de rebroussement ne s'étend pas à l'infini : la courbe est tout entière d'un même côté des plans des directrices.

Aux points C et C_1 les longueurs l et r atteignent leurs plus petites valeurs, et par suite g' a une valeur minimum. Il en résulte que la projection de l'arête de la surface a des rebroussements aux points I et I_1, où elle est touchée par les génératrices projetées BC, B_1C_1, et que l'arête elle-même possède des rebroussements aux points correspondants, car les génératrices tangentes ne sont pas perpendiculaires au plan de projection (art. **217, 218**). Les points I et I_1 sont par conséquent des sommets (art. **465**). Nous verrons, en effet, qu'une ligne double s'arrête aux points I et I_1, ou plutôt qu'elle y devient parasite.

On reconnaît par des raisonnements analogues que la longueur g est à son maximum sur les génératrices EF et E_1F_1, et que la surface a sur ces droites des sommets J et J_1.

490. Pour bien manifester la forme de la surface, nous l'avons coupée par trois plans parallèles aux plans des directrices, et placés au delà de celui de l'ellipse, de manière à intercepter sur la ligne des centres, à partir du centre de cette courbe, des longueurs égales aux trois huitièmes, aux cinq huitièmes et aux sept huitièmes de sa distance au centre du cercle.

Nous construisons facilement les sections, en portant sur chaque projection d'une génératrice, telle que Mm, et à partir du point m, des longueurs égales aux trois huitièmes, aux cinq huitièmes et aux sept huitièmes du segment Mm compris entre les deux courbes. Nous obtenons ainsi les trois lignes ee_1, kll_1k_1

et pqq_1p_1 : la première ne rencontre pas l'arête de rebroussement; les deux autres la coupent en quatre points. Les tangentes de ces courbes aux points situés sur une même génératrice sont évidemment parallèles.

On peut, à l'aide du cône osculateur que nous avons déjà considéré, obtenir la grandeur du rayon de courbure de l'ellipse aux points qui correspondent aux rebroussements d'une section, ce qui permet de déterminer les génératrices sur lesquelles ils se trouvent; nous ne nous arrèterons pas à cette recherche.

491. Nous avons représenté sur la *fig.* 254 la seconde section dégagée de toutes les constructions. Elle présente deux points doubles d et d_1; le lieu de ces points est une ligne double de la surface qui, vu la symétrie de la figure, se projette sur un segment du grand axe de l'ellipse. Cette intersection de la surface avec elle-même se termine aux points I et I_1, où les points k et l d'une part, k_1 et l_1 de l'autre, se réunissent. D'après ce que nous avons vu à l'article **459**, la ligne double a pour tangentes aux points I et I_1 les génératrices BC et B_1C_1.

On reconnaît par la considération du cône osculateur que, si l'un des plans sécants avait passé aux points I et I_1, le rayon de courbure de la section, aux points correspondants, eût été nul. Comme, d'ailleurs, le rayon de courbure atteint sa valeur minimum aux points situés sur les génératrices BC et B_1C_1, la courbe n'aurait pas eu de rebroussement. Elle eût été analogue à la développante pBq (*fig.* 257), qui forme, comme elle, la transition d'une courbe ayant deux rebroussements et un point double à une courbe qui n'a ni point double ni rebroussement (art. **459**).

L'ombre étant renfermée dans l'intérieur de la développable ne peut pas s'étendre au delà de la courbe d'intersection de la surface avec elle-même. Les segments des génératrices comprises entre cette ligne et l'ellipse appartiennent seuls à la partie de la surface qui limite l'ombre. On voit d'après cela que la première courbe ee_1 est le périmètre de l'ombre qui serait reçue sur le plan de section; que dans la seconde l'ombre n'occupe que la partie dd_1 (*fig.* 254), et enfin que la troisième pqq_1p_1 (*fig.* 255) est étrangère au problème qui nous occupe; elle se trouve au delà de la ligne double qui, comme nous venons de le voir, forme la limite de l'ombre. Il résulte de cela que le périmètre de l'ombre portée par l'ellipse sur un plan peut présenter des angles, mais non des rebroussements.

Une seconde courbe d'intersection de la surface avec elle-même s'étend entre les rebroussements J et J_1, mais elle n'a aucune importance dans la question d'ombre.

492. Nous allons maintenant faire le développement de la surface, en regardant comme planes les facettes comprises entre les génératrices tracées sur la figure : la construction ne pourra avoir que le degré d'exactitude que cette hypothèse comporte.

Nous devons tout d'abord nous donner la distance des plans de l'ellipse et du cercle qui est restée indéterminée; nous prenons arbitrairement la longueur ST (*fig.* 260), et, portant sur la perpendiculaire SX la projection du segment d'une droite compris entre les deux courbes, nous avons, dans l'hypoténuse du triangle, sa longueur dans l'espace.

Le quadrilatère plan formé par une facette entre le cercle et l'ellipse peut être décomposé en deux triangles; l'un des côtés de chacun d'eux est donné immédiatement, et l'on obtient les deux autres en construisant sur leurs projections des triangles rectangles dont le second côté est ST (*fig.* 260). Ces triangles, placés à la suite les uns des autres, font connaître la position des génératrices sur le développement. Portant ensuite sur chacune de ces lignes, telles que Mm (*fig.* 259), et à partir du point m, des longueurs égales aux trois huitièmes, aux cinq huitièmes et aux sept huitièmes du segment Mm compris entre les transformées des directrices, on obtient les points qui appartiennent aux transformées des trois sections.

Les transformées du cercle, de l'ellipse et des sections parallèles ont des tangentes parallèles aux points situés sur une même génératrice. Leurs rayons de courbure à ces points sont proportionnels aux rayons de courbure avant le développement, et par suite aux longueurs interceptées sur la génératrice à partir de l'arête de rebroussement (art. 451).

495. Si nous voulons avoir en véritable grandeur la courbe limite de l'ombre, nous prendrons deux plans coordonnés passant par la ligne des centres et respectivement par les axes de l'ellipse (*fig.* 261 et 262), et, après y avoir placé les projections BB_1 et E'_1E' du cercle, CC_1 et F'_1F' de l'ellipse, nous porterons sur ces droites les projections des points de division des courbes, relevées de la *fig.* 255. Nous pourrons ensuite tracer les projections des diverses génératrices considérées et déterminer la trace horizontale de la surface, qui est précisément la courbe que nous cherchons. Elle s'arrête aux sommets I et I_1, dont nous obtenons la position précise sur les génératrices BC et B_1C_1, en traçant les droites Ac et Ac_1 qui passent par le centre du cercle, et respectivement par les centres de courbure de l'ellipse pour les points C et C_1 [1]. Ces droites sont les lignes des centres des sections circulaires de deux cônes respectivement osculateurs le long des génératrices BC et B_1C_1.

Les droites ZZ', $Z_1Z'_1$, $Z_2Z'_2$ sont les traces des plans des sections que nous avons construites [2].

---

[1] Si C et F sont deux sommets d'une ellipse qui a son centre en O (*fig.* 256), pour avoir les rayons de courbure en ces points, il suffit d'élever les perpendiculaires Ff et Cc à la corde CF : les longueurs cherchées sont respectivement Of et Oc.

[2] Cette surface est représentée, dans la galerie de Géométrie du Conservatoire des Arts et Métiers, par un modèle où les génératrices tracées sur notre épure sont représentées par des fils.

Étude abstraite de la surface examinée dans le paragraphe précédent.

494. Les constructions et les raisonnements que nous venons de présenter sont presque tous applicables à deux courbes quelconques situées dans des plans parallèles et ayant un plan principal commun BB_1 (*fig.* 255); maintenant, en nous appuyant plus complètement sur les propriétés des directrices, nous allons déterminer la nature de la courbe à laquelle appartient la ligne d'ombre IQI_1 (*fig.* 261), et les différentes formes qu'elle peut avoir.

Nous prenons pour axes les droites Ax, Ay et $A'z$ (*fig.* 261 et 262); nous supposons que les directrices sont des coniques ayant leurs axes dans les plans coordonnés : ces axes sont BB_1 et E'_1E' pour la première, CC_1 et F'_1F' pour la seconde; nous appelons α, β, γ et α', β', γ' les coordonnées de deux points des directrices situés sur une même génératrice; enfin nous représentons les longueurs

$$AO,\ AB,\ A'E',\ OC \text{ et } O'F'$$

par

$$a,\quad b,\quad c,\quad b' \text{ et } c'.$$

Nous avons

$$(1)\qquad \alpha = 0,\quad \frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=1,$$

$$(2)\qquad \alpha' = a,\quad \frac{\beta'^2}{b'^2}+\frac{\gamma'^2}{c'^2}=1.$$

La condition que les tangentes des courbes aux points considérés soient parallèles donne

$$(3)\qquad \frac{c^2}{b^2}\frac{\beta}{\gamma}=\frac{c'^2}{b'^2}\frac{\beta'}{\gamma'}.$$

Enfin la génératrice qui passe par les points considérés a pour équations

$$y-\beta=\frac{\beta'-\beta}{\gamma'-\gamma}(z-\gamma),$$
$$x=\frac{a}{\gamma'-\gamma}(z-\gamma).$$

Pour avoir la trace horizontale de la surface, il faut d'abord faire z nul dans les équations de la génératrice, ce qui donne les relations

$$(4)\qquad (\gamma'-\gamma)y=\beta\gamma'-\gamma\beta',$$
$$(5)\qquad (\gamma'-\gamma)x=-a\gamma,$$

et ensuite éliminer les quatre variables auxiliaires β, β', γ et γ' entre les équations (1), (2), (3), (4) et (5). On peut faire disparaître successivement β', β et γ'

en prenant respectivement leurs valeurs dans (3), (1) et (5). On obtient ainsi les deux équations

$$
(6)\qquad \left\{
\begin{aligned}
x^2 &= \left[\frac{b'^2c^4}{b^2c'^4} + \left(1 - \frac{b'^2c^2}{b^2c'^2}\right)\frac{\gamma^2}{c'^2}\right](x-a)^2,\\
a^2y^2 &= b^2\left(1 - \frac{b'^2c^2}{b^2c'^2}\right)^2\left(1 - \frac{\gamma^2}{c^2}\right)(x-a)^2.
\end{aligned}
\right.
$$

Enfin l'élimination de γ^2 donne

$$
(7)\qquad \frac{a^2}{b^2c'^2 - c^2b'^2}y^2 + \frac{x^2}{c^2} - \frac{(x-a)^2}{c'^2} = 0.
$$

La courbe est donc une section conique, et il est facile de voir que dans notre exercice c'est une ellipse. L'un des axes se confond en direction avec l'axe des abscisses; l'autre est parallèle à l'axe des ordonnées. On peut vérifier que la courbe touche les génératrices horizontales aux points I et I_1.

494 *a*. On arrive par des raisonnements très-simples à reconnaître que la courbe PIQ est une ellipse.

Pour mener d'un point quelconque un plan tangent à la développable, on peut considérer ce point comme le sommet de deux cônes respectivement circonscrits aux deux directrices et par suite du second ordre, puis leur mener un plan tangent commun. Deux coniques, traces de ces cônes sur un même plan, ayant quatre tangentes communes, on voit que par un point quelconque passent quatre plans tangents à la développable.

Si le point est pris sur le plan de projection de la *fig.* 261, les quatre plans tangents auront, par rapport à ce plan, des positions symétriques, et leurs traces se confondront deux à deux. Or ces traces sont les tangentes qu'on peut mener du point considéré à la courbe PIQ; leur nombre étant de deux, cette ligne est une conique (1).

495. La développable peut être considérée comme déterminée par l'ellipse horizontale IQI_1 et par l'une des deux premières directrices; alors, en raisonnant comme à l'article **458**, nous trouvons que l'ellipse IQI_1 a deux arcs parasites Ii et I_1i_1, et deux arcs utiles II_1 et ii_1. Les génératrices qui se coupent aux différents points de l'arc ii_1 sont alternes par rapport aux deux premières directrices; elles forment donc la surface de la pénombre. Rien n'indique en effet dans nos formules si la génératrice que l'on considère est alterne ou externe, et par suite l'équation (7) doit représenter la trace horizontale des deux parties de la développable. Nous n'avons pas tracé les génératrices de la surface de la pénombre, par crainte de confusion.

(1) Cette démonstration est extraite des feuilles lithographiées du Cours professé à l'École Polytechnique par M. Mannheim.

On peut obtenir la position précise des sommets i et i_1 en traçant des droites par les centres de courbure des directrices pour les points B_1 et C, et pour les points B et C_1. Si les deux courbes étaient des ellipses ou des hyperboles, ces droites seraient distinctes de celles qui nous ont fait connaître la position précise des sommets I et I_1 (art. 495); mais, la première directrice étant un cercle, les centres de courbure pour les points B et B_1 sont réunis en A, et par suite les sommets sont deux à deux sur les lignes Ac et Ac_1. Du reste, nous allons voir à l'article suivant que, dans tous les cas, les droites Ii et I_1i_1 sont dirigées vers le point A.

496. Nous avons un quadrilatère inscrit II_1i_1i, et un quadrilatère circonscrit GC_1HC, disposés de telle manière que les sommets du premier sont les points de contact des côtés du second; par conséquent, et d'après des théorèmes connus [1] :

Les diagonales Ii_1 et I_1i du premier passent par le point de rencontre O des diagonales du second.

Les points de concours des côtés opposés du premier sont sur la droite BB_1 qui passe par les points de concours des côtés opposés du second : les droites Ii et I_1i_1 convergent donc vers le point A.

La droite BB_1 est la polaire du point O, et par suite la droite CC_1 a son pôle en A.

497. La surface possède une ligne double dans le plan vertical de projection (art. **491**); on la construit de la même manière que celle du plan horizontal, et l'on obtient son équation par de simples permutations dans l'équation (7) :

$$\frac{a^2}{c^2b'^2 - b^2c'^2}z^2 + \frac{x^2}{b^2} - \frac{(x-a)^2}{b'^2} = 0. \tag{8}$$

Avec les données des *fig.* 261 et 262, cette conique est une hyperbole; elle n'a aucune importance dans le problème d'ombre, mais pour la surface, et par rapport aux directrices, elle présente les mêmes particularités que l'ellipse PIQ : ainsi elle a deux arcs utiles $J'J'_1$ et $j''j''_1$; leurs extrémités sont deux à deux sur les droites qui vont du centre A' du cercle aux points f' et f'_1, centres de courbure de l'ellipse aux sommets F' et F'_1.

Les deux directrices sont elles-mêmes des courbes d'intersection des surfaces d'ombre et de pénombre; la *développable complète* a donc *quatre lignes doubles planes et du second degré*.

498. La projection horizontale de l'arête de rebroussement de la surface

[1] On trouve ces théorèmes dans les principaux Ouvrages relatifs aux sections coniques, et notamment dans le *Traité des Propriétés projectives* (art. 185 et 188). Le lecteur qui ne les connaîtrait pas peut vérifier, à l'aide de l'équation (7), les relations que nous indiquons.

d'ombre est limitée aux sommets I et I_1 ; pour la pénombre, la projection se terminerait aux points i et i_1. Ces arcs utiles d'une même courbe sont séparés par des parties parasites que l'on peut désirer construire.

Il est facile de tracer la projection horizontale d'une génératrice, dès que l'on connaît les valeurs correspondantes de β et de β'. L'élimination de γ et de γ' entre (1), (2) et (3) donne

$$\beta'^2 = \frac{c^2 b'^4 \beta^2}{c'^2 b^4 - (c^2 b'^2 - b^2 c'^2)\beta^2}. \tag{9}$$

Dans notre exercice c et b sont égaux, et b'^2 est plus grand que c'^2 ; il en résulte que, si l'on attribue à β^2 une valeur plus grande que b^2, β'^2 surpassera b'^2, et que les droites déterminées par les couples de valeurs de β et de β' ne seront plus des projections de génératrices.

499. Pour expliquer cette circonstance et montrer comment on peut étendre à ces droites la construction ordinaire, supposons que les directrices, au lieu d'être des ellipses, soient les hyperboles représentées par les équations

$$\alpha = 0, \quad \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} = 1, \tag{1 bis}$$

$$\alpha' = a, \quad \frac{\beta'^2}{b'^2} - \frac{\gamma'^2}{c'^2} = 1. \tag{2 bis}$$

La condition du parallélisme des tangentes sera exprimée comme précédemment par l'équation (3), et l'élimination de γ et de γ' entre (1 *bis*), (2 *bis*) et (3) fera trouver l'équation (9) qui convient ainsi à la nouvelle développable, de telle sorte que les projections horizontales des deux arêtes de rebroussement forment une seule courbe dans laquelle les arcs utiles pour l'une des surfaces sont parasites pour l'autre.

500. On voit, d'après ce qui précède, que les deux surfaces d'ombre et de pénombre ne forment qu'une même développable ; mais nous devons faire observer que leurs développements n'ont entre eux aucune relation de position, et que les lignes doubles y ont des transformées différentes. Cette circonstance se présente toutes les fois que la développable est l'enveloppe de plans formant des séries distinctes.

Observations sur la développable circonscrite à deux sections coniques situées dans des plans parallèles.

501. Nous avons vu que la développable représentée sur les *Pl. XXVI* et *XXVII* avait quatre lignes doubles du second degré, situées dans les plans (BB_1, E'_1E'), (CC_1, F'_1F') et dans les deux plans de projection. Nous appellerons ces courbes *première, deuxième, troisième* et *quatrième directrices*, et nous les désignerons par $\Delta, \Delta', \Delta''$ et Δ''' : la surface peut être déterminée par deux quelconques d'entre elles.

Nous allons présenter quelques observations sur cette développable, mais auparavant nous devons donner aux résultats que nous avons obtenus une extension importante.

502. *Deux coniques situées dans des plans parallèles ont un système de diamètres conjugués parallèles.* Pour prouver ce théorème, concevons que l'on transporte l'une des courbes parallèlement à elle-même dans le plan de la seconde, de manière que les centres coïncident, et qu'on la fasse ensuite passer par tous les états de grandeur, en restant semblable à elle-même : il y aura un moment où elle touchera en deux points la courbe restée invariable. Le diamètre passant par ces points et celui qui est parallèle aux tangentes communes sont évidemment conjugués dans les deux coniques, ce qui démontre le lemme énoncé.

On obtiendra toujours un double contact réel quand l'une des lignes sera une ellipse; mais lorsqu'elles seront toutes les deux des hyperboles, si leurs asymptotes sont croisées, c'est-à-dire si, lorsqu'elles seront amenées à être concentriques, les deux asymptotes de l'une ne sont pas dans le même angle des asymptotes de l'autre (*fig.* 249), elles auront dans cette position deux points communs réels R et S, et deux seulement. Alors, quelque grandeur que l'on suppose à l'une d'elles, dans l'un ou dans l'autre angle de ses asymptotes, les rencontres R et S ne se changeront pas en contacts, car il n'y a pas d'autres rencontres qui puissent se réunir à elles : les courbes considérées n'ont donc pas de diamètres conjugués parallèles.

503. Deux coniques Δ et Δ' étant données dans des plans parallèles, si nous prenons pour plans coordonnés celui de l'une d'elles et les plans de leurs diamètres conjugués parallèles, les calculs des articles **494** et suivants seront entièrement applicables à la développable circonscrite, car les équations fondamentales (1), (2), (3), (4) et (5) ne supposent nullement que les axes soient rectangulaires. La surface a donc, outre Δ et Δ', deux lignes doubles du second degré Δ'' et Δ''', situées dans les plans des diamètres conjugués parallèles des directrices données, ayant leurs centres sur la ligne des centres de ces courbes, et telles que, pour chacune d'elles, le diamètre conjugué avec cette droite est parallèle aux plans de Δ et Δ'. Toutes les relations graphiques que nous avons établies, et notamment celles de polarité, subsistent.

Lorsque les directrices Δ et Δ' sont des hyperboles ayant leurs asymptotes croisées, les plans des diamètres conjugués parallèles sont imaginaires, et les courbes Δ'' et Δ''' n'existent plus.

504. Quand deux coniques situées sur un plan se touchent en deux points, la droite qui passe par le point de concours des tangentes communes et par le milieu de la corde de contact contient les centres des deux courbes, et les diamètres qui lui sont conjugués dans l'une et dans l'autre sont parallèles à la corde de contact. Le système des diamètres conjugués parallèles est donc tel, que deux de ces droites se confondent en direction.

Cette proposition va nous permettre d'établir que la développable n'a pas de point double en dehors des lignes Δ, Δ', Δ'' et Δ'''.

Nous considérons sur cette surface un point double étranger aux directrices Δ et Δ' qui sont situées dans des plans parallèles; nous appelons ce point S, et nous désignons par G et G_1 les deux génératrices qui s'y croisent : un cône ayant son sommet en S et Δ' pour directrice sera tangent à la développable le long de G et de G_1, et sa trace sur le plan de Δ sera une conique Δ'_1, homothétique à Δ' et tangente à Δ aux points de cette courbe qui appartiennent à G et à G_1; les coniques Δ et Δ'_1 auront donc un double contact, et par suite leurs diamètres conjugués parallèles seront tels, que deux de ces lignes seront confondues en direction. Le plan qui passe par ce diamètre commun, et par le diamètre de Δ' qui lui est parallèle, contient la ligne des centres de Δ'_1 et de Δ', et par suite le sommet S du cône. Mais deux diamètres conjugués de Δ'_1 sont respectivement parallèles à deux diamètres conjugués de Δ'; le plan dont nous venons de parler est donc l'un des deux plans qui sont déterminés par les diamètres conjugués parallèles de Δ et de Δ', et, comme il contient le point S, on voit que ce point appartient à Δ'' ou à Δ'''.

Les quatre coniques Δ, Δ', Δ'' et Δ''' sont ainsi les seules lignes doubles de la développable, et par suite les seules lignes qui, prises pour directrices, déterminent la surface sans addition de nappes étrangères. Cette propriété justifie l'expression de *directrices* par laquelle nous les désignons (art. **461**).

505. On déduit sans difficulté de l'équation (7) l'abscisse n du centre L de la troisième directrice Δ'', et les longueurs p et q des moitiés de ses diamètres conjugués parallèles aux axes AOx et ABy (*fig.* 261) :

$$(10) \qquad n = \frac{ac^2}{c^2 - c'^2}, \quad p^2 = \frac{a^2c^2c'^2}{(c^2 - c'^2)^2}, \quad q^2 = \frac{c^2b'^2 - b^2c'^2}{c^2 - c'^2}.$$

On peut, d'après ces équations, étudier les variations de forme de la troisième directrice, dans différentes hypothèses faites sur les deux premières, mais nous ne nous arrêterons pas à cette discussion, et nous supposerons que la surface est donnée par les directrices Δ et Δ''. Alors, résolvant les équations (10) par rapport à a, b' et c', nous aurons pour déterminer la seconde directrice Δ' les relations

$$(11) \qquad a = n - \frac{p^2}{n}, \quad b'^2 = \frac{p^2b^2 + q^2n^2 - p^2q^2}{n^2}, \quad c'^2 = c^2\frac{p^2}{n^2}.$$

L'équation (8) de la quatrième directrice devient, lorsqu'on y porte les valeurs (11) de a, b'^2 et c'^2,

$$\frac{p^2b^2 + q^2n^2 - p^2q^2}{c^2q^2}z^2 + \frac{q^2 - b^2}{b^2}x^2 + 2nx + p^2 - n^2 = 0. \tag{12}$$

506. Ces équations permettent de reconnaître la nature des coniques Δ' et Δ''' dans les différents cas qui peuvent se présenter. Nous n'examinerons que les principaux.

507. Quand la troisième directrice Δ'' passe par les points B et B_1 (*fig.* 261), la valeur de b'^2 est nulle, et la deuxième directrice se réduit à une droite; la surface est alors formée de deux cônes du second degré dont les sommets F′ et F'_1 ont pour coordonnées a, 0 et $\pm c'$ (*fig.* 263), les longueurs a et c' étant données par les équations (11). Ces deux points F′ et F'_1 sont les seuls de la deuxième directrice qui soient utiles.

En faisant b' nul dans l'équation (8), on trouve que la quatrième directrice se réduit comme la seconde à la ligne des sommets.

508. Si la troisième directrice, restant invariable de forme, se transporte parallèlement à elle-même, de manière que son centre parcoure l'axe des abscisses, dans deux positions la surface présentera des particularités remarquables.

Quand Δ et Δ'' sont concentriques, n est nul, et l'on voit par les équations (11) que a, b' et c' ont des valeurs infinies : la seconde directrice Δ' est donc transportée à l'infini. L'équation (12) de Δ''' devient alors

$$\left(1 - \frac{b^2}{q^2}\right)\frac{z^2}{c^2} + \left(1 - \frac{q^2}{b^2}\right)\frac{x^2}{p^2} = 1.$$

On voit que cette conique a le même centre que Δ et Δ'', et que les traces des plans de deux directrices sur le plan de la troisième forment, pour celle-ci, un système de diamètres conjugués.

En faisant différentes hypothèses sur les signes des carrés b^2, c^2, p^2 et q^2, on reconnaît que les trois coniques concentriques sont nécessairement deux ellipses et une hyperbole ou trois hyperboles.

Quand les directrices données sont une ellipse et une hyperbole, la troisième conique peut être imaginaire, et alors, comme son plan est réel, la surface elle-même est imaginaire (art. **506**).

509. Lorsque la troisième directrice Δ'' touche le plan de la première, n^2 est égal à p^2, et l'on reconnaît par les équations (11) que Δ' se confond avec Δ. La surface de la pénombre est alors aplatie, et forme deux fois le plan de la courbe Δ, qui n'est plus une ligne double de la développable proprement dite, mais une simple section plane n'ayant de remarquable que d'être du second degré. On voit d'ailleurs par l'équation (12) que la quatrième directrice se trouve, comme la seconde, tangente au plan de la première. Ces résultats pouvaient être prévus d'après les considérations présentées à l'article **456**.

510. Si l'on donne les troisième et quatrième directrices, c'est-à-dire deux courbes quelconques du second degré, ayant leurs centres sur la droite d'intersection de leurs plans, on trouvera deux autres directrices Δ et Δ', situées dans des plans parallèles aux diamètres des courbes données, conjuguées avec la droite des centres, et dont la position précise sera fixée par les relations de polarité que nous avons établies; ainsi les points A et O (*fig.* 241) seront les centres de Δ et de Δ', si la polaire de A par rapport à Δ'' passe par O, et si la polaire de O par rapport à Δ''' passe par A. Alors on aura

$$\mathrm{LK} = \mathrm{LO} + \mathrm{OK} = \frac{\overline{\mathrm{LP}}^2}{\mathrm{LA}} + \frac{\overline{\mathrm{KG}}^2}{\mathrm{AK}}$$

ou bien

$$n_1 = \frac{p^2}{n} + \frac{p'^2}{n_1 - n},$$

en posant

$$\mathrm{LP} = p, \quad \mathrm{KG} = p', \quad \mathrm{LK} = n_1, \quad \mathrm{LA} = n.$$

Résolvant l'équation par rapport à l'abscisse inconnue n (¹), on trouve,

$$n = \frac{p^2 - p'^2 + n_1^2 \pm \sqrt{(p^2 - p'^2 + n_1^2)^2 - 4p^2 n_1^2}}{2n_1}.$$

Les deux valeurs de n sont les abscisses des points A et O; la position des plans de Δ et Δ' est donc déterminée.

Le seul cas auquel nous nous arrêterons est celui où les valeurs de n sont imaginaires, parce que nous avons examiné dans la discussion précédente la disposition de la surface, quand les plans des directrices Δ et Δ' sont réels.

La quantité soumise au radical est essentiellement positive quand p^2 est négatif, et aussi quand p'^2 est négatif, car on reconnait facilement que l'on peut y faire permuter p^2 avec p'^2. Les plans des deux premières directrices Δ et Δ' ne peuvent donc devenir imaginaires que quand les deux dernières Δ'' et Δ''' rencontrent le diamètre suivant lequel se coupent leurs plans.

En mettant l'équation précédente sous la forme

$$n = \frac{p^2 - p'^2 + n_1^2 \pm \sqrt{[n_1^2 - (p' + p)^2][n_1^2 - (p - p')^2]}}{2n_1},$$

on reconnait que les valeurs de n sont imaginaires lorsque l'on a

$$n_1 < p + p', \quad n_1 > \pm (p - p'),$$

(¹) n représente la même longueur que dans les articles précédents, mais avec un signe contraire, parce que l'origine des abscisses a été transportée du point A, qui est inconnu, au centre L de Δ''.

ce qui exige que les points de rencontre P et Q, H et G soient alternes. Dans ce cas, la développable n'a pas d'autre ligne double que les directrices Δ et Δ'' (¹).

511. *Relations entre les segments interceptés sur les génératrices.* Nous allons maintenant étudier les relations qui existent entre les longueurs des segments interceptés sur une génératrice par les quatre directrices.

La génératrice qui passe par le point (M, M') (*fig.* 261 et 262), dont les coordonnées sont β et γ, rencontre la troisième directrice en un point u dont l'abscisse $\mathrm{A}t$ est la valeur de x donnée par la première des deux équations (6) (art. **494**). Par conséquent, si nous posons

$$\mathrm{R}^2 = \frac{b'^2 c^4}{b^2 c'^4} + \left(1 - \frac{b'^2 c^2}{b^2 c'^2}\right)\frac{\gamma^2}{c'^2},$$

nous aurons

$$\overline{\mathrm{A}t}^2 = \mathrm{R}^2(\overline{\mathrm{A}t} - a)^2,$$

d'où

$$\overline{\mathrm{A}t} = \frac{a\mathrm{R}}{\mathrm{R} - 1}.$$

$\mathrm{A}g$ est l'abscisse du point où la même génératrice rencontre la directrice Δ ; nous aurons donc, par de simples permutations de lettres,

$$\overline{\mathrm{A}g} = \frac{a\mathrm{R}'}{\mathrm{R}' - 1},$$

$$\mathrm{R}'^2 = \frac{c'^2 b^4}{c^2 b'^4} + \left(1 - \frac{c'^2 b^2}{c^2 b'^2}\right)\frac{\beta^2}{b'^2}.$$

Portant dans cette dernière équation la valeur de β^2 prise dans l'équation (1), et posant

$$(13) \qquad \lambda = \frac{b^2 c'^2}{b'^2 c^2},$$

(¹) Si l'on a deux coniques Δ et Δ' (*fig.* 264), situées dans deux plans P et Q qui se coupent suivant une droite XY, on peut concevoir que l'on fasse une déformation homologique ou perspective relief, dans laquelle cette ligne s'éloigne à l'infini. Les plans P_1 et Q_1, homologues de P et de Q, seront parallèles, et la développable circonscrite aux courbes Δ_1 et Δ'_1 transformées de Δ et de Δ', aura, outre Δ_1 et Δ'_1, deux lignes doubles planes et du second degré qui pourront être imaginaires. La développable circonscrite à Δ et Δ' jouit donc de la même propriété.

Les pôles A et O de XY sont homologues des centres de Δ_1 et Δ'_1 ; les diamètres conjugués parallèles de ces dernières coniques ont pour homologues sur P et Q les droites qui passent par les points A et O, et qui se rencontrent en des points g et h de XY, tels que l'un quelconque soit le pôle des droites qui vont des points A et O à l'autre.

Les points g et h sont réciproques dans le système des deux coniques Δ et Δ'. Les droites $\mathrm{A}g$ et $\mathrm{O}g$ d'une part, $\mathrm{A}h$ et $\mathrm{O}h$ de l'autre, déterminent les plans des directrices Δ'' et Δ'''.

Le tétraèdre formé par les plans des quatre lignes doubles a ses sommets aux points g, h, A et O ; deux quelconques d'entre eux sont réciproques pour les coniques dont les plans se coupent suivant la droite sur laquelle ils se trouvent.

on trouve

$$R' = \lambda R.$$

Les expressions R et R′ sont affectées des deux signes; dans la disposition adoptée sur nos figures, elles sont positives pour les génératrices qui appartiennent à la surface de l'ombre et négatives pour celles de la surface de la pénombre, car les abscisses At et Ag des traces de l'une des premières droites sont plus grandes que a, et pour une des dernières ces mêmes longueurs sont plus petites que a. La formule (13) fait connaître leur rapport λ sans ambiguïté de signe.

Portant la valeur de R′ dans l'expression de Ag, on obtient

$$\overline{Ag} = \frac{a\lambda R}{\lambda R - 1}.$$

On trouve ensuite

$$\overline{Ot} = \frac{aR}{R-1} - a = \frac{a}{R-1},$$

$$\overline{Og} = \frac{a\lambda R}{\lambda R - 1} - a = \frac{a}{\lambda R - 1}.$$

On déduit enfin de ces expressions, et de celle qui a été obtenue précédemment pour At,

$$\frac{Ag}{Og} : \frac{At}{Ot} = \lambda.$$

512. Lorsque l'on établit des relations entre des segments faits sur une même droite, pour que les formules conviennent à la figure, quelle que soit la disposition relative de ses parties, il est nécessaire de regarder un segment comme changeant de signe chaque fois que l'ordre dans lequel ses extrémités se présentent est interverti. Afin d'appliquer facilement cette règle, on prend pour *origine* d'un segment le point représenté par la première des deux lettres qui servent à le désigner, et on le regarde comme étant positif ou négatif suivant qu'à partir de son origine il est dirigé dans un même sens convenu ou en sens contraire. Sur notre figure cette direction sera celle que nous avons adoptée pour les abscisses positives. Dans la formule qui précède, les segments ont leur origine au point A ou au point O : ils sont tous positifs.

D'après ce que nous venons de dire, Ag est égal à $-gA$; nous aurons donc, en changeant les signes des segments,

$$\frac{gA}{gO} : \frac{tA}{tO} = \lambda.$$

Ici les segments sont négatifs; mais, quand il n'entre dans une formule que des rapports de segments ayant une même origine, on peut ne pas s'inquiéter du signe de chacun d'eux et considérer un rapport comme positif ou négatif, suivant que ses deux segments sont dirigés dans le même sens ou en sens contraire à partir de leur extrémité commune.

513. Les segments de la droite Mg sont proportionnels à leurs projections sur Ax; nous avons donc

$$\frac{gM}{gm} : \frac{uM}{um} = \lambda. \tag{14}$$

Enfin la même équation continuera de subsister si les différentes lettres représentent les points de la génératrice qui sont sur les quatre directrices, au lieu de leurs projections horizontales.

L'expression $\frac{gM}{gm} : \frac{uM}{um}$ est le *rapport anharmonique* des quatre points g, u, M et m situés en ligne droite : c'est le *rapport des distances du premier point aux deux derniers, divisé par le rapport des distances du second à ceux-là*. Le théorème exprimé par l'équation (14) consiste donc en ce que, *dans la développable circonscrite à deux coniques, le rapport anharmonique des quatre points où une génératrice quelconque rencontre les quatre directrices est constant.*

L'équation (13) montre que, quand les directrices Δ et Δ' sont de même genre, le rapport constant λ est positif; il est égal à l'unité lorsque ces courbes sont semblables, et l'on reconnait facilement, d'après l'équation (14), que les points g et u se réunissent. La surface est alors composée de deux cônes, et chaque génératrice coupe les deux plans de Δ'' et de Δ''' en un seul point qui remplace ces deux coniques.

514. On rencontre souvent, dans les recherches géométriques, des systèmes de quatre points g, u, M, m dont le rapport anharmonique λ est égal à l'unité négative : on dit alors que la division est *harmonique*, ou que les deux premiers points sont *conjugués harmoniques* des deux autres.

515. On déduit de l'équation (14)

$$\lambda = \frac{gM \times um}{gm \times uM} = \frac{gM \times um}{(gu + um)(um + mM)} = \frac{gM \times um}{gu \times mM + um(gu + um + mM)},$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{gu \times mM}{gM \times um} + 1,$$

et enfin

$$\lambda' = 1 - \frac{1}{\lambda}, \tag{15}$$

en posant

$$\frac{gu}{gM} : \frac{mu}{mM} = \lambda'. \tag{16}$$

On obtient par des transformations analogues

$$\lambda'' = \frac{1}{1 - \lambda}, \quad \frac{gm}{gu} : \frac{Mm}{Mu} = \lambda''.$$

λ' et λ'' sont deux nouveaux rapports anharmoniques des points de division. Quatre points en ligne droite déterminent ainsi trois rapports anharmoniques distincts, qui ont entre eux des relations simples.

516. Si nous portons les valeurs (11) de b'^2 et de c'^2 (art. **505**) dans l'expression (13), et la quantité ainsi obtenue pour λ dans l'équation (15), nous aurons

$$\lambda' = q^2\frac{p^2 - n^2}{b^2 p^2}.$$

Quand n est nul, la valeur de λ' se réduit à $\frac{q^2}{b^2}$ et nous savons que Δ, Δ'' et Δ''' sont alors concentriques et que Δ' est à l'infini (art. **508**). Lorsque le point m s'éloigne, le rapport $\frac{mu}{m\mathrm{M}}$ converge vers l'unité et atteint cette limite quand la directrice à laquelle il appartient est à l'infini. On a donc, dans le cas qui nous occupe,

$$\frac{gu}{g\mathrm{M}} = \frac{q^2}{b^2}.$$

Cette relation, qu'il est facile d'obtenir directement, montre que, *dans la développable circonscrite à deux coniques concentriques, les segments interceptés par les trois directrices sur une génératrice sont dans un rapport constant.*

Le rapport de gu à $g\mathrm{M}$ (*fig.* 261) est le même que celui de tu à AM. Les directrices Δ'' et Δ étant d'ailleurs devenues concentriques, les longueurs tu et AM sont les abscisses des points u et M de ces courbes, mesurées sur la droite diamétrale commune $\mathrm{A}y$; donc, *si l'on considère les points où une génératrice rencontre deux directrices, leurs abscisses sur le diamètre commun seront dans un rapport constant.*

517. *Groupes de génératrices.* Considérons quatre points M, N, R et S situés sur la première directrice Δ (*fig.* 255), et disposés de manière à former les sommets d'un quadrilatère ayant ses côtés parallèles aux diamètres conjugués parallèles de Δ et Δ' : par ces points passent huit génératrices qui se croisent aux points m, n, r et s placés d'une manière analogue sur Δ'. Ces génératrices sont

Mm,	Nn,
Ss,	Rr,
Nr,	Ms,
Rn,	Sm.

Les quatre d'entre elles qui appartiennent à la surface de la pénombre ont été tracées par exception.

518. Nous regarderons ces huit droites comme formant un *groupe*, et appartenant à deux *systèmes* différents. Chaque génératrice de l'un des systèmes rencontre celles de l'autre qui dépendent du même groupe en des points qui sont sur les quatre directrices. Deux génératrices ne se rencontrent jamais, lorsqu'elles dépendent de groupes différents ou d'un même système dans un groupe.

Les huit génératrices d'un groupe appartiennent évidemment à un hyperboloïde.

519. Dans un exercice graphique, on ne peut obtenir des points des directrices inconnues qu'en opérant sur des groupes de génératrices. Il est donc intéressant de savoir comment les quatre points d'un même groupe sont disposés sur les deux coniques Δ'' et Δ'''.

Les quatre points M, N, R et S ont des ordonnées égales en grandeur absolue; le groupe auquel ils appartiennent peut être considéré comme déterminé par le carré γ^2 de cette ordonnée; par conséquent, si l'on attribue à γ^2 la valeur $\overline{M'A'}^2$ (*fig.* 262), chacune des équations (6) de l'article **494** sera celle d'une ligne passant par les quatre points u, u_1, v et v_1 (*fig.* 261), traces horizontales des génératrices du groupe dont nous nous occupons. La première équation représente deux droites vv_1 et uu_1 parallèles à l'axe Ay; la seconde, deux droites vu_1 et uv_1 qui se croisent en O. En les divisant l'une par l'autre, on obtient une troisième équation qui détermine deux droites dirigées vers le point A.

Les quatre points g', g'_1, k' et k'_1, traces des génératrices du groupe sur le plan de Δ''', sont également placés de telle manière, que les droites qui les joignent deux à deux convergent les unes vers le point A', les autres vers le point O', et les dernières vers le point à l'infini où les traces des plans de Δ et de Δ' se rencontrent.

520. Les quatre sommets I, I_1, i et i_1, situés sur Δ'', satisfont aux relations que nous venons d'indiquer, et déterminent un groupe qui correspond à la valeur o de γ^2. Ce groupe ne contient que quatre génératrices, et par suite il n'a que deux points sur les autres directrices : B et B_1 sur Δ, C et C_1 sur Δ', H' et G' sur Δ'''.

Une disposition analogue existe pour les sommets placés sur Δ'''.

La considération des groupes simples permet de reconnaître le nombre des sommets de la surface, dans les différentes hypothèses que l'on peut faire sur les directrices Δ et Δ'. Nous remarquerons que, quand la développable a des sommets sur l'une de ces deux courbes, telle que Δ', les tangentes en ces points doivent être des génératrices (art. **457**), et, comme elles sont parallèles au plan de Δ, les points où elles rencontrent cette directrice sont à l'infini, et elles sont par conséquent parallèles à ses asymptotes. Elles forment d'ailleurs évidemment un groupe simple.

521. *Discussion du nombre des sommets.* Nous distinguerons six dispositions principales.

1° Quand les directrices Δ et Δ' sont des ellipses situées d'une manière quelconque dans des plans parallèles, les plans des diamètres conjugués parallèles sont réels, et contiennent des groupes simples qui déterminent quatre sommets sur chacune des directrices Δ″ et Δ‴; mais il n'y en a pas sur les premières Δ et Δ′, parce qu'aucune d'elles n'a d'asymptotes : la surface a donc en tout huit sommets réels (*fig.* 255).

2° Quand la première directrice Δ est une ellipse, et la seconde Δ′ une hyperbole, les plans des diamètres conjugués parallèles sont encore réels, mais l'un de ces diamètres Nn (*fig.* 253) ne rencontre pas l'hyperbole, et le groupe simple correspondant est imaginaire avec les sommets qu'il contient sur Δ‴. D'un autre côté, la première directrice Δ porte quatre sommets aux points I, I_1, i et i_1 où la tangente est parallèle à l'une des asymptotes de l'hyperbole Δ′ : la surface a donc huit sommets sur les directrices Δ et Δ″ [1].

3° Lorsque les directrices Δ et Δ′ sont des hyperboles, si dans le système des diamètres conjugués parallèles les diamètres transverses sont sur la même droite (*fig.* 252), il y a un groupe simple réel dans leur plan Oy, et par suite quatre sommets sur la directrice Δ″ qu'il contient. Il y en a quatre autres I, I_1, i et i_1 sur l'hyperbole Δ′ pour laquelle l'angle des asymptotes est le plus petit : la surface a donc encore huit sommets.

4° Les directrices Δ et Δ′ étant toujours des hyperboles, si les diamètres transverses dans le système des diamètres conjugués parallèles ne sont pas sur la même droite, la surface pourra être imaginaire (*fig.* 265); lorsqu'elle sera réelle, les deux groupes contenus dans les plans Non, Mom des diamètres conjugués parallèles (*fig.* 266) seront imaginaires, mais ceux formés par les tangentes des premières directrices réciproquement parallèles aux asymptotes seront réels, et la surface aura huit sommets placés quatre à quatre sur Δ et Δ′.

5° Lorsque les diamètres conjugués parallèles des hyperboles Δ et Δ′ sont imaginaires (*fig.* 249), on ne peut plus former que des *groupes incomplets* contenant chacun quatre génératrices, telles que MM′, MN′, NM′ et NN′. Les directrices Δ″ et Δ‴ sont imaginaires, et la surface a seulement quatre sommets I, I_1, J et J_1 placés sur les directrices Δ et Δ′, et dépendant de groupes simples formés chacun de quatre génératrices.

Dans ce cas la surface n'est plus composée de deux parties distinctes; elle peut être déroulée sur un plan par un même développement.

6° Si les plans des directrices Δ et Δ′ sont imaginaires, la surface sera donnée par deux lignes doubles Δ″ et Δ‴, ayant leurs centres sur la droite d'intersection de leurs plans, et telles que leurs points de rencontre avec ces lignes soient réels et alternes (art. **510**). On pourra alors mener à chaque courbe deux tangentes de

[1] Quand deux coniques sont concentriques, leurs diamètres conjugués communs en direction sont les diagonales du parallélogramme formé par les tangentes de l'une parallèles aux asymptotes de l'autre. Nous nous sommes servi de cette propriété, dont la démonstration est facile, pour l'établissement des *fig.* 252, 253 et 266.

l'un des points où l'autre perce son plan. La développable aura ainsi deux sommets sur chacune des directrices réelles.

522. Telles sont les dispositions différentes que la surface présente quand deux directrices sont des coniques à centre situées dans des plans parallèles [1]. On doit distinguer deux grandes variétés. Dans la première, la surface se divise en deux parties ayant chacune son arête de rebroussement distincte; elle a quatre lignes doubles réelles, dont deux portent quatre sommets. Quatre des huit sommets sont sur une partie de l'arête de rebroussement, et les quatre autres sur l'autre. Les groupes ordinaires se composent de huit génératrices, et les groupes simples de quatre.

Dans la seconde variété, la surface ne se divise pas en deux parties. Elle a deux lignes doubles dont chacune porte deux sommets. Les groupes ordinaires se composent de quatre génératrices, et les groupes simples de deux.

Enfin, la surface peut être imaginaire.

Détermination générale des surfaces d'ombre et de pénombre. — Développable circonscrite à deux surfaces du second degré.

523. *Considérations générales.* L'exercice auquel sont consacrées les *Pl. XXIV, XXV, XXVI* et *XXVII* montre comment on peut résoudre les problèmes graphiques qui se rattachent à la détermination de l'ombre d'une aire opaque éclairée par une aire lumineuse. Il sera souvent nécessaire de couper la développable par des plans, pour obtenir des points de sa courbe d'intersection avec elle-même. L'ombre sera indéfinie quand la surface n'aura pas de ligne double du côté de l'aire opaque, et quand elle en aura une dont la partie utile s'étendra à l'infini.

524. La surface générale de l'ombre ne sera pas modifiée si l'on remplace les aires par des corps dont les surfaces lui soient inscrites. L'ombre d'un corps opaque éclairé par un corps lumineux est donc limitée par l'enveloppe des positions d'un plan qui se meut en les touchant toujours, et les laissant d'un même côté. On trouve par un raisonnement analogue que, si les corps étaient de côtés différents du plan mobile, l'enveloppe formerait la surface de la pénombre.

---

[1] Lorsque les directrices données ne sont pas dans des plans parallèles, les points M, N, R et S d'un même groupe (*fig.* 264) sont les sommets d'un quadrilatère dont les côtés convergent deux à deux vers les points g et h (art. 510, note), et dont les diagonales se croisent au pôle A de XY.

Quand l'une des courbes Δ et Δ' ne rencontre pas la droite XY, sa transformée est une ellipse, et la surface a huit sommets; mais si les deux directrices coupent XY, et si les points de section sont alternes (*fig.* 267), les transformées seront des hyperboles ayant la disposition indiquée sur la *fig.* 249, et alors la surface n'aura que deux lignes doubles Δ et Δ', et quatre sommets I, I_1, J et J_1. Enfin, si les coniques étaient disposées comme il est indiqué sur la *fig.* 251, la perspective leur donnerait les positions relatives indiquées sur la *fig.* 265, et la surface serait imaginaire.

Il arrive quelquefois que la développable complète se compose de deux cônes; mais, en général, elle a une arête de rebroussement, et sa détermination exige des tracés très-longs. On peut obtenir des génératrices en menant des plans tangents communs à deux cylindres respectivement circonscrits aux surfaces et parallèles à une même direction arbitraire, et en joignant par des droites les points où un même plan touche les deux surfaces. Pour avoir un résultat de quelque exactitude, il faut répéter cette opération un assez grand nombre de fois.

525. *Surfaces du second degré inscrites dans la développable circonscrite à deux coniques.* Nous allons rechercher si des surfaces du second degré peuvent être inscrites dans la développable qui est représentée dans les *Pl. XXIV*, *XXVI* et *XXVII*. Nous conserverons les notations de l'article **494**.

Pour qu'un plan

$$Ax + By + Cz = 1 \tag{1}$$

soit tangent à la développable, il faut qu'il contienne les tangentes des directrices Δ et Δ', en deux points d'une même génératrice; les équations de ces tangentes sont

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\beta}{b^2}y + \dfrac{\gamma}{c^2}z = 1, \\ x = 0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\beta'}{b'^2}y + \dfrac{\gamma'}{c'^2}z = 1, \\ x = a. \end{array}\right.$$

En exprimant que ces droites se confondent avec les traces du plan (1) sur les plans de Δ et de Δ', on trouve quatre équations qui, en vertu de la relation (3) de l'article **494**, se réduisent aux trois suivantes :

$$A = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{b'^2}{b^2}\frac{\beta}{\beta'}\right), \quad B = \frac{\beta}{b^2}, \quad C = \frac{\gamma}{c^2}. \tag{2}$$

Considérons maintenant une surface du second degré, ayant son centre sur l'axe Ax, et dans laquelle cet axe et les diamètres parallèles aux autres axes Ay et $A'z$ (*fig.* 261 et 262) forment un système de diamètres conjugués. Son équation sera

$$\frac{(x-u)^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} + \frac{z^2}{\nu^2} = 1. \tag{3}$$

En cherchant la condition pour que le plan (1) touche cette surface, on trouve [1]

$$A^2(\lambda^2 - u^2) + B^2\mu^2 + C^2\nu^2 + 2Au - 1 = 0$$

[1] On calcule l'équation générale du plan tangent à la surface (3), et l'on exprime que ce plan se confond avec (1); on obtient ainsi trois équations de condition, on en déduit les coordonnées du point de contact et l'on porte leurs valeurs dans l'équation (3).

On peut encore éliminer une des variables entre les équations (1) et (3) et exprimer que l'équation que l'on obtient est décomposable en deux facteurs du premier degré, car alors le plan coupe la surface suivant deux droites.

et, remplaçant A, B et C par leurs valeurs (2),

$$\frac{\mu^2}{b^4}\beta^2 + \frac{\nu^2}{c^4}\gamma^2 + (\lambda^2 - u^2)\frac{b'^4}{a^2 b^4}\frac{\beta^2}{\beta'^2} - 2\frac{b'^2}{a^2 b^2}(\lambda^2 - u^2 + au)\frac{\beta}{\beta'} + \frac{\lambda^2 - u^2 + 2au}{a^2} - 1 = 0.$$

Cette équation exprime que la surface (3) est tangente en un point au plan qui touche la développable le long de la génératrice considérée. Une seule des variables auxiliaires, par exemple β, suffit pour déterminer cette droite; les valeurs correspondantes de γ et de β' sont données par les équations (1) et (9) des articles **494** et **498**.

