ÉTUDES PHILOSOPHIQUES

SUR

LA SCIENCE DU CALCUL

PAR M. F. VALLÈS,

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES, ANCIEN ÉLEVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

> J'ai souvent trouvé plus d'enseignements et surtout d'enseignements simples dans la véritable philosophie de la science que dans les formules algébriques.

Première Partie.

PARIS

CARILIAN-GOEURY ET V^{or} DALMONT,

LIBRAIRES,

ÉDITEURS DES ANNALES DES MINES ET DES PONTS ET CHAUSSÉES,

Quai des Augustins, 39.

1841.

sor est aux hommes.*

Souvent on emploie le datif en grec pour montrer qu'une chose existe, qu'une action se fait pour l'avantage de quelqu'un. C'est dans ce sens que τοῖς ἀνθρώποις se trouve ici au datif.

En nous rappelant ce qui a été dit au paragraphe 3, il s'ensuit que l'on pourrait dire également, en supprimant ὅτι : ὁ μῦθος δηλοῖ κάματον θησαυρὸν εἶναι τοῖς ἀνθρώποις.

Grammaire.

DU VERBE.

(SUITE).

Il faut distinguer dans tout verbe le *radical*, c'est-à-dire la partie qui renferme l'*idée du verbe*, et une suite de terminaisons. On entend ici par *terminaison* la syllabe, ou les syllabes qui suivent le radical.

Dans λύω, *je délie*, le radical est toujours λυ; la terminaison, au contraire, varie selon les nombres, les personnes, les temps, les modes et les voix. Énoncer de suite les divers changements qu'éprouve le verbe, cela s'appelle *conjuguer*. Déjà nous avons conjugué le verbe substantif εἶναι, etc. Comme dans tous les verbes réguliers, en μι. Mais ils ne forment exception qu'à 3 temps seulement; nous en donnerons bientôt la conjugaison.

Observons encore que dans les verbes dont la première lettre est une consonne, on ajoute au commencement de tous les temps secondaires, à l'indicatif, la voyelle ε, qu'on appelle *augment*. Ainsi, dans le verbe λύω nous avons :

TEMPS PRINCIPAUX.

Présent.	λύω.
Futur.	λύσω.
Parfait.	λέλυκα.

TEMPS SECONDAIRES.

Imparfait.	ἔλυον.
Aoriste.	ἔλυσα.
Plus-que-parfait.	ἐλελύκειν.

Toutefois, et nous le répétons, cet augment ne se trouve qu'au mode indicatif.

Dans le parfait λέλυκα, nous trouvons avant le radical λυ, la syllabe λε. Cette syllabe se compose de la voyelle ε et de la première consonne du radical; on l'appelle *redoublement*.

Tous les verbes qui commencent par une consonne ont un redoublement au parfait, et le conservent dans tous les modes du parfait.

Comme l'ε *augment* alonge d'une

— μελεδήματα θυμοῦ,	*apaiser* les inquiétu
— τὴν ἀγοράν,	*dissoudre* l'assembl
— τὴν γέφυραν,	*rompre* le pont.
— νόμον,	*violer* la loi.
—. ἐκ Βενδιδείου,	*sortir du port* de Ben

Pour rompre la monotonie et la routine, nous engag fesseurs à faire conjuguer les verbes au moyen de que précéderont. Les élèves ne diront plus λύω, λύεις, λύει, et

PRÉSENT INDICATIF.

τὸν πατέρα τοῦ δούλου λύω,	je délie le père de l
— — λύεις,	tu délies, etc.,
— — λύει,	il délie, etc.

(Et pour mieux indiquer les trois personnes du

τοὺς πατέρας τῶν δούλων λύομεν,	nous délions les p
— — λύετε,	vous déliez, etc.,
— — λύουσι,	ils délient, etc.

(Puis pour mieux faire reconnaître le du

τὼ πατέρε τοῖν δούλοιν λύετον,	vous déliez [tous d des [deux] escl
— — λύετον,	ils délient [tous d

Sans préjudice des autres formules :

τὸν πατέρα τοῦ δούλου λυέτον,	déliez tous deux l
τοὺς πατέρας τῶν δούλων λυέτον,	déliez tous deux, deux les pères

Nota. Dans la composition de ces petites phrases, on peut in c'est-à-dire, un adverbe qui par sa signification indiquera à l'é Par exemple : νῦν (maintenant) λύω τὸν πατέρα, désignera le

ÉTUDES PHILOSOPHIQUES

SUR

LA SCIENCE DU CALCUL.

Imprimerie de Félix LOCQUIN,
rue N.-D.-des-Victoires, 16.

ÉTUDES PHILOSOPHIQUES

SUR

LA SCIENCE DU CALCUL

PAR M. F. VALLÈS,

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES, ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

J'ai souvent trouvé plus d'enseignements et surtout d'enseignements simples dans la véritable philosophie de la science que dans les formules algébriques.

Première Partie.

PARIS

CARILIAN-GŒURY ET V^{or} DALMONT,

LIBRAIRES,

ÉDITEURS DES ANNALES DES MINES ET DES PONTS ET CHAUSSÉES,

Quai des Augustins, 39.

1841.

INTRODUCTION.

Il ne faut pas avoir fait de longues et profondes observations, pour avoir remarqué que l'homme qui vient communiquer au public le résultat de ses méditations, est exposé à rencontrer deux puissants obstacles ; l'incrédulité d'abord, qui nie la réalité ou du moins l'importance des nouvelles découvertes, et plus tard cette espèce d'antagonisme, dont les causes variées sont peut-être difficiles à apprécier à leur juste valeur, mais dont l'effet certain est de revendiquer aux profits des morts cette part de mérite qu'un travail utile devrait assurer aux vivants.

Certes, il est naturel que les hommes accueillent avec quelque méfiance les idées nouvelles, il est même nécessaire que ces idées ne soient examinées par eux qu'avec une sage réserve, avec cette disposition d'esprit que commande la prudence du doute.

Mais on aurait peine à comprendre, si une expérience de tous les jours ne formait notre conviction à cet égard, que des hommes d'un mérite incontestable, sans avoir même pris connaissance des principes annoncés et de leurs conséquences, ne veuillent pas croire à leur réalité ; que ces hommes, se renfermant dans une opposition systématique, proclament avant tout examen, avant tout débat, qu'ils ne sauraient avoir foi dans les nouvelles doctrines, et que, dans la science exacte par excellence, substituant à la méthode logique les inspirations de quelques préjugés, ils répondent à des convictions mathématiquement formulées par une négation.

A cet égard je puis joindre ma propre expérience à l'expérience du passé, car dans les tentatives que j'ai faites pour répandre les idées exposées dans cet ouvrage, le premier obstacle que je viens de signaler ne m'a point fait défaut.

En sera-t-il de même du second écueil ? et, s'il est donné à ce travail d'obtenir d'honorables suffrages, quelques uns ne voudront-ils pas attribuer le mérite des idées qu'il renferme à d'autres qu'à moi ? ce serait se faire illusion que de ne pas s'attendre à un semblable résultat. Mais, à ce sujet, qu'il me soit permis de présenter quelques observations.

A qui doit-on attribuer la propriété réelle d'une idée? est-ce à celui qui en aura parlé en termes plus ou moins vagues, sans en connaître toute l'étendue, peut-être même sans l'avoir soumise à quelques épreuves de raisonnement ou d'expérience ? ou à celui qui, l'examinant sous toutes ses faces, l'étudiant dans tous ses détails, comprenant toutes les nécessités de son existence, toutes les conditions de son développement, toute la fécondité de ses applications, l'aura fait pénétrer dans la science, elle et ses conséquences, appuyée sur des raisonnements incontestables, généralisée autant que sa nature aura pu le permettre, sanctionnée par les épreuves concluantes de l'expérience, formulée enfin selon les exigences d'une vraie théorie?

La réponse à cette question ne saurait être douteuse; car s'il suffisait d'avoir prononcé quelques mots au sujet d'une doctrine ou d'un principe, pour recueillir tout le mérite de leur découverte, il faudrait renoncer ici bas au puissant mobile de l'émulation, à ce légitime désir d'illustration qui porte l'homme vers l'étude et la méditation, à cette passion honorable qui l'entraîne incessamment vers la recherche de la vérité.

Qu'on ne m'objecte donc pas, pour m'enlever tout mérite, que plusieurs, avant moi, se sont occupés des objets traités dans cet ouvrage, et que déjà quelques œuvres ont été produites sur ces matières. Que, par exemple, des essais d'interprétation des expressions imaginaires ont été tentés et que le fait capital sur lequel cette interprétation s'appuye, celui par lequel on établit qu'en géométrie le signe $\sqrt{-1}$ représente la perpendicularité, que ce fait, dis-je, a depuis longtemps été signalé à l'attention des géomètres.

La réponse à ces observations est facile. Il s'agit bien moins en effet de ce principe en lui-même, que des moyens de conviction qu'il a fallu découvrir pour le faire admettre enfin au nombre des vérités mathématiques ; il s'agit moins d'avoir entrevu une liaison entre le signe de l'imaginaire et la perpendicularité, ce qui rattache à l'algèbre la science géométrique seulement, que d'avoir démontré qu'une liaison de même genre pouvait exister pour d'autres quantités que les longueurs, et s'appliquer à d'autres études que celles des lignes et des angles.

Mais peut-être en cette circonstance aurai-je quelque chose de plus concluant à ajouter. N'est-il pas arrivé en effet que tout ce qui a été écrit sur ce sujet ne peut être considéré que comme une présomption et même comme une présomption d'autant moins admissible que les raisonnements sur lesquels on s'est appuyé portent tous à faux (1)? Aussi ne faut-il pas s'étonner que depuis l'époque où ces tentatives sont venues fixer l'attention des géomètres elles ont été vouées à la stérilité, qu'elles n'ont dissipé aucun doute, et que ne corrigeant rien dans le passé, elles ont été inhabiles à produire quelque chose pour l'avenir.

Peut-être aussi m'objectera-t-on que des esprits supérieurs ont déjà fait sentir à plusieurs reprises combien il est indispensable d'introduire dans l'é-

---

(1) Le chapitre quatrième de cet ouvrage contient la réfutation des théories émises à ce sujet.

tude de la science cette distinction qui fait l'objet du chapitre premier de cet ouvrage, et en vertu de laquelle on doit soigneusement éviter de confondre le nombre qui est employé comme indice de l'opération de compter, avec le nombre qui sert de signe représentatif de la grandeur des quantités.

A Dieu ne plaise que je me refuse à reconnaître la vérité d'une telle assertion. Bien loin de là, je déclare ici que, si j'ai pris quelque confiance dans le mérite de cet écrit, c'est parce que les vues qu'il renferme et les conséquences qui s'en déduisent sont entièrement conformes à ces mêmes indications auxquelles je fais ici allusion.

M. Poinsot, car ce nom, lorsqu'on s'occupe de la philosophie des sciences mathématiques, se présente toujours le premier à la pensée, M. Poinsot, dont je cite souvent les paroles dans cet ouvrage, a depuis longtemps fixé l'attention des géomètres sur l'importante distinction que je viens de rappeler, mais il ajoute que *les éléments de cette théorie neuve et profonde nous sont à peine connus*.

Dans une lecture récente faite à l'Académie des sciences (voir page 38), il a renouvelé ses tentatives pour démontrer les inconvénients qui résultent de l'oubli ou de l'omission de la distinction dont il est ici question.

Mais cette lecture du savant académicien, dont on ne saurait contester le mérite et l'importance sous le point de vue critique, ne réunit pas à beaucoup près les mêmes qualités au point de vue de l'organisation et de la véritable constitution des doctrines scientifiques.

A ce sujet, qu'il me soit permis de présenter quelques observations qui ont déjà reçu de la publicité, mais auxquelles on ne saurait contester de trouver ici leur place naturelle.

Si les réflexions de M. Poinsot, ai-je dit, sont susceptibles d'être admises au point de vue théorique, et c'est ce qui ne saurait être raisonnablement contesté, il s'en faut cependant qu'on puisse les considérer comme un moyen de réalisation pratique. L'auteur a remarqué une lacune, et il la signale; il a entrevu quelques relations entre deux branches des mathématiques et il les indique; mais il ne nous dit pas comment cette lacune pourra être comblée ; comment ceux qui se livreront à l'avenir à l'étude des mathématiques éviteront l'écueil qu'il signale; comment la science des nombres, telle qu'il la conçoit, passera dans l'enseignement; comment enfin on évitera de la confondre avec celle des grandeurs, et par quels moyens on la distinguera de celle-ci, non seulement sous le point de vue absolu, mais aussi sous ce point de vue relatif qui conduit à la considération des grandeurs que nous nommons *positives* et *négatives*, et que serait-ce si j'ajoutais *imaginaires?* en un mot, M. Poinsot prouve sans réplique que nous avons tort, mais il ne nous fait rien connaître, ce me semble, de cet état futur dans lequel nous devons nous constituer pour avoir raison.

Je prendrai pour preuve de la vérité de ces assertions la tentative qu'il a faite pour donner une explication philosophique de l'existence nécessaire des n racines d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré; je crains fort que, sans explications ultérieures, les géomètres ne soient plutôt disposés à douter encore comme doutait d'Alembert, qu'à accueillir sans réserves les raisons par lesquelles M. Poinsot cherche à établir que cette multiplicité est dans la nature des choses.

Voici les motifs de cette opinion :

Il arrive très souvent que les racines des équations sont imaginaires, et il ne faut pas perdre de vue que pour tout algébriste la forme imaginaire ne se comprend pas, ne s'explique pas, ne s'interprète pas : c'est un mystère. Or, j'admets avec M. Poinsot que, dans une question, l'équation obtenue ne renferme rien des imperfections de l'énoncé, qu'elle est, en un mot, la question même parfaitement posée ; toujours restera-t-il fort difficile, sinon impossible de concevoir comment une question, quelquefois très simple, très compréhensible dans le langage ordinaire, dans l'énoncé de laquelle tout sera clair ; comment, dis-je, cette question, transformée en langage algébrique, finira par vous conduire, d'une part à des réponses aussi claires, aussi faciles à comprendre que son énoncé; mais, d'autre part, à des réponses obscures, mystérieuses, que nous sommes obligés de considérer comme n'ayant rien de réel , en un mot, à des réponses imaginaires. Eh bien ! tant que vous n'aurez pas fait comprendre à mon esprit en quoi peut consister cette singularité de l'algèbre qui transforme une expression , c'est à dire une idée réelle en une idée imaginaire , il me sera impossible de voir clair à cette multiplicité de réponses faites à une même question ; je continuerai de l'accepter comme *un fait algébrique* , mais je ne saurais y voir *une conséquence nécessaire de la nature des choses*. L'explication de cette singularité dont je parle ici , et par suite l'interprétation des expressions imaginaires , telle est la véritable solution philosophique de la question traitée par M. Poinsot.

Qu'on me permette de montrer par un exemple fort simple combien les réflexions que je viens de présenter ont de portée, combien leur application aux questions les plus simples est de nature à jeter du doute sur quelques principes réputés inattaquables.

Si on demande le côté du quarré dont la surface est S; cette question conduira à une équation du second degré, de laquelle on déduira pour valeur du côté demandé les deux expressions (1)

$$+\sqrt{S}, \quad -\sqrt{S}.$$

La question présente donc deux solutions. En vertu des principes admis en algèbre, il faut accepter comme une nécessité ces deux solutions, elles sont toutes deux réalisables par les procédés géométriques; enfin elles sont toutes deux réelles.

Si on demande maintenant le côté du cube dont le volume est V; cette question conduira à une équation du troisième degré, de laquelle on déduira pour valeur du côté demandé les trois expressions,

$$+\sqrt[3]{V}, \quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{V}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{V}$$

dont une seule est réelle.

Or, laissant de côté les considérations d'analyse pure, pour sonder la question en elle-même, ne

---

(1) J'agis et je calcule selon les méthodes ordinaires de l'algèbre, selon les usages généralement adoptés; car, dans les questions que je traite ici, je n'accepte point pour mon compte cette double interprétation. Je renvoie à ce sujet aux objections que je présente dans le chapitre IV, et aux explications plus détaillées sur le calcul des signes qui seront produites dans la deuxième partie de cet ouvrage.

paraîtra-t-il pas bien surprenant que, lorsqu'il s'agit de construire un quarré égal à une surface donnée, il y ait deux lignes *réelles* qui résolvent la question? et que, lorsqu'il s'agit de former un cube contenant un volume déterminé, il n'y ait plus qu'une solution réelle? cette circonstance ne paraîtra-t-elle pas plus surprenante encore lorsqu'on remarquera que la seconde question, celle du cube, emporte implicitement la solution de la première; car demander le côté d'un cube dont V est le volume, n'est-ce pas demander aussi le côté d'un quarré dont $\sqrt[3]{V^2}$ est la surface, lequel quarré n'est autre chose que la base du cube demandé? Ainsi, pour construire ce quarré, il y aura deux solutions *réelles*, et pour achever le cube dont ce quarré peut être considéré comme le commencement, il n'y a plus qu'une solution possible? A la place de ces deux solutions dont le sens est accessible à notre raison, dont la réalisation géométrique est facile, nous en trouvons trois dont une seule pourra être pratiquée, et dont les deux autres sont une impossibilité pour notre raison; dans quelle confusion ne tombons-nous pas?

Et cependant ces deux questions rentrent l'une dans l'autre. Sous le point de vue *géométrique* ou concret, la liaison qui les enchaine l'une à l'autre est simple, évidente, réalisable et parconséquent bien réelle; comment se pourra-t-il donc faire que leur traduction en langage algébrique, rende cette liaison imaginaire? comment les combinaisons analytiques peuvent-elles chasser une réponse bien réelle qui, dès à présent, semble parfaitement acquise à la question, pour lui substituer, non plus une, mais deux réponses dont l'interprétation ne saurait être faite. En présence de ces faits, il faut s'humilier, et reconnaître que des explications nous manquent encore à ce sujet, et que ce qu'on enseigne dans nos livres sur les exposants ne constitue point tout ce qu'il en faut savoir.

Concluons donc que la véritable philosophie ne saurait éclairer de son flambeau les incertitudes mathématiques qu'à la condition de trouver les rapports, les liens qui unissent le réel à l'imaginaire, qu'à cet égard, l'analyse pure et simple qui se borne à considérer les faits isolés, sans avoir pour but de les relier, est frappée de stérilité et d'impuissance, et commençons déjà à reconnaître la vérité de cette maxime, neuve aujourd'hui, et qui demain sera vulgaire, qu'*on ne doit pas trouver moins d'enseignements dans la véritable philosophie de la science que dans les formules algébriques*.

Cette critique des travaux qui ont été produits jusqu'à ce jour peut servir d'introduction aux matières contenues dans cet écrit, car la recherche de ce qui manque aux œuvres des géomètres qui m'ont précédé, tant sous le rapport de la rigueur des raisonnements, que sous celui de la généralité des vues, forme en réalité le caractère spécial de cet ouvrage.

J'ajouterai maintenant quelques mots sur l'ordre et la nature des objets qui sont développés dans cette première partie.

Dans le chapitre premier, je présente l'exposé de mes idées sur les principes qui régissent la représentation des quantités dans la science du calcul, tant sous le rapport de leur grandeur, que sous celui de leur ordre, de leur mode d'existence ou d'action. J'insiste sur cette considération que cette représentation est complexe, qu'elle se compose d'un nombre d'abord, puis d'une quantité de la même espèce que celle dont on s'occupe et qu'on prend pour terme de comparaison entre toutes celles de cette même espèce ; je montre l'inconvénient qu'il y a d'appeler *unité* cette quantité prise pour terme de comparaison, et, pour éviter toute confusion, je propose de l'appeler *module*.

Cela fait, je remarque que la représentation des quantités étant complexe, ce ne sera pas avoir tout fait que d'examiner si les opérations de calcul auxquelles pourra être soumise l'expression d'une quantité, pourront s'exécuter sur le nombre qui figure dans cette expression ; j'ajoute que pour être parfaitement éclairé à ce sujet, il faudra aussi examiner si les opérations, incompréhensibles sur le nombre, ne pourront pas être parfaitement comprises et pratiquées sur le module ; remarque aussi simple que naturelle, dont l'oubli a fait naître tant d'incertitudes dans la science, mais dont l'application doit éclaircir mille difficultés et anéantir presque tous les doutes.

Ces premières réflexions montrent que, puisque les nombres et les modules ont chacun une part dans la représentation des quantités, il est indispensable, pour obtenir une interprétation rationnelle et infaillible des expressions algébriques, d'étudier individuellement les propriétés des nombres, et celles des modules. Tels sont les objets des chapitres deuxième et troisième.

Dans le deuxième, je suppose que le nombre est essentiellement et uniquement destiné à représenter l'opération de compter, et qu'en conséquence on le considère en faisant abstraction de toute espèce de quantité. J'essaye de donner une définition du nombre envisagé sous ce point de vue unique de pluralité, et je prouve l'insuffisance, ou pour mieux dire, l'absence totale de définition du nombre considéré dans ce sens, dans les divers écrits qui traitent de la science du calcul.

Puis, examinant les opérations fondamentales de l'arithmétique disposées par groupes d'opérations directes et inverses, je montre, en m'occupant de l'addition et de la soustraction, comment les idées de positif et négatif ont pu s'introduire en arithmétique, et se combiner avec l'idée de nombre; je critique quelques assertions depuis longtemps accréditées sur ce sujet; et je conclus que dans le domaine abstrait, tel que je l'entends et que je l'ai défini, le nombre négatif est une impossibilité. En parlant de la multiplication et de la division, après avoir insisté sur la véritable nature des facteurs dans une multiplication, je combats les erreurs émises au sujet de la définition de cette opération; et j'établis qu'au point de vue où je me trouve placé, dans ce chapitre, je dois considérer le nombre fractionnaire comme un nouveau cas d'impossibilité. Enfin, en traitant de l'élévation aux puissances et de l'extraction des racines, je présente quelques considérations sur la nature de la double question qui se présente, lorsqu'à l'aide de chaque opération inverse, on veut revenir aux éléments de l'opération directe qui lui correspond. Ces considérations conduisent à cette conséquence qu'il faut admettre deux espèces très distinctes d'expressions négatives, fractionnaires, et irrationnelles, la première espèce se rapportant aux nombres sur lesquels on opère, la seconde aux nombres opérateurs. Enfin, j'arrive à cette conséquence que les nombres irrationnels sont encore, comme dans les cas précédents, des indices d'impossibilité.

B.

Dans le troisième chapitre, j'étudie les modules, leurs modifications, leurs transformations. J'applique ces études aux longueurs, mais le lecteur comprendra aisément que toutes les observations, tous les raisonnements que j'ai produits, pourront s'appliquer à toutes les quantités qui jouiront de propriétés analogues à celles des longueurs ; car c'est uniquement sur *l'existence générale de ces propriétés*, et non sur *l'existence individuelle de la longueur*, que reposent les bases de toutes les démonstrations.

Je fais voir que parce que la longueur jouit de cette propriété, que l'esprit peut la concevoir indéfiniment divisée, l'existence d'une expression fractionnaire dans l'étude des longueurs n'impliquera ni contradiction, ni impossibilité ; qu'à la vérité, la division continuera d'être impraticable sur le nombre qui figure dans l'expression, mais qu'on pourra l'exécuter sur le module et réaliser ainsi la solution obtenue.

Je fais voir encore que, parce que les longueurs jouissent de cette propriété que dans certaines figures de géométrie, les rapports qui les lient l'une à l'autre sont exprimés par des nombres irrationnels, il arrivera ici, comme dans le cas précédent, que l'existence de la forme irrationnelle dans l'étude des longueurs n'impliquera ni contradiction ni impossibilité; qu'à la vérité l'extraction de la racine continuera d'être impraticable sur le nombre qui figure dans l'expression; mais qu'on pourra l'exécuter sur le module, et réaliser ainsi la solution obtenue.

Passant à des considérations d'un autre ordre, j'étudie ce qui doit advenir dans les calculs lorsque l'infini ou zéro se manifestent.

J'insiste sur ce point qu'il ne faut pas confondre les expressions *infini* et *zéro* avec celles *infiniment grand* et *infiniment petit;* car celles-ci sont essentiellement et uniquement concrètes, c'est à dire applicables à des quantités seulement, tandis que les premières peuvent à la fois s'appliquer et aux quantités et aux opérations abstraites de la science du calcul. Je dis quel sens il faut attacher aux premières, et en étudiant la même question pour les secondes, j'arrive à cette conséquence que, dans l'étude des quantités, les considérations d'infiniment grand et d'infiniment petit n'impliqueront cessaire que la direction perpendiculaire le soit par le facteur $\sqrt{-1}$; ce qui contient en principe l'interprétation des expressions imaginaires; j'ajoute enfin, que dans un sens général il faut dire :

« Lorsque une espèce de quantité possèdera » entre les deux états contraires qu'on appelle positif et négatif, un troisième état intermédiaire, » et lorsque ce troisième état sera tel que, si après » avoir fait pour l'obtenir certaines opérations sur » l'état positif, il arrive qu'en répétant sur cet état » intermédiaire les mêmes opérations et dans le » même ordre, on passe à l'état négatif, ce troisième » état, dis-je, devra être caractérisé dans l'algèbre » par le facteur $\sqrt{-1}$. »

Enfin, la considération du cas où deux directions font entre elles un angle quelconque α conduit à cette conséquence que l'une d'elles étant caractérisée par le facteur $+1$, l'autre devra l'être dans le calcul par le facteur $\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$; ce qui complète l'interprétation de la forme imaginaire dans les considérations concrètes.

On peut donc dire que les études contenues dans les deuxième et troisième chapitres embrassent tout ce qui est relatif à la représentation des quantités; aussi, verra-t-on que toutes les expressions connues en algèbre passeront dans cet examen sous nos yeux et recevront successivement leur véritable signification.

Nous sommes donc maintenant en possession des matériaux nécessaires pour constituer, sous le point de vue le plus simple, le plus naturel, le plus logique, l'enseignement mathématique. Or, chose remarquable, et bien digne d'être méditée, c'est que pour établir cette constitution dans tout ce qu'elle a de plus complet, il nous a suffi d'interroger notre raison sur les conséquences des principes les plus élémentaires de la science, ceux de la représentation des quantités dans le calcul. Considération tellement simple en apparence, que c'est sans doute à cette simplicité même qu'il faut attribuer l'oubli dans lequel on l'a délaissée, et tellement féconde en réalité, qu'à peine est-on entré dans cette voie, on est conduit sans effort et presque instantanément vers les régions les plus élevées de l'analyse mathématique, vers les formes algébriques les moins comprises jusqu'à ce jour. Aussi de quel étonnement notre esprit ne reste-t-il pas frappé, lorsque, faisant un retour sur lui-même, il vient à reconnaître combien peu il fallait faire d'efforts pour soulever le voile qui recouvre tant d'obscurités, combien peu il fallait de science pour comprendre et expliquer ce dont les savants n'ont pu ni posséder l'intelligence, ni produire l'interprétation.

Mais je ne pouvais terminer ce sujet sans prêter une attention sérieuse à l'examen d'une théorie présentée il y a déjà plusieurs années, sur l'interprétation géométrique des expressions imaginaires, et sans donner quelques applications des principes exposés dans les chapitres précédents.

