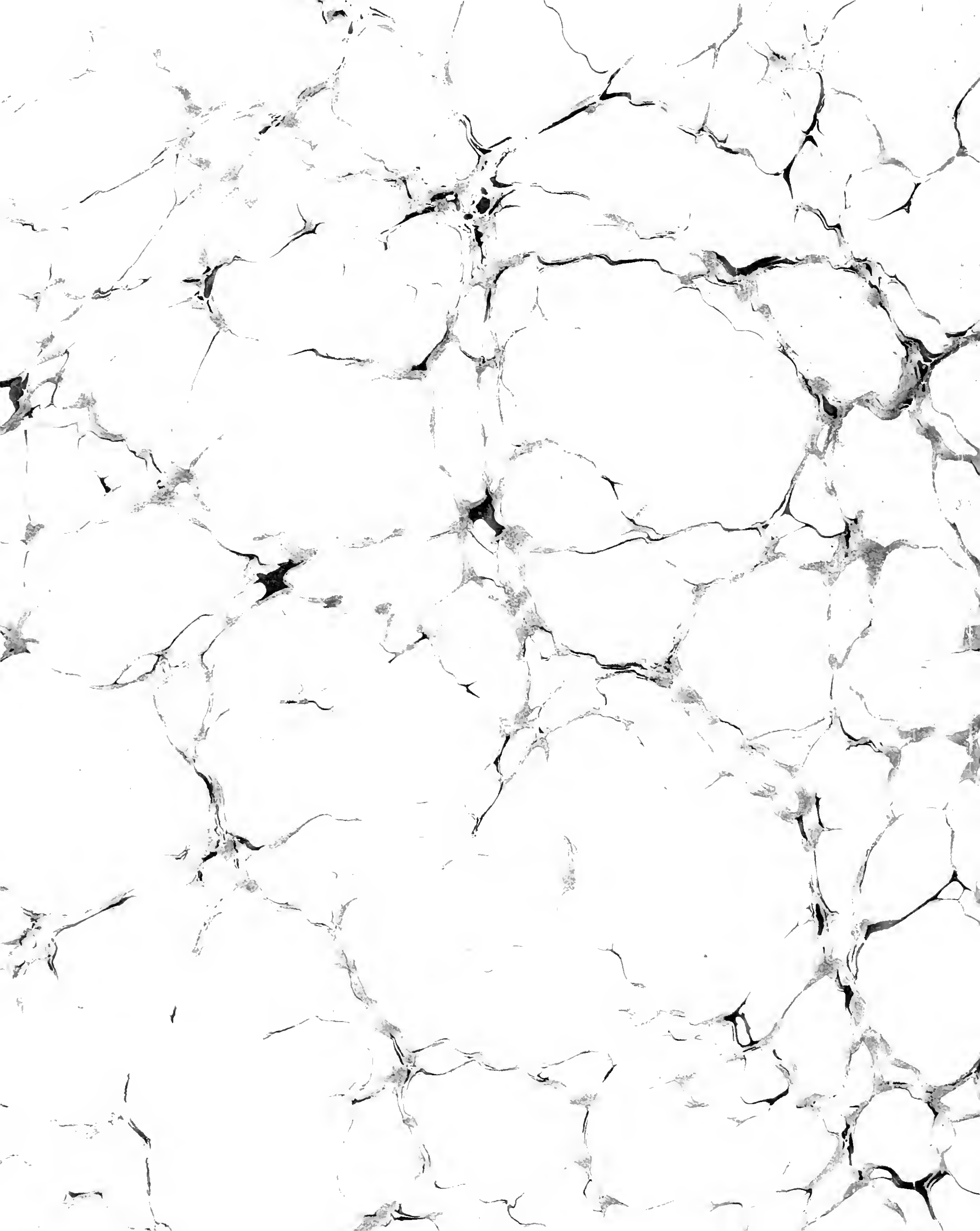

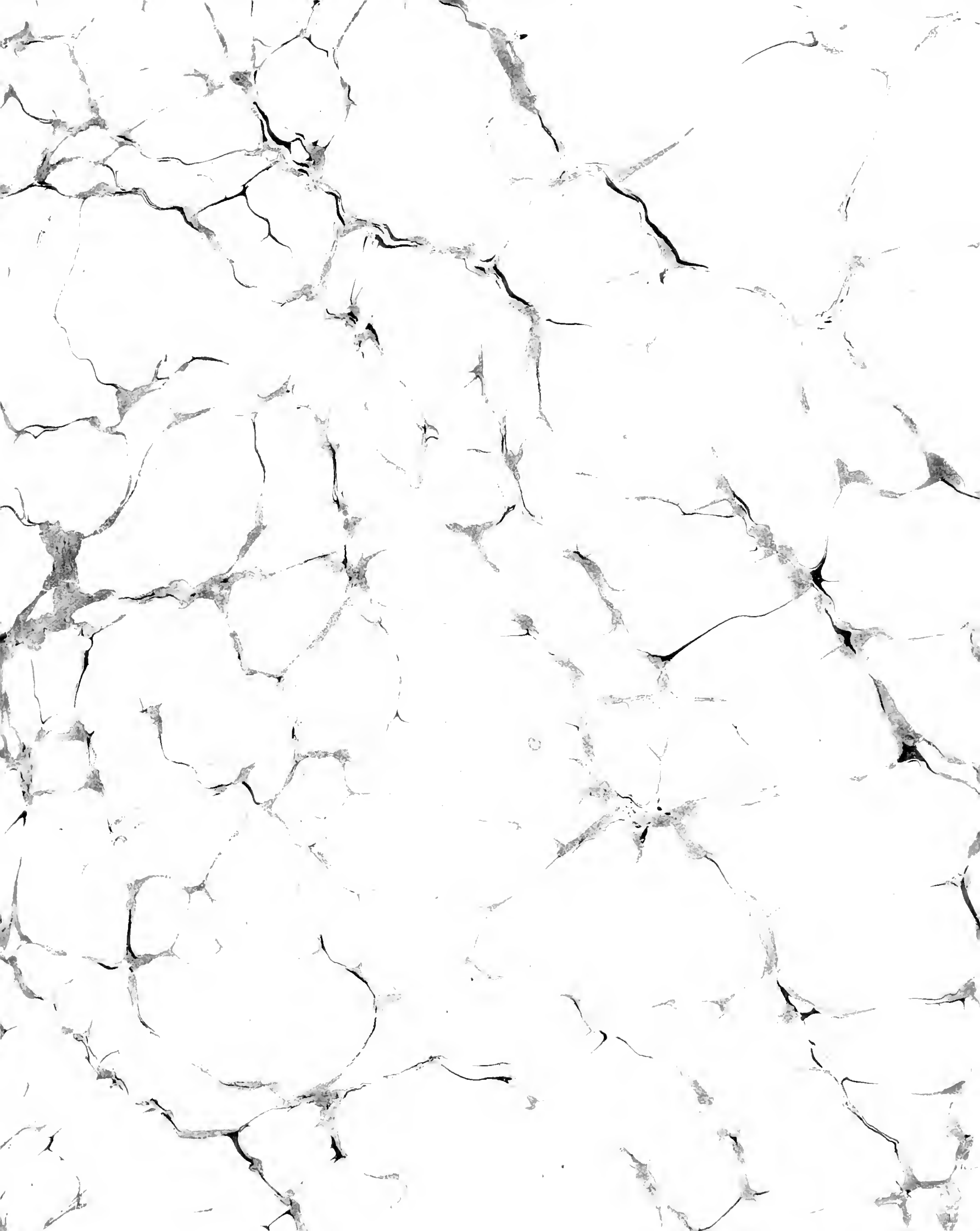

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

OUVRAGES DE L'AUTEUR.

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. In-4°, publié en *trois Parties* avec Atlas, 1873-1880-1885 .... 30 fr.

Chaque Partie se vend séparément .... 10 fr.

La Ire Partie (2e édition) contient tout ce qui est exigé pour l'*admission à l'École Polytechnique*. Elle est suivie d'un *Supplément contenant la solution de deux problèmes et des figures cavalières pour l'explication des constructions les plus difficiles.*

La IIe Partie (2e édition) et la IIIe Partie (2e édition) sont le développement du *Cours de Géométrie descriptive* professé à *l'École Polytechnique.*

TRAITÉ DE PERSPECTIVE LINÉAIRE, contenant les Tracés pour les Bas-Reliefs et les Décorations théâtrales, avec une Théorie des effets de perspective; 2e édition, entièrement revue. In-4°, avec Atlas in-folio de 40 planches, dont 8 doubles; 1884 .... 25 fr.

RECHERCHES sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques. In-8°; 1867 .... 6 fr.

MÉMOIRE sur l'appareil de l'arche biaise, suivi d'une analyse des principaux Ouvrages publiés sur cette question, et d'une réponse à des critiques sur l'enseignement de la Stéréotomie à l'École Polytechnique. (Extrait des *Annales du Conservatoire des Arts et Métiers*.) .... [illegible] fr.

ÉTUDES ÉCONOMIQUES sur l'exploitation des chemins de fer. Grand in-8°; 1880 .... 4 fr. 50

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

PAR JULES DE LA GOURNERIE,

MEMBRE DE L'INSTITUT, OFFICIER DE LA LÉGION D'HONNEUR,
INSPECTEUR GÉNÉRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES EN RETRAITE, PROFESSEUR HONORAIRE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ANCIEN EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ET PROFESSEUR DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

Les Mathématiques ont des inventions très subtiles et qui peuvent beaucoup servir tant à contenter les curieux qu'à faciliter tous les arts et diminuer le travail des hommes.

DESCARTES (*Discours de la Méthode*).

SECONDE ÉDITION.

TROISIÈME PARTIE. — TEXTE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DE L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES,

Quai des Augustins, 55.

1885

AVANT-PROPOS DE LA PREMIÈRE ÉDITION.

Je présente au public la troisième Partie de mon *Traité de Géométrie descriptive;* elle contient les VIII^e, IX^e et X^e Livres de cet Ouvrage.

Le VIII^e Livre est relatif à la courbure des surfaces; j'y expose les parties de cette importante théorie qui sont utiles dans les arts graphiques. Les démonstrations simples que je donne des principales propositions sont, en général, nouvelles [1]. On sait que le théorème de Meusnier ne peut pas servir à déterminer les rayons de courbure de la section d'une surface par son plan tangent : je donne une formule pour la solution de ce problème, et j'en fais l'application au tore [2].

Les lignes d'ombre des surfaces gauches présentent des circonstances intéressantes lorsque le point lumineux est dans le plan tangent le long d'une génératrice singulière. J'examine cette question avec quelques détails, et je présente toute une théorie sur la courbure des surfaces gauches aux divers points de ces génératrices [3].

Les surfaces lieux de normales ont de l'importance en Stéréotomie : je les étudie d'une manière assez minutieuse, et je fais connaître des constructions fort simples qui conduisent à des démonstrations élémentaires de leurs propriétés [4].

Dans un Chapitre consacré au théorème des tangentes conjuguées, je discute avec soin la manière dont les parties utiles des lignes d'ombre propre et d'ombre portée se succèdent et se continuent sur les surfaces

(1) Art. 781, 784, 811, 814, 815, 826.
(2) Art. 817, 873-876.
(3) Art. 828-844.
(4) Art. 845-858.

à courbures opposées. Je crois avoir levé les incertitudes que cette question délicate pouvait encore présenter.

J'examine dans le dernier Chapitre du VIIIe Livre les lignes de courbure, les lignes asymptotiques, et ensuite les courbes tracées sur une surface, et telles, qu'en chaque point la section normale qui leur est tangente soit surosculée par un cercle. Ces dernières lignes sont faciles à déterminer sur les surfaces du second ordre. Considérées sur l'ellipsoïde, elles ont de l'importance dans la question de la rotation des corps.

Le IXe Livre est relatif aux surfaces hélicoïdes. Un grand nombre des constructions que j'y expose m'appartiennent; j'en ai emprunté quelques-unes à des Notes que Bour avait écrites en lisant mon Mémoire sur les hélicoïdes gauches [1], et qu'il a bien voulu me communiquer. J'ai cité Bour pour tous les emprunts que je lui ai faits.

Les hélicoïdes me donnent l'occasion de présenter plusieurs applications importantes des théories relatives aux surfaces réglées et à la courbure des surfaces. Je donne plusieurs théorèmes nouveaux sur la surface de la vis à filets carrés et sur les surfaces hélicoïdes à génératrices quelconques [2].

Je m'occupe dans le Xe Livre des surfaces représentées par des lignes de niveau, et je fais connaître d'abord les opérations graphiques qui les concernent. Sur ce sujet, j'ai pris pour guide le général Noizet [3]; je reproduis la plupart des constructions qu'il donne, en les rattachant d'ailleurs aux théories exposées dans les Livres précédents.

J'ai traité avec beaucoup de réserve la question des lignes de plus grande pente, parce qu'elle est intimement liée à celle des faîtes et des

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, XXXIVe cahier.

(2) Art. 1038, 1041, 1049, 1050.

(3) Mémoire sur le dessin de la fortification (*Mémorial de l'Officier du Génie*, 1823). — Leçons sur le dessin de la fortification, 1836 (Lithographie de l'École de Metz).

thalwegs sur laquelle règne une certaine obscurité. Breton (de Champ), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, a publié sur les faîtes deux articles fort intéressants, mais qui ont montré les difficultés du problème plutôt qu'ils ne l'ont résolu (¹).

Un dernier Chapitre, relatif à l'emploi d'une surface topographique pour remplacer les Tables à double entrée, est le résumé d'un Mémoire publié par M. Lalanne, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à qui cette méthode doit ses plus grands développements (²).

Par la publication de cette troisième Partie, je remplis les engagements que j'avais pris avec le public. Mon Ouvrage présente sans doute des lacunes, mais cependant, sous le rapport des applications aux arts graphiques, je le crois plus complet qu'aucun des Traités de Géométrie descriptive publiés jusqu'à ce jour.

En terminant, je dois adresser mes remercîments à M. Mannheim, mon ami et mon collègue à l'École Polytechnique, qui a bien voulu lire mon manuscrit, et dont les observations judicieuses m'ont été fort utiles. On verra dans les Livres VIII et IX que M. Mannheim m'a souvent communiqué des démonstrations très simples et des constructions élégantes (³).

Paris, 12 août 1864.

NOTE DE L'ÉDITEUR.

Dans l'Avant-Propos de la seconde édition du tome II de son *Traité de Géométrie descriptive*, Jules de la Gournerie dit qu'il « a eu particulièrement égard à des observations qui lui avaient été transmises par M. Ernest Lebon, connu par ses travaux en Géométrie descriptive. »

Plus tard, J. de la Gournerie choisit M. E. Lebon pour le remplacer dans sa chaire du Conservatoire

(¹) *Comptes rendus*, 1er semestre 1854 et 2e semestre 1861.

(²) *Annales des Ponts et Chaussées*, 1er semestre 1846. Pour l'historique de cet utile mode de solution graphique, on pourra consulter le Mémoire de M. Lalanne et le Rapport fait par Cauchy à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 2e semestre 1843).

(³) Notes des articles 814, 845, 851, 935, 943 *bis*, 1006.

des Arts et Métiers, et, à sa mort, il le pria de terminer la publication de la seconde édition de son *Traité de Perspective linéaire*.

C'était donc se conformer à la pensée de ce regretté et célèbre savant que de confier à son disciple la revision de la seconde édition du tome III du *Traité de Géométrie descriptive*. M. E. Lebon a bien voulu accepter cette tâche, qu'il a remplie avec un soin éclairé et consciencieux dont tous lui seront reconnaissants.

Dans cette nouvelle édition, M. E. Lebon a tenu compte des modifications que l'Auteur lui avait indiquées, et il a ajouté seulement quelques notes succinctes. Le texte a été, du reste, scrupuleusement respecté.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.	Articles.
AVANT-PROPOS DE LA PREMIÈRE ÉDITION	V	
Note de l'Éditeur relative à la seconde édition	VII	

LIVRE VIII.

COURBURE DES SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE GÉNÉRALE.

	Pages.	Articles.
Considérations et formules relatives à la courbure des lignes	1	
Expression du rayon de courbure d'une ligne plane en un point		777
Expression de l'angle de contingence		778
Rayon de courbure de l'ellipse en un de ses sommets		779
Rayon de courbure de la parabole en un point quelconque		780
Théorème de M. Joseph Bertrand. — Théorème d'Euler. — Indicatrice	1	
Théorème de M. J. Bertrand sur les normales à une surface en des points infiniment voisins d'un point considéré		781-783
Théorème d'Euler, sections principales, plans principaux		784-785
La somme des courbures de deux sections normales rectangulaires quelconques est constante		786
Indicatrice		787
La somme des rayons de courbure de deux sections normales dont les plans contiennent des diamètres conjugués de l'indicatrice est constante		788
Un plan parallèle au plan tangent en un point, et infiniment rapproché de lui, coupe la surface suivant une courbe qui, dans la partie voisine du point considéré, se confond avec une conique homothétique de l'indicatrice		789-790
Détermination analytique de l'indicatrice et des rayons principaux		791
Surface du second ordre osculatrice d'une surface donnée		792
Discussion de la formule d'Euler	13	
Cas où les deux rayons principaux sont de même signe. — Ellipses indicatrices. — Ombilics		793
Ellipsoïdes osculateurs		794-795
Cas où les rayons principaux sont de signes différents. — Hyperboles indicatrices		796
Chaque asymptote de l'indicatrice a un contact au moins du second ordre avec la section normale, et d'un ordre moins élevé d'une unité, avec la branche correspondante de la section par le plan tangent		797

	Pages.	Articles.
Hyperboloïde osculateur		798-799
Cas où l'un des rayons principaux est infini. — Indicatrice formée de deux droites parallèles		800-802
Quand un plan touche une surface le long d'une courbe, la ligne de contact est tangente, en chacun de ses points, à une section principale ayant un rayon de courbure infini		803
Quand une courbe tracée sur une surface est tangente, en chacun de ses points, à une section principale ayant un rayon de courbure infini, elle est une ligne de contact de la surface avec un plan		804
Une surface est développable quand elle a en chacun de ses points un de ses deux rayons de courbure infini		805
Cylindre osculateur		806
Cas où les deux rayons principaux sont infinis		807
Cas où l'un des rayons principaux est nul		808
Constructions diverses relatives aux rayons de courbure des sections normales	19	
Construction du rayon de courbure d'une section normale. — Courbe d'Euler		809
Détermination des sections principales et de leurs rayons		810
Grandeur de la déviation. — Paramètres de déviation. — Axes de déviation	21	
Expression analytique de la déviation		811
Paramètres de déviation. Indicatrice de ces paramètres		812-813
Axes de déviation		814
Courbure des sections obliques et de la section par le plan tangent	24	
Théorème de Meusnier		815
Courbure de la section par le plan tangent		816-817 *a*
Quand une courbe tracée sur une surface a, en un point, un contact du premier ordre avec une asymptote de l'indicatrice, son plan osculateur en ce point est tangent à la surface		818
Grandeur du rayon de courbure de la transformée d'une courbe tracée sur une surface développable, déduite du théorème de Meusnier		819
Définition des lignes de courbure et des lignes asymptotiques	30	820
Notions sur la courbure des surfaces de révolution	31	
Plans principaux, rayons principaux		821
Asymptotes de l'indicatrice		822
Surface lieu des asymptotes de l'indicatrice aux divers points d'un méridien		823
Notions sur la courbure des surfaces gauches	32	
Toute surface gauche est à courbures opposées		824
Les secondes asymptotes des indicatrices d'une surface gauche aux différents points d'une génératrice forment un hyperboloïde		825
Formule donnant le produit des rayons de courbure principaux en un point		826
Quand deux surfaces gauches se raccordent le long d'une génératrice, elles ont en général deux points d'osculation		827
Lignes d'ombre d'une surface gauche quand le point lumineux est dans le plan tangent le long d'une génératrice singulière. — Rayons de courbure de la surface aux divers points de cette droite	35	
Quelle que soit la position du point lumineux dans le plan tangent le long d'une génératrice singulière, mais non sur elle, la ligne d'ombre passe par un même point de cette droite		828-831
Le point d'une génératrice singulière où passent les lignes d'ombre, quand les points lumineux sont dans le plan tangent le long de cette droite, est précisément celui qui appartient à l'intersection de la surface par ce plan tangent		832

	Pages.	Articles.
Application de ce théorème à la surface du biais passé		833
Quand le point lumineux est sur la génératrice singulière, le point de la courbe d'ombre et le sommet de la surface sont conjugués harmoniques du point lumineux et du point où la génératrice rencontre l'intersection de la surface par son plan tangent		834
Une génératrice rectiligne appartient deux fois à la courbe d'ombre quand elle contient le point lumineux, et quand un même plan est tangent à la surface en tous ses points		835
Quand une surface gauche a un sommet à distance finie, elle est touchée par sa développable asymptote tout le long de la génératrice qui passe à ce point		836
Les centres de courbure des sections faites dans une surface gauche par des plans perpendiculaires à une génératrice singulière ont pour lieu une hyperbole		837
Le plan tangent à une surface gauche le long d'une génératrice singulière est osculateur au point où se rencontrent les lignes suivant lesquelles il coupe et il touche la surface		838
Quand la surface est un conoïde, l'hyperbole lieu des centres de courbure des sections faites par des plans perpendiculaires à une génératrice singulière devient une parabole		839
Cas où l'hyperbole se réduit à deux droites		840
Cas où la génératrice singulière de la surface gauche est une arête		841
Lorsqu'une surface gauche possède une arête ayant un paramètre fini, elle est osculée par un cylindre le long de cette droite		842
Vérification de ce théorème sur le cylindroïde		843
Construction de l'hyperbole lieu des centres de courbure aux divers points d'une génératrice singulière		844
Surfaces gauches lieux de normales à une surface	11	
Si l'on élève à une génératrice d'une surface gauche et par son point central une perpendiculaire égale au paramètre de distribution, l'angle sous lequel on voit, de l'extrémité de cette droite, un segment quelconque de la génératrice, est égal à l'angle que comprennent les plans tangents à la surface aux deux extrémités du segment		845
Un point quelconque d'une génératrice étant pris pour origine, on peut tracer une droite auxiliaire telle que l'angle compris entre les rayons vecteurs de deux des points de cette ligne soit égal à l'angle formé par les plans tangents aux points de la génératrice qui sont leurs projections		846
L'ordonnée à l'origine de la droite auxiliaire est moyenne proportionnelle entre les grandeurs absolues des rayons de courbure principaux de la surface, à l'origine		847
Divers usages de la droite auxiliaire		848
Construction de la droite auxiliaire pour une génératrice d'une surface gauche lieu de normales		849
Le centre de courbure de la section normale tangente à la directrice est le point où le plan de cette section coupe normalement la surface gauche		850
La grandeur absolue du produit des rayons de courbure de la surface des normales en un point de son intersection avec la surface directrice est égale au carré du paramètre de déviation qui correspond à l'azimut de cette courbe		851
La tangente à la trace de la surface des normales et la trace du plan central d'une de ses génératrices, sur le plan tangent à la surface directrice, sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice de cette dernière		852
Construction du rayon de courbure d'une section normale, du paramètre de déviation et de l'azimut d'une droite conjuguée à une tangente donnée		853

	Pages.	Articles.
Variation du point central et du paramètre d'une génératrice normale à une surface, suivant l'azimut de la courbe directrice		854
Le produit des rayons de courbure principaux de la surface gauche, au point où la génératrice normale rencontre les axes de déviation, est indépendant de l'azimut de la directrice		855
Quand la directrice est une asymptotique, c'est aussi la ligne de striction de la surface gauche lieu des normales		856
Cas où le point considéré de la surface directrice est un ombilic. Cas où cette surface est développable		857
La somme des inverses des ordonnées du point central de la génératrice pour deux directions conjugées de la directrice est constante, et égale à la somme des courbures principales		858

CHAPITRE II.

APPLICATIONS DIVERSES.

	Pages.	Articles.
Construction des rayons de courbure et des plans osculateurs d'une courbe donnée par ses projections	51	
Cas où la tangente à la courbe au point considéré est parallèle à la ligne de terre		859
Cas où la tangente à la courbe au point considéré est parallèle à l'un des deux plans de projection seulement		860
Cas général		861
Considérations générales		862-863
Construction des sommets d'une surface d'égale pente	54	864
Détermination des tangentes à la courbe d'intersection de deux surfaces qui se touchent	54	
Exposition de la méthode		865
Application à l'épure du conoïde de la voûte d'arêtes en tour ronde		866
Cas où les surfaces tangentes sont des cônes ou des cylindres		867
Intersection d'un tore par une sphère tangente		868-869
Digression sur les sections circulaires du tore		870-872
Rayons de courbure de la section du tore par un plan tangent	62	873-876

CHAPITRE III.

THÉORÈME DES TANGENTES CONJUGUÉES.

	Pages.	Articles.
Démonstration de ce théorème	65	877
Construction des tangentes aux courbes d'ombre propre	66	
Construction de la tangente à une courbe d'ombre en un point où l'on connaît les rayons principaux de la surface		878
Cas où l'un des rayons principaux est infini		879
Cas où l'un des rayons principaux est nul		880
Quand le point lumineux est sur la surface éclairée, la courbe d'ombre a deux branches qui se croisent à ce point tangentes aux deux asymptotes de l'indicatrice		881

	Pages.	Articles.
Construction des tangentes et des asymptotes aux courbes d'ombre propre des surfaces gauches	68	
Construction des tangentes		882
Construction des asymptotes		883
Lorsqu'un cône est circonscrit à un conoïde, son sommet et une asymptote de la courbe de contact sont situés de part et d'autre et à égales distances de la génératrice, dans le plan qui est tangent à l'infini		884
Les génératrices ne sont tangentes ou asymptotes aux courbes d'ombre qu'aux sommets de la surface		885
Quand une surface gauche est éclairée par des rayons parallèles, l'asymptote à une branche infinie de la courbe d'ombre est dans le plan tangent à l'infini, et à égales distances de la génératrice de la surface gauche et de celle des génératrices de l'hyperboloïde osculateur qui est parallèle à cette droite.		886
Quand une génératrice G est parallèle aux rayons de lumière, la courbe d'ombre a une branche infinie dont l'asymptote est la génératrice parallèle à G dans l'hyperboloïde osculateur le long de cette droite		887
Parties réelles et parties virtuelles des courbes d'ombre propre	71	
Définitions		888
En chaque point limite d'un arc réel, le rayon de lumière a un contact du second ordre avec la surface		889
A tout point limite le rayon de lumière est tangent à la ligne d'ombre		890
Le cône circonscrit à une surface a un rebroussement le long de chacune des génératrices qui sont asymptotes de l'indicatrice de leur point de contact		891
Détermination des points limites des courbes d'ombre		892
Étude des lignes d'ombre propre d'un tore éclairé par des rayons divergents		893-897
Détermination des points limites de la courbe d'ombre propre d'une surface de révolution éclairée par des rayons parallèles		898-900
Courbe d'ombre portée. — Les arcs réels des courbes d'ombre propre et d'ombre portée ont les mêmes points limites		901
Les courbes d'ombre propre et d'ombre portée se rencontrent tangentiellement aux points limites		902
Étude des lignes d'ombre portée par un tore sur lui-même, et considérations générales		903-904
Quand sur une surface la courbe d'ombre propre et la courbe d'ombre portée par une autre surface quelconque se rencontrent, ces lignes sont tangentes à deux diamètres conjugués de l'indicatrice du point commun		905
Lignes d'ombre du tore quand le point lumineux est sur la tangente commune alterne des deux cercles contenus dans un plan méridien		906
Parties réelles et parties virtuelles des courbes d'ombre, quand on doit avoir égard aux dimensions du corps lumineux		907
Extension du théorème des tangentes conjuguées	82	908-910

CHAPITRE IV.

LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE ET RELATIVES A SES COURBURES.

§ I. — *Lignes de courbure.*

Lignes de courbure des surfaces de révolution, des surfaces développables et des surfaces-moulures	84	911-913

	Pages.	Articles.
Observations pour la détermination des lignes de courbure de quelques surfaces......	86	
Lorsque sur une surface enveloppe les caractéristiques sont des lignes de courbure, elles sont aussi lignes de courbure sur les enveloppées.........		914
Théorème de Ch. Dupin sur les surfaces orthogonales..............................	86	915
Surfaces du second ordre orthogonales..............................	88	
Deux surfaces du second ordre ayant les mêmes plans principaux sont orthogonales quand leurs sections principales se coupent à angle droit.........		916
Deux surfaces du second ordre sont orthogonales quand leurs sections principales sont homofocales..............................		917
Lignes de courbure des surfaces du second ordre..............................	89	
Système général de surfaces du second ordre homofocales..............................		918-919
La projection d'une ligne de courbure d'une surface du second ordre sur l'un quelconque de ses plans principaux est une conique..............................		920
Projection des lignes de courbure de l'ellipsoïde scalène sur le plan de l'axe majeur et de l'axe moyen..............................		921-922
Ombilics de l'ellipsoïde scalène..............................		923
Projection des lignes de courbure de cette surface sur le plan de l'axe majeur et de l'axe mineur..............................		924-926
Observations sur les parties parasites des projections des lignes de courbure de l'ellipsoïde scalène..............................		927-928
Lignes de courbure de l'hyperboloïde à une nappe..............................		929
Observations sur les dispositions des lignes de courbure près d'un ombilic...........	97	930
Mesure de la courbure d'une surface en un point..............................	98	931

§ II. — *Lignes asymptotiques.*

	Pages.	Articles.
Considérations générales..............................	99	
Une courbe tracée sur une surface en est une asymptotique, quand chacun de ses plans osculateurs est tangent à la surface..............................		932
Lignes asymptotiques des surfaces gauches..............................	99	
Les points où les lignes asymptotiques d'une surface gauche coupent deux génératrices quelconques forment sur ces droites des divisions homographiques.		933
Les asymptotiques d'une surface gauche passent à chaque sommet, et y sont en général tangentes à la génératrice..............................		934
Lorsqu'une ligne asymptotique d'une surface gauche est une trajectoire orthogonale des génératrices, cette surface est le lieu des normales principales à l'asymptotique..............................		935
Lignes asymptotiques des surfaces de révolution..............................	100	936

§ III. — *Lignes tangentes aux sections normales surosculées par des cercles.*

	Pages.	Articles.
Détermination des sections normales surosculées par des cercles, en un point d'une surface..............................	101	
Il passe par tout point d'une surface trois sections normales surosculées par des cercles..............................		937
Quand la surface est du second ordre, deux de ces lignes sont les génératrices rectilignes..............................		938
Détermination sur les surfaces du second ordre des lignes tangentes aux sections normales surosculées par des cercles..............................	103	
Si l'on circonscrit une développable à une surface du second ordre et à une sphère concentrique, la ligne de contact sur la surface sera tangente en chacun de ses points à une section normale surosculée par un cercle.......		939-941

	Pages.	Articles.
Équations des courbes de contact ou polhodies		942-943
Représentation des polhodies d'un ellipsoïde scalène		944-945

§ IV. — *Lignes géodésiques. — Lignes tangentes aux sections de même courbure.*

	Pages.	Articles.
Définitions et considérations générales	112	946
Courbure géodésique	113	
Lorsqu'une courbe est tracée sur une surface, sa courbure géodésique en un point est la courbure de sa transformée dans le développement de la développable circonscrite dont elle est la ligne de contact		947
Relation entre le rayon de courbure d'une courbe tracée sur une surface, l'angle de son plan osculateur avec le plan tangent, le rayon de courbure de la section faite dans la développable circonscrite par un plan perpendiculaire à la génératrice, et l'angle de la courbe considérée avec cette section		948

LIVRE IX.

SURFACES HÉLICOÏDES.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE GÉNÉRALE.

	Pages.	Articles.
Définition de l'hélice. — Projection de cette courbe sur un plan parallèle à son axe	115	
Définition de l'hélice. — Propriétés élémentaires de cette courbe		949
Pas réduit		950
Construction de la projection d'une hélice sur un plan parallèle à son axe; construction des tangentes à l'hélice; le lieu des traces de ces droites sur un plan perpendiculaire à l'axe est une développante de cercle		951
La projection d'une hélice sur un plan parallèle à son axe est une sinusoïde. Inflexions de cette courbe		952-953
Projection oblique d'une hélice sur un plan perpendiculaire à son axe	118	
La projection oblique d'une hélice sur un plan perpendiculaire à son axe est une cycloïde raccourcie, une cycloïde ou une cycloïde allongée		954-955
Surfaces hélicoïdes. — Hélicoïdes réglés	120	
Définition et génération des surfaces hélicoïdes		956
Le cône directeur d'un hélicoïde réglé est de révolution		957
Hélicoïde développable		958
Ligne de striction de l'hélicoïde gauche. — Paramètre d'une génératrice	121	
Point central d'une génératrice, et ligne de striction de la surface		959
Expressions diverses et construction du paramètre des génératrices		960-961
Hélicoïdes réglés applicables les uns sur les autres	124	
Équations entre les variables et les constantes d'une série d'hélicoïdes applicables les uns sur les autres		962
Surfaces remarquables de la série		963

	Pages.	Articles.
Résolution graphique du problème des hélicoïdes applicables		964-965
Développable asymptote d'un hélicoïde gauche	127	966
Hélices doubles de l'hélicoïde réglé	128	967

CHAPITRE II.

HÉLICOÏDE DÉVELOPPABLE.

Considérations générales	128	968
Plans tangents	129	
Plan tangent en un point de la surface		969
Plan tangent passant par un point non situé sur la surface		970
Plan tangent parallèle à une droite		971
Sections planes	130	
Construction générale d'une section plane et de ses asymptotes : première méthode		972
Seconde méthode applicable à toutes les surfaces d'égale pente		973-975
Hélicoïde développable déterminé par deux hélices directrices	133	976
Développement de l'hélicoïde	134	
Rayon de courbure de l'hélice		977-978
Construction de la transformée de l'hélice de rebroussement		979
Les transformées des diverses hélices de la surface sont des cercles concentriques		980
Hélicoïdes développables applicables les uns sur les autres		981
Centres de courbure de l'hélice et surface lieu de ses développées	137	
Le lieu des centres de courbure d'une hélice est une autre hélice, et celle-ci a tous ses centres de courbure sur la première		982
Hélicoïde développable lieu des développées d'une hélice		983
Exercice pour la section d'un hélicoïde développable par un plan, et le développement de cette surface	138	
Représentation d'un hélicoïde développable		984
Construction de son intersection par un plan		985
Développement de l'hélicoïde		986
Construction de la transformée de l'intersection et détermination de ses inflexions		987

CHAPITRE III.

SURFACE DE LA VIS A FILETS TRIANGULAIRES.

Définition. — Généralités	140	
Définition, ligne de striction, construction des génératrices, hélices doubles, nappes		988
Sections planes	141	

	Pages.	Articles.
Construction d'une section plane et de ses asymptotes. — La section de la surface par un plan perpendiculaire à l'axe est une spirale d'Archimède, qui a pour paramètre le rayon du cylindre auquel appartient l'arête de rebroussement de l'hélicoïde développable asymptote		989
L'enveloppe des droites menées par les différents points d'une spirale d'Archimède, perpendiculairement aux rayons vecteurs, est une développante de cercle		990
Plans tangents	143	
Deux constructions pour le plan tangent en un point donné		991
Les tangentes de plus grande pente à une surface de vis à filets triangulaires aux divers points d'une génératrice forment un hyperboloïde		992
Détermination du point de la surface où le plan tangent est parallèle à un plan donné		993
Courbe d'ombre propre dans le cas de rayons parallèles	145	
Construction de la projection horizontale de cette courbe		994-995
Cercle diamétral, points doubles		996
Construction des points qui sont sur une hélice donnée		997
Cas où les rayons de lumière sont plus inclinés que les génératrices		998
Cas où les rayons de lumière sont moins inclinés que les génératrices		999
Cas où les rayons de lumière ont la même inclinaison que les génératrices		1000-1001
Cas où les rayons de lumière sont horizontaux		1002
Équation générale de la courbe		1003
Indicatrice. — Points limites des parties réelles des courbes d'ombre pour des rayons parallèles	152	
Construction des asymptotes de l'indicatrice		1004
Détermination des parties de la surface qui sont de chaque côté du plan tangent en un point		1005
Détermination des points limites des parties réelles de la courbe d'ombre		1006
Courbe d'ombre propre dans le cas de rayons divergents	155	
Construction de la courbe		1007
Détermination des branches infinies		1008
Division de la courbe en spires		1009
Construction des points situés sur une hélice donnée		1010
L'axe est asymptote de la courbe		1011
Tangentes et asymptotes des courbes d'ombre. — Points limites dans le cas des rayons divergents	157	
Construction des tangentes à la projection horizontale d'une courbe d'ombre		1012
Construction des asymptotes		1013
Tangentes et asymptotes de la courbe dans l'espace		1014
Points limites des courbes d'ombre		1015
Représentation d'une surface de vis à filets triangulaires et de ses ombres	159	1016-1017
Représentation d'une vis à filets triangulaires et de son écrou	161	
Figures géométrales d'une vis à filets triangulaires		1018
Ombres de cette vis		1019
Ombres de l'écrou		1020
Hélicoïde de la vis à filets triangulaires employé comme surface auxiliaire	164	
Cas où la surface considérée a une directrice rectiligne, et où les génératrices rencontrent cette droite sous des angles égaux		1021
Quand une surface gauche a une directrice rectiligne, et que les génératrices rencontrent cette droite sous un angle constant, la ligne de striction de la surface est cette directrice		1022

	Pages.	Articles.
Extension à l'héliçoïde gauche général des constructions relatives à la surface de la vis à filets triangulaires		1023
Observations générales sur les rayons de courbure et les lignes asymptotiques de la surface de la vis à filets triangulaires	166	1024

CHAPITRE IV.

SURFACE DE LA VIS A FILETS CARRÉS.

	Pages.	Articles.
Définitions. — Propriétés générales	167	
Définition de la surface; grandeur du paramètre		1025
Hélices excentriques		1026
Plans tangents. — Sections planes	168	
Les constructions relatives à la surface de la vis à filets triangulaires sont en général inapplicables à la surface de la vis à filets carrés		1027
Construction du plan tangent en un point donné		1028
Sections planes		1029
Ligne d'ombre propre pour des rayons parallèles	169	
La ligne d'ombre propre pour des rayons parallèles est une hélice excentrique.		1030-1031
Les spires de cette hélice sont alternativement réelles et virtuelles		1032
Représentation d'une surface de vis à filets carrés et de ses ombres		1033
Courbe d'ombre propre dans le cas où les rayons sont divergents	172	1034
Représentation d'une vis à filets carrés et de son écrou	173	
Figures géométrales d'une vis à filets carrés et de son écrou		1035
Ombres de cette vis		1036
Ombres de l'écrou		1037
Rayons de courbure. — Lignes asymptotiques. — Lignes de courbure	175	
Les rayons de courbure principaux ont, en un point quelconque, des longueurs absolues égales. — La projection sur un plan perpendiculaire à l'axe du lieu des centres de courbure principaux d'une surface de vis à filets carrés, aux différents points d'une génératrice, est une hyperbole équilatère		1038
Grandeur des rayons de courbure		1039
La surface de la vis à filets carrés est la seule surface gauche dont les rayons principaux de courbure aient en un point quelconque des grandeurs absolues égales		1040
Sur cette surface, les courbes tangentes aux sections normales surosculées par des cercles rencontrent les génératrices rectilignes et se coupent elles-mêmes sous des angles de 60°		1041

CHAPITRE V.

SURFACES HÉLIÇOÏDES NON RÉGLÉES.

	Pages.	Articles.
Section plane. — Plan tangent. — Courbe d'ombre. — Normale. — Surface de vis à filets triangulaires normale	180	

	Pages	Articles
Détermination du contour apparent et de la section plane d'une surface hélicoïde		1042
Plan tangent. Surface de vis à filets triangulaires de raccordement		1043
Construction des lignes d'ombre		1044-1045
Construction de la normale		1046
Surface de vis à filets triangulaires normale		1047
Intersection d'un hélicoïde et d'un conoïde		1048
Indicatrices	183	
Construction des asymptotes de l'indicatrice (la construction des indicatrices elliptiques est donné à l'art. 1051 *a*)		1049-1050
Détermination des points limites d'une courbe d'ombre		1051
Construction des asymptotes de l'indicatrice d'un hélicoïde gauche général en point donné		1052
Représentation d'un serpentin	189	1053

LIVRE X.

SURFACES TOPOGRAPHIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE GÉNÉRALE.

	Pages	Articles
Représentation d'une surface par des courbes horizontales. — Problèmes élémentaires	191	
Lignes de niveau, équidistance		1054
Courbes intercalaires		1055
Déterminer la cote d'un point donné, sur une surface, par sa projection		1056
Sens des courbures d'un terrain		1057
Section plane d'une surface topographique		1058
Intersection de deux surfaces topographiques		1059
Intersection d'une ligne et d'une surface topographique		1060
Lignes d'égale pente	194	
Tracer une ligne d'égale pente sur une surface topographique, à partir d'un point déterminé		1061
Tracer sur une surface topographique une ligne d'égale pente entre deux points donnés		1062
Plans tangents	195	
Construire un plan tangent à une surface topographique en un point donné		1063-1065
Mener un plan tangent à une surface topographique par une droite donnée		1066-1068
Cônes et cylindres circonscrits	199	
Déterminer la courbe de contact et la trace horizontale d'un cône ou d'un cylindre circonscrit		1069-1070
Exercice pour la détermination d'un cône circonscrit		1071
Lignes de plus grande pente	201	
Définition des lignes de plus grande pente		1072

	Pages	Articles.
Détermination de ces lignes sur les surfaces de révolution................		1073
Lignes de plus grande pente des surfaces dont les courbes horizontales sont des ellipses homothétiques ou des hyperboles homothétiques ayant leurs centres sur une même verticale......................................		1074-1077
Indication des diverses dispositions que peuvent présenter les lignes de plus grande pente aux points où le plan tangent est horizontal..............		1078
Lignes de plus grande pente des surfaces dont les courbes horizontales sont des ellipses identiques, coupées suivant un de leurs axes par un plan vertical.		1079-1080 *a*
Lignes de plus grande pente des conoïdes et des hélicoïdes................		1081
Observations générales..		1082

CHAPITRE II.

TABLEAUX GRAPHIQUES.

	Pages	Articles.
Emploi des surfaces topographiques pour remplacer les Tables à double entrée......	208	
Notions sur les Tables à simple entrée..................................		1083
Courbe représentée par une projection cotée, et remplaçant une Table à simple entrée..		1084
Tableau propre à remplacer la Table de Pythagore........................		1085
Tableau des températures moyennes à Halle.............................		1086-1087
Tableau pour la résolution de l'équation numérique du troisième degré....		1088
Tableau graphique représentant deux fonctions différentes de deux mêmes arguments	211	1089
Anamorphose des Tableaux graphiques....................................	212	
Anamorphose du Tableau qui remplace la Table de Pythagore............		1090
Anamorphose d'un Tableau relatif au calcul des terrassements............		1091
Parties parasites des courbes de niveau.................................		1092
Cas où l'on emploie simultanément deux Tableaux pour résoudre une même formule..		1093
Application de l'anamorphose à la représentation graphique de certaines lois naturelles.	214	
Tableau relatif à la répartition de la population en France, suivant les âges.		1094
TABLE ANALYTIQUE..	217	

TRAITÉ
DE
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

LIVRE HUITIÈME.
COURBURE DES SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.
THÉORIE GÉNÉRALE.

Considérations et formules relatives à la courbure des lignes.

777. Le rayon de courbure d'une courbe plane ω en un point O (*fig.* 326) est le rayon du cercle avec lequel tend à se confondre un cercle tangent en O, et sécant en un point voisin M, lorsque ce point se rapproche indéfiniment de O (art. **94** et **95**).

Si nous projetons le point M sur la normale OZ et sur la tangente OX, et si nous appelons R le rayon du cercle considéré, nous aurons

$$\overline{gM}^2 = Og(2R - Og),$$

ou

$$\overline{Om}^2 = mM(2R - mM).$$

Quand le point M est infiniment voisin de O, l'ordonnée mM est infiniment petite, et peut être négligée auprès de la longueur finie 2R. On a par suite, en appelant α l'abscisse Om et β l'ordonnée mM,

$$(1)\qquad \frac{1}{R} = \frac{2\beta}{\alpha^2}.$$

La quantité $\frac{1}{R}$ est la *courbure de la ligne plane* ω au point O.

L'équation que nous venons de trouver nous sera souvent utile. Elle donne pour le rayon de courbure une valeur positive quand l'ordonnée β est positive, c'est-à-dire quand la courbe tourne sa concavité du côté de la partie de l'axe OZ sur laquelle on mesure les ordonnées positives. Elle montre que l'ordonnée β est infiniment petite du second ordre, quand l'abscisse α, mesurée sur la tangente, est infiniment petite du premier ordre.

L'abscisse α étant constante, si l'on fait varier β d'une quantité infiniment petite du second ordre, R variera d'une quantité finie. Lorsque le rayon de courbure d'une courbe plane en un point est altéré d'une grandeur infiniment petite, la variation de l'ordonnée β est d'un ordre supérieur au second.

778. Le triangle rectangle OMm (*fig.* 326) donne

$$\overline{OM}^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Si la longueur α est infiniment petite, la quantité β^2, d'ordre plus élevé que α^2, peut être négligée, et l'on a

$$OM = \alpha.$$

Par conséquent, dans la formule (1), on peut prendre indifféremment pour α l'abscisse Om du point M infiniment voisin de O, ou la corde OM, ou encore l'arc OM, car il ne diffère de sa corde que d'un infiniment petit du troisième ordre. Cette corde est, en effet, le double du sinus de la moitié de l'arc, et le sinus d'un arc infiniment petit est égal à l'arc lui-même quand on néglige les infiniment petits du troisième ordre. Nous ne faisons pas de distinction entre les arcs OM de la courbe ω et du cercle, parce qu'on doit les considérer comme se confondant à la limite.

Si l'on représente par ε l'angle de contingence, on aura

$$R\varepsilon = \alpha,$$

et, en vertu de l'équation (1),

$$(2) \qquad \varepsilon = \frac{2\beta}{\alpha}.$$

779. Pour déterminer à l'aide de la formule (1) le rayon de courbure d'une ligne plane, en un point donné, on prend la tangente et la normale en ce point pour axes des abscisses et des ordonnées. On fait ensuite l'abscisse x infiniment petite : l'ordonnée y devient infiniment petite du second ordre; on néglige les termes d'un ordre plus élevé, et la valeur de $\frac{x^2}{2y}$ donnée par l'équation est le rayon cherché.

Par exemple, si nous voulons avoir le rayon de courbure de l'ellipse en un de ses sommets, nous remarquerons que, la tangente et la normale en un sommet étant prises pour axes, cette courbe est représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2y}{b} = 0.$$

Lorsque l'on suppose x infiniment petite, y devient infiniment petite du second ordre, et son carré doit être négligé. Nous avons alors

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2y}{b} = 0, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{a^2}{b}.$$

On déduit facilement de cette formule la construction que nous avons donnée sans démonstration dans la seconde note de l'article **495**.

780. Pour second exemple, nous chercherons l'expression générale du rayon de courbure de la parabole représentée par l'équation

$$y^2 - 2px = 0.$$

Nous prenons le point A considéré sur la courbe pour origine d'un nouveau système d'axes rectangulaires, formé par la tangente Ax' et par la normale Ay' à la courbe en ce point. L'angle de Ax' et de l'axe primitif des x étant θ et l'ordonnée du point A étant y_1, les formules de transformation des coordonnées sont

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta + \frac{y_1^2}{2p},$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta + y_1.$$

L'équation de la parabole devient

$$\begin{aligned} &x'^2\sin^2\theta + 2x'y'\sin\theta\cos\theta + y'^2\cos^2\theta \\ &\quad + 2(y_1\sin\theta - p\cos\theta)x' + 2(y_1\cos\theta + p\sin\theta)y' = 0. \end{aligned}$$

Pour que l'axe des abscisses soit tangent à la courbe, il faut que la valeur zéro de y' donne pour x' deux valeurs nulles, et par suite que le coefficient du terme qui contient la coordonnée x' seule et à la première puissance s'évanouisse. Nous avons donc

$$(a) \qquad y_1\sin\theta - p\cos\theta = 0,$$

$$x'^2\sin^2\theta + 2x'y'\sin\theta\cos\theta + y'^2\cos^2\theta + 2(y_1\cos\theta + p\sin\theta)y' = 0.$$

Lorsque x' est infiniment petite, y' devient infiniment petite du second ordre;

supprimant les termes d'un ordre plus élevé, on a

$$x'^2 \sin^2\theta + 2(y_1 \cos\theta + p \sin\theta) y' = 0;$$

d'où

$$R = -\frac{y_1 \cos\theta + p \sin\theta}{\sin^2\theta}.$$

Éliminant enfin θ au moyen de l'équation (a), on obtient

$$R = \frac{(y_1^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

On trouve par cette formule que le rayon de courbure au sommet est égal à p.

Théorème de M. Joseph Bertrand. — Théorème d'Euler. Indicatrice.

781. Nous avons vu que toutes les courbes qui sont tracées sur une surface, et qui se croisent en un point, y sont tangentes à un même plan; nous allons maintenant étudier plus intimement les relations qui existent entre ces lignes.

Soient

OZ la normale à une surface en un point O (*fig.* 327);
OX et OY deux tangentes rectangulaires quelconques;
OM et ON les sections de la surface par les plans ZOX et ZOY.

Nous prenons sur OX et OY des longueurs infiniment petites égales à Om et On, et par les points m et n nous concevons des plans respectivement parallèles à ZOY et à ZOX; ils coupent le plan XOY suivant les droites mp et np, et la surface suivant les courbes MP et NP se rencontrant en P.

La surface étant continue, le rayon de courbure de la ligne MP au point M ne diffère que d'une longueur infiniment petite du rayon de courbure de la ligne ON au point O; les longueurs des ordonnées β correspondant à une même grandeur de α sont donc égales pour ces deux courbes (art. **777**), et par suite, si la tangente à MP au point M était la droite MY' parallèle à OY, l'ordonnée pP serait égale à (mM + nN). Il résulte de là que l'angle infiniment petit, compris entre la tangente à MP au point M et la droite MY', est égal à

$$\frac{mM + nN - pP}{mp}.$$

Mais cet angle est aussi égal à celui que la normale ME à MP fait avec la droite ME_1 parallèle à OZ; on a donc

$$(3)\qquad \widehat{EME_1} = \frac{mM - nN - pP}{mp}.$$

On trouve de même

$$\widehat{GNG_1} = \frac{mM + nN - pP}{np}.$$

Enfin, les longueurs mp et np étant égales, on a

$$\widehat{EME_1} = \widehat{GNG_1}.$$

La droite ME est dans le plan Mmp qui n'est pas normal à OM, et par suite elle n'est pas normale à la surface. Pour la rendre normale, il faut la faire tourner autour de la tangente à MP en M, jusqu'à ce qu'elle soit perpendiculaire à OM; mais la tangente à MP faisant avec le plan ZOX un angle qui ne diffère d'un droit que d'une quantité infiniment petite, et le déplacement de la droite ME étant lui-même infiniment petit, l'angle qu'elle fait avec le plan ZOX n'est altéré que d'une quantité infiniment petite d'un ordre élevé. Les angles infiniment petits que les normales à la surface aux points M et N font respectivement avec les plans ZOX et ZOY sont donc égaux aux angles EME_1 et GNG_1, et par suite égaux entre eux. De là résulte un théorème dû à M. J. Bertrand [1], et que nous énoncerons plus loin.

782. Soient MF la normale à la surface au point M, et MF_1 sa projection sur le plan ZOX. Nous nous proposons de déterminer l'ordre de grandeur de la différence des angles EME_1 et FMF_1.

Les droites ME_1, MF_1 et MP forment un trièdre dans lequel le dièdre le long de ME_1 est droit; on a donc

$$\cos PMF_1 = \cos PME_1 \cos E_1MF_1.$$

Mais les angles PMF et PME sont droits; nous pouvons par conséquent écrire

$$\cos\left(90^\circ + \widehat{FMF_1}\right) = \cos\left(90^\circ + \widehat{EME_1}\right)\cos E_1MF_1$$

ou bien

$$\sin FMF_1 = \sin EME_1 \cos E_1MF_1;$$

---

[1] *Journal de M. Liouville*, 1844.

L'étude des systèmes de droites qui ne sont pas normales à une surface est en dehors de notre cadre. Les personnes qui voudraient connaître cette question peuvent consulter le Mémoire de M. J. Bertrand, et les développements qui ont été donnés à cette partie de son travail par Duhamel (*Éléments de Calcul infinitésimal*, t. II).

et, comme les trois angles FMF_1, EME_1 et E_1MF_1 sont infiniment petits, il suffit de négliger dans chaque membre les termes du troisième ordre pour avoir

$$\widehat{FMF_1} = \widehat{EME_1}.$$

783. Nous appellerons *déviation de la normale* à une surface, en un point M voisin d'un point considéré O, l'angle FMF_1 formé par la normale en M avec le plan ZOM qui contient le point M et la normale en O [1]. On peut, en employant cette expression, énoncer comme il suit le théorème de M. J. Bertrand : *Les déviations des normales en deux points d'une surface, situés à des distances infiniment petites égales d'un point considéré et dans des directions rectangulaires, sont égales en grandeur absolue.*

Sur la *fig.* 327, les droites MF et NH situées d'un même côté de la surface sont toutes les deux dans l'angle dièdre XOY. Cela résulte de ce que l'ordonnée pP est plus petite que la somme $(mM + nN)$, qui exprime la hauteur à laquelle serait le point P si la déviation était nulle ; mais, quand le trinôme $(mM + nN - pP)$ est négatif, les droites MF et NH sont hors du dièdre XOY.

Si l'on conçoit que le plan ZOM tourne autour de OZ, la déviation de la normale au point mobile M variera, et, lorsque le plan sera confondu avec ZON, la partie de la normale située au-dessus de la surface sera d'un côté différent de celui où elle se trouvait, quand le plan avait sa position initiale. Il y a donc pour le plan au moins une position intermédiaire où il contient la normale au point situé sur sa trace, à une distance infiniment petite de O. Il jouit d'ailleurs de la même propriété dans une seconde position perpendiculaire à la première.

784. Soient maintenant

OZ la normale à une surface en un point quelconque O (*fig.* 328) ;
OM et ON deux sections de la surface par des plans rectangulaires, tels que les normales aux points de ces lignes infiniment voisins de O rencontrent OZ ;
OX et OY les traces des plans ZOM et ZON sur le plan tangent en O à la surface ;
OQ la section par un plan normal en O et faisant un angle φ avec le plan ZON ;
Oq la trace du plan ZOQ sur le plan tangent en O.

Nous prenons sur Oq un point q infiniment voisin de O, et nous traçons d'abord les droites qn et qm respectivement parallèles à OX et à OY, puis les droites qQ, mM et nN parallèles à OZ. Enfin nous appelons R, R_1 et R_2 les rayons de

---

[1] Transon a employé le mot *déviation* dans un sens différent (*Journal de Liouville*, t. VI). Liouville s'est servi de l'expression de *déviation relative* dans la théorie des courbures comparées de deux lignes tangentes (5e édition de l'*Analyse appliquée* de Monge, 1re Note). Nous pensons qu'il ne peut y avoir aucune confusion.

courbure en O des sections normales OQ, OM et ON. Nous avons immédiatement

$$\frac{1}{R} = 2\frac{qQ}{\overline{Oq}^2}, \quad \frac{1}{R_1} = 2\frac{mM}{\overline{Om}^2}, \quad \frac{1}{R_2} = 2\frac{nN}{\overline{On}^2}.$$

La déviation est nulle aux points M et N; par conséquent, si l'on fait passer par le point N un plan parallèle à ZOX, la tangente à la section NQ au point N sera parallèle à OX. D'après cela, et conformément à une observation de l'article **781**, nous avons

$$qQ = mM + nN.$$

En remplaçant qQ, mM et nN par leurs valeurs déduites des premières équations, on obtient

$$\frac{\overline{Oq}^2}{R} = \frac{\overline{Om}^2}{R_1} + \frac{\overline{On}^2}{R_2}.$$

Mais les longueurs Om et On sont respectivement égales à $Oq\cos\varphi$ et à $Oq\sin\varphi$: nous avons donc

$$(4) \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{R_2}\sin^2\varphi.$$

Cette formule est due à Euler [1].

Une surface divise l'espace en deux régions dont l'une est appelée *intérieure* et l'autre *extérieure*. En général, on choisit arbitrairement la région que l'on appelle intérieure : la partie de la normale qui y est située est la *normale intérieure* ; l'autre partie de cette droite est la *normale extérieure*. Quand la normale en un point aura été prise pour axe des z, et que l'origine sera sur la surface, nous considérerons comme normale intérieure la partie de l'axe sur laquelle on mesurera les ordonnées positives. Les rayons de courbure positifs seront ainsi sur la normale intérieure (art. **777**).

785. En mettant l'équation (4) sous la forme

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin^2\varphi,$$

on reconnaît que $\frac{1}{R}$ varie toujours dans le même sens, depuis $\frac{1}{R_1}$ jusqu'à $\frac{1}{R_2}$, lorsque φ croît de 0 à $\pm 90°$. Les rayons R_1 et R_2 sont donc les limites des valeurs de R; l'un est son seul maximum, et l'autre son seul minimum. Il résulte de là que les sections normales ZOM et ZON (*fig.* 328) ont des positions détermi-

---

[1] *Recherches sur la courbure des surfaces* (Mémoires de l'Académie de Berlin, 1760).

nées, et que l'on ne peut pas faire passer par OZ des plans autres que ZOX et ZOY, et dont les sections soient telles que la normale à la surface au point voisin de O rencontre OZ.

On appelle *sections principales* d'une surface en un point les deux sections normales à la surface et perpendiculaires entre elles, dont les rayons de courbure en ce point sont l'un maximum et l'autre minimum. Les plans des sections principales contiennent les normales à la surface aux points infiniment voisins de celui que l'on considère. Ces plans sont appelés *plans principaux*, et les rayons de courbure de ces sections *rayons principaux*.

786. Si l'on désigne par R′ le rayon de courbure de la section contenue dans le plan normal perpendiculaire à celui dont l'azimut est φ, on aura

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1}\sin^2\varphi + \frac{1}{R_2}\cos^2\varphi.$$

Ajoutant cette équation à l'équation (4), on obtient

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Par conséquent, *en tout point d'une surface, la somme des courbures de deux sections rectangulaires quelconques est constante* (¹).

En multipliant l'une par l'autre les équations qui donnent les valeurs de $\frac{1}{R}$ et de $\frac{1}{R'}$, on obtient

$$(5)\qquad \frac{1}{RR'} = \frac{1}{R_1R_2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 \sin^2 2\varphi.$$

787. Concevons dans le plan G tangent à la surface au point considéré O (*fig.* 329) une conique dont le centre soit en ce point et dont les axes $\mu\pi$ et $\nu\lambda$ soient tangents aux sections principales MOP et NOL : en appelant a et b les demi-axes $O\mu$ et $O\nu$, ρ le rayon vecteur $O\tau$ d'un point quelconque τ, et φ son azimut $\mu O\tau$, l'équation de cette conique sera

$$(6)\qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{b^2}\sin^2\varphi.$$

(¹) Cette remarque est due à Mlle S. Germain (*Journal de Crelle*, 1831).

Babinet a généralisé la formule; il a trouvé que si $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m$ sont les rayons de courbure des sections faites par des plans normaux comprenant entre eux des angles égaux $\frac{\pi}{m}$, on a

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \ldots + \frac{1}{r_m}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

(*Comptes rendus*, t. XXV.)

Si les carrés des axes sont proportionnels aux rayons de courbure des sections principales qui leur sont respectivement tangentes, c'est-à-dire si l'on a

$$a^2 = R_1 c, \quad b^2 = R_2 c, \tag{7}$$

c étant une longueur arbitraire, les équations (4) et (6) donneront

$$\rho^2 = Rc.$$

R est le rayon de courbure de la section normale SOT déterminée par l'azimut φ, et par conséquent tangente à $\varpi\tau$.

On voit que la conique dont les axes sont déterminés par les équations (7) est telle que les carrés de ses rayons vecteurs sont proportionnels aux rayons de courbure des sections normales tangentes à ces rayons vecteurs. On appelle cette conique *indicatrice*; elle est déterminée de forme, mais non de grandeur, parce que le paramètre c est arbitraire [1].

788. En appelant a' et b' les demi-longueurs de deux diamètres conjugués de l'indicatrice, R'_1 et R'_2 les rayons de courbure des sections normales respectivement tangentes à ces droites, on a

$$a'^2 = R'_1 c, \quad b'^2 = R'_2 c,$$

et, comme les deux binômes $(a'^2 + b'^2)$ et $(a^2 + b^2)$ sont égaux, on obtient

$$R'_1 + R'_2 = R_1 + R_2. \tag{8}$$

Ainsi, *la somme des rayons de courbure de deux sections normales dont les plans contiennent des diamètres conjugués de l'indicatrice est constante.*

789. Nous allons maintenant supposer que l'on coupe la surface par un plan parallèle au plan tangent au point considéré; nous prenons pour origine le point où la normale rencontre le plan de section; nous appelons ρ le rayon vecteur du point de cette courbe qui correspond à un azimut φ mesuré à partir du plan de l'une des sections principales; enfin nous désignons, comme précédemment, par R le rayon de courbure de la section normale qui correspond à l'azimut φ. Si la distance z du plan sécant au plan tangent est infiniment petite du deuxième ordre, le rayon ρ sera infiniment petit du premier, et nous aurons, d'après la formule (1),

$$\frac{1}{R} = \frac{2z}{\rho^2};$$

[1] La théorie des indicatrices est due à Charles Dupin (*Développements de Géométrie*, 3e Mémoire).

puis, en éliminant R par la formule (4),

$$\frac{2z}{\rho^2} = \frac{1}{R_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{R_2}\sin^2\varphi.$$

En faisant successivement φ égal à zéro et à 90°, et en appelant a et b les valeurs correspondantes de ρ, on obtient

$$(9) \qquad \frac{2z}{a^2} = \frac{1}{R_1}, \quad \frac{2z}{b^2} = \frac{1}{R_2},$$

et par suite

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{b^2}\sin^2\varphi.$$

Cette équation représente une conique dont les demi-axes a et b, donnés par les équations (9), sont proportionnels aux demi-axes de l'indicatrice déterminés par les formules (7). C'est l'indicatrice que l'on obtient lorsque l'on attribue au paramètre arbitraire c une grandeur infiniment petite du second ordre $2z$. D'ailleurs, les ordres de grandeur des quantités infiniment petites ne sont que relatifs, et il n'y a pas lieu de préciser l'ordre de l'ordonnée z, quand on ne la compare pas à d'autres longueurs infiniment petites. Nous avons donc ce théorème :

Un plan parallèle au plan tangent à une surface en un point, et infiniment rapproché de lui, coupe la surface suivant une courbe qui, dans la partie voisine du point considéré, se confond avec une conique homothétique de l'indicatrice.

La courbe d'intersection peut s'étendre loin du point et avoir différentes branches. Ces parties éloignées n'ont aucune influence sur les rayons de courbure des sections normales, et par suite aucune relation nécessaire n'existe entre elles et l'indicatrice.

Si la conique est une ellipse, tous ses points seront à des distances infiniment petites du point considéré, et elle se confondra avec une branche complète de la courbe d'intersection; si elle est une hyperbole, elle se composera de deux petits arcs infiniment rapprochés du point, et de prolongements indéfinis dans la direction des asymptotes. Ces prolongements n'appartiennent pas à la section faite dans la surface.

790. Le théorème que nous venons de démontrer est important, et par suite nous croyons utile de l'établir d'une manière directe.

Nous plaçons l'origine au point considéré sur la surface, et nous prenons la normale à la surface en ce point pour axe des z : les deux autres axes seront des droites rectangulaires situées dans le plan tangent. Nous supposons enfin que l'équation de la surface considérée Σ est algébrique.

Quand une courbe plane est rapportée à deux axes situés dans son plan, et qu'elle touche celui des abscisses à l'origine, son équation ne renferme ni terme constant, ni terme contenant l'abscisse seule et à la première puissance; car, parmi les valeurs de l'abscisse qui correspondent à la valeur zéro de l'ordonnée, il faut qu'il y en ait deux qui soient nulles. Par les mêmes motifs, notre surface Σ étant tangente à l'origine au plan des deux axes des x et des y, son équation doit être dépourvue du terme constant et des termes du premier degré en x et en y. Si nous ne considérons que la partie voisine de l'origine, et pour laquelle les coordonnées x et y sont infiniment petites, l'ordonnée z sera infiniment petite du second ordre, et, d'après la composition de l'équation, tous ses termes seront infiniment petits au moins du deuxième ordre. Ceux qui sont d'un ordre plus élevé devant être négligés, on voit que l'équation se réduira à la forme

$$(10)\qquad Ax^2 + Bxy + A'y^2 + Cz = 0.$$

La partie de la surface Σ voisine de l'origine appartient donc à une surface du second ordre, ou plutôt à toutes les surfaces qui sont représentées par l'équation du deuxième degré

$$(11)\qquad Ax^2 + Bxy + A'y^2 + Kz^2 + K'zx + K''yz + Cz = 0,$$

dans laquelle K, K' et K'' sont des coefficients indéterminés, car cette équation devient identique avec (10), lorsque z est infiniment petite du second ordre.

Le théorème que nous avons établi à l'article précédent est une conséquence immédiate du résultat que nous venons d'obtenir. Pour étendre cette démonstration au cas où la surface est transcendante, il suffit de supposer que son équation a été développée suivant les puissances ascendantes entières des variables [1].

791. Si l'on considère z comme une quantité constante et infiniment petite du second ordre, l'équation (10) représentera une indicatrice (art. **789**). Il suffira donc, pour connaître les positions des sections principales, de déterminer les axes de cette conique. Prenant ensuite ces droites pour axes coordonnés, on aura, pour représenter la courbe, l'équation

$$(12)\qquad A_1x^2 + A_1'y^2 + Cz = 0.$$

Si nous désignons, comme précédemment, par a et b les longueurs des demi-axes, nous aurons

$$a^2 = -\frac{Cz}{A_1},\quad b^2 = -\frac{Cz}{A_1'};$$

---

[1] Le théorème de l'article 789 étant établi directement, nous pourrions, par des raisonnements analogues à ceux de cet article, en déduire la formule d'Euler, qui serait ainsi démontrée d'une seconde manière.

d'où, en vertu des équations (9),

$$(13) \qquad R_1 = -\frac{C}{2A_1}, \quad R_2 = -\frac{C}{2A'_1}.$$

Conformément à une observation que nous avons présentée, à l'article **777**, un rayon de courbure sera positif ou négatif, suivant que la section tournera sa concavité du côté de l'axe des z, sur lequel on mesure les ordonnées positives, ou de l'autre côté.

792. Lorsqu'en un point commun les sections principales de deux surfaces sont deux à deux dans les mêmes plans et osculatrices, leurs sections par un plan normal quelconque ont des rayons de courbure égaux. On dit alors que les surfaces sont *osculatrices*.

La surface du second ordre représentée par l'équation (11) est osculatrice de la surface considérée Σ, car cette équation devient identique avec (10) lorsque l'on suppose que l'ordonnee z est infiniment petite du second ordre, et par suite les plans et les rayons de courbure des sections principales sont les mêmes dans les deux surfaces pour le point qui est à l'origine.

Quand on donne à z une valeur finie et constante, l'équation (11) représente une section de la surface par un plan parallèle à celui des xy, et cette section est une conique homothétique de celle que l'on obtient en attribuant à z une valeur infiniment petite du second ordre, car les coefficients des termes du second degré sont les mêmes; elle est donc aussi homothétique de l'indicatrice (art. **789**).

Une surface quelconque est osculée en un point donné par une infinité de surfaces du second ordre, et les sections de ces surfaces par des plans parallèles au plan tangent en ce point sont des coniques homothétiques de l'indicatrice.

Quand K' et K'' sont nuls, on a

$$(14) \qquad A x^2 + B xy + A' y^2 + K z^2 + C z = 0.$$

Cette équation représente une surface du second ordre dont l'axe des z est un axe, et dont, par conséquent, un des sommets est à l'origine point d'osculation. Comme d'ailleurs l'équation contient encore un coefficient arbitraire, nous voyons qu'*une infinité de surfaces du second ordre sont osculatrices en un de leurs sommets d'une surface quelconque en un point donné.*

Dans le paragraphe suivant nous reviendrons par d'autres considérations sur la théorie de ces surfaces osculatrices.

Des raisonnements analogues à ceux que nous venons de présenter font aisément trouver les équations des surfaces algébriques qui ont avec la proposée, en un point donné, un contact d'un ordre déterminé et supérieur au second.

Discussion de la formule d'Euler.

793. *Cas où les deux rayons principaux sont de même signe.* — Nous allons maintenant chercher les conséquences de la formule d'Euler dans les différents cas qui peuvent se présenter. Nous supposerons d'abord que les deux rayons principaux sont de même signe, et nous les considérerons comme positifs.

On voit facilement que le rayon de courbure R est toujours positif, et compris entre R_2 et R_1 (art. **785**). Si nous prenons sur la normale OZ (*fig.* 329) des longueurs OE et OF respectivement égales à R_1 et à R_2, le centre de courbure d'une section quelconque SOT sera en un point C du segment FE. Il en résulte que près du point O la surface est entièrement d'un même côté de son plan tangent, et qu'elle n'a, par conséquent, que ce point de commun avec lui.

Les carrés a^2 et b^2 donnés par les équations (7) sont de même signe, et positifs quand on attribue à c une valeur positive. L'indicatrice est donc une ellipse. On appelle *surfaces convexes* celles dont, en tous les points, les indicatrices sont des ellipses.

Quand les valeurs de R_1 et de R_2 sont égales, l'indicatrice est un cercle, et les rayons de courbure de toutes les sections normales sont égaux. On appelle *ombilics* les points singuliers où cette circonstance se présente.

794. Quand une surface Σ′ a en un point O′ les mêmes rayons principaux qu'une autre surface Σ en un point O, on peut évidemment la placer de manière que, le point O′ étant confondu avec le point O, elle soit osculatrice de Σ.

Considérons un ellipsoïde scalène (*fig.* 330) : au sommet O′ les deux sections principales sont les ellipses principales M′O′P′ et N′O′L′, car la normale O′K est rencontrée par les normales à la surface aux différents points de ces courbes, et notamment à ceux qui sont infiniment voisins de O′. Si nous appelons a, b et c les demi-axes KM′, KN′ et KO′, les rayons de courbure principaux seront $\frac{a^2}{c}$ et $\frac{b^2}{c}$ (art. **779**). Par conséquent, pour que l'ellipsoïde puisse être rendu osculateur en son sommet O′ de la surface Σ au point O (*fig.* 329), il faut et il suffit que l'on ait

$$(5)\qquad \frac{a^2}{c} = R_1, \quad \frac{b^2}{c} = R_2,$$

R_1 et R_2 étant les rayons principaux de la surface Σ au point O.

Il n'y a que deux équations pour déterminer les trois demi-axes a, b et c : une surface convexe a donc pour chacun de ses points une infinité d'ellipsoïdes osculateurs en un de leurs sommets. Si l'on se donne la position du centre de l'ellipsoïde sur la normale, le demi-axe c sera déterminé, et les équations (15) feront connaître les demi-axes a et b; ils seront toujours réels quand c sera positif, et par suite tout point de la normale situé du côté de la concavité de la surface est le centre d'un ellipsoïde osculateur. Si l'on donnait à c des valeurs négatives, a^2 et b^2 seraient négatifs, et l'on aurait des hyperboloïdes à deux nappes osculateurs en un de leurs sommets.

Si l'on prend pour axes coordonnés les droites $O\mu$, $O\nu$ et OZ (*fig.* 329), l'équation de l'ellipsoïde osculateur sera

$$(16)\qquad \frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} + \frac{z^2 - 2cz}{c} = 0.$$

Quand le centre de l'ellipsoïde est au point E, centre de courbure de la section principale MOP (*fig.* 329), on a

$$(17)\qquad c = R_1, \quad a = R_1, \quad b = \sqrt{R_1 R_2},$$

et la surface osculatrice est de révolution autour de l'axe parallèle à $\nu\lambda$. Elle serait de révolution autour de l'axe parallèle à $\mu\pi$ si son centre était en F.

795. *Dans un ellipsoïde osculateur en l'un de ses sommets, l'ellipse principale située dans un plan parallèle au plan tangent commun est homothétique de l'indicatrice*, car les équations (15) qui en déterminent les axes sont identiques aux équations (7) qui donnent les axes de l'indicatrice. La distance O'K du centre de l'ellipsoïde au point considéré (*fig.* 330) est le paramètre arbitraire qui entre dans les expressions des axes de l'indicatrice.

Toute section de l'ellipsoïde osculateur que nous considérons, par un plan parallèle au plan tangent commun, est une ellipse $p'n'm'$ homothétique de l'ellipse principale P'N'M', et par conséquent homothetique de l'indicatrice. Ce résultat est d'ailleurs une conséquence du théorème plus général de l'article **792**.

796. *Cas où les rayons de courbure principaux sont de signes différents.* — Les équations (6) et (7) montrent que, quand les rayons principaux sont de signes différents, l'indicatrice est une hyperbole dont les asymptotes font avec la tangente de la première section principale un angle Φ pour lequel on a

$$(18)\qquad \operatorname{tang}\Phi = \pm\sqrt{-\frac{R_2}{R_1}}.$$

Nous traçons dans le plan tangent au point considéré O (*fig.* 331) les droites OX et OY, respectivement tangentes aux sections dont les rayons sont R_1 et R_2, et les droites V_1V et U_1U faisant avec OX l'angle Φ : toute hyperbole dont ces lignes sont les asymptotes peut être prise pour indicatrice. Nous considérons celle qui a ses sommets en des points μ et π situés sur l'axe OX à une distance arbitraire du point O. Si R_1 est positif, elle correspond à une valeur positive du paramètre c. Les rayons de courbure étant proportionnels aux carrés des rayons vecteurs de l'indicatrice, le rayon R de la section faite par le plan normal qui a pour trace sur le plan tangent la droite $\sigma O \tau$ est donné par l'expression

$$R = \frac{\overline{O\tau}^2}{\overline{O\mu}^2} R_1.$$

Lorsque le point τ parcourt l'hyperbole, le rayon vecteur $O\tau$ varie de $O\mu$ à l'infini, et le rayon de courbure de la section normale, de R_1 à l'infini. Quand la droite $\sigma O \tau$ est dans l'angle supplémentaire des asymptotes, la quantité $\overline{O\tau}^2$ est négative, et le rayon de courbure R est dirigé en sens contraire des précédents. L'hyperbole qui a ses sommets aux points π et μ n'indique plus les variations du rayon de courbure; mais, si nous traçons une hyperbole dans l'angle supplémentaire des asymptotes, nous aurons une indicatrice qui correspondra à une valeur négative de la constante c, et qui fera connaître les rayons de courbure négatifs.

Quand les valeurs de c qui déterminent les deux hyperboles sont égales en grandeur absolue, on a, en vertu des équations (7),

$$\frac{\overline{O\lambda}^2}{R_2} = -\frac{\overline{O\mu}^2}{R_1};$$

d'où

$$\frac{O\lambda}{O\mu} = \pm\sqrt{-\frac{R_2}{R_1}}$$

et, en ayant égard à l'équation (18),

$$\frac{O\lambda}{O\mu} = \operatorname{tang}\Phi.$$

D'après cela, pour que les longueurs des rayons de courbure obtenues par la considération des deux hyperboles soient comparables entre elles, il faut que les sommets de ces courbes appartiennent à un rectangle ayant les asymptotes pour diagonales.

En résumé, *le rayon de courbure d'une section normale est positif ou négatif suivant que la trace du plan sécant sur le plan tangent est comprise dans l'un ou dans l'autre des deux angles des asymptotes de l'indicatrice; chaque rayon de courbure principal est, en grandeur absolue, le minimum des rayons de courbure qui ont même signe que lui. Enfin, chacune des deux sections normales dont le plan contient une asymptote de l'indicatrice a un rayon de courbure infini, et par suite les asymptotes de l'indicatrice ont un contact du second ordre avec la surface.*

Lorsque les rayons principaux ont des grandeurs absolues égales, les asymptotes de l'indicatrice sont rectangulaires, et réciproquement.

Les surfaces qui ont en chacun de leurs points des hyperboles pour indicatrices sont dites *à courbures opposées.*

797. Les sections faites par des plans normaux dont les traces sont comprises dans l'angle UOV ont leur rayon de courbure positif, et sont près du point O, d'un certain côté du plan tangent, par exemple au-dessus; les sections faites par des plans dont les traces sont dans l'angle U_1OV ont leur rayon de courbure négatif, et sont au-dessous du plan tangent. Ce plan tangent traverse donc la surface; il la coupe suivant une courbe ω qui a une branche tangente à chaque asymptote, comme nous allons le reconnaître.

La droite $\sigma\tau$ touche au point O, et coupe au point q, la section par le plan normal $\sigma\tau$. Si l'on fait tourner ce plan autour de la normale au point O, jusqu'à ce que le point q arrive en O, la trace $\sigma\tau$ acquerra en même temps un contact du premier ordre avec la courbe ω, et un contact du second ordre avec la section normale; chacune des asymptotes de l'indicatrice est donc tangente à la courbe ω au point O.

On peut étendre ce résultat aux courbes gauches, en considérant leurs plans osculateurs; ainsi, *quand une courbe tracée sur une surface a en un point son plan osculateur tangent à la surface, elle a pour tangente en ce point une des deux asymptotes de l'indicatrice.* Il résulte de là qu'*une courbe tracée sur une surface convexe ne peut avoir aucun de ses plans osculateurs tangent à la surface.*

Revenons à la *fig.* 331. Si la branche Oq de la courbe ω avait une inflexion au point O, en faisant tourner le plan normal $\sigma\tau$, deux points d'intersection q et q_1 se réuniraient simultanément au point de tangence O, et le contact de la section normale avec la tangente VV_1 de la courbe s'élèverait au troisième ordre. On voit ainsi que *chaque asymptote de l'indicatrice a un contact d'un ordre moins élevé d'une unité avec la section par le plan tangent qu'avec la section normale.*

798. Considérons l'hyperboloïde scalène représenté sur la *fig.* 332 : en raisonnant comme à l'article **794**, on reconnaît qu'au sommet O' les sections principales sont l'hyperbole principale M'O'P', et l'ellipse de gorge N'O'L'. Il est d'ailleurs évident que les centres de courbure E et F de ces lignes sont de côtés différents du sommet O'. Si leurs rayons de courbure sont égaux aux rayons principaux d'une surface à courbures opposées, en un point donné, on pourra placer l'hyperboloïde de manière qu'il y ait osculation.

Les équations (15), qui déterminent les axes d'une surface du second ordre osculatrice en un de ses sommets d'une surface donnée, montrent que, dans le cas qui nous occupe, l'un ou l'autre des carrés a^2 et b^2 est négatif, quelle que soit la valeur réelle attribuée à c, et que par suite la surface du second ordre est un hyperboloïde à une nappe. Quand c est de même signe que R_1, c'est-à-dire quand le centre de la surface osculatrice est du même côté du point O′ que le point E. a est réel et b imaginaire : les sections qui ont pour rayons R_1 et R_2 sont alors respectivement oscalatrices de l'hyperbole principale et de l'ellipse de gorge.

L'hyperboloïde est de révolution, lorsque son centre est au centre de courbure de l'une des deux sections principales.

799. Les asymptotes de l'indicatrice d'un hyperboloïde, en un point quelconque, sont les génératrices rectilignes qui s'y croisent, car ces droites sont des sections normales qui ont des rayons de courbure infinis. On peut aussi remarquer qu'elles forment l'intersection de la surface par son plan tangent.

En raisonnant comme à l'article **795**, on reconnait que l'hyperbole principale dont le plan est parallèle au plan tangent en O′ (*fig.* 332) est homothétique de l'indicatrice de ce point. Cela résulte d'ailleurs de ce que les asymptotes de cette hyperbole sont parallèles aux génératrices qui passent par le point O.