Éliminant γ et le carré de β', nous trouvons

$$(4) \qquad M\beta^2 + P = N\frac{\beta}{\beta'},$$

en posant

$$\frac{1}{b^2}\left[\frac{\mu^2}{b^2} - \frac{\nu^2}{c^2} + (\lambda^2 - u^2)\frac{c^2 b'^2 - b^2 c'^2}{a^2 b^2 c^2}\right] = M,$$

$$2\frac{b'^2}{a^2 b^2}(\lambda^2 - u^2 + au) = N,$$

$$\frac{\lambda^2 - u^2}{a^2}\left(\frac{c'^2}{c^2} + 1\right) + 2\frac{u}{a} + \frac{\nu^2}{c^4} - 1 = P.$$

Élevons l'équation (4) au carré, portons-y la valeur de β'^2 prise à l'article **498**, et ordonnons,

$$M^2\beta^4 + \left[2MP - \frac{N^2}{c^2 b'^4}(c^2 b'^2 - b^2 c'^2)\right]\beta^2 + \left[P^2 - N^2\frac{b^4 c'^2}{b'^4 c^2}\right] = 0.$$

Pour que la surface du second degré soit touchée par tous les plans tangents de la développable, il faut que cette équation soit satisfaite quel que soit β, et par suite que les coefficients des trois termes soient nuls, ce qui exige que M, N et P soient égaux à zéro. Nous avons ainsi trois équations; en les résolvant par rapport à λ^2, μ^2 et ν^2, on trouve

$$(5) \qquad \lambda^2 = u^2 - au, \quad \mu^2 = \frac{a-u}{a}b^2 + \frac{u}{a}b'^2, \quad \nu^2 = \frac{a-u}{a}c^2 + \frac{u}{a}c'^2.$$

A toute grandeur de u correspondent des valeurs pour λ^2, μ^2 et ν^2, et par conséquent tout point de l'axe des abscisses est le centre d'une surface du second degré inscrite dans la développable, et ayant d'ailleurs des diamètres conjugués parallèles à nos axes coordonnés.

526. Quand u est nul, on trouve

$$\lambda^2 = 0, \quad \mu^2 = b^2, \quad \nu^2 = c^2.$$

La surface du second degré se réduit alors à la directrice Δ. La valeur a de u fait de même trouver la seconde directrice Δ'. Enfin, si l'on donne à u la valeur (10) de l'abscisse n du centre de Δ'' (art. 505), on obtient pour λ^2 et μ^2 les valeurs de p^2 et de q^2, et ν^2 devient nul. Ainsi donc chacune des coniques lignes doubles de la développable représente une surface du second ordre inscrite, qui se distingue des autres en ce qu'un de ses trois diamètres conjugués est nul.

Si le centre de la surface inscrite parcourt l'axe des abscisses, à chacune de ses coïncidences avec le centre de l'une des lignes doubles, un des carrés λ^2, μ^2 et ν^2 changera de signe, et la surface passera d'un genre à un autre. Quand le centre sera à l'infini, μ^2 et ν^2 changeront de signe simultanément.

Une directrice regardée comme une surface aplatie inscrite dans la développable est une aire plane limitée à la courbe et située du côté de sa concavité, ou du côté de sa convexité, suivant qu'on la rattache à l'une ou à l'autre des deux séries dont elle forme la transition. Ainsi la directrice Δ est l'aire contenue dans le cercle, ou toute la surface de son plan sauf le cercle, suivant qu'on la considère comme le dernier des ellipsoïdes qui ont leur centre à gauche du point A, ou comme le premier des hyperboloïdes qui ont leur centre entre les points A et O [1].

527. Pour toute valeur de l'abscisse u, la surface du second degré inscrite dans la développable représentée sur les *fig.* 261 et 262 est réelle. Nous allons rechercher si cela tient à une disposition spéciale des directrices Δ et Δ', ou s'il en est toujours ainsi. Les équations (5) permettent de résoudre facilement cette question.

Pour qu'une valeur de u détermine une surface inscrite réelle, il suffit que l'un des trois carrés λ^2, μ^2, ν^2 soit positif. L'abscisse a de Δ' peut être regardée comme positive, et par suite λ^2 sera positif lorsque u sera négatif, et lorsqu'il sera positif et plus grand que a. Ainsi donc tout point de l'axe des abscisses autre que ceux du segment AO (*fig.* 261) est le centre d'une surface réelle du second degré inscrite dans la développable, quelles que soient les coniques directrices Δ et Δ'.

Il nous reste à examiner ce qui arrive lorsque l'on suppose à l'abscisse u des valeurs comprises entre o et a.

Si Δ est une ellipse, le premier terme de chacune des valeurs de μ^2 et de ν^2 sera positif, et, comme b'^2 et c'^2 ne peuvent être négatifs simultanément (car nous éloignons le cas où Δ' serait imaginaire), nous voyons que l'un au moins des carrés μ^2 et ν^2 sera positif. On arriverait au même résultat, et par les mêmes raisonnements, si Δ' était une ellipse.

---

[1] M. Dupin a le premier reconnu que les coniques qui forment les transitions des différents genres dans les séries de surfaces du second degré doivent être considérées comme des surfaces aplaties (*Développements de Géométrie*, p. 270).

Quand Δ et Δ' sont des hyperboles placées de manière que leurs diamètres transverses se correspondent (*fig.* 252), deux carrés tels que b^2 et b'^2 ou c^2 et c'^2 sont positifs, et la valeur correspondante pour μ^2 ou ν^2 est également positive.

Enfin si Δ et Δ' sont des hyperboles placées de manière que leurs diamètres transverses ne se correspondent pas, deux carrés tels que b'^2 et c^2 seront négatifs; après avoir mis leur signe en évidence, on trouve que les conditions pour que μ^2 et ν^2 soient positifs sont

$$u < \frac{ab^2}{b^2+b'^2}, \quad u > \frac{ac^2}{c^2+c'^2},$$

ou (art. **505**)

$$u < \mathrm{AK}, \qquad u > \mathrm{AL},$$

en désignant, comme sur la *fig.* 261, par A, K et L les centres de Δ, de Δ''' et de Δ''. Dans nos hypothèses, les points K et L sont sur le segment AO.

Si AK est plus petit que AL, aucun des points du segment KL ne sera le centre d'une surface réelle du second ordre inscrite dans la développable; mais si AK est plus grand que AL, un au moins des carrés μ^2 et ν^2 sera positif, quel que soit u. On a dans ce cas

$$\frac{ab^2}{b^2+b'^2} > \frac{ac^2}{c^2+c'^2},$$

d'où

$$\frac{c^2}{b^2} < \frac{c'^2}{b'^2}.$$

Cette inégalité signifie que les angles des asymptotes des deux directrices Δ et Δ' n'empiètent pas l'un sur l'autre (*fig.* 266). Nous avons vu que la développable est réelle quand cette condition est satisfaite, et imaginaire lorsqu'elle ne l'est pas (art. **521**, 4°).

En résumé, *quand deux coniques sont situées dans des plans parallèles, tout point de la droite qui passe par leurs centres est le centre d'une surface réelle du second degré inscrite dans la développable qui leur est circonscrite, lorsque cette développable est elle-même réelle* ([1]).

Quand la développable circonscrite aux coniques Δ et Δ' est imaginaire, les équations (3) et (5) représentent encore une série de surfaces du second ordre; mais ces surfaces n'ont pas d'enveloppe (art. **434**). La discussion précédente comprend implicitement, pour la position des centres des surfaces réelles, les résultats relatifs à ce cas.

([1]) Les génératrices de la développable circonscrite sont divisées homographiquement par les lignes de contact des surfaces du second ordre inscrites. Ce théorème, plus général que celui de l'article 513, peut lui-même recevoir une extension importante.

Voir notre Ouvrage sur les *Surfaces réglées tétraédrales symétriques*, premier Mémoire, art. 39, 70, etc.

Les formules que nous avons obtenues supposent que les directrices Δ et Δ' ne sont pas des hyperboles ayant leurs asymptotes croisées, car alors les plans coordonnés seraient imaginaires. Plusieurs des théorèmes que nous obtiendrons sont indépendants de l'existence de ces plans et par conséquent généraux, mais pour donner plus de précision à notre étude, nous la restreignons au cas où les quatre lignes doubles sont réelles. Nous indiquerons plus loin comment on peut obtenir des formules applicables au cas où les plans de deux lignes doubles sont imaginaires (art. **536**).

528. La première des équations (5) montre que le centre de chacune des directrices Δ et Δ' est le pôle du plan de l'autre par rapport à la surface inscrite. Les pôles de Δ'' et de Δ''' par rapport à la même surface sont à l'infini, dans des directions déterminées et indépendantes de l'abscisse u. Ainsi les plans des lignes doubles ont les mêmes pôles par rapport à toutes les surfaces du second ordre inscrites. Il est d'ailleurs facile de voir que le pôle de l'un quelconque des plans est l'intersection des trois autres plans.

Nous allons maintenant rechercher quelle relation existe entre les pôles d'un plan, autre que ceux des lignes doubles, par rapport aux surfaces inscrites.

La surface étant donnée par l'équation (3), l'équation du plan polaire d'un point (x', y', z') sera

$$\frac{x'-u}{\lambda^2}(x-u)+\frac{y'}{\mu^2}y+\frac{z'}{\nu^2}z=1.$$

D'après cela, on trouve facilement, pour déterminer les coordonnées x', y' et z' du pôle d'un plan quelconque

$$Ax+By+Cz=1,$$

les formules

$$x'-u=\frac{A\lambda^2}{1-Au},\quad y'=\frac{B\mu^2}{1-Au},\quad z'=\frac{C\nu^2}{1-Au};$$

et, remplaçant λ^2, μ^2 et ν^2 par leurs valeurs (5),

$$x'=u\,\frac{1-Aa}{1-Au},$$

$$y'=\frac{B}{1-Au}\left[\frac{u}{a}(b'^2-b^2)+b^2\right],$$

$$z'=\frac{C}{1-Au}\left[\frac{u}{a}(c'^2-c^2)+c^2\right].$$

En éliminant u entre la première de ces équations et chacune des deux autres, on obtient les équations de la ligne des pôles du plan par rapport aux surfaces du second ordre inscrites dans la développable

$$\frac{B}{a}\left(\frac{b'^2}{Aa-1}+b^2\right)x'+y'=Bb^2,$$
$$\frac{C}{a}\left(\frac{c'^2}{Aa-1}+c^2\right)x'+z'=Cc^2\ [1].$$

Nous voyons que *les pôles d'un plan quelconque par rapport à toutes les surfaces du second ordre inscrites dans la développable sont en ligne droite* [2]. *La trace de cette droite sur le plan d'une directrice et par rapport à cette courbe est le pôle de la trace du plan.*

529. Si nous portons les valeurs (5) dans l'équation (3), nous aurons l'équation générale des surfaces du second degré inscrites dans la développable

$$(6)\qquad \frac{(x^2-u)^2}{u^2-au}+\frac{ay^2}{u(b'^2-b^2)+ab^2}+\frac{az^2}{u(c'^2-c^2)+ac^2}=1.$$

Nous allons chercher les points où une surface inscrite rencontre les directrices Δ et Δ'. Si nous remplaçons successivement x, y, z par o, β, γ et par a, β', γ', l'équation (6) nous donnera

$$\frac{\beta^2}{u(b'^2-b^2)+ab^2}+\frac{\gamma^2}{u(c'^2-c^2)+ac^2}+\frac{1}{u-a}=0,$$
$$\frac{\beta'^2}{u(b'^2-b^2)+ab^2}+\frac{\gamma'^2}{u(c'^2-c^2)+ac^2}-\frac{1}{u}=0.$$

L'élimination de γ^2 et de γ'^2 entre ces équations et les équations (1) et (2) (art. **494**), qui représentent les courbes Δ et Δ', donne

$$(7)\qquad \begin{cases} \beta^2=\dfrac{c'^2b^2}{c^2b'^2-b^2c'^2}\left(\dfrac{u}{u-a}b'^2-b^2\right), \\ \beta'^2=\dfrac{c^2b'^2}{c^2b'^2-b^2c'^2}\left(b'^2-\dfrac{u-a}{u}b^2\right). \end{cases}$$

Ces équations déterminent les ordonnées des points où la surface considérée coupe les directrices Δ et Δ' de la développable; en éliminant u entre elles, nous aurons la relation qui existe entre les ordonnées des points des deux courbes qui appartiennent à une même surface inscrite. Cette élimination, qui est très-facile, conduit à l'équation (9) de l'article **498**; lorsque nous l'avons établie, nous considérions simplement les ordonnées des points de Δ et de Δ' qui sont sur une même

---

[1] Chacune de ces deux équations représente, sur l'un des plans coordonnés qui contiennent la ligne des centres, le lieu des pôles de la trace du plan considéré par rapport aux traces des surfaces inscrites.

[2] M. Poncelet [*Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques*, p. 39 (*Journal de Crelle*, t. IV)].

génératrice, mais les variables β et β' n'y entrant qu'au carré, elle exprime la relation qui existe entre les ordonnées des points de ces courbes qui appartiennent à un groupe, car tous les points d'un groupe sur Δ ou sur Δ' ont les mêmes ordonnées en grandeur absolue (art. **519**). Les huit points où les directrices Δ et Δ' coupent une surface inscrite dépendent donc d'un groupe, et les huit droites qui forment ce groupe ayant chacune deux points sur une surface du second ordre, et lui étant d'ailleurs tangentes, en sont des génératrices. Ainsi donc *chaque surface du second ordre inscrite dans la développable la coupe suivant huit droites (réelles ou imaginaires) qui composent un groupe;* réciproquement *les huit droites d'un même groupe déterminent un hyperboloïde inscrit dans la développable.*

Si l'on veut connaître la position du centre de l'hyperboloïde d'un groupe déterminé, il faut résoudre l'une ou l'autre des équations (7); elles donneront la même valeur pour u, car les carrés β^2 et β'^2 doivent avoir entre eux la relation établie par l'équation (9) de l'article **498**.

Dans notre exercice, les hyperboloïdes des groupes réels ont tous leur centre sur le segment LK de l'arc Ax (*fig.* 261).

530. Nous allons maintenant chercher l'équation de la développable, en la considérant comme l'enveloppe des surfaces représentées par l'équation (6). Si l'on ordonne cette équation par rapport au paramètre variable u, on obtient

$$(8)\qquad \mathrm{A}u^3 + \mathrm{B}u^2 + \mathrm{C}u + \mathrm{D} = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \frac{c'^2 - c^2}{a}y^2 + \frac{b'^2 - b^2}{a}z^2 - \frac{(b'^2 - b^2)(c'^2 - c^2)}{a^2}(2x - a),\\
\mathrm{B} &= \frac{(b'^2 - b^2)(c'^2 - c^2)}{a^2}x^2 + (2c^2 - c'^2)y^2 + (2b^2 - b'^2)z^2\\
&\quad - \frac{b'^2c^2 + b^2c'^2 - 2b^2c^2}{a}(2x - a),\\
\mathrm{C} &= -\frac{b'^2c^2 + b^2c'^2 - 2b^2c^2}{a}x^2 - ac^2y^2 - ab^2z^2 - b^2c^2(2x - a),\\
\mathrm{D} &= b^2c^2x^2.
\end{aligned}$$

Si l'on attribue à x, y et z les valeurs des coordonnées d'un point déterminé de l'espace, suivant sa position, l'équation (8) aura une ou trois racines réelles, et, comme une enveloppée correspond à chaque valeur réelle de u (art. **527**), on voit que l'espace se trouve partagé en deux régions : trois enveloppées passent par chaque point d'une région, et une seule par chaque point de l'autre. Les deux régions sont séparées par une surface en tout point de laquelle passent trois enveloppées dont deux sont confondues en une seule. Cette surface est par conséquent le lieu des intersections successives des enveloppées, c'est-à-dire l'enveloppe. Les points d'une enveloppée particulière qui appartiennent à la développable sont donc tels, que leurs coordonnées satisfont à la fois à l'équation (8) et à sa dérivée

$$3Au^2 + 2Bu + C = 0, \tag{9}$$

lorsque l'on donne à u la valeur qui convient à l'enveloppée. Les équations (8) et (9) représentent donc une caractéristique, et si l'on élimine entre elles le paramètre variable u, on aura la surface lieu de ces courbes, ou l'enveloppe.

Éliminant d'abord u^3 entre l'équation (8) et l'équation (9) multipliée par u, on obtient

$$Bu^2 + 2Cu + 3D = 0.$$

L'élimination de u^2 entre cette équation et l'équation (9) donne

$$u = \frac{BC - 9AD}{6AC - 2B^2}.$$

Portant enfin cette valeur de u dans l'équation (9), on trouve pour représenter la développable l'équation du huitième degré

$$27A^2D^2 - 18ABCD - B^2C^2 - 4B^3D + 4C^3A = 0. \tag{11}$$

Un raisonnement très-simple pouvait faire prévoir que la surface est du huitième ordre : si on la coupe par un plan contenant une génératrice, la section sera composée de cette droite et d'une courbe qui la rencontrera aux quatre points (réels ou imaginaires) où elle coupe les lignes doubles, et au point où elle touche l'arête. Ce dernier doit compter pour trois, parce que la courbe y a un rebroussement et que la génératrice est la tangente du rebroussement. La section est donc formée d'une droite et d'une courbe qui a sept points (réels ou imaginaires) communs avec elle, et qui, par conséquent, est du septième degré. En général, une développable algébrique de l'ordre n a sur chacune de ses génératrices $(n-4)$ points doubles ou plutôt des points multiples représentant $(n-4)$ points doubles.

Les deux équations (8) et (9) qui représentent une caractéristique sont du second degré en x, y et z, et ne contiennent ces deux dernières coordonnées qu'à la seconde puissance. Les projections des caractéristiques sur les plans coordonnés qui se coupent suivant l'axe des abscisses sont donc des courbes du second ordre [1].

551. Nous avons vu que chaque point de la développable appartient à trois enveloppées dont deux sont réunies en une seule ; la troisième est l'hyperboloïde

[1] Voir le *Mémoire* déjà cité *sur la théorie des polaires réciproques*, p. 37.

du groupe dont dépend la génératrice qui passe au point considéré. Les hyperboloïdes des groupes sont donc les seules enveloppées qui traversent la développable : les autres n'ont en commun avec elle que leur caractéristique. Ces hyperboloïdes sont aussi les seules enveloppées qui touchent la développable dans la partie voisine de l'arête de rebroussement, car les huit points de rencontre des génératrices de deux groupes consécutifs sont sur l'intersection des hyperboloïdes de ces groupes : en d'autres termes, les huit points où les génératrices d'un groupe rencontrent l'arête de rebroussement appartiennent à la caractéristique de l'hyperboloïde de ce groupe. Les trois enveloppées qui passent par un de ces points sont confondues en une seule, et par suite leurs coordonnées satisfont à l'équation (8), à sa première dérivée (9) et à sa seconde dérivée

$$3Au + B = 0 \tag{12}$$

lorsque l'on donne à u une certaine valeur; et si l'on élimine entre elles trois le paramètre variable u, on aura les équations de l'arête qui est l'enveloppe des caractéristiques, comme elle est l'enveloppe des génératrices rectilignes, ainsi que nous le savons déjà.

Le système des équations (9) et (10) équivaut à celui des équations (8) et (9); il suffit donc d'éliminer u entre (9), (10) et (12). On trouve pour représenter l'arête de rebroussement les deux équations du quatrième degré

$$B^2 - 3AC = 0, \quad C^2 - 3BD = 0. \tag{13}$$

Les hyperboloïdes des groupes ont pour limites les directrices qui portent les sommets [1]. Les caractéristiques des autres surfaces du second ordre inscrites dans la développable se succèdent sans se rencontrer.

Sur la *fig.* 261, l'ellipse, trace horizontale de l'hyperboloïde d'un groupe, serait tangente aux projections des génératrices de ce groupe, et aussi aux génératrices de la développable situées dans le plan horizontal, car elles touchent, comme les autres, toutes les surfaces inscrites.

532. L'équation (11) représente, outre la surface, les parties parasites des directrices, car, sous le rapport analytique, elles sont inséparables des parties utiles. C'est ainsi qu'à l'article **494** nous avons trouvé pour trace horizontale de

---

[1] Puisqu'il ne passe par un point de l'espace que trois enveloppées, les sommets ne peuvent appartenir à quatre de ces surfaces réunies en une seule, et par suite une troisième différentiation ne les ferait pas connaître. Quand on indique ce procédé pour déterminer les points de rebroussement de l'arête d'une enveloppe, on suppose que chaque caractéristique ne touche cette arête qu'en un point, tandis que sur la surface que nous examinons chaque caractéristique est tangente à l'arête en huit points qui donnent naissance aux sommets en se réunissant deux à deux sur des directrices que l'on doit considérer comme les caractéristiques d'hyperboloïdes aplatis.

la développable l'ellipse PIQ tout entière (*fig.* 261). D'après cela, si un plan sécant rencontre des arcs parasites, la section aura des points isolés. La courbe et ces points forment, en général, un système géométrique indécomposable; mais la séparation peut être faite quand le plan sécant est celui d'une directrice.

La trace de la surface sur le plan d'une ligne double se présente de deux manières différentes : tantôt on trouve, outre une conique PIQ (*fig.* 261), quatre tangentes qui se croisent deux à deux aux points C, C_1, B, B_1, H et G, traces des autres directrices; tantôt on obtient une conique (BB_1, $E'E'_1$) et quatre tangentes imaginaires qui passent deux à deux par les traces réelles π et π_1 d'une autre directrice. La section par le plan vertical BB_1 comprend ainsi, outre le cercle Δ, les points π et π_1 (*fig.* 262), comme il est facile de le vérifier par les formules précédentes.

535. Nous avons reconnu (art. **509**) que, quand la troisième directrice Δ'' est tangente au plan de la première Δ, celle-ci se confond avec Δ', et que la surface se décompose en deux fois leur plan et en une développable plus simple : a est alors nul, et l'on reconnaît, d'après la première des équations (5), que λ^2 est égal à u^2; d'où il résulte que les surfaces inscrites sont toutes tangentes entre elles et au plan des deux directrices réunies, et que l'origine est le point de contact.

Si l'on veut avoir dans ce cas l'équation de la développable, il faut, dans les expressions de A, B et C (art. **530**), remplacer a, b'^2, c'^2 par leurs valeurs (11) (art. **505**), et supposer ensuite n égal à p. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= -\frac{c^2}{p}y^2 + \frac{q^2 - b^2}{p}z^2 + 2\frac{q^2 - b^2}{p^2}c^2 x,\\
\mathrm{B} &= -\frac{q^2 - b^2}{p^2}c^2 x^2 + c^2 y^2 + b^2 z^2 - 2\frac{q^2 - 2b^2}{p}c^2 x,\\
\mathrm{C} &= \mathrm{C}'c^2 x, \quad \mathrm{C}' = \frac{q^2 - 2b^2}{p}x - 2b^2,\\
\mathrm{D} &= b^2 c^2 x^2.
\end{aligned}$$

En portant dans l'équation (11) les valeurs de D et de C, on obtient pour la développable, après avoir supprimé un facteur x^2, l'équation du sixième degré

$$(14) \qquad 27\mathrm{A}^2 b^4 c^2 x^2 - 18\mathrm{ABC}' b^2 c^2 x - \mathrm{B}^2\mathrm{C}'^2 c^2 + 4\mathrm{B}^3 b^2 + 4\mathrm{C}'^3 \mathrm{A} c^4 x = 0.$$

Les équations (13) de l'arête de rebroussement deviennent

$$\mathrm{B}^2 - 3\mathrm{AC}'c^2 x = 0, \quad \mathrm{C}'^2 c^2 - 3\mathrm{B}b^2 = 0;$$

la deuxième est du second degré.

Quand l'abscisse est nulle, l'équation (14) se divise en deux

$$\mathrm{C}'^2 c^2 - 4\mathrm{B}b^2 = 0, \quad \mathrm{B}^2 = 0$$

La première donne la directrice Δ, et la seconde ou deux fois les asymptotes de Δ qui sont des génératrices de la surface, ou deux fois le point de contact de Δ'' si Δ est une ellipse [1].

534. Considérons maintenant une deuxième surface du second ordre inscrite dans la développable, et appelons λ', μ', ν' les valeurs de λ, μ, ν qui la concernent et u_1 la distance de son centre au centre de la première surface inscrite : nous aurons

$$(5\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda'^2 &= (u+u_1)^2 - a(u+u_1),\\ \mu'^2 &= b^2 - \frac{u+u_1}{a}(b^2-b'^2),\\ \nu'^2 &= c^2 - \frac{u+u_1}{a}(c^2-c'^2). \end{aligned}\right.$$

Si les deux surfaces inscrites sont données, les six équations (5) et (5 *bis*) feront connaître les paramètres a, b, c, b' et c' de la développable et l'abscisse u qui détermine la position de l'origine des coordonnées, c'est-à-dire du centre de la première directrice Δ.

Les deux premières des équations (5) et (5 *bis*) donnent u et a. On trouve, en éliminant a et résolvant,

$$(6)\qquad u = \frac{\lambda'^2 - \lambda^2 - u_1^2 \pm \sqrt{[u_1^2-(\lambda+\lambda')^2][u_1^2-(\lambda-\lambda')^2]}}{2u_1}\ [2].$$

Les deux valeurs de u font connaître les centres des directrices Δ et Δ'; leur différence est l'abscisse a. En portant l'une d'elles dans les équations (5) et (5 *bis*), on déterminera les demi-diamètres b, c, b' et c' des directrices Δ et Δ'. Si l'on employait l'autre valeur, on trouverait pour b et c les longueurs déjà obtenues pour b' et c', et réciproquement.

La seule relation qu'aient entre elles deux surfaces du second ordre inscrites dans la développable que nous considérons (celle dont deux lignes doubles sont dans des plans parallèles) est que les plans diamétraux conjugués avec la ligne des centres soient parallèles; donc, toutes les fois que cette condition sera satisfaite pour deux surfaces du second ordre, les formules que nous avons trouvées détermineront complètement la développable circonscrite [3].

---

[1] La développable n'est que du quatrième degré quand les directrices données sont des coniques tangentes à une même droite (art. 456). Il est facile de voir par la déformation homologique que cette disposition correspond au cas où les deux directrices Δ et Δ' situées dans des plans parallèles sont des paraboles.

[2] Cette équation est identique avec celle de l'article 510, eu égard aux notations et au signe de u (*voir* la première note de cet article).

[3] Si nous faisons une perspective relief du système que nous venons d'étudier, nous aurons deux surfaces du second ordre placées d'une manière quelconque dans l'espace et une développable circon-

533. En discutant les équations (5) (art. 525), on reconnaît qu'il y a deux séries d'ellipsoïdes inscrits dans la développable représentée sur les *fig.* 261 et 262. Deux ellipsoïdes d'une même série se rencontrent avec pénétration, et si l'un d'eux est lumineux et l'autre opaque, il y a deux ombres sans pénombre. Suivant celle des deux surfaces qui est lumineuse, la limite des ombres est formée par l'ellipse Δ' ou par les arcs utiles de l'ellipse Δ''. Quand les ellipsoïdes n'appartiennent pas à la même série, ils sont entièrement extérieurs l'un à l'autre et il se forme une pénombre.

Les deux surfaces directrices considérées à l'article précédent étant supposées être des ellipsoïdes, les deux valeurs de u données par l'équation (6) seront réelles quand il y aura pénétration entre les surfaces et quand elles ne se rencontreront

---

scrite ayant quatre lignes doubles planes du second ordre, et telles, que le point d'intersection des plans de trois d'entre elles soit, par rapport aux deux surfaces inscrites, le pôle du plan de la quatrième. Une infinité de surfaces du deuxième degré seront inscrites dans la même développable; comme d'ailleurs les pôles d'un plan quelconque, par rapport aux surfaces inscrites du système primitif, sont en ligne droite, quel que soit le plan qui s'éloigne à l'infini dans la déformation homologique, les centres des surfaces inscrites transformées seront également en ligne droite.

Du reste, pour qu'il fût rigoureusement démontré par ces raisonnements que la développable circonscrite à deux surfaces du second degré a toujours quatre lignes doubles planes et du second ordre, il faudrait établir que les transformées homologiques de deux surfaces du premier système n'ont entre elles aucune relation nécessaire; mais cela nous écarterait de notre route, et d'ailleurs le théorème dont il s'agit est assez connu depuis les travaux de M. Poncelet (*Journal de Crelle*, t. IV, p. 37).

On peut, par la théorie des polaires réciproques, déduire des propositions que nous avons obtenues pour la développable circonscrite à deux surfaces du second degré d'autres propositions pour la courbe d'intersection de deux surfaces de ce degré. Nous nous bornerons à quelques observations.

La courbe d'intersection C_4 de deux surfaces du second ordre appartient à une infinité de surfaces de cet ordre qui forment une série continue. S'il y a pénétration, quatre cônes δ, δ', δ'' et δ''' font partie de cette série : chacun d'eux est la transition d'une suite d'hyperboloïdes à une nappe, à une suite de surfaces dépourvues de génératrices rectilignes. Deux des cônes δ'' et δ''' ont quatre génératrices tangentes à C_4; les surfaces de la série comprises entre eux sont des hyperboloïdes à une nappe ayant huit génératrices tangentes à C_4. Les deux autres cônes δ et δ' n'ont pas de génératrices tangentes à C_4; les surfaces comprises entre eux sont des hyperboloïdes à une nappe dont aucune génératrice ne touche C_4. Entre δ' et δ'', et entre δ''' et δ, la série comprend des surfaces dépourvues de génératrices rectilignes; chacune de ces deux suites commence et finit ordinairement par des hyperboloïdes à deux nappes; mais, lorsqu'un cône de transition est un cylindre, des ellipsoïdes succèdent aux hyperboloïdes à une nappe.

Quand les surfaces se coupent avec arrachement, la série ne contient que deux cônes, et par suite elle se divise en deux parties seulement. L'une comprend des surfaces du second ordre dépourvues de génératrices rectilignes, l'autre des hyperboloïdes à une nappe ayant quatre génératrices tangentes à C_4. Chacun des deux cônes a deux génératrices tangentes à C_4.

Les génératrices d'un hyperboloïde tangentes à la courbe appartiennent en nombre égal aux deux systèmes de génération rectiligne. Les tangentes de C_4 sont ainsi réparties en groupes. Dans le cas général, chacune d'elles en rencontre quatre autres, et la développable osculatrice de C_4 a quatre lignes doubles distinctes : elle est par suite du huitième ordre (art. 530). (*Voir* sur la développable osculatrice d'une courbe du quatrième ordre, intersection de deux surfaces du second ordre, les théorèmes, 23 24 et 25 dans la Communication faite par M. Chasles à l'Académie des Sciences les 17 et 24 février 1862.)

pas (art. **510**). Les ellipsoïdes appartiendront, dans le premier cas, à la même série, et dans le second aux deux séries distinctes.

Le second cas se présente seul dans les applications; si l'on opère graphiquement, on prendra pour plans coordonnés les plans des diamètres conjugués parallèles des sections diamétrales qui sont conjuguées avec la ligne des centres. Les tangentes communes des sections contenues dans chacun des plans coordonnés seront les quatre génératrices d'un groupe simple; elles donneront par leurs croisements la position et les longueurs des diamètres conjugués parallèles des directrices Δ et Δ'. Ces courbes étant ainsi déterminées, on continuera l'épure comme aux articles **488-495**.

Pour avoir la courbe de contact ou caractéristique d'un ellipsoïde, on choisira divers points sur une directrice; on fera passer par chacun d'eux un plan contenant les deux génératrices qui s'y croisent; on déterminera la courbe suivant laquelle il coupe l'ellipsoïde, et enfin les points où cette courbe est touchée par les génératrices.

556. Si la développable est déterminée par les directrices Δ'' et Δ''', en plaçant l'origine au centre de Δ'', et désignant par α'', β'', γ'' et α''', β''', γ''' les coordonnées de deux points de ces courbes situés sur une même génératrice, nous aurons

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha''^2}{p^2} + \dfrac{\beta''^2}{q^2} = 1, \\ \gamma'' = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{(\alpha''' - n_1)^2}{p'^2} + \dfrac{\gamma'''^2}{r'^2} = 1, \\ \beta''' = 0. \end{cases}$$

Des calculs analogues à ceux de l'article **525** font ensuite trouver, pour déterminer les diamètres conjugués d'une surface du second degré inscrite, les équations

$$\lambda^2 = v^2 + \frac{p'^2 - p^2 - n_1^2}{n_1} v + p^2,$$

$$\mu^2 = q^2 \frac{n_1 - v}{n_1}, \qquad \nu^2 = r'^2 \frac{v}{n_1},$$

dans lesquelles n_1 et v sont les abscisses du centre de Δ''' et du centre de la surface inscrite.

A l'aide de ces formules on peut établir l'équation d'une surface du second degré inscrite dans la développable, en fonction du paramètre v; puis les équations des caractéristiques, de la développable et de son arête de rebroussement [1].

---

[1] D'après le théorème de l'article 451, l'arête de rebroussement est sur une surface réglée dont les génératrices passent par les centres de courbure des points correspondants de Δ et de Δ'. Lorsque la première courbe est un cercle, comme sur la *Pl. XXIV*, cette surface devient un cône ayant pour sommet le centre du cercle et pour directrice la développée de Δ'.

M. Ernest Lebon a trouvé des équations simples pour l'arête de rebroussement dans le cas général

537. *Cas où les surfaces inscrites sont concentriques. Surfaces homofocales.* Si une développable est déterminée par deux coniques concentriques Δ et Δ'', nous prendrons pour axes coordonnés l'intersection de leurs plans, et les diamètres qui dans chacune d'elles sont conjugués avec cette droite; puis désignant par α, β, γ et α'', β'', γ'' les coordonnées de deux points de ces courbes situées sur une même génératrice, nous aurons

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=1,\\ &\alpha=0,\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\alpha''^2}{p^2}+\frac{\beta''^2}{q^2}=1,\\ &\gamma''=0.\end{aligned}\right.$$

La seconde directrice Δ' est à l'infini; la quatrième Δ'' est concentrique avec les premières, et située dans le plan des axes des abscisses et des ordonnées z (art. **508**).

Les tangentes des directrices, aux points considérés de ces courbes, situés sur une même génératrice, ont pour équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\beta}{b^2}y+\frac{\gamma}{c^2}z=1,\\ &x=0,\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\alpha''}{p^2}x+\frac{\beta''}{q^2}y=1,\\ &z=0;\end{aligned}\right.$$

étudié aux articles 494 et suivants. Nous indiquerons la marche qu'il a suivie et les résultats qu'il a obtenus.

La projection d'une génératrice de la développable sur le plan de Δ''' est donnée par l'équation

$$x=\frac{a(z-\gamma)}{\gamma'-\gamma},$$

que l'on peut écrire

$$x=\mathrm{A}z+\mathrm{P}.$$

L'intersection d'un point de cette droite avec celle qui lui est infiniment voisine donne, pour l'ordonnée z_0 d'un point de l'arête,

$$z_0=-\frac{\dfrac{d\mathrm{P}}{d\gamma}+\dfrac{d\mathrm{P}}{d\gamma'}\dfrac{d\gamma'}{d\gamma}}{\dfrac{d\mathrm{A}}{d\gamma}+\dfrac{d\mathrm{A}}{d\gamma'}\dfrac{d\gamma'}{d\gamma}}.$$

En portant cette valeur de z_0 dans les équations d'une génératrice, on détermine les coordonnées x_0 et y_0 du point considéré de l'arête de rebroussement, en fonction de la variable indépendante γ. Calculant ensuite les équations des deux cônes qui ont pour directrice l'arête et pour sommets les centres A et O de Δ et de Δ'', on trouve

$$\left[(\lambda-1)\frac{x}{\alpha}\right]^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{y}{b'}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\lambda\frac{z}{c'}\right)^{\frac{2}{3}}=0,$$

$$\left[(\lambda-1)\frac{x-a}{\alpha}\right]^{\frac{2}{3}}-\left(\lambda\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=0,$$

λ ayant la valeur indiquée à l'article 511.

comme d'ailleurs ces tangentes doivent se couper sur l'axe des ordonnées y, intersection des plans des directrices données, nous avons la relation

$$\frac{\beta}{b^2} = \frac{\beta''}{q^2}. \tag{2}$$

Pour qu'un plan

$$Ax + By + Cz = 1 \tag{3}$$

soit tangent à la développable, il faut qu'il contienne les tangentes dont les équations sont ci-dessus, et par conséquent que l'on ait

$$A = \frac{\alpha''}{p^2}, \quad B = \frac{\beta}{b^2}, \quad C = \frac{\gamma}{c^2}.$$

Considérons maintenant une surface du second degré, ayant son centre à l'origine, et trois diamètres conjugués dirigés suivant les axes. Son équation sera

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} + \frac{z^2}{\nu^2} = 1. \tag{4}$$

La condition pour que le plan (3) touche cette surface est exprimée par l'équation (art. 525, note)

$$A^2\lambda^2 + \beta^2\mu^2 + C^2\nu^2 = 1.$$

En portant les valeurs trouvées pour A, B et C, on obtient

$$\frac{\lambda^2}{p^4}\alpha''^2 + \frac{\mu^2}{b^4}\beta^2 + \frac{\nu^2}{c^4}\gamma^2 = 1.$$

Enfin l'élimination des variables auxiliaires α'' et γ à l'aide des équations (1) et (2) donne

$$\left(\frac{q^2\lambda^2}{p^2b^2} - \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2}\right)\beta^2 - \left(\frac{\lambda^2}{p^2} + \frac{\nu^2}{c^2} - 1\right)b^2 = 0.$$

Pour que la surface (4) soit inscrite dans la développable, il faut que cette équation soit satisfaite, quel que soit β : de là résultent deux équations de condition entre λ^2, μ^2 et ν^2, et par suite on peut se donner arbitrairement l'un des diamètres conjugués de la surface inscrite.

On peut prendre pour équations de condition deux quelconques des trois ci-dessous; la première est obtenue directement, les deux autres résultent de la combinaison de celles que l'on trouve :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\lambda^2}{p^2} + \frac{\nu^2}{c^2} = 1, \\ &\left(1 - \frac{q^2}{b^2}\right)\frac{\lambda^2}{p^2} + \frac{\mu^2}{b^2} = 1, \\ &\left(1 - \frac{b^2}{q^2}\right)\frac{\nu^2}{c^2} + \frac{\mu^2}{q^2} = 1. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Nous avons vu, à l'article **508**, que les carrés des demi-diamètres conjugués de la conique Δ''' sont

$$\frac{p^2}{1-\frac{q^2}{b^2}}, \quad \frac{c^2}{1-\frac{b^2}{q^2}};$$

il résulte donc des équations (5) que les demi-diamètres conjugués des surfaces inscrites sont les coordonnées de coniques qui seraient décrites sur les diamètres conjugués des directrices dirigés suivant les intersections de leurs plans.

Si l'on suppose nul l'un des demi-diamètres λ, μ ou ν, on trouve que les deux autres sont égaux à ceux de la conique dont le plan est conjugué avec la direction du premier; les trois directrices doivent donc être considérées comme des surfaces inscrites aplaties, ainsi que nous l'avons déjà remarqué dans le cas où deux de ces courbes sont dans les plans parallèles (art. **526**).

538. Si nous portons dans l'équation (4) les valeurs de μ^2 et de ν^2 données par les relations (5) en fonction de λ^2, nous aurons l'équation générale des surfaces du second degré, inscrites dans la développable,

$$(6) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{p^2y^2}{b^2p^2-(b^2-q^2)\lambda^2}+\frac{p^2z^2}{c^2(p^2-\lambda^2)}=1.$$

Si maintenant on ordonne l'équation (6) par rapport à λ^2, on trouve

$$(7) \qquad A\lambda^6+B\lambda^4+C\lambda^2+D=0,$$

en posant

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned} A &= -c^2\,\frac{b^2-q^2}{p^4},\\ B &= \frac{b^2-q^2}{p^4}c^2x^2-\frac{c^2}{p^2}y^2-\frac{b^2-q^2}{p^2}z^2+\frac{2b^2-q^2}{p^2}c^2,\\ C &= -\frac{2b^2-q^2}{p^2}c^2x^2+c^2y^2+b^2z^2-b^2c^2\\ D &= b^2c^2x^2. \end{aligned}\right.$$

Chaque valeur de λ^2 détermine une surface du second ordre inscrite; il passe donc par un point de l'espace une ou trois surfaces inscrites. Tous les raisonnements de l'article **530** sont par conséquent applicables à la développable que nous étudions, et l'équation (11) de cet article la représentera, si l'on y regarde les lettres A, B, C et D comme remplaçant les expressions (8).

Quand les deux directrices données se rencontrent, b^2 est égal à q^2, A est nul, et l'équation (11) réduite à deux termes se divise dans les deux suivantes :

$$B^2=0, \quad C^2-4BD=0.$$

La première donne deux fois les plans tangents communs, et la seconde les deux cylindres circonscrits aux coniques. Les équations (5) montrent que dans ce cas μ^2 est toujours égal à la valeur commune de b^2 et de q^2, et par suite que toutes les surfaces du second degré inscrites sont bitangentes. Ces résultats étaient faciles à prévoir.

539. Les équations de la caractéristique d'une surface inscrite en fonction de ses demi-axes sont très-simples. On les obtient facilement en considérant cette courbe comme le lieu des points de contact des plans tangents à la développable, avec une surface du second ordre inscrite.

Les coordonnées du point de contact du plan (3) avec la surface (4) sont

$$x = A\lambda^2, \quad y = B\mu^2, \quad z = C\nu^2;$$

portant pour A, B et C les valeurs trouvées à l'article **537**, et éliminant α'' et γ à l'aide des relations (1) et (2), on obtient

$$x^2 = \frac{\lambda^4}{p^4}\left(1 - \frac{q^2}{b^4}\beta^2\right), \quad y^2 = \frac{\mu^4}{b^4}\beta^2, \quad z^2 = \frac{\nu^4}{c^2}\left(1 - \frac{\beta^2}{b^2}\right).$$

Enfin l'élimination de β^2 entre ces équations prises deux à deux donne

$$\frac{p^2x^2}{\lambda^4} + \frac{q^2y^2}{\mu^4} = 1, \quad \frac{b^2y^2}{\mu^4} + \frac{c^2z^2}{\nu^4} = 1,$$

$$\frac{b^2p^2x^2}{(b^2-q^2)\lambda^4} - \frac{c^2q^2z^2}{(b^2-q^2)\nu^4} = 1.$$

La construction des projections des caractéristiques peut faire le sujet d'un exercice graphique intéressant.

L'élimination de λ, μ et ν entre deux des trois équations que nous venons de trouver, et deux des équations de condition (5), donnerait l'équation de la développable que nous avons obtenue d'une autre manière.

540. Si une développable doit être circonscrite à deux surfaces concentriques du second degré, on prendra pour axes coordonnés les diamètres conjugués communs en direction [1], et l'on aura deux systèmes de valeurs de λ^2, μ^2 et ν^2 qui satisferont aux équations (5); on obtiendra ainsi quatre équations distinctes, à l'aide desquelles on pourra déterminer les quantités b^2, c^2, p^2 et q^2. Les coniques directrices seront alors connues.

541. A l'article **508**, nous avons obtenu la développable circonscrite à deux coniques concentriques, en considérant la surface déterminée par les courbes

[1] On démontre par des raisonnements analogues à ceux de l'article 502 que deux surfaces concentriques du second degré ont un système de diamètres conjugués communs en direction. Ces lignes, que Monge a appelées *droites diamétrales conjuguées communes*, sont toujours réelles. On peut consulter sur cette question un Mémoire de M. Chasles (*Correspondance sur l'École Polytechnique*, tome II, page 319).

$(BB_1, E'E'_1)$ et PIQ (*fig.* 261 et 262), et transportant la seconde parallèlement à elle-même, jusqu'à ce que son centre L, glissant sur la droite Ax, coïncidât avec le centre A de la première. Tant que ces deux points sont distincts, le plan de la conique $(CC_1, F'F'_1)$ ou Δ' est parallèle à celui de $(BB_1, E'E'_1)$; mais, lorsque le point L est confondu avec A, aucune différence essentielle n'existe dans la position des deux directrices Δ et Δ'', et il n'y a pas de raison pour que le plan de Δ' qui est à l'infini soit considéré comme parallèle au plan de l'une plutôt qu'à celui de l'autre, ou même au plan de la troisième conique Δ''' devenue concentrique avec les deux premières.

542. Lorsque la trace d'une surface réglée sur un plan situé à l'infini est une conique double, le cône directeur ayant cette ligne pour directrice (art. **466**) est double et du second ordre.

Quand nous disons que la développable circonscrite à deux coniques concentriques possède une conique double à l'infini, il faut comprendre que, si l'on coupe cette surface par un plan quelconque, et que l'on éloigne le plan parallèlement à lui-même, la section se composera de deux parties que l'on peut concevoir distinctes, et qui se rapprocheront indéfiniment l'une de l'autre, et toutes deux d'une conique dont l'espèce variera suivant la direction du plan. Il ne s'agit d'ailleurs ici que d'un rapprochement relatif aux dimensions de la courbe, et à l'éloignement du plan sécant, car l'écartement des traces de deux droites parallèles reste invariable quand le plan se transporte parallèlement à lui-même.

543. Les équations d'une génératrice de la développable sont

$$x = \frac{\alpha''}{\gamma}(\gamma - z), \quad y - \beta = \frac{\beta'' - \beta}{\gamma}(\gamma - z).$$

Si nous plaçons le sommet du cône directeur à l'origine, nous aurons les équations de sa génératrice, en supprimant le terme constant dans les équations qui précèdent :

$$\gamma x + \alpha'' z = 0, \quad \gamma y + (\beta'' - \beta) z = 0.$$

Pour avoir l'équation du cône directeur, il faut éliminer les variables auxiliaires β, γ, α'' et β'' entre ces équations, celles des directrices (1) et la relation (2), qui établit la correspondance entre les points de ces courbes situés sur une même génératrice; on obtient

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{9}$$

Quand les coefficients des trois termes sont de même signe, le cône n'a de réel que son sommet, et la développable est imaginaire; c'est-à-dire que les surfaces représentées par l'équation (6) n'ont pas d'enveloppe, bien qu'elles forment toujours une série continue. On peut d'ailleurs supposer que le terme constant de l'équation (9) avait d'abord une valeur déterminée, qui s'est progressivement réduite à o; le sommet réel du cône se présente donc comme un ellipsoïde évanouissant ayant des diamètres conjugués dirigés suivant les axes coordonnés, et proportionnels aux longueurs p, $\sqrt{q^2 - b^2}$ et $\sqrt{-c^2}$. La section de cet ellipsoïde (ou de tout autre ellipsoïde homothétique) par un plan, est une courbe semblable à la conique double située à l'infini dans un plan parallèle à celui-là.

544. On déduit des équations (5)

$$\mu^2 - \nu^2 = \lambda^2 \frac{c^2 - b^2 + q^2}{p^2} + b^2 - c^2, \quad \lambda^2 - \mu^2 = \lambda^2 \frac{p^2 - q^2 + b^2}{p^2} - b^2.$$

Quand les deux surfaces directrices sont *homofocales*, c'est-à-dire quand leurs sections principales sont situées dans les mêmes plans et ont les mêmes foyers, les axes coordonnés sont rectangulaires, et les binômes $\mu^2 - \nu^2$ et $\lambda^2 - \mu^2$ devant avoir les mêmes valeurs pour deux grandeurs différentes de λ^2, il faut que l'on ait

$$c^2 - b^2 + q^2 = 0, \quad p^2 - q^2 + b^2 = 0. \tag{10}$$

Les équations ci-dessus se réduisent alors à

$$\mu^2 - \nu^2 = q^2, \quad \lambda^2 - \mu^2 = -b^2,$$

d'où

$$\lambda^2 - \nu^2 = -c^2.$$

Les trois binômes $(\mu^2 - \nu^2)$, $(\lambda^2 - \mu^2)$ et $(\lambda^2 - \nu^2)$ qui déterminent la position des foyers des sections principales ont donc des valeurs indépendantes des grandeurs des axes, et, par suite, toutes les surfaces du second degré inscrites dans la développable sont homofocales.

En vertu des relations (10), l'équation (9) devient

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

et par conséquent le cône directeur se réduit à son sommet qui se présente comme une sphère évanouissante. On voit d'après cela, conformément aux considérations que nous avons présentées à l'article **543**, que *des surfaces du second ordre homofocales sont inscrites dans une même développable, qui a pour une de ses lignes doubles un cercle imaginaire dans un plan situé à l'infini et de direction indéterminée* [1].

Réciproquement la ligne double située à l'infini n'est semblable à un cercle, quelle que soit la direction de son plan, que quand l'ellipsoïde évanouissant (9) est une sphère, ce qui exige que les axes soient rectangulaires et que les équa-

---

[1] M. Chasles, *Résumé d'une théorie des surfaces du second ordre homofocales* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*; 1860).

tions (10) soient satisfaites. Par conséquent, *deux surfaces du second ordre sont homofocales, quand leur développable circonscrite a pour une de ses lignes doubles un cercle imaginaire situé à l'infini, dans un plan de direction indéterminée.*

CHAPITRE III.

SURFACES D'ÉGALE PENTE.

Définition et principales propriétés.

545. *Une surface est d'égale pente, quand ses plans tangents rencontrent sous une même inclinaison un plan fixe que l'on suppose horizontal.*

Les plans également inclinés à l'horizon que l'on peut faire passer par un point sont tous tangents à un cône qui est de révolution : *une surface d'égale pente est donc développable* (art. **469**).

De ce qu'une développable et son cône directeur ont leurs plans tangents respectivement parallèles, on conclut qu'une développable est d'égale pente quand son cône directeur est de révolution; que, pour une telle surface, les génératrices sont les lignes de plus grande pente des plans tangents; que par suite elles rencontrent normalement la trace horizontale, et que cette courbe est ainsi une développante de l'arête de rebroussement et de sa projection horizontale; enfin que le contour apparent d'une surface d'égale pente sur un plan vertical est formé par l'ensemble des génératrices parallèles à ce plan.

L'arête de rebroussement d'une surface d'égale pente rencontre sous un même angle toutes les génératrices du cylindre qui la projette sur un plan horizontal : c'est une ligne géodésique de ce cylindre ou une *hélice générale*. Réciproquement toute développable dont l'arête est une ligne géodésique d'un cylindre quelconque a ses plans tangents également inclinés sur un plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre.

Une surface d'égale pente est déterminée quand on connaît l'angle sous lequel elle rencontre l'horizon et une directrice (art. **467**).

Le cône directeur d'une surface d'égale pente étant toujours facile à construire, on résout aisément pour cette surface les divers problèmes que nous avons examinés à l'article **470**.

L'aire d'une portion finie d'une surface d'égale pente, terminée par une courbe quelconque soumise ou non à la loi de continuité, est à sa projection horizontale dans le rapport du rayon au cosinus de l'inclinaison constante des plans tangents. La quadrature de cette surface peut ainsi être ramenée à celle de la quadrature d'une courbe plane. Cette propriété, qui résulte de la définition même de la surface d'égale pente, n'appartient évidemment à aucune autre [1].

546. Nous avons vu que les génératrices d'une surface développable sont parallèles à celles de son cône directeur, et que le parallélisme subsiste après le développement de ces deux surfaces (art. **481**). Nous savons d'ailleurs qu'il est très-facile de développer un cône de révolution (art. **167**). D'après cela, quand on a fait le développement d'une surface d'égale pente en se servant de deux directrices, et par une construction analogue à celle qui a été exposée à l'article **492**, on peut vérifier par le développement du cône la direction de diverses génératrices. Lorsque l'on connaît une section horizontale, les génératrices devant rester normales à cette ligne dans le développement seront tangentes à des cercles décrits successivement des points obtenus sur sa transformée, avec des rayons égaux aux arcs sensiblement rectilignes dans lesquels elle aura été divisée. On pourra donc faire le développement d'après celui du cône, sans considérer une seconde directrice.