Dans le quatrième chapitre, je combats la théorie des imaginaires produite par plusieurs géomètres; je montre le vice des démonstrations présentées; je rectifie les erreurs et je reconstitue les principes de cette théorie au point de vue algébrique. Dans cet examen, je suis conduit à exprimer des doutes qui viennent corroborer ceux dont j'ai dit un mot dans le cours de cette introduction, au sujet du calcul des signes.

Enfin, dans le cinquième chapitre, je présente quelques applications des principes précédemment établis.

A l'égard de ces applications, je devais en produire un assez grand nombre pour donner dès à présent une idée du mécanisme à l'aide duquel les enseignements de la théorie développée dans cet ouvrage devront être compris et utilisés dans la pratique. Mais, une fois ce but rempli, tout ce qu'en ce moment j'aurais écrit de plus aurait pu être considéré à bon droit comme une fatigante répétition. La deuxième section du cinquième chapitre est surtout destinée à donner une idée de ce mécanisme.

Mais il importait en même temps de montrer que la nouvelle théorie, plus ou moins simple que l'ancienne dans ses procédés de recherches, possédait incontestablement sur celle-ci le précieux avantage d'agrandir, pour les expressions algébriques, le champ de la réalité; de donner à ces expressions, qu'on a réputées imaginaires dans le domaine de l'abstraction, et à l'interprétation desquelles on n'a pu opposer jusqu'à présent qu'une fin de non recevoir ; de leur donner, dis-je, dans l'étude des faits naturels, une existence réelle, une forme déterminée, une signification précise, également accessible à nos sens et à notre raison. Tel est le caractère des applications traitées dans la première section du dernier chapitre.

Au reste, les applications qu'on peut faire des principes exposés dans le cours de cet ouvrage sont si nombreuses, si générales qu'il n'y a pas une branche de la science du calcul sur laquelle on ne puisse les pratiquer; et si je voulais pousser plus loin cet examen, ce serait une véritable réforme de toutes les méthodes d'exposition que je serais conduit à développer ici; mais ce n'est point là l'objet que j'ai eu en vue dans la première partie de cet ouvrage, objet qui ne saurait, d'ailleurs, être convenablement traité sans quelques intermédiaires.

En effet, il ne suffit pas d'avoir trouvé une voie nouvelle, pour en conclure immédiatement qu'elle sera préférable à l'ancienne; il faut, avant tout se reporter en arrière, parcourir de nouveau cette ancienne voie, en examiner tous les détails, en signaler tous les vices. Ce n'est qu'après cette recherche qu'il sera possible de faire un choix rationnel, et d'apprécier avec justesse tous les avantages que les procédés nouveaux doivent offrir, tant pour l'exposition de ce qu'on sait déjà, que pour la découverte de ce qui nous reste à apprendre; c'est ce que nous nous appliquerons à faire dans la deuxième partie de cet ouvrage.

Mais, avant de mettre au jour les nombreuses conséquences auxquelles m'ont conduit toutes ces investigations, qu'il me soit permis de m'arrêter un instant, car l'esprit de l'homme n'est pas infatigable. Aussi bien j'éprouve le besoin d'être éclairé sur l'importance de ce premier travail, sur la part de mérite qui doit lui être attribuée; or, en cette matière, j'appelle autant la critique que la louange, car si celle-ci n'est un puissant mobile pour créer, la première est une œuvre essentielle de perfectionnement.

—

ÉTUDES PHILOSOPHIQUES

SUR

LA SCIENCE DU CALCUL.

> Les résultats transcendants du calcul sont, comme toutes les abstractions de l'entendement, des signes généraux dont on ne peut connaitre la véritable étendue qu'*en remontant par l'analyse métaphysique aux idées élémentaires qui y ont conduit*, ce qui présente souvent de grandes difficultés ; car l'esprit humain en éprouve moins encore à se porter en avant qu'à se replier sur lui-même.
>
> (LAPLACE, *Théorie analytique des probabilités.*)

CHAPITRE PREMIER.

DE LA NÉCESSITÉ D'ÉTABLIR UNE DISTINCTION TRANCHÉE DANS L'ÉTUDE DES NOMBRES, SUIVANT QU'ILS SONT EMPLOYÉS COMME INDICES DE L'OPÉRATION DE COMPTER, OU COMME SIGNES REPRÉSENTATIFS DE LA GRANDEUR DES QUANTITÉS.

— *Doutes et objections dans la science du calcul.*

S'il est vrai que la science du calcul, sous le point de vue logique, doit être placée au premier rang de toutes les sciences ; si chaque pas qu'on fait dans son étude est appuyé sur les règles sévères d'un raisonnement toujours rigoureux ; si, en un mot, l'expression *vérité mathématique* est devenue, dans le langage ordinaire, le symbole de tout principe sur lequel il n'est plus permis de contester, ne doit-il pas paraître bien étrange que le doute soit parvenu à s'introduire dans des doctrines en apparence inattaquables? N'est-il pas surprenant que la controverse puisse non seulement s'établir, mais même être permise, sur des théories édifiées selon toutes les exigences du vrai ?

Que de pareilles hésitations eussent tenu les esprits en suspens au moment où l'une des branches du calcul prenait naissance, on le concevrait. Les premiers pas que les hommes font pour découvrir la vérité sont souvent des erreurs, et même en mathématiques, la sanction de l'expérience n'a pas été inutile pour confirmer l'exactitude de certains résultats (1). Mais lorsque l'esprit humain est en possession depuis tant d'années de principes réputés vrais, lorsque cette expérience dont je viens de parler n'est plus celle d'un jour, lorsque tant d'applications ont proclamé la vérité de ces principes, il semble qu'un

---

(1) On peut, dit Laplace, considérer les passages du positif au négatif, du réel à l'imaginaire, comme un moyen de découverte pareil à l'induction et à l'analogie employées depuis longtemps par les géomètres, d'abord avec une extrême réserve, ensuite avec une entière confiance, *un grand nombre d'exemples en ayant justifié l'emploi.* Cependant il est toujours nécessaire de confirmer par des démonstrations directes les résultats obtenus par ces divers moyens. (*Théorie analytique des probabilités*, introduction, page XXXIV, 3e édition.)

doute doit être aussitôt détruit que formé, qu'une discussion peut naître, mais qu'elle ne saurait avoir de durée.

— *A quelles causes faut-il attribuer ces incertitudes ?*

Y aurait-il donc à ces limites plus reculées de la science, vers lesquelles les investigations des géomètres sont maintenant dirigées, quelque mystère caché ? et devons-nous attendre sa révélation, avant qu'une salutaire clarté réduise à leur juste valeur les objections soulevées au nom de la science ?

Ou bien faut-il chercher la cause de tous ces doutes dans quelque principe inconnu ou tombé dans l'oubli, dans quelque principe dont la véritable portée détournée de sa signification primitive a été mal à propos ou trop étendue ou trop restreinte ?

Quant à moi, je serais disposé à croire que c'est à ce dernier motif qu'il faut s'arrêter; en effet les règles du raisonnement ne sauraient changer les principes; or, s'il est reconnu qu'on n'a pas failli aux lois de la logique, si les conséquences ont été rigoureusement déduites, et néanmoins si ces conséquences paraissent douteuses, il faudra bien que le doute vienne du point de départ. Ce ne sera donc qu'en se reportant vers lui qu'il pourra nous être permis de découvrir la cause des contradictions observées.

Or, qu'on le remarque bien, n'est-ce pas au moment même où les expressions fractionnaires et négatives se manifestent que les incertitudes viennent assiéger notre esprit, ou que du moins un certain manque de précision se fait sentir ? n'est-ce pas lorsque nous commençons à faire usage de ces mêmes expressions fractionnaires ou négatives dans l'élévation aux puissances et l'extraction des racines que deux expressions fort éloignées de tout ce qui rappelle des idées précises viennent trouver place dans le langage des sciences exactes (1)? n'est-ce point enfin, dès les commencements de l'exposition du calcul différentiel et intégral, que les considérations d'infiniment grand et d'infiniment petit appelées en aide pour compléter l'étude des grandeurs, deviennent un véritable écueil pour beaucoup d'intelligences, une cause de dégoût et de répulsion peut-être pour la science des grandeurs, et une source intarissable d'objections qni, pour être mises de côté, n'en sont pas moins réelles ?

Cependant, au milieu de toutes ces incertitudes, l'esprit humain marche toujours; et, si malgré ces entraves il est parvenu à de grandes et belles révélations, si sur le nombre des résultats obtenus quelques uns seulement sont sujets à controverse, combien de progrès n'aurait-il pas réalisés, et jusqu'à quelles bornes n'aurait-il pas étendu le champ de la science, si une vive lumière avait constamment dirigé sa

(1) Y a-t-il en effet rien de plus antilogique que le mot *irrationnel*, rien de moins exact que le mot *imaginaire*.

marche et éclairé les objets soumis à ses investigations ?

— *Moyen proposé pour les résoudre.*

Ces pensées, comme on voit, nous reportent moins sur les théories détaillées dont s'occupe la science des grandeurs que sur la philosophie générale de cette science. Car, au point où nous en sommes, c'est rarement un artifice de calcul qui se dérobera longtemps à nos recherches; ce qui nous manque plutôt, c'est une loi générale qui créera peut-être plus à elle seule par son simple énoncé, que ne pourrait le faire un volume de formules.

Or, si je ne me suis pas fait illusion dans les études vers lesquelles m'ont conduit toutes ces pensées, si les résultats auxquels je suis parvenu sont la véritable expression de ce qui est, cette loi générale est simple comme toutes les lois naturelles et elle se résume en ces mots : « Toutes les fois que dans une » question de la science du calcul vous n'aurez pas » l'intelligence d'une opération à faire sur une quan- » tité, ne perdez pas de vue que l'*expression* d'une » quantité doit se composer de deux choses; un » nombre d'abord, et puis une autre quantité de même » espèce qu'elle qu'on prend pour terme de comparai- » son. Cela posé, recherchez si l'opération dont vous ne » comprenez pas le sens sur le nombre, ne pourrait » pas être parfaitement comprise et pratiquée sur cette » quantité que vous avez prise pour terme de com-

» paraison, et qui, pour être sous-entendue, n'en » est pas moins subsistante dans l'expression de la » quantité. » Le résultat de cette recherche deviendra pour vous l'explication de beaucoup de difficultés, l'éclaircissement de presque tous les doutes.

C'est à l'exposition de cette loi que cet ouvrage est consacré : si je ne me suis point abusé sur le degré d'importance qu'il faut lui attribuer, et sur l'utilité des résultats auxquels elle m'a conduit, cette exposition deviendra, je l'espère, une confirmation incontestable de la vérité proclamée en tête de ces études, qu'on ne trouve pas moins d'enseignements dans la véritable philosophie de la science que dans les formules algébriques.

— *Représentation des quantités dans la science du calcul.*

Pour peu qu'on réfléchisse à la manière dont on peut parvenir à représenter les quantités, on ne tarde pas à reconnaître qu'il faut d'avance en choisir une, dans chaque espèce, destinée à servir de terme de comparaison entre toutes celles de la même espèce ; que, cela fait, on doit chercher combien de fois celle qu'on a ainsi choisie doit être répétée pour obtenir celle dont on veut avoir l'expression ; qu'enfin, quand ce nombre de fois a été déterminé, on peut dire que la quantité dont il s'agit est exprimée par celle qu'on a prise pour terme de comparaison, répétée autant de fois que l'indique le nombre en question.

— *Deux espèces d'unité.*

Cette quantité, prise pour terme de comparaison entre toutes celles d'une même espèce, est ordinairement appelée *unité*; mais on voit que, dans ce cas, le mot unité doit avoir un sens tout différent de celui qu'on lui attribue lorsqu'on s'en sert pour représenter l'opération de prendre une chose une fois; dans ce dernier cas, le mot unité a une signification complètement abstraite, il sert à désigner le premier degré de la série des nombres, c'est le commencement de l'échelle de pluralité.

Dans l'autre cas, au contraire, ce qu'on appelle unité, rentre complètement dans le domaine concret, c'est, si l'on veut, un type, un échantillon, de la quantité dont on s'occupe, avec toutes les qualités qui dépendent de sa nature; par exemple, avec toutes les propriétés optiques, si c'est un rayon de lumière; dynamiques, si c'est une force; géométriques, si c'est une longueur; etc.

— *Inconvénients de l'adoption de ces deux unités.*

Or, n'est-il pas évident qu'employer ainsi le même mot pour exprimer deux idées si différentes l'une de l'autre, c'est s'exposer à des méprises? on répondra peut-être qu'on sera toujours en garde contre ces méprises en ne perdant pas de vue la distinction qui vient d'être faite. Mais sera-t-on bien sûr de ne perdre jamais de vue cette distinction, dans l'usage qu'on fera de ces deux expressions? Les mots dans le langage de la science, comme dans le langage ordinaire, ont une grande influence sur nos idées, et nous nous laissons malgré nous diriger par cette influence, à tel point que nous finissons par tomber dans le faux, tout en gardant l'intime conviction que nous ne nous sommes pas écartés du vrai.

Et, pour montrer, dès le début de ces observations, que ce que je n'ai voulu présenter d'abord que comme hypothétique, n'est que trop réel, il me suffira de rappeler que cette question, *y a-t-il quelque chose au dessous de l'unité*? a été un grave sujet de controverse. Or, sans nous engager dès à présent dans son examen, ne paraît-il pas évident que si le mot unité avait été seulement réservé pour signifier, sous le point de vue abstrait, le premier degré de l'échelle de pluralité, il ne serait peut-être jamais venu à la pensée de personne ni de proposer cette question, ni de supposer qu'elle valût la peine d'être sérieusement discutée.

— *Définition du module.*

Mais si le double usage contre lequel je m'élève a pu être, s'il a été réellement, une source d'erreurs, faisons maintenant ce qu'on aurait dû faire dès l'origine, convenons de réserver exclusivement le mot unité, pour exprimer celui des nombres abstraits qui est représentatif de l'opération qui consiste à prendre une chose une fois, et d'appeler *module* d'une espèce de quantités, celle de ces quantités qu'on est convenu de prendre pour terme de comparaison entre toutes les autres de la même espèce.

Il résulte de là que si je désigne, pour une même espèce de quantités, le module par μ, et si je trouve que ce module doit être répété α_1 fois pour former une de ces quantités, α_2 fois pour en former une autre, α_3 fois pour en obtenir une troisième, et ainsi de suite, ces diverses quantités seront représentées par les expressions suivantes

$$\alpha_1\mu,\ \alpha_2\mu,\ \alpha_3\mu, \ldots\ldots$$

— *Les nombres, sous le point de vue abstrait, ne peuvent être qu'entiers.*

Or, on voit clairement, d'après ces conventions, que les nombres α_1, α_2, α_3, qui expriment un nombre de fois, ne peuvent être que des nombres entiers, et que, pour comprendre ce que pourraient être α_1, α_2, α_3 fractionnaires ou négatifs, il faudrait, avant tout, savoir aussi ce que peut être l'opération de répéter quelque chose un nombre de fois fractionnaire ou négatif; mais il est évident que ce qui peut résulter pour notre esprit du simple énoncé d'une pareille opération, c'est une idée d'impossibilité, et pas autre chose.

Le nombre, en effet, exprime l'impression que produit sur nous la perception des objets en tant que, dépouillés de toutes leurs propriétés, nous voulons simplement préciser combien de fois il faudrait, par exemple, faire un certain signe, répéter un certain bruit, tracer un certain caractère, pour qu'il y eût autant de ces signes, de ces bruits, de ces caractères, qu'il y a d'objets. Or, de même que ce serait incompréhensible de faire un quart de signe, ou un quart de bruit, de même le nombre, sous le point de vue où nous le considérons ici, ne peut être qu'entier, et dès l'instant qu'un nombre est fractionnaire, on peut affirmer qu'il est concret (1).

C'est au reste ce qu'on comprend tout de suite quand on applique le nombre à compter des objets qui ont une signification purement intellectuelle. Ainsi, tandis que je comprendrai très bien ce qu'est la moitié d'un corps qui a la forme d'une boule, ce serait exprimer une impossibilité que de dire que, dans une urne dans laquelle on dépose des boules pour exprimer des votes, il y a eu sept boules et demie.

Ainsi, on le voit, il est de l'essence des nombres de n'être par eux-mêmes qu'entiers, c'est la seule idée que nous puissions avoir d'eux au début de la science; et, tant qu'on ne voudra pas sortir du do-

---

(1) Je ne fais ici qu'esquisser, en passant, ce sujet; on le trouvera traité avec tous les détails convenables dans le second chapitre.

maine de l'abstraction, notre intelligence se refusera à les considérer sous un autre point de vue, quels que soient les efforts de raisonnement qu'on voudrait tenter pour changer nos idées à cet égard.

S'ensuivra-t-il cependant qu'il y aurait absurdité ou du moins superfluité à étudier les propriétés des nombres considérés sous le point de vue négatif, fractionnaire, irrationnel et même imaginaire?

Question importante, qui soulève une immense discussion, et dont la réponse, eu égard à l'état actuel de nos idées sur la science du calcul, a fourni la matière tout entière de cet ouvrage.

Or, avant de procéder à la recherche de la solution de cette question, je ferai la remarque suivante : s'il était possible à l'homme, lorsqu'il veut raisonner sur des abstractions seulement, de se dépouiller complètement de ce qu'il sait sur les quantités concrètes, je n'hésite pas à dire qu'au début de la science, il n'aurait pas même songé à étudier les nombres sous les divers points de vue que je viens d'énumérer. Si l'idée d'une pareille étude s'était présentée à lui, il l'aurait rejetée comme une absurdité, comme un égarement de son intelligence; et comment en effet se livrer raisonnablement à une étude dont le point de départ aurait été une impossibilité pour notre entendement? Comment établir un corps de doctrine dont il n'aurait pas été permis à notre raison ni de comprendre ni de définir la base?

Aussi, les géomètres qui, dans l'examen d'une question, se sont pour la première fois trouvés en présence d'un résultat négatif, ont-ils fait acte de haute philosophie en refusant de comprendre un semblable résultat, en ne voyant dans sa manifestation qu'une contradiction choquante, en donnant enfin le nom de fausse solution à celle qui venait ainsi donner un démenti aux idées si claires, si nettes, si précises, qu'ils avaient sur la nature des nombres.

— *Les quantités pourraient-elles être considérées sous le point de vue fractionnaire, négatif, irrationnel ou imaginaire ?*

C'est ici que la loi générale dont j'ai fait connaître l'énoncé, pourra être utilement appelée à notre secours ; adressons-nous donc cette question :

Si notre raison se refuse à nous donner une explication claire des nombres abstraits négatifs, fractionnaires, irrationnels et à plus forte raison imaginaires, si au contraire elle nous défend de pouvoir les considérer sous ces points de vue, en sera-t-il de même des quantités?

Distinction bien simple et bien facile, dira-t-on ; que tout le monde a pu saisir et a peut-être saisie avant moi ; distinction que la solution de toute question a fait naître et méditer. Mais, répondrai-je, si cette distinction dans chaque cas particulier vous était si utile ; si elle jetait de si vives lumières sur l'interprétation des résultats obtenus, pourquoi ne ferait-elle pas, d'une manière générale et pour l'ensemble de la science, ce que vous lui demandiez seulement pour quelques uns de ses détails? pourquoi ne serait-elle pas comme un phare dont la clarté s'étendrait à d'immenses distances et dans toutes les directions?

Je ne ferai donc ici, si l'on veut, que ce que d'autres ont fait avant moi, mais je ferai pour tout et tout d'un coup ce qui n'a été tenté que par parties et à reprises différentes : à ce compte, ce travail pourrait n'être considéré par certains esprits que comme la généralisation, la transformation en corps de doctrine de plusieurs éléments isolés ; mais quelque petite que soit la part qu'on voudra me faire, il me restera du moins la conviction que, même sous ce point de vue, ce travail manque à la science.

Revenant maintenant à la distinction dont je viens de faire connaître l'énoncé, c'est à dire au point de savoir s'il est permis à notre raison de concevoir ce que peuvent être des quantités négatives fractionnaires, irrationnelles ou imaginaires, la première remarque que je ferai c'est qu'ainsi posée, la question acquiert une immense généralité, puisque, pour y répondre convenablement, il faudrait faire d'abord une étude des propriétés résultant de la nature de chaque espèce de quantité.

— *Conséquences d'une réponse affirmative à la question précédente.*

Mais, laissant de côté, pour un instant, cet aspect général de la question, supposons qu'il y ait des quantités susceptibles de revêtir certains états correspondant à ce que nous désignons maintenant en algèbre par les expressions *négatives fractionnaires*, etc., etc. J'en conclurai, par cela même, que pour le module de cette sorte de quantités, qui, en définitive, n'est aussi qu'une quantité de même espèce, on pourra pareillement concevoir ce que signifient les états négatif, fractionnaire, irrationnel et imaginaire; s'il en est ainsi, dans l'expression $\alpha\mu$ d'une quelconque de ces quantités, il deviendra toujours possible de donner l'interprétation de ces divers états, et, quoique cette interprétation ne se puisse pas faire sur le nombre abstrait α, elle s'exécutera pour l'expression $\alpha\mu$ à cause du module μ sur lequel elle produira son effet.

On le voit donc, dans le passage du domaine abstrait au domaine concret, il y aura des expressions incompréhensibles dans le premier cas, qui pourront dans le second, devenir d'un entendement très facile. Par ces considérations, aucun trouble n'est apporté à la nature des choses, le nombre reste toujours avec les propriétés exclusivement attachées à son essence; c'est le module seul qui se modifie, si toutefois il est permis à sa nature de recevoir ces modifications.

Peut-être devrais-je maintenant entrer dans quelques détails et montrer comment s'effectuent ces modifications dans les modules des mêmes quantités; mais je crois qu'il sera mieux de poursuivre pour un instant encore le cours des généralités, afin que cet exposé présente par sa forme une image de l'ensemble dans lequel sont comprises toutes les idées dont il est le développement.

— *Les modifications que le module d'une même quantité doit subir pour représenter cette quantité sous divers états ne seraient-elles pas algébriques?*

Après avoir supposé qu'il existe des quantités pour lesquelles on peut très bien concevoir différents états, différents modes d'existence ou d'action; et après avoir reconnu que, dans ces diverses circonstances, le module de ces quantités devra recevoir certaines modifications, pour que l'expression de la quantité représente ces divers états, on peut s'adresser la question suivante : les modifications du module dont il vient d'être parlé, ne seraient-elles pas susceptibles d'être exprimées à l'aide de certains signes d'opérations algébriques? Par ce moyen, l'effet de ces modifications ne serait-il pas susceptible de passer de lui-même et à tout jamais dans les calculs, sans que, pendant toute leur durée, nous fussions sans cesse obligés d'étudier après coup les résultats de cet effet sur chaque nouvelle expression obtenue?

Si, par exemple, la quantité dont on s'occupe est une force, et si φ est le module des forces, si φ', φ'', φ''', etc., sont le module φ modifié suivant les exigences des divers états de la force, des divers modes d'action suivant lesquels elle peut agir, ne serait-il pas possible que φ', φ'', φ''', ne fussent autre chose que φ traité suivant quelqu'une des opérations dont il vient d'être parlé, comme par exemple, $-\varphi$ ou $\frac{\varphi}{m}$ ou $\varphi\sqrt[n]{m}$ ou $\varphi\sqrt{-1}$, etc.? Or, sans nous arrêter, pour le moment, à ce qu'il y a réellement de plausible dans une semblable supposition, admettons qu'elle soit vraie, et voyons à quelles conséquences elle nous conduira.

— *Conséquences qui résulteraient de cette supposition si elle était vraie.*

Il est facile de voir que, dans le premier cas, celui où j'aurai laissé au module modifié les formes φ', φ'', φ'''...., il est évident, dis-je, qu'après avoir écrit algébriquement les conditions de la question, pour que l'expression de ces conditions fût homogène, il faudrait que chacun de ses termes fût composé d'un nombre et d'un des modules φ, φ', φ'', φ'''. Or, dans l'état d'incertitude où je serais sur les relations qui lient entre eux ces divers modules, il me serait impossible d'aller plus avant dans la solution de la question. Mais s'il est reconnu que ces relations, jusqu'à présent ignorées, sont susceptibles d'être algébriquement représentées, ainsi que je viens de le supposer tout à l'heure, alors je remplacerai, dans l'expression des conditions du problème, les modules φ', φ'', φ'''..., par leurs équivalents $-\varphi$, $\frac{\varphi}{m}$, $\varphi\sqrt{-1}$ etc., et, dès ce moment, la solution de la question aura fait un grand pas.

En effet, par une conception de l'esprit justifiée d'ailleurs *à postériori* par le raisonnement, je pourrai transporter, sur le nombre qui accompagne le module φ, les opérations algébriques dont il est frappé dans chaque terme, et dépouiller ensuite pour un instant le nombre de ce module. Par ce moyen, je n'aurai plus qu'une série de nombres liés entre eux par des indices d'opération; j'effectuerai autant que possible ces opérations, d'après les règles algébriques et arithmétiques connues, et je parviendrai ainsi à un résultat que je joindrai au module φ, afin d'avoir l'expression de la quantité cherchée. Si ce résultat numérique est précédé du signe moins, ce sera un indice que le module véritable est $-\varphi$ et non φ, et qu'en conséquence la question ne peut être satisfaite que par l'état négatif de la quantité; si ce résultat numérique est frappé du signe $\sqrt{-1}$, ce sera un indice que le véritable module est $\varphi\sqrt{-1}$, au lieu de φ, et qu'en conséquence la question ne peut être satisfaite que par l'état imaginaire de la quantité, etc.

On voit donc ce qu'il y aurait d'important dans ce fait (qui n'est encore qu'une supposition) que les modules φ, φ', φ''..., qui répondent aux divers états d'une même quantité, reçussent, pour exprimer ces états, des modifications susceptibles d'être exprimées à l'aide de φ et d'expressions algébriques; il serait alors permis de faire abstraction du module φ, de transporter sur les nombres qui l'accompagnent les signes d'opérations dont il est affecté ; d'effectuer ensuite ces opérations sur ces nombres; et puis, en réunissant le résultat obtenu au module φ, on aurait l'expression de la quantité cherchée qui serait négative, fractionnaire irrationnelle, ou imaginaire, suivant que le résultat numérique obtenu se trouverait, à sa dernière limite de réduction, et au moment où on le réunit au module φ, frappé du signe de la soustraction de la division ou d'une extraction de racine impossible.

— *L'étude des nombres sous le point de vue négatif, fractionnaire, irrationnel ou imaginaire, est-elle inutile ?*

D'après les conséquences que nous venons d'énumérer, on voit aisément que, sous l'empire de la précédente supposition, la réponse à la question que nous nous étions adressée devient simple et facile :

Y a-t-il absurdité ou superfluité à étudier les propriétés des nombres sous le point de vue négatif, fractionnaire, irrationnel ou imaginaire ?

Non, sans doute, en restant dans la supposition précédente, il n'y aurait ni absurdité ni superfluité à faire cette étude; il y aurait au contraire grande utilité, puisque cette étude, une fois faite sur les nombres, se trouverait par cela même effectuée sur toutes les quantités dont les divers états peuvent être figurés par les signes négatif, divisif, irrationnel ou imaginaire.