La section de la surface par un plan parallèle à un plan tangent à cette surface et infiniment voisin se confond dans la partie infiniment rapprochée du point considéré, avec une hyperbole que l'on peut prendre pour indicatrice (art. **789**).

800. *Cas où l'un des rayons principaux est infini.* — Quand l'un des rayons principaux, R_2 par exemple, est infini, la formule d'Euler et l'équation de l'indicatrice deviennent

$$R = \frac{R_1}{\cos^2\varphi}, \quad \rho = \pm\frac{a}{\cos\varphi}.$$

On a d'ailleurs

$$a^2 = R_1 e, \quad \rho^2 = R e.$$

L'indicatrice se compose de deux droites pp_1 et $\pi\pi_1$ parallèles à la trace OY du plan de la section principale dont le rayon est infini (*fig.* 333). Les rayons de courbure des autres sections normales sont finis et de même signe ; il en résulte que le plan tangent coupe ou touche la surface suivant une ligne qui a pour tangente au point O la droite OY. Cette question sera éclaircie plus tard par quelques exemples.

D'après la première des formules précédentes, pour avoir le rayon de courbure de la section normale dont la trace sur le plan tangent est une droite $O\tau$, on porte sur cette ligne une longueur OE égale au rayon R_1 de la section principale faite sur OX, puis on trace les droites EE_1 et E_1E_2 respectivement perpendiculaires à $O\tau$ et à OX : la longueur OE_2 est le rayon cherché.

801. *Sur une développable, une génératrice rectiligne est en tous ses points une section principale*, car les normales aux différents points de cette droite sont parallèles, et par suite dans un même plan. *Les indicatrices d'une développable sont donc formées de deux droites parallèles.* En un point d'une telle surface, le plan de la seconde section principale est perpendiculaire à la génératrice. Sur un cylindre une section droite est une section principale en chacun de ses points.

802. Les deux droites dont se compose l'indicatrice peuvent être regardées comme formant la limite, soit d'une ellipse dont l'un des axes s'allonge indéfiniment, tandis que l'autre reste invariable, soit d'une hyperbole dont l'angle des asymptotes tend vers 180°, et dont les sommets sont fixes. *Les surfaces qui ont en chaque point un rayon principal infini doivent* donc *être considérées comme formant une transition entre les surfaces convexes et celles dont les courbures sont opposées.* Lorsqu'une surface est en partie convexe et en partie à courbures opposées, en chaque point de la ligne de séparation l'un des rayons principaux est infini.

Sur des surfaces entièrement convexes ou entièrement à courbures opposées, on trouve des lignes en chaque point desquelles l'un des rayons principaux est infini. Ce rayon est alors un maximum, et non une transition de rayons principaux positifs à des rayons principaux négatifs.

803. *Quand un plan touche une surface le long d'une courbe, la ligne de contact est en chacun de ses points tangente à une section principale ayant un rayon de courbure infini.*

Pour prouver ce théorème, supposons que par deux points M et N de la ligne de contact on fasse passer un plan sécant qui contienne la normale à la surface au premier point M : la section de la surface aura avec la section faite dans le plan tangent deux points de contact M et N, et si l'on fait tourner le plan secant autour de la normale à la surface au point M, jusqu'à ce qu'il contienne la tangente à la courbe, le point N viendra se réunir à M, et la section aura un contact du troisième ordre avec sa tangente ; son rayon sera donc infini. Cette section sera d'ailleurs principale, car les normales à la surface aux deux points M et N sont parallèles, notamment quand la distance de ces points est infiniment petite.

804. Réciproquement, *quand une courbe tracée sur une surface est tangente en chacun de ses points à une section principale ayant un rayon de courbure infini, elle est une ligne de contact de la surface avec un plan.*

Deux points consécutifs de la courbe appartenant à une section principale dont le rayon est infini, les droites qui y sont normales à la surface se trouvent dans un même plan et sont parallèles. Toutes les normales à la surface aux différents points de la courbe sont donc parallèles, ce qui démontre le théorème énoncé.

805. *Une surface est développable quand elle a en chacun de ses points un de ses deux rayons de courbure infini.*

Par chaque point d'une telle surface on peut faire passer une ligne tangente en tous ses points aux sections principales ayant un rayon de courbure infini, car, pour deux points infiniment voisins, les plans de ces sections ne comprennent qu'un angle infiniment petit. La surface est touchée par un plan le long de chacune de ces lignes, et par suite elle est l'enveloppe d'une série de plans, c'est-à-dire développable.

806. Lorsque l'on fait R_2 infini, les équations (7) donnent

$$a^2 = R_1 c, \quad b^2 = \infty ;$$

et l'équation (16) de la surface du second ordre osculatrice en un de ses sommets se réduit à

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{z^2 - 2cz}{c} = 0.$$

Cette équation représente un cylindre du second ordre. La génératrice rectiligne est osculatrice de la section dont le rayon est infini; la section droite est une conique osculatrice en un de ses sommets de la section principale dont le rayon est R_1.

807. *Cas où les deux rayons principaux sont infinis.* — La formule d'Euler montre que, quand les deux rayons principaux sont infinis, les rayons de courbure des sections normales sont tous infinis, et que par suite la surface est osculée par un plan. Quelques surfaces jouissent de cette propriété, soit en des points isolés, soit en tous les points d'une ligne.

808. *Cas où l'un des rayons principaux est nul.* — Lorsqu'un des rayons principaux est nul, l'autre étant fini ou infini, tous les rayons des sections normales, sauf ce dernier, sont nuls. Cette circonstance se présente aux divers points des arêtes de rebroussement, et aux points isolés où une surface a un plan de rebroussement, tels que les sommets sur une surface gauche (art. **666**). Si l'on donne à la constante c une valeur de même signe que le rayon qui n'est pas nul, on trouve que l'indicatrice est un segment de la tangente à la section principale ayant ce rayon. Ce segment de droite doit être considéré comme une ellipse dont un des axes est nul.

Quand en un point d'une surface le rayon d'une section normale est nul, l'un des rayons principaux est nécessairement nul.

Si une courbe ayant un rebroussement tourne autour de la tangente au rebroussement, la surface de révolution qu'elle engendrera aura un point où le rayon de courbure d'une section quelconque sera nul.

Constructions diverses relatives aux rayons de courbure des sections normales.

809. *Construction du rayon de courbure d'une section normale.* — On peut mettre l'équation (4) sous la forme

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 \sin^2\varphi + R_2 \cos^2\varphi}.$$

Le dénominateur est la somme des longueurs que l'on obtient lorsque l'on projette deux fois le rayon R_1 sous l'angle $(90° - \varphi)$ et le rayon R_2 sous l'angle φ. La formule conduit donc à une construction qui n'exige que la règle et le compas, pour la détermination du rayon R d'une section normale, lorsque l'on connaît l'azimut du plan de cette courbe et les rayons principaux.

Quand on doit déterminer les rayons de plusieurs sections normales, une méthode simple consiste à employer une courbe dont la considération est due à Euler (¹). On déduit de la formule précédente

$$R = \frac{2R_1R_2}{(R_1 + R_2) - (R_1 - R_2)\cos 2\varphi}. \tag{19}$$

Si l'on regarde R comme un rayon vecteur correspondant à l'azimut 2φ, cette équation sera celle d'une conique rapportée à l'un de ses foyers et à l'axe qui y passe. Les demi-axes de cette courbe sont

$$\frac{R_1 + R_2}{2}, \quad \sqrt{R_1R_2}.$$

Quand les deux rayons principaux sont de même signe, les deux axes ont des longueurs réelles, et la courbe est une ellipse; lorsque les rayons R_1 et R_2 sont de signes contraires, la longueur de l'un des axes est imaginaire et la courbe est une hyperbole; enfin, quand un des rayons de courbure R_2 est infini, l'équation (19) devient

$$R = \frac{R_1}{1 + \cos 2\varphi},$$

et la courbe est une parabole. On ne doit pas oublier que le rayon de courbure d'une section normale correspond au rayon vecteur de la conique auxiliaire pour un azimut double.

810. *Détermination des sections principales et de leurs rayons.* — Toutes les fois que l'on connaît les rayons de courbure R, R′ et R″ de trois sections normales et les angles que comprennent leurs plans, on peut déterminer les sections principales et leurs rayons; car, en se donnant un paramètre arbitraire c, les rayons vecteurs de l'indicatrice correspondant aux trois sections seront $\sqrt{Rc}$, $\sqrt{R'c}$ et $\sqrt{R''c}$. Il sera possible de construire cette conique, puisque l'on aura son centre et trois de ses points.

La direction et la grandeur des axes de l'indicatrice font connaître les plans et les rayons de courbure des sections principales.

(¹) Mémoire déjà cité à l'article 784.

La construction est en défaut quand les rayons R, R′ et R″ ne sont pas de même signe. On peut alors recourir à la conique dont nous avons parlé à l'article précédent, et le problème est ramené à la détermination d'une conique dont on connaît un foyer et trois points.

Nous ne nous arrêterons pas à exposer la solution détaillée des deux problèmes graphiques indiqués en cet article, parce qu'ils n'ont pas d'utilité dans les applications. Il importait seulement d'établir que la courbure d'une surface est déterminée en un point par les rayons de courbure de trois sections normales et les angles de leurs plans.

Grandeur de la déviation. — Paramètres de déviation. Axes de déviation.

811. Revenons maintenant à la *fig.* 327, dans laquelle les plans coordonnés ZOX et ZOY sont deux plans normaux rectangulaires quelconques.

Nous appelons

δ la déviation de la normale au point M, ou l'angle FMF_1 (art. **785**);
R_M, R_N et R_P les rayons de courbure des sections normales OM, ON et OP;
R_1 et R_2 les rayons de courbure des sections principales;
φ l'angle que le plan ZOX fait avec le plan principal dont la section a pour rayon R_1; l'angle que le plan ZOY fait avec le même plan principal est $90° + \varphi$.

Nous avons vu que les angles EME_1 et FMF_1 sont égaux (art. **782**): l'équation (3) donne par conséquent

$$\delta = \frac{mM + nN - pP}{mp}.$$

On a d'ailleurs, d'après l'équation (1),

$$mM = \frac{\overline{Om}^2}{2R_M}, \quad nN = \frac{\overline{On}^2}{2R_N}, \quad pP = \frac{\overline{Op}^2}{2R_P};$$

$$Om = On = mp, \quad \overline{Op}^2 = 2\overline{Om}^2.$$

Portant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$\delta = Om\left(\frac{1}{2R_M} + \frac{1}{2R_N} - \frac{1}{R_P}\right).$$

Le théorème d'Euler donne

$$\frac{1}{R_M} = \frac{1}{R_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{R_2}\sin^2\varphi;$$

$$\frac{1}{R_N} = \frac{1}{R_1}\cos^2(90^\circ+\varphi) + \frac{1}{R_2}\sin^2(90^\circ+\varphi) = \frac{1}{R_1}\sin^2\varphi + \frac{1}{R_2}\cos^2\varphi;$$

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1}\cos^2(45^\circ+\varphi) + \frac{1}{R_2}\sin^2(45^\circ+\varphi) = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sin 2\varphi.$$

Introduisant ces expressions dans l'équation qui donne la valeur de δ, et appelant, comme précédemment, α la longueur infiniment petite Om, on trouve

$$(20)\qquad \delta = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sin 2\varphi.$$

Cette formule donne pour la déviation une grandeur positive, quand la partie de la normale intérieure voisine de la surface se projette sur le plan tangent en dehors de l'angle φ, mesuré à partir de la section principale ayant le plus grand rayon de courbure. La quantité α doit être considérée comme positive.

L'équation (20) montre que la déviation atteint sa valeur maximum quand le plan normal partage en parties égales l'angle des plans principaux, et que les déviations des normales sont égales pour des directions symétriques par rapport à ce plan bissecteur. La déviation change de signe à chaque plan principal.

En éliminant l'angle φ entre les équations (20) et (5), on obtient [1]

$$(21)\qquad \delta^2 = \alpha^2\left(\frac{1}{RR'} - \frac{1}{R_1R_2}\right).$$

812. Le rapport des grandeurs infiniment petites α et δ est une longueur finie que nous représenterons par la lettre K, et que nous appellerons *paramètre de déviation*. Ce paramètre est infini quand la déviation est nulle. Nous avons

$$(22)\qquad K = \frac{\alpha}{\delta},$$

$$(20\ bis)\qquad \frac{1}{K} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sin 2\varphi,$$

$$(21\ bis)\qquad \frac{1}{K^2} = \frac{1}{RR'} - \frac{1}{R_1R_2}.$$

Supposons maintenant que l'on trace dans le plan tangent en M une courbe

---

[1] Les formules (20) et (21) sont dues, la première à M. J. Bertrand (Mémoire cité à l'article 781), la seconde à M. Lamarle (*Exposé géométrique*, 3e Partie).

telle que les carrés des rayons vecteurs issus du point M soient proportionnels aux paramètres de déviation des sections normales tangentes : nous aurons, en appelant ρ_1 le rayon vecteur qui correspond à un azimut φ, et c_1 un paramètre arbitraire,

$$\rho_1^2 = \mathrm{K} c_1 ;$$

puis, en vertu de (20 *bis*),

$$\frac{c_1}{\rho_1^2} = \left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right) \sin\varphi \cos\varphi ;$$

enfin, en appelant x et y les coordonnées $\rho_1 \cos\varphi$ et $\rho_1 \sin\varphi$ d'un point de la courbe,

$$\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right) xy = c_1 .$$

Cette ligne est donc une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont tangentes aux sections principales. Elle joue pour les paramètres de déviation le même rôle que l'indicatrice pour les rayons de courbure.

813. On peut déterminer le paramètre de déviation à l'aide de l'indicatrice ; car, si l'on appelle e l'angle formé par la normale à cette courbe en un point avec le rayon vecteur, on a

$$\tan e = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}\, xy .$$

Remplaçant a^2 et b^2 par leurs valeurs $\left(\frac{\mathrm{R}}{c}\right)$, et le produit xy par $\rho^2 \sin\varphi \cos\varphi$, ρ étant comme précédemment le rayon vecteur de l'indicatrice, on obtient

$$\tan e = \frac{\mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1 \mathrm{R}_2 c}\, \rho^2 \sin\varphi \cos\varphi ,$$

ou bien

$$\tan e = -\frac{1}{2} \mathrm{R} \left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right) \sin 2\varphi .$$

Enfin, eu égard à l'équation (20),

$$\tan e = -\mathrm{R} \frac{\rho}{\kappa}$$ [1],

$$\mathrm{K} = -\mathrm{R} \cot e .$$

[1] Cette formule a été donnée par M. Alings : *De superficierum curvatura* ; Groningae, 1849.

D'après un théorème de Maclaurin (*Traité des fluxions*, CXI) récemment rappelé par M. P. Serret (*Des méthodes en Géométrie*), on a

$$\cot e = \frac{3\mathrm{R}}{\mathrm{R}'} ,$$

R et e ayant les significations indiquées dans le texte, et R' étant le rayon de courbure de la déve-

814. Considérons une surface du second ordre (*fig.* 334); soient Ω sa section par l'un de ses plans principaux que nous prenons pour plan vertical de projection, et M'C la normale au sommet (M, M') : si par un point m infiniment voisin de M on fait passer un plan DE parallèle à celui de la section Ω, il coupera la surface suivant une conique dont les axes ne différeront des axes de Ω que de quantités infiniment petites du second ordre (art. **777**), et dont par conséquent la projection verticale devra être regardée comme confondue avec Ω, si l'on n'a égard qu'aux infiniment petits du premier ordre. Le point m de l'espace se projette donc en un point m' de Ω, et la projection de la normale à la surface au point m est la normale à Ω en ce point m' infiniment rapproché de M'; elle passe ainsi au centre de courbure C de Ω pour le point M'; nous concluons de là que la normale à la surface au point m infiniment rapproché de (M, M'), et d'ailleurs quelconque, rencontre la perpendiculaire au plan de Ω qui passe au centre de courbure C; elle rencontre aussi et par la même raison la droite qui est perpendiculaire au plan de la seconde section principale en M, et qui passe par le centre de courbure de cette section.

On reconnait d'après cela, par la considération d'une surface du second ordre osculatrice en un de ses sommets, que *toutes les normales à une surface aux points infiniment voisins d'un point donné rencontrent les deux droites qui passent respectivement par les centres des sections principales et qui sont perpendiculaires à leurs plans.* Nous appellerons ces droites *axes de déviation* [1].

Courbure des sections obliques et de la section par le plan tangent.

815. *Théorème de Meusnier.* — Nous allons maintenant chercher comment on peut déterminer le rayon de courbure d'une section oblique, quand on connait le rayon de courbure de la section normale qui lui est tangente, et l'angle des plans de ces courbes. Nous supposerons d'abord que la section oblique est tangente à une section principale.

Soient

OC la normale à une surface en un point O (*fig.* 335);
Ω la section de cette surface par un plan principal P;

---

loppée de l'indicatrice. Introduisant cette valeur de cote dans l'équation du paramètre de déviation, on trouve

$$K = \frac{3\,R^2}{R'}.$$

On peut déduire de ces diverses formules des constructions assez simples pour le paramètre K.

[1] Ce théorème est dû à Sturm (*Comptes rendus*, premier semestre 1845). La démonstration que nous en présentons est de M. Mannheim.

m un point situé sur Ω à une distance infiniment petite de O;
ω une section de la surface par un plan Q contenant les points O et m.

La normale à la surface au point m est dans le plan P, et le point C où elle rencontre la normale OC est le centre de courbure de la section principale Ω.

Les normales à la section oblique ω en chacun des points O et m sont les projections sur le plan Q des normales indéfinies à la surface en ces points (art. **46**). Le centre de courbure c de ω, point de rencontre des deux normales aux points O et m, est donc la projection sur le plan Q du point C, centre de courbure de la section principale Ω.

Si le plan P est un plan normal en O et d'ailleurs quelconque, la normale à la surface en m sera une droite mN située hors de ce plan, et ses projections mC et mc sur P et sur Q seront les normales principales aux sections Ω et ω. Mais l'angle de la normale mN avec le plan P étant infiniment petit, et l'angle NmO ne différant qu'infiniment peu d'un droit, l'angle compris entre la droite mc et la projection de mC sur Q est infiniment petit du second ordre. La normale principale à la section oblique ω au point m est donc la projection de la normale principale à la section Ω au même point. Par conséquent, *le rayon de courbure en un point d'une section oblique d'une surface est la projection du rayon de courbure en ce point de la section normale tangente à la section oblique*, quelle que soit la position de cette dernière par rapport aux plans principaux. Ce théorème est dû à Meusnier (¹).

Si l'on appelle r et R les rayons de courbure au même point d'une section oblique et de la section normale tangente, et γ l'angle de leurs plans, on aura

$$r = R\cos\gamma. \tag{23}$$

Tous les raisonnements qui précèdent peuvent être appliqués à une courbe gauche. Le plan Q est alors le plan osculateur de la courbe au point considéré.

816. *Courbure de la section par le plan tangent.* — Si la section oblique est tangente à une asymptote de l'indicatrice, R est infini, et par suite r est également

(¹) *Mémoire sur la courbure des surfaces* (*Savants étrangers*, 1776).

Si l'on voulait une démonstration plus minutieuse, on pourrait remarquer que, sans faire aucune hypothèse sur l'angle que le plan Q fait avec le plan P normal en O et d'ailleurs quelconque (*fig.* 337), on peut obtenir, comme à l'article 817, l'équation

$$\cos NmF \cos FmO = \cos NmG \cos GmO.$$

Les différents angles qui entrent dans cette formule ont les valeurs indiquées à l'article 817, sauf NmG qui diffère infiniment peu de γ. L'équation se réduit donc à

$$E = \varepsilon\cos\gamma,$$

d'où

$$r = R\cos\gamma$$

infini, quel que soit γ. Cependant, quand cet angle est droit, c'est-à-dire quand le plan Q est tangent à la surface, la formule (23) donne une valeur indéterminée pour r, et le théorème de Meusnier n'apprend plus rien sur la grandeur du rayon de courbure de la section.

Nous avons démontré à l'article **797** qu'une asymptote de l'indicatrice a un contact d'un ordre moins élevé d'une unité avec la section tangente qu'avec la section normale. Dans le cas général, le contact de la section normale est du second ordre, celui de la section par un plan tangent est par conséquent du premier ordre, et son rayon de courbure a une grandeur finie.

Nous allons parvenir au même résultat par des considérations infinitésimales analogues à celles que nous avons présentées à l'article précédent, et qui auront l'avantage de nous donner une expression du rayon de courbure.

817. Soient

m un point de la surface infiniment voisin du point considéré O (*fig.* 337), et situé sur l'une des asymptotes de l'indicatrice de ce point;

OZ et mN les normales à la surface aux points O et m;

Ω la section de la surface par le plan P qui contient la normale OZ et le point m;

ω celle des branches de la section par le plan tangent Q, qui touche la droite XOmY, asymptote de l'indicatrice;

mF et mG les projections de la normale mN sur les plans P et Q.

Les trois droites mN, mF et mO forment un trièdre rectangle le long de l'arête mF; on a par conséquent

$$\cos \mathrm{N}m\mathrm{O} = \cos \mathrm{N}m\mathrm{F} \cos \mathrm{F}m\mathrm{O}.$$

Le trièdre formé par les droites mN, mG et mO donne de la même manière

$$\cos \mathrm{N}m\mathrm{O} = \cos \mathrm{N}m\mathrm{G} \cos \mathrm{G}m\mathrm{O}.$$

Nous avons par suite

$$\cos \mathrm{N}m\mathrm{F} \cos \mathrm{F}m\mathrm{O} = \cos \mathrm{N}m\mathrm{G} \cos \mathrm{G}m\mathrm{O}.$$

L'angle NmF est infiniment petit, et son cosinus est égal à l'unité; les angles FmO et GmO sont complémentaires des angles de contingence E et ε des courbes Ω et ω au point O; l'angle NmG est complémentaire de la déviation δ. L'équation se réduit donc à

$$\mathrm{E} = \varepsilon\delta.$$

Si l'on appelle ρ le rayon de courbure de la section ω, on aura

$$\overline{\mathrm{O}m} = \rho\varepsilon \quad \text{ou bien} \quad \rho = \overline{\mathrm{O}m}\,\frac{\delta}{\mathrm{E}}.$$

La courbe Ω ayant une inflexion en O, l'angle E est infiniment petit du second ordre; Om et δ sont infiniment petites du premier ordre : le rayon ρ a donc une grandeur finie.

La déviation δ est donnée par l'équation (21), dans laquelle on doit attribuer à R une grandeur infinie. On trouve

$$\delta = \frac{\alpha}{\sqrt{-R_1 R_2}}.$$

En portant cette valeur de δ dans l'équation que nous venons d'obtenir et remarquant que Om est la valeur désignée par α, on a

$$\rho = \frac{\alpha^2}{E\sqrt{-R_1 R_2}}.$$

Enfin, si β est l'ordonnée du point de la courbe Ω qui correspond à l'abscisse α, on aura, d'après l'équation (2),

$$E = \frac{2\beta}{\alpha}$$

et, par suite,

$$\rho = \frac{\alpha^3}{2\beta\sqrt{-R_1 R_2}}. \tag{24}$$

817 *a*. Cette formule est nouvelle; nous croyons en conséquence qu'il n'est pas sans intérêt de la confirmer par une démonstration analytique.

La surface étant représentée par l'équation

$$z = f(x, y),$$

nous appelons suivant l'usage $p, q, r, \ldots$ les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \ldots$.

Nous désignons par n la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe des abscisses la projection de l'une des asymptotes de l'indicatrice au point considéré. On a

$$tn^2 + 2sn + r = 0. \tag{a}$$

x', y', z' étant les coordonnées variables, l'asymptote est déterminée par les équations

$$p(x'-x) + q(y'-y) - (z'-z) = 0,$$
$$(x'-x) - \frac{1}{n}(y'-y) = 0,$$

dont la première représente le plan tangent.

On reconnaît facilement que l'équation d'un plan passant par cette asymptote de l'indicatrice est

$$(b)\qquad (p-k)(x'-x)+\left(q+\frac{k}{n}\right)(y'-y)-(z'-z)=0,$$

k étant une constante arbitraire; quand elle est nulle, le plan devient tangent.

L'équation (b) représentera la courbe d'intersection de la surface par le plan qui contient l'asymptote de l'indicatrice, si l'on y considère z' comme une fonction de x' et de y' donnée par l'équation de la surface. Alors, différentiant deux fois l'équation (b), nous aurons

$$(c)\qquad \left(q'-q-\frac{k}{n}\right)\frac{dy'}{dx'}+(p'-p+k)=0,$$

$$(d)\qquad \left(q'-q-\frac{k}{n}\right)\frac{d^2y'}{dx'^2}+\left[t'\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2+2s'\frac{dy'}{dx'}+r'\right]=0.$$

Lorsque l'on fait x', y' et z' respectivement égales à x, y et z, $\frac{dy'}{dx'}$ est égale à n, le second terme de l'équation (d) disparaît en vertu de l'équation (a), et $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ est nulle; si cependant k est nulle, c'est-à-dire si le plan est tangent, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Pour avoir dans ce cas la valeur de $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, il faut différentier l'équation (d) en y considérant cette quantité comme constante. On obtient

$$(e)\qquad \left(s'+t'\frac{dy'}{dx'}\right)\frac{d^2y'}{dx'^2}+\left[\frac{1}{3}v'\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^3+w'\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2+m'\left(\frac{dy'}{dx'}\right)+\frac{1}{3}u'\right]=0.$$

Si maintenant nous faisons x', y' et z' égales à x, y et z, les équations (c) et (e) nous donneront

$$\frac{dy'}{dx'}=n,$$

$$\frac{d^2y'}{dx'^2}=-\frac{\frac{1}{3}vn^3+wn^2+mn+\frac{1}{3}u}{s+tn}.$$

En appelant ρ le rayon de courbure de la section de la surface par son plan tangent, et en supposant que ce plan a été pris pour plan des xy, nous aurons

$$(f)\qquad \rho=\frac{(1+n^2)^{\frac{3}{2}}(s+tn)}{\frac{1}{3}vn^3+wn^2+mn+\frac{1}{3}u}.$$

On a, en négligeant les termes à partir des infiniment petits du quatrième ordre,

$$dz=\left(q\frac{dy}{dx}+p\right)dx+\left[\frac{t}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+s\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{r}{2}\right]dx^2$$
$$+\left[\frac{v}{2.3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\frac{w}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{m}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{u}{2.3}\right]dx^3,$$

p et q sont nulles parce que le plan tangent contient les axes des x et des y. Si nous donnons à $\frac{dy}{dx}$ la valeur n qui détermine l'asymptote considérée de l'indicatrice, le second terme disparaîtra, dz sera la quantité que nous avons appelée β, et nous aurons

$$2\beta = \left(\frac{1}{3}vn^3 + wn^2 + un + \frac{1}{3}u\right)dx^3.$$

L'équation (f) deviendra par suite

$$\rho = \frac{(1+n^2)^{\frac{3}{2}}(s+tn)\,dx^3}{2\beta},$$

ou bien

$$\rho = \frac{(dx^2 + n^2dx^2)^{\frac{3}{2}}(s+tn)}{2\beta}.$$

Mais la quantité $\sqrt{dx^2 + n^2dx^2}$ ou $\sqrt{dx^2+dy^2}$ est la longueur α : donc

$$(g) \qquad \rho = \frac{\alpha^3}{2\beta}(s+tn).$$

Supposons maintenant que l'axe des abscisses touche la section principale dont le rayon est R_1; nous aurons

$$s = 0, \quad t = \frac{1}{R_2}, \quad n = \sqrt{-\frac{R_2}{R_1}};$$

ces valeurs portées dans l'équation (g) donnent l'équation (24).

818. Nous avons vu à l'article **816** que toute section tangente à une asymptote de l'indicatrice a un contact du second ordre, au moins, avec cette droite, sauf dans le cas où son plan est tangent. Il résulte de là que *quand une courbe tracée sur une surface a, en un point, un contact du premier ordre avec une des deux asymptotes de l'indicatrice, son plan osculateur en ce point est tangent à la surface.*

Cette proposition est la réciproque d'un théorème que nous avons établi à l'article **797**.

819. Nous avons démontré, à l'article **474** (1), que le rapport des rayons de courbure en deux points correspondants d'une ligne tracée sur une surface développable et de sa transformée par développement est égal au cosinus de l'angle que forme le plan osculateur de la ligne avec le plan tangent à la surface. Cette proposition est une conséquence du théorème de Meusnier.

Lorsqu'on développe une développable, les points d'une courbe Ω tracée sur cette surface décrivent des trajectoires qui sont toujours normales au plan de

(1) Dans la seconde édition de la deuxième Partie, p. 62, ligne 10, il faut lire $\frac{R}{R'} = \cos N$; ligne 13, il faut lire : *est égal au cosinus*. (E. L.)

développement, et qui forment une surface dont la section par un plan tangent à la développable est une transformée de la courbe primitive. La courbe Ω et sa transformée appartiennent donc à une même surface, et la seconde de ces lignes est une section normale qui touche la première au point où elle rencontre la génératrice de contact du plan tangent avec la développable. On voit que le théorème de Meusnier peut être appliqué : il donne immédiatement la proposition que nous avons rappelée.

Définition des lignes de courbure et des lignes asymptotiques.

820. Lorsque l'on passe d'un point d'une surface à un point infiniment voisin, les positions du plan tangent et des plans des sections principales varient infiniment peu ; il en résulte que l'on peut tracer deux séries de courbes tangentes en chacun de leurs points à une des deux sections principales de la surface en ce point. Car, si, en partant d'un point O, on considère sur une des sections principales un point infiniment voisin O', à ce dernier point passeront deux nouvelles sections principales, dont l'une fera un angle infiniment petit avec l'arc OO' ; on peut suivre celle-là, y prendre un point O'' infiniment voisin de O' et, continuant ainsi, on obtient une ligne qui satisfait à la condition énoncée.

On appelle *lignes de courbure* d'une surface les lignes qui sont tangentes en chacun de leurs points à l'une des sections principales. D'après ce que nous venons de voir, et les propriétés des sections principales, il passe à chaque point de la surface deux lignes de courbure qui se croisent à angle droit (1).

De tous les points d'une surface infiniment voisins d'un point considéré, ceux qui appartiennent aux sections principales sont les seuls pour lesquels la déviation soit nulle. Il en résulte que *les normales à une surface en tous les points d'une ligne de courbure forment une développable*, et que le lieu de ces droites serait une surface gauche, si la courbe directrice n'était pas une ligne de courbure.

Ch. Dupin a considéré des lignes *asymptotiques* tangentes en chacun de leurs points à l'une des deux asymptotes de l'indicatrice de la surface.

Ces lignes font mieux connaître la courbure de la surface que les lignes de courbure, car elles déterminent, outre la direction des sections principales, le rapport des rayons principaux ; mais elles ne sont réelles que sur les surfaces à courbures opposées.

(1) La théorie des lignes de courbure est due à Monge. *Mémoire sur les déblais et les remblais* (*Histoire de l'Académie*, 1781) ; *Application de l'Analyse à la Géométrie*, XV et XVI.

Notions sur la courbure des surfaces de révolution.

821. Les normales à une surface de révolution en deux points consécutifs d'un méridien sont dans le plan de cette courbe; un méridien χ (*fig.* 336) est donc une section principale en l'un quelconque de ses points tel que O', et son rayon de courbure O'E est l'un des deux rayons de courbure principaux de la surface.

Le plan de la seconde section principale est perpendiculaire au plan méridien, et par suite cette section est tangente au parallèle. Comme d'ailleurs la perpendiculaire O'C abaissée sur l'axe A'Z est le rayon du parallèle, on voit, d'après le théorème de Meusnier, que le rayon de la section normale tangente est $\frac{O'C}{\cos FO'C}$ ou O'F.

En résumé, *les deux rayons de courbure principaux d'une surface de révolution, en un point, sont le rayon de la méridienne et le segment compris sur la normale entre le point considéré et l'axe* [1].

Quand la méridienne présente sa convexité à l'axe, les rayons O'E et O'F sont de signes contraires, et par suite la surface est à courbures opposées. Lorsque la concavité de la méridienne est tournée vers l'axe, comme cela a lieu au point O'_1, les rayons O'_1F_1 et O'_1E_1 sont de même signe, et la surface est convexe.

Aux points d'inflexion tels que O'_2, et aux points tels que O'_3 pour lesquels la normale est parallèle à l'axe de révolution, l'un des rayons de courbure est infini. Chacun des parallèles décrits par les points O'_2 et O'_3 sépare donc une partie de la surface où les indicatrices sont des ellipses, d'une partie où les indicatrices sont des hyperboles. Le théorème de l'article **805** pouvait faire prévoir ce résultat pour le parallèle du point O'_3, car, en tous les points de ce cercle, la surface est tangente au plan qui le contient.

822. Nous allons maintenant déterminer les asymptotes de l'indicatrice au point (O, O') (*fig.* 336).

Nous considérons un hyperboloïde ayant un sommet en ce point, et y étant osculateur de la surface. Nous pouvons placer son centre en un point quelconque de la normale EF; nous choisissons le point F, et alors l'hyperboloïde est de révolution (art. **798**) : le rayon du cercle de gorge est FO', et l'axe la droite Ff parallèle à la tangente O'K'. La longueur de l'axe non transverse Ff est le double de la droite O'K', moyenne proportionnelle entre les rayons O'E et O'F (art. **794**).

(1) Ces résultats ont été donnés pour la première fois par Meusnier, dans le Mémoire déjà cité à l'article 815.

Les asymptotes de l'hyperbole méridienne sont les droites FK' et FL'. On obtient l'indicatrice de la surface de révolution au point (O, O'), en transportant parallèlement à elle-même, dans le plan tangent L'K', l'hyperbole méridienne contenue dans le plan Ff parallèle au plan tangent en O'; par conséquent, si l'on mène par les points K' et L' des droites perpendiculaires au plan vertical, et ayant une longueur égale à O'F, leurs extrémités seront sur les asymptotes cherchées. Nous projetons K' en K, nous prenons les segments KU et KV égaux à O'F : les asymptotes de l'indicatrice sont (OU, O'K') et (OV, O'K').

Ces droites, en tournant autour de l'axe (A, A'Z'), engendrent un hyperboloïde de révolution osculateur de la surface en tous les points du parallèle décrit par (O, O'). Mais cet hyperboloïde n'a pas son centre sur la normale EF, et par suite il n'appartient pas à la série des hyperboloïdes osculateurs en un de leurs sommets.

823. Si le point (O, O') parcourt la méridienne χ, les asymptotes de l'indicatrice pour ses différentes positions formeront une surface gauche. Les arcs de la méridienne qui présentent leur convexité à l'axe seront utiles et doubles sur cette surface; les autres seront parasites. Les asymptotes de l'indicatrice se confondent au point d'inflexion O'_2 avec la tangente à la méridienne, et au point supérieur O'_3 avec la tangente au parallèle : ces points seront des sommets de la surface gauche.

Chacune des deux nappes qui se coupent le long de l'arc O'_2O_3 est tangente à la surface de révolution; ces nappes sont donc tangentes l'une à l'autre, et par suite la courbe χ est, sur la surface gauche, une ligne double de contact.

La courbe d'intersection φ d'une surface de révolution par un plan BC tangent à la méridienne χ, en un point d'inflexion (M, M') (*fig.* 339), a pour tangente en ce point la droite BC que l'on doit regarder comme une asymptote unique de l'indicatrice. La courbe est d'ailleurs composée de deux parties symétriques par rapport à (MA, M'B), et par suite elle a un rebroussement de premier ordre.

Notions sur la courbure des surfaces gauches.

824. *Toute surface gauche est à courbures opposées*, car en chacun de ses points son plan tangent la coupe suivant une génératrice et une courbe (art. **617**). La génératrice et la tangente à la courbe d'intersection sont les deux asymptotes de l'indicatrice (art. **797**). Les bissectrices des angles de ces droites sont les traces des plans des sections principales sur le plan tangent. On peut, par conséquent, construire les sections principales en un point donné et déterminer ensuite leurs rayons de courbure (art. **105**). Nous avons vu que le rapport des grandeurs absolues de ces rayons est égal au carré de la tangente de la moitié de l'angle compris entre les asymptotes de l'indicatrice (art. **796**). Cette proposition permet de déterminer un des rayons quand on a obtenu l'autre.

825. Considérons deux génératrices G et G′ d'une surface gauche; nous savons qu'il existe un hyperboloïde dans lequel ces droites sont des génératrices d'un même système, et qui se raccorde avec la surface le long de l'une d'elles G (art. **741**). Si l'on suppose que G′ se rapproche de G et finisse par se confondre avec cette droite, l'hyperboloïde deviendra osculateur le long de G; les génératrices du second système seront alors, avec la génératrice G, les asymptotes des indicatrices aux différents points de G; d'où ce théorème : *les secondes asymptotes des indicatrices d'une surface gauche, aux différents points d'une génératrice, forment un hyperboloïde osculateur de la surface le long de cette génératrice.*

Lorsque la génératrice considérée et les deux qui lui sont infiniment voisines sont parallèles à un même plan, l'hyperboloïde se transforme en un paraboloïde. Cette circonstance se présente toujours quand la surface a un plan directeur.

Si l'on connaît les secondes asymptotes des indicatrices en trois points d'une génératrice, l'hyperboloïde osculateur le long de cette droite sera déterminé, et l'on pourra construire la deuxième asymptote de l'indicatrice de l'un quelconque des points de la génératrice considérée (art. **744**).

826. Soient AX une génératrice d'une surface gauche (*fig.* 340), BX_1 la génératrice voisine et AB leur commune perpendiculaire. Par un point quelconque O de la génératrice AX, nous faisons passer un plan perpendiculaire à AX et par conséquent normal à la surface; il coupe la génératrice BX_1 en un point N qui se projette en P sur le plan central de AX (art. **622**).

Le trièdre (NP, NB, NO), rectangle le long de NP donne

$$\cot \mathrm{NO} = \cot \widehat{\mathrm{BNP}} \sin \widehat{\mathrm{PNO}}.$$

Les droites NB et NO déterminent le plan tangent au point N infiniment voisin de O; la déviation δ au point N est l'angle que la normale NE perpendiculaire au plan BNO fait avec le plan PNO, ou le complément de l'angle que ces deux plans comprennent, et que nous avons désigné par NO dans la formule précédente. L'angle BNP est le complément de l'angle NBP ou σ que forment les deux génératrices AX et BX_1. Enfin l'angle PNO est le complément de l'obliquité NOP ou ζ du plan tangent en O.

D'après ces remarques, l'équation ci-dessus devient

$$\operatorname{tang}\delta = \operatorname{tang}\sigma \cos\zeta;$$

et, comme les angles δ et σ sont infiniment petits,

$$\delta = \sigma \cos\zeta.$$

Le rayon de courbure de la génératrice étant infini, on a, en vertu de l'équation (21),

$$\delta^2 = -\frac{\alpha^2}{R_1 R_2}.$$

On obtient par suite, en remarquant qu'on doit attribuer à α la grandeur ON ou $\frac{OP}{\cos\theta}$,

$$\sigma^2 \cos^4\theta = -\frac{\overline{OP}^2}{R_1 R_2}.$$

Si nous appelons k le paramètre de la génératrice (art. **625**), OP sera égal à $k\sigma$, et nous aurons

$$\cos^4\theta = -\frac{k^2}{R_1 R_2}. \tag{25}$$

Nous avons d'ailleurs (art. **622**), en appelant x l'abscisse AO,

$$\tan\theta = \frac{x}{k}.$$

L'élimination de θ entre ces deux équations donne

$$R_1 R_2 = -\left(\frac{x^2 + k^2}{k}\right)^2 \quad (^1). \tag{26}$$

Il résulte des observations que nous avons présentées à l'article **776** que, quand on déforme une surface gauche sans en courber les génératrices, les points centraux ne sont pas déplacés, et les paramètres ne sont pas modifiés. On voit d'après cela, par la formule que nous venons d'obtenir, que *quand on déforme une surface gauche, le produit des rayons de courbure principaux en chaque point reste le même*. Ce produit est infini quand la surface est développable (²).

(¹) Nous croyons que cette formule est due à M. Lamarle (*Théorie géométrique des centres et des axes instantanés de rotation*). On en déduit par les procédés du Calcul intégral le résultat suivant signalé par Bour (*Théorie de la déformation des surfaces*) :

Si l'on élève en chaque point d'une génératrice d'une surface gauche et dans un plan quelconque une ordonnée égale à l'inverse de la racine carrée du produit des rayons principaux prise positivement, on aura une courbe asymptotique de la génératrice (*fig.* 345), et dont la forme dépendra de la grandeur du paramètre k ; mais l'aire totale comprise entre la courbe et son asymptote est indépendante de k et égale à π, de sorte que la courbe s'éloigne d'autant plus de la génératrice qu'elle est restée plus longtemps confondue avec elle. (La *fig.* 345 est extraite du Mémoire de Bour.)

(²) Gauss a établi d'une manière générale que, quand on déforme une surface flexible et inextensible, le produit des rayons de courbure principaux en chaque point reste le même. Liouville a reproduit le Mémoire du célèbre géomètre, et des démonstrations spéciales du théorème dues à Puiseux et à M. J. Bertrand, dans les notes de la 5ᵉ édition de l'*Application de l'Analyse* de Monge. Dans son *Exposé géométrique*, M. Lamarle a établi le théorème par des considérations de Cinématique.

827. Quand deux surfaces gauches S et S_1 se raccordent le long d'une droite G, cette génératrice a le même paramètre et le même point central sur les deux surfaces (art. **625**) ; par conséquent, et en vertu de l'équation (26), en chacun de ses points, les produits des rayons de courbure des surfaces sont égaux.

Les hyperboloïdes A et A_1, osculateurs des surfaces S et S_1 le long de la génératrice G, se coupent, en général, suivant deux droites P et Q qui rencontrent G en des points M et N (art. **755**). Les indicatrices des surfaces ont les mêmes asymptotes en ces points, et par suite les rayons de courbure principaux y sont dans des rapports égaux ; mais nous venons de voir qu'il y a égalité entre les produits de ces rayons : leurs grandeurs sont donc les mêmes, et les surfaces S et S_1 sont osculatrices aux points M et N.

Celui des hyperboloïdes qui est intérieur à l'autre d'un côté de la génératrice P devient extérieur de l'autre côté. Par conséquent, si l'on coupe les surfaces S et S_1 par des plans parallèles entre eux et à la droite P, les sections de l'une des surfaces, S par exemple, auront d'un côté du point M des rayons de courbure plus petits que ceux des sections de S_1, et de l'autre, plus grands. Les surfaces se coupent donc suivant une courbe tangente à chaque droite d'intersection des hyperboloïdes, seconde asymptote de l'indicatrice d'un point d'osculation.

Nous voyons ainsi que, *quand deux surfaces gauches se raccordent le long d'une génératrice, elles se coupent, en général, suivant une courbe qui rencontre la droite de contact en deux points, et que les surfaces sont osculatrices en ces points.*

Lignes d'ombre d'une surface gauche quand le point lumineux est dans le plan tangent le long d'une génératrice singulière. — Rayons de courbure de la surface aux divers points de cette droite.

828. Les questions que nous allons examiner ont de l'importance à plusieurs points de vue, principalement pour les exercices graphiques relatifs aux lignes d'ombre des surfaces gauches. Nous emploierons le Calcul différentiel, qui nous paraît utile pour introduire dans cette étude la clarté désirable.

Nous avons vu dans le VII^e Livre qu'une surface gauche peut avoir des génératrices singulières le long de chacune desquelles elle est touchée par un même plan. Deux génératrices consécutives se rencontrent alors en un point que nous avons appelé *sommet* (art. 629). Toutes les lignes d'ombre de la surface passent à chaque sommet (art. 634).

Lorsque le point lumineux est dans le plan tangent le long d'une génératrice singulière, cette droite fait partie de la ligne d'ombre : c'est la branche qui passe au sommet. Une autre branche, qui forme la courbe d'ombre proprement dite, rencontre les diverses génératrices (art. 617), et traverse nécessairement la droite suivant laquelle le plan touche la surface. Nous allons déterminer le point où elle coupe cette génératrice.

829. Nous représentons la génératrice d'une surface gauche par les équations

$$(1) \qquad y = \mathrm{M}x + \mathrm{P}, \quad z = \mathrm{N}x + \mathrm{Q},$$

M, N, P et Q étant des fonctions d'une même variable α. Nous désignerons par $\mathrm{M}', \mathrm{N}', \ldots$, $\mathrm{M}'', \mathrm{N}'', \ldots$ les dérivées premières et secondes de M, N, ...

Le plan qui passe par la génératrice considérée et par un point fixe (a, b, c) a pour équation

$$(\mathrm{N}a + \mathrm{Q} - c)(\mathrm{M}x + \mathrm{P} - y) - (\mathrm{M}a + \mathrm{P} - b)(\mathrm{N}x + \mathrm{Q} - z) = 0.$$

L'enveloppe de ce plan, quand on fait varier α, est le cône dont le sommet est au point fixe et qui est circonscrit à la surface. Les coordonnées du point de la génératrice où le plan touche la surface satisfont donc à la dérivée de son équation prise par rapport à α :

$$\begin{aligned}(\mathrm{N}'a + \mathrm{Q}')(\mathrm{M}x + \mathrm{P} - y) + (\mathrm{N}a + \mathrm{Q} - c)(\mathrm{M}'x + \mathrm{P}') \\ - (\mathrm{M}'a + \mathrm{P}')(\mathrm{N}x + \mathrm{Q} - z) - (\mathrm{M}a + \mathrm{P} - b)(\mathrm{N}'x + \mathrm{Q}') = 0.\end{aligned}$$

En éliminant y et z entre cette équation et les équations (1), on obtient l'abscisse du point où le plan touche la surface, c'est-à-dire du point de la génératrice où passe la courbe d'ombre, quand le point fixe est lumineux,

$$(2) \qquad x = -\frac{\mathrm{P}'(\mathrm{N}a + \mathrm{Q} - c) - \mathrm{Q}'(\mathrm{M}a + \mathrm{P} - b)}{\mathrm{M}'(\mathrm{N}a + \mathrm{Q} - c) - \mathrm{N}'(\mathrm{M}a + \mathrm{P} - b)}.$$

830. Nous appelons $\mathrm{M}_1, \mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{M}'_1, \ldots$ les valeurs que prennent $\mathrm{M}, \mathrm{N}, \ldots, \mathrm{M}', \ldots$ quand on donne à α une certaine valeur α_1. Nous voulons que la génératrice qui correspond à α_1 se confonde avec l'axe des abscisses, que le plan des xy touche la surface le long de cette droite, et que l'origine des coordonnées soit le point de rencontre des deux génératrices consécutives. En vertu de la première condition, M_1, N_1, P_1 et Q_1 sont nulles. La génératrice infiniment voisine de celle qui coïncide avec l'axe des abscisses a pour équations

$$y = \mathrm{M}'_1 x\, d\alpha + \mathrm{P}'_1\, d\alpha, \quad z = \mathrm{N}'_1 x\, d\alpha + \mathrm{Q}'_1\, d\alpha.$$

Pour que cette droite soit dans le plan des xy, il faut que N'_1 et Q'_1 soient nulles. Enfin, la troisième condition exige que P'_1 soit égale à zéro. Nous avons donc

$$(3) \qquad \mathrm{M}_1 = 0, \quad \mathrm{N}_1 = 0, \quad \mathrm{P}_1 = 0, \quad \mathrm{Q}_1 = 0, \quad \mathrm{N}'_1 = 0, \quad \mathrm{P}'_1 = 0, \quad \mathrm{Q}'_1 = 0.$$

831. Quand le point lumineux (a, b, c) est dans le plan tangent le long de la génératrice singulière qui est confondue avec l'axe des abscisses, c est nulle; l'équation (2), qui détermine l'abscisse du point où la ligne d'ombre rencontre la génératrice (1), se réduit à

$$x = -\frac{\mathrm{P}'(\mathrm{N}a + \mathrm{Q}) - \mathrm{Q}'(\mathrm{M}a + \mathrm{P} - b)}{\mathrm{M}'(\mathrm{N}a + \mathrm{Q}) - \mathrm{N}'(\mathrm{M}a + \mathrm{P} - b)}.$$

Si nous faisons α égale à α_1, la valeur de x se présente sous une forme indéterminée mais, en prenant les dérivées du numérateur et du dénominateur, on obtient

$$x = -\frac{\mathrm{Q}''_1 b}{\mathrm{N}''_1 b}.$$

Nous posons

$$(4) \qquad g = -\frac{\mathrm{Q}''_1}{\mathrm{N}''_1}.$$

Si b n'est pas nulle, l'équation que nous avons trouvée donne

$$x = g. \tag{5}$$

La longueur g est indépendante des coordonnées a et b; par conséquent, *quelle que soit la position du point lumineux dans le plan tangent le long d'une génératrice singulière, mais non sur elle, la ligne d'ombre passe par un même point de cette droite.*

Quand la génératrice infiniment voisine de celles qui se coupent est parallèle à leur plan, qui est ici le plan des xy, N_1 est nulle, et le point commun aux lignes d'ombre que nous considérons s'éloigne à l'infini. Cette circonstance se présente toujours pour les génératrices singulières des surfaces à plan directeur.

832. Le plan des xy rencontre les différentes génératrices, et par conséquent coupe la surface. Il est intéressant de déterminer le point où la ligne d'intersection traverse l'axe des abscisses.

Si l'on conserve les infiniment petits du deuxième ordre, la seconde équation de la génératrice infiniment voisine de celle que l'on considère sera

$$z = \left(N + N' d\alpha + \frac{1}{2} N'' d\alpha^2\right) x + \left(Q + Q' d\alpha + \frac{1}{2} Q'' d\alpha^2\right).$$

Quand α est égale à α_1, cette équation devient, en vertu des égalités (3),

$$z = \frac{1}{2} N''_1 x\, d\alpha^2 + \frac{1}{2} Q''_1 d\alpha^2.$$

En supposant z nulle, on trouve pour l'abscisse la valeur g. *Le point d'une génératrice singulière où passent les lignes d'ombre, quand les points lumineux sont dans le plan tangent le long de cette droite, est donc précisément celui qui appartient à l'intersection de la surface par ce plan tangent.*

On pouvait prévoir ce résultat, car, sur une surface gauche, une courbe d'ombre est le lieu des points où les différentes génératrices sont rencontrées par les intersections de la surface avec les plans qui contiennent respectivement ces droites et qui passent au point lumineux.

833. Nous avons vu (art. 751) que la surface du biais passé a deux sommets, (I, O') et (J, O') (*fig.* 320). Les plans tangents le long des génératrices (IA, O'A') et (JD, O'D') qui passent à ces points sont verticaux. Leurs lignes d'intersection avec la surface n'ont pas été tracées sur la figure ; ce sont des paraboles qui coupent respectivement les génératrices singulières aux points (R, R') et (S, S') (art. 771). Chacun de ces points est donc celui par lequel passeraient toutes lignes d'ombre, si un point lumineux occupait successivement différentes positions dans le plan AC ou dans le plan BD. Nous savons, en effet, que les points (R, R') et (S, S') appartiennent à la ligne de contour apparent par rapport au plan horizontal (art. 759) : cette ligne est la courbe de contact d'un cône circonscrit dont le sommet situé à l'infini peut être indifféremment supposé dans le plan AC ou dans le plan BD.

834. Lorsque le point lumineux est sur la génératrice singulière elle-même, on a

$$b = 0, \quad c = 0,$$

et l'équation (2) se réduit à

$$x = -\frac{P'(Na - Q) - Q'(Ma - P)}{M'(Na - Q) - N'(Ma - P)}.$$

x est indéterminée, quand on attribue à α la valeur α_1. En prenant les dérivées des deux termes de la fraction, on trouve

$$x = -\frac{P''(Na+Q) + P'(N'a+Q') - Q''(Ma+P) - Q'(M'a+P')}{M''(Na+Q) + M'(N'a+Q') - N''(Ma+P) - N'(M'a+P')}.$$

L'introduction des valeurs (3) annule encore le numérateur et le dénominateur; mais, si l'on prend de nouveau les dérivées, et si l'on supprime les termes que l'hypothèse $\alpha = \alpha_1$ fait disparaître, au fur et à mesure qu'ils se présentent, on obtient après quelques réductions

$$x = \frac{2Q''_1 a}{-N''_1 a + Q'_1};$$

d'où, en ayant égard à l'équation (4),

$$x = \frac{2ga}{g+a}. \tag{6}$$

Soient EX la génératrice singulière (*fig.* 422 *bis*); S, G, O les points où elle est rencontrée par la génératrice voisine, par l'intersection du plan tangent avec la surface et par la ligne d'ombre; enfin, A le point lumineux. L'équation (6) donne

$$SO = \frac{2SG \times SA}{SG + SA}. \tag{7}$$

On déduit successivement de cette équation

$$SA(SG - SO) + SG(SA - SO) = 0,$$

$$SA \times OG - SG \times AO = 0,$$

$$\frac{SA}{SG} : \frac{OA}{OG} = -1. \tag{8}$$

Il résulte de cette équation que, *quand le point lumineux est sur la génératrice singulière, le point de la courbe d'ombre et le sommet de la surface sont conjugués harmoniques du point lumineux et du point où la génératrice rencontre l'intersection de la surface par son plan tangent* (art. 514) (¹).

Quand la génératrice infiniment voisine de celles qui se rencontrent au sommet est parallèle à leur plan, le point G est à l'infini (art. 831), et l'on voit par l'équation (7) que le segment SO est double de SA. Ainsi, lorsqu'un point lumineux est sur la génératrice supérieure (NE, N'E') d'un conoïde (*fig.* 299), il se trouve à égales distances du point où la ligne d'ombre traverse cette droite et du sommet (N, N').

835. *Considérations sur les changements de forme des courbes d'ombre.* — Nous avons vu (art. 831 et 834) que, quand le point lumineux est dans le plan tangent à la surface gauche, le long de la génératrice singulière EX (*fig.* 422 *bis*), la courbe d'ombre

---

(¹) On déduit de l'équation (7)

$$\frac{2}{SO} = \frac{1}{SG} + \frac{1}{SA}.$$

Cette relation entre quatre points en rapport harmonique est très fréquemment employée.

passe par le point G de cette droite, et que, quand le point lumineux est sur la génératrice elle-même, la courbe d'ombre la traverse en un point distinct de G. Il est intéressant d'étudier comment se fait la transition entre ces deux formes.

Supposons d'abord que la surface ait un plan directeur : le point G est à l'infini (art. 831). Lorsque le point lumineux se rapproche de la génératrice singulière, les deux bras qui s'étendent à l'infini se resserrent contre cette droite; à la limite ils se réunissent à elle, et la ligne d'ombre comprend une seconde fois la génératrice singulière. On conçoit facilement que la partie qui reste courbe peut traverser la génératrice ailleurs qu'à l'infini.

Quand la surface gauche n'a pas de plan directeur, le plan tangent le long d'une génératrice singulière telle que EX (*fig.* 422 *bis*) est tangent à l'infini; il touche donc la développable asymptote (art. 639). On reconnaît, en considérant le mode de génération de la développable, que la ligne de contact est précisément la génératrice EX. Nous donnerons d'ailleurs une démonstration analytique de ce théorème à l'article suivant.

Si le point lumineux est dans le plan tangent le long de la génératrice singulière EX, et peu éloigné d'elle, on pourra mener par ce point un second plan tangent à la développable asymptote, et par suite la courbe d'ombre a une branche infinie correspondant à une génératrice voisine de la génératrice singulière EX (art. 747). Lorsque le point lumineux supposé mobile arrive sur cette dernière droite, les deux bras de la branche infinie se réunissent à elle, et l'on retrouve les mêmes circonstances que quand la surface a un plan directeur.

Nous voyons qu'*une génératrice rectiligne appartient deux fois à la courbe d'ombre, quand elle contient le point lumineux, et quand un même plan est tangent à la surface en tous ses points.*

836. Proposons-nous de déterminer la génératrice de la développable asymptote qui est parallèle à la génératrice représentée par les équations (1).

m étant un coefficient arbitraire, l'équation d'un plan contenant la génératrice (1) est

$$(y - Mx - P) - m(z - Nx - Q) = 0.$$

Pour que ce plan soit tangent à l'infini, il faut qu'il soit parallèle à la génératrice infiniment voisine de celle que nous considérons. Les équations de cette génératrice sont

$$\begin{aligned} y &= (M + M'\,d\alpha)x + (P + P'\,d\alpha),\\ z &= (N + N'\,d\alpha)x + (Q + Q'\,d\alpha). \end{aligned}$$

La condition du parallélisme donne

$$M' - mN' = 0.$$

L'équation du plan passant par la génératrice considérée et tangent à l'infini est par suite

$$N'(y - Mx - P) - M'(z - Nx - Q) = 0. \tag{9}$$

La génératrice de la développable est l'intersection de ce plan par le plan que représente la dérivée de l'équation précédente prise par rapport à α. On trouve, pour cette dérivée, après quelques réductions,

$$(M''N - N''M)x + N''y - M''z + M''Q + M'Q' - N''P - N'P' = 0. \tag{10}$$

Si maintenant nous supposons α égale à α_1, nous trouvons, en introduisant les valeurs (3) dans les équations (9) et (10),

$$z = 0, \quad N''_1 y - M''_1 z = 0,$$

ou bien

$$z = 0, \quad y = 0.$$

La première de ces équations, qui représente le plan tangent à la développable asymptote, montre que ce plan est celui qui touche la surface gauche le long de la génératrice EX, comme nous le savions déjà; on voit par la seconde que la génératrice EX appartient à la développable. Ainsi, *quand une surface gauche a un sommet à distance finie, elle est touchée par sa développable asymptote tout le long de la génératrice qui passe à ce point.*

Si cependant la génératrice infiniment voisine de celles qui se rencontrent est parallèle à leur plan, N''_1 est nulle, et la seconde équation ne fait plus connaître la position que la génératrice de la développable occupe dans le plan tangent. Pour déterminer cette droite, il faudrait d'abord éliminer z entre les équations (9) et (10), puis chercher par les procédés ordinaires les valeurs des grandeurs indéterminées que les hypothèses (3) introduisent dans la formule. Nous croyons peu utile de nous arrêter à ces détails, et nous nous bornons à rappeler que, quand la surface a un plan directeur, la développable asymptote disparaît tout entière à l'infini (art. 641).

837. *Rayons de courbure d'une surface gauche aux différents points d'une génératrice singulière.* — Nous allons maintenant chercher la grandeur du rayon de courbure de la section faite dans la surface gauche par un plan perpendiculaire à la génératrice singulière. Si nous différentions les équations (1) en y considérant l'abscisse x comme constante, et les deux autres coordonnées comme fonctions de α, nous aurons

$$dy = (M'x + P')d\alpha, \qquad dz = (N'x + Q')d\alpha,$$
$$d^2y = (M''x + P'')d\alpha^2, \quad d^2z = (N''x + Q'')d\alpha^2.$$

En introduisant ces valeurs dans l'expression générale du rayon de courbure

$$R = \frac{(dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\,d^2z - dz\,d^2y},$$

on obtient

$$(11) \qquad R = \frac{[(M'x + P')^2 + (N'x + Q')^2]^{\frac{3}{2}}}{(M'x + P')(N''x + Q'') - (N'x + Q')(N''x + P'')}.$$

Lorsque α est égale à α_1, en vertu des égalités (3), l'équation (11) se réduit à

$$(12) \qquad R = \frac{M'^2_1 x^2}{N'_1 x + Q''_1}.$$

On peut la mettre sous la forme

$$(13) \qquad \frac{M'^2_1}{N'_1} x^2 - Rx + Rg = 0;$$

x et R sont l'abscisse et l'ordonnée, parallèle à l'axe des z, du centre de courbure de la section considérée. L'équation que nous venons d'obtenir montre que *les centres de* *courbure des sections faites dans une surface gauche par des plans perpendiculaires à une génératrice singulière ont pour lieu une hyperbole.*

L'une des asymptotes GH (*fig.* 422 *bis*) passe par le point G que nous avons défini précédemment (art. 834); elle est perpendiculaire à la génératrice EX. L'autre asymptote EI rencontre cette droite à une distance du sommet S égale à SG; son coefficient angulaire est $\frac{M_1'^2}{N_1}$. La courbe est tangente à la génératrice au point S; nous savons que la section qui passe à ce point a un rebroussement (art. 666).

838. La génératrice singulière est, en chacun de ses points, une section principale de la surface; la seconde section principale est la courbe qui a pour rayon R. Au point G ce rayon est infini, comme le premier rayon de courbure; la surface y est donc osculée par un plan. Ainsi, *le plan tangent à une surface gauche le long d'une génératrice singulière est osculateur au point où se rencontrent les lignes suivant lesquelles il coupe et il touche la surface.* L'hyperbole Δ montre qu'un second point d'osculation se trouve en général à l'infini.

839. Si dans l'équation (13) nous remplaçons g par sa valeur (4), nous aurons

$$M_1^2 x^2 - N_1 R x - Q_1 R = 0.$$

Quand la génératrice infiniment voisine de celles qui se rencontrent est parallèle à leur plan, N_1 est nulle, l'équation perd son second terme, et la courbe qu'elle représente devient une parabole.

Il est facile de vérifier ce résultat sur le conoïde droit. Si la section perpendiculaire à la génératrice est une ellipse ayant un de ses sommets sur cette droite, et telle que l'axe qui aboutit à ce sommet soit parallèle à la directrice rectiligne, cet axe aura une longueur constante ($2p$), tandis que la longueur de l'autre axe sera proportionnelle à l'abscisse du plan de la courbe ($2nx$). Le rayon de courbure $\left(\frac{n^2}{p}x^2\right)$ sera donc proportionnel au carré de l'abscisse.

840. Le point G peut occuper toutes les positions sur la génératrice; quand il coïncide avec le sommet S, g est nulle, et l'équation (13) représente deux droites qui se croisent à l'origine, l'une oblique, l'autre perpendiculaire à l'axe des abscisses. Les centres de toutes les sections perpendiculaires à la génératrice ont pour lieu l'une de ces droites, la première. Il résulte de là que la surface peut être osculée par des cônes le long de la génératrice. Ce cas est celui des développables (art. 451). Le plan tangent le long de la génératrice doit donc être osculateur en S, et par suite il se confond avec le plan de rebroussement. Ces deux plans sont ordinairement distincts, comme on le voit par l'exemple du conoïde de la *fig.* 299 (art. 666).

La seconde droite déterminée par l'équation (13), quand g est nulle, donne une infinité de centres de courbure pour la section qui a un rebroussement. Ce résultat en apparence paradoxal peut être assez facilement expliqué. Nous avons vu (art. 442) que toute droite située dans le plan d'une courbe plane et passant à un point de rebroussement peut être considérée comme tangente. On peut de même regarder comme tangent tout cercle tracé dans le plan de la courbe et passant par le point de rebroussement. Si, de plus, un cercle touche la tangente de rebroussement, on pourra le considérer comme ayant avec la courbe trois points communs réunis en un seul.

Cette explication résulte directement de l'examen des circonstances géométriques de la question. Quand le segment SG devient nul (*fig.* 422 *bis*), une infinité de cercles osculateurs à des sections différentes deviennent tangents entre eux et à la tangente de rebroussement de la section qui passe par le point S.

Dans le cas général, lorsque g n'est pas nulle, l'hyperbole Δ ne donne pour la section qui contient le point S d'autre centre de courbure que ce point lui-même; mais il faut remarquer que nous avons fait disparaître de l'équation (12) le facteur x qui était commun aux deux termes de la fraction, et que cette équation donne en réalité une longueur indéterminée au rayon de courbure de la section dont l'abscisse est nulle. Le lieu complet des centres de courbure des secondes sections principales le long de la génératrice singulière se compose donc de l'hyperbole Δ et de la perpendiculaire au plan de rebroussement menée par le sommet S.

841. *Rayons de courbure d'une surface gauche le long d'une arête.* — Nous allons maintenant supposer que la génératrice singulière est une arête (art. 635). Nous plaçons l'origine en un point quelconque de cette droite, qui sera comme précédemment l'axe des abscisses; le plan tangent à la surface est pris pour plan des xy.

La génératrice infiniment voisine de l'arête est parallèle à cette droite, par suite M'_1 est nulle et P'_1 ne l'est pas. Les conditions exprimées par les égalités (3) deviennent donc

$$(14)\qquad M_1=0,\quad N_1=0,\quad P_1=0,\quad Q_1=0,\quad M'_1=0,\quad N'_1=0,\quad Q'_1=0.$$

L'équation (11) donne alors

$$R=\frac{P_1'^2}{N'_1x+Q'_1};$$

d'où

$$(15)\qquad N'_1Rx+Q'_1R-P_1'^2=0,$$

$$(16)\qquad Rx-gR-\frac{P_1'^2}{N'_1}=0.$$

On voit que l'hyperbole, lieu des centres de courbure des secondes sections principales, est équilatère; l'arête GX est une de ses asymptotes (*fig.* 423 *bis*), son centre se trouve au point d'osculation G qui devient un point central pour les courbures. Enfin, le rayon de courbure de la section principale au point situé à l'infini est nul; on peut facilement vérifier ce résultat, dans le cas du conoïde droit, par un raisonnement analogue à celui de l'article 839.

Quand le point lumineux A est sur l'arête GX, le point O de la courbe d'ombre est le milieu du segment AG, car, le point S étant à l'infini, le rapport de SA à SG est égal à l'unité, et l'équation (8) montre que OA et OG sont égales et de signes contraires.

842. Quand le paramètre d'une arête a une longueur finie, le plan tangent le long de cette génératrice est perpendiculaire à son plan central (art. 677). D'après cela, si nous considérons trois génératrices consécutives dont les deux premières soient parallèles et horizontales, la commune perpendiculaire à la seconde et à la troisième devra être verticale, pour qu'à la limite les trois droites se réunissent de manière à former une arête du genre de celle que nous considérons. La troisième génératrice est donc horizontale comme les deux autres, et par suite nous devons ajouter aux égalités (14) la condition

$$N'_1=0;$$

l'équation (15) donne alors

$$R=\frac{P_1'^2}{Q'_1}.$$

On voit que le rayon de courbure de la seconde section principale est constant; d'où il résulte que, *lorsqu'une surface gauche possède une arête ayant un paramètre fini, elle est osculée par un cylindre le long de cette droite.*

843. On peut facilement vérifier, pour le cylindroïde de la *fig.* 298, le théorème que nous venons de démontrer.

Le plan vertical OM coupe la surface suivant une ellipse dont les axes sont respectivement égaux à $\frac{\mathrm{IJ}}{\cos \mathrm{MOI}}$ et à $\alpha'_1\alpha'$ (art. 650). Le rayon de courbure de cette ellipse au sommet (M, M'), qui appartient à l'arête (a A, a' A'), est donc

$$\frac{\overline{\mathrm{I}'\alpha'}^2}{\alpha \mathrm{I}} \cos \mathrm{MOI}.$$

Cette section est oblique; la section normale qui lui est tangente se trouve dans un plan vertical parallèle à IJ. D'après le théorème de Meusnier, son rayon de courbure déduit du précédent est $\frac{\overline{\mathrm{I}'\alpha'}^2}{\alpha \mathrm{I}}$. On voit qu'il ne dépend pas de la position du point (M, M') sur l'arête (Aa, A'a'), et que par suite, en tous les points de cette droite, les rayons de courbure des sections faites par des plans verticaux parallèles à IJ sont les mêmes : la surface est donc osculée par un cylindre le long de l'arête.

On trouve, par le théorème d'Euler, que le rayon de courbure de la seconde section principale, en l'un quelconque des points de l'arête considérée, est

$$\frac{\overline{\mathrm{I}'\alpha'}^2}{\alpha \mathrm{I}} \sin^2 \alpha' \mathrm{I}' \mathrm{A}'.$$

844. *Construction de l'hyperbole lieu des centres de courbure aux divers points d'une génératrice singulière.* — Lorsque l'on connaît sur une génératrice singulière le sommet et le point où la surface est osculée par un plan, il suffit d'obtenir le rayon de courbure de la seconde section principale en un point, pour qu'on puisse construire l'hyperbole Δ lieu des centres de courbure. Or il sera toujours possible de faire cette détermination à l'aide des directrices.

Si l'on considère la génératrice singulière (BD, B'D') (*fig.* 320), nous savons que le sommet est (J, O') et le point d'osculation (S, S'). La directrice circulaire (CD, C'D') est tangente en (D, D') à la seconde section principale; on obtiendra donc immédiatement le rayon de courbure de cette section, par les tracés auxquels conduit le théorème de Meusnier. On pourra ensuite construire l'hyperbole.

Dans le cas d'une arête, il suffit de connaître le point où la surface est osculée par un plan et le rayon de courbure de la seconde section principale en un point. S'il s'agit de l'arête (pq, $p'q'$) (*fig.* 320), le point d'osculation est son intersection (O, O') avec la directrice rectiligne. On obtient d'ailleurs le rayon de courbure de la seconde section principale pour le point (q, q'), par une construction inverse de celle qui est expliquée à l'article 800, en remarquant que la directrice circulaire est la section par un plan normal dont on peut aisément déterminer les angles avec les plans principaux.

Surfaces gauches lieux de normales à une surface.

845. Avant d'étudier les surfaces qui font l'objet de ce paragraphe, nous allons faire connaître une construction très simple, qui nous sera fort utile, pour déterminer le point central et le paramètre de distribution d'une génératrice d'une surface gauche, lorsque les plans tangents à la surface en trois points de cette droite sont donnés [1].

Par le point central A d'une génératrice DX (*fig.* 424 *bis*) et dans un plan quelconque, nous élevons à cette droite une perpendiculaire AA' égale au paramètre de distribution k; en joignant le point A' à un point quelconque B de la génératrice, nous aurons

$$\tang AA'B = \frac{AB}{k}.$$

L'angle AA'B est donc égal à celui que le plan tangent en B fait avec le plan central [2]. L'angle BA'C, différence des deux angles AA'C et AA'B, est par conséquent égal à celui que comprennent les plans tangents aux deux points B et C.

Si l'on élève à une génératrice d'une surface gauche et par son point central une perpendiculaire égale au paramètre de distribution, l'angle sous lequel on voit de l'extrémité de cette droite un segment quelconque de la génératrice est égal à l'angle que comprennent les plans tangents à la surface aux deux extrémités du segment.

Quand on connaît les plans tangents en trois points O, B et C, on obtient le point A' en décrivant sur les longueurs OB et OC des segments capables des angles que forment les plans tangents en B et en C avec le plan tangent en O. La perpendiculaire A'A donne ensuite le paramètre k et le point central A.

846. Nous joignons le point A' à un point quelconque O de la génératrice, nous traçons la droite A'P perpendiculaire à OA' et les droites OY, BB' et CC' perpendiculaires à OX; le quadrilatère OA'B'B a ses sommets sur un cercle, car les angles opposés A' et B sont droits. Les angles A'OB' et AA'B, ayant pour mesure la moitié des segments interceptés dans ce cercle par les parallèles AA' et BB', sont égaux; les angles A'OC' et AA'C sont aussi égaux; par suite, il y a égalité entre les angles B'OC' et BA'C, sous lesquels on voit des points O et A' un segment quelconque B'C' de la droite PQ, et sa projection BC sur la génératrice.

---

(1) Cette construction et son application aux surfaces lieux de normales sont dues à M. Mannheim (voir dans le journal *l'Institut* les séances de la Société philomathique des 2, 23 avril et 7 mai 1864). Nous avons ajouté la détermination du produit des rayons de courbure (art. 847), la construction du paramètre de déviation (art. 851), et diverses considérations peu importantes.

(2) Nous avons déjà établi cette proposition à l'article 626.

Nous dirons que la droite PQ est la *droite auxiliaire* relative au point O pris pour origine, et alors le résultat que nous venons d'obtenir pourra être énoncé comme il suit : *L'angle compris entre les rayons vecteurs de deux points de la droite auxiliaire est égal à l'angle formé par les plans tangents aux points de la génératrice qui sont leurs projections.*

Si l'on connaît les plans tangents en trois points O, B et C de la génératrice OX, on pourra tracer les droites OB' et OC' qui comprennent, avec la perpendiculaire OY, des angles B'OY et C'OY égaux à ceux que les plans tangents aux points B et C font avec le plan tangent en O; les points B' et C' où elles coupent les parallèles à OY menés par les points B et C appartiennent à la droite PQ et permettent de la tracer. Les droites OA' et A'A, respectivement perpendiculaires à PQ et OX, font ensuite trouver le paramètre et le point central.

847. On a

$$OQ = \frac{OA'}{\cos QOA'} = \frac{AA'}{\cos^2 QOA'}.$$

En rapprochant cette expression de l'équation (25) de l'article **826**, et remarquant que AA' est le paramètre k et QOA' l'angle du plan tangent en O et du plan central, on voit que *la longueur OQ, ordonnée à l'origine de la droite auxiliaire, est moyenne proportionnelle entre les grandeurs absolues des rayons de courbure principaux de la surface au point O.*

Si l'origine se meut sur la génératrice OX, la droite auxiliaire PQ tourne autour du point A' en restant perpendiculaire au rayon vecteur de ce point. Lorsque l'origine est au point B, c'est-à-dire lorsque l'on mesure les angles des plans tangents à partir du plan tangent en B, la droite auxiliaire est la perpendiculaire AB'_1 à BA'; l'ordonnée BB'_1 est donc moyenne proportionnelle entre les rayons de courbure principaux au point B.

848. La considération de la droite auxiliaire facilite la discussion des circonstances que présente une surface gauche aux différents points d'une génératrice. On peut, par son aide, rendre plus sensibles les résultats que nous avons obtenus à l'article **677** pour les génératrices singulières; mais nous ne devons pas nous arrêter à ces détails, et nous allons appliquer les propositions qui précèdent à l'étude des surfaces auxquelles ce paragraphe est spécialement consacré.

849. On a souvent à considérer en Stéréotomie des surfaces gauches lieux de normales à une surface directrice Σ aux différents points d'une courbe Δ tracée sur elle.

Soient O un point de la courbe Δ (*fig.* 354 *bis*), OZ la normale en O à la surface Σ; OX et OY deux droites respectivement tangentes en O aux sections principales; C_1 et C_2 les centres de courbure en O de ces sections. Nous désignerons par R_1 et R_2 les rayons OC_1 et OC_2, et par φ l'azimut TOX de la tangente OT à la directrice Δ au point O; enfin nous supposerons que le plan XOY est horizontal.

La normale à la surface Σ au point de Δ infiniment voisin de O rencontre les axes de déviation $C_1 y$ et $C_2 x$ respectivement perpendiculaires aux plans ZOX et ZOY (art. **814**); ces deux droites sont donc tangentes à la surface des normales, et par suite les points où les plans ZOX et ZOY, qui contiennent la normale OZ, touchent cette surface sont C_2 et C_1. Nous savons d'ailleurs que le plan ZOT est tangent en O à la surface des normales; nous connaissons donc les plans tangents à la surface en trois points O, C_1 et C_2 de la génératrice OZ, et par suite nous pouvons déterminer son point central et son paramètre. Adoptant la construction de l'article **846**, nous traçons, dans le plan ZOX, les droites ON_2 et ON_1 faisant avec OX des angles égaux à φ et à $(90^\circ + \varphi)$, et nous les arrêtons aux horizontales des points C_2 et C_1 : la droite N_1N_2 est la droite auxiliaire relative au point O pour la génératrice OZ de la surface gauche considérée. En abaissant les droites OA' et A'A respectivement perpendiculaires sur $N_1 N_2$ et sur OZ, nous obtenons le point central A et le paramètre AA' [1].

Eu égard au sens dans lequel le plan tangent tourne quand le point de contact se transporte de C_2 en O, le paramètre AA' est positif (art. **623**). Il serait négatif si le point A' était de l'autre côté de la verticale OZ.

850. Nous avons identiquement

$$\text{surf. } N_2 O N_1 = \text{surf. } N_2 O C + \text{surf. } N_1 O C,$$

ou bien

$$ON_2 \times ON_1 = ON_2 \times OC \cos\varphi + ON_1 \times OC \sin\varphi.$$

Mais on trouve immédiatement

$$ON_2 = \frac{R_2}{\sin\varphi}, \quad ON_1 = \frac{R_1}{\cos\varphi}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation précédente, on obtient

$$\frac{R_1 R_2}{\sin\varphi\cos\varphi} = OC \times R_2 \cot\varphi + OC \times R_1 \tang\varphi,$$

ou bien

$$\frac{1}{OC} = \frac{1}{R_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{R_2}\sin^2\varphi.$$

OC est donc le rayon de courbure de la section faite dans la surface Σ par le plan normal ZOT. Ce plan, qui est tangent en O à la surface des normales, doit lui être normal en C, car l'angle OA'C est droit (art. **845**).

Le centre de courbure de la section normale tangente à la directrice Δ est le point où le plan de cette section coupe normalement la surface gauche.

---

(1) La *fig.* 354 *bis* est une perspective cavalière; le plan ZOX est de front, et par suite les constructions faites sur ce plan sont géométrales.

851. En opérant comme à l'article précédent, on trouve

$$\text{surf.}\,N_2ON_1 = \text{surf.}\,N_1OQ - \text{surf.}\,N_2OQ,$$
$$ON_2 \times ON_1 = ON_1 \times OQ\cos\varphi - ON_2 \times OQ\sin\varphi,$$
$$\frac{R_1R_2}{\sin\varphi\cos\varphi} = R_1 \times OQ - R_2 \times OQ,$$
$$\frac{1}{OQ} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sin 2\varphi.$$

En rapprochant ce résultat de l'équation (20 *bis*) de l'article **812**, on reconnaît que la longueur OQ est égale au paramètre de déviation relatif à l'angle φ; mais, d'après l'article **847**, cette longueur est moyenne proportionnelle entre les rayons de courbure de la surface gauche au point O; nous voyons donc que *la grandeur absolue du produit des rayons de courbure de la surface des normales, en un point de son intersection avec la surface directrice, est égale au carré du paramètre de déviation qui correspond à l'azimut de cette courbe* (1).

852. Le plan central de la génératrice OZ et le plan ZOX sont tangents l'un en A, l'autre en C_2 à la surface des normales : l'angle aigu qu'ils comprennent est donc égal à N_2OA' (art. **846**). Nous avons immédiatement

$$\operatorname{tang} N_2OA' = \frac{A'N_2}{OA'}, \quad \operatorname{tang} QOA' = \frac{A'Q}{OA'}.$$

On déduit de ces équations

$$\operatorname{tang} N_2OQ = \frac{N_2Q \times OA'}{\overline{OA'}^2 + A'N_2 \times A'Q};$$
$$\operatorname{tang} N_2OQ \operatorname{tang} N_2OA' = \frac{N_2Q \times A'N_2}{A'N_1 \times A'N_2 + A'N_2 \times A'Q}.$$
$$\operatorname{tang} N_2OQ \operatorname{tang} N_2OA' = \frac{N_2Q}{N_1Q}.$$

La droite ON_2 qui correspond au plan ZOX est l'origine commune des angles N_2OQ et N_2OA'; ces angles sont par suite de signes contraires. Le second membre de l'équation est égal à la quantité $\frac{R_2}{R_1}$ qui, dans la disposition adoptée sur la figure, est positive; nous avons donc

$$\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang} N_2OA' = -\frac{R_2}{R_1}.$$

(1) Le paramètre de déviation n'est autre que le rayon de seconde courbure de Δ lorsque cette courbe est une ligne géodésique de Σ. (Le rayon de seconde courbure d'une courbe gauche est le rapport d'un arc infiniment petit de cette courbe, à l'angle que font entre eux les plans osculateurs aux extrémités de cet arc.) (MANNHEIM.)

Nous voyons que les azimuts φ et N_2OA', qui sont mesurés à partir du plan principal ZOX, correspondent à deux diamètres conjugués de l'indicatrice de la surface Σ.