Les raisonnements de l'article **167** montrent que deux génératrices d'un cône de révolution dont les projections sur un plan perpendiculaire à l'axe comprennent un angle α font, après le développement de cette surface, un angle égal à $\alpha\frac{Sa}{S'a'}$ (*fig.* 104) ou à $\alpha \cos\varepsilon$, en appelant ε l'angle des génératrices avec le plan horizontal. Cette formule s'étend à toutes les développables dont le cône directeur est de révolution, c'est-à-dire aux surfaces d'égale pente; elle peut servir à vérifier la position de quelques génératrices sur le développement.

Exercices.

547. On rencontre souvent les surfaces d'égale pente dans les terrassements. Nous n'avons pas voulu choisir des exemples qui auraient exigé des explications techniques; ceux que nous présentons, bien que très-simples, suffiront pour montrer comment les problèmes relatifs à ces surfaces peuvent être résolus.

I^er^ EXEMPLE. — *Excavation faite dans un terrain horizontal, avec talus réglés à la pente de* 45°. (*Fig.* 272.)

548. On propose de représenter une excavation dont l'ouverture sur le terrain horizontal XY est l'ellipse (AB, A'B'), et dont le fond est établi sur le plan horizontal xy : les talus sont réglés à la pente uniforme de 45° sur l'horizon.

---

(1) MONGE, *Application de l'Analyse à la Géométrie*, § VIII.

Nous prenons sur la directrice des points de division arbitraires, mais symétriquement placés par rapport aux axes, et nous obtenons immédiatement les projections horizontales des génératrices qui passent par ces points, en traçant des normales à l'ellipse.

Les talus étant inclinés à 45°, si, à partir de la directrice, nous portons sur la projection de chaque génératrice une longueur égale à la distance qui sépare les deux plans horizontaux, nous aurons la trace de la développable sur le plan xy. Cette courbe *abpqcdqpa* possède des points doubles p et q situés sur l'axe AB, et des rebroussements aux points a, b, c et d où elle rencontre la développée de l'ellipse, projection de l'arête de rebroussement.

Nous obtenons les projections verticales des génératrices, en relevant sur les droites XY et xy les points des projections horizontales qui sont sur l'ellipse et sur la courbe *abcd*.

549. Une courbe a autant de rebroussements que sa projection, quand aucune de ses tangentes n'est une projetante (art. **218**). Toutes les génératrices d'une surface d'égale pente étant inclinées sur le plan horizontal, leur enveloppe doit avoir autant de rebroussements que sa projection sur ce plan, c'est-à-dire un pour chaque point de la directrice horizontale, où le rayon de courbure atteint une valeur maximum ou minimum. Dans notre exercice la directrice est une ellipse, et nous avons quatre points de rebroussement. Ceux qui correspondent aux sommets C et D, où le rayon de courbure est un maximum, sont trop éloignés pour avoir pu être placés sur la figure; les deux autres sont (I, I') et (J, J').

550. Le lieu des points doubles (p, p') et (q, q') est une ligne double qui devient parasite aux sommets (I, I') et (J, J') de la développable. Pour déterminer la nature de cette courbe, nous remarquons que l'un quelconque de ses points m' se projette au point m où la normale correspondante Mm de l'ellipse rencontre l'axe AB.

L'ellipse directrice ayant pour équation

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

une normale Mm est représentée par

$$y-\beta=\frac{a^2\beta}{b^2\alpha}(x-\alpha).$$

En faisant y nul, on trouve pour l'abscisse du point m

$$x=\alpha-\frac{b^2}{a^2}\alpha, \tag{2}$$

et l'on a pour déterminer la distance des points M et m l'équation

$$\overline{\mathrm{M}m}^2 = \frac{b^4\alpha^2}{a^4} + \beta^2.$$

Mais en appelant i la cotangente de l'angle que les génératrices de la développable font avec le plan horizontal, et z l'ordonnée verticale du point m', on obtient

$$\overline{\mathrm{M}m}^2 = i^2 z^2,$$

et par conséquent

$$i^2 z^2 = \frac{b^4\alpha^2}{a^4} + \beta^2. \tag{3}$$

L'élimination de α^2 et de β^2 entre (1), (2) et (3) donne pour équation de la ligne double

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} + \frac{i^2z^2}{b^2} = 1.$$

Cette courbe est donc une ellipse, dont les sommets (E, E') et (F, F') sont aux foyers de la directrice. Dans notre exercice i est égal à 1, et par suite le demi-axe O'O'' est égal à b ou OC.

La surface a dans le plan vertical CD une seconde ligne double dont on peut déduire l'équation de la précédente, par de simples permutations de lettres : c'est une hyperbole qui a le même centre que les deux ellipses AB et E'F'. Un de ses sommets est au point O''' où se rencontrent les génératrices A'I' et B'J'. La longueur OH ou OG de son demi-axe non transverse est égale à OE et à OF.

La première ligne double limite l'étendue que l'on peut donner à l'excavation; celle qui est dans le plan CD n'a pas d'importance dans la question qui nous occupe.

551. Si l'ellipse horizontale AB était la base d'une plate-forme élevée en remblai sur le plan XY, avec des talus inclinés à 45°, les génératrices de la surface auraient les mêmes projections horizontales, mais elles seraient inclinées en sens opposé; ces droites prolongées détermineraient par leurs intersections deux arcs doubles qui appartiendraient l'un à l'ellipse E'F', l'autre à l'hyperbole contenue dans le plan CD. Le premier est symétrique de I'J' et limite la hauteur que l'on peut donner au remblai.

La développable complète a donc trois lignes doubles concentriques qui sont des coniques. Les génératrices sont d'ailleurs parallèles deux à deux, et le cône directeur est de révolution; il en résulte que la surface possède, à l'infini, une quatrième ligne double qui est également une conique. Cette développable est une variété de celle que nous avons étudiée aux articles **508** et **537**.

II[e] EXEMPLE. — *Excavation faite dans un terrain incliné, avec talus réglés à une inclinaison donnée.* (*Fig.* 273.)

552. On propose de représenter une excavation dont l'ouverture sur le plan incliné XY est l'ellipse (AB, A'B'), et dont le fond est établi sur le plan horizontal xy : les talus sont réglés à une pente uniforme qui est donnée.

La surface est l'enveloppe des positions d'un cône de révolution dont les génératrices ont une pente connue, et dont le sommet parcourt la directrice (art. **467**) : sa trace sur le plan xy est l'enveloppe des traces du cône.

Nous prenons sur la directrice AB des points de division placés d'une manière symétrique par rapport aux axes, puis, menant par la projection verticale B' de l'un d'eux une droite B'G ayant la pente donnée, nous obtenons la longueur LG du rayon du cercle, trace horizontale du cône lorsque son sommet est au point (B, B'). Nous trouvons de la même manière que le rayon de la trace est KF lorsque le sommet est au point (A, A'), et nous pourrions construire ainsi les rayons pour toutes les positions considérées du cône; mais, comme ils sont évidemment proportionnels aux hauteurs du sommet au-dessus du plan xy, c'est-à-dire aux ordonnées de la ligne XY, nous pouvons tracer une droite fg dont les ordonnées seront les rayons cherchés. Nous en obtenons deux points f et g en portant les longueurs KF et LG en Kf et Lg (¹). La trace horizontale de la surface est l'enveloppe des cercles décrits des points de division de l'ellipse comme centres, avec les ordonnées correspondantes de la ligne fg pour rayons.

553. Le point c où le cercle dont le centre est C touche l'enveloppe appartient à la génératrice Cc de la développable et peut servir à la tracer. Si l'on veut apporter plus de précision dans la construction, on mènera par la tangente CT de la directrice un plan tangent au cône dont le sommet est (C, C') (art. **468**).

Nous avons fait l'opération en prenant le plan x_1y_1 pour plan horizontal. Les points de contact m et n appartiennent l'un à la génératrice cherchée, l'autre à la génératrice de la nappe extérieure que nous négligeons, parce qu'elle ne présente aucun intérêt dans la question spéciale qui nous occupe.

Si le point T était sur le cercle, la tangente de la directrice au point (C, C') serait une génératrice du cône et de la développable, et ce point serait un sommet (art. **468**). Quand la tangente (CT, XY) est moins inclinée que les génératrices du cône, le point T est dans le cercle, et le point C' appartient à un arc parasite de la courbe. Dans le cas où la tangente la plus inclinée de la directrice ferait avec

(¹) L'axe (AB, A'B') de l'ellipse est une ligne de plus grande pente du plan XY. Il résulte des symétries qu'introduit cette disposition, que les génératrices issues des sommets A et B sont parallèles au plan vertical, et qu'on peut obtenir les points f et g, en prenant les longueurs Kf et Lg égales à Ka' et Lb'.

le plan horizontal un angle plus grand que celui des génératrices du cône, la surface n'existerait pas : cela n'arrivera jamais quand la directrice sera fermée, car elle aura alors des tangentes horizontales.

554. On voit, par la construction que nous avons exposée, que sur une surface d'égale pente les deux génératrices Cm et Cn, qui se croisent en un même point C de la directrice, font des angles égaux avec cette courbe dans l'espace et en projection horizontale.

Sur la *fig.* 273, l'enveloppe des cercles n'a ni points doubles, ni rebroussements, ce qui montre que le plan xy ne rencontre pas l'arête de la développable.

Étude de la surface d'égale pente circonscrite à une conique, dans le cas où l'un des axes de cette courbe est une ligne de plus grande pente de son plan.

555. D'après la position que nous supposons à la directrice Δ, nous pouvons la représenter par les équations

$$(1) \qquad \gamma = m\alpha, \quad \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1.$$

La génératrice qui passe par le point considéré appartient au cône directeur, placé de manière à avoir son sommet à ce point, et par suite les coordonnées de l'un quelconque des points de cette droite satisfont à l'équation du cône

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = i^2(z - m\alpha)^2.$$

i est la cotangente de l'angle que les plans tangents de la surface font avec l'horizon. Cette équation, ordonnée par rapport à α et à β, devient

$$(2) \qquad (1 - m^2 i^2)\alpha^2 + \beta^2 + 2(mi^2 z - x)\alpha - 2y\beta + x^2 + y^2 - i^2 z^2 = 0.$$

La développable étant l'enveloppe des positions du cône, la génératrice ne cesse pas de lui appartenir, quand son sommet éprouve un déplacement infiniment petit sur la directrice (art. **452**). Nous pouvons donc différentier l'équation (2) en y considérant x, y et z comme constantes. Nous obtenons ainsi l'équation

$$(1 - m^2 i^2)\alpha + (mi^2 z - x) + (\beta - y)\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

qui devient, lorsqu'on y introduit la valeur de $\frac{d\beta}{d\alpha}$ déduite de l'équation (1),

$$(3) \qquad (b^2 - a^2 + a^2 m^2 i^2)\alpha\beta - b^2 y\alpha - a^2(mi^2 z - x)\beta = 0\ (^1),$$

(1) Nous avons employé le Calcul différentiel, parce qu'il conduit directement à l'équation (3) du plan

556. Pour avoir l'équation de la surface, il faudrait éliminer α et β entre les équations (1), (2) et (3); mais, si nous cherchons seulement son intersection avec un plan donné, nous pourrons commencer par introduire les relations qui sont établies par l'équation de ce plan entre les variables x, y et z.

Les plans

$$(4)\qquad y=0,\quad mi^2z-x=0$$

doivent couper la développable suivant des lignes faciles à déterminer, car pour chacun d'eux les équations (2) et (3) perdent un de leurs termes, et la seconde peut être réduite au premier degré par la suppression d'un facteur commun.

557. En faisant y nul dans les équations (2) et (3) pour chercher l'intersection de la surface avec le premier des plans (4), on obtient

$$(5)\qquad (1-m^2i^2)\alpha^2+\beta^2+2(mi^2z-x)\alpha+x^2-i^2z^2=0,$$

$$(6)\qquad (b^2-a^2+a^2m^2i^2)\alpha-a^2(mi^2z-x)=0,$$

et l'élimination de β et de α entre (1), (5) et (6) donne

$$(7)\quad (b^2+a^2m^2i^2)x^2-2a^2mi^2xz+(a^2-b^2)i^2z^2+b^2(b^2-a^2+a^2m^2i^2)=0.$$

La symétrie de la figure montre que les génératrices se rencontrent deux à deux dans le plan vertical AB (*fig.* 273). La conique (7), trace de la surface sur ce plan, est donc une ligne double : nous l'appellerons Δ''.

La développable étant circonscrite à deux courbes du second ordre Δ et Δ'' a deux autres directrices planes et de cet ordre; et comme les premières, représentées par les équations (1) et (7), sont concentriques, l'une des deux autres Δ''' a le même centre qu'elles, et la dernière Δ' se trouve à l'infini (art. **508**). Nous pourrions nous servir des théories du Chapitre II pour déterminer la directrice Δ''', mais il est plus simple de continuer à traiter la question directement.

558. Pour obtenir l'intersection de la surface par le second des deux plans (4), nous portons dans les équations (2) et (3) la valeur de z déduite de l'équation de ce plan; il vient

$$(1-m^2i^2)\alpha^2+\beta^2-2\beta y-\frac{1-m^2i^2}{m^2i^2}x^2+y^2=0,$$

$$(b^2-a^2+a^2m^2i^2)\beta-b^2y=0.$$

L'élimination de α et de β entre ces deux équations et l'équation (1) donne

$$(8)\qquad \frac{x^2}{a^2m^2i^2}+\frac{y^2}{b^2-a^2+a^2m^2i^2}=1.$$

---

des deux génératrices qui passent au point considéré (C, C') (*fig.* 273); mais on peut l'établir sans son secours, en exprimant analytiquement les constructions de la figure.

La section de la surface par le second des deux plans (4) est donc une courbe du deuxième ordre, concentrique avec la directrice Δ, comme nous avons reconnu que cela devait être. Appelant a''' et b''' les longueurs des demi-axes de sa projection horizontale, et m''' la tangente de l'angle de son plan avec l'horizon, nous avons, d'après la seconde des équations (4) et l'équation (8),

$$(9) \qquad m''' = \frac{1}{mi^2}, \qquad a'''^2 = a^2 m^2 i^2, \qquad b'''^2 = b^2 - a^2 + a^2 m^2 i^2.$$

Si l'on résout ces équations par rapport à m, a et b, on trouvera les mêmes expressions, avec permutation des lettres qui représentent les constantes des deux coniques; il y a donc réciprocité entre elles, et par suite celle que nous venons de déterminer, Δ''', est une ligne double comme Δ.

On déduit des équations (9)

$$a'''^2 - b'''^2 = a^2 - b^2.$$

Les coniques projections horizontales des directrices Δ et Δ''' ont donc les mêmes foyers. Il est d'ailleurs facile de voir, à l'aide de l'équation (7), que ces points sont les extrémités du segment de la droite AB (*fig.* 273) qui forme la projection horizontale de Δ''; d'où il suit que ce sont les foyers de ce segment considéré comme une ellipse aplatie.

559. Nous pouvons maintenant faire les tracés nécessaires à la détermination des lignes doubles et à la représentation générale de la surface.

Les données sont l'ellipse directrice (AB, A′B′) que nous appelons Δ (*fig.* 274 et 275), et l'angle de la développable avec l'horizon. De chacun des points A′ et B′ nous menons deux droites faisant cet angle avec la ligne de terre XY : ces lignes sont évidemment des génératrices, et la diagonale C′O′D′ du parallélogramme A′C′B′D′ qu'elles forment est la trace verticale du plan de la directrice Δ'''. Les points C′ et D′ sont des sommets de cette courbe, et leurs projections horizontales C et D des sommets de sa projection. Comme d'ailleurs la ligne Δ''' a, sur le plan horizontal, les mêmes foyers F et F_1 que l'ellipse AB, elle se trouve complétement déterminée et facile à tracer : c'est une hyperbole, parce que les sommets C et D sont en dedans des foyers; nous aurions une ellipse s'ils étaient au delà, et enfin, si les points C et D se confondaient avec F et F_1, la développable se composerait de deux cônes ayant leurs sommets l'un en C′ et l'autre en D′.

Les directrices Δ et Δ''' étant de genres différents, Δ'' est nécessairement une ellipse (art. **508**).

Il est inutile de dire que les foyers auraient pu se trouver sur l'axe Oy.

560. La droite PQ est l'intersection des plans des directrices Δ et Δ'''; par conséquent, si des points P et Q nous menons des tangentes à l'hyperbole, ces droites seront des génératrices de la surface, et leurs points de contact I, I_1, i et i_1 seront des sommets (art. 458). Nous pouvons obtenir leur position en employant la construction ordinaire des tangentes à l'hyperbole par un point extérieur. De Q et de F comme centres, avec des rayons égaux à OB et à CD, nous décrivons des arcs de cercle qui se coupent en l et en l_1 ; les droites Fl et Fl_1 passent respectivement par i et i_1, et leurs segments il et $i_1 l_1$ sont égaux à iF$_1$ et i_1F$_1$ [1].

Les points M et N, où une même génératrice rencontre l'ellipse et l'hyperbole, sont tels, que les tangentes correspondantes se rencontrent en un point de l'axe PQ (art. 455). On a par suite entre leurs ordonnées β et y la relation [2]

$$\frac{b^2}{\beta} = \frac{b'''^2}{y}.$$

Le rapport de β à y est donc constant, et par suite les ordonnées des points M et N sont entre elles comme les ordonnées des points connus Q et i. En conséquence, après avoir pris sur l'ellipse des points de division arbitraires, mais symétriquement placés par rapport aux axes, on peut obtenir par une construction de lignes proportionnelles les ordonnées des points de l'hyperbole qui leur correspondent, ce qui suffit pour les déterminer sur cette courbe que nous supposons tracée avec soin. On relève ensuite les points de l'ellipse sur A′B′, ceux de l'hyperbole sur C′D′, et l'on trace les deux projections de toutes les génératrices considérées. Nous les avons arrêtées aux courbes Δ et Δ'''.

Conformément à une observation que nous avons présentée à l'article 554, les deux génératrices qui se rencontrent en un point quelconque de l'une des directrices font des angles égaux avec la tangente de cette ligne dans l'espace et en projection horizontale.

Deux génératrices, issues des points M et R symétriquement placés par rapport à AB, se rencontrent dans le plan vertical dont cette ligne est la trace; mais leur croisement ne peut pas se dessiner sur la projection verticale, parce qu'elles y sont représentées par une même droite. Pour construire la directrice Δ'' qui est une ellipse, il faut relever sur le plan vertical les points de rencontre des projections horizontales des génératrices avec la droite AB.

561. Les verticales ge et $g_1 e_1$ relevées des foyers F et F$_1$ touchent l'ellipse Δ'' (art. 558). Les côtés du parallélogramme A′C′B′D′ sont des génératrices situées dans le plan de cette directrice; elles lui sont donc tangentes (art. 457), et leurs points de contact sont des sommets de la surface.

On sait que, *dans un pentagone circonscrit à une conique, deux diagonales qui ne*

---

[1] On peut aussi remarquer que la perpendiculaire à AB menée par le point C rencontre l'arc Fl_1F$_1$ au point σ où passe la droite Qi_1.

[2] Cette formule peut être déduite immédiatement de la seconde équation de l'article 558; elle est identique avec celle que nous avons obtenue à l'article 516.

partent pas d'un même angle se croisent en un point situé sur la droite qui joint le cinquième angle au point où le côté opposé touche la courbe [1].

D'après ce théorème, nous pouvons déterminer la position exacte des sommets, en considérant le pentagone formé par cinq des six tangentes que nous connaissons, par exemple le pentagone $g_1 e_1$D'B'C'. La figure montre la construction pour les sommets J'_1 et j' : les deux autres sont sur les diamètres qui passent par ces points [2].

562. Les quatre points M, M_1, R et R_1, placés sur l'ellipse Δ d'une manière symétrique par rapport aux axes, appartiennent à un groupe composé des huit génératrices

MN,	MN_1,
M_1N_1,	NM_1,
RS_1,	RS,
SR_1,	R_1S_1.

Chaque droite de l'un des systèmes rencontre trois droites de l'autre système à distance finie, et est parallèle à la quatrième.

Les génératrices issues des points M et R symétriquement placés sur Δ se coupent en des points (v, v') et (u, u') tels, que les droites qui y touchent Δ'' se rencontrent en un point de l'intersection (AB, A'B') des plans de Δ et de Δ'', celui où les tangentes de Δ en M et en R vont se croiser (art. 455). La corde $u'v'$ est donc parallèle au diamètre de Δ'', conjugué avec A'B'.

Les tangentes de Δ aux points P et Q sont parallèles; les tangentes de Δ'' aux points (k, k') et (k_1, k'_1) qui leur correspondent sont donc aussi parallèles, et par suite les droites A'B' et C'D' sont diamétrales conjuguées dans l'ellipse Δ''. Les quatre points u', v', u'_1 et v'_1 de cette conique qui appartiennent à un groupe sont les sommets d'un parallélogramme dont les côtés sont respectivement parallèles à A'B' et à C'D'.

Ces résultats sont conformes à ceux des articles **508** et **519**.

Nous avons directement la longueur $k'k'_1$, mais les extrémités G et G_1 du diamètre conjugué étant sur des arcs parasites ne nous sont pas données par la construction. Pour les obtenir, nous traçons un demi-cercle sur $k'k'_1$, et nous supposons qu'il se transforme dans l'ellipse Δ'' (art. **514**). Prenant sur cette courbe un point bien déterminé tel que J', nous cherchons le point J'_2 qui lui correspond sur le cercle, puis considérant le point G_2, extrémité du diamètre perpendiculaire à $k'k'_1$, nous le ramenons en G sur O'B' par une parallèle à J'_2J'.

[1] M. Brianchon, *Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XIII, p. 301. — M. Poncelet, *Propriétés projectives*, art. 212.

[2] La position précise des sommets est déterminée par une seconde construction que nous expliquerons dans le Livre relatif à la courbure des surfaces (art. 864).

563. Quand la développable doit faire avec l'horizon le même angle que le plan de la directrice Δ, le produit *mi* est égal à l'unité, et l'on voit par les équations (9) que les courbes Δ et Δ‴ se confondent. Leur plan fait deux fois partie de la développable complète, car le cône directeur mobile le touche toujours le long d'une certaine génératrice, et cette droite occupe les mêmes positions lorsque le sommet parcourt la partie supérieure et la partie inférieure de la courbe.

D'après ce que nous avons vu aux articles **456** et **509**, la directrice Δ″ doit être tangente au plan des deux autres réunies, et en effet, la droite dans laquelle les droites diamétrales conjuguées O′B′ et O′D′ se confondent est nécessairement une asymptote de cette conique.

564. Lorsque le plan de la directrice Δ est horizontal, ce qui est le cas de la *fig.* 272, l'équation (7) de Δ″ se réduit à

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{i^2z^2}{b^2}=1.$$

Nous avons déjà obtenu cette équation à l'article **550**.

On remarquera que les foyers de l'ellipse directrice AB ou Δ peuvent encore être regardés comme les foyers des projections des deux autres coniques Δ″ et Δ‴, lignes doubles de la développable, car ce sont les extrémités du segment de AB sur lequel se projette l'ellipse E′O″F′ ou Δ″ (*fig.* 272), et la différence de leurs distances à un point quelconque de la droite indéfinie CD, projection de l'hyperbole Δ‴, est constante.

565. Les équations (5) de l'article **537** permettent de reconnaître la nature des diverses surfaces du second degré inscrites dans une des surfaces d'égale pente que nous avons étudiées. On trouve des grandeurs infinies pour les trois axes de l'une des inscrites.

Nous avons vu (art. **408**) que tous les points d'un plan situés à l'infini sont sur une droite; il en résulte que le lieu des points de l'espace situés à l'infini est coupé suivant une droite par un plan quelconque, et que par conséquent c'est un plan. La surface inscrite qui a tous ses points à l'infini est aplatie dans ce plan : c'est la directrice Δ′.

Étude générale de la surface d'égale pente circonscrite à une conique.

566. Nous n'avons encore étudié la surface d'égale pente circonscrite à une conique que dans le cas où l'un des axes de cette courbe est dans la direction de la ligne de plus grande pente de son plan. Il n'est pas nécessaire de faire cette restriction pour que la développable soit une variété de celle qui a quatre lignes doubles planes et du second degré, car, le cône directeur étant de révolution, la surface est circonscrite à une seconde conique située à l'infini.

La trace complète de la développable sur le plan d'une ligne double comprend, outre cette courbe, quatre de ses tangentes. Dans les calculs précédents nous avons pu faire disparaître ces droites; ainsi, à l'article **558**, après avoir supprimé le dernier terme de l'équation (3), nous avons rejeté un facteur α et enlevé ainsi les solutions qui correspondent à la valeur nulle de cette variable auxiliaire, c'est-à-dire les génératrices tangentes de la ligne double, car l'équation (2) et la seconde des équations (4) déterminent ces droites, lorsque l'on suppose α nul et par suite β égal à $\pm b$. De même, à l'article **557**, nous avons éloigné un facteur commun β. Enfin à l'article **494**, dans le calcul qui a fait trouver la seconde des équations (6), nous avons supprimé un facteur γ^2 qui correspondait au groupe simple situé dans le plan horizontal. Ainsi donc, si nos calculs ont conduit facilement aux résultats, c'est que, par suite de la symétrie du système géométrique considéré, un facteur représentant les génératrices tangentes s'est trouvé mis en évidence, et a été rejeté. Cette symétrie ne se présente plus d'elle-même dans le problème qui va nous occuper.

Nous savons que, quand une des lignes doubles est à l'infini, les trois autres sont concentriques, et que les traces des plans de deux quelconques d'entre elles sur celui de la troisième sont deux diamètres conjugués de celle-ci; mais il y a dans la question une donnée nouvelle, la pente des génératrices, et nous ne pouvons pas prévoir son influence sur la position des lignes doubles, ce qui serait nécessaire pour que le facteur qu'il faut supprimer pût être mis en évidence. Ce sont les résultats du calcul qui devront nous fixer à cet égard.

567. Nous représentons la conique directrice Δ par les équations

$$A\alpha^2 + 2C\alpha\beta + B\beta^2 = 1, \tag{1}$$

$$\gamma = M\alpha + N\beta. \tag{2}$$

Si nous désignons, comme précédemment, par i la cotangente de l'inclinaison constante des génératrices sur le plan horizontal, l'équation du cône directeur placé de manière à avoir son sommet au point considéré de la directrice sera

$$(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 = (Z - M\alpha - N\beta)^2 i^2,$$

ou, en ordonnant,

$$\left\{\begin{aligned}(1 - M^2 i^2)\alpha^2 - 2MNi^2\alpha\beta + (1 - N^2 i^2)\beta^2 + 2(MZi^2 - X)\alpha& \\ + 2(NZi^2 - Y)\beta + X^2 + Y^2 - i^2 Z^2 = 0.&\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Différentiant l'équation (3) et remplaçant $\frac{d\beta}{d\alpha}$ par sa valeur déduite de l'équation (1), on obtient

$$(4)\ \left\{\begin{aligned} &[C(1-M^2i^2)+AMNi^2]\alpha^2+[B(1-M^2i^2)-A(1-N^2i^2)]\alpha\beta\\ &-[C(1-N^2i^2)+BMNi^2]\beta^2+[C(MZi^2-X)-A(NZi^2-Y)]\alpha\\ &\qquad\qquad -[C(NZi^2-Y)-B(MZi^2-X)]\beta=0.\end{aligned}\right.$$

Le système des équations (1), (3) et (4) représente la développable, enveloppe des positions du cône.

568. La direction des axes horizontaux n'est pas déterminée; nous pouvons donc établir une relation entre les coefficients A, B, C, M, N et la pente de la surface. Nous posons

$$(5)\qquad C(1-M^2i^2)+AMNi^2=0.$$

Cette équation fixe l'orientation des axes horizontaux, par rapport à la conique directrice.

569. Nous coupons la surface par le plan

$$(6)\qquad C(MZi^2-X)-A(NZi^2-Y)=0.$$

En vertu des relations (5) et (6), l'équation (4) perd deux de ses termes; on peut diviser les autres par β, et il reste

$$(7)\ \left\{\begin{aligned} &[B(1-M^2i^2)-A(1-N^2i^2)]\alpha-[C(1-N^2i^2)+BMNi^2]\beta\\ &\qquad\qquad -[C(NZi^2-Y)-B(MZi^2-X)]=0.\end{aligned}\right.$$

La courbe d'intersection est représentée par l'équation (6) et par celle qui doit résulter de l'élimination de α et de β entre les équations (1), (3) et (7). Il est facile de prévoir que nous allons trouver une courbe du second ordre, car le facteur supprimé β a entraîné avec lui quatre génératrices tangentes; on peut, en effet, vérifier que, la relation (5) étant satisfaite, l'intersection des plans (2) et (6) a pour projection horizontale l'axe des abscisses, d'où il résulte que les points de la directrice Δ pour lesquels l'ordonnée β est nulle appartiennent au plan sécant (6), et que les génératrices qui passent à ces points sont situées dans ce plan.

570. Nous introduisons d'abord dans les équations (3) et (7) les valeurs des expressions MNi^2 et (NZi^2-Y) prises dans les équations (5) et (6). Nous obtenons ainsi

$$(8)\ \left\{\begin{aligned} &(1-M^2i^2)(A\alpha^2+2C\alpha\beta)+(1-N^2i^2)A\beta^2+2(MZi^2-X)(A\alpha+C\beta)\\ &\qquad\qquad +A(X^2+Y^2-i^2Z^2)=0,\end{aligned}\right.$$

$$(9)\qquad [A(1-N^2i^2)-B(1-M^2i^2)](A\alpha+C\beta)+(C^2-AB)(MZi^2-X)=0.$$

Pour éliminer α, nous portons dans l'équation (8) les valeurs des binômes $(A\alpha^2+2C\alpha\beta)$ et $(A\alpha+C\beta)$ déduites respectivement des équations (1) et (9), et ensuite dans l'équation (1) la valeur de α obtenue par l'équation (9). Ces substitutions donnent

$$\begin{gathered}
[A(1-N^2i^2)-B(1-M^2i^2)]^2\beta^2 - 2(C^2-AB)(MZi^2-X)^2 \\
\qquad + [(1-M^2i^2)+A(X^2+Y^2-i^2Z^2)][A(1-N^2i^2)-B(1-M^2i^2)] = 0, \\
[A(1-N^2i^2)-B(1-M^2i^2)]^2\beta^2 - (C^2-AB)(MZi^2-X)^2 \\
\qquad + \frac{A}{C^2-AB}[A(1-N^2i^2)-B(1-M^2i^2)]^2 = 0.
\end{gathered}$$

En retranchant la première de ces équations de la seconde, β disparaît, et l'on obtient après quelques réductions

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{(C^2-AB)^2}{A}(MZi^2-X)^2 + [A(1-N^2i^2)-B(1-M^2i^2)] \\
&\quad \times \left[A(1-N^2i^2) - \frac{C^2}{A}(1-M^2i^2) - (C^2-AB)(X^2+Y^2-i^2Z^2)\right] = 0.
\end{aligned}\right.$$

L'intersection de la surface du second ordre représentée par cette équation, avec le plan (6), est une conique concentrique avec la directrice, et, comme elle, ligne double de la développable. Éliminant Z entre les équations (6) et (10), nous trouvons, pour représenter la projection horizontale de la conique, l'équation

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{(C^2-AB)^2(NX-MY)^2}{(CM-AN)^2} + \frac{A(1-N^2i^2)-B(1-M^2i^2)}{A} \\
&\quad \times \left\{A(1-N^2i^2) - \frac{C^2}{A}(1-M^2i^2) - (C^2-AB)\left[X^2+Y^2-\frac{(CX-AY)^2}{(CM-AN)^2 i^2}\right]\right\} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Si nous avions éliminé d'abord β, nous aurions trouvé deux équations complètes du second degré en α, et l'élimination de cette variable nous aurait donné une équation du quatrième degré en X, Y et Z, dont il aurait fallu extraire la racine pour avoir (10). L'opération aurait donc été peu praticable. Cela tient à ce que, sur la projection horizontale de la directrice Δ, les quatre points d'un même groupe sont les sommets d'un parallélogramme oblique; de sorte que, les axes étant rectangulaires et celui des abscisses correspondant aux deux points d'un groupe simple ($\beta = 0$) par suite de l'orientation que nous avons donnée aux axes horizontaux (art. **568**), chaque groupe ordinaire est caractérisé par une valeur de β^2, mais non par une valeur de α^2. Nous nous trouvons ainsi, en éliminant d'abord α, dans les mêmes circonstances qu'aux articles **494** et **557**.

571. Il faut maintenant rechercher les conséquences de l'équation (5) pour la position des axes coordonnés.

En rapportant la directrice Δ aux axes de sa projection horizontale et à la verticale de son centre, nous pourrons la représenter par les deux équations

$$(12)\qquad \frac{\alpha'^2}{a^2}+\frac{\beta'^2}{b^2}=1,\quad \gamma = m\alpha' + n\beta'.$$

Si nous appelons φ l'angle dont il faut faire tourner les axes horizontaux pour les faire coïncider avec ceux du système auquel se rapportent les équations (1), nous aurons

$$\alpha' = \alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi, \quad \beta' = \alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi.$$

Portant ces valeurs dans les équations (12), et égalant leurs coefficients à ceux des équations (1) et (2), on trouve

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} A = \dfrac{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}{a^2b^2}, \quad C = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2b^2}\sin\varphi\cos\varphi, \quad B = \dfrac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}{a^2b^2} \\ \qquad M = m\cos\varphi + n\sin\varphi, \quad N = -m\sin\varphi + n\cos\varphi. \end{array} \right.$$

Introduisant enfin ces expressions dans l'équation de condition (5), on obtient, toutes réductions faites,

$$(14) \quad a^2mni^2\operatorname{tang}^2\varphi - [a^2(1 - m^2i^2) - b^2(1 - n^2i^2)]\operatorname{tang}\varphi - b^2mni^2 = 0.$$

Il existe donc deux valeurs pour l'angle φ qui détermine la position de la projection horizontale de l'intersection du plan de la ligne double représentée par les équations (6) et (11), avec le plan de la directrice Δ; le produit de leurs tangentes est égal à $-\dfrac{b^2}{a^2}$, et par suite les droites déterminées dans le plan de Δ sont deux diamètres conjugués de cette conique, comme nous savons que cela doit être.

572. On peut vérifier les formules que nous avons obtenues en y supposant n nulle, ce qui nous ramène au cas étudié dans le paragraphe précédent.

Les deux valeurs de φ données par l'équation (14) sont 0 et 90°.

En faisant $\varphi = 0$ dans les équations (13), on obtient

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad C = 0, \quad B = \frac{1}{b^2}, \quad M = m, \quad N = 0.$$

L'équation (6) du plan de la courbe devient

$$Y = 0.$$

Enfin l'équation (10) se réduit à l'équation (7) de l'article **557**.

Opérant de la même manière sur la valeur 90° de φ, on obtient la seconde des équations (4) de l'article **556** et l'équation (8) de l'article **558**. Nous trouvons donc tous les résultats des calculs plus simples du paragraphe précédent, et nous nous serions dispensé de les établir directement si nous n'avions pas fait du cas qu'ils concernent le sujet d'un de nos principaux exercices graphiques.

Les équations que nous venons d'obtenir résolvent complètement la question. Nous aurions pu faire disparaître de l'équation (4) le troisième et le cinquième terme, au lieu du premier et du quatrième : le facteur supprimé eût alors été α; mais, eu égard à la symétrie qui existe jusque-là dans les formules, nous eussions obtenu un système d'équations équivalent à celui des équations (5), (6) et (10).

573. Pour rendre les différentes coniques comparables entre elles, il faut les rapporter à un même système d'axes, qui sera naturellement celui des équations (12). Cela revient à faire tourner les axes horizontaux de l'angle $-\varphi$, et par conséquent nous avons entre les anciennes coordonnées et les nouvelles, que nous indiquons par des minuscules, les relations

$$(15) \qquad X = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad Y = -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \quad Z = z.$$

Ces valeurs et celles des coefficients données par les équations (13) doivent être portées dans les équations (6) et (11). La substitution dans l'équation (6) donne pour l'équation du plan de la conique

$$(16) \qquad a^2(mi^2 z - x)\,\mathrm{tang}\,\varphi - b^2(ni^2 z - y) = 0.$$

Quelle que soit celle des deux valeurs de l'angle φ que l'on considère, le plan représenté par l'équation (16) contiendra la droite dont les équations sont

$$mi^2 z - x = 0, \quad ni^2 z - y = 0, \quad nx - my = 0.$$

Cette ligne est donc l'intersection des plans des deux directrices Δ'' et Δ'''; mais elle est évidemment perpendiculaire à la trace horizontale du plan de Δ, dont l'équation est, d'après (12),

$$mx + ny = 0;$$

par conséquent, *l'intersection des plans de deux lignes doubles est perpendiculaire à la trace horizontale du plan de la troisième.*

574. Nous allons maintenant transformer l'équation (11) de la projection horizontale de la ligne double; nous en éliminons d'abord i^2 à l'aide de l'équation de condition (5), pour que les constantes soient indépendantes les unes des autres, et que les réductions dont l'équation définitive est susceptible se présentent d'elles-mêmes :

$$\frac{(C^2 - AB)^2(NX - MY)^2}{CM - AN} + \frac{C(M^2 - N^2) - (A - B)MN}{M}$$
$$\times\left[A + \frac{CN}{M} - (C^2 - AB)\left(X^2 + Y^2 - \frac{M}{C}\frac{(CX - AY)^2}{(CM - AN)}\right)\right] = 0.$$

Introduisant les valeurs (13) et (15) et réduisant séparément les diverses expressions qui figurent dans l'équation, nous obtenons

$$\frac{(n x - m y)^2}{a^2 b^2 (m a^2 \sin\varphi - n b^2 \cos\varphi)} + \frac{(a^2 - b^2) m n}{a^2 b^2 (m \cos\varphi + n \sin\varphi)}$$
$$\times \left[\frac{m b^2 \cos\varphi + n a^2 \sin\varphi}{a^2 b^2 (m \cos\varphi + n \sin\varphi)} + \frac{x^2 + y^2}{a^2 b^2} - \frac{(a^2 x \sin\varphi - b^2 y \cos\varphi)^2 (m \cos\varphi + n \sin\varphi)}{a^2 b^2 (a^2 - b^2) \sin\varphi \cos\varphi (m a^2 \sin\varphi - n b^2 \cos\varphi)} \right] = 0.$$

Ordonnant par rapport aux variables et réduisant, on trouve

$$\frac{n x^2}{\cos\varphi} - \frac{m y^2}{\sin\varphi} = \frac{m n (a^2 - b^2)}{m \cos\varphi + n \sin\varphi}.$$

Cette équation montre que les projections des trois coniques, lignes doubles de la développable, ont les mêmes axes en direction. Si nous appelons a_1 et b_1 les demi-axes de la conique représentée par l'équation que nous venons d'obtenir et considérée comme une ellipse, nous aurons

$$(17) \qquad a_1^2 = \frac{m (a^2 - b^2)}{m + n \operatorname{tang}\varphi}, \quad b_1^2 = - \frac{n (a^2 - b^2) \operatorname{tang}\varphi}{m + n \operatorname{tang}\varphi},$$

d'où

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2.$$

Les coniques projections horizontales des trois lignes doubles sont homofocales (¹).

575. Pour représenter graphiquement la surface, les données étant l'inclinaison des génératrices, la projection horizontale de la directrice Δ et son plan, on commencera par déterminer les quatre génératrices qui sont tangentes à cette courbe. Comme elles ont une inclinaison connue, et qu'elles sont dans un plan donné, on peut construire des droites qui leur soient parallèles, et on les trace ensuite comme tangentes à Δ. On obtient ainsi sur le plan horizontal un parallélogramme circonscrit à la projection de Δ, et analogue à kQk_1P (*fig.* 274) ou à A′C′B′D′ (*fig.* 275). Deux des sommets de ce parallélogramme appartiennent à la projection de Δ″, et les deux autres à la projection de Δ‴. Les diagonales sont les traces des plans de ces courbes sur celui de Δ.

Cette construction fait défaut lorsque la surface n'a pas de sommets sur Δ, car alors on ne peut pas mener à cette directrice des tangentes ayant l'inclinaison donnée. Dans ce cas, pour avoir les traces des plans de Δ″ et de Δ‴, on peut calculer les valeurs de tang φ à l'aide de l'équation (14).

(¹) Les théorèmes établis aux articles 573 et 574 ont attiré l'attention de M. Cremona, qui en a donné des démonstrations très-ingénieuses fondées sur les principes de la Géométrie moderne (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1865, p. 271).

376. Dans l'épure que nous présentons, afin de donner une certaine symétrie à la figure et de simplifier les constructions, nous avons supposé que le plan de Δ coupait les plans verticaux passant par les axes de la projection horizontale de cette conique, suivant des droites ayant l'inclinaison des génératrices : les points de Δ situés dans ces plans verticaux sont alors évidemment des sommets de la développable.

D'après l'hypothèse admise, nous avons

$$m^2 = n^2 = \frac{1}{l^2};$$

d'ailleurs, nous pouvons supposer que l'on a choisi le sens des ordonnées positives de manière que m et n soient de même signe.

Les équations (14) et (17) deviennent

$$\text{(14 bis)} \qquad \operatorname{tang}\varphi = \mp \frac{b}{a},$$

$$\text{(17 bis)} \qquad a_1^2 = a(a \pm b), \quad b_1^2 = b(b \pm a).$$

377. La projection horizontale de la directrice donnée est l'ellipse IiI_1i_1 (*fig.* 286); on détermine les axes des projections horizontales des autres coniques par les constructions faciles qu'indiquent les équations (17 *bis*) : nous n'avons pas conservé ces constructions sur la figure. La projection de la seconde ligne double Δ'' est l'ellipse B_1DABA_1; celle de la troisième Δ''', l'hyperbole $JABB_1A_1n_1$.

Les coefficients m et n étant égaux, la trace horizontale du plan de Δ est la droite P_1OP, qui fait avec l'axe des abscisses un angle de $-45°$: l'intersection des plans des directrices Δ'' et Δ''' se projette, par conséquent, sur la perpendiculaire D_1OD (art. **373**). Les projections AA_1 et BB_1 des deux autres arêtes du trièdre formé par les plans des lignes doubles sont construites par les relations qu'indiquent les équations (14 *bis*). Les droites AA_1, BB_1 et DD_1, prises deux à deux, forment des systèmes de droites diamétrales conjuguées des courbes.

En déterminant avec soin les extrémités A, A_1, D et D_1 des diamètres conjugués de l'hyperbole Δ''', on trouve qu'ils sont en projection sur l'ellipse Δ''; de même les extrémités B et B_1 du diamètre BB_1 conjugué de DD_1 pour la directrice Δ'' sont, en projection, sur l'hyperbole Δ'''. On peut vérifier à l'aide des formules de l'article **376** ces diverses coïncidences; elles résultent de symétries introduites dans la surface par les hypothèses de cet article. D'après cela, les projections horizontales des diamètres conjugués des directrices, dirigés sur les arêtes du trièdre formé par les plans de ces courbes, sont CC_1 et GG_1 pour l'ellipse Δ, DD_1 et BB_1 pour l'ellipse Δ'', AA_1 et DD_1 pour l'hyperbole Δ'''.

Les points D et D_1, étant sur l'intersection des plans de Δ' et de Δ'', sont dans l'espace, comme en projection, les extrémités d'un diamètre de l'ellipse Δ'' et d'un diamètre non transverse de l'hyperbole Δ'''.

Les traces horizontales des plans de Δ' et de Δ'' sont les droites P''_1P'' et P'''_1P''' respectivement perpendiculaires à A_1A et à B_1B.

578. Nous prenons trois plans verticaux auxiliaires respectivement perpendiculaires aux plans des trois coniques : leurs lignes de terre sont P_1x, P''_1x'' et P'''_1x'''. Nous établissons la trace P_1K du plan de Δ sur le premier plan auxiliaire : l'angle KP_1x est une des données du problème (¹); nous obtenons ensuite la trace de chacun des plans de Δ'' et de Δ''' sur le plan vertical qui lui est perpendiculaire, en cherchant la projection d'un point pris sur son intersection avec le plan de Δ (art. 59). Ainsi la trace P''_1K'' du plan de Δ'' passe par la projection Γ_2 du point (G, Γ_1) de la droite (OB, P_1K), et la trace P'''_1K''' du plan de Δ''' passe par la projection π_2 du point (π, π_1) de la droite (OA, P_1K).

Il faut maintenant établir les projections des arêtes du trièdre formé par les plans des directrices et de ces courbes elles-mêmes sur le plan vertical de l'épure, qui est celui des grands axes des ellipses H_1 et ADA_1 : cette construction est un simple changement de plan de projection (art. 59). Nous déterminons le point G' qui correspond à (G, Γ_2), nous traçons $O'G'$ et nous relevons les points B, B_1 et G_1 en B', B'_1 et G'_1. Nous plaçons ensuite la nouvelle projection π' du point (π, π_1), nous traçons $O'\pi'$, et nous relevons les points A, C, C_1 et A_1 en A', C', C'_1 et A'_1. Nous établissons d'une manière analogue la droite $O'D'$, projection de l'arête (OD, P''_1K''), en opérant sur un point de cette ligne, et nous relevons les points D et D_1 en D' et D'_1. On pourrait obtenir par la même construction des points appartenant aux courbes, mais il vaut mieux remarquer que nous avons des couples de diamètres conjugués : $C'C'_1$ et $G'G'_1$ pour la projection de Δ, $D'D'_1$ et $B'B'_1$ pour la projection de Δ'', et enfin $A'A'_1$ et $D'D'_1$ pour la projection de Δ'''. A l'aide de ces diamètres, on détermine facilement la projection verticale de chaque ligne double.

Deux génératrices de la surface sont parallèles à chaque génératrice du cône directeur; il y a donc quatre génératrices parallèles au plan vertical; elles forment sur ce plan le contour apparent de la développable (art. 545). Les projections verticales des lignes doubles sont par conséquent inscrites dans un même parallélogramme, et de là résultent entre ces coniques diverses relations à l'étude desquelles nous ne nous arrêterons pas.

Les directrices Δ et Δ'' percent respectivement le plan de Δ''' aux points C, C_1

(¹) Si, pour achever de déterminer le plan de Δ, on donnait, non son angle avec le plan horizontal, mais la tangente m de l'inclinaison de sa trace sur le plan vertical de l'épure, on construirait l'angle KP_1X, comme nous l'avons expliqué à l'article 58.

Nous n'avons pas à nous donner la pente des génératrices; elle résulte de la position du plan de Δ, conformément aux relations que nous avons admises à l'article 576.

et D, D_1 [1]; les droites CD, C_1D_1, DC_1 et D_1C forment donc un groupe simple : ce sont des génératrices tangentes à Δ''', et leurs points de contact j, j_1, J_1 et J sont des sommets de la développable.

Les droites (AB, A′B′), (A_1B_1, $A'_1B'_1$), (BA_1, $B'A'_1$) et (B_1A, B'_1A') sont de même des génératrices tangentes à Δ; elles déterminent les quatre sommets (I, I′), (I_1, I'_1), (i_1, i'_1) et (i, i'). Les deux dernières sont parallèles au plan vertical, et par suite leurs projections sur ce plan forment deux des côtés du quadrilatère circonscrit dont nous venons de parler; les droites $B'A'_1$ et B'_1A' sont donc tangentes à la projection de Δ''' en A'_1 et en A′, et à la projection de Δ'' en B′ et en B'_1; le diamètre D'_1D', respectivement conjugué à A'_1A' et à B'_1B', est par conséquent parallèle à $B'A'_1$ et à B'_1A'.

L'angle constant formé par les génératrices de la surface avec le plan horizontal est égal à l'angle que forment les droites $B'A'_1$ et B'_1A' avec O′X′, ou à D′O′X′.

579. Sur la directrice Δ, quatre points e, c, e_1 et c_1 d'un groupe sont les sommets d'un parallélogramme qui a ses côtés respectivement parallèles aux diamètres conjugués B_1B et A_1A, traces des plans des deux autres directrices sur celui de Δ (art. **562**). On peut, par la même considération, déterminer sur Δ'' quatre points a, b, a_1 et b_1 qui dépendent d'un groupe, et, si ce groupe est le même que celui des points e, c, e_1 et c_1, le rapport des abscisses Or et Op sur le diamètre BOG_1, intersection des plans de Δ et de Δ'', sera indépendant de la position des points considérés sur Δ et Δ'' (art. **516**). Mais les points i et B_1 sont sur une génératrice; on doit donc avoir

$$\frac{Or}{Op} = \frac{Oq}{OB_1} \quad \text{ou} \quad \frac{Os}{Op} = \frac{Oi}{OB_1}.$$

D'après cela, pour obtenir le point p du parallélogramme aba_1b_1 dont les sommets appartiennent au même groupe que ceux du parallélogramme ece_1c_1, il suffit de tracer sp parallèle à iB_1.

La construction se simplifie pour la directrice Δ''', parce que le diamètre DD_1 est commun à Δ'' et à Δ''' en direction et en grandeur. Les carrés désignés par p^2 et q^2 à l'article **516** sont égaux, mais de signe contraire, car le diamètre DD_1 n'est pas transverse pour l'hyperbole Δ'''. Il résulte de là que les points de Δ'' et de Δ''' qui appartiennent à une même génératrice ont sur DD_1 des abscisses égales et de sens opposé. OH et OH_1 étant, sur le diamètre DD_1, les abscisses des sommets du parallélogramme aba_1b_1, si l'on mène par les points H et H_1 des parallèles à A_1A,

---

(1) Quelques-unes des indications se rapportent seulement au plan horizontal, mais on peut suivre les raisonnements sur les deux projections. Le point J_1, symétrique de J, n'a pu être tracé sur la figure.

on déterminera sur Δ''' les points m, n_1, m_1 et n qui appartiennent au groupe considéré.

Les points a et b_1 de Δ'' qui ont pour abscisse OH sont sur les génératrices qui passent par les points n_1 et m de Δ'', dont l'abscisse est $-$ OH ou OH_1.

Nous n'avons pas tracé les génératrices de ce groupe par crainte de confusion : ce sont les huit droites

$$\begin{array}{ll} nea_1, & neb, \\ aem, & meb_1, \\ b_1e_1n_1, & n_1e_1a, \\ be_1m_1, & a_1e_1m_1. \end{array}$$

Nous avons construit la trace horizontale de la surface ; elle se compose de deux branches fermées qui se coupent aux traces ε et ν de Δ'', et de deux points isolés ω_1 et ω, traces des arcs parasites de Δ. Les traces de toutes les génératrices du groupe qui a été déterminé sont indiquées par des lettres.