Or, en envisageant sous ce point de vue la question, on voit combien il serait puéril, dans cette branche purement abstraite de la science du calcul, de vouloir expliquer l'intelligence d'aucun résultat; aussi, tout ce qu'on a tenté dans ce genre jusqu'à ce jour est resté sans objet. Faites abstraitement des calculs en vous conformant aux règles posées; combinez de toutes les manières possibles les signes des opérations, les nombres opérateurs, et ceux sur lesquels vous opérez; un jour viendra où les résultats obtenus, et dont le sens est resté incompris, recevront dans les applications aux questions concrètes une interprétation facile; c'est là tout ce que vous pouvez espérer, tout ce qu'il est permis à l'homme de comprendre.

— *Expose des recherches à faire sur les modules.*

Que nous reste-t-il donc à faire maintenant? à passer en revue les propriétés diverses des quantités de chaque espèce, et à voir parmi celles de ces quantités qui sont susceptibles d'être considérées sous divers états comment les modules représentatifs de ces états seront exprimés.

Or, ici, je n'ai pas besoin de me livrer à une étude fort détaillée de ces diverses espèces de quantités. En effet, ce que j'aurai dit et démontré pour une espèce, s'appliquera à toute autre qui, comme celle-là, sera susceptible par sa nature de modifications semblables aux siennes.

A cet égard, et en nous mettant au point de vue où nous permet de nous placer l'état actuel des connaissances mathématiques, le choix de l'espèce de quantité sur lequel nous pratiquerons nos recherches ne saurait être douteux, cette quantité sera la *longueur*; mais on ne perdra pas de vue que ce que nous dirons d'elle et de ses divers états s'appliquera à toute autre quantité susceptible de recevoir tout ou partie des changements d'état dont elle est elle-même douée. Que si, après avoir épuisé l'examen de toutes les modifications dont la longueur est susceptible, et avoir reconnu à quelles formes algébriques elles correspondent, il restait encore quelqu'une de ces formes inexpliquées, il faudrait en conclure, non pas que ces formes sont imaginaires, mais que nous ignorons encore à quelle quantité et à quel état varié de cette quantité elles correspondent.

Que si, au contraire, nous trouvions qu'il y a pour la longueur quelques uns de ses états variés qui réclament pour être exprimés plus encore qu'une forme ordinaire d'opération algébrique, pour lesquels il faut faire usage de nombres traités par des opérarions autres que celles qui constituent les éléments de la science (1), ces nouveaux nombres, ces nouvelles formes, ces nouvelles opérations devraient passer à tout jamais dans la partie abstraite de la science du calcul, non seulement parce qu'elles sont indispensables pour satisfaire à tous les cas que la considération des longueurs peut offrir, mais encore parce qu'il peut y avoir dans la nature d'autres quantités que les longueurs, déjà étudiées ou susceptibles de l'être un jour, qui, possédant des états variés analogues aux siens, auraient besoin, pour être exprimées, de ces formes et de ces opérations nouvelles.

— Les recherches sur les modules doivent être précédées de l'étude des nombres considérés sous le point de vue abstrait.

Les recherches dont je viens de tracer le plan, trouveraient donc ici leur place naturelle, et l'on verra plus tard que les résultats auxquelles elles conduisent confirment en tout point les hypothèses admises dans le présent chapitre. Toutefois, les considérations suivantes me déterminent à ne présenter leur exposition que dans le chapitre troisième.

Puisque les quantités ont toujours pour expression un nombre et un module, ne convient-il pas, si l'on

---

(1) Par exemple, les fonctions qui dépendent de la considération des angles (voir à ce sujet les réflexions remarquables de M. Poinsot, citées à la fin du chapitre 3).

veut être parfaitement fixé sur la représentation des quantités, d'étudier, non seulement ce qui concerne le module, mais encore ce qui peut avoir trait au nombre séparé de ce module, c'est à dire considéré isolément sous le point de vue qu'on est convenu d'appeler arithmétique ou abstrait. Il me semble qu'il est nécessaire, pour arriver à une connaissance parfaite de la représentation dont il s'agit ici, qu'il est indispensable, pour savoir interprêter à coup sûr l'expression d'une quantité, de connaître à fond les deux éléments constitutifs de cette représentation, d'être bien fixé sur le rôle que chacun doit jouer dans l'expression qui est le résultat de leur combinaison, de savoir ce qui pourra ou devra être pratiqué sur chacun d'eux pour réaliser, soit les conditions des problêmes soit leurs solutions. Nous sommes donc conduits, à la suite de ces considérations, à nous livrer à l'étude préalable des nombres considérés seulement comme servant à représenter l'opération de compter, et indépendamment de toute acception concrète.

Au reste, cette étude, dont la nécessité nous fait une loi, est loin d'être aride et fatigante. Nous y trouverons l'occasion de réformer quelques erreurs, de connaître sous son véritable jour la nature des opérations arithmétiques qui constituent les éléments de la science du calcul, et d'asseoir enfin sur des bases solides la distinction qui doit exister entre l'abstrait et le concret. Ces divers objets feront la matière du chapitre suivant.

Quant à l'étude des modules, de leurs modifications, de leur usage dans les sciences mathématiques, nous en ferons l'exposé dans le chapitre troisième.

CHAPITRE II.

DES NOMBRES ET DES OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES, SOUS LE POINT DE VUE ABSTRAIT.

SECTION PREMIÈRE.

De la véritable nature du nombre abstrait.

— *Impossibilité de trouver une définition du nombre négatif, fractionnaire, irrationnel et imaginaire, au point de vue abstrait.*

Lorsque l'on considère les nombres comme n'exprimant autre chose que les résultats qu'on obtient en exécutant l'opération de compter; lorsqu'on veut que les nombres restent ainsi dans le domaine abstrait, et qu'on ne se sert plus d'eux comme moyen de *représenter les quantités*; lorsqu'en un mot on les dépouille de toute espèce de considération qui les rattache, directement ou indirectement, à des idées concrètes, il est alors de l'essence du nombre de ne pouvoir être intelligible pour nous que tout autant qu'il est entier, et, dans ce cas, dire qu'un nombre est négatif, fractionnaire, irrationnel ou imaginaire, c'est exprimer un non sens, puisqu'alors il n'est plus possible à notre entendement de concevoir ce que ce pourrait être que de compter négativement, fractionnairement, irrationnellement ou imaginairement.

Et en effet, si sous ce point de vue on essayait de chercher une définition nette, précise et générale du nombre négatif, fractionnaire, irrationnel ou imaginaire, cette définition, pour être logique, devrait dépendre seulement de la nature et des propriétés du nombre telles que nous venons de les faire connaître; il suit de là qu'il n'existerait aucune des applications qu'on pourrait faire de l'opération de compter aux diverses choses créées dont la compréhension ne fût accessible à notre raison.

Mais rien de plus simple que de faire voir qu'il n'en saurait être ainsi, et cela, parce que dans cette série de choses créées, sur lesquelles nous pouvons établir des supputations, il en existe pour lesquelles nous savons *à priori* que les répéter négativement, fractionnairement, etc., ce serait une absurdité. En effet, remarquons à ce sujet qu'il n'en est pas de même des difficultés que notre esprit rencontre pour établir la généralité d'un principe, et de celles qu'il faut vaincre pour prouver au contraire que cette généralité n'a pas lieu. Dans le premier cas, on doit montrer qu'il n'existe aucune circonstance pour laquelle le principe ne puisse pas se vérifier, ce qui exige quelquefois une série très nombreuse et même infinie de recherches, et dans le second, il est seulement nécessaire d'avoir prouvé, pour une seule circonstance, l'impossibilité d'appliquer ce principe, pour en conclure que celui-ci n'est pas général.

Cela posé, si l'on prétendait avoir trouvé la définition dont je viens de parler, il suffirait, pour montrer que cette assertion est fausse, de faire voir un seul cas dans lequel l'application de cette définition sera rationnellement impossible, un seul cas dans lequel cette application aurait pour objet de rendre compréhensible, ce que notre raison se refuse évidemment et *à priori* à pouvoir considérer comme tel.

En cet état de choses, si l'on se demande ce que peut être une maison répétée moins une fois, une vie répétée moins trois fois, ce que c'est qu'un quart de vote, un dixième d'homme, etc., on se hatera de répondre que tout cela est évidemment inintelligible pour notre raison, et que quels que soient les efforts qu'on voudra tenter, les mots qu'on voudra employer, les raisonnements dont on voudra faire usage, il sera impossible de faire passer ces expressions dans le domaine des choses compréhensibles. Tel serait cependant le résultat de la définition dont il s'agit si on parvenait à la trouver; cela seul suffit donc pour montrer l'impossibilité qu'une pareille définition existe et l'inutilité des tentatives auxquelles on pourrait se livrer pour la découvrir.

— *Ces divers états du nombre abstrait correspondent à des impossibilités.*

D'ailleurs avant qu'on puisse définir ce que devrait être un nombre négatif, fractionnaire, irrationnel ou imaginaire, c'est à dire ce qui doit résulter pour notre esprit, l'impression que doit laisser dans notre entendement l'idée de nombre, telle que nous l'avons fait connaître au début de ce chapitre, jointe à l'idée que renferment ces quatre expressions, il faut tout au moins s'entendre sur la valeur de ces dernières et savoir avant tout ce que doivent signifier ces mots. Or, si en nous livrant à cette recherche, nous trouvons que, tant qu'on ne sort pas du domaine abstrait, chacune de ces expressions ne sert qu'à qualifier des opérations impossibles, des opérations de telle ou de telle autre espèce, il est vrai, mais impraticables dans tous les cas; s'il en est ainsi, dis-je, que pourrai-je voir autre chose dans ces expressions *nombre négatif, nombre fractionnaire*, etc., que l'idée de nombre rendue elle-même impossible par l'addition de ces quatre qualificatifs devenus le symbole de tout autant d'impossibilités.

Et maintenant cherchons de quelle manière ces divers mots ont pu apparaître et s'introduire pour la première fois dans le langage de la science.

— *Véritable définition du nombre abstrait.*

Pour cela il faut avant tout reconnaître quelle doit être l'étendue de la science des nombres, lorsqu'on réserve à cette expression la signification que nous lui avons donnée au commencement de ce chapitre, c'est-à-dire lorsque le nombre ne sert pas à autre chose qu'à exprimer les résultats de l'opération de compter; nous ne pourrons nous bien éclairer sur les questions qui nous occupent, que lorsque nous connaîtrons la véritable portée de la science des nombres sous ce point de vue.

A cet égard je définis les nombres ainsi qu'il suit :

Ce sont les symboles écrits ou parlés à l'aide desquels nous exprimons les diverses perceptions que fait naître dans notre esprit l'idée de *pluralité*. Ce sont des signes destinés à préciser, soit pour nous-mêmes soit pour les autres, à quel degré de l'échelle de pluralité correspond une collection quelconque de choses, soit semblables, soit différentes.

Compter ce sera faire toute opération qui pourra être nécessaire pour déterminer la valeur du nombre à l'aide duquel ces diverses collections devront être désignées.

On me demandera peut-être ce qu'il faut entendre par le mot *pluralité;* à cette question je répondrai que l'idée renfermée dans cette expression est heureusement aussi facile à concevoir que difficile à définir. Il ne faut pas avoir longtemps réfléchi sur le rôle qu'est destiné à remplir une définition, pour reconnaître qu'il est impossible de tout définir. Définir une idée, c'est la faire comprendre à l'aide d'autres idées déjà connues; mais qui ne voit dès lors qu'en parcourant la chaîne des définitions auxquelles une idée quelconque donnera lieu, qui ne voit, dis-je, qu'on remontera nécessairement à un premier chaînon, à une idée primitive, à une idée mère, de laquelle toutes les autres dériveront, et qui, par conséquent, ne pourra plus être conçue, expliquée, définie par le secours d'aucune autre idée, mais par le seul témoignage de nos sens. Or, puisqu'en résumé, définir c'est faire comprendre, que vous importe que vous compreniez à l'aide d'une paraphrase, ou par le moyen de cette conviction intérieure, de ce témoignage irrécusable qui naît de l'application de nos sens et de notre pensée aux diverses créations du monde matériel et du monde moral ? Serez-vous mieux convaincu parce qu'on vous aura dit quelques mots, que lorsque vous aurez appliqué vos facultés physiques et intellectuelles à la connaissance des faits naturels ? Non, sans doute, car cette application n'est pas celle d'un jour : elle commence avec l'homme, elle marche et s'étend avec son existence. Or, comment douter des enseignements qu'une semblable étude constate, et pourquoi ne les accepterions-nous pas comme de véritables définitions ? Ne sommes-nous pas obligés de reconnaître que notre esprit ne les admet point par un vain caprice, mais parce qu'ils sont indispensables pour expliquer comment tous les effets qu'il observe incessamment autour de lui sont réellement tels qu'ils lui apparaissent ?

Ces enseignements, au contraire, ne sont-ils pas plus positifs que nos définitions ordinaires ? car si ces dernières dépendent des combinaisons de notre esprit qui n'est point infaillible, les autres n'ont d'autre base que les lois immuables de la nature elle-même ?

Qu'on me pardonne cette digression sur un sujet qui, s'il ne rentre pas entièrement dans les matières qui font l'objet de cet ouvrage, ne lui est pas cependant complétement étranger au point de vue philosophique sous lequel je l'envisage, et sur lequel d'ailleurs des explications précises ne sont pas à dédaigner.

Revenant maintenant à l'idée que le mot pluralité représente, rien de plus simple que de comprendre comment elle s'introduit en nous. La vue, le toucher, l'ouïe, tous nos sens, en un mot, concourent à nous donner l'avis de l'existenee des diverses choses créées ; nos besoins nous conduisent ensuite à faire un examen approfondi des propriétés inhérentes à l'existence de ces choses: de là l'origine des sciences. Mais sans nous arrêter à l'examen approfondi de la forme, de la couleur, de la nature de chacune des œuvres de la création, nous remarquons comme un premier fait qu'un être quel qu'il soit qui viendra frapper nos sens, n'est pas seul dans la nature : à côté de lui nous en observerons un autre semblable ou différent, puis encore un autre, puis encore un de plus et ainsi de suite, sans que rien limite cette faculté d'admettre sans cesse de nouveaux objets avec les premiers ; or, c'est par cette même faculté qui nous est donnée par la nature de percevoir plus d'une chose à la fois, que nous arrive l'idée de la pluralité, idée qui comme toutes les autres, reçoit ensuite plus ou moins de développement, suivant les dispositions naturelles de l'individu, suivant ses études plus ou moins persévérantes sur les conséquences de cette idée première.

Or, que pourrait-on exiger de plus, au sujet de l'idée de pluralité, que de faire voir, ainsi que nous venons de le pratiquer, à quelle faculté de notre organisation elle se rapporte, et par quels symptômes elle se révèle ? Si cette expérience de tous les jours, de tous les instants ; si ces observations, compagnes inséparables de tous les actes de notre vie, étaient impropres à nous convaincre, quels seraient donc les mots qui seraient capables de détruire une incrédulité que le témoignage sans cesse renouvelé de tous nos sens ne saurait ébranler ?

Si on se reporte maintenant à l'explication précédente du mot nombre, il me paraît évident, qu'en appréciant sainement la condition des choses créées sous le point de vue de la pluralité, en les examinant uniquement sous ce point de vue et dépouillées de toutes les autres propriétés dépendant de leur nature particulière, il me paraît évident, dis-je, que tels doivent être les caractères, la définition, les usages du nombre ; et si, par exemple, on supposait que les objets comptés sont essentiellement différents les uns des autres, que ces objets ne sont nullement susceptibles d'être comparés, c'est à dire qu'ils ne jouissent pas de la propriété qu'un quelconque d'entre eux peut être l'équivalent de tout ou partie d'un autre, dans ce cas, dis-je, il serait impossible d'assigner au nombre d'autres fonctions que celles qui résultent de la définition précédente.

— *Des différents usages du nombre dans l'état actuel de nos idées, et de la nécessité de les distinguer nettement les uns des autres.*

Mais parce que dans certaines circonstances, et précisément dans celles où l'usage des nombres présente les applications les plus importantes, les objets sur lesquels s'effectue l'opération de compter sont tous d'une nature semblable, parce qu'alors il arrive souvent que ces objets sont comparables, c'est à dire qu'il y en a un dans leur espèce à l'aide duquel tous les autres de la même espèce peuvent être conçus et représentés, parce qu'enfin en faisant dans ce cas l'opération de compter, on s'est aperçu que le résultat obtenu pouvait, non seulement donner une idée du *nombre* des choses comptées, mais aussi de la *grandeur* qu'il faudrait donner à une chose de la même espèce pour qu'elle représentât à elle seule toutes les autres prises ensemble, à cause de toutes ces circonstances, dis-je, les hommes ont été induits à attribuer aux nombres d'autres fonctions que celles que nous venons de mentionner, et il est arrivé à la suite de tout cela que le nombre a servi non seulement à *compter des quantités* mais à devenir le *signe représentatif de la grandeur des quantités.*

Or, tandis que la première propriété, celle de compter les quantités, n'exigeait, ni dans les formes primitives données aux nombres, ni dans les règles à l'aide desquelles on les désigne ou on les combine entre eux, aucune modification, aux principes de numération et de calcul mis en usage, on n'a pas tardé à s'apercevoir que ces mêmes principes devenaient insuffisants lorsqu'on voulait se servir des nombres comme représentatifs des grandeurs des quantités; par suite on a fait subir à ces principes des modifications, des extensions (1) plus ou moins importantes, qui ont passé dans l'étude de la science et qui sont à tout jamais restées dans son domaine.

Plus tard, on a remarqué que pour compléter l'étude des quantités, il ne suffisait pas d'avoir trouvé les moyens d'exprimer leurs grandeurs, on a vu qu'une même quantité était susceptible, sans changer de nature, d'être considérée sous différents points de vue, d'être étudiée par rapport à tel ou tel autre mode d'existence, ou d'action; et l'esprit humain s'étant mis en quête pour exprimer encore à l'aide des nombres et des signes d'opération ces divers états, il en est résulté de nouvelles modifications (2) à ces principes primitifs de la science du calcul, et de là a découlé un troisième point de vue sous lequel on a

(1) Par exemple la multiplication et la division des fractions.

(2) C'est à ceci que se rapportent les règles des signes pour les quantités dites *isolées*.

envisagé les nombres, un troisième usage auquel ils ont été employés.

Je montrerai plus loin que ce terme n'a pas été le dernier et que les recherches mathématiques ont donné une plus grande extension encore au rôle que jouent les nombres dans la science du calcul (1); mais quant à présent, ces nouvelles explications ne sont pas nécessaires pour ce que je me propose de dire, et elles exigeraient pour être suffisamment détaillées des développements qui sortiraient du domaine des éléments.

En se bornant donc à mes précédentes remarques, on voit maintenant que dans la partie de la science du calcul que nous désignons sous le nom d'*algèbre*, et telle qu'elle se trouve constituée *en fait* par les écrits des auteurs, les nombres peuvent figurer sous trois points de vue différents.

1° Comme symboles représentatifs de l'opération de compter.

2° Comme signes indicatifs de la grandeur des quantités.

3° Comme caractères de tel ou tel mode d'existence ou d'action des quantités.

Or, dans l'état actuel des choses, on n'a pas assez distingué, je crois, les uns des autres ces divers usages auxquels les nombres sont destinés, et cela tient, à mon avis, à ce que ces usages ne se sont pas

---

(1) Je veux parler ici des calculs différentiel et intégral dans lesquels on passe d'une espèce de quantité à une autre : d'une ligne à un point, d'une courbe à un angle, d'une force à une vitesse, etc.

introduits tout d'un coup dans la science basés sur des théories faites, conçues et méditées à l'avance, mais qu'au contraire ils y ont pris place peu à peu, au gré des divers géomètres qui se sont occupés d'études mathématiques, et suivant l'exigence de chaque question particulière dont on cherchait la solution.

Toutes ces considérations ne formant point en conséquence un corps de doctrine assis sur des bases, non seulement approfondies, mais même bien connues, il n'est pas étonnant qu'il ait pu y avoir confusion entre ces trois objets très distincts auxquels les nombres ont été appliqués, et qu'ainsi on en soit venu à se demander comment il se fait que certaines propriétés des nombres qui ne sont pas fausses dans certains cas, cessent d'être vraies ou intelligibles dans d'autres.

Or, maintenant on aperçoit, à l'aide des réflexions qui précèdent, un moyen naturel d'expliquer toutes ces contradictions, c'est que, comme par le fait, on a, dans la pratique, employé le nombre à trois usages différents, il n'y aura rien de surprenant à ce que telle propriété du nombre qui ressortira de l'un de ces usages, ne puisse plus lui être appliquée lorsque son usage, cessant d'être le même, sera remplacé par un des deux autres.

Ainsi, dans toutes les discussions qui se sont élevées à ce sujet, on a eu à la fois tort et raison, mais on n'a pu s'entendre faute d'avoir remarqué que dans la pratique on a peu à peu dérogé à la définition primitive du nombre et qu'on a appelé de ce nom une chose très différente de la première. Pour éviter donc toute confusion, on doit, dans l'état actuel des choses, distinguer trois espèces de nombres, de sorte qu'avant de répondre à toute question générale qui pourra être faite sur les propriétés des nombres, il faudra avant tout s'expliquer et s'entendre sur l'espèce particulière du nombre dont on veut parler.

— *Examen des définitions du mot nombre, données par les auteurs d'éléments.*

Je m'étais d'abord proposé de passer en revue les diverses définitions du *nombre* données par les auteurs d'éléments et de montrer successivement ce que chacune d'elles offre d'incomplet; mais, lorsque j'ai voulu passer à l'exécution de ce projet, je n'ai pas tardé à reconnaître que je tomberais dans une série de répétitions qui seraient à la fois fatigantes et inutiles; en effet, dans l'examen auquel je me suis livré de ces définitions diverses, j'ai reconnu que, sauf quelques légères différences de rédaction, elles sont toutes semblables au fond. Est-ce parce que les auteurs se sont mutuellement copiés les uns les autres? ou cela tient-il à ce que cette définition est la seule qui existe dans notre système d'enseignement? On est fort tenté d'admettre cette dernière supposition, lorsqu'on remarque qu'il n'y a pas un seul des auteurs dont je parle qui, avant de définir le nombre, ne définisse la quantité : d'où il faudrait conclure qu'ils n'attribuent de prime abord d'autre fonction au nombre que celle de représenter les grandeurs des quantités. Que si dans la suite ils traitent avec les nombres quelques questions indépendantes de la considération des grandeurs, c'est comme par un effet du hasard et sans qu'ils se doutent eux-mêmes que, dans cette occurrence, ils font du nombre un usage autre que celui qui est indiqué par leur définition.

A cet égard, et dans le silence absolu qu'ont gardé tous ces auteurs sur la distinction qu'il me semblait si nécessaire d'établir entre le nombre servant à compter et le nombre destiné à représenter les quantités, entre le nombre qui compte l'ordre et la situation des choses et le nombre qui mesure les grandeurs, j'ai longtemps hésité, je me suis tenu en défiance de moi-même, je me suis souvent demandé si je ne m'abandonnais pas à quelque illusion. Mais enfin, en réfléchissant de nouveau et plus profondément sur ce sujet, mes doutes ont successivement disparu, mes irrésolutions se sont fixées, il m'a semblé que j'étais dans le chemin de la vérité. Depuis cette époque, j'ai pu me convaincre que cette distinction qui m'avait paru nécessaire, indispensable, avait été nettement formulée il y a déjà plusieurs années par un géomètre de notre époque, et qu'elle avait été sanctionnée dans la phrase suivante, avec toute l'autorité des titres scientifiques les moins contestés :

« Nous avons repris et continué toutes ces recher-

» ches qui sont liées entre elles de la manière la plus » intime, et qui ont en général pour objet *la théorie » de l'ordre et de la situation des choses, sans aucune » considération de la grandeur*, théorie neuve et pro- » fonde dont les éléments nous sont à peine connus, » mais qu'on doit regarder comme le premier fon- » dement de l'algèbre et la source naturelle des » principales propriétés des nombres. » (Mémoire de M. Poinsot, tome XIV des Mémoires de l'Institut.)

Depuis cette époque, M. Poinsot a été plus explicite encore; dans une lecture faite à l'Académie des Sciences le 10 mai 1841, il s'exprime en ces termes:

« On définit ordinairement les mathématiques la » science des *grandeurs* en général, ou la science des » *quantités*, c'est à dire au fond la science des *rap-* » *ports;* c'est la définition la plus générale qu'on ait » donnée jusqu'ici du mot mathématiques. Mais, » quoique cette définition paraisse embrasser la » science tout entière, il me semble qu'elle n'en » donne encore une idée ni assez profonde ni assez » étendue; les mathématiques ne sont pas seulement » la science des rapports, je veux dire que l'esprit » n'y a pas uniquement en vue la *proportion* ou la » *mesure*, il faut encore considérer le *nombre* en lui- » même, l'ordre et la situation des choses, sans au- » cune idée de leurs rapports, ni des distances plus » ou moins grandes qui les séparent. Si l'on parcourt

» les différentes parties des mathématiques, on y trouve
» partout ces deux objets de nos spéculations. »

Or, n'y a-t-il pas lieu de s'étonner que depuis vingt-trois ans que cette vérité a été proclamée, il ne se soit pas trouvé un auteur d'éléments qui ait songé à consacrer ce qu'elle a d'utile, sinon dans ses divers détails, du moins dans sa base, dans la définition du mot nombre ?

Loin de là, ce mot est toujours resté ce qu'il était auparavant, sa définition a toujours eu pour objet la grandeur des quantités. A la vérité, ces auteurs distinguent ou croient du moins distinguer deux espèces de nombres, le nombre *concret* et le nombre *abstrait*, le premier servant, disent-ils, à représenter les quantités dont le nom, l'espèce, sont connus ; le second remplissant le même but, mais pour toutes les espèces, sans désignation particulière d'aucune ; singulier degré d'abstraction que celui qui consiste à mettre de côté un nom, une appellation ; mais ainsi ils restent donc toujours impuissants devant ce degré d'abstraction, autrement important, autrement profond, qui, éloignant des objets comptés toutes leurs propriétés physiques, mécaniques, géométriques, matérielles en un mot, les considére sous le rapport de leur ordre, de leur situation et de leur nombre, et, comme le dit le géomètre que je viens de citer, *sans aucune considération de la grandeur.*

Tel est l'état de confusion dans lequel la science mathématique se trouve de nos jours, au début même de son exposition (1); le mécanisme du calcul, la manipulation des chiffres, des lettres et des signes, voilà seulement ce qu'on enseigne aux élèves; et en fait d'analyse, ce n'est point celle de la philosophie, mais uniquement celle des procédés algébriques qu'on rencontre dans nos ouvrages d'enseignement.

SECTION II.

Etudes sur l'Addition et la Soustraction.

— *De l'introduction du positif et du négatif en arithmétique.*

Après avoir montré comment il est nécessaire, dans l'état actuel de la science, de considérer plusieurs espèces de nombres, revenons maintenant à la définition primitive que nous avons donnée de ce mot, et supposons que le nombre est seulement destiné à représenter l'opération de compter; ce sera donc toujours *un nombre de fois.*

Cherchons dans ce cas s'il y a des nombres négatifs, et tâchons d'expliquer ce que pourraient être de pareils nombres.