La tangente à la trace de la surface des normales et la trace du plan central d'une de ses génératrices, sur le plan tangent à la surface directrice, sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice de cette dernière [1].

Si l'on veut éviter de considérer des angles négatifs, il faut prendre pour azimut de la direction conjuguée à OT le supplément de N_2OA'.

853. La construction expliquée à l'article **849** nous a fait trouver le rayon de courbure OC d'une section normale, la longueur OQ du paramètre de déviation et l'azimut N_2OA' de la droite conjuguée à la tangente OT. Cette construction a donc, en dehors de la considération des surfaces normales, une importance réelle dans les problèmes d'application relatifs à la courbure des surfaces, lorsque l'on connaît les plans et les rayons de courbure des sections principales.

Si l'on mesure les abscisses positives de O vers Q, le paramètre de déviation sera de signe contraire à l'abscisse OQ.

Si l'on fait les tracés sur le plan tangent, pour la construction de l'azimut N_2OA', il faudra mener la droite ON_2 dans la direction OX, la droite OQ sera la tangente OT, et la droite OA' se trouvera dans la direction conjuguée à OT.

854. Les plans ZOX et ZOY (*fig.* 354 *bis*) étant rectangulaires, l'angle sous lequel on voit du point A' le segment de la normale compris entre leurs points de contact C_1 et C_2 est droit (art. **845**). Il résulte de là que si l'azimut φ de la courbe Δ passe par toutes les grandeurs possibles, le lieu des positions du point A' sera le cercle décrit sur le segment C_1C_2 comme diamètre. Le point central A est toujours compris entre les points C_1 et C_2; il atteint l'une ou l'autre de ces positions extrêmes, quand la tangente OT est confondue avec OX ou avec OY; le paramètre est alors nul, OZ est une génératrice singulière de la surface gauche, et un sommet se trouve au point C_1 ou au point C_2.

A deux valeurs de φ égales et de signes contraires correspondent un même point central et deux paramètres égaux et de signes contraires. Les valeurs limites du paramètre sont les rayons GG' et GG'_1 (*fig.* 353 *bis*), ou $\pm \frac{R_1 - R_2}{2}$.

Pour avoir la grandeur de l'azimut lorsque le paramètre est GG', il suffit de faire en ordre inverse les constructions expliquées à l'article **849**. Nous traçons le rayon vecteur OG', sa perpendiculaire $IG'N_2$ et la droite ON_2 : l'angle N_2OX est égal à φ. L'équation que nous avons obtenue à l'article précédent devient

$$\tan\varphi \tan N_2OG' = -\frac{R_2}{R_1};$$

---

[1] Ce théorème a déjà été donné par plusieurs géomètres.

mais la droite OG' est la bissectrice de l'angle droit N_1ON_2; nous avons donc

$$\tang\varphi = \pm\frac{R_2}{R_1}.$$

Nous mettons le double signe, parce que nous considérons les deux surfaces qui ont pour paramètres GG' et GG'_1.

On peut concevoir, sur une surface, des courbes directrices pour lesquelles, en chaque point, la valeur de k soit un maximum en grandeur absolue. Ces lignes sont toujours réelles; elles forment deux séries : l'une correspond aux valeurs positives de k, l'autre aux valeurs négatives.

855. D'après ce que nous avons vu à l'article **847**, la longueur C_1E_1 est moyenne proportionnelle entre les rayons de courbure principaux au point C_1 (*fig.* 354 *bis*); il en est de même du segment C_2E_2 pour les rayons correspondant au point C_2. On trouve d'ailleurs

$$C_1E_1 = \frac{AA'\times C_2C_1}{C_2A}, \quad C_2E_2 = \frac{AA'\times C_2C_1}{C_1A};$$

donc

$$C_1E_1\times C_2E_2 = \overline{C_2C_1}^2 = (R_1 - R_2)^2.$$

Le produit des rayons de courbure principaux de la surface gauche aux points C_1 et C_2 est indépendant de l'angle φ et égal à la quatrième puissance de la différence des rayons principaux de la surface directrice.

856. Lorsque les rayons R_1 et R_2 sont de signes contraires, les points C_1 et C_2 sont situés de part et d'autre du point O. Si, alors, la courbe Δ devient tangente à une asymptote de l'indicatrice, le rayon de courbure OC est infini, la droite N_1N_2 est parallèle à OZ (*fig.* 338 *bis*), et par suite le point A' est sur OX, et le point central en O.

Quand la directrice Δ est tangente à une asymptote de l'indicatrice, le point central de la génératrice normale est son intersection avec la surface Σ. Si Δ est une ligne asymptotique de Σ, c'est aussi la ligne de striction de la surface gauche lieu des normales.

Le segment OA' est moyen proportionnel d'une part entre les rayons principaux de la surface gauche au point O (art. **847**), de l'autre entre les rayons OC_1 et OC_2: donc *le produit des rayons de courbure est le même au point O, pour la surface gauche normale et pour la surface directrice, dans le cas qui nous occupe.* On peut déduire ce théorème de celui de l'article **851**.

857. A l'aide de la *fig.* 354 *bis*, on peut établir de nombreuses équations entre l'azimut φ, le rayon de courbure R de la section normale qui lui correspond dans la surface Σ, le paramètre de déviation K, le paramètre k de la génératrice OZ, l'ordonnée OA de son point central, et le produit des rayons de courbure principaux en un point donné de cette droite [1]. Nous ne nous arrêterons pas à ces détails, et nous nous bornerons à appeler l'attention sur deux cas qui présentent quelque intérêt.

Quand le point O est un ombilic, le cercle C_1C_2 se réduit à un point, le paramètre k est toujours nul, l'ordonnée du point central est constante et égale au rayon de la sphère osculatrice.

Lorsque le rayon R_2 est infini, la droite N_2C_2 s'éloigne à l'infini, le cercle C_1C_2 se confond avec la droite C_1N_1, le point A' se place en N_1, et la droite auxiliaire est parallèle à ON_2. On a alors

$$k = R_1 \operatorname{tang} \varphi.$$

L'ordonnée du point central est constante et égale à R_1. Ces circonstances se présentent toujours lorsque Σ est une surface développable.

858. Quand on veut étudier les relations qui existent entre deux surfaces gauches lieux de normales à une même surface, aux différents points de deux courbes issues d'un même point, il faut établir simultanément sur la figure les deux droites auxiliaires qui correspondent aux azimuts de ces directrices.

L'azimut φ d'une directrice Δ étant XON_2 (*fig.* 338), la droite auxiliaire sera N_1N_2. Nous projetons les points N_1 et N_2 en M_2 et M_1, et nous traçons M_1M_2, OM_1 et OM_2. On a immédiatement

$$\operatorname{tang} XOM_2 = -\cot ZOM_2 = -\frac{OC_2}{C_2M_2} = -\frac{OC_2}{C_1N_1} = -\frac{R_2}{R_1 \operatorname{tang}\varphi};$$

$$\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang} XOM_2 = -\frac{R_2}{R_1}.$$

L'angle XOM_2 qui détermine le point M_2 est donc celui de la direction conjuguée à φ dans l'indicatrice, et, comme le même raisonnement peut être appliqué aux angles XON_1 et XOM_1 [2], nous voyons que les droites N_1N_2 et M_1M_2 sont les droites auxiliaires pour les surfaces gauches qui correspondent à deux directrices dont les tangentes en O sont conjuguées.

La normale OZ fait des angles égaux avec les droites M_1M_2 et N_1N_2, et par suite avec leurs perpendiculaires OA' et OB'. Il résulte de là que les segments OB' et OB_1 sont égaux.

---

(1) Plusieurs des formules que l'on peut obtenir ainsi ont été données par Joachimstal (*Journal de M. Liouville*, 1848), ou par M. Lamarle (*Exposé géométrique*), qui les ont trouvées par d'autres procédés.

(2) Cette observation nous dispense de prouver que l'angle M_1OM_2 est droit, ce qui du reste est facile.

G étant le centre du cercle, on trouve

$$OA' + OB'_1 = 2 OG \cos ZOA'; \quad OA' \times OB'_1 = OC_1 \times OC_2.$$

En divisant la première de ces équations par la seconde, on a

$$\frac{1}{OB'_1} + \frac{1}{OA'} = 2\frac{OG \cos ZOA'}{OC_1 \times OC_2};$$

on obtient ensuite

$$\frac{1}{OB} + \frac{1}{OA} = 2\frac{OG}{OC_1 \times OC_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

La somme des inverses des ordonnées du point central de la génératrice pour deux directions conjuguées de la directrice Δ est constante, et égale à la somme des courbures principales.

Ce théorème est dû à Joachimstal. Nous ne l'avons donné que comme exemple de l'emploi simultané de deux droites auxiliaires.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS DIVERSES.

Construction des rayons de courbure et des plans osculateurs d'une courbe donnée par ses projections.

859. *Cas où la tangente à la courbe au point considéré est parallèle à la ligne de terre.* — Soient ω et ω' les projections de la courbe (*fig.* 341); (O, O') un point de cette ligne où la tangente est parallèle à la ligne de terre XY; A et B les centres de courbure des projections ω et ω'.

Nous prenons un second plan vertical xy perpendiculaire à XY, et nous y plaçons la projection o du point (O, O').

Les sections faites dans les cylindres projetants par les plans normaux contenant la tangente à la courbe au point (O, O') sont identiques à ω et ω'; leurs centres de courbure sont a et b sur le plan xy.

D'après le théorème de Meusnier, le centre de courbure de la courbe en (O, O') est la projection, sur son plan osculateur, de chacun des points a et b; la droite ab est donc une projetante sur ce plan, et par suite, en lui abaissant une perpendiculaire du point o, on obtient la trace oN du plan osculateur. Le point c, projection des points a et b, est le centre de courbure de (ω, ω'). La longueur du rayon de courbure est oc.

860. *Cas où la tangente à la courbe au point considéré* (O, O') *est parallèle à l'un des deux plans de projection seulement*, celui qui est horizontal, par exemple. Nous déterminons les centres de courbure A et B des projections ω et ω' (*fig.* 342); nous prenons un second plan vertical xy perpendiculaire à la tangente à la courbe gauche au point (O, O'), nous y plaçons la projection o de ce point, et le centre de courbure a de la section faite dans le cylindre vertical ω par un plan normal à cette surface et tangent à la courbe. Au point (O, O'), le plan vertical OV est normal au cylindre projetant ω'; lorsque nous aurons déterminé le rayon de courbure de la section qu'il contient, le problème sera ramené à celui que nous avons résolu à l'article précédent.

Les deux sections principales du cylindre horizontal au point (O, O') sont la génératrice et la section droite contenue dans le plan OX_1 (art. **801**). Le rayon de courbure de la première est infini, celui de la seconde est O'B. Nous trouvons la longueur OB_3 du rayon de courbure de la section contenue dans le plan OV, par la construction expliquée à la fin de l'article **800**; nous portons la longueur OB_3 en cb_3, et nous achevons les tracés sans difficulté.

861. *Cas général.* — Lorsque la tangente à la courbe au point considéré (O, O') (*fig.* 343) a une position quelconque par rapport au plan de projection, il faut d'abord déterminer les rayons de courbure des sections faites dans les cylindres projetants, par des plans normaux contenant la tangente (OM, O'M').

Nous rabattons sur le plan horizontal le plan (MM', M'O') qui touche le cylindre horizontal au point (O, O'); ce point se place en O_1, et par suite les tangentes à la section droite et à la courbe (ω, ω') sont rabattues sur les droites O_1G et O_1M. En prenant une longueur O_1B_1 égale au rayon de courbure O'B de ω', et traçant les droites B_1B_2 et B_2B_3 respectivement perpendiculaires à O_1M et à O_1G, nous obtenons le rayon de courbure O_1B_3 de la section normale tangente à la courbe (ω, ω').

Le plan tangent au cylindre vertical étant rabattu autour de sa trace OM, le point (O, O') se place en un point O_2 facile à déterminer, et les rabattements des tangentes à la section droite et à la courbe (ω, ω') sont la droite O_2k, parallèle à MO, et la droite O_2M. Nous connaissons d'ailleurs le rayon de courbure OA de la section droite, nous pouvons donc déterminer la longueur O_2A_3 du rayon de courbure de la section normale tangente à la courbe (ω, ω').

Faisons maintenant passer par le point (O, O') un plan perpendiculaire à la tangente (OM, O'M'), et rabattons-le sur le plan horizontal. La trace horizontale de ce plan est une droite xy parallèle à OA, et passant au point P déterminé par la droite O_2P perpendiculaire au rabattement MO_2 de la tangente. Dans le rabattement du plan, le point (O, O') se place en o à une distance de P égale à PO_2.

Les normales aux deux cylindres sont dans ce plan : l'une (OQ, O'Q') a sa trace horizontale au point Q, et est rabattue sur la droite Qo; l'autre étant horizontale, son rabattement est la droite oa_3 parallèle à xy. Nous portons sur ces normales des longueurs ob_3 et oa_3 respectivement égales aux rayons de courbure O_1B_3 et O_2A_3, et nous achevons la construction comme précédemment. Le rayon de courbure de la courbe (ω, ω') au point (O, O') est égal à oc; la trace horizontale du plan osculateur passe par les points N et M [1].

862. *Considérations générales.* — Nous avons exposé en détail la construction à laquelle les théorèmes d'Euler et de Meusnier conduisent pour la détermination du plan osculateur en un point d'une courbe donnée par ses projections. On doit recourir à cette solution quand on peut déterminer d'une manière précise les rayons de courbure des projections. Dans le cas contraire, il convient de préférer les tracés que nous avons fait connaître à l'article **448**.

On obtient, par des procédés analogues, le rayon de courbure et le plan osculateur en un point donné de la courbe d'intersection de deux surfaces quelconques, lorsque l'on connaît leurs sections principales en ce point, et leurs rayons de courbure; mais la construction du rayon de chaque section normale tangente à l'intersection exige des constructions plus laborieuses.

863. Quand la projection ω' est une droite (*fig.* 343), le cylindre horizontal est un plan; le rayon ob_3 devient par suite infini, et la droite a_3b_3 est parallèle à oQ. Si, de plus, on suppose que la projection ω soit un cercle, la construction donnera le rayon de courbure d'une ellipse en un point quelconque. En traduisant analytiquement les tracés, on obtient une expression du rayon de courbure applicable à l'hyperbole comme à l'ellipse. Nous ne nous arrêterons pas à cette question; nous remarquerons seulement qu'aux extrémités du grand axe, l'ellipse est tangente à une section droite du cylindre, et que par suite le théorème de Meusnier donne immédiatement pour le rayon de courbure l'expression que nous avons trouvée à l'article **779**. Aux extrémités du petit axe, le plan de l'ellipse est normal au cylindre, et l'on obtient directement le rayon de courbure par le théorème d'Euler.

---

[1] Appelons r et r' les rayons de courbure en o et en o' des sections droites ω et ω'; R et R' ceux des sections normales tangentes; ρ le rayon de courbure cherché; α et α', β et β' les angles que forment avec les plans de projection le plan osculateur et la tangente OM en O à la courbe; $\gamma = coa_3$ et $\gamma' = cob_3$ les angles du plan osculateur et des sections normales tangentes; $\theta = a_3ob_3$ l'angle des normales OP et OQ en O aux cylindres projetant la courbe.

Le triangle a_3ob_3 donne l'équation $\rho\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\theta} = RR'\sin\theta$, qui, en vertu des relations $r = R\cos^2\beta$, $r' = R'\cos^2\beta'$, fournit la valeur de ρ en fonction de r, r', β, β', θ.

Comme $\rho = R\cos\gamma$, et comme le trièdre formé par le plan osculateur, le plan MOP et le plan horizontal passant par O, donne $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$, on a, pour trouver α, $\rho\cos^3\beta = r\cos\alpha$. On obtient α' au moyen d'une équation analogue.

Enfin, la dernière égalité peut servir à trouver les rayons de courbure d'une courbe plane, connaissant une projection de cette courbe, l'angle que son plan fait avec le plan de projection, et les angles que ses tangentes forment avec ce plan. (E. L.)

Construction des sommets d'une surface d'égale pente.

864. Nous savons que la projection de l'un des sommets d'une surface d'égale pente sur un plan horizontal quelconque est le centre de courbure de la section de la surface par ce plan pour le point correspondant (art. **549**). On peut, par conséquent, déterminer un sommet, quand on connaît la génératrice qui y passe et le rayon de courbure de la directrice horizontale au point correspondant.

Considérons la surface d'égale pente représentée sur les *fig.* 274 et 275, et proposons-nous de déterminer la position précise des sommets qui doivent se trouver sur les génératrices (BC, B'C') et (BD, B'D').

Nous pouvons déterminer sur A'B' le centre de courbure de l'ellipse directrice (AB, A'B') pour le point B', et élevant en ce point une perpendiculaire ΓΓ' à A'B', nous avons une droite sur laquelle sont les centres de courbure des sections normales faites dans les deux nappes de la développable, par un plan contenant la tangente à l'ellipse (AB, A'B') au point (B, B') (art. **859**).

La génératrice (BD, B'D') est, sur la nappe à laquelle elle appartient, une section principale pour le point B'. Le plan de la seconde section principale est perpendiculaire à la droite B'D', et par suite sa trace verticale est la droite B'Γ perpendiculaire à B'D'. Le point Γ où elle rencontre la droite ΓΓ' est donc le centre de courbure de la seconde section principale. La projection du point Γ sur le plan horizontal du point B' serait la projection du sommet cherché J' sur le même plan, et en conséquence les points Γ et J' sont sur une verticale. De même, si l'on trace B'Γ' perpendiculaire à B'C', la verticale du point Γ' passera par le sommet *j'*.

Pour la construction que nous venons d'exposer, il a suffi d'appliquer le théorème de Meusnier, parce que la tangente à la directrice au point B' est horizontale, et que par suite cette courbe est tangente à la section principale et à la section horizontale. Quand la tangente à la directrice au point où elle est rencontrée par la génératrice qui passe au sommet n'est pas horizontale, on doit appliquer successivement les théorèmes d'Euler et de Meusnier, et par suite la construction est plus compliquée.

Détermination des tangentes à la courbe d'intersection de deux surfaces qui se touchent.

865. Supposons que deux surfaces A et B se touchent en un point O; considérons deux surfaces du second degré A' et B' qui leur soient respectivement osculatrices en ce point, et qui aient leur centre en un même point de la normale; enfin, appelons α et β (*fig.* 344) les sections de ces surfaces par le plan diamétral parallèle au plan tangent en O : les coniques concentriques α et β se coupent généralement en quatre points E, G, F et H.

Les surfaces A' et B' sont tangentes au point O, et à un autre point diamétralement opposé; leur intersection se compose donc de deux courbes planes auxquelles les points E, G, F et H appartiennent deux à deux (art. **252**). Les traces des plans de ces lignes sur le plan des coniques α et β sont les droites EF et GH.

Le plan passant par le point O et par la droite diamétrale VV_1 coupe les surfaces A et B suivant des lignes dont les rayons de courbure sont proportionnels aux carrés des rayons vecteurs CL et CK; la section faite dans la surface A touche donc extérieurement la section de la surface B. Le contraire a lieu pour les sections par le plan cc_1. Enfin, celles qui se trouvent contenues dans le plan EF sont osculatrices; ces surfaces ont donc dans le plan EF un point commun infiniment voisin de leur point de contact O, et par suite elles se coupent suivant une ligne dont la tangente au point O est parallèle à EF. On trouve, par des raisonnements analogues, que leur intersection a une seconde branche dont la tangente est parallèle à GH.

Si l'on suppose que les coniques α et β soient transportées parallèlement à elles-mêmes, de manière que leur centre C arrive au point de contact O, elles seront des indicatrices correspondant à une même valeur de la constante arbitraire c (art. **794** et **795**), et les deux branches de la courbe d'intersection auront pour tangentes les diamètres communs EF et GH ([1]).

Quand les indicatrices α et β se coupent en deux points seulement, ce qui arrive lorsque ce sont des hyperboles ayant leurs asymptotes croisées (art. **502**), l'intersection n'a qu'une branche dont la concavité soit tournée vers le point pris pour centre des surfaces osculatrices; mais, si l'on place le centre de ces surfaces de l'autre côté du plan tangent, on trouve pour les courbes α et β deux hyperboles supplémentaires des premières, et qui déterminent par leurs points de rencontre la tangente à une seconde branche de l'intersection ayant sa concavité tournée vers le centre des nouvelles surfaces.

Dans le cas où les indicatrices se touchent, le diamètre passant par leurs points de contact est tangent à des sections normales surosculatrices; les surfaces, d'ailleurs, ne se coupent pas. Enfin, si les indicatrices ne se rencontrent pas, les surfaces n'ont en commun que leur point de contact O.

Quand la surface B est un plan, son indicatrice β correspondant à une valeur finie du paramètre c a des axes infinis, et par suite tous ses points sont à l'infini. Les diamètres communs aux courbes α et β sont alors les asymptotes de α: ces droites sont donc tangentes aux deux branches de la courbe d'intersection, ce qui est conforme aux résultats de l'article **797**.

([1]) Cette construction a été donnée par Th. Olivier (*Journal de l'École Polytechnique*, XXI^e Cahier.)

866. *Épure du conoïde de la voûte d'arêtes en tour ronde.* — Nous allons appliquer la construction que nous venons d'exposer à la détermination des tangentes au point double de la courbe d'intersection du tore et du conoïde droit représentés sur la *fig.* 301. Nous renvoyons à l'article **671** pour la génération de ces surfaces.

Les normales du conoïde en tous les points de la génératrice OV sont dans un même plan; cette droite est donc une section principale en chacun de ses points. La seconde section principale pour le point double V est dans le plan vertical AB.

Si nous appelons R_1 le rayon de courbure de l'ellipse A'B' au point V', lorsque cette courbe sera enroulée sur le cylindre vertical ab, son rayon de courbure en V sera $R_1 \cos\sigma$ (art. **474** et **819**), σ étant l'angle de son plan osculateur avec le plan AB. Pour avoir le rayon de courbure en V de la section principale AB, il faut, d'après le théorème de Meusnier, diviser le rayon de l'ellipse enroulée par $\cos\sigma$: on trouve le rayon R_1.

L'indicatrice se compose de deux droites parallèles à la section principale OV qui a un rayon infini (art. **800**), et si l'on appelle a leur distance au point V, on aura

$$a^2 = R_1 c, \quad \text{ou} \quad a^2 = \frac{\overline{V''B}^2}{VV'} c.$$

L'une des sections principales du tore pour le point V est la méridienne contenue dans le plan OV; son rayon est $\frac{\overline{Pv}^2}{vv'}$; l'autre section principale est contenue dans le plan AB et a un rayon infini (art. **821**). L'indicatrice se compose donc de deux droites parallèles à AB. En appelant b la distance de chacune d'elles au point V, on a

$$b^2 = \frac{\overline{Pv}^2}{vv'} c.$$

La longueur c est arbitraire, mais elle doit être la même pour les deux indicatrices. Si nous la faisons égale à la hauteur du point V au-dessus du plan horizontal, les expressions ci-dessus deviendront

$$a = V''B, \quad b = Pv.$$

On peut donc prendre simultanément pour indicatrices du conoïde et du tore au point V les droites AA' et BB' d'une part, et de l'autre la droite Uu et une autre droite parallèle à celle-ci et également distante du point V. On voit que la tangente en V à la branche EF passe par le point de rencontre u; on déterminerait de la même manière la tangente à l'autre branche.

867. *Cas où les surfaces tangentes sont des cônes ou des cylindres.* — Quand les deux surfaces tangentes sont des cônes ou des cylindres, chaque indicatrice est composée de deux lignes droites, comme dans le cas que nous venons d'examiner, et l'on peut déterminer facilement les tangentes à l'intersection au point double, lorsque l'on connait, pour chaque surface, le rayon de la section faite par un plan perpendiculaire à la génératrice.

Il faut remarquer que toutes les fois que deux surfaces se touchent, les deux branches de leur intersection sont tangentes aux courbes suivant lesquelles se coupent deux surfaces qui leur sont respectivement osculatrices. Si nous avons choisi deux surfaces du second ordre ayant leur centre en un même point de la normale commune, c'est parce que leur intersection se compose de deux lignes planes, mais dans quelques circonstances on peut préférer d'autres dispositions.

On a souvent, pour des questions d'ombre, à considérer deux cônes ayant une directrice commune : leur intersection comprend une seconde courbe qui croise la directrice en des points où les surfaces se touchent ; on détermine ces points en menant à un des cônes des plans tangents par le sommet de l'autre. Quand la directrice est une conique, les surfaces sont du second ordre et leur deuxième intersection est plane comme la première (art. **252**).

Dans le cas général, en remplaçant la directrice par son cercle osculateur au point de contact considéré, on obtient deux cônes du second ordre osculateurs des premiers et dont la deuxième ligne d'intersection est plane ; la trace de son plan sur le plan tangent commun est la tangente à la ligne suivant laquelle les cônes primitifs se coupent.

868. *Intersection d'un tore par une sphère tangente.* — Nous savons construire les asymptotes de l'indicatrice d'une surface de révolution pour un point donné (art. **822**), et par suite nous pouvons déterminer les tangentes au point double de l'intersection d'une telle surface par un plan qui la touche. Nous allons résoudre le problème dans un cas plus compliqué, celui où les surfaces tangentes sont un tore et une sphère.

Nous nous donnons l'axe (A, A'Z) du tore (*fig.* 346), le méridien MNR de cette surface et le centre (C, C') de la sphère. Nous faisons tourner le plan méridien AC de manière à le rendre parallèle au plan vertical ; le point (C, C') se place en (C_1, C'_1). Joignant ensuite le point C'_1 au centre E du cercle MNR, nous prenons le segment $C'_1O'_1$ pour rayon de la sphère. Lorsque l'on ramène le centre (C_1, C'_1) en (C, C'), le point de contact (O_1, O'_1) vient en (O, O').

En prolongeant la droite C'_1E jusqu'à sa seconde rencontre avec le cercle MNR, on aurait le rayon d'une autre sphère tangente au tore ; enfin on obtiendrait deux autres sphères également tangentes et ayant leur centre au point (C, C'), en considérant le second cercle méridien contenu dans le plan XY.

Nous supposons que la sphère est enlevée, et nous représentons seulement le tore avec l'entaille qu'il doit avoir pour la recevoir.

On construit l'intersection des deux surfaces en les coupant par des plans horizontaux. Nous avons indiqué sur le plan vertical un arc $P'O'\gamma'\varepsilon'$ de l'ellipse, projection du grand cercle de la sphère situé dans le plan vertical OAC. Cet arc passe par les points γ' et ε' de l'intersection où la tangente est horizontale. On détermine ces points en ramenant le centre de la sphère en (C_1, C'_1), prenant les intersections γ'_1 et ε'_1 du grand cercle qui forme alors le contour apparent de la sphère avec le méridien du tore, et les reportant dans le plan OAC.

Le contour apparent de la sphère sur le plan vertical est le cercle GH contenu dans le plan CDL. L'arc (DL, D'L') est seul utile ; nous l'avons indiqué par une ligne en points ronds, parce qu'il est virtuel (art. **555**).

869. Dans la construction des tangentes au point double, nous supposerons d'abord que le centre (C, C') a été amené en (C_1, C'_1) et le point de contact en (O_1, O'_1).

Nous plaçons le centre commun des surfaces osculatrices au point (C_1, C'_1) : les indicatrices du point de contact sont alors, pour la sphère, un grand cercle de cette surface, pour le tore une conique dont les demi-axes ont les longueurs

$$\sqrt{O'_1C_1 \times O_1E}, \quad \sqrt{O_1C_1 \times O_1F}.$$

Le premier axe est tangent au méridien et le second au parallèle.

Si nous faisons tourner le plan tangent $O'_1\rho'$ autour de la tangente au parallèle jusqu'à le rendre horizontal, les indicatrices se projetteront horizontalement en vraie grandeur. Leur centre est au point O_1 ; celle de la sphère est le cercle dont le rayon a une longueur O_1B égale à $C_1O'_1$; l'autre est une hyperbole, car les segments O'_1E et O_1F ont des signes différents. En construisant les longueurs des axes (opération très facile que nous n'avons pas conservée sur la figure), on peut placer les sommets λ et λ_1, et tracer les asymptotes $O_1\mu$ et $O_1\mu_1$.

Les indicatrices se rencontrent aux points (ν, ν') et (ν_1, ν'_1) qui, lorsqu'on remet le plan tangent dans sa position $O'_1\rho'$, deviennent (ρ, ρ') et (ρ_1, ρ'_1). Enfin, le mouvement qui ramène le centre de la sphère en (C, C') transporte le point σ en τ, et les points (ρ, ρ') et (ρ_1, ρ'_1) en (π, π') et (π_1, π'_1). Les tangentes cherchées sont $(\pi O, \pi' O')$ et $(\pi_1 O, \pi'_1 O')$.

870. *Digression sur les sections circulaires du tore.* — Si la sphère et le tore étaient bitangents, l'intersection aurait deux points doubles et présenterait des particularités remarquables. Avant d'examiner ce cas, nous allons étudier la courbe d'intersection d'un tore par un plan doublement tangent.

Le plan sécant étant supposé perpendiculaire au plan vertical, sa trace verticale sera une droite H'G' tangente en E' et en F' à la méridienne complète (*fig.* 347).

On peut construire l'intersection par la méthode de l'article **192** : un plan horizontal auxiliaire xy fait trouver quatre points qui se projettent verticalement en M, et dont les projections horizontales sont M, M_1, m et m_1.

Pour avoir l'intersection dans sa vraie grandeur, nous rabattons le plan sécant sur le plan vertical OX, en le faisant tourner autour de sa trace H G. Le point M, M' se place en M″ sur la perpendiculaire élevée en M à H G, et à une distance de O égale à O N, parce que tous les points d'un parallèle sont également éloignés du centre du tore.

Nous traçons le rayon I N, puis les droites O e, O k et E k respectivement perpendiculaires à I N', E F et O Z; enfin nous tirons M″k.

Les triangles semblables I N ν et I O e d'une part, O M μ et O I F de l'autre, donnent

$$\frac{I\,N'}{I\,O} = \frac{N'\nu}{O\,e}, \quad \frac{I'F'}{I'O} = \frac{M\,\mu}{M\,O'}.$$

En comparant ces équations terme à terme, on obtient

$$O\,e = O\,M.$$

Nous savons, d'ailleurs, qu'il y a égalité entre les longueurs M″O et N O : les deux triangles rectangles O M″M' et O'N'e sont donc égaux, l'angle O'N'I' est égal à son homologue O'M″M', et par suite à M″O'k. Si maintenant nous considérons les deux triangles O M″k et N O I, nous voyons qu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; il en résulte qu'il y a égalité entre leurs troisièmes côtés et que la distance du point M″ de l'intersection au point fixe k est la longueur constante O I. Le lieu des points M″ est donc un cercle décrit autour du point k avec un rayon égal à O I. Si l'on raisonnait sur le point m_1, on verrait qu'il appartient à un cercle dont le centre k_1 est symétrique de k par rapport à E F : donc *l'intersection complète d'un tore et d'un plan bitangent se compose de deux cercles égaux.*

La projection horizontale de chaque cercle est une ellipse dont le grand axe est le diamètre projeté verticalement sur le point O'. On trouve, d'après cela, que les grands axes des deux ellipses sont CD et C_1D_1 : leur longueur est double de O'I'.

Le petit axe est la projection du diamètre qui a la plus grande pente. Les sommets H et G d'une ellipse correspondent par conséquent aux points H' et G' qui appartiennent l'un au parallèle inférieur, l'autre au parallèle supérieur; or les rayons de ces parallèles sont égaux à O'I'; la distance des sommets H et G au point O est donc égale à la moitié du grand axe CD, et le point O est un foyer commun des ellipses.

La tangente E′F′ engendre, dans sa révolution autour de l'axe, un cône doublement circonscrit au tore. Tout plan tangent à ce cône coupe le tore suivant deux cercles, et comme on peut mener deux plans tangents au cône de tout point du tore, on voit qu'il passe par chaque point de cette dernière surface deux sections circulaires indépendamment du méridien et du parallèle. Nous supposons que la surface n'a pas de points sur l'axe, sans cela deux méridiens contenus dans un même plan n'auraient pas des tangentes alternes communes, et le cône n'existerait pas.

871. Concevons que par les centres (K, O′), (K₁, O′) des cercles on élève des perpendiculaires (KV, O′V′), (K₁V₁, O′V′) à leur plan; chacune de ces droites sera le lieu des centres des sphères auxquelles appartient le cercle dont elle contient le centre. Si le plan sécant tourne en restant bitangent, les deux droites (KV, O′V′), (K₁V₁, O′V′) entraînées dans le mouvement formeront les génératrices des deux systèmes d'un même hyperboloïde. On voit que les cercles situés dans les plans bitangents forment deux séries qui correspondent aux génératrices des deux systèmes d'un hyperboloïde de révolution.

Par un point quelconque de l'hyperboloïde, il passe deux génératrices de systèmes différents, et les longueurs de ces droites comprises entre le plan horizontal et le point considéré sont évidemment égales. Ce point est donc le centre d'une sphère qui contient les deux cercles égaux dont ces droites sont les axes.

Deux cercles qui n'appartiennent pas à la même série sont sur une sphère, car leurs axes se rencontrent. Deux cercles d'une même série ne sont pas sur une sphère.

Toute sphère qui contient deux cercles est tangente au tore aux points où ces courbes se coupent.

L'axe horizontal de l'hyperbole méridienne de l'hyperboloïde est égal à KK_1; mais, en remarquant que les droites DD_1 et $d'd_1$ sont égales entre elles, et que les segments KD et K_1D_1 sont égaux à O′I′, on reconnait que KK_1 a la longueur du diamètre $c'd'$ du cercle méridien du tore. L'hyperbole a d'ailleurs pour une de ses asymptotes la droite O′V′; son demi-axe non transverse est donc

$$I'c' \operatorname{tang} J'O'V', \quad \text{ou} \quad I'F' \operatorname{tang} O'I'F', \quad \text{ou enfin} \quad O'F'.$$

D'après la grandeur des deux axes, on trouve que les centres I′ et J′ des cercles méridiens sont les foyers de l'hyperbole. Nous avons tracé cette courbe sur la *fig.* 349.

872. Supposons maintenant qu'une sphère touche le tore en deux points; les normales communes aux deux surfaces en ces points se rencontrent au centre de la sphère et coupent l'axe en un même point ou en des points différents, suivant que les points de contact appartiennent ou non à un même parallèle. Dans le premier cas, la sphère est circonscrite au tore le long de ce parallèle; dans le second, que nous allons examiner, le plan des deux normales contient l'axe de la surface.

P et Q sont les points de contact (*fig.* 349); I' et J' les centres des cercles méridiens sur lesquels se trouvent ces points; m le centre de la sphère bitangente et O'Z l'axe du tore. Nous désignerons par la lettre b le rayon I'P.

On a

$$mI' - PI' = mJ' + J'Q;$$

$$mI' - mJ' = 2b.$$

Le point m est donc sur une hyperbole dont l'axe transverse est $2b$ et dont les foyers sont I' et J', c'est-à-dire sur l'hyperbole lieu des centres des sphères qui coupent le tore suivant deux cercles. Mais ces dernières sphères sont bitangentes (art. **871**) et leurs points de contact sont nécessairement dans le plan méridien de leur centre. Celle dont le centre est en m se confond donc avec la sphère tangente en P et en Q, car le point m n'étant pas sur l'axe O'Z ne peut être le centre de deux cercles distincts tangents l'un et l'autre aux cercles I'P et J'Q. Donc *toute sphère bitangente à un tore, et non circonscrite, coupe cette surface suivant deux cercles égaux* [1]. Les plans qui ont deux points de contact doivent être considérés comme des sphères doublement tangentes, et dont les centres sont aux points de l'hyperboloïde situés à l'infini.

Si l'abscisse O'I' est plus petite que b, les sommets L et T seront au delà des foyers I' et J', et l'hyperbole méridienne se changera en une ellipse LRTS (*fig.* 348). Le lieu des centres des sphères bitangentes (et non circonscrites) deviendra donc un ellipsoïde. Les génératrices rectilignes seront alors imaginaires, ainsi que les sections circulaires qui leur correspondent [2].

---

(1) On peut aussi remarquer que la droite qui irait du point P au point Q passerait par le centre O' du tore et serait, par conséquent, dans deux plans tangents au cône de révolution que nous avons considéré à l'article 870. Chacun de ces plans coupe le tore suivant deux cercles dont un se confond avec la section faite dans la sphère, car il passe par les points P et Q, et il y touche cette section.

Pour prouver que le point O' où la droite PQ coupe I'J' est le centre du tore, on mène la droite $J'Q_1$ passant par le point d'intersection de la circonférence J' et de la droite PQ; les angles $J'QQ_1$, $J'Q_1Q$ et mPQ étant égaux, $J'Q_1$ est parallèle à mP; alors les triangles $O'J'Q_1$ et O'I'P sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, et par suite J'O' égale I'O'.

(2) Yvon Villarceau a établi que tout plan bitangent coupe le tore suivant deux cercles (*Comptes rendus*, 2e semestre, 1848). M. Mannheim a reconnu que les sphères doublement tangentes jouissent de la même propriété (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1860). Nous avons démontré, sur la surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace, des théorèmes plus généraux, et dont les propositions insérées aux articles 870-872 ne sont que des corollaires (*Journal de l'École Polytechnique*, XLe cahier, 1863).

Rayons de courbure de la section du tore par un plan tangent.

875. L'équation (24) de l'article **817**

$$\rho = \frac{\gamma^3}{2\beta\sqrt{-R_1 R_2}}$$

va nous permettre de déterminer les rayons de courbure de la section du tore par un plan tangent, au point double de cette courbe [1].

Nous appelons, comme précédemment, b le rayon IM du cercle méridien (*fig.* 350) et a la distance OI de son centre à l'axe de la surface. Nous prenons pour axes coordonnés les droites OX, OZ et leur perpendiculaire commune au point O.

L'équation du cercle méridien est

$$(X - a)^2 + Z^2 - b^2 = 0.$$

Pour avoir l'équation du tore, il suffit de remplacer l'abscisse X par le rayon $\sqrt{X^2 + Y^2}$ du parallèle correspondant. En faisant disparaître le radical, on obtient

$$(1) \qquad (X^2 + Y^2 + Z^2 + a^2 - b^2)^2 - 4a^2(X^2 + Y^2) = 0.$$

Nous allons considérer l'intersection de la surface par le plan qui la touche en un point M déterminé, sur la méridienne, par l'azimut MIO, que nous appelons ω.

Nous transportons l'origine au point M, et nous prenons pour nouveaux axes coordonnés les droites Mx, Mz et leur commune perpendiculaire. On a

$$(2) \qquad \begin{cases} X = x \sin\omega - z \cos\omega - b \cos\omega + a, \\ Y = y, \\ Z = x \cos\omega + z \sin\omega + b \sin\omega. \end{cases}$$

---

[1] On peut appliquer la règle de l'article 779 pour trouver les rayons de courbure en un point double d'une courbe plane, en modifiant ainsi cette règle. L'équation, en coordonnées rectangulaires, d'une courbe plane ayant à l'origine un point double M, ne renferme pas de termes inférieurs au second degré. Prenant une tangente en M pour axe des α et sa perpendiculaire en M pour axe des β, l'équation de la courbe, rapportée à ces axes, ne doit pas contenir de terme en α^2. Donc le rapport de α^2 à 2β s'obtiendra après avoir annulé les termes infiniment petits d'un ordre supérieur au troisième.

Pour le cas examiné par l'Auteur, on fait $z = 0$ dans la dernière équation de l'article 873, on remplace x et y respectivement par $\alpha \cos\theta - \beta \sin\theta$ et $\alpha \sin\theta + \beta \cos\theta$, θ étant égal à l'angle xMα, on supprime les termes infiniment petits d'un ordre supérieur au troisième, ce qui donne

$$\alpha^3 \sin\omega \cos\theta + \alpha^2 (a \cos^2\theta - b \cos\omega) - 2a\alpha\beta \sin\theta \cos\theta = 0.$$

Le coefficient de α^2 devant être nul, on trouve $\sin\theta$, et par suite la valeur de ρ donnée à l'article 876.

(E. L.)

En portant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient pour nouvelle équation de la surface

$$\begin{aligned}&[x^2+y^2+z^2+2a(x\sin\omega-z\cos\omega)+2bz+2a(a-b\cos\omega)]^2\\ &-4a^2[(x\sin\omega-z\cos\omega)^2+2(a-b\cos\omega)(x\sin\omega-z\cos\omega)+(a-b\cos\omega)^2+y^2]=0.\end{aligned}$$

874. Si nous ne considérons que la partie de la surface voisine du point M, les coordonnées x et y seront infiniment petites du premier ordre et l'ordonnée z infiniment petite du second ordre. Développant alors l'équation et négligeant les termes d'un ordre supérieur au troisième, au fur et à mesure qu'ils se présentent, on obtient, après quelques réductions qui se présentent d'elles-mêmes,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&(a-b\cos\omega)x^2-by^2\cos\omega+2b(a-b\cos\omega)z\\ &\qquad+(x^2+y^2)x\sin\omega+2bxz\sin\omega=0.\end{aligned}\right.$$

Pour avoir l'équation de l'indicatrice, il suffit de négliger les termes du troisième ordre, ce qui donne

$$(a-b\cos\omega)x^2-by^2\cos\omega+2b(a-b\cos\omega)z=0.$$

On déduit immédiatement de cette équation les valeurs suivantes des rayons de courbure des sections principales (art. **791**)

$$R_1=-b,\quad R_2=\frac{a-b\cos\omega}{\cos\omega}.$$

Nous trouvons une valeur négative pour le rayon de courbure de la méridienne, parce que les formules (2) ont été établies dans l'hypothèse que la partie positive de l'axe des coordonnées s'étend de M vers z (art. **777**).

875. Le point pour lequel nous voulons déterminer les longueurs α et β est situé sur une section faite par un plan normal contenant une asymptote de l'indicatrice. Les coordonnées x et y de ce point satisfont donc à l'équation des asymptotes que l'on obtient facilement d'après la grandeur des rayons de courbure, ou en supposant z nulle dans l'équation de l'indicatrice; on a donc

$$(4)\qquad (a-b\cos\omega)x^2-by^2\cos\omega=0.$$

Eu égard à cette relation, l'équation (3) se réduit à

$$2b(a-b\cos\omega)z+(x^2+y^2)x\sin\omega+2bxz\sin\omega=0.$$

En résolvant par rapport à z, on obtient

$$z=-\frac{(x^2+y^2)x\sin\omega}{2b(a-b\cos\omega)+2bx\sin\omega}.$$

Si l'on effectuait la division, le second terme du dénominateur n'introduirait qu'un infiniment petit du quatrième ordre ; nous pouvons donc le supprimer, et écrire simplement

$$(5) \qquad z = -\frac{\sin\omega}{2b(a - b\cos\omega)}(x^2 + y^2)x.$$

876. Le calcul du rayon ρ ne présente plus de difficultés. Nous avons immédiatement

$$\alpha^2 = x^2 + y^2, \quad \beta = z.$$

La substitution des valeurs de y^2 et de z, déduites de ces formules, dans les équations (4) et (5), donne

$$(4\,bis) \qquad ax^2 - \alpha^2 b\cos\omega = 0,$$

$$(5\,bis) \qquad \beta = -\frac{\sin\omega}{2b(a - b\cos\omega)}\alpha^2 x.$$

En portant la valeur (5 *bis*) de β dans l'équation qui est au commencement de l'article **875**, on obtient

$$\rho = \frac{\alpha b(a - b\cos\omega)}{x\sin\omega\sqrt{-R_1R_2}}.$$

Les valeurs de R_1 et de R_2 ont été trouvées à l'article précédent. L'équation (4 *bis*) donne le rapport $\frac{\alpha}{x}$; pour avoir l'expression cherchée, il suffit d'éliminer ces trois quantités entre les trois équations précédentes. On obtient

$$\rho = \frac{1}{\sin\omega}\sqrt{a(a - b\cos\omega)}.$$

Cette équation conduit à une construction très simple pour la grandeur absolue du rayon ρ.

Le plan méridien du point de contact divise la section en deux parties symétriques, et par suite les rayons de courbure des deux branches ont les mêmes longueurs.

Quand le point M est en A, ω est nul et ρ infini : chaque branche possède alors une inflexion. Lorsque la trace MT du plan tangent touche la méridienne inverse, on a

$$b - a\cos\omega = 0, \quad \text{ou} \quad \omega = 90^\circ.$$

Dans un cas comme dans l'autre, le rayon ρ est égal à a, ce qui s'accorde avec les résultats de l'article **870**. Il existe une valeur de ω comprise entre les deux précédentes qui donne pour ρ une valeur minimum. Nous remarquerons enfin que si la méridienne ne rencontre pas l'axe, la valeur du rayon déterminée par la formule est toujours réelle, bien que la section soit imaginaire quand le point de contact est sur la partie convexe du tore [1].

CHAPITRE III.

THÉORÈME DES TANGENTES CONJUGUÉES.

Démonstration de ce théorème.

877. Nous avons vu qu'une courbe d'ombre propre est une ligne de contact de la surface considérée avec une développable. En chacun de ses points les plans tangents aux deux surfaces se confondent, et par suite le procédé que l'on emploie ordinairement pour la construction des tangentes aux lignes communes à deux surfaces est inapplicable. On doit à Ch. Dupin un théorème qui permet de déterminer les tangentes à une courbe d'ombre propre, lorsque l'on connaît les rayons de courbure de la surface éclairée [2]. Nous allons démontrer ce théorème, nous en développerons ensuite les conséquences.

Soit Ω (*fig.* 354) la courbe de contact d'une développable avec une surface donnée : l'intersection des plans tangents au point O de cette ligne et au point infiniment voisin m est une génératrice de la développable. Un plan passant par le point m et parallèle au plan tangent en O coupe la surface suivant une conique Fm que l'on peut prendre pour indicatrice (art. **789**). La tangente mG à cette courbe est parallèle à la génératrice de la développable, car elle est parallèle au plan tangent en O et située dans le plan tangent en m ; mais elle est aussi parallèle au diamètre IF qui, dans l'indicatrice, est conjugué à celui qui aboutit au point m ; le diamètre IF est donc parallèle à la génératrice de la développable. Le diamètre Im est d'ailleurs parallèle à la tangente OT à la courbe Ω ; on peut même dire qu'il se confond avec elle, car leur distance est infiniment

(1) Nous indiquerons en quelques mots une dernière application aux surfaces de révolution des théorèmes relatifs à la courbure des surfaces.

Quand une surface de révolution est donnée par son axe et une courbe génératrice, si une tangente à cette ligne est perpendiculaire au plan méridien du point de contact, la méridienne a un point de rebroussement. La tangente de rebroussement est tangente à la zone sphérique décrite par la révolution du cercle osculateur de la génératrice, et par suite on peut la tracer lorsque l'on connaît le centre de courbure de cette ligne. La construction que nous venons d'indiquer nous a été utile dans nos études sur le tore général (*Journal de l'École Polytechnique*, XL^e Cahier, 1863).

(2) *Développements de Géométrie.*

petite du second ordre et le point m peut être considéré comme appartenant à OT. Nous voyons ainsi que, *quand une développable est circonscrite à une surface, en un point quelconque de la courbe de contact, la tangente à cette ligne et la génératrice de la développable sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice de la surface inscrite.*

Si l'on se reporte aux considérations présentées à l'article **598** sur les asymptotes des courbes du second ordre, on verra que l'on peut modifier l'énoncé du théorème, et dire que *la tangente à la courbe de contact et la génératrice de la développable sont conjuguées harmoniques des asymptotes de l'indicatrice.* Le théorème ainsi présenté devient d'un emploi facile pour les surfaces à courbures opposées.

La tangente T et la génératrice G sont appelées *tangentes conjuguées*, parce que, si la première était une génératrice d'une développable circonscrite, la seconde serait tangente à la courbe de contact.

Construction des tangentes aux courbes d'ombre propre.

878. Le théorème des tangentes conjuguées permet de construire les tangentes aux courbes d'ombre propre, lorsque l'on peut déterminer l'indicatrice de la surface au point considéré. Les propriétés des diamètres conjugués des courbes du second ordre étant projectives, on peut opérer sur un plan de projection, comme on le ferait sur le plan de l'indicatrice.

Proposons-nous de déterminer la tangente au point (M, M') de la courbe d'ombre du tore représenté sur la *fig.* 212. Nous transportons le point (M, M') en (R, R') sur le méridien principal, par une rotation autour de l'axe, et nous déterminons les rayons de courbure $R'C$ et $R'\omega$ du méridien et de la seconde section principale (art. **821**). Les centres de courbure C et ω sont d'un même côté du point R', et par suite l'indicatrice est une ellipse.

Nous prenons le paramètre c égal à $R'C$ (art. **787**), alors les demi-axes de l'indicatrice sont

$$R'C,\quad \sqrt{R'\omega \times R'C}\quad \text{ou}\quad R'F.$$

Le premier correspond au rayon de courbure de la méridienne; nous le plaçons en $R'C'_1$ sur la tangente à cette courbe; la projection le réduit sur le plan horizontal à la longueur RC_1, qui doit être ramenée en Mc. Le second axe est horizontal et se projette en vraie grandeur sur la droite JMJ_1 double de $R'F$ et perpendiculaire à OM. Le problème qu'il faut résoudre consiste à tracer le diamètre conjugué du rayon lumineux SMT, dans l'ellipse qui a son centre en M et dont les points J, J_1 et c sont trois sommets.

Considérons le cercle qui a pour diamètre JJ_1 et qui se projette sur cette ellipse, et faisons-le tourner autour de JJ_1 jusqu'à le rendre horizontal : le point qui se projetait en c ira en K; la corde Jc deviendra JK; le point β sera amené en β_1, et le diamètre $M\beta T$ en $M\beta_1$. Le diamètre conjugué à $M\beta_1$ dans le cercle est la perpendiculaire $M\alpha_1$ à $M\beta_1$. Si nous ramenons le cercle dans sa première position, la corde J_1K se place en J_1c, le point α_1 arrive en α, et la droite $M\alpha$ est dans l'ellipse le diamètre conjugué à MT; c'est donc la projection horizontale de la tangente à la courbe d'ombre. La tangente étant dans le plan tangent au point (M, M'), on obtiendrait facilement sa projection verticale.

Les tracés deviennent plus simples quand la surface est à courbures opposées : on détermine alors les asymptotes de l'indicatrice, et l'on cherche la conjuguée harmonique du rayon de lumière.

La construction que nous avons fait connaître aux articles **849** et **855** peut être employée dans tous les cas, lorsque la surface est convexe comme lorsque ses courbures sont opposées.

879. Quand l'un des rayons de courbure est infini, l'indicatrice se compose de deux droites parallèles; alors, quelle que soit la direction du rayon de lumière dans le plan tangent, le diamètre qui lui est conjugué est la tangente à la section principale dont le rayon est infini. On voit, d'après cela, que si, sur une surface développable, un point non situé sur l'arête de rebroussement appartient à une ligne d'ombre, la génératrice qui y passe fera partie de cette ligne, ce qui est conforme aux résultats que nous avons obtenus précédemment (art. **679**).

Quand le point lumineux est sur la tangente à la section dont le rayon est infini, le théorème donne une direction indéterminée pour la tangente à la courbe d'ombre; il ne suffit donc plus à la solution du problème. Nous ne nous arrêterons pas à ce cas particulier [1].

880. Lorsque l'un des rayons principaux est nul, l'indicatrice est une ellipse dont un des axes est nul (art. **808**). Quelle que soit alors la direction du rayon de lumière, son diamètre conjugué se confond avec l'autre axe, et par conséquent toutes les lignes d'ombre sont tangentes à la section principale dont le rayon n'est pas nul. Il résulte d'ailleurs de la multiplicité des plans tangents au point considéré qu'une infinité de lignes d'ombre y passent. Nous obtenons ainsi une extension du théorème que nous avons démontré à l'article **654** pour les sommets des surfaces gauches.

881. *Quand le point lumineux est sur la surface éclairée, la courbe d'ombre a deux branches qui se croisent à ce point tangentes aux deux asymptotes de l'indica-*

---

[1] On trouvera une étude de cette question dans les lemmes qui sont au commencement de notre *Mémoire sur les lignes d'ombre et de perspective des surfaces de révolution* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXV^e Cahier, 1853). Nous nous bornerons à dire que, dans le cas dont il s'agit, le point considéré de la surface est en général un point double de la courbe d'ombre.

trice, car une quelconque de ces droites passe au point lumineux, et peut être regardée comme tangente à la surface en un point infiniment voisin. Elle est d'ailleurs son propre diamètre conjugué.

Construction des tangentes et des asymptotes aux courbes d'ombre propre des surfaces gauches.

882. Nous savons que les secondes asymptotes des indicatrices aux différents points d'une génératrice d'une surface gauche forment un hyperboloïde (art. **825**). Quand on connaît trois de ces droites l'hyperboloïde est déterminé, et l'on peut obtenir la tangente à une courbe d'ombre au point où elle rencontre la génératrice. Dans l'étude qui va suivre nous supposerons que l'on a construit la conique qui forme le contour apparent de cette surface par rapport à un plan quelconque, que l'on prend pour plan de projection.

Soient AM la projection de la génératrice (*fig.* 351), M le point où elle est rencontrée par la courbe d'ombre, S la projection du point lumineux et Ω le contour apparent de l'hyperboloïde osculateur le long de la génératrice AM : la seconde asymptote de l'indicatrice au point M est la droite MB tangente à Ω. Le rayon SM et la tangente à la courbe d'ombre sont donc conjugués harmoniques des droites MA et MB. Nous traçons la parallèle PN à MA, et nous portons au delà de N une longueur NG égale au segment PN : la tangente cherchée est MD.

Si le plan de projection était perpendiculaire à une génératrice du cône asymptote de l'hyperboloïde, et par suite à une génératrice de chaque système de cette surface, les secondes asymptotes des indicatrices divergeraient d'un même point, et leur détermination serait plus facile encore que dans le cas où le contour apparent de l'hyperboloïde est une conique.

883. Quand le point M s'éloigne à l'infini sur la génératrice, la construction précédente se trouve en défaut, et il faut recourir à une autre propriété des conjuguées harmoniques pour déterminer l'asymptote à la courbe d'ombre [1].

SV étant une sécante quelconque passant par le point S (*fig.* 351), on a (art. **601**)

$$\frac{bS}{bd} : \frac{aS}{ad} = -1.$$

Si l'on rapporte tous les segments à une origine commune k placée où l'on

[1] Nous ne considérons dans les courbes d'ombre que les branches infinies de la première espèce (art. 638).

voudra sur la sécante, l'équation deviendra

$$\frac{kS - kb}{kd - kb} : \frac{kS - ka}{kd - ka} = -1.$$

Lorsque le point k est le milieu du segment ab, on a

$$kb = -ka,$$

et l'équation devient

$$\frac{kS + ka}{kd + ka} : \frac{kS - ka}{kd - ka} = -1.$$

En développant et en réduisant, on obtient

$$\overline{ka}^2 = kS \times kd.$$

Quand le point M s'éloigne à l'infini (*fig.* 352), la seconde asymptote de l'indicatrice est la droite BM parallèle à AM et tangente à Ω. Si du point S on trace une sécante SV, le point d où passe l'asymptote à la courbe d'ombre sera déterminé par l'équation précédente, qui conduit à une construction facile.

Quand le point S est situé entre les droites AM et BM et à égales distances de ces lignes, kS est nul et la formule donne pour kd une valeur infinie. La branche considérée de la courbe d'ombre est par conséquent parabolique.

884. Quand la surface gauche a un plan directeur, les secondes asymptotes des indicatrices aux divers points d'une génératrice forment un paraboloïde, et le contour apparent de cette surface est une parabole. Cette circonstance ne modifie pas la construction pour les tangentes à une courbe d'ombre aux points situés à distance finie, mais la construction des asymptotes à la courbe d'ombre devient plus facile, parce que la tangente MB parallèle à la génératrice MA (*fig.* 352) disparaît à l'infini.

Lorsque le point b s'éloigne, le rapport de bS à bd approche de l'unité, et, quand le point b est à l'infini, la première équation de l'article **883** se réduit à

$$aS = -ad.$$

Cette équation nous montre que, *lorsqu'un cône est circonscrit à un conoïde, son sommet et une asymptote de la courbe de contact sont situés de part et d'autre et à égales distances de la génératrice, dans le plan qui est tangent à l'infini.*

Pour quelques positions exceptionnelles d'un paraboloïde, les projections des génératrices n'ont pas une parabole pour enveloppe ; mais, afin d'éviter une discussion minutieuse et peu importante, nous remarquerons qu'on peut toujours prendre un plan de projection disposé de manière que le contour apparent de cette surface soit une parabole, et que cela suffit pour que le théorème qui précède soit démontré d'une manière générale.

885. La tangente à la courbe d'ombre et le rayon de lumière sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice, et la génératrice de la surface en est une asymptote. Il résulte de là que la tangente se confond avec la génératrice en un autre point qu'aux sommets (art. **880**), seulement quand le rayon coïncide avec elle; la génératrice fait alors partie de la courbe d'ombre et est sa propre tangente. On peut étendre ce raisonnement aux asymptotes. Les génératrices ne sont donc tangentes ou asymptotes aux courbes d'ombre qu'aux sommets de la surface.

886. Supposons maintenant que les rayons de lumière soient parallèles à une droite R dont la direction est différente de celle de la génératrice AM (*fig* 353) : si le point M appartient à la courbe d'ombre, la tangente Md sera telle qu'en traçant une sécante quelconque UV, le rayon de lumière Ms et la tangente MB à Ω, on aura

$$\frac{bs}{as}\cdot\frac{bd}{ad}=-1.$$

Quand le point M s'éloigne à l'infini, le point s va également à l'infini, le rapport $\frac{bs}{as}$ est égal à l'unité, et l'on a

$$b_1 d_1 = - a_1 d_1 :$$

par conséquent, *quand une surface gauche est éclairée par des rayons parallèles, l'asymptote à une branche infinie de la courbe d'ombre est dans le plan tangent à l'infini, et à égales distances de la génératrice de la surface gauche et de celle des génératrices de l'hyperboloïde osculateur qui est parallèle à cette droite.*

887. Quand les rayons de lumière sont parallèles à une génératrice G, cette droite fait partie de la courbe d'ombre. Le plan tangent au point de la génératrice voisine situé à l'infini est parallèle à G (art. **615**), et par suite aux rayons de lumière. Le point situé à l'infini sur la génératrice voisine de G appartient donc à la courbe d'ombre; en d'autres termes, la courbe d'ombre proprement dite a une branche qui rencontre la génératrice G à l'infini.

Pour reconnaître quelle est l'asymptote, nous remarquerons que si le point M est un point de contact pour des rayons parallèles à MB (*fig.* 353), cette droite est tangente à la courbe d'ombre. Lorsque le point M s'éloigne à l'infini sur MA, elle devient asymptote et prend la position $B_1 b_1$; les rayons sont alors parallèles à MA.

Il résulte de là que, *quand une génératrice* G *est parallèle aux rayons de lumière, la courbe d'ombre a une branche infinie dont l'asymptote est la génératrice parallèle* à G *dans l'hyperboloïde osculateur le long de cette droite.*

Parties réelles et parties virtuelles des courbes d'ombre propre (¹).

888. *Définitions.* — Les surfaces, telles qu'on les considère dans les problèmes d'application, recouvrent des corps opaques, et la courbe de contact d'un cône circonscrit ne forme ligne d'ombre propre, lorsqu'un point lumineux est au sommet, que quand les génératrices rectilignes sont extérieures. Si, près du point de tangence, les génératrices sont dans l'intérieur du corps, la courbe de contact n'a aucune importance.

La *fig.* 368 représente une section faite dans le corps éclairé par un plan contenant le point lumineux S. On peut lui mener de ce point six tangentes, les points m, r et q appartiennent à la ligne de séparation d'ombre et de lumière; nous dirons que ce sont des points *réels* de la ligne d'ombre propre, tandis que nous appellerons *virtuels* les points p et t situés sur des tangentes géométriques qui n'existent pas comme rayons de lumière. La tangente Sn traverse le corps avant de le toucher extérieurement en n. Ce point n'est donc pas sur la séparatrice; nous le considérerons cependant comme réel : il est dans la position de tout autre point réel, tel que m ou r, devant lequel on placerait un écran. Le point p ne peut appartenir à la ligne d'ombre, quelque part que l'on suppose le point lumineux sur la tangente pS; le point n, au contraire, deviendrait utile, dans le cas où le point lumineux serait entre n_1 et n, ou au delà de n en S_1.

Si le corps opaque se trouvait de l'autre côté de la surface, comme il est représenté sur la *fig.* 367, les points réels deviendraient virtuels, et réciproquement. Nous avons déjà signalé cette circonstance à l'article **555**.

889. Les points réels et les points virtuels forment quelquefois des courbes séparées; ainsi dans le cas de la *fig.* 366, qui représente une surface de révolution éclairée par un point lumineux placé sur son axe, on trouve une ligne d'ombre virtuelle suivant le parallèle pp' et deux lignes d'ombre réelles suivant les parallèles mm' et nn'; la première seule est utile.

Le plus souvent les points réels et les points virtuels forment des parties distinctes d'une même courbe. Il est alors important de déterminer la position des *points limites*.

Une génératrice du cône circonscrit est extérieure ou intérieure près de son

(¹) Nous avons déjà examiné cette question dans le VIᵉ Livre de notre *Traité de Perspective* (1ʳᵉ édition), mais sans lui donner tout le développement qu'elle comporte. [Jules de la Gournerie a supprimé cette question dans la seconde édition de son *Traité de Perspective*. (E. L.)]

point de contact, suivant que ce point est réel ou virtuel. Au point limite, la génératrice passant de l'extérieur à l'intérieur du corps a un contact du second ordre avec la surface.

Cette circonstance ne peut pas se présenter sur les surfaces convexes, parce qu'elles n'ont qu'un contact du premier ordre avec leurs tangentes. La courbe d'ombre d'une surface de ce genre est donc entièrement réelle ou entièrement virtuelle. Elle est réelle pour une sphère en relief, et virtuelle pour une sphère creuse. Les droites parallèles aux rayons de lumière et tangentes à la surface supérieure de la niche représentée sur la *fig.* 206 sont noyées dans la maçonnerie près de leur point de contact, et nous n'avons eu à considérer que des ombres portées (art. **541**).

Les surfaces à courbures opposées ont, en chaque point, un contact du second ordre avec deux de leurs tangentes, qui sont les asymptotes de l'indicatrice (art. **796**). Leurs courbes d'ombre peuvent donc être composées d'arcs réels et d'arcs virtuels : aux points limites la génératrice du cône circonscrit, c'est-à-dire le rayon de lumière, est une des deux asymptotes de l'indicatrice.

890. En tout point de la courbe d'ombre, la tangente à cette ligne et le rayon de lumière sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice : or l'asymptote d'une hyperbole est son propre diamètre conjugué; donc, aux points limites, le rayon de lumière est tangent à la ligne d'ombre.

Réciproquement, si le rayon de lumière est tangent à la ligne d'ombre, il se confond avec son diamètre conjugué; il est donc une asymptote de l'indicatrice, et par suite il a un contact du second ordre avec la surface, et il se trouve à la limite des tangentes extérieures et des tangentes intérieures. Un arc réel de la ligne d'ombre s'arrête au point de contact considéré.

Ces résultats sont soumis à certaines restrictions. Si le rayon de lumière, qui est asymptote de l'indicatrice de son point de contact, avait avec la surface un contact du troisième ordre, il serait tout entier d'un même côté, en dehors du corps, par exemple, et il ne formerait plus limite; la courbe serait réelle d'un côté comme de l'autre. On peut supposer qu'elle avait primitivement un arc virtuel, et que le point lumineux s'est transporté dans l'espace, de manière à réduire graduellement cet arc et à l'anéantir.

Nous ne reviendrons pas sur ces cas d'exception. Toutes les questions de Géométrie en présentent d'analogues.

891. La courbe de contact d'un cône circonscrit peut être considérée comme la directrice de cette surface; mais nous savons qu'un cône a un rebroussement lorsque la génératrice est tangente à la directrice (art. **217**). Nous voyons donc que *le cône circonscrit à une surface a un rebroussement le long de chacune des génératrices qui sont asymptotes de l'indicatrice de leur point de contact.* Si un point lumineux est au sommet du cône, les deux parties de cette surface qui se réunissent à une génératrice de rebroussement correspondent, l'une à un arc réel de la courbe d'ombre, l'autre à un arc virtuel.

Quand un cône circonscrit à une surface a un rebroussement le long d'une génératrice, la courbe de contact ne peut passer sans rebroussement d'une partie à l'autre qu'en touchant la génératrice qui forme arête, et celle-ci, se trouvant tangente à la courbe de contact, est une asymptote de l'indicatrice; elle a donc un contact du second ordre avec la surface, et par suite elle doit être à la limite des tangentes extérieures et des tangentes intérieures.

Nous avons supposé que la courbe de contact n'avait pas de rebroussement; si elle en avait un, ses arcs, situés de part et d'autre du point de rebroussement, seraient tous les deux réels ou virtuels. Cette circonstance peut se présenter sur les surfaces qui ont des arêtes de rebroussement.

892. Quand on a déterminé une projection d'une ligne d'ombre, les tangentes à cette courbe menées par la projection du point lumineux font connaître les points limites. Il ne peut y avoir d'exception que quand le plan tangent est perpendiculaire au plan de projection, parce qu'alors la tangente à la courbe d'ombre et le rayon de lumière, même lorsqu'ils sont distincts dans l'espace, se confondent en projection.

Sur quelques surfaces on peut déterminer les points limites des courbes d'ombre par des méthodes particulières et plus simples.

Quand on construit une courbe d'ombre par la méthode des projections obliques (art. **571**), les points limites sont indiqués par des points de rebroussement de la trace du cône d'ombre. Alors, en prenant les ombres portées par les génératrices considérées, on trouve que l'une de ces ombres coupe celle qui la précède et celle qui la suit d'un même côté du point où elle est touchée par l'enveloppe.

893. *Étude des lignes d'ombre propre du tore.* — Nous nous sommes occupé des ombres du tore à l'article **545**, mais nous avons seulement considéré la partie ou nappe convexe de cette surface; nous allons maintenant rechercher les particularités que présente la ligne d'ombre propre sur la nappe à courbures opposées.

Nous supposons le point lumineux (S, S') dans le plan méridien de front (*fig.* 358). Ce plan divise le tore en deux parties sur lesquelles les lignes d'ombre sont symétriques. Nous n'avons représenté que l'une des moitiés.

On détermine par les procédés de l'article **551** les courbes d'ombre (Bb, $B'b'$) et ($AGuga$, $A'G'u'g'a'$); la première est sur la nappe convexe, la seconde sur celle dont les courbures sont opposées. Nous avons expliqué à l'article **878** comment on peut construire les tangentes à ces lignes. Si la méridienne était formée d'arcs de courbes différentes ayant un contact du premier ordre seulement, la ligne d'ombre serait brisée à chaque parallèle de raccordement. On trouve ainsi que la ligne d'ombre d'un cylindre terminé par une demi-sphère d'un diamètre égal au sien se compose de deux droites et d'un arc de cercle qui ne les continue pas tangentiellement.

894. Il est important de distinguer les arcs réels et les arcs virtuels sur la courbe d'ombre de la nappe intérieure du tore.

Les points (A, A′) et (a, a') sont réels, car les rayons (SA, S′A′) et (Sa, S′a') sont extérieurs aux méridiennes. Nous allons chercher s'il y a entre eux des points limites.

Un point quelconque (M, M′) de la méridienne principale serait l'extrémité d'un arc utile de la ligne d'ombre, si l'une des deux asymptotes de l'indicatrice de la surface en ce point passait par le point lumineux. Il est facile de construire ces asymptotes (art. **822**) : l'une d'elles est la droite (MN, M′N′); elle rencontre au point (N, N′) le cylindre vertical qui a pour trace horizontale le cercle décrit du point O comme centre, avec OS pour rayon. La seconde asymptote de l'indicatrice perce le même cylindre en un point dont la projection horizontale est symétrique de N par rapport à OS, et dont la projection verticale est N′. En attribuant successivement différentes positions au point M′ sur la méridienne principale, on détermine la courbe N′T, projection verticale de l'intersection du cylindre OS avec la surface lieu des asymptotes de l'indicatrice aux différents points de la méridienne A′B′.

Nous traçons une horizontale par le point S′, et du point K′ où elle rencontre la courbe d'erreur N′T nous menons une tangente K′L′ à la méridienne. Une des asymptotes de l'indicatrice du point (L, L′) passe au point (K, K′), et par suite (L, L′) est un point limite de la courbe d'ombre, lorsque le point lumineux est (K, K′). Si l'on suppose que le point lumineux, d'abord placé en (K, K′), tourne autour de l'axe, le point limite (L, L′) sera transporté sur son parallèle d'un même mouvement, c'est-à-dire en décrivant un arc d'un nombre égal de degrés. Quand le point lumineux arrivera en (S, S′), le point (L, L′) se trouvera sur une droite symétrique de OK par rapport à OS et qui sort du cadre de la figure. Comme d'ailleurs la courbe d'ombre est composée de deux parties symétriques par rapport au plan vertical OS, si nous ramenons le point L sur OK par un arc de cercle, nous aurons un point limite (G, G′), qui nous aurait été donné directement si nous avions considéré la deuxième asymptote de l'indicatrice du point (L, L′).

L'horizontale du point S′ rencontre la courbe d'erreur en un second point (k, k'), qui fait trouver un autre point limite (g, g'). La courbe (Aa, A′a') se compose par conséquent de deux arcs réels (AG, A′G′) et (ag, $a'g'$), et d'un arc virtuel (Gug, G′$u'g'$) [1]. Les rayons de lumière qui aboutissent aux points

[1] Il sera facile de comprendre la disposition des ombres sur le tore, quand nous aurons discuté la courbe d'ombre portée (art. 903 et 904).

La construction que nous avons donnée pour la détermination des points limites à l'aide d'une courbe d'erreur se trouve dans la *Stéréotomie* de Leroy.

(G, G') et (g, g') doivent être tangents à la courbe sur chacune des projections. Ceux qui vont aux points (u, u') et (Γ, Γ') sont tangents à la courbe d'ombre sur la projection horizontale, mais cela tient à ce que les plans tangents au tore en ces points sont verticaux (art. **892**).

895. La section du tore par un plan tangent en un point du cercle de gorge (O D') a deux axes qui se croisent au point de contact (*fig.* 357) : l'un est vertical et l'autre horizontal. Il résulte de là que chacune des branches qui passent au point double y a une inflexion [1], et par suite que les asymptotes de l'indicatrice sont entièrement extérieures à la surface (art. **797**). Lorsque le point lumineux est sur une de ces droites, les points limites (G, G') et (g, g'), qui sont ordinairement l'un au-dessus, l'autre au-dessous du plan J O I, sont réunis dans ce plan, et la partie virtuelle comprise entre eux a une longueur nulle.

Il résulte de ces considérations que, quand le point S' s'élève, les points K' et k' se réunissent sur la verticale du point D' en un point T où la tangente à la courbe d'erreur est horizontale. La courbe d'ombre propre a deux points limites ou n'en a pas, suivant que S' est au-dessous ou au-dessus de T.

La construction que nous avons donnée pour les points de la courbe d'erreur n'est pas immédiatement applicable au point T ; mais, en rendant le plan tangent au tore au point D' parallèle à l'un des plans de projection, on peut y placer sans difficulté les asymptotes de l'indicatrice, et déterminer leur intersection avec celles des génératrices du cylindre OS qui sont projetées sur D'T. Nous donnerons plus loin une construction analogue à celle que nous venons d'indiquer (art. **899**).

La courbe d'erreur est composée de deux parties symétriques par rapport à l'axe O'D'I' : nous n'avons représenté que l'une d'elles. Il n'entre pas dans notre cadre de discuter les différentes formes de cette courbe, ni d'examiner les particularités que présente la surface gauche, lieu des asymptotes des indicatrices du tore aux différents points de la méridienne.

896. La construction que nous venons d'expliquer permet de déterminer les points limites des arcs réels de la courbe d'ombre propre de toute surface de révolution dont on connaît la méridienne. Si cette ligne est une courbe graphique, on déterminera ses rayons de courbure aux divers points considérés par la méthode de l'article **105**.

On peut prendre pour courbe d'erreur l'intersection de la surface gauche, lieu des asymptotes des indicatrices, avec le plan horizontal du point (S, S') : les points de cette ligne, qui se trouvent à la même distance de l'axe que le point S, sont précisément (K, K') et (k, k').

897. Le cône circonscrit a des rebroussements le long des génératrices

---

(1) Nous avons déjà démontré à l'article 876 l'existence de cette double inflexion.

(SG, S′G′) et (Sg, S′g′). Pour les rendre apparents, nous avons construit la trace PEep de ce cône sur le plan horizontal XY.

Nous savons que le plan de rebroussement du cône le long de la génératrice (SG, S′G′) est le plan osculateur de la directrice (AGu, A′G′u′) au point (G, G′) (art. **216**). Ce plan touche le tore au point (G, G′), car il appartient à la série des plans tangents communs au tore et au cône circonscrit. La tangente EH au rebroussement E est donc la trace, sur le plan XY, du plan qui touche le tore au point (G, G′), et par suite elle est perpendiculaire à la trace OK du plan méridien de ce point. La tangente *eh* est perpendiculaire à O*k*.

898. *Détermination des points limites de la courbe d'ombre propre d'une surface de révolution éclairée par des rayons parallèles.* — Quand les rayons sont parallèles, les constructions que nous avons expliquées à l'article **894** ne sont plus applicables, parce que la courbe d'erreur s'éloigne à l'infini. Alors, pour déterminer les points de la méridienne principale où une des asymptotes de l'indicatrice a la même inclinaison que les rayons de lumière, on construit le cône directeur de la surface gauche lieu de ces asymptotes; on cherche quelles sont les génératrices du cône qui ont la même inclinaison que les rayons, et ensuite quelles sont les génératrices de la surface gauche qui leur correspondent.

Considérons le tore engendré par la révolution du cercle PQ autour de l'axe (O, O′Z) (*fig.* 359), et supposons-le éclairé par des rayons parallèles à la droite R située dans le plan vertical : nous construisons les droites (MV, M′V′), (MV_1, M′V′), asymptotes de l'indicatrice d'un point (M, M′) de la méridienne; par un point L choisi arbitrairement sur l'axe pour être le sommet du cône directeur, nous leur menons des parallèles (OB, LB′), (OB_1, LB′), et nous déterminons les traces B et B_1 de ces génératrices du cône.

Au point (M, *m*) les asymptotes de l'indicatrice sont (MV, *m′v′*) et (MV_1, *m′v′*) : les génératrices du cône qui leur sont parallèles ont leurs traces aux points *b* et b_1 symétriques de B et de B_1 par rapport à la droite OF; cette ligne est donc un axe de la trace du cône. La droite OH en est aussi un axe.

Quand le point M′ arrive en P sur le parallèle supérieur, les deux asymptotes de l'indicatrice se confondent en une seule droite perpendiculaire au plan vertical; il en est de même quand le point M′ se trouve en Q. Il résulte de là que chaque partie de la trace s'étend à l'infini, des deux côtés du point F et des deux côtés du point F_1.

899. Les rayons de courbure au point E sont EI et EO′. Si l'on prend le point O′ pour centre de l'hyperboloïde osculateur, cette surface sera de révolution autour de la verticale O′Z, et son demi-axe non transverse aura la longueur EU de la moyenne proportionnelle entre EI et EO′. La droite O′U est donc la projection d'une génératrice de l'hyperboloïde parallèle au plan vertical; on peut la regarder comme une asymptote de l'indicatrice du point E, qui a tourné de

90° autour de l'axe. Nous menons par le sommet (O, L) une droite (OD, LD') parallèle à O'U, et la faisant tourner de 90° nous ramenons sa trace D en F et en F_1. Ces points sont les sommets de la trace du cône directeur.

900. Nous menons par le sommet (O, L) une droite (OH, LH') parallèle au rayon (OH, R); cette ligne, en tournant autour de l'axe, engendre un cône de révolution qui a pour trace le cercle C_1HC.

Les deux cônes se coupent suivant quatre droites qui percent le plan horizontal aux points C, C_1, c et c_1. Nous pouvons supposer que les rayons de lumière étaient primitivement parallèles à la droite dont les projections sont OC et LC'; alors le point N' de la méridienne, où la tangente est parallèle à LC', se trouvait être un point limite de la courbe d'ombre; les rayons ayant tourné de telle manière que la droite (OC, LC') qui leur est parallèle est venue coïncider avec (OH, LH'), le point limite a tourné d'un angle égal autour du point O et s'est placé en (G, G'). Les autres génératrices communes aux deux cônes font trouver trois autres points limites (G_1, G'), (g, g') et (g_1, g') (¹).

La courbe d'ombre sera composée d'arcs réels et d'arcs virtuels toutes les fois que le cercle OH coupera la trace Bb du cône directeur, c'est-à-dire lorsque l'on aura

$$\mathrm{OH} > \mathrm{OD}$$

ou

$$\cot \mathrm{LH'O''} > \cot \mathrm{UO'E}$$

ou encore

$$\cot\gamma > \frac{\mathrm{EO'}}{\mathrm{EU}},$$

en appelant γ l'angle que les rayons de lumière font avec le plan horizontal.

EU étant une moyenne proportionnelle entre EO' et IE, l'équation précédente revient à

$$\tang^2\gamma < \frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{O'E}}.$$

901. *Courbe d'ombre portée.* — Nous allons maintenant étudier la courbe d'ombre portée par une surface sur elle-même; cette ligne est l'intersection de la surface considérée avec le cône circonscrit qui a son sommet au point lumineux.

Revenons à la *fig.* 368, qui représente une section d'un corps par un

(¹) Dunesme a fait connaître un procédé graphique pour déterminer les points où la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à un tore a pour tangente une génératrice du cylindre (*Comptes rendus*, 2ᵉ semestre 1857); mais la construction qu'il indique nous paraît moins facile que celle que nous donnons. On trouve cette dernière dans le *Traité de Stéréotomie* de Leroy.

plan contenant le point lumineux S. Le rayon Sm touche la surface au point m, et si on le considère comme une droite géométrique indéfinie, il la coupe aux points m_1 et m_2. L'arc mm_1 est dans l'ombre et l'arc m_1r est éclairé; m_1 est donc un point réel de la courbe d'ombre portée, comme m est un point réel de la courbe d'ombre propre.

Sur le rayon Sp, les points p et p_1 sont des points virtuels des courbes d'ombre propre et d'ombre portée. La courbe d'ombre portée se compose ainsi d'arcs réels et d'arcs virtuels. Un point m de la courbe de contact est réel, comme point d'ombre, lorsqu'il se trouve en dehors des points de section m_1 et m_2, et alors le premier de ces deux points est réel sur la courbe d'ombre portée. Sur le rayon Sp, le point de contact p est situé entre les deux points de section p_1 et p_2: il est virtuel, et le point p_1 de la courbe d'ombre portée est également virtuel. Les seconds points de section, tels que m_2 et p_2, n'ont jamais d'importance, bien qu'ils appartiennent à la courbe géométrique de l'ombre portée.

Puisqu'un point de contact devient virtuel lorsqu'il passe entre les deux points de section, il est nécessairement réuni à l'un d'eux quand il se trouve à un point limite, et par suite le rayon de lumière a dans ce cas un contact du second ordre avec la surface, ce que nous avons déjà trouvé par des considérations un peu différentes (art. **889**). La ligne d'ombre portée devient virtuelle au même moment. Il résulte de là que *les arcs réels des courbes d'ombre propre et d'ombre portée ont les mêmes points limites.*

902. Considérons la courbe A d'intersection d'une surface à courbures opposées par son plan tangent en m (*fig.* 355). Si un point lumineux S′ est dans ce plan, le point m appartiendra à la courbe d'ombre propre, et l'intersection m_1 du rayon S′m_1 et de la ligne A sera un point de la courbe d'ombre portée. Le plan tangent au cône d'ombre le long de la génératrice S′m touche la surface en m, et par suite la courbe d'ombre portée et la courbe A ont l'une et l'autre pour tangente en m_1 l'intersection des plans tangents aux points m et m_1; elles sont donc tangentes.