580. *Cas où la directrice donnée est une hyperbole.* — Dans tous nos exercices nous avons choisi pour première directrice Δ une ellipse, parce que cette conique a une certaine analogie de forme avec les courbes que l'on rencontre le plus souvent dans les applications. Nous allons maintenant examiner sommairement les diverses dispositions que peut présenter la surface d'égale pente circonscrite à une hyperbole.

Rappelons d'abord que tout plan tangent à la directrice Δ et faisant avec le plan horizontal le même angle que la développable touche cette surface le long de la génératrice qui passe au point de contact. D'après cela, si la conique Δ est une hyperbole dont une asymptote se trouve plus inclinée que les génératrices, on pourra faire passer par cette droite deux plans ayant la pente des plans tangents de la développable, et chacun d'eux contiendra une génératrice située à l'infini. La surface a donc deux génératrices situées à l'infini, c'est-à-dire dans le plan de Δ' ; elles sont tangentes à cette directrice (art. **457**), et leurs points de contact sont deux sommets de la développable.

Si la seconde asymptote de Δ est moins inclinée que les génératrices, la surface n'a que deux sommets sur Δ', et par suite elle appartient à la variété portée sous le n° 5 à l'article **521** [1] ; les groupes sont formés de quatre génératrices, et les plans de Δ'' et de Δ''' n'existent plus : on peut vérifier que les racines de l'équation (14) (art. **575**) sont imaginaires quand les génératrices sont moins inclinées que l'une des asymptotes de Δ, et plus inclinées que l'autre. Enfin, si l'on coupe le cône directeur par un plan parallèle à celui de Δ, on aura une hyperbole

[1] Nous n'avons pas trouvé cette disposition dans la discussion de l'article 508, parce que nous avons supposé que les plans des trois directrices concentriques étaient réels.

dont les asymptotes seront croisées avec celles de Δ (art. **502**); il est en effet très-facile de reconnaître que, lorsqu'on coupe un cône de révolution par un plan contenant deux droites, l'une plus inclinée que les génératrices du cône, l'autre moins inclinée qu'elles, la section est une hyperbole dont les asymptotes sont croisées avec les droites.

581. Quand la seconde asymptote de l'hyperbole Δ est, comme la première, plus inclinée que les génératrices, la surface a quatre génératrices à l'infini. Ces droites, étant dans un même plan (art. **565**), se coupent en six points qui sont des points doubles étrangers à Δ' : chacune des coniques Δ'' et Δ''' a donc comme Δ deux points à l'infini, et par conséquent les trois coniques concentriques sont des hyperboles. Leurs six asymptotes sont les intersections mutuelles des quatre plans qui touchent la surface le long des génératrices situées à l'infini. On détermine facilement ces plans, comme nous l'avons vu à l'article précédent, quand on connaît les asymptotes d'une directrice et la pente des génératrices; ils sont tangents au cône directeur placé de manière à avoir son sommet au centre de la surface. Les droites de contact de ces plans avec le cône sont parallèles aux génératrices situées à l'infini.

L'arête de rebroussement possède deux rebroussements à l'infini dans le premier des cas que nous venons d'examiner, et quatre dans le second. Les branches sont paraboliques, car la génératrice tangente est tout entière à l'infini (¹).

582. Quand la directrice Δ est une hyperbole ayant ses deux asymptotes plus inclinées que les génératrices, la section du cône directeur par un plan parallèle à celui de Δ est une ellipse ou une hyperbole ayant avec Δ un système de diamètres conjugués parallèles. La discussion de l'article **521** montre que la surface peut être imaginaire; lorsqu'elle est réelle, elle n'a pas de génératrice à l'infini, et par conséquent elle ne possède dans le plan de Δ', outre cette conique, que deux points isolés appartenant à Δ. Les directrices Δ'' et Δ''' sont donc des ellipses. C'est à ce cas que se rapportent les surfaces représentées sur les *fig.* 272, 274 et 275, 286 et 287, si l'on y considère l'hyperbole comme étant la directrice donnée Δ.

583. Si l'on veut déterminer les conditions auxquelles doivent satisfaire deux coniques concentriques pour que la développable qui leur est circonscrite soit d'égale pente, on exprimera que le cône directeur dont l'équation en coordonnées obliques a été donnée à l'article **545** est de révolution. On trouve deux équations de condition. Nous ne nous arrêterons pas à cette question.

584. *Cas où la directrice donnée est une parabole.* — Lorsque la directrice Δ est une parabole, la surface d'égale pente circonscrite ne possède à distance finie qu'une autre ligne double qui est également une parabole. Les équations de la

(¹) Nous avons indiqué à l'article 184 comment on peut étudier la disposition des branches paraboliques lorsqu'il y a un rebroussement à l'infini.

première étant

$$z = mx + ny, \quad y^2 + 2px = 0,$$

celles de la seconde sont

$$x + \frac{1 - m^2 i^2}{mni^2} y - \frac{1}{m} z + p \frac{1 - m^2 i^2 - n^2 i^2}{1 - m^2 i^2} = 0,$$
$$\frac{1 - m^2 i^2}{n^2 i^2} y^2 + 2px + p^2 \frac{1 - m^2 i^2 - n^2 i^2}{1 - m^2 i^2} = 0.$$

Pour éviter d'entrer dans des détails trop minutieux, nous avions jusqu'à présent supposé que les coniques directrices étaient des courbes à centre, et, si nous donnons ces derniers résultats, c'est que la surface d'égale pente circonscrite à une parabole a quelque importance dans les applications (1). Nous ne développons pas les calculs, parce qu'ils ne présentent aucun intérêt spécial.

(1) Nous faisons allusion aux raccordements paraboliques dans les routes. L'arête de l'accotement directrice de la surface d'égale pente n'est pas, il est vrai, exactement une parabole ni même une courbe plane; néanmoins les formules que nous donnons feront généralement connaître la ligne d'intersection des talus avec une approximation suffisante.

LIVRE SEPTIÈME.

SURFACES GAUCHES.

CHAPITRE PREMIER.

PARABOLOIDES.

Définition. — Double système de génératrices rectilignes. — Plans tangents.

585. Nous avons dit (art. **452**) que l'on appelle *surfaces gauches* celles qui, étant réglées, ne peuvent pas être développées sur un plan, et nous avons montré que les surfaces réglées sont en général gauches. Il résulte de là que les surfaces développables ne sont qu'une variété des surfaces gauches. Une surface gauche peut être déterminée par trois directrices (art. **452**), ou par deux directrices et un cône directeur (art. **467**); mais, dans chaque cas, il est nécessaire d'examiner si les données sont telles que les plans tangents aux divers points d'une génératrice quelconque se confondent, car alors la surface serait développable.

Nous avons toujours supposé que le lecteur connaissait les principales propriétés des surfaces du second ordre, et par conséquent du paraboloïde hyperbolique, et de l'hyperboloïde à une nappe; mais, comme ces surfaces gauches jouent un rôle fort important dans les arts graphiques, nous devons les étudier sous le rapport des constructions auxquelles leur emploi donne lieu. Nous commencerons par le paraboloïde.

586. On appelle *paraboloïde hyperbolique* la surface engendrée par une droite qui se meut en rencontrant deux directrices rectilignes à distance finie ou à l'infini, et en restant parallèle à un plan qui remplace le cône directeur de l'article **467**. Cette surface admet comme variétés :

1° Le système de deux plans Q et Q_1 qui se coupent :

Quand une des directrices AB est parallèle au plan directeur P, l'autre A_1B_1 étant quelconque (*fig.* 207);

Quand les directrices AB, CD sont dans un même plan et non parallèles au plan directeur (*fig.* 207, *a*).

2° Le système de deux plans parallèles Q et Q_1 (*fig.* 211) quand les deux directrices AB et A_1B_1 sont parallèles au plan directeur P et non parallèles entre elles.

Lorsque les directrices sont parallèles entre elles au plan directeur, toute droite qui leur est parallèle satisfait aux conditions imposées aux génératrices, et par suite la surface n'est pas déterminée.

Nous supposerons toujours que les directrices n'ont aucune des positions relatives exceptionnelles qui viennent d'être énumérées, et alors la surface sera gauche comme ayant des directrices rectilignes (art. **464**). Nous la désignerons par le seul nom de *paraboloïde*.

587. Les plans coordonnés que nous prendrons dans l'étude du paraboloïde sont le plan directeur P et un plan Q parallèle aux deux directrices. En général, ces plans ne sont pas perpendiculaires l'un à l'autre. Un point M aura pour projetantes sur les plans P et Q (*fig.* 280) deux droites Mm et Mm'_1, perpendiculaires à la ligne de terre et respectivement parallèles aux plans Q et P.

Il n'y a pas dans ce système de modifications à apporter aux constructions ordinaires relatives aux questions dans lesquelles il n'entre aucune considération de perpendicularité ou de grandeur d'angle, telles que la recherche de l'intersection de deux plans, des traces d'une droite, etc. Quand on fait des rabattements, il faut avoir égard à l'obliquité des projetantes qui est égale à l'angle des plans coordonnés.

Pour la facilité du langage, nous supposerons que le plan directeur P est horizontal.

588. Les directrices sont (A, A') et (A_1, A'_1) (*fig.* 276); puisqu'elles ne se trouvent pas dans un même plan et qu'elles ne sont pas parallèles au plan P, leurs projections horizontales A et A_1, qui, d'après les dispositions adoptées, doivent être parallèles à la ligne de terre, sont nécessairement distinctes, et leurs autres projections A' et A'_1 rencontrent la ligne de terre.

Une droite quelconque B', parallèle à la ligne de terre, est la projection sur le plan Q d'une génératrice, car le plan horizontal B' coupe les directrices en deux points (M, M'), (M_1, M'_1), et la droite (B, B') qu'ils déterminent satisfait aux conditions.

Du point de concours O' des projections A' et A'_1 abaissons une droite $O'O$, perpendiculaire à la ligne de terre : les triangles semblables $M_1\omega O$ et M_1cM donnent

$$\frac{O\omega}{Mc} = \frac{M_1\omega}{M_1c}.$$

Le second rapport est égal à $\frac{M'_1e}{M'_1M'}$ et par suite à $\frac{N'_1g}{N'_1N'}$: il est donc indépendant de la position de la génératrice considérée (B, B'); de plus la distance Mc est constante; en conséquence le point O est fixe sur la droite $O'g$, perpendiculaire à la ligne de terre. Nous voyons ainsi que les projections de toutes les génératrices sur le plan P passent par un même point O.

589. Nous allons maintenant déterminer la trace de la surface sur un plan A_2 parallèle à Q. La génératrice (B, B′) le rencontre en un point (M_2, M'_2), et l'on a, en ayant égard au parallélisme des droites MM', $M_1M'_1$ et $M_2M'_2$,

$$\frac{MM_1}{M_1M_2} = \frac{M'M'_1}{M'_1M'_2}.$$

Le premier rapport est celui des distances des droites A et A_1, A_1 et A_2; le second a donc la même valeur, quelle que soit la position de la génératrice considérée (B, B′), et par suite le lieu des points M'_2, projection sur le plan Q de l'intersection de la surface par le plan A_2, est une droite qui passe au point de concours O′ des projections A′ et A'_1. Tout plan parallèle à Q coupe donc la surface suivant une droite; le paraboloïde admet ainsi un système de génératrices rectilignes pour lesquelles le plan Q est directeur. Les projections de ces nouvelles génératrices sont parallèles à la ligne de terre sur le plan P et passent par un même point sur le plan Q. Les directrices (A, A′), (A_1, A'_1) sont des génératrices de ce second système.

Nous voyons que *le paraboloïde admet deux systèmes de génératrices rectilignes.*

La droite B_1 qui joint les traces N et N_1 des directrices est une génératrice du système P, et forme la trace horizontale du paraboloïde.

590. *Deux génératrices de systèmes différents se rencontrent,* car leurs projections sur le plan P ont nécessairement un point commun tel que M_2, et ce point n'est la projection que d'un seul point du paraboloïde, puisque le plan parallèle à Q et passant par M_2 coupe la surface suivant une droite.

Il résulte de la proposition que nous venons d'établir qu'*une génératrice de l'un des systèmes rencontre toutes les génératrices de l'autre système,* et par suite que *deux génératrices quelconques de l'un des systèmes peuvent être prises pour directrices de celles de l'autre système.*

Les projetantes des points O et O′ sont des génératrices qui appartiennent respectivement aux systèmes Q et P, et par conséquent la surface sera déterminée si l'on donne sa trace B_1 sur l'un des plans directeurs et le point de concours O′ des projections de ses génératrices sur l'autre, car, la projetante de ce point étant une génératrice du même système que B_1, ces deux droites peuvent être prises pour directrices.

Deux génératrices d'un même système ne se rencontrent pas, car leurs projections sont parallèles sur l'un des plans directeurs et convergentes sur l'autre.

On voit qu'il existe entre les génératrices des deux systèmes un parallélisme complet de propriétés géométriques.

591. Un paraboloïde étant donné par sa trace horizontale OK (*fig.* 279) et le point de concours O′ sur le plan Q, on déterminera immédiatement la seconde trace KO′ et le point de concours O sur le plan horizontal.

Pour avoir la projection sur le plan Q d'un point de la surface dont on se donne la première projection M, on construit la projection N′O′ de la génératrice du système Q dont la projection horizontale est MN, et on relève le point M en M′ sur N′O′. Il y a toujours une solution, et par conséquent tout point de l'un quelconque des plans directeurs est la projection d'un point de la surface.

La génératrice du système P qui a pour projection horizontale OME se projette sur le plan Q suivant l'horizontale M′E′. Si la droite indéfinie OME, tournant d'une manière continue autour du point O, se place sur Om, se confond avec la parallèle IJ à la ligne de terre et revient à sa première position après une révolution de 180°, la génératrice qu'elle représente s'élèvera, se projettera sur $m'e'$, s'éloignera à l'infini en devenant parallèle à xy, et, reparaissant au-dessous du plan horizontal, viendra reprendre sa position initiale (OME, M′E′).

Nous voyons donc que, *si par un point pris dans le plan directeur de l'un des systèmes on mène des droites parallèles aux génératrices de ce système, elles occuperont autour du point toutes les positions possibles*, et qu'*il y a dans chaque système une génératrice située tout entière à l'infini. Les deux génératrices à l'infini sont parallèles à l'intersection des plans directeurs.*

592. Un plan passant par la génératrice (OE, M′E′) (*fig.* 279) a pour trace horizontale une droite LN parallèle à OE. La génératrice du système Q dont la trace est N rencontre la première génératrice en un point (M, M′) et a ainsi deux points dans le plan considéré. Ce plan, contenant les deux génératrices qui se croisent au point (M, M′), est tangent en ce point à la surface.

Le plan tournant autour de la génératrice (OE, M′E′), sa trace devient successivement N_1L_1, N_2L_2, ..., le point de contact s'éloignera en (M_1, M'_1), (M_2, M'_2), ...; il se trouvera à l'infini quand le plan sera horizontal, puis il reparaîtra de l'autre côté du point (M, M′), et il reviendra à ce point quand le plan achèvera une rotation de 180°. Ainsi donc *tout plan qui coupe le paraboloïde suivant une génératrice contient une génératrice de l'autre système et est tangent à la surface à leur point de rencontre; quand il est parallèle au plan directeur du système auquel appartient la génératrice considérée, l'autre génératrice et le point de contact sont à l'infini; pendant une rotation de 180° de ce plan autour de la génératrice, le point de contact parcourt la longueur indéfinie de cette droite.*

Le plan tangent en un point donné (M, M′) contient les deux génératrices qui se croisent en ce point; on détermine ses traces NL et LE′ sans difficulté.

Sections planes. — Diamètres. — Axe. — Plans diamétraux.

595. Nous allons maintenant chercher l'intersection par un plan (HF, HE') (*fig.* 282) d'un paraboloïde déterminé comme précédemment par ses traces KJ, KI', par les projections O et O' des génératrices perpendiculaires à l'intersection des plans directeurs, et par l'angle Z_1YY_1 de ces plans.

Un plan horizontal $x'y'$ coupe le paraboloïde et le plan sécant suivant deux droites NOn et Gm, dont le point de rencontre (M, M') appartient à l'intersection.

En menant par le point O une parallèle à HF, on détermine une génératrice (Ib, $I'b'$) parallèle au plan. On trouve de la même manière, dans le système Q, une génératrice (Jnb, $J'n'b'$) parallèle à la trace HE' et au plan. A chacune de ces génératrices correspond une branche infinie.

Pour avoir les asymptotes, il faut prendre l'intersection du plan sécant avec les plans tangents de la surface aux points de la courbe situés à l'infini, c'est-à-dire avec le plan passant par (Ib, $I'b'$) et parallèle à P, et avec le plan passant par (Jb, $J'b'$) et parallèle à Q, car ces plans sont respectivement tangents aux points des génératrices (Ib, $I'b'$) et (Jb, $J'b'$) situés à l'infini. On trouve les droites (EA, E'A') et (FmA, $F'm'A'$).

Les triangles semblables mnM et bnO donnent

$$mM \times bn = bO \times mn;$$

mais les droites $J'b'$ et F'A' sont parallèles à la trace HE' du plan, et par conséquent parallèles entre elles : il suit de là que les longueurs bn et Am d'une part, mn et FJ de l'autre, sont égales comme projections de segments égaux et parallèles. L'équation nous donne donc

$$mM \times Am = bO \times FJ.$$

Les facteurs du premier membre sont les coordonnées du point M par rapport aux asymptotes AE et AF de la projection horizontale. Le second membre est constant ; la courbe est donc une hyperbole sur le plan P, et par suite dans l'espace.

Le point de concours O étant la projection d'une génératrice entière, la courbe cMd doit nécessairement y passer. Le point de concours O' appartient pour le même motif à la seconde projection $c'M'd'$ de l'intersection. La génératrice qui se projette tout entière au point O perce le plan sécant en un point dont on détermine facilement la projection O'_1 sur le plan Q. La génératrice du système P qui passe par le point (O, O'_1) est (Ot, O'_1t').

On peut construire une tangente soit par les propriétés spéciales de l'hyperbole, soit comme intersection du plan tangent et du plan sécant. Nous avons employé cette dernière méthode pour la tangente $(Ot, O'_1 l')$ au point (O, O'_1). On obtient facilement le plan tangent en remarquant qu'il contient les deux génératrices qui se croisent en (O, O'_1).

594. Nous prenons un plan $(Y_1 Y, YZ)$ perpendiculaire à la ligne de terre, et nous le rabattons sur le plan horizontal : la trace YZ se place sur la droite YZ_1 faisant avec YY_1 l'angle connu des plans directeurs. Nous désignerons ce nouveau plan de projection par la lettre R.

Les plans tangents du paraboloïde aux points de la courbe situés à l'infini sont, comme nous l'avons vu, le plan $I'a'$ parallèle à P, et le plan JF'' parallèle à Q ; ils ont pour traces sur le plan R les droites aA'' et $F''A''$ respectivement parallèles à YY_1 et à YZ_1, et ils projettent sur ces traces toutes les lignes qu'ils contiennent, notamment les génératrices $(bI, b'I')$ et $(bJ, b'J')$ parallèles au plan sécant, et les asymptotes $(AE, A'E')$, $(AF, A'F')$ de la section.

Si l'on transporte le plan (FH, HE') parallèlement à lui-même, la projection de la section sur le plan R aura les mêmes asymptotes aA'' et $F''A''$, et le centre de l'hyperbole se projettera toujours en A''. Le lieu des centres de toutes ces sections parallèles sera donc la droite parallèle à XY dont A'' est la projection, et, comme on appelle *diamètre* d'une surface le lieu des centres d'une série de sections parallèles, nous voyons que *tous les diamètres du paraboloïde sont des droites parallèles à l'intersection des plans directeurs*.

Réciproquement, toute droite parallèle à l'intersection des plans directeurs est un diamètre, car, si par sa projection A'' sur le plan R on fait passer deux droites respectivement parallèles à YY_1 et à YZ_1, les sections faites par les plans parallèles aux génératrices dont ces lignes sont les projections auront leurs centres projetés en A''.

595. Un diamètre est un *axe* quand il est perpendiculaire aux plans des sections dont il contient le centre. Tous les diamètres du paraboloïde étant parallèles, cette surface a *un seul axe* lieu des centres des sections faites par les plans qui les coupent à angle droit. Les génératrices perpendiculaires aux diamètres, et par suite parallèles au plan R, sont projetées, l'une en O sur P, l'autre en O' sur Q. Appliquant aux sections par des plans perpendiculaires à XY les raisonnements faits à l'article précédent pour les hyperboles contenues dans des plans parallèles, on reconnaît que le diamètre passant par le point (O, O', O'') est l'axe de la surface. Ce point est le *sommet* du paraboloïde.

596. On sait que dans une hyperbole le milieu d'une corde est aussi le milieu du segment intercepté sur la même droite par les asymptotes. Mais les asymptotes des sections faites par des plans parallèles à (HF, HE') (*fig.* 282) sont dans deux plans perpendiculaires à R, ceux qui ont pour traces aA'' et $F''A''$; la surface diamétrale, lieu des milieux d'une série de cordes parallèles entre elles et à un plan (HF, HE'), est donc le lieu des milieux des segments interceptés sur les mêmes droites par les plans aA'' et $F''A''$, c'est-à-dire un plan contenant le diamètre projeté en A''' sur R. Il en résulte que *les surfaces diamétrales du paraboloïde sont des plans parallèles à l'axe.*

597. Pour déterminer le plan diamétral d'un système de cordes, on commence par chercher la projection M, sur un plan R perpendiculaire à l'axe, de l'un des points du paraboloïde où le plan tangent est parallèle à ces lignes (*fig.* 270). Il suffit pour cela de faire passer par une génératrice quelconque un plan parallèle à la direction donnée et de chercher son point de contact (art. **592**). Dans ce plan sont deux génératrices et une tangente parallèle aux cordes; on trace leurs projections Ma, Mb et Mp : la droite Mq, qui partage en parties égales les segments parallèles à Mp, tels que gh, est la trace du plan cherché, qui est d'ailleurs perpendiculaire au plan de projection R.

598. Les droites Mp et Mq forment un système de diamètres conjugués des hyperboles qui ont pour asymptotes Ma et Mb, et par suite du système de ces droites. Il est du reste facile de voir sur la figure même, et sans la considération des hyperboles, que le point f est le milieu du segment ih parallèle à Mq, comme le point e est le milieu du segment gh, parallèle à Mp.

Ces propriétés sont réciproques entre les projections Ma et Mb des génératrices d'une part et les droites Mp et Mq de l'autre; ainsi la droite Mb divise en parties égales les segments, tels que qp, parallèles à Ma.

Les quatre droites Ma, Mb et Mp, Mq forment un système de *conjuguées harmoniques.*

599. Les sections planes des surfaces gauches ont des branches infinies de deux genres généralement très-distincts : les unes sont déterminées par une génératrice parallèle au plan sécant, les autres par une génératrice à l'infini. Dans le paraboloïde, chacun des deux points d'une section plane situés à l'infini est sur la génératrice à l'infini d'un système et sur la génératrice de l'autre système qui est parallèle au plan. Chaque branche réunit ainsi les caractères des deux genres.

600. Nous avons démontré à l'article **595** que la section plane du paraboloïde est une hyperbole lorsqu'il existe, à distance finie, une génératrice du système P parallèle à la trace horizontale HF du plan sécant (*fig.* 282) et une génératrice du système Q parallèle à la trace HE', c'est-à-dire toutes les fois que ces deux traces ne sont pas parallèles à l'intersection XY des deux plans directeurs (art. **591**). Lorsque le plan sécant sera parallèle à XY et par suite à l'axe de la surface, la génératrice qui se trouvera lui être parallèle dans l'un des systèmes, tel que P, sera précisément celle qui est à l'infini. La courbe n'aura donc qu'une branche infinie. Le plan contenant la génératrice et parallèle à P sera tout entier à l'infini; l'asymptote de l'intersection se trouvera avec lui à l'infini, et cette courbe sera une parabole.

Quand on examine directement cette question, on trouve facilement, en plaçant l'origine au point O (*fig.* 282), que les abscisses de la section projetée, mesurées parallèlement à XY, sont proportionnelles aux carrés des ordonnées parallèles à la tangente Ot.

Les sections planes du paraboloïde sont ainsi des hyperboles ou des paraboles, suivant la position du plan sécant, dans tous les cas des courbes du second ordre, et par conséquent la surface est elle-même de cet ordre.

Digression sur les faisceaux harmoniques (¹).

601. Nous avons parlé à l'article **598** de droites conjuguées harmoniques; nous allons montrer les relations qui existent entre ce système géométrique et la division harmonique dont nous nous sommes occupés précédemment (art. **514**).

Considérons les quatre droites A, B, C et D divergeant d'un même point O et coupées par une sécante TT (*fig.* 271): les deux triangles $a\text{O}c$ et $a\text{O}d$ donnent

$$\frac{\sin a\text{O}c}{\sin c}=\frac{ac}{a\text{O}},\quad \frac{\sin a\text{O}d}{\sin d}=\frac{ad}{a\text{O}},$$

d'où

$$\frac{\sin a\text{O}c}{\sin a\text{O}d}=\frac{ac}{ad}\,\frac{\sin c}{\sin d}.$$

On a pareillement

$$\frac{\sin b\text{O}c}{\sin b\text{O}d}=\frac{bc}{bd}\,\frac{\sin c}{\sin d}.$$

Donc

$$\frac{\sin a\text{O}c}{\sin a\text{O}d}:\frac{\sin b\text{O}c}{\sin b\text{O}d}=\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}.$$

Pour attribuer des signes aux angles que forment des droites divergentes, on prend pour origine celui de leurs côtés qui est écrit le premier, et l'on considère chaque angle comme positif ou négatif, suivant que son ouverture à partir de ce côté est dirigée dans un même sens convenu ou en sens contraire. Quand deux angles ont la même origine, leur rapport est positif s'ils ont leur ouverture dirigée dans le même sens, négatif dans le cas contraire.

Il est facile de voir sur la figure que les rapports $\frac{\sin a\text{O}c}{\sin a\text{O}d}$ et $\frac{ac}{ad}$ auront toujours le même signe, et qu'il en est de même des autres rapports $\frac{\sin b\text{O}c}{\sin b\text{O}d}$ et $\frac{bc}{bd}$, d'où il résulte que les deux membres de l'équation ci-dessus sont de même signe, et que cette équation doit être considérée comme complétement exacte et non pas comme impliquant seulement une égalité de grandeurs absolues.

(¹) Ce paragraphe est emprunté presque textuellement aux articles 13, 14, 15 et 110 du *Traité de Géométrie supérieure* de M. Chasles.

L'expression $\frac{\sin aOc}{\sin aOd} : \frac{\sin bOc}{\sin bOd}$ est le *rapport anharmonique des quatre droites* A, B, C et D. Nous voyons donc que, *si par quatre points en ligne droite on mène quatre droites concourantes en un même point, le rapport anharmonique de ces quatre droites sera égal à celui des quatre points et aura le même signe.*

Il suit de là que, *quand deux transversales rencontrent un faisceau de quatre droites en des points a, b, c, d et a', b', c', d', le rapport anharmonique des quatre premiers points est égal à celui des quatre autres et de même signe.*

Ainsi l'on a

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'}.$$

La transversale T'T' est quelconque. Si nous considérons une transversale T''T'' parallèle à la droite B, le point b'' où elle rencontre cette ligne sera à l'infini, le rapport $\frac{b''c''}{b''d''}$ sera égal à l'unité, et nous aurons

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{a''c''}{a''d''}.$$

Si le rapport anharmonique est égal à l'unité négative, la division des transversales sera harmonique (art. **514**), et le faisceau sera aussi *harmonique*. Les segments $a''c''$ et $a''d''$ seront alors égaux et de signe contraire. Réciproquement, si ces segments sont égaux et de sens opposé, le rapport anharmonique des droites sera égal à -1, et le faisceau sera harmonique : tel est le cas des quatre droites Ma, Mb, Mq et Mp de la *fig.* 270.

Il est facile de reconnaître que deux droites situées dans un plan sont conjuguées harmoniques des bissectrices des deux angles qu'elles comprennent.

602. Les lignes PA et PB de la *fig.* 226 sont coupées par les quatre droites QP, QA, QD et QG qui divergent du point Q, et par suite on a entre les segments déterminés par ces droites sur les premières la relation

$$\frac{PD}{PG} : \frac{AD}{AG} = \frac{PE}{PH} : \frac{BE}{BH}.$$

Si l'on considère les mêmes lignes PA et PB comme coupées par les droites PM, DMB, AME et GMH qui se croisent en M, on pourra écrire

$$\frac{PA}{PG} : \frac{DA}{DG} = \frac{PE}{PH} : \frac{BE}{BH}.$$

Égalant les premiers membres de ces équations, et remarquant que l'on a

$$AD = -DA, \quad DG = -GD, \quad AG = -GA,$$

on obtient

$$\frac{PD}{PA} : \frac{GD}{GA} = -1.$$

Les droites PQ, GQ, DQ et AQ forment donc un faisceau harmonique, et une droite quelconque telle que PM est divisée harmoniquement par ces lignes; par conséquent, si la droite QG est peu éloignée de la bissectrice de l'angle DQA, la droite PQ sera rapprochée de la bissectrice de l'angle supplémentaire, ce qui justifie l'observation que nous avons présentée à l'article **421**.

Représentation du paraboloïde. Plans principaux. Paraboles principales.

603. Considérons un paraboloïde donné comme précédemment par ses traces GK et KF sur deux plans coordonnés P et Q respectivement parallèles aux deux plans directeurs (*fig.* 288), par l'angle de ces plans et par les projections O et O′ du sommet : nous déterminons la projection O″ de ce point, sur un troisième plan R, perpendiculaire aux deux autres et rabattu sur P, et nous allons représenter par un certain nombre de génératrices la partie de la surface qui est projetée sur le losange A″B″C″D″ dont le centre est en O″, qui est appuyé sur la ligne de terre YY_1 et dont les côtés A″B″ et A″D″ comprennent un angle égal à celui des plans directeurs.

Nous divisons les côtés du losange en un même nombre de parties égales, et, joignant par des droites les points correspondants des côtés opposés, nous obtenons deux séries de lignes qui sont respectivement parallèles aux traces YY_1 et YZ_1 des plans P et Q, et qui représentent les unes des génératrices du système P, les autres des génératrices du système Q.

Il est facile d'avoir sur les plans P et Q les projections des lignes considérées. On peut opérer comme il suit : mener par les points de division de A″B″ des parallèles à XY qui seront sur le plan P les projections des génératrices indéfinies du système Q; projeter sur XY les points de rencontre de ces droites avec AB et joindre ces projections au point O′ par des droites qui seront les secondes projections des génératrices du système Q; des points de division de A″D″ ramenés sur YZ tracer des parallèles à XY et ne conserver de ces lignes que les segments compris entre les droites indéfinies A′O′ et B′O′; enfin ramener les points de division des lignes A′D′ et C′B′ sur AD et CB, et joindre les points correspondants par des droites qui passeront nécessairement par O.

Pour faire comprendre la disposition de la surface dans l'espace, nous avons supposé que l'une de ses faces était blanche et l'autre noire.

604. Nous prenons un nouveau plan de projection S perpendiculaire à R et parallèle à la diagonale A″C″. Pour la facilité du langage, nous considérons R comme un plan horizontal, P et S comme des plans verticaux. Nous pouvons appliquer, pour construire la projection S, la méthode très-simple de l'article 59. Les projetantes sur le plan P ne sont pas, il est vrai, perpendiculaires à ce plan, mais elles sont parallèles à R, et la distance d'une projection à la ligne de terre YY_1 indique bien la hauteur du point dans l'espace au-dessus du plan horizontal R.

Nous avons diminué toutes les hauteurs, sur le plan S, d'une longueur égale à AA″.

Par suite des symétries que nous avons pu introduire sur les figures, les côtés du quadrilatère gauche (A″B″C″D″, ABCD) ont deux à deux une même projection sur le plan S; les points de division coïncident aussi deux à deux, et par suite les différentes génératrices des deux systèmes se superposent.

Un point m, sommet de l'un des losanges élémentaires de la figure R, a par rapport à A″C″ une position symétrique d'un autre sommet m_1; les génératrices qui passent par l'un de ces points se confondent, en projection sur le plan S, avec les génératrices qui passent par l'autre; la corde mm_1 de l'espace est donc projetée sur un seul point m'; de là résulte qu'elle est perpendiculaire au plan A″C″ et coupée par lui en deux parties égales comme sa projection mm_1. D'ailleurs on peut disposer la figure de manière qu'un point quelconque donné sur la surface soit au sommet de l'un des losanges; le plan A″C″ perpendiculaire à R est donc *principal*, c'est-à-dire qu'il partage en deux parties égales les cordes de la surface qui lui sont perpendiculaires.

605. La construction des projections des génératrices sur le plan T perpendiculaire à R, et passant par la diagonale B″D″ du losange, se fait de la même manière et donne lieu aux mêmes considérations. Le plan T est donc un second plan principal, et le paraboloïde a ainsi deux plans principaux rectangulaires entre eux, contenant l'axe, et parallèles aux plans bissecteurs des angles des deux plans directeurs.

Un troisième plan principal (s'il pouvait exister) couperait au moins un des premiers, et l'intersection serait un axe de la surface; mais, comme le paraboloïde n'a qu'un axe (art. 595), le nouveau plan principal devrait contenir cette ligne. Maintenant, si l'on remarque que les sections par des plans perpendiculaires aux deux plans directeurs sont des hyperboles (art. 595), on verra que les plans déterminés par les axes de ces courbes sont seuls principaux.

606. Deux génératrices qui sur le plan R se croisent en un point n de A″C″ ont une même projection verticale sur S; leur plan est donc perpendiculaire à S, et le point n où il touche la surface appartient au contour apparent sur ce plan. L'enveloppe des projections des génératrices sur le plan S est donc précisément la section de la surface par le plan A″C″ qui contient l'axe, c'est-à-dire une parabole (art. **600**).

Le contour apparent sur le plan T est également une parabole, section de la surface par le plan B″D″. Quand l'angle des plans directeurs est droit, ces deux paraboles sont évidemment superposables, et le paraboloïde est *isoscèle*. Dans le cas général, lorsque les plans directeurs ne sont pas rectangulaires, les *paraboles principales* ont des paramètres inégaux, et le paraboloïde est *scalène*.

Cônes et cylindres circonscrits. Courbes d'ombre.

607. Considérons une parabole section du paraboloïde par un plan parallèle à l'axe (*fig.* 277), un de ses diamètres Ax, les tangentes SM et SM′ issues d'un point de cette droite, et la sécante de contact MM′ polaire du point S : on sait que cette droite est parallèle à la tangente en A, et que les segments SA et AP sont égaux.

Si le plan tourne autour de Ax, il coupera la surface suivant des paraboles de différents paramètres, mais les polaires du point S passeront toujours par le point P, et, comme elles doivent être parallèles au plan tangent en A, elles formeront un plan qui est le *plan polaire* du point S.

L'intersection de la surface par le plan polaire est le lieu des points de contact des tangentes issues du point S, et par conséquent la courbe de contact du cône circonscrit qui a son sommet au point S; cette ligne est une hyperbole, parce que le plan est parallèle aux génératrices qui se croisent en A.

En résumé, *la courbe de contact d'un cône circonscrit à un paraboloïde est une hyperbole située dans un plan parallèle à celui qui touche la surface au point où elle est rencontrée par le diamètre qui passe au sommet du cône. Les segments interceptés sur le diamètre entre le sommet, la surface et le plan de la courbe de contact sont égaux.*

608. Quand le sommet S est sur le paraboloïde, le point P se confond avec lui, et la courbe de contact se compose de deux génératrices. Pour comprendre comment il peut y avoir une ligne d'ombre quand le point lumineux est sur la surface, il faut concevoir qu'elle recouvre un corps opaque, qui sera, par exemple, du côté noir (*fig.* 288). Un point lumineux placé en (O″, O‴, O$^{\text{IV}}$) n'éclairera pas les points B$^{\text{IV}}$ et D$^{\text{IV}}$, tandis qu'il enverra librement des rayons aux points A‴ et C‴.

609. Si une sécante d'un paraboloïde se transporte parallèlement à elle-même jusqu'à devenir tangente, les deux points situés sur la surface se confondront avec le point milieu qui est dans le plan diamétral conjugué à sa direction (art. **596**). *La courbe de contact d'un cylindre circonscrit à un paraboloïde est donc située dans le plan diamétral conjugué avec la direction des génératrices du cylindre :* c'est par conséquent une parabole, car tous les plans diamétraux sont parallèles à l'axe.

On arrive au même résultat en remarquant que, quand le point S s'éloigne indéfiniment sur la tangente MS (*fig.* 277), le point M′ s'éloigne aussi sur la parabole, et qu'à la limite la droite MM′ est parallèle à l'axe.

On voit que la courbe d'ombre d'un paraboloïde est toujours plane.

Diverses générations du paraboloïde.

610. *La surface déterminée par trois directrices rectilignes* A, A′, A″, *qui sont parallèles à un plan* P (*fig.* 281) *et dont deux quelconques ne se trouvent pas dans un même plan, est un paraboloïde,* car les droites A, A′ et A″ appartiennent à un paraboloïde dont le plan P est directeur et qui a pour directrices deux génératrices quelconques B et B′ de la surface; les droites qui rencontrent les directrices données sont donc les génératrices du second système de ce paraboloïde.

Les droites A, A′, A″ déterminent sur B et B′ des segments que l'on peut considérer comme interceptés par trois plans parallèles. On a donc

$$\frac{E''E'}{F''F'} = \frac{E'E}{F'F}.$$

Il résulte de là que, au lieu de donner un plan P auquel la génératrice doit rester parallèle, on peut assigner deux de ses positions A et A′, et l'assujettir à se mouvoir de manière à intercepter sur les directrices B et B′ des segments E″E′ et F″F′ proportionnels à E′E et F′F.

611. Si les droites B et B′ sont projetées sur un plan quelconque (*fig.* 285), en portant sur leurs projections B_1 et B'_1 une suite de longueurs respectivement égales aux projections des segments EE′ et FF′ (*fig.* 281), et joignant les points de division, nous aurons les projections des génératrices parallèles au plan P, qui sont aussi celles de l'autre système, car chacun de leurs plans projetants contient deux droites de la surface (art. **592**).

L'enveloppe des projections des génératrices est le contour apparent du paraboloïde ou la trace du cylindre circonscrit perpendiculaire au plan de projection, et par conséquent une parabole (art. **609**). Le point de tangence de l'une des droites est la projection du point où le plan projetant dont elle est la trace touche la surface et où les deux génératrices qu'il contient se croisent.

Nous avons ponctué la *fig.* 285, en ne considérant les diverses droites que comme des projections de génératrices parallèles au plan P.

Quand le plan de projection est perpendiculaire au plan directeur parallèle à B et à B′ (*fig.* 281), les projections B_1 et B'_1 (*fig.* 285) sont parallèles, et les génératrices du système P sont projetées suivant des droites convergentes. La figure se trouve par conséquent disposée comme les projections obliques P ou Q (*fig.* 288), mais le point de concours n'est pas la projection du sommet.

612. Si nous prenons sur les directrices B et B′ (*fig.* 281) deux points fixes quelconques b et b', en appelant x et x' les longueurs bE″ et b'F″, et k le rapport de E′E à F′F, l'équation de l'article **610** deviendra

$$\frac{b\mathrm{E}' - x}{b'\mathrm{F}' - x'} = k,$$

d'où, en désignant par g le binôme $(k \times \overline{b'\mathrm{F}'} - \overline{b\mathrm{E}'})$ qui est constant, ainsi que k, lorsque l'on suppose que la génératrice A″ est seule mobile,

$$x - kx' + g = 0.$$

Cette équation détermine les positions successives de la génératrice, et, toutes les fois qu'il y aura sur deux directrices rectilignes des séries de points liées par une relation de cette forme, les droites passant par les points qui se correspondent formeront un paraboloïde, car il suffit de déplacer l'origine b de la longueur g pour que les segments mesurés sur les deux directrices soient proportionnels.

Un second paraboloïde qui aurait les mêmes directrices B et B′ serait déterminé par une équation analogue du premier degré

$$x - k_1 x' + g_1 = 0.$$

Il y aura toujours un système de valeurs de x et de x' qui satisferont à ces équations, et, par conséquent, *deux paraboloïdes qui ont deux directrices rectilignes communes se coupent suivant une génératrice*, de sorte que leur intersection se compose de trois droites. On doit de plus considérer comme appartenant aux deux surfaces la droite qui passe par les points situés à l'infini sur les directrices.

CHAPITRE II.

THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES GAUCHES.

Raccordement des surfaces gauches. Paraboloïdes de raccordement. Paraboloïdes normaux.

613. On dit que deux surfaces se raccordent le long d'une courbe commune lorsqu'elles ont les mêmes plans tangents en tous les points de cette ligne. Une surface qui se raccorde avec une autre peut être considérée comme lui étant inscrite ou circonscrite.

Deux surfaces gauches qui ont les mêmes plans tangents en trois points m, n et p d'une génératrice commune G *se raccordent le long de cette droite.*

Si nous coupons les surfaces par trois plans passant respectivement par les points m, n et p (*fig.* 278), nous aurons trois couples de courbes tangentes A et A′, B et B′, C et C′ que nous pourrons considérer comme des directrices. Si la génératrice se meut en glissant sur les courbes A, B et C de la première surface, elle s'éloignera progressivement des lignes A′, B′ et C′; mais, dans sa position infiniment voisine de G, on devra la considérer comme les rencontrant encore, parce qu'elles sont respectivement tangentes aux premières. Les deux surfaces ont donc deux génératrices consécutives communes, et leurs sections par un plan quelconque ayant en commun deux points situés sur ces droites ont la même tangente, ce qui démontre la proposition énoncée.

614. *Deux surfaces gauches se raccordent le long d'une génératrice commune* G *lorsqu'elles ont les mêmes plans tangents en deux points m et n de cette ligne, et que leurs cônes directeurs* C *et* C′ *ont des plans tangents parallèles le long des génératrices correspondantes g et g′.*

On peut considérer les surfaces comme déterminées par des couples de directrices A et B pour l'une, A′ et B′ pour l'autre, respectivement tangentes aux points m et n (*fig.* 289), et par des cônes directeurs tangents le long d'une droite g, parallèle à G. Lorsque la génératrice se meut sur la première surface, en glissant sur les courbes A et B, elle s'éloigne progressivement de la seconde, mais elle lui appartient encore dans sa position infiniment voisine de G, parce qu'elle rencontre les lignes A′ et B′ qui sont respectivement tangentes à A et à B, et qu'elle est parallèle à une génératrice du cône C qui, étant infiniment rapprochée de g, se trouve sur le second cône. Nous sommes donc conduit aux mêmes conséquences qu'à l'article précédent.

Quand les surfaces considérées ont un même cône directeur ou un même plan directeur, il suffit, pour qu'elles se raccordent le long d'une génératrice commune, qu'elles aient les mêmes plans tangents en deux points de cette droite.

615. *Si l'on coupe une surface gauche par une série de plans parallèles à un plan donné* Q, *les tangentes de toutes les sections aux points situés sur une même génératrice formeront un paraboloïde.*

La surface gauche dont trois de ces tangentes mR, nS et pT (*fig.* 283) sont les directrices est un paraboloïde (art. **610**) qui a les mêmes plans tangents que la surface aux points m, n et p, et qui par conséquent se raccorde avec elle le long de la génératrice G. Tout plan parallèle à Q coupera ce paraboloïde suivant une droite tangente à la section correspondante de la surface, ce qui démontre le théorème énoncé.

Le paraboloïde a en commun avec la surface la génératrice G et une autre génératrice infiniment voisine; le second plan directeur P du paraboloïde est parallèle à ces deux droites ou au plan tangent du cône directeur de la surface gauche, le long de la génératrice parallèle à G. Le plan P est encore parallèle au plan qui passe par la génératrice G et qui est tangent au paraboloïde (ou à la surface avec laquelle il se raccorde), au point de cette droite situé à l'infini (art. 592). On voit ainsi que *les plans tangents du cône directeur sont respectivement parallèles aux plans passant par les différentes génératrices de la surface gauche et tangents à l'infini.*

616. Il résulte de ce qui précède qu'*une surface gauche a le long d'une génératrice quelconque une infinité de paraboloïdes de raccordement. Un de leurs plans directeurs est le plan tangent du cône directeur le long de la génératrice parallèle;* l'autre est parallèle aux plans sécants, et par suite complétement arbitraire. On peut le prendre perpendiculaire au premier dans une infinité de positions, et en conséquence la surface admet, le long de chaque génératrice, une infinité de paraboloïdes isoscèles de raccordement.

617. Si un plan contient une génératrice, sa courbe d'intersection avec la surface rencontrera cette droite, car elle a un point sur chacune des autres génératrices, si rapprochées qu'elles soient de celle qui est dans le plan. Au point de rencontre, le plan contiendra la tangente de l'intersection et la génératrice; il sera donc tangent.

La considération des paraboloïdes de raccordement conduit à un résultat analogue et montre de plus comment le point de contact se déplace quand le plan tourne autour de la génératrice (art. 592).

En résumé, *tout plan contenant une génératrice d'une surface gauche est tangent en un point; la courbe suivant laquelle il coupe la surface passe par le point de contact; s'il fait une rotation de 180° autour de la génératrice, le point de contact parcourra la longueur indéfinie de cette droite. Dans aucune position, le plan n'est tangent en deux points.*

La courbe de contact d'un cône circonscrit avec une surface gauche est le lieu des points de tangence des plans qui passent par le sommet donné et par les différentes génératrices; cette courbe a par conséquent un point sur chacune de ces droites.

618. Si une surface gauche est algébrique et de l'ordre n, sa section par un plan contenant une génératrice rencontrera cette droite en $(n-1)$ points réels ou imaginaires; l'un d'eux est celui où le contact a lieu : il est mobile quand le plan tourne; les autres sont des points doubles de la surface, car, s'ils étaient simples, chacun d'eux serait un point de contact et le plan toucherait la surface en plus d'un point de la génératrice. On voit ainsi qu'une surface gauche de l'ordre n a sur chaque génératrice $(n-2)$ points doubles, ou plutôt des points multiples représentant $(n-2)$ points doubles.

619. Les paraboloïdes de raccordement deviennent normaux quand on les fait tourner de 90° autour de la génératrice. *Une surface gauche admet* donc *une infinité de paraboloïdes normaux le long de chaque génératrice : un de leurs plans directeurs est le plan normal du cône directeur le long de la génératrice parallèle, l'autre peut être pris arbitrairement.*

On peut considérer un paraboloïde normal comme engendré par une droite qui se meut de manière à rencontrer la génératrice considérée G de la surface gauche, à être parallèle à un plan arbitraire Q et à se trouver successivement dans les différents plans passant par G et normaux à la surface. Ces plans étaient tangents avant la rotation.

Il y a une infinité de paraboloïdes normaux isoscèles.

620. Nous aurons souvent à considérer le paraboloïde normal pour lequel le plan directeur Q est perpendiculaire à la génératrice G : chaque génératrice de ce paraboloïde est l'intersection de deux plans normaux à la surface, l'un parallèle à Q, l'autre contenant G; elle est donc normale. De là ce théorème : *Les normales à une surface gauche aux différents points d'une génératrice forment un paraboloïde.* Nous l'appellerons *paraboloïde des normales;* il est évidemment isoscèle.

Point central d'une génératrice. Ligne de striction. Paramètre de distribution des plans tangents.

621. *On appelle point central d'une génératrice le pied de la commune perpendiculaire à cette droite et à la génératrice voisine, ou la limite des positions du pied de la commune perpendiculaire à la droite considérée et à une autre génératrice, lorsque celle-ci, se rapprochant de la première, vient se confondre avec elle.* Le lieu des points centraux des génératrices est la *ligne de striction* de la surface [1].

Soient G et G′ deux génératrices d'une surface gauche, AB leur plus courte distance, et Ag' une droite parallèle à G′ (*fig.* 284).

Si nous concevons que des différents points de G′ on abaisse des perpendiculaires sur G, ces droites formeront un paraboloïde dont les plans directeurs seront l'un Q perpendiculaire à G, l'autre P parallèle à G et à G′. On peut prendre pour ce dernier le plan des droites G et g'.

Les diamètres du paraboloïde qui passent par les différents points a, a_1, a_2, ... de G sont les droites an, a_1n_1, ..., intersections du plan P avec des plans parallèles à Q (art. **594**). Toutes ces droites sont perpendiculaires à G, et celle qui passe par le point A est de plus perpendiculaire à la génératrice AB du second système, car cette ligne, par sa définition, est perpendiculaire à P. Le dia-

---

[1] Les expressions de *point central* et de *ligne de striction* sont de M. Chasles; celle de *plan central* que nous employons plus loin est de M. Bour.

mètre AN rencontre donc normalement le paraboloïde en A, et est l'axe de cette surface (art. 595).

Si nous supposons que la génératrice G′ se meuve sur la surface gauche en se rapprochant de G, le paraboloïde se modifiera et à la limite se raccordera avec elle : son sommet A sera alors le point central de la génératrice G.

Les génératrices du système Q sont perpendiculaires à G; par conséquent, si nous faisons tourner le paraboloïde de 90° autour de cette ligne, de tangentes elles deviendront normales à la surface gauche; mais dans ce mouvement le sommet ne change pas : donc *le point central d'une génératrice est le sommet du paraboloïde des normales.*

622. Appelons

θ l'angle des plans BAX et baX tangents au paraboloïde aux points A et a;

σ l'angle des génératrices G et G′ qui est égal à eAX;

x l'abscisse Aa d'un point considéré a;

p la longueur de la commune perpendiculaire AB.

Les triangles abe et eaA rectangles l'un en e, l'autre en a, donnent

$$\operatorname{tang} eba = \frac{ae}{eb} = \frac{x \operatorname{tang}\sigma}{p}.$$

Les droites AB et eb étant parallèles, l'angle eba est égal à celui des lignes AB et ab, et par suite à θ, car les droites AB et ab sont respectivement situées dans les plans tangents considérés et perpendiculaires à leur intersection AX. Nous avons donc

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{x \operatorname{tang}\sigma}{p}.$$

Supposons maintenant que G′ se rapproche de G, et appelons k la limite du rapport $\frac{p}{\operatorname{tang}\sigma}$; nous aurons

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{x}{k}. \tag{1}$$

Nous appellerons *plan central* celui qui passe par la génératrice considérée et par la commune perpendiculaire à cette droite et à la génératrice voisine, et *obliquité* d'un plan tangent l'angle θ compris entre ce plan et le plan central de la génératrice du point de contact.

L'équation (1) montre que *la tangente de l'obliquité d'un plan tangent en un point d'une génératrice est proportionnelle à l'abscisse de ce point, mesurée à partir du point central* [1].

En faisant x nul, on reconnaît que *le plan central est tangent au point central;* cela résulte d'ailleurs de la définition de ce plan.

[1] M. Chasles : *Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite*, p. 54 (*Correspondance mathématique et physique*, t. XI).