Dans le langage ordinaire, nous sommes convenus d'employer les mots oui et non, affirmation et néga-

---

(1) A ce sujet je ne puis m'empêcher de citer la définition suivante que je trouve dans un ouvrage d'algèbre, adopté par l'université, et qui, en 1828 était parvenu à sa 5e édition : on appelle *nombre absolu* un nombre tel qu'on le considère en arithmétique.

tion, affirmatif et négatif, pour exprimer deux idées complètement *opposées* l'une à l'autre, et telles que ce que l'une a pu faire naître dans notre esprit se trouve complètement *détruit* par l'autre; en sorte que l'existence simultanée de ces deux idées, leur réunion immédiate laisse nos facultés intellectuelles dans le même état de *nullité* que si elles restaient inertes, et que notre pensée, après cette double opération, se retrouve la même qu'auparavant.

Or, comme en arithmétique l'addition et la soustraction sont deux opérations inverses l'une de l'autre, dans le sens même où nous l'entendons ici, puisque à l'aide de la seconde vous *annullez* dans un nombre ce que vous lui avez ajouté par le moyen de la première, l'usage a pu s'introduire d'attacher l'idée du *oui* et du *non*, de l'affirmatif et du négatif, aux signes représentatifs de ces deux opérations. Seulement il est arrivé ici ce qui se présente en maintes rencontres lorsqu'on fait des applications analogues, c'est que l'une de ces deux expressions n'a pas été conservée, et qu'on l'a remplacée par une autre équivalente; de sorte qu'au lieu de dire affirmatif, on a dit positif.

Ainsi le signe de l'addition désigné d'abord par *plus*, a été appelé signe *positif*, et le signe de la soustraction désigné d'abord par *moins* a été appelé signe *négatif*.

Telle est, si je ne me trompe, l'introduction la plus naturelle des mots positif et négatif dans le langage de la science; c'est ainsi qu'on peut supposer que, pour la première fois, les idées que ces mots représentent ont été combinées avec celle du nombre. Mais, qu'on le remarque bien, ce n'est pas le nombre que ces mots sont venus frapper et modifier, ce n'est pas à l'idée de nombre qu'ils ont ajouté un qualificatif, c'est à des opérations faites ou à faire sur les nombres qu'ils s'appliquent, c'est à désigner tel ou tel autre usage qu'on fera du nombre, qu'ils sont uniquement destinés, et quant au nombre en lui-même, ils ne disent sur sa nature rien de plus, rien de moins que ce qu'on en savait déjà.

— *Les mots* POSITIF *et* NÉGATIF *ne peuvent avoir qu'une valeur de relation.*

Remarquons en second lieu que, par eux-mêmes et considérés isolément, les mots positif et négatif n'ont aucune valeur absolue, et ce n'est que par la comparaison qu'on peut établir de l'un à l'autre qu'ils prennent, soit dans le langage ordinaire, soit dans le langage arithmétique, une signification. En effet, puisque le *oui* et le *non* sont destinés à représenter des idées opposées l'une à l'autre, dans le sens où nous l'avons expliqué ci-dessus, tout ce qui en résultera, c'est qu'après avoir caractérisé l'une de ces idées par l'affirmative, il faudra appliquer à l'autre la négative; mais comme rien n'oblige à faire choix pour cela de l'une plutôt que de l'autre de ces deux idées inverses, il s'ensuivra que, suivant la volonté du calculateur, ce qui a été considéré comme positif par les uns pourra être considéré comme négatif par les autres, et toutefois, cette diversité dans les choix n'amènera aucune confusion, pourvu qu'on soit bien prévenu à l'avance sur la nature de celle des deux idées, des deux opérations inverses l'une de l'autre, qu'on est convenu d'appeler positive.

Au reste, c'est ce qu'on comprend aisément pour peu qu'on réfléchisse qu'il n'est pas de question qui ne puisse être posée de deux manières, et de telle sorte que, pour exprimer le même fait, il faudra, suivant la tournure donnée à la phrase chargée de faire la demande, répondre tantôt oui et tantôt non, bien que dans les deux cas la chose qu'on veut énoncer reste invariable. Par exemple, s'il s'agit d'exprimer l'idée que l'action de marcher doit cesser, vous répondrez *non*, lorsqu'on vous demandera s'il faut continuer de marcher, vous répondrez *oui* lorsqu'on demandera s'il faut s'arrêter.

En résumé, nous voyons jusqu'à présent : Que les mots positif et négatif ne peuvent avoir de signification absolue :

Qu'ils ont seulement une signification relative qui sert en général à exprimer l'opposition dans deux idées inverses l'une de l'autre,

Et qu'à ce titre ils n'ont pu raisonnablement s'introduire dans la science arithmétique que pour désigner des opérations opposées, comme le sont l'addition et la soustraction.

Poursuivons maintenant ces explications et voyons comment, des opérations, les idées de positif et négatif ont pu passer aux nombres.

— *Des nombres abstraits positifs et négatifs.*

Or, puisque l'on est convenu de dire que le signe de l'addition est positif, et que celui de la soustraction est négatif, il semble que je ne serai entraîné à commettre aucune erreur, si je dis que tout nombre qui doit être ajouté est *positif*, et que tout nombre qui doit être retranché est *négatif*. Il est évident, en effet, que loin d'entraîner des méprises, cette convention pourra, au contraire, être de quelque utilité dans la pratique, et en la mettant en œuvre, on ne fait d'ailleurs qu'énoncer une chose déjà stipulée d'avance, puisque tout nombre à ajouter doit être frappé du signe de l'addition que l'on est convenu d'appeler positif, et tout nombre à retrancher doit être marqué du signe de la soustraction qui est appelé négatif.

Ainsi, pourvu qu'explicitement ou implicitement, il soit entendu qu'on aura une addition ou une soustraction à faire, il est facile de concevoir jusqu'à présent ce que peut être un nombre abstrait positif ou négatif.

Mais en serait-il de même si toute considération d'addition ou de soustraction était supprimée, et s'il fallait, indépendamment de toute idée sur ces opérations, concevoir encore les nombres positifs ou négatifs? Non, sans doute, et pour s'en rendre compte, il n'y a qu'à supposer que dans chaque question on exécute ces opérations, sinon en entier, du moins autant que possible. Par ce moyen, on se débarrasse des considérations qui se rattachent à ces opérations, on pratique à leur sujet tout ce que la question a demandé; or, lorsque, cela fait, on se trouve encore en présence d'un nombre qui doit être réputé négatif, et pour lequel cependant il n'y a plus de soustraction ni à faire ni à concevoir, on reconnaît que l'existence d'un pareil nombre est un véritable mystère, et qu'il est impossible de faire un pas de plus pour donner de cette existence une explication rationnelle.

Ainsi lorsque je trouverai écrit — 14, j'entendrai par là que le nombre 14 doit être soustrait d'un autre nombre; si, d'après la question proposée, ce dernier nombre est 19, le résultat de la soustraction sera 5. Si le nombre duquel il faut retrancher 14 est lui-même égal à 14, le résultat de la soustraction sera zéro. Mais toutes les fois que le nombre auquel il faudra ôter 14 sera plus petit que 14, alors l'opération deviendra incompréhensible et inexécutable. Supposons, par exemple, que ce nombre est égal à 9; pour que ce que l'on demande fût complètement exécuté, il faudrait que l'on pût au nombre 9 ôter le nombre 14; or pour cela que faut-il faire? il faut chercher quel est le degré de l'échelle de pluralité auquel on parvient en ôtant du degré 9 de cette échelle, le degré 14. Mais, si un pareil degré existait, il est évident qu'en l'ajoutant à 14 on devrait reproduire 9, conséquence absurde, parce que 9 est plus petit que 14 et qu'un degré quelconque, augmenté d'un autre degré, doit toujours donner un degré plus élevé que le premier.

Il m'est donc impossible d'ôter 14 à 9; tout ce que je pourrais faire, ce serait de décomposer 14 en deux parties, 9 et 5, et ce serait bien la même chose d'ôter 14 à 9, ou bien d'ôter à ce dernier 9 et 5, condition dont je donnerais l'empreinte à 9 et à 5, en les écrivant d'après nos précédentes conventions, — 9 et — 5; or, maintenant je puis bien à 9 ôter la première des deux parties en lesquelles j'ai décomposé 14, j'aurai alors 9 — 9, qui donne zéro pour résultat; mais je n'aurai fait ainsi qu'une partie de ce qu'on demandait, car le problème consistait à soustraire 14 tout entier à 9 et non point une partie seulement de 14. Si donc je voulais que le problème fût complètement résolu, il faudrait maintenant ôter encore 5, opération représentée par — 5; mais à quoi faut-il l'ôter? ce n'est plus à 9, puisqu'on a déjà fait disparaître le 9 par la première soustraction, et qu'ensuite il ne reste plus rien; c'est donc à zéro. Or, qu'est-ce qu'ôter 5 à zéro? ou ce qui est la même chose, qu'est-ce que 0 — 5 ou — 5?

Tout ceci devient maintenant incompréhensible, inexécutable, et l'on voit que la seule manière de pouvoir expliquer par des mots ce que c'est que ce — 5, comment du moins son existence arithmétique se révèle, n'est autre chose, comme nous l'avions déjà annoncé, que l'expression d'une impossibilité.

Il est donc superflu, dans cette partie purement abstraite de la science du calcul, de pousser plus avant la perpétration du nombre précédé du signe négatif; ce que nous avons dit de ce dernier mot est tout ce qu'il est permis d'en dire en arithmétique, et la dernière conséquence à laquelle nous arrivons, c'est que tout nombre négatif, c'est à dire tout nombre précédé du signe *moins*, lorsqu'il n'y a plus de soustraction dans laquelle il doit être mis en jeu, et lorsque ce nombre est abstrait à la manière dont nous l'avons expliqué, demeure pour notre intelligence l'indice d'un non sens, d'une impossibilité.

Or, ce que je viens de dire du nombre négatif, je le dirai tout aussi bien du nombre positif, c'est à dire du nombre à ajouter; car que peut signifier $+ 5$ considéré *isolément*, indépendamment de toute idée d'addition; il ne faut pas se rejeter sur cette considération qu'une addition est toujours possible, quel que soit le nombre à ajouter, et qu'en conséquence on pourra toujours savoir ce que signifie $+ 5$; sans doute une addition est toujours possible quand on a les éléments dont elle se compose, mais quand il faut faire une addition et qu'on n'a qu'un seul élément de cette opération, il est complètement impossible de savoir ce qui doit advenir. Or $+ 5$ signifie d'une part que 5 devra être ajouté, d'autre part vous dites que vous considérez + 5 isolément sans aucune idée d'addition ; vous vous mettez donc en contradiction avec vous-même en écrivant par le signe + et énonçant par le mot *plus* ou *positif* que le nombre 5 est soumis à une certaine opération, et disant ensuite que vous voulez le considérer *isolément*, indépendamment de toute opération ; et voilà pourquoi mon esprit se refuse tout aussi bien à comprendre ce que peut être un nombre positif qui ne doit pas être ajouté, qu'un nombre négatif qui ne doit pas ou ne peut pas être soustrait.

Ainsi, on le voit, dans la partie de la science du calcul où l'on considère les nombres comme représentant uniquement les divers degrés de l'échelle de pluralité, un nombre négatif n'est autre chose qu'un nombre précédé du signe de la soustraction, qu'un nombre qu'il faut soustraire; or, il arrivera deux cas où la soustraction sera possible, et alors l'existence, la manifestation d'un nombre négatif dans une question n'implique pas contradiction, ou bien la soustraction sera impossible, et, dans ce cas, cette contradiction, cette impossibilité, deviendront manifestes, parce qu'après avoir effectué la soustraction autant que possible, après avoir fait, à cet égard, tout ce que le problème disait de faire, lorsqu'en un mot il n'y aura plus de soustraction possible d'après l'état de la question, il faudrait cependant, pour rendre compréhensible le résultat obtenu, qu'on pût encore soustraire.

— *Examen de cette assertion, que tout nombre abstrait est essentiellement positif.*

Je n'abandonnerai pas ce sujet, sans faire une remarque sur cette assertion contenue dans beaucoup d'ouvrages, que tout nombre abstrait est essentiellement entier et positif; les dernières observations que je viens de faire sont déjà de nature à prouver que la dernière partie de cette assertion est au moins fort incertaine ; mais examinons-la avec plus de détails.

Nul doute que tout nombre abstrait ne soit entier, et tant qu'on n'aura pas expliqué ce que c'est qu'une demie, un tiers, un quart de fois, il ne sera pas possible de comprendre ce que pourrait être un nombre abstrait fractionnaire.

Mais je ne vois point en aucune manière que tout nombre abstrait soit essentiellement positif, et je ne sais pourquoi on voudrait prétendre qu'il doit être plutôt positif que négatif. Et d'abord ne perdons pas de vue que les expressions *positif* et *négatif* n'ont qu'une valeur de relation l'une par rapport à l'autre, que l'on s'en sert seulement pour caractériser l'opposition qui existe entre deux idées, deux opérations, deux faits contradictoires s'entredétruisant mutuellement. A ce compte, comme je l'ai déjà fait observer, chacune de ces idées, chacune de ces deux opérations peut être arbitrairement appelée positive ou négative, pourvu qu'on réserve pour leurs inverses celle des deux expressions dont on n'aura pas fait d'abord usage. Cela posé, on ne saurait comprendre comment on voudrait faire exception pour les nombres, et pourquoi on dirait qu'ils sont plutôt positifs que négatifs. Par eux-mêmes, les nombres ne sont pas plus l'un que l'autre, et pour peu qu'on réfléchisse à la manière dont on a été conduit à appliquer aux nombres les qualifications de positif et de négatif, on se convaincra facilement de cette vérité.

En effet, nombre positif ne peut signifier autre chose que nombre précédé du signe de l'addition, c'est à dire nombre à ajouter, et nombre négatif voudra dire nombre à retrancher. Or, n'est-il pas évident que si j'étais convenu d'appeler négatif le signe de l'addition, et positif celui de la soustraction, comme j'en étais, certes, bien le maître; n'est-il pas évident, dis-je, qu'il aurait fallu dire alors que tout nombre abstrait est essentiellement négatif? et voilà l'assertion précédente changée du tout au tout. Mais ceci ne concerne que la forme; quant au fond nous voyons que, si en se servant du mot positif les écrivains dont je parle ont voulu réellement dire nombre à ajouter, ils se sont tout aussi fort trompés dans ce cas que dans le premier. Et pourquoi donc le nombre abstrait est-il plus susceptible d'être ajouté que retranché? Où donc se trouve écrit ce privilège de l'addition sur la soustraction? Pourquoi les nombres seraient-ils admis d'emblée aux honneurs de l'une de ces opérations, et frappés d'un signe de réprobation par rapport à l'autre? Et non certes il n'en est point ainsi, le nombre est à la fois appelé à fonctionner comme additif et comme soustractif. Est-ce parce que vous trouvez l'emploi du nombre dans le second cas comme plus borné que dans le premier, que vous êtes plus disposé à l'appeler positif? Si telle est votre pensée, dites-le; nous serons prévenus ainsi du motif qui vous dirige; mais, dans ce cas, écartez cette expression *essentiellement* positif, qui dit plus, à coup sûr, que ce que vous êtes autorisé à dire.

— *L'usage du nombre négatif n'est pas plus borné que celui du nombre positif.*

D'ailleurs, prenez garde de ne pas tomber dans une nouvelle erreur, en disant que l'emploi du nombre agissant comme soustractif, est plus borné que celui du nombre considéré sous le point de vue additif.

Si une soustraction impossible n'était pas une véritable réponse faite à une question proposée, il en pourrait être ainsi; mais une pareille soustraction est tout aussi bien une réponse à une question que peut l'être le résultat d'une addition ou d'une soustraction effectuées. Dans un cas, nous apprenons que la question proposée n'est pas possible; dans l'autre, qu'elle l'est. Vous ajouterez peut-être que lorsque la question est possible, vous savez de plus ce qu'il faut faire pour en connaître la solution; je réponds, à cet égard, que, sous ce rapport, le premier cas n'est pas plus stérile que le second, et que la soustraction impossible, tout en vous apprenant l'impossibilité du problème, vous montre en même temps ce qu'il faudrait faire sur les données, pour que ces données cessassent d'exprimer une impossibilité. Vous savez ainsi de combien la question s'écarte de la limite du possible, comme avant vous saviez ce qu'il fallait faire de l'autre côté de cette limite, dans le champ du possible, pour la résoudre. Ce n'est point ici le lieu de développer plus longuement cette assertion, mais il ne faut pas avoir pénétré bien avant dans l'étude de l'algèbre pour être convaincu de sa vérité; or, à l'aide de cette remarque, il devient fort embarrassant de se prononcer sur la question de savoir si l'usage des nombres négatifs ou à soustraire est plus borné que celui des nombres positifs ou à ajouter. Quant à moi, je ne sais si je dois m'étonner davantage quand je trouve dans la science les moyens de résoudre une question, ou bien quand la science m'indique qu'une question est impossible, et que, redressant mes erreurs ou éclairant mon ignorance sur l'état de cette question, elle me montre d'elle-même comment je dois réformer son énoncé pour faire disparaître ces impossibilités.

— *Réponse à quelques sophismes.*

Que si épuisant toutes les arguties d'une école qui n'est pas dans le vrai, on voulait se jeter sur un nouveau terrain et dire que tout nombre ajouté avec zéro ne cesse pas d'être lui-même, qu'ainsi on peut toujours considérer un nombre comme étant le résultat de son addition avec zéro, ou du moins comme pouvant être ajouté à zéro; si on concluait de là qu'il y a toujours une addition qui peut être ou faite ou conçue pour tout nombre quelconque, et que dès lors on est suffisamment autorisé à dire que le nombre est essentiellement positif, je répondrais qu'en admettant que ce soit faire une addition que d'ajouter zéro à un nombre, cette propriété du nombre n'est pas tellement caractéristique, tellement inhérente à sa nature, tellement distinctive de son essence, qu'on puisse dire, même en se plaçant sur ce terrain, que le nombre est essentiellement positif; tous les objets créés, au contraire, tous les êtres possibles, soit dans le monde physique, soit dans le monde moral, jouissent de cette propriété, comme le nombre, que si on ne leur ajoute rien, ils ne cessent pas d'être eux-mêmes. Ce n'est donc pas une propriété essentielle seulement au nombre, c'est une propriété commune à tout, applicable à tout; et d'ailleurs sortons de ces pitoyables arguties sous lesquelles nous nous réfugions, lorsque ce n'est pas dans le fond des choses que nous cherchons à voir clair, et que nous nous arrêtons seulement à la forme. Est-ce bien réellement faire une addition que d'ajouter zéro? est-ce faire quelque chose que de ne rien ajouter? Dans le langage arithmétique tel que nous l'étudions ici, zéro ne peut être que l'indice du néant; et ne voit-on pas alors que faire l'addition de rien, c'est au fond ne rien faire du tout; qu'on ne joue en raisonnant ainsi que sur les termes, et que ce qui en résulte seulement, c'est l'habitude d'étudier la science par des sophismes, et de n'en développer les principes que par des moyens complètement étrangers à son essence.

Enfin, si on disait que tous les nombres peuvent être considérés comme formés par le premier d'entre eux, appelé *unité*, ajouté successivement à lui-même, et que, sous ce point de vue, tous les nombres étant les résultats d'additions peuvent être appelés positifs, je répondrais d'abord que le premier tort de cette interprétation est de déplacer la question. Car le nombre positif n'est pas celui qui résulte d'une addition faite, mais celui qui doit être mis en usage dans une addition à faire, et certes il n'en faudrait pas davantage pour montrer qu'eu égard à l'objet qui nous occupe une semblable interprétation n'a aucune portée; mais comme les erreurs commises sur ces particularités de la science des nombres ont été fort répétées, j'ajouterai quelques mots sur cette formation des nombres. Je ne conteste pas qu'elle soit possible, et même commode, mais je crois qu'elle est loin de devoir être considérée comme *essentielle*, c'est à dire qu'elle n'est pas telle que sans elle les nombres ne puissent pas être compris.

En effet, si pour cette formation l'unité et l'addition constituent un moyen commode, ce n'est point un moyen dont on ne puisse se passer, cette considération facilite sans doute la perception des nombres, mais elle n'est pas indispensable pour faire naître dans notre esprit l'idée de pluralité qui, ce me semble, est préexistante à celle d'addition ou de soustraction. Ne pourrais-je pas, pour former les nombres compris entre les deux limites 1 et A, dire qu'ils dérivent tous de A par la soustraction successive de l'unité ? La seule différence entre ces deux procédés, c'est qu'au lieu de prendre la limite la plus petite, je prends la plus grande. Je ne disconviens pas que la vôtre soit plus commode ; mais ce qu'il s'agit d'établir, c'est qu'elle est *essentielle*, fondée sur la nature, dépendant de l'essence du nombre. Or, votre point de départ est-il plus essentiel, plus naturel que le mien ? Le nombre 1 est-il plus dans la nature que le nombre A ? On serait fort en peine, je crois, d'établir un pareil principe, et la pluralité me semble au contraire répandue partout à profusion. N'y a-t-il donc qu'une seule étoile dans le ciel et un seul grain de sable dans l'Océan ? un arbre se compose-t-il d'une seule feuille et la mer d'une seule goutte d'eau.

On le voit donc, quelques efforts que l'on fasse, on arrive toujours à cette conclusion, qu'il n'est pas possible d'appuyer sur une base solide cette assertion que le nombre est essentiellement positif.

— *Résumé.*

En résumé, il me paraît résulter de la discussion à laquelle je viens de me livrer : Que, sous le point de vue où j'ai annoncé en commençant que je considérais les nombres, il n'est pas possible d'admettre, dans le langage arithmétique proprement dit, ou pour mieux dire abstrait, que les mots positif ou négatif puissent s'appliquer à autre chose qu'aux deux opérations inverses, l'addition et la soustraction ;

Que par les expressions , nombre positif, nombre négatif, on ne peut entendre autre chose que nombre à ajouter, nombre à retrancher ;

Qu'il y a contradiction à vouloir comprendre isolément et indépendamment de toute opération d'addition ou de soustraction ce que peut être un nombre positif ou négatif, puisque dès l'instant que vous joignez les mots positif ou négatif au mot nombre, ou bien les signes + et — aux caractères qui servent à représenter les nombres, vous exprimez par cela même que vous ne considérez plus ceux-ci isolément, mais au contraire comme devant être mis en jeu dans une addition ou une soustraction ;

Que le signe — qui précède un nombre signale nécessairement un cas d'impossibilité, mais seulement alors que toutes les opérations à faire, d'après l'énoncé de la question, sont consommées ;

Enfin, que la seule chose qui résulte pour les nombres de leur essence, c'est qu'ils sont entiers ; mais qu'il n'est pas plus logique de dire qu'ils sont essentiellement positifs, que de vouloir leur refuser la propriété de représenter jamais quelque chose de possible lorsqu'ils sont négatifs : que sous ce point de vue, dans chaque question particulière, il y aura lieu de se livrer à un examen préalable, pour savoir quelle est celle de ces deux qualifications qu'il faut attribuer aux nombres qui figureront dans cette question.

SECTION III.

Etudes sur la Multiplication et sur la Division.

— *Préambule.*

On vient de lire, dans la section précédente, les considérations auxquelles nous a conduit l'examen attentif des deux premières opérations de l'arithmétique, nous voyons que l'addition tant qu'elle figurera seule dans les opérations à faire pour résoudre une question, sera un indice que cette question est possible.

Que si au contraire une question n'est pas possible, cette circonstance sera révélée par la présence, dans les calculs, d'une soustraction impossible à effectuer dans son entier, par la permanence après tout calcul, d'un nombre affecté du signe — d'un nombre négatif.

Or, nous allons voir que pour les autres groupes d'opérations, il en sera encore de même et que les divers caractères d'impossibilité que peuvent revêtir encore les problèmes arithmétiques seront révélés, comme le précédent, par une de ces opérations devenue impossible.

—*De la multiplication et de la nature de ses facteurs.* Si je suppose qu'on ajoute plusieurs nombres l'un à l'autre et si ces nombres sont tous égaux entre eux, je tomberai sur un cas particulier de l'addition qu'on est convenu de désigner par un nom particulier et qu'on considère comme une opération nouvelle; mais en réalité il n'y a ici de nouveau que le nom et le procédé employé pour obtenir le résultat; quant au fond, c'est toujours une addition qu'on exécute. Dans le cas dont je parle, cette addition reçoit le nom de *multiplication;* le nombre ajouté s'appelle *multiplicande*, *le nombre de fois* que le multiplicande a été ajouté s'appelle *multiplicateur,* et le résultat obtenu, au lieu de conserver le nom de somme, s'appelle *produit;* on dit encore du multiplicande et du multiplicateur que chacun d'eux est *facteur* du produit.

Or, comme dans l'addition, considérée sous son point de vue général, les nombres ajoutés sont et ne peuvent toujours être qu'en nombre entier, il s'ensuit que dans la multiplication, le multiplicateur sera constamment et nécessairement entier ; il ne représentera jamais qu'un certain nombre de fois, ce sera un nombre abstrait tel que nous l'avons défini en commençant. On voit donc qu'en remontant à la véritable origine de la multiplication, il est impossible de comprendre et d'admettre que le multiplicateur soit autre chose qu'entier, il est également impossible de comprendre et d'admettre que ce nombre puisse être concret, c'est à dire qu'il représente une quantité quelle qu'elle soit ; ce nombre, en un mot, est et ne peut être qu'un nombre de fois.

Quant au multiplicande, rien ne s'oppose à ce qu'il soit concret ; en effet on peut se proposer d'ajouter ensemble plusieurs quantités, et comme, dans la science du calcul, les quantités sont représentées par des nombres, on peut supposer que le multiplicande est un de ces nombres destinés à représenter les quantités. On voit qu'ici j'admets comme démontrée la proposition que les quantités peuvent être représentées par des nombres ; si je devais m'appesantir plus longuement sur cette matière, ce serait ici le cas d'entrer dans tous les développements qu'exige la théorie de cette représentation, c'est ce que j'ai fait dans le troisième chapitre de cet ouvrage ; mais pour le moment et pour ce que j'ai en vue, je puis supposer que le multiplicande est abstrait comme le multiplicateur, et que ces deux nombres, dans ce qui va suivre, ne sont jamais autre chose que certains degrés de l'échelle de pluralité.

Il suit évidemment de ces considérations que, dans la supposition où nous nous plaçons que le multiplicande est abstrait et par conséquent entier (le multiplicateur devant toujours l'être d'après sa nature), le produit de toute multiplication ne peut être qu'un nombre entier. Mais la proposition inverse n'est pas vraie, et tout nombre entier n'est pas le produit d'une multiplication, du moins si l'on admet que l'unité ne multiplie pas, c'est à dire que ce n'est pas répéter que de prendre une fois; à ce sujet, qu'on me permette de présenter quelques observations.