Si le point S′ se meut dans le plan, lorsqu'il se trouvera en un point S sur l'une des asymptotes de l'indicatrice du point m, le rayon Sm sera tangent à la courbe A (art. **797**); le point m_1 se sera donc réuni au point m, et la courbe d'ombre portée se sera transportée en se modifiant de manière à passer par ce point; elle y sera tangente à la branche mm_1 de la ligne A, et par suite à la droite mS; cette droite, étant une asymptote de l'indicatrice et passant au point lumineux, sera tangente à la courbe d'ombre propre, et le point m sera un point limite. Nous voyons ainsi que *les courbes d'ombre propre et d'ombre portée se rencontrent tangentiellement aux points limites.*

903. *Étude des lignes d'ombre portée par un tore sur lui-même, et considérations* *générales* (¹). — Si l'on coupe le tore représenté sur la *fig.* 358 par une série de plans verticaux contenant le point lumineux (S, S'), on pourra tracer dans chaque section les rayons tangents, déterminer les points où ils coupent la surface, et construire ainsi l'intersection du tore avec le cône d'ombre. On trouve la ligne

$$(GCF gcf G, \quad G'C'F' g'c'f' G');$$

elle rencontre tangentiellement la courbe d'ombre propre aux points limites (G, G') et (g, g'), et elle a des rebroussements aux points (F, F') et (f, f') situés sur les rayons des points limites. Cette circonstance, que nous ne nous sommes pas arrêté à signaler dans les articles précédents, résulte de la forme même du cône (art. **891**). Ainsi, lorsque le point de section m_1 (*fig.* 368) se réunit au point de contact m pour former un point limite, le point m_2 devient point de rebroussement de la courbe géométrique de l'ombre portée.

On détermine la tangente au rebroussement (F, F') en prenant l'intersection du plan tangent au tore en ce point, avec le plan de rebroussement du cône qui est le plan tangent au point (G, G') (art. **897**). Nous avons fait la construction en prenant pour ligne de terre une droite xy plus rapprochée du tore que XY, afin que tous les tracés fussent dans le cadre de l'épure. La tangente au méridien principal au point F_1, situé sur le même parallèle que (F, F'), est $F_1\alpha_1$; on trouve d'après cela que la trace horizontale du plan tangent au tore est $\alpha\beta$. La trace du plan de rebroussement pour le cône est la droite $E_1\beta$ parallèle à EH. La tangente au rebroussement pour le point (F, F') est donc la droite ($F\beta$, $F'\beta'$). Le point (f, f') étant peu éloigné du parallèle supérieur, le plan qui y est tangent au tore fait un angle très petit avec le plan horizontal, et par suite la tangente au rebroussement de la projection horizontale est à peu près parallèle à eh. Nous ne l'avons pas déterminée d'une manière précise.

Nous avons tracé à une échelle quadruple la partie de la projection verticale de l'intersection voisine du point F' (*fig.* 358 *bis*), afin d'en bien faire comprendre la forme. Au point (f, f') le plan tangent est à peu près perpendiculaire au plan vertical, et par suite il aurait fallu amplifier considérablement la partie de la figure voisine du point f' pour représenter avec netteté le rebroussement qui s'y trouve.

904. Une génératrice du cône, tangente au tore en un point pris sur l'arc AG et peu éloigné de G (²), va couper le tore en deux points dont le premier appar-

---

(¹) Nous rappelons qu'il ne s'agit ici que de la discussion des lignes d'ombre considérées comme formées de parties réelles et de parties virtuelles. Nous avons étudié dans le Livre V toutes les questions qui se rattachent à la construction de ces lignes.

(²) Nos notations se rapportent seulement à la projection horizontale, mais les raisonnements s'appliquent aux lignes et aux points considérés dans l'espace.

tient à la partie réelle de la courbe d'ombre portée. Si le point de tangence s'avance vers le point A, les points de section se rapprochent et arrivent à se confondre en un certain point C qui se trouve nécessairement sur la courbe de contact ag, car la génératrice SC y est tangente à la ligne d'ombre portée, et par suite à la surface. Cette génératrice a d'ailleurs un premier point de contact c sur l'arc AG, elle est donc l'intersection de deux parties distinctes du cône circonscrit; et l'on peut déterminer sa position avec assez de précision en construisant, comme nous l'avons fait, la trace du cône sur un plan XY, et joignant le point double Q de cette courbe au point lumineux ([1]).

On reconnait par les mêmes raisonnements, et en considérant les génératrices tangentes aux différents points de l'arc Cg, que le rayon SQ, bitangent au tore, doit toucher la courbe d'ombre portée à son premier point de contact c, comme au second C.

La ligne séparatrice de la partie éclairée et de la partie obscure sur la nappe intérieure du tore se compose de l'arc (AG, A'G') de la courbe d'ombre propre, de l'arc (GC, G'C') de la courbe d'ombre portée, et enfin de l'arc (Ca, $C'a'$) de la courbe d'ombre propre.

905. On voit que les courbes d'ombre propre et d'ombre portée peuvent se rencontrer de deux manières différentes, d'abord lorsqu'un point de section m_1 se réunit au point de contact m (*fig.* 368), ensuite lorsque les deux points de section m_1 et m_2 se confondent. Dans ce dernier cas, qui est celui des points C et c (*fig.* 358), les deux courbes sont tangentes à deux diamètres conjugués de l'indicatrice de leur point de rencontre, car la courbe d'ombre portée a pour tangente le rayon de lumière, et cette droite est conjuguée à la tangente à la courbe d'ombre propre ([2]) (art. **877**). Il résulte de là que ces lignes ne peuvent

---

([1]) On peut déterminer la position du rayon bitangent SQ par les constructions faciles auxquelles conduisent les deux remarques suivantes :

1° Pour que la distance de deux des points d'intersection du tore et d'une transversale rectiligne soit égale à la distance des deux autres, il faut et il suffit que cette transversale soit perpendiculaire à la droite qui joint sa trace sur le plan horizontal I'J' au centre (O, O') de la surface.

On conclut de là que le cône lieu des droites menées par un point fixe (S, S'), de manière que la somme de deux des segments interceptés entre ce point et le tore, soit égale à la somme des deux autres, a pour trace sur le plan horizontal I'J' le cercle décrit sur OS comme diamètre.

2° Le lieu des droites que l'on peut mener par le point (S, S'), de manière que le produit de deux des segments interceptés entre ce point et le tore soit égal au rectangle des deux autres, consiste en deux plans perpendiculaires au plan méridien OS. Pour obtenir leurs traces sur ce plan, il suffit de résoudre le problème suivant qui n'offre pas de difficulté : par un point pris dans le plan de deux cercles, mener une transversale telle que le rapport des segments déterminés par l'un des cercles soit égal au rapport des segments déterminés par l'autre, ces segments étant mesurés à partir du point donné. (MOUTARD.)

([2]) Nous avons fait cette observation avec M. Mannheim.

se rencontrer tangentiellement qu'à un point limite, car elles ne sauraient avoir d'autre tangente commune qu'une asymptote de l'indicatrice.

Les observations que nous venons de présenter peuvent être faites quel que soit le corps qui porte ombre, et par conséquent nous avons le théorème suivant :

Quand sur une surface la courbe d'ombre propre et la courbe d'ombre portée par une autre surface quelconque se rencontrent, ces lignes sont tangentes à deux diamètres conjugués de l'indicatrice du point commun.

906. Si le point S' s'abaisse, les points a et C se rapprochent l'un de l'autre. Quand le point S' sera sur la tangente alterne commune des deux cercles A'B' et $a'b'$, le point C et celui qui lui est symétrique sur la partie non représentée du tore seront confondus avec le point a; les points P, p et Q seront réunis; les deux parties du cône d'ombre se toucheront le long de la génératrice bitangente.

La partie dont la trace est EP touchera le cône au point a, et la courbe d'ombre portée aura un point double au point de contact a. Le point A sera un second point double de cette courbe. On pourra déterminer les tangentes à ces points par la méthode de l'article **865** (1).

Si le point S' continue à s'abaisser, aucun rayon ne passera dans l'intérieur du tore, et la séparatrice sera composée seulement d'un arc de la ligne d'ombre propre et d'un arc de la ligne d'ombre portée.

907. *Cas où il est nécessaire d'avoir égard aux dimensions des corps lumineux.* — Jusqu'à présent nous avons supposé que les dimensions du corps lumineux pouvaient être négligées; lorsqu'il est nécessaire d'en tenir compte, la surface d'ombre devient une développable circonscrite, mais, le théorème des tangentes conjuguées étant applicable dans ce cas, comme dans celui du cône circonscrit, on est conduit à des conséquences analogues à celles que nous avons exposées

---

(1) On remplacera le tore par un hyperboloïde osculateur, et le cône par un cylindre osculateur. On obtiendra sans difficulté l'hyperboloïde (art. 869) : s'il s'agit du point a, le rayon de la section droite du cylindre sera celui de la seconde section principale du tore en A. Il faut remarquer, en effet, que la génératrice Sa appartient à la partie du cône qui est circonscrite au tore le long de la ligne AG. Comme d'ailleurs cette ligne rencontre normalement, au point A, le méridien DB du tore et la génératrice Sa du cône, elle est tangente aux secondes sections principales des deux surfaces; ces sections sont donc dans le plan normal qui contient la tangente à la courbe de contact AG, et par suite leurs rayons de courbure sont égaux, conformément au théorème suivant de Ch. Dupin :

Quand deux surfaces sont tangentes l'une à l'autre le long d'une courbe, leurs sections par un plan tangent à cette courbe ont un contact du troisième ordre.

Pour prouver ce théorème, supposons que l'on fasse passer un plan sécant par deux points M et N de la ligne de contact A : les sections des surfaces seront tangentes en ces points. Si maintenant on transporte le plan de manière à le rendre tangent à la courbe A, les points M et N se confondront, et les sections auront quatre points communs réunis en un seul, ou un contact du troisième ordre.

Si le plan était tangent aux surfaces en un point M de la ligne de contact, le point M serait double dans les deux sections, et ces courbes, bien qu'ayant quatre points réunis en un seul, ne seraient plus tangentes.

dans les articles précédents. Toutefois la complication est un peu plus grande, parce qu'il faut avoir égard aux arcs virtuels de la courbe de contact sur le corps lumineux. Ainsi, lorsqu'une génératrice de la développable se confond avec une des asymptotes de l'indicatrice de son point de contact avec la surface éclairée, ce point n'est un point limite des courbes d'ombre que si la génératrice est extérieure au corps lumineux près du point où elle le touche. Cette observation n'a du reste aucune importance dans la pratique, car les surfaces lumineuses ne sont pas à courbures opposées.

Extension du théorème des tangentes conjuguées.

908. Le théorème des tangentes conjuguées ne donne aucune indication sur la tangente à la courbe d'ombre propre, quand la surface est osculée par un plan au point considéré. Nous allons étudier ce cas à l'aide du Calcul différentiel.

Considérons la surface

$$z = f(x, y); \tag{1}$$

l'équation de son plan tangent en un point est

$$z - z' = p(x - x') + q(y - y');$$

x', y', z' sont les coordonnées variables; x, y, z les coordonnées du point de contact, et p, q les dérivées partielles de la fonction z.

Si le plan tangent contient un point fixe (α, β, γ), on aura

$$z - \gamma = p(x - \alpha) + q(y - \beta). \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) déterminent la ligne de contact de la surface considérée avec le cône circonscrit dont le sommet est au point fixe.

En différentiant l'équation (2), on trouve, pour déterminer l'inclinaison sur l'axe des abscisses de la tangente à la projection de la courbe de contact sur le plan des xy, l'équation

$$[s(x - \alpha) + t(y - \beta)]\frac{dy}{dx} + [r(x - \alpha) + s(y - \beta)] = 0. \tag{3}$$

Quand au point considéré la surface est osculée par un plan, les dérivées r, s et t sont nulles, et $\dfrac{dy}{dx}$ se présente sous une forme indéterminée. Pour obtenir sa valeur, il faut différentier l'équation (3), en y regardant y comme une fonction de x et $\dfrac{dy}{dx}$ comme une quantité constante. On trouve

$$\begin{aligned}&[w(x - \alpha) + v(y - \beta) + t]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ &\quad + 2[w(x - \alpha) + w(y - \beta) + s]\frac{dy}{dx} + [u(x - \alpha) + w(y - \beta) + r] = 0.\end{aligned}$$

Au point considéré, r, s et t sont nulles, et nous avons

$$[\varpi(x-\alpha)+v(y-\beta)]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+2[w(x-\alpha)+\varpi(y-\beta)]\frac{dy}{dx}+[u(x-\alpha)+w(y-\beta)]=0.$$

Cette équation donne deux valeurs pour $\frac{dy}{dx}$; par conséquent, *quand une surface est osculée par un plan, le point de contact est un point double (ou isolé) de la courbe d'ombre, si un point lumineux est situé dans le plan.*

En appelant m le coefficient angulaire de la projection sur le plan des xy du rayon de lumière qui aboutit au point considéré, on a

$$m=\frac{y-\beta}{x-\alpha}.$$

L'équation que nous avons obtenue devient

(4) $$(\varpi+vm)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2(w+\varpi m)\frac{dy}{dx}+(u+wm)=0.$$

909. On a identiquement

$$dz=p\,dx+q\,dy+\tfrac{1}{2}(r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2)$$
$$+\frac{1}{2.3}(u\,dx^3+3w\,dx^2\,dy+3\varpi\,dx\,dy^2+v\,dy^3)+\ldots;$$

r, s et t sont nulles au point considéré; p et q seront également nulles si nous supposons le plan des xy parallèle au plan osculateur. Négligeant alors les infiniment petits des ordres supérieurs au troisième, on a

$$dz=\frac{1}{2.3}(u\,dx^3+3w\,dx^2\,dy+3\varpi\,dx\,dy^2+v\,dy^3).$$

dx et dy sont les coordonnées variables de la courbe d'intersection de la surface par un plan parallèle au plan osculateur, et distant de ce plan de la longueur infiniment petite dz. Cette courbe, qui est du troisième ordre, peut être considérée comme remplaçant l'indicatrice.

C étant une grandeur finie quelconque, l'équation

(5) $$ux^3+3wx^2y+3\varpi xy^2+vy^3=C$$

représentera une courbe homothétique de l'indicatrice du troisième ordre. Quand C est nulle, elle donne trois droites que l'on peut considérer comme formant une indicatrice.

Nous désignerons, pour abréger, l'équation (5) par

(6) $$F=0.$$

910. Supposons que l'on trace dans le plan de la courbe (6) une série de droites parallèles, et qu'on prenne sur chacune d'elles les points centraux de ses intersections avec la courbe, c'est-à-dire les points tels que le produit de leurs distances aux points où la droite coupe la courbe soit un maximum en grandeur absolue, le lieu de ces points sera une courbe que l'on pourra considérer comme le *diamètre* de la proposée *par rapport à la direction des sécantes* [1], m étant le coefficient angulaire de cette direction, l'équation du diamètre est

$$\frac{dF}{dx} + m\frac{dF}{dy} = 0;$$

ou bien, en prenant les dérivées dans l'équation (5),

$$(3ux^2 + 6wxy + 3\varpi y^2) + m(3wx^2 + 6\varpi xy + 3vy^2) = 0.$$

Cette équation peut être mise sous la forme

$$(\varpi + vm)\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2(w + \varpi m)\frac{y}{x} + (u + wm) = 0;$$

elle représente deux droites, car elle est homogène et du second ordre. En la rapprochant de l'équation (4), on voit que ces deux droites sont respectivement tangentes aux deux branches de la courbe d'ombre.

Quand une surface est osculée par un plan en un point, si elle est éclairée par un point lumineux situé dans ce plan, le point d'osculation appartient deux fois à la courbe d'ombre, et les deux branches sont tangentes à deux droites qui forment le diamètre de l'indicatrice du troisième ordre par rapport à la direction du rayon de lumière.

CHAPITRE IV.

LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE ET RELATIVES A SES COURBURES.

§ I. — Lignes de courbure.

Lignes de courbure des surfaces de révolution, des surfaces développables et des surfaces-moulures.

911. Nous avons vu à l'article **820** qu'il existe sur toute surface deux séries de lignes tangentes en chacun de leurs points à une section principale, et nous avons dit que Monge les avait appelées *lignes de courbure*. Une courbe tracée sur une surface en est une ligne de courbure quand le lieu des normales à la surface en ses différents points est une développable. Lorsque l'on connaît les

[1] Voir les *Études analytiques sur la théorie des courbes planes*, par M. Félix Lucas, p. 8 et 9. Ces dernières considérations peuvent être rattachées à la théorie des polaires des divers ordres.

lignes de courbure de l'une des séries, on obtient celles de l'autre série en traçant des courbes qui les coupent toutes à angle droit, c'est-à-dire leurs *trajectoires orthogonales*.

Sur une surface de révolution, les lignes de courbure sont les méridiens et les parallèles, car les normales aux différents points d'un méridien sont dans le plan de cette courbe, et les normales aux divers points d'un parallèle forment un cône.

Quand l'axe perce la surface, tous les méridiens passent au point de rencontre, et par exception il y a en ce point une infinité de lignes de courbure. Si l'axe est normal à la méridienne, toutes les sections normales sont identiques, et le point est un ombilic (art. **795**). Si la méridienne coupe obliquement l'axe, la surface a une infinité de plans tangents au point d'intersection de ces lignes : chaque méridien est une section principale par rapport à l'un d'eux; l'autre section principale est le parallèle dont le rayon est nul.

Les normales à la sphère se rencontrent toutes au centre, et par suite une courbe quelconque tracée sur cette surface peut être considérée comme une ligne de courbure. Chaque point d'une sphère est un ombilic, et tout grand cercle peut être regardé comme une section principale à l'un quelconque de ses points.

912. Les génératrices rectilignes d'une développable en sont des lignes de courbure, car les normales à la surface aux différents points de l'une de ces droites forment un plan. Les lignes de courbure de la seconde série sont les trajectoires orthogonales des génératrices ou les développantes de l'arête de rebroussement (art. **456**, **441**). Sur un cylindre ces lignes sont les sections droites, et sur un cône les sections par des sphères ayant leur centre au sommet.

913. Considérons dans un plan une courbe AB et une droite G (*fig.* 361) : si le plan se meut en restant normal à un cylindre directeur, de manière que la droite G occupe successivement la position des diverses génératrices rectilignes de cette surface, et que chacun de ses points en décrive une section droite, la courbe AB, qui occupe une position invariable par rapport à G, décrira une surface que l'on appelle *surface-moulure*.

Dans le mouvement, une droite Mm perpendiculaire à G est toujours normale à la section droite décrite par le point m; sa longueur est constante : les courbes décrites par les points M et m ont donc une même développée, et par suite le plan mobile est perpendiculaire sur la tangente à la trajectoire du point M, c'est-à-dire qu'il est normal à la surface-moulure en un point quelconque de la courbe AB. Cette génératrice curviligne forme donc dans ses différentes positions les lignes de courbure de l'une des séries. Les lignes de la seconde série sont les courbes décrites par les différents points de AB.

Une surface-moulure peut être considérée comme l'enveloppe des positions d'une surface de révolution dont l'axe se meut sur un cylindre de manière que ses différents points en décrivent des sections droites [1].

Observations pour la détermination des lignes de courbure de quelques surfaces.

914. *Lorsque sur une surface enveloppe les caractéristiques sont des lignes de courbure, elles sont aussi lignes de courbure sur les enveloppées*, car une enveloppe et l'une quelconque de ses enveloppées ont les mêmes normales aux divers points de la caractéristique correspondante. La proposition réciproque est évidemment vraie; elle donne un moyen de déterminer les lignes de courbure de quelques surfaces, et notamment de celles qui sont enveloppes d'une sphère mobile.

Quand un plan coupe une surface sous une inclinaison constante, l'intersection est une ligne de courbure de la surface, car les droites qui lui sont normales aux divers points de cette courbe sont également inclinées sur le plan; la surface qu'elles forment est donc d'égale pente et par suite développable (art. 345) [2].

Théorème de Ch. Dupin sur les surfaces orthogonales.

915. On parvient quelquefois à déterminer les lignes de courbure par la considération des *surfaces orthogonales*, c'est-à-dire des surfaces qui se coupent à angle droit sur toute l'étendue de leur intersection.

Considérons trois surfaces orthogonales qui se croisent en un point A (*fig.* 360): soient AX, AY et AZ les tangentes aux lignes suivant lesquelles elles se coupent deux à deux : nous appellerons *première surface* celle qui est normale à la droite AZ, *seconde et troisième surfaces* celles qui sont respectivement normales aux droites AY et AX.

Nous prenons sur ces lignes, que nous considérons comme des axes, des points P, N et M à des distances du point A infiniment petites et égales.

Le point M appartient aux deux premières surfaces qui s'y coupent à angle droit, comme à tous les autres points de leur intersection. En désignant par α_1, β_1, γ_1 et α_2, β_2, γ_2 les angles que les normales à ces surfaces au point M font avec les axes, nous avons

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0.$$

[1] MONGE, *Application de l'Analyse à la Géométrie*, § XVII.

[2] Cette proposition est due à Joachimsthal. Il existe un théorème plus général qui consiste en ce que, quand deux surfaces se coupent sous un angle constant, si leur intersection est une ligne de courbure de l'une d'elles, elle est aussi une ligne de courbure de l'autre.

Les angles α_1, β_1, α_2, γ_2 diffèrent infiniment peu d'un droit, les angles γ_1 et β_2 sont infiniment petits. On a par conséquent, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\cos\beta_1 + \cos\gamma_2 = 0. \tag{1}$$

En appelant α'_1, β'_1, γ'_1 et α'_3, β'_3, γ'_3 les angles que les normales aux première et troisième surfaces au point N font avec les axes, on trouve

$$\cos\gamma'_3 + \cos\alpha'_1 = 0. \tag{2}$$

Enfin, en nommant α''_2, β''_2, γ''_2 et α''_3, β''_3, γ''_3 les angles que les normales aux seconde et troisième surfaces au point P font avec les axes, on a

$$\cos\alpha''_2 + \cos\beta''_3 = 0. \tag{3}$$

Les longueurs infiniment petites AM et AN étant égales, le théorème de M. J. Bertrand (art. **785**) donne

$$\cos\beta_1 = \cos\alpha'_1, \tag{4}$$

car les angles β_1 et α'_1 sont complémentaires des angles que les normales à la première surface aux points M et N font respectivement avec les plans normaux et rectangulaires ZAX et ZAY. On trouve de la même manière

$$\cos\alpha''_2 = \cos\gamma_2, \quad \cos\gamma'_3 = \cos\beta''_3. \tag{5}$$

Ajoutant les équations (1) et (2) et ayant égard à l'équation (4), on obtient

$$2\cos\beta_1 + \cos\gamma_2 + \cos\gamma'_3 = 0.$$

Les équations (3) et (5) donnent d'ailleurs

$$\cos\gamma_2 + \cos\gamma'_3 = 0.$$

On a donc

$$\cos\beta_1 = 0.$$

Nous voyons que la déviation de la normale à la première surface au point M est nulle, et que par suite la droite AX est tangente à une ligne de courbure de cette surface; elle est également tangente à une ligne de courbure de la troisième surface, et chacun des autres axes jouit d'une propriété analogue pour les deux surfaces dont il touche l'intersection.

Il résulte immédiatement de là que, *si trois séries de surfaces sont telles que les surfaces de chaque série coupent partout à angle droit celles des deux autres séries, chaque courbe d'intersection est à la fois une ligne de courbure pour les deux surfaces de différentes séries auxquelles elle appartient* [1].

Surfaces du second ordre orthogonales.

916. Deux surfaces du second ordre ayant les mêmes plans principaux peuvent être représentées par les équations

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2}=1,\quad \frac{x^2}{m'^2}+\frac{y^2}{n'^2}+\frac{z^2}{p'^2}=1.$$

En désignant les coordonnées variables par X, Y et Z, on trouve que les équations des plans tangents en un point commun (x, y, z) sont

$$\frac{x}{m^2}X+\frac{y}{n^2}Y+\frac{z}{p^2}Z=1,\quad \frac{x}{m'^2}X+\frac{y}{n'^2}Y+\frac{z}{p'^2}Z=1.$$

Pour que ces plans soient rectangulaires, il faut que l'on ait

$$\frac{x^2}{m^2m'^2}+\frac{y^2}{n^2n'^2}+\frac{z^2}{p^2p'^2}=0.$$

Cette équation représente un cône du second ordre, dont les axes sont dirigés selon les axes coordonnés; par conséquent, *quand deux surfaces du second ordre ont les mêmes plans principaux, tous les points où elles se coupent à angle droit appartiennent à un cône de cet ordre qui a les mêmes plans principaux*. D'après un théorème connu (art. **249**), les courbes d'intersection des trois surfaces considérées deux à deux se projettent sur un quelconque des plans coordonnés suivant des coniques. Les sommets de ces projections sont les projections des points des courbes situés dans les autres plans principaux.

Si les sections principales de deux surfaces du second ordre se rencontrent à angle droit, les surfaces elles-mêmes se couperont sous cet angle aux points où leur intersection perce les plans principaux, et ces points appartiendront au cône. Alors le cône et les surfaces que nous considérons se couperont deux à deux suivant trois courbes qui, projetées sur les plans principaux, seront du second ordre et auront tous leurs sommets (réels ou imaginaires) communs; elles

(1) Ch. Dupin a donné ce théorème dans ses *Développements de Géométrie* (4e Mémoire). La démonstration que nous avons adoptée est de M. J. Bertrand (*Journal de Mathématiques*, 1844).

seront donc identiques, et par suite *deux surfaces du second ordre ayant les mêmes plans principaux sont orthogonales quand leurs sections principales se coupent à angle droit.*

917. *Quand une ellipse et une hyperbole ont les mêmes foyers, elles se rencontrent à angle droit*, car leurs tangentes en chacun des points communs sont les bissectrices des angles supplémentaires que comprennent les mêmes rayons vecteurs.

Réciproquement, *une ellipse et une hyperbole sont homofocales quand elles ont les mêmes axes et qu'elles se coupent à angle droit*, car l'hyperbole qui passe par les quatre points de rencontre des deux courbes et qui a les mêmes foyers que l'ellipse touche l'hyperbole donnée en quatre points, et par suite se confond avec elle.

De ce théorème et de celui qui a été démontré à l'article précédent, il résulte que *deux surfaces du second ordre sont orthogonales quand leurs sections principales sont homofocales.* On dit alors que les surfaces sont *homofocales.*

Lignes de courbure des surfaces du second ordre.

918. Considérons la surface du second ordre représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2-m^2}+\frac{y^2}{b^2-m^2}+\frac{z^2}{c^2-m^2}=1. \tag{1}$$

Les axes coordonnés sont rectangulaires; a^2, b^2, c^2 sont des coefficients et m^2 une constante arbitraire.

Les différences des carrés des demi-axes sont indépendantes des valeurs de m^2, et par suite, si l'on fait passer cette constante par tous les états de grandeur depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, toutes les surfaces données par l'équation auront leurs sections principales homofocales.

Quand m^2 est négative et très grande, la surface est un ellipsoïde; si l'on fait varier m^2 comme nous l'avons indiqué, le premier membre de l'équation (1) arrivera à contenir un terme négatif, puis deux et enfin trois; on aura dans ce dernier cas un ellipsoïde imaginaire.

En ne considérant que les surfaces réelles, nous voyons que le système complet des homofocales représentées par l'équation (1) comprend trois séries composées, la première d'ellipsoïdes, la seconde d'hyperboloïdes à une nappe, et la troisième d'hyperboloïdes à deux nappes. La transition d'une série à l'autre se fait par une surface ayant un axe nul, c'est-à-dire par une conique. Nous avons trouvé des dispositions analogues dans le système des surfaces du second ordre qui peuvent être inscrites dans une même développable (art. **526**)[1].

[1] Nous avons déjà eu l'occasion de considérer les surfaces du second ordre homofocales (art. 544).

919. *Par un point quelconque de l'espace on peut faire passer une surface de chaque série.* — On le reconnait facilement par la discussion directe des séries; ainsi, les ellipsoïdes forment une suite continue depuis l'aire d'une ellipse jusqu'à une surface dont les axes sont infinis, et par suite ils remplissent l'espace de leurs points.

L'équation (1) va nous conduire aux mêmes résultats; on peut la mettre sous la forme

$$(b^2 - m^2)(c^2 - m^2)x^2 + (a^2 - m^2)(c^2 - m^2)y^2 + (a^2 - m^2)(b^2 - m^2)z^2 \\ - (a^2 - m^2)(b^2 - m^2)(c^2 - m^2) = 0.$$

Si x, y et z sont les coordonnées d'un point donné, on aura une équation du troisième degré pour déterminer la constante m^2 qui particularise la surface à laquelle appartient ce point. On peut supposer que a^2 est plus grand que b^2, et b^2 plus grand que c^2; alors, en faisant successivement m^2 égal à a^2, b^2, c^2 et $-\infty$, on trouve des valeurs alternativement positives et négatives pour le polynôme qui forme le premier membre de l'équation. Les trois valeurs de m^2 sont donc toujours réelles, et les surfaces qu'elles déterminent appartiennent à des séries différentes.

920. Il résulte de ces diverses considérations, et des théorèmes démontrés aux articles **916** et **917**, que les surfaces des trois séries représentées par l'équation (1) sont orthogonales, et par suite que leurs intersections mutuelles sont leurs lignes de courbure.

Considérons spécialement la surface qui correspond à la valeur 0 de m^2 et dont l'équation est

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Nous aurons ses lignes de courbure en prenant son intersection avec l'ensemble des surfaces représentées par l'équation (1).

L'élimination de z entre les équations (1) et (2) donne

$$(3) \qquad \frac{a^2 - c^2}{a^2 - m^2}\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2 - c^2}{b^2 - m^2}\frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La projection d'une ligne de courbure d'une surface du second ordre sur l'un quelconque de ses plans principaux est une conique.

En appelant a' et b' les demi-axes de cette courbe considérée comme une ellipse, nous avons

$$(4) \qquad a'^2 = \frac{a^2 - m^2}{a^2 - c^2}a^2, \quad b'^2 = \frac{b^2 - m^2}{b^2 - c^2}b^2.$$

L'élimination de m^2 entre ces équations donne

$$\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}\frac{a'^2}{a^2}+\frac{b^2-c^2}{b^2-a^2}\frac{b'^2}{b^2}=1. \tag{5}$$

On voit que les demi-axes des coniques, projections des lignes de courbure sur un plan principal, sont les coordonnées d'une autre conique. On a, pour déterminer les demi-axes α et β de cette *courbe auxiliaire* considérée comme une ellipse, les équations

$$\alpha^2=\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}a^2, \quad \beta^2=\frac{b^2-a^2}{b^2-c^2}b^2. \tag{6}$$

921. *Lignes de courbure de l'ellipsoïde scalène.* — Pour discuter les équations que nous venons d'obtenir et en déduire des constructions, nous devons faire des hypothèses sur les signes des carrés a^2, b^2 et c^2, et sur leurs grandeurs relatives. Nous supposons que l'on a

$$a^2>b^2, \quad b^2>c^2, \quad c^2>0, \tag{7}$$

c'est-à-dire que nous considérons la projection des lignes de courbure d'un ellipsoïde scalène sur le plan de l'axe majeur et de l'axe moyen.

Les équations (6) donnent une valeur positive pour α^2 et une valeur négative pour β^2; la conique auxiliaire est donc une hyperbole.

La *fig.* 363 montre la construction des longueurs réelles α et $\beta\sqrt{-1}$. La courbe ADB est la moitié de la section de l'ellipsoïde située dans le plan de projection; le point F est un de ses foyers. Les courbes V et U sont les rabattements autour des axes KA et KD des autres sections principales. Le point f est un foyer de la première de ces ellipses; le point f_1, un foyer de la seconde.

D'après les équations (6) nous avons

$$\alpha=\frac{\mathrm{KF}}{\mathrm{K}f}\mathrm{KB}=\mathrm{KO}, \quad \beta\sqrt{-1}=\frac{\mathrm{KF}}{\mathrm{K}f_1}\mathrm{KD}=\mathrm{KG}.$$

Lorsque l'on connaît les longueurs α et $\beta\sqrt{-1}$, on peut tracer l'arc OI de l'hyperbole auxiliaire. Sur la *fig.* 365, dont l'échelle est double, nous avons établi cet arc sans reproduire la construction pour déterminer les axes.

D'après nos hypothèses, α est nécessairement plus petit que a, et le point O est entre les points K et B.

Si nous attribuons à a' une valeur déterminée KN (*fig.* 365), l'ordonnée NH sera la grandeur correspondante de b'. L'ellipse $\mathrm{NMN_1M_1}$, qui a pour axes les doubles des longueurs KN et NH, est la projection d'une ligne de courbure.

Quand on donne à a' une longueur KP plus petite que KO, l'ordonnée b' de l'hyperbole OI est imaginaire, et par suite la ligne de courbure correspondante a pour projection une hyperbole dont l'axe non transverse se trouve sur la droite KD. Si nous appelons b_1 la moitié de la longueur réelle de cet axe, nous aurons

$$b_1^2 = -b'^2.$$

L'équation (5) deviendra

$$(5\ bis) \qquad \frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}\frac{a'^2}{a^2} - \frac{b^2-c^2}{b^2-a^2}\frac{b_1'^2}{b^2} = 1.$$

En appelant α et β_1 les demi-axes de cette conique, nous aurons

$$(6\ bis) \qquad \alpha^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}a^2, \quad \beta_1^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}b^2.$$

α et β_1 sont les longueurs KO et KG (*fig.* 363); la *seconde auxiliaire* est donc une ellipse OG (*fig.* 363). L'hyperbole RR_1SS_1 qui passe au point P a pour axes les doubles de l'abscisse KP et de l'ordonnée correspondante KQ.

922. Pour donner de la régularité à la répartition des lignes de courbure, nous avons tracé la courbe D_1cD, rabattement sur le plan de projection de la moitié de la section principale contenue dans le plan passant par l'axe mineur et par l'axe moyen; nous avons partagé cette ligne en parties sensiblement égales, nous avons projeté les points de division sur D_1D, et par ces projections nous avons fait passer des ellipses. On pourrait déterminer les sommets des hyperboles, en divisant d'une manière analogue l'arc appartenant à la troisième section principale et projeté sur OO_1. Cette construction n'est pas faite sur l'épure de Monge que nous avons voulu reproduire sans altération.

Les ellipses principales sont des lignes de courbure, car leurs plans coupent normalement l'ellipsoïde. Les lignes de courbure qui se projettent suivant des ellipses ne se rencontrent pas, et par suite elles appartiennent à une même série; celles dont les projections sont des hyperboles rencontrent les premières et dépendent de l'autre série.

L'ellipse principale contenue dans le plan DD_1 appartient à la série des lignes de courbure dont les projections sont des hyperboles; celle qui est dans le plan AB de l'axe majeur et de l'axe mineur appartient à la même série pour les parties qui se projettent sur les segments BO et AO_1, et à l'autre série pour la partie projetée sur OO_1; elle forme donc une transition, et elle est la seule qui passe aux points O et O_1.

923. Le point projeté en O est rabattu en T sur l'ellipse V dont les demi-axes sont a et c (*fig.* 363). Nous avons trouvé

$$\overline{KO}^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}a^2; \quad \text{d'où} \quad \overline{OT}^2 = \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}c^2;$$

ajoutant ces deux équations, on obtient

$$\overline{\mathrm{KT}}^2 = a^2 - b^2 + c^2.$$

Si KJ est le diamètre de V conjugué à KT, nous aurons

$$\overline{\mathrm{KJ}}^2 + \overline{\mathrm{KT}}^2 = a^2 + c^2, \quad \text{et par suite} \quad \mathrm{KJ} = b.$$

La section diamétrale conjuguée à KT est un cercle, car ses axes KD et KJ ont des longueurs égales. L'indicatrice du point T lui est d'ailleurs homothétique (art. **795**); les rayons de courbure des sections normales en ce point sont donc égaux. En résumé, les points O et O_1 de la surface (*fig.* 365), par lesquels il ne passe qu'une ligne de courbure, sont des ombilics.

Les hyperboles sont parasites au delà des points où elles rencontrent l'ellipse ADBD_1 (*fig.* 365); les ellipses sont utiles sur toute leur longueur, mais si l'on attribuait à a' une valeur supérieure à KB, la valeur correspondante de b' serait plus grande que KD, et l'ellipse déterminée par ces demi-axes serait entièrement parasite.

924. Nous allons maintenant chercher la projection des lignes de courbure de l'ellipsoïde scalène sur le plan qui contient l'axe majeur et le petit axe.

Pour approprier à cette projection les équations de l'article précédent, il suffit d'y remplacer

$$y^2,\ z^2,\ b^2,\ c^2,\ a'^2,\ b'^2,\ \alpha^2 \text{ et } \beta^2$$

par

$$z^2,\ y^2,\ c^2,\ b^2,\ a_1'^2,\ c_1'^2,\ \alpha_1^2 \text{ et } \gamma_1^2.$$

$a_1'^2$, $c_1'^2$, α_1^2 et γ_1^2 sont de nouvelles quantités qui sont suffisamment définies par la substitution que nous venons d'indiquer.

Les équations (6) deviennent

$$(8) \qquad \alpha_1^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2} a^2, \quad \gamma_1^2 = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2} c^2.$$

Il résulte de nos hypothèses que α_1^2 et γ_1^2 sont positifs, et par suite que la conique auxiliaire est une ellipse XΓ (*fig.* 362). Nous déterminons ses axes α_1 et γ_1 par une construction analogue à celle qui a été expliquée à l'article **921**, et nous reportons leurs longueurs KX et KΓ à une échelle double sur la *fig.* 364. L'ellipse $\mathrm{A'EB'E_1}$ y représente la section de l'ellipsoïde par le plan de projection.

Il est facile de voir que α_1 et γ_1 sont respectivement plus grands que a et c : les points X et Γ se trouvent donc en dehors de l'ellipse $\mathrm{A'EB'E_1}$; d'après cela, quelque position que l'on assigne au sommet d'une conique sur KB' ou sur KE.

qu'on le place en φ' ou en μ, on trouvera toujours une seconde coordonnée réelle $\varphi'\chi$ ou $\mu\xi$. Les projections des lignes de courbure sont donc des ellipses, et l'arc XΓ de la conique auxiliaire suffit pour les déterminer.

925. En faisant les substitutions convenables dans l'équation (3), on obtient, pour équation générale des coniques projections des lignes de courbure sur le plan de l'axe majeur et de l'axe moyen,

$$(9)\qquad \frac{a^2-b^2}{a^2-m^2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2-c^2}{m^2-c^2}\frac{z^2}{c^2}=1.$$

La droite qui passe par deux des sommets de l'ellipse auxiliaire non situés sur un même axe a pour équation

$$(10)\qquad \frac{x}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}+\frac{z}{c}\sqrt{\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}}=1.$$

Si l'on suppose que chaque radical porte avec lui le double signe, cette équation représentera l'une quelconque des quatre droites indéfinies qui forment les côtés du losange XΓX′Γ′.

L'élimination de z entre les équations (9) et (10) donne

$$(11)\qquad \frac{c^2-a^2}{a^2-m^2}(a^2-b^2)\frac{x^2}{a^2}-\frac{2x}{a}\sqrt{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}+(m^2-a^2)=0.$$

Les deux racines de cette équation sont égales quelle que soit m, par conséquent toutes les coniques représentées par l'équation (9) sont tangentes aux droites XΓ, ΓX′, X′Γ′, Γ′X, et le système de ces quatre lignes forme leur enveloppe.

Quand m^2 égale b^2, l'équation (9) détermine l'ellipse principale A′EB′E₁. En introduisant cette valeur de m^2 dans l'équation (11), et résolvant, on obtient

$$x=a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}.$$

Cette valeur est précisément celle que donne la première des équations (6) pour la longueur α qui représente l'abscisse des points O et O_1 (*fig.* 365). Les ombilics sont donc les points de contact de l'ellipse principale $A'EB'E_1$ avec les côtés du losange circonscrit XΓX′Γ′.

926. Quand on donne à a'_1 une valeur plus grande que KX (*fig.* 364), l'ordonnée c'_1 de l'ellipse auxiliaire XΓ est imaginaire, et la conique correspondante est une hyperbole. Pour déterminer la longueur réelle $c'_1\sqrt{-1}$, on peut tracer une *seconde auxiliaire* qui sera une hyperbole, ayant pour axe transverse X′X et pour axe non transverse ΓΓ′.

La série générale des coniques représentées par l'équation (9) comprend donc des hyperboles ayant leurs sommets sur la droite XX', au delà des points X et X'; elle en comprend aussi qui ont leurs sommets sur la droite ΓΓ', au delà des points Γ et Γ' : on pourrait déterminer leurs axes par une *troisième auxiliaire*. Ces deux suites d'hyperboles ont respectivement pour enveloppes les prolongements des côtés du losange au delà des points X et X' et au delà des points Γ et Γ'.

927. *Observations sur les parties parasites des projections des lignes de courbure de l'ellipsoïde scalène.* — Le système général de coniques déterminé par l'hyperbole auxiliaire OI (*fig.* 365) forme les projections des lignes de courbure de toutes les surfaces du second ordre dont les demi-axes a, b et c satisfont aux deux équations (6).

Si nous nous donnons arbitrairement l'excentricité absolue e de la section faite dans la surface considérée par le plan de projection, nous aurons pour déterminer a, b et c les équations

$$a^2 - b^2 = e^2, \quad (a^2 - c^2)\alpha^2 = a^2 e^2, \quad (b^2 - c^2)\beta^2 = - b^2 c^2,$$

desquelles on déduit

$$a^2 = \frac{\beta^2 + e^2}{\alpha^2 + \beta^2}\alpha^2, \quad b^2 = \frac{\alpha^2 - e^2}{\alpha^2 + \beta^2}\beta^2, \quad c^2 = \frac{(\alpha^2 - e^2)(\beta^2 + e^2)}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

En faisant passer la quantité e^2 par tous les états de grandeur, nous aurons les systèmes d'axes des surfaces du second ordre dont les lignes de courbure se projettent sur les deux séries de coniques que représente la *fig.* 365.

D'après les hypothèses (7) et eu égard aux équations (6), on a

$$\alpha^2 > 0, \; \beta^2 < 0, \; \alpha^2 < -\beta^2.$$

On trouve facilement les résultats ci-dessous :

	e^2 NÉGATIVE.	e^2 COMPRISE ENTRE 0 et α^2.	e^2 COMPRISE ENTRE α^2 et $-\beta^2$.	e^2 PLUS GRANDE QUE β^2
a^2	Positif..........	Positif..........	Positif..........	Négatif et plus petit que b^2 en grandeur absolue.
b^2	Positif..........	Positif..........	Négatif..........	Négatif..........
c^2	Positif et plus grand que a^2 et b^2.	Positif et plus petit que a^2 et b^2.	Négatif et plus petit que b^2 en grandeur absolue.	Positif..........

Quand c^2 est négative, nous trouvons un ellipsoïde projeté sur le plan de l'axe mineur et de l'axe moyen : les points O et O_1 sont sur le premier. Les grands axes des ellipses qui sont dessinées étant sur AB, on ne voit pas immédiatement comment la disposition que nous indiquons peut être réalisée; mais il faut remarquer que la grandeur absolue de β^2 étant supérieure à α^2, l'angle des asymptotes de l'hyperbole auxiliaire est obtus, et que par suite, à partir d'un certain point, les valeurs de b' surpassent celles de a'; il en résulte qu'une des ellipses de la série générale est un cercle, et que celles qui la suivent ont leur grand axe sur la droite indéfinie $D_1 D$.

Lorsque c^2 est positive et plus petite que α^2, les surfaces sont des ellipsoïdes projetés sur le plan de l'axe majeur et de l'axe moyen. La figure est établie spécialement pour ce cas.

Quand c^2 est comprise entre α^2 et $-\beta^2$, on obtient des hyperboloïdes à deux nappes projetés sur le plan qui contient le plus grand des deux axes non transverses et l'axe transverse; les points O et O_1 sont sur ce dernier. Les ellipses ont chacune deux arcs utiles et deux parasites; les hyperboles qui se trouvent en dedans du contour apparent sont utiles, les autres parasites.

Enfin, lorsque c^2 est plus grande que $-\beta^2$, on a des hyperboloïdes à deux nappes projetés sur le plan des deux axes non transverses : les points O et O_1 sont sur le plus petit des deux. Les ellipses et les hyperboles sont utiles sur toute leur longueur.

928. On trouve par des raisonnements analogues que les coniques qui sont tangentes aux quatre côtés du losange $X\Gamma X'\Gamma'$ (*fig.* 364) sont les projections des lignes de courbure d'une série d'ellipsoïdes et de deux séries d'hyperboloïdes à deux nappes. Le plan de projection contient l'axe majeur et l'axe mineur de chaque ellipsoïde, l'axe transverse et l'axe non transverse mineur de chaque hyperboloïde.

On peut dire d'une manière générale que les dispositions représentées en partie sur les *fig.* 364 et 365 sont celles des lignes de courbure de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde à deux nappes, projetées sur le plan des ombilics et sur un autre des plans principaux.

929. Il nous resterait à étudier les lignes de courbure de l'hyperboloïde à une nappe, mais nous nous bornerons à quelques observations. Sur le plan de l'ellipse de gorge, les coniques sont à peu près disposées comme celles de la *fig.* 365 : l'angle des asymptotes de l'hyperbole auxiliaire est aigu, et par suite toutes les ellipses ont leur grand axe sur la même droite. Les points O et O_1 sont dans l'intérieur de l'ellipse de gorge, et appartiennent à un segment parasite de la projection de la section par le plan qui contient l'axe non transverse et l'axe transverse majeur : l'hyperboloïde gauche, étant une surface à courbures opposées, ne peut en effet avoir d'ombilics.

Sur le plan de l'axe non transverse et de l'axe transverse mineur, la courbe auxiliaire est une ellipse imaginaire. Cela indique qu'à toute valeur réelle de a' ou b' correspond une grandeur imaginaire pour b' ou a', et que par suite les courbes des deux séries sont des hyperboles telles que les axes transverses des unes et les axes non transverses des autres sont sur une même droite. En remplaçant successivement β^2 par $-\beta_1^2$ et γ^2 par $-\gamma_1^2$, on obtient deux hyperboles qui font respectivement connaître les axes des coniques des deux séries.

Observations sur les dispositions des lignes de courbure près d'un ombilic.

930. Les raisonnements que nous avons présentés à l'article **820** pour établir qu'il passe deux lignes de courbure en chaque point d'une surface ne subsistent pas pour un ombilic, car l'équation (20) de l'article **811** montre qu'en un tel point la déviation est nulle dans toutes les directions; mais, comme la même circonstance n'a pas lieu aux points voisins, les surfaces lieux des normales aux divers points d'une courbe qui passe à un ombilic sont en général gauches, et n'ont de remarquable que d'avoir un sommet sur la génératrice qui rencontre la surface considérée à l'ombilic.

Les lignes de courbure présentent près des ombilics diverses dispositions. Nous constaterons ici celles que l'on rencontre sur les surfaces que nous connaissons.

1° Sur les surfaces du second ordre, une seule ligne de courbure passe à un ombilic; elle forme transition entre les deux séries.

2° Quand une méridienne est rencontrée normalement par l'axe, le point commun est un ombilic de la surface de révolution. Une infinité de lignes de courbure, toutes de la même série, passent à ce point.

3° Quand le centre de courbure C d'une méridienne pour un point M est sur l'axe de révolution, les points du parallèle décrit par le point M sont des ombilics. Deux lignes de courbure, un méridien et le parallèle, passent à chacun d'eux.

Les méridiens sont en général les lignes de plus grande courbure d'un côté du parallèle, et de plus petite courbure de l'autre côté.

Monge a appelé *lignes des courbures sphériques* les lignes dont tous les points sont des ombilics.

4° Sur la sphère, tous les points sont des ombilics, et une courbe quelconque peut être considérée comme ligne de courbure.

Mesure de la courbure d'une surface en un point.

951. La considération des lignes de courbure est d'une grande utilité dans diverses recherches géométriques. Nous allons en donner un exemple.

Soit, sur une surface, un rectangle ACDB (*fig.* 369) dans lequel deux côtés opposés appartiennent à deux lignes de courbure infiniment voisines : les côtés de ce rectangle étant infiniment petits doivent être considérés comme rectilignes et égaux deux à deux. La normale à la surface au point A rencontre les normales aux sommets B et C en des points P et Q. Les segments AP et AQ sont les rayons principaux R_1 et R_2, et, en appelant ε et η les angles APB et AQC, on a

$$AB = R_1\varepsilon, \quad AC = R_2\eta.$$

L'aire ABDC doit être par conséquent égale à $R_1 R_2 \varepsilon\eta$.

Supposons maintenant que par le centre o d'une sphère d'un rayon égal à l'unité, on fasse passer quatre plans respectivement parallèles aux plans qui contiennent les normales en deux sommets voisins du rectangle ABDC, on déterminera sur la sphère un rectangle $abdc$, dont l'aire sera $\varepsilon\eta$, et l'on aura

$$\frac{abdc}{ABDC} = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

On peut regarder le périmètre $abdc$ comme le lieu des pieds des rayons parallèles aux normales aux différents points du périmètre ABDC.

La forme rectangulaire n'a aucune importance pour le résultat que nous venons d'obtenir, car, quelle que soit l'aire infiniment petite considérée, on peut toujours la concevoir divisée en rectangles dont les côtés ayant des longueurs infiniment petites du second ordre seront dirigés sur les lignes de courbure.

Nous voyons d'après cela que *si, par le centre d'une sphère d'un rayon égal à l'unité, on mène des droites parallèles aux normales à une surface aux différents points du périmètre d'une aire infiniment petite, on déterminera sur la sphère une aire dont le rapport à l'aire considérée sera égal à l'unité divisée par le produit des rayons de courbure principaux de la surface* [1]. Gauss a appelé ce rapport *mesure de la courbure;* en adoptant cette définition, on doit considérer la courbure comme positive ou négative, suivant que la surface est convexe ou à courbures opposées.

---

[1] On peut voir pour ce théorème une Note de Binet sur un Mémoire par Olinde Rodrigues, dans le troisième Volume de la *Correspondance de l'École Polytechnique*.

§ II. — Lignes asymptotiques.

Considérations générales.

952. Nous avons dit à l'article **820** que, sur une surface, une ligne asymptotique est une courbe tangente en chaque point à une asymptote de l'indicatrice de ce point. Il résulte de cette définition et du théorème de l'article **818** que *tous les plans osculateurs d'une ligne asymptotique d'une surface sont tangents à cette surface.* Nous avons dû faire, il est vrai, dans l'énoncé de la proposition de l'article **818**, cette restriction que le contact de la courbe avec une asymptote de l'indicatrice soit seulement du premier ordre, mais une ligne ne peut avoir des inflexions qu'en des points singuliers.

Réciproquement, et en vertu d'un théorème que nous avons établi à l'article **797**, *une courbe tracée sur une surface est asymptotique, quand chacun de ses plans osculateurs est tangent à la surface.*

Lignes asymptotiques des surfaces gauches.

953. Les surfaces du second ordre ont pour asymptotiques des droites qui ne sont réelles que pour l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique.

Sur une surface gauche, les génératrices sont les asymptotiques de l'une des séries, et on appelle spécialement *asymptotiques* celles de ces lignes qui appartiennent à la seconde série.

Considérons une génératrice G et appelons G′ la génératrice qui lui est infiniment voisine : G′ appartient à l'hyperboloïde osculateur le long de G. Les génératrices du second système de cet hyperboloïde sont tangentes aux asymptotiques de la surface, et par suite quatre de ces lignes interceptent sur G et sur G′ des segments dont les rapports anharmoniques sont égaux (art. **699**), même en ayant égard aux infiniment petits du premier ordre. Les quatre asymptotiques coupent successivement les diverses génératrices, et, d'après ce que nous venons de voir, le rapport anharmonique des points de rencontre est invariable de l'une à l'autre. Nous avons donc ce théorème : *Dans toute surface gauche, le rapport anharmonique des points où quatre asymptotiques déterminées rencontrent deux génératrices quelconques est constant.* On peut encore dire (art. **699**, note) que *les points où les lignes asymptotiques d'une surface gauche coupent deux génératrices quelconques forment sur ces droites des divisions homographiques.*

Quand la surface est un conoïde, les hyperboloïdes osculateurs sont des paraboloïdes, et, en raisonnant comme précédemment, on trouve que les *asym-*

ptotiques interceptent sur deux génératrices quelconques des segments proportionnels (art. **640**) [1].

954. Quand une génératrice passe à un sommet, elle n'est pas croisée à ses différents points par les asymptotiques, car elle est une ligne de courbure et les asymptotes des indicatrices sont confondues avec elle. Au sommet, tous les plans contenant la génératrice doivent être considérés comme tangents, et chacun d'eux est le plan osculateur d'une asymptotique qui rencontre tangentiellement la génératrice section normale d'un rayon infini.

Quand la surface a une directrice rectiligne, cette droite est une asymptotique en tous ses points et notamment à chacun des sommets où elle passe. On voit ainsi qu'à un sommet une asymptotique peut ne pas être tangente à la génératrice. En résumé, *les asymptotiques d'une surface gauche passent à chaque sommet, et y sont en général tangentes à la génératrice.*

955. On considère quelquefois la surface gauche formée par celles des normales à une courbe gauche qui sont respectivement situées dans les plans osculateurs et que l'on appelle *normales principales*. La directrice est une courbe asymptotique de la surface gauche, car chacun de ses plans osculateurs lui est tangent. Nous concluons de là que le lieu des normales principales à une courbe gauche ne peut pas être un hyperboloïde, car les lignes asymptotiques de cette surface sont des droites [2].

En tout point de la directrice, les deux asymptotiques de la surface gauche sont cette courbe et la génératrice, lignes qui se rencontrent à angle droit. Il résulte de là que *les rayons de courbure principaux de la surface sont égaux en grandeur absolue aux divers points de la directrice.*

Lorsqu'une ligne asymptotique d'une surface gauche est une trajectoire orthogonale des génératrices, cette surface est le lieu des normales principales à l'asymptotique [3].

Lignes asymptotiques des surfaces de révolution.

956. Les surfaces de révolution n'ont des lignes asymptotiques que sur les parties qui sont engendrées par les arcs de la méridienne dont la convexité est tournée

(1) Ces théorèmes sont dus à M. Paul Serret (*Thèse sur les propriétés géométriques des courbes à double courbure*).

(2) L'étude de la surface lieu des normales principales à une courbe gauche se ramène à l'étude de la surface lieu des normales à une développable sur laquelle la courbe donnée est une géodésique. Cette développable est l'enveloppe des plans tangents à la courbe gauche donnée et respectivement perpendiculaires à ses plans osculateurs.

En se reportant à l'article 851, on voit que *la grandeur absolue du produit des rayons de courbure de la surface lieu des normales principales à une courbe gauche, en un point de cette courbe, est égale au carré du rayon de seconde courbure correspondant à ce point.* (MANNHEIM.)

(3) Ces théorèmes sont dus à M. J. Bertrand, *Journal de M. Liouville*, 1850.

vers l'axe, car ce sont les seules dont les courbures soient négatives (art. **951**). Ces parties sont limitées à des parallèles le long desquels la surface est touchée par un plan, et quelquefois à un parallèle d'inflexion A*a* (*fig.* 356).

En un point C du parallèle A*a*, la méridienne, qui est une section principale, a un rayon infini; les deux lignes asymptotiques lui sont donc tangentes, et, comme elles ne peuvent dépasser le point C, elles forment les deux branches d'un rebroussement. On voit que le parallèle d'inflexion est le lieu des points de rebroussement des asymptotiques, et que les deux branches de chacune de ces lignes appartiennent aux deux séries différentes.

Les sections principales sont les méridiens et les courbes tangentes aux parallèles; aucun de leurs rayons de courbure n'est infini dans la partie comprise entre A*a* et B*b*. Il résulte de là qu'à partir du rebroussement C, les deux branches d'une asymptotique se rapprochent continuellement du parallèle B*b*. D'ailleurs, elles ne peuvent pas l'atteindre, car ce parallèle est une asymptotique qui n'est rencontrée par aucune autre, parce qu'en chacun de ses points la surface a un plan tangent unique, et une seule section à courbure nulle. Il passe par tout point de la zone considérée, quelque voisin qu'il soit du parallèle B*b*, deux asymptotiques qui d'un côté se rapprochent de ce parallèle, et de l'autre s'avancent vers le cercle A*a*. Il résulte de ces diverses considérations que *les asymptotiques sont toutes asymptotes du parallèle supérieur* B*b*.

§ III. — Lignes tangentes aux sections normales surosculées par des cercles.

Détermination des sections normales surosculées par des cercles en un point d'une surface.

957. Considérons deux surfaces Σ et Σ', l'une quelconque, l'autre du deuxième ordre et osculatrice de la première en un de ses sommets : ces deux surfaces se traversent, et l'on reconnait, par des considérations analogues à celles de l'article **865**, qu'il y a un contact du troisième ordre entre leurs sections par un même plan normal contenant la tangente à une des branches de l'intersection. La section faite dans Σ' est une conique ayant un sommet au point de contact : la section de Σ est donc surosculée par un cercle.

Nous prenons pour origine le point où les surfaces se touchent, et pour axe des ordonnées z leur normale commune : les deux autres axes sont dans le plan tangent. Si nous ne considérons que la partie voisine de l'origine, pour laquelle l'ordonnée z est infiniment petite du second ordre, l'équation de la surface Σ, supposée algébrique ou développée suivant les puissances entières des variables, se réduira à la forme suivante, quand on y négligera les infiniment petits d'un ordre plus élevé que le troisième :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &Mx^3 + M'y^3 + Nx^2y + N'xy^2 \\ &\qquad + Ax^2 + A'y^2 + Bxy + B'zx + B''yz + Cz = 0. \end{aligned}\right.$$

La surface du second ordre Σ' osculatrice de Σ en un de ses sommets est représentée par l'équation (art. **792**)

$$Ax^2 + A'y^2 + Kz^2 + Bxy + Cz = 0,$$

dans laquelle K est un coefficient arbitraire. En considérant seulement la partie de Σ' voisine de l'origine, et négligeant le terme en z^2 qui est du quatrième ordre, l'équation se réduit à

$$(2)\quad Ax^2 + A'y^2 + Bxy + Cz = 0.$$

Les sections normales surosculées par des cercles, dans la surface Σ, sont tangentes aux intersections des surfaces représentées par les équations (1) et (2). L'élimination de z nous fera donc connaître les tangentes à ces courbes.

En égard à l'équation (2), l'équation (1) se réduit à

$$Mx^3 + M'y^3 + Nx^2y + N'xy^2 + (B'x + B''y)z = 0.$$

L'élimination de z entre cette dernière et l'équation (2) donne

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(M' - \frac{A'B''}{C}\right)\frac{y^3}{x^3} + \left(N' - \frac{A'B'}{C} - \frac{BB''}{C}\right)\frac{y^2}{x^2} \\ &\qquad + \left(N - \frac{AB''}{C} - \frac{BB'}{C}\right)\frac{y}{x} + \left(M - \frac{AB'}{C}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

On voit qu'il passe par tout point d'une surface trois sections normales surosculées par des cercles, et qu'il ne peut y en avoir plus de trois, à moins qu'elles ne jouissent toutes de cette propriété : tous les coefficients de l'équation sont alors nuls. Deux des trois sections peuvent évidemment être imaginaires.

958. Si la surface proposée Σ est du second ordre, M, M', N et N' seront nuls, et l'équation (3) se réduira à

$$A'B''\frac{y^3}{x^3} + (A'B' + BB'')\frac{y^2}{x^2} + (AB'' + BB')\frac{y}{x} + AB' = 0.$$

On peut mettre cette équation sous la forme

$$\left(A'\frac{y^2}{x^2} + B\frac{y}{x} + A\right)\left(B''\frac{y}{x} + B'\right) = 0.$$

Elle se divise donc en deux équations :

$$A'\frac{y^2}{x^2} + B\frac{y}{x} + A = 0,$$

$$B''\frac{y}{x} + B' = 0.$$

La première représente l'intersection de la surface du second ordre par le plan des xy, et par suite les génératrices rectilignes qui sont en effet des cercles d'un rayon infini ; la seconde détermine la tangente à une section normale surosculée par un cercle d'un rayon fini. Cette section est toujours réelle.

Dans le cas qui nous occupe, les surfaces Σ et Σ' sont toutes les deux du second ordre. Elles se coupent d'ailleurs suivant deux droites : leur intersection complète comprend donc, en outre, une courbe plane (art. **252**). Il est facile de reconnaître que cette courbe est en général située dans un plan oblique.

Détermination sur les surfaces du second ordre des lignes tangentes aux sections normales surosculées par des cercles.

939. On peut concevoir des courbes qui soient tangentes aux sections normales surosculées par des cercles, comme les lignes de courbure le sont aux sections principales. Chaque surface a trois séries de ces lignes ou une seule série.

939 *a*. Nous avons donné en 1855, dans le *Journal de M. Liouville*, l'équation générale des courbes tangentes aux sections normales surosculées par des cercles. Nous allons reproduire ce travail en développant les calculs plus que nous ne l'avons fait alors.

Nous nous occuperons d'abord d'une surface quelconque, sur laquelle nous considérons une section par un plan normal en un point. Nous appelons R le rayon de courbure de la section en ce point, et α, β, γ les cosinus des angles que sa tangente fait avec trois axes coordonnés rectangulaires. Nous regardons l'ordonnée z du point de la surface comme une fonction des coordonnées horizontales x et y, et nous désignons suivant l'usage par p, q, r, ... ses dérivées partielles des différents ordres.

En posant

$$(1)\qquad Z_2 = t\beta^2 + 2s\beta\alpha + r\alpha^2,$$

on a, d'après une formule connue,

$$(2)\qquad R^2 = \frac{p^2+q^2+1}{Z_2^2}.$$

Si la section est surosculée par un cercle, elle a le même rayon de courbure au point infiniment voisin de celui qui est considéré, et par suite on peut différentier l'équation (2) en regardant R comme constant. On a ainsi

$$(p^2+q^2+1)\,dZ_2 - [(ps+qt)\,dy + (pr+qs)\,dx]Z_2 = 0.$$

En appelant S l'arc infiniment petit de la section normale, on a

$$(3)\qquad dy = S\beta,\quad dx = S\alpha,$$

et l'équation devient

$$(4)\qquad (p^2+q^2+1)dZ_2 - [(ps-qt)\beta + (pr-qs)\alpha]Z_2S = 0.$$

Nous allons chercher la valeur de dZ_2. En différentiant l'équation (1), et en y remplaçant dx et dy par leurs valeurs (3), on obtient

$$dZ_2 = (v\beta^3 + 3w\beta^2\alpha + 3m\beta\alpha^2 + u\alpha^3)S + 2(t\beta + s\alpha)d\beta + 2(s\beta + r\alpha)d\alpha.$$

Nous posons

$$(5)\qquad Z_3 = v\beta^3 + 3w\beta^2\alpha + 3m\beta\alpha^2 + u\alpha^3.$$

En portant dans l'équation (4) la valeur de dZ_2 simplifiée par cette notation, on obtient

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}(p^2+q^2+1)Z_3S + 2(p^2+q^2+1)[(t\beta+s\alpha)d\beta + (s\beta+r\alpha)d\alpha]&\\ -[(ps-qt)\beta + (pr-qs)\alpha]Z_2S &= 0.\end{aligned}\right.$$

Il faut maintenant déterminer les différentielles $d\alpha$ et $d\beta$.

La normale à la surface et la tangente à la section au point considéré ont respectivement pour équations

$$\left\{\begin{aligned} x'-x+p(z'-z)&=0,\\ y'-y+q(z'-z)&=0;\end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned}(x'-x)\gamma&=(z'-z)\alpha,\\ (y'-y)\gamma&=(z'-z)\beta,\end{aligned}\right.$$

x', y' et z' étant les coordonnées courantes. Le plan de la section contient ces deux droites, et par suite on trouve que son équation est

$$(7)\qquad (\beta+q\gamma)(x'-x) - (\alpha+p\gamma)(y'-y) + (p\beta-q\alpha)(z'-z) = 0.$$

Les différentielles $d\alpha$, $d\beta$ et $d\gamma$ doivent être telles que la tangente au point infiniment voisin de celui que nous considérons soit dans le plan de la section. En différentiant les équations de la tangente par rapport aux coordonnées du point de contact, on a

$$(x'-x)d\gamma - \gamma dx = (z'-z)d\alpha - \alpha dz,$$
$$(y'-y)d\gamma - \gamma dy = (z'-z)d\beta - \beta dz.$$

Les termes γdx et αdz sont égaux à $\alpha\gamma S$ et par conséquent égaux entre eux. Les quantités γdy et βdz sont aussi égales. Les deux équations que nous venons d'obtenir se réduisent donc à

$$(x'-x)d\gamma = (z'-z)d\alpha,\quad (y'-y)d\gamma = (z'-z)d\beta.$$

D'après ce que nous avons dit, les valeurs de $(x'-x)$ et de $(y'-y)$ prises dans ces deux dernières équations doivent satisfaire à l'équation (7). Cette condition donne

$$(8)\qquad (\beta+q\gamma)d\alpha - (\alpha+p\gamma)d\beta + (p\beta-q\alpha)d\gamma = 0.$$

La tangente à la section au point considéré étant perpendiculaire à la normale à la surface, on a

$$(9)\qquad p\alpha + q\beta - \gamma = 0.$$

Les axes étant rectangulaires, on a

$$(10) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

En différentiant les équations (9) et (10) et ayant égard aux relations (3), on obtient

$$(11) \qquad p\,d\alpha + q\,d\beta - d\gamma + Z_2 S = 0,$$

$$(12) \qquad \alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma = 0.$$

Les équations (8), (11) et (12) vont nous donner les différentielles cherchées $d\alpha$ et $d\beta$.

Pour faire facilement l'élimination, nous posons

$$(13) \qquad a = \beta + q\gamma, \quad b = -\alpha - p\gamma, \quad c = p\beta - q\alpha.$$

L'équation (8) devient

$$(8\ bis) \qquad a\,d\alpha + b\,d\beta + c\,d\gamma = 0.$$

Éliminant $d\beta$ et $d\gamma$ entre les équations (8 *bis*), (11) et (12), on obtient

$$(14) \qquad d\alpha = -\frac{(b\gamma - c\beta)Z_2 S}{(b\gamma - c\beta)p + (c\alpha - a\gamma)q + (b\alpha - a\beta)}.$$

En remplaçant dans chacun des facteurs binômes a, b et c par leurs valeurs (13), et en éliminant ensuite γ par l'équation (9) et γ^2 par l'équation (10), on trouve

$$b\gamma - c\beta = -p, \quad c\alpha - a\gamma = -q, \quad b\alpha - a\beta = -1.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (14) donne

$$d\alpha = -\frac{pZ_2S}{p^2 + q^2 + 1};$$

on a de même

$$d\beta = -\frac{qZ_2S}{p^2 + q^2 + 1};$$

en portant les valeurs de $d\alpha$ et de $d\beta$ dans l'équation (6), on obtient

$$Z_3(p^2 + q^2 + 1) - 3[(ps + qt)\beta + (pr + qs)\alpha]Z_2 = 0.$$

Enfin, si nous remplaçons Z_2 et Z_3 par les polynômes que ces signes représentent, nous aurons

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(p^2 + q^2 + 1)\left[\frac{v}{3}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 + w\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + u\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{n}{3}\right] \\ &\quad - \left[t\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + 2s\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + r\right]\left[(ps + qt)\frac{\beta}{\alpha} + (pr + qs)\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

La quantité $\frac{\beta}{\alpha}$ est la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe des abscisses la projection sur le plan XOY d'une droite tangente, au point considéré, à une section normale surosculée par un cercle. L'équation (15) est du troisième degré en $\frac{\beta}{\alpha}$; une surface quelconque a donc en chacun de ses points trois sections de ce genre, dont une au moins est réelle.

Pour avoir l'équation différentielle des lignes tangentes en chacun de leurs points à une section normale surosculée par un cercle, il suffit de remplacer $\frac{\beta}{\alpha}$ par sa valeur $\frac{dy}{dx}$ prise dans les relations (3). On trouve

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(p^2+q^2+1)\left[\frac{v}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + w\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + u\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{u}{3}\right] \\
&\quad -\left[t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2s\left(\frac{dy}{dx}\right) + r\right]\left[(ps+qt)\frac{dy}{dx} + (pr+qs)\right] = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Cette formule nous sera utile plus loin.

940. D'après ce que nous avons vu (art. **938**), les surfaces du second ordre n'ont qu'une série de lignes tangentes aux sections normales surosculées par un cercle, non compris les génératrices. Sur ces surfaces les courbes dont nous nous occupons sont d'ailleurs telles que toute section normale, tangente à l'une d'elles en un point, est une conique ayant un sommet à ce point. Nous allons les déterminer par cette propriété.

Considérons un plan P tangent en un point M à une surface du second ordre, et en un point G à une sphère ayant le même centre que la surface (*fig.* 371) : le rayon de cette sphère est la perpendiculaire AG abaissée sur le plan P du centre commun A. Si nous concevons une developpable circonscrite à la sphère et à la surface, la droite MG en sera une génératrice, et la tangente ML à la courbe de contact au point M sera, dans l'indicatrice de ce point, le diamètre conjugué à MG [1].

Nous faisons passer par le centre A un plan Q parallèle à P; il coupe la surface du second ordre suivant une conique homothétique à l'indicatrice du point M : les diamètres EF et IJ, respectivement parallèles à MG et à ML, sont par conséquent conjugués.

La normale au point M doit être parallèle à GA : elle rencontre EF en un point D. Nous faisons passer un plan par cette normale et par la droite ML tangente à la courbe de contact; il coupe la surface du second ordre suivant une

---

(1) Nous n'avons tracé ni les contours apparents de la sphère et de l'ellipsoïde, ni leurs lignes de contact avec la développable. Ces lignes sont inutiles à la démonstration, et elles eussent compliqué la figure. Nous avons d'abord tracé les courbes EIFJ et EMF, puis nous avons déterminé la conique BMC en faisant des sections par des plans parallèles à P : son centre est à l'intersection de MD avec le diamètre de la conique EMF conjugué à la direction AG.

conique BMC. Son intersection BC avec le plan Q est parallèle à ML et à IJ : le milieu de la corde BC est par conséquent au point D. Il résulte de là que la droite MD est dans la conique BMC un diamètre conjugué à la direction ML; comme d'ailleurs elle est perpendiculaire à ML, on voit que le point M est un sommet de cette courbe.

Nous obtenons ainsi ce théorème : *Si l'on circonscrit une développable à une surface du second ordre et à une sphère concentrique, la ligne de contact sur la surface sera tangente en chacun de ses points à une section normale surosculée par un cercle.*

941. En renversant l'ordre des raisonnements, on trouve que *quand, sur une surface du second ordre, un point* M *est un des sommets d'une section normale* BMC, *cette courbe est tangente en* M *à la ligne de contact de la surface considérée avec une développable qui lui serait circonscrite ainsi qu'à une sphère de même centre qu'elle.* Il suit de là que le plan tangent P n'aura pas cessé de toucher la sphère dont le rayon est AG, s'il roule sur la surface du second ordre de manière que son point de contact se transporte sur la section BMC à une distance infiniment petite de M. Nous avons donc un second théorème réciproque du premier : *Lorsqu'une courbe tracée sur une surface du second ordre est telle que chacun de ses points soit un sommet de la section normale qui lui est tangente, les plans tangents à la surface en ses différents points sont tous à une même distance du centre.*

Il résulte de ces théorèmes que, déduction faite des génératrices rectilignes, *il ne passe par un point d'une surface du second ordre qu'une courbe tangente à des sections normales surosculées par des cercles,* car le plan tangent en un point ne touche qu'une sphère concentrique à la surface.

Poinsot a appelé *polhodie* la courbe de contact d'un ellipsoïde avec une développable circonscrite à cette surface et à une sphère concentrique [1]. Nous adopterons cette expression en l'étendant d'ailleurs aux lignes qui jouissent de la même propriété sur les autres surfaces du second ordre.

942. Les observations que nous avons présentées à l'article **540**, et les formules que nous avons données dans les articles qui précèdent celui-là, permettent de déterminer facilement les polhodies d'une surface du second ordre donnée.

Les droites diamétrales conjuguées communes à la sphère et à la surface considérée sont dirigées suivant les axes de cette dernière. Si nous désignons par

---

[1] La courbe que Poinsot a appelée *polhodie* est tracée sur un ellipsoïde dans lequel l'inverse de la valeur du carré de l'axe mineur est plus grand que la somme des inverses des carrés des deux autres axes $\left(\frac{1}{c^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$. Le savant géomètre a été conduit à l'étude de cette courbe par des considérations de Mécanique (*Journal de M. Liouville*, 1851).

les lettres m et n les longueurs appelées b et c à l'article **557**, et si nous conservons les autres notations de cet article, les deux premières équations de condition (5) seront

$$\frac{\lambda^2}{p^2} + \frac{\nu^2}{n^2} = 1,$$
$$\left(1 - \frac{q^2}{m^2}\right)\frac{\lambda^2}{p^2} + \frac{\mu^2}{m^2} = 1.$$

m et n d'une part, p et q de l'autre, sont les demi-axes des lignes doubles de la développable situées dans les deux plans coordonnés respectivement perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées verticales : λ, μ et ν sont les demi-axes d'une surface du second ordre inscrite dans la développable.

Si nous représentons par a, b et c les demi-axes de l'ellipsoïde considéré, et par r le rayon de la sphère, la développable devant être circonscrite à ces deux surfaces, nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{a^2}{p^2} + \frac{c^2}{n^2} = 1, \\ &\left(1 - \frac{q^2}{m^2}\right)\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{m^2} = 1; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{r^2}{p^2} + \frac{r^2}{n^2} = 1, \\ &\left(1 - \frac{q^2}{m^2}\right)\frac{r^2}{p^2} + \frac{r^2}{m^2} = 1. \end{aligned}\right.$$

On déduit facilement de ces quatre équations les valeurs de m^2, n^2, p^2 et q^2 :

$$m^2 = r^2\frac{b^2 - a^2}{r^2 - a^2}, \quad p^2 = r^2\frac{a^2 - c^2}{r^2 - c^2},$$
$$n^2 = r^2\frac{c^2 - a^2}{r^2 - a^2}, \quad q^2 = r^2\frac{b^2 - c^2}{r^2 - c^2}.$$

Les équations de la courbe de contact de la développable avec une surface inscrite du second ordre sont données à l'art. **559** (1). La première est

$$\frac{p^2 x^2}{\lambda^4} + \frac{q^2 y^2}{\mu^4} = 1.$$

---

(1) Puisque nous avons occasion de revenir sur les développables circonscrites, nous remarquerons que la proposition de l'art. 513 n'est qu'un corollaire d'un théorème plus général qui consiste en ce que les génératrices d'une développable circonscrite à une série de surfaces du second ordre sont divisées homographiquement par les lignes de contact de ces surfaces. On peut obtenir ce théorème par la méthode suivie aux art. 511 et suivants; on peut aussi le déduire, par la théorie des polaires réciproques, d'une proposition de Chasles (*Comptes rendus*, 2e semestre de 1857, p. 1062). Il permet de tracer facilement les projections de la ligne de contact qui passe par un point, quand on connaît trois des lignes doubles.

Remplaçant p^2 et q^2 par leurs valeurs trouvées plus haut, on obtient

$$(a^2-c^2)\frac{x^2}{\lambda^4}+(b^2-c^2)\frac{y^2}{\mu^4}=\frac{r^2-c^2}{r^2}.$$

Pour avoir la projection sur le plan horizontal XOY de la courbe de contact de la développable avec l'ellipsoïde, on remplace λ et μ par a et b, et l'on a

$$\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{c^2}{r^2} \quad (^1).$$

943. On peut arriver à cette seconde équation de la polhodie en calculant la distance r du centre de la surface du second ordre

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

à son plan tangent. On trouve

$$\frac{1}{r^2}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4},$$

x, y et z étant les coordonnées du point de contact. En éliminant z^2 entre ces équations, on obtient l'équation à laquelle nous sommes parvenus par la considération de la développable circonscrite.

943 *bis*. On peut déduire ce résultat de l'équation (16) de l'art. 939*a*.

Les lignes tangentes aux sections normales surosculées par des cercles forment en général trois systèmes. Quand la surface est gauche, l'un d'eux est formé des génératrices rectilignes, mais on peut facilement l'éliminer, car les polynômes

$$\frac{v}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+w\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+u\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{u}{3},$$

$$t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2s\left(\frac{dy}{dx}\right)+r$$

ont alors, comme l'on sait, un facteur commun qui, égalé à zéro, représente ces droites.

---

(1) Pour obtenir une seconde équation d'une polhodie par la méthode de l'art. 942, sans appliquer les formules générales démontrées précédemment (art. 537 à 540), on rapporte l'ellipsoïde, de demi-axes a, b, c, et la sphère concentrique, de rayon r, aux axes de l'ellipsoïde. Puis, exprimant que le plan tangent à l'ellipsoïde en x', y', z' coïncide avec le plan tangent à la sphère en x'', y'', z'', on obtient trois égalités donnant x'', y'', z''. L'équation de la sphère étant satisfaite par ces valeurs, on a une égalité qui, en y supprimant les accents de x', y', z', donne une équation de la polhodie cherchée. L'élimination de z entre cette équation et celle de l'ellipsoïde conduit à la dernière de l'art. 942. (E. L.)

Lorsque la surface est du second ordre, elle possède deux systèmes de génératrices rectilignes : le premier des polynômes est divisible par le second, et le quotient est nécessairement égal à

$$\frac{v}{3t}\frac{dy}{dx} + \frac{u}{3r}.$$

L'équation différentielle des lignes du troisième système, le seul qu'il y ait lieu de considérer, est donc

$$(p^2 + q^2 + 1)\left(\frac{v}{3t}\frac{dy}{dx} + \frac{u}{3r}\right) - (ps + qt)\frac{dy}{dx} - (pr - qs) = 0,$$

ou bien

$$(1) \qquad \left[\frac{v}{3t}(p^2 + q^2 + 1) - (ps + qt)\right]\frac{dy}{dx} + \left[\frac{u}{3r}(p^2 + q^2 + 1) - (pr - qs)\right] = 0.$$

Appliquons cette formule à la surface représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

On trouve d'abord

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad q = -\frac{c^2 y}{b^2 z}, \quad r = -\frac{c^4(b^2 - y^2)}{a^2 b^2 z^3}, \quad s = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3},$$

$$t = -\frac{c^4(a^2 - x^2)}{a^2 b^2 z^3}, \quad \frac{u}{3} = -\frac{c^6(b^2 - y^2)x}{a^4 b^2 z^5}, \quad \frac{v}{3} = -\frac{c^6(a^2 - x^2)y}{a^2 b^4 z^5};$$

et ensuite

$$p^2 + q^2 + 1 = \frac{c^2}{z^2}\left(\frac{c^2 x^2}{a^4} + \frac{c^2 y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^2}\right),$$

$$ps + qt = \frac{c^6 y}{a^2 b^2 z^4}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\right),$$

$$pr - qs = \frac{c^6 x}{a^2 b^2 z^4}\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\right).$$

En portant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve, après quelques réductions qui se présentent spontanément,

$$\frac{y}{b^4}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \frac{b^2 z^2}{c^4}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{x}{a^4}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \frac{a^2 z^2}{c^4}\right) = 0.$$

En éliminant le binôme $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ à l'aide de l'équation (2), on obtient

$$\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y\,dy}{b^2} + \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x\,dx}{a^2} = 0,$$

et, en intégrant, on a

$$(3) \qquad \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2} + \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2} = C.$$

On arrive ainsi à l'équation donnée par Poinsot pour la projection horizontale de la polhodie, pour laquelle le plan tangent est à une distance du centre égale à $\frac{c}{\sqrt{1-C}}$ (1).