La formule montre encore que *les plans tangents en deux points d'une génératrice situés de part et d'autre du point central et à égales distances ont des obliquités égales et de sens opposé*, et que *le plan central et le plan tangent à l'infini sont rectangulaires.*

623. Nous avons désigné par k la limite du rapport $\frac{p}{\tang\sigma}$; par suite, si l'on regarde p et σ comme représentant la distance de la génératrice considérée à celle qui lui est infiniment voisine et l'angle de ces deux droites, on aura simplement

$$k = \frac{p}{\sigma}. \tag{2}$$

Le rapport des grandeurs infiniment petites p et σ est une longueur finie que nous appellerons *paramètre de distribution des plans tangents aux divers points de la génératrice,* ou plus simplement *paramètre de la génératrice.*

L'équation (1) montre que l'on peut définir le paramètre d'une génératrice *la distance du point central au point où l'obliquité du plan tangent est de* 45°.

Nous considérerons toujours le paramètre k comme positif quand, en plaçant l'œil en un point de la génératrice et en regardant dans la direction de cette droite d'un côté ou de l'autre, on verra le plan tangent tourner dans le même sens que les aiguilles d'une montre que l'on aurait devant soi, lorsque le point de contact s'éloignera du côté où l'on regarde.

624. En appelant x' et θ' l'abscisse d'un second point de la génératrice et l'obliquité du plan qui est tangent en ce point à la surface, on a

$$\tang\theta \tang\theta' = \frac{xx'}{k^2}.$$

Les deux plans seront à angle droit lorsque le produit des tangentes des angles θ et θ' sera égal à l'unité négative. Nous voyons alors que, *quand deux plans contenant une même génératrice sont rectangulaires, leurs points de contact se trouvent situés de part et d'autre du point central et à des distances de ce point dont la moyenne géométrique est égale au paramètre de la génératrice.*

Le premier plan étant normal au point où le second est tangent, on peut énoncer ce théorème en disant que, *lorsqu'un plan contient une génératrice d'une surface gauche, le produit des distances au point central des deux points où il est tangent et normal est constant et égal au carré du paramètre* [1].

625. Nous allons maintenant considérer deux surfaces gauches ayant une génératrice commune XY (*fig.* 292). Nous appelons

k et k' les paramètres de cette droite dans les deux surfaces;

---

[1] M. Chasles : *Journal de M. Liouville*, t. II, p. 413.

a la distance des points centraux A et A';

x l'abscisse AM d'un point considéré M;

θ et θ' les obliquités des plans tangents des deux surfaces en M;

η l'angle que forme le plan central de la deuxième surface avec celui de la première;

ε l'angle du plan tangent de la deuxième surface en M avec celui de la première au même point.

Le plan de la figure est le plan central de la première surface. Nous supposons qu'un second plan perpendiculaire à la génératrice XY est rabattu sur celui-là par une rotation autour de sa trace MZ, de manière que sa partie antérieure se trouve amenée à la droite de MZ. Les lignes Mn, Mn' et Mc' sont les traces, sur ce nouveau plan, des plans tangents en M et du plan central de la deuxième surface.

D'après la convention que nous avons faite à l'article **625**, les paramètres k et k' sont positifs pour les surfaces auxquelles se rapporte la *fig.* 292, et, les abscisses étant mesurées positivement de A vers Y, l'équation (1) donne des valeurs positives pour θ et θ'. Les angles ε et η sont positifs, car, d'après leur définition et les dispositions de la figure, le sens dans lequel on doit les mesurer est le même que celui des angles positifs θ et θ'.

Nous avons

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{x}{k},$$

$$\operatorname{tang}\theta' = \frac{x-a}{k'},$$

d'où

$$\operatorname{tang}(\theta'-\theta) = \frac{(k-k')x - ak}{kk' + x^2 - ax}.$$

Ordonnant par rapport à x^2 et observant que la différence $(\theta'-\theta)$ est égale à $(\varepsilon-\eta)$, on a

$$x^2 \operatorname{tang}(\varepsilon-\eta) - x[k - k' + a\operatorname{tang}(\varepsilon-\eta)] + [ak + kk'\operatorname{tang}(\varepsilon-\eta)] = 0.$$

L'équation est du second degré; par conséquent, il existe deux points où l'angle ε des surfaces a une valeur donnée. Ces points d'ailleurs peuvent se confondre ou devenir imaginaires.

Si l'angle ε a une même valeur en trois points différents, l'équation doit être satisfaite quelle que soit l'abscisse x, et l'on a

$$\eta = \varepsilon, \quad k = k', \quad a = 0;$$

par conséquent, *quand deux surfaces gauches se coupent sous un même angle en plus de deux points d'une génératrice commune, l'angle qu'elles comprennent aux* *différents points de cette droite est constant, et la génératrice a un même paramètre et un même point central, quand on la considère comme appartenant à l'une ou à l'autre de ces surfaces.*

626. On peut résoudre par des constructions et des considérations géométriques très-simples les questions relatives aux angles compris entre deux surfaces gauches qui ont une génératrice commune.

A chaque point central A et A′ (*fig.* 268) élevons à la génératrice GX, et dans un même plan, deux perpendiculaires AE, A′E′ respectivement égales aux paramètres k et k', et joignons les points E et E′ à un point quelconque M de GX : les angles AEM, A′E′M sont les valeurs de θ et de θ' pour le point M, et par conséquent leur différence EME′ est $(\varepsilon - \eta)$. D'après cela, lorsque l'angle η sera connu, si l'on veut déterminer le point où les surfaces comprennent un angle d'une grandeur donnée ε, on décrira sur EE′ un segment capable de l'angle $(\varepsilon - \eta)$; les points cherchés seront ses intersections avec la génératrice : on en trouvera généralement deux, M et M_1.

Si l'angle $(\varepsilon - \eta)$ était négatif, on tracerait le segment capable de l'autre côté de la corde EE′, et l'on obtiendrait deux points m et m_1 tels que la direction des segments Nm et Nm_1 serait celle des abscisses négatives.

Si du point N nous menons une tangente à l'un des cercles, sa longueur Nq sera moyenne proportionnelle entre les segments NE et NE′. En portant cette longueur sur NX, on aura un point P tel, que le cercle qui passerait par les points E, E′ et P toucherait NX en ce dernier point. L'angle EPE′ est évidemment la plus grande valeur de $(\varepsilon - \eta)$. L'angle EpE′, obtenu en portant la longueur Nq sur NG′, est le maximum absolu des valeurs négatives de $(\varepsilon - \eta)$.

On voit d'après cela que les surfaces se couperont en deux points sous un angle donné ε, si $(\varepsilon - \eta)$ est positif et plus petit que EPE′, ou négatif et d'une grandeur absolue plus petite que EpE′.

Au point N l'angle $(\varepsilon - \eta)$ est nul, et les surfaces comprennent un angle égal à celui que font les plans centraux ou les plans tangents au point commun situé à l'infini [1].

627. Quand les paramètres k et k' sont de signe différent, on doit les porter de côtés opposés de la génératrice GX (*fig.* 269). La construction du reste est la même : un cercle qui passe par E et par E′ détermine sur la génératrice deux points M et M_1 où les surfaces se coupent sous une même inclinaison. En ayant égard aux signes des angles, on trouve que la valeur de $(\theta' - \theta)$ est $-$ EME′ pour

[1] Les points M et M_1 où les deux surfaces se coupent sous un même angle forment sur la génératrice deux divisions du genre de celles que M. Chasles a appelées *divisions homographiques en involution* (*Géométrie supérieure*, p. 121 et 167). P et p sont les *points doubles*, et N le *point central* des divisions. Les points où deux plans contenant une génératrice d'une surface gauche, et perpendiculaires l'un à l'autre, touchent cette surface (art. 624) forment également deux divisions homographiques en involution.

le point M, et $+ E'M_1E$ pour le point M_1 : ces angles sont supplémentaires et de sens contraire; par suite, leur différence algébrique est de 180°, mais cette différence est égale à celle des deux valeurs de ε en M et en M_1 ; les plans tangents en ces deux points ont donc une même position relative.

Quand les paramètres sont de signe contraire, quelle que soit la valeur de ε, on trouve sur la génératrice deux points où les surfaces se coupent sous cet angle.

628. Lorsque deux génératrices G et G′ de deux surfaces gauches A et A′ ont des paramètres égaux, on peut placer ces surfaces de manière qu'elles se touchent le long des lignes G et G′, confondues en une seule droite. Alors, si, A restant fixe, on fait tourner A′ de 180° autour de la normale commune au point central, il y aura encore raccordement, car les plans tangents situés de part et d'autre du point central et à égales distances ont des obliquités égales et de sens opposé. Ensuite, si, considérant la surface A′ dans sa première position et dans celle que nous venons de lui donner, on la fait tourner de 180° autour de la génératrice commune, les plans tangents aux divers points de cette droite accompliront une demi-révolution qui les ramènera à leurs positions premières. Les surfaces A et A′ peuvent donc se raccorder le long des génératrices G et G′ dans quatre positions relatives différentes.

Si A′ est le paraboloïde formé par les tangentes aux sections faites dans A par des plans perpendiculaires à G, la rotation de 180° autour de la normale au point central amènera chaque génératrice tangente à une position précédemment occupée par une autre génératrice, et la rotation autour de G ne changera pas la position d'une génératrice tangente considérée comme une droite indéfinie. La surface A et le paraboloïde A′ placé successivement dans ses quatre positions de raccordement ne formeront donc qu'un seul système géométrique.

Sommets et arêtes.

629. Nous appellerons *sommets* d'une surface gauche les points singuliers où deux génératrices consécutives G et G′ se rencontrent. Le plan déterminé par ces droites est tangent tout le long de G; cependant la largeur de l'élément superficiel, qui dans ce cas est $x\sigma$ au point dont l'abscisse est x, devient nulle au sommet, qui est évidemment le point central, et l'on ne voit pas si le plan des génératrices est tangent en ce point à la surface.

La distance p de la génératrice G à la génératrice voisine G′ étant nulle, le paramètre k est également nul d'après l'équation (2) : la formule (1) donne par suite une obliquité indéterminée pour le plan tangent au sommet et une obliquité de 90° pour les plans tangents à tous les autres points de la génératrice.

Afin d'éclaircir cette question, nous allons rechercher comment se modifient les positions du plan tangent aux divers points d'une génératrice, quand le paramètre k diminue indéfiniment.

630. Supposons qu'aux différents points d'une génératrice, et dans un même plan, on élève à cette droite des perpendiculaires égales aux cotangentes de l'angle θ : en considérant ces perpendiculaires comme des ordonnées correspondantes aux abscisses mesurées sur la génératrice à partir du point central, nous obtiendrons une courbe dont l'équation sera

$$xy = \mathrm{R}k,$$

R étant le rayon du cercle par rapport auquel la cotangente de l'angle θ a une longueur y.

Cette ligne est une hyperbole dont les asymptotes sont la génératrice et la droite qui lui est perpendiculaire au point central. Lorsque le paramètre k est petit, les branches de l'hyperbole sont rapprochées de ces droites, ce qui indique que le plan tangent accomplit presque entièrement sa demi-révolution de $180°$ (art. **617**) quand le point de contact parcourt une petite longueur près du point central, et qu'au delà, sur presque toute la longueur de la génératrice, les plans tangents diffèrent peu du plan tangent à l'infini. A la limite, quand le paramètre est nul, l'hyperbole se confond avec ses asymptotes, le point central est un sommet, et le plan tangent fait son évolution complète quand le point de contact y est parvenu [1].

Tous les points de la seconde asymptote ont une abscisse nulle; cela indique que tous les plans contenant la génératrice qui passe au sommet doivent être considérés comme tangents en ce point, quelle que soit leur inclinaison sur le plan central. Nous verrons cependant que l'un d'eux a, en général, un contact plus intime que les autres avec la surface. Nous nous bornerons ici à examiner ce qui se passe sur les développables.

631. Sur une développable à arête de rebroussement, une génératrice rencontre la génératrice qui lui est infiniment voisine au point où elle touche l'arête. Chaque point de cette courbe est donc un sommet; nous savons que la développable y a une infinité de plans tangents, mais que le plan de rebroussement a un contact plus intime avec la surface (art. **442**).

---

[1] M. Bour a remarqué le premier que l'on devait considérer le plan tangent d'une surface gauche en un point de la génératrice qui passe à un sommet comme faisant une rotation de $180°$ pendant que son point mobile de contact est au sommet (*Théorie de la déformation des surfaces*, art. 22).

Nous avons emprunté à M. Bour les dénominations de *sommets* et d'*arêtes*, mais, ainsi qu'il le dit, nous avons le premier signalé l'importance de ces points et de ces droites dans l'étude des courbes d'ombre des surfaces gauches.

Le paramètre k est infiniment petit du second ordre pour les génératrices d'une développable à arête de rebroussement, car, lorsque l'angle σ de deux génératrices est infiniment petit du premier ordre, leur distance p est infiniment petite du troisième (art. 485). Lorsque, dans la question dont on s'occupe, il n'y a pas lieu de considérer des infiniment petits de différents ordres, on doit regarder le paramètre des génératrices des surfaces développables comme nul.

632. Considérons une surface gauche déterminée par trois directrices A, B et C : les génératrices qui passent par un point m de A sont les intersections de deux cônes qui ont leurs sommets en ce point, et respectivement pour directrices les courbes B et C. Ces cônes peuvent se couper suivant plusieurs génératrices ou ne pas avoir d'autre point commun que leur sommet; il en résulte qu'une directrice considérée dans toute son étendue géométrique est composée, en général, d'arcs multiples et d'arcs parasites.

Les deux cônes auxiliaires qui ont leur sommet commun en un point limite sont tangents et déterminent deux génératrices consécutives qui se coupent : *un point limite est donc un sommet.*

Quelquefois le nombre de génératrices qui se croisent en chaque point de la directrice diminue de deux unités, sans que cette courbe devienne parasite. Ainsi, quand les lignes B et C sont du second ordre, la directrice A peut avoir des arcs quadruples, des arcs doubles et des arcs parasites : tous les points limites sont des sommets.

633. Réciproquement, *si les directrices n'ont ni inflexion ni rebroussement, tout sommet est l'extrémité de l'arc utile d'une ligne double.*

Pour le prouver, considérons la surface donnée par trois directrices A, B et C (*fig.* 293) dont les rayons de courbure ne sont ni nuls ni infinis, et supposons que la génératrice G rencontre en I la génératrice qui lui est infiniment voisine : les deux cônes qui ont leur sommet en ce point, et respectivement pour directrices les courbes A et B, se touchent le long de G, et si l'on transporte successivement leur sommet commun à une distance infiniment petite dans deux directions opposées et d'ailleurs quelconques, le résultat de l'un de ces déplacements sera de séparer les cônes, et celui de l'autre de les faire se pénétrer suivant deux droites situées de part et d'autre de G.

Prenons arbitrairement sur une génératrice G′ infiniment voisine de G un point e situé à une distance infiniment petite de I : les deux cônes qui ont leur sommet en e, et respectivement pour directrices A et B, se coupent suivant G′ et une autre droite $em''n''$, qui, en général, ne sera pas une génératrice de la surface, parce qu'elle ne rencontrera pas la directrice C. Mais si le sommet e des cônes se meut sur G′ en restant toujours à une distance infiniment petite de I, la droite $em''n''$ décrira une surface, et dans une certaine position elle coupera C. Soit alors E la position de e : deux génératrices passent par E, et la ligne IE est double; elle devient parasite au delà de I, car les cônes se sépareraient si leur sommet glissait sur elle dans cette direction.

634. Une surface gauche étant supposée éclairée par un point lumineux, le contour de son ombre sur un plan quelconque est l'enveloppe des ombres de ses génératrices (art. **455**). Si deux génératrices consécutives G et G′ se coupent en un point I, leurs ombres g et g' se rencontreront sur l'ombre i de I, et le point i appartiendra au contour de l'ombre portée; le sommet I sera donc un point de la ligne d'ombre propre.

Chacune des droites g et g' touche la courbe d'ombre portée en un point, et par suite la courbe d'ombre propre a deux points distincts sur les génératrices G et G′; comme d'ailleurs le point de rencontre I est l'un des deux, cette courbe y est tangente à G. Nous avons par conséquent ce théorème :

Toute ligne d'ombre et de contour apparent d'une surface gauche passe par chaque sommet et y est tangente à la génératrice.

En considérant les surfaces développables comme formant une variété de surfaces gauches, on voit que leurs lignes d'ombre et de contour apparent doivent comprendre, outre un certain nombre de génératrices, l'arête de rebroussement qui est une ligne de sommets.

635. Si l'on suppose qu'un sommet s'éloigne sur la génératrice et disparaisse à l'infini, cette droite deviendra parallèle à la génératrice infiniment voisine et sera asymptote de toutes les courbes de contact des cônes et des cylindres circonscrits. Par conséquent, en appelant *arêtes* les génératrices qui sont respectivement parallèles à celles qui leur sont infiniment voisines, nous avons ce théorème :

Les arêtes d'une surface gauche sont asymptotes de toutes les courbes d'ombre et de contour apparent.

Le point d'une arête situé à l'infini est un sommet et par conséquent l'extrémité de l'arc utile d'une ligne double, mais cette courbe peut n'avoir que ce point à l'infini ou y être tout entière. De là deux dispositions que nous étudierons plus loin. Nous supposons toujours que les directrices n'ont ni inflexions ni rebroussements.

636. Quand une génératrice G est parallèle à la génératrice voisine G′, un même plan est tangent tout le long de cette droite, et l'on ne peut déterminer la position du point central qu'en le considérant comme appartenant à la ligne de striction. Ce point peut être à une distance finie ou à l'infini : dans le premier cas, p reste un infiniment petit de premier ordre, et, comme σ est nul, la formule (2) montre que k est infini; dans le second, les génératrices se rencontrent au point central; par conséquent, p devient nul comme σ, et l'équation (2) ne donne aucune indication sur la valeur de k. Nous verrons plus loin, en étudiant diverses surfaces, comment on peut reconnaître quelle est alors la valeur du paramètre (art. **655**, **665**, **669**, **677**); nous nous bornerons, quant à présent, à remarquer que l'asymptote de l'arête de rebroussement d'une développable est une génératrice parallèle à la génératrice voisine, et que son paramètre est nul, comme celui de toutes les autres génératrices de la surface.

Un sommet à distance finie est nécessairement le point central d'une génératrice dont le paramètre est nul (art. **630**); mais un sommet à l'infini peut être distinct du point central de l'arête, qui est déterminé par la ligne de striction, et se trouve quelquefois à distance finie.

637. On ne peut considérer une ligne de striction et des paramètres sur un cylindre que quand il fait partie d'une série de surfaces réglées. S'il appartient à un système de cônes ayant une même directrice et un sommet mobile sur une droite, on devra regarder que sa ligne de striction est à l'infini et que les paramètres sont nuls. S'il dépend d'un système d'hyperboloïdes de révolution ayant même centre et même axe, et dans lesquels le rayon du cercle de gorge et l'angle de la génératrice avec l'axe sont liés par une certaine loi, pour la continuité la ligne de striction aura une position déterminée à distance finie, et les paramètres seront infinis.

638. Le point où la ligne d'ombre d'une surface gauche rencontre une génératrice s'éloigne à l'infini dans trois circonstances différentes : 1° lorsque le plan tangent de la surface au point situé à l'infini sur la génératrice contient le point lumineux; 2° quand la génératrice est tout entière à l'infini; 3° quand la génératrice est une arête. Les courbes d'ombre des surfaces gauches ont donc des branches infinies de trois espèces différentes.

Développable asymptote.

639. Supposons qu'on trace sur une surface gauche une courbe Ω qui ait un point sur chaque génératrice, et considérons la développable Σ circonscrite le long de cette courbe, c'est-à-dire enveloppe des plans tangents aux différents points de Ω. Si l'on conçoit que la courbe Ω se modifie de telle sorte que tous ses points glissent sur les génératrices et arrivent ensemble à l'infini, la développable Σ se trouvera tangente tout le long d'une courbe située à l'infini, c'est-à-dire asymptote.

La *développable asymptote* étant l'enveloppe des plans tangents à l'infini, ses génératrices sont respectivement parallèles aux génératrices du cône directeur qui est enveloppe de plans parallèles à ceux-là (art. **615**). La développable asymptote a donc ses génératrices parallèles à celles de la surface; on dit qu'elle est *directrice*.

CHAPITRE III.

CONOIDE.

Propriétés générales. Retour sur le paraboloïde.

640. Lorsqu'une surface réglée a un plan directeur, si elle est développable, deux génératrices consécutives quelconques étant dans un même plan et parallèles à un autre plan sont parallèles, et la surface est un cylindre. Par conséquent, *toute surface réglée à plan directeur qui n'est pas un cylindre est gauche.*

On appelle *conoïde général* ou simplement *conoïde* la surface gauche qui a un plan directeur. Le cône directeur de la surface se réduit à ce plan.

Le paraboloïde ayant un plan directeur dans chacun de ses deux systèmes de génération rectiligne peut être considéré comme un conoïde de deux manières différentes.

641. Nous avons reconnu que tout plan contenant une génératrice d'une surface gauche et tangent au point de cette droite situé à l'infini est parallèle au plan tangent du cône directeur le long de la génératrice correspondante (art. **615**); il suit de là que *tous les plans tangents d'un conoïde aux points situés à l'infini sont parallèles au plan directeur, et que ce plan est directeur de tous les paraboloïdes de raccordement comme de la surface elle-même.* Nous voyons de plus qu'*un conoïde n'a pas de développable asymptote,* parce que tous les plans dont cette surface est l'enveloppe sont parallèles.

Une surface réglée et son cône directeur sont coupés suivant une même ligne par un plan situé à l'infini (art. **466**); un conoïde a donc une directrice rectiligne située à l'infini dans son plan directeur.

642. Les droites sur lesquelles se mesurent les plus courtes distances entre deux génératrices consécutives d'un conoïde sont des tangentes perpendiculaires aux génératrices (art. **622**) et par suite au plan directeur; elles forment un cylindre circonscrit à la surface le long de la ligne de striction; par conséquent, *la ligne de striction d'un conoïde est le contour apparent de cette surface par rapport à son plan directeur, et sa projection orthogonale sur ce plan est l'enveloppe des projections des génératrices.*

Nous ajouterons que *les plans centraux de toutes les génératrices sont perpendiculaires au plan directeur,* ce qui résulte d'ailleurs immédiatement des considérations présentées à l'article **641**.

643. Un paraboloïde a une ligne de striction pour chacun de ses deux systèmes de génératrices. Sur la *fig.* 288, nous avons pris un nouveau plan de projection U parallèle au plan directeur Q du paraboloïde, et par conséquent perpendiculaire au plan R que nous considérons comme horizontal (art. 603). La ligne de terre A^vC^v, intersection des plans R et U, est parallèle à YZ_1. L'enveloppe $i'j'$ des projections orthogonales des génératrices sur le plan U est la projection de la ligne de striction du système Q.

La ligne de striction elle-même est une parabole située dans le plan diamétral conjugué aux cordes perpendiculaires au plan Q (art. 609). Les deux génératrices ab et eh qui se croisent au sommet O'' sont horizontales : la droite ae, perpendiculaire à YZ_1 et limitée à ces génératrices, est donc la projection d'une corde perpendiculaire à Q, et par conséquent son point milieu f appartient au plan de la ligne de striction; mais ce plan, étant diamétral, doit être perpendiculaire au plan R (art. 596); le point f appartient donc à sa trace sur R. Nous avons déterminé de la même manière un second point g de cette trace.

En relevant sur les droites A^vD^v et C^vB^v les points i et j où la trace fg coupe les génératrices $A''D''$ et $C''B''$, nous avons les extrémités i' et j' de l'arc de la parabole représenté sur la projection U.

On obtiendrait de la même manière les projections de la ligne de striction du système P. Ces deux paraboles se croisent au sommet O'', car le plan tangent en ce point est perpendiculaire à l'axe, et par conséquent à chacun des plans directeurs.

Il résulte de la construction même que le plan de la parabole de striction du système P fait avec le plan directeur P le même angle que le plan de la parabole de striction Q avec le plan directeur Q, d'où l'on conclut que *les plans principaux sont bissecteurs des plans des paraboles de striction*, et que *ces paraboles sont égales.*

Si le paraboloïde était isoscèle, les deux projections faites sur les plans P et Q seraient orthogonales, et par suite les génératrices qui se projettent aux points O et O′ couperaient respectivement à angle droit les génératrices des systèmes P et Q; chacun de leurs points serait donc le point central de la génératrice sur laquelle il se trouve.

Nous voyons ainsi que les *lignes de striction* du paraboloïde isoscèle sont les génératrices qui se croisent au sommet.

Plans tangents et lignes d'ombre.

644. Un conoïde étant donné par deux directrices A et B, et un plan directeur P (*fig.* 294), on obtient un paraboloïde de raccordement le long d'une génératrice G, en prenant pour directrices les tangentes R et S, et le plan P pour plan directeur (art. 614). Pour construire le plan tangent H en un point μ de G, il suffit de connaître la génératrice du second système qui passe à ce point. On y parvient en déterminant d'abord une génératrice G′ du premier système, et menant ensuite par μ un plan parallèle à R et à S; ce plan coupe la droite G' en un point μ' de la génératrice cherchée.

Si, au contraire, on veut connaître le point de contact d'un plan H contenant une génératrice G, après avoir construit comme précédemment une génératrice G', on cherchera son intersection μ' avec le plan donné. La génératrice du second système contenue dans le plan H passe par le point μ' et est dans un plan parallèle aux tangentes R et S; on peut donc la déterminer : le point de contact μ est son point de rencontre avec G.

Nous allons développer les constructions que nous venons d'indiquer, en disposant les données de manière à simplifier le problème.

645. Nous prenons le plan directeur pour plan vertical, et nous supposons la surface déterminée par deux directrices planes A et B (*fig.* 297) situées dans des plans verticaux xy et x_1y_1 que nous supposons rabattus sur le plan horizontal. Le point pour lequel on doit construire le plan tangent est donné par sa projection horizontale μ.

La droite Jμ parallèle à la ligne de terre XY est la projection horizontale de la génératrice qui passe par le point considéré. Cette droite rencontre les directrices en des points dont les projections horizontales m et n font trouver les rabattements M et N; on détermine ensuite leurs projections verticales m' et n' (art. **59**). La projection verticale μ' du point de la surface est sur la droite $m'n'$.

Le paraboloïde qui a pour directrice les tangentes Me et NF des courbes A et B aux points M et N, et pour plan directeur le plan vertical, se raccorde avec la surface le long de la génératrice (mn, $m'n'$). Le plan horizontal étant perpendiculaire au plan directeur du premier système, les projections horizontales des génératrices du second système divergent d'un même point (art. **611**); et, comme nous connaissons deux d'entre elles xy et x_1y_1, projections des tangentes directrices Me et NF, nous avons immédiatement le point de concours L et nous pouvons tracer la projection horizontale Lμ de la génératrice du second système qui passe par le point donné.

Le paraboloïde coupe le plan vertical suivant la droite qui passe par les traces E' et C' des tangentes directrices; la trace verticale de la génératrice Lμ est en G' sur cette ligne; il n'y a plus qu'à faire passer un plan par la droite (mn, $m'n'$) et par le point (G, G') : sa trace verticale est la droite I'K parallèle à $m'n'$.

Les données peuvent être disposées d'une manière différente, mais les constructions devront toujours être établies sur les mêmes principes.

646. Si l'on demande le point de tangence d'un plan contenant une génératrice (mn, $m'n'$) et ayant une trace verticale I'K nécessairement parallèle à $m'n'$, on déterminera comme précédemment la trace verticale E'C' du paraboloïde de raccordement qui a pour directrices les tangentes Me et NF, et pour plan directeur le plan vertical. L'intersection G' des droites E'C' et I'K sera la trace de la seconde génératrice contenue dans le plan donné. On cherchera la projection horizontale GL de cette droite, et son intersection (μ, μ') avec la génératrice mn, $m'n'$) sera le point de contact demandé.

Cette construction donne un moyen facile d'obtenir la courbe d'ombre de la surface. Après avoir choisi un certain nombre de génératrices convenablement espacées, on détermine la trace I'K d'un plan passant par l'une d'elles ($mn, m'n'$) et par le point lumineux (S, S'), et l'on cherche son point de contact (μ, μ'). On répète ensuite cette opération sur les autres génératrices.

647. La courbe d'ombre ne rencontre qu'à l'infini les génératrices dont les projections horizontales passent par le point S, car le plan qui contient une de ces droites et le point lumineux est parallèle au plan directeur, et par conséquent tangent à l'infini (art. **641**).

La courbe a aussi des branches infinies correspondant aux arêtes et aux génératrices situées tout entières à l'infini.

Si la droite (mn, $m'n'$) était une arête, le paraboloïde de raccordement se transformerait en un plan, et sa trace E'C' serait parallèle à la projection $m'n'$ de la génératrice et à la trace I'K du plan d'ombre; les points G', G et μ disparaîtraient donc à l'infini, comme cela doit être.

Lorsque le point lumineux est dans le plan tangent le long d'une arête, cette droite forme une branche de la courbe de contact. Nous examinerons plus loin ce cas intéressant (art. **828** et suiv.)

Quand les rayons de lumière sont parallèles entre eux, mais non au plan directeur, les plans d'ombre des génératrices ne peuvent pas être tangents à l'infini, et les arêtes sont les seules génératrices à distance finie qui ne rencontrent la courbe qu'à l'infini; elles lui sont d'ailleurs asymptotes (art. **655**). On peut donc obtenir leur position d'une manière approximative en construisant avec soin l'ombre que projetterait sur un plan la surface éclairée par des rayons parallèles entre eux, mais non au plan directeur, et traçant les asymptotes de cette courbe. On peut aussi employer des courbes d'erreur disposées de diverses manières.

648. Pour déterminer les points d'un conoïde où le plan tangent est parallèle à un plan donné P, on construit le contour apparent de la surface sur le plan directeur pris pour plan de projection, et, menant à cette courbe des tangentes parallèles à la trace du plan P, on obtient les projections des génératrices parallèles à ce plan; on fait passer par chacune d'elles un plan parallèle à P, et l'on cherche son point de contact.

Cylindroïde.

649. Considérons un cylindre parallèle à la ligne de terre XY (*fig.* 298), coupons-le par deux plans verticaux OP et Op; puis supposons que, la seconde section restant immobile, la première $(AG, A''G'')$ s'élève parallèlement à elle-même, de manière que le point (A, A'') se place en (A, A') : si une droite mobile rencontre constamment les deux courbes en des points situés précédemment sur une même génératrice du cylindre, elle engendrera une surface que Frézier a appelée *cylindroïde*. Cette surface a quelques applications dans la coupe des pierres.

Les génératrices du cylindroïde sont parallèles au plan vertical, et d'ailleurs inégalement inclinées; cette surface est donc un conoïde (art. **640**).

650. Tout plan passant par l'intersection des plans des directrices, tel que (Ol, ll'), coupe le cylindroïde et le cylindre primitif suivant deux courbes identiques, car un point (L, L'') appartenant à une génératrice $(Bb, B''b')$ du cylindre est élevé de (L, L'') en (L, L'), et l'on a

$$L''L' = B''B'\frac{Lb}{Bb}.$$

$B''B'$ est égal à $A''A'$ et le rapport $\frac{Lb}{Bb}$ est constant pour les différentes génératrices; donc tous les points de la section faite dans le cylindre sont élevés d'une même hauteur, et la courbe est transportée sans altération.

Dans un cylindroïde elliptique (c'est celui qui résulte de la déformation d'un cylindre elliptique), toutes les sections faites par des plans passant par l'intersection des plans des directrices sont des ellipses. Sur la *fig.* 298, la section droite du cylindre est le cercle Ω rabattu sur le plan horizontal. Ce cercle nous a servi à construire et à diviser les ellipses directrices.

La section par le plan $(OI, \alpha'_1\alpha')$, perpendiculaire à la ligne de terre, est identique avec le cercle Ω. Le segment $\alpha'_1\alpha'$, limité au contour apparent, est donc égal au diamètre d'_1d', et ses extrémités α'_1 et α' sont sur les génératrices $d'_1D'_1$ et $d'D'$.

651. On peut obtenir la tangente au point L' de la section par le plan Ol, soit en construisant la tangente en L'' à la section du cylindre par le même plan et l'élevant parallèlement à elle-même, soit en recourant au paraboloïde de raccordement déterminé par le plan directeur de la surface et par les tangentes des directrices aux points (B, B') et (b, b'). Dans la première méthode, nous construisons la trace horizontale Qq du plan tangent au cylindre le long de la génératrice $B''b'$, puis la trace verticale l'' de la tangente au point L'', et nous élevons l'' en l' d'une hauteur égale à $L''L'$. Dans la seconde, nous remarquons que les projections horizontales des génératrices du deuxième système du paraboloïde passent toutes par le point O, et que par suite celle de ces droites qui se projette sur Ol est la tangente de la section. La trace verticale l' de cette droite est sur la trace $P'p'$ du paraboloïde.

La position spéciale du plan sécant rend ainsi la construction de la tangente très-simple. Dans le cas général, il faudrait déterminer le plan tangent à la surface (art. 645) et prendre ensuite son intersection avec le plan de la courbe.

652. *Les sections du cylindroïde et du cylindre primitif par un plan vertical sont équivalentes,* car les éléments dans lesquels on peut concevoir ces aires décomposées par des droites verticales infiniment rapprochées ne diffèrent que de quantités infiniment petites d'un ordre élevé. Il suit de là que *les sections du cylindroïde par des plans verticaux et parallèles sont équivalentes.*

653. Sur le cylindre primitif, chaque génératrice est parallèle à la génératrice voisine; mais ces droites, étant inégalement distantes de la verticale du point O, sont, après la déformation, inégalement inclinées; cependant la génératrice $(Gg, G'g')$ et celle qui en est infiniment rapprochée sont à la même distance de cette verticale, et par suite elles restent parallèles sur le cylindroïde.

La droite $(Gg, G'g')$ est donc une arête; il en de même de $(Aa, A'a')$. Ces génératrices forment le contour apparent de la surface sur le plan horizontal et sont asymptotes du contour apparent sur le plan vertical.

Les autres génératrices sont parallèles deux à deux de part et d'autre de chaque arête, et leurs intersections mutuelles déterminent une ligne double qui est la droite située à l'infini dans le plan directeur (art. **641**). Les extrémités du segment utile de cette ligne sont sur les arêtes (art. **652**).

En général, une surface a deux plans tangents en chaque point d'une ligne double; mais, dans le cas que nous examinons, deux génératrices parallèles sont telles, que le plan tangent au point de l'une situé à l'infini contient l'autre, parce qu'elles sont à la même distance du plan directeur. Il en résulte que la ligne double située à l'infini est une ligne de contact.

On peut rendre cette circonstance sensible en coupant le cylindroïde par un plan oblique sur le plan directeur et parallèle à deux génératrices qui seront, par exemple, fF' et $f'_1F'_1$: la section aura deux branches infinies, et l'intersection du plan sécant par le plan vertical Ff sera asymptote de ces deux branches.

La courbe de section de la surface par un plan contenant une génératrice a cette droite pour asymptote [1].

Un cylindroïde n'a pas de sommets à distance finie, car si deux génératrices consécutives se coupaient, leurs homologues sur le cylindre se rencontreraient au point correspondant.

654. La ligne de striction contour apparent de la surface par rapport au plan vertical (art. **642**) est facilement déterminée, sur ce plan, comme enveloppe des projections des génératrices. Pour avoir sa projection horizontale, il faut chercher par un paraboloïde de raccordement le point où le plan qui projette verticalement

---

[1] On reconnaît facilement que le cylindroïde de la *fig.* 298 est une surface algébrique du quatrième ordre; chaque génératrice passe par conséquent par deux points doubles (art. 618). Ces points sont réunis l'un à l'autre à l'infini.

chaque génératrice considérée touche la surface. On pourrait, il est vrai, rapporter sur la projection horizontale de la génératrice le point où sa projection verticale est tangente à l'enveloppe, mais la position de ce point est trop incertaine pour que l'on puisse s'en servir si l'on veut mettre un peu d'exactitude dans les tracés.

Si nous considérons la génératrice (Ee, $E'e'$), nous remplacerons les deux directrices courbes par leurs tangentes (EP, $E'P_1$), (ep, $e'p_1$). La trace du paraboloïde ainsi obtenu sur le plan vertical, qui est toujours plan directeur, sera la droite P_1p_1. La génératrice du deuxième système contenue dans le plan projetant de la génératrice considérée a sa trace verticale à l'intersection r' des droites P_1p_1 et $E'e'$. Sa projection horizontale est déterminée par le point r et par le point de concours O des droites de ce système; le point μ, où elle rencontre la ligne Ee, est la projection horizontale du point où le plan qui projette la génératrice sur le plan vertical touche le paraboloïde, et par suite le cylindroïde. La ligne de striction a d'ailleurs deux branches infinies dont les arêtes sont les asymptotes; elle passe par les points (α, α'), (α, α'_1) : sa projection est la courbe $\mu\alpha\delta\ldots\beta\alpha\varepsilon\ldots\gamma\mu$.

655. En général, pour déterminer le paramètre d'une génératrice d'une surface gauche, on cherche le point de contact d'un plan qui fait un angle de 45 degrés avec le plan central, et l'on détermine la vraie grandeur du segment compris entre ce point et le point central. Puis, si l'on veut avoir l'expression du paramètre, on fait la traduction analytique des constructions. Mais, dans le cas des conoïdes, le calcul peut se faire d'une manière directe et très-simple.

Appelant σ l'angle que fait avec le plan horizontal la génératrice considérée (Bb, $B'b'$) du cylindroïde, et p l'ordonnée OH qui est la distance de la génératrice à la verticale du point O, nous aurons

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{B''B'}{bB} = \frac{A''A' \times O\alpha}{dD}\,\frac{1}{p}$$

ou

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{g}{p},$$

en représentant par g le premier facteur du second membre, qui est constant.

La distance de deux génératrices consécutives et leur angle sont les différentielles dp et $d\sigma$; le paramètre k étant le rapport de ces grandeurs infiniment petites (art. **624**), on obtient par une différentiation

$$k = -\frac{p^2}{g\cos^2\sigma}.$$

enfin, éliminant σ entre ces deux équations,

$$k = -\frac{g^2 + p^2}{g}.$$

On remarquera que le paramètre ne dépend pas de la forme des directrices, qu'il n'est jamais nul, et qu'il ne devient infini que quand une génératrice s'éloigne à l'infini. Sur notre cylindroïde il est toujours fini, et à cet égard les arêtes ne se distinguent des autres génératrices que parce que leur paramètre est un maximum ou un minimum.

D'après la convention faite à l'article **625**, le paramètre d'une génératrice du cylindroïde représenté sur la *fig.* 298 est positif. Pour établir l'accord entre cette convention et la formule, il suffit de considérer les ordonnées $O\alpha$ et $A''A'$ comme positives, et la projection dD qui est dirigée de droite à gauche comme négative, car alors la longueur g sera négative.

656. Si le cylindre primitif était un plan P, le cylindroïde serait un paraboloïde dont le second plan directeur serait le plan P, et dont le sommet se projetterait horizontalement en O; l'équation de l'article précédent est donc applicable au paraboloïde. Elle montre que toutes les génératrices d'un même système ont des paramètres de même signe, que celle de ces droites qui passe au sommet a le plus petit paramètre, et que deux génératrices situées de part et d'autre du sommet et à des distances égales ont un même paramètre.

Conoïde oblique.

657. On appelle *conoïde oblique* le conoïde qui a une directrice rectiligne non perpendiculaire au plan directeur.

Un conoïde oblique étant déterminé par son plan directeur P et deux directrices D et C, dont la première est rectiligne, il est facile de voir que par chaque point de C passe une génératrice intersection de deux plans, l'un parallèle à P et l'autre contenant D : la directrice curviligne C ne peut donc avoir ni arc double ni arc parasite. Il suit de là qu'on peut prendre pour seconde directrice une courbe tracée sur la surface de manière à rencontrer toutes les génératrices et d'ailleurs quelconque. Nous choisirons pour directrice la trace de la surface sur un plan perpendiculaire au plan directeur, que nous supposerons horizontal.

658. Les directrices étant la droite $(qF, q'F')$ et la courbe $A'B'$ située dans le plan vertical (*fig.* 296), on obtient des génératrices en coupant ces lignes par des plans horizontaux et joignant les points de section. Quand la trace du plan sécant est, telle que $I'L'J'$, comprise entre les tangentes horizontales $P'p'$ et $Q'q'$, on trouve deux génératrices $(LI, L'I')$ et $(LJ, L'J')$; mais, si le plan était au-dessus du point P' ou au-dessous de Q', il ne contiendrait pas de génératrices : le segment $(pq, p'q')$ de la directrice rectiligne est donc seul utile, et par suite ses extrémités (p, p') et (q, q') sont des sommets.

Lorsqu'une génératrice se meut pour passer d'une position à la suivante, on peut supposer qu'elle glisse sur la directrice rectiligne et sur la tangente à la directrice courbe, en restant d'ailleurs toujours horizontale. En général, elle s'élève ou elle s'abaisse, et par suite deux génératrices consécutives sont à des hauteurs différentes et ne se rencontrent pas. Mais, la tangente au point P′ étant horizontale, la génératrice passe de la position (Pp, P′p') à la suivante par un simple mouvement de rotation autour du point (p, p'), et par suite deux génératrices consécutives se coupent en ce point. On peut faire la même observation pour le sommet (q, q').

Quand la directrice rectiligne et la tangente de la directrice courbe sont dans un même plan, la génératrice reste parallèle à elle-même dans un mouvement infiniment petit, et dans le cas contraire elle décrit un élément gauche. On voit d'après cela que la tangente de la directrice courbe A′B′I′ au point situé sur une arête doit rencontrer la directrice rectiligne (Fq, F′q'), ce qui exige qu'elle passe par sa trace verticale F′. Les génératrices (AM, A′M′) et (BN, B′N′), qui rencontrent la courbe au point de contact des tangentes issues de F′, sont donc des arêtes, et les seules arêtes que la surface puisse avoir.

659. Si au lieu d'une directrice courbe on donnait une surface à laquelle le conoïde dût être circonscrit, on obtiendrait des génératrices en faisant des sections par des plans horizontaux et menant à chacune d'elles des tangentes du point de son plan situé sur la directrice rectiligne.

En raisonnant comme précédemment, on reconnaît que les plans tangents horizontaux à la surface directrice contiennent les génératrices qui passent aux sommets et que les points de contact des plans tangents menés par la directrice rectiligne appartiennent aux arêtes.

660. Une courbe d'ombre peut avoir des branches infinies dépendant de la position du point lumineux (S, S′) (*fig.* 296), en outre de celles qui correspondent aux arêtes (art. **658**).

Tous les plans tangents à l'infini étant parallèles au plan directeur sont horizontaux; la droite menée par le point S′ parallèlement à la ligne de terre est la trace du seul plan horizontal qui contienne le point lumineux. La courbe d'ombre a donc deux branches infinies du premier genre (art. **658**); elles correspondent aux génératrices qui ont leurs traces en I′ et en J′.

661. Si les rayons de lumière sont parallèles entre eux et verticaux ou inclinés, aucun des plans d'ombre des génératrices n'est tangent à l'infini. S'ils sont horizontaux, tous les plans d'ombre touchent la surface à l'infini, et ceux des génératrices (Pp, P′p'), (Qq, Q′q') sont de plus tangents aux divers points de ces droites, car nous avons vu que chacune d'elles, pour passer à la position voisine sur la surface, décrivait un élément horizontal plan en tournant autour du sommet. La ligne d'ombre pour des rayons horizontaux se compose ainsi d'une courbe située à l'infini et des génératrices (Pp, P′p'), (Qq, Q′q'). Rien ne distingue ici les arêtes des autres génératrices, parce que la courbe dont elles sont asymptotes disparaît à l'infini.

662. La solution que nous avons exposée à l'article **648** pour le problème du plan tangent parallèle à un plan donné se simplifie beaucoup pour le conoïde oblique.

Les génératrices parallèles au plan donné (P, P') (*fig.* 300) sont parallèles à sa trace P et se trouvent dans le plan (GE, EF') mené par la directrice rectiligne (GF, G'F') parallèlement à la droite P. Les traces verticales de ces génératrices sont donc aux points A' et B', où la trace EF' de ce dernier plan rencontre la seconde directrice qui est dans le plan vertical. Les génératrices parallèles au plan donné sont par conséquent les droites (AM, A'M') et (BN, B'N'). Pour achever la solution, il faut faire passer par chacune d'elles un plan parallèle à (P, P'); on détermine ensuite chaque point de contact à l'aide d'un paraboloïde de raccordement (art. **646**).

663. On peut trouver l'équation aux paramètres par un calcul analogue à celui de l'article **655**.

Nous plaçons l'origine en un point quelconque O de la ligne de terre X_1X (*fig.* 296); nous prenons pour axes les droites rectangulaires OX, OY et OZ : les deux dernières sont respectivement dans les deux plans coordonnés. Si nous appelons X, Y, Z et α, β, γ les coordonnées courantes de la directrice droite et de la directrice courbe, nous pourrons représenter ces lignes par les équations

$$\begin{cases} X = m(Z - v) + u, \\ Y = n(Z - v), \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = f(\alpha), \\ \beta = 0. \end{cases}$$

Les lettres u et v représentent l'abscisse OF et l'ordonnée FF' de la trace verticale F' de la directrice rectiligne ; m et n sont des coefficients.

Désignant par σ l'angle formé avec la ligne de terre par la génératrice qui est à la hauteur γ, nous avons

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{n(\gamma - v)}{m(\gamma - v) + u - \alpha}.$$

Différentiant, éliminant σ et écrivant k à la place de $\frac{d\gamma}{d\sigma}$, nous obtenons

$$k = \frac{1}{n}\,\frac{n^2(\gamma - v)^2 + [m(\gamma - v) - (\alpha - u)]^2}{(\gamma - v) - (\alpha - u)\dfrac{d\gamma}{d\alpha}}\,\frac{d\gamma}{d\alpha};$$

k est nul en même temps que $\frac{d\gamma}{d\alpha}$, et par conséquent quand la tangente de la directrice curviligne est horizontale; il est infini quand on a

$$(\gamma - v) - (\alpha - u)\frac{d\gamma}{d\alpha} = 0.$$

Cette équation exprime que la tangente de la directrice curviligne au point considéré passe par la trace verticale F′ de la directrice rectiligne. Le paramètre d'une arête de la surface est donc infini.

664. *Représentation d'un conoïde oblique circonscrit à un cercle.* — Sur la *fig.* 299, nous avons représenté par seize génératrices un conoïde oblique dont les directrices sont le cercle A′I′ situé dans le plan vertical AI et la droite (N_1N, N'_1N'). Les génératrices toutes horizontales sont disposées de manière à intercepter des arcs égaux sur le cercle.

D'après ce que nous avons vu (art. **658**), pour déterminer les arêtes, il faut mener des tangentes à la directrice curviligne du point où la droite (N_1N, N'_1N') perce le plan vertical AI. Ce point, situé à la rencontre des lignes TT′ et N'_1N', étant éloigné, nous avons fait une réduction d'échelle (art. **66**), en prenant le point O pour centre de similitude : le rapport est celui de 4 à 1. Les points T′ et J′ ont ainsi été transportés en t et j au quart de leur distance du point O. La construction a fait trouver les points de contact p' et q', qui, ramenés en P′ et Q′ sur le cercle primitif, déterminent les arêtes (PR, P′R′) et (QS, Q′S′).

De part et d'autre de ces droites, les génératrices sont parallèles deux à deux en projection horizontale et dans l'espace. La directrice rectiligne que la surface possède à l'infini (art. **641**) est donc une ligne double, comme dans le cas du cylindroïde; mais c'est une ligne d'intersection et non de contact, car le plan de deux génératrices parallèles n'est pas parallèle au plan directeur, et par suite la surface a deux plans tangents distincts au point situé à l'infini où ces droites se rencontrent [1].

Les points (N, N′) et (N_1, N'_1) sont des sommets.

665. La projection horizontale de la ligne de striction est donnée immédiatement comme enveloppe des projections des génératrices. On détermine par points la projection verticale de cette courbe à l'aide de paraboloïdes. La construction est analogue à celle que nous avons expliquée à l'article **654** pour le cylindroïde.

Considérons la génératrice (FM, F′M′): il suffit de remplacer la directrice courbe par la tangente (FU, F′U′) pour changer le conoïde en un paraboloïde de raccordement. La trace vU de cette surface auxiliaire sur le plan horizontal xy rencontre en u la trace du plan qui projette horizontalement la génératrice et qui par suite touche la surface au point central de cette droite. La projection

[1] Nous verrons que la surface est algébrique et du quatrième degré; chaque génératrice a donc deux points doubles (art. 618) : l'un est sur la directrice rectiligne, l'autre à l'infini.

verticale de la génératrice du second système du paraboloïde est déterminée par le point u' relevé de u et par le point de concours ε (art. **611, 645**); elle fait trouver le point de contact δ'. La projection verticale de la ligne de striction est $N'\delta'I' \ldots N'_1 A' \ldots d'N'$.

666. Quand une courbe continue tracée sur une surface gauche passe à un sommet, ce point appartenant au contour apparent de la surface par rapport à un plan quelconque, la projection de la courbe y est tangente à la projection de la génératrice ou possède un rebroussement; la courbe elle-même a donc un rebroussement dans l'espace lorsqu'elle n'est pas tangente à la génératrice.

Nous avons limité le conoïde de la *fig.* 299 au plan vertical $N_1 d$ qui passe au sommet inférieur. D'après ce que nous venons de dire, la trace de la surface a un rebroussement en ce point; la tangente au rebroussement est l'intersection du plan sécant $N_1 d$ avec le plan déterminé par la génératrice (EN_1, $E'_1 N'_1$) et par la directrice ($N_1 N$, $N'_1 N'$). Nous avons obtenu le point l' de cette ligne en prenant pour plan horizontal de construction celui qui contient le point (L, L').

Un même plan est tangent le long de la génératrice (EN_1, $E'_1 N'_1$) depuis le point situé à l'infini jusqu'au sommet (N_1, N'_1) qui est le point central; là le plan tangent tourne subitement jusqu'à la position déterminée par la directrice rectiligne. Au delà, le plan revient de la même manière à sa première position en achevant une rotation de 180 degrés. Si l'on parvient au point (N_1, N'_1) en suivant sur la surface une direction non tangente à la génératrice, la position du plan tangent se modifiera d'une manière graduelle.

Par des considérations analogues à celles que nous avons présentées à l'article **442**, nous appellerons *plan de rebroussement* le plan qui contient les tangentes aux rebroussements des sections qui passent à un sommet [1].

Un sommet est un point de rebroussement isolé. On trouve des points de même nature sur des surfaces de tout genre quand deux génératrices consécutives se coupent ou quand une génératrice curviligne se trouve avoir subitement un rebroussement.

667. *Équation du conoïde oblique circonscrit à une conique. Génération de cette surface par des coniques.* — Il est facile d'obtenir une équation du conoïde, même en supposant que le cercle (AI, A'I') soit remplacé par une conique située d'une manière quelconque par rapport au plan directeur. Nous nous servirons de la *fig.* 296 en ne faisant aucune hypothèse sur l'angle des plans de projection qui sont le plan directeur et celui de la conique directrice.