— *L'expression* N × 1 *n'est pas une multiplication.*

Il semblera peut-être puéril de se livrer à une discussion sérieuse au sujet d'une semblable question, et il en serait réellement ainsi si, avant tout, on avait cherché à introduire dans l'exposition de la science des explications puisées dans le domaine de la véritable philosophie; mais en cette occasion, comme en beaucoup d'autres, on s'est trop souvent éloigné de cette voie raisonnable pour entrer dans le champ des arguties scholastiques. Sans doute, dans l'esprit des hommes sensés, la plupart des idées que je combats ici n'ont pu prendre racine; mais pour quelques intelligences qui savent mettre du naturel et de la précision dans leurs raisonnements, combien n'en trouve-t-on pas qui semblent prendre à cœur de rechercher dans leurs démonstrations, la bizarrerie des moyens, la subtilité des motifs? C'est malheureusement ce qu'on rencontre dans la plupart des ouvrages d'enseignement : or, comme en composant cet écrit, il m'a paru propre par sa nature à faire sentir la nécessité d'une réforme dans le plan des livres élémentaires, on me pardonnera d'avoir insisté sur quelques détails qui contribueront peut-être à rendre plus facile à l'avenir l'étude des sciences mathématiques.

Je reviens à mon sujet.

Et d'abord, si l'on cherche à se rendre compte du sens que l'on doit attacher aux mots *multiplier*, *répéter*, on ne tardera pas à reconnaître que la seule définition raisonnable que l'on puisse leur attribuer, c'est qu'ils entraînent l'idée de pluralité quant à la chose multipliée ou répétée, et qu'en conséquence cette idée n'est pas satisfaite tant que cette chose n'est pas prise au moins deux fois. Sous ce point de vue, les analystes ont parfaitement raison tant au fond que dans la forme lorsqu'ils disent que l'unité ne multiplie pas, et par conséquent ils pèchent et se servent d'une expression vicieuse quand ils disent multiplier par *un*; car, en ce qui concerne cet objet, ce n'est plus faire une multiplication que de multiplier par un, puisque l'idée de multiplicité, de pluralité, mise en avant par le mot *multiplier*, se trouve à l'instant détruite par celle de l'*unité*, et qu'il y a entre elles incompatibilité complète.

Au reste, nous avons en ceci un contrôle irrécusable et d'une application générale, soit pour cette difficulté, soit pour toute autre relative à la multiplication. C'est de remonter à l'origine de cette opération qui, comme nous l'avons dit, est l'addition. Rappelons-nous donc que la multiplication est une addition dans laquelle tous les nombres ajoutés sont égaux entre eux.

Il résulte forcément de cette définition que toutes les fois qu'une prétendue multiplication ne se résoudra pas, en définitive, en une addition, on aura eu tort de qualifier cette opération du titre de multiplication ; or, pour qu'il y ait addition, il faut indispensablement que deux nombres au moins, soit égaux soit inégaux, aient été mis en jeu. Donc, prendre un nombre seul, prendre un nombre une fois, ce n'est pas faire une addition, et par conséquent ce ne sera pas davantage faire une multiplication. Ainsi, de quelque côté qu'on examine la question, on en revient toujours à reconnaître que N étant un nombre quelconque, on doit refuser le nom de multiplication à toute opération écrite sous la forme $N \times 1$.

Ce que nous disons ici du multiplicateur 1, a la plus grande analogie avec ce que nous avons déjà dit de l'addition d'un nombre avec zéro, et nous avons en effet constaté que l'on doit refuser le nom d'addition à toute opération écrite sous la forme $N + 0$, puisque cette forme indique en réalité qu'il ne faut rien ajouter. Or, cette analogie nous conduit à une remarque que je ne crois pas devoir passer sous silence; c'est que les deux expressions $N \times 1$ et $N + 0$ sont réellement égales entre elles, puisque chacune exprime qu'il faut prendre le nombre N et ne plus lui rien faire du tout.

Nous pourrons donc écrire :

$$N \times 1 = N + 0.$$

Or, cette relation prouve une fois encore que $N \times 1$ ne saurait être une multiplication ; car, si malgré tout ce que j'ai déjà dit pour prouver que $N + 0$ n'est pas une addition, on persistait à vouloir trouver dans cette expression le caractère de cette opération, du moins devrait-on convenir que les nombres ajoutés N et 0 ne sont pas égaux entre eux et que par conséquent cette expression, si on veut qu'elle soit une addition, ne peut être à coup sûr une multiplication.

Ainsi les deux formes $N \times 1$, $N + 0$ ne représentent point d'opération à exécuter sur N ; ce sont, au contraire, deux indices qui se manifesteront dans le calcul toutes les fois que, d'après l'état d'une question, il n'y aura rien à faire sur le nombre N pour la résoudre.

D'après ces remarques, on voit qu'on a agi philosophiquement, en réservant la dénomination de nombres premiers à tous ceux qui ne sont pas le produit de la multiplication de deux autres, en effet, tous les nombres, excepté ceux-là, peuvent être considérés comme dérivant d'autres nombres, comme une conséquence de l'existence de ces autres nombres, comme secondaires par rapport à eux, condition qui n'existe pas pour ceux qui sont premiers.

— *L'expression* $N \times 0$ *n'est pas une multiplication.*

Un cas non moins remarquable que celui que nous venons de traiter, est celui dans lequel le multiplicateur est zéro.

Examinons donc ce que peut signifier $N \times 0$.

Il est évident que cela indique que le nombre N ne doit pas être pris du tout et qu'en conséquence la seule signification raisonnable que puisse avoir l'expression ci-dessus est zéro.

Mais cela peut-il être considéré comme une multiplication? non, sans doute, car si déjà prendre une chose une fois n'est pas multiplier, à plus forte raison ne pas prendre du tout cette chose ne le sera-t-il pas.

Au reste d'après la remarque précédemment faite, pour que $N \times 0$ fût une multiplication, il faudrait qu'il existât une addition dans laquelle entrerait N et dont la somme fût nulle, ce qui est évidemment impossible; de toutes les opérations que nous avons examinées jusqu'à présent, la soustraction suivante $N - N$ serait la seule qui, ne mettant en usage que N, donnerait le même résultat que $N \times 0$, de sorte que nous pouvons écrire :

$$N \times 0 = N - N.$$

Ce sont les deux indices qui se présenteront dans le calcul toutes les fois que, pour résoudre une question qui présuppose l'existence du nombre N, il faudra au contraire anéantir ce même nombre, pour obtenir la solution de cette question.

A l'aide de ces observations, on ne perdra pas de vue que si, conformément à l'usage adopté, on continue de dire que $N \times 1$ et $N \times 0$ sont des multiplications, ce ne peut être que par une extension qu'on s'est permise, et qui ne se rattache qu'à la forme sous laquelle ces deux expressions se présentent; mais qu'au fond il n'est pas exact d'en agir ainsi, et que par conséquent toute loi générale démontrée pour la multiplication ne pourra pas être appliquée sans réserve à ces deux expressions.

— *Fausse application de la loi de l'invariabilité du produit.*

Cependant, si on se reporte à cette propriété dont jouit le produit de toute multiplication, que ce produit ne change pas quand on change l'ordre des facteurs, on serait tenté de raisonner ainsi qu'il suit :

Les expressions $N \times 1$ et $N \times 0$, en vertu de la loi citée, sont la même chose que $1 \times N$ et $0 \times N$.

Or $1 \times N$ exprime que 1 est répété N fois, c'est donc une véritable addition dans laquelle les nombres ajoutés sont tous égaux entre eux; donc $1 \times N$ est une multiplication. De même $0 \times N$ exprime que 0 est répété N fois, c'est donc encore une addition dans laquelle les nombres ajoutés sont tous égaux entre eux, d'où il suit que $0 \times N$ est une multiplication. Dans l'un et dans l'autre cas (si du moins on persiste à admettre que $0 + 0 + 0 + \ldots$ puisse être réputé une addition), les conséquences du raisonnement sont justes, mais que prouvent ces conséquences? il faut bien le remarquer, elles prouvent seulement que $1 \times N$ et $0 \times N$ sont des multiplications, et non pas que $N \times 1$ et $N \times 0$ le sont à leur tour.

En effet, la loi dont on fait usage n'est applicable que lorsque, en changeant l'ordre des deux facteurs, l'opération indiquée reste toujours une multiplication, et que l'on ne sait pas d'avance que l'une de ces opérations cesse d'en être une. Or c'est ce qui n'arrive pas pour $N \times 1$ et $N \times 0$, puisque alors nous avons établi *à priori* que ces deux opérations ne sauraient, d'après la définition adoptée, être une multiplication, de sorte que l'on applique la loi de l'invariabilité du produit à un cas pour lequel il est évident qu'elle n'est pas applicable.

Cela ne veut pas dire que $N \times 1$ n'est pas égal à $1 \times N$, et que $N \times 0$ ne l'est pas à $0 \times N$, il est au contraire facile de prouver à priori que ces expressions sont égales entre elles. Mais, de ce que cette égalité existe, il ne s'ensuit pas que les opérations qu'il faut faire pour les réaliser l'une et l'autre sont semblables, et c'est là simplement ce que j'avais en vue de prouver.

Cette remarque montre, d'une part, combien dans la science du calcul, il importe de discuter tous les cas et d'examiner toutes les exceptions, sous peine de tomber dans le faux; d'autre part, elle indique, et cette observation avait, je crois, échappé jusqu'à présent, que les démonstrations, tant anciennes que futures, de l'invariabilité du produit, lorsqu'on change l'ordre des facteurs, doivent se trouver en défaut, dès l'instant que l'un des facteurs est inférieur à 2.

— *Doutes et difficultés introduites dans la science du calcul au sujet de la définition de la multiplication.*

La définition que j'ai donnée de la multiplication n'a pas été adoptée par tous les auteurs d'éléments, ce n'est pas qu'elle ne soit très claire et très simple, et qu'on ne puisse en déduire toutes les propriétés de cette opération; c'est même la seule qui soit réellement admissible au point de vue où nous nous sommes placé, c'est à dire lorsqu'on suppose qu'on ne doit opérer que sur des nombres abstraits, sur des nombres qui, directement ou indirectement, ne se rattachent à aucune idée concrète, ce qui, selon moi, exclut de prime abord les nombres fractionnaires, du moins sous le point de vue théorique.

Cette différence dans la manière de procéder tient à ce que ces auteurs ont, à mon avis, donné au domaine abstrait beaucoup plus d'extension qu'il n'en a réellement; ils ont considéré les nombres qu'on appelle fractionnaires comme faisant partie de ce domaine, tandis que je prouverai que l'existence de pareils nombres est incompréhensible si on ne la rattache pas à des idées concrètes, que lorsque, pour la première fois, cette existence se révèle dans le calcul des nombres, elle est l'indice d'une impossibilité, et cela parce que l'unité, tant qu'elle ne sert qu'à compter, tant qu'elle ne représente pas une quantité, en un mot tant qu'elle n'est pas concrète, est de sa nature indivisible, et qu'il n'est pas alors possible à notre esprit de comprendre ce que pourrait être une fraction quelconque de cette unité de numération.

Or, l'étude des fractions ayant été ainsi jointe par les géomètres à celle des nombres, on n'a pas tardé à s'apercevoir que ce qu'on a par la suite appelé multiplication des fractions ne pouvait être renfermé dans la définition que j'ai donnée de cette opération, et on s'est évertué à trouver une définition qui pût convenir à tous les cas. A-t-on réellement atteint le but qu'on s'était proposé? et en agissant ainsi n'a-t-on pas surchargé la science d'une facheuse complication? c'est ce que je vais maintenant examiner.

« La multiplication d'un nombre par un autre, » disent ces auteurs, est une opération par laquelle » on compose un troisième nombre avec le premier, » comme le second est composé avec l'unité. »

Pour peu que l'on examine avec soin cette définition, on ne tardera pas, je crois, à reconnaître qu'elle ne fait autre chose qu'indiquer comment devra se trouver composé le produit, mais elle est certainement dépouillée du véritable caractère d'une bonne définition, puisque non seulement elle ne dit rien, mais même elle ne fait rien pressentir des moyens qu'il faudra employer pour obtenir ce produit.

Car, si vous voulez qu'avec un nombre j'en compose un autre, et s'il faut que cette composition soit analogue à celle d'un troisième nombre avec l'unité, il faut tout au moins que vous nous fassiez connaître avec tous les détails convenables comment les nombres se composent avec l'unité. Or, dans le domaine purement abstrait, les nombres étant toujours entiers peuvent être considérés comme formés par l'addition successive de l'unité ; vous ajouterez donc, pour former le produit, autant de fois le multiplicande qu'il a fallu ajouter de fois l'unité pour former le multiplicateur, et alors vous retombez littéralement sur la définition que j'ai donnée de la multiplication, avec cette seule différence qu'au mot *composer* j'ai substitué celui *contenir*, ce qui est infiniment plus clair et ce qui conduit naturellement à la série des opérations qu'il faut faire pour exécuter l'opération définie.

Ainsi, sous le point de vue abstrait, tel que je le considère, et en s'arrêtant aux limites que j'ai tracées, la définition de la multiplication donnée par les auteurs dont je parle, est certainement moins claire et moins explicative que celle que j'ai fait connaître.

Mais, dira-t-on si sous ce point de vue, cette définition paraît en effet entachée de quelques inconvénients, de combien ne l'emporte-t-elle pas sur l'autre par sa généralité ?

Cette proposition peut paraître vraie au premier abord , et surtout pour ceux qui ayant déjà étudié la science, ont pu, depuis longtemps, méditer sur la nature de chaque opération; pour ceux-là, dis-je, cette nouvelle définition de la multiplication offre un résumé court et facile de tout ce qui, jusqu'à ce jour, a reçu le nom de multiplication. Mais pour l'élève qui commence, pour celui qui veut étudier pour la première fois la science du calcul, pour celui qui, ne sachant rien, a besoin de marcher progressivement dans cette étude, cette généralité qui, à vos yeux, fait le mérite de votre définition, va devenir une source d'incertitudes, d'erreurs, peut-être même une cause insurmontable de dégoût.

Si, en effet, il paraît rationnel à tous les esprits d'établir une séparation tranchée, dans la science qui nous occupe, entre ce qui est abstrait et ce qui est concret, si, comme je le prouverai bientôt, le mélange de ces deux branches de la science en a obscurci l'intelligence et souvent arrêté les progrès; on restera convaincu que, quant à présent, c'est à dire au commencement des études, la définition que je critique doit être rejetée. Je viens de montrer en effet que dans le domaine abstrait, tel que je l'entends et que je l'ai défini, elle dit moins bien que la définition que j'ai présentée.

Si nous sortons de ce domaine, c'est à dire du cas où les nombres sont entiers, et si nous avons à opérer sur des nombres fractionnaires, il faudra que nous commencions par expliquer comment un nombre fractionnaire se compose avec l'unité; or, la question étant mise sur ce terrain, vous reconnaîtrez que vous ne pouvez plus faire un pas sans sortir de la voie où vous vous proposiez de rester, sans recourir aux considérations concrètes; alors, cette unité que vous avez considérée jusqu'à présent, cette unité que j'appelle unité de numération, qui est le premier degré de l'échelle de pluralité, cette unité, dis-je, devient insuffisante, et vous êtes obligé de donner cette dénomination à toutes *les quantités* susceptibles d'être représentées par des nombres; or, de cette représentation des quantités par les nombres, qu'en dites-vous en arithmétique ? de cette représentation qui est la base de toutes les applications de la science du calcul, qui exerce sa portée sur tout, et sans laquelle l'étude des quantités n'existe plus, qu'en faites-vous connaître au début de la science ? à peine quelques éléments, et le plus souvent rien.

Et cependant, quelle immense différence n'existe-t-il pas entre l'unité de numération, et l'unité représentative d'une quantité, entre l'unité invariable et indivisible, et celle dont la valeur varie au choix de chacun, dont rien ne limite la grandeur ou la petitesse. Or, sans cette importante distinction, votre définition n'est plus qu'un chaos; et quand pourrez vous en faire comprendre toute la portée, si ce n'est après que vous aurez suffisamment parlé et des nombres abstraits et des nombres concrets, c'est à dire après que votre initiation dans les secrets de la science aura été si non consommée, du moins entreprise et réalisée en partie ; cette définition peut donc, comme je le disais tout à l'heure, être acceptée comme un résumé utile pour l'homme qui sait; mais elle doit être rejetée comme un obstacle pour celui qui veut apprendre.

Et d'ailleurs, en l'acceptant de prime abord, dans quel dédale ne jette-t-elle pas relativement à la nature du multiplicateur? En effet, en remontant à la véritable source de la multiplication, nous avons reconnu que le multiplicateur ne pouvait être autre chose qu'un certain *nombre de fois*, qu'il était impossible de supposer qu'il représentât autre chose qu'un degré de l'échelle de pluralité, que le multiplicateur, en un mot, ne pouvait être concret.

Or, si ce multiplicateur est une fraction, cette fraction ne sera intelligible que tout autant que l'unité à laquelle on la rapporte représentera une quantité, la composition de cette fraction sera donc concrète comme l'unité de laquelle elle dérive; voilà donc une multiplication dont le multiplicateur n'est plus abstrait (1).

---

(1) Voici comment s'exprime à ce sujet M. Lacroix dans ses *Essais sur l'Enseignement*, 1805, p. 260 et 261.

« Une difficulté sur laquelle la plupart des auteurs ont glissé trop » légèrement, c'est l'application aux nombres fractionnaires, des » définitions de la multiplication et de la division relatives aux nom- » bres entiers. Il y a ici un passage très remarquable d'une accep- » tion donnée aux mots multiplier et diviser, d'après le cas le plus » simple de l'idée qu'ils expriment, à une acception générale

Et vous pensez que de semblables contradictions ne méritent pas d'être profondément étudiées et soigneusement éclaircies; vous pensez que quelques lignes suffisent pour lever le voile qui recouvre tant d'obscurités ? Quant à moi, plus je réfléchis sur ces matières, moins je m'étonne que tant d'intelligences soient rebelles pour les études mathématiques; qui sait si ce n'est pas parmi les esprits qui se sont rebutés après quelques essais, qu'on doit chercher les plus logiques d'entre tous? Et quel est celui qui oserait dire que parmi ceux qui ont cultivé avec succès la science, il s'en trouverait un seul qui, pendant un temps assez long, n'a pas été obligé d'admettre comme des vérités prouvées ce qui n'était encore pour lui que *verba magistri?* Qui sait enfin si, jusqu'à la fin de leur carrière, nos plus grands géomètres n'ont pas été plutôt persuadés que convaincus de la vérité de certains principes passés en force de chose jugée.

Tant que dans la science on continuera d'affirmer que tout nombre abstrait est essentiellement positif,

---

» dans laquelle on enveloppe des cas nouveaux qui ne se lient aux
» premiers que par de simples analogies, *l'indication de ces analo-*
» *gies semble même exiger la considération des nombres concrets.....*
» On ne saurait, sans se rendre coupable d'inexactitude dans la
» marche du raisonnement, passer sous silence une extension d'idées
» aussi importante. *Elle exige même une nouvelle définition des*
» *termes* qui puisse s'y prêter, et dont les conséquences mènent aux
» modifications que doit subir le calcul, pour s'appliquer *à des cas*
» *qui semblent entièrement opposés.*

Tant qu'on ne proclamera pas en principe que tout nombre fractionnaire est concret,

Tant que l'on continuera de faire journellement usage sans en donner l'explication de quantités ou d'expressions imaginaires, vous ne serez jamais en droit de donner tort à ceux qui refusent de comprendre, dans son ensemble, votre exposé des principes de la science.

Après cette digression, qui, pour un instant, nous a reporté malgré nous sur la considération des nombres fractionnaires, rentrons dans l'objet spécial qui nous occupe et continuons nos observations sur la multiplication et la division des nombres entiers.

— *Résumé des observations relatives à la multiplication.*

En faisant le résumé des observations que nous avons présentées sur la nature de la multiplication, nous trouvons :

Que, comme il est de l'essence de la plus grande partie des choses créées de pouvoir être répétées, nous pouvons dès à présent prévoir que, dans l'application qu'on pourra faire de la multiplication, le multiplicande pourra être concret et fractionnaire.

Mais que, dans tous les cas, le multiplicateur sera abstrait et entier.

Que lorsque les deux facteurs sont supposés abstraits et entiers, le produit est toujours un nombre entier.

Mais que tout nombre entier n'est pas un produit, et nous avons ajouté que tout nombre entier qui n'est pas produit de deux autres différents de lui et de l'unité, est appelé premier.

— *De l'opération inverse de la multiplication et des deux questions distinctes auxquelles elle donne naissance.*

Cela posé, après avoir ainsi considéré les nombres comme servant à en composer d'autres par voie de multiplication, on peut se proposer de résoudre le problème inverse, c'est à dire étant donné un nombre, reconnaître s'il est ou s'il n'est pas le produit de deux autres, et, dans le cas où la réponse est affirmative, déterminer la valeur de ces deux autres nombres; c'est dans cette question que prend naissance l'opération appelée division.

Mais, en abordant cette opération nouvelle sous ce point de vue, elle prend un degré de généralité qui la fait sortir du cadre que je me suis tracé; elle elle ne soulève rien moins que l'importante question de la détermination des nombres premiers qui, jusqu'à ce jour, n'a été résolue que par tâtonnements et par l'exécution d'une série de divisions.

Mais, pour faire disparaître de cette question cette généralité dont je ne veux pas m'occuper pour le moment, je supposerai que l'on sait à l'avance que le nombre proposé est réellement le produit de la multiplication de deux autres nombres, que l'un de ces deux nombres est connu et qu'il s'agit d'obtenir l'autre.

Je ne m'arrêterai pas ici sur les procédés décrits en arithmétique pour résoudre cette question, car ce n'est pas sous le point de vue pratique que je considère, dans cet ouvrage, les opérations du calcul, c'est plutôt dans leur essence et relativement à leur véritable signification théorique que j'en fais l'étude. Or, lorsque les deux facteurs sont abstraits, à la manière dont je l'ai expliqué, comme dans ce cas le produit ne change pas, quel qu'ait été l'ordre des facteurs, il s'ensuit que ce sera toujours la même nature d'opération à laquelle il faudra se livrer, soit pour rechercher le multiplicande à l'aide du produit et du multiplicateur, soit pour déterminer ce dernier à l'aidedu multiplicande et du produit. Numériquement parlant, l'une de ces deux divisions n'a pas un caractère distinct de l'autre, il y a identité parfaite entre leur objet, les moyens employés et les résultats.

Mais si l'on suppose que la chose répétée, le multiplicande, au lieu d'être un nombre abstrait, exprime un être concret, une *quantité*, alors il va sans dire que le produit, qui n'est autre chose que cette même quantité répétée plusieurs fois, sera un être concret de la même espèce que le multiplicande. Donc, si l'on donne le produit et le multiplicande, et s'il s'agit d'obtenir le multiplicateur, le résultat à trouver sera *un nombre abstrait*, *un nombre de fois*, et si au contraire on donne le produit et le multiplicateur, la chose cherchée sera *un nombre concret*, une *quantité* de même nature que le produit.

Ainsi, tandis que dans le cas précédent, le nombre cherché était toujours abstrait, dans celui-ci il sera tantôt abstrait, tantôt concret; d'où il suit que, toutes les fois que l'on entrera dans le domaine concret, il faudra distinguer deux classes de divisions, suivant qu'il s'agira de déterminer à l'aide du produit et de l'un des facteurs, soit le multiplicande, soit le multiplicateur.

Ceci montre que si, sous le point de vue *numérique*, la loi de l'invariabilité du produit eu égard à l'ordre des facteurs doit être admise comme vraie, il n'en est plus de même dans les applications de la multiplication aux questions concrètes, alors pour n'apporter aucun trouble à l'état des questions proposées, pour ne pas changer l'intelligence de ces questions et ne pas se tromper soi-même sur celle qu'il faut attribuer aux réponses obtenues, on peut bien intervertir les facteurs quant *à leur valeur numérique*; mais on ne saurait en agir de même relativement à leur nature qui n'est pas transmutable d'un facteur à l'autre.

Après cette courte digression sur le domaine concret, rentrons dans l'objet spécial de ce chapitre et revenons à la division des nombres abstraits.

— *Au point de vue abstrait les expressions fractionnaires sont le symbole d'une impossibilité.*

Comme il n'est pas donné à l'homme de saisir dans leur ensemble, et pour ainsi dire à première vue, les rapports que les choses peuvent avoir entre elles, il s'ensuit que parmi toutes les questions qui peuvent se présenter au sujet de la détermination de ces rapports, il y en aura dont la solution sera possible, quoiqu'elle ne paraisse pas évidente; d'autres au contraire pourront au premier abord ne pas paraître impossibles, mais à la suite d'un examen plus prolongé et plus approfondi on reconnaîtra qu'elles sont insolubles.

Par exemple, si on demande de déterminer numériquement le rapport qui existe entre les nombres 277 et 1, ou, en d'autres termes, combien de fois 277 contient exactement 21, on ne saura pas, au premier abord, si la question proposée est possible ou non; mais si on vient à reconnaître que 277 est un nombre premier, on en conclura tout de suite que la question proposée est impossible, et que ni 21, ni tout autre nombre, ne pourra être contenu un nombre exact de fois dans 277.

Cependant si je veux exécuter, du moins autant que possible, l'opération proposée, je trouverai qu'en divisant 277 par 21, j'ai pour quotient 13, et pour reste 4.

Or, si je disais que le quotient demandé ou le rapport entre 277 et 21 est représenté par 13, je commettrais une erreur, puisque 13 ne serait quotient d'une division par 21 que pour le nombre 273, et qu'on demande ce même quotient pour le nombre 277.

Pour compléter la solution de la question proposée, qui consiste à savoir combien de fois 277 contient 21, on pourrait raisonner comme il suit :

Puisque 277 est la même chose que 273 + 4, il faudra que je divise 273 + 4 par 21, ce qui s'écrit ainsi $\frac{273+4}{21}$. Rien de plus facile que d'exécuter la première partie de cette opération, et nous avons déjà dit qu'on trouve 13 pour résultat; reste donc, pour achever tout ce qu'on a à faire, à diviser 4 par 21, ou à effectuer l'opération représentée par $\frac{4}{21}$, qu'on énonce en disant quatre vingt-unièmes. Or, tous les nombres dont il s'agit ici étant abstraits, c'est à dire étant des degrés de l'échelle de pluralité, il faudrait pour exécuter l'opération représentée par $\frac{4}{21}$, trouver un de ces degrés qui, répété vingt et une fois, donnât pour résultat le degré 4. Mais il est évident qu'en réduisant le problème à ces termes, la chose qu'on cherche est impossible à trouver, puisque 21 étant déjà plus grand que 4, à plus forte raison le produit 21 par un autre nombre le sera-t-il aussi.

Il est donc vrai, comme nous l'avons énoncé au commencement de ce chapitre, que lorsque *dans la partie abstraite de la science du calcul* l'existence des nombres dits fractionnaires se révèle pour la première fois, elle ne se manifeste pas autrement que comme une véritable impossibilité, elle est l'indice que la question qui y a conduit est insoluble, du moins sous le point de vue abstrait, et qu'il n'y a aucune opération de calcul et aucun nombre qui puisse y satisfaire, *dans le sens où elle a été proposée.*

Mais, qu'on le remarque bien, je n'étends pas cette impossibilité au delà du domaine abstrait; car tout ce qui vient d'être dit ne prouve rien de plus qu'abstraitement parlant, et sous l'empire des conditions de problème telles qu'elles ont été posées, il est impossible de comprendre l'existence d'un nombre fractionnaire.