944. Nous voyons que les projections sur le plan horizontal XOY des polhodies tracées sur une même surface du second ordre sont des coniques homothétiques dont les axes se confondent, en direction, avec les axes horizontaux de la surface.

Si nous désignons par a' et b' les longueurs des demi-axes de l'une des coniques, nous aurons

$$a'^2 = \frac{a^4}{a^2-c^2}\left(1-\frac{c^2}{r^2}\right), \quad b'^2 = \frac{b^4}{b^2-c^2}\left(1-\frac{c^2}{r^2}\right),$$

d'où

$$\frac{b}{a} = \pm\frac{b^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}}.$$

La *fig.* 372 représente plusieurs polhodies tracées sur un ellipsoïde scalène. Nous avons

$$a = \text{OA}, \quad b = \text{OB}, \quad c = \text{O'C'},$$
$$a > b, \quad b > c.$$

Les projections horizontales des courbes sont des ellipses.

Après avoir déterminé sur les projections verticales les foyers F et f, on obtient par une construction facile les points K et L, qui satisfont aux conditions

$$\text{O'K} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-c^2}}, \quad \text{O''L} = \frac{b^2}{\sqrt{b^2-c^2}};$$

prenant alors les longueurs OP et PQ respectivement égales à O'K et à O″L, nous pouvons tracer la droite OQ, qui est telle que les coordonnées de ses différents points sont les moitiés des axes des diverses ellipses.

945. Les projections des courbes sur le plan vertical perpendiculaire à l'axe moyen BB_1 sont données par l'équation

$$\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2} + \left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)\frac{z^2}{c^2} = 1-\frac{b^2}{r^2}.$$

Elle se réduit à

$$z = \pm\frac{c^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}\,x$$

(1) La démonstration géométrique que nous avons donnée aux art. 940 et 941 a été trouvée par M. Mannheim, à qui nous avions communiqué les résultats du calcul qui précède.

dans le cas particulier où la constante r est égale à b. La polhodie est alors formée en projection de deux droites $O'N'$ et $O'N'_1$, et dans l'espace de deux ellipses. On peut obtenir les droites $O'N'$ et $O'N'_1$, soit par la construction qu'indique la formule que nous venons de trouver, soit en relevant sur le contour apparent $C'A'$ le sommet N de l'ellipse horizontale qui passe par les points B et B_1.

Les projections des autres polhodies sont des hyperboles semblables au système des droites $O'N'$ et $O'N'_1$. On obtient un point M' ou R' de chacune d'elles, en relevant sur le contour apparent $C'A'$ le sommet M ou R de l'ellipse correspondante.

Sur le plan perpendiculaire à l'axe majeur, les projections sont des ellipses comme sur le plan perpendiculaire à l'axe mineur.

A chaque sommet de la surface, toute section normale est surosculée par un cercle, mais il passe seulement deux polhodies aux sommets B et B_1, extrémités de l'axe moyen. Chacun des quatre autres sommets doit être considéré comme formant à lui seul une de ces courbes.

Nous pourrions faire, sur les parties parasites des projections des polhodies, des observations analogues à celles que nous avons présentées à l'art. **927**, pour les projections des lignes de courbure.

Il serait facile de construire pour une valeur de r les trois lignes doubles concentriques de la développable circonscrite, sa courbe de contact avec la sphère, son arête de rebroussement, etc. Nous ne nous arrêterons pas à ces questions, mais nous les indiquons comme des sujets d'exercices graphiques [1].

§ IV. — Lignes géodésiques. — Lignes tangentes aux sections de même courbure.

Définitions et considérations générales.

946. On peut concevoir sur les surfaces certaines lignes dont le tracé dépend des courbures, mais qui diffèrent des courbes que nous avons étudiées, en ce qu'il en passe une infinité par chaque point. De ce nombre, sont les lignes géodésiques et les lignes tangentes aux sections normales de même courbure.

Nous avons déjà parlé des *lignes géodésiques* à l'art. **482**; ce sont des courbes tracées sur une surface, et dont la longueur entre deux quelconques de leurs points est plus courte que celle de toute autre ligne voisine que l'on pourrait tracer sur la surface entre ces points. Nous avons vu que sur une développable une géodésique a tous ses plans osculateurs normaux à la surface.

---

[1] M. Valson a démontré que le produit des rayons de courbure principaux d'une surface du second ordre est constant en tous les points d'une polhodie.

Considérons maintenant une surface quelconque Σ et la géodésique Λ qui passe par deux points m et n. Si une surface est circonscrite à Σ le long de Λ, cette courbe en sera une géodésique, car toute ligne tracée sur Σ entre m et n, et infiniment voisine de Λ, appartient à la surface circonscrite, et, par hypothèse, l'arc mn de Λ est un minimum entre toutes les lignes de ce genre. Or on peut circonscrire à Σ une développable le long de Λ; la courbe Λ en sera une géodésique, et par suite ses plans osculateurs seront normaux à la développable; ils seront donc aussi normaux à la surface inscrite. Nous voyons que le théorème démontré à l'art. **482** pour les développables doit être étendu à une surface quelconque.

La propriété des géodésiques d'avoir leurs plans osculateurs normaux à la surface les caractérise complètement et pourrait servir à les définir. Elle établit une certaine correspondance entre ces lignes et les asymptotiques qui ont leurs plans osculateurs tangents à la surface.

Quant aux courbes tangentes aux sections normales de même courbure, nous nous bornerons à dire que chacune d'elles est caractérisée par une valeur du rayon de courbure des sections normales touchées. Il passe généralement par chaque point deux courbes qui correspondent à un même rayon. Quand cette constante est infinie, on trouve les asymptotiques.

Courbure géodésique.

947. Lorsqu'une courbe s tracée sur une surface Σ est projetée sur le plan tangent en un de ses points, la projection S est une section droite du cylindre projetant; par conséquent, si l'on appelle r et R les rayons de courbure des lignes s et S au point considéré, et γ l'angle que le plan osculateur de la première fait avec le plan tangent, on aura, en vertu du théorème de Meusnier,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\cos\gamma.$$

Quand la courbe s est une asymptotique, γ est nul et il y a égalité entre les courbures $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{r}$. Dans le cas, au contraire, où la ligne s est une géodésique, γ est égal à 90° et $\frac{1}{R}$ est nul. Cette circonstance a conduit à appeler la quantité $\frac{1}{R}$ *courbure géodésique* de la ligne s considérée sur la surface Σ.

Si l'on circonscrit à la surface une développable le long de s, et qu'on la développe sur un plan, le rayon de courbure de la transformée de s sera $\frac{r}{\cos\gamma}$

art. **474** et **819**). Il suit de là que, *lorsqu'une courbe est tracée sur une surface, sa courbure géodésique en un point est la courbure de sa transformée dans le développement de la développable circonscrite dont elle est la ligne de contact.*

948. Nous conservons les notations précédentes, et de plus nous appelons R_1 le rayon de courbure de la section faite dans la développable circonscrite par un plan perpendiculaire à la génératrice rectiligne, et φ l'angle de la courbe s avec cette section.

Le rayon de courbure de la section normale à Σ et tangente à s est $\frac{r}{\sin\varphi}$. Le théorème d'Euler donne par conséquent

$$\frac{\sin\varphi}{r} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1}.$$

Cette équation et celle qui a été donnée à l'article précédent permettent de déterminer deux des quantités engagées dans la question quand les autres sont connues. Il existe quelques applications utiles des constructions que l'on déduit de ces formules, principalement pour les courbes tracées sur un plan flexible et enroulées avec lui sur une développable. Ainsi, connaissant le rayon de courbure de l'ellipse A'B' en un point D' (*fig.* 301) et le rayon OV, on peut déterminer le plan osculateur et le rayon de courbure de la directrice du conoïde au point correspondant *d* (*voir* l'art. **671** pour la génération du conoïde).

LIVRE NEUVIÈME.
SURFACES HÉLICOIDES.

CHAPITRE PREMIER.
THÉORIE GÉNÉRALE.

Définition de l'hélice. — Projection de cette courbe sur un plan parallèle à son axe.

949. On appelle *hélice* une courbe tracée sur un cylindre de révolution, et qui en rencontre toutes les génératrices sous un même angle. Lorsque le cylindre est développé, les génératrices sont des droites parallèles, et la transformée de l'hélice les coupant sous un angle constant est nécessairement une droite. Réciproquement, toute ligne du cylindre dont la transformée est rectiligne rencontre les génératrices sous un angle constant, et par suite est une hélice.

Lorsque l'on développe la surface, un cercle de section droite AE (*fig.* 370) et une hélice AG deviennent des droites (¹) ; la ligne A*a* décrite par leur point d'intersection A est par suite une développante commune de ces courbes (art. **485**).

L'arc AP et le segment PM compris sur une génératrice entre la section droite et l'hélice deviennent, après le développement, les coordonnées *ap* et *pm* du point *m* de la transformée rectiligne où s'est placé le point M. Nous en concluons que, *pour une hélice, les ordonnées rectilignes sont proportionnelles aux abscisses curvilignes*, mesurées sur une section droite à partir du point où les courbes se rencontrent.

On voit encore, en considérant une tangente *a*G, que *la sous-tangente a*E *est égale à l'abscisse curviligne* AE *du point de contact* G.

Deux points A et A_1, dont les abscisses diffèrent d'une circonférence, sont sur

(¹) La *fig.* 370 est une perspective axonométrique dans laquelle les deux axes horizontaux sont également inclinés sur le plan de projection, et qui par conséquent est du nombre de celles que l'on appelle *monodimétriques* (art. 396).

une même génératrice. Leur distance est le *pas* de l'hélice. L'arc $AMGA_1$ compris entre eux forme une *spire*. L'axe du cylindre est souvent appelé l'*axe* de l'hélice.

En désignant par r le rayon du cylindre ou la distance des points de l'hélice à l'axe, l la longueur d'une spire, H le pas de l'hélice, et β l'angle que forme la courbe avec une section droite, ou le complément de celui sous lequel elle rencontre les génératrices, on a

$$(1) \qquad r = \frac{H}{2\pi}\cot\beta, \quad l\sin\beta = H.$$

950. Nous aurons souvent à considérer la longueur $\frac{H}{2\pi}$; nous l'appellerons le *pas réduit* de l'hélice, et nous la représenterons par h; d'où

$$(2) \qquad h = \frac{H}{2\pi}.$$

Nous aurons alors

$$(1\ bis) \qquad r = h\cot\beta, \quad l\sin\beta = 2\pi h.$$

Le pas réduit est le rapport de l'ordonnée rectiligne PM d'un point M de l'hélice à son azimut AOP; c'est aussi le rayon de la circonférence dont la longueur est égale au pas. On construit le pas réduit en le considérant comme le quatrième terme d'une proposition dont les trois premiers sont successivement une circonférence rectifiée, son rayon et le pas de l'hélice. Quand le pas d'une hélice sera donné, nous supposerons toujours que le pas réduit est connu, et réciproquement.

951. Pour construire la projection verticale d'une hélice située sur un cylindre vertical donné, lorsque l'on connaît son pas et l'un de ses points (A, A'), on partage le cercle de section droite AB (*fig.* 373), qui est la projection horizontale de cette courbe, en un certain nombre de parties égales, douze par exemple, en prenant le point A pour un des points de division; on mène par ces différents points des perpendiculaires à l'horizontale XY du point A'; on porte un douzième du pas au-dessus de XY, sur la première de ces droites à partir de la trace ou origine A, deux douzièmes sur la seconde, et ainsi de suite. On obtient de cette manière treize points par spire.

Sur la *fig.* 373, l'origine donnée A est sur le diamètre du cercle qui est perpendiculaire à la ligne de terre. Cette circonstance introduit dans les constructions une symétrie qui les rend plus faciles.

La tangente à l'hélice en un point (n, n') a sa trace horizontale a sur la tangente au cercle AB au point n, à une distance de ce point égale à la longueur rectifiée de l'abscisse curviligne An (art. **949**). La détermination de ce point permet de construire la projection verticale $a'n'$ de la tangente. Le lieu des traces des tangentes forme une développante du cercle AB.

952. Il est facile d'obtenir l'équation de la projection verticale A'A'' de l'hélice (*fig.* 373). Si nous appelons z l'ordonnée pm' d'un point (m, m') de l'hélice, nous aurons

$$z = k \operatorname{arc} \mathrm{A}m,$$

k étant un coefficient constant. L'abscisse x du point m' étant la longueur $\mathrm{A}'p$ égale au sinus de l'arc Am dans le cercle AB, dont nous désignons le rayon par r, nous obtenons

$$x = r \sin \frac{\mathrm{A}m}{r}.$$

Ces deux équations donnent

$$x = r \sin \frac{z}{kr}.$$

Pour avoir la valeur de k en fonction du rayon r et du pas H, nous remarquons que, quand l'abscisse est r, l'ordonnée z est le quart de H. On a donc, en vertu de l'équation précédente,

$$r = r \sin \frac{\mathrm{H}}{4kr}, \quad \text{d'où} \quad k = \frac{h}{r},$$

et par suite l'équation de la courbe devient

$$x = r \sin \frac{z}{h}. \tag{3}$$

On voit que la projection d'une hélice sur un plan perpendiculaire à son axe est une sinusoïde (art. **147**).

953. Un arc croît plus rapidement que son sinus; par conséquent, à partir de l'origine A', l'ordonnée z croît plus rapidement que l'abscisse x, et, d'un côté comme de l'autre, la courbe tourne sa convexité vers la ligne de terre : elle a donc une inflexion en A'. On arrive au même résultat, soit en faisant le développement du cylindre sur le plan tangent en A', soit en s'appuyant sur le théorème démontré à l'article **474**. Par la première manière, on voit que les points de la sinusoïde situés de part et d'autre de la ligne de terre se transportent de différents côtés pour se rendre sur la tangente en A'; par la seconde, on remarque que, l'hélice ayant pour transformée une droite, son plan osculateur est toujours normal au cylindre, et que par suite au point A' il est perpendiculaire au plan vertical.

Nous voyons, par cette dernière considération, que la normale principale d'une hélice en un point (A, A') est la perpendiculaire (AO, A') abaissée de ce point sur l'axe.

Projection oblique d'une hélice sur un plan perpendiculaire à son axe.

934. Si un cercle horizontal AB (*fig.* 374) tourne autour de son centre O, et s'élève en même temps de manière que ce centre parcoure une verticale (O, A'A''), ces deux mouvements étant d'ailleurs uniformes, un quelconque de ses points tel que (A, A') décrira une hélice. Toute hélice peut être considérée comme engendrée de cette manière.

Supposons maintenant que le cercle mobile soit éclairé par des rayons parallèles à une droite (R, R') : son ombre sur le plan horizontal sera le même cercle AB qui tournera autour de son centre O, pendant que ce point s'avancera sur la droite Ox parallèle à R.

Lorsque le cercle AB aura achevé une révolution en s'élevant, l'ombre O_1 de son centre sera parvenue en D, et le point de contact du cercle d'ombre avec la droite Aa parallèle à R aura atteint la position C, après avoir décrit sur le cercle la circonférence entière et sur la droite le segment AC. Eu égard aux sens des mouvements, si ces longueurs sont égales, c'est-à-dire si l'on a

$$OD = 2\pi \times OA,$$

le cercle d'ombre aura roulé sans glisser sur la droite Aa. Quand cette condition est remplie, l'ombre que projette sur le plan horizontal l'hélice engendrée par le point (A, A') du cercle est la courbe décrite par le point A de la circonférence AB, lorsqu'elle roule sur la droite Aa.

Nous appelons γ l'angle que les rayons de lumière font avec le plan horizontal, r le rayon du cercle AB, et H la hauteur qui correspond à une révolution, ou le pas de l'hélice (AB, A'A'') : l'équation ci-dessus devient

$$H \cot\gamma = 2\pi r;$$

ou, en introduisant le pas réduit h,

$$h \cot\gamma = r.$$

En se reportant à la première des équations (1 *bis*), on voit que la condition consiste en ce que les rayons doivent avoir la même inclinaison sur le plan horizontal que les tangentes à l'hélice.

On appelle *cycloïde* la courbe engendrée par un point d'un cercle qui roule sur une droite sans glisser ; nous pouvons donc énoncer ainsi le théorème que nous venons de démontrer : *La projection oblique d'une hélice sur un plan perpendiculaire à son axe est une cycloïde, lorsque les projetantes ont la même inclinaison sur* *ce plan que les tangentes à l'hélice.* On voit encore que *toute cycloïde est l'ombre d'une hélice pour une direction donnée de rayons parallèles.*

Une cycloïde AC a des rebroussements aux points A et C, où elle rencontre la droite de roulement Aa, car ces points sont les ombres de ceux de l'hélice où la tangente est parallèle aux rayons de lumière (art. **217**).

953. Quand les rayons de lumière ont une inclinaison différente de celle des tangentes à l'hélice, on peut déterminer sur le rayon OA (*fig.* 375) une longueur OP ou g qui satisfasse à l'équation

$$g = h \cot \gamma.$$

Le point P, étant entraîné dans le mouvement du cercle, engendrera une hélice dont l'ombre sera la cycloïde décrite par le même point P, lorsque le cercle dont le rayon est OP roule sur sa tangente Pp. Les cercles AB et PK étant d'ailleurs supposés former un système invariable, on voit que l'ombre de l'hélice décrite par le point A est la courbe que ce même point engendre lorsque le cercle PK roule sur sa tangente Pp.

Quand un cercle roule dans un plan sur une de ses tangentes, la courbe décrite par un point du plan entraîné dans le mouvement est appelée *cycloïde raccourcie* ou *cycloïde allongée*, suivant que le point est dans l'intérieur ou à l'extérieur du cercle. Nous pouvons donc dire que *la projection oblique d'une hélice sur un plan perpendiculaire à son axe est une cycloïde raccourcie ou allongée, suivant que les projetantes sont plus ou moins inclinées sur ce plan que les tangentes à l'hélice* [1].

Pour construire le rayon g du cercle générateur, nous prenons une hauteur A″G égale au quart du pas A′A″, puis menant du point G une horizontale et du point A″ un rayon de lumière A″C′, nous obtenons le segment GI′ égal à $\frac{1}{4}H\cot\gamma$. Nous portons sur la tangente Bb une longueur BJ égale au quart de cercle BE : l'angle BOJ a pour tangente $\frac{1}{2}\pi$. Nous projetons I′ en I, et I en K : le segment OK est le rayon cherché. La grandeur de l'angle BOJ est 57°31′6″. Cette construction revient, en ce qui concerne le pas réduit h, aux tracés indiqués à l'article **950**, mais nous n'avons opéré que sur le quart de la circonférence et le quart du pas.

Quand les projetantes sont verticales, le rayon OP du cercle mobile est nul, et la cycloïde allongée se réduit au cercle AB.

---

[1] Ce théorème et le précédent sont dus à Guillery. *Voir* une communication de Th. Olivier à la Société Philomathique, 1847.

Surfaces hélicoïdes. — Hélicoïdes réglés.

956. On appelle *surface hélicoïdale*, ou simplement *hélicoïde*, la surface lieu des hélices qui ont un axe commun et un même pas, et qui passent par les différents points d'une directrice. On peut regarder cette surface comme engendrée par la directrice qui tourne autour de l'axe d'un mouvement uniforme, et qui a en même temps un mouvement uniforme de translation parallèle à la direction de cette droite; car, si l'axe est supposé vertical, les augmentations des hauteurs des points de la courbe sont proportionnelles aux accroissements de leurs azimuts; ces points décrivent par suite des hélices ayant un axe commun et un même pas : on dit qu'ils ont un même *mouvement hélicoïde*.

Nous voyons que la courbe que nous avons prise pour directrice peut être considérée comme une génératrice. Elle est appelée *méridienne* quand elle est plane et que son plan contient l'axe. Un hélicoïde est déterminé quand on connaît l'axe, le pas des hélices et une directrice.

Lorsqu'une surface se meut de manière que ses différents points décrivent autour d'un axe des hélices de même pas, son enveloppe est un hélicoïde, car deux enveloppées consécutives ont toujours les mêmes positions relatives, et par suite la caractéristique est une courbe déterminée et invariable sur l'enveloppe.

Une surface hélicoïde est coupée suivant des hélices par tout cylindre de révolution ayant le même axe qu'elle.

957. Lorsque la directrice que doivent rencontrer les hélices est une droite (BC, B'C') (*fig.* 376), cette ligne pouvant être considérée comme une génératrice, la surface est un *hélicoïde réglé*. L'hélice qui passe au pied (A, A') de la commune perpendiculaire à la génératrice rectiligne et à l'axe est appelée *hélice de gorge* : sa distance à l'axe est la plus petite, et par suite l'angle de ses tangentes avec le plan horizontal est le plus grand.

Si l'on considère sur la génératrice un segment déterminé B'C', et qu'on mène par le point C' une verticale et par le point B' une horizontale, on aura un triangle rectangle $C'C'_1B$ qui sera le même dans toutes les positions de la droite (BC, B'C'), car les points de cette ligne s'élevant de quantités égales, le côté $C'C'_1$ conservera la même longueur. L'angle $C'B'C'_1$ que la génératrice forme avec le plan horizontal est donc constant, et par suite *le cône directeur d'un hélicoïde réglé est de révolution*.

958. En tout point de la surface il passe une hélice; le plan tangent contient la tangente à cette courbe et la génératrice. En un point (M, M') (*fig.* 376) la tangente à l'hélice a pour projection horizontale la perpendiculaire MT au rayon OM; le plan tangent contient donc deux droites dont les projections horizontales MT et BC sont différentes, et par suite il n'est pas vertical. Au point (A, A') la tangente à l'hélice et la génératrice se projettent sur BC; par conséquent, si ces droites sont distinctes dans l'espace, le plan vertical BC sera tangent en (A, A'), et l'hélicoïde aura deux plans tangents différents aux points (A, A') et (M, M) d'une même génératrice; cette surface sera donc gauche.

On a un *hélicoïde développable* lorsque la génératrice est tangente à l'hélice de gorge, car la surface est alors le lieu des tangentes à une courbe gauche. Pour que cette circonstance se présente, il faut que l'on ait

$$h \cot \alpha = b,$$

h étant le pas réduit commun des hélices, α l'angle de la génératrice avec le plan horizontal et b le rayon du cylindre sur lequel l'hélice de gorge est tracée [1].

Ligne de striction de l'hélicoïde gauche. — Paramètre d'une génératrice.

959. Nous savons que le plan tangent à une surface gauche, en un point situé à l'infini sur une génératrice donnée, est parallèle au plan tangent au cône directeur le long de la génératrice correspondante (art. **615**). Cette proposition va nous permettre de déterminer le point central d'une génératrice d'un hélicoïde gauche.

Soient (O, O'Z) l'axe de la surface (*fig.* 377), (EF, E'F') l'hélice de gorge et (AG, A'G') une génératrice parallèle au plan vertical : nous prenons le cercle EF pour trace horizontale du cône directeur, et nous déterminons la position S que le sommet de ce cône occupe sur l'axe, en menant la droite E'S parallèle à G'A'.

---

(1) Dans un Mémoire sur les hélicoïdes réglés (*Bulletin de l'École de Cluny*, 1877), j'ai proposé, pour la brièveté, de remplacer les expressions *surface de la vis à filets triangulaires*, *surface de la vis à filets carrés*, par celles-ci, *hélicoïde aigu*, *hélicoïde droit*. M. Jules de la Gournerie m'a exprimé l'intention de modifier la première de ces dénominations, et de les généraliser.

Soient une hélice directrice d'un hélicoïde réglé, d'axe OZ; la tangente CB à l'hélice en un de ses points C; une génératrice CA de l'hélicoïde. CA étant située dans le plan tangent P en C au cylindre sur lequel est l'hélice; par suite celle-ci est l'*hélice de gorge*; nous nommerons le cylindre qui la contient *cylindre de gorge*. Appelons ε l'angle de CA avec CB.

Lorsque ε est nul, l'hélicoïde engendré est l'*hélicoïde développable*.

Supposons que CA tourne autour de C dans le plan P; dans une position, CA est perpendiculaire à CB, et dans une autre, à OZ; d'où il résulte trois espèces d'hélicoïdes réglés que nous proposons de nommer *hélicoïde général oblique*, *hélicoïde général droit*, *hélicoïde général à plan directeur*.

Lorsque le rayon du cylindre de gorge devient nul, le premier est la *surface de la vis à filets triangulaires*, les deux autres donnent la *surface de la vis à filets carrés*. Ces deux dernières expressions pourraient donc être avantageusement remplacées par les dénominations suivantes : *hélicoïde oblique*, *hélicoïde droit*. (E. L.)

Le plan vertical AG est perpendiculaire au plan tangent au cône le long de la droite (EO, E'S), parallèle à la génératrice considérée de l'hélicoïde, et par suite il est le plan central de cette génératrice (art. **622**); mais nous avons vu qu'il touche la surface au point (A, A') de l'hélice de gorge : *le point central d'une génératrice est donc le point où elle rencontre l'hélice de gorge, et cette courbe est la ligne de striction de la surface.*

960. Proposons-nous de déterminer le paramètre de la génératrice (GA, G'A' *fig.* 377).

En appelant k_1 ce paramètre, p la distance de la génératrice considérée à la génératrice voisine, et σ l'angle de ces droites, nous avons (art. **623**)

$$k_1 = \frac{p}{\sigma}.$$

Puisque l'hélice de gorge est la ligne de striction, si l'on prend sur cette courbe une longueur $A'm'$ infiniment petite, le point m' sera le point central de la génératrice voisine de (GA, G'A'). On peut regarder ce point comme étant dans le plan vertical AG, car il n'en est éloigné que d'une longueur infiniment petite du second ordre. La longueur p est donc la perpendiculaire abaissée du point m' sur la génératrice A'G', et l'on a

$$p = A'm' \sin m'A'n;$$

ou bien, en désignant par α et β les angles que la génératrice et la tangente à l'hélice font avec le plan horizontal,

$$p = \frac{A'q}{\sin\beta}\sin(\beta - \alpha).$$

Pour avoir σ nous allons considérer sur le cône directeur les deux génératrices respectivement parallèles à celles de l'hélicoïde qui passent aux points (A, A') et (m, m'). La première est (EO, E'S), et nous obtenons la projection horizontale de la seconde en traçant le rayon Ot parallèle à la tangente mT. Nous avons alors

$$\sigma = \frac{Et}{E'S}, \quad \text{d'où} \quad \sigma = \frac{OE}{E'S}\widehat{EOt},$$

et enfin

$$\sigma = \widehat{EOt}\cos\alpha.$$

En portant dans l'expression de k_1 les valeurs que nous venons de trouver pour p et σ, on obtient

$$k_1 = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta\cos\alpha} \times \frac{A'q}{\widehat{EOt}}.$$

Mais EOt est l'angle dont chaque point de la génératrice tourne autour de l'axe, pendant qu'il s'élève de la hauteur $A'q$; on a donc

$$\frac{A'q}{EOt} = h,$$

et par suite

$$(4) \qquad k_1 = h\left(1 - \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}\right).$$

Nous avons d'ailleurs la relation (art. **958**)

$$(5) \qquad \tan\beta = \frac{h}{b};$$

la formule (4) peut donc être remplacée par une des suivantes :

$$(6) \qquad k_1 = h - b\tan\alpha,$$

$$(7) \qquad k_1 = b(\tan\beta - \tan\alpha).$$

Nous savons que la surface est développable quand les angles α et β sont égaux (art. **958**); la formule donne alors pour k_1 une valeur nulle, comme cela devait être.

Les valeurs de h, b, α et β sont constantes pour un héliçoïde, et par suite toutes les génératrices ont le même paramètre. Il était facile de prévoir ce résultat, car deux génératrices consécutives ont toujours les mêmes positions relatives.

961. Les équations (4), (6) et (7) donnent simplement la grandeur absolue du paramètre, car nous n'avons fait aucune convention sur les signes des quantités qui entrent dans les seconds membres, et, en raisonnant sur la *fig.* 377, nous les avons toutes indistinctement considérées comme positives. Nous allons présenter sur ce sujet quelques observations, qui n'offrent aucun intérêt pour les constructions que l'on déduit directement de la considération des héliçoïdes, mais qui sont indispensables pour l'interprétation des formules.

Lorsque le point qui décrit une hélice s'élève, il tourne vers la droite ou vers la gauche d'une personne qui serait placée sur l'axe du cylindre et qui regarderait ce point. L'hélice est *dextrorsum* dans le premier cas et *sinistrorsum* dans le second. Nous avons en général représenté les hélices sinistrorsum, parce que ce sont celles que l'on trouve dans les vis qui sont le plus souvent employées.

Nous mesurerons les ordonnées positives de bas en haut et les azimuts positifs de droite à gauche, de manière que l'azimut du point A (*fig.* 377) soit donné par l'arc EA et égal à $+90°$. Alors le pas, ou la hauteur dont le point qui décrit la courbe s'élève lorsque son azimut augmente de $+360°$, est positif ou négatif suivant que l'hélice est sinistrorsum ou dextrorsum.

Nous considérerons en général le rayon b comme positif et $\cot\beta$ comme ayant le même signe que le pas : la formule $b = h\cot\beta$ sera ainsi maintenue sans altération. Enfin $\cot\alpha$ aura le même signe que $\cot\beta$ ou un signe contraire, suivant que les angles aigus formés par l'hélice de gorge et par la génératrice avec le plan horizontal seront ou non tournés d'un même côté. Lorsque, pour généraliser les résultats d'une formule, nous donnerons au rayon b une valeur négative, la valeur correspondante de $\cot\beta$ devra avoir un signe contraire à celui du pas.

D'après cela, et eu égard à la disposition de la *fig.* 377, les quantités b, h, $\cot\alpha$ et $\cot\beta$ sont positives.

Si h était nul, la formule (6) donnerait pour k_1 une valeur négative, mais alors la surface serait un hyperboloïde de révolution, et la génératrice (AG, A'G') se trouverait dans la même position que la génératrice (*ae*, *a'e'*) de la *fig.* 312. Or nous avons vu à l'art. **727** que le paramètre de cette dernière est positif : la formule (6) donne donc à k_1 un signe contraire à celui qui résulte de nos conventions. Nous devons par suite considérer k_1 comme une quantité égale au paramètre, mais de signe contraire, et si nous appelons k ce paramètre lui-même, nous aurons

(4 *bis*) $$k = h\left(\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} - 1\right),$$

(6 *bis*) $$k = b\tan\alpha - h,$$

(7 *bis*) $$k = b(\tan\alpha - \tan\beta).$$

Par le point E' (*fig.* 377), nous traçons une droite E'L parallèle à K'A' : le paramètre k est égal au segment LS que l'on considérera comme ayant son origine au point L, et qui, étant dirigé de haut en bas, sera négatif.

Hélicoïdes réglés applicables les uns sur les autres.

962. Nous supposons qu'on fasse varier α, b et h, et nous allons chercher les relations qui doivent exister entre ces trois quantités pour que les hélicoïdes qu'elles déterminent puissent être appliqués les uns sur les autres.

Il faut d'abord que le paramètre des génératrices ne change pas (art. **775**) ; on doit par suite considérer la quantité k comme constante dans les équations qui précèdent.

Il faut encore que, lorsque l'on aura placé deux hélicoïdes de manière qu'ils se raccordent le long d'une génératrice, et que l'on déformera le second, les éléments successifs de son hélice de striction viennent se placer sur l'hélice de striction du premier. Cela exige que l'angle de cette ligne avec les génératrices, qui est égal à $(\alpha-\beta)$, soit le même dans les deux surfaces. Par conséquent, si l'on appelle ε un angle constant quelconque, on doit avoir

$$\alpha-\beta=\varepsilon.$$

En portant la valeur $(\alpha-\varepsilon)$ de β dans les équations (4 *bis*), (5) et (7 *bis*), on obtient

$$(8)\qquad h=\frac{k}{\tan\alpha\cot(\alpha-\varepsilon)-1},$$

$$(9)\qquad b=h\cot(\alpha-\varepsilon),$$

$$(10)\qquad b=\frac{k}{\tan\alpha-\tan(\alpha-\varepsilon)}.$$

Ces trois équations n'en forment que deux réellement distinctes.

Si l'on fait varier α entre $(\varepsilon+90^\circ)$ et $(\varepsilon-90^\circ)$, les équations (8) et (10) donneront les valeurs correspondantes de h et de b, pour des grandeurs données des constantes k et ε; et l'on aura une série complète d'hélicoïdes gauches pouvant être appliqués les uns sur les autres.

963. Les systèmes suivants méritent d'être remarqués :

1°	$\alpha=\varepsilon$,	$h=0$,	$b=k\cot\varepsilon$;
2°	$\alpha=90^\circ+\varepsilon$,	$h=-k$,	$b=0$;
3°	$\alpha=0$,	$h=-k$,	$b=k\cot\varepsilon$;
4°	$\alpha=90^\circ$,	$h=0$,	$b=0$.

Dans le premier cas, la surface devient un hyperboloïde gauche de révolution. Dans le second, l'hélice de striction se réduit à l'axe. Dans le troisième cas, les génératrices sont toutes parallèles à un plan perpendiculaire à l'axe : l'hélicoïde est donc un conoïde; il a le même pas que la surface précédente, et son rayon est égal à celui du cercle de gorge de l'hyperboloïde.

Enfin, la surface n'existe pas quand les génératrices sont parallèles à l'axe. Le résultat que les formules donnent dans ce cas indique que, quand α approche indéfiniment de 90°, le pas réduit h et le rayon b convergent vers zéro.

Dans le cas particulier où ε est égal à -90°, la seconde surface se confond avec la troisième, et la série comprend un hélicoïde dont les génératrices rectilignes rencontrent l'axe à angle droit. L'hyperboloïde est alors réduit à l'axe, et ne présente plus qu'une limite.

964. Pour avoir la relation qui existe entre b, h et les constantes du problème, il faut éliminer α entre les équations (9) et (10). En faisant d'abord disparaître l'angle $(\alpha - \varepsilon)$, on obtient

$$b \tan \alpha = h + k.$$

L'équation (9) peut être mise sous la forme suivante :

$$(h \tan \varepsilon - b) \tan \alpha + b \tan \varepsilon + h = 0.$$

L'élimination de α entre ces deux équations donne

$$(11) \qquad b^2 + h^2 - k \cot \varepsilon . b + kh = 0.$$

Si l'on considère b et h comme des coordonnées rectangulaires variables, cette équation représentera un cercle.

Nous traçons deux axes rectangulaires OB et OH (*fig.* 384); nous prenons sur le second une longueur OK égale à $-k$, et nous menons la droite KA qui rencontre OH sous un angle OKA complémentaire de ε : le cercle passant par les points A, O et K est celui que détermine l'équation (11). Une grandeur OB_1 étant attribuée à b, on trouve, en traçant la droite mB_1M parallèle à OH, que les valeurs correspondantes de h sont

$$+ B_1M, \quad \text{et} \quad - B_1m.$$

Dans le cas particulier où ε est égal à 90°, le cercle a pour diamètre le segment OK.

965. En ajoutant les équations (8) et (10), après avoir multiplié les deux membres de la première par $\tan\alpha$, nous obtenons

$$h \tan \alpha + b = \frac{k \tan \alpha \tan(\alpha - \varepsilon)}{\tan \alpha - \tan(\alpha - \varepsilon)} + \frac{k}{\tan \alpha - \tan(\alpha - \varepsilon)};$$

$$b + h \tan \alpha = k \cot \varepsilon;$$

d'où

$$\tan \alpha = \frac{k \cot \varepsilon - b}{h}.$$

Si nous remplaçons les différentes quantités du second membre par leurs grandeurs prises sur la *fig.* 384, en supposant b égal à OB_1, nous aurons

$$\tan \alpha = \frac{OA - OB_1}{B_1M}, \quad \tan \alpha = - \frac{OA - OB_1}{B_1 m}.$$

Traçons les droites MA et mA : l'équation que nous venons de trouver montre que les valeurs de α qui correspondent à la grandeur OB_1 de b sont B_1MA et $(180^\circ - B_1mA)$ ou H_1AM et H_1Am, la droite AH_1 étant parallèle à AH. Si le point M était sur l'arc AG, il faudrait considérer l'angle α comme aigu, et prendre la droite AH_2 pour un de ses côtés.

On peut d'ailleurs faire la construction en ordre inverse, et se donner, au lieu du rayon b du cylindre sur lequel l'hélice de gorge est tracée, le pas réduit h ou l'angle α des génératrices avec le plan horizontal. On détermine immédiatement deux quelconques de ces quantités quand la troisième est connue, et l'on a un héliçoïde gauche appartenant à la série générale déterminée par les valeurs de k et de ε. Le cercle OKA donne donc une solution complète du problème [1].

Les abscisses des points du cercle les plus éloignés de l'axe OH, et les ordonnées de ceux qui sont le plus loin de l'axe OB, sont les valeurs extrêmes de b et de h. On reconnaît ainsi que le pas réduit h et le rayon b ont l'un et l'autre un maximum positif et un maximum négatif, et l'on a un moyen facile de déterminer les grandeurs de la variable α qui leur correspondent.

Développable asymptote d'un héliçoïde gauche.

966. Considérons deux héliçoïdes gauches ayant un même axe, un même pas, et dans lesquels les génératrices AG et A_1G_1, parallèles au plan vertical, ont une même projection A'G' (*fig.* 378). Le plan (G_1G', G'A'), qui contient ces deux droites et qui est perpendiculaire au plan central de chacune d'elles, touche les deux héliçoïdes au point infiniment éloigné où elles se rencontrent. Si les deux génératrices se transportent d'un même mouvement pour décrire les héliçoïdes, leur plan sera toujours tangent à l'infini à ses surfaces, et par suite elles se raccordent le long d'une hélice tracée sur un cylindre d'un rayon infini.

Il suit de là qu'en faisant varier le rayon de l'hélice de gorge d'un héliçoïde gauche, on peut obtenir une série d'héliçoïdes réglés, tous asymptotes les uns des autres; mais l'un d'eux est développable, car, lorsque le rayon variable est égal à la longueur r déterminée par l'équation

$$r = h \cot \alpha,$$

la génératrice, qui fait toujours avec le plan horizontal l'angle α, est tangente à l'hélice de gorge. Cet héliçoïde est la développable asymptote de tous les autres.

On peut obtenir le rayon r par une construction analogue à celle qui est expliquée à la fin de l'art. **955**.

---

(1) Cette construction élégante a été donnée par Bour dans son Mémoire sur la déformation des surfaces.

Hélices doubles de l'hélicoïde réglé.

967. Soient BC et B_1C_1 (*fig.* 385) les projections horizontales de deux génératrices, et 2τ l'angle AOA_1 : la hauteur du point A_1 au-dessus du point A est $2\tau h$; le point I, considéré comme appartenant à la droite BC, est élevé au-dessus du point A d'une quantité $b \tang \tau \tang \alpha$, b et α désignant, comme précédemment, la distance de la génératrice à l'axe et son angle avec le plan horizontal. Il suit de là que si l'on a

$$\tau h - b \operatorname{tang} \tau \operatorname{tang} \alpha = 0,$$

les deux génératrices BC et B_1C_1 se couperont dans l'espace.

On peut déterminer graphiquement les valeurs de τ qui satisfont à cette condition, en cherchant les points de rencontre des courbes représentées par les équations

$$\rho = \tau h, \quad \rho = \operatorname{tang} \tau \operatorname{tang} \alpha,$$

ρ et τ étant des coordonnées polaires ou des coordonnées rectilignes. Il y a une infinité de solutions.

On peut supposer que la droite BC et les diverses génératrices qu'elle rencontre sont entraînées dans l'espace d'un même mouvement hélicoïde, de manière qu'elles décrivent toutes la surface ; le point I et les autres points de rencontre engendreront alors des hélices doubles. On voit ainsi que les nappes de la surface se coupent suivant une série indéfinie d'hélices.

CHAPITRE II.

HÉLICOÏDE DÉVELOPPABLE.

Considérations générales.

968. Un hélicoïde développable est déterminé quand on connaît l'hélice arête de rebroussement : sur la *fig.* 379 l'arc considéré de cette courbe est (AB, A'B'). La trace horizontale de la surface, lieu des traces des tangentes à l'hélice, est la développable $Ageb$ du cercle AB : lorsqu'elle est construite, on obtient avec précision la position des diverses génératrices. Nous en avons déterminé deux

$(Gg, G'g')$, $(Bb, B'b')$ parallèles au plan vertical, et une troisième $(Ee, E'e')$ dans une situation quelconque.

Nous savons construire le cône directeur d'un hélicoïde réglé, et par conséquent nous pourrons déterminer les plans tangents à un hélicoïde développable, et les asymptotes des branches infinies de ses sections planes (art. **470**). Nous allons examiner successivement ces problèmes.

Plans tangents.

969. Le plan tangent à un hélicoïde développable en un point quelconque (n, n') (*fig.* 379) est tangent tout le long de la génératrice $(Ee, E'e')$ qui passe en ce point : sa trace Tt est donc tangente en e à la développante du cercle trace de la surface, et par suite perpendiculaire à la droite Ee. Il résulte de là qu'une génératrice est la ligne de plus grande pente du plan tangent qui la contient, et que tous les plans tangents font avec le plan horizontal des angles égaux à celui des génératrices avec ce plan. La surface est donc d'égale pente. Nous aurions pu arriver immédiatement à ce résultat en remarquant que le cône directeur est de révolution.

970. Proposons-nous maintenant de *mener à un hélicoïde développable un plan tangent par un point non situé sur la surface.*

Nous nous donnons l'hélicoïde par la projection horizontale ABC de l'arête de rebroussement (*fig.* 380), l'arc de développante $bgAec$ trace de la partie considérée de la surface, et une génératrice $(Cc, C'c')$; le point donné est (F, F').

Nous construisons le cône directeur en plaçant son sommet au point (F, F') : une de ses génératrices est la droite $(Ff, F'f')$ parallèle à $(Cc, C'c')$; sa trace horizontale est le cercle qui a son centre en F et dont le rayon est Ff.

Le plan cherché fait avec le plan horizontal le même angle que la droite $(Cc, C'c)$; comme d'ailleurs il passe par le point (F, F'), il est tangent au cône directeur, et sa trace, que nous savons être tangente à la développante bAe, doit de plus toucher le cercle Ff.

La tangente commune ee_1 est la trace d'un plan qui satisfait aux conditions du problème, car les génératrices projetées sur les droites parallèles Ee et Fe_1 font avec le plan horizontal des angles égaux et dirigés dans le même sens ; elles sont donc parallèles, et par suite le plan contenant la droite ee_1 et le point (F, F') touche l'hélicoïde le long de la génératrice Ee. Il n'en est pas de même des génératrices projetées sur les droites hH et h_1F : elles ne s'élèvent pas dans le même sens, et l'on doit les considérer comme formant avec le plan horizontal des angles supplémentaires. La tangente commune hh_1 ne correspond donc pas à une solution.

La droite gg_1 est la trace d'un plan tangent passant par le point (F, F'), car la génératrice gG touche l'arête de rebroussement au-dessous du plan horizontal, et se trouve bien parallèle à la génératrice g_1F du cône directeur. La droite ii_1 doit être rejetée ainsi qu'une autre tangente commune qui aurait son point de contact sur la développante près du point A, et que nous n'avons pas tracée par crainte de porter un peu de confusion sur l'épure.

Si l'on a quelque doute sur la position relative, dans l'espace, des deux génératrices Fh_1 et Hh, on le dissipera en construisant leurs projections verticales.

971. Nous allons maintenant résoudre le problème de *mener à un hélicoïde développable un plan tangent parallèle à une droite donnée* (SD, S'D') (*fig.* 381 et 382). On connaît la trace bAc de la partie considérée de la surface, et l'une des génératrices (cE, $c'E'$).

Concevons un plan passant par la droite (SD, S'D') et parallèle au plan cherché ; il fera avec le plan horizontal le même angle que les génératrices de la surface ; il sera donc tangent au cône directeur placé de manière à avoir son sommet en un point (S, S') de la droite. La trace du plan cherché est par conséquent parallèle à l'une des tangentes Dm et Dn à la trace horizontale du cône directeur ; elle est d'ailleurs tangente à la développante bAc. Ces conditions déterminent quatre droites : trois d'entre elles gg_1, hh_1 et kk_1 sont les traces de plans qui satisfont au problème. La quatrième ii_1 est à rejeter, car le plan tangent qu'elle détermine n'est pas parallèle au plan tangent au cône directeur le long de la génératrice Sn : les inclinaisons de ces plans sont égales, mais de sens contraire.

Sections planes.

972. Pour construire l'intersection d'une surface réglée par un plan, on détermine les rencontres, avec le plan, d'un certain nombre de génératrices convenablement espacées ; les branches infinies correspondent aux génératrices parallèles au plan sécant, et par suite à celles des génératrices du cône directeur qui sont contenues dans un plan mené par le sommet de ce cône, et parallèle au plan sécant.

Soient (*fig.* 383)

(An, A'n') l'hélice arête de rebroussement d'un hélicoïde développable ;
(GB, G'B') une génératrice parallèle au plan vertical ;
AV la développante du cercle trace horizontale de la surface ;
(P, P') le plan sécant.

Nous déterminons le sommet (O, S) du cône directeur, lorsque ce cône a pour trace le cercle AB (art. **959**), et nous faisons passer par ce point un plan parallèle à (P, P') ; sa trace horizontale coupe la trace du cône en deux points m et q :

les génératrices correspondantes du cône sont parallèles au plan sécant : nous considérerons seulement celle qui est projetée sur Om.

Quand la génératrice OA du cône prend la position Om, la génératrice parallèle BG de l'hélicoïde se place en nL et a sa trace en L. Le plan tangent à la surface le long de la droite (nL, n'L') a pour trace la droite LH perpendiculaire à nL. L'asymptote, intersection du plan sécant et du plan tangent le long de la génératrice nL, perce le plan horizontal au point H où se coupent les traces de ces plans; elle est d'ailleurs parallèle aux génératrices (Om, Sm') et (nL, n'L') du cône directeur et de la surface; il est donc facile de tracer ses projections HR et H'R'.

La droite nL est la projection d'une infinité de génératrices qui ont leurs traces aux différents points où nL rencontre la développante indéfinie AV. A chacune d'elles correspond une branche infinie avec asymptote. La génératrice du cône directeur qui a sa trace en q fait trouver une autre série de branches infinies. On voit donc que, quand l'angle α des génératrices avec le plan horizontal est plus petit que l'angle β du plan sécant avec le même plan, la section a deux branches infinies avec asymptotes, dans chaque partie de la surface qui correspond à une spire de l'arête de rebroussement.

Si l'angle α était égal à β, le plan sécant serait parallèle à une génératrice et au plan tangent le long de cette droite; la section aurait par conséquent des branches paraboliques. Enfin, si α surpassait β, la courbe n'aurait pas de branche infinie dans la partie qui correspond à une spire de l'hélice; elle se déroulerait indéfiniment comme une développante de cercle.

Si l'on suppose que le plan (P, P') se meuve parallèlement à lui-même, l'asymptote se transportera dans le plan tangent HL, et se confondra avec la génératrice nL quand la trace P passera par le point L. L'intersection se composera alors de cette génératrice qui est sa propre asymptote, et d'une courbe qui la rencontrera tangentiellement au point (n, n') (art. **449**).

975. *Seconde méthode applicable à toutes les surfaces d'égale pente.* — Considérons une surface d'égale pente et un plan qui rencontrent respectivement le plan horizontal sous des angles α et β. Soient (*fig.* 386)

M la projection horizontale d'un point de leur intersection;
MT une génératrice de la développable;
P la trace de cette surface;
EI celle du plan sécant.

Le plan tangent le long de la génératrice MT a pour trace la perpendiculaire TE à MT (art. **545**); par suite la projection de la tangente en M à la courbe d'intersection est EM. D'ailleurs, si l'on abaisse la perpendiculaire MI sur EI, on aura, en appelant ζ l'ordonnée verticale du point M de l'espace,

$$\zeta = \mathrm{MI} \operatorname{tang}\theta, \quad \zeta = \mathrm{MT} \operatorname{tang}\alpha;$$

d'où

$$\frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{MI}} = \frac{\operatorname{tang}\theta}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

974. Nous décrivons un cercle d'un rayon quelconque OD (*fig.* 387); par son centre O nous tirons une droite OF parallèle à IE, et nous prenons sur cette ligne un point F tel que l'on ait

$$\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OD}} = \frac{\operatorname{tang}\theta}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

Nous traçons ensuite le rayon OB perpendiculaire à la projection de la génératrice considérée MT, et nous joignons BF : les triangles TMI et FOB sont semblables (*fig.* 386 et 387), car les angles IMT et FOB sont égaux comme formés par des droites respectivement perpendiculaires (1), et les côtés qui les comprennent sont proportionnels en vertu des équations qui précèdent. L'angle OFB est donc égal à l'angle ITM et par suite à l'angle IEM, car les angles MTE et MIE étant droits, les points E, T, I et M sont sur une circonférence. Nous voyons donc que la droite FB est parallèle à la tangente EM.

D'après cela, il est facile de construire la projection horizontale de la section et ses tangentes, quand le cercle auxiliaire est tracé et le point fixe F déterminé. Pour avoir le point M situé sur une génératrice TM, on trace les droites TE et OB qui lui sont perpendiculaires, puis la droite BF : la parallèle à cette ligne menée par le point E est tangente à la courbe au point M où elle rencontre TM. On peut, en faisant la construction en ordre inverse, déterminer le point de l'intersection où la tangente est parallèle à une droite donnée.

Toutes les fois que l'angle θ du plan sécant avec le plan horizontal sera plus grand que l'angle α de la développable, le point F se trouvera en dehors du cercle auxiliaire, et on pourra mener de ce point deux tangentes au cercle. Chacune de ces divergentes sera perpendiculaire au rayon correspondant; la tangente parallèle EM sera alors perpendiculaire à TE, parallèle à la génératrice TM, et par conséquent asymptote. Quand le point F est dans l'intérieur du cercle, la courbe d'intersection n'a pas de branche infinie, à moins que l'arête de rebroussement de la surface n'en ait elle-même (2).

(1) On place le point F arbitrairement d'un côté ou de l'autre du point O, sur le diamètre parallèle à IE. La condition de l'égalité des angles IMT et FOB montre de quel côté du centre O on doit ensuite tracer le rayon OB.

(2) Cette construction nous a été communiquée par Bour pour l'hélicoïde développable. M. Mannheim a remarqué qu'elle s'étendait à toutes les surfaces d'égale pente.

975. Pour appliquer commodément cette construction à l'hélicoïde développable, nous supposons que les plans de projection ont été choisis de telle manière que la trace horizontale EO' du plan sécant (EO', O'M') passe par le centre O du cercle OC projection de l'arête de rebroussement (*fig.* 388), et soit perpendiculaire à la ligne de terre.

Nous prenons le cercle OC pour cercle auxiliaire; le point fixe F est alors sur la trace O'E du plan. Pour le déterminer, il suffit de tracer la parallèle C'K à la trace verticale C'M' du plan sécant jusqu'à la projection O'Z de l'axe, et ensuite la droite KF'_1 faisant l'angle α avec XY : la longueur OF est égale au segment $O'F'_1$.

Sur notre figure le point F est extérieur au cercle; il en résulte que l'intersection a deux branches infinies dans chaque partie de la surface qui correspond à une spire de l'hélice de rebroussement. Les projections des asymptotes sont alternativement parallèles aux tangentes Fb et Fb_1. Nous en avons construit deux de chaque série.

Les points tels que n, où les différentes branches de la courbe se coupent, appartiennent aux hélices doubles (art. **967**).

L'application de ce procédé, à la détermination des sections planes du cône de révolution et des surfaces d'égale pente étudiées dans le VI^e Livre, donne lieu à des exercices graphiques intéressants.

Hélicoïde développable déterminé par deux hélices directrices.

976. *Les cercles* A *et* B (*fig.* 392) *étant les projections de deux hélices de même pas et de même sens dont les traces sont aux points* a *et* b, *on demande de déterminer un hélicoïde développable auquel ces courbes appartiennent.*

Nous décrivons les développantes aG et bG traces des développables dont ces hélices sont les arêtes de rebroussement; de l'un de leurs points d'intersection G nous menons les tangentes Gm et Gn, et nous joignons les points de contact m et n. Les hélices étant de même pas et de même sens, les points m et n de l'espace peuvent se transporter sur ces courbes d'un même mouvement hélicoïde, et alors la droite mn décrira un hélicoïde réglé. Cette surface est d'ailleurs développable, car les tangentes aux directrices aux points m et n d'une génératrice se rencontrent au point G [1].

On obtient le rayon du cercle projection de l'arête de rebroussement, en abaissant une perpendiculaire du centre o sur mn.

---

[1] Cette construction est due à Th. Olivier (*Développements de Géométrie descriptive*).

Développement de l'hélicoïde.

977. L'hélice étant une ligne géodésique du cylindre sur lequel elle est tracée, tous ses plans osculateurs sont normaux à cette surface. Les rayons principaux du cylindre sont d'ailleurs l'un infini, l'autre égal à r; par conséquent, si l'on appelle ρ le rayon de courbure de l'hélice en un point, le théorème d'Euler donne immédiatement

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\cos^2\beta$$ [1].

Jusqu'à présent nous avons surtout considéré la courbure des sections planes des surfaces; mais, ainsi que nous l'avons déjà remarqué (art. **797**), les théorèmes relatifs aux rayons de courbure peuvent être étendus aux courbes gauches. La grandeur d'un rayon de courbure est en effet déterminée par les positions relatives de trois points infiniment voisins de la courbe; le plan qui contient ces trois points est celui de la courbe si elle est plane, et simplement son plan osculateur si elle est gauche [2].

Les grandeurs r et β sont les mêmes pour tous les points de l'hélice; le rayon de courbure ρ est donc constant. Il suit de là que, dans le développement d'un hélicoïde développable, la courbe plane transformée de l'arête de rebroussement a tous ses rayons de courbure égaux à ρ (art. **475**), et que par conséquent c'est un cercle dont le rayon est ρ.

978. Il n'est pas nécessaire de recourir au théorème d'Euler pour obtenir la formule que nous avons trouvée à l'article précédent. Nous remarquerons d'abord que deux arcs de même longueur d'une hélice sont évidemment superposables, et que par conséquent le rayon de courbure de cette ligne en ses différents points est constant, ainsi que celui de sa transformée (art. **475**).

Considérons sur l'hélicoïde deux génératrices A et B tangentes à l'arête de rebroussement en des points qui comprennent une demi-spire; appelons ρ le rayon de la circonférence transformée de cette courbe, et désignons par a et b les génératrices du cône directeur respectivement parallèles à A et à B. Les droites a et b sont dans un plan qui contient l'axe du cône.

---

(1) Cette formule est applicable à une courbe quelconque et à sa projection sur un plan parallèle au rayon de courbure.

(2) Les formules démontrées dans la Note de l'art 861 permettent de trouver facilement, pour un point de l'hélice, l'expression du rayon de courbure et la position du plan osculateur; car β' est nul, r' est infini et θ égale 90°, si l'on prend le plan horizontal perpendiculaire à l'axe de l'hélice, et le plan vertical parallèle à la tangente à cette courbe au point considéré. (E. L.)

La longueur d'une demi-spire est $\frac{\pi r}{\cos\beta}$ (art. **949**). Les génératrices A et B comprennent donc après le développement un angle égal à $\frac{\pi r}{\rho\cos\beta}$.

Si nous supposons le cône directeur placé de manière à avoir pour trace horizontale la projection de l'arête de rebroussement, les génératrices a et b perceront ce cercle en deux points distants d'une demi-circonférence πr. Dans le développement du cône, la trace de cette surface a pour transformée un arc de cercle dont le rayon est $\frac{r}{\cos\beta}$. L'angle que les droites a et b font après le développement est donc égal à $\pi\cos\beta$ (art. **167**).

Quand la surface et le cône sont développés, les droites A et B d'une part, a et b de l'autre, comprennent encore des angles égaux (art. **181**); nous avons par conséquent

$$\pi\cos\beta = \frac{\pi r}{\rho\cos\beta}, \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{r}{\cos^2\beta}.$$

La génératrice $A'o'$ du cône directeur (*fig.* 389) est égale à $\frac{r}{\cos\beta}$; donc, en élevant à $A'o'$ en o' la perpendiculaire $o'\omega'$, nous déterminerons un segment $A'\omega'$ qui sera égal à ρ [1].

979. Si nous voulons faire le développement de la partie de la surface qui correspond à une demi-spire (ADG, A'D'G') de l'arête de rebroussement (*fig.* 389), nous tracerons deux droites rectangulaires $A''g''$ et $g''G''$ respectivement égales à la demi-circonférence AG et à la moitié du pas; l'hypoténuse $A''G''$ sera la longueur de la demi-spire de l'hélice; nous la porterons sur une circonférence décrite avec un rayon $\omega_1 D_1$ (*fig.* 390) égal à $A'\omega'$ (*fig.* 389), et nous obtiendrons l'arc A_1G_1, transformée de la partie (AG, A'G') de l'arête de rebroussement.

La longueur d'une spire de l'hélice est égale à $\frac{2\pi r}{\cos\beta}$, et par suite à la circonférence dont le rayon est $\frac{r}{\cos\beta}$ ou $A'o'$. En rectifiant la moitié de ce cercle, on obtient directement la longueur $A''G''$.

Une spire occupe sur le cercle de la transformée de l'hélice un arc dont le rapport à la circonférence est

$$\frac{\left(\frac{2\pi r}{\cos\beta}\right)}{2\pi\rho}.$$

Eu égard à la valeur de ρ, cette expression est égale à $\cos\beta$ ou à $\frac{d\mathrm{D}}{d'\mathrm{D}'}$ (*fig.* 389). On peut, en mesurant ces deux longueurs, calculer l'amplitude de l'arc A_1G_1.

---

[1] Nous devons à M. Mannheim la détermination de la valeur de ρ par la considération du cône directeur.

La transformée A_1g_1 de la développante Ag est une développante du cercle A_1G_1 (art. **475**). On peut par cette considération obtenir la formule de l'art. **977**, en supposant connue l'équation aux arcs et aux rayons de courbure de la développante de cercle [1].

980. *Les transformées des diverses hélices de la surface sont des cercles concentriques;* car, pour avoir l'une d'elles, il faut porter une longueur constante sur chaque génératrice, à partir du point où elle touche le cercle dans lequel se change l'arête de rebroussement.

Si l'on veut avoir la transformée de l'arc d'hélice projeté sur le segment pmn (*fig.* 389), on portera sur la tangente D_1d_1 (*fig.* 390) une longueur D_1m_1 égale à $D'm'$; la courbe cherchée sera l'arc de cercle passant par le point m_1 et ayant son centre au point ω_1. Nous n'avons pas représenté sur la *fig.* 389 la projection verticale de cette hélice par crainte de confusion.

Nous savons que le rayon de courbure de l'arête de rebroussement n'est pas altéré par le développement (art. **475**). Les rayons de courbure des autres hélices ne sont pas ceux des cercles de leurs transformées.

981. Reprenons l'équation de l'art. **977**

$$\rho = \frac{r}{\cos^2\beta}.$$

Si l'on attribue à ρ une grandeur déterminée quelconque et que l'on fasse varier β et r, on aura une infinité d'hélicoïdes dont les arêtes de rebroussement se transformeront suivant le même cercle, lorsqu'on les développera sur un plan, et qui par conséquent pourront être développés les uns sur les autres.

Remplaçant dans cette formule $\cos^2\beta$ par sa valeur en fonction de r et de h, déduite de la première équation (1 *bis*) de l'art. **950**, on obtient

$$h^2 + r^2 - \rho r = 0.$$

En considérant h et r comme des coordonnées rectangulaires variables, l'équation précédente représentera un cercle qui passe par l'origine, dont le centre est sur l'axe des r et dont le diamètre est égal à ρ. Ce cercle étant tracé, on trouvera pour chaque valeur de r deux ordonnées égales et de signes contraires qui détermineront deux hélicoïdes développables de même pas, l'un dextrorsum, l'autre sinistrorsum, tous deux applicables sur le premier hélicoïde.

---

[1] Cette équation est

$$R^2 = 2rs.$$

R et s sont les rayons de courbure Ee (*fig.* 389) et l'arc correspondant Ae.

Centres de courbure de l'hélice et surface lieu de ses développées.

982. Si nous portons le rayon de courbure $A\omega'$ de D en ω (*fig.* 389), le point (ω, D') sera le centre de courbure de l'hélice (AG, A'G') pour le point (D, D'). Le lieu des centres de courbure de cette ligne est une seconde hélice, de même pas qu'elle, et projetée sur le cercle décrit du point o comme centre, avec $o\omega$ pour rayon. Appelant r' le rayon de ce cercle, nous avons

$$r' = \rho - r = r\,\text{tang}^2\beta,$$

d'où

$$rr' = h^2.$$

Cette formule est symétrique en r et en r'; les deux hélices ont d'ailleurs les mêmes normales principales. Il résulte de là que la première est le lieu des centres de courbure de la seconde, comme celle-ci est le lieu des centres de courbure de la première.

Une semblable réciprocité ne peut pas exister entre des lignes planes, parce que les normales principales à une courbe de ce genre sont toutes dans un plan, et qu'elles y ont nécessairement une enveloppe, de sorte que le lieu des centres de courbure est une développée de la courbe.

La formule que nous avons trouvée montre que, *quand deux hélices sont telles que chacune d'elles soit le lieu des centres de courbure de l'autre, leur pas réduit commun est moyen proportionnel entre les rayons des cylindres sur lesquels elles sont tracées.*

983. Considérons une hélice (AB, A'B') (*fig.* 391) et le plan (GG', G'E'), qui lui est osculateur au point (E, E') où sa tangente est parallèle au plan vertical : si nous supposons que ce plan se meuve en restant toujours osculateur de l'hélice, l'enveloppe de ses positions sera la développable dont l'hélice (AB, A'B') est l'arête de rebroussement (art. **465**).

L'angle β que le plan forme avec le plan horizontal, le pas réduit des hélices et le rayon r du cylindre sur lequel est l'hélice arête de rebroussement de la développable enveloppe, sont reliés par la formule (art. **966**)

$$r = h\cot\beta.$$

Considérons maintenant un plan (gg', g'E') perpendiculaire au premier, et le coupant suivant une horizontale qui rencontre l'axe; puis supposons qu'il soit entraîné dans le mouvement : l'hélicoïde développable enveloppe de ses positions aura son arête de rebroussement (ab, $a'b'$) située sur un cylindre dont le rayon r' sera donné par la formule

$$r' = h\,\text{tang}\beta.$$

Le produit rr' est égal à h^2; par conséquent, et eu égard à la position des hélices, chacune d'elles est le lieu des centres de courbure de l'autre (art. **982**).

Le plan normal à l'une des hélices en un point quelconque (E, E') est osculateur de l'autre au point (e, e') situé dans le même plan horizontal. Chacun des hélicoïdes est donc l'enveloppe des plans normaux à l'arête de rebroussement de l'autre hélicoïde, et par conséquent le lieu des développées de cette courbe.

Exercice pour la section d'un hélicoïde développable par un plan, et le développement de cette surface.

984. Nous avons représenté sur la *fig.* 393 la partie d'un hélicoïde développable qui correspond à une spire de l'hélice directrice.

Cette courbe se projette sur le cercle ABC.... La trace horizontale de la surface est l'arc de développante $Acdegh$... correspondant à une circonférence; l'arc symétrique As_1r_1... est la projection de la trace de la surface sur le plan horizontal $a_1j'_1$ élevé au-dessus du premier d'une hauteur égale au pas.

Nous partageons le cercle en parties égales, et, traçant les tangentes aux points de division, nous avons les projections horizontales d'un certain nombre de génératrices. Chacun des segments Aa_1, cc_1, dd_1, ..., compris entre les deux développantes, est égal à la longueur de la circonférence ABC....

Nous projetons les points des développantes $Acde$... et $As_1r_1q_1$... respectivement sur deux horizontales $j's'$ et $a'_1j'_1$; puis, joignant les points correspondants A' et a'_1, b' et b'_1, ..., nous avons les projections verticales des génératrices considérées.

La branche Ael... de la développante n'a pu être tracée en entier, et par suite les traces horizontales de deux génératrices manquent sur la figure; mais il est facile de reconnaître par la construction que les génératrices qui, sur le plan horizontal, ont des positions symétriques par rapport à la droite AOJ, sont parallèles sur le plan vertical; par conséquent, pour avoir les projections des deux dernières génératrices, il suffit de tracer par les points A'_1 et u'_1 des droites respectivement parallèles à a'_1A' et b'_1b'.

Les projections verticales des génératrices dessinent par leur enveloppe la sinusoïde projection de l'hélice directrice.

Les plans tangents le long des génératrices $(jj_1, j'j_1)$ et $(Aa_1, A'a'_1)$ sont perpendiculaires au plan vertical, et par suite ces droites forment le contour apparent vertical de la surface. La ponctuation est établie en conséquence.

Nous avons représenté les deux arcs d'hélice qui sont les intersections de la développable par un cylindre de révolution qui a le même axe qu'elle, et qui passe par un point J_1.

985. L'hélicoïde est coupé par un plan $(VV_1, V'\alpha')$ perpendiculaire au plan vertical, et passant par le point de division (P, P') de l'arête de rebroussement. La position du plan rend très facile la construction de la projection horizontale de la courbe d'intersection. Pour montrer comment on peut l'obtenir par la méthode de l'art. **975**, nous avons déterminé le point fixe F et la développante $a_2 b_2 c_2 \ldots$, trace de la surface sur le plan horizontal qui contient le point O'_2 où l'axe perce le plan sécant.

La tangente de rebroussement de la projection horizontale de la section au point P est déterminée soit par le point F, soit par un point e_1 intersection des traces, sur le plan horizontal auxiliaire xy, du plan tangent et du plan sécant.

Le point F étant extérieur au cercle ABC..., la courbe a deux branches infinies (art. **974**). Les points à l'infini sont situés sur les génératrices dont les projections horizontales passent par le point F. Nous avons construit l'asymptote nn_1, parallèle à la tangente Fm, en opérant sur le plan horizontal $a'_1 f'_1$; l'autre asymptote est en dehors du cadre de l'épure.

986. Pour faire le développement, nous déterminons le rayon $q'\omega$ de la circonférence transformée de l'hélice (art. **978**); nous décrivons cette circonférence (*fig.* 395), et nous prenons sur elle un arc AA_1 égal à la longueur $A'A'_1$ d'une spire (*fig.* 393). Nous partageons l'arc AA_1 (*fig.* 395) en autant de parties égales que le cercle AI l'a été; par les points de division nous traçons des tangentes qui représentent les génératrices, puis nous construisons les développantes $Abcd$, $A_1 u_1 s_1 r_1 \ldots$ transformées des traces (art. **979**).

On obtient la transformée de la courbe de section par le plan $(VV_1, V'\alpha')$ en déterminant, sur chaque génératrice, le point qui lui appartient. Pour avoir le point γ il faut connaître la vraie grandeur du segment $g'_1\gamma'$ (*fig.* 393); on y parvient facilement en ramenant par une horizontale le point γ' en γ'' sur la génératrice $A'a'_1$, parallèle au plan vertical. La longueur $a'_1\gamma''$ est portée sur la génératrice $g_1 g$ (*fig.* 395), à partir de g_1.

On place la tangente Pe_1 et l'asymptote nn_1 (*fig.* 395), par les procédés ordinaires des développements.

987. La transformée de l'intersection est $\beta\varepsilon P\,\delta\gamma\alpha$ (*fig.* 395). On peut se proposer de chercher ses points d'inflexion. Pour les obtenir, il faut construire les génératrices de contact des plans tangents perpendiculaires au plan sécant (art. **477**); comme d'ailleurs les plans tangents à l'hélicoïde sont respectivement parallèles à ceux de son cône directeur, on peut opérer sur ce cône, et lui appliquer la méthode de l'art. **170**, car il est de révolution. Nous avons représenté la construction sur la *fig.* 394. La droite $(S, S'D')$ est l'axe du cône; les droites $S'k'$ et $D'I'$ respectivement parallèles à $f'_1 f'$ et $V'\alpha'$ (*fig.* 393) sont la génératrice parallèle au plan vertical, et la trace d'un plan sécant parallèle au plan $(VV_1, V'\alpha')$. Nous avons mis les mêmes lettres que sur la *fig.* 104, afin de rendre la concordance facile à saisir.

Nous trouvons que deux des plans tangents à l'hélicoïde sont perpendiculaires au plan sécant. Les génératrices de contact sont parallèles l'une à (SI, S'I'), l'autre à $(SI_1, S'I')$ (*fig.* 394). Ces génératrices sont voisines, la première de $(ll_1, l'l'_1)$, la seconde de $(hh_1, h'h'_1)$ (*fig.* 393) ; le bras $P\alpha$ doit donc avoir deux inflexions près des points où il rencontre les génératrices ll_1 et hh_1 (*fig.* 395). L'une d'elles est très rapprochée du sommet P, et par conséquent le rebroussement se présente graphiquement comme s'il était du second ordre (art. **478**).

CHAPITRE III.

SURFACE DE LA VIS A FILETS TRIANGULAIRES.

Définition. Généralités.

988. Ainsi que nous le dirons plus loin, les surfaces des filets triangulaires d'une vis sont engendrées par le mouvement hélicoïde d'une droite autour d'un axe qu'elle rencontre. On appelle, en conséquence, cette variété de l'hélicoïde réglé *surface de la vis à filets triangulaires* (¹). L'axe remplace l'hélice de gorge et forme par suite la ligne de striction (art. **959**). Le paramètre des génératrices est égal et de signe contraire au pas réduit h (art. **961**), car le rayon que nous avons appelé b a une longueur nulle.

Nous avons déjà considéré cette surface à l'occasion des hélicoïdes applicables les uns sur les autres (art. **965**).

Soient (*fig.* 396)

(O, O'Z) l'axe de la surface ;

(AO, A'I) la position initiale de la génératrice rectiligne que nous supposons parallèle au plan vertical ;

A'A'' le pas commun des hélices : nous traçons les projections de l'hélice décrite par le point (A, A') de la génératrice, et nous considérons cette courbe comme une directrice.

(¹) *Voir* la Note de l'art. 958.

On construit facilement la génératrice qui passe par un point déterminé (B, B') de l'hélice directrice, en remarquant que d'une position à une autre tous les points de cette droite s'élèvent de quantités égales. Si l'on prend le segment IJ égal à B_0B', le point J sera celui où l'axe est coupé par la génératrice qui croise l'hélice au point (B, B').

Après une demi-révolution, la génératrice (AO, A'I) prend la position (CO, C'L); ces deux droites se rencontrent en un point (E, E') situé sur une hélice double, dont la distance à l'axe est la longueur OE égale à $\frac{H}{4}\cot\alpha$. Si la génératrice (CO, C'L) fait une révolution entière, elle prendra la position (CO, C''P), et coupera la droite (AO, A'I) en un point (F, F') qui appartiendra à une hélice double, que nous n'avons pas tracée, et dont la distance à l'axe est $\frac{3H}{4}\cot\alpha$. En considérant les intersections des génératrices situées dans le plan méridien principal, on reconnaît que la surface possède un nombre indéfini d'hélices doubles (art. **967**), et que leurs rayons forment une progression arithmétique dont la raison est $\frac{H}{2}\cot\alpha$.

On considère la surface comme formée d'une *nappe supérieure* et d'une *nappe inférieure*, respectivement décrites par les parties de la génératrice A'E' qui sont au-dessus et au-dessous du point I où elle rencontre l'axe.

Sections planes.

989. Nous savons construire le cône directeur d'un hélicoïde réglé (art. **959**), et par suite nous pouvons déterminer les asymptotes des branches infinies de la section plane d'une surface de vis à filets triangulaires (art. **748**). Quand le plan est moins incliné que les génératrices, la courbe a deux branches infinies pour chaque partie de la surface qui correspond à une spire de l'hélice directrice.

L'intersection de la surface par un plan perpendiculaire à l'axe présente un intérêt particulier.

Soit X_1Y_1 le plan sécant (*fig.* 396) : les génératrices (AO, A'I) et (BO, B'J) sont coupées aux points (N, N') et (M, M'). Le triangle rectangle formé dans l'espace par le rayon vecteur OM, que nous appelons ρ, le segment O'_1J de l'axe, et la partie de la génératrice projetée sur JM', donne

$$\rho = O'_1J\cot\alpha, \quad \text{ou} \quad \rho = IJ\cot\alpha + O'_1I\cot\alpha.$$

IJ est la hauteur dont chaque point de la génératrice s'est élevé au-dessus de sa position initiale; par conséquent, si nous appelons ω l'azimut AOB du point M, la longueur IJ sera ωh, et nous aurons

$$\rho = \omega h \cot \alpha + ON,$$

ou bien

$$\rho = r\omega + ON,$$

en posant

$$r = h \cot \alpha.$$

L'équation que nous venons de trouver montre que *la section de la surface de la vis à filets triangulaires par un plan perpendiculaire à l'axe est une spirale d'Archimède* (art. **675**). La tangente à cette courbe à l'origine fait avec la droite AC un angle AOS égal à $-\dfrac{ON}{r}$.

Les points doubles G et R de la spirale appartiennent aux hélices doubles.

Un plan perpendiculaire à l'axe n'est parallèle à aucune génératrice; la section s'étend cependant indéfiniment et doit être considérée comme ayant une branche infinie qui correspond à une génératrice située à l'infini (art. **599**).

Le paramètre r de la spirale est le rayon du cylindre sur lequel est l'arête de rebroussement de l'hélicoïde développable asymptote (art. **966**). Pour construire cette longueur on peut développer le quart de cercle VC sur sa tangente VU, projeter le point double E′ en E, et celui-ci en K : la longueur OK est le paramètre r. Cette construction est analogue à celle du rayon OK de la *fig.* 375 (art. **955**).

990. Considérons la droite OM (*fig.* 404), projection d'une génératrice qui perce le plan horizontal en un point M de la spirale d'Archimède OL, trace de l'hélicoïde : le plan vertical OM est le plan central de la génératrice (art. **959**), et par suite le plan tangent au point de cette ligne situé à l'infini a pour trace la droite MN perpendiculaire à OM. L'enveloppe des droites telles que MN doit être la développante de cercle trace de l'hélicoïde développable asymptote.

Il est facile de vérifier ce résultat. Si nous appelons φ l'azimut BOM du point considéré M de la spirale OL, nous aurons

$$OM = r\varphi.$$

Traçons le cercle AG dont le rayon est r et le centre O, la droite GN parallèle à OM et tangente à ce cercle, et ensuite les rayons OA, OG respectivement perpendiculaires à OB et à OM : le segment GN de la tangente sera égal à OM, par suite à $r\varphi$ et enfin à l'arc AG, car l'angle AOG est égal à BOM. Le lieu des points N, enveloppe des droites MN, est donc une développante du cercle AG ; ce cercle est d'ailleurs la projection de l'arête de rebroussement de la développable asymptote (art. **966**).

De ce qui précède, et en considérant uniquement les tracés sur le plan horizontal, on conclut les deux théorèmes suivants :

L'enveloppe des droites menées par les divers points d'une spirale d'Archimède, perpendiculairement aux rayons vecteurs, est une développante du cercle qui a son centre à l'origine de la spirale, et dont le rayon est égal au paramètre de cette courbe.

Le lieu des pieds des perpendiculaires, abaissées du centre d'un cercle sur les tangentes à l'une des développantes, est une spirale d'Archimède.

Plans tangents.

991. Une surface de vis à filets triangulaires étant donnée par son axe (O, O'Z) (*fig.* 399), une hélice directrice (AC, A'C'), et la génératrice (AO, A'O') parallèle au plan vertical, proposons-nous de déterminer son plan tangent en un point (M, M') d'une génératrice (ON, RN'). Il passe au point donné une hélice qui se projette horizontalement sur le cercle décrit du point O comme centre avec OM pour rayon; elle rencontre la génératrice initiale (AO, A'O') au point (D, D'). Si l'on prend pour plan horizontal d'opération le plan xy qui contient ce point, on obtiendra la trace l de la tangente à l'hélice considérée, au point (M, M'), en portant sur la tangente ML au cercle MD une longueur Ml égale à l'arc MD. Il est d'ailleurs facile d'avoir les traces k et K de la génératrice sur les plans horizontaux xy et XY; les traces du plan cherché, sur ces plans, sont par conséquent la droite kl et sa parallèle KL menée par le point K.

On peut modifier cette construction de manière à n'avoir à faire des tracés que sur le plan horizontal [1].

Nous menons par le point M la droite IQ perpendiculaire à KL, et par O la perpendiculaire OQ à OM : les deux triangles LMK et MOQ, qui ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, donnent

$$\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{MK}} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OQ}}.$$

Le point L étant la trace de la tangente à l'hélice MD sur le plan XY nous avons

$$\frac{\mathrm{M'M_0}}{\mathrm{ML}} = \frac{\mathrm{H}}{2\pi \times \mathrm{OM}},$$

H étant le pas des hélices; car chacun des deux membres est une expression de

---

[1] Dans son *Dictionnaire des Mathématiques appliquées* (p. 982), H. Sonnet fait remarquer que « la construction qui précède a été modifiée d'une manière heureuse par M. de la Gournerie ». (E. L.)

la tangente trigonométrique de l'angle que les tangentes à l'hélice font avec le plan horizontal.

Multipliant ces deux équations l'une par l'autre, on a

$$\frac{M'M'_0}{MK} = \frac{H}{2\pi \times OQ},$$

et enfin, en introduisant le pas réduit h, et remarquant que le premier membre est la tangente de l'angle α, on obtient

$$OQ = h \cot \alpha.$$

La longueur de la perpendiculaire OQ est donc constante, et égale au paramètre de la spirale d'Archimède trace de la surface sur un plan horizontal (art. **989**).

D'après cela, pour déterminer le plan tangent en un point M d'une génératrice OK, il suffit d'élever au point O une droite OQ perpendiculaire à OK et égale au paramètre r, de tracer la droite QM et de lui abaisser de la trace K de la génératrice une perpendiculaire KL : cette droite est la trace horizontale du plan tangent.

Si l'on donne à la figure différentes dispositions, on reconnaîtra que la perpendiculaire OQ doit toujours être dirigée du côté où s'étend la branche de la spirale d'Archimède sur laquelle se trouve la trace de la génératrice que l'on considère.

Cette seconde construction est beaucoup plus facile que la première quand le paramètre r a été déterminé. On doit la préférer lorsque l'on veut avoir plusieurs plans tangents. En renversant l'ordre des tracés, on a la solution du problème inverse : ainsi, étant donnée la trace LK d'un plan contenant une génératrice OK, pour trouver le point de contact de ce plan il suffit d'élever OQ perpendiculaire à OK, et d'abaisser QI perpendiculaire à KL : cette droite coupe OK au point cherché M.

992. Si le point M se meut sur la génératrice OK, la trace KL du plan tangent et sa perpendiculaire QM tourneront l'une autour du point K, l'autre autour du point Q. Lorsque le point M sera en K, la droite LK devra être tangente à la spirale d'Archimède : la normale à cette courbe au point K passe donc au point Q, ce qui démontre que *dans la spirale d'Archimède la sous-normale est constante et égale au paramètre* (1).

Quand le point M est à l'infini, la droite QM est parallèle à OK, et par suite la trace du plan tangent est perpendiculaire à la projection de la génératrice.

(1) En admettant ce théorème, déjà établi à l'article 674, on arrive directement aux tracés que nous avons donnés pour la détermination du plan tangent : mais nous n'avons pas voulu que cette construction importante reposât sur une proposition qui n'a été démontrée que d'une manière incidente.

Nous avons obtenu précédemment ce résultat par la considération du cône directeur.

Lorsque le point M est en O, la droite KL se confond avec KO.

La perpendiculaire QI peut être considérée comme la projection de celle des droites de plus grande pente du plan tangent qui passe au point de contact, ou de la tangente de plus grande pente de la surface au point M. Quelle que soit la position du point M, cette tangente rencontre trois droites fixes : la génératrice OK, celle qui lui est infiniment voisine, et la verticale du point Q. Nous voyons ainsi que *les tangentes de plus grande pente à une surface de vis à filets triangulaires aux divers points d'une génératrice forment un hyperboloïde*. La trace de cet hyperboloïde est le lieu des points I, c'est-à-dire le cercle décrit sur KQ comme diamètre.