---

[1] L'expression de *plan de rebroussement* est due à M. Bour; mais, comme il l'indique, c'est nous qui lui avons signalé l'existence d'un plan contenant les tangentes aux rebroussements des différentes sections et l'analogie qui résulte de cette circonstance entre un sommet d'une surface gauche et un point de l'arête de rebroussement d'une développable.

Nous plaçons l'origine à la trace F′ de la directrice rectiligne (qp, $q'p'$). Nous prenons pour axe des abscisses l'horizontale F′x située dans le plan de la conique, pour axe des z la droite F′z parallèle au diamètre Q′P′ qui dans la conique est conjugué aux cordes horizontales, et enfin pour axe des y la droite (Fy, F′x), intersection du plan horizontal passant par l'origine avec le plan qui contient la directrice rectiligne et l'axe des z.

Nous pouvons représenter les directrices par les équations

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = nz, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{(x-x_1)^2}{a^2} + \dfrac{(z-z_1)^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

x_1 et z_1 sont les coordonnées du centre de la conique, a et c les moitiés de ses diamètres parallèles aux axes.

On obtient pour la projection horizontale de l'une des deux génératrices qui sont à la hauteur z l'équation

$$y - nz = \frac{-nz}{x_1 + a\sqrt{1 - \dfrac{(z-z_1)^2}{c^2}}}\,x.$$

Si l'on regarde le radical comme affecté du double signe, cette équation représentera les deux génératrices qui sont à une hauteur quelconque z, et par suite le conoïde lui-même. En la mettant sous la forme d'un polynôme entier, on obtient

$$a^2(y-nz)^2\left[c^2 - (z-z_1)^2\right] - c^2\left[yx_1 + nz(x-x_1)\right]^2 = 0.$$

Considérons maintenant un plan contenant l'axe des abscisses ; nous pouvons le représenter par l'équation

$$y = \alpha z.$$

L'équation de la projection verticale de l'intersection du conoïde par ce plan se divise en deux :

$$z^2 = 0, \quad a^2(\alpha - n)^2\left[c^2 - (z-z_1)^2\right] - c^2\left[\alpha x_1 + n(x-x_1)\right]^2 = 0.$$

La seconde est du deuxième degré, et par conséquent tout plan passant par l'axe des abscisses coupe la surface suivant une conique. Le conoïde admet ainsi un mode de génération par des lignes du second ordre ; l'ellipse directrice P′Q′ et le segment utile de la directrice rectiligne appartiennent à la série de ces courbes.

La première des deux équations que nous avons obtenues représente deux fois la droite F′x, qui cependant paraît être étrangère à la surface. Pour expliquer ce résultat, nous remarquerons que, si le point F′ se trouvait placé entre les horizontales P′p' et Q′q', la droite F′x rencontrerait deux fois l'ellipse directrice et serait une génératrice double, intersection de deux nappes de la surface; tout plan contenant cette droite aurait un point de contact avec chaque nappe et couperait le conoïde suivant une conique qui passerait à ces points. La droite $F'x$ ne dépend en aucune manière de la position que la conique directrice occupe dans son plan; elle est donc encore une génératrice double quand elle ne rencontre pas cette courbe en des points réels, mais elle est alors éloignée des autres génératrices, de sorte qu'elle fournit un point isolé à toute section de la surface par un plan qui ne la contient pas et qui ne passe pas par la directrice rectiligne.

Par des motifs analogues, la verticale du point O est une génératrice isolée sur le cylindroïde de la *fig.* 298. Cette circonstance montre pourquoi tout plan passant par cette ligne coupe suivant une conique la surface proprement dite, bien qu'elle soit du quatrième ordre (art. **650**).

Une génératrice simple n'est jamais isolée, parce que son point unique de rencontre avec une directrice curviligne ne peut pas devenir imaginaire. Il y a une grande analogie entre une génératrice isolée et les segments parasites d'une directrice (¹).

668. Nous avons représenté sur la *fig.* 299 une des sections elliptiques du conoïde; pour cela, nous avons pris un second plan vertical de projection perpendiculaire au premier, et nous y avons placé la projection $N''_1 N''$ de la directrice rectiligne. Tout plan perpendiculaire à ce plan vertical et dont la trace passe par le point de rencontre des droites $N''_1 N''$ et $V\lambda$ coupe la surface suivant une conique. Pour avoir la trace $\varphi''_1\varphi''$ d'un tel plan, il suffit de diviser la ligne de terre $N''_1 V$ et sa parallèle $N''\lambda$ en parties proportionnelles. Nous avons établi sur de petites longueurs les nouvelles projections verticales des génératrices, et, ramenant sur le plan horizontal les points de rencontre de ces droites avec $\varphi''_1\varphi''$, nous avons obtenu des points de la projection horizontale de l'ellipse d'intersection. Nous avons ensuite construit la projection verticale de cette courbe.

Les tangentes de l'ellipse sont horizontales aux points (φ, φ') et (φ_1, φ'_1), où elle rencontre les génératrices supérieure et inférieure; la droite $(\varphi\varphi_1, \varphi'\varphi'_1)$ est donc le diamètre conjugué aux cordes horizontales, et, comme elle est partagée en parties égales par le plan horizontal OJ', on voit que le diamètre qui lui est conjugué a pour projections $\psi'\chi'$ et $\psi\chi$.

Les diamètres qui sont conjugués aux cordes horizontales des sections du second ordre faites dans le conoïde forment un paraboloïde, car ils rencontrent

(¹) On peut démontrer très-facilement qu'un conoïde droit circonscrit à une conique Δ située dans un plan perpendiculaire au plan directeur, est coupé suivant une conique par tout plan parallèle à celui de Δ, et, en faisant une déformation homologique dans des conditions convenables, on obtient le théorème général relatif aux sections du second ordre du conoïde oblique. On peut même l'établir directement pour cette dernière surface, mais ces modes de démonstration ne font pas suffisamment ressortir la nature de la droite que nous avons prise pour axe des abscisses.

trois droites horizontales : les génératrices (EN_1, $E'_1N'_1$), (EN, $E'N'$) et la commune intersection des plans des coniques.

Conoïde droit.

669. On appelle *conoïde droit* le conoïde qui a une directrice rectiligne perpendiculaire à son plan directeur.

Sur la *fig.* 290, le plan horizontal est pris pour plan directeur, et la surface est donnée par sa trace verticale A et par le point d, projection horizontale de sa directrice rectiligne que l'on appelle quelquefois son *axe*.

En menant à la directrice A des tangentes verticales, on détermine les traces b' et c' des arêtes. Ces droites forment le contour apparent de la surface par rapport au plan horizontal.

L'axe d rencontre à angle droit toutes les génératrices et est par conséquent la ligne de striction de la surface. Le point central d'une arête est donc à distance finie; son paramètre est infini (art. **656**).

670. On obtient facilement l'intersection d'une surface réglée avec un cône en faisant passer un plan auxiliaire par chaque génératrice considérée et par le sommet du cône; mais souvent les intersections des surfaces réglées entre elles et avec les surfaces de révolution ne peuvent être déterminées qu'à l'aide de sections planes auxiliaires construites par points. Toutefois, lorsqu'il s'agit de deux conoïdes ayant un même plan directeur, ou d'un conoïde et d'une surface de révolution placés de manière que l'axe de celle-ci soit perpendiculaire au plan directeur de celui-là, en coupant les deux surfaces par des plans parallèles au plan directeur, on obtient des droites ou des cercles faciles à déterminer.

671. *Conoïde de la voûte d'arêtes en tour ronde.* — Pour présenter un exemple de cette construction, nous allons déterminer l'intersection d'un conoïde droit avec un tore elliptique de même axe.

Nous prenons pour plan horizontal de projection celui du cercle décrit par le centre de l'ellipse méridienne (*fig.* 301). L'axe commun des surfaces s'y projette en un point O. Nous traçons sur un plan méridien OX_1, rabattu sur le plan horizontal, la moitié supérieure $Pv'Q$ de l'ellipse qui engendre le tore.

Le conoïde a pour directrice curviligne la ligne dans laquelle se transforme l'ellipse $A'V'B'$ lorsque l'on enroule son plan sur le cylindre vertical dont la trace horizontale est le cercle décrit par le centre de la méridienne. L'axe vertical $V''V'$ reste droit; l'axe horizontal devient l'arc ab : il faut concevoir que cet axe est d'abord transporté sur la tangente AB, puis courbé sur le cercle, de manière que chacun de ses points décrive une développante. Les axes verticaux $V''V'$ et vv' des ellipses sont égaux.

Les plans sécants auxiliaires sont horizontaux. Celui qui passe par le point R′ de la méridienne PQ coupe le tore suivant deux cercles décrits du point O comme centre, avec les rayons OR et OS. Si l'on détermine sur l'ellipse A′B′ les points C′ et D′ qui sont à la même hauteur que R′ et S′, et que l'on prenne les arcs V*c* et V*d* égaux aux abscisses $V''C_1$ et $V''D_1$, les points *c* et *d* seront les projections des points où la directrice du conoïde est rencontrée par le plan sécant considéré, et, par suite, les droites suivant lesquelles cette surface est coupée se trouveront projetées sur O*c* et O*d*. Les sections circulaires précédemment obtenues rencontrent ces lignes en quatre points M, N, I et J qui appartiennent à la projection de l'intersection.

Les axes verticaux des deux ellipses étant égaux, les points V′ et *v*′ sont dans un plan horizontal qui touche le conoïde le long de la génératrice UVO et le tore le long du cercle *v*V. Le point de rencontre V de ces lignes appartient aux deux arcs EF et GH qui composent la projection de l'intersection [1].

Le plan horizontal est un plan principal pour les deux surfaces, et par suite chaque point, tel que M, est la projection de deux points de l'intersection situés l'un au-dessus de lui, l'autre au-dessous, et à égales distances.

Le conoïde prolongé au delà de l'axe O rencontre une seconde fois le tore, suivant une autre courbe symétrique de la première, et dont on obtiendrait la projection en considérant les intersections des différents cercles avec les prolongements des droites sur lesquelles se projettent les génératrices du conoïde.

672. La tangente de la courbe en un point quelconque M est l'intersection des plans tangents au tore et au conoïde en ce point. La trace du premier de ces plans est la droite *rt* perpendiculaire à OM, et passant par le point *r* ramené par un arc de cercle de la trace *r*′ de la tangente R′*r*′ à la méridienne. Pour construire le plan tangent du conoïde, nous remplaçons d'abord la directrice curviligne de cette surface par sa tangente au point projeté horizontalement en *d*, en conservant d'ailleurs la directrice rectiligne qui est projetée sur le point O et le plan horizontal comme plan directeur ; nous avons ainsi un paraboloïde de raccordement le long de la génératrice OM.

Quand on enroule sur le cylindre *a*V*v* la surface de l'ellipse A′B′, la sous-tangente D_1T conserve sa longueur et se place sur la tangente dT_1 du cercle : le point T_1 est donc la trace horizontale de la tangente à la directrice curviligne; et, comme le point O est la trace horizontale de la directrice rectiligne, on voit que la droite OT_1 est la génératrice du paraboloïde contenue dans le plan horizontal. La droite Mt_1 parallèle à dT_1 est la trace d'un plan vertical qui, étant parallèle aux deux directrices du paraboloïde, le coupe suivant une génératrice du second système. Cette droite qui a sa trace en t_1 et la génératrice horizontale OM déter-

[1] Nous avons déjà remarqué aux articles 200 et 236 que la courbe de section de deux surfaces tangentes l'une à l'autre avait un point double au point de contact.

minent le plan tangent dont la trace est, par conséquent, la droite $t_1 t$ parallèle à OM. La tangente de la courbe au point M passe par le point t, intersection de $t_1 t$ et de rt.

673. La projection de l'intersection s'arrête aux points E, F, G et H; au delà s'étendent des parties parasites que nous pourrons déterminer en cherchant la loi de génération de la courbe. Les axes verticaux des ellipses A′B′ et PQ étant égaux, les abscisses des points de ces courbes qui ont des ordonnées égales sont proportionnelles aux axes horizontaux. Nous pourrons donc écrire

$$\frac{V''B'}{cQ} = \frac{V''D_1}{cR}.$$

Mais on a évidemment

$$V''D_1 = \widehat{Vd} = \overline{OV} \times \widehat{VOM}, \quad cR = dM = OM - OV.$$

Portant ces valeurs dans l'équation ci-dessus et résolvant par rapport à OM, on obtient

$$OM = OV \frac{cQ}{V''B'}\left(\frac{V''B'}{cQ} + \widehat{VOM}\right).$$

Si nous traçons par l'origine O une droite OL telle que l'angle LOV soit égal à $\frac{V''B'}{cQ}$, et si nous posons

$$OM = \rho, \quad OV\frac{cQ}{V''B'} = R, \quad \widehat{LOM} = \omega,$$

l'équation deviendra

$$\rho = R\omega.$$

Si l'on prend le point O pour origine et la droite OL pour axe, ρ et ω seront le rayon vecteur et l'azimut du point considéré M; comme, d'ailleurs, la longueur R est constante, l'équation montre que la courbe à laquelle appartient l'arc EF est une spirale d'Archimède. L'axe OL tangent au sommet O fait avec la droite OV un angle qui est exprimé en degrés par

$$\frac{V''B'}{cQ} \times \frac{180^\circ}{\pi}.$$

L'arc HG appartient à une spirale qui a le même paramètre R, et dont la tangente au sommet fait avec OV et de l'autre côté de cette droite un angle L_1OV égal à LOV. Quand la valeur du rapport de V″B′ à cQ est $\frac{1}{2}\pi$, les deux parties HG et EF de la projection sont des arcs d'une même spirale.

Le tore étant donné, on peut déterminer le conoïde aussi bien par l'arc de spirale EF, projection de l'intersection, que par l'ellipse A′B′, qui doit être enroulée sur un cylindre. Une spirale d'Archimède est facile à tracer, et les constructions ne présentent aucune difficulté.

674. On peut dégager la construction de la tangente des considérations relatives aux surfaces, de manière à avoir un tracé applicable aux parties parasites de la projection de la courbe d'intersection.

On a dans le triangle rectangle rMt

$$\operatorname{tang} \widehat{rMt} = \frac{rt}{Mr} = \frac{\frac{OM}{Od}\, dT_1}{Rr'} = \frac{OM \times D_1T}{OV \times Rr'}.$$

Sur les ellipses $A'B'$ et PQ, les longueurs horizontales homologues telles que D_1T et Rr' sont proportionnelles aux demi-axes $V''B'$ et vQ. D'après cela, l'égalité que nous avons trouvée devient

$$\operatorname{tang} \widehat{rMt} = \frac{OM}{OV} \times \frac{V''B'}{vQ} = \frac{\rho}{R}.$$

Si nous élevons en M et en O des droites MK et OK respectivement perpendiculaires à Mt et à OM, la longueur OK interceptée sur la seconde de ces lignes est appelée sous-normale, et il est facile de voir, d'après l'équation précédente, que sa longueur est égale à R; par conséquent, *dans la spirale d'Archimède, la sous-normale est constante et égale au paramètre* (1)

Ce théorème permet de déterminer la tangente en un point quelconque de la courbe, et nous ferons remarquer que ce n'est pas seulement dans les parties parasites que la construction par les plans tangents se trouve en défaut, mais encore au point double V, où ces plans se confondent, et aux extrémités E, F, G et H, où la tangente est verticale (2).

---

(1) Il est facile de démontrer directement cette proposition. Soient O l'origine, M et M' deux points d'une spirale d'Archimède infiniment rapprochés l'un de l'autre, Mm un arc décrit du point O comme centre, MN et ON des droites respectivement perpendiculaires à MM' et à OM (*fig.* 301, *a*).

Le triangle MON est semblable au triangle infiniment petit MmM', que l'on peut considérer comme rectiligne; on a donc

$$Mm : mM' :: OM : ON.$$

En remplaçant l'arc Mm par sa valeur $OM \times \widehat{M'OM}$, on obtient

$$ON = \frac{mM'}{\widehat{M'OM}}.$$

La courbe étant une spirale d'Archimède, les accroissements du rayon vecteur sont proportionnels aux accroissements des azimuts; la sous-normale ON est donc constante. Sa longueur est le rayon d'un cercle dont la circonférence égale l'augmentation du rayon vecteur lorsque l'azimut varie de 360°.

(2) Nous avons déjà vu à l'article 236 que l'on ne peut pas déterminer par les plans tangents les tangentes au point double de l'intersection de deux surfaces qui se touchent. La méthode par une courbe

675. Si l'on coupe le conoïde par un cylindre de révolution ayant pour axe la verticale du point O, et si l'on développe le cylindre, la transformée de la section sera une ellipse, car les points de cette courbe et ceux de la directrice aplanie A'B' qui appartiennent à une même génératrice ont des ordonnées égales et des abscisses dans un rapport constant.

L'axe horizontal de cette ellipse est $\frac{r}{\mathrm{OV}}$ A'B', en désignant par r le rayon du cylindre. L'axe vertical ne varie pas, et par conséquent, suivant la valeur de r, le rapport des deux axes peut avoir toutes les grandeurs possibles.

Le conoïde que nous venons d'étudier est quelquefois appelé *conoïde de la voûte d'arêtes en tour ronde*, parce que Hachette, qui avait remarqué les propriétés géométriques de son intersection avec un tore, a proposé de l'employer pour la surface de cette voûte [1].

676. *Emploi d'un conoïde droit comme surface auxiliaire pour la solution d'un problème de Géométrie plane.* — La considération d'un conoïde droit permet de faire dépendre la construction des rayons de courbure de la courbe de l'ombre portée d'une surface de révolution, sur un plan perpendiculaire à son axe, de celle des tangentes à la courbe de l'ombre propre.

Si la sphère (O, O') (*fig.* 220) est éclairée par des rayons de front, la séparatrice sera le grand cercle projeté sur la droite A'G' perpendiculaire à la projection verticale R' de l'un des rayons, et l'on obtiendra facilement sur le plan horizontal l'ombre m de l'un quelconque (M, M') de ses points.

Nous savons que les normales de la courbe d'ombre portée sont les ombres des horizontales qui joignent les points de la séparatrice avec l'axe (O, O'I) (art. **550**). Le lieu général de ces lignes forme un conoïde droit. La courbe uu_1, ligne de l'ombre portée par cette surface gauche sur le plan horizontal, est l'enveloppe des ombres de ses génératrices, et par suite la développée de l'ombre ab de la surface de révolution. Le point n, où l'ombre im du rayon (OM, IM') touche cette enveloppe, est donc le centre de courbure de amb pour le point m, et la trace du rayon qui touche le conoïde en un point de la génératrice (OM, IM').

---

d'erreur que nous avons exposée à cet article est souvent commode; quant à celle dont nous venons de donner une application, et qui consiste à rechercher la loi du tracé des tangentes de la courbe considérée en elle-même et indépendamment de ses relations avec les surfaces, elle présente généralement des difficultés. Nous verrons plus loin (art. 866) une troisième méthode pour l'explication de laquelle les droites Uu et uV ont été tracées sur la *fig.* 301.

La théorie exposée à l'article 673 montre que la projection de l'intersection ne change pas quand les longueurs eQ et V''B' augmentent dans un même rapport. On peut donc agrandir les surfaces de manière que les points E, F, G, H ne soient plus les extrémités des arcs utiles des spirales. Cette considération conduit, pour la tangente en ces points, à une construction que nous laissons au lecteur le soin de développer.

[1] *Voir* le journal *l'Architecte*, février 1833.

Le plan directeur du conoïde est horizontal; les deux directrices sont l'axe (O, O'I) et la séparatrice que nous savons construire, quelle que soit la forme de la méridienne. Si nous connaissons la tangente de la séparatrice au point (M, M'), nous pourrons remplacer le conoïde par un paraboloïde de raccordement, et nous obtiendrons ensuite par une construction facile le point de contact N' d'un plan passant par la génératrice N'M' et parallèle aux rayons, et l'ombre n de ce point.

Dans le cas actuel, la séparatrice étant un cercle perpendiculaire au plan vertical, la détermination de la tangente ne présente pas de difficulté. Sa projection verticale est L'M'G', et l'on obtient sa projection horizontale GM en déterminant par une tangente M''G' le point G', où elle rencontre le diamètre (OG, O'G'). Pour obtenir la tangente, on peut supposer que la séparatrice tourne autour de ce diamètre jusqu'à ce qu'elle se trouve dans un plan parallèle au plan vertical; le point (M, M') se place alors en M'', et la tangente cherchée est M''G'.

La trace LO du paraboloïde rencontre en V la trace *mi* du plan d'ombre de la génératrice considérée; la génératrice du second système qui est contenue dans ce plan a donc sa trace en V, et sa projection verticale passe par le point V' et par le point de concours O' des projections verticales des génératrices de ce système; la droite V'O' coupe la génératrice $M'M'_1$ du conoïde au point N', qui a pour ombre le point cherché n (1).

La construction est applicable au cas où la surface de révolution serait éclairée par des rayons divergents.

Nouvelles observations sur les sommets et les arêtes.

677. Nous avons trouvé des arêtes sur les principales surfaces étudiées dans ce Chapitre; mais elles se sont présentées avec des circonstances différentes, que nous pouvons résumer comme il suit :

1° Cylindroïde : point central à l'infini, — paramètre fini;

2° Conoïde oblique : point central à l'infini, — paramètre infini;

3° Conoïde droit : point central à distance finie, — paramètre infini.

Un examen attentif va nous faire comprendre cette diversité.

Lorsque le point de contact d'un plan qui contient une génératrice parcourt la longueur indéfinie de cette droite, le plan tourne de 180° (art. **617**); si la génératrice passe à un sommet, l'évolution entière se fait quand le contact est à ce point (art. **666**), et il en est de même si, le sommet s'éloignant à l'infini, la génératrice devient une arête.

---

(1) Cette construction est due à M. Dunesme (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1857, 2e semestre).

Dans la formule (1) de l'article **622**,

$$\tang \theta = \frac{x}{k},$$

la lettre x représente l'abscisse du point considéré mesurée à partir du point central pris pour origine. Quand le point central est à l'infini, tous les points à distance finie ont des abscisses infinies. Alors, si le paramètre est fini, θ atteint $90°$ et le plan tangent le long de l'arête est perpendiculaire au plan central. C'est en effet ce qui arrive pour le cylindroïde : le plan tangent aux différents points d'une arête de cette surface est parallèle au plan directeur, et le plan central est perpendiculaire à ce plan (art. **642**). Si l'on donne à $\tang \theta$ une valeur finie quelconque, on trouve une abscisse finie; l'évolution entière se fait donc à une distance finie du point central, c'est-à-dire à l'infini.

Dans le conoïde oblique, le point central d'une arête est encore à l'infini, et par suite les abscisses des points à distance finie sont infinies; mais l'angle du plan tangent le long de l'arête avec le plan central n'est pas de $90°$, et alors la formule exige que le paramètre soit infini. Si l'on donne à θ diverses valeurs, on trouve toujours une abscisse infinie; ainsi, bien que l'évolution se fasse encore entièrement à l'infini, on trouve une disposition autre que la précédente. On peut rendre la différence manifeste en traçant des courbes par les points des génératrices où l'obliquité du plan tangent a des valeurs déterminées. Ces lignes interceptent sur les génératrices des segments proportionnels; elles sont asymptotes des arêtes, concourent aux sommets et sont tangentes en ces points à la génératrice. Le point central d'une arête se trouvant à l'infini et son paramètre étant infini, les courbes dont nous venons de parler s'écartent de plus en plus lorsque la génératrice approche d'une arête, et cette augmentation des segments interceptés sur la génératrice n'a d'autre limite que l'infini.

Enfin, pour un conoïde droit, le point central est à distance finie, et les divers points de la génératrice ont des abscisses finies; comme d'ailleurs le paramètre est infini, θ est constamment nul, et le plan central est tangent le long de l'arête. Mais l'angle θ devient indéterminé pour une valeur infinie de l'abscisse, ce qui devait être, puisque l'évolution se fait à une distance infinie du point central.

Les différences que nous avons signalées pour les arêtes sont donc les conséquences de la loi exprimée par l'équation ci-dessus.

678. Nous avons vu (art. **635**) que, quand les directrices n'ont ni inflexion ni rebroussement, le point d'une arête situé à l'infini est l'extrémité d'une ligne double qui peut se trouver tout entière à l'infini ou n'y avoir que ce point. La première disposition s'est seule présentée sur les surfaces que nous avons étudiées; nous allons donner un exemple de la seconde.

Considérons le conoïde général qui a pour plan directeur le plan horizontal, et pour directrices l'ellipse (bc, $b'c'$) (*fig.* 295) et l'hyperbole H située dans le plan vertical de projection et placée de manière à avoir pour l'une de ses asymptotes la projection xy d'une tangente horizontale de l'ellipse. L'hyperbole a un arc utile et double qui s'étend du point I au point situé à l'infini sur la génératrice (ag, xy) : cette droite est évidemment une arête.

Si l'hyperbole H était remplacée par une courbe ayant les deux bras d'une branche infinie situés au-dessous de leur asymptote xy, la droite (ag, xy) serait encore une arête; mais son point à l'infini ne serait plus l'extrémité d'un arc utile, ce qui tient à ce qu'une directrice aurait une inflexion (art. **185**), et que les observations que nous avons présentées à l'article **657** ne seraient plus applicables.

679. Si l'on considère les surfaces développables comme une variété des surfaces gauches, l'arête de rebroussement sera une ligne de sommets, ainsi que nous l'avons déjà remarqué (art. **654**). Chacun de ses points est en effet sur deux génératrices consécutives; la surface y a un plan de rebroussement et une infinité de plans que l'on peut considérer à certains égards comme tangents; enfin chaque ligne d'ombre complète se compose d'un certain nombre de génératrices et de l'arête de rebroussement.

Dans les développables, les extrémités des parties utiles des directrices se trouvent aux points où trois génératrices se coupent, c'est-à-dire aux points de rebroussement de l'arête, qui sont les points auxquels, pour ces surfaces, nous avons réservé le nom de *sommets*.

On voit que quelques propriétés des sommets des surfaces gauches appartiennent à tous les points de l'arête des développables, et d'autres seulement aux points de rebroussement de cette ligne. Nous ajouterons que la section faite dans une développable par un plan passant à un sommet a un rayon de courbure nul sans rebroussement (art. **491**), disposition que l'on ne trouve pas dans les sections des surfaces gauches.

680. Quand l'une des directrices d'une surface gauche a des inflexions, la surface peut avoir des sommets étrangers aux lignes doubles, et n'ayant d'autre propriété que d'appartenir à deux génératrices consécutives et à toutes les lignes d'ombre.

Ainsi, si un conoïde oblique a pour plan directeur le plan horizontal, et pour directrices la droite (B, B') et la courbe A qui a un contact du second ordre avec la ligne de terre (*fig.* 291), la trace b de la directrice rectiligne sera sur deux génératrices consécutives; mais cette droite n'aura ni segment double ni segment parasite.

CHAPITRE IV.

HYPERBOLOIDE.

681. On appelle *hyperboloïde à une nappe* la surface engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant sur trois directrices rectilignes. Cette surface se réduit au système de deux plans Q et Q_1 (*fig.* 210) quand deux directrices AB et A_1B_1 sont dans un même plan, la troisième A_2B_2 étant quelconque. Si cette dernière directrice était dans le plan Q déterminé par les deux premières, le second plan Q_1 se confondrait avec Q.

Lorsque les trois directrices ont un point commun à distance finie ou infinie, toute droite passant par ce point satisfait aux conditions imposées aux génératrices, et par suite la surface n'est pas déterminée.

Nous supposerons toujours que les directrices n'ont aucune des positions relatives exceptionnelles qui viennent d'être énumérées, et alors la surface, n'étant pas un système de plans et ayant des directrices rectilignes, sera gauche (art. **464**). Nous la désignerons simplement sous le nom d'*hyperboloïde*.

Nous supposerons encore généralement que les trois directrices ne sont pas parallèles à un même plan. Les propriétés que nous établirons sans introduire cette nouvelle hypothèse appartiennent évidemment au paraboloïde (art. **610**).

682. On obtient la génératrice qui passe par un point choisi arbitrairement sur une directrice en prenant l'intersection des plans déterminés par ce point et respectivement par les deux autres directrices. On opère d'une manière analogue quand on veut avoir la génératrice qui rencontre une directrice à l'infini.

Les trois directrices étant représentées en projection par les droites A, A′ et A″ (*fig.* 302), en faisant passer par chacune de ces lignes deux plans respectivement parallèles aux deux autres, nous obtenons six plans distincts, parallèles deux à deux, et dont les intersections forment les arêtes d'un parallélépipède CDEFJHGI.

L'arête JF ou B rencontre la directrice A′ en un point J, parce qu'elle est dans le plan DEF mené par A′ parallèlement à A; elle coupe la directrice A″ en un point F, parce qu'elle est dans le plan JHG mené par A″ parallèlement à A; elle a enfin un point commun avec la directrice A à l'infini, parce qu'elle est l'intersection de deux plans parallèles à cette droite : elle est donc une génératrice de la surface. Les arêtes B′ et B″ opposées à A′ et A″ sont également des génératrices [1].

---

[1] Nous appelons les droites A, A′, A″, B, B′ et B″ des *arêtes* quand nous les considérons sur le paral-

Les droites B, B′ et B″, prises pour directrices, déterminent un second hyperboloïde, auquel les arêtes A, A′ et A″ appartiennent comme génératrices. Ces deux surfaces ont ainsi six droites communes.

683. On sait qu'un parallélépipède a un centre où les diagonales se croisent en leur milieu : nous allons voir que les génératrices des deux hyperboloïdes ont de remarquables relations de symétrie par rapport au point O, centre du parallélépipède DG.

Par un point a de A, nous menons une droite qui rencontre les directrices A′ et A″. Pour tracer cette ligne, nous remarquons qu'elle détermine avec A″ un plan dont les traces Fa' et Ga sur les plans FJD et GIC doivent être parallèles; par conséquent, en menant du point F une parallèle à Ga, nous déterminerons sur la seconde directrice le point a' où passe la génératrice cherchée B‴.

Nous prenons les distances Fb, Ib' et Cb'' respectivement égales à Ca, Ja' et Fa'', et nous joignons par des droites les points b et b'' au point b', et les points a, a', a'', b, b' et b'' au centre O, point de concours et milieu des quatre diagonales du parallélépipède, et notamment de CF et de IJ.

Les triangles COa et FOb sont évidemment égaux et dans un même plan ; par suite, les lignes Ob et Oa sont de même grandeur et en prolongement l'une de l'autre. On trouve de même que les segments Ob' et Ob'' sont respectivement égaux à Oa' et Oa'' et qu'ils appartiennent aux mêmes droites. Il résulte de là que les triangles bOb' et b'Ob'' sont dans un même plan et respectivement égaux à aOa' et a'Oa'', et enfin que les points b, b' et b'' sont sur une droite A‴ parallèle à B‴. Cette ligne A‴, rencontrant les trois directrices du second hyperboloïde, en est une génératrice.

A toute génératrice B‴ de la première surface correspond ainsi sur la seconde une génératrice parallèle A‴, et le plan déterminé par ces droites contient le point O. Il suit de là qu'une droite allant de la première surface à la seconde en passant par le point O est divisée à ce point en deux parties égales, et par conséquent que le système des deux hyperboloïdes a un *centre* qui est celui du parallélépipède.

684. Les triangles aIG, FJa' sont semblables et donnent

$$Ia \times Ja' = IG \times JF.$$

En remarquant que Ia est égal à Jb, et désignant par 4C le second membre, qui est indépendant de la position spéciale des génératrices considérées B‴ et A‴, on obtient

$$Jb \times Ja' = 4C.$$

---

lélépipède. Cette expression ne peut donner lieu à aucune équivoque, car l'hyperboloïde n'a pas de génératrices qui soient des arêtes, comme nous le démontrerons (art. 689).

685. Les génératrices des hyperboloïdes étant parallèles deux à deux, ces surfaces ont un même cône directeur dont nous pouvons placer le sommet au centre O. La génératrice OK, parallèle à B''' et à A''', est dans le plan de ces droites et rencontre le plan DEF au point m, milieu de $a'b$. Si nous rapportons ce point aux droites A' et B prises pour axes coordonnés, nous aurons

$$x = mn = \frac{1}{2}\mathrm{J}a', \quad y = \mathrm{J}n = \frac{1}{2}\mathrm{J}b,$$

d'où, en ayant égard à la seconde équation de l'article précédent,

$$xy = \mathrm{C}. \tag{1}$$

Cette équation, qui représente la trace du cône directeur commun sur le plan DEF, est celle d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes. Le cône directeur est donc du second ordre; ses intersections avec les autres faces du parallélépipède sont également des hyperboles qui ont pour asymptotes les génératrices des deux surfaces.

686. Par un point J_1, pris arbitrairement sur la droite indéfinie IOJ, nous menons un plan P parallèle à DJF : la section faite dans le cône est une hyperbole semblable à la précédente, et qui a pour asymptotes les droites $\mathrm{J}_1\mathrm{X}$ et $\mathrm{J}_1\mathrm{Y}$, respectivement parallèles à A' et à B.

La génératrice OK rencontre le plan P en un point m_1 situé sur la droite $\mathrm{J}_1 m_1$, parallèle à $\mathrm{J}m$.

En appelant x_1 et y_1 les coordonnées du point m_1 par rapport aux asymptetes prises pour axes, nous avons

$$x_1 = m_1 n_1, \quad y_1 = \mathrm{J}_1 n_1,$$

$$x_1 y_1 = \mathrm{C}_1, \tag{2}$$

C_1 étant une nouvelle constante.

Mais, les points m et m_1 étant homologues sur les deux hyperboles, nous pouvons écrire

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}. \tag{3}$$

On déduit des équations (1), (2) et (3)

$$\left\{\begin{array}{l}(x_1 + x)(y_1 - y) = \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}, \\ (x_1 - x)(y_1 + y) = \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}.\end{array}\right. \tag{4}$$

687. Pour interpréter ces résultats, nous traçons par le point m_1 une droite parallèle à $a'b$: les points a'_1 et b_1, où elle rencontre les génératrices A‴ et B‴, sont les traces de ces droites sur le plan P. Nous menons par ces points des parallèles aux axes A′ et B, et nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} qa'_1 = n_1 m_1 + ta'_1, \\ J_1 q = J_1 n_1 - tm_1, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} rb_1 = n_1 m_1 - sm_1, \\ J_1 r = J_1 n_1 + sb_1. \end{array}\right.$$

Les coordonnées nm et Jn du point m sont égales aux longueurs sm_1 et tm_1, et par suite on a

$$x = ta'_1 = sm_1, \quad y = tm_1 = sb_1.$$

Les équations précédentes deviennent

$$\left\{\begin{array}{l} qa'_1 = x_1 + x, \\ J_1 q = y_1 - y, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} rb_1 = x_1 - x, \\ J_1 r = y_1 + y. \end{array}\right.$$

Mais les longueurs qa'_1 et $J_1 q$ d'une part, rb_1 et $J_1 r$ de l'autre, sont les coordonnées des points a'_1 et b_1 ; les équations (4) signifient donc que tout plan parallèle à l'une des faces du parallélépipède coupe les deux hyperboloïdes suivant une même hyperbole, et par conséquent que les deux surfaces que nous considérons n'en forment qu'une seule, ayant deux systèmes de génératrices rectilignes et un centre O.

688. Pour établir d'une manière complète la seconde génération rectiligne de l'hyperboloïde, nous allons montrer que *tout point* a'_1 *d'une génératrice* B‴ *du premier système* (*fig.* 303) *appartient à une certaine génératrice* $p''pp'$ *du second.*

Nous faisons passer par le point a'_1 un plan P parallèle à la face DEFG du parallélépipède ; du point J_1 où la droite IJ perce ce plan, nous menons deux lignes JX et J_1Y respectivement parallèles à A′ et à A : elles sont les asymptotes de la section de l'hyperboloïde par le plan P. En les prenant pour axes, nous avons entre les coordonnées du point a'_1 la relation

$$J_1 g \times ga'_1 = C_1 - C.$$

Déterminons maintenant le point k où l'ordonnée ga'_1 perce le plan IGFE (¹), et traçons la droite kF jusqu'à sa rencontre p' avec B′ : la génératrice du second système menée par le point p' et la ligne indéfinie kg se rencontrent nécessairement, parce qu'elles sont dans le plan qui contient le point p' et la droite B ; l'ordonnée du point commun doit d'ailleurs être telle, que son produit par l'abscisse $J_1 g$ soit $(C_1 - C)$; cette ordonnée est donc ga'_1, et la génératrice menée par le point p' passe précisément au point donné a'_1.

(¹) Il suffit de tracer la droite IFd qui est dans le plan IEFG, puis la droite dk parallèle à J_1X.

689. *Deux génératrices d'un même système ne se rencontrent jamais*, car, si elles étaient dans un plan, les directrices seraient dans ce plan, ce qui est contraire à nos hypothèses (art. **681**).

Il résulte de ce théorème que *l'hyperboloïde n'a ni sommets ni arêtes.*

690. *Deux génératrices de systèmes différents se rencontrent toujours.*

Pour prouver cette proposition, nous considérons deux génératrices $aa'a''$ et $p'pp''$ de systèmes différents (*fig.* 303), et nous les projetons sur le plan CHGI par des droites parallèles à A'' : les projections aG et p'C se coupent en un point α'_1 que nous relevons en a'_1 sur $aa'a''$. Les génératrices du second système rencontrant toutes la droite B'', leurs projections sur le plan CHGI divergent du point C; la génératrice de ce système qui passe par le point a'_1 (art. **688**) se projette donc sur la droite $C\alpha'_1$; elle coupe la droite B' en p', et par suite elle n'est autre que $p'pp''$, ce qui démontre le théorème énoncé (¹).

691. *Trois génératrices quelconques d'un système peuvent être prises pour directrices de l'autre système*, puisqu'elles en rencontrent toutes les génératrices.

Une droite ne peut pas couper un hyperboloïde en plus de deux points, car, si elle avait trois points sur la surface, elle rencontrerait trois génératrices de l'un des systèmes; elle appartiendrait donc à l'autre système et serait tout entière sur la surface.

Cette proposition s'étend naturellement au paraboloïde.

Cône asymptote.

692. Par un point quelconque d'une génératrice B''' du premier système (*fig.* 302) passe une génératrice du second, et ces deux lignes déterminent le plan tangent de la surface en ce point. La génératrice du second système qui passe par le point de B''' situé à l'infini est A''', et le plan de ces deux droites est tangent à l'infini; nous avons vu qu'il contient le centre O; l'enveloppe des plans passant par les différentes génératrices et tangents à l'infini, c'est-à-dire la développable

(¹) La *fig.* 303 peut servir à établir que les deux hyperboloïdes que nous considérons au commencement de ce paragraphe ne forment qu'une surface.

Il suffit de prouver que par un point quelconque a'_1 d'une génératrice $aa'a''$ on peut faire passer une droite appuyée sur B, B' et B''. Pour cela, projetons a'_1 en α'_1 sur aG, et traçons $C\alpha'_1$ jusqu'à sa rencontre p' avec B'; la droite $p'a'_1$ satisfait aux conditions : elle rencontre évidemment B'', et, pour prouver qu'elle coupe B, il suffit d'établir que les droites qui joignent les points α' et π d'une part, a et p' de l'autre, sont parallèles, ce qui est facile.

Ce raisonnement est très-simple, mais il ne dispense pas de démontrer que les sections du cône directeur et de la surface par un même plan sont des coniques concentriques.

M. J. Binet a le premier considéré dans l'hyperboloïde des parallélépipèdes formés par six plans tangents parallèles deux à deux (*Journal de l'École Polytechnique*, XVI[e] cahier).

asymptote de l'hyperboloïde, est donc un cône ayant son sommet au centre, et, comme cette surface est directrice (art. **659**), elle n'est autre que le cône directeur dans la position où nous l'avons considéré aux articles précédents.

En résumé, *l'hyperboloïde a un cône asymptote du second ordre dont le sommet est au centre de la surface et qui est directeur des deux systèmes de génératrices. Les plans passant par les couples de génératrices parallèles sont tangents à ce cône.* La droite $a'b$ (*fig.* 302) est, par suite, tangente au point m à l'hyperbole trace du cône sur le plan DJF, ce qui résulte d'ailleurs de ce que ce point est le milieu du segment compris entre les asymptotes.

693. D'après ce que nous avons vu à l'article **687**, si l'on coupe l'hyperboloïde et son cône directeur par un plan P parallèle à deux génératrices quelconques A' et B (*fig.* 302) de systèmes différents, les sections ont les mêmes asymptotes et sont par conséquent homothétiques et concentriques. Ce résultat, étant indépendant des asymptotes, subsiste quand ces droites disparaissent : nous voyons ainsi que *les sections faites dans l'hyperboloïde et dans son cône asymptote par un plan quelconque sont des coniques homothétiques et concentriques.*

Il suit de là que *les sections faites dans un hyperboloïde par des plans parallèles sont des coniques homothétiques et ayant leurs centres en ligne droite.*

Toutes les sections planes de l'hyperboloïde étant des coniques, cette surface est du second ordre.

Division homographique des génératrices.

694. Quand deux droites sont divisées en des points qui se correspondent un à un, et de telle manière que l'on obtienne un produit constant en multipliant l'un par l'autre les segments interceptés sur elle, entre deux points homologues quelconques et deux origines fixes, nous dirons avec M. Chasles ([1]) que ces droites sont divisées *homographiquement*, ou que leurs divisions sont *homographiques*.

Considérons deux droites A et A' situées dans un plan (*fig.* 304), et d'un point Q, pris arbitrairement sur ce plan, menons deux droites QJ et QI qui leur soient respectivement parallèles, et une sécante Qaa'; les triangles $Qa\mathrm{I}$, $a'\mathrm{QJ}$ sont semblables et donnent

$$\mathrm{I}a \times \mathrm{J}a' = \mathrm{QJ} \times \mathrm{QI}.$$

Le second membre étant indépendant de la position de la sécante, si cette ligne tourne autour du point Q, ses points de rencontre avec A et A' formeront sur ces droites des divisions homographiques.

([1]) *Traité de Géométrie supérieure*, p. 67. Les diverses propositions développées dans ce paragraphe sont dues à M. Chasles.

L'origine I est, sur la droite A, homologue du point de A' situé à l'infini, et l'origine J est sur la droite A', homologue du point de A situé à l'infini. Les deux points homologues *a* et *a'* sont réunis au point *u*.

On considère souvent des droites ainsi divisées transportées d'une manière quelconque dans le plan ou dans l'espace, ou réunies l'une sur l'autre de manière à ne former qu'une seule ligne ayant deux divisions distinctes.

695. *Quand deux droites sont divisées homographiquement, si on les place de telle manière qu'un même point u soit la réunion de deux points homologues, les droites passant par les autres points homologues convergeront vers un même point.*

Pour le prouver, nous remarquerons que, si I et J sont les origines des segments et C la valeur du produit constant, nous aurons

$$\mathrm{I}u \times \mathrm{J}u = \mathrm{C}.$$

Mais en menant par les points I et J des droites respectivement parallèles à A' et à A, et de leur point de rencontre une sécante Q*aa'*, nous déterminerons des segments entre lesquels existera la relation

$$\mathrm{I}a \times \mathrm{J}a' = \mathrm{I}u \times \mathrm{J}u,$$

d'où

$$\mathrm{I}a \times \mathrm{J}a' = \mathrm{C}.$$

Les points *a* et *a'*, situés sur une droite quelconque passant par le point Q, sont donc deux points homologues des divisions considérées, ce qui prouve le théorème énoncé.

696. Si l'on projette sur un plan, ou même sur deux plans différents, deux droites divisées homographiquement, tous les segments de chacune d'elles seront réduits dans un même rapport, et les divisions des projections seront homographiques.

697. Nous avons établi à l'article **684** que l'on obtient un produit constant en multipliant l'un par l'autre les segments interceptés sur deux génératrices A et A' d'un hyperboloïde (*fig.* 302), entre deux origines fixes I et J, et deux points *a* et *a'* situés sur une génératrice quelconque de l'autre système. Nous pouvons donc dire que *dans un hyperboloïde les génératrices de l'un des systèmes divisent homographiquement les génératrices de l'autre système.*

698. Réciproquement, *quand deux directrices rectilignes sont divisées homographiquement, les droites qui passent par les points homologues forment un hyperboloïde.*

Soient A et A' les directrices (*fig.* 302), I et J les origines fixes; nous menons par ces points deux droites B' et B respectivement parallèles à A' et à A, et nous portons sur ces lignes des longueurs IG et JF telles que leur rectangle soit égal à la constante de la division homographique (art. **695**), l'une des deux pouvant être prise arbitrairement : la droite A'' qui passe par les points F et G rencontrera une génératrice quelconque B'', car nous avons l'équation

$$\mathrm{I}a \times \mathrm{J}a' = \mathrm{IG} \times \mathrm{JF},$$

qui entraîne la similitude des triangles $\mathrm{I}a\mathrm{G}$ et $\mathrm{JF}a'$, et par suite le parallélisme des sécantes $a\mathrm{G}$ et $a'\mathrm{F}$; la surface a donc une troisième directrice rectiligne A'', ce qui démontre le théorème énoncé.

Il est nécessaire d'avoir égard aux signes et de préciser le sens dans lequel les segments doivent être considérés comme positifs, sur chaque ligne, à partir de l'origine. Sans cela, un point a (*fig.* 302) pourrait être joint indifféremment à l'un ou à l'autre de deux points situés sur la droite A', de part et d'autre, et à des distances égales de l'origine J. On aurait ainsi deux hyperboloïdes distincts.

Si la constante est positive, les segments dirigés de I vers C et de J vers D devront être de même signe. Suivant la notation de M. Chasles, que nous avons fait connaître (art. **512**), nous indiquerons le sens de chaque segment par l'ordre des deux lettres qui désignent ses extrémités. Ainsi la longueur négative $\mathrm{IC} - \mathrm{I}a$ sera représentée indifféremment par $a\mathrm{C}$ ou $-\mathrm{C}a$.

Quand deux droites sont divisées homographiquement, à chaque point de l'une ne correspond qu'un point de l'autre. Nous voyons ainsi d'une nouvelle manière que *l'hyperboloïde n'a ni sommets ni arêtes.*

699. Nous allons maintenant étudier les relations qui existent entre les segments interceptés par quatre génératrices mm', nn', pp' et qq' d'un système sur deux génératrices A et A' de l'autre système (*fig.* 305). Nous considérons ces dernières lignes comme des directrices, et nous supposons que l'hyperboloïde est déterminé par la condition que le produit des segments interceptés sur elle, à partir de deux points fixes I et J, soit égal à une constante donnée C.

Pour présenter une figure correcte, nous avons appuyé les tracés sur la projection d'un parallélépipède analogue à celui que nous avons considéré précédemment; les directrices A et A' et la droite nn', l'une des génératrices, en forment trois arêtes; les points fixes I et J occupent deux sommets opposés.

Nous avons immédiatement

$$\mathrm{I}m \times \mathrm{J}m' = \mathrm{C},\quad \mathrm{I}n \times \mathrm{J}n' = \mathrm{C},\quad \mathrm{I}p \times \mathrm{J}p' = \mathrm{C},\quad \mathrm{I}q \times \mathrm{J}q' = \mathrm{C}.$$

Nous déduisons de ces équations

$$\frac{\mathrm{I}m}{\mathrm{I}n} = \frac{\mathrm{J}n'}{\mathrm{J}m'},\quad \frac{\mathrm{I}m}{\mathrm{I}p} = \frac{\mathrm{J}p'}{\mathrm{J}m'},\quad \frac{\mathrm{I}q}{\mathrm{I}n} = \frac{\mathrm{J}n'}{\mathrm{J}q'},\quad \frac{\mathrm{I}q}{\mathrm{I}p} = \frac{\mathrm{J}p'}{\mathrm{J}q'},$$

et ensuite

$$\frac{mn}{\mathrm{I}m} = \frac{n'm'}{\mathrm{J}n'},\quad \frac{mp}{\mathrm{I}m} = \frac{p'm'}{\mathrm{J}p'},\quad \frac{nq}{\mathrm{I}q} = \frac{q'n'}{\mathrm{J}n'},\quad \frac{pq}{\mathrm{I}q} = \frac{q'p'}{\mathrm{J}p'}.$$

Divisant la première de ces équations par la seconde et la troisième par la quatrième, et remarquant qu'on peut changer le signe des deux termes d'une fraction, et par conséquent écrire $\frac{m'n'}{m'p'}$ au lieu de $\frac{n'm'}{p'm'}$, on obtient

$$\frac{mn}{mp}=\frac{m'n'}{m'p'}\times\frac{\mathrm{J}p'}{\mathrm{J}n'},\quad \frac{qn}{qp}=\frac{q'n'}{q'p'}\times\frac{\mathrm{J}p'}{\mathrm{J}n'}.$$

Enfin, divisant ces équations l'une par l'autre, nous avons la formule

$$\frac{mn}{mp}:\frac{qn}{qp}=\frac{m'n'}{m'p'}:\frac{q'n'}{q'p'},$$

dans laquelle il n'entre aucun segment mesuré à partir des origines I et J. Elle démontre que dans un hyperboloïde *les points dans lesquels quatre génératrices d'un système coupent une génératrice quelconque de l'autre système sont dans un rapport anharmonique constant* (¹).

700. On peut mettre l'avant-dernière équation sous la forme

$$\frac{qn}{qp}:\frac{q'n'}{q'p'}=\mathrm{K},$$

en posant

$$\frac{\mathrm{J}p'}{\mathrm{J}n'}=\mathrm{K}.$$

Si les génératrices nn' et pp' forment avec les directrices A et A' un quadrilatère gauche invariable, le rapport K sera constant, et, en le supposant connu, la première équation de cet article déterminera le lieu des positions de la génératrice mobile qq' lorsqu'elle glissera sur les directrices.

701. Les côtés nn' et pp' du quadrilatère peuvent être pris pour des directrices; alors, si $n'''p'''$ est une génératrice quelconque du même système que A et A', nous aurons

$$\frac{n'''n'}{n'''n}:\frac{p'''p'}{p'''p}=\mathrm{K}'.$$

Pour avoir la valeur de la constante K', nous remarquons que le point p'', où la seconde directrice pp' rencontre la génératrice FG parallèle à la première directrice nn', est le point fixe analogue à J sur la directrice A' considérée avec A. On a donc

$$\mathrm{K}'=\frac{p''p'}{p''p}.$$

(¹) On peut dire d'une manière plus générale que, *quand deux droites sont divisées homographiquement, le rapport anharmonique de quatre points de l'une est égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants de l'autre.*

Enfin, considérant la projection Gp de la génératrice et ayant égard aux proportionnalités qui existent sur le plan HGI, on obtient

$$\frac{p''p'}{p''p} = \frac{\mathrm{G}p'_1}{\mathrm{G}p} = \frac{\mathrm{H}p'_1}{\mathrm{H}n} = \frac{\mathrm{J}p'}{\mathrm{J}n'}.$$

Les deux constantes K et K′ sont donc égales.

Quand leur valeur est l'unité, toutes les génératrices d'un même système divisent les côtés opposés du quadrilatère en parties proportionnelles, et la surface est un paraboloïde (art. **610**).