SECTION IV.

Etudes sur l'élévation aux puissances et l'extraction des racines.

— *De l'élévation aux puissances et de l'extraction des racines.*

La nature des développements qui précèdent, et les détails avec lesquels nous les avons traités, nous permettront d'exposer avec plus de brièveté ce qui est relatif à l'élévation aux puissances et à l'extraction des racines.

On sait qu'on donne le nom d'*élévation aux puissances* à une série de multiplications dans lesquelles tous les facteurs sont égaux; le facteur employé est le nombre qu'on élève à la puissance, et on dit de lui qu'il en est la *racine ;* le nombre de fois que ce facteur est mis en usage, s'appelle le *degré* de la puissance, enfin la *puissance* est le résultat ou produit définitif obtenu.

L'opération inverse à celle que nous venons de définir a reçu le nom d'*extraction des racines*, elle consiste à revenir d'une puissance dont on connaît le degré, au facteur ou à la racine qui a servi à la former.

Mais il est évident que cette question n'est pas la seule qu'on puisse s'adresser lorsque l'on veut remonter des puissances à leur racine ; ne peut-on pas, en effet, supposer que la puissance et la racine sont connues, et qu'il s'agit de déterminer le degré? Ainsi, dans ce cas, comme dans celui de la soustraction et de la division, il faut reconnaître que deux genres différents de problème peuvent être proposés lorsqu'on veut revenir, à l'aide de l'opération inverse, aux éléments de l'opération directe.

Mais entre ces trois cas la similitude n'est pas parfaite, et en passant de l'un à l'autre, on trouve des différences qui sont trop importantes pour être passées sous silence.

— *Remarque sur la nature de la double question qui se présente lorsque à l'aide de chaque opération inverse on veut revenir aux éléments de l'opération directe qui lui correspond.*

En général, trois nombres quelconques étant représentés par a, b, c, cherchons par quel genre de relation ils seront liés, pour que le troisième c soit le résultat des deux premiers traités par les diverses opérations arithmétiques dont nous venons de parler.

Le cas le plus simple est celui de l'addition ; il est évident que, dans ce cas, la relation cherchée doit être $a + b = c$. Si maintenant on veut revenir de c à l'un des deux nombres a et b, on aura deux cas à examiner, et les valeurs cherchées seront données par les formules $a = c - b$, $b = c - a$.

Mais il est évident que dans chacun de ces deux cas, la nature de l'opération à faire pour obtenir soit a soit b sera identiquement la même, et, sauf les chiffres qui varieront, les procédés de calcul seront complètement semblables dans les deux circonstances.

J'ajouterai même au sujet de cette parfaite similitude, qu'elle s'observera toujours, soit que les nombres ajoutés soient purement abstraits, soit qu'on les suppose concrets, et cela parce que dans l'addition, les nombres mis en jeu et le résultat obtenu sont constamment de la même espèce, les uns par rapport aux autres ; car il n'est pas possible d'admettre dans cette opération comme dans les suivantes, que la nature de quelques uns de ces nombres est abstraite en même temps que celle des nombres restant serait concrète.

Ainsi, les deux problèmes auxquels conduit l'opération inverse de l'addition, jouissent, dans leur essence, d'une identité parfaite, non seulement quant au procédé de calcul qu'il faut employer pour les résoudre, mais encore quant au sens dans lequel il faut interpréter la nature des résultats obtenus dans les deux cas.

Passons à la multiplication; pour cette opération, la relation cherchée sera $a\,b = c$. Si dans ce cas, comme dans le précédent, on veut remonter de c à l'un des deux nombres a et b, on aura encore deux cas à examiner, et les valeurs cherchées seront données par les formules $a = \frac{c}{b}$, $b = \frac{c}{a}$. Or, on sait qu'encore ici la nature de l'opération à faire pour obtenir soit a, soit b, sera la même pour ces deux nombres, que la valeur des chiffres variera seule, mais que le procédé restera uniforme.

Mais ici il n'est plus possible d'ajouter, comme nous l'avons fait pour l'addition, que cette similitude s'étendra également au sens dans lequel il faudra interpréter la nature des résultats obtenus dans les deux cas; il continuera bien d'en être ainsi, tant qu'on restera dans le domaine abstrait, alors dans chacun de ces cas la nature du résultat sera abstraite et identique; mais, lorsqu'on passera au domaine concret, cette identité d'interprétation disparaîtra, puisque la nature du résultat sera concrète, s'il s'agit de déterminer le multiplicande, et abstraite toutes les fois qu'on aura recherché la valeur du multiplicateur.

Voilà donc, entre ces deux premières opérations de l'arithmétique et leurs inverses, une différence qu'il est important de ne pas perdre de vue, et l'on peut remarquer en outre que, tandis que dans les deux problèmes inverses de l'addition, l'identité dans les procédés numériques est évidente d'elle-même, il n'en est plus ainsi pour la multiplication, car ce n'est qu'en vertu de la loi de l'invariabilité du produit que cette identité est démontrée, et cette loi est certainement bien loin d'être évidente par elle-même. Ainsi, à mesure que l'on avance davantage dans l'étude des opérations arithmétiques, on reconnaît non seulement que les propositions sont moins évidentes, mais que des dissemblances remarquables commencent à se manifester. Or, ces observations se confirment et deviennent encore plus dignes d'attention, lorsqu'on passe à l'opération qui nous reste à examiner.

En effet, dans l'élévation aux puissances, la relation entre a, b et c, est de la forme $a^b = c$.

Or, si je veux avoir a à l'aide de b et de c, je l'obtiendrai avec la formule $a = \sqrt[b]{c}$, mais ici il ne serait plus vrai de dire, comme dans les cas précédents, que la nature des procédés arithmétiques qui donnent a à l'aide de c et b est la même que celle des procédés qu'il faut employer pour avoir b avec c et a; de sorte qu'il serait complètement faux d'écrire, en suivant l'analogie, $b = \sqrt[a]{c}$; on sait en effet que dans ce cas, la valeur de b est égale au rapport des deux logarithmes de c et de a, et qu'ainsi c'est de la formule $b = \frac{\log. c}{\log. a}$ qu'il faut alors faire usage.

Cette uniformité dans les procédés numériques, qui s'était maintenue pour l'addition et la multiplication, disparaît donc complètement pour l'élévation aux puissances. Quant à la nature des résultats, au sens dans lequel il faut les interpréter, il est évident que, tant qu'on reste dans le domaine abstrait, les résultats seront abstraits, soit qu'on veuille obtenir a à l'aide de c et de b, soit qu'on cherche b par le moyen de c et de a. Mais lorsqu'on passe au domaine concret, il arrive ici quelque chose d'analogue à ce que nous avons dit pour la multiplication, c'est que, le degré de la puissance ne pouvant évidemment être qu'abstrait, la nature du résultat sera concrète lorsqu'on voudra déterminer a, et cette nature sera toujours abstraite, quand il s'agira de la détermination de b.

— *Remarque importante sur le cas où on suppose que le nombre qu'il faut élever à une puissance est concret.*

Au reste, le cas dont nous nous occupons, lorsque a est concret, présente une véritable difficulté et exige, pour être parfaitement compris, des explications très détaillées dont, à mon grand étonnement, je n'ai trouvé aucune trace dans les ouvrages d'arithmétique et d'algèbre. Il serait impossible, tant que nous n'aurons pas exposé la théorie de la représentation des quantités par les nombres et les signes algébriques, de comprendre dans leur ensemble les explications que j'annonce ici, mais je peux en quelques mots en faire comprendre la portée.

Si a est un nombre abstrait, les multiplications successives de a par a, de a^2 par a, de a^3 par a, se feront sans aucune difficulté, parce que la nature du multiplicateur, qui doit être toujours abstraite, ne cessera pas de conserver cette propriété; mais si on dit que a est concret, il est impossible, sans une explication préalable, que je sache ce que ce peut être que de faire usage d'un multiplicateur concret. Dans la multiplication ordinaire, les deux facteurs étant différents et indépendants l'un de l'autre, rien ne s'oppose à ce que l'un d'eux soit concret, car cela n'entraîne rien de forcé relativement à la nature de l'autre qu'on peut toujours supposer abstrait; mais, dans l'élévation aux puissances, il n'en est point ainsi, tous les facteurs étant les mêmes, dire que l'un d'eux est concret, c'est sinon affirmer, du moins faire supposer qu'ils le sont tous, et par conséquent il restera à ce sujet des doutes fondés dans notre esprit; il sera donc indispensable de présenter des explications préalables sur ce cas particulier, et de faire connaître dans quel sens on entend qu'il faudra alors pratiquer l'opération des puissances. En ce moment je ne m'étendrai pas davantage sur ce sujet, dont j'ai seulement voulu faire pressentir l'importance et que je reprendrai plus tard pour le traiter avec tous les détails nécessaires. J'ai seulement besoin d'ajouter à cet égard qu'en présentant les observations que j'annonce sur cet objet, je ne négligerai pas d'examiner en détail ce qui se rapporte à la multiplicité des racines d'une même puissance, j'analyserai la cause première à laquelle il faut attribuer cette multiplicité, et j'en déduirai immédiatement une explication aussi simple que satisfaisante de la présence des n racines dans une équation du $n^{\text{ième}}$ degré.

— *Au point de vue abstrait les expressions irrationnelles sont le symbole d'une impossibilité.*

Revenons maintenant aux deux problèmes auxquels donne lieu l'opération inverse de la formation des puissances, et nous y trouverons encore, comme dans les opérations précédentes, de nouveaux cas d'impossibilité.

Il suffit d'exécuter les diverses puissances des premiers nombres de la suite naturelle, pour reconnaître que celles qui sont du même degré sont séparées par des intervalles d'autant plus grands que leurs racines le sont elles-mêmes davantage, et que le degré est plus élevé. C'est là un résultat d'expérience qu'il est très facile de constater.

Cela posé, supposons qu'il s'agit du degré m et appelons N et N' les deux puissances de deux nombres consécutifs quelconques n et $n+1$.

Si N'' est un nombre compris entre N et N', et si on demande quelle est la racine du degré m de N'', il est évident qu'il ne sera pas possible de répondre à cette question. Il faudrait, en effet, pour la résoudre, trouver un nombre entier qui, employé m fois comme facteur, donnât N″. Or, ce nombre doit être supérieur à n, puisque n_m est égal à N, c'est à dire moindre que N″; et en même temps il doit être inférieur à $n+1$ puisque $(n+1)^m$ donne pour résultat N′, c'est à dire quelque chose de plus grand que N″.

La question proposée est donc insoluble, au point de vue abstrait, d'où il suit que l'expression $\sqrt[m]{N''}$ est un indice d'impossibilité; c'est à l'expression d'un pareil nombre qu'on donne le nom de nombre *irrationnel*.

Mais, puisque nous avons remarqué que les deux problèmes inverses de l'élévation aux puissances ne correspondent pas l'un à l'autre, même sous le point de vue des procédés numériques, il est évident qu'il ne suffit pas d'avoir examiné un seul de ces problèmes, pour connaître tous les cas d'impossibilité auxquels peut donner lieu l'opération inverse des puissances.

L'on peut, avons-nous dit, se proposer aussi de déterminer le degré à l'aide de la puissance et de la racine, par exemple on peut demander à quel degré il faut élever n pour avoir N″.

Or, si je fais l'élévation de n aux diverses puissances dont les degrés sont marqués par la suite naturelle des nombres, comme,

$$n^1,\ n^2,\ n^3, \ldots\ldots\ n^m, \ldots\ldots,$$

il sera facile de se convaincre que deux de ces résultats consécutifs quelconques diffèrent entre eux d'un nombre d'unités qui va sans cesse en augmentant avec le degré employé. En général pour les degrés m et $m+1$, cette différence est égale à $n^m\,(n-1)$.

Cela posé, admettons que N″ est compris entre n^m et n^{m+1}, il n'est pas nécessaire d'entrer dans de longs détails pour prouver que, dans cette hypothèse, la question proposée est impossible; car le degré cherché doit être en même temps supérieur à m et inférieur à $m+1$, c'est à dire que, pour résoudre le problème, il faudrait prendre n plus de m fois comme facteur et moins de $m+1$ fois, condition à laquelle on ne saurait satisfaire et d'où nous concluons que l'expression $\frac{\log N''}{\log n}$ est un nouvel indice d'impossibilité, toutes les fois que N″ n'est pas une puissance de n.

On donne encore le nom de nombre *irrationnel* à celui qui est représenté en algèbre par l'expression précédente.

— *Il y a deux sortes très distinctes de nombres irrationnels, fractionnaires et négatifs.*

Mais on voit qu'il importe de distinguer deux sortes de nombres irrationnels, même sous le point de vue des procédés numériques, et en ne sortant pas du domaine abstrait. L'un se manifeste lorsqu'on cherche le nombre qu'il faut élever à une puissance déterminée pour obtenir un résultat connu d'avance ;

L'autre, lorsqu'on cherche le degré de la puissance à laquelle il faut élever un nombre donné pour obtenir également un résultat connu d'avance.

Or, comme dans ce dernier cas ce qu'on cherche est toujours abstrait, tandis que dans le premier on peut supposer que le nombre cherché est concret, nous caractériserons à l'avenir ces deux cas d'irrationnalité, en réservant pour le premier la dénomination de nombre irrationnel concret, et pour le second celle de nombre irrationnel abstrait.

Au reste, qu'on ne s'y trompe pas, et nos études ultérieures confirmeront plus amplement cette vérité, la même distinction existe pour les nombres fractionnaires ; mais, parce que sous le point de vue numérique les deux opérations inverses de la multiplication sont identiques, on a été sans doute moins disposé à s'en préoccuper. Mais au fond il est évident que lorsqu'on se propose de revenir au multiplicateur, le nombre fractionnaire obtenu ne peut dans ce cas être qu'abstrait, tandis que lorsqu'on se propose de revenir au multiplicande, le nombre fractionnaire obtenu peut être concret. Il en est de même des nombres négatifs, car dans une addition les nombres ajoutés peuvent être supposés ou abstraits ou concrets. Dans ces deux derniers cas, et sous le point de vue numérique, cette distinction est illusoire, et c'est peut-être par ce motif, je le répète, qu'elle a passé inaperçue ; mais il n'en est pas de même en ce qui concerne la compréhension, l'intelligence des résultats obtenus, et le sens qu'il faut leur attacher, car, si plus tard il est démontré qu'un nombre concret, c'est à dire qu'une *quantité* négative, fractionnaire, irrationnelle, imaginaire, est très compréhensible, il s'ensuivra que dans le passage du domaine abstrait au domaine concret, on diminuera d'autant le nombre des impossibilités jusqu'à présent constatées, et, à l'aide de cette observation, l'importance de la distinction dont je parle paraît dans tout son jour.

— *Des expressions imaginaires.*

L'impossibilité d'extraire d'un nombre quelconque une racine d'un degré déterminé, donne naissance, comme nous venons de le faire voir, à la considération des nombres irrationnels; c'est encore au sujet de l'extraction des racines que se révèle la manifestation des nombres imaginaires; mais il serait difficile en arithmétique de faire comprendre non seulement toute la portée de cette expression analytique, mais même de donner de sa simple manifestation une explication satisfaisante, et cela, parce que cette manifestation est une conséquence de la règle dite des signes en algèbre, question qui est tout à fait étrangère à la science arithmétique.

J'ai déjà fait comprendre dans ce qui précède, que dans l'opération désignée sous le nom d'élévation aux puissances, il se présentait de prime abord une véritable difficulté, lorsqu'on supposait que la racine représentait un nombre concret; cette difficulté tient à ce que dans l'élévation aux puissances, comme dans toute multiplication, il n'est pas possible qu'il y ait plus d'un facteur concret, et dès lors, sans explication préalable, on ne peut concevoir ce qui doit advenir, sinon sous le point de vue numérique, du moins sous le point de vue rationnel, de la supposition d'une racine concrète. J'ai ajouté que j'envisagerais plus tard cette question, et je puis dès à présent annoncer qu'on ne sera pas peu surpris des conséquences auxquelles elle nous conduira, et du nombre d'erreurs que cet examen est appelé à redresser. Or, tant que ces explications n'auront pas été données, il sera à peu près impossible de s'expliquer avec quelque clarté sur la nature des expressions irrationnelles et sur celle des imaginaires; je dois donc m'en tenir au simple fait de leur existence, et à ce sujet je me contenterai de dire que l'on donne le nom *d'imaginaire* à toute expression dans laquelle il est écrit qu'il faut extraire une racine de *degré pair* d'un nombre *négatif*; le symbole le plus simple d'un nombre imaginaire est donc $\sqrt{-1}$, et l'on sait que tout ce qu'il y a sérieux dans les difficultés que suscite l'explication rationnelle des imaginaires, consiste à donner le mot de l'énigme dont cette expression $\sqrt{-1}$ est l'image.

— *Observations finales.*

Telles sont les principales observations élémentaires dont m'a paru susceptible le sujet que je viens de traiter dans ce chapitre, j'en ai dit assez, je pense, pour faire comprendre :

1° La nécessité qu'il y a de considérer le nombre, non pas seulement comme servant à représenter les quantités, mais comme destiné à supputation de l'ordre et de la situation des choses, indépendamment de leur grandeur ;

2° Le vrai sens qu'il faut attacher aux opérations principales de la science arithmétique, lorsque les nombres sont seulement employés sous ce dernier point de vue, c'est à dire comme les indices de l'unique idée de pluralité ;

3° Enfin, l'impuissance où l'on est d'attacher, toujours sous le même point de vue, un sens raisonnable aux nombres négatifs, fractionnaires, irrationnels et imaginaires, et la nécessité de considérer ces divers nombres, lorsqu'ils se manifestent dans l'examen d'une question, comme l'expression arithmétique de l'impossibilité de résoudre cette question dans le sens où elle a été énoncée.

Ce chapitre est consacré à établir la véritable nature du nombre sous le point de vue abstrait de la pluralité ; et je crois que, considérée dans son ensemble, cette partie de la science arithmétique avait, jusqu'à ce jour, été complètement négligée dans nos ouvrages d'enseignement.

Cette première base étant ainsi posée, je vais, dans ce qui suivra, exposer les divers principes sur lesquels repose l'emploi du nombre pour la représentation, soit des grandeurs des quantités, soit de leur état, de leur situation, de leurs différents modes d'existence ou d'action. On verra comment, pour remplir ces différents buts, le nombre *se combine avec les divers signes d'opérations*, et on concevra ensuite que, dans ce second usage du nombre, la forme finale obtenue pour les diverses représentations dont je viens de parler, est toujours *complexe;* or, c'est parce que cet état complexe n'avait pas été suffisamment reconnu et expliqué, que l'interprétation philosophique, générale et universelle, je ne dirai pas des nombres, mais des expressions négatives, fractionnaires, irrationnelles et imaginaires, est restée jusqu'à ce jour ou insuffisante ou impossible.

—

CHAPITRE III.

ÉTUDES SUR LES MODULES.

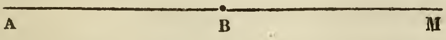
Je dois rappeler au début de ce chapitre, que les études qui en font l'objet, bien que spécialisées dans leur forme et appliquées aux longueurs, sont susceptibles d'être généralisées et de s'adapter à toutes les quantités. C'est ce qui ressort dès à présent des observations qui terminent le chapitre premier, et ce qui par la suite sera plus amplement confirmé.

SECTION PREMIÈRE.

De la longueur et de ses différents états sous le point de vue de grandeur ou de petitesse.

— *Manière d'exprimer les longueurs.*

Dans ce qui va suivre, je conviendrai de désigner par λ le module de la quantité désignée sous le nom de longueur.



Afin de traiter d'abord le cas le plus simple et de n'introduire dans la question aucune complication, je supposerai expressément que toutes les longueurs dont je vais m'occuper sont comptées sur la ligne

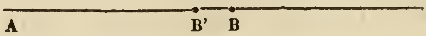
AM à partir du point A. Je passerai ensuite de ce cas particulier à l'examen des cas plus généraux.

Si ayant pris, à partir du point A, sur AM, une longueur AB, j'ai besoin d'exprimer cette longueur, je porterai sur AB, à partir du point A, le module des longueurs λ, et si a est le nombre de fois qu'il a fallu répéter ce module, en le portant bout à bout, pour arriver au point B, je dirai que l'expression $a\lambda$ est la représentation algébrique de la longueur AB; en effet, toute autre longueur, partant du point A, et prise sur AM, aurait une expression différente de la précédente, de sorte que, par ce procédé, il est impossible qu'il reste dans l'esprit aucun doute sur la véritable longueur qu'on a voulu représenter.

Si, à l'inverse, l'expression $a\lambda$ était donnée, et si on voulait figurer géométriquement la longueur à laquelle elle correspond, on porterait, à partir de A, le module λ sur AM autant de fois que l'indique a; on aboutirait, après avoir ainsi opéré, à un point B, et on dirait que la longueur AB est la longueur demandée.

— *Modifications que doit éprouver le module pour exprimer toutes les longueurs possibles.*

Tant que le module λ peut être contenu un nombre exact de fois dans la longueur AB, ce procédé qui est fort simple ne présente aucune difficulté;



Mais si après avoir porté sur AM le module λ, comme nous venons de l'expliquer, un nombre de fois égal à a, il arrive que le point B′, auquel on parvient, est distant de B d'une quantité moindre que λ, alors il devient impossible de représenter la longueur AB à l'aide du procédé que nous venons de faire connaître.

Mais il se présente facilement à l'esprit un moyen prompt de lever la difficulté qui nous arrête ; en effet, c'est une propriété inhérente à la nature même de la quantité dont nous nous occupons, que l'esprit puisse la concevoir fractionnée en tant de parties qu'on voudra, et rien ne limite le degré de petitesse que notre imagination peut attribuer à ces diverses parties ; or il résulte de cette propriété que si nous supposons que le module choisi, au lieu d'être la longueur λ, devient une longueur de plus en plus petite, nous pourrons enfin en trouver une qui soit contenue un nombre exact de fois dans AB ; de sorte que si a' et λ' représentent ce nombre et cette longueur, l'expression de AB sera $a' \lambda'$.

Que si on prétendait que quelque petit que fût λ', on ne pourra jamais parvenir à lui donner une valeur telle qu'il fût contenu un nombre exact de fois dans AB, on pourrait répondre que du moins à mesure que λ' diminuerait, on diminuerait également la première différence obtenue B′B, et comme B′B est toujours plus petit que λ', à la diminution duquel il n'y a pas de limite, il n'y en aurait pas non plus à celle de cette différence, qui deviendra ainsi aussi petite qu'on pourra le désirer.

— *Cette modification est algébrique.*

Or, pour arriver à cette diminution successive du module, la nature de la quantité dont je m'occupe me permet de supposer que les nouveaux modules, que je substitue au premier, ne sont autre chose que celui-ci divisé en un certain nombre de parties égales, et les procédés géométriques connus indiquent en effet la manière dont il faut s'y prendre pour effectuer cette division et connaître la nouvelle longueur qui en est le résultat. Cela posé, si m est le nombre de parties en lesquelles on aura divisé λ et si λ' est une de ces parties, il est évident que j'aurai l'égalité $\lambda' = \frac{\lambda}{m}$; voilà donc le premier exemple d'une relation algébrique qui lie entre eux les modules d'une même quantité considérée sous deux états différents; voilà une première vérification qui prouve que la supposition que nous avons faite est en effet susceptible de recevoir des applications dans l'examen des questions concrètes.

— *Application à l'ancien système de mesures des longueurs.*

Il ne sera pas inutile de présenter comme application de ce que nous venons de dire, l'ancien système de mesures dont on faisait usage pour les longueurs.

On vient de voir que si l'on voulait à l'aide d'un seul module avoir l'expression de toutes les longueurs, il faudrait prendre pour le module λ la plus petite de toutes les longueurs connues; mais outre qu'il serait peut-être fort difficile de s'entendre à ce sujet, il est évident que ce moyen fort simple sous le point de vue théorique, serait fort compliqué dans ses résultats, puisque alors il faudrait, soit dans le langage, soit dans l'écriture ordinaire, employer beaucoup de mots ou de caractères pour exprimer les longueurs.

Cet inconvénient très grave a dû faire recourir à d'autres procédés; et voici celui auquel on s'est arrêté. Après avoir adopté pour les longueurs un premier module, on s'est servi de ce module pour mesurer toutes les longueurs dont l'expression n'entraînait pas pour les besoins ordinaires des nombres trop compliqués.

Puis, pour exprimer les longueurs plus grandes que celles-ci, on a adopté un module plus grand que le premier, et pour exprimer les longueurs moindres, on a fait usage d'un module plus petit.

C'est ainsi que dans l'ancien système, on avait pour les longueurs, la lieue, la toise, le pied, le pouce, la ligne, le point.

Or, en partant du point figuré par le module λ_0, tous les autres dérivaient de celui-ci de la manière suivante :

Pour la ligne, le module. . $\lambda_1 = 12\ \lambda_0$
Pour le pouce. . . . . . . $\lambda_2 = 144\ \lambda_0$
Pour le pied. . . . . $\lambda_3 = 1728\ \lambda_0$
Pour la toise. . . . . . . $\lambda_4 = 10368\ \lambda_0$
Pour la lieue. . . . . . . $\lambda_5 = 20736000\ \lambda_0$

Et l'on voit que, par ce procédé, si le modèle λ_0 représentait la plus petite des longueurs connues, on exprimerait facilement toutes les longueurs à l'aide des nombres abstraits et de λ_0,

Mais si, dans une question, je prévois que l'un de ces modules, le pied par exemple, pourra être suffisant. Je pourrai me borner à faire usage de λ_3 seulement.

Toutefois si en mesurant une longueur, je trouve qu'elle contient λ_3 un nombre de fois égal à *a*, plus quelque chose plus petit que λ_3, je pourrai pour me rendre compte de la valeur de ce reste, porter sur lui le module d'une dimension moindre λ_2, qui sera par exemple contenue *b* fois; puis, si cela n'est pas suffisant, si on a encore un reste, on fera usage du module λ_1, et enfin de celui λ_0; par ce moyen, la longueur dont il s'agit aura pour expression :

$$a\,\lambda_3 + b\,\lambda_2 + c\,\lambda_1 + d\,\lambda_0.$$

On voit donc par là que si, dans les recherches qu'on effectue dans la science du calcul. on avait constamment conservé les modules, l'idée des nombres fractionnaires ne se serait pas présentée à l'esprit, et leur emploi n'aurait pas été nécessaire. Mais, à tort ou à raison, c'est le contraire qu'on a fait, les modules ont toujours été négligés, et on n'a gardé que les nombres. Or, ce parti étant une fois adopté, on a remarqué que le module λ_3 est douze fois plus grand que le module λ_2, et par conséquent celui-ci 12 fois moindre que λ_3; donc, à la place de λ_2, on pourra écrire la douzième partie de λ_3, ce que l'on est convenu de représenter ainsi $\frac{\lambda_3}{12}$; et alors, mettant $\frac{\lambda_3}{12}$ à la place de λ_2, les deux premières parties de la longueur proposée peuvent s'écrire

$$a\,\lambda_3 + b\frac{\lambda_3}{12}.$$

En continuant de la même manière, on verra que l'expression entière sera modifiée de la manière suivante :

$$a\,\lambda_3 + b\,\frac{\lambda_3}{12} + c\,\frac{\lambda_3}{144} + d\,\frac{\lambda_3}{1728}.$$

Mais, ce qu'il est important de bien remarquer, c'est que ce ne sont pas les nombres abstraits *a, b, c, d*, qui se trouvent modifiés par ces considérations, ce sont toujours et seulement les modules, et c'est sur λ_3 que toutes les divisions indiquées devront être faites. Telle est la seule conséquence immédiate qu'il soit possible de déduire des raisonnements qui précèdent.