993. Il est facile de reconnaître, par la construction, que les plans tangents aux divers points d'une hélice sont également inclinés sur le plan horizontal. Pour déterminer l'hélice, lieu des points où le plan tangent a une inclinaison donnée, on fait passer par une génératrice un plan ayant cette inclinaison (art. **135**), et l'on construit son point de contact qui appartient à l'hélice cherchée.

Si l'on veut déterminer le point de la surface où le plan tangent est parallèle à un plan donné G, on fera passer par une génératrice un plan ayant la même inclinaison que G, on déterminera son point de contact, et on fera tourner la génératrice d'un angle tel que la trace du plan tangent devienne parallèle à la trace de G. On est conduit à ce problème lorsque l'on cherche le point brillant pour des rayons parallèles (art. **425**).

Courbe d'ombre propre dans le cas de rayons parallèles.

994. Les constructions que nous avons expliquées dans le paragraphe précédent permettent de construire par points la courbe d'ombre propre d'une surface de vis à filets triangulaires.

Nous prenons un plan vertical parallèle aux rayons de lumière; la droite (O, O'Z) (*fig.* 401) est l'axe de la surface, (AO, A'C) une génératrice parallèle au plan vertical et (OT, CT') le rayon de lumière qui passe par le point où elle rencontre l'axe. La flèche courbe indique le sens dans lequel le point (A, A') tourne lorsque la génératrice s'élève. Nous rapportons de plus la longueur OF du paramètre *r*, après l'avoir construite.

Pour simplifier les constructions, nous allons supposer que le plan horizontal s'élève en même temps que la génératrice (art. **49**); alors, quand cette droite se projette sur la ligne OK, sa trace est le point K situé sur le cercle décrit du point O comme centre, avec OA pour rayon, et le point T est toujours la trace du rayon de lumière qui passe au point où la génératrice rencontre l'axe. TK est donc la trace du plan qui contient la génératrice OK et qui est parallèle aux rayons. Pour déterminer le point de contact de ce plan, il faut élever OQ perpendiculairement à OK, jusqu'à la rencontre du cercle décrit du point O comme centre avec un rayon égal à r, mener la perpendiculaire QI à KT, et prolonger cette droite jusqu'à sa rencontre M avec OK.

995. Cette construction peut être rendue plus simple : les triangles POQ et TOK sont semblables, car les angles K et Q ont leurs côtés perpendiculaires, et les angles en O sont égaux comme complémentaires d'un même angle POK. On a, par conséquent,

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OT}{OK};$$

ou bien

$$\frac{OP}{r} = \frac{\cot O'T'C}{\cot \alpha}$$

et, eu égard à la valeur de r (art. **989**),

$$OP = h \cot O'T'C.$$

La longueur du segment OP est donc constante ; lorsque l'on a déterminé la position du point fixe P, on peut construire rapidement la courbe à l'aide de ce point et du cercle FF_1 dont le rayon est r. Pour avoir le point M situé sur une droite qui passe par le point P et qui coupe le cercle en Q, il suffit de tracer le rayon OQ et de lui mener par le centre O une perpendiculaire OM. Un second point M_1 correspond à la deuxième intersection Q_1 de la droite PQ avec le cercle FF_1.

Nous prenons deux axes rectangulaires OT et OY ; nous mesurons les abscisses positives de O vers T et les ordonnées positives de O vers Y : l'ordonnée OP, que nous appellerons g, est par conséquent positive sur la figure. L'angle du rayon CT' avec le plan horizontal doit être considéré comme obtus, vu la direction des abscisses positives : cet angle γ est supplémentaire de O'T'C. D'après nos conventions (art. **961**), le pas réduit h, toujours de même signe que le pas H, est positif. En vertu de ces diverses observations, la formule que nous venons de trouver devient

$$g = -h \cot \gamma.$$

Pour déterminer la longueur de l'ordonnée g, on peut relever le point F en F' et tracer la droite P'_1F' parallèle à XY : la longueur $O''P'_1$ est égale à OP [1].

---

[1] Cette construction de la projection de la courbe d'ombre par le point fixe P et le cercle FQQ_1 est due à Poncelet. Nous aurions pu laisser le plan horizontal fixe, sans modifier sensiblement la

996. Les points M et M_1 sont à une même distance du point O (*fig.* 401), car il y a égalité évidente entre les triangles OQM et OQ_1M_1; le point *s* milieu de MM_1 est par conséquent le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur PQ, et se trouve sur le cercle décrit sur OP comme diamètre. Ce cercle est *une ligne diamétrale* de la courbe pour les cordes qui divergent de P.

Le point M arrive en P lorsque l'intersection Q est en F ou en F_1; le point fixe P est donc un point double de la projection de la ligne d'ombre : les droites FP et F_1P (*fig.* 402) sont les deux tangentes; car on peut regarder chacune d'elles comme une sécante dont le second point de rencontre s'est confondu avec le premier.

Lorsque la divergente PQ se confond avec l'axe OY, les points M et M_1 sont réunis en O (*fig.* 401). L'origine O est donc un second point double de la courbe, mais les deux branches qui y passent ont une tangente commune OT. On le reconnaît, soit en appliquant le raisonnement précédent aux sécantes OM et OM_1, soit en remarquant qu'aux points de la courbe d'ombre qui se projettent en O, le plan tangent à la surface est vertical, et que, puisqu'il est parallèle aux rayons de lumière, sa trace est OT; il projette donc sur cette droite toutes les lignes qu'il contient, et notamment les tangentes à la courbe d'ombre aux points où elle coupe l'axe de l'helicoïde [1].

---

démonstration que nous donnons; mais, en le supposant mobile, nous avons obtenu, à l'aide du point fixe T, du cercle AKK_1 et du cercle FQQ_1, une construction qui présente de l'intérêt (art. 994).

Les droites OQ et OQ_1, respectivement perpendiculaires aux rayons OK et OK_1, doivent être tracées, par rapport à ces rayons, du côté où s'étend la branche de la spirale d'Archimède, trace de la nappe inférieure de la surface. On pourrait transporter le point T à droite du point O et à la même distance de ce point : chaque perpendiculaire devrait alors être élevée de l'autre côté du rayon.

Le point T et le rayon OA ne sont pas déterminés, car l'une quelconque des hélices de la surface peut être prise pour directrice. Les longueurs OT et OA sont seulement reliées par la formule

$$OT \operatorname{tang}\gamma = \pm OA \operatorname{tang}\alpha,$$

ou bien

$$\frac{OT}{g} = \pm \frac{OA}{r}.$$

En donnant à OA la grandeur du rayon *r*, on a une construction par un seul cercle et un point fixe. Le cercle est le même que dans la construction de Poncelet; on voit par l'équation précédente que le point fixe est à une distance du point O égale à OP : c'est P_1 ou P_2.

En combinant la construction qui précède avec celle de Poncelet, nous avons obtenu le tracé suivant, qui est le plus expéditif, et celui qui donne le plus de précision aux résultats. On décrit les cercles qui ont PP_1 et FF_1 pour diamètres (*fig.* 402); on mène ensuite du point P_1 des divergentes : une de ces lignes rencontre le premier cercle au point I, et le second aux points K et *k*. On trace les droites PI, OK et O*k* : les points M et *m* où les deux dernières lignes rencontrent la première appartiennent à la courbe.

[1] Ce dernier raisonnement suppose implicitement que l'axe n'est pas tangent à la courbe d'ombre; mais l'axe est une asymptote de l'indicatrice en chacun de ses points; s'il était tangent à la courbe, il serait un rayon de lumière, et l'on voit facilement que la projection horizontale de la ligne d'ombre se réduirait à un point.

997. On peut modifier la construction de l'art. **995** de manière à obtenir les points qui sont sur un cercle projection de deux hélices situées, l'une sur la nappe inférieure, l'autre sur la nappe supérieure.

Supposons que nous cherchions le point M situé sur le cercle MM_1 (*fig.* 401) : le rayon OM doit être perpendiculaire au rayon OQ de l'un des points où la divergente PM rencontre le cercle auxiliaire. Si tout ce système tourne autour du point O, jusqu'à ce que le point cherché M soit sur l'axe OY en G, le point Q viendra en F, la droite QM prendra la position FG que nous pouvons tracer, et P sera transporté au point n où cette ligne rencontre le cercle décrit du point O comme centre avec OP ou g pour rayon; enfin OP se confondra avec On et le point G viendra en m. La longueur de l'arc mG est donc égale à celle de l'arc inconnu GM, et il est par conséquent facile de trouver le point M. Le point m appartient d'ailleurs lui-même à la courbe, parce qu'elle est évidemment composée de deux parties symétriques par rapport à OY.

En opérant sur le second point de rencontre N_1 de la droite FG avec le cercle Pn, on trouve les points M_1 et m_1 qui appartiennent, eux aussi, à la courbe; car, si l'on amène q_1 en F, les points m_1, P et G prendront respectivement les positions G, N_1 et M_1.

En résumé, pour faire la construction, on se donne le cercle PN_1n et le point F, puis on décrit le cercle Mm sur lequel on veut déterminer des points appartenant à la courbe. Ce cercle rencontre la droite OY en G : on trace la droite FG et ensuite les lignes On et ON_1 qui font connaître les points m et M_1. Les points M et m_1 sont déterminés comme symétriques; du reste, la construction les donnerait directement si l'on remplaçait soit le point F par le point F_1, soit le point G par le point g.

Le point M correspond au point Q, et par suite la branche de la spirale d'Archimède sur laquelle est la trace de la génératrice OM s'étend du côté indiqué par la direction OQ (art. **991**). D'après cela, et sans avoir besoin de revenir à la première construction, on reconnait facilement que le point M est sur la nappe supérieure. Des trois autres points du cercle Mm qui appartiennent à la courbe d'ombre, un autre m_1 est également sur la nappe supérieure; les deux derniers M_1 et m sont sur la nappe inférieure. Chacun d'eux considéré sur le plan est la projection d'un nombre infini de points de la courbe d'ombre; car, si l'on suppose la surface divisée en parties qui correspondent aux différentes spires de l'hélice directrice, leurs lignes d'ombre seront évidemment identiques et auront une même projection.

998. En se reportant aux valeurs de g et de r, on voit que, suivant que les rayons de lumière sont plus inclinés, aussi inclinés ou moins inclinés que les génératrices de la surface, le point fixe P se trouve en dehors du cercle auxiliaire dont le rayon est r, sur ce cercle ou dans son intérieur. Quand les rayons sont horizontaux, le point fixe est à l'infini. De ces quatre dispositions résultent pour la courbe autant de formes différentes que nous allons examiner successivement.

Cas où les rayons de lumière font avec le plan horizontal un angle plus petit que celui des génératrices. — Lorsque les rayons de lumière sont plus inclinés que les génératrices, le point P est en dehors du cercle auxiliaire FF_1 (*fig.* 401) ; alors, si l'on suppose que la divergente PQ tourne de manière que les points Q et Q_1 se rapprochent, les points M et M_1 qui leur correspondent s'éloigneront de s, et, quand les points Q et Q_1 seront confondus en H, les points M et M_1 se trouveront réunis à l'infini, et la droite qui passe par les points P et H sera une asymptote (art. **92**). Il résulte de ces considérations que la courbe a deux branches infinies dont les asymptotes sont les tangentes PE et Pe (*fig.* 402), menées du point P au cercle dont le rayon est r.

Nous avons indiqué sur la *fig.* 402 les parties de la courbe qui sont sur la nappe inférieure et celles qui se trouvent sur la nappe supérieure, en supposant que les génératrices s'élèvent en tournant autour de l'axe, dans le sens indiqué sur la *fig.* 401.

999. *Cas où les rayons de lumière sont moins inclinés que les génératrices.* — Lorsque les rayons sont moins inclinés que les génératrices de la surface, le point P est dans l'intérieur du cercle auxiliaire FF_1 (*fig.* 398). Aucune divergente ne pouvant toucher ce cercle, la courbe n'a pas de branche infinie.

Pour avoir la grandeur OK du plus grand rayon vecteur OH, il suffit de mener du point F une tangente FK au cercle OP. On reconnait, en effet, par la construction de l'art. **997**, que la courbe n'a pas de points sur les cercles dont le rayon est plus grand que OK.

Les points où le cercle limite OK touche la courbe sont situés sur les rayons $O\lambda$ et $O\lambda_1$ des points de tangence. Ils appartiennent aussi à la droite PS parallèle à OX. Pour le prouver, considérons cette ligne PS comme une divergente, traçons le rayon $O\varphi$ et élevons la perpendiculaire OH_1 ; les triangles rectangles FOK et φOH_1 sont égaux, car il y a une égalité d'une part entre les côtés OF et $O\varphi$, de l'autre entre les perpendiculaires $O\lambda$ et OP ; le rayon vecteur OH_1 est donc égal à OK, et le point H_1 de la courbe est sur le cercle limite.

Nous n'avons pas tracé le cercle diamétral sur la *fig.* 398, parce qu'il y eût produit un peu de confusion.

1000. *Cas où les rayons de lumière ont la même inclinaison que les génératrices.* Lorsque les angles α et γ sont égaux ou supplémentaires, le point P est sur le cercle FF_1 (*fig.* 400); des deux points où une divergente PQ coupe ce cercle, le second seul est variable : le premier P fait trouver un point M_1 de l'axe OX.

Cette droite appartient donc à la projection complète de la ligne d'ombre, ce qu'il était facile de prévoir, car la surface a des génératrices parallèles aux rayons et qui se projettent sur OX.

Le point M donné par le second point d'intersection Q s'éloigne à l'infini, dans la direction de l'axe OX, lorsque la divergente est la droite Px tangente au cercle auxiliaire; la courbe proprement dite a donc une branche infinie. La considération du cercle diamétral (art. **996**) va nous permettre de déterminer l'ordonnée OY de son asymptote EE_1.

Le point s, où la divergente PQ rencontre le cercle décrit sur OP comme diamètre, est le milieu du segment MM_1; sa distance à l'axe OX est donc la moitié de la distance du point M à cet axe. Lorsque le point Q arrive en P, l'ordonnée du point s devient OP, et l'ordonnée OY du point situé à l'infini est double de OP.

1001. Il résulte de la construction même que *les droites qui joignent au point double* P *les deux points* M *et* m, *correspondant à un même azimut, sont à angle droit.*

Les triangles rectangles mOq et QOM sont semblables, car les angles en q et en M ont leurs côtés respectivement perpendiculaires; ils donnent

$$Om \times OM = r^2.$$

Le rectangle des deux rayons vecteurs qui correspondent à un même azimut est constant.

Les triangles PCM et POq sont semblables parce qu'ils ont leurs côtés respectivement perpendiculaires; le premier est donc isoscèle comme le second, et par suite les segments PC et CM sont égaux. On trouve de même que les longueurs PC et Cm sont égales. On peut donc construire la courbe par points en traçant des droites qui divergent de l'origine O, et en prenant sur chacune d'elles, à partir du point C, des longueurs Cm et CM égales à PC [1].

1002. *Cas où les rayons de lumière sont horizontaux.* — Lorsque les rayons de lumière sont horizontaux, c'est-à-dire perpendiculaires à l'axe, le point fixe P doit être considéré comme s'étant éloigné à l'infini. Cette circonstance simplifie les constructions qui ont été expliquées aux articles **995** et **997**; ainsi, pour avoir le point situé sur la droite PP perpendiculaire à l'axe des abscisses

---

(1) La ligne que nous avons étudiée dans les articles 1000 et 1001 est appelée quelquefois *strophoïde* : c'est une variété de la 41^{e} espèce des courbes du troisième ordre dans la classification de Newton (45^{e} d'après Stirling). Elle appartient à la famille des hyperboles défectives qui ont un diamètre.

En appliquant à cette courbe la construction par le cercle FF_1 et le point F_1 (art. 995, note), on reconnait que la droite QM est perpendiculaire à F_1N.

On trouve par les procédés du Calcul intégral que l'aire comprise entre un arc Om et sa corde est égale à celle du triangle NF_1L, formé par les tangentes au cercle auxiliaire aux points N et F_1, et par l'arc NF_1 de ce cercle.

La strophoïde possède plusieurs propriétés assez remarquables qui résultent des théorèmes généraux relatifs aux courbes du troisième ordre.

(*fig.* 397), il suffit de mener la droite OM perpendiculaire au rayon OQ. On aura les points M et *m* qui appartiennent au cercle OG, en prenant l'intersection de ce cercle avec la droite OC parallèle à F_1G (¹).

Lorsque la droite PP se rapproche du point F ou du point F_1, les deux points M et M_1 s'éloignent de l'axe OX. Ils se réunissent à l'infini, quand PP se confond avec l'une ou l'autre des tangentes EE_1 et ee_1 au cercle auxiliaire. Ces droites sont donc asymptotes de la courbe.

Les triangles rectangles OMQ, FCO sont égaux, et par suite le rayon vecteur OM et la tangente FC sont de même longueur. D'après cela, si l'on prend la droite OX pour axe, et le point O pour origine de coordonnées polaires, l'équation de la courbe sera

$$\rho = r \tang \omega.$$

En appelant A l'aire infiniment petite comprise entre cette ligne, l'asymptote voisine de la partie considérée et deux rayons vecteurs comprenant un angle infiniment petit $d\omega$, on a

$$A = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\omega}{\cos^2\omega} - \frac{1}{2} r^2 \tang^2 \omega \, d\omega;$$

d'où

$$A = \frac{1}{2} r^2 \, d\omega.$$

L'élément superficiel A est donc égal au secteur qui, dans le cercle, correspond à l'angle $d\omega$, et par suite *l'aire comprise entre un arc de la courbe, l'asymptote voisine et deux rayons vecteurs est égale à celle du secteur du cercle* FF_1, *comprise entre les deux rayons* (²).

1005. A l'article précédent nous avons donné l'équation de la courbe dans un cas particulier; il est facile de l'obtenir dans le cas général. Si l'on abaisse des points M et Q (*fig.* 401) les droites ML et QE perpendiculaires sur l'axe OY, on aura

$$\frac{ML}{QE} = \frac{PL}{PE};$$

(¹) Quand les points P et P_1 s'éloignent à l'infini, le cercle POP_1 (*fig.* 402) se transforme en une droite BB_1 (*fig.* 397) inclinée à 45 degrés sur l'axe OF. Alors, pour appliquer la construction qui est à la fin de la note de l'article 995, il faut d'un point I de BB_1 mener deux droites KK_1 et PP respectivement parallèles à OX et à OY, et ensuite tracer les droites KO et K_1O : elles coupent la droite PP en des points M et M_1 qui appartiennent à la courbe.

(²) M. Nicolaïdès a donné ce théorème, mais d'une manière moins générale. Son énoncé est celui-ci : *L'aire comprise entre la courbe et les deux asymptotes est égale au cercle* (*les Mondes*, t. II, 1863).

En 1851, dans notre Mémoire sur les hélicoïdes, nous avons établi le théorème démontré dans le texte, mais avec un énoncé un peu différent. Nous disions que l'aire comprise entre l'arc OM et sa corde est égale à la surface du triangle mixtiligne CFK.

ou, en appelant ρ le rayon vecteur OM et ω_1 l'azimut F_1OM,

$$\frac{\rho\cos\omega_1}{r\sin\omega_1} = \frac{g+\rho\sin\omega_1}{g-r\cos\omega_1};$$

on déduit de là

$$\rho = \frac{rg\sin\omega_1}{g\cos\omega_1 - r}.$$

Enfin, si nous mesurons les azimuts à partir de l'axe OT, de manière que l'on ait

$$\omega = 180^\circ + \omega_1,$$

l'équation deviendra

$$\rho = -\frac{rg\sin\omega}{g\cos\omega + r}.$$

En introduisant les coordonnées ordinaires, on trouve que la courbe est du quatrième degré. Quand les paramètres r et g sont égaux en grandeur absolue, elle se décompose en une droite et une ligne du troisième ordre (*fig.* 400).

Indicatrice. Points limites des parties réelles des courbes d'ombre pour des rayons parallèles.

1004. Nous avons vu que la droite FP (*fig.* 398) était tangente en P à la branche OPR_1 de la projection de la courbe d'ombre (art. **996**). Nous savons d'ailleurs que la droite SP parallèle à OX est la projection d'un rayon de lumière, et que la génératrice OP est une des deux asymptotes de l'indicatrice pour le point P (art. **824**). La seconde asymptote de l'indicatrice de ce point et la droite PO sont donc conjuguées harmoniques des lignes PS et PF. D'après cela, si on prend FD égale à la longueur OF ou r, la droite PD sera la seconde asymptote de l'indicatrice pour le point P considéré comme appartenant à la nappe supérieure ([1]).

Si l'inclinaison des rayons change, le point P se déplace sur la génératrice OY, mais la projection de la seconde asymptote de l'indicatrice passe toujours par le point D; la verticale de ce point est donc une génératrice de l'hyperboloïde osculateur le long de la génératrice OY (art. **825**). On peut d'ailleurs opérer de la

---

([1]) Toutes les fois que l'on connait, pour un point d'une surface, deux tangentes conjuguées et une des asymptotes de l'indicatrice, on peut construire l'autre asymptote. Quand la surface est gauche, une de ces droites est la génératrice qui sera généralement connue: par conséquent, lorsque, par quelque artifice, on aura déterminé la tangente à une courbe d'ombre pour une direction donnée de rayons, le problème de l'indicatrice se trouvera résolu.

même manière pour toute génératrice, en supposant la surface éclairée par des rayons qui soient perpendiculaires à cette droite en projection horizontale [1].

Quelle que soit la génératrice que l'on considère, si on lui élève à l'origine O une perpendiculaire égale à 2r, du côté où s'étend la branche de la spirale d'Archimède sur laquelle est sa trace, l'extrémité de cette droite appartiendra aux projections des secondes asymptotes de l'indicatrice de ses différents points.

Il nous serait maintenant facile de construire la tangente à la projection horizontale de la courbe d'ombre en un point donné. Nous reviendrons plus loin (art. **1012**) sur cette question, à l'occasion des tangentes à la courbe d'ombre dans le cas général des rayons divergents.

1005. Pour discuter la courbe d'ombre dans l'espace et voir quelles sont celles de ses parties qui sont réelles dans les différentes hypothèses que l'on peut faire, il est nécessaire de pouvoir se rendre compte de la position du plan tangent par rapport à la surface, en un point déterminé. On y parvient en supposant que l'hélicoïde se modifie jusqu'à devenir un cône.

Soient O la trace de l'axe (*fig.* 416), KV la branche de la spirale d'Archimède trace de la nappe inférieure de la surface, et M un point de cette nappe. Nous élevons au point O une droite OQ perpendiculaire à OM, et nous portons sur elle une longueur OD double du paramètre r : les droites MO et MD sont, en projection, les deux asymptotes de l'indicatrice du point M. Si l'on diminue le pas de l'hélicoïde jusqu'à le rendre nul, le paramètre r deviendra nul aussi, le point D parcourra le segment DO et l'angle DMO des asymptotes de l'indicatrice se réduira à zéro. Mais alors l'hélicoïde sera un cône dont nous n'avons à considérer que la nappe inférieure; son plan tangent au point M sera entièrement au-dessus de lui : donc la partie de la surface qui était au-dessus du plan tangent est celle qui était projetée dans l'angle DMO, et dans celui qui lui est opposé au sommet.

1006. Les points limites des parties réelles de la courbe d'ombre sont ceux où la tangente à sa projection est parallèle à la droite OX (*fig.* 398). On trouve d'abord le point O; mais, comme le plan tangent en un point de l'axe est perpendiculaire au plan de projection, on est ici dans le cas d'exception dont il a été question à l'art. **892**. Lorsqu'à l'un des points de la courbe projetés en O le rayon de lumière est une asymptote de l'indicatrice, il se confond avec la génératrice de la surface et cette droite fait partie de la ligne d'ombre (*fig.* 400). Il résulte de là que le point O considéré sur la courbe d'ombre proprement dite n'est jamais un point limite.

Soient R_1 (*fig.* 398) un point limite, OR_1 son rayon vecteur et UR_1 la projec-

---

[1] L'indicatrice étant connue, les théorèmes des articles 886 et 887 donnent immédiatement pour les asymptotes de la courbe d'ombre les positions que nous avons déterminées par d'autres considérations aux articles 998, 1000 et 1002.

tion du rayon de lumière qui y passe : ce rayon étant une asymptote de l'indicatrice, la droite OU perpendiculaire à OR_1 doit avoir une longueur égale à $2r$, et par suite on a

$$\operatorname{tang} OR_1U = \frac{2r}{OR_1}.$$

L'azimut ω du point R_1 est l'angle DOR_1 supplémentaire à OR_1U; l'équation devient donc, en appelant ρ le rayon OR_1,

$$-\operatorname{tang}\omega = \frac{2r}{\rho}.$$

Éliminant ρ entre cette équation et celle de la courbe qui a été trouvée à l'art. **1003**, on a

$$g\cos^2\omega + 2r\cos\omega + g = 0,$$

d'où

$$\cos\omega = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - g^2}}{g}.$$

Cette expression montre que la courbe n'a de points limites que quand le point P est dans l'intérieur du cercle FF_1 (*fig.* 398). Lorsque le radical est réel, il faut lui donner le signe + pour que la valeur absolue de $\cos\omega$ soit plus petite que l'unité. Nous avons donc simplement

$$\cos\omega = \frac{-r + \sqrt{r^2 - g^2}}{g}.$$

ω a deux valeurs supplémentaires à 360° qui déterminent deux points limites, l'un par un rayon vecteur positif et l'autre par un rayon vecteur négatif. La construction à laquelle l'équation précédente conduit pour l'azimut ω est facile, mais on peut obtenir plus aisément encore la position des points limites.

Si l'on appelle y la distance de ces points à l'axe OX, on a

$$y = OU \sin XOU = OU \cos R_1OF_1,$$

$$y = -2r\cos\omega;$$

d'où

$$y = \frac{2r}{g}\left(r - \sqrt{r^2 - g^2}\right).$$

D'un autre côté, les équations des droites F_1P et FK rapportées aux axes OD et OK sont

$$ry = g(r + x),$$

$$y\sqrt{r^2 - g^2} = g(r - x).$$

Éliminant x, on trouve que l'ordonnée du point de rencontre E est la même que celle des points limites. D'après cela, pour déterminer ces points, on mènera une droite par les points E et E_1; du point O comme centre et avec un rayon égal à $2r$, on décrira un arc de cercle qui coupera cette ligne au point U; on tracera ensuite OU et sa perpendiculaire OR_1. La seconde rencontre du cercle avec la droite EE_1 ferait trouver un deuxième point limite R (¹).

Lorsque les rayons de lumière ont la même inclinaison que les génératrices de la surface, g est égal à $\pm r$, la valeur de y devient $\pm 2r$, et celle de ω zéro ou 180°. La courbe a alors un point limite à l'infini.

Les détails que nous avons donnés dans ce paragraphe permettront dans chaque cas, et suivant que le corps sera placé d'un côté ou de l'autre de la surface, de déterminer les arcs réels et les arcs virtuels des courbes d'ombre.

Courbe d'ombre propre dans le cas de rayons divergents.

1007. Lorsque l'on doit déterminer la courbe d'ombre propre d'une surface de vis à filets triangulaires éclairée par des rayons divergents, on simplifie les tracés en prenant pour plan horizontal d'opérations celui qui contient le point lumineux.

Soient (*fig.* 410)

O le pied de l'axe;

OKV la spirale d'Archimède trace de la surface sur le plan horizontal qui contient le point lumineux;

S ce point;

OQ le cercle qui a pour rayon le paramètre r.

Si l'on veut déterminer le point de la ligne d'ombre situé sur la génératrice qui a sa trace en K, on élèvera la perpendiculaire OQ à la projection OK, et du point Q on abaissera la perpendiculaire QI à la droite SK, trace du plan qui contient le point lumineux et la génératrice. L'intersection M des droites OK et QI sera le point cherché (art. **991**).

1008. Si l'angle SKO était droit, les droites QI et OK seraient parallèles, et le point M se trouverait à l'infini. Les traces des génératrices qui ne rencontrent la courbe qu'à l'infini sont donc les intersections de la spirale d'Archimède OV

(¹) Cette construction peut être modifiée de diverses manières. La droite φF_1 passe au milieu e du segment OL; le point e est aussi le pied de la perpendiculaire abaissée du point q sur OP. On obtient ainsi la droite RR_1 à l'aide du point L: le point R_1 se trouve à la rencontre de cette ligne avec la divergente Pq. (MANNHEIM.)

avec le cercle décrit sur SO comme diamètre (*fig.* 412). Ce cercle coupe la spirale en trois points R, R_1 et R_2 et par suite la courbe a trois branches infinies. L'origine O est un quatrième point de rencontre : la génératrice qui y a sa trace se projette sur la droite ON tangente à la spirale. En général, la droite ON n'est pas perpendiculaire à la trace SO du plan qui contient le point S et la génératrice ON, de sorte que la construction ordinaire fait trouver sur cette droite un point N de la courbe d'ombre à distance finie. Quand la spirale est tangente au cercle à l'origine, la génératrice ON est perpendiculaire à OS et ne rencontre la courbe qu'à l'infini.

On peut considérer la spirale comme divisée en spires, c'est-à-dire en arcs tels que les azimuts de leurs extrémités diffèrent de 360°. Les génératrices qui passent à ces extrémités interceptent sur l'axe des segments égaux au pas commun des hélices. Toute spire dont le plus petit rayon vecteur est plus grand que SO ne coupe pas le cercle décrit sur cette droite comme diamètre; toute spire, au contraire, dont le plus grand rayon est plus petit que SO le rencontre deux fois. Enfin, quelque petit que soit ce cercle, la spirale le coupe ailleurs qu'à l'origine, ou bien elle le touche en ce point. Il résulte de là que la courbe d'ombre a, au moins, une branche infinie, qu'elle peut en avoir un grand nombre et qu'elle en possède deux, au plus, sur chaque partie de la surface correspondant à un segment de l'axe égal au pas des hélices.

1009. La construction de l'art. **1007** fait invariablement trouver le point O pour toutes les génératrices qui sont projetées sur SO; il est évident, en effet, que le plan qui contient une de ces droites et le point lumineux S est vertical et a son point de contact sur l'axe. Il résulte de là que pour la partie de la surface qui correspond à un segment de l'axe égal au pas des hélices, la projection horizontale de la courbe d'ombre passe deux fois au point O tangentiellement à la droite ON (art. **996** note).

1010. Nous allons maintenant déterminer directement les points de la projection horizontale de la courbe d'ombre qui sont à une distance donnée du pied de l'axe, ou, en d'autres termes, qui appartiennent à un cercle projection de deux hélices données.

Le point M (*fig.* 410) ayant été déterminé par la construction de l'art. **1007**, on voit facilement que les angles IKM et MQO sont égaux; or, si le rayon OM doit être égal à une longueur donnée R, la tangente de l'angle MQO est $\frac{R}{r}$; l'angle IKM est donc connu, et si l'on décrit sur SO un segment capable de cet angle, le point K sera son intersection avec la spirale.

Nous prenons les longueurs OG et Gg respectivement égales à R et à r, nous traçons la droite gO, et ensuite la perpendiculaire DC à OS au milieu D de OS. Enfin, du point C comme centre, nous décrivons un cercle qui passe par les points O et S : il coupe la spirale au point K, trace de la génératrice sur laquelle est le point M (¹).

Le même cercle rencontre la spirale aux points K_1 et K_2 qui font trouver les points M_1 et M_2.

1011. L'axe étant supposé divisé en segments égaux au pas des hélices, les arcs de la courbe d'ombre sur les parties correspondantes de la surface ne sont pas identiques. La projection horizontale d'un arc qui n'a pas de branche infinie présente, avec la ligne de la *fig.* 398, une ressemblance d'autant plus grande que la partie de la surface sur laquelle il se trouve est plus éloignée du point lumineux. Quand cette partie est à une très grande distance du point lumineux S, les projections des arcs sont très resserrées près l'origine O, car les plans passant par le point S et par les différentes génératrices sont presque verticaux, et ont leur point de contact rapproché de l'axe. On peut d'ailleurs vérifier que la construction de l'art. **1007** donne des points très voisins du pied de l'axe, quand on opère sur les génératrices qui ont leurs traces sur les grandes spires de la spirale d'Archimède.

Dans l'espace, la courbe rencontre l'axe à des intervalles égaux à la moitié du pas des hélices (art. **1009**) ; au delà des parties où sont ses branches infinies, elle se resserre de plus en plus sur l'axe qui doit, par conséquent, être considéré comme étant une de ses asymptotes.

Tangentes et asymptotes des courbes d'ombre. Points limites de ces lignes dans le cas de rayons divergents.

1012. Le procédé facile que nous avons pour la détermination des asymptotes de l'indicatrice, en un point quelconque de la surface de la vis à filets triangulaires (art. **1004**), permet de construire rapidement les tangentes à la courbe d'ombre. Nous examinerons d'abord ce problème sur la projection horizontale.

Soient (*fig.* 416)

S le point lumineux;
OK la projection d'une génératrice;
K la trace de cette droite;
O la trace de l'axe;
OQ le cercle auxiliaire dont le rayon est r : en appliquant à la droite OK la construction de l'art. **1007**, on trouve que la courbe d'ombre passe au point M.

(¹) La construction de l'article **1010** nous a été communiquée par Bour ; on peut en déduire les tracés qui ont été exposés à l'article 1008.

Nous prolongeons le rayon OQ d'une longueur égale QD, nous traçons DM : les droites MO et MD sont les deux asymptotes de l'indicatrice du point M, MS est le rayon de lumière : la tangente à la courbe d'ombre étant l'harmonique conjuguée du rayon lumineux par rapport aux asymptotes de l'indicatrice, on en obtient un point R en menant la parallèle EG à MD et en la prolongeant d'une longueur GR égale au segment EG.

Cette construction ne peut pas servir pour les asymptotes. Nous allons la modifier de manière à la rendre d'une application plus générale, tout en lui conservant sa simplicité.

Nous traçons la droite SD qui rencontre la tangente en *d* et nous construisons le triangle *dam*, homothétique au triangle DOM et ayant avec lui le point S pour centre de similitude. La droite MO partage en deux parties égales le côté *md* parce qu'il est parallèle à ER, et ensuite le côté *ad* parce qu'elle est elle-même parallèle à la base *am*. Le point *l* est donc le milieu du côté *ad*, et par conséquent il se trouve sur la droite qui va du point S, centre de similitude, au milieu Q de OD.

D'après cela, pour avoir le point *d* de la tangente M*d*, il suffit de tracer la droite SQ, de mener, par le point *l* où elle rencontre la génératrice OM, la parallèle *al* à OQ, et de prolonger cette ligne d'une longueur égale à elle-même du côté du point *l*. Les tangentes à la courbe aux points situés sur la droite indéfinie OK passent toutes par le point *d*.

Quand les rayons sont parallèles, le point S est à l'infini et la droite Q*l* doit être parallèle à la droite OX (*fig.* 397, 398, 400 et 402) [1].

1013. La *fig.* 412 montre une application de la construction que nous venons d'expliquer à la détermination de l'asymptote *ed* d'une branche infinie. La trace de cette droite est au point *e*, sur la trace R*e* du plan qui touche la surface au point situé à l'infini sur la génératrice OR.

Si la spirale d'Archimède rencontre tangentiellement le cercle OS en un point R (*fig.* 418), la droite RQ est la normale commune (art. **992**), et par conséquent le centre du cercle est au point C où cette droite coupe OS. Le point Q doit d'ailleurs être sur le cercle, car l'angle ROQ est droit. Il résulte de là que les droites RO et SQ qui passent aux extrémités des diamètres SO et RQ sont parallèles ; le point *l* (*fig.* 412) est par conséquent à l'infini, le segment *al* est infini et la branche infinie de la courbe d'ombre est parabolique.

1014. Quand on connaît la projection horizontale d'une tangente, on construit

---

(1) Cette construction nous a été communiquée par Bour qui y était parvenu par l'analyse ; nous l'avons rattachée au théorème des tangentes conjuguées, eu égard à la nature spéciale de cet Ouvrage.

Poncelet a trouvé par la méthode de Roberval une construction également très simple pour la tangente à la projection horizontale de la courbe d'ombre de la surface de la vis à filets triangulaires, mais seulement dans le cas où les rayons sont parallèles. (*Applications d'Analyse et de Géométrie.*)

facilement sa projection verticale par la considération du plan tangent au point correspondant de la surface. Toutefois ce procédé ne peut pas être employé lorsque le point considéré est sur l'axe, parce que le plan tangent est vertical. Il faut alors recourir au théorème des tangentes conjuguées : les deux asymptotes de l'indicatrice sont l'axe et la génératrice.

1015. Nous terminerons ce qui concerne les courbes d'ombre en disant quelques mots sur la détermination de leurs points limites.

Le point M de la courbe d'ombre (*fig.* 415) est un point limite quand le rayon de lumière SM est la seconde asymptote de l'indicatrice, et par conséquent quand ce rayon passe par le point D, situé sur la perpendiculaire OQ à OM, à une distance de O double du paramètre r.

Si nous décrivons un cercle du point O comme centre et avec un rayon égal à OD, et si nous considérons S comme un point fixe de divergence, le point M sera sur la courbe que l'on obtiendra à l'aide du cercle et du point S par la construction de l'art. **995**. Les points limites sont les intersections de cette courbe auxiliaire et de la courbe d'ombre, pourvu toutefois qu'elles résultent d'azimuts et de rayons vecteurs égaux et non d'azimuts inverses avec des rayons vecteurs contraires.

On reconnait, comme dans le cas des rayons parallèles (art. **1006**), que les points de la courbe projetés sur le point O ne sont jamais des points limites.

Représentation d'une surface de vis à filets triangulaires et de ses ombres.

1016. Nous avons représenté sur la *fig.* 409 une partie de la nappe inférieure d'une surface de vis à filets triangulaires éclairée par des rayons parallèles. Le cercle BG, projection de l'hélice directrice, a été divisé en quatorze parties égales, et les génératrices qui passent par les points de division ont été tracées sur les deux plans de projection. Leur enveloppe sur le plan vertical est le contour apparent de la surface, ou la projection verticale de sa ligne de contact avec un cylindre circonscrit perpendiculaire à ce plan. La projection horizontale de ce contour apparent est une courbe D_1OD, ..., H_1OH du genre de celle que nous avons étudiée à l'art. **1002**. Les génératrices du cylindre circonscrit étant perpendiculaires au plan vertical, les droites qui divergent du point fixe situé à l'infini sont parallèles à la ligne de terre. Nous traçons le cercle auxiliaire KA qui a pour rayon le paramètre r et nous obtenons ensuite la courbe sans difficulté. Les points situés sur l'hélice directrice doivent être déterminés directement. La discussion des différentes parties du contour apparent se fait comme pour la courbe d'ombre dont nous nous occuperons à l'article suivant; nous

nous bornerons ici à dire que les arcs DO et OH sont seuls utiles, parce que nous ne considérons que la partie de la surface comprise entre l'axe et l'hélice directrice. En relevant sur le plan vertical les points où ces arcs rencontrent les projections horizontales des différentes génératrices, nous avons les positions précises des points où les droites tracées sur le plan vertical touchent leur enveloppe.

Une asymptote du contour apparent dans l'espace est déterminée par sa projection horizontale et par le plan tangent à la surface au point situé à l'infini sur la génératrice parallèle. L'asymptote de la branche ODH_1O est donc l'intersection du plan vertical B_1G_1 et du plan $(B_1B_2, B'L)$ tangent au point situé à l'infini sur la génératrice (BO, B'L), c'est-à-dire la droite $(B_1G_1, B'L)$ pour la première spire. Les projections des génératrices parallèles au plan vertical sont ainsi les asymptotes du contour apparent sur ce plan, ce qu'il était facile de prévoir, car elles doivent être tangentes à cette courbe, comme les projections des autres génératrices.

1017. Nous supposons la surface éclairée par des rayons parallèles à la droite R' située dans le plan vertical; nous déterminons alors le point fixe P et nous construisons la projection horizontale de la ligne d'ombre (art. **995**) : elle est du genre de la courbe qui est représentée sur la *fig.* 402. On relève ensuite ses différents points sur le plan vertical. Il serait facile de tracer ses asymptotes, mais elles présentent peu d'intérêt pour les arcs qui se projettent dans l'intérieur du cercle BG.

On peut facilement discuter les différentes parties de la courbe d'ombre, à l'aide des principes que nous avons posés dans les articles précédents. Le point M est sur la divergente PQ et correspond au rayon OQ; la branche de la spirale d'Archimède sur laquelle se trouve la trace de la génératrice OM s'étend donc du côté où se trouve le point Q. On reconnaît ainsi que le point M appartient à la nappe inférieure (art. **991**). Les deux asymptotes de l'indicatrice sont MO et MQ_1; lorsque l'hélicoïde se réduit à un cône, la partie OMQ_1 disparaît : c'est donc celle qui contient les courbes dont les tangentes au point M sont au-dessous de la surface (art. **1005**). Le rayon de lumière SM situé hors de cet espace angulaire est au-dessus de l'hélicoïde, et par suite le point M est utile et vu sur le plan horizontal. Il en est de même de tout point des branches $O\delta$ et $O\alpha$. Sur la projection verticale, les points de la première $\delta F'$ sont vus et ceux de la seconde $\alpha L'$ cachés.

La surface étant limitée à l'axe, les génératrices B'L et B''L', qui sont dans un plan passant par l'axe et parallèle aux rayons de lumière, forment la ligne d'ombre portée sur la face inférieure de la nappe, au moins dans la partie vue.

Représentation d'une vis à filets triangulaires et de son écrou.

1018. Une *vis à filets triangulaires* se compose d'un noyau plein qui a la forme d'un cylindre de révolution, et d'un solide hélicoïde dont la génératrice méridienne est un triangle $B'C'_1B'_1$ (*fig.* 407), placé de manière que sa base $B'B_1$ soit un segment d'une génératrice du cylindre. En général, le triangle est isoscèle et le pas des hélices que décrivent ses différents points est égal à la base $B'B'_1$ [1]. Il résulte de là d'abord que les points B' et B'_1 se meuvent sur une même hélice, et ensuite que les surfaces de vis à filets triangulaires auxquelles appartiennent les zones engendrées par les droites $B'C'_1$ et $C'_1B'_1$ ont un même paramètre r. Il peut arriver que ces zones appartiennent aux deux nappes d'une même surface.

Une vis a le plus souvent à l'une de ses extrémités une *tête* qui est un solide prismatique dont les bases sont perpendiculaires à son axe. Elle glisse en tournant dans un *écrou*, corps limité intérieurement aux surfaces hélicoïdes qui la terminent elle-même extérieurement.

Pour représenter une vis à filets triangulaires, on trace d'abord les projections horizontales et les projections verticales des deux hélices suivant lesquelles se coupent les deux faces du filet. Sur le plan vertical, nous avons limité ces hélices aux droites XY et S″U″, qui représentent le plan de la face supérieure de l'écrou et celui de la face inférieure de la tête.

Le contour apparent sur le plan vertical est formé de lignes courbes, mais elles sont rapprochées de leurs asymptotes (art. **1016**), et vu leur peu de longueur on peut les tracer comme des droites. On les obtient d'une manière suffisamment exacte en menant des tangentes communes aux arcs consécutifs des sinusoïdes qui forment la projection verticale des hélices d'intersection.

Ces deux courbes rencontrent le plan S″U″ aux points (L, L′) et (M, M′). Les deux faces du filet rencontrent le même plan suivant deux arcs de spirale d'Archimède qui vont du point L au point M.

Nous avons représenté l'écrou par une projection horizontale et par une coupe verticale : le plan sécant COE est méridien et parallèle au plan vertical (*fig.* 408). La ligne de contour apparent qui passe près des points B′ et C_1 (*fig.* 407) est au delà du plan CD, elle appartient donc à la partie de la surface qui est conservée sur la *fig.* 408; mais cette courbe étant réelle sur la vis est nécessairement virtuelle sur l'écrou : nous ne l'avons pas tracée. Les demi-spires

---

(1) On fait des vis à double et même à triple filet; le profil générateur est alors composé de deux ou de trois triangles égaux, et le pas est égal à deux ou à trois fois la longueur de leur base: quelquefois le filet est engendré par la révolution hélicoïde d'un trapèze (*fig.* 406).

de l'hélice BD sont vues entièrement, celles de l'hélice CE sont cachées sur de très petites longueurs près des sommets C′, C'_1, ... des angles rentrants, car les tangentes à leurs projections en ces points sont verticales.

La sinusoïde projection verticale de l'hélice CE rencontre la droite X_1Y_1 en un point J′, que nous ramenons en J sur la projection horizontale. Les deux arcs de spirale d'Archimède qui limitent les faces du filet à leur partie supérieure partent du point J et aboutissent au point A diamétralement opposé sur le cercle BD.

1019. *Ombres propres de la vis.* — Nous supposons maintenant la vis éclairée par des rayons parallèles à une droite (R, R′) (*fig.* 407), et nous allons déterminer ses ombres.

Nous construisons d'abord la longueur $O\alpha$ du paramètre r, et nous décrivons un cercle du point O comme centre avec ce paramètre pour rayon. Les tracés expliqués à l'art. **995** nous donnent ensuite le point fixe P : il doit être placé, par rapport à la projection du rayon de lumière qui passe par le point O, d'un côté différent de celui où il se trouve sur la *fig.* 401, car les hélicoïdes sont de même sens (*sinistrorsum*) et les rayons de lumière sont inclinés en sens contraire. Nous déterminons alors la courbe $\lambda O\nu$ ..., $\varphi POP\tau$, projection horizontale de la ligne d'ombre, en ayant soin de construire directement les points situés sur les deux hélices qui forment l'arête saillante et l'arête rentrante des filets (art. **997**). Chaque partie comprise entre les cercles CE et BD est la projection horizontale d'un arc de la ligne d'ombre de l'une des faces du filet. Des considérations analogues à celles que nous avons présentées à l'art. **1017** permettent de reconnaître à laquelle des deux faces appartient chacun des arcs, et font voir qu'ils sont tous réels.

Pour obtenir la projection verticale d'un arc réel, d'après sa projection horizontale, on relève les points extrêmes sur les hélices et on détermine un point intermédiaire en traçant d'abord la projection horizontale, puis la projection verticale de la génératrice à laquelle il appartient.

Ombre portée par la vis sur le plan horizontal. — On construit ensuite les ombres portées sur le plan horizontal par les différentes lignes de la vis. L'ombre de l'hélice saillante est la courbe $K\tau''kn''k_1$, ...; nous savons que c'est une cycloïde allongée engendrée par le point K, quand le cercle dont le rayon est OP roule sur la tangente PP_1 parallèle à R (art. **955**).

Les ombres des lignes $\nu'_1\mu'_1$, $\lambda'_1\chi'_1$, $\psi'_1\varphi'_1$, $\tau\xi'$ sont les arcs $\nu''_1\mu''_1$, $\lambda''_1\chi''_1$, $\psi''_1\varphi''_1$, $\tau''\xi''$, ...; ils appartiennent à deux courbes distinctes qui correspondent l'une à la face supérieure du filet, l'autre à la face inférieure, et qui sont les enveloppes des ombres portées par les lignes tracées sur les deux hélicoïdes (art. **571**). Ces arcs se raccordent par suite tangentiellement avec l'ombre de l'hélice saillante à leurs points de rencontre λ''_1, ν''_1, τ'' et φ''_1.

Les ombres des arêtes (ST, S″T″), (TU, T″U″) de la tête de la vis sont les lignes S_1T_1 et T_1U_1.

Ces différentes lignes font connaître la limite de l'ombre portée sur le plan horizontal, et donnent tous les éléments nécessaires pour la détermination des ombres sur la projection verticale.

Ombre portée par la vis sur elle-même. — Nous allons déterminer les ombres que la vis porte sur elle-même par la méthode des projections obliques (art. **570-575**), et d'après les lignes d'ombre que nous avons obtenues sur le plan horizontal. Les courbes $\nu''_1\mu''_1$ et $\lambda_1\chi_1$ sont les traces des cylindres circonscrits parallèles aux rayons de lumière, et dont les lignes de contact sont $\nu'_1\mu'_1$ et $\lambda'_1\chi'_1$; ces traces se coupent en un point ω'', et par suite les cylindres ont une génératrice commune, dont la projection verticale $\omega'_1\omega''_1$ passe par le point ω''_1 projection de ω''. Les arcs $\lambda'_1\omega'_1$ et $\omega'\nu'_1$ projettent leur ombre sur le plan horizontal, l'arc $\mu_1\omega$ n'est pas éclairé et l'ombre de l'arc $\omega'_1\chi'_1$ est reçue par la face supérieure du filet inférieur; elle s'étend de χ'_1 à ω'. Pour en avoir un point intermédiaire, nous traçons une génératrice rectiligne (mn, $m'n'$) de l'hélicoïde, et nous déterminons son ombre $n''m''$. Cette ligne coupe la projection $\lambda''_1\chi''_1$ en un point d'', et par suite le rayon de lumière qui aboutit à ce point rencontre successivement la courbe d'ombre propre $\lambda'_1\chi'_1$ et la génératrice $m'n'$; le point d', ramené de d'', est donc un point de la trace, sur la face supérieure du filet, du cylindre circonscrit le long de la ligne $\lambda'_1\chi'_1$.

Les autres déterminations se font d'après les mêmes principes et ne présentent pas plus de difficultés. Le point g'' fait connaître le point g' où le plan d'ombre de l'arête (ST, S″T″) rencontre l'hélice saillante. En traçant des génératrices rectilignes sur les deux faces du filet, de part et d'autre de g', et considérant les intersections de leurs ombres avec les droites S_1T_1 et T_1U_1, on détermine par points l'ombre qui est projetée sur la vis par les arêtes (ST, S″T″) et (TU, T″U″).

Les lignes T_1U_1 et $\lambda''_2\chi''_2$ se rencontrent en un point t'' que nous ramenons d'abord en t''_1, puis en t', en t'_1 et en t'_2. L'ombre du segment $T''t'_2$ est $f't'$. L'ombre de l'arête T″U″, au delà du point t'_2, est reçue sur le filet suivant à partir du point t_1.

On détermine par les mêmes principes les ombres portées sur le plan vertical.

Nous n'avons tracé les lignes d'ombre cachées que lorsqu'elles sont utiles pour la construction.

1020. *Ombres de l'écrou.* — Les lignes d'ombre propre étant réelles sur la vis sont virtuelles sur l'écrou, et par suite les figures de la *Pl. XXVII* n'ont que des ombres portées. Pour obtenir leurs contours, nous projetons, par des droites parallèles au rayon (R, R′), les différentes arêtes sur un plan horizontal dont nous avons placé la ligne de terre X″Y″ à la hauteur du point D'_1. L'ombre portée sur le plan horizontal par un point est indiquée par la lettre qui désigne le point, avec un double accent : ainsi H″ est l'ombre du point (H, H′).

Les courbes $H''J''$ et $B''_2D''_2$, projections obliques de la spirale d'Archimède $H'J'$ et de la demi-spire $B'_2D'_2$, se coupent en un point β'' : le point correspondant β' de l'hélice est celui où cette courbe reçoit l'ombre de la spirale. On détermine d'une manière analogue les points γ', δ' et ε' où l'ombre de la ligne brisée $H'F'$ coupe les demi-spires $C'_2E'_1$, $B'_1D'_1$ et C'_1E'. On obtient des points intermédiaires de la courbe d'ombre portée en considérant des génératrices rectilignes. La génératrice $(mn, m'n')$ a pour projection oblique la droite $m''n''$ qui rencontre en σ'' et en π'' les projections $C''_2B''_2$ et $H''J''$ de l'arête $(CB, C'_2B'_2)$ et de la spirale $(HJ, H'J')$. Ces points font connaître les intersections σ' et π' de la génératrice avec la ligne d'ombre.

Nous avons reproduit de la *fig.* 407 la ligne d'ombre propre $(\psi\varphi, \psi'\varphi')$; le point (α, α') où elle rencontre la spirale est l'origine de la courbe d'ombre portée par la spirale d'Archimède sur le filet, car le rayon de lumière qui passe par ce point y est tangent à la surface : c'est celle des génératrices du cylindre d'ombre de la spirale, dont les deux points situés sur la face du filet se sont réunis en un seul.

A partir du point où commence l'ombre de la ligne brisée $H'F'$, les mêmes contours se reproduisent sur les filets. Le point δ'_1 se trouve par suite sur la verticale de δ'.

Hélicoïde de la vis à filets triangulaires employé comme surface auxiliaire.

1021. L'hélicoïde que nous venons d'étudier peut être employée comme surface auxiliaire dans divers problèmes relatifs aux surfaces gauches; mais le seul cas où cette méthode présente des avantages réels sur les procédés ordinaires est celui où la surface considérée a une directrice rectiligne et où ses génératrices rencontrent cette droite sous des angles égaux; car on obtient alors sans difficulté des hélicoïdes de raccordement.

Supposons qu'une droite se meuve en restant normale à un cône de révolution aux différents points d'une section plane, et proposons-nous de construire le plan tangent en un point à la surface qu'elle engendre. Nous prenons des plans de projection tels que l'axe du cône soit une verticale (S, AS') (*fig.* 403), et que le plan sécant (PG, GL) soit perpendiculaire au plan vertical.

La génératrice $(SC, S'C')$ coupe le plan au point (M, M'). Si l'on suppose que cette droite tourne sur le cône, jusqu'à devenir parallèle au plan vertical, le point M' se placera en m', et la normale en ce point sera la droite $m'\omega$ perpendiculaire à $m'S'$. La normale au cône au point (M, M') est donc la droite $(SM, \omega M')$.

Nous allons chercher le plan tangent à la surface gauche en un point (N, N') de cette génératrice.

La trace horizontale du plan tangent à la surface au point (M, M') passe aux points V et K, traces de la génératrice et de la tangente à la directrice. L'intersection de ce plan et du plan vertical MT, perpendiculaire à SM, est (MT, M'T').

La surface donnée se raccorde le long de (SN, ωN') avec l'héliçoïde qui a pour axe la verticale (S, AS'), dont une hélice passe au point (M, M') tangente à la droite (MT, M'T'), et dont le cône directeur est celui que décrit la droite $\omega m'$ (art. **614**). Nous pouvons donc opérer sur cette surface auxiliaire.

Le plan tangent au point (N, N') est déterminé par la génératrice et par la tangente à l'hélice. Pour obtenir la trace horizontale de cette dernière droite, nous remarquons que, les hélices décrites par les points (N, N') et (M, M') ayant des pas égaux, les cotangentes de leurs inclinaisons sont proportionnelles aux rayons SN et SM. D'après cela, si le point (N, N') était en (N, N'') à la hauteur de (M, M'), la tangente à l'hélice en N aurait sa trace au point U sur la droite ST, et sa projection verticale serait N''U'; dans la position où se trouve réellement le point (N, N'), la tangente à l'hélice a pour projection verticale la droite N'R' parallèle à N''U'; d'où il suit que sa trace horizontale est au point R et que la droite RV est la trace horizontale du plan cherché.

Si l'on avait plusieurs plans tangents à construire en des points d'une même génératrice, on déterminerait le paramètre r de l'héliçoïde de raccordement, et l'on appliquerait les tracés de l'art. **991**.

L'axe, considéré comme directrice de la surface gauche, n'est utile que sur la longueur du segment AB. Les points A et B sont par conséquent des sommets (art. **632**). Quelle que soit la forme de la directrice tracée sur le cône de révolution, aux points où la tangente à cette courbe est horizontale, l'héliçoïde de raccordement se change en un cône; les sommets de ces cônes sont des sommets de la surface gauche.

1022. Quand deux surfaces gauches se raccordent le long d'une génératrice, cette droite a le même point central dans les deux surfaces. Il résulte de là, et des considérations présentées dans l'article précédent, que, *quand une surface gauche a une directrice rectiligne et que les génératrices rencontrent cette droite sous un angle constant, la ligne de striction de la surface est cette directrice.*

1023. *Extension à l'héliçoïde gauche général des constructions relatives à la surface de la vis à filets triangulaires.* — On peut étendre assez facilement à l'héliçoïde gauche général les diverses constructions expliquées pour la surface de la vis à filets triangulaires. Nous nous bornerons à ce qui concerne le plan tangent.

Soient (CD, C'D') l'hélice de gorge (*fig.* 425 *bis*), (FB, E'B') une génératrice parallèle au plan vertical, et NK une génératrice quelconque : nous nous proposons de construire le plan tangent au point M de cette droite.

Si la génératrice (FB, E′B′) entraîne dans son mouvement la droite (OA, E B) qui lui est parallèle, cette dernière ligne engendrera une surface de vis à filets triangulaires, dont la trace sera une spirale d'Archimède AV que nous savons construire. Lorsque la génératrice FB aura la position NK, la droite parallèle OA, devenue OR, aura sa trace en R, et l'on obtiendra la trace K de la génératrice en prenant, à partir du point N, une longueur égale à OR.

Par le point C′, nous menons deux droites C′S et C′L respectivement parallèles à B E′ et à la tangente à l'hélice de gorge au point (F, E′) : la longueur LS est égale au paramètre des génératrices (art. **961**).

L'hélicoïde se raccorde le long de la génératrice NK avec une surface de vis à filets triangulaires qui a pour axe la verticale du point N, et dans laquelle le paramètre des génératrices est égal à LS. D'après cela, si nous prenons sur le rayon ON une longueur NQ égale à LS cot YB′E′ ou Lq, il suffira, pour obtenir la trace du plan tangent en M, de mener la droite QM, et de lui abaisser une perpendiculaire du point K.

En conservant les notations de l'art. **960**, et en ayant égard aux résultats obtenus dans cet article, on a

$$OQ = ON + NQ, \quad OQ = b + k_1 \cot\alpha, \quad OQ = h \cot\alpha.$$

La longueur OQ est donc indépendante du rayon b; on la construit comme pour une surface de vis à filets triangulaires, et on la porte du côté du point O où s'étend la branche de la courbe spirale sur laquelle la génératrice considérée a sa trace [1].

Observations générales sur les rayons de courbure et les lignes asymptotiques de la surface de la vis à filets triangulaires.

1024. Nous pouvons déterminer les rayons de courbure des sections principales d'une surface de vis à filets triangulaires en un point donné, car le théorème de l'art. **826** nous fait connaître leur produit, et il est facile d'obtenir leur rapport en construisant l'angle des asymptotes de l'indicatrice.

---

(1) Le lecteur qui voudra avoir plus de détails sur les constructions relatives à l'hélicoïde gauche général pourra consulter le Mémoire que nous avons publié dans le XXXIV^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

Nous complétons cette Note de l'Auteur en citant un Mémoire de M. Karl Pelz « sur la détermination des contours apparents des hélicoïdes gauches », publié à Vienne, en 1883, dans les *Comptes rendus* des séances de l'Académie impériale des Sciences. La construction de l'art. 1023 y est obtenue en considérant un paraboloïde de raccordement le long de chaque génératrice rectiligne, et appliquée à la détermination du contour apparent vertical de l'hélicoïde oblique général à axe vertical. En outre, M. Karl Pelz démontre, sans appliquer le théorème des tangentes conjuguées, une construction simple des tangentes à la projection horizontale de ce contour. (E. L.)

Nous avons vu à l'art. **1004** que la projection de la seconde asymptote de l'indicatrice d'un point M (*fig.* 416) est la droite MD, qui coupe la perpendiculaire OD à OM en un point D situé à une distance de l'axe égale à $2r$. Il résulte de là que la projection horizontale d'une ligne asymptotique, autre que les génératrices, a ses sous-tangentes égales à une quantité constante $2r$. La courbe qui jouit de cette propriété est appelée *spirale hyperbolique*.

CHAPITRE IV.

SURFACE DE LA VIS A FILETS CARRÉS.

Définitions. — Propriétés générales.

1025. On appelle *surface de la vis à filets carrés* (¹) la surface engendrée par le mouvement hélicoïde d'une droite autour d'un axe qu'elle rencontre à angle droit. Cet hélicoïde est tout à la fois une variété de la surface de la vis à filets triangulaires et un conoïde droit (art. **669**).

Deux génératrices ne peuvent pas se rencontrer, car elles sont dans des plans horizontaux différents : la surface n'a donc pas d'hélices doubles dont les points soient à une distance finie de l'axe.

L'angle des génératrices avec le plan horizontal étant nul, le paramètre r, rayon du cylindre sur lequel est tracée l'arête de rebroussement de l'hélicoïde développable asymptote, est infini (art. **989**), et par conséquent cette surface disparait à l'infini, ce qui doit être, puisque la surface de la vis à filets carrés est un conoïde (art. **641**).

1026. Une surface de vis à filets carrés étant déterminée par l'axe (O, O'Z') et par l'hélice directrice (AB, A'B'A'') (*fig.* 417), cherchons son intersection avec le cylindre vertical dont la trace horizontale est le cercle de diamètre AO.

Le point (m, m'), où une génératrice (OM, O''M') coupe ce cylindre, est à la même hauteur que le point (M, M') de l'hélice directrice, et l'angle ACm est double de l'azimut AOM de ce dernier point; mais l'ordonnée et l'azimut du point (M, M') sont dans un rapport constant, l'ordonnée du point (m, m') et son azimut mesuré, en prenant pour origine le point C centre du cercle AmO, sont donc aussi dans un rapport constant, qui est la moitié du précédent; il résulte

(¹) *Voir* la Note de l'art. 958.

de là que le lieu des points (m, m') est une hélice dont le pas est la moitié du pas de l'hélice directrice (AB, A'B').

Nous voyons ainsi que, *quand une génératrice d'un cylindre de révolution se confond avec l'axe d'une surface de vis à filets carrés, l'intersection de ces deux surfaces est une hélice dont le pas est la moitié du pas de l'hélicoïde.*

Une spire de l'hélice *excentrique* AmO coupe en deux points chacune des hélices *génératrices* dont la distance à l'axe est plus petite que OA, et touche en A celle dont la projection est ANB.

Considérons le point (D, D') de l'hélicoïde et traçons deux droites perpendiculaires à OD, passant l'une par le point D, l'autre par le milieu L de OD : tout point de celle-ci, tel que E, est le centre d'un cercle qui passe par les points O et D; ce cercle touche en F celui qui est décrit du point O comme centre avec OF pour rayon. Il résulte de là que l'*on peut tracer sur une surface de vis à filets carrés, par un point quelconque* D, *une infinité d'hélices excentriques, et que ces courbes touchent les hélices génératrices de l'hélicoïde aux points de la section faite par un plan vertical* FH [1].

Plans tangents. — Sections planes.

1027. Les constructions que nous avons trouvées pour la surface de la vis à filets triangulaires s'appuient presque toutes sur un cercle auxiliaire, qui a pour rayon le paramètre r, et sur une spirale d'Archimède, lieu des traces horizontales des génératrices. Elles sont, pour la plupart, inapplicables à la surface de la vis à filets carrés, parce que le paramètre r devient infini et que les génératrices sont parallèles au plan horizontal; mais, en se reportant à la théorie des conoïdes, on obtient facilement d'autres tracés généralement très simples.

1028. *Construction du plan tangent à l'hélicoïde en un point donné.* — Soient O la trace horizontale de l'axe (*fig.* 411), BN le cercle projection de l'hélice directrice, B la trace de cette courbe, et M un point d'une génératrice OC où l'on veut construire un plan tangent.

La tangente à l'hélice directrice au point N se projette sur la tangente NT au cercle, et a sa trace en un point T que l'on détermine en prenant la longueur NT égale à l'arc NB (art. **949**).

Le paraboloïde qui a pour directrices l'axe et la tangente NT à l'hélice, et pour plan directeur le plan horizontal, se raccorde avec la surface le long de la génératrice ON; sa trace sur le plan horizontal est la droite OT. La parallèle MG

---

[1] Nous croyons que les deux théorèmes de l'art. 1026 sont dus à Th. Olivier (*Développements de Géométrie*).

à NT est la trace d'un plan vertical qui, étant parallèle aux deux directrices rectilignes du paraboloïde, coupe cette surface suivant une génératrice du second système. Le plan tangent est déterminé par cette droite dont la trace est G, et par la génératrice horizontale OC : sa trace est donc la droite GH parallèle à OC [1].

On voit qu'il est possible de faire la construction en opérant sur le plan horizontal seulement.

Si l'on devait construire plusieurs plans tangents, il serait utile de tracer la développante BTV du cercle BX. Cette courbe est, comme nous le savons, le lieu des pieds des tangentes à l'hélice.

La même construction, faite en ordre inverse, donne le point de contact M d'un plan qui contient une génératrice OC et dont on connaît la trace GH. On détermine la trace OT du paraboloïde de raccordement; cette ligne rencontre la droite GH en un point G que l'on projette sur OG.

1029. *Sections planes.* — Si la surface est divisée en parties correspondant aux différentes spires de l'hélice directrice (*fig.* 417), on pourra déterminer sur chacune d'elles deux génératrices (ON, $\omega N'$ et ON_1, $\omega_1 N'_1$) parallèles à la trace horizontale PQ d'un plan sécant, quelle que soit sa direction. Toute section plane aura donc deux branches infinies sur chaque partie de la surface. Les asymptotes sont les intersections du plan par les plans horizontaux contenant les génératrices (art. **641**).

Quand le plan sécant contient une génératrice, cette droite forme une branche infinie de l'intersection; la courbe proprement dite passe au point de la génératrice où le plan touche la surface. Enfin, lorsque le plan est horizontal, l'intersection se réduit à une génératrice et à la directrice rectiligne que la surface possède à l'infini (art. **641**).

Ligne d'ombre propre pour des rayons parallèles.

1030. On peut déterminer la projection horizontale de la ligne d'ombre propre par la construction de l'art. **995**, en remarquant que le cercle auxiliaire a un rayon infini. Traçant alors du point fixe P une divergente quelconque PQ (*fig.* 420), on lui mènera une parallèle OQ_1, et on élèvera à ces droites une perpendiculaire OM : la courbe est le lieu des points M, pieds des perpendiculaires abaissées de la trace O de l'axe sur les droites qui divergent du point P, c'est-à-dire le cercle ayant OP pour diamètre. Par suite, et conformément au

[1] Cette construction est identique avec celle que nous avons exposée à l'article 672 pour le plan tangent au conoïde de la voûte d'arêtes en tour ronde.

théorème de l'art. **1026**, la ligne d'ombre dans l'espace est une hélice excentrique.

1051. Il est facile d'établir que la projection horizontale de la courbe d'ombre propre est un cercle, d'une manière directe, en partant de la construction de l'art. **1028**. Nous supposons le rayon de lumière (R, R') parallèle au plan vertical (*fig.* 421); nous considérons une génératrice (ON, O'_1N'), et nous déterminons successivement la trace KG du plan passant par cette droite et parallèle aux rayons, la trace TG du paraboloïde de raccordement formé par les tangentes aux hélices, et le point M de la courbe d'ombre.

Nous pouvons supposer que le plan horizontal s'élève ou s'abaisse de manière à se trouver toujours à une même hauteur au-dessous de la génératrice considérée; alors la trace A de l'hélice directrice est en un point variable du cercle ANC, l'arc AN a une grandeur constante ainsi que l'angle TON, et le point K est fixe.

L'angle OGK égal à TON est constant, et ses côtés passant respectivement par deux points fixes O et K, son sommet se meut sur un cercle. Si nous prolongeons la droite GM jusqu'à ce cercle en P, le point P sera fixe, car l'angle OGP complémentaire de TON est constant. Le sommet M de l'angle droit PMO décrit donc un cercle ayant OP pour diamètre.

Dans le quadrilatère inscrit POKG, l'angle en G est droit; l'angle en O est donc aussi droit, et par suite le diamètre OP du cercle POM est perpendiculaire à xy.

Lorsque le point M est en P, G se trouve en G_1, l'angle G_1OP est égal à TON, et l'on a

$$OP = \frac{OK}{\operatorname{tang} TON}.$$

On trouve d'ailleurs

$$OK = O'O'_1 \cot\gamma, \quad \operatorname{tang} TON = AON,$$

γ étant l'angle $O'K'O'_1$ des rayons de lumière avec le plan horizontal.

En portant ces valeurs dans l'expression de OP, on obtient

$$OP = \frac{OO'_1}{AON} \cot\gamma;$$

et, en introduisant le pas réduit h,

$$OP = h \cot\gamma.$$

Nous n'avons ainsi que la grandeur absolue du diamètre OP. En faisant sur la direction des ordonnées positives les mêmes conventions qu'à l'art. **995**, on reconnaît, d'après la position du point P sur la figure, que son ordonnée est de signe contraire au produit $h\cot\gamma$.

On peut, sans s'inquiéter du signe, déterminer l'extrémité P du diamètre qui est sur l'axe OY_1, en cherchant par la construction directe le point de la courbe situé sur cette droite.

1032. Les tangentes au cercle PMO aux points O et P sont parallèles à la projection R du rayon de lumière. Nous savons d'ailleurs que les plans tangents à la surface de la vis à filets carrés ne sont verticaux qu'aux points situés sur l'axe. Les points dont la projection est P sont donc des points limites (art. **892**). Ceux qui se projettent sur l'origine O ne sont pas limites, car les tangentes à une hélice aux points situés dans un plan méridien, de part et d'autre de l'axe, sont inclinées en sens contraire. Ainsi la tangente à l'hélice d'ombre (OMP, O'M'P'), au point (O, O'), a une inclinaison en sens contraire de la tangente au point limite (P, P'). Ce résultat est conforme à celui que nous avons obtenu à l'art. **1006**. On voit que les spires de l'hélice d'ombre sont alternativement réelles et virtuelles. Puisque cette hélice a des points limites, ses tangentes ont la même inclinaison que les rayons de lumière ; par conséquent, et en vertu du théorème de l'art. **954**, l'ombre de cette courbe sur le plan horizontal, qui est l'ombre portée par la surface, est une cycloïde.

1033. Nous avons représenté sur la *fig.* 419 la partie d'une surface de vis à filets carrés comprise entre deux hélices (AEIMA, A'E'I'M'A''), (AMIEA, A'M''I E''A''), tracées sur un même cylindre, et deux génératrices (AI, A'), (AI, A''), situées dans un même plan vertical. Nous avons ensuite éclairé cette surface par des rayons parallèles à une droite (R, R'), et nous avons déterminé ses ombres sur elle-même et sur le plan horizontal.

La première partie du travail ne présente aucune difficulté. Nous nous bornerons à dire que nous avons divisé chacune des deux hélices en seize parties égales, et que nous avons tracé les génératrices qui passent aux points de division.

Pour avoir le point P, il faut construire la longueur OP ou g (art. **995**), ou bien faire passer par la génératrice (OI, I') un plan parallèle aux rayons de lumière, et chercher son point de contact (art. **1028**). Les deux procédés conduisent à des tracés peu différents ; nous avons adopté le second.

En prenant sur la tangente Ii_1 au cercle AI une longueur $I\sigma$ égale à la moitié de la circonférence, et menant $O\sigma$, on a la trace du paraboloïde de raccordement sur le plan horizontal $A\tau'$. La trace du plan parallèle aux rayons de lumière, et contenant la génératrice (AI, I'), est $\tau'\tau$; la perpendiculaire abaissée de τ sur OI donne le point P. L'hélice d'ombre propre se projette horizontalement sur le cercle OP, et verticalement sur la sinusoïde A'O I'O''A'', qu'il est facile de construire.

Nous considérons la surface comme une feuille, et non comme recouvrant un corps solide ; il résulte de là que la courbe d'ombre a toutes ses parties réelles, mais un arc n'est utile sur une projection que quand les rayons de lumière tangents sont du côté vu de la surface.

Lorsque l'on considère les positions relatives de deux génératrices consécutives, telles que (CK, C′K″) et (DL, D′L″), on reconnaît que la face de l'hélicoïde, qui est supérieure quand on la considère d'un côté de l'axe, devient inférieure lorsqu'on la prolonge au delà de cette droite. Sur la projection verticale, chaque face, dans sa partie vue, est supérieure à droite de l'axe et inférieure à gauche.

La manière dont la surface est disposée étant bien comprise, le tracé des ombres ne peut présenter aucune difficulté. Sur la projection verticale, l'hélice d'ombre n'a pas d'arc utile; elle passe au point I′ d'une face à l'autre, et appartient toujours à la partie cachée. Au point (O, O′) l'hélice reste sur la même face, qui est supérieure d'un côté et inférieure de l'autre; il en résulte que, sur la projection horizontale, le cercle OP est utile d'un côté seulement du point O.

En déterminant les ombres des génératrices sur le plan horizontal, on obtient : 1° la cycloïde pp_1p_2, trace du cylindre circonscrit parallèle aux rayons; 2° les courbes $abc \ldots qsa'$ et $i_1j_1k_1 \ldots h_1i_2$, ombres des deux hélices qui limitent la partie considérée de l'hélicoïde. Ces lignes sont des cycloïdes allongées, engendrées par les points A et I lorsque le cercle PO roule sur la droite pp_1p_2, après avoir été transporté parallèlement à lui-même, de manière que le point P soit en p. Pour avoir les ombres portées par la surface sur elle-même, il suffit de ramener sur la projection horizontale, et de relever sur la projection verticale, les lignes $\alpha\beta\gamma$, $\varepsilon\delta$ et $\lambda\mu\nu$ données par la projection oblique (¹).

Courbe d'ombre propre dans le cas où les rayons sont divergents.

1054. Quand les rayons sont divergents, on simplifie les opérations en prenant pour plan horizontal de construction celui qui contient le point lumineux S (*fig.* 411) : alors, pour avoir la projection du point de la courbe d'ombre situé sur une génératrice OC, on trace par le point S une droite HG parallèle à cette ligne, et on la considère comme la trace d'un plan contenant la droite OC. On détermine ensuite le point de contact M de ce plan, comme il est expliqué à l'article **1028**.

Si l'on suppose que la longueur OQ devienne infinie dans la construction représentée sur la *fig.* 416 (art. **1042**), les points Q et D iront à l'infini sur OD, et par suite les droites SQ et SD seront confondues en une seule droite perpendiculaire à OM. D'après cela, pour avoir un point d de la tangente au point M à la

(¹) Nous avons cru qu'il était inutile d'indiquer par des hachures l'étendue de l'ombre portée par la surface sur le plan horizontal.

projection horizontale de la courbe d'ombre propre de la surface de la vis à filets carrés (*fig.* 411), il suffit d'abaisser du point S une perpendiculaire Sl à OC, et de prendre ld égale à Sl. Les tangentes à la courbe aux divers points situés sur la droite indéfinie OC passent toutes par le point d.

Tous les plans tangents à l'infini sont horizontaux (art. **641**). La courbe d'ombre a donc une seule branche infinie, correspondant à la génératrice située à la même hauteur que le point lumineux. L'asymptote est parallèle à cette droite.

En appliquant la construction que nous avons trouvée pour les tangentes, on reconnait que le point lumineux et l'asymptote sont situés de part et d'autre et à égales distances de la génératrice, ce qui devait être puisque la surface a un plan directeur (art. **884**).

En rapprochant les résultats des articles **1015** et **1030**, on trouve que les projections des points limites d'une courbe d'ombre sont sur le cercle qui aurait pour diamètre la droite OS (*fig.* 411).

Représentation d'une vis à filets carrés et de son écrou.

1055. Une vis à filets carrés se compose d'un noyau plein qui a la forme d'un cylindre de révolution, et d'un solide hélicoïde dont la génératrice méridienne est un rectangle $a'b'c'd'$ (*fig.* 413) placé de manière que l'un de ses côtés $a'd'$ soit un segment d'une génératrice du cylindre, et que son plan passe par l'axe de cette surface. En général, on donne au pas $c'c'_1$ des hélices une longueur double de la hauteur $b'c'$ du rectangle, afin que les filets de la vis et ceux de l'écrou aient la même épaisseur.

Pour faire l'élévation d'une vis à filets carrés, il suffit de tracer dans leurs parties vues les quatre hélices décrites par les sommets du rectangle, et les segments de droites qui forment le contour apparent du cylindre du noyau et du cylindre extérieur du filet.

Nous avons représenté l'écrou par une projection horizontale et par une coupe verticale (*fig.* 414).

La *fig.* 405 est l'élévation d'une vis double à filets carrés.

1056. Nous supposons maintenant la vis de la *fig.* 413 éclairée par des rayons parallèles à une droite (R, R'), et nous allons déterminer ses ombres.

Les hélicoïdes auxquels appartiennent la face supérieure et la face inférieure du filet ont un même pas, et leurs lignes d'ombre propre sont des hélices identiques. On trouve que le diamètre du cylindre sur lequel sont ces hélices est plus petit que le rayon Oa du noyau, et que par suite il n'existe pas de lignes d'ombre propre sur les faces hélicoïdes du filet. Le diamètre du cylindre des hélices d'ombre n'étant d'aucune utilité pour les opérations, nous ne l'avons pas indiqué, et nous n'avons pas conservé les constructions qui nous avaient servi à le déterminer.

Ombres propres et ombres portées sur les surfaces des cylindres. — En traçant un rayon On perpendiculaire à R, on obtient les points m et n, traces horizontales des génératrices qui forment les lignes d'ombre propre sur les deux cylindres du noyau et du filet.

Il est très facile d'avoir les ombres portées sur ces surfaces; ainsi, le rayon ($pq, p'q'$), qui part d'une hélice saillante, rencontre le cylindre ae en un point dont la projection horizontale q fait trouver la projection verticale q'. On détermine de la même manière la ligne $\tau'\sigma'$, ombre de (ST, S'T'), et les arcs $\sigma'\varphi'$ et $\varphi'_1\psi'_1$, ombres de la droite (TU, T'U').

Ombre portée sur la surface supérieure du filet le plus élevé. — Pour avoir les ombres portées sur la surface $c'_1d'_1g'_2h'_2$, il faut construire des projections obliques, comme nous l'avons déjà fait pour la vis à filets triangulaires (art. **1019**). Nous déterminons sur un plan horizontal arbitraire x_1y_1 les lignes $\mu\alpha''$, T''U'' et $\lambda''\beta''$, ombres des lignes $m'_2\psi'_1$, (TU, T'U') et $c'_1\beta'$. L'intersection β'' fait connaître le point β' où l'ombre de l'arête de la tête de la vis arrive sur l'hélice.

Nous considérons ensuite sur l'hélicoïde différentes génératrices rectilignes comprises entre les points m'_2 et β', et nous construisons leurs projections obliques sur le plan x_1y_1; les points où ces droites rencontrent la ligne brisée $\mu\alpha''\beta''$ sont les projections obliques des points des génératrices qui appartiennent à la ligne d'ombre portée $m'_2\beta'$.

Ombre portée sur la surface supérieure du second filet. — La surface $c'd'g'_1h'_1$ ne reçoit pas l'ombre de la tête de la vis. Pour déterminer la ligne $m'_1\delta'$, nous avons fait une projection sur un second plan horizontal xy, situé au-dessous du premier à une distance égale au pas des hélices. Par suite de cette disposition, la courbe $\lambda''\delta''$ devient l'ombre de l'hélice $c'\delta'$. On construit la courbe $\gamma''\varepsilon''$, ombre de l'arc $b'_1f'_2$, et, traçant comme précédemment les projections de quelques génératrices de l'hélicoïde, on prend et on relève leurs intersections avec la ligne brisée $\mu\gamma''\delta''$.

1037. *Ombres de l'écrou.* — Sur l'écrou, les ombres propres des cylindres sont virtuelles; il n'y a donc à considérer que des ombres portées. Pour les cylindres, ces ombres sont obtenues sans difficultés, mais pour les hélicoïdes il faut faire des projections obliques.

Après avoir pris une ligne de terre xy, nous déterminons les projections $r\pi$, $\pi\omega$, $\omega\Omega$ et $\pi\eta$ des lignes $d'_1a'_2$, $a'_2b'_2$, $b'_2c'_2$ et du petit arc $a'_2\eta'$ de l'hélice intérieure; ensuite, considérant sur la face supérieure du filet diverses génératrices passant entre les points u_1 et l'_2, on obtient les points où elles rencontrent la courbe d'ombre en relevant les intersections de leurs projections obliques avec la ligne brisée $r\pi\tau\Omega$. Dans le cas actuel, la ligne $u_1 l'_2$ se présente à peu près comme une droite.