702. Dans la division homographique, on prend quelquefois, pour origines des segments, des points b et c (*fig.* 304) autres que ceux qui correspondent respectivement aux points situés à l'infini. Alors l'équation que nous avons trouvée à l'article **695** devient

$$(1) \qquad (ba - b\mathrm{I})(ca' - c\mathrm{J}) = \mathrm{C}$$

ou

$$ba.ca' - c\mathrm{J}.ba - b\mathrm{I}.ca' + b\mathrm{I}.c\mathrm{J} - \mathrm{C} = 0,$$

que l'on peut écrire

$$(2) \qquad ba.ca' + \lambda.ba + \mu.ca' + \nu = 0,$$

en posant

$$(3) \qquad \lambda = -c\mathrm{J}, \quad \mu = -b\mathrm{I}, \quad \nu = b\mathrm{I}.c\mathrm{J} - \mathrm{C};$$

les quantités λ, μ et ν sont indépendantes de la position des points considérés a et a'.

Il résulte de l'équation (2) que, *quand deux droites sont divisées homographiquement, il existe entre les segments compris entre deux points homologues quelconques et deux points fixes pris arbitrairement sur ces droites une relation dans laquelle chacun des segments n'entre qu'au premier degré.*

703. Réciproquement, *deux droites sont divisées homographiquement quand il existe entre les segments compris entre deux points homologues quelconques et deux points fixes pris arbitrairement sur ces droites une relation dans laquelle chacun de ces segments n'entre qu'au premier degré,* car cette équation est nécessairement de la forme (2), et, en transportant les origines aux points I et J déterminés par les deux premières équations (3), on trouve l'équation (1), qui exprime la propriété par laquelle nous avons défini la division homographique.

Il résulte de ce qui précède que, *toutes les fois qu'en traitant une question régie par de simples équations algébriques on sera conduit à considérer deux séries de points en ligne droite qui se correspondent réciproquement un à un, on sera assuré* *qu'elles sont homographiques*, car l'équation qui les exprime devra être de la forme (2).

704. Nous avons vu (art. **694**) que chacun des points I et J des droites A et A' est homologue du point situé à l'infini sur l'autre droite. Si les points de ces deux lignes situés à l'infini sont homologues, c'est-à-dire si les origines I et J sont à l'infini, le point de concours Q sera également à l'infini, les droites passant par les points homologues seront parallèles et la division sera proportionnelle. *La division proportionnelle est* donc *un cas particulier de la division homographique*.

Il est facile de voir que l'équation aux segments se présente alors sous la forme

$$\lambda . ba + \mu . ca' + \nu = 0.$$

Plans principaux. Axes.

705. Actuellement nous allons étudier des surfaces qui ont une génération différente de celle par laquelle nous avons défini l'hyperboloïde (art. **681**), mais qui cependant, comme nous le reconnaîtrons, sont identiques soit avec une variété de cette surface, soit avec l'hyperboloïde général lui-même.

Considérons d'abord la surface gauche qui a pour directrices les trois cercles (AB, A'B'), (CD, C'D'), (EF, E'F') (*fig*. 306), situés dans des plans parallèles, et dont les centres sont sur une droite perpendiculaire à ces plans, que nous supposons horizontaux.

Les génératrices qui passent par le point (B, B') sont sur deux cônes dont ce point est le sommet, et qui ont respectivement pour directrices les cercles (CD, C'D') et (EF, E'F'). La trace du premier cône sur le plan horizontal E'F' est un cercle dont il est facile de déterminer le centre (ω, ω') et le rayon $\omega' d'$; ses intersections M et M_1 avec le cercle EF déterminent les génératrices (BNM, B'N'M'), (BN_1M_1, B'N'M'). Si ces droites tournent autour de l'axe, elles s'appuieront toujours sur les directrices, et l'on voit par la symétrie de la figure qu'elles décriront un même hyperboloïde de révolution (art. **198**). Le cercle de gorge sera décrit par les points (J, J') et (J_1, J'), qui sont les plus rapprochés de l'axe.

Nous avons tracé en trait plein le cercle de gorge et l'hyperbole méridienne qui forment respectivement le contour apparent de la surface sur les deux plans de projection.

Une tangente quelconque P_1P à la projection du cercle de gorge correspond à deux génératrices qui sont représentées sur le plan vertical par des droites P'Q'R' et $P'_1 Q'_1 R'_1$.

706. Si la projection verticale du second cercle avait été telle que $C_2 D'_2$, entièrement en dehors du contour apparent du cône qui a pour directrice le troisième cercle E′F′, la surface aurait été imaginaire; elle se fût réduite à un cône si l'extrémité D'_1 de la projection verticale $C'_1D'_1$ du second cercle avait été sur la droite B′E′ qui appartient au contour apparent du cône dont le cercle E′F′ est la directrice.

707. Nous allons maintenant supposer que l'on donne pour directrices d'une surface gauche trois ellipses (AB, A′B′), (CD, C′D′) et (EF, E′F′) (*fig.* 307), homothétiques et telles que leurs centres soient sur une perpendiculaire à leurs plans.

Nous augmentons les ordonnées perpendiculaires au plan vertical AB qui contient les grands axes dans le rapport du grand axe de l'une des ellipses à son petit axe, et nous changeons ainsi ces courbes en cercles qui, pris pour directrices d'une surface gauche, détermineront un hyperboloïde de révolution dont nous obtenons facilement une génératrice (PQR, P′Q′R′).

Si maintenant nous réduisons toutes les ordonnées dans le rapport nécessaire pour revenir aux directrices primitives, les trois points p, q et r, nouvelles positions des points P, Q et R, seront encore en ligne droite. Comme, d'ailleurs, les projections verticales P′, Q′ et R′ ne sont pas déplacées, on voit que les trois points (p, P′), (q, Q′) et (r, R′) seront aussi sur une droite. Les génératrices des deux systèmes de l'hyperboloïde de révolution formeront donc, après la transformation, deux systèmes de génératrices rectilignes d'une surface gauche dont les ellipses données sont directrices : on reconnaît un hyperboloïde général.

708. En obtenant cette surface par une déformation de l'hyperboloïde de révolution, on voit immédiatement qu'elle a trois plans principaux : un horizontal G′H′ et deux verticaux AB et YY_1; mais, pour être assuré que ces conclusions doivent être admises sans restriction, il faut établir qu'un hyperboloïde peut toujours être coupé par trois plans parallèles suivant des ellipses disposées comme le sont les directrices (AB, A′B′), (CD, C′D′) et (EF, E′F′) (*fig.* 307). Cela résulte de ce que les sections de l'hyperboloïde sont semblables et concentriques à celles de son cône asymptote (art. **695**); car ce cône, étant du second ordre, a un axe tel, que les sections par des plans perpendiculaires sont des ellipses dans les conditions énoncées. L'hyperboloïde qui n'est pas de révolution est dit *scalène*.

709. Sur la *fig.* 307, la transformation de la projection horizontale est homologique; la droite AB est l'axe d'homologie; le centre est à l'infini dans la direction YY_1.

On peut par cette transformation changer une ellipse en un cercle concentrique, en prenant pour axe d'homologie un diamètre quelconque $a'g'$ (*fig.* 96) et pour centre d'homologie un point situé à l'infini dans une direction arbitraire d'_1m. Si l'on transforme de cette manière toutes les ellipses d'un hyperboloïde scalène situées dans des plans perpendiculaires à l'axe non transverse, en ayant soin de prendre pour axes d'homologie des diamètres situés dans un même plan et pour centre d'homologie un même point à l'infini dans les plans de ces courbes, on transformera la surface en un hyperboloïde de révolution, car tous les raisonnements que nous avons présentés à l'article précédent sont applicables. Cette transformation constitue une *homologie dans l'espace;* le plan des axes d'homologie est appelé *plan d'homologie;* les droites qui passent par deux points homologues ou *rayons d'homologie* convergent vers un *centre d'homologie* qui, dans le cas actuel, est à l'infini. On voit qu'*un hyperboloïde scalène peut être transformé homologiquement d'une infinité de manières en un hyperboloïde de révolution autour de son axe non transverse.* Les ellipses situées dans des plans perpendiculaires à cet axe deviennent les parallèles. Celle qui a les plus petits axes est homologue du cercle de gorge. On l'appelle *ellipse de gorge.*

Sections planes.

710. Nous considérons un hyperboloïde dans la position où il est représenté sur la *fig.* 307; mais, pour supprimer les petites difficultés qui résulteraient des parties cachées, nous le supposons limité à l'ellipse de gorge (ab, $a'b'$) (*fig.* 313).

Nous prenons pour plan vertical le plan de front AB, et nous supposons la ligne de terre éloignée jusqu'en A'B'.

Si la surface est coupée par un plan (KK_1, I'K'), on obtiendra facilement des points de l'intersection en cherchant les traces d'un certain nombre de génératrices sur ce plan. On reconnaîtra la nature de la section à l'aide du cône asymptote (art. **695**), ainsi qu'il est indiqué dans les articles qui suivent.

Les droites cp et c_1p_1, tangentes à l'ellipse ab et parallèles à la ligne de terre, sont les projections de deux génératrices de systèmes différents, qui ont leurs traces aux points p et p_1 et une projection verticale commune $O'p'$. Le plan qui contient ces deux génératrices parallèles est tangent au point infiniment éloigné où elles se rencontrent (art. **692**). Le cône asymptote étant l'enveloppe des plans tangents à l'infini, sa trace $\pi\varepsilon\rho\gamma$ est l'enveloppe des traces de ces plans, et par suite elle est tangente à pp_1; nous savons d'ailleurs qu'elle est homothétique et concentrique avec la trace AB de la surface : nous pouvons donc la construire sans difficulté.

711. Un plan parallèle à (KK_1, I'K') et passant par le centre (O, O') de la surface a pour trace horizontale kk_1 et coupe le cône suivant les deux droites ($O\gamma$, $O'\gamma'$) et ($O\varepsilon$, $O'\varepsilon'$). Chacune de ces lignes est parallèle à deux génératrices de systèmes différents, qui se trouvent ainsi parallèles au plan sécant et déterminent une branche infinie. La courbe d'intersection a par conséquent deux branches infinies qui correspondent respectivement à ($O\gamma$, $O'\gamma'$) et à ($O\varepsilon$, $O'\varepsilon'$).

Les génératrices parallèles à ($O\gamma$, $O'\gamma'$) ont pour projections horizontales les droites hg et h_1g_1, parallèles à $O\gamma$ et tangentes à l'ellipse ab; elles percent le plan horizontal aux points g et g_1 de la trace de l'hyperboloïde. L'asymptote est l'intersection du plan sécant par le plan qui contient ces droites et qui touche la surface à leur point de rencontre, situé sur la courbe à l'infini; la trace de l'asymptote est donc au point v, où se coupent les traces KK_1 et gg_1 de ces plans; ses projections sont les droites vC et $v'C'$, respectivement parallèles à $O\gamma$ et à $O'\gamma'$.

On peut établir la trace gg_1 du plan tangent à l'infini par la seule condition de toucher au point γ la trace du cône asymptote.

On obtient de la même manière la deuxième asymptote (uC, $u'C'$), parallèle à la génératrice ($O\varepsilon$, $O'\varepsilon'$) du cône.

712. Quand dans deux positions différentes la génératrice d'une surface gauche se trouve parallèle à une même droite située dans un plan sécant, la courbe d'intersection présente deux branches infinies, car il y a des génératrices intermédiaires dont les traces sur le plan sont situées entre les points à l'infini. Mais, pour l'hyperboloïde, les deux génératrices parallèles hg, h_1g_1 n'appartiennent pas à un même système. Chaque système suffit complétement à la génération de la surface et n'a qu'une génératrice parallèle à $O\gamma$; il s'ensuit que la courbe n'a qu'une branche infinie dont l'asymptote soit parallèle à $O\gamma$.

713. En appliquant la construction de l'article **711** à la section faite par le plan (kk_1, $i'O'$), qui contient le centre, on trouve que ses asymptotes sont les génératrices ($O\gamma$, $O'\gamma'$) et ($O\varepsilon$, $O'\varepsilon'$) du cône. Il était facile de le prévoir, car ces droites, devant former un système concentrique et homothétique avec la conique suivant laquelle la surface est coupée, en sont nécessairement les asymptotes.

D'après cela, et en faisant passer un plan par le centre et par une sécante quelconque, on reconnaît que *les segments interceptés sur une droite entre l'hyperboloïde et son cône asymptote sont égaux.*

714. Si le plan (kk_1, $i'O'$) parallèle au plan sécant et passant par le centre touchait le cône, les deux génératrices $O\gamma$ et $O\varepsilon$ se confondraient; il n'y aurait dans chaque système qu'une génératrice parallèle au plan (KK_1, $I'K'$), et, le plan (kk_1, $i'O'$) étant tangent à l'infini, l'asymptote intersection de plans parallèles disparaîtrait et la courbe serait une parabole.

Enfin, quand le plan (kk_1, $i'O'$) ne contient aucune génératrice du cône, la section de l'hyperboloïde est une ellipse.

Cônes et cylindres circonscrits.

715. Considérons une courbe du second ordre, section d'un hyperboloïde par un plan qui en contient le centre O, et deux droites Ox et Oy, diamètres conjugués de cette conique (*fig.* 308) : si l'on fait tourner le plan autour du diamètre transverse Ox, il coupera l'hyperboloïde suivant différentes courbes du second ordre qui toutes auront leur centre en O et qui passeront par les points A et A_1. Les diamètres de ces courbes conjugués avec Ox seront parallèles au plan tangent en A et formeront par conséquent un plan qui est le *plan diamétral conjugué* à Ox. Il divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à Ox.

Ce résultat est indépendant de l'existence des points A et A_1, et il subsiste par conséquent quand ces points sont imaginaires. Ainsi donc, si l'on fait tourner le plan autour de Oy, les diamètres qui dans les différentes sections seront conjugués avec Oy se trouveront dans un plan.

716. Supposons maintenant que d'un point S pris sur Ox on mène des tangentes SM et SM_1, et la droite MM_1 sécante de contact, ou polaire de S ; on aura la relation

$$OS \times OP = \overline{OA}^2.$$

Lorsque le plan tourne autour de Ox, les polaires du point S pour les différentes sections passent par le point P déterminé par l'équation ci-dessus, et, comme elles sont toujours parallèles au plan diamétral conjugué avec Ox, elles forment un plan qui est le *plan polaire* du point S.

L'intersection de la surface par le plan polaire est le lieu des points de contact des tangentes issues du point S, et par conséquent la courbe de contact du cône circonscrit qui a son sommet en ce point.

Si le diamètre OS était non transverse (*fig.* 309), les raisonnements seraient les mêmes, mais les segments OS et OP auraient des directions opposées, et leur produit serait une quantité négative $-\overline{OC}^2$.

En résumé, *la courbe de contact d'un cône circonscrit à un hyperboloïde est plane ; son plan est parallèle au plan diamétral conjugué au diamètre qui passe par le sommet du cône.*

717. Quand le diamètre OS est transverse (*fig.* 308), le plan polaire du point S est parallèle au plan tangent en A, et par suite aux deux génératrices qui se croisent à ce point; la ligne d'intersection qu'il détermine est donc une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à ces droites. Nous aurions pu considérer le plan tangent à la seconde extrémité A_1 du diamètre : le résultat eût été le même, car nous savons que les génératrices qui se croisent au point A_1 sont parallèles à celles qui passent au point A (art. **685**). Ces quatre génératrices sont les seules qui soient parallèles au plan polaire du point S, car sans cela la section aurait plus de deux branches infinies; si les points A et A_1 sont imaginaires, c'est-à-dire si le diamètre OS n'est pas transverse (*fig.* 309), le plan polaire du point S coupera toutes les génératrices, et la section sera une ellipse.

Quand le diamètre OS n'est pas transverse (*fig.* 309), il se trouve dans l'intérieur du cône asymptote, et le plan diamétral conjugué, qui n'est alors parallèle à aucune génératrice, coupe le cône suivant son seul sommet. Lorsque ce diamètre est transverse (*fig.* 308), il est extérieur au cône, et le plan diamétral conjugué coupe le cône suivant deux droites respectivement parallèles aux deux génératrices qui passent au point A et à celles qui passent au point A_1. Dans la position intermédiaire, quand le point S est en *s* sur une génératrice OE du cône, les points A et A_1 sont réunis en un seul à l'infini; le plan tangent à l'hyperboloïde en ce point est tangent au cône asymptote le long de la génératrice OE, et, comme il passe par le centre, il est le plan diamétral conjugué à cette droite. Le plan polaire du point *s*, étant alors parallèle à un plan tangent du cône asymptote, coupe la surface suivant une parabole (art. **714**).

Lorsque le point S est sur la surface en A, son plan polaire est le plan tangent en ce point, et la section se compose des deux génératrices qui s'y croisent.

Il résulte de la discussion qui précède que *la ligne d'ombre d'un hyperboloïde est une hyperbole, une ellipse ou une parabole suivant que le diamètre qui passe par le point lumineux est transverse, non transverse, ou qu'il se confond avec une génératrice du cône asymptote. Quand le point lumineux est sur la surface, la ligne d'ombre est formée des deux génératrices qui passent à ce point.* Les considérations que nous avons présentées à l'article **608** pour le paraboloïde montrent comment ces génératrices peuvent former une ligne d'ombre.

En raisonnant comme à l'article **609**, on reconnaît que *la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à un hyperboloïde est plane et située dans le plan diamétral conjugué au diamètre parallèle aux génératrices du cylindre.*

L'ombre portée d'un hyperboloïde sur un plan est une conique; il en est de même de son contour apparent.

718. Nous pouvons conclure de là et des théorèmes précédemment démontrés que *les sécantes qui joignent deux à deux les points homologues de deux divisions homographiques dans un plan ont pour enveloppe une conique*, car on peut considérer les deux droites comme les projections de deux directrices rectilignes qui ne se rencontrent pas et qui sont divisées homographiquement. Les sécantes sont alors les projections des génératrices d'un hyperboloïde, et leur enveloppe est une conique, contour apparent de cette surface sur le plan.

Si les directrices se déplacent et viennent par un mouvement continu se mettre dans le plan de projection, l'hyperboloïde s'aplatira et finira par se confondre avec une partie du plan limitée à la conique.

Ligne de striction.

719. Nous allons nous proposer de construire le point central d'une génératrice quelconque d'un hyperboloïde. Nous supposons que cette surface est rapportée à deux plans coordonnés respectivement parallèles au plan de l'ellipse de gorge et à un autre de ses plans principaux (*fig.* 311), et qu'elle est déterminée par l'ellipse de gorge ($ab, a'b'$) et par l'hyperbole contenue dans le plan vertical AB; sa trace horizontale est semblable à l'ellipse de gorge (art. **695**).

Le plan tangent à la surface au point situé à l'infini sur une génératrice (PQ, P'Q') contient la génératrice parallèle ($P_1Q_1, P'_1Q'_1$); le plan central de la génératrice (PQ, P'Q') est perpendiculaire à celui-là; nous l'obtiendrons par la construction de l'article **56**, faite dans un ordre différent ([1]).

La droite Q_1E, perpendiculaire à PQ, peut être considérée comme la trace d'un plan auxiliaire perpendiculaire à la génératrice (PQ, P'Q'); en le rabattant sur le plan horizontal, nous amenons le point où il coupe cette droite en un point V qu'il s'agit de déterminer sur iQ.

La droite iV, considérée dans l'espace avant son rabattement, est perpendiculaire à la génératrice comme étant dans le plan auxiliaire. Pour avoir sa grandeur, nous ramenons le plan vertical PQ dans le plan horizontal par une rotation autour de sa trace PQ. Le point (q, q') se place en q_1 à une distance qq_1 égale à LO'; la droite (qQ, q'Q') devient q_1Q, et la perpendiculaire iv fait connaître la longueur cherchée iV.

Les sections faites par le plan auxiliaire dans le plan tangent à l'infini et dans le plan central sont rectangulaires. La première passe par le point Q_1 de la génératrice ($P_1Q_1, P'_1Q'_1$); elle est en rabattement Q_1V : nous pouvons donc tracer le rabattement VK de la seconde. Quand on remet le plan auxiliaire dans sa position, le point K reste fixe, et l'on voit que la droite QK est la trace du plan central; il ne reste plus qu'à déterminer le point de contact de ce plan.

La génératrice du second système contenue dans le plan central a sa trace au point D, et nous obtenons facilement ses projections CD et C'D': le point cherché est (m, m').

On peut mener du point D deux tangentes à l'ellipse de gorge, et chacune d'elles est la projection d'une génératrice; mais celle que nous cherchons n'est pas du même système que (PQ, P'Q'), et par conséquent, lorsqu'on les regarde du centre O, le point de contact de l'ellipse de gorge et la trace doivent être, l'une par rapport à l'autre, de côtés différents sur ces deux lignes.

Le point (m, m') n'est pas le point central de la génératrice (CD, C'D'), car, s'il

---

([1]) Il y a deux méthodes pour construire un plan Q perpendiculaire à un plan P et passant par une droite D située dans ce plan. La première consiste à employer un plan auxiliaire M, perpendiculaire à D; les traces de P et de Q sur ce plan sont rectangulaires, et, l'une d'elles étant connue, on obtient facilement l'autre. Dans la seconde méthode, on élève une perpendiculaire N à P par un point quelconque de D, et l'on fait passer un plan par cette droite et par D. Cette dernière construction est généralement plus simple, et, si nous avons préféré l'autre, c'est que le plan auxiliaire M nous sera nécessaire plus loin pour la détermination du paramètre, qui exige un plan Q' incliné à 45° sur P.

l'était, le plan qui y est tangent serait perpendiculaire aux deux plans respectivement tangents aux points de (CD, C'D') et (PQ, P'Q') situés à l'infini, et par suite à la droite (Om, $O'm'$), qui est leur intersection. Or il est facile de voir que ce n'est qu'aux sommets de l'ellipse de gorge que le diamètre est perpendiculaire au plan tangent.

720. Si l'on opère sur la génératrice ($PQ, p'q'$), les constructions se disposent d'une manière identique sur le plan horizontal, en le supposant à la hauteur de la droite A″ B″, et l'on trouve un point central (m, m'') situé sur la verticale du point (m, m') et à la même distance du plan du cercle de gorge. De même, si l'on cherche le point central de la génératrice du deuxième système projeté sur P'Q', on trouve que sa projection verticale est m' et que sa projection horizontale est à la même distance de la droite AB que le point m.

Les deux systèmes ont ainsi des lignes de striction, formées d'arcs appartenant à une même courbe, symétriques par rapport aux plans principaux et qui se superposent en projection sur ces plans.

Il résulte de ces symétries que le centre (O, O') est sur la corde ($mn, m'n'$) qui joint les points centraux de deux génératrices parallèles quelconques [1].

721. Si nous voulons déterminer la longueur du paramètre k pour la génératrice (PQ, P'Q'), nous ferons passer par cette droite un plan incliné à 45° sur le plan central et nous chercherons son point de tangence. Traçant la droite VE, inclinée à 45° sur VK, nous obtenons facilement la trace QE du plan, et, opérant

---

[1] L'équation de l'hyperboloïde étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

la ligne des points centraux des génératrices des deux systèmes est sur le cône représenté par l'équation

$$b^4(a^2+c^2)^2\frac{x^2}{a^2}\frac{z^2}{c^2}+a^4(b^2+c^2)^2\frac{y^2}{b^2}\frac{z^2}{c^2}-c^4(a^2-b^2)^2\frac{x^2}{a^2}\frac{y^2}{b^2}=0. \tag{2}$$

M. Chasles a obtenu ce résultat (*Correspondance mathématique et physique*, t. XI, p. 67) à l'aide du Calcul différentiel et en regardant le point central comme le pied de la commune perpendiculaire à la génératrice considérée et à la génératrice voisine. On y arrive à peu près aussi facilement en cherchant le point de la génératrice où le plan tangent est perpendiculaire au plan tangent à l'infini, et alors l'Algèbre ordinaire suffit pour les calculs qui ne sont que la traduction analytique des constructions de la *fig.* 311.

Lorsque l'hyperboloïde est de révolution, l'équation (2) perd son dernier terme et représente le plan du cercle de gorge, ainsi qu'il était facile de le prévoir.

Quand le coefficient $c^4(a^2-b^2)^2$ est petit relativement aux deux autres, le troisième terme a peu d'importance et la courbe est très rapprochée de l'ellipse de gorge; il est alors difficile de la tracer d'une manière nette et distincte. On doit avoir égard à cette circonstance lorsque l'on dispose les donnécs dans les exercices graphiques que l'on peut se proposer sur cette question.

En éliminant y entre les équations (1) et (2), on trouve, pour représenter la projection de la ligne de comme précédemment, nous trouvons que le point de contact est (e, e'). La véritable grandeur du segment $(me, m'e')$ est égale au paramètre k (¹).

---

striction sur le plan des zx,

$$(3)\qquad b^4(a^2+c^2)^2\frac{x^2}{a^2}\frac{z^2}{c^2}+a^4(b^2+c^2)^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{z^2}{c^2}-c^4(a^2-b^2)^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{x^2}{a^2}=0.$$

Si nous faisons $x=a$, l'équation se divise et donne

$$z^2=0,$$

$$\frac{z^2}{c^2}=\frac{c^4(a^2-b^2)^2-b^4(a^2+c^2)^2}{a^4(b^2+c^4)^2}.$$

La première valeur de z détermine le sommet b' (*fig.* 311). Si l'expression

$$(4)\qquad c^4(a^2-b^2)^2-b^4(a^2+c^2)^2$$

est négative, les autres valeurs sont imaginaires et la tangente en b' ne coupe pas la projection verticale de la ligne de striction; cette projection n'a alors d'inflexion qu'au centre O'.

Quand le binôme (4) est nul, la courbe est surosculatrice de sa tangente en b'; enfin, quand il est positif, la courbe prend la forme indiquée sur la *fig.* 311: elle a quatre inflexions, sans compter celles du centre.

Pour étudier le signe du binôme (4), on peut considérer la différence des racines positives de ses deux termes; on trouve

$$(5)\qquad a^2(c^2-b^2)-2b^2c^2$$

quand a^2 est plus grand que b^2, et

$$-a^2(b^2+c^2)$$

quand b^2 est plus grand que a^2.

La dernière expression est essentiellement négative, mais l'autre peut être positive, nulle ou négative suivant les valeurs relatives de a^2, b^2 et c^2. Il résulte de là que la projection de la courbe sur le plan principal vertical qui contient le grand axe de l'ellipse de gorge est susceptible de trois formes différentes, mais que sa projection sur l'autre plan vertical principal ne peut en avoir qu'une.

La liaison qui existe entre les projections verticales et la projection horizontale montre que cette dernière peut avoir trois formes différentes; elle a quatre inflexions quand l'expression (5) est positive.

L'équation (3) peut être mise sous la forme

$$b^4(a^2+c^2)^2z^2+a^6(b^2+c^2)^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{z^2}{x^2}-c^6(a^2-b^2)^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=0.$$

Si nous appelons γ l'angle que la tangente en O' fait avec l'axe des abscisses O'b', nous aurons à la fois

$$x=0,\quad z=0\quad \text{et}\quad \frac{z}{x}=\operatorname{tang}\gamma;$$

introduisant ces valeurs, nous trouvons

$$\operatorname{tang}\gamma=\pm\frac{c^3}{a^3}\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}.$$

Cette expression permet de calculer rapidement l'angle γ et de vérifier ainsi les tracés.

Par suite d'une erreur d'impression, les facteurs binômes sont à la première puissance dans l'équation donnée par M. Chasles.

(¹) Lorsqu'on cherche analytiquement l'expression du paramètre de distribution, en déterminant la génératrice considérée par sa distance d au centre de la surface, on trouve

$$k=\frac{abc}{d^2},$$

a, b et c étant les longueurs des demi-axes.

En déterminant les points analogues à (e, e') sur un grand nombre de génératrices, on pourrait tracer la courbe lieu des points auxquels le plan tangent a une obliquité de 45°.

L'hyperboloïde n'ayant ni sommets ni arêtes, les génératrices d'un même système ont nécessairement des paramètres de même signe. Il est d'ailleurs évident, à la seule inspection d'un dessin de la surface, que les signes sont différents dans les deux systèmes. Cette remarque s'étend naturellement au paraboloïde. La génératrice (PQ, P'Q') appartient au *système négatif*.

722. Les constructions de l'article **719** peuvent être faites dès que l'on connaît les projections de trois génératrices A, A', A'' d'un même système sur deux plans coordonnés quelconques. On commence par déterminer un parallélépipède circonscrit à l'hyperboloïde et dont les droites A, A', A'' sont trois arêtes (art. **682**); on construit ensuite deux génératrices parallèles A''' et B''', le plan qui les contient et le plan central de A''' qui est perpendiculaire à celui-là; on cherche les points de rencontre du plan central de A''' avec deux des génératrices A, A' et A'' : la droite passant par ces points est une génératrice du système B et coupe A''' à son point central. On peut donc déterminer les projections de la ligne de striction, et ensuite par ses points doubles obtenir la position des axes. M. Chasles a indiqué cette méthode pour construire les axes d'un hyperboloïde dont on connaît trois génératrices; elle conduirait à des tracés longs et peu exacts dans la pratique (¹).

Représentation d'un hyperboloïde rapporté à ses plans principaux (*fig.* 310).

723. *On donne les trois axes d'un hyperboloïde; celui qui n'est pas transverse est perpendiculaire au plan horizontal, et l'un des deux autres est parallèle au plan vertical : on demande de représenter par ses contours apparents et par un certain nombre de génératrices d'un même système la partie de la surface comprise entre deux plans parallèles à celui de l'ellipse de gorge et également éloignés de ce plan.*

Les axes sont $(ab, a'b')$, (cd, O') et (O, ef). L'hyperboloïde est limité aux plans horizontaux A'B' et A''B''.

Les contours apparents sur les deux plans de projection sont l'ellipse de gorge et l'hyperbole principale qui a pour axes $a'b'$ et ef. Nous pourrions tracer immé-

(¹) Ce problème, admettant trois solutions, exige l'emploi d'une ou de plusieurs courbes. On peut le ramener au problème analogue pour le cône, car les axes de l'hyperboloïde et ceux de son cône directeur sont parallèles. On appliquerait d'ailleurs au cône l'une des constructions que M. Chasles a indiquées à la page 82 de l'*Aperçu historique*.

diatement ces courbes; mais il est préférable de les déterminer comme enveloppes des projections des génératrices.

Les asymptotes $O'p'$ et $O'r'_1$ de l'hyperbole sont des génératrices du cône asymptote (art. **715**); leurs traces π et ρ appartiennent à la trace de ce cône et suffisent à la déterminer, car elle est homothétique et concentrique avec la projection de l'ellipse de gorge.

Le plan ($\pi p'$, $p'O'$), tangent au cône asymptote le long de la génératrice ($O\pi$, $O'p'$), contient les génératrices de l'hyperboloïde parallèles à cette droite; leurs projections horizontales dp et cp_1 sont d'ailleurs faciles à tracer, car elles passent par les points d et c; nous pouvons donc déterminer les points p et p_1 où elles percent le plan horizontal. Nous obtenons de la même manière les traces r et r_1 des génératrices parallèles à l'asymptote ($O\rho$, $O'r'_1$). La trace de la surface est une ellipse passant par ces quatre points, homothétique et concentrique à la projection de l'ellipse de gorge; sa trace sur le plan horizontal supérieur est une ellipse identique à la précédente et qui se superpose à cette courbe en projection horizontale.

Pour mettre de la symétrie dans la position des génératrices représentées, nous allons d'abord les considérer sur un hyperboloïde de révolution résultant d'une déformation homologique de notre hyperboloïde scalène (art. **707**, **708**).

Nous traçons un cercle sur le grand axe AB comme diamètre, et nous y rapportons en P et en R les points p et r traces sur les plans horizontaux A'B' et A''B'' d'une génératrice parallèle au plan vertical. Nous faisons sur ce cercle deux divisions en trente-deux parties, prenant successivement pour origine les points P et R; nous ramenons les points de division sur l'ellipse, nous relevons les uns sur A'B' et les autres sur A''B''; enfin nous joignons deux à deux ceux qui sont désignés par la même cote [1].

724. Le plan projetant d'une génératrice est tangent au point où cette droite rencontre le contour apparent et contient la génératrice de l'autre système qui passe par ce point. Il suit de là que toute droite projection d'une génératrice est nécessairement la projection d'une autre génératrice. Ainsi la droite mn correspond en réalité à deux projections verticales $m'n'$ et $m'_1 n'_1$; mais la génératrice (mn, $m'_1 n'_1$) appartient au système que nous n'avons pas représenté, et les droites mn et $m'_1 n'_1$, considérées comme ses projections, devraient avoir des ponctuations inverses de celles que nous leur avons données, c'est-à-dire que les traits pleins devraient être remplacés par des lignes en points ronds, et réciproquement.

---

[1] Les cotes de la division dont l'origine est au point p se rapportent à la trace de la surface sur le plan A'B'; elles sont dans l'intérieur de l'ellipse AB. Celles de l'autre division sont en dehors de cette courbe. Nous avons négligé les cotes dans quelques endroits où leur inscription eût pu rendre la figure confuse.

On voit d'après cela que les droites que nous avons construites sur la figure comme projections de génératrices d'un système représenteront des génératrices de l'autre système si on leur suppose une ponctuation inverse, et qu'on peut ainsi considérer l'un quelconque des deux systèmes séparément ou tous les deux ensemble.

D'après nos conventions (art. 623), le paramètre k est négatif pour les génératrices du système représenté et positif pour les génératrices du système qui correspond à une ponctuation inverse.

725. Sur le plan horizontal, un point de croisement tel que α est la projection d'un point réel de rencontre dont la projection verticale est à un autre point de croisement α'. Tous les sommets des quadrilatères des réseaux des deux projections se correspondent ainsi sur des perpendiculaires à la ligne de terre. Si nous considérons les points α, β, γ, ..., nous remarquerons que les génératrices qui s'y coupent interceptent sur l'ellipse AB des arcs qui, ramenés sur le cercle, ont des amplitudes égales. Il suit de là que les points qui, sur l'hyperboloïde de révolution, correspondent à (α, α'), (β, β'), ... sont les diverses positions du point de rencontre de deux génératrices de systèmes différents qui se meuvent d'un même mouvement, et par conséquent appartiennent à un parallèle. Donc ces points eux-mêmes sont sur une section de l'hyperboloïde scalène avec un plan horizontal.

On trouve par des raisonnements analogues que les points λ, μ, ν, ... sont en ligne droite, et par suite que les points λ', μ', ν', ... qui leur correspondent appartiennent à une hyperbole projection verticale de la section de la surface par un plan contenant l'axe non transverse. Les génératrices du cône asymptote contenues dans ce plan sont les asymptotes de l'hyperbole (art. 715).

Nous avons tracé sur le plan vertical la ligne de striction du système représenté; elle est trop rapprochée de l'ellipse de gorge pour qu'il soit possible de l'indiquer d'une manière distincte sur le plan horizontal. En supposant à sa projection verticale une ponctuation inverse, on obtient la ligne de striction du système positif.

726. Les constructions seraient un peu simplifiées s'il y avait coïncidence entre les points des deux divisions du cercle auxiliaire; par conséquent, si dans un exercice graphique on se propose, non de représenter un hyperboloïde déterminé, limité à deux plans donnés, mais de faire des tracés d'où résulte une représentation bien symétrique d'un hyperboloïde quelconque, on pourra prendre l'ellipse trace horizontale pour une de celles sur lesquelles doivent se placer des points de croisement tels que α, β, γ, ... On établira à l'aide du demi-cercle AB une division symétrique par rapport aux axes; on tracera la projection horizontale d'une première génératrice en joignant deux des points arbitrairement choisis; la position des autres droites se trouvera déterminée, et leur enveloppe donnera l'ellipse de gorge. On placera ensuite sans difficulté les projections verticales des génératrices.

Théorèmes et exercices sur l'hyperboloïde de révolution.

727. *Le cercle de gorge d'un hyperboloïde de révolution est la ligne de striction dans les deux systèmes,* car le plan qui touche la surface au point (e, e'), où une génératrice $(ae, a'e')$ rencontre ce cercle (*fig.* 312), est perpendiculaire au rayon (Oe, e'), et par conséquent au plan mené par le centre et la génératrice, qui est tangent à l'infini.

Si nous déterminons l'obliquité du plan tangent en un point situé sur une génératrice à une distance connue du point central, nous en déduirons facilement le paramètre k qui convient à cette droite et à toutes les autres génératrices, car elles sont évidemment dans des positions relatives identiques.

Considérons la génératrice $(ae, a'e')$ parallèle au plan vertical (*fig.* 312) : la trace horizontale du plan tangent au point (a, a') est la droite $a\mathrm{G}$, tangente au cercle qui forme la trace de la surface; le plan central de la génératrice est vertical. Si nous coupons ces deux plans par un troisième $(\mathrm{GO}', \mathrm{O'V})$ perpendiculaire à la génératrice, les intersections comprendront un angle égal à celui des plans; sa tangente trigonométrique sera d'ailleurs égale à $\frac{e\mathrm{G}}{\mathrm{O'V}}$. Nous aurons donc

$$\frac{a'e}{k} = \frac{e\mathrm{G}}{\mathrm{O'V}}.$$

Mais, en appelant r le rayon du cercle de gorge et α l'angle $e'a'\mathrm{O}'$, nous avons

$$a'e' = \frac{ae}{\cos\alpha}, \quad e\mathrm{G} = \frac{\overline{ae}^2}{r}, \quad \mathrm{O'V} = \overline{ae}\sin\alpha.$$

L'équation ci-dessus donne, lorsqu'on y porte ces valeurs,

$$k = r\,\mathrm{tang}\,\alpha.$$

Le produit $r\,\mathrm{tang}\,\alpha$ est égal à l'ordonnée $\mathrm{F}'i$ ou au demi-axe $e'\mathrm{I}$; nous voyons donc que *dans un hyperboloïde de révolution le paramètre de distribution des plans tangents de toutes les génératrices est égal à la moitié de la longueur réelle de l'axe de révolution, considéré comme axe non transverse de la surface.*

On arrive facilement au même résultat en faisant passer par la génératrice considérée un plan incliné à 45° sur le plan central et déterminant la distance de son point de contact au point central.

La valeur de k est positive pour la génératrice $(ae, a'e')$ et pour toutes celles du même système, et négative pour les génératrices de l'autre système.

Quand nous considérerons simultanément deux hyperboloïdes, nous regarderons comme homologues les systèmes dans lesquels le paramètre a le même signe.

728. En un point quelconque d'un hyperboloïde de révolution, le plan méridien fait des angles égaux avec les deux génératrices et est perpendiculaire à leur plan, qui est le plan tangent en ce point. D'après cela, lorsqu'un hyperboloïde est donné par trois directrices rectilignes A, A', A'' (*fig.* 302), pour reconnaître s'il est de révolution on construit une génératrice B''', et à chacun des points a, a' et a'' où elle rencontre une directrice, on détermine un plan perpendiculaire à celui des deux droites et passant par la bissectrice de leur angle. Si la surface est de révolution, ces trois plans sont méridiens et se coupent suivant une même droite, qui est l'axe de la surface.

On peut encore construire sur les directrices A, A' et A'' un parallélépipède DG, en déterminer le centre O, abaisser de ce point des perpendiculaires sur les trois droites A, A' et A'', et enfin voir si ces lignes sont dans un même plan et de même longueur.

729. *Représentation de deux hyperboloïdes de révolution tangents le long d'une génératrice commune.* Quand deux hyperboloïdes de révolution ont des axes non transverses de même grandeur, les paramètres de leurs génératrices sont égaux, et on peut les placer de manière qu'ils se raccordent tout le long d'une droite : il suffit de faire coïncider deux génératrices des systèmes homologues, de manière que les points centraux se superposent et que les plans centraux se confondent en un seul. Les axes des deux hyperboloïdes sont alors parallèles à ce plan, et les centres sont sur la normale commune au point central.

Nous avons représenté sur les *Pl. XLVI* et *XLVII* deux hyperboloïdes de révolution qui se touchent ainsi suivant une droite. Le plan horizontal est parallèle au plan central de la génératrice de contact, et par conséquent à cette droite et aux deux axes de révolution; les projections de ces lignes sont AA_1, MM_1 et mm_1 (*fig.* 314). Le plan vertical est parallèle à AA_1 et les projections verticales des deux axes sont les horizontales $M'M'_1$ et $m'm'_1$ (*fig.* 315). Ces données suffisent pour établir complétement la figure.

Si nous inscrivons dans l'angle M_1Om_1 une droite Vv perpendiculaire à OA_1 et égale à la distance $o'O'$ des axes, nous aurons

$$Vu \cot \widehat{VOu} = vu \cot \widehat{vOu} = uO.$$

Mais chacun des angles VOu et vOu est, pour une des surfaces, le complément de l'angle que nous avons appelé α à l'article **727**; donc, si nous prenons les segments Vu et vu pour rayons des cercles de gorge, les deux hyperboloïdes auront des axes non transverses de même grandeur et se raccorderont.

Nous rapportons en ω sur $o'O'$ le point de division u du segment vV, qui est égal à la distance des axes de révolution, et nous traçons la projection verticale $A'\omega A'_1$ de la génératrice de contact.

Nous prenons sur cette droite une longueur $(AA_1, A'A'_1)$ partagée en deux parties égales par le point central (O, ω), et nous limitons chaque surface aux parallèles qui passent par les points extrêmes (A, A'), (A_1, A'_1); nous déterminons facilement les traces horizontales de leurs plans, puis leurs centres (M, M'), (M_1, M'_1), (m, m'), (m_1, m'_1), et ensuite leurs rayons, qui sont les vraies grandeurs des lignes $(MA, M'A')$, $(mA, m'A')$. Nous avons alors les longueurs des droites qui sont les projections horizontales des parallèles, et nous pouvons tracer les ellipses qui forment leurs projections verticales.

750. Le contour apparent de chaque surface sur le plan horizontal est une hyperbole méridienne; son axe transverse est égal au diamètre du cercle de gorge, et son axe non transverse au double de la longueur Ou. La ligne AA_1, projection d'une génératrice horizontale, est une des asymptotes; on détermine facilement l'autre, qui est GG_1 pour le premier hyperboloïde et gg_1 pour le second.

Les contours apparents par rapport au plan vertical sont les sections des surfaces par les plans diamétraux qui sont conjugués avec les projetantes (art. **717**), et dont par conséquent les traces horizontales sont, par rapport aux projections des hyperboles méridiennes horizontales, les diamètres conjugués à la direction OO'. On obtient facilement ces droites en opérant sur les asymptotes.

Nous traçons entre les lignes GG_1 et gg_1 une droite Ss, parallèle à A_1A; nous prenons les longueurs OS_1 et Os_1 respectivement doubles des segments OS et Os, et les diamètres PP_1 et pp_1 parallèles à S_1R et s_1R sont les traces des plans cherchés [1].

Pour chaque hyperboloïde, l'axe vertical de l'hyperbole qui forme le contour apparent est égal au diamètre du cercle de gorge; on peut déterminer ses asymptotes de diverses manières. Nous les considérerons comme les intersections du cône asymptote par le plan de la courbe.

Le plan vertical LF coupe le cône asymptote du premier hyperboloïde suivant un cercle dont le rayon est MG; si nous rabattons ce cercle sur le plan horizontal qui contient l'axe de révolution, nous déterminerons l'ordonnée $P\pi''$ de la trace de la génératrice PP_1 du cône asymptote. Prenant $\pi\pi'$ et $\pi_1\pi'_1$ (*fig.* 315) égaux à $P\pi''$ (*fig.* 314), nous obtenons les points π' et π'_1 qui déterminent les asymptotes $O'\pi'$ et $O'\pi'_1$. Nous n'avons pas prolongé ces droites au delà du centre O' par

---

[1] Cette construction est analogue à celles des articles 598 et 643.

crainte de confusion, et pour le même motif nous n'avons pas conservé sur la figure les asymptotes du contour apparent de l'hyperboloïde supérieur.

Si le plan vertical PP_1 n'avait rencontré le cône asymptote qu'à son sommet, le contour apparent de l'hyperboloïde aurait été une ellipse.

731. Nous avons tracé sur chaque hyperboloïde onze génératrices du système auquel appartient la génératrice de contact, en les disposant de manière à partager avec elle la surface en douze parties égales. Pour cela, le parallèle extrême LF ayant été rabattu comme nous l'avons dit plus haut, nous l'avons divisé en douze parties à partir du point A'', qui se projette en A. Afin de dégager la figure, nous avons placé l'une sur l'autre les deux moitiés supérieure et inférieure du parallèle : le point de division qui arrivait en G'' a été ainsi ramené en G'''.

La division du parallèle extrême du second hyperboloïde a été faite de la même manière.

732. D'après ce que nous avons vu à l'article **628**, les hyperboloïdes peuvent se raccorder, le long des deux mêmes génératrices réunies en une seule droite, dans trois autres positions relatives; mais il n'y en a qu'une qui soit réellement différente, celle que l'on obtiendrait en faisant tourner une des surfaces de 180° autour de la génératrice de contact. Si l'un des hyperboloïdes tournait de 180° autour de la normale commune au point central (O, ω), par suite des symétries qui existent, le système des surfaces présenterait les mêmes apparences.

Avec les données que nous avons choisies, on aurait reconnu que les centres des hyperboloïdes devaient être d'un même côté du point central, et par conséquent que l'un d'eux devait se trouver dans l'intérieur de l'autre, si la perpendiculaire Vv à la projection AA_1 de la génératrice de contact avait rencontré les axes MM_1 et mm_1 d'un même côté de cette droite (*fig.* 314). Les rayons uv et uV eussent été en effet de même signe.

733. Quand deux hyperboloïdes A et A_1 se raccordent le long d'une génératrice G, un plan contenant cette ligne et un point N de leur intersection les touche en un point M de G et coupe chacun d'eux suivant une génératrice (art. **617**, **692**). Ces droites, passant par les points M et N, se confondent nécessairement. L'intersection complète est donc formée de lignes droites.

Les surfaces étant du second ordre, la projection de l'intersection est donnée par une équation du quatrième degré qui doit se décomposer en deux équations du second, dont l'une représente deux fois la génératrice G; l'autre correspond à deux droites réelles ou imaginaires.

734. Les génératrices d'intersection sont évidemment parallèles à celles suivant lesquelles se coupent les cônes directeurs, en les supposant placés de manière à avoir leurs sommets en un même point; mais il importe de voir que, toutes les fois que les cônes auront des droites communes, les hyperboloïdes se couperont suivant des droites parallèles à celles-là.

Les génératrices B et B_1 des deux surfaces qui passent par un point quelconque C de la génératrice de contact G sont, ainsi que cette droite, dans le plan tangent en C; leurs homologues b, b_1 et g, sur les cônes directeurs, sont donc aussi dans un même plan, et par suite tout plan passant par g coupe les cônes suivant deux droites dont les homologues sur les seconds systèmes des deux hyperboloïdes se croisent en un point de G. Par conséquent, si les cônes se coupent le long d'une droite, les génératrices homologues de cette ligne dans les seconds systèmes passeront par un même point, et, comme d'ailleurs elles seront parallèles, elles se confondront.

Les cônes, étant tangents le long de g, doivent se couper suivant deux droites (réelles ou imaginaires) qui peuvent se confondre en une seconde génératrice de contact : les hyperboloïdes ont donc deux droites d'intersection (réelles ou imaginaires) ou une nouvelle génératrice de raccordement qui n'appartient pas au même système que la première.

755. Sur la *fig.* 314, les cônes asymptotes sont projetés sur les espaces angulaires GOA et G_1OA_1, gOA et g_1OA_1 qui n'ont pas de partie commune. Leurs projections seront les mêmes, si on les transporte verticalement, de manière à faire coïncider leurs sommets en un point de la verticale du point O; les cônes directeurs ne se coupent donc pas, et les hyperboloïdes n'ont en commun que la génératrice AA_1.

Nous avons représenté en projection horizontale, sur la *fig.* 316, deux hyperboloïdes de révolution en contact, comme les précédents, le long d'une génératrice, mais tels, que les projections des cônes asymptotes se superposent en partie. Nous allons rechercher si les hyperboloïdes ont des génératrices communes : nous ferons les opérations à l'aide de la seule projection horizontale et des plans verticaux auxiliaires perpendiculaires aux axes non transverses. Les lettres indiquent la concordance des *fig.* 314 et 316.

Lorsque les cônes ont été transportés verticalement de manière que leurs sommets coïncident, leurs sections par les plans verticaux fl, b_1h_1, FL et B_1H_1 sont des cercles situés sur une même sphère dont le centre est en O et dont le rayon est OA; donc le point Q où se coupent les traces AG et A_1g_1 est la projection de deux points de rencontre des cercles. Si nous rabattons le plan FL, nous pourrons placer en Q′ l'un des points qui se projettent horizontalement en Q, et alors les droites OQ, MQ′ seront les projections horizontale et verticale d'une génératrice d'intersection des cônes. Pour éviter la confusion sur le plan horizontal, nous avons rabattu les parties inférieure et supérieure du plan vertical l'une sur l'autre; d'après cela, nous aurons la projection verticale de la seconde génératrice d'intersection en considérant la droite MQ′ comme appartenant au second rabattement.

Il est maintenant facile de déterminer les génératrices d'intersection des hyperboloïdes : ce sont les droites (Rr, $R''\rho$) et (Ss, $S'\sigma$) appartenant aux seconds systèmes et respectivement parallèles à la ligne (OQ, MQ′) dans ses deux positions.

Sur le plan vertical FL, les points qui sont dans leur véritable position par rapport à la trace A′ de la génératrice de contact sont indiqués par des lettres ayant un seul accent, et ceux qui devraient être de l'autre côté de la ligne de terre et qui ont été ramenés du côté des premiers, par des lettres ayant deux accents. On voit d'après cela que les droites (Rr, $R''\rho$) et (Ss, $S'\sigma$) rencontrent le plan vertical FL, la première au-dessous du centre M et la seconde au-dessus de ce point.

Nous avons vérifié les tracés en faisant les déterminations à l'aide du plan vertical fl, perpendiculaire à l'axe du cône supérieur. Nous avons mis un seul accent aux lettres qui désignent les points dont la position par rapport à la trace a' n'a pas été modifiée.

Les droites (Rr, $R''\rho$) et (Ss, $S'\sigma$) rencontrent la génératrice de contact aux points α et β; elles ne sont vues que sur de petites longueurs, depuis les points λ et μ, où elles touchent le contour apparent de l'hyperboloïde supérieur, jusqu'aux points R_1 et S, situés sur les bases de l'hyperboloïde inférieur. Au delà de ces points, elles seraient encore vues sur la première de ces surfaces, mais elles ne sont plus lignes d'intersection [1].

736. Les cônes et par suite les hyperboloïdes se coupent toutes les fois que la somme des angles gOA et AOG est supérieure à 180°, c'est-à-dire quand l'angle MOm, qui est formé par les axes et qui comprend la génératrice de contact OA, est obtus. Quand cet angle est droit, les secondes asymptotes GG_1 et gg_1 des hyperboles méridiennes se réunissent en projection sur le plan horizontal, et les génératrices du second système qui leur sont parallèles dans le plan tangent en ω (*fig.* 315) se confondent également. Comme, d'ailleurs, les surfaces se touchent en ce point central, et que le paramètre est le même, les deux génératrices réunies forment une seconde droite de raccordement.