Puis, comme en étudiant les règles du calcul on a trouvé qu'il y avait certains moyens d'opérer sur a, b, c, d, avec les nombres 12, 144, 1728, tels que dans la pratique on obtient le même résultat que si, avec ces mêmes nombres, on avait opéré sur les modules, on a été conduit à supprimer ce module et à faire porter sur les nombres les opérations auxquelles le module devait être soumis.

Mais en théorie, on le voit, ce n'est pas le nombre qui doit être modifié, c'est toujours le module; et ce ne peut-être que celui-ci qu'il faut avoir en vue, car sans lui l'idée de quantité disparaît, et le nombre ne reste plus que comme le symbole d'une opération de l'esprit.

— *Interprétation des expressions fractionnaires des quantités.*

Si donc à l'avenir, en traitant une question dont la solution doit être une longueur, je trouve que λ étant le module qu'on a adopté, cette longueur doit avoir pour expression $\frac{a}{b}\lambda$, ce résultat ne sera plus pour moi une impossibilité, je lui donnerai tout de suite une signification précise, en supposant que, pour trouver la longueur donnée, ce n'est point λ qu'il faut répéter un nombre de fois égal à $\frac{a}{b}$, ce qui serait incompréhensible, mais qu'il faut commencer par diviser λ en un nombre de parties égales à b, et que la longueur cherchée s'obtiendra en répétant a fois une de ces parties, considérée comme module.

Et c'est ainsi que notre grande loi générale commence à se vérifier : « Toutes les fois qu'une opéra-
» tion sera incompréhensible sur le nombre abstrait
» qui figure dans l'expression d'une quantité, exami-
» nez si vous ne pourrez pas la concevoir et l'effectuer
» sur le module. » Or, dans le cas qui nous occupe, si a ne contient pas b un nombre exact de fois, l'opération $\frac{a}{b}$ devient incompréhensible; mais alors, en effectuant la division par b sur le module λ, cette même opération se conçoit et s'explique, et à l'aide de cette interprétation, l'expression $\frac{a}{b}\lambda$ reçoit une signification claire et précise, sans que notre esprit soit forcé d'admettre *à priori* l'existence des nombres fractionnaires.

— *Conséquences de cette interprétation pour la théorie des nombres fractionnaires.*

Mais une fois que tout ce qu'il y a de raisonnable et de juste dans l'explication ci-dessus a été reconnu, et qu'on a ainsi parfaitement compris la véritable portée de l'expression $\frac{a}{b}\lambda$ ou de toute autre semblable, lorsqu'en un mot, on ne peut plus commettre d'erreurs à ce sujet, alors se présentera la question de rechercher si, débarrassant pour un instant les expressions du module λ, on ne peut pas effectuer sur la partie numérique $\frac{a}{b}$ de ces expressions considérées isolément et indépendamment de tout module, certaines opérations arithmétiques, de telle manière qu'on puisse préparer ainsi à l'avance des collections de résultats. On n'aura plus ensuite qu'à joindre ces résultats aux divers modules des quantités, sur lesquelles des questions auront été proposées, pour connaître la solution de ces mêmes questions.

Or, rien ne s'oppose à cette conception de l'esprit de dépouiller les expressions des quantités, de leurs modules, et ne conservant que les parties numériques ou algébriques de ces mêmes expressions, d'exécuter entre celles-ci toutes les combinaisons que les règles du calcul autoriseront, soit en faisant changer à volonté les valeurs de ces parties numériques, soit en modifiant de toutes les manières possibles les signes des opérations qui les lieront les uns aux autres.

— *Importance d'une discussion préalable sur la loi de l'homogénéité dans le passage de l'abstrait au concret.*

Mais lorsque, de ces résultats purement abstraits, on voudra passer à des applications sur des quantités concrètes, il y aura avant tout une discussion préalable à établir; car il faudra que le module soit restitué de telle manière que l'on voie bien clairement que les divers termes dont se composera le résultat final, sont homogènes, c'est à dire qu'ils sont tous des expressions de quantités de même espèce que celle dont on s'occupe; sans cela, ce résultat final ne serait plus compréhensible. Il faudra en un mot, un résultat purement algébrique étant donné, faire précéder ses applications aux quantités concrètes, d'une discussion destinée à bien établir à quelles conditions et de quelle manière il faut entendre ce que dit ce résultat, pour que, dans les applications, il reste d'accord avec la loi de l'homogénéité.

Or, on verra plus loin que, faute d'avoir suffisamment porté l'attention sur ce point délicat du passage l'abstrait au concret, beaucoup de difficultés et de doutes se sont introduits dans la science du calcul, notamment en ce qui concerne la représentation générale des courbes par des équations.

Cette digression m'a éloigné pour un instant de l'objet actuel de mes recherches; mais il était difficile de ne pas en parler au moment où elle ressortait pour ainsi dire d'elle-même du sujet que je traitais, et d'ailleurs toutes ces remarques, une fois faites, ne feront que simplifier l'exposition et l'intelligence de ce qui nous reste à dire.

On voit donc maintenant comment la considération des nombres fractionnaires s'introduit dans la science du calcul, et à quelles considérations on pourra, après avoir étudié leurs combinaisons sous le point de vue abstrait, faire l'application des résultats obtenus aux questions concrètes.

— *Digression sur cette question : Y a-t-il quelque chose de plus petit que* 1?

Si maintenant je me reporte à cette question dont j'ai donné l'énoncé dans le chapitre premier : Y a-t-il quelque chose de plus petit que un? peut-être trouvera-t-on qu'il est moins difficile de la résoudre que de comprendre comment on a pu la proposer.

Et d'abord, dans la nature, il n'y a rien de grand, rien de petit.

« Ces mots (1) ne peuvent pas s'entendre dans un » sens tout à fait absolu, et si quelquefois nous sem- » blons les employer ainsi, c'est qu'alors il y a tou- » jours quelque comparaison sous entendue. Ainsi, par » exemple, lorsque nous disons d'un arbre qu'il est » grand ou petit, nous le comparons implicitement » à la moyenne stature des arbres au dessus ou au » dessous de laquelle nous entendons exprimer qu'il » se trouve, et nous ne pouvons nous exprimer ainsi » que parce que la hauteur des arbres a deux limites » extrêmes qui même ne se trouvent pas fort distan- » tes l'une de l'autre; mais il ne saurait plus en être » de même à l'égard d'objets dont la grandeur ou la » petitesse n'ont point de limites nécessaires, et celui » qui, par exemple, demanderait qu'on lui traçât

(1) *Annales de Mathématiques*, tome XXI, page 325.

» une *ligne* droite de grandeur ordinaire, ferait une » question dont l'ineptie serait manifeste pour tout » le monde.

» Nous ne connaissons donc des grandeurs que les » rapports qui existent entre elles, et c'est aussi tout » ce qu'il nous est possible d'en faire connaître à » autrui. En vain tenterait-on de torturer la langue, » d'y introduire des mots ou des tours nouveaux, » jamais on ne parviendrait à lui faire exprimer une » grandeur indépendamment de quelque autre gran- » deur de sa nature. »

Or, si dans un sens absolu il n'y a rien de grand, rien de petit, que signifiera cette question : Y a-t-il quelque chose de plus petit que un ?

Ou ce quelque chose ne sera pas de la même nature que un, et dans ce cas, la question serait absurde, puisque l'on ne peut comparer des objets hétérogènes;

Ou bien ce quelque chose sera de la même nature que un, et alors il faut s'entendre d'abord sur ce que vous appelez *un*.

Or, si ce un est abstrait, si c'est ce que nous sommes convenus d'appeler *unité*, si cette unité est le premier terme de la série des nombres, il est évident qu'il ne peut dans ce cas y avoir rien, c'est à dire d'autre terme de cette série, qui soit plus petit que 1; en vain voudrait-on subtiliser sur cette question et faire un appel aux nombres fractionnaires, nous répondrions, à l'aide des idées qui précèdent, que les nombres fractionnaires sont des êtres de convention, n'ayant par eux-mêmes aucune signification, impliquant au contraire un non sens pour la raison, non susceptibles de représenter quoi que ce soit, tant qu'on reste dans le domaine de l'abstraction, et n'ayant pour notre intelligence quelque valeur que lorsque nous en rattachons l'origine et l'usage aux considérations concrètes.

Si, au contraire, l'unité dont il est question est concrète et représente par conséquent une grandeur, je répondrai que toute grandeur moindre que celle-là sera, sous ce point de vue, quelque chose de plus petit que un.

Si, au lieu d'appeler unités ces diverses quantités qu'on prend pour terme de comparaison entre toutes les quantités de même espèce, on leur avait donné un autre nom, ainsi que nous l'avons fait, on n'aurait pas été amené à considérer des unités de plusieurs sortes, suivant chaque nature de quantité, et même plusieurs unités dans la même espèce; on aurait surtout évité de confondre l'unité abstraite, l'unité numérique et immuable, avec les unités concrètes, qui sont tout à fait de convention, variables par conséquent suivant la volonté de chacun, et qui ne peuvent pas être conçues sans que l'espèce de la quantité dont on s'occupe soit définie.

— *Des longueurs irrationnelles.*

Nous avons suffisamment développé dans le chapitre deuxième les circonstances qui se rattachent à la manifestation des nombres irrationnels, et nous avons montré que l'existence de pareils nombres, dans le domaine abstrait, ne pouvait être comprise; que, dans ce cas, leur manifestation était l'indice d'une impossibilité, et qu'en conséquence toute question, dont la solution dépend d'un nombre irrationnel, doit être considérée comme contenant nécessairement dans son énoncé une ou plusieurs incompatibilités.

Mais si le nombre, considéré en lui-même, ne peut nous conduire à l'explication de l'irrationnalité, s'ensuivra-t-il que nous serons condamnés à tout jamais à rester dans l'ignorance à cet égard, et que, dans les applications de la science du calcul aux questions concrètes, nous devrons continuer de considérer comme insolubles toutes celles qui conduiront à des expressions contenant l'indication de racines impossibles à extraire? En un mot, ne pourrait-on pas, dans la pratique, réaliser et produire des longueurs dont l'expression arithmétique est irrationnelle? le lecteur a répondu d'avance par l'affirmative à cette question, et déjà sans doute la propriété fondamentale du triangle rectangle s'est présentée à son esprit.

C'est qu'en effet il est de l'essence de la longueur, c'est une propriété inhérente à sa nature, non seulement de pouvoir être divisée en tant de parties qu'on voudra, mais encore d'être constituée, à l'aide de certaines figures, de certaines opérations géométriques, dans un état d'augmentation ou de diminution correspondant exactement à celui qui est figuré par un signe radical. L'interprétation de l'irrationnel sur les longueurs se pourra donc faire, non pas à cause du nombre abstrait sur lequel l'extraction de la racine continuera d'être impossible, mais à cause du module sur lequel cette extraction pourra s'exécuter, sinon arithmétiquement, du moins par des procédés géométriques équivalents.

Passons à un exemple, et supposons qu'on veut résoudre la question suivante : Des arbres sont plantés en forme de quarré, l'on a compté le nombre d'arbres dont se compose un des côtés de ce quarré, et on l'a trouvé égal à a; on a deux quarrés pareils, et on voudrait avec les arbres qu'ils contiennent tous deux et en les employant tous faire un seul quarré ; on demande combien il faudra placer d'arbres sur le côté de ce nouveau quarré ?

Si on désigne par x ce nombre, la condition du problème sera évidemment exprimée par l'équation suivante :

$$x^2 = 2\,a^2,$$

de laquelle on déduit

$$x = a\sqrt{2}.$$

La nature de cette solution nous apprend qu'il n'y a aucun nombre possible d'arbres qui puisse satisfaire à la question proposée, la présence du facteur irrationnel $\sqrt{2}$ est, comme nous l'avons suffisamment expliqué, un indice de l'impossibilité de résoudre cette question; et quelles que soient nos études sur la nature de l'objet concret dont nous nous occupons, un arbre, nous ne trouverons dans cet objet aucune propriété à l'aide de laquelle l'opération $\sqrt{2}$, impraticable sur le nombre qui figure dans l'expression précédente, pourra être réalisée sur le module que le nombre est censé accompagner. Il nous est donc impossible de parvenir, dans ce cas, à une interprétation quelconque d'un semblable résultat.

Admettons maintenant que la question proposée soit la suivante:

On a deux quarrés égaux ayant la longueur a pour côté, on demande de faire un troisième quarré tel que la surface soit égale à la somme de deux autres; quelle sera la longueur du côté de ce quarré?

Si nous désignons, comme précédemment, par x la longueur inconnue du côté du quarré demandé, on devra encore avoir, comme précédemment, la condition.

$$x^2 = 2\,a^2,$$

de laquelle on tire

$$x = a\,\sqrt{2},$$

D'après la nature de cette solution, je pourrais être conduit de prime abord à considérer la question proposée comme impossible; mais, en y réfléchissant davantage, et à l'aide des principes exposés dans les chapitres précédents, nous pourrons raisonner ainsi qu'il suit :

Comment le nombre a se trouve-t-il introduit dans la question? Parce que ayant choisi un certain module λ pour la mesure des longueurs, j'ai trouvé que le côté des deux quarrés donnés contient ce module un nombre de fois égal à a, de sorte qu'en réalité la véritable représentation de la longueur de ce côté est $a\lambda$; par une conséquence toute naturelle de cette observation, je dirai que la véritable représentation de la longueur x doit être $a\sqrt{2}\,\lambda$, c'est à dire que pour réaliser x il faudrait répéter le module primitif λ un nombre de fois représenté par $a\sqrt{2}$. Or, cette opération, nous l'avons dit, est impossible à faire en nombres; c'est donc ici le cas de tenter, en vertu de notre loi générale, si nous ne pourrions pas exécuter sur le module ce que nous ne pouvons concevoir pour le nombre.

Pour cela, je remarque que ce n'est pas le nombre a qui introduit dans la question quelque difficulté, c'est seulement au facteur $\sqrt{2}$ qu'il faut rapporter la cause de l'impossibilité qui se manifeste; recherchons, donc, puisque $a\sqrt{2}$ ne peut être ni conçu ni pratiqué, recherchons, dis-je, s'il en sera de même de $\lambda\sqrt{2}$. Or, je vois tout de suite que si $\lambda\sqrt{2}$ exprime une longueur réalisable, je pourrai par cela même réaliser aussi $a\sqrt{2}\,\lambda$. Il suffira pour cela de répéter a fois, non plus la longueur λ, mais bien la longueur $\lambda\sqrt{2}$. Telle est bien l'application pour ce cas de notre loi générale en vertu de laquelle nous avons dit que dans les considérations de la science du calcul aux questions concrètes, lorsqu'une expression algébrique se présente avec quelques indications d'opérations impossibles à exécuter sur les nombres, il faut examiner si ces mêmes opérations ne sont pas exécutables sur le module, si la nature de ce module ne permet pas ou de les concevoir ou de les pratiquer, ce qui peut ainsi conduire à une interprétation aussi raisonnable qu'utile du résultat obtenu.

Notre examen poussé jusqu'à ce point et ramené à la question de savoir si, à l'aide de λ, la longueur $\lambda\sqrt{2}$ est réalisable, ne présente plus désormais aucune difficulté ; nous savons en effet *à priori* que si nous formons un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont égaux à λ, l'hypoténuse de ce triangle rectangle sera telle que sa longueur, par rapport à λ, devra être exprimée par $\lambda\sqrt{2}$. La conséquence de cette observation c'est que, par rapport aux longueurs, la solution figurée par le résultat $a\sqrt{2}$ ne présente plus d'impossibilité, elle s'explique facilement et conduit immédiatement à la connaissance de la longueur demandée.

Si au lieu de $a\sqrt{2}$ on avait eu $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{4}$, $a\sqrt{5}$, on aurait, par des procédés semblables, construit les diverses longueurs $\lambda\sqrt{3}$, $\lambda\sqrt{4}$, $\lambda\sqrt{5}$ ... En effet, se servant de l'hypoténuse du triangle précédent pour côté de l'angle droit d'un nouveau triangle rectangle dont l'autre côté serait λ, l'hypoténuse de ce second triangle serait $\lambda\sqrt{3}$; puis prenant $\lambda\sqrt{3}$ pour l'un des côtés de l'angle droit d'un troisième triangle rectangle dont l'autre côté serait λ, on aurait une troisième hypoténuse dont la longueur serait $\lambda\sqrt{4}$, et ainsi de suite; de sorte que ce procédé continué indéfiniment réaliserait toutes les longueurs dont l'expression générale est $\lambda\sqrt{n}$; c'est à dire que ce procédé donne l'interprétation de toutes les longueurs dont l'expression contient un nombre irrationnel du second degré.

Ce n'est point ici le lieu d'entrer dans de longs détails pour montrer sur quelles nouvelles considérations géométriques il faudrait s'appuyer pour réaliser les longueurs irrationnelles des degrés plus élevés que le deuxième, car ce n'est point l'étude de la géométrie que nous faisons ici : nous pourrons prouver, par la suite, comment les expressions irrationnelles du degré n se réalisent géométriquement par la division d'un arc en un nombre n de parties. Quoi qu'il en soit, il s'agit moins ici de connaître ces procédés pour tous les cas possibles des nombres irrationnels, que d'avoir montré, pour un seul de ces cas, que la conception de la forme irrationnelle, d'impossible qu'elle est dans le domaine abstrait, et sous le point de vue de la pluralité, devient explicable et très compréhensible quand on passe au domaine concret, et quand, par exemple, on l'applique aux longueurs.

Concluons donc que l'examen que nous venons de faire prouve que rien n'est plus facile que de réaliser les longueurs $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$,... c'est à dire toutes celles qui sont exprimées par des irrationnels du second degré, et cela, parce que les procédés de la géométrie ordinaire nous montrent que les rapports entre les longueurs qui entrent dans certaines figures doivent, d'après les principes de cette science, être exprimées par $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$,.... or, ceci indique suffisamment, qu'en supposant qu'on fût encore dans l'impossibilité de réaliser, par des figures géométriques, des longueurs dont les rapports auraient pour expression des irrationnels d'un degré quelconque; ceci indique, dis-je, non pas que la conception d'une longueur pareille sera impossible, mais seulement que sa réalisation sera subordonnée à la découverte ultérieure de quelque propriété géométrique qui fera intervenir une expression irrationnelle de ce degré dans le rapport de deux longueurs.

Nous sommes donc de nouveau ramenés à cette vérité fondamentale que ce n'est que par l'étude complète des propriétés qui sont inhérentes aux choses créées que nous serons en mesure, d'une part, d'interpréter le sens dans lequel doivent être entendus les résultats fournis par la science du calcul, et d'autre part, de réaliser dans la pratique, au moyen des modules des quantités et des opérations et des nombres avec lesquels ces modules se combinent, les solutions indiquées par ces résultats. C'est donc avec vérité que nous avons pu affirmer au début de cet ouvrage que le moyen le plus sûr de faire disparaître les doutes et les incertitudes mathématiques, consiste à rechercher si les opérations, qu'on ne peut ni concevoir, ni pratiquer sur les nombres, sont compréhensibles et exécutables sur les modules.

— *Du zéro et de l'infini sous le point de vue abstrait.*

Nous allons maintenant passer à des considérations d'une grande importance, et qu'on peut considérer comme la clef du calcul infinitésimal. Je veux parler du sens qu'il faut attacher dans la science du calcul aux expressions *zéro* et *infini*. Ici encore nous distinguerons le cas où l'on reste dans le domaine de l'abstraction et celui où l'on aborde les questions concrètes.

Et d'abord, sous le point de vue abstrait, c'est à dire en ne mettant en jeu que la considération des nombres, il est évident que zéro ne peut représenter autre chose qu'un pur néant. En effet, dès l'instant que vous dites que vous ne voulez pas sortir des idées abstraites, c'est que vous avez pour un instant mis de côté toutes les quantités, et qu'elles sont pour vous comme si elles n'existaient pas. Que peut-il donc alors rester dans votre esprit ? rien autre chose que l'idée de compter ; or, le zéro vient encore détruire cette dernière idée elle-même, de telle sorte que vous ne vous occupez d'aucune quantité, vous ne vous occupez pas davantage de l'opération de compter ; donc, en ce qui concerne la science du calcul, qui n'a pour objet que ces deux choses, *zéro* est et ne peut être que l'indice du néant.

Que sera l'infini, sous le point de vue abstrait ? L'infini représentera à notre esprit l'opération de compter rendue impossible pour nous à cause de son immensité ; l'infini sera un nombre qu'il ne nous sera jamais possible d'atteindre, quelque loin que nous prolongions l'action de répéter une chose, et si l'infini se présente comme réponse à une question proposée, ce sera une preuve manifeste qu'il y a impossibilité de satisfaire à cette question.

Ainsi, dans le domaine abstrait, zéro représentera l'anéantissement de l'opération qui consiste à compter, et l'infini exprimera que cette opération est rendue impossible à réaliser dans son entier.

Ce sont les deux limites entre lesquelles se trouvent placées toutes les *opérations* exécutables de la science du calcul sur les *nombres*.

— *Du zéro et de l'infini sous le point de vue concret.*

Passons aux questions concrètes, et voyons ce que sera d'abord l'*expression* d'une quantité rendue nulle ou infinie, et puis une *quantité* nulle, une *quantité* infiniment petite, une *quantité* infiniment grande.

Occupons-nous en premier lieu du cas où il s'agit de rendre nulle ou infinie l'*expression* d'une quantité.

Pour nous en rendre un compte exact, il faut revenir à notre première observation qui consiste à ne pas perdre de vue qu'une quantité est toujours exprimée par un nombre et un module. Si donc cette quantité est une longueur et si λ est le module des longueurs, on pourra représenter cette longueur par $a\lambda$.

Or, si pour satisfaire à une question je trouve que *l'expression* $a\lambda$ *d'une longueur* doit être égale à zéro, je pourrai facilement remplir cette condition en supposant que le nombre a est zéro, c'est à dire en supposant que le module λ, quel qu'il soit, ne doit pas être du tout pris.

Mais il faut bien remarquer que cela n'entraîne pas l'anéantissement du module qui reste toujours tel qu'il a pu paraître convenable de le prendre, de sorte que quoique $a\,\lambda$ doive être nul, l'idée de longueur ne disparaît pas. Et c'est qu'en réalité la question pourrait toujours être satisfaite même en conservant λ et en en faisant usage. Supposons, par exemple, que la question proposée soit celle-ci.

Quel chemin faut-il faire pour se retrouver au point de départ? Je pourrai bien satisfaire à cette question en ne prenant pas du tout λ; mais je pourrais également y satisfaire en prenant $b\lambda$ et puis revenant sur mes pas d'une nouvelle quantité égale à $b\lambda$, et certes alors, quel qu'eût été λ, la question serait résolue, non seulement sans qu'il eût été nécessaire d'anéantir le module λ, mais au contraire, quoique j'aie fait usage de ce module, et quelle que soit la valeur linéaire que je lui aurai attribuée. Ainsi il ne faudrait pas dire que lorsque $a\lambda$ est nul, c'est le point de départ seul qui résout la question; cette question est au contraire résolue par une infinité de longueurs différentes. Quand j'aurai parlé de l'interprétation des quantités négatives, la nuance que je cherche à faire comprendre sera bien plus facile à saisir; mais je pense que pour le moment on la trouvera suffisamment intelligible.

Au reste, pour rendre ceci encore plus clair, on n'a qu'à supposer que le point de départ est sur une circonférence de cercle, et que l'on demande quel chemin il faut faire sur cette circonférence pour se retrouver à ce point de départ. Si α est l'arc que je conviens de prendre pour module des arcs, et si b est le nombre de fois qu'il faut répéter cet arc pour satisfaire au problème, il est évident que non seulement le problème sera résolu en admettant que b est nul, c'est à dire qu'on ne fait pas usage de α, mais même en prenant α tel qu'on voudra et en le répétant lui et ses divisions, tel nombre de fois que cela pourra être nécessaire pour reproduire une ou plusieurs fois la circonférence entière.

En un mot on peut, sans qu'il soit nécessaire pour cela de supposer que le module des longueurs est anéanti, en faisant au contraire usage de ce module, quel qu'il soit, satisfaire à des questions dont la solution exige que l'*expression* d'une longueur soit nulle; et pour obtenir la solution de ces questions, il faut, ou ne faire aucune opération sur le module, ou bien faire avec le module choisi une série d'opérations compatibles avec les qualités inhérentes à la nature de ce module, et telles que leur effet se détruise mutuellement.

Ce que je viens de dire pour le cas où l'expression d'une longueur est nulle, je le répèterai également pour le cas où cette expression doit être infinie.

Il est évident que dans ce cas je n'ai pas plus besoin de supposer que le module des longueurs devient infini, que je n'avais besoin auparavant d'admettre que ce module était nul. Je puis supposer au contraire que ce module a une longueur finie quelconque; mais pour résoudre le problème il faudra répéter ce module un nombre infini de fois, ce qui répond, comme je l'ai déjà fait observer, à une impossibilité.

Ainsi, lorsque dans l'examen d'une question on sait seulement que *l'expression d'une longueur* doit être ou nulle ou infinie, cela ne préjuge rien sur le module, cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de module de longueur, ou qu'il n'y a qu'un module infini qui résolve la question ; mais cela peut s'interpréter encore en disant que dans le premier cas, les opérations à faire sur le module doivent se détruire mutuellement, et que dans le second elles sont en nombre infini.

— *Des longueurs infiniment grandes et infiniment petites.*

Mais, si tels sont les résultats auxquels nous parvenons lorsque nous nous trouvons en présence d'une longueur dont l'*expression* est nulle ou infinie, ces résultats sont totalement différents lorsque la question est retournée, et qu'on demande ce qu'il faut faire à l'expression d'une longueur pour que *cette longueur* soit infiniment petite ou infiniment grande.

Et cela tient à ce que zéro n'est pas synonyme d'infiniment petit, pas plus qu'infini n'est synonyme d'infiniment grand.

Les mots infiniment petit et infiniment grand ne peuvent se concevoir qu'appliqués à une *quantité*; les mots zéro et infini, au contraire, peuvent très bien s'entendre d'une ou plusieurs opérations, dont les effets se détruisent ou dont il est impossible d'obtenir la fin ; aussi a-t-on vu que la condition que *l'expression* d'une quantité, soit zéro ou infinie, ne préjuge rien sur le module. Mais, lorsque je dis que je veux qu'*une longueur* soit infiniment petite, ou infiniment grande, alors je précise, de manière à ne pouvoir s'y méprendre, que c'est sur l'idée *de longueur* elle-même que portent les conditions auxquelles il faut satisfaire, quelles que soient d'ailleurs les opérations auxquelles cette longueur pourrait être soumise.