L'angle saillant g' porte sur le cylindre de grand rayon une ombre $j'j'_1 h'$ facile à construire.

Il est nécessaire de représenter sur la projection horizontale l'ombre que la face supérieure du filet reçoit d'une partie de l'arc Ff. Cette ligne étant horizontale, il convient de faire la projection oblique sur son plan X'Y'. Une génératrice $\xi\chi$ a pour projection $\xi_1\chi_1$; son point de rencontre ζ_1 avec Ff fait trouver le point ξ de la ligne d'ombre GL.

Rayons de courbure. Lignes asymptotiques. Lignes de courbure.

1658. Les génératrices, étant perpendiculaires à l'axe, sont les normales principales des hélices (art. **955**). Il résulte de là, d'après les théorèmes de l'article **955** : 1° que les hélices sont avec les génératrices les lignes asymptotiques de la surface; 2° que la surface du second ordre, osculatrice le long d'une génératrice, est un paraboloïde isoscèle; 3° que les rayons de courbure principaux ont, en un point quelconque, des longueurs absolues égales.

On peut déduire ces résultats de ceux que nous avons obtenus pour la surface de la vis à filets triangulaires, car la construction expliquée à l'article **1004**, pour les asymptotes de l'indicatrice en un point de cette surface, montre que, quand le paramètre r est infini, c'est-à-dire quand l'hélicoïde a un plan directeur, les secondes asymptotes des indicatrices aux différents points d'une génératrice sont perpendiculaires à cette droite.

La formule de l'article **826** donne, pour chacun des rayons R_1 et R_2, l'expression très simple

$$R_1 = \frac{x^2 + k^2}{k}.$$

x est l'abscisse mesurée à partir du point central, et k le paramètre dont la valeur est égale en grandeur absolue au pas réduit h, conformément au résultat trouvé à l'article **988**.

Si l'on appelle θ l'angle que la normale au point dont l'abscisse est x fait avec le plan horizontal, on aura, entre le rayon de courbure R_1 et sa projection horizontale y, la relation

$$y = R_1 \cos\theta.$$

En introduisant la valeur que nous avons trouvée pour R_1, et éliminant θ par l'équation

$$\tang\theta = \frac{x}{k},$$

on obtient

$$y^2 - x^2 = k^2,$$

$$y^2 - x^2 = h^2.$$

La projection sur un plan perpendiculaire à l'axe, du lieu des centres de courbure principaux d'une surface de vis à filets carrés, aux différents points d'une génératrice, est une hyperbole équilatère dont l'axe transverse a une longueur double du pas réduit de la surface (¹).

1059. On peut, pour une surface de vis à filets carrés, déterminer directement le paramètre des génératrices, l'indicatrice et les rayons de courbure par la méthode de l'article **790**.

En prenant pour axe des x, des z et des y, une génératrice, l'axe de l'hélicoïde et une commune perpendiculaire, on trouve pour l'équation de cette surface

$$z = h \operatorname{arc tang} \frac{y}{x}.$$

Nous transportons l'origine sur l'axe des abscisses à une distance x_1, et nous faisons tourner les axes des y et des z de manière qu'ils deviennent le premier tangent et le second normal à la surface. En appelant θ l'angle que le plan tangent à l'hélicoïde à la nouvelle origine fait avec le plan central de la génératrice, nous avons pour la transformation des coordonnées

$$x = x_1 + x',$$

$$y = y' \sin\theta - z' \cos\theta,$$

$$z = y' \cos\theta + z' \sin\theta.$$

La substitution de ces valeurs donne

$$y' \cos\theta + z' \sin\theta = h \operatorname{arc tang} \frac{y' \sin\theta - z' \cos\theta}{x_1 + x'}. \tag{1}$$

On a en général

$$\operatorname{arc tang} a = a - \tfrac{1}{3}a^3 + \tfrac{1}{5}a^5 - \tfrac{1}{7}a^7 \ldots;$$

par conséquent, la différence entre un arc infiniment petit et sa tangente est seulement du troisième ordre.

Quand x' et y' sont infiniment petits du premier ordre, z' est infiniment petit

(¹) On trouve, par des calculs analogues à ceux des articles 837 et 839, que *la projection du lieu des centres de courbure principaux d'un conoïde général, aux différents points d'une génératrice, sur un plan parallèle au plan directeur, est une hyperbole.*

du second; alors, d'après ce que nous venons de voir, si l'on néglige les termes du troisième ordre, l'équation se réduit à

$$y'\cos\theta + z'\sin\theta = h\frac{y'\sin\theta - z'\cos\theta}{x_1 + x'};$$

d'où l'on tire

$$x_1 y'\cos\theta + x_1 z'\sin\theta + x'y'\cos\theta = hy'\sin\theta - hz'\cos\theta.$$

Cette équation doit représenter l'indicatrice; les termes du premier ordre disparaissent donc, et l'on a

$$x_1 y'\cos\theta = h y'\sin\theta,$$

$$\text{tang}\,\theta = \frac{x_1}{h}.$$

Il résulte de là que le paramètre des génératrices est égal au pas réduit en grandeur absolue.

Les termes du premier ordre étant supprimés, on a pour l'équation de l'indicatrice

$$x_1 z'\sin\theta + x'y'\cos\theta + hz'\cos\theta = 0.$$

En introduisant la valeur que nous venons de trouver pour $\text{tang}\,\theta$, on a

$$x'y' = -z'\frac{x_1^2 + h^2}{h}.$$

Cette équation représente une hyperbole équilatère, et par suite les rayons de courbure principaux sont égaux et de signe contraire.

L'indicatrice, rapportée aux bissectrices des angles de ses asymptotes, a pour équation

$$x''^2 - y''^2 = 2z'\frac{x_1^2 + h^2}{h}.$$

Enfin, en opérant comme nous l'avons fait pour le tore à l'Article **874**, on obtient la valeur déjà trouvée pour la grandeur commune des rayons de courbure [1].

1040. Proposons-nous de déterminer les caractères de la surface gauche gé-

---

[1] La surface de la vis à filets carrés est le lieu des normales à une infinité de cylindres de révolution. On peut par suite appliquer à cette surface, et de diverses manières, les théorèmes établis aux articles 849-858. On trouve ainsi immédiatement, par la formule de l'article 857, que le paramètre des génératrices est égal au pas réduit, en grandeur absolue, car la tangente de l'angle φ est $\frac{h}{R_1}$.

nérale dont les rayons de courbure ont en chaque point des grandeurs absolues égales.

Les indicatrices d'une telle surface sont des hyperboles équilatères, les lignes asymptotiques de la seconde série sont par suite les trajectoires orthogonales des génératrices, et la surface du second ordre osculatrice le long d'une génératrice quelconque G a la droite G pour ligne de striction. Cette surface est donc un paraboloïde isoscèle (art. **645**); sa seconde ligne de striction est une droite perpendiculaire à G et aux autres génératrices du même système.

Nous avons vu à l'article **656** que celle des génératrices d'un même système d'un paraboloïde qui passe au sommet a le plus petit paramètre. Le paramètre de G ne diffère donc de celui de la génératrice qui lui est infiniment voisine, que d'une quantité infiniment petite du second ordre.

Ces observations montrent comment sont disposées trois génératrices consécutives quelconques G, G′, G″ de la surface gauche :

Puisqu'elles appartiennent à un paraboloïde, elles sont parallèles à un même plan, et la surface a un plan directeur;

Puisqu'elles ont une commune perpendiculaire, la surface est un conoïde droit;

Puisqu'elles déterminent deux paramètres consécutifs égaux, la hauteur de G′ au-dessus de G et celle de G″ au-dessus de G′ sont proportionnelles aux angles de ces droites, et la surface est un hélicoïde.

La surface de la vis à filets carrés est donc la seule surface gauche dont les rayons principaux de courbure aient en un point quelconque des grandeurs absolues égales (¹).

Les lignes de courbure rencontrent toutes les génératrices sous un angle de 45°. On peut facilement construire leurs projections.

1041. Nous allons maintenant rechercher les sections normales surosculées par des cercles. Pour cela, nous développerons l'équation (1) de l'article **1039**, et nous la mettrons sous la forme de l'équation (1) de l'article **957**, en négligeant les termes qui sont infiniment petits d'un ordre supérieur au troisième, quand x' et y' le sont du premier.

Nous avons d'abord

$$y'\cos\theta + z'\sin\theta = h\,\frac{y'\sin\theta - z'\cos\theta}{x_1 + x'} - \frac{h}{3}\,\frac{(y'\sin\theta - z'\cos\theta)^3}{(x_1 + x')^3},$$

(¹) Meusnier a démontré le premier que, dans la surface de la vis à filets carrés, les rayons de courbure sont en chaque point égaux et de signe contraire (Mémoire cité à l'article 815); quant à la proposition réciproque de l'article 1040, M. Catalan et plusieurs autres géomètres s'en sont occupés. On trouve des détails historiques sur cette question dans les *Développements de Géométrie descriptive* de Th. Olivier, p. 140, et dans un Mémoire de M. Ossian Bonnet, inséré au XXXIIᵉ cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 134.

ou bien

$$y' + z' \operatorname{tang}\theta = h\,\frac{y' \operatorname{tang}\theta - z'}{x_1 + x'} - \frac{h}{3}\,\frac{y'^3}{(x_1 + x')^3} \operatorname{tang}\theta \sin^2\theta\,;$$

pour que l'axe des z' se confonde avec la normale, il faut, comme nous l'avons reconnu à l'article **1039**, que l'on ait

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{x_1}{h}, \quad \text{d'où} \quad \sin^2\theta = \frac{x_1^2}{x_1^2 + h^2}\,;$$

introduisant ces valeurs dans l'équation, développant, et supprimant les termes infiniment petits d'un ordre supérieur au troisième, on obtient

$$\frac{x_1^4}{3(x_1^2 + h^2)}\,y'^3 + 2x_1 y' x'^2 + x_1^2 x' y' + x_1\,\frac{3x_1^2 + 2h^2}{h}\,x' z' + x_1^2\,\frac{x_1^2 + h^2}{h}\,z' = 0.$$

En comparant cette équation avec l'équation (1) de l'article **957**, on voit que dans le cas actuel les valeurs des coefficients de cette dernière sont

$$M = 0, \quad M' = -\frac{x_1^4}{3(x_1^2 + h^2)}, \quad N = 2x_1, \quad N' = 0,$$

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad B = x_1^2, \quad B' = x_1\,\frac{3x_1^2 + 2h^2}{h},$$

$$B'' = 0, \quad C = x_1^2\,\frac{x_1^2 + h^2}{h}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (3) de l'article **957** on obtient, après quelques réductions faciles,

$$\left(\frac{y'}{x'}\right)^3 - 3\left(\frac{y'}{x'}\right) = 0.$$

Les racines de cette équation sont les tangentes trigonométriques des angles que les tangentes des projections des sections normales surosculées par des cercles font avec l'axe des abscisses, qui est la génératrice. On voit que ces angles sont 0, 60° et 120°. Il résulte de là que, sur la surface du filet de la vis carrée, les courbes tangentes aux sections normales surosculées par des cercles rencontrent les génératrices rectilignes et se coupent elles-mêmes sous des angles de 60° [1].

---

(1) On peut déduire ce résultat de l'équation (6) de la Note de l'article 939.

CHAPITRE V.

SURFACES HÉLICOÏDES NON RÉGLÉES.

Section plane. — Plan tangent. — Courbe d'ombre. — Normale. Surface de vis à filets triangulaires normale.

1042. Une surface hélicoïde est donnée, en général, par son axe que nous supposerons vertical, par son pas et par une génératrice curviligne. On construit le contour apparent de cette surface par rapport à un plan, en prenant l'enveloppe des projections, sur ce plan, des hélices décrites par un certain nombre de points convenablement espacés sur la génératrice.

On détermine l'intersection de la surface par un plan, en prenant les traces, sur ce plan, d'un nombre suffisant d'hélices. La construction est très facile quand le plan sécant est perpendiculaire au plan vertical, car, à chaque point d'intersection de la trace verticale avec une sinusoïde projection d'une hélice, correspond sur le plan horizontal un point de la projection de la courbe. Quand le plan n'est pas perpendiculaire au plan vertical, on l'amène à cette position en le faisant tourner autour de l'axe d'un mouvement hélicoïde, puis, lorsque l'intersection a été construite, on le ramène à sa véritable position : il suffit pour cela de faire tourner sa projection horizontale d'un angle égal et de sens contraire à celui dont on fait tourner le plan, et de diminuer ou d'augmenter les hauteurs des projections verticales de ses divers points d'une quantité égale à celle dont tous les points du plan ont été élevés ou abaissés dans le mouvement hélicoïde.

1043. *Plan tangent. Surface de vis à filets triangulaires de raccordement.* — On obtient le plan tangent à un hélicoïde en un point donné en déterminant la tangente à la génératrice et celle de l'hélice qui se croisent à ce point. Lorsque l'on veut construire plusieurs plans tangents, il est utile d'employer des hélicoïdes gauches de raccordement.

Quand une courbe et une de ses tangentes se transportent d'un même mouvement, les surfaces qu'elles engendrent se raccordent le long de la ligne décrite par le point commun. Si la courbe est la méridienne d'un hélicoïde, la surface décrite par l'une quelconque de ses tangentes est celle d'une vis à filets triangulaires.

La courbe χ (*fig.* 422) étant la méridienne d'un hélicoïde, si l'on veut construire le plan tangent à cette surface au point dont la projection horizontale est N, on pourra décrire du point O comme centre l'arc NM, relever le point M en M', tracer la tangente M'T' et remplacer l'hélicoïde par la surface de vis à filets triangulaires qui a le même pas, le même axe (O, XZ), et dont la droite (Ox, T'M') est la génératrice dans sa position initiale. On appliquera à cette surface l'une des deux méthodes expliquées à l'article **991**; la seconde exige que l'on détermine le paramètre r (art. **989**).

En appelant α, α_1, α_2, ... les angles que les tangentes à la méridienne aux points M', M'_1, M'_2, ... font avec le plan horizontal, et r, r_1, r_2, ... les paramètres des surfaces de vis à filets triangulaires de raccordement le long des hélices décrites par ces points, on aura

$$r = h\cot\alpha,\quad r_1 = h\cot\alpha_1,\quad r_2 = h\cot\alpha_2,\quad \ldots,$$

d'où

$$r\tang\alpha = r_1\tang\alpha_1 = r_2\tang\alpha_2 = \ldots.$$

Cette relation conduit à une construction très simple des paramètres r_1, r_2, ..., qui serviront à déterminer le plan tangent en divers points des hélices qui passent aux points M_1, M'_2, ...

1044. *Ligne d'ombre.* — Si l'on veut connaître les points d'une courbe d'ombre qui appartiennent à l'hélice décrite par un point déterminé, on remplacera, comme précédemment, l'hélicoïde par la surface de vis à filets triangulaires de raccordement, et l'on appliquera ensuite la construction de l'article **997** ou celle de l'article **1010**, selon que les rayons seront parallèles ou divergents.

Dans le premier cas, quelle que soit l'hélice considérée sur la surface, le cercle auxiliaire PnN (*fig.* 401) reste invariable, car son rayon est égal à $h\cot\gamma$ (art. **997**). La distance du point F à l'origine O est égale au paramètre r que l'on détermine comme nous l'avons dit à l'article précédent, d'après l'inclinaison de la génératrice de la surface de vis à filets triangulaires. Des quatre points M, M_1, m et m_1, situés sur le cercle Gg projection de l'hélice considérée, deux seulement sont utiles : on verra dans chaque cas à quelle nappe de la surface de vis à filets triangulaires appartient l'hélice de raccordement, et l'on rejettera les deux points qui ne sont pas sur cette nappe en se réglant sur les indications des *fig.* 398, 400 et 402 [1].

Si la génératrice donnée n'était pas dans un plan contenant l'axe, pour avoir la tangente à la méridienne, il faudrait construire le plan tangent à la surface et déterminer sa trace sur le plan méridien du point de contact.

1045. Dans le cas que nous examinons, c'est-à-dire quand les rayons sont

---

[1] Bour a été conduit par des considérations de cinématique à une construction dans laquelle on emploie un cercle variable et un point fixe, au lieu d'un cercle fixe et d'un point ayant une position variable (*voir* la séance de la Société Philomathique du 4 juin 1864).

parallèles, on peut opérer directement sans considérer une surface de raccordement.

Soient (R, R′) le rayon de lumière (*fig.* 425), χ la méridienne de l'hélicoïde, (O, O′Z) l'axe, (AA_2, $A'A''_2$) les projections de l'hélice décrite par un point (A, A′) de χ : nous allons chercher quels sont les points de cette hélice qui appartiennent à la ligne d'ombre propre de la surface.

Nous construisons d'abord le plan tangent au point (A, A′) : pour cela, nous prenons un plan horizontal d'opération XY situé au-dessous de ce point à une hauteur égale à une fraction simple du pas, le huitième. La tangente à l'hélice au point (A, A′) a sa trace au point g_1, à une distance du point A égale à l'arc Ag, huitième de la circonférence. La tangente à la méridienne perce le plan horizontal au point T : le plan tangent a donc pour trace horizontale Tg_1; il rencontre l'axe au point (O, O′).

Tous les plans tangents à l'hélicoïde aux points de l'hélice (AA_2, $A'A_2$) font, avec le plan horizontal, le même angle que le plan (Tk, $T'O'$); ils sont donc parallèles aux plans tangents au cône de révolution dont le sommet est le point (O, O′), et dont la trace est le cercle qui a pour rayon la droite Ok perpendiculaire à Tg_1.

Les génératrices de ce cône, le long desquelles le plan tangent est parallèle aux rayons de lumière, sont Ok_1 et Ok_2 (art. **151**). Si nous prenons les arcs c_1A_1 et c_2A_2 égaux à cA, les points A_1 et A_2 seront les positions du point A lorsque le point c aura été transporté en c_1 et en c_2. Les points (A_1, A'_1) et (A_2, A_2) sont donc ceux de l'hélice où le plan tangent à la surface est parallèle aux rayons de lumière (¹).

Il n'y aurait que très peu de modifications à apporter aux tracés, si la génératrice donnée n'était pas méridienne.

On peut encore déterminer la courbe d'ombre en faisant des sections par des plans parallèles aux rayons de lumière, et en menant à ces courbes des tangentes parallèles aux rayons. Pour que les constructions soient faciles, il faut prendre les plans auxiliaires perpendiculaires au plan vertical (art. **1042**) et opérer sur les projections horizontales des sections. Ce procédé est applicable au cas où les rayons sont divergents; il a l'avantage de donner en même temps des points des deux courbes d'ombre propre et d'ombre portée.

1046. *Normale.* — Nous allons maintenant nous proposer de construire la normale à la surface en un point (M, M′) du méridien principal (*fig.* 422).

Nous plaçons le plan horizontal au-dessous de ce point, à une hauteur égale au quart du pas des hélices; pour avoir un point E de la ligne de terre, il suffit de prendre au-dessous du point M′ une longueur M′E égale à FJ.

(¹) Cette méthode a été employée par le chevalier Faà de Bruno (*Mémoire sur les colonnes torses*).

La trace L de la tangente à l'hélice au point M est sur la droite ME à une distance ML égale au quart de cercle MQ. On détermine facilement la trace T de la tangente à la méridienne : le plan tangent est donc (TL, T'M'). On obtient les projections de la normale en abaissant des points M et M' des perpendiculaires MG et M'F' sur les traces TL et T'M' de ce plan.

1047. *Surface de vis à filets triangulaires normale.* — La normale (MF, M'F') ne rencontre pas l'axe, et par suite, dans le mouvement hélicoïde, elle engendre un hélicoïde gauche général. Le plan tangent à cette surface au point (M, M') contient la normale à la surface et la tangente à l'hélice; ses traces sont par conséquent LF et K'M'.

Si la droite K'M' trace verticale du plan tangent à l'hélicoïde des normales est entraînée dans le mouvement hélicoïde, elle décrira une surface de vis à filets triangulaires qui se raccordera avec cet hélicoïde gauche le long de l'hélice décrite par le point (M, M'), et qui, par conséquent, rencontre normalement la surface considérée [1].

Quand la génératrice donnée de l'hélicoïde n'est pas méridienne, ses tangentes décrivent des surfaces gauches hélicoïdes générales; mais, par une construction analogue à la précédente, on peut déterminer des surfaces de vis à filets triangulaires de raccordement.

1048. *Intersection d'un hélicoïde et d'un conoïde.* — Dans certains problèmes de Stéréotomie, on a besoin de déterminer l'intersection d'un hélicoïde et d'un conoïde droit de même axe. On prend alors pour surfaces auxiliaires des surfaces de vis à filets carrés ayant le même pas et le même axe que l'hélicoïde : leurs intersections avec cette surface et avec le conoïde sont, sur le plan horizontal, des droites et des cercles. La construction de la projection horizontale ne diffère donc pas de celle que nous avons expliquée pour l'épure de la voûte d'arêtes en tour ronde (art. **671**).

Indicatrices.

1049. On trouve, par l'analyse (art. 1049*a*), que pour déterminer les projections horizontales des asymptotes de l'indicatrice d'une surface hélicoïde en un point donné (M, M') de la méridienne χ (*fig.* 423), il faut : 1° déterminer le paramètre r de la surface de vis à filets triangulaires qui se raccorde avec l'hélicoïde

(1) Les appareilleurs avaient adopté pour génératrices des lits de la vis Saint-Gilles ronde des rayons d'une des demi-circonférences méridiennes de l'intrados; mais les lits ainsi obtenus sont obliques à l'intrados. Aussi Jules de la Gournerie a proposé pour lits les surfaces de vis triangulaires normales engendrées par les droites analogues à K'M'. J'ai déterminé la valeur de l'angle de ces deux espèces de lits (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, janvier 1884). (E. L.)

le long de l'hélice du point (M, M'), et porter ce paramètre en OQ sur une perpendiculaire à OM, du côté où s'étend la branche de la spirale d'Archimède sur laquelle est la trace de la génératrice M K; 2° construire la projection MG de l'une des asymptotes de l'indicatrice de la surface qui serait engendrée par la révolution de la méridienne autour de l'axe (art. **822**); 3° prendre sur la droite OM une longueur OC égale à OG, puis décrire un cercle passant par le point C et ayant son centre en Q : les points P et P_1, où ce cercle rencontre la droite OQ, appartiennent aux asymptotes cherchées.

1149*a*. Voici la démonstration des constructions indiquées dans l'article précédent.

L'équation des projections horizontales des asymptotes de l'indicatrice en un point (x, y, z) est

$$\mathrm{r}(x-a)^2+2\mathrm{s}(x-a)(y-b)+\mathrm{t}(y-b)^2=0;$$

a et b étant les coordonnées variables, et r, s, t les dérivées partielles du second ordre de l'ordonnée z considérée comme fonction des coordonnées x et y.

Nous allons nous proposer de déterminer r, s et t.

Soit

$$z=f(x)$$

l'équation de la méridienne. Si l'on appelle ρ le rayon vecteur d'un point, ω son azimut et h le pas réduit commun des hélices, l'équation de l'hélicoïde sera

$$z=h\omega+f(\rho);$$

on a d'ailleurs

$$\omega=\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x},\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2},$$

et par suite

$$\frac{d\omega}{dx}=-\frac{\sin\omega}{\rho},\quad \frac{d\omega}{dy}=\frac{\cos\omega}{\rho},\quad \frac{d\rho}{dx}=\cos\omega,\quad \frac{d\rho}{dy}=\sin\omega.$$

D'après ces valeurs, et en différentiant l'équation de la surface, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}&=-\frac{h\sin\omega}{\rho}+f'(\rho)\cos\omega,\\
\mathrm{q}&=\frac{h\cos\omega}{\rho}+f'(\rho)\sin\omega,\\
\mathrm{r}&=\frac{h\sin2\omega}{\rho^2}+f'(\rho)\frac{\sin^2\omega}{\rho}+f''(\rho)\cos^2\omega,\\
\mathrm{s}&=-\frac{h\cos2\omega}{\rho^2}-f'(\rho)\frac{\sin\omega\cos\omega}{\rho}+f''(\rho)\sin\omega\cos\omega,\\
\mathrm{t}&=-\frac{h\sin2\omega}{\rho^2}+f'(\rho)\frac{\cos^2\omega}{\rho}+f''(\rho)\sin^2\omega.
\end{aligned}$$

On peut supposer que l'on a pris pour méridienne principale celle qui passe par le point considéré; alors y et ω sont nuls, ρ est égal à x, et l'on a pour déterminer les projections des asymptotes de l'indicatrice

$$\mathrm{r}(x-a)^2 + 2\mathrm{s}(x-a)b + \mathrm{t}b^2 = 0,$$

$$\mathrm{r} = f''(x), \quad \mathrm{s} = -\frac{h}{x^2}, \quad \mathrm{t} = \frac{f'(x)}{x}.$$

En appelant R le rayon de courbure de la méridienne au point considéré, et α l'angle que la tangente à cette courbe fait avec l'axe des abscisses, on a

$$f'(x) = \tang \alpha, \quad \mathrm{R} = \frac{(1+\tang^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

On tire de la seconde équation

$$f''(x) = \frac{1}{\mathrm{R}\cos^3\alpha}.$$

La substitution des valeurs de $f'(x)$ et de $f''(x)$ dans les secondes dérivées donne

$$\mathrm{r} = \frac{1}{\mathrm{R}\cos^3\alpha}, \quad \mathrm{s} = -\frac{h}{x^2}, \quad \mathrm{t} = \frac{\tang \alpha}{x}.$$

Les projections des asymptotes de l'indicatrice du point considéré seront connues quand on aura les ordonnées des points P et P_1 où elles rencontrent l'axe Oy (*fig.* 423). Faisant l'abscisse a nulle dans l'équation de ces droites, on obtient, pour déterminer l'ordonnée OP que nous appelons b_1, la formule

$$\mathrm{t}b_1^2 - 2\mathrm{s}xb_1 + \mathrm{r}x^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$b_1 = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{t}}x \pm \sqrt{\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{t}^2}x^2 - \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}}x^2}.$$

En portant dans cette équation les valeurs de r, s et t, on trouve

$$b_1 = -h\cot\alpha \pm \sqrt{h^2\cot^2\alpha - \frac{x^3}{\mathrm{R}\cos^2\alpha\sin\alpha}}.$$

Si l'on suppose h nul, la surface sera de révolution, et, en appelant b'_1 la valeur que prend alors b_1, on a

$$b_1'^2 = -\frac{x^3}{\mathrm{R}\cos^2\alpha\sin\alpha}.$$

Désignons maintenant, comme précédemment, par la lettre r, le paramètre de la surface de vis à filets triangulaires de raccordement. Nous avons

$$r = h\cot\alpha;$$

en introduisant ces valeurs dans l'expression de b_1, on obtient

$$b_1 = -r \pm \sqrt{r^2 + b_1'^2}.$$

On déduit immédiatement de cette formule la construction que nous avons donnée à l'art. 1050.

Quand R est infini, b'_1 est nulle, et les deux valeurs de b_1 sont o et $-2x$. En rapprochant ce résultat de celui que nous avons obtenu à l'article **1004**, on reconnaît que l'ordonnée b_1 doit être considérée comme négative, quand elle est dirigée du côté où s'étend la branche de la spirale d'Archimède sur laquelle se trouve la trace de la génératrice de l'hélicoïde gauche de raccordement.

La construction de l'article **1050** repose sur cette observation que $b_1'^2$ change de signe en conservant la même grandeur absolue quand R change de signe.

Quand α est nul, les valeurs des dérivées partielles sont

$$\mathrm{r} = \frac{1}{\mathrm{R}}, \quad \mathrm{s} = -\frac{h}{x^2}, \quad \mathrm{t} = 0.$$

Une des valeurs de b_1 devient infinie; on a pour l'autre

$$b_1 = -\frac{x^3}{2\mathrm{R}h}.$$

Reprenons maintenant l'équation trouvée plus haut pour la projection des asymptotes de l'indicatrice

$$\mathrm{r}(x-a)^2 - 2\mathrm{s}(x-a)b + \mathrm{t}\,b^2 = 0.$$

Si nous supposons que le plan horizontal passe par le point considéré, et si nous appelons c l'ordonnée verticale variable, l'équation du plan tangent sera

$$c + \mathrm{p}(x-a) - \mathrm{q}\,b = 0.$$

Ces deux équations représentent les asymptotes de l'indicatrice.

Nous avons trouvé au commencement de cet article les valeurs de r, s et t. On obtient, en raisonnant de la même manière,

$$\mathrm{p} = \operatorname{tang}\alpha, \quad \mathrm{q} = \frac{h}{x}.$$

La substitution des valeurs des dérivées partielles donne

$$\frac{1}{\mathrm{R}\cos^3\alpha}(x-a)^2 + \frac{2h}{x^2}(x-a)b + \frac{\operatorname{tang}\alpha}{x}b^2 = 0,$$

$$c + (x-a)\operatorname{tang}\alpha - \frac{h}{x}b = 0.$$

En éliminant h entre ces équations, nous aurons l'équation du cône que forment les asymptotes de l'indicatrice du point considéré χ (*fig.* 423), pour toutes les surfaces hélicoïdes que cette courbe peut engendrer en tournant autour de l'axe OZ. On trouve

$$\left(\frac{1}{\mathrm{R}\cos^3\alpha} + \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{x}\right)(x-a)^2 + \frac{\operatorname{tang}\alpha}{x}b^2 + 2\frac{x-a}{x}c = 0.$$

Nous rappelons que les coordonnées variables sont a, b, c, et que x représente l'abscisse du point considéré de la méridienne χ.

Nous voyons que le cône formé par les asymptotes des indicatrices est du second ordre. On reconnaît facilement que ce cône est toujours réel, et qu'un de ses plans tangents est parallèle au plan méridien perpendiculaire à celui qui contient la courbe χ.

1050. Quand le point M' est sur la partie de la méridienne qui tourne sa concavité vers l'axe (*fig.* 424), les asymptotes de l'indicatrice de la surface de révolution sont imaginaires; il faut alors prendre sur le prolongement de la normale une longueur A'_1M' égale à AM', et opérer comme si le centre de courbure était en A'_1. On détermine et on porte sur Oy, comme il a été dit précédemment, la longueur OQ du paramètre r; on trace la droite MG, celle des asymptotes de l'indicatrice de la surface de révolution qui rencontre Oy du côté du point O où se trouve le point Q; on décrit ensuite un cercle de diamètre OQ, un second cercle du point O comme centre, avec OG pour rayon, et un troisième cercle ayant son centre en Q, et passant par le point S où les deux premiers se coupent. Les points P et P_1, où ce dernier cercle rencontre la droite OQ, appartiennent aux asymptotes cherchées.

Quand la longueur OQ est plus petite que OG, le point M' est sur la partie convexe de l'hélicoïde; lorsque les points G et Q coïncident, les deux asymptotes de l'indicatrice sont réunies en une seule droite, et l'hélice qui passe par le point M' sépare une partie convexe de la surface d'une partie à courbures opposées.

Prenons sur la méridienne du point M' une longueur Mm égale à QG, en ayant soin de la porter du côté de la concavité ou du côté de la convexité, suivant que le point G sera en deçà ou au delà de Q; considérons ensuite sur la méridienne d'autres positions du point M', et, faisant la même construction pour chacun d'eux, déterminons la courbe φ lieu des points m : cette ligne coupera la méridienne en un point N situé sur une hélice qui sépare une partie convexe d'une partie à courbures opposées. La courbe φ, considérée dans toute son étendue, pourra rencontrer la méridienne en plusieurs points.

1051. Lorsque l'on sait construire les asymptotes de l'indicatrice, on peut déterminer les tangentes à l'intersection d'un hélicoïde par un plan tangent et à sa ligne d'ombre. Pour obtenir les points limites des parties utiles de cette dernière ligne, il faut employer une courbe d'erreur analogue à celle dont nous nous sommes servi pour les surfaces de révolution (art. **894** et **898**).

Si les rayons sont divergents, on cherchera l'intersection des asymptotes de l'indicatrice, aux divers points de la méridienne, et du cylindre de révolution dont l'axe se confond avec celui de la surface et qui contient le point lumineux; puis, supposant ce point entraîné dans le mouvement hélicoïde, on déterminera les rencontres de l'hélice qu'il décrit avec la courbe d'intersection précédemment obtenue et les asymptotes qui passent par ces points. On achèvera ensuite la solution comme pour les surfaces de révolution ([1]).

([1]) Ce procédé a été indiqué par M. Viala dans son Mémoire sur la vis Saint-Gilles (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXVII^e cahier).

On aura, en général, les points limites d'une ligne d'ombre d'une manière plus rapide et suffisamment précise, en menant sur l'une des projections des tangentes du point lumineux à cette courbe (art. **892**).

Pour résoudre entièrement la question des indicatrices, il faudrait déterminer les axes de ces courbes lorsqu'elles sont des ellipses; mais ce problème est plus compliqué et moins utile; en voici cependant la solution.

1051 *a*. Nous conservons les notations adoptées dans l'art. **1049** *a*, et nous appelons de plus λ, μ les angles que les asymptotes de la projection de l'indicatrice font avec l'axe des abscisses, et f l'ordonnée du point où un des axes de cette courbe coupe l'axe des ordonnées. On a

$$f = r \operatorname{tang} \frac{\lambda + \mu}{2}.$$

Eu égard aux valeurs de b_1, les tangentes des angles λ et μ sont données par les équations

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{-r + \sqrt{r^2 + b_1'^2}}{x}, \quad \operatorname{tang}\mu = \frac{-r - \sqrt{r^2 + b_1'^2}}{x}.$$

On déduit successivement de ces équations

$$\operatorname{tang}(\lambda + \mu) = -\frac{2rx}{x^2 + b_1'^2},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\lambda + \mu}{2} = \frac{x^2 + b_1'^2}{2rx} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2 + b_1'^2}{2rx}\right)^2 + 1},$$

$$f = \frac{x^2 + b_1'^2}{2r} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2 + b_1'^2}{2r}\right)^2 + x^2}.$$

Quels que soient le signe et la grandeur de $b_1'^2$, les valeurs de f sont réelles et d'une construction facile. Lorsqu'elles sont déterminées, on connaît la direction des axes.

En désignant par p et q les moitiés des longueurs des axes de la projection de l'indicatrice, on a

$$q = p \operatorname{tang}\frac{\lambda - \mu}{2}\sqrt{-1}.$$

Eu égard aux valeurs de $\operatorname{tang}\lambda$ et de $\operatorname{tang}\mu$, on obtient

$$\frac{q}{p} = \sqrt{-1}\left[\frac{x^2 - b_1'^2}{2x\sqrt{r^2 + b_1'^2}} \pm \sqrt{\frac{(x^2 - b_1'^2)^2}{4x^2(r^2 + b_1'^2)} + 1}\right].$$

Nous trouvons deux valeurs pour $\frac{q}{p}$, mais leur produit est égal à l'unité. L'ambiguïté provient de ce que rien n'indique auxquels des axes appartiennent respectivement les longueurs p et q. Nous prenons simplement le signe $+$ et nous avons

$$\frac{q}{p} = \frac{x^2 - b_1'^2}{2x\sqrt{-(r^2 + b_1'^2)}} + \sqrt{\frac{(x^2 + b_1'^2)^2 + 4r^2x^2}{-4x^2(r^2 + b_1'^2)}}.$$

Dans le cas qui nous occupe le binôme $(r^2 + b_1'^2)$ est négatif, la formule donne pour $\frac{q}{p}$ une longueur réelle, ce qui doit être, puisque l'indicatrice est une ellipse. Nous pouvons nous donner arbitrairement le demi-axe p, le supposer égal à l'abscisse x, par exemple, et nous obtiendrons le demi-axe q par la construction à laquelle l'équation conduit. Cette construction n'est pas très compliquée.

Il reste à distinguer les axes. Si nous supposons que la surface devienne de révolution, le paramètre r sera nul comme le pas; remplaçant alors b'^2 par sa valeur (page 185), on obtient

$$\frac{q}{p} = \sqrt{\frac{R}{x}\cos^2\alpha\sin\alpha}.$$

On peut obtenir directement cette formule d'après les grandeurs des rayons de courbure (art. 821). On trouve alors que l'axe $2q$ est celui qui se confond avec un segment de la trace du plan méridien. On verra facilement, dans chaque cas, quel est l'axe qui se rapproche de la trace du plan méridien quand le pas diminue.

1052. Les relations graphiques que nous venons de faire connaître peuvent servir pour l'hélicoïde gauche général. Quand on opère sur cette surface, on ne connaît pas la méridienne, mais on a la génératrice rectiligne qui est une des deux asymptotes de l'indicatrice. Lorsque l'on a déterminé la surface de vis à filets triangulaires de raccordement le long de l'hélice qui passe à un point donné (art. **1047**), et le paramètre de cet hélicoïde, on obtient sans difficulté la seconde asymptote de l'indicatrice.

Représentation d'un serpentin.

1053. On appelle *serpentin* l'enveloppe des positions d'une sphère dont le centre se meut sur une hélice, ou la surface décrite par un cercle dont le centre parcourt une hélice, et dont le plan est toujours normal à cette courbe.

Nous avons vu (art. **455**) que le cylindre d'ombre d'une surface enveloppe est l'enveloppe des cylindres d'ombre de ses enveloppées. Il résulte de là que le contour apparent du serpentin sur un plan quelconque est l'enveloppe des cercles qui forment les contours apparents des sphères.

Nous divisons en seize parties égales une spire ($a\,e\,i\,m\,a$, $a'e'i'm'a''$) de l'hélice directrice (*fig.* 426), et nous traçons les contours apparents des sphères enveloppées qui ont leur centre aux points de division. L'enveloppe de ces cercles sur le plan horizontal se compose de deux cercles projections de deux hélices.

Sur le plan vertical, le contour apparent présente quatre rebroussements, et par suite quatre points limites (art. **891**). Nous avons craint qu'un grand nombre de cercles ne rendît la figure confuse, mais il faut les multiplier un peu si l'on veut étudier avec soin les singularités du contour apparent. On voit alors les rebroussements se produire d'une manière très nette : à chacun d'eux, un cercle rencontre les deux cercles voisins d'un même côté de son point de contact avec l'enveloppe dont la direction est déterminée par les tracés qui ont été précédemment faits. Lorsque, avant le rebroussement, la courbe était extérieure aux cercles, après lui, elle les touche intérieurement, et par conséquent elle est virtuelle si l'on considère la surface du serpentin comme recouvrant un corps opaque.

Les quatre cercles sur lesquels se trouvent les rebroussements sont voisins de ceux qui ont leurs centres aux points (d, d'), (f, f'), (l, l') et (n, n').

Les projections horizontales des contours apparents des sphères par rapport au plan vertical sont des droites parallèles à la ligne de terre et passant par les différents centres. En ramenant sur ces lignes les points de contact avec les cercles du contour apparent sur le plan vertical, on a des points de la projection horizontale de cette courbe. Les positions des points de contact ne sont pas données avec précision, et par suite les projections $CiJaC$ et $DilaD$ ne sont pas tracées avec une grande exactitude. Toutefois cette méthode rapide devra être adoptée en général.

Si l'on voulait opérer avec précision, on considérerait la génératrice non méridienne $N'a'M'$, on déterminerait pour différentes hélices des surfaces de vis à filets triangulaires de raccordement (art. **1047**), et enfin on chercherait pour chacune d'elles les points de la courbe situés sur l'hélice de contact (art. **1044**). Ces tracés ne sont pas difficiles.

La surface a trois formes différentes, suivant que le rayon de la sphère est inférieur, égal ou supérieur au rayon $AaOA$ du cylindre sur lequel est tracée l'hélice directrice.

LIVRE DIXIÈME.
SURFACES TOPOGRAPHIQUES.

CHAPITRE PREMIER.
THÉORIE GÉNÉRALE.

Représentation d'une surface par des courbes horizontales. Problèmes élémentaires.

1034. Dans la Topographie, on représente généralement la surface du terrain par des *lignes de niveau :* ce sont les lignes d'intersection de la surface avec des plans horizontaux. Chacune de ces courbes est déterminée par sa projection horizontale et par une cote qui indique la hauteur à laquelle elle se trouve. On suppose ordinairement les plans des sections équidistants, et on prend, pour la différence de hauteur de deux plans consécutifs, ou *équidistance*, un multiple de l'unité de longueur, de manière que les cotes des courbes soient des nombres entiers.

En général, et sauf de rares exceptions, une verticale ne rencontre la surface du terrain qu'en un point ; il en résulte que les projections des lignes de niveau se développent sans se couper et que leur ensemble ne présente aucune confusion.

La surface du terrain n'est ainsi définie que d'une manière approximative, mais l'on peut multiplier les sections, eu égard à sa forme et à la nature du problème, de manière à obtenir le degré d'exactitude jugé nécessaire. La détermination des courbes sur le terrain est une question de nivellement ; nous ne nous en occuperons pas.

Les lignes horizontales peuvent être employées pour la définition de toutes les surfaces ; elles conviennent surtout pour celles dont la loi de génération n'est pas connue et qu'une verticale ne rencontre qu'en un point. Ces surfaces se nomment *surfaces topographiques*.

Le mode de représentation que nous venons d'indiquer appartient à la méthode des projections cotées, et par suite les constructions exposées dans le

Livre III vont être d'un usage continuel. Toute figure doit être accompagnée d'une échelle.

Nous supposerons que le plan horizontal de comparaison est inférieur, et par suite que les ordonnées positives sont mesurées de bas en haut.

1055. *Courbes intercalaires.* — On appelle *courbes intercalaires* des sections horizontales déterminées graphiquement d'après celles qui ont été relevées sur le terrain.

Nous allons nous proposer de tracer sur la *fig.* 427 la courbe de niveau qui correspond à la cote 17,40, et pour cela de déterminer les projections de quelques points situés sur cette ligne.

Nous traçons une droite *ms* à peu près normale aux courbes cotées 17 et 18, puis nous rabattons, sur le plan horizontal qui est à la cote 15, le plan vertical dont *ms* est la trace, et nous construisons la section rabattue du terrain : cette opération est analogue à celle qui a été expliquée à l'article **264**. Nous traçons ensuite une droite parallèle à *mn* et à la distance ($17^m,40 - 15^m$) ou $2^m,40$, et nous projetons en *a* le point A où elle coupe la ligne M*s* : le point *a* appartient à la courbe cherchée [1].

Le plus souvent on néglige la courbure de la section verticale entre les points P et Q, et l'on se borne à partager le segment *pq* en deux parties qui soient dans le rapport des différences de niveau ($17^m,40 - 17^m$) et ($18^m - 17^m,40$). La courbe intercalaire qui est à la cote 19,25 a été construite par cette méthode.

Quand il n'est pas possible de tracer une droite à peu près normale aux deux lignes de niveau entre lesquelles on veut intercaler une courbe, on établit, le plus souvent à vue d'œil, une droite *eg* qui satisfasse à peu près à cette condition, et on la divise en deux arcs *ef* et *fg* qui soient dans le rapport donné.

On voit qu'il y a diverses manières d'opérer selon le degré d'exactitude qu'exigent les problèmes.

1056. Pour *déterminer la cote d'un point A situé sur une surface et donné par sa projection a* (*fig.* 427), on construira la section M*s* et l'on ajoutera la longueur de l'ordonnée *a*A à la cote 15; ou bien, si l'on veut opérer rapidement, on tracera la droite *paq* sensiblement normale aux deux courbes voisines, et on ajoutera à la cote 17 le rapport de *qa* à *qp* multiplié par l'équidistance qui est ici l'unité. Quelquefois on fait cette opération sans tracer aucune ligne, et en appréciant à vue le rapport de *qa* à *qp* : c'est ce que l'on appelle faire une *interpolation à vue*.

1057. *Sens des courbures d'un terrain.* — Sur la *fig.* 427, le point M situé à la

---

[1] Les problèmes que nous présentons sont envisagés sous le point de vue général des constructions géométriques. Nous avons choisi, pour les figures, les dispositions qui permettent de développer les tracés avec clarté, et de faire bien comprendre la méthode, sans nous préoccuper des règles admises dans les services publics sur l'équidistance et l'échelle du dessin. L'exposition et la discussion de ces règles appartiennent à la Topographie et non à la Géométrie descriptive.

cote 20 est plus élevé que la droite ms qui est à la cote 15, et par suite le terrain se trouve du côté de la courbe Ms où nous avons mis des hachures; il est par conséquent convexe dans le sens vertical.

En général, un terrain est convexe dans le sens vertical quand les intervalles sr, rq, qp, ..., mesurés sur une droite à peu près normale aux courbes horizontales, augmentent de longueur du côté où les courbes vont en s'élevant.

Un terrain est concave dans le sens horizontal quand une courbe de niveau a sa convexité tournée du côté de la projection de la courbe voisine qui est plus élevée qu'elle.

Une surface peut être à courbures opposées en un point, bien qu'elle soit convexe dans le sens vertical et dans le sens horizontal, ou concave dans les deux sens. Cela arrive quand la tangente à la ligne de niveau et sa perpendiculaire sont dans le même angle des asymptotes de l'indicatrice. La considération du plan tangent fait seule reconnaître le sens des courbures d'une manière certaine.

1058. *Section plane d'une surface topographique.* — Nous avons vu, à l'article précédent, comment on détermine la section d'une surface par un plan vertical; lorsque le plan sécant P est incliné (*fig.* 429), on trace celles de ses horizontales qui ont les mêmes cotes que les courbes données; ces droites sont respectivement dans les plans horizontaux des courbes, et leurs rencontres appartiennent à la ligne d'intersection.

Quand une courbe perce le plan en deux points m et n et que celle qui la suit ne le coupe pas, l'intersection a une tangente horizontale. La construction qui présente le plus d'exactitude pour déterminer un point de la courbe entre m et n consiste à couper le plan et la surface par un plan vertical auxiliaire GQ.

On reconnaît facilement de quel côté de la ligne AmnC est le terrain coupé.

1059. *Intersection de deux surfaces topographiques.* — On obtient l'intersection de deux surfaces topographiques en faisant passer une ligne par les points de rencontre des courbes horizontales qui ont les mêmes cotes (*fig.* 428). Dans les parties où le tracé laisse quelque incertitude, on intercale des lignes de niveau, ou bien on fait des sections par un plan vertical auxiliaire.

Si l'on veut dresser, suivant la surface A, un terrain qui aurait la surface B, il faudra enlever des terres du côté de la ligne d'intersection où sont les petites hachures.

1060. *Intersection d'une droite et d'une surface topographique.* — On fait passer par la droite AB un plan quelconque et l'on détermine son intersection CD avec la surface (*fig.* 430). Le point cherché M est celui où la ligne CD coupe la droite AB.

Intersection d'une courbe et d'une surface topographique. — On trace des droites parallèles, dans une direction quelconque, par les points de la courbe AB qui ont les mêmes cotes que les courbes de niveau de la surface (*fig.* 431). On prend les rencontres respectives de ces lignes; leur lieu CD est l'intersection de la surface et d'un cylindre qui contient la courbe donnée AB et auquel appartiennent, comme génératrices, les droites que nous venons de tracer. Les points cherchés sont ceux où les lignes AB et CD se coupent.

Lorsque les points de division de la courbe qui ont les mêmes cotes que les lignes de niveau de la surface ne sont pas immédiatement donnés, on les détermine en rectifiant la projection horizontale de chaque division et en opérant ensuite comme il est expliqué à l'article **265**.

Lignes d'égale pente.

1061. La pente d'une ligne en un point est la pente de sa tangente en ce point, ou la tangente trigonométrique de l'angle que cette droite fait avec le plan horizontal (art. **266**).

Une ligne est dite d'*égale pente* quand toutes ses tangentes sont également inclinées sur l'horizon. Une ligne d'égale pente devient droite quand on rectifie son cylindre projetant, et par suite ceux des points d'une telle courbe dont les cotes sont entières partagent sa projection en arcs dont les longueurs sont égales. Nous appellerons *intervalle* la longueur horizontale curviligne qui sépare deux points dont les hauteurs diffèrent de 1^m. La pente et l'intervalle sont réciproques (art. **266**).

Tracer sur une surface topographique, à partir d'un point déterminé A (fig. 433), une courbe dont la tangente fasse un angle constant et donné avec le plan horizontal.

Si la courbe doit être inclinée à $0^m,22$ de hauteur pour 1^m de base, sa pente sera $\frac{22}{100}$, et l'intervalle constant aura une longueur de $\frac{100^m}{22}$ ou $4^m,54$. Du point A comme centre, avec un rayon égal à $4^m,54$, on trace un arc de cercle qui coupe la courbe voisine au point B; puis, transportant le centre en ce point, on décrit un autre arc qui coupe la courbe suivante en D, et, continuant ainsi, on obtient la ligne AE qui satisfait aux conditions du problème. Les arcs AB, BC, CD, etc., sont un peu plus grands que leurs cordes, et par suite les intervalles sont tous plus grands que $4^m,54$; ils ne sont pas d'ailleurs parfaitement égaux. On peut, pour avoir égard à cette circonstance, diminuer un peu les rayons, surtout dans les parties où la projection de la ligne présente une courbure assez grande.

Le problème que nous venons de résoudre est utile pour tracer sur un terrain escarpé un sentier d'une pente déterminée.

Si le cercle décrit de l'un des centres ne rencontrait pas la courbe suivante, la zone comprise entre les deux lignes horizontales serait trop inclinée pour qu'on pût y tracer une ligne ayant la pente donnée.

En général, un cercle, tel que celui qui a son centre en C, coupe la courbe voisine en deux points F et D; il passe donc, par un point, deux courbes ayant la pente donnée. Si, dans le tracé d'un sentier, on se trouve conduit à s'éloigner du point auquel on désire arriver, on peut, à un point C, abandonner la ligne suivie pour prendre l'autre ligne ayant la même pente. On dit qu'un sentier a des *lacets* quand il est ainsi établi suivant une ligne brisée.

1062. *Tracer sur une surface topographique une ligne d'égale pente entre deux points donnés* A *et* B (*fig.* 431). — Ce problème ne peut être résolu que par tâtonnement.

La distance verticale des points A et B est 5^m; on trouve que leur distance horizontale est à peu près 19^m; la pente doit donc être peu éloignée de $\frac{5}{19}$ et l'intervalle de $\frac{19^m}{5}$. Nous essayons d'abord une longueur de 4^m, et nous obtenons la courbe AD, puis, prenant des intervalles égaux à $4^m,5$, à $3^m,5$, à 3^m, nous traçons les courbes AG, AE et AF. Nous portons ensuite sur un axe ox des longueurs of, oe, od et og égales à 3^m, à $3^m,5$, à 4^m et à $4^m,5$, et nous élevons des ordonnées ff', ee', dd' et gg' égales aux longueurs $+$BF, $+$BE, $-$BD et $-$BG. La courbe qui passe par les points f', e', d' et g' coupe l'axe en un point b dont l'abscisse est l'intervalle de la ligne d'égale pente cherchée. Si le tracé de la courbe qui a cet intervalle ne conduit pas exactement au point B, on déplacera un peu les points obtenus sur les dernières lignes de niveau, de manière à satisfaire à cette condition.

On pourrait disposer la courbe d'erreur de manière qu'elle se trouvât sur la figure même, mais cela n'aurait aucun avantage.

Plans tangents.

1063. *Construire un plan tangent à une surface topographique en un point donné.*

Quand le point donné a est sur une courbe de niveau (*fig.* 432), on obtient immédiatement une horizontale du plan, en traçant la tangente aT à cette ligne. Pour trouver une autre droite qui soit contenue dans le plan, nous construisons le rabattement bAG de la section faite dans la surface par le plan vertical Lag perpendiculaire à la droite aT. La tangente AL à cette courbe est, dans l'espace, une ligne de plus grande pente du plan tangent. On détermine sans difficulté l'échelle de pente de ce plan.

Si les segments af et ae étaient égaux, leur longueur commune serait l'intervalle de l'échelle P.

1064. Pour étendre la construction au cas où le point donné a n'est pas sur une ligne de niveau, il suffit de construire la courbe intercalaire passant par ce point (*fig.* 439).

Quand on peut tracer par le point a une droite mn sensiblement normale aux courbes mb et nc, la tangente à la courbe intercalaire est perpendiculaire à mn; on l'obtient donc sans avoir besoin de déterminer cette ligne.

On se dispense généralement de construire la section par un plan vertical; on considère la ligne mn de la surface comme droite : le plan tangent contient alors les droites qui passent par les points m et n et qui sont parallèles à la tangente de la courbe intercalaire. Ces lignes ml et nt sont tangentes aux courbes mb et nc dans le cas où la droite mn les rencontre normalement.

1065. Lorsque l'on a déterminé l'intersection d'une surface par son plan tangent en un point, on peut construire les asymptotes de l'indicatrice de ce point comme tangentes à la courbe au point double.

Sur la *fig.* 432, la section verticale bG tourne sa concavité vers le sol, la tangente AL est extérieure, et les parties du terrain qui sont coupées par le plan tangent sont indiquées par de petites hachures.

Si la surface était convexe, les horizontales du plan ne rencontreraient pas les courbes de niveau qui ont respectivement les mêmes cotes.

D'après les suppositions qui ont été faites à l'article précédent pour la détermination du plan P (*fig.* 439), ce plan est tangent tout le long de la ligne mn, et par suite il n'y a pas de raison pour que le point double de l'intersection soit en a plutôt qu'en un autre point de mn. Pour se conformer aux hypothèses, il faudrait réunir les branches de l'intersection en m et les séparer en n.

1066. *Mener un plan tangent à une surface par une droite donnée* D (*fig.* 435).

Des points de division de la droite nous menons des tangentes aux courbes de niveau qui ont les mêmes cotes. Ces lignes sont des génératrices d'un conoïde oblique qui a pour plan directeur le plan horizontal, dont la droite D est la directrice rectiligne, et qui est circonscrit à la surface. Si la tangente FN à la courbe de contact AK, en un point F, rencontre la directrice D, le plan tangent au point F contiendra cette droite et sera le plan cherché. Au contraire, lorsque la tangente à la courbe AK, en un point J, ne rencontre pas la droite D, cette ligne ne peut avoir, dans le plan tangent au point considéré J, que le point j où elle coupe la génératrice Jj.

Quand la directrice D et une tangente à la courbe AK sont dans un même plan, deux génératrices consécutives du conoïde sont parallèles; or, il est facile de voir quelle est à peu près la position de ces lignes : les génératrices qui passent par les points A et B se rencontrent en projection vers la gauche, celles qui passent par les points K et J convergent vers la droite; il y a donc entre ces deux couples une droite FF_1 qui rencontre de côtés différents celle qui la précède CC_1 et celle qui la suit EE_1; cette droite est voisine des deux génératrices consécutives parallèles du conoïde, et par suite le point F est approximativement celui où le plan cherché touche la surface. La droite FF_1 est une ligne de niveau de ce plan dont l'échelle de pente est P.

Si l'on veut déterminer la position du point de contact avec plus d'exactitude, on pourra intercaler des courbes de niveau, ou mieux tracer la tangente FX à la courbe de contact au point F, construire la section du terrain par le plan vertical FX et lui mener une tangente du point X de la droite D. Nous n'avons pas fait cette construction, qui, en général, n'est pas nécessaire, eu égard à la nature des problèmes que l'on a à résoudre sur les surfaces topographiques.

La génératrice FF_1, parallèle à la génératrice infiniment voisine, est une arête du conoïde (art. **658**). Elle fait un angle maximum ou minimum avec la projection de la droite D (et avec toute autre droite du plan). On peut la déterminer en faisant glisser une équerre et comparant les positions des différentes génératrices réunies en couples consécutifs; on peut aussi tracer une parallèle LT à D, et chercher le point de division F_1 qui sépare deux segments E_1F_1 et FG_1, l'un plus grand, l'autre plus petit, que les intervalles de la droite D [1].

On examinera la position du plan tangent par rapport à la surface, comme il a été dit plus haut (art. **1065**) : nous ne reviendrons pas sur cette question.

1067. Quand la droite D est peu inclinée, les points où elle rencontre les plans des différentes courbes horizontales sont presque tous hors de la feuille de dessin. Il serait d'ailleurs difficile de faire une réduction d'échelle, vu le grand nombre des courbes. Dans ce cas, on préfère prendre pour plan directeur du conoïde un plan oblique à l'horizon : on fait dans la surface une série de sections par des plans parallèles à celui qui a été pris pour plan directeur, et l'on mène à chacune d'elles une tangente du point où son plan est percé par la directrice rectiligne. Nous allons donner un exemple de cette construction.

On trace une série de droites AB, CE, FH, ... (*fig.* 436) parallèles et équidistantes, et on les considère comme les projections des horizontales d'un plan. Pour plus de commodité, on fait passer l'une d'elles par un point A de la droite donnée D, ayant pour cote un nombre entier 16; les autres sont cotées, à partir de celle-là, comme les courbes horizontales. On construit l'intersection *mn* de ce plan et de la surface, et on lui mène du point A une tangente Az qui est une génératrice du conoïde. On transporte ensuite le plan sécant parallèlement à lui-même; pour cela, on augmente les cotes de toutes les horizontales AB, CE, ...

---

(1) D'après des traditions conservées dans le corps du Génie militaire, la construction que nous venons d'exposer est due à Meusnier. Ce géomètre, dont nous avons déjà parlé plusieurs fois, était général du Génie.

d'une quantité égale à l'équidistance des plans des courbes horizontales, c'est-à-dire à l'unité, et on cherche le point de rencontre a du nouveau plan avec la droite D (art. **275**); on détermine ensuite la section kl de la surface et on lui mène une tangente $a\beta$ du point a.

En portant sur D des longueurs aa_1, a_1a_2, ... égales à Aa, on a les points où la droite D de l'espace coupe le plan sécant lorsque l'on augmente successivement les cotes de ses horizontales d'une unité. Quand on a obtenu les génératrices du conoïde qui correspondent aux différentes sections, on cherche celle de ces droites qui rencontre de côtés différents les deux entre lesquelles elle est comprise : son point de contact β est celui où le plan cherché touche la surface. On détermine la cote du point β (art. **1056**), et l'on fait passer un plan par ce point et par la droite D. Pour cette dernière opération, on calcule les cotes des points a et β, on cherche sur la droite $a\beta$ la position du point ξ dont la cote est 17, et, le joignant au point I, qui a la même cote sur la droite D, on a une horizontale du plan.

Il est bon de tracer les droites AB, CE, FH, ... perpendiculaires à D (ou à peu près); alors, pour une inclinaison donnée des plans sécants, leur angle avec la droite D a sa valeur maximum, l'intervalle aa_1 est minimum, et on a de nombreux points de division dans le cadre du dessin.

1068. La construction expliquée dans l'article précédent est applicable lorsque la droite donnée D est horizontale, mais on peut alors opérer d'une manière plus simple (*fig.* 427).

Nous menons aux différentes courbes de niveau des tangentes parallèles à la droite D : ces lignes appartiennent à un cylindre circonscrit à la surface, et on aura résolu le problème si l'on mène à ce cylindre un plan tangent par la droite D, parallèle aux génératrices. Nous prenons un plan vertical auxiliaire EY : la tangente menée du point E de la droite G à la trace du cylindre sur ce plan est dans le plan cherché. On aurait donc facilement le résultat en construisant la section du cylindre par le plan EY; mais une construction, qui appartient comme la précédente à la méthode de Meusnier, va nous permettre de déterminer sans cela une position approchée de la génératrice de contact.

Nous graduons la partie EX de la projection D, de manière qu'elle représente une ligne inclinée quelconque passant par le point E de la droite donnée D dont nous connaissons la cote $58^m,50$; puis nous joignons par des droites les points où les tangentes rencontrent EY, avec ceux qui ont les mêmes cotes sur EX. Si AB est une arête du conoïde oblique formé dans l'espace par ces droites, la tangente à la directrice curviligne en B rencontrera la directrice rectiligne EX au point E de la droite D. Les considérations indiquées à l'article **1066** font voir que la droite AB, qui rencontre de côtés différents les génératrices voisines FG et HJ, est peu éloignée de l'arête. La tangente BC est la génératrice de contact sur le cylindre : le plan cherché contient cette horizontale et sa parallèle D; il est par conséquent facile de tracer et de graduer son échelle de pente P.

Pour déterminer la droite AB, on peut tracer une parallèle E_1X_1 à EX, et chercher le point de division A_1 qui sépare deux segments A_1F_1 et A_1H_1, l'un plus grand et l'autre plus petit que les intervalles de la droite EX.

Cônes et cylindres circonscrits.

1069. *Déterminer la courbe de contact et la trace horizontale d'un cône circonscrit à une surface donnée, connaissant le sommet S de ce cône (fig. 438).*

Nous traçons par le point S une droite SD, et nous la considérons comme la projection d'une génératrice. Pour avoir le point où cette génératrice touche la surface, nous menons dans une direction arbitraire une seconde droite SB, nous la graduons de manière qu'elle représente une droite passant par le point S de l'espace; nous joignons par des droites respectivement ses points de division à ceux où la droite SD rencontre les horizontales ayant les mêmes cotes, et nous cherchons parmi ces lignes la droite MC qui fait un angle maximum ou minimum avec SD : la droite MC est une arête du conoïde horizontal dont les directrices sont la droite SB et la section de la surface par le plan vertical SD. Le plan tangent à cette surface gauche le long de l'arête MC contient les droites MC et BS. La droite qui passe par les points S et M s'y trouve tout entière; elle touche donc la surface au point M, et par suite ce point appartient à la courbe de contact cherchée.

Pour avoir la trace du cône sur un plan horizontal déterminé, celui qui est à la cote 30, il suffit de mener par le point A, qui a cette cote sur la droite SB, une droite AN parallèle à CM : cette droite est l'horizontale passant par A du plan tangent en M; elle fait trouver le point cherché N.

La droite auxiliaire SB étant tracée et graduée, on déterminera ainsi le point de contact et la trace horizontale de chaque génératrice dont on se donnera la projection. On pourra obtenir ces points en faisant glisser l'équerre et sans tracer aucune ligne.

La trace du cône a des branches infinies lorsque la courbe de contact a des points à la même hauteur que le sommet S. On détermine facilement ces points. A chacun d'eux le plan tangent à la surface topographique touche le cône le long d'une génératrice horizontale, et son intersection avec le plan de la trace est l'asymptote d'une branche infinie de cette courbe.

Cylindre circonscrit. — La construction que nous venons d'expliquer est applicable au cas du cylindre circonscrit. La droite de parallélisme remplace la droite SB; on trace diverses droites parallèles à sa projection et l'on opère sur chacune d'elles comme nous l'avons fait sur la droite SD.

1070. Quelquefois on n'a pas besoin de connaître la totalité de la ligne de contact du cône circonscrit, mais seulement l'endroit où elle coupe une zone donnée, par exemple celle qui est comprise entre les courbes horizontales dont les cotes sont 31 et 32 (*fig.* 438). Dans ce cas, après avoir établi comme précédemment les droites SB et SD, on tracera les génératrices du conoïde situées dans les plans qui limitent la zone, c'est-à-dire les droites GE et HF. On donnera ensuite diverses positions à la projection horizontale SD, en la faisant tourner autour du point S, et l'on opérera de la même manière sur chacune d'elles. Si le sens de la convergence des génératrices qui passent aux points G et H vient à changer, on sera assuré qu'elles sont parallèles pour une position intermédiaire de la ligne SD, et alors la droite EF, sensiblement tangente à la zone, passera par le point S de l'espace et sera une génératrice du cône circonscrit.

En général la méthode de Meusnier ne peut être avantageusement employée que quand les formes des courbes horizontales ne se modifient pas d'une manière brusque. Dans le cas contraire, pour déterminer les génératrices d'un cône circonscrit, il faut faire des sections par des plans verticaux contenant le sommet donné, et leur mener des tangentes de ce point.

1071. *Exercice pour la détermination d'un cône circonscrit.* — Nous présentons sur la *Pl. XLI* la courbe de contact et la courbe de section d'un cône circonscrit à une surface topographique. Le sommet S est à la cote 133^{m},50 à 1^{m},50 au-dessus du point culminant du sol.

En général, les courbes horizontales se succèdent avec une grande concordance de formes, et par suite on peut employer la méthode de l'article **1069**, qui est très expéditive. Dans la partie voisine du point G_4, les formes des courbes sont assez différentes; il faut alors recourir à la méthode des sections par des plans verticaux : les résultats qu'elle donne n'ont pas d'ailleurs une grande précision, en cet endroit, car les formes du terrain sont peu accusées.

Les considérations que nous avons présentées dans le III^{e} Chapitre du Livre VIII, pour les arcs réels et les arcs virtuels des courbes de contact et de section, font comprendre comment les diverses parties de ces lignes se rencontrent et se succèdent.

La ligne $AnGmm_1G_1n_1H$ est une courbe de contact : en lui menant des tangentes du point S, on détermine les points limites G et G_1 (art. **892**) : l'arc Gmm_1G_1 est seul utile. La courbe de section qpp_1q_1B passe aux points limites; elle y touche la courbe de contact et elle y est divisée comme celle-ci en arcs réels et en arcs virtuels. Nous retrouvons la même disposition aux points G_2, G_3 et G_4 situés sur d'autres branches de la courbe de contact.

La ligne G_4C est un arc réel de la courbe d'intersection de la surface par le cône circonscrit. Une partie réelle cd de la courbe de contact rencontre cet arc en C, et devient utile à ce point qui est analogue au point C de la *fig.* 358. Ainsi, la tangente hf est la projection d'une génératrice double du cône. Les mêmes circonstances se présentent au point C_1.

Un spectateur placé au point S ne verrait pas les parties de terrain situées au delà des lignes qGG_1B et $q_2G_2G_3CdG_4$.

Lignes de plus grande pente.

1072. De toutes les courbes tracées sur une surface et qui se croisent à un point, la moins inclinée en ce point est celle dont la tangente est la ligne de plus grande pente du plan tangent, et qui par suite rencontre à angle droit la courbe de niveau. On a donc une *ligne de plus grande pente d'une surface*, en traçant une courbe qui, en chaque point, rencontre normalement la ligne de niveau, c'est-à-dire une *trajectoire orthogonale des courbes horizontales*.

Il ne passe par un point déterminé d'une surface qu'une seule ligne de plus grande pente, car on ne peut mener en un point qu'une normale à une courbe. Cette règle comporte plusieurs exceptions, comme nous allons le voir.

1073. *Surfaces de révolution.* — Quand la surface considérée est de révolution autour d'un axe vertical, les méridiens sont les lignes de plus grande pente. Ces courbes se coupent, en général, sur l'axe. Un point de rencontre doit être regardé comme un cercle horizontal évanouissant, et par suite tout plan contenant l'axe est normal à la ligne de niveau que représente ce point.

Suivant que l'axe coupe la méridienne normalement ou obliquement, la surface a un plan tangent unique, ou en possède une infinité; mais la disposition des lignes de plus grande pente est toujours la même.

1074. *Surfaces dont les courbes horizontales sont des ellipses homothétiques ayant leurs centres sur une même verticale.* — Supposons que l'ellipse AD (*fig.* 447) soit la projection de la courbe de niveau sur laquelle se trouve le point de départ M; sur le plan horizontal la normale MT est tangente à la ligne de plus grande pente, et le point M_1 où elle coupe l'ellipse voisine A_1D_1 appartient à cette ligne. Le point par lequel on peut considérer que la projection de la ligne de plus grande pente est décrite rencontre ainsi successivement toutes les ellipses de la série; il arrive donc à leur centre commun O, que l'on doit regarder comme étant leur limite.

La droite MT rencontre le grand axe en un point T de l'abscisse OP; le point M_1 est donc à une moindre distance du grand axe AD que le point N homologue de M. Nous voyons ainsi que le rayon vecteur OM fait des angles de plus en plus petits avec la droite OD lorsque le point mobile se rapproche du centre O.

A ce point la trajectoire est normale à l'ellipse infiniment petite, et par suite tangente à l'un de ses axes. Il résulte de là qu'une ligne de plus grande pente, de quelque point qu'elle parte, passe au centre commun des ellipses, tangentiellement à la droite des grands axes. Il faut excepter le cas où le point donné appartient à la droite des petits axes, car cette ligne est évidemment une trajectoire orthogonale des ellipses.

1074 *a*. Une ellipse quelconque de la série peut être représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = u,$$

dans laquelle a et b sont des longueurs déterminées, et u un coefficient arbitraire.

On obtient, en différentiant,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

L'équation différentielle de la trajectoire orthogonale est donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Intégrant, et appelant x_1 et y_1 les coordonnées du point de départ, on a

$$a^2 \log\frac{x}{x_1} - b^2 \log\frac{y}{y_1} = 0.$$

Telle est l'équation de la projection de la ligne de plus grande pente; x et y doivent toujours avoir respectivement les mêmes signes que x_1 et y_1; chaque ligne s'arrête d'une part au point O, de l'autre à l'infini. Les courbes qui traduisent en Géométrie les fonctions logarithmiques présentent, en général, des singularités de ce genre. Nous avons déjà signalé cette circonstance dans une Note de l'article 85.

1074 *b*. La *fig.* 441 représente les projections de plusieurs lignes de plus grande pente. Nous les avons obtenues en traçant un assez grand nombre des ellipses de la série, et construisant la normale à chacune d'elles au point où elle est rencontrée par la normale précédente. Nous avons d'ailleurs numériquement vérifié les coordonnées de quelques points à l'aide de la formule donnée à l'article **1074** *a*.

1075. Si dans l'espace la directrice des ellipses est l'ellipse $A_1O'B_1O''$, dont un des axes est sur la verticale du point O (*fig.* 442), la surface est un ellipsoïde scalène, et les trajectoires sont parasites dans les parties situées au delà de l'ellipse A_1B_1 qui forme le contour apparent (*fig.* 441). Quand la directrice est une hyperbole $A'A''B'B''$ (*fig.* 443), ayant pour axe non transverse la verticale du point O, la surface est un hyperboloïde gauche et les trajectoires sont parasites dans les parties situées à l'intérieur de l'ellipse de gorge A_2B_2 (*fig.* 441).

On détermine facilement les projections verticales des lignes de plus grande pente, en relevant de la projection horizontale les points où ces courbes rencontrent quelques ellipses.

1076. *Surfaces dont les courbes horizontales sont des hyperboles homothétiques ayant leurs centres sur une verticale.* — Sur le plan horizontal, les droites OL et OP, asymptotes communes des hyperboles (*fig.* 444) forment un système géométrique qui appartient à la série de ces courbes. Si nous prenons sur l'asymptote OL le point de départ M, l'élément de la trajectoire sera dirigé sur la perpendiculaire GF, et l'on voit, d'après le sens de la courbure des hyperboles, que, d'un côté comme de l'autre, la trajectoire s'éloignera du point O. Les axes sont les seules projections des lignes de plus grande pente qui passent à ce point.

A partir du point M situé sur l'asymptote OL, la trajectoire se rapproche constamment d'un côté de l'axe AB, de l'autre de l'axe OY; on reconnaît facilement, à l'aide de son équation, qu'elle a ces droites pour asymptotes.

1076*a*. Dans le cas qui nous occupe, a^2 est négatif. Si nous mettons son signe en évidence, l'équation que nous avons trouvée à l'article **1074***a* deviendra

$$a^2 \log \frac{x}{x_1} + b^2 \log \frac{y}{y_1} = 0.$$

x et y sont de mêmes signes que x_1 et y_1 : nous pouvons les supposer positifs.

Quand x est supérieur à x_1, y est inférieur à y_1, et réciproquement. Si l'une des coordonnées croît indéfiniment, l'autre décroît indéfiniment : les deux axes sont donc asymptotes de la courbe. Chaque trajectoire se termine à l'infini sur chaque axe.

1077. Nous avons représenté sur les *fig.* 445 et 446 les projections verticales d'un hyperboloïde et d'un cône dont les sections horizontales sont les hyperboles dessinées sur la *fig.* 444. Il est facile de construire les projections verticales des lignes de plus grande pente d'après leurs projections horizontales. Ces courbes dans l'espace sont asymptotes de l'hyperbole principale A′B′A″B″ pour l'hyperboloïde, et des génératrices A′B″, B″A′ pour le cône.

A chacun des sommets O′ et O″ de l'hyperboloïde il passe deux lignes de plus grande pente, qui sont l'hyperbole principale A′B′A″B″ et l'ellipse de gorge. Ces deux courbes divisent les autres lignes de plus grande pente en quatre groupes. Les lignes d'un même groupe sont asymptotes les unes des autres des deux côtés, et de celles d'un groupe voisin d'un côté seulement. La hauteur du sommet O′ est un maximum pour l'ellipse de gorge, et un minimum pour l'hyperbole A′B′.

Sur le cône les lignes de plus grande pente forment également quatre groupes qui sont séparés par les deux génératrices A′B′ et B′A′.

1078. *Indication des diverses dispositions que peuvent présenter les lignes de plus grande pente aux points où le plan tangent est horizontal.* — En remplaçant la surface considérée par une surface du second ordre osculatrice en un de ses sommets, on reconnait, pour chaque forme de l'indicatrice, comment les lignes de plus grande pente sont disposées aux points où le plan tangent est horizontal.

Si l'indicatrice est un cercle, la surface osculatrice est un ellipsoïde de révolution, et dans chaque azimut une ligne de plus grande pente arrive au point (art. **1075**).

Si l'indicatrice est une ellipse, la surface osculatrice est un ellipsoïde scalène, et une infinité de lignes de plus grande pente arrivent au point; une d'elles est tangente à la section principale qui a le plus petit rayon de courbure, et toutes les autres à celle qui a le plus grand rayon (art. **1075**).

Si l'indicatrice est une hyperbole, deux lignes de plus grande pente se croisent au point; elles sont respectivement tangentes aux sections principales. La hauteur du point est un maximum sur l'une d'elles et un minimum sur l'autre (**1077**).

On appelle *cols* les points où le plan tangent est horizontal, et pour lesquels l'indicatrice est une hyperbole.

Quand l'indicatrice est composée de deux droites, la surface osculatrice est un cylindre, et l'on reconnait facilement qu'une seule ligne de plus grande pente passe au point.

1079. *Surfaces dont les courbes horizontales sont des ellipses identiques coupées suivant un de leurs axes par un plan vertical.*

Les projections horizontales des lignes de plus grande pente sont les trajectoires orthogonales d'une série d'ellipses identiques qui ont un de leurs axes sur une même droite VX (*fig.* 449). Si l'on prend pour point de départ un point M de l'une des ellipses DD_1, la tangente à la trajectoire sera dirigée sur la normale MT; en appelant γ l'angle PTM qu'elle fait avec l'axe VX, a et b les longueurs des demi-axes des ellipses, et y l'ordonnée MP, on a

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{ay}{b\sqrt{b^2 - y^2}}.$$

Il est facile de voir que le point mobile par lequel on peut supposer la trajectoire décrite se rapproche constamment de l'axe lorsque, quittant sa position initiale, il s'avance vers la gauche; son ordonnée diminue donc indéfiniment, et, en vertu de la formule que nous venons d'écrire, l'angle γ diminue aussi, y et γ sont nuls en même temps; mais alors le point mobile a une abscisse infinie, car la seule trajectoire qui passe par un point de l'axe à distance finie est l'axe lui-même; la droite VX est donc asymptote de la courbe.

Si maintenant nous supposons que le point M se meuve vers la droite, son ordonnée y augmentera progressivement, et l'on voit par la formule que, quand il sera en un point O de la droite LO dont l'ordonnée est b, γ aura atteint la valeur 90°; le centre de l'ellipse se trouvera alors en A. Au delà du point O la trajectoire a un rebroussement; car, en considérant l'ellipse quand son centre occupe sur l'axe les deux positions voisines de A, en deçà et au delà de ce point, on reconnait que les deux éléments qui aboutissent au point O ont des positions symétriques par rapport à la normale OA de l'ellipse. Enfin la courbe a une seconde branche OS asymptote de VX, comme la première.

En prenant successivement pour points de départ les différents points de la droite OL, on obtient les diverses trajectoires qui sont évidemment identiques. De l'autre côté de l'axe on trouve de nouvelles trajectoires superposables aux premières et placées symétriquement à elles.

1079 *a*. On peut représenter l'une quelconque des ellipses par l'équation

$$\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

c étant un coefficient arbitraire.

On obtient, par la différentiation,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2(x-c)}{a^2 y},$$

et, en éliminant c,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b\sqrt{b^2-y^2}}{ay}.$$

L'équation différentielle de la trajectoire orthogonale est par conséquent

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ay}{b\sqrt{b^2-y^2}}.$$

On trouve, en intégrant,

$$\frac{a}{b}x=\sqrt{b^2-y^2}+b\log\frac{y}{b+\sqrt{b^2-y^2}}.$$

Nous n'ajoutons pas de constante, parce que, toutes les trajectoires étant identiques, on peut considérer uniquement celle qui a son point de rebroussement sur l'axe des ordonnées, et pour laquelle par suite la valeur 0 de x correspond à la valeur b de y.

Pour avoir la courbe dans toute son étendue, il faut donner le double signe au radical; mais l'on voit facilement que son signe détermine celui du second membre de l'équation, sans avoir aucune influence sur sa grandeur absolue. On peut donc prendre le radical positivement, et attribuer le double signe au premier membre [1].

1080. Quand le lieu des centres des ellipses dans l'espace est une droite A′A₁ (*fig.* 448), la surface est un cylindre, et l'on obtient la ligne de plus grande pente en prenant son intersection avec le cylindre vertical PMONQ. La construc-

[1] M. Lefort, ingénieur des Ponts et Chaussées, a étudié une courbe analogue à celle qui vient de nous occuper, dans un Mémoire sur les arches biaises (*Annales des Ponts et Chaussées*; 1839).

tion donne les deux courbes P′O′Q′ et U′GO′ES′; mais il ne peut passer qu'une ligne de plus grande pente par le point (O, O′). La forme de la courbe U′O′S′ montre qu'elle n'est pas la projection d'une ligne de plus grande pente du cylindre, car sa tangente est parallèle à la ligne de terre en deux points E et G, et aucun des plans tangents à la surface n'est horizontal.

Pour ne laisser subsister aucun doute sur cette question, nous avons fait le développement du cylindre; la courbe P″O″Q″, transformée de la ligne (POQ, P′O′Q′), coupe à angle droit les sinusoïdes dans lesquelles se changent les sections horizontales; mais la courbe U″O″S″, transformée de l'autre partie de l'intersection, rencontre les sinusoïdes sous toutes les inclinaisons. Les deux courbes se rejoignent d'ailleurs à l'infini avec les mêmes asymptotes.

Eu égard au sens de l'inclinaison de la tangente commune TR, la droite O O′ ne coupe la ligne P″Q″ qu'au point O″, tandis qu'elle rencontre la ligne U″S″ en deux autres points. Ces courbes ont donc des formes essentiellement différentes, et par suite la seconde ne peut pas être une trajectoire orthogonale d'une certaine série de sections parallèles du cylindre.