En analysant les constructions de la *fig.* 316, on reconnaît facilement que, dans le cas qui nous occupe, les lignes d'intersection Rr et Ss se confondent avec la nouvelle génératrice de contact.

737. Les droites vO et VO (*fig.* 314) étant supposées à angle droit, chaque cercle de gorge est dans le plan méridien de l'autre surface; on a d'ailleurs

$$\tang uOV \tang uOv = 1 \quad (^2)$$

ou

$$\frac{uV}{Ou} \times \frac{uv}{Ou} = 1.$$

(1) L'intersection des hyperboloïdes se dessine très-bien sur une projection verticale. La construction de cette projection est un bon exercice graphique.

(2) Si nous mettions les signes en évidence, le produit des tangentes serait -1, ce qui indiquerait que les rayons R et r doivent être dirigés en sens contraire à partir du point de contact.

Si l'on appelle R et r les rayons des cercles de gorge, et c la longueur Ou qui est celle des demi-axes non transverses des hyperboles méridiennes des deux surfaces (art. **729**), l'équation précédente deviendra

$$Rr = c^2.$$

Les rayons de courbure des hyperboles méridiennes à leur sommet ω sont $\frac{c^2}{R}$ et $\frac{c^2}{r}$; la formule que nous venons de trouver exprime donc que, *quand deux hyperboloïdes de révolution se raccordent le long de deux génératrices, chaque cercle de gorge est osculateur de l'hyperbole méridienne de l'autre surface*, et, comme ces courbes ne se traversent pas, *le contact s'élève au troisième ordre*.

738. Dans le cas de la *fig.* 316, si l'on ne conservait de chaque surface que les parties respectivement comprises entre les cercles de gorge et les bases fl et FL, les hyperboloïdes se toucheraient sans se couper.

Si l'un des hyperboloïdes était dans l'intérieur de l'autre, les cônes directeurs, placés de manière à avoir leurs sommets en un même point, n'auraient en commun que leur génératrice de contact, et par conséquent les surfaces ne se couperaient pas. Il est d'ailleurs facile de voir, sur la *fig.* 316, que, si l'un des hyperboloïdes faisait une révolution de 180° autour de la droite A_1A, le point d'intersection analogue à Q serait sur les prolongements des projections des bases, et que par suite il ne correspondrait à aucun point de la sphère que nous avons considérée.

Hyperboloïde employé comme surface auxiliaire.

739. Soit G une génératrice d'une surface gauche déterminée par trois directrices A, B et C (*fig.* 236); en remplaçant les courbes par leurs tangentes R, S et T aux points m, n et p où elles rencontrent la génératrice, on obtient un hyperboloïde qui touche la surface à ces points et qui, par conséquent, se raccorde avec elle tout le long de G.

Quand les trois tangentes sont dans un même plan, l'hyperboloïde se réduit à ce plan, qui est le plan tangent unique de la surface en tous les points de la génératrice, sauf au sommet, car il y en a nécessairement un à distance finie ou à l'infini (art. **629**).

Lorsque deux tangentes R et S sont dans un même plan, et que la troisième T ne s'y trouve pas, la surface a un sommet en p. Le plan de rebroussement en ce point est déterminé par les droites G et T, et le plan des droites R et S est le plan tangent unique de la surface à tous les autres points de G.

Les raisonnements que nous avons présentés à l'article **614** ne sont pas applicables sans restriction à ces cas, car nous avons supposé que tout plan sécant coupait les deux génératrices consécutives en deux points distincts, ce qui n'a pas lieu à un sommet.

740. Dans le cas général, quand deux quelconques des tangentes ne sont pas dans un même plan, la surface est un hyperboloïde (ou un paraboloïde), et il y a raccordement. Si maintenant on suppose que la directrice T tourne autour du point p et dans le plan tangent en ce point, l'hyperboloïde se modifiera en restant toujours tangent aux divers points de G, et il sera un paraboloïde quand la directrice mobile T se confondra avec l'intersection du plan tangent en p avec un plan passant en ce point et parallèle aux deux directrices R et S. Nous obtenons ainsi une infinité d'hyperboloïdes et un paraboloïde, tous de raccordement.

En considérant l'une quelconque des positions de T et faisant tourner séparément chacune des deux autres directrices rectilignes dans son plan tangent, nous obtiendrons d'autres hyperboloïdes qui seront des paraboloïdes dans toutes les positions, en nombre infini, où les trois tangentes directrices se trouveront parallèles à un même plan.

741. Considérons une génératrice G d'une surface gauche et une droite D située d'une manière quelconque dans l'espace, sous la seule condition de ne pas rencontrer G : trois plans passant par D coupent la surface suivant trois courbes A, B et C dont les tangentes R, S et T aux points où elles rencontrent G déterminent un hyperboloïde de raccordement sur lequel D est une génératrice du même système que G, car elle rencontre les trois directrices R, S et T; les génératrices de l'autre système rencontrent les deux droites G et D, et sont tangentes aux différentes sections faites dans la surface par des plans passant par D. Nous concluons de là deux théorèmes :

1° *Si l'on coupe une surface gauche par une série de plans passant par une droite, les tangentes de toutes les sections aux points situés sur une même génératrice formeront un hyperboloïde.*

2° *On peut toujours déterminer un hyperboloïde qui touche une surface gauche le long d'une génératrice et qui contienne une droite non située dans un même plan avec la génératrice, mais d'ailleurs quelconque.*

On peut considérer un hyperboloïde de raccordement comme déterminé par la génératrice G, la génératrice de la surface gauche qui lui est infiniment voisine et une droite D. L'hyperboloïde se change en un paraboloïde quand ces trois droites sont parallèles à un même plan, et par suite quand la droite D est parallèle au plan tangent de la surface au point de G situé à l'infini (art. **592**).

742. Les hyperboloïdes de raccordement à une surface gauche le long d'une génératrice G ont les mêmes plans tangents aux divers points de cette droite, et notamment à celui qui est à l'infini; mais chaque plan tangent d'un hyperboloïde à l'infini contient le centre de cette surface (art. **685**, **692**); donc *tous les hyper-*

boloïdes de raccordement à une surface gauche le long d'une génératrice ont leurs centres dans un même plan, qui n'est autre que le plan tangent à l'infini.

743. Tout hyperboloïde de révolution dont l'axe non transverse est double du paramètre de la génératrice considérée sur la surface gauche peut être placé de manière à se raccorder avec elle (art. **628** et **727**); *une surface gauche se raccorde* donc *avec une infinité d'hyperboloïdes de révolution le long d'une génératrice donnée. Les centres de ces hyperboloïdes sont* évidemment *sur la normale au point central.*

Une normale à une surface de révolution coupe l'axe; toutes les normales à une surface gauche aux divers points d'une génératrice G rencontrent donc les axes des hyperboloïdes de révolution qui se raccordent avec la surface le long de G, et par suite ces axes forment les génératrices du second système du paraboloïde des normales (art. **620**).

CHAPITRE V.

SURFACES DONT LES GÉNÉRATRICES NE SONT PAS PARALLÈLES A UN MÊME PLAN.

Plans tangents. Cônes et cylindres circonscrits.

744. On peut résoudre, pour les surfaces gauches en général, le problème du plan tangent en un point donné, et celui du point de contact d'un plan contenant une génératrice, en employant un hyperboloïde de raccordement.

Considérons une surface déterminée par trois directrices A, B et C (*fig.* 322), et proposons-nous de construire son plan tangent en un point μ d'une génératrice G. L'hyperboloïde qui a pour directrices les tangentes R, S et T se raccorde avec la surface le long de G. Nous déterminons les génératrices G' et G'' de cette surface, qui passent par deux points m' et m'' arbitrairement choisis sur l'une des tangentes (art. **682**), et, les prenant pour directrices, nous construisons la génératrice $\mu\pi$ du second système qui passe au point μ. Le plan tangent cherché est déterminé par les droites G et $\mu\pi$.

Si l'on cherche le point où un plan contenant la génératrice G touche la surface, on déterminera, comme précédemment, deux génératrices G' et G'' d'un hyperboloïde de raccordement, et l'on construira les traces μ' et μ'' de ces droites sur le plan : les génératrices $\mu'\mu''$ et G formeront son intersection avec l'hyperboloïde, et leur point de rencontre μ sera le point de contact cherché.

Cette construction permet de déterminer par points la courbe de contact d'un cône circonscrit dont le sommet est donné (art. **646**).

745. On peut, pour la solution de ces problèmes, commencer par changer l'hyperboloïde en un paraboloïde (art. **740**), et alors il n'est nécessaire de construire qu'une génératrice du même système que celle qui passe par le point donné ou qui est contenue dans le plan.

Par le point p, où cette génératrice G (*fig.* 323) rencontre l'une des directrices, nous faisons passer un plan Q parallèle aux tangentes R et S des autres directrices, et nous prenons son intersection T′ avec le plan qui contient la génératrice G et la tangente T, et qui, par conséquent, est tangent en p. Les droites R, S et T′ déterminent un paraboloïde de raccordement dont nous construisons une génératrice G′ de même système que G.

Maintenant, si l'on veut avoir le plan tangent en μ, on fera passer par ce point un plan parallèle à Q, et l'on cherchera le point μ' où il coupe G′. La droite $\mu\mu'$ est une génératrice du second système; elle se trouve avec G dans le plan demandé.

Si, au contraire, on cherche le point de contact d'un plan donné contenant G, on construira son intersection μ' avec G′, et par ce point on mènera un plan parallèle à Q, qui coupera G au point demandé μ.

746. Quand la surface est donnée par deux directrices A et B et un cône directeur C (*fig.* 325), on détermine les tangentes R et S des courbes, et le plan tangent P du cône directeur le long de la génératrice g parallèle à G. Le paraboloïde qui a pour directrices les droites R et S et pour plan directeur le plan P se raccorde avec la surface le long de G (art. **614**). Les problèmes sont donc ramenés à ceux que nous avons résolus aux articles **644**, **645** et **646**.

747. Nous avons vu (art. **615**) que les plans tangents du cône directeur sont respectivement parallèles aux plans passant par les différentes génératrices et tangents à l'infini. Il résulte de là que les génératrices (autres que les arêtes) auxquelles correspondent les branches infinies de la courbe de contact d'un cylindre circonscrit sont parallèles aux génératrices du cône directeur le long desquelles le plan tangent est parallèle au cylindre, ce qui permet de les déterminer.

Il n'est pas aussi facile d'obtenir les génératrices auxquelles correspondent les branches infinies de la courbe de contact d'un cône circonscrit dont le sommet S est donné. On y parviendrait en menant du point S des plans tangents à la développable asymptote; mais cette construction exige que l'on ait tracé au préalable l'intersection de cette surface par un plan contenant le sommet S. On peut souvent disposer des courbes d'erreur qui conduisent plus simplement à la solution du problème.

748. Pour construire les asymptotes des branches infinies d'une section plane on cherche les génératrices du cône directeur qui sont parallèles au plan sécant, on détermine les génératrices de la surface qui leur sont parallèles, et on prend l'intersection du plan sécant par les plans passant par ces dernières droites et respectivement parallèles aux plans tangents du cône. Nous avons donné, à l'occasion de l'hyperboloïde, un exemple de cette construction (art. **711**).

Nous rappellerons qu'une section plane peut avoir d'autres branches infinies que celles qui correspondent aux génératrices parallèles au plan (art. **599**). On ne peut donner aucune règle générale pour déterminer les asymptotes de ces branches.

Nous allons maintenant étudier sur une surface spéciale les tracés relatifs aux surfaces gauches qui n'ont pas de plan directeur.

Surface du biais passé.

749. La surface du *biais passé* est la surface gauche dont les directrices sont deux cercles égaux et situés dans des plans parallèles, et une droite perpendiculaire à leurs plans et passant par le milieu de la ligne qui joint leurs centres.

Nous prenons pour plan horizontal celui qui contient les centres des cercles et la directrice rectiligne; le plan vertical est parallèle aux plans des cercles.

Un plan auxiliaire ($O_1 O'$, $M'n'$) passant par la directrice rectiligne ($O_1 O_2$, O') (*fig.* 317) coupe en deux points chacun des cercles (AB, $A'M'B'$), (CD, $C'n'D'$), et détermine quatre génératrices. Les deux génératrices alternes (Mn, $M'n'$) et (Nm, $N'm'$) rencontrent la directrice rectiligne au milieu O du segment $O_1 O_2$ intercepté par les plans des cercles; l'ensemble de ces lignes forme donc un cône qui a son sommet en ce point. Les génératrices externes (Mm, $M'm'$) et (Nn, $N'n'$) coupent la directrice rectiligne en des points différents, et par suite leur lieu n'est pas un cône, mais une surface gauche (art. **464**), celle que nous voulons étudier.

750. *Centre. Plan principal.* Il résulte des symétries de la figure que les droites (Mm, $M'm'$) et (Nn, $N'n'$) sont parallèles et à égales distances du point (O, O'); comme d'ailleurs cette disposition se reproduit pour tous les couples de génératrices contenues dans les plans auxiliaires, nous voyons que la surface a un centre, qui est le point (O, O').

Un second plan auxiliaire ($O_1 O'$, $M'_1 n'_1$), faisant avec le plan horizontal un angle $M'_1 O' A'$ égal à $N' O' D'$, contient deux génératrices qui ont avec les précédentes des positions symétriques par rapport au plan horizontal de projection. Ce dernier plan est donc un plan principal de la surface.

Les quatre génératrices

$$(Mm, M'm'), \qquad (Mm, M'_1 m'_1),$$
$$(Nn, N'_1 n'_1), \qquad (Nn, N'n')$$

peuvent être considérées comme formant un *groupe* caractérisé par la grandeur absolue de l'angle $n'O'D'$.

751. *Sommets.* Le plan horizontal contient les deux génératrices (AC, A'C'), (BD, B'D') (*fig.* 317), qui forment un *groupe simple*. Lorsque la première passe à la position voisine, elle décrit un élément plan, en glissant sur les tangentes verticales des directrices circulaires aux points (A, A') et (C, C'), et en tournant autour du point (I, O') de la directrice droite. Ce point est donc un sommet; il en est de même du point (J, O'), situé sur la génératrice (BD, B'D').

A chaque sommet, le plan de rebroussement est déterminé par la génératrice et la directrice (IJ, O') (art. **739**) : c'est le plan horizontal de projection. Aux autres points des génératrices horizontales AC et BD, le plan tangent est vertical.

Le segment IOJ de la directrice rectiligne est parasite (*fig.* 317); mais on reconnaît facilement que, lorsque les projections verticales des directrices circulaires ne se rencontrent pas (*fig.* 318), le segment parasite de la directrice rectiligne est celui qui s'étend du point I au point J en passant par l'infini, tandis que le segment IOJ est double sur la surface.

752. *Arêtes.* Lorsque la trace verticale du plan auxiliaire est tangente aux projections des directrices circulaires, les deux génératrices parallèles (Mm, $M'm'$) et (Nn, $N'n'$) (*fig.* 318) se confondent en une seule (pq, $p'q'$), qui est par conséquent une arête; la génératrice symétrique (pq, $p'_1q'_1$) est également une arête. On voit, en effet, que ces deux droites forment le contour apparent de la surface sur le plan vertical, et par conséquent qu'un même plan perpendiculaire au plan vertical est tangent à la surface tout le long de chacune d'elles.

Les points p et q sont à égales distances des points O_1 et O_2; il en résulte que la projection horizontale pq passe par le centre O de la surface et que les arêtes se croisent en ce point.

Les arêtes forment un groupe simple qui correspond à la valeur maximum de l'angle $n'O'D'$.

Dans la disposition adoptée sur la *fig.* 317, aucune génératrice ne passe par le centre, et la surface n'a pas d'arêtes. Le plan vertical (O_1O_2, P_1P) contient deux génératrices qui forment un groupe simple.

Si les projections verticales des directrices circulaires étaient tangentes l'une à l'autre, la surface se décomposerait en deux cônes; elle se réduirait à un cylindre si ces projections se confondaient.

753. *Relations d'homologie.* Les directrices circulaires sont, sur la projection verticale, deux figures homologiques dans lesquelles les points M' et m' situés sur une même génératrice se correspondent (*fig.* 317 ou 318). Le point O' est le centre, et la droite $O'z$ l'axe d'homologie.

Pour démontrer cette proposition, on peut considérer un cône dont le sommet S se projetterait en O' (*fig.* 320 *a*) et qui aurait pour directrice le cercle ($A'B'$, $A''B''$).

On trouve que le second cercle C′D′ est la projection d'une section faite par un plan C″D″ contenant la droite (PP$_1$, O″), ce qui, d'après les définitions que nous avons données (art. **401**), suffit pour établir les relations d'homologie.

Il résulte de là que les tangentes des directrices circulaires à deux points homologues M′ et N′ (*fig.* 319) se rencontrent en un point U de la droite O′z.

754. *Cône directeur.* Nous menons par le point (O, O′) (*fig.* 318) une droite (Oμ, O′μ') parallèle aux génératrices (Mm, M′m') et (Nn, N′n') : la trace μ' de cette droite sur le plan vertical CD se trouve à égales distances des points m' et n' (art. **750**), et par suite au pied de la perpendiculaire qui serait abaissée du centre F du cercle C′D′. Le lieu des points μ', trace du cône directeur placé de manière à avoir son sommet au centre (O, O′), est donc le cercle décrit sur O′F comme diamètre. Sa trace sur le plan XY de la première directrice (*fig.* 319) est le cercle EO′ (1).

La surface n'a pas de génératrices parallèles aux génératrices du cône directeur qui ont leur trace sur l'arc q'O′q'_1 (*fig.* 318). Le cône a donc une partie parasite quand les projections verticales des directrices circulaires ne se coupent pas. Les génératrices (Oq, O′q') et (Oq, O′q'_1), qui limitent la partie utile, sont parallèles aux arêtes de la surface (2).

755. Nous nous proposons de construire le plan tangent de la surface en un point (m, m') situé sur une génératrice (MLN, M′O′N′) (*fig.* 319).

Nous remplaçons les deux cercles par leurs tangentes (X$_1$Y$_1$, UM′), (XY, UN′), et, conservant la directrice rectiligne, nous avons un hyperboloïde de raccorde-

---

(1) Quand une surface gauche est algébrique et de degré n, son cône directeur est également algébrique et d'un degré qui s'élève au plus à n, car on peut le considérer comme ayant pour directrice la section de la surface par un plan situé à l'infini, et cette courbe ne peut pas être d'un degré supérieur à n.

Si les génératrices de la surface sont parallèles deux à deux, trois à trois..., son cône directeur sera double, triple..., et d'un degré égal, au plus, à $\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{3}n$, ... On peut quelquefois, par des considérations de cette nature, reconnaître qu'une surface d'un ordre élevé a un cône directeur du second degré, ce qui est d'un grand intérêt pour les constructions.

On est encore assuré qu'une surface gauche a un cône directeur du second degré quand elle est coupée suivant des coniques par une série de plans parallèles, ou plus généralement par une série de plans disposés de telle manière que l'un d'eux soit à l'infini. Dans ce cas, le cône directeur est simple.

Le cône directeur de la surface du biais passé est double et du second ordre; il en résulte que la surface est du quatrième ordre. Cette proposition sera démontrée directement à l'article 770.

(2) Si l'on transporte parallèlement à elles-mêmes toutes les génératrices du conoïde représenté sur la *fig.* 299, de manière à les faire passer par un même point, le lieu de ces droites sera une surface plane limitée aux parallèles des arêtes. On doit donc regarder le cône directeur de cette surface comme ayant des parties parasites, ainsi que celui du biais passé. Cette circonstance se présente toutes les fois que le cône est double; lorsqu'il est simple, il a des rebroussements le long des génératrices parallèles aux arêtes. Nous supposons que les directrices de la surface gauche n'ont ni inflexions ni rebroussements.

ment (art. **739**) (¹). Le plan horizontal contenant l'axe (LO, O'), qui est une directrice de l'hyperboloïde, coupe cette surface suivant une autre droite que l'on obtient en joignant les traces a et b des deux tangentes UM' et UN'.

Une génératrice est parallèle à l'axe de la surface (art. **685**) et, comme elle, perpendiculaire au plan vertical. Les projections sur ce plan des génératrices du second système divergent de sa trace, et, comme nous connaissons deux d'entre elles, M'U, N'U, nous avons immédiatement le point de concours U et nous pouvons tracer la projection Um' de la génératrice du second système qui passe au point considéré, puis obtenir sa trace horizontale q sur ab.

La trace du plan tangent est déterminée par les traces L et q des deux génératrices qui se croisent au point (m, m').

Le point de rencontre U est sur l'axe d'homologie Oz. Les longueurs UM', UN' sont égales, car les cercles ont des positions symétriques par rapport à la droite O'z, et par suite les deux tangentes menées du point U à l'un d'eux sont égales aux deux tangentes menées de ce point à l'autre.

755 *a*. On peut employer comme surface auxiliaire de raccordement le paraboloïde qui a pour directrices les tangentes M'R' et N'K', et pour plan directeur le plan tangent au cône directeur le long de la génératrice μ'O'ν', puis opérer comme il est indiqué à l'article **746**.

Les traces du plan directeur sur les plans verticaux X_1Y_1 et XY sont les droites μ'D' et ν'G', tangentes aux traces du cône. Les directrices M'R' et N'K' du paraboloïde rencontrent respectivement ces lignes en R' et en K'; la droite (RK, R'K') est donc l'intersection du paraboloïde par le plan directeur, c'est-à-dire une génératrice du même système que MN (la génératrice G' de la *fig.* 325).

Le deuxième plan directeur est parallèle aux plans verticaux de projection; la seconde génératrice qui passe par le point (m, m') a donc pour projection horizontale la droite mP, parallèle à XY : nous relevons en P' sur R'K' le point P, où elle rencontre la génératrice RK. Le plan tangent est déterminé par les deux génératrices (MN, M'N') et (Pp, P'p'); ses traces verticales sont les droites M'r' et N'k', parallèles à P'p'; sa trace horizontale est pLs.

Les trois points (r, r'), (P, P') et (k, k') appartiennent au plan tangent de la surface en (m, m') et au plan tangent du cône directeur le long de la génératrice $\mu'\nu'$; ils doivent donc être sur une droite parallèle à (MN, M'N'). La trace horizontale v de cette droite est l'intersection des traces pLs et DOG des deux plans.

756. On détermine le point où un plan qui contient une génératrice touche la

(¹) Dans la première édition, nous avions seulement indiqué cette solution. Nous la développons telle qu'elle a été exposée par M. Mannheim dans son Cours à l'École Polytechnique. L'emploi d'un point de concours lui donne une grande analogie avec la construction de l'article 645.

surface par les constructions de l'un des deux articles précédents faites en ordre inverse. En employant un paraboloïde, on peut résoudre le problème par des tracés faits seulement sur le plan vertical.

La génératrice M'N' et les traces M'r' et N's' du plan étant connues (*fig.* 319), nous déterminons les tangentes des traces du cône directeur aux points μ' et ν', les tangentes des directrices circulaires aux points M' et N', et les projections R'K' et $r'k'$ des intersections du paraboloïde et du plan donné avec le plan tangent au cône; nous menons ensuite par le point de rencontre P' de ces droites une parallèle aux traces M'r' et N's' du plan : cette ligne passe par le point cherché m'.

757. Le second plan directeur du paraboloïde est vertical, et par suite les projections horizontales de toutes les génératrices du premier système passent par un même point. Comme d'ailleurs nous savons que les lignes MN et RK sont deux de ces droites, nous connaissons le point de concours H. Une génératrice du paraboloïde de raccordement se projette en H; le plan tangent au point (H, H') est par conséquent vertical, et ce point appartient au contour apparent de la surface par rapport au plan horizontal. Nous pourrions ainsi déterminer cette courbe par points, mais nous allons construire sa projection horizontale plus facilement, en la considérant comme enveloppe des projections des génératrices.

758. *Contour apparent de la surface sur le plan horizontal.* Nous plaçons l'origine au centre O de la surface (*fig.* 320); nous prenons pour axes la directrice rectiligne Oy et sa perpendiculaire Ox.

Nous appelons

r le rayon des directrices circulaires (AB, A'B') et (CD, C'D');
a et b l'abscisse O_2F et l'ordonnée OO_2 du centre (F, F') de l'une d'elles;
ω l'angle M'OF' compris entre la projection verticale d'une génératrice (NM, N'M') et la ligne de terre E'F'.

Nous représentons de plus par λ la longueur du segment $M'\mu$ de la droite N'M' compris entre les cercles C'D' et O'F' :

$$\lambda = \sqrt{r^2 - a^2\sin^2\omega}. \tag{1}$$

L'équation de la droite MN, projection horizontale de la génératrice considérée, est

$$y - b = \frac{2b}{NO_1 + O_2M}(x - O_2M).$$

Mais nous avons

$$N'O' = O'\nu + \nu N' = a\cos\omega + \lambda, \qquad O'M' = O'\mu - \mu M' = a\cos\omega - \lambda,$$
$$NO_1 = a\cos^2\omega + \lambda\cos\omega, \qquad O_2M = a\cos^2\omega - \lambda\cos\omega.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation de MN donne

$$(2) \qquad y = \frac{b}{a\cos^2\omega}x + \frac{b\lambda}{a\cos\omega}.$$

Quand la génératrice considérée est l'une des deux arêtes $(Oq, O'q')$ et $(Oq, O'q'_1)$, λ est nul; on a, d'après (1),

$$\cos^2\omega = \frac{a^2 - r^2}{a^2},$$

et l'équation (2) devient

$$(3) \qquad y = \frac{ab}{a^2 - r^2}x.$$

Si nous éliminons y entre les équations (2) et (3), la valeur de x sera l'abscisse Ok du point de rencontre K de la génératrice MN avec la droite fixe pq. On trouve ainsi

$$Ok = \frac{a^2 - r^2}{\lambda}\cos\omega.$$

Mais, en faisant x nul dans l'équation (2), on obtient, en ayant égard à l'équation (1),

$$OL = \frac{b\lambda}{a\cos\omega};$$

donc

$$(4) \qquad Ok \times OL = \frac{b}{a}(a^2 - r^2).$$

Le produit des segments Ok et OL est donc constant [1]; il en est de même du produit des segments OK et OL, car le rapport de OK à Ok est indépendant de la position génératrice considérée (NM, N'M'). Il résulte de là que les projections horizontales des génératrices sont tangentes à une hyperbole dont les asymptotes sont la directrice rectiligne Oy et la projection pq des deux arêtes. Le point de contact i est le milieu de LK. Les coordonnées de ce point par rapport aux droites Oy et Oq prises pour axes sont les moitiés des segments OK et OL.

759. Si l'on fait y égal à b dans l'équation (3) de la droite pq, la valeur de x sera l'abscisse O_2q du point q; nous avons donc

$$O_2q = \frac{a^2 - r^2}{a},$$

d'où

$$O_2q \times OO_2 = \frac{b}{a}(a^2 - r^2).$$

---

[1] Division homographique (art. 694).

En rapprochant ce résultat de l'équation (4), on voit que la droite O_2D, qui n'est pas la projection d'une génératrice, est cependant tangente à l'hyperbole; cette courbe est donc en partie parasite. Le point où elle est touchée par la génératrice horizontale AC, c'est-à-dire le milieu R du segment If, est l'une des extrémités de l'arc utile. La seconde extrémité est au point S, symétriquement placé sur l'autre génératrice horizontale.

Le contour apparent de la surface sur le plan horizontal se compose, outre l'arc d'hyperbole qui va de R à S en passant par le point situé à l'infini sur l'asymptote pq, des deux génératrices AC et BD aux divers points desquelles le plan tangent est vertical.

760. Sur une surface gauche dont toutes les génératrices sont à distances finies, les branches infinies de la courbe de contact d'un cylindre correspondent les unes aux arêtes, et les autres aux génératrices pour lesquelles le plan tangent à l'infini est parallèle au cylindre (art. **638**); le cône directeur permet de déterminer facilement ces dernières droites. Le cône directeur de la surface du biais passé a des plans tangents verticaux le long des génératrices qui aboutissent aux points F′ et O′ (*fig.* 320); les génératrices de la surface qui leur sont parallèles ne doivent donc rencontrer qu'à l'infini la courbe de contour apparent sur le plan horizontal. La génératrice du cône qui a sa trace en F′ est parallèle aux droites AC et BD qui font partie du contour apparent, comme nous l'avons vu; celle qui perce le plan vertical au point O′ est sur une partie parasite, mais elle indiquerait une branche infinie utile si les directrices circulaires se coupaient sur le plan vertical, parce qu'alors le cône entier serait utile. Nous allons examiner ce cas sur une nouvelle figure, dont nous avons disposé les données de manière que le contour apparent sur le plan horizontal soit une hyperbole identique à celle de la *fig.* 320. Si nous appelons a', b' et r' les nouveaux paramètres, il nous a suffi de faire

$$a' = a, \quad b' = -b, \quad r'^2 = 2a^2 - r^2,$$

car les équations (3) et (4) ne sont pas modifiées et r' est plus grand que a', ce qui est nécessaire pour que la disposition que nous voulons examiner se produise.

La longueur $O'q'$ (*fig.* 320) est égale à $\sqrt{a^2 - r^2}$; par conséquent, si on la porte en $O'q''$ sur $O'z$, la distance des points E′ et q'' sera le rayon r'.

761. La *fig.* 321 représente une surface de biais passé dont les trois paramètres ont les longueurs qui viennent d'être déterminées et qui a par conséquent, sur le plan horizontal, un contour apparent identique à celui que nous avons obtenu pour la surface de la *fig.* 320.

Les deux génératrices (O_2O_1, P), (O_2O_1, P_1) sont parallèles à la génératrice (O_2O_1, O') du cône directeur et déterminent pour la courbe de contact du cylindre circonscrit vertical deux branches infinies qui se superposent en projection horizontale. Le plan (O_2O_1, $P_1O'P$) touche la surface aux points de cette courbe situés à l'infini, en contient par conséquent les asymptotes et les projette sur la trace O_1O_2.

Nous voyons donc que les deux branches infinies de l'hyperbole correspondent l'une aux arêtes, l'autre à deux génératrices qui sont parallèles à la directrice rectiligne, et par chacune desquelles passe un plan vertical tangent à l'infini. Ces génératrices sont réelles quand les arêtes sont imaginaires, et réciproquement. Il résulte de là que l'une des deux branches infinies est toujours parasite ([1]).

762. Si nous voulons déterminer directement sur la *fig.* 321 la droite pq, projection de deux arêtes imaginaires et asymptotes de la branche parasite de l'hyperbole, nous remarquerons que le point q (*fig.* 320) est sur la droite $q'q'_1$, sécante commune des cercles C'D' et O'F', c'est-à-dire sur la perpendiculaire à la ligne des centres qui passe par le point ε, déterminé par l'équation

$$\varepsilon O' \times \varepsilon F' = \varepsilon C' \times \varepsilon D'.$$

Sur la *fig.* 321, les cercles C'D' et O'F' ne se coupent pas, mais il existe cependant sur A'D' un point ε satisfaisant à l'équation ci-dessus; la droite perpendiculaire à la ligne des centres et passant par ce point jouit, par rapport aux cercles, de toutes les propriétés dans l'expression desquelles les points d'intersection q' et q'_1 n'entrent pas explicitement. Ainsi, par exemple, les tangentes menées d'un point quelconque de cette droite aux deux cercles sont égales entre elles; seulement elles ne peuvent pas être nulles, comme dans la première disposition.

Nous appellerons, avec M. Poncelet, *sécante commune idéale* de deux cercles C'D' et O'F' qui ne se coupent pas (*fig.* 321) la droite $\eta\varepsilon$ qui possède les propriétés des sécantes communes ordinaires, bien qu'elle ne rencontre pas les cercles ([2]).

763. En considérant trois cercles tracés sur un plan comme les projections de trois sphères ayant mêmes centres qu'eux (*fig.* 324), on reconnaît que les droites *ab*, *cd* et *ef*, sécantes communes de ces cercles, se rencontrent en un même point M, projection des deux points où les sphères se coupent ([3]). Chaque sécante commune de deux cercles est d'ailleurs perpendiculaire à la ligne des centres.

D'après cela, pour avoir la sécante commune des cercles C'D' et O'F' (*fig.* 321), nous les coupons par un arc de cercle $\pi\rho\sigma\tau$: le point de concours η des sécantes $\pi\tau$

([1]) M. Leroy a trouvé par l'analyse que le contour apparent de la surface du biais passé sur le plan horizontal est une hyperbole, mais il n'a donné aucune explication géométrique sur ce résultat (*Analyse appliquée à la Géométrie des trois dimensions*, art. 325).

([2]) Quelquefois, sans distinguer les différences de position des deux cercles C'D' et O'F' (*fig.* 320 et 321), on donne à la droite εq le nom d'*axe radical* proposé par M. Gaultier (de Tours).

([3]) Ce théorème et la démonstration que nous en donnons sont dus à Monge.

et $\rho\sigma$ appartient à la droite cherchée $\eta\varepsilon$ et fait ainsi trouver le point q, où l'asymptote pq rencontre la ligne O_2D (¹).

Le point η n'est pas la projection de deux points d'intersection des sphères auxquelles appartiennent comme grands cercles les cercles C'D', O'F' et $\pi\rho\sigma\tau$, car les deux premières ne se rencontrent pas; mais les relations graphiques établies dans le cas de la *fig.* 324, étant par elles-mêmes indépendantes de l'existence des sphères, continuent à subsister entre les droites qui possèdent les propriétés des sécantes communes.

764. Pour achever de déterminer la courbe de contour apparent par rapport au plan horizontal, nous allons construire sa projection verticale.

L'abscisse x du point (i, i') (*fig.* 320) est égale à la moitié de Ok; nous avons donc (art. **758**)

$$x = \frac{a^2 - r^2}{2\lambda}\cos\omega \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{(a^2 - r^2)^2}{4(r^2 - a^2\sin^2\omega)}\cos^2\omega.$$

Les axes étant O'D' et O'z, on a

$$\tag{5} \operatorname{tang}\omega = \frac{z}{x}\cdot$$

L'élimination de ω donne l'équation de la projection verticale de la courbe :

$$\tag{6} \frac{4r^2x^2}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{4z^2}{(r^2 - a^2)} = 1.$$

La projection verticale est donc une section conique. Ses axes sont les droites A'D' et O'z (*fig.* 320 ou 321). Les sommets sont toujours réels sur l'axe A'D' : ce sont les points R' et S' qui correspondent aux extrémités R et S de l'arc utile de la projection horizontale.

La conique donnée par l'équation (5) ne peut pas avoir de partie parasite, car chacun de ses points ne correspond qu'à un point du contour apparent de la surface par rapport au plan horizontal. La droite indéfinie A'D', projection des génératrices horizontales AC et BD, fait partie de la projection complète de ce contour apparent.

765. Dans le cas de la *fig.* 320, la courbe est une hyperbole qui a pour asymptotes les projections $p'q'$ et $p'_1q'_1$ des arêtes. Sur la *fig.* 321, c'est une ellipse $QR'Q_1S'$ dont l'axe vertical QQ_1 est égal à la moitié de PP_1. Les points Q et Q_1 sont les projections des points du contour apparent situés à l'infini et des asymptotes de cette ligne.

(¹) La première équation de l'article 759 montre que les droites qui iraient du point P aux points F' et ε seraient rectangulaires. De là résulte un second moyen également très-simple de déterminer ε et par suite q.

Nous avons vu (art. **761**) que les génératrices pour lesquelles le plan tangent à l'infini est vertical se projettent aux points P et P_1 ; par conséquent, *quand un cylindre est circonscrit à une surface gauche, les génératrices qui correspondent aux branches infinies de première espèce de la courbe de contact* (art. **658**) *ne sont pas, comme les arêtes, asymptotes de cette courbe.*

L'ellipse QQ_1 se compose de quatre arcs. L'un d'eux est vu, un autre caché; les deux qui se trouvent compris entre ceux-là sont les projections des parties de la courbe situées en dehors des plans A_1B_1 et C_1D_1, auxquels nous limitons la partie représentée de la surface.

766. *Contour apparent sur un plan vertical parallèle à la directrice rectiligne* Nous indiquerons comme un exercice graphique intéressant la construction du contour apparent de la surface sur le plan vertical O_2O_1 (*fig.* 321). Le cône directeur a deux génératrices $O'l$ et $O'l_1$ le long desquelles le plan tangent est perpendiculaire au nouveau plan de projection. A chacune de ces droites correspondent, sur la surface, deux génératrices qui ne rencontrent la courbe qu'à l'infini et dont les projections sont asymptotes du contour apparent sur le plan O_1O_2. Quand la surface a des arêtes, la courbe possède deux autres branches infinies.

Enfin le contour apparent présente des rebroussements aux sommets, parce qu'il y est tangent à la génératrice horizontale, et par suite au plan horizontal de projection, et que ce plan est évidemment un plan principal de la courbe.

767. *Sections de la surface par des plans perpendiculaires à la directrice rectiligne.* Considérons la section de la surface par le plan C_1D_1 parallèle au plan vertical (*fig.* 320) : si y est l'ordonnée de ce plan, la valeur de x donnée par l'équation (2) sera l'abscisse du point (M_1, M'_1) où il est rencontré par la génératrice considérée $(NM, N'M')$. En divisant cette longueur par $\cos\omega$, on obtient le rayon vecteur $O'M'_1$ du point M'_1 de la courbe

$$O'M'_1 = \frac{ay}{b}\cos\omega - \lambda.$$

La droite EF qui passe par les centres des directrices rencontre C_1D_1 en un point (F_1, F'_1) dont l'abscisse est $\frac{ay}{b}$. Si l'on décrit un cercle sur $O'F'_1$ comme diamètre, la longueur $\frac{ay}{b}\cos\omega$ sera le rayon vecteur $O'\mu_1$ du point μ_1, déterminé sur ce cercle par l'azimut ω; l'équation se réduit donc à

$$O'M'_1 = O'\mu_1 - \mu M'.$$

La longueur λ est donnée par un radical du second degré et doit toujours être considérée comme affectée du double signe, de manière que l'équation (2) représente les deux génératrices parallèles qui correspondent à un même azimut ω. Le segment $\mu M'$ doit en conséquence être porté sur la droite $O'\mu_1$, de part et d'autre du point μ. On trouve ainsi les points M'_1 et m'_1.

D'après cela, *les cercles* $O'F'$ *et* $C'D'$ *étant établis sur la figure, pour avoir des points de la courbe d'intersection de la surface par un plan perpendiculaire à la directrice rectiligne, il suffit de tracer un troisième cercle ayant pour diamètre l'abscisse* $O'F'_1$ *du point où la droite qui passe par les centres des directrices circulaires perce le plan considéré, puis d'augmenter et de diminuer chaque rayon vecteur de ce cercle, mesuré à partir de l'origine* O', *de la différence des rayons vecteurs des deux premiers cercles.* Cette génération nous permet de considérer la courbe comme une conchoïde à plusieurs directrices [1].

Sur la *fig.* 321, nous avons placé les plans A_1B_1 et C_1D_1, qui limitent la partie représentée de la surface, de manière à obtenir pour les conchoïdes des formes différentes de celles que nous avons trouvées sur la *fig.* 320 : le premier, A_1B_1, contient le sommet B_1, et la section qu'il fait a un rebroussement, comme celle d'un conoïde par un plan passant à l'un des sommets (art. **666**); le second, C_1D_1, coupe la directrice rectiligne en un point où elle est utile, et par suite la conchoïde y a un point double. Cette courbe se construit toujours par la même méthode, à l'aide de trois cercles.

768. Si le plan C_1D_1 s'éloigne du centre, la longueur $O'\mu_1$ croîtra indéfiniment et le segment $\mu M'$ restera constant; la courbe se rapprochera donc de la forme circulaire, et elle l'atteindra à la limite, en réunissant ses points deux à deux avec ceux du cercle diamétral $O'F'_1$. Nous pouvions prévoir ce résultat, car le cône directeur est coupé suivant des cercles par les plans qui sont parallèles au plan vertical.

On peut dire d'une manière plus générale que la surface possède à l'infini une ligne double, qui est une section conique. Dans le cas de la *fig.* 321, cette directrice est entièrement utile; dans celui de la *fig.* 320, elle est en partie parasite, et l'on voit d'une manière évidente que les sommets sont sur les arêtes, comme nous savons que cela doit être.

769. En se reportant à la *fig.* 216 (art. **569**), on reconnaît que la sous-normale d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires est égale à la limite du rapport des accroissements du rayon vecteur et de l'azimut; or le rayon vecteur de la section $C'_1D'_1$ (*fig.* 320) est une somme algébrique des rayons vecteurs de trois cercles :

$$O'm'_1 = O'\mu_1 + O'm' - O'\mu.$$

La sous-normale se composera donc, de la même manière, des sous-normales des

---

[1] On appelle en général *conchoïde* d'une ligne donnée la courbe dont les rayons vecteurs surpassent d'une longueur constante les rayons vecteurs de la ligne directrice.

cercles. Ces lignes étant $O'\alpha$, $O'\gamma$ et $O'\beta$, la sous-normale $O'\delta$ de la conchoïde pour le point m'_1 doit être donnée par l'équation

$$O'\delta = O'\alpha + O'\gamma - O'\beta.$$

Par conséquent, si nous portons la longueur $\beta\gamma$ de α en δ, le point δ appartiendra à la normale de la courbe en m'_1 (¹).

Cette construction conduit à une détermination facile du plan tangent en un point donné de la surface.

770. *Équation de la surface. Sections planes diverses.* L'élimination de λ et de ω entre les équations (1), (2) et (5) donne l'équation de la surface

$$\left(x^2 + z^2 - \frac{a}{b}xy\right)^2 - r^2x^2 + (a^2 - r^2)z^2 = 0.$$

Cette équation est du quatrième degré, et par suite les sections planes sont du quatrième ordre : toutefois quelques sections se décomposent; ainsi les plans contenant la directrice rectiligne coupent la surface suivant cette droite, qui est une ligne double, et deux génératrices.

771. *Génération de la surface par des coniques.* Nous avons vu à l'article **750** que les génératrices appartiennent deux à deux à des plans verticaux ; dans chacun de ces plans la section de la surface est complétée par une conique. Comme d'ailleurs le plan horizontal est principal, la trace horizontale d'un plan vertical qui contient deux génératrices est un axe de la conique d'intersection, et les sommets correspondants de cette courbe sont sur les génératrices horizontales A_1C_1 et B_1D_1 (*fig.* 320 ou 321).

Si le plan considéré est celui dont la trace est MN (*fig.* 320), les deux génératrices situées dans le plan vertical nm lui sont parallèles, et la courbe a deux branches infinies dont les asymptotes sont parallèles à ces génératrices, et par suite à celles qui sont dans le plan NM lui-même; c'est donc une hyperbole complétement déterminée.

Si le plan sécant se meut de manière que le point de contact i de sa trace sur l'hyperbole de contour apparent s'éloigne, l'axe transverse diminuera et l'angle des asymptotes croîtra d'une manière continue. Quand le point de contact se trouve à l'infini, la trace du plan est pq; les points g et f sont les sommets de l'hyperbole; son centre est au centre de la surface, et ses asymptotes, passant par le point O et étant parallèles aux arêtes, se confondent avec ces droites.

(¹) M. Bour a fait connaître dans son Cours de Mécanique à l'École Polytechnique, pour l'expression de la variation de longueur d'un segment de droite qui se déplace dans son plan, une expression due à M. Mannheim d'où l'on peut déduire immédiatement la construction que nous indiquons.

Le plan continuant son mouvement, le point de contact de sa trace avec l'hyperbole reparaît de l'autre côté; lorsque ce point est parvenu en S, le plan a pour trace BD; la génératrice AC lui est seule parallèle, et la section, n'ayant qu'une branche infinie, est une parabole.

Quand le point de contact arrive en un point *j* de la partie parasite du contour apparent, les génératrices qu'il contient sont imaginaires, ou du moins elles n'ont de réel que le point *v* où elles se croisent sur la directrice rectiligne. La section conique n'a donc pas d'asymptotes, et par suite elle est une ellipse : l'un des axes est *he*; le centre est au point *c*, et l'on détermine facilement la longueur du second axe, car ses extrémités sont sur les deux génératrices dont la commune projection passe par le point *c*.

Quand la trace du plan est l'asymptote O_1O_2, l'ellipse se réduit au segment double IJ de la directrice rectiligne.

Nous avons vu, à l'article **759**, que les traces AB et CD des plans des directrices circulaires touchent l'hyperbole de contour apparent : ces cercles appartiennent donc à la série des sections elliptiques dont nous venons de constater l'existence.

Le point *i* est la projection de deux points où le plan vertical MN touche la surface. Une des génératrices contenues dans le plan passe à chacun de ces points et y coupe l'hyperbole d'intersection.

Les hyperboles contenues dans les plans verticaux parallèles NM et *mn* sont identiques; il en est de même des ellipses situées dans les plans parallèles *eh* et e_1h_1. Les paraboles sections de la surface par les plans verticaux AC et BD sont identiques, mais tournées de sens opposé.

Quand la surface n'a pas d'arêtes (*fig.* 321), sa génération par des coniques présente les mêmes dispositions générales; mais il y a quelques différences de détail à l'étude desquelles nous ne nous arrêterons pas.

772. *Ligne de striction. Paramètres des génératrices.* Pour déterminer le point central d'une génératrice, on fait passer par cette droite un plan perpendiculaire au plan tangent du cône directeur le long de la génératrice parallèle, et l'on cherche son point de contact. Le paramètre est la distance du point central au point de contact d'un plan passant par la génératrice et incliné à 45° sur le plan central (art. **625** et **721**).

Si l'on opère simultanément sur les quatre génératrices d'un groupe, les constructions présentent des symétries qui montrent d'une manière évidente : 1° que le plan horizontal est un plan principal de la ligne de striction; 2° que cette courbe a un centre qui est le centre de la surface; 3° que les paramètres des quatre génératrices d'un groupe ont des grandeurs absolues égales. Il est d'ailleurs facile de reconnaître que dans un groupe deux génératrices qui se rencontrent ont des paramètres de signes contraires.

La ligne de striction passe à chaque sommet et y a nécessairement un rebroussement, parce qu'elle est divisée en deux parties symétriques par le plan horizontal qui est plan de rebroussement. La ligne de striction du conoïde droit présente une disposition analogue, car on doit la considérer comme ayant à chaque sommet un rebroussement dont les bras sont superposés.

773. Pour une arête comme pour toute autre génératrice, le plan central est perpendiculaire au plan tangent du cône directeur le long de la génératrice parallèle; on peut donc facilement le construire et déterminer ensuite l'angle θ' sous lequel il rencontre le plan tangent à la surface le long de l'arête.

Le cône directeur étant placé de manière à avoir son sommet au centre de la surface (*fig.* 320), l'arête est une de ses génératrices; les deux plans tangents le long de cette droite, l'un à la surface et l'autre au cône, ont pour équations

$$rx - \sqrt{a^2 - r^2}.z = 0,$$
$$b(2r^2 - a^2)x + a(a^2 - r^2)y - 2br\sqrt{a^2 - r^2}.z = 0.$$

L'angle que comprennent ces plans est complémentaire de θ'. On trouve, d'après cela,

$$\operatorname{tang}\theta' = \frac{br}{\sqrt{(a^2 - r^2 + b^2)(a^2 - r^2)}}.$$

Aucun des paramètres a, b et r ne peut être nul, et d'ailleurs a est plus grand que r, car sans cela la surface n'aurait pas d'arêtes. Il résulte de là que la tangente de θ' n'est jamais nulle ni infinie, et que le plan tangent le long d'une arête ne peut pas se confondre avec le plan central de cette génératrice ni lui être perpendiculaire. Les arêtes du biais passé appartiennent donc au même genre que celles du conoïde oblique (art. **677**), c'est-à-dire que leur point central est à l'infini et que leur paramètre est infini. Nous aurions pu arriver à ce résultat en déterminant les expressions analytiques du paramètre d'une génératrice et de l'ordonnée de son point central; mais ces formules n'offrent pas assez d'intérêt pour que nous nous arrêtions à leur recherche.

774. Quand a est plus grand que r (*fig.* 320), le paramètre change de signe aux arêtes et aux génératrices situées dans le plan horizontal. Lorsque a est plus petit que r (*fig.* 321), le paramètre ne change de signe qu'à ces génératrices, c'est-à-dire en passant par zéro; il a donc un maximum positif et un maximum négatif. Mais ses valeurs absolues étant égales pour les génératrices d'un même groupe, il doit atteindre son maximum dans le groupe simple formé par les génératrices (O_2O_1, P) et (O_2O_1, P_1); il est positif pour la première de ces droites et négatif pour la seconde.

On voit d'après cela qu'un paramètre maximum n'indique pas nécessairement une arête, comme on aurait pu le supposer par l'exemple du cylindroïde.

Déformation des surfaces gauches (¹).

775. L'étude des différentes formes que peut prendre une surface donnée lorsqu'on la suppose flexible et inextensible est, en général, un problème difficile; mais il se simplifie beaucoup pour les surfaces gauches lorsqu'on exige que les génératrices restent droites. D'après cette condition, la déformation ne peut résulter que de plis faits le long des génératrices. Une génératrice G' tourne autour de la génératrice voisine G en décrivant une aire qui appartient à un hyperboloïde de révolution. La position relative des génératrices G et G' n'est pas modifiée, et par conséquent la valeur du paramètre de distribution de G n'éprouve pas d'altération, et le point central reste le même.

776. En se reportant à la *fig.* 111, on reconnaîtra facilement que, si l'on fait tourner d'un même angle la génératrice $(ae, a'e')$ d'un hyperboloïde de révolution et la génératrice correspondante $(\alpha O, a'e')$ de son cône directeur, ces droites resteront parallèles. L'angle de rotation pour l'hyperboloïde est celui que décrit une droite $(pO, p'i)$ abaissée d'un point quelconque de la génératrice sur l'axe. On peut, d'après cela, assujettir la déformation d'une surface gauche à celle de son cône directeur.

Considérons deux génératrices consécutives G et G' de la surface, et leurs parallèles g et g' sur le cône : si les droites g' et G' tournent respectivement autour de g et de G d'angles égaux, elles seront encore parallèles, et, comme un cône peut être appliqué sur un autre cône quelconque et sur un plan, on voit qu'*il est toujours possible de déformer une surface gauche de manière à rendre ses génératrices parallèles à celles d'un cône donné ou à un plan.*

L'angle infiniment petit dont la génératrice G' a tourné autour de G est celui qui est décrit par toutes les droites infiniment courtes abaissées des points de G' sur G; donc, *quand on déforme une surface gauche, l'angle de contingence de toutes les sections perpendiculaires à une même génératrice varie précisément de la quantité dont on augmente ou dont on diminue l'angle de contingence correspondant du cône directeur.*

(¹) La question de la déformation des surfaces gauches a été étudiée successivement par MM. Minding, O. Bonnet et Bour. Nous ne donnons ici qu'une indication de cette importante théorie.

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE.

1945 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.