1080 a. Nous conservons les notations adoptées à l'article **1079** a, et nous appelons α l'angle $C'_2O'V'_1$ que les génératrices du cylindre font avec le plan horizontal. L'équation de cette surface est alors

$$(1)\qquad \frac{(z - x\tang\alpha)^2}{a^2\tang^2\alpha} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nous avons trouvé que l'équation de la trajectoire POQ est

$$(2)\qquad \frac{a}{b}x = \sqrt{b^2 - y^2} - b\log\frac{y}{b + \sqrt{b^2 - y^2}}.$$

En éliminant y, on obtient l'équation suivante de la projection verticale de l'intersection des deux cylindres :

$$\frac{a^2}{b^2}x\sin\alpha = z\cos\alpha - x\sin\alpha - a\sin\alpha\log\sqrt{\frac{a\sin\alpha - (z\cos\alpha - x\sin\alpha)}{a\sin\alpha + (z\cos\alpha - x\sin\alpha)}}.$$

Nous prenons pour axes des abscisses et des ordonnées les droites O′V′ et O O′; en appelant x' et z' les nouvelles coordonnées, nous aurons

$$x = x'\cos\alpha - z'\sin\alpha,\qquad x' = z\sin\alpha + x\cos\alpha,$$
$$z = x'\sin\alpha + z'\cos\alpha,\qquad z' = z\cos\alpha - x\sin\alpha;$$

et l'équation de la projection verticale de l'intersection deviendra

$$\frac{a^2}{b^2}(x'\sin\alpha\cos\alpha - z'\sin^2\alpha) = z' - a\sin\alpha\log\sqrt{\frac{a\sin\alpha - z'}{a\sin\alpha + z'}}.$$

Elle se décompose en deux :

(3) $$\frac{a^2 \sin\alpha \cos\alpha}{b^2} x' = \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\sin^2\alpha\right) z' - a \sin\alpha \log \sqrt{\frac{a\sin\alpha + z'}{a \sin\alpha - z'}},$$

(4) $$-\frac{a^2 \sin\alpha \cos\alpha}{b^2} x' = \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\sin^2\alpha\right) z' - a \sin\alpha \log \sqrt{\frac{a\sin\alpha + z'}{a \sin\alpha - z'}}.$$

Il est facile de trouver l'équation de la transformée par développement, dans le cas où le cylindre est de révolution. On a alors

$$b = a \sin\alpha,$$

et les équations (3) et (4) deviennent

(5) $$x' \cot\alpha = 2 z' - b \log \sqrt{\frac{b + z'}{b - z'}},$$

(6) $$x' \cot\alpha = b \log \sqrt{\frac{b + z'}{b - z'}}.$$

Si nous rapportons les transformées aux droites O″D″ et O″O′, on aura

$$x' = x'', \quad z' = b \sin \frac{z''}{b}.$$

En portant ces valeurs de x' et de z' dans les équations (5) et (6), on trouve pour équations des transformées

(7) $$x'' \cot\alpha = 2 b \sin \frac{z''}{b} - b \log \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{z''}{2b}\right),$$

(8) $$x'' \cot\alpha = b \log \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{z''}{2b}\right).$$

L'équation d'une sinusoïde transformée d'une section horizontale, telle que C′B′, est, en supposant toujours que le cylindre soit de révolution,

$$x'' \operatorname{tang}\alpha + b \sin\frac{z''}{b} + C = 0.$$

La différentiation donne

$$\frac{dz''}{dx''} = -\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\cos\frac{z''}{b}};$$

et l'on a pour la trajectoire orthogonale

$$\frac{dz''}{dx''} = \cot\alpha \cos\frac{z''}{b}.$$

En intégrant cette équation différentielle on trouve l'équation (8). Il résulte de là que les équations (4), (6) et (8) se rapportent à la ligne de plus grande pente, et les équations (3), (5) et (7) à la courbe compagne.

1081. *Conoïdes dont le plan directeur est horizontal.* — Quand les génératrices d'une surface sont des droites horizontales, les projections des lignes de plus grande pente sont les trajectoires orthogonales d'une série de droites, et par suite des développantes de leur enveloppe.

Si le conoïde est droit, les trajectoires orthogonales sont des cercles. On conclut de là que les lignes de plus grande pente d'une surface de vis à filets carrés dont l'axe est vertical sont des hélices génératrices.

Hélicoïdes. — Pour une surface de vis à filets triangulaires, la projection d'une ligne de plus grande pente est la trajectoire orthogonale d'une série de spirales d'Archimède identiques et ayant leurs sommets en un même point. Cette courbe a donc une sous-tangente constante, et par suite elle est une spirale hyperbolique (art. **1024**). Dans l'espace, les lignes de plus grande pente forment deux groupes qui appartiennent respectivement à la nappe supérieure et à la nappe inférieure. L'axe les sépare et leur est asymptote aux unes d'un côté, et aux autres de l'autre.

1082. Dans la plupart des surfaces que nous venons d'étudier, et qui sont des plus simples de la Géométrie, les lignes de plus grande pente diffèrent d'une manière essentielle des courbes que nous avions eu l'occasion d'examiner, car elles ont des points d'arrêt à distance finie ou à l'infini. Elles sont, en général, réparties en groupes séparés par des lignes de plus grande pente qui sont soumises aux lois ordinaires de la continuité.

CHAPITRE II.

TABLEAUX GRAPHIQUES.

Emploi des surfaces topographiques pour remplacer les tables à double entrée.

1083. Les tables numériques sont à simple entrée ou à double entrée, suivant que les nombres qu'elles font connaître dépendent d'une seule variable ou de deux variables distinctes. Les premières, telles que les Tables de sinus, se composent de deux colonnes parallèles contenant des nombres qui se correspondent un à un; les autres, telles que celle qu'on attribue vulgairement à Pythagore, se divisent en colonnes longitudinales et en colonnes transversales, qui répondent respectivement aux différentes grandeurs des deux variables ou des deux *arguments*, car c'est ainsi qu'on les appelle. Le nombre qui correspond à des valeurs déterminées des arguments se trouve dans la case commune à leurs colonnes.

1084. On remplace souvent les Tables à simple entrée par des courbes planes, en considérant les nombres des deux colonnes comme des abscisses et des ordonnées. Cette substitution permet de résoudre graphiquement divers problèmes; elle a d'ailleurs l'avantage de faire apprécier d'un coup d'œil les relations de grandeur exprimées par la Table [1].

Nous avons tracé, sur la *fig.* 451, une courbe propre à remplacer une Table de logarithmes vulgaires pour les nombres compris entre 1 et 10; les abscisses sont les logarithmes des nombres représentés par les ordonnées, ces longueurs étant respectivement mesurées aux échelles de 5^{cm} et de 5^{mm} pour un. Quand un nombre est dans les limites des ordonnées, l'arc AB fait trouver son logarithme; s'il est plus grand que 10 ou plus petit que 1, on obtient encore son logarithme à l'aide de la courbe, en le multipliant ou en le divisant par une puissance de 10, et donnant à la caractéristique une grandeur convenable.

Au lieu de construire la *logarithmique* AB, on peut la déterminer par sa projection cotée X'Y'. Une simple droite ainsi graduée fait connaître le logarithme d'un nombre donné, ou le nombre qui correspond à un logarithme connu.

Toute Table à simple entrée peut être remplacée, de cette manière, par une droite convenablement cotée ou graduée.

1085. *Tableau propre à remplacer la Table de Pythagore.* — On peut remplacer d'une manière analogue une Table à double entrée par une surface : il suffit de considérer les deux arguments et le nombre qu'ils déterminent comme trois coordonnées. Ainsi, en appelant x et y deux nombres, et z leur produit, la Table de Pythagore aura pour expression analytique l'équation

$$z = xy,$$

et pour expression géométrique le paraboloïde qu'elle représente. En donnant

(1) On réunit quelquefois sur un Tableau plusieurs courbes de même nature, de manière à rendre sensible la comparaison des phénomènes, des fonctions ou des mouvements qu'elles représentent. L'atlas de Berghaus contient plusieurs Tableaux de ce genre.

Dans le service de l'exploitation des chemins de fer, on emploie, pour représenter la marche des trains, des Tableaux sur lesquels les temps forment les abscisses, et les distances itinéraires les ordonnées. La vitesse d'un train étant supposée uniforme, sa marche est indiquée, entre deux stations, par une ligne droite. On voit immédiatement sur ces Tableaux les heures et les lieux où chaque train en croise ou en dépasse d'autres.

Nous croyons aussi devoir mentionner des Tableaux graphiques d'une nature différente : nous voulons parler de ces Cartes géographiques qui sont destinées à rendre sensibles les résultats de certaines recherches statistiques. Sur les unes, les routes sont indiquées avec des largeurs variables et proportionnelles au nombre des voyageurs qui les ont parcourues dans une année; sur d'autres, chaque port de mer est représenté par un cercle dont la surface est dans un rapport déterminé avec le tonnage des navires qui l'ont fréquenté, etc. M. Minard, inspecteur général des Ponts et Chaussées, a publié le premier des Cartes de ce genre; il en a fait paraître un grand nombre, toutes fort intéressantes. (*Voir* la Notice de M. Minard : *Des Tableaux graphiques et des Cartes figuratives*; 1861.)

successivement à z différentes valeurs, on aura des courbes horizontales de cette surface : ce seront des hyperboles équilatères et homothétiques que l'on pourra facilement dessiner (*fig.* 450).

Le produit de deux nombres tels que 5 et 8 est la cote du point dont ils sont les coordonnées. Quand le point se trouve sur une courbe tracée, on a immédiatement sa cote ; dans le cas contraire, on recourt aux procédés de l'article **1055**, ou plutôt on fait une interpolation à vue, car, en général, on n'emploie les Tableaux graphiques que quand ce dernier procédé peut être adopté sans inconvénient.

Le même Tableau peut servir pour faire des divisions. Ainsi, le quotient de 40 par 8 est l'ordonnée de celui des points de l'hyperbole 40 dont l'abscisse est 8. Si le nombre à diviser avait été compris entre les cotes de deux hyperboles tracées, il aurait été nécessaire de construire des courbes intercalaires. En général, un Tableau qui contient une série de lignes de niveau de la surface représentée par une équation à trois variables peut servir à déterminer l'une quelconque de ces quantités quand on connait les deux autres.

1086. *Tableau des températures moyennes à Halle.* — Lorsqu'une Table à double entrée n'est pas l'expression d'une loi mathématique connue, la construction du Tableau graphique propre à la remplacer exige quelques précautions particulières que nous allons expliquer sur un exemple.

Kaemtz, après avoir fait de nombreuses observations thermométriques à Halle, a dressé une Table qui fait connaître la température moyenne de cette ville, suivant l'heure du jour et le mois de l'année. La *fig.* 453 reproduit sous une forme graphique les résultats de ce Tableau. On y voit des courbes d'égale température rapportées à deux axes dont les divisions correspondent, pour l'un, aux mois de l'année, pour l'autre, aux heures du jour. La verticale du mois de mai rencontre l'horizontale de 5^h du matin un peu au delà de la courbe cotée 9 : la température moyenne indiquée pour ce mois et cette heure est donc un peu supérieure à 9° ; le Tableau de Kaemtz donne 9°,05.

Pour construire ce Tableau, après avoir pris des grandeurs arbitraires pour représenter les heures, les mois et les degrés de température, on a considéré successivement les différentes colonnes horizontales de la Table numérique, et l'on a tracé la courbe que chacune d'elles représente, en la rapportant à deux axes rectangulaires Ax et Az. On a ainsi la ligne qui indique la température moyenne des différents mois pour une même heure, ou la section de la surface par un plan perpendiculaire à l'axe des heures. Pour éviter la confusion, on n'a conservé que huit des vingt-quatre courbes ainsi obtenues. On a tracé ensuite la droite horizontale qui correspond à un degré déterminé du thermomètre, et, rapportant sur le Tableau ses intersections avec les courbes, on a obtenu les points où une ligne d'égale température rencontre les différentes droites horaires.

Les points ainsi déterminés suffisent, en général, pour le tracé des lignes de niveau : cependant, dans les parties de ces courbes où la tangente est parallèle à l'axe des mois, il existe une petite incertitude que l'on a fait disparaître en construisant une section par un plan vertical correspondant au mois de juillet.

1087. Les ondulations des courbes horizontales font connaître toutes les circonstances de la variation de la température aux différentes heures du jour et aux différentes époques de l'année. Le point culminant de la surface est aux environs du mois de juillet et de 3^h après midi ; c'est un maximum absolu. Le point le plus bas, minimum absolu, est en janvier entre 6^h et 7^h du matin. Entre 1^h et 2^h de l'après-midi, en janvier, se trouve un col qui indique un minimum pour les mois et un maximum pour les heures. Un autre col est entre juillet et août vers 3^h du matin.

Si l'on unit par un trait continu la suite des points de contact des courbes de niveau avec leurs tangentes parallèles à l'axe des heures, on aura les lignes des points les plus hauts et des points les plus bas des sections longitudinales ; elles font connaître, suivant la saison, les heures du jour auxquelles ont lieu le maximum et le minimum diurnes ; on les a indiquées sur la figure par des traits en points ronds. On obtient d'une manière analogue, en traçant des tangentes parallèles à l'axe des mois, des lignes qui marquent les époques de l'année auxquelles se produisent le maximum et le minimum pour chaque heure.

1088. *Tableau pour la résolution de l'équation numérique du troisième degré* (*fig.* 455). — Lorsque l'équation du troisième degré est ramenée à la forme

$$z^3 + xz + y = 0,$$

elle représente un conoïde horizontal, si l'on y considère l'inconnue z et les coefficients x et y comme des coordonnées variables. En attribuant successivement à z différentes valeurs, on peut tracer quelques-unes des droites qui forment les lignes de niveau de cette surface, et construire son contour apparent.

Suivant que le point déterminé par les valeurs données de x et de y se trouvera en dehors de l'enveloppe, sur cette courbe ou dans son intérieur, il sera la projection d'un seul point du conoïde, de trois points dont deux sont réunis en un seul, ou de trois points distincts, et l'équation possédera une racine réelle, trois racines réelles dont deux égales ou trois inégales.

On trouve par les procédés ordinaires que l'équation de l'enveloppe est

$$4x^3 + 27y^2 = 0.$$

Cette courbe est la développée de la parabole qui a pour équation

$$y^2 + 4x - 8 = 0.$$

Les positions du point à l'extérieur et à l'intérieur de l'enveloppe correspondent respectivement aux valeurs positives et aux valeurs négatives du binôme $(4x^3 + 27y^2)$. Nous voyons que la considération du Tableau graphique conduit facilement à des résultats que l'on déduit ordinairement de la discussion directe de l'équation du troisième degré.

On peut employer avantageusement un Tableau de ce genre lorsque l'on doit résoudre un grand nombre de fois l'équation trinôme du troisième degré, pour des valeurs de x et de y comprises dans des limites déterminées (¹). Ce mode de solution s'étend d'ailleurs sans difficulté à toute équation de la forme

$$z^m + xz^n + y = 0.$$

Tableau graphique représentant deux fonctions différentes de deux mêmes arguments.

1089. Si deux quantités z et z_1 sont fonctions de deux variables x et y, de sorte que l'on ait

$$z = f(x, y), \quad z_1 = f_1(x, y),$$

on pourra établir sur un même Tableau deux séries de lignes de niveau qui feront connaître les grandeurs de z et de z_1 correspondant à chaque système de valeurs de x et de y. Tous les problèmes dans lesquels on devra déterminer deux des quatre quantités x, y, z et z_1, quand on connaît les deux autres, seront facilement résolus à l'aide de ce Tableau. Par exemple, si z et z_1 sont donnés, on tracera les courbes intercalaires des deux séries qui correspondent à ces cotes; les valeurs de x et de y seront les coordonnées de leur point de rencontre. Le problème admettra autant de solutions que les courbes auront de points communs.

Anamorphose des Tableaux graphiques.

1090. Les Tableaux graphiques ont souvent l'inconvénient d'exiger des courbes compliquées. Nous allons faire connaître un artifice par lequel on parvient quelquefois à transformer ces lignes en d'autres plus simples.

(¹) Gergonne a proposé pour résoudre l'équation du troisième degré une méthode graphique qui, bien que très différente en réalité de celle qui est due à M. Lalanne et que nous expliquons dans le texte, repose cependant sur la même base, la construction des normales à la parabole ordinaire (*Annales de Mathématiques*, t. IX).

Revenons au paraboloïde qui remplace la Table de Pythagore (art. **1085**); son équation est

$$z = xy.$$

Nous posons

$$x' = \log x, \quad y' = \log y,$$

et par suite nous avons

$$\log z = x' + y'.$$

Si nous considérons x', y' et z comme trois coordonnées variables, cette nouvelle équation représentera un cylindre horizontal, surface dont les lignes de niveau sont des droites parallèles, et que, par conséquent, nous pouvons représenter facilement (*fig.* 452). Pour trouver le produit de deux nombres à l'aide du Tableau que l'on obtient ainsi, il faut prendre pour coordonnées horizontales les logarithmes des valeurs données de x et de y. Cette opération exige l'emploi d'une Table numérique; mais, pour qu'il n'en résulte aucune gêne, on transporte cette Table sur la figure, en donnant aux axes une graduation logarithmique, comme nous l'avons expliqué à l'article **1084**. Les cotes sont les nombres dont les abscisses sont les logarithmes. Il résulte de là que les coordonnées de l'origine sont cotées 1 et non pas 0.

1091. Cet exemple montre en quoi consiste l'*anamorphose* des Tableaux graphiques; on cherche à simplifier l'équation des courbes de niveau en prenant de nouvelles coordonnées qui soient fonctions des premières, et l'on place, sur les axes, des cotes qui font connaître les valeurs de celles-ci. La complication du problème est alors reportée sur la graduation des axes.

Nous allons indiquer un autre exemple emprunté à l'art des constructions.

Dans le calcul des terrassements pour les routes, on doit résoudre un grand nombre de fois l'équation

$$z = \frac{(B+y)^2}{2(A-x)} - C.$$

En y considérant x, y et z comme des coordonnées, elle représente un hyperboloïde dont les lignes de niveau sont des paraboles. Si l'on pose

$$x' = \log(A - x), \quad y' = \log(B + y),$$

on aura

$$y' = \tfrac{1}{2}x' + \tfrac{1}{2}[\log 2 + \log(z + C)].$$

Cette équation est celle d'un cylindre horizontal; on peut facilement construire le Tableau graphique qui le représente, pour des valeurs déterminées des constantes A, B et C. Les cotes de l'origine correspondent aux valeurs nulles de x et de y, et sont, par conséquent, les logarithmes de A et de B.

1092. Suivant la nature des relations qui existent entre les anciennes coordonnées et les nouvelles, il peut arriver que les valeurs de x', ou les abscisses, augmentent quand les grandeurs de x, qui sont leurs cotes, diminuent. Lorsque l'abscisse x', considérée comme fonction de x, a un maximum ou un minimum, la série naturelle des cotes se développe d'abord dans un certain sens, puis dans le sens opposé.

Considérons, par exemple, l'hyperboloïde représenté par l'équation

$$yz + x^2 - 20x + 104 = 0;$$

les courbes horizontales sont des paraboles, mais, si nous posons

$$x' = x^2 - 20x + 104,$$

nous aurons

$$yz + x' = 0,$$

et les lignes de niveau seront des droites.

A la valeur 4 de x' correspond pour x une grandeur minimum égale à 10. La cote 10 sera, par conséquent, au point dont l'abscisse est 4, et les cotes 11, 12, 13, ..., 9, 8, 7, ... seront sur la partie de l'axe qui s'étend au delà de ce point. Les valeurs de x sont imaginaires pour les abscisses inférieures à 4, et par suite les droites transformées des paraboles sont parasites au delà de la parallèle à l'axe des ordonnées dont l'abscisse est 4.

1093. On est quelquefois conduit à employer deux Tableaux distincts pour résoudre une même formule. Considérons l'equation

$$z = \frac{ax^2}{x+y};$$

on ne peut pas la simplifier en prenant des variables qui soient des fonctions distinctes des anciennes, car ces dernières sont réunies dans le dénominateur; si cependant on veut avoir des droites pour lignes de niveau, on posera

$$x' = ax^2, \quad y' = x + y,$$

et l'on construira deux Tableaux sur les formules

$$y' = x + y, \quad z = \frac{x'}{y'}.$$

Le premier fera connaître l'ordonnée auxiliaire y'; le second, dont l'axe des abscisses aura été convenablement gradué, donnera ensuite l'inconnue z'.

Application de l'anamorphose à la représentation graphique de certaines lois naturelles.

1094. Lorsque l'on connaît une loi mathématique entre trois variables x', y' et z, on peut représenter par des courbes de niveau la surface qui en est l'expression. Alors, si chacune des grandeurs x' et y' n'est pas donnée immédiatement, mais doit être prise dans une Table à simple entrée en fonction d'une autre quantité x ou y, on peut éviter cette recherche, en inscrivant sur les bords du Tableau des cotes qui donnent les grandeurs des variables primitives, d'après les différentes valeurs des coordonnées.

Afin de donner un exemple de ce genre d'anamorphose, supposons que l'on possède une Table numérique qui fasse connaître, pour un pays, le chiffre de la population dont l'âge est inférieur aux différents nombres d'années, et qu'on veuille construire un Tableau graphique qui permette de déterminer le nombre d'individus compris entre deux âges x et y. On aura, en appelant z ce nombre et en désignant par x' et y' les nombres des personnes dont les âges sont respectivement inférieurs à x et y,

$$z = x' - y'.$$

On construira dans la partie utile les lignes de niveau du plan que représente cette équation, et, à l'aide de la Table, on inscrira sur les axes les valeurs de x et de y qui correspondent aux grandeurs réelles des coordonnées x' et y'.

La *fig.* 454 représente ce Tableau, construit d'après une Table numérique donnée par Demontférand pour la répartition de la population mâle en France dans l'année 1833 (*Journal de l'École Polytechnique*, XXVI^e Cahier, p. 294). Les cotes mises sur l'axe des abscisses indiquent les âges x qui correspondent à la population mâle x', cette dernière étant représentée par une longueur de 4^{mm} pour un million d'habitants. On doit concevoir l'axe des coordonnées gradué de la même manière, mais les cotes sont reportées sur la parallèle qui passe à l'âge de quatre-vingts ans; c'est à cette droite que le Tableau est limité.

Pour obtenir le nombre d'individus compris entre deux âges déterminés, il faut suivre la parallèle à ox correspondant au plus petit âge, jusqu'à la rencontre de la parallèle à oy correspondant au plus grand. La cote de la ligne inclinée sur laquelle on arrive indique, en millions, le chiffre de la population mâle.

En opérant de cette manière pour savoir combien il y avait en France, en 1833, d'hommes de dix-huit à soixante ans, on trouve que le point de rencontre des parallèles à ox et à oy passant par 18 et 60 tombe entre les obliques 8 et 9, plus près de celle-ci que de la première, à un cinquième environ de l'intervalle qui les sépare. On en conclut que le nombre d'hommes cherché est d'environ 8 800 000; le calcul exact fait à l'aide de la Table numérique donne 8 792 569.

FIN DE LA TROISIÈME PARTIE.

TABLE ANALYTIQUE DES TROIS PARTIES [1].

La première Partie contient les articles de .... 1 à 319.
La deuxième, de .... 320 à 776.
La troisième, de .... 777 à 1094.

A

Anamorphose des tableaux graphiques. — Théories générales et applications, 1090-1094.

Angle de contingence. — Définition, expressions, 95, 778. — Grandeur de l'angle d'une droite avec une courbe, 485.

(*Voir* Rayon de courbure.)

Angles de droites et de plans. — Théorèmes et constructions élémentaires, 46-58, 519 *a*, 519 *b*. — Problèmes résolus par la méthode des projections cotées, 278-281.

Angle trièdre. — Liv. I, Chap. IV. — Résolution dans les différents cas, 70-81, 137-141 *b*. — Problèmes relatifs à l'angle trièdre trirectangle, 82-84.

Arête de rebroussement. — La surface développable a une arête de rebroussement, 441-443, 446. — Propriétés de cette ligne, 447, 451, 475, 486; ses points de rebroussement, 462, 463. — Arête de la surface de l'ombre d'une ellipse éclairée par un cercle, 489-492, 498-499, 531, 536, note; de l'hélicoïde développable, 958, 977-979.

Arêtes d'une surface gauche. — Définition, propriétés, 635, 636. — Arêtes du conoïde général, 647; du cylindroïde, 653; du conoïde oblique, 658, 659; du conoïde droit, 669; du conoïde circonscrit à une surface topographique, 1066; de la surface du biais passé, 752. — Distinction des arêtes en trois genres, 677. — Point d'une arête situé à l'infini, 678. — Rayons de courbure aux divers points d'une arête, 841-844. Arêtes ayant un paramètre fini, 655, 656, 677, 842.

Arrachement, Pénétration. — Définition de la pénétration dans les intersections de cônes et de cylindres, exemples, 227, 230. — Définition et exemples de l'arrachement, 231, 239, 245. — Composition d'une série de surfaces du second ordre qui se rencontrent avec pénétration ou avec arrachement, 534, note. — Développable circonscrite à deux ellipsoïdes qui se pénètrent ou qui se coupent avec arrachement, 535, 536.

Assemblages de charpente. — Exercices de perspective axonométrique, 296, 297, 297 *a*; de perspective cavalière, 311-313.

Asymptote. — Définition, 92, 93. — Projection d'une courbe gauche sur un plan perpendiculaire à son asymptote, 221. — Asymptotes de la section plane d'un cône, 173, 176; d'un hyperboloïde, 212, 711, 730; d'un paraboloïde, 593; d'un cylindroïde, 653; d'une surface développable, 470; d'un hélicoïde développable, 972-975, 985; d'un hélicoïde gauche, 989, 1029; d'une surface gauche en général, 748. — Asymptotes de l'intersection de deux cônes, 238, 247; d'un cylindre et d'un cône, 244.

Sur une surface gauche, les arêtes sont asymptotes des courbes d'ombre, 635. — Construction des asymptotes aux branches infinies des courbes d'ombre des surfaces gauches en général, 882-

[1] J'ai complété et modifié, d'après la seconde édition de chacune des trois Parties, la Table analytique faite par l'Auteur. (E. L.)

887; de la surface de vis à filets triangulaires, 998, 1001, 1002, 1013, 1016, 1017; de la surface de vis à filets carrés, 1034.

(*Voir* Branches infinies, Hyperbole, Indicatrice, Tangente.)

B

BRANCHES INFINIES. — D'une courbe plane, 91-93, 182-184. — Projections des courbes à branches infinies, 221, 222. — Branches infinies de la section plane d'un cône, 173, 176; d'un hyperboloïde, 210, 212, 711-713, 730; d'un paraboloïde, 593, 690; d'un cylindroïde, 653; d'une développable, 470; de l'hélicoïde développable, 972-975; d'une surface gauche, 599, 748; de la surface de la vis à filets triangulaires et de la surface de la vis à filets carrés, 989, 1029. — Branches infinies de l'intersection de deux cônes, 237-242, 247-249; d'un cône et d'un cylindre, 243, 244; de deux surfaces de révolution, 258, 412-414. — Branches infinies des lignes d'ombre d'une surface gauche, 635, 638, 747; du conoïde, 660, 831; de la surface de la vis à filets triangulaires, 998, 1000, 1002, 1008.

BUT DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. — LIV. I, CHAP. I.

C

CERCLE. — Les sécantes communes de trois cercles considérés deux à deux se coupent en un même point, 763. — Perspective axonométrique et perspective cavalière du cercle, 298-303, 314. — Sections circulaires du tore, 870-872. — Détermination par un cercle des paramètres des hélicoïdes réglés qui peuvent être développés sur un hélicoïde donné, 964-965, 981. — La courbe d'ombre d'une surface de vis à filets carrés, pour des rayons parallèles, se projette suivant un cercle sur un plan perpendiculaire à l'axe, 1030, 1031.

CERCLE OSCULATEUR. — Définition, 94, 215.

CHANGEMENT DES PLANS DE PROJECTION. — Exposition de la méthode, 59, 60. — Application de la méthode à la détermination de la plus courte distance de deux droites, 61-64; à la détermination des ombres d'une maison et d'une niche, 325 et 338; à l'étude d'une surface d'ombre, 493; à l'étude du paraboloïde, 594, 604, 605; à la construction des lignes doubles d'une surface d'égale pente, 578; à la construction des sections du second ordre du conoïde oblique, 668; à la représentation de deux hyperboloïdes qui se raccordent, 730.

(*Voir* Projections auxiliaires.)

CONCHOÏDE. — La projection horizontale de la courbe d'ombre du tore dans le cas de rayons parallèles est la conchoïde d'une ellipse, 368, 369. — La section de la surface du biais passé par un plan perpendiculaire à la directrice rectiligne est une conchoïde à plusieurs directrices, 767-769.

CÔNE. — LIV. II, CHAP. I-IV, VI. — Définition, représentation et propriétés, 119-123. — Problèmes divers de plans tangents, 130-132, 134, 286-289. — Sections planes, 178, 179, 180, 182-184. — Intersection d'un cône avec un autre cône, un cylindre ou une surface de révolution, 224-233, 237-250, 256. — Cône ayant un rebroussement le long d'une génératrice, 216, 217, 217*a*. — Cône formant la transition entre deux séries d'hyperboloïdes, les uns à une nappe et les autres à deux nappes, 534, note. — Ombre d'un cône percé d'un trou cylindrique, 332-335. — Cône formé par les asymptotes des indicatrices d'un système d'hélicoïdes ayant une même méridienne, 1049*a*.

Cône asymptote de l'hyperboloïde de révolution, 203, 204; de l'hyperboloïde scalène, 692, 693.

CÔNE DE RÉVOLUTION. — Principales propriétés, 124, 125. — Sections planes, 163-177. — Solution de divers problèmes à l'aide du cône de révolution, 126, 133-141*b*, 272, 319*a*, 319*b*. — Ombres d'un cône de révolution tronqué, 288, 289. — Le cône directeur d'une surface d'égale pente et celui d'un hélicoïde gauche sont de révolution, 545, 957.

CÔNE DIRECTEUR D'UNE SURFACE RÉGLÉE. — Définition, 466. — Utilité pour définir la génération d'une surface réglée, 467.

Cône directeur d'une développable, 467-469. — Son utilité dans les constructions, 470, 481. — Cône directeur osculateur, 486. — Cône directeur de la développable circonscrite à deux surfaces concentriques du second ordre, 542, 543; de la surface d'égale pente, 545, 546; de l'hélicoïde développable, 968-972, 978, 987.

Propriétés du cône directeur d'une surface gauche, 614, 615. — Son utilité pour les tracés, 746-748. — Cône directeur de l'hyperboloïde, 685, 692, 693; de la surface du biais passé, 754, 755, 755*a*; de l'hélicoïde réglé, 957.

CÔNE OU CYLINDRE CIRCONSCRIT. — Construction de la courbe d'ombre d'une surface de révolution par la méthode des cônes ou des cylindres circonscrits, 342-349, 356-361. — Cône circonscrit à un paraboloïde, 607-609 ; à un hyperboloïde, 715-717 ; à une surface gauche, 617, 638, 744. — Cylindre circonscrit à un paraboloïde, 609 ; à un hyperboloïde, 717. — Cas où le cône circonscrit à une surface a un rebroussement le long d'une génératrice, 891. — Cônes et cylindres circonscrits aux surfaces topographiques, 1069-1071.

(*Voir* Lignes d'ombre.)

Conique. — (*Voir* Section conique.

Conoïde. — Théorie générale, Liv. VII, Chap. III. — Lorsqu'un point lumineux est sur la génératrice supérieure d'un conoïde, il se trouve à égales distances du point où la ligne d'ombre traverse cette droite et du sommet, 834. — Les secondes asymptotes des indicatrices d'un conoïde aux divers points d'une génératrice forment un paraboloïde, 825. — Lignes de plus grande pente d'un conoïde dont le plan directeur est horizontal, 1081.

Conoïde de la voûte d'arêtes en tour ronde. Intersection par un tore elliptique, 671-674, 866. — Intersection par un cylindre, 675. — Rayon de courbure de la directrice, 948.

Conoïde droit. — Théorie générale, 669, 670. — Arêtes, génératrices singulières, 669, 677, 839, 841. — Conoïde droit employé comme surface auxiliaire, 676. — Intersection d'un conoïde droit et d'un hélicoïde, 1048. — La surface de la vis à filets carrés est un conoïde droit, 1025.

Conoïde oblique. — Théorie générale, 657-668. — Arêtes du conoïde oblique, 677, 678.

Contour apparent. — Quand une courbe tracée sur une surface est tangente à son contour apparent, le contact s'élève au troisième ordre sur le plan de projection, 195, note. — Le contour apparent d'une surface d'égale pente sur un plan vertical est formé par l'ensemble des génératrices parallèles à ce plan, 545, 578. — La ligne de striction d'un conoïde est son contour apparent par rapport à son plan directeur, 642.

(*Voir* Cône, Cylindre, etc.)

Coupe. — (*Voir* Figures géométrales.)

Courbe graphique. — Définition, tracé, tangentes, 98, 100, 101. — Cylindre ayant pour directrice une courbe graphique, 115.

Courbes d'erreur. — Courbes pour construire la tangente à une courbe graphique en un point donné, pour déterminer le point de contact d'une tangente à une courbe graphique, pour déterminer le point d'une courbe tracée où la tangente est parallèle à une droite donnée, 100, 101 ; pour déterminer les points des projections de la section plane d'un tore où la tangente est perpendiculaire à la ligne de terre, 196 ; pour déterminer les points limites de la courbe d'ombre d'une surface de révolution ou d'une surface hélicoïde, 894-896, 898-900, 1051 ; pour tracer une ligne d'égale pente entre deux points donnés sur une surface topographique, 1062 ; pour construire les tangentes au point double de l'intersection de deux surfaces qui se touchent, 236.

Courbes planes. — Liv. II, Chap. I.

Courbure des surfaces. — Théorie générale, Liv. VIII, Chap. I. — Applications diverses, Liv. VIII, Chap. II. — Théorème des tangentes conjuguées, Liv. VIII, Chap. III. — Lignes tracées sur une surface et relatives à ses courbures, Liv. VIII, Chap. IV. — Théorèmes relatifs aux courbures de la surface de la vis à filets triangulaires, 1004, 1005, 1024 ; de la surface de la vis à filets carrés, 1038-1041 ; des hélicoïdes non réglés, 1049-1051 ; de l'hélicoïde gauche général, 1052.

(*Voir* Indicatrice.)

Courbure géodésique. — Définition, 947.

Cycloïde. — Définition ; toute cycloïde est l'ombre d'une hélice pour une direction donnée de rayons parallèles, 954. — La projection oblique d'une hélice sur un plan perpendiculaire à son axe est une cycloïde raccourcie ou allongée, 955.

Cylindre. — Liv. II, Chap. I-IV, VI. — Définition, représentation et principales propriétés, 110-118. — Problèmes divers de plans tangents, 127-129, 133. — Sections planes, 142-162. — Intersection d'un cylindre et d'un cône, 224-228, 243-246 ; de deux cylindres ayant un plan tangent commun, 234-236 ; d'un cylindre et d'une surface de révolution, 253-255. — Perspective cavalière d'un cylindre vertical, 314. — Si une génératrice d'un cylindre est tangente à la directrice, le cylindre présente un rebroussement le long de cette droite, 216, 217, 217 *a*. — Intersection du conoïde de la voûte d'arêtes en tour ronde par un cylindre de même axe, 675. — Ombres d'un cylindre couché sur un plan horizontal, 330-331.

(*Voir* Cône ou cylindre circonscrit, Développement.)

Cylindroïde. — Théorie générale, 649-656. Arêtes du cylindroïde, 677, 843.

D

Déformation des surfaces. — Déformation des surfaces développables, 484; des surfaces gauches, 775, 776; des hélicoïdes gauches, 962-965; des hélicoïdes développables, 981. — Énoncé du théorème de Gauss, 826, note.

Développantes, développées. — Développantes d'une courbe plane, 436-440; d'une courbe gauche, 441, 442, 473, 483; d'une hélice, 949. — Développante du cercle trace horizontale de l'hélicoïde développable, 951, 968; a pour transformée une autre développante de cercle, 979. — Relations graphiques entre la spirale d'Archimède et la développante de cercle, 990.

Développement. — Du cylindre, 117, 118, 144, 145, 158, 159; du cône général, 122, 178; du cône de révolution, 167-171, 175, 176; des surfaces développables en général, 472-484, 819; d'une surface d'ombre, 492; des surfaces d'égale pente, 546; d'un hélicoïde développable, 977-980.

(Voir Transformées par développement.)

Déviation. — Définition, théorème de M. Joseph Bertrand, 781-783. — Grandeur de la déviation, 811. — Paramètre de déviation, 812, 813, 851, 853. — Axes de déviation, 814.

Division homographique. — Définition et principales propriétés, 694-696, 702-704. — Division homographique des génératrices d'un hyperboloïde, 697, 698; d'une surface gauche, 933; d'une développable circonscrite à une série de surfaces du second ordre, 942, note. — Division homographique des tangentes à une conique, 718; d'une génératrice commune à deux surfaces gauches, 626.

E

Élévation. — (Voir Figures géométrales.)

Ellipse. — Constructions relatives à l'ellipse, 152-154, 367, 493, 676, 779. — Ellipses homologiques, 388-391, 410, 411, 416-419. — Ellipses isométriques, 309, 310. — Surface de l'ombre d'une ellipse éclairée par un cercle, 488-499. — Surface d'égale pente circonscrite à une ellipse, 548-583. — Génération par des ellipses du cylindroïde elliptique, 650; du conoïde elliptique, 667, 668. — Les lignes d'ombre d'un ellipsoïde sont des ellipses, 366. — Cas où la projection du contour apparent de la surface du biais passé est une ellipse, 765.

(Voir Indicatrice, Section conique.)

Ellipsoïde de révolution. — Intersection avec un cône, 256. — Intersection de deux ellipsoïdes de révolution dont les axes se coupent, 257-260, 412-418. — Ligne d'ombre d'un ellipsoïde de révolution, 356-367. — Ellipsoïde de révolution osculateur, 794.

Ellipsoïde scalène. — Ellipsoïdes inscrits dans une développable, 526-544, 565. — Ellipsoïde osculateur d'une surface convexe, 794, 795. — Séries d'ellipsoïdes contenant une même courbe gauche, 534, note. — Lignes de courbure d'un ellipsoïde, 921-928. — Polhodies tracées sur un ellipsoïde, 944-945.

Enveloppe, enveloppées. — Théorie générale des enveloppes et des enveloppées, 432-434. — Une développable est l'enveloppe d'une série de plans, 444; d'une série de cônes, 454, 467.

Application de la théorie des enveloppes à la détermination des lignes d'ombre, 435. — Parabole enveloppe d'une droite mobile, 641. — Conique enveloppe d'une droite mobile, 718. — La développable circonscrite à deux coniques est l'enveloppe d'une série de surfaces du second ordre, 525-527, 530-532, 537-540.

Équation du troisième degré. — Tableau graphique pour la résolution de l'équation numérique du troisième degré, 1088.

F

Figures géométrales. — Définition, 290. — Restitution des figures géométrales d'un objet représenté par une figure axonométrique, 305.

G

Groupes de génératrices. — Dans la développable circonscrite à deux coniques, les génératrices appartiennent huit par huit à des hyperboloïdes, 517, 518. — Détermination des génératrices d'un même groupe, 519. — Les sommets sont sur les génératrices d'un groupe formé de quatre droites, 520. — La considération des groupes permet de classer les différentes variétés de la surface, 521, 522. — Les hyperboloïdes des groupes sont inscrits dans la développable, 529.

Groupes de génératrices sur une surface d'égale pente, 562, 579; sur la surface du biais passé, 750, 751.

H

Hélice. — Définition et principales propriétés, 949-955. — Rayon de courbure d'une hélice, 977, 978. — Hélice lieu des centres de courbure d'une autre hélice, 982, 983. — Hélices excentriques de la surface de la vis à filets carrés, 1026.

Hélicoïde développable. — Définition, 958. — Développable asymptote d'un hélicoïde gauche, 966. — Théorie générale de l'hélicoïde développable, Liv. IX, Chap. II.

Hélicoïde non réglé. — Définition, 956. — Théorie générale, Liv. IX, Chap. V.

Hélicoïde réglé. — Théorie générale, 957-967. — Construction du plan tangent, 1023. — Lignes de plus grande pente, 1081.

(Voir Surface de la vis à filets carrés, Surface de la vis à filets triangulaires.)

Hyperbole. — Constructions graphiques relatives à l'hyperbole, 249, 412-415. — Section plane d'un cône de révolution, 172-177. — Méridienne de la surface engendrée par la révolution d'une droite, 202. — Section plane de cette surface, 211, 212; de la surface gauche qui a trois directrices rectilignes, 687, 710-713; du paraboloïde hyperbolique, 593. — Projection de l'intersection de deux cônes, 247-250; de deux ellipsoïdes de révolution, 258. — Hyperbole directrice d'une surface d'égale pente, 580. — Ligne d'ombre du paraboloïde, 607. — Projection du contour apparent de la surface du biais passé, 758. — Lieu des centres des cercles qui touchent deux cercles égaux, 872. — Lieu des centres de courbure d'une surface gauche aux divers points d'une génératrice singulière, 837, 841. — Projection du lieu des centres de courbure principaux d'une surface de vis à filets carrés, aux différents points d'une génératrice, sur un plan parallèle au plan directeur, 1038. — Lignes de niveau du Tableau graphique propre à remplacer la table de Pythagore, 1085.

(Voir Indicatrice, Section conique.)

Hyperboloïde à deux nappes. — Hyperboloïdes à deux nappes inscrits dans une développable, 526-544, 565. — Hyperboloïdes à deux nappes osculateurs d'une surface convexe, 794. — Hyperboloïdes à deux nappes contenant une même courbe gauche, 534, note. — Lignes de courbure de l'hyperboloïde à deux nappes, 927.

Hyperboloïde gauche de révolution. — Théorie générale, 197-212. — Théorèmes et exercices, 727-738. — Hyperboloïde de révolution se raccordant avec une surface gauche, 743. — Lieu des centres des sphères bitangentes à un tore, 871-872. — Hyperboloïde applicable sur des hélicoïdes, 963.

Hyperboloïde gauche scalène. — Théorie générale, Liv. VII, Chap. IV. — Hyperboloïdes inscrits dans une développable, 526-544, 565. — Hyperboloïdes contenant une même courbe gauche, 534, note. — Hyperboloïdes de raccordement, 744, 745. — Hyperboloïde osculateur d'une surface gauche le long d'une génératrice, 825. — Hyperboloïdes osculateurs d'une surface à courbures opposées, 798, 799. — Lignes de courbure d'un hyperboloïde, 928. — Les tangentes de plus grande pente à une surface de vis à filets triangulaires, aux divers points d'une génératrice, forment un hyperboloïde, 592.

I

Indicatrice. — Définition, propriétés, 787-789, 792. — Ellipse indicatrice, 793, 795. — Hyperbole indicatrice, 794. — Cas où l'un des rayons principaux est infini ou nul, 800, 808. — Contact d'une asymptote de l'indicatrice avec la section par le plan tangent ou avec une courbe dont le plan osculateur est tangent à la surface, 797, 818.

Construction des asymptotes de l'indicatrice, en un point donné, d'une surface de révolution, 822; d'une surface de vis à filets triangulaires, 1004; d'une surface de vis à filets carrés, 1038, 1039; d'un hélicoïde dont la méridienne est connue, 1049-1051; d'un hélicoïde gauche général, 1052; d'une surface topographique, 1065.

(Voir Lignes asymptotiques, Parties virtuelles, Rayons de courbure, Sections normales, Tangentes conjuguées.)

Infini. — Une ligne droite n'a qu'un point à l'infini, 91. — Les points d'un plan situés à l'infini doivent être considérés comme appartenant à une droite, 408. — Les points de l'espace situés à l'infini doivent être considérés comme appartenant à un plan, 565. — Point d'inflexion et point de rebroussement à l'infini, 182-184. — Le cône directeur d'une surface réglée a pour directrice la section de la surface par un plan situé à l'infini, 466. — Développable circonscrite à deux coniques dont une à l'infini, 508, 516, 537-543. — Un conoïde a une directrice rectiligne située à l'infini dans son plan directeur, 641. — Le cylindroïde elliptique possède une ligne double de contact à l'infini, 653. — Le conoïde oblique peut avoir une ligne d'ombre à l'infini, 661.

(Voir Asymptotes, Branches infinies.)

Inflexion. — Définition, 87, 215, 215 *a*. — Rayon de courbure à un point d'inflexion, 94, 437. — Point d'inflexion à l'infini, 182-184. — Inflexions de la transformée de la section plane d'un cylindre, 145; de la section plane d'un cône de révolution, 169-171; d'une courbe tracée sur une développable quelconque, 477-479. — Inflexions de la projection d'une courbe gauche en général, 217-219; de l'arête de rebroussement d'une développable, 447; d'une hélice sur un plan parallèle à l'axe, 953. — Surfaces gauches dont les directrices ont des inflexions, 680.

INTERSECTIONS DE SURFACES COURBES. — LIV. II, CHAP. VI. — Intersection des surfaces réglées entre elles et avec les surfaces de révolution, 670; d'un conoïde droit avec un tore de même axe, 671-674; du conoïde de la voûte d'arêtes en tour ronde avec un cylindre de révolution de même axe, 675; de deux hyperboloïdes qui se raccordent le long d'une génératrice commune, 733-738; de deux surfaces gauches qui se raccordent le long d'une génératrice commune, 827; d'un hélicoïde et d'un conoïde, 1048; de deux surfaces topographiques, 1059.

(*Voir* Ligne double, Section plane, Tangente.)

INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE SURFACE. — Intersection d'une droite et d'un cône, 121*a*; d'une droite et d'un hyperboloïde de révolution, 207; d'une droite et d'une surface topographique, 1069.

L

LIGNE DE STRICTION. — Définition, 621. — Lignes de striction du paraboloïde, 643; du conoïde général, 642; du cylindroïde, 654; du conoïde oblique, 665; du conoïde droit, 669; de l'hyperboloïde, 719-722; de la surface du biais passé, 772; des hélicoïdes gauches, 959. — Toute ligne asymptotique d'une surface est la ligne de striction de la surface lieu des normales en ses différents points, 856. — Quand une surface gauche a une directrice rectiligne, et que les génératrices rencontrent cette droite sous un angle constant, elle est la ligne de striction de la surface, 1022.

(*Voir* Point central.)

LIGNE DROITE. — LIV. I.

LIGNES ASYMPTOTIQUES. — Définition, propriétés, 820, 932. — Lignes asymptotiques des surfaces gauches, 933-935; des surfaces de révolution, 936; de la surface de la vis à filets triangulaires, 1024; de la surface de la vis à filets carrés, 1038.

LIGNES DE COURBURE. — Définition, 820. — Théorie générale et applications diverses, 911-931. — Lignes de courbure de la surface de la vis à filets triangulaires, 1024; de la surface de la vis à filets carrés, 1040.

LIGNES D'ÉGALE PENTE. — Définition, constructions, 1061, 1062.

LIGNES DE NIVEAU. — Définition, utilité, 1054-1060.

LIGNES DE PLUS GRANDE PENTE. — Définition, détermination sur diverses surfaces, 1072-1082.

LIGNES D'OMBRE PORTÉE. — Lignes de l'ombre portée par des lignes sur une surface, 288, 289, 320-341, 378-399. — Ligne de l'ombre portée par une surface sur elle-même, 901-907.

LIGNES D'OMBRE PROPRE. — Lignes d'ombre du cylindre et du cône, 132, 288, 289, 328-335; d'une surface de révolution, 342-376, 893-900; du paraboloïde, 607-609; d'une surface gauche quelconque, 617, 634, 635, 638; du conoïde général, 646, 647; du conoïde oblique, 660-661; de la surface de la vis à filets triangulaires, 994-1020; de la surface de la vis à filets carrés, 1044, 1045; d'une surface du second ordre éclairée par une autre surface du second ordre, 535.

(*Voir* Cône circonscrit, Ombres linéaires, Parties virtuelles, Tangentes conjuguées.)

LIGNES DOUBLES. — Lignes doubles d'une développable en général, 455, 458-461, 476; de la développable circonscrite à deux coniques, 491, 493-497, 500-504, 517-522; d'une surface d'égale pente, 550, 551, 557-560, 566-584; d'une surface gauche en général, 618, 632-633; de la surface du biais passé, 768; de l'hélicoïde réglé, 967.

Génératrice double ou isolée d'un conoïde oblique, 667, d'un cylindroïde elliptique, 653; d'un cône circonscrit à un tore, 904, 906.

LIGNES ET POINTS ÉLOIGNÉS. — LIV. I, CHAP. III. — Réduction d'échelle, 65-67, 664. — Déplacement des plans de projection, 48-49, 235, 255, 269, 553, 645, 903. — Plan sécant auxiliaire, 230. — Figures auxiliaires homothétiques, 68, 230, note. — Figures auxiliaires homologiques, 404. — Constructions diverses, 69, 421.

LIGNES GÉODÉSIQUES. — Définition; propriété caractéristique, 945. — Lignes géodésiques d'une développable, 482, 483.

LIGNES TANGENTES AUX SECTIONS NORMALES SUROSCULÉES PAR DES CERCLES. — Théorie générale, 937-938. — Détermination de ces lignes sur les surfaces du second ordre, 939-945; sur la surface de la vis à filets carrés, 1041.

LOGARITHMIQUE. — Représentation d'une logarithmique par une droite cotée, 1084.

LUMIÈRE DIFFUSE, LUMIÈRE REFLÉTÉE. — Notions, 131.

M

MAISON. — Ombres d'une maison, 325-329.

N

NICHE SPHÉRIQUE. — Perspective axonométrique d'une niche, 298-305. — Perspective cavalière, 317, 318. — Ombres d'une niche représentée par des figures géométrales, 336-341 ; par une figure axonométrique, 392, 396 ; par une figure cavalière, 397-399.

NORMALE. — Normale à une courbe plane, 95. — Normale principale à une courbe gauche, 935. — Cône lieu des normales à une surface de révolution aux divers points d'un parallèle, 186. — Paraboloïde lieu des normales à une surface gauche aux divers points d'une génératrice, 620. — Surfaces gauches lieux de normales à une surface, 845-858. — Problème de la normale parallèle à une droite donnée, 428, 430, 678, 662, 993. — Théorème de M. Joseph Bertrand sur les déviations des normales à une surface, 781-783. — Construction de la normale en un point d'un hélicoïde quelconque, 1046. — Résolution de l'équation du troisième degré par la construction des normales à la parabole, 1088, note.

(*Voir* Plan tangent.)

O

OMBILICS. — Définition, 793. — La surface gauche lieu des normales à une surface a un sommet quand la directrice passe à un ombilic, 857. — Ombilics des surfaces du second ordre, 923, 925, 928. — Dispositions des lignes de courbure près d'un ombilic, 930.

OMBRES LINÉAIRES. — Ombres sur les figures géométrales, LIV. V, CHAP. I. — Ombres sur les figures axonométriques et cavalières, LIV. V, CHAP. II.

(*Voir* Cône et cylindre circonscrits, Lignes d'ombre portée, Lignes d'ombre propre, Points brillants, surfaces d'ombre et de pénombre, Tangentes conjuguées.)

P

PARABOLE. — Section plane du cône et de l'hyperboloïde de révolution, 177, 210. — Section du paraboloïde par un plan parallèle à l'axe, 600. — Courbe d'ombre du paraboloïde pour des rayons parallèles, 609. — Lignes de striction du paraboloïde, 643. — Section de l'hyperboloïde par un plan tangent à son cône asymptote, 714. — Section de la surface du biais passé par un plan tangent le long d'une génératrice singulière, 771. — Lieu des centres de courbure des sections faites dans un conoïde par des plans perpendiculaires à une génératrice singulière, 839. — Enveloppe d'une droite mobile dont les points de rencontre avec deux droites situées dans un plan ont des vitesses égales, 611. — Surface d'égale pente circonscrite à une parabole, 584. — Rayon de courbure de la parabole, 780. — Résolution de l'équation du troisième degré par la construction des normales à la parabole, 1088, note.

PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE. — Transition d'une suite d'hyperboloïdes à deux nappes à une suite d'ellipsoïdes dans le système des surfaces du second ordre inscrites dans une même développable, 526.

PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE. — Théorie générale, LIV. VII, CHAP. I. — Paraboloïdes de raccordement d'une surface gauche, 615, 616. — Paraboloïdes normaux, paraboloïde des normales, 619-621, 743. — Application de la méthode du paraboloïde de raccordement à la construction du plan tangent au conoïde général, 644-646 ; au cylindroïde, 651 ; au conoïde oblique, 662, 665 ; au conoïde droit, 672 ; à une surface gauche quelconque, 740, 745 ; à la surface du biais passé, 755*a*.

Lignes de striction du paraboloïde, 643. — Paramètre des génératrices, 656. — Les secondes asymptotes des indicatrices d'un conoïde aux divers points d'une génératrice rectiligne forment un paraboloïde, 825. — La Table de Pythagore a pour expression géométrique un paraboloïde, 1085.

PARAMÈTRE DE DISTRIBUTION. — Définition et principaux théorèmes, 622-624. — Quand deux génératrices de deux surfaces gauches ont des paramètres égaux, on peut placer ces surfaces de manière qu'elles se raccordent dans quatre positions relatives différentes, 628.

Paramètre des génératrices du cylindroïde, 655 ; du paraboloïde, 656 ; du conoïde oblique, 663 ; de l'hyperboloïde scalène, 721 ; de l'hyperboloïde de révolution, 727 ; de la surface du biais passé, 772-774. — Des hélicoïdes gauches, 960-961.

Distinction des arêtes en trois genres par la considération du paramètre, 677. — Théorème relatif aux arêtes qui ont un paramètre fini, 842, 843.
Construction du paramètre d'une génératrice, quand on connaît les plans tangents en trois points, 845, 846. — Détermination du paramètre des génératrices d'une surface lieu de normales, 849.
(*Voir* Plan central, Point central.)
PARTIES PARASITES DES COURBES. — Définition, 97. — Arcs parasites des projections, 220. — Arcs parasites de la projection de l'intersection de deux cônes, 249; de deux surfaces de révolution, 258; d'un tore et d'un conoïde droit, 673, 674. — Arcs parasites de la projection de la ligne d'ombre d'une surface de révolution, 351, 352, 354, 364; de l'arête de rebroussement de la développable circonscrite à deux coniques, 498, 499; des lignes de plus grande pente d'un ellipsoïde et d'un hyperboloïde, 1075. — Arcs parasites des lignes transformées par anamorphose dans les Tableaux graphiques, 1092.
Parties parasites ou isolées des directrices d'une surface développable, 458-461, 468; de la développable circonscrite à deux coniques, 495, 532, 533; des directrices d'une surface gauche, 632, 633; de la directrice rectiligne du conoïde oblique, et de la surface du biais passé, 658 et 751.
PARTIES PARASITES DES SURFACES. — Définition, 107. — Partie parasite du cône directeur de la surface du biais passé et du plan directeur d'un conoïde, 754.
PARTIES VIRTUELLES, PARTIES RÉELLES. — Définition des parties virtuelles des courbes d'ombre propre, 335, 888. — Au point limite d'un arc réel la tangente à la courbe et le rayon de lumière se confondent avec une asymptote de l'indicatrice, 889, 890. — Détermination des points limites des parties réelles d'une ligne d'ombre propre en général, 892; d'une surface de révolution, 894-900.
Parties réelles des courbes d'ombre portée, en général, 901, 902, 907; de la courbe d'ombre portée par un tore sur lui-même, 903-906.
PÉNÉTRATION. — (*Voir* Arrachement.)
PERRON. — Ombres d'un perron représenté par des figures géométrales, 324; par une figure cavalière, 381; par une figure isométrique, 382-387.
PERSPECTIVE AXONOMÉTRIQUE. — LIV. IV, CHAP. I. — Notions générales et exercices divers, 292-305. — Ombres sur les figures axonométriques, 378, 392-396. — Détermination des points brillants sur ces figures, 429, 430.
PERSPECTIVE CAVALIÈRE. — LIV. IV, CHAP. II. — Notions générales et exercices divers, 311-318. — Ombres sur les perspectives cavalières, 378-381, 397-399.
Les *fig.* 5, 6, 7; *a, b, c, d, e, f, g, h* des planches LIII, LIV, LV de la première Partie; 241-245, 251, 284, 302, 303, 305, 327, 330, 332, 354 *bis* sont des perspectives cavalières.
PERSPECTIVE ISOMÉTRIQUE. — Notions générales, 307-310. — Ombres d'un perron représenté par une perspective isométrique, 382-387.
PERSPECTIVE MONODIMÉTRIQUE. — Définition, 306. — Représentation d'une hélice par une perspective monodimétrique, 949, note.
PERSPECTIVES RAPIDES. — Usage, 291; observations générales, 319.
PLAN. — LIV. I.
(*Voir* Figures géométrales.)
PLAN CENTRAL. — Définition du plan central d'une génératrice d'une surface gauche, 622. — Les plans centraux des génératrices d'un conoïde sont perpendiculaires au plan directeur, 642. — Plan central d'une arête, 677.
(*Voir* Ligne de striction, Plan tangent, Point central.)
PLAN DE REBROUSSEMENT d'une développable en un point de l'arête, 442; d'un conoïde, 666; d'une surface gauche en général, 739; de la surface du biais passé, 751. — Cas où le plan de rebroussement se confond avec le plan tangent, 840.
(*Voir* Sommets d'une développable, d'une surface gauche.)
PLAN DIRECTEUR. — Plans directeurs du paraboloïde, 586-592. — Projections des génératrices du paraboloïde sur un plan perpendiculaire à l'un des plans directeurs, 641. — Tous les paraboloïdes de raccordement d'une surface gauche le long d'une génératrice ont un plan directeur commun, 646.
(*Voir* Conoïde, Conoïde droit, Conoïde oblique, Cylindroïde, Surface de la vis à filets carrés.)
PLAN OSCULATEUR. — Plan osculateur d'une courbe gauche, 214, 215, 215*a*. — Si la directrice d'un cône est en un point tangente à une génératrice, le plan osculateur de la courbe en ce point est tangent au cône, 216. — La projection d'une courbe gauche sur un plan perpendiculaire à l'un de ses plans osculateurs présente une inflexion

au point correspondant, 217, 217*a*. — Les plans tangents à une développable sont osculateurs de son arête de rebroussement, 447. — Construction du plan osculateur en un point déterminé d'une courbe gauche donnée par ses projections, 448, 859-862.

Plan osculateur d'une surface gauche en un point d'une génératrice singulière, 838. — Extension du théorème des tangentes conjuguées au cas où la surface est osculée par un plan au point considéré, 908-910.

Plan tangent. — Son existence, cas d'exception, 108, 181 (*voir* Plan de rebroussement). — Propriétés des plans tangents aux cylindres et aux cônes, 115, 121; aux surfaces de révolution, 186; aux surfaces développables, 445, 447, 469; aux surfaces gauches, 592, 615, 617, 622. — Problèmes divers de plans tangents aux cylindres et aux cônes, 127-134, 286-288; aux surfaces de révolution, 190, 191, 259, 428, 430; à l'hyperboloïde de révolution, 199-201; aux surfaces développables, 470; à l'hélicoïde développable, 969-971; au paraboloïde, 592; aux conoïdes, 644-646, 648, 662, 672; à la surface du biais passé, 755, 755*a*, 756, 769; aux hélicoïdes, 991-993, 1023, 1028, 1043; à la surface gauche qui a une directrice rectiligne rencontrée sous des angles égaux par les génératrices, 1021; aux surfaces topographiques, 1063-1068. — Solution de divers problèmes par la théorie du plan tangent au cône de révolution, 134-141.

Rayon de courbure de la section d'une surface par un plan tangent, 816, 817, 817*a*. — Application au tore, 873-876.

(*Voir* Normale.)

Point central. — Définition et propriétés du point central d'une génératrice d'une surface gauche, 621-624, 845, 846. — Point central d'une arête, 636, 677.

(*Voir* Ligne de striction.)

Point de rebroussement. — Définition, 88. — Différents ordres de rebroussement, 94, 437-439. — Tangentes à une courbe à un point de rebroussement, 442. — Cercles osculateurs d'une courbe à un point de rebroussement, 840. — Rebroussement de la section d'une surface gauche par un plan passant à un sommet, 666; d'une courbe tracée sur une développable et de sa transformée, 478, 479; de la section d'une surface de révolution dont la méridienne a une inflexion par son plan tangent, 823; de la projection d'une courbe gauche, 216-218, 232.

(*Voir* Arêtes de rebroussement.)

Point d'inflexion. — (*Voir* Inflexion.)

Points brillants, Liv. V, Chap. IV. — Point brillant sur un conoïde, 648, 662; sur la vis à filets triangulaires, 993.

Points éloignés. — (*Voir* Lignes et points éloignés.)

Pôles, polaires. — Propriétés fondamentales des pôles et des polaires des coniques, 419. — Plan polaire d'un point donné par rapport à un paraboloïde, 607; à un hyperboloïde, 716. — Propriétés des pôles des plans des lignes doubles de la développable circonscrite à des surfaces du second ordre, par rapport à ces surfaces, 496, 510, 528.

Polhodie. — Définition, principales propriétés géométriques, 939-945.

Ponctuation. — Règles, 4, 12. — Trait ressenti, 377.

Population. — Tableau graphique faisant connaître la répartition, entre les différents âges, de la population mâle en France, 1094.

Projection conique. — Emploi de la projection conique pour étudier les inflexions et les rebroussements à l'infini, 182-184; pour construire l'intersection d'une surface de révolution et d'un cône, 256.

Projection oblique. — Projection oblique d'une tangente, 116; d'une ellipse, 161; d'une hélice sur un plan perpendiculaire à son axe, 954, 955. — Les lignes d'ombre portée, pour des rayons parallèles, sont des projections obliques, 132. — Emploi des projections obliques pour construire l'intersection d'un cylindre avec un tore, 254; pour étudier les propriétés du paraboloïde, 587-600; pour déterminer les lignes d'ombre d'un objet, 370-376, 1019, 1020, 1036, 1037.

(*Voir* Perspective cavalière.)

Projections auxiliaires. — Utilité de cette méthode, 32. — Problèmes élémentaires, 33-39. — Applications diverses, 325, 578, 594, 645, 650, 730.

(*Voir* Changement des plans de projection.)

Projections cotées. — Théorie générale, Liv. III. — Problèmes relatifs aux surfaces topographiques, Liv. X.

Q

Questions diverses sur la droite et le plan. — Liv. I, Chap. II.

R

Raccordement. — Raccordement des surfaces gauches, 613, 614, 628. — Paraboloïdes de raccordement, 615, 616, 740. — Hyperboloïdes de raccordement, 739-743. — Raccordement de deux hélicoïdes, 1021. — Quand deux surfaces gauches se raccordent le long d'une génératrice, elles sont osculatrices en deux points, 827.

Quand deux surfaces se raccordent le long d'une courbe, leurs sections par un plan tangent à cette courbe ont un contact du troisième ordre, 906, note. — Raccordement d'un hélicoïde non réglé avec une surface de vis à filets triangulaires, 1043, 1044, 1047, 1049, 1049*a*, 1050, 1052.

Rapport anharmonique. — Définition et propositions élémentaires, 513, 515, 601, 699. — Dans la développable circonscrite à deux coniques, le rapport anharmonique des quatre points où une génératrice rencontre les quatre lignes doubles, ou les lignes de contact de quatre surfaces du second ordre inscrites, est constant, 513, 942, note.

(*Voir* Division homographique.)

Rapport harmonique. — Définition, 514. — Faisceau harmonique, 598, 601, 602. — Quand une surface gauche est éclairée par un point lumineux situé sur une génératrice singulière, le point de la courbe d'ombre et le sommet de la surface sont conjugués harmoniques du point lumineux et de celui où la surface est osculée par un plan, 834. — La tangente à la courbe de contact d'une développable circonscrite et la génératrice de cette surface sont conjuguées harmoniques des asymptotes de l'indicatrice, 877.

Rapporteur isométrique. — Construction, usage, 310.

Rayon de courbure. — Définition, 94, 95. — Expressions, 777. — Rayons de courbure des lignes planes en leurs points singuliers, 437, 439. — Construction du rayon de courbure de l'ellipse en un point quelconque, 676, 863; en un de ses sommets, 779, 493, première note. — Rayon de courbure de la parabole, 780. — Construction du rayon de courbure d'une courbe donnée par ses projections, 859-862.

Rayons de courbure principaux d'une surface en un point, 785. — Construction du rayon de courbure d'une section normale, 809, 853; d'une section oblique, 815. — Rayon de courbure de la section par le plan tangent, 816, 817, 817*a*; application au tore, 873-876.

Relation entre les rayons de courbure des sections d'une développable par des plans parallèles, 451. — Rayons principaux d'une surface de révolution, 821; d'une surface gauche aux différents points d'une génératrice singulière, 837, 841, 842. — Produit des rayons de courbure principaux en un point donné d'une surface gauche, 826, 847.

Rayon de seconde courbure. — Définition; le paramètre de déviation d'une courbe tracée sur une surface est le rayon de seconde courbure de la courbe lorsqu'elle est une géodésique de la surface, 851, note. — Relation entre le produit des rayons principaux de la surface des normales principales à une courbe gauche et le rayon de seconde courbure de la courbe, 934, note.

S

Section conique. — Section plane de l'hyperboloïde gauche, 210, 693. — Coniques intersection de deux surfaces du second ordre, 252. — Conique projection de l'intersection de deux ellipsoïdes de révolution, 258. — Conique intersection de la surface du biais passé par un plan situé à l'infini, 768. — Coniques homologiques, 410, 411. — Constructions relatives aux coniques, 412-418. — Propriétés fondamentales des pôles et des polaires, 419. — Division homographique des tangentes à une conique, 718.

Génération, par des coniques, du conoïde oblique, 667-668; du cylindroïde, 650; de la surface du biais passé, 771.

Développable circonscrite à deux coniques, 494-544. — Surface d'égale pente circonscrite à une conique, 555-584.

Dans une série de surfaces du second ordre inscrites dans une même développable, et dans une série de surfaces du second ordre homofocales, la transition d'un genre à un autre se fait par une conique, 526, 918.

(*Voir* Cercle, Ellipse, Indicatrice, etc.)

Sections normales. — Théorèmes sur les sections normales à une surface, 784-786. — Classification des surfaces en différents genres, d'après les courbures de leurs sections normales, ou discussion de la formule d'Euler, 793-808.

Sections obliques. — Démonstration du théorème de Meusnier, 815. — Application de ce théorème à la détermination des sommets d'une surface d'égale pente, 864 ; à la construction des rayons de courbure et des plans osculateurs d'une courbe donnée par ses projections, 859-863.

SECTIONS PLANES. — Sections planes du cylindre, 142-162 ; du cône, 163-179, de la surface de révolution, 192-196 ; de l'hyperboloïde de révolution, 205-212 ; du paraboloïde gauche, 593, 600 ; du cylindroïde, 650-652 ; du conoïde oblique, 666-668 ; de l'hyperboloïde scalène, 710-714 ; de la surface du biais passé, 767, 770, 771 ; d'une surface d'égale pente, 973, 974 ; de l'hélicoïde développable, 972, 975 ; de la surface de la vis à filets triangulaires, 989 ; de la surface de la vis à filets carrés, 1029 ; d'un hélicoïde non réglé, 1042 ; d'une surface topographique, 1058.

Section d'une développable par un plan contenant une génératrice, 449, 450. — Les sections planes des surfaces gauches ont des branches infinies de deux genres différents, 599. — Section d'une surface gauche algébrique par un plan contenant une génératrice, 618.

(*Voir* Plan tangent, Section normale, Section oblique.)

SERPENTIN. — Définition et représentation d'un serpentin, 1053.

SINUSOÏDE. — Transformée par développement de la section plane d'un cylindre de révolution, 147. — Projection d'une hélice sur un plan parallele à l'axe, 949-951.

SOMMETS D'UNE DÉVELOPPABLE. — Points limites des arcs utiles d'une directrice, points de rebroussement de l'arête, 458-463. — Sommets de la surface de l'ombre d'une ellipse éclairée par un cercle, 489, 491, 493 ; de la développable circonscrite à deux coniques, 495, 498, 520-522 ; d'une surface d'égale pente, 549, 561, 578, 864. — Observations sur la détermination des sommets par l'analyse, 531, note. — Parallèle entre les sommets d'une développable et les sommets d'une surface gauche, 631, 679.

SOMMETS DES SURFACES GAUCHES. — Points de rencontre de deux génératrices consécutives, limites des arcs utiles d'une directrice, 629, 632, 633. — Plan tangent en un sommet, 630. — Plan de rebroussement, 666. — Les lignes d'ombre passent à chaque sommet et y sont tangentes à la génératrice, 634, 880. — Ligne d'ombre quand le point lumineux est dans le plan tangent le long de la génératrice qui passe par un sommet, 828-835. — Rayons de courbure en un sommet, 808. — Rayons de courbure des sections perpendiculaires à la génératrice qui passe par un sommet, 837-840. — Dispositions des lignes asymptotiques auprès d'un sommet, 934. — Sommets à l'infini, 635, 653. — Parallèle entre les sommets d'une développable et les sommets d'une surface gauche, 679, 631.

Sommets du conoïde, 658, 659 ; de la surface du biais passé, 751 ; des surfaces dont les directrices ont des inflexions, 680.

SOUS-NORMALE. — Sous-normales de la spirale d'Archimède, 674, 992 ; de la conchoïde, 369. — Construction de la sous-normale à la section de la surface du biais passé, par un plan perpendiculaire à l'axe, 769.

SPHÈRE. — Perspective cavalière d'une sphère, 315, 316, 316*a*. — Détermination des points brillants d'une sphère représentée par une perspective axonométrique, 430. — Construction de la ligne d'ombre d'une surface de révolution par la méthode des sphères inscrites, 362-365. Section d'un tore par une sphère bitangente, 871, 872. — Une ligne quelconque tracée sur une sphere peut en être considérée comme une ligne de courbure, 911. — Développable circonscrite à une surface du second ordre et à une sphere concentrique, 939-945.

SPIRALE D'ARCHIMÈDE. — L'intersection du conoïde de la voûte d'arête en tour ronde avec un cylindre de même axe se projette sur un plan perpendiculaire à cette droite suivant deux arcs de spirale d'Archimède, 671-673. — Trace de la surface de la vis à filets triangulaires sur un plan perpendiculaire à l'axe, 989. — Sous-normale de la spirale d'Archimède, 674, 992. — Relations graphique entre la spirale d'Archimède et la développante de cercle, 990.

SPIRALE HYPERBOLIQUE. — Les lignes asymptotiques et les lignes de plus grande pente d'une surface de vis à filets triangulaires dont l'axe est vertical se projettent sur un plan perpendiculaire à cet axe suivant des spirales hyperboliques, 1024, 1081.

STROPHOÏDE. — Principales propriétés de cette courbe, 1000, 1001.

SURFACE DE LA VIS A FILETS CARRES, LIV. IX, CHAP. IV. — Hélicoïde de la vis à filets carrés employé comme surface auxiliaire, 1048

SURFACE DE LA VIS A FILETS TRIANGULAIRES. Théorie générale, LIV. IX, CHAP. III. — Surface de la vis à filets triangulaires applicable sur un hélicoïde gauche général, 963. — Surface auxiliaire de vis à filets triangulaires de raccordement pour les hélicoïdes, 1043, 1044, 1047, 1049, 1049*a*, 1050, 1052.

Surface du biais passé. — Théorie générale, 749-774. — Ligne d'ombre quand le point lumineux est dans le plan tangent le long d'une génératrice singulière, 833. — Centres de courbure aux divers points d'une génératrice singulière, 844.

Surfaces courbes. — Liv. II, Chap. I.

Surfaces d'égale pente. — Théorie générale et applications diverses, Liv. VI, Chap. III. — Hélicoïde développable, Liv. IX, Chap. II. — Détermination des sommets d'une surface d'égale pente par les théorèmes d'Euler et de Meusnier, 864.

Surfaces de révolution. — Liv. II, Chap. V, VI. — Notions générales, 185-196. — Courbure des surfaces de révolution, 821-823. — Rebroussements de la méridienne, 876, note. — Intersection d'une surface de révolution avec un cylindre, 253-255; avec un cône, 256; avec une autre surface de révolution, 257-261. — Lignes d'ombre d'une surface de révolution, 370-376; lignes de courbure, 911; lignes asymptotiques, 936; lignes de plus grande pente dans le cas où l'axe est vertical, 1073.

(*Voir* Cône de révolution, Hyperboloïde de révolution, Tore.)

Surfaces développables. — Théorie générale, Liv. VI, Chap. I. — Surface d'ombre et de pénombre, Liv. VI, Chap. II. — Surfaces d'égale pente, Liv. VI, Chap. III. — Hélicoïde développable, Liv. IX, Chap. II.

Paramètres des génératrices d'une développable considérée comme une surface gauche, 636. — Parallèle entre les points de l'arête de rebroussement d'une développable et les sommets d'une surface gauche, 679. — Théorèmes relatifs à la courbure des surfaces développables, 801, 805, 806, 857, 912. — Construction des sommets d'une surface d'égale pente par la théorie de la courbure des surfaces, 864. — Développable asymptote d'une surface gauche, 639, 747, 835, 836; d'un hyperboloïde gauche, 692, 693; d'un hélicoïde gauche, 966. — Détermination de la tangente à la courbe de contact d'une développable circonscrite à une surface (théorème des tangentes conjuguées de Charles Dupin), 877.

Surfaces d'ombre et de pénombre. — Théorie générale et applications, Liv. VI, Chap. II.

(*Voir* Lignes d'ombre propre, Lignes d'ombre portée.)

Surfaces du second ordre. — Points doubles d'une projection de l'intersection de deux surfaces du second ordre, 251*a*, 251*b*. — Intersection de deux surfaces du second ordre ayant une génératrice commune, 251*c*; cas de deux cônes, 251*d*. — Principaux cas dans lesquels l'intersection de deux surfaces du second ordre se compose de deux courbes planes, 252. — Série de surfaces du second ordre ayant une commune intersection, 534, note.

Développable circonscrite à deux surfaces du second ordre, 488-544. — Surfaces du second ordre homofocales, 543-544, 917-919. — Surfaces du second ordre osculatrices d'une surface donnée, 791, 792, 794, 795, 798, 799. — Lignes de courbure, ombilics des surfaces du second ordre, 918, 930. — Polhodies, 939-945.

(*Voir* Cône de révolution, Ellipsoïde, etc.)

Surfaces gauches. — Théorie générale, Liv. VII, Chap. II. — Paraboloïde, Liv. VII, Chap. I. — Hyperboloïde, 197-212, et Liv. VII, Chap. IV. — Conoïde, Liv. VII, Chap. III. — Surfaces gauches qui n'ont pas de plan directeur, Liv. VII, Chap. V. — Notions générales sur les hélicoïdes gauches, 957-967. — Surface de la vis à filets triangulaires, Liv. IX, Chap. III. — Surface de la vis à filets carrés, Liv. IX, Chap. IV.

Notions sur la courbure des surfaces gauches, 824, 826. — Quand deux surfaces gauches se raccordent le long d'une génératrice, elles sont osculatrices en deux points, 827. — Rayons de courbure d'une surface gauche aux divers points d'une génératrice singulière, 837-844. — Surfaces gauches lieux de normales à une surface, 845-858. — Construction des tangentes et des asymptotes aux courbes d'ombre des surfaces gauches, 882-887. — Ligne d'ombre d'une surface gauche quand le point lumineux est dans le plan tangent le long d'une génératrice singulière, 828-836. — Surface gauche lieu des asymptotes de l'indicatrice d'une surface de révolution aux divers points d'un méridien, 823, 894. — Lignes asymptotiques des surfaces gauches, 933-935.

(*Voir* Cône directeur, Ligne de striction, Paramètre de distribution, Point central, Surface développable.)

Surfaces hélicoïdes. — Théorie générale, Liv. IX, Chap. I. — Hélicoïde développable, Liv. IX, Chap. II. — Surface de vis à filets triangulaires, Liv. IX, Chap. III. — Surface de la vis à filets carrés, Liv. IX, Chap. IV. — Hélicoïdes non réglés, Liv. IX, Chap. V.

Lignes de plus grande pente de la surface de la vis à filets triangulaires et de la surface de la vis à filets carrés, 1081.

Surfaces moulures. — Définition. Lignes de courbure, 913.

Surfaces orthogonales. — Théorème de Charles Dupin, 915. — Surfaces du second ordre homofocales, 916.

Surfaces topographiques. — Théorie générale, Liv. X, Chap. I. — Tableaux graphiques, Liv. X, Chap. II.

T

Table de Pythagore. — Tableau graphique propre à remplacer la Table de Pythagore, 1085.

Tableaux graphiques. — Théorie générale et exemples divers, Liv. X, Chap. II.

Tangente. — Définition, 86, 213. — Tangentes aux courbes graphiques, 100-102. — Tangente à la projection d'une courbe, 116. — Tangente à la section plane d'un cylindre ou d'un cône en un point donné, 143, 149, 156, 164, 288. — Tangente horizontale à la section plane d'un cylindre, 148, 162. — Tangente à la transformée par développement de la section plane d'un cylindre ou d'un cône, 144, 159, 168.

Tangente à la section plane d'une surface de révolution soit en un point donné, soit perpendiculaire à la ligne de terre, 194, 196. — Tangente à la section plane de l'hyperboloïde de révolution, 205; à une surface d'égale pente, 973-975, 985.

Tangentes aux intersections de cônes et de cylindres, 226, 230, 235; à l'intersection d'une surface de révolution et d'un cylindre, 255; à l'intersection de deux surfaces de révolution, soit comme appartenant aux deux plans tangents, soit comme perpendiculaire au plan des normales, 259, 260; à l'intersection de deux surfaces qui se touchent, 236, 865-869.

Tangentes à des courbes d'ombre portée de lignes, 331, 337, 339, 393, 395, 397, 398; à la courbe d'ombre portée d'une surface, 350; à la ligne d'ombre propre d'un tore dans le cas de rayons parallèles, 369. — Tangente horizontale à la courbe d'ombre propre d'une surface de révolution, 344, 358. — Construction des tangentes aux courbes d'ombre propre en général, 878-881. — Application aux surfaces gauches, 882-887; à la surface de la vis à filets triangulaires, 1012-1014; à la surface de la vis à filets carrés, 1034.

Tangente à la spirale d'Archimède, 674, 992; à la section de la surface du biais passé par un plan perpendiculaire à l'axe, 769.

(*Voir* Tangentes conjuguées.)

Tangentes conjuguées. — Théorème des tangentes conjuguées, Liv. VIII, Chap. III. — Construction d'une tangente conjuguée à une tangente donnée, 853. — Théorèmes divers sur les tangentes conjuguées, 788, 852, 870, 905.

(*Voir* Parties virtuelles.)

Terrassements. — Problèmes graphiques sur les terrassements, 283, 284, 548-554. — Tableau graphique pour le calcul des terrassements, 1091.

Tore. — Représentation, constructions diverses, 187-196. — Intersection par un cylindre, 253-255; par une sphère tangente, 868, 869. — Sections circulaires, 870-872. — Rayon de courbure de la section par un plan tangent, 873-876. — Ligne d'ombre de la partie convexe, 342-355, 878; de la partie à courbures opposées, 893-904. — Quand les rayons sont parallèles, la projection horizontale de la courbe d'ombre du tore est la conchoïde d'une ellipse, 368, 369. — Mener par un point donné une droite qui touche un tore en deux points, 904, deuxième note.

Température. — Tableau graphique représentant les températures moyennes à Halle, 1086, 1087.

Trait ressenti. — Usage, 377.

Transformation homologique. — Théorie générale, Liv. V, Chap. III. — Un hyperboloïde scalène peut être changé en un hyperboloïde de révolution par une transformation homologique, 707-709. — Relations d'homologie entre les projections des directrices circulaires du biais passé, 753. — Quand les rayons d'homologie sont parallèles entre eux et à l'axe d'homologie, toute courbe tangente à cet axe est osculatrice de sa transformée, 391.

Transformées par développement. — Conservation des angles de deux transformées par développement, 118, 122, 472. — Constructions diverses de transformées et de leurs tangentes, 144-147, 159, 167-178, 175, 176, 492, 980, 987. — Rayons de courbure des transformées, 474, 475, 492, 819. — Inflexion des transformées, 145, 169-171, 176, 477-479. — Transformées d'une ligne double, 476.

V

Vis. — Représentation d'une vis à filets triangulaires et de son écrou, 1018-1020; d'une vis à filets trapézoïdaux, 1018, note; d'une vis à filets carrés et de son écrou, 1035-1037; d'une vis double à filets carrés, 1035.
(*Voir* Surface de la vis à filets carrés, Surface de la vis à filets triangulaires.)

FIN DE LA TABLE ANALYTIQUE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.