Or, c'est parce qu'on a confondu entre elles les expressions que je viens d'essayer de différencier, que de nombreuses incertitudes se sont encore glissées dans la science du calcul; tantôt le signe du zéro ou de l'infini doit frapper sur le nombre, tantôt ce signe doit frapper sur le module, et comme cette distinction n'a pas été nettement établie, soit parce que par elle-même elle ne s'est pas suffisamment présentée à l'esprit, soit parce que dans l'habitude où l'on est de négliger la considération des modules, on ne voit guère dans le calcul que des nombres, il en est résulté qu'on n'a pas toujours pu raisonner d'une manière certaine sur la véritable nature des résultats obtenus.

Rappelons ici les principes que nous avons déjà eu occasion de faire connaître : « Il n'y a dans la
» nature rien de grand, rien de petit, et ces mots ne
» peuvent s'entendre dans un sens tout à fait ab-
» solu. Nous ne connaissons des quantités que des
» rapports, et quels que soient nos efforts nous ne
» *parviendrons jamais à exprimer une grandeur quelle*

» *qu'elle soit, indépendamment de quelque autre gran-*
» *deur de sa nature.* »

S'il en est ainsi, et c'est ce que personne ne saurait contester, que peuvent donc signifier ces expressions, longueur *infiniment* petite, longueur *infiniment* grande, avec le caractère exclusif et absolu dont elles portent l'empreinte?

Tant qu'on parlera d'une longueur plus grande ou plus petite qu'une autre, je pourrai supposer que le module restant invariable, quelque petit qu'il soit d'ailleurs, le transport du module sur une longueur a dû être répété plus ou moins de fois pour l'obtenir; mais toujours faudra-t-il au moins faire ce transport une fois, et alors la longueur sera très petite, si l'on veut, mais elle ne sera pas *infiniment* petite?

De même, si le module est très grand, et quelque grand qu'il soit d'ailleurs, si le nombre de fois qu'on le transporte est très souvent répété, la longueur pourra être très grande, mais on aura beau renouveller cette répétition, jamais on n'arrivera à une longueur *infiniment* grande; au point de vue mathématique on n'aura point ainsi réalisé une pareille longueur.

Cela nous apprend donc que ce ne pourra jamais être à l'aide d'un certain état du *module des longueurs*, et de certaines opérations à faire sur ce module, que nous pourrons arriver à la *réalisation* d'une longueur *infiniment petite* ou *infiniment grande*.

Si donc il y a, en géométrie, quelque chose qui puisse être réputé longueur infiniment petite ou longueur infiniment grande, cette chose n'étant pas susceptible d'être exprimée avec le module des longueurs, il faudra nécessairement que, pour passer de l'une à l'autre de ces expressions, il y ait changement de module, disparition du module des longueurs, et substitution d'un nouveau module à celui-là.

Peut-être, pour un grand nombre d'espèces de quantités, serait-on embarrassé de dire dans quelles considérations doivent nous jeter ces passages d'un module à un autre; c'est dans tous les cas une étude à faire pour chaque espèce, et il y a lieu de penser qu'il en ressortira quelquefois des considérations dignes d'être méditées. Mais, pour la longueur, la solution de cette question est facile et se présente pour ainsi dire d'elle-même; qui ne voit en effet que lorsque le module de la longueur diminue de plus en plus, et que nous arrivons à ce terme où il faut le considérer comme *nul*, c'est qu'alors *le point géométrique* se présente pour se substituer à lui, et que nous sommes ainsi autorisés à dire non pas qu'il existe des longueurs infiniment petites, ce qui est impossible, mais que *la constitution des êtres géométriques et leur dépendance mutuelle* est telle qu'il nous est permis de considérer le *point* comme une *longueur infiniment petite*, et que s'appuyer sur une semblable considération dans nos raisonnements, c'est suivre pas à pas l'ordre dans lequel a procédé la nature dans ses créations.

Et d'autre part, puisque, quelque grand que soit le module, une longueur infiniment grande ne pourrait jamais être réalisée par la répétition de ce module, il n'y aura moyen de donner quelque intelligence à cette expression qu'en supposant que c'est le module lui-même de la longueur qui se transforme et revêt le caractère d'être infiniment grand; or à quelle considération géométrique une telle supposition nous conduit-elle? Ici je répèterai encore comme précédemment qu'il existe sans doute plusieurs espèces de quantités pour lesquelles il serait difficile de se rendre compte des effets d'une semblable transformation; mais pour la longueur ces effets deviennent évidents, et si son module devient infiniment grand, c'est qu'alors on passe à la considération de la droite, envisagée dans toute son étendue comme direction indéfinie. En effet, cette quantité, sous ce point de vue, ne s'arrête jamais, et il n'est pas de longueur qui puisse en compléter la définition.

Certes, je ne doute pas que ces conséquences ne soient admises par tout le monde, car les algébristes font un usage journalier de ces vérités. Mais il serait difficile de ne pas reconnaître que la considération des modules, c'est à dire de la nature de la quantité elle-même, pouvait seule conduire l'esprit à la démonstration immédiate de cette loi fondamentale de la géométrie.

Pourquoi, jusqu'à ce jour, est-on resté dans le doute à cet égard ? Parce que, dans nos calculs, nous avons voulu tout reporter au nombre, habitués que nous sommes à ne considérer que lui dans les expressions algébriques, et n'ayant pas suffisamment apprécié le rôle que les considérations concrètes doivent jouer dans ces expressions; il en est résulté que lorsque nos raisonnements nous ont conduits à ces limites extrêmes où les quantités cessent d'exister, nous n'avons su lire dans l'expression algébrique de ces quantités que l'évaluation *numérique* de zéro et de l'infini, ce qui, sous ce même point de vue numérique, ne laissait dans notre esprit, sinon dans la pratique, du moins en théorie, que l'idée *absolue* du néant ou de l'impossible. Or, ce que les considérations concrètes nous apprennent, c'est que cette idée de néant ou d'impossibilité, qui est, en effet, une conséquence nécessaire des suppositions extrêmes dans lesquelles on se place, au lieu d'être admise sous un point de vue *absolu* ne doit l'être que *relativement* à l'espèce de quantité dont on s'occupe; ainsi il y aura bien diminution jusqu'à *zéro*, ou accroissement jusqu'à l'*infini* de la quantité; mais au lieu de traduire *exclusivement* ces circonstances par les mots *néant* et *impossible*, et pour voir clairement tout ce qu'elles sont susceptibles d'exprimer, au point de vue des raisonnements qui nous y ont conduits, il faudra s'enquérir si à la quantité supposée infiniment petite ne vient pas naturellement se substituer la considération de quelque autre quantité, et s'il n'en est pas de même pour le cas où on suppose que la quantité devient infiniment grande.

Cela n'exclut pas, sans doute, les cas où le néant absolu et l'impossibilité absolue seraient les seules conséquences raisonnables de l'infiniment petit ou de l'infiniment grand ; mais cela fait voir que ces cas ne sont pas les seuls qui puissent exister, et que là où le nombre abstrait est insuffisant à nous indiquer par lui-même une solution, les considérations concrètes pourront quelquefois nous en révéler une ou plusieurs. Enfin cela nous apprend que dans l'étude des relations qui lient entre elles les diverses œuvres de la création les considérations infinitésimales doivent être un puissant moyen de découverte. Il y a un siècle et demi que cette vérité trouve tous les jours une nouvelle confirmation dans nos calculs. Mais jusqu'à présent on n'avait pas montré ce me semble *à priori* et en général qu'elle est une conséquence fort simple des lois constitutives qui, dans la nature, régissent entre elles les choses que nous voulons soumettre à nos spéculations.

— *De la transformation de certains modules les uns dans les autres et des infiniment petits de divers ordres.*

Si maintenant je me reporte à ces considérations sur les infiniment petits qui hérissent de difficultés l'introduction au calcul différentiel, je crois qu'on trouvera dans ce qui précède un premier éclaircissement à quelques unes de ces difficultés. Si on demande, par exemple, s'il existe des quantités infiniment petites, on n'hésitera pas à répondre qu'une quantité peut devenir très petite, mais qu'elle ne saurait, en restant toujours quantité de même espèce, devenir *infiniment* petite; ainsi, l'on aura tort si l'on dit qu'une longueur, un temps, une force, peuvent par eux-mêmes, et en restant toujours longueur, temps ou force, devenir infiniment petits et à plus forte raison infiniment petits du 1^{er}, du 2^e, du 3^e, etc., ordre.

Mais on aura raison si l'on dit qu'il y a, dans la nature, des quantités dont la constitution, dont l'essence est telle que, *par rapport à d'autres quantités*, elles peuvent être réputées infiniment petites du 1^{er}, du 2^e, du 3^e ordre.

Ainsi, nous venons de le voir, le point par rapport à la longueur est un infiniment petit, comme la longueur par rapport à la ligne droite indéfinie est elle-même un infiniment petit; or, il est facile de voir, sans entrer à ce sujet dans de nouveaux développements, que la droite indéfinie est elle-même infiniment petite par rapport au plan indéfini, et qu'enfin celui-ci est infiniment petit par rapport à l'espace. D'où il suit qu'en descendant l'échelle, et en allant de l'espace au point, nous passons par une série d'infiniment petits de divers ordres, les uns par rapport aux autres.

De semblables analogies existeront, si non en totalité, du moins en partie, pour d'autres classes de quantités, et il sera possible de concevoir, par rapport à ces quantités, l'infiniment petit et l'infiniment grand.

Ainsi, si je considère l'intensité g de la pesanteur à la surface de la terre, et si je la compare à l'action attractive moléculaire dont elle est la résultante, cette dernière sera infiniment petite par rapport à g.

La pression que communiquerait cette force g à un point matériel, sera l'infiniment petit de la pression ou du poids qu'elle donne à un corps de volume fini.

Au reste, dans la suite de cet ouvrage, ce que ces derniers exemples pourraient encore offrir de vague, sera complètement précisé; mais quant à présent je les ai joints aux précédents pour faire mieux comprendre que ce n'est que par le changement de module qu'il est permis à notre intelligence de concevoir les infiniment petits et leurs différents ordres. Tant qu'on reste dans la considération d'une seule et même quantité, il ne peut y avoir ni d'infiniment grand, ni d'infiniment petit. Il y a seulement zéro et l'infini, c'est à dire des opérations qui se détruisent quant à leur effet, ou qui n'ont pas de fin, d'une part négation de longueur, de l'autre impossibilité d'en créer une; mais lorsque vous consentez à sortir du domaine de la longueur, lorsque vous cherchez ce qu'il pourrait y avoir à sa place, soit en détruisant le module, soit en lui donnant une longueur infinie, alors vous trouvez des êtres géométriques qui viennent pour ainsi dire d'eux-mêmes se substituer à la longueur éliminée et qui sont susceptibles de revêtir d'une forme intelligible les résultats d'une semblable supposition.

En un mot, s'il n'est point donné à l'homme d'avoir la conscience de l'infini absolu, il lui est cependant permis de réaliser, soit dans ses conceptions, soit dans ses œuvres, l'infini relatif. Quand on étudie avec quelques détails la nature dans ses effets, on ne tarde pas à reconnaître qu'il est bien peu de ces effets entre lesquels l'infini ne se trouve point placé. C'est le moyen presque exclusif que la nature emploie pour produire, et c'est sans doute ce qui nous laisse si ignorants sur le mécanisme des procédés qu'elle met en usage. Mais cela ne nous empêche pas d'apprécier les résultats de ces procédés, de bien connaître, soit à l'aide de notre raison, soit à l'aide de nos sens, les propriétés dont ils jouissent, et par conséquent de pouvoir, en plusieurs circonstances, affirmer qu'en partant d'un résultat donné, et lui appliquant la considération de l'infini, nous serons nécessairement conduits à tel autre résultat prévu d'avance.

Pour le moment, je ne pousserai pas plus loin mes observations sur ce sujet; mais je ne puis cependant m'empêcher de faire une remarque importante.

C'est qu'il ressort de ces développements, que la science du calcul aura certainement plus d'étendue que nous n'étions d'abord disposés à lui en attribuer. Jusqu'à présent, en effet, nos investigations nous avaient fait penser qu'elle n'était susceptible de comparer entre elles que les quantités de même espèce, et tel est le but de l'algèbre.

Mais puisqu'il est possible, par une conception de l'esprit, de passer dans certains cas d'une espèce à l'autre, nous pouvons nous demander si cette science ne possèderait pas quelques ressources pour effectuer ce passage, pourvu toutefois qu'il y ait entre les espèces pour lesquelles il a lieu, une liaison à l'aide de laquelle notre esprit pourra être guidé dans la manière d'opérer cette transformation.

— *Conséquences relatives aux méthodes d'exposition des principes du calcul différentiel et intégral.*

Or, ce qui n'est encore qu'un doute, ce qui reste pour le moment à l'état de question, sera bientôt résolu, et l'on verra que c'est là l'objet essentiel du calcul différentiel et intégral. Seulement comme jusqu'à ce jour on s'était peu occupé des modules, et que la considération de leur transformation les uns dans les autres n'avait pas été suffisamment approfondie, il en est résulté qu'on n'a pu faire un pas dans cette partie de la science, sans avoir recours à ce qui, dans l'état actuel des idées, est l'équivalent de ces transformations, c'est à dire à la considération d'une même quantité, devenant ou infiniment grande ou infiniment petite. Telle est l'origine de toutes les obscurités qui règnent encore dans l'exposition du calcul infinitésimal, obscurités qui disparaîtront complètement, et seront remplacées par une méthode d'exposition aussi claire que facile, lorsqu'on remettra dans la question ce qui doit y figurer en effet, la transformation des modules.

Mais avant d'aborder cette partie de la science, continuons l'examen des différents états que peut prendre une longueur.

SECTION II.

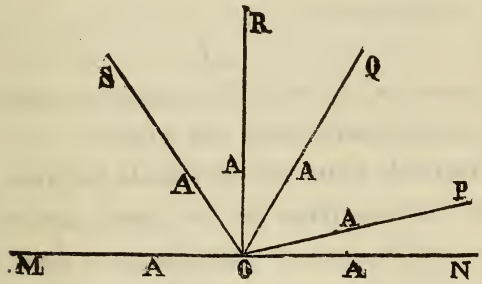
De la longueur et de ses différents états sous le point de vue de la direction.

— *Enoncé général de la question.*

En considérant la longueur sous le point de vue de sa grandeur ou de sa petitesse, nous sommes parvenus, je crois, à obtenir quelques idées claires sur la nature des quantités fractionnaires et irrationnelles, et sur celle des quantités qui, les unes par rapport aux autres, peuvent être réputées infiniment petites ou infiniment grandes. Nous avons vu ensuite comment, à l'aide de ces idées, on pouvait sinon comprendre, du moins admettre l'existence des nombres fractionnaires et irrationnels, et les soumettre, dans cet état, aux calculs algébriques. Nous verrons plus tard ce que deviennent, dans ces mêmes calculs, les considérations d'infiniment grand et infiniment petit.

Maintenant dépouillons, pour un instant, la longueur de sa propriété d'être plus ou moins grande, et ne la considérons que dans sa propriété d'être appliquée sur la direction de telle ou telle autre droite.

Mais, pour aller toujours du simple au composé, imaginons d'abord que nous ne sortons pas d'un même plan, et, afin de mieux préciser la question, supposons qu'ayant tracé sur ce plan une ligne indéfinie MN, je prends sur cette ligne un point O; puis, par ce point O, je fais passer une série de lignes droites OP, OQ, OR, OS...



Or, une longueur quelconque OA étant donnée, je puis concevoir que cette longueur est portée, à partir du point O, soit sur la direction ON, soit sur la direction OP, soit sur celle OQ, soit enfin sur toute autre passant par le point O; de là résultent évidemment une infinité de divers modes d'existence de la longueur OA, en vertu desquels modes, cette longueur pourra jouir de propriétés diverses, suivant qu'elle sera portée sur des directions différentes les unes des autres.

Cela posé, si j'ai fait choix d'un certain module λ pour la longueur OA comptée sur ON en allant de O vers N, et si je veux distinguer celle-ci des autres longueurs OA portées sur ces autres directions, je devrai faire usage, pour ces dernières, de nouveaux modules λ', λ'', λ''',... etc.

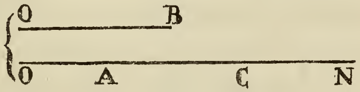
La question importante qu'il faudra maintenant résoudre sera de savoir si ces nouveaux modules λ', λ''; λ''',... peuvent, ainsi que nous l'avons laissé présumer, être exprimés à l'aide du module primitif λ, modifié par quelque signe d'opération ou d'expression algébrique.

— *Examen du cas particulier des deux modes d'existence de la longueur opposés l'un à l'autre.*

Mais avant de nous occuper de la solution de ce problème sous un point de vue aussi général, restreignons-en l'énoncé, et bornons-nous, pour le moment, à rechercher quel genre de modifications devrait éprouver le module λ, pour qu'ainsi modifié, il devînt propre à représenter en algèbre, non plus les longueurs OA portées sur MN à partir du point O et allant vers N, mais celles qui, portées sur la même ligne MN, à partir du même point O, se dirigeraient vers M.

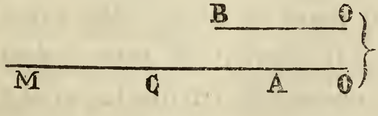
Le problème se trouve donc, comme on voit, restreint au cas particulier où les deux directions qu'on étudie sont sur la même droite, mais opposées l'un à l'autre.

Afin de nous bien diriger dans le mode d'investigation que nous devons suivre pour résoudre cette question, procédons à la discussion qui doit précéder la solution de toute question, c'est à dire à l'examen des propriétés dont jouissent les données.



Lorsque je ne m'occupe que des longueurs qui partant du point O sont toutes dirigées vers ON, je ne tarde pas à reconnaître que deux quelconques de ces longueurs OA et OB étant données, si je les ajoute l'une à l'autre, par exemple OB avec OA, en appliquant le point O de OB sur le point A, j'arriverai ainsi à un nouveau point C, et j'obtiendrai une troisième longueur OC plus grande que chacune des deux autres et égale à leur somme.

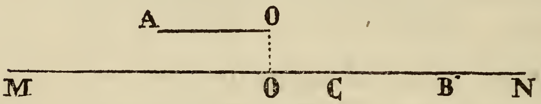
Ce que je viens de dire pour les longueurs dirigées vers ON et comparées entre elles, je pourrai le dire également pour les longueurs OA et OB,



dirigées vers OM, et comparées entre elles comme les premières ; de sorte que ces observations sont communes aux deux cas.

— *Expression de la loi qui régit l'opposition dans le mode d'existence.*

Mais il n'en est plus de même lorsque je veux comparer les longueurs de la première catégorie avec celles de la deuxième, et alors on remarque que les résultats auxquels on parvient sont essentiellement différents de celui que nous venons de constater.



En effet, si on suppose que l'une des deux longueurs précédentes OB est de la première catégorie, et par conséquent dirigée vers ON, et si l'autre longueur OA est de la deuxième et dirigée vers OM, lorsque je transporterai OA sur OB, de manière à faire coïncider, comme précédemment, le point O avec le point B, alors le point A au lieu de venir occuper la position C, primitivement placée après le point B, à une distance plus éloignée du point de départ que OB; ce point A, dis-je, viendra, en vertu *de la direction imprimée à* OA, se placer en C entre O et B à une distance du point de départ bien moindre que OB, de sorte que le résultat de cette opération sera de ne laisser subsister de OB que la partie OC.

Et par conséquent, si les deux longueurs OA et OB avaient été égales, le point C serait venu se placer au point O.

Tel est donc le caractère distinctif que les deux directions que nous considérons attachent aux longueurs qui s'appliquent sur elles, c'est que lorsque deux de ces quantités sont égales quant à leur longueur, et qu'on les ajoute l'une à l'autre *en laissant à chacune le cachet de sa direction et le sens dans lequel elle doit marcher en vertu de cette direction*, on doit, après cette addition, se retrouver à l'origine, c'est à dire au point de départ de la première longueur, ce qui exige que l'expression des opérations ainsi faites soit zéro.

Telle est la loi générale à laquelle doivent obéir les données du problème.

Or, si λ est le module des longueurs de la première catégorie, si λ' est celui des longueurs de la deuxième, une longueur quelconque dirigée vers 0 N aura pour expression $a\lambda$ et une longueur quelconque dirigée vers OM sera exprimée par $b\lambda'$.

Mais je ferai la remarque, que si entre les deux modules λ et λ' il existe une différence, il existe aussi quelque chose de commun ; en effet ces deux modules qui diffèrent quant à la direction, expriment l'un et l'autre une longueur : or, sous ce dernier point de vue, rien ne s'oppose à ce que j'admette que les deux longueurs qu'ils représentent ont la même valeur absolue et que leur différence, désignée jusqu'à présent dans l'écriture par l'accentuation du second, tient seulement à ce que celui-ci a une direction inverse du premier.

S'il en est ainsi, et si les modules ont égalité de longueur, il est évident que lorsque deux longueurs seront *égales* et inverses l'une de l'autre, si l'une est représentée par $a\lambda$, l'autre le sera par $a\lambda'$, puisque le résultat de l'opération du transport de ces modules (le nombre a) sur les lignes à exprimer, sera le même, soit qu'on marche de gauche à droite, soit qu'on se dirige de droite à gauche.

Cela posé, traduisons maintenant en algèbre la condition à laquelle doivent satisfaire les données du problème; pour cela il faudra écrire que si l'on *ajoute* à la longueur $a\lambda$ la longueur $a\lambda'$ avec le caractère de direction que l'accentuation est destiné à représenter, on doit avoir pour résultat zéro, c'est à dire

$$a\lambda + a\lambda' = 0.$$

Je pourrai donc à l'avenir faire entrer en considération dans les mêmes calculs les deux quantités λ et λ', pourvu que je ne perde pas de vue que toutes les fois que je trouverai la somme $a\lambda + a\lambda'$, je devrai à sa place mettre zéro.

— *Modification à faire subir au module primitif des longueurs, pour que ce module exprime des longueurs opposées aux premières.*

Mais, on le voit, si l'on n'introduisait rien de nouveau dans la question, et si on s'arrêtait à ce point, il ne pourrait pas être permis, dans l'écriture algébrique ordinaire, de supprimer les modules λ et λ' et de ne considérer que les nombres qui avec eux complètent l'expression des quantités ; il faudrait, pour prévenir les erreurs, conserver toujours ces modules; par ce moyen, nous saurons constamment que $a\lambda$ ajouté à $a\lambda'$ doit faire zéro et non pas $2a$, comme nous serions, non seulement tentés, mais même obligés de l'écrire, si les modules ne figuraient plus dans les calculs.

Présentement, pour bien saisir ce que j'ai à dire, supposons que pour un instant on se dépouille de tout ce qu'on a appris sur les quantités positives et négatives et qu'on se mette dans l'humble position de l'écolier qui commence l'algèbre et qui sait tout simplement que le signe $+$ veut dire ajouter et le signe $-$ retrancher.

Dans cet état, le principe précédent, la loi concrète (si je puis m'exprimer ainsi) qui représente les deux modes d'existence opposés de la longueur, cette loi, dis-je, figurée par la formule $a\lambda + a\lambda' = 0$, sera inexplicable par la théorie du calcul ; car à l'aide des idées développées dans cette théorie, jamais par voie d'addition on ne pourra avoir un résultat nul.

La question étant ainsi posée, et la difficulté bien reconnue, je pourrai faire la remarque suivante; c'est que, puisque en considérant les choses sous le point de vue concret, on doit, en ajoutant les deux expressions $a\lambda$ et $a\lambda'$, avoir zéro, je pourrai algébriquement obtenir ce résultat, si avant tout calcul et après avoir reconnu l'opposition entre ces deux expressions, je montre par avance et à l'aide d'une préparation faite sur le module λ', que ce module, égal d'ailleurs à λ quant à la signification de la longueur, doit être constamment *soustrait* au lieu d'être ajouté; or j'indiquerai facilement cela en faisant précéder le module λ du signe de la soustraction et employant ainsi $-\lambda$ au lieu de λ'.

Par ce moyen je satisfais à toutes les exigences de la question.

D'abord j'établis une distinction nette et tranchée entre les deux modules, et c'était une première condition qu'il fallait remplir ; en outre, cette distinction a l'avantage de laisser voir que les deux modules ont une même longueur, puisque c'est le même caractère qui les représente, et enfin, cette distinction est telle, qu'à l'avenir, dans tous les calculs arithmétiques qu'il faudra faire simultanément sur les deux longueurs qui ont un mode d'existence opposé, la condition $a\lambda + a\lambda' = 0$ se trouvera toujours satisfaite d'elle-même, puisque alors $a\lambda'$ se change en $-\lambda$ répété a fois, ou $-a\lambda$, et qu'ainsi cette condition devient une véritable identité.

Nous pouvons donc nous résumer et dire que toutes les fois que des quantités de même espèce doivent être considérées dans une même question comme ayant les deux modes d'existence opposés, on pourra leur donner le même module; sauf que pour l'une d'elles, on fera précéder le module du signe de la soustraction, afin d'indiquer que si l'on veut appliquer les règles ordinaires du calcul à ces quantités, il faut toujours soustraire, au lieu d'ajouter, les quantités frappées de ce signe.

— *Interprétation des expressions négatives.*

Voilà donc une seconde application de notre loi générale, à l'aide de laquelle nous apprenons que les expressions négatives ne représentent autre chose que le mode d'existence d'une quantité opposé à celui qu'on avait d'abord considéré. Voilà une seconde vérification de cette supposition, que nous avons mise en avant au commencement de cet ouvrage, que les modifications que le module primitif d'une quantité doit éprouver pour représenter cette même quantité sous divers états, sont susceptibles d'être exprimées à l'aide de ce module accompagné de quelque signe ou expression algébrique, et qu'ainsi l'effet de ces modifications est susceptible d'entrer dès l'abord dans l'expression algébrique des conditions d'un problème.

Qu'il me soit permis de m'arrêter un instant sur quelques considérations relatives aux quantités positives et négatives; au point de vue où je me trouve placé, tous les faits isolés de la science du calcul, ceux qui semblent le plus indépendants les uns des autres, m'apparaissent réunis entre eux par un lien si intime, que les rapprochements entre les principes théoriques et les faits naturels se présentent en foule dans notre discours.

Le point sur lequel je désire insister plus particulièrement en ce moment, c'est que la nature des développements qu'on vient de lire sur les longueurs positives et négatives est telle que tous nos raisonnements, bien appliqués aux longueurs, sont généraux et susceptibles de s'appliquer à toutes les quantités dans lesquelles on aura reconnu les deux modes d'existence opposés. Or, pour parler d'une manière générale, nous dirons à ce sujet que l'opposition dans le mode d'existence entre deux quantités se reconnait au caractère suivant : c'est que, « deux quantités entre lesquelles cette opposition existe, » s'anéantissent, relativement à l'un des effets qu'elles peuvent produire et qu'on étudie actuellement, » par leur réuunion, par leur addition matérielle » et physique, lorsque d'ailleurs ces quantités considérées isolément ont la même valeur absolue. »

Ainsi : parce que le mouvement qu'un poids placé dans le plateau d'une balance communique à cet instrument, autour d'un point fixe, est anéanti par l'*addition* d'un poids égal au premier placé dans l'autre plateau, je dirai que les modes d'existence ou d'action de ces deux poids sont opposés l'un à l'autre.

Parce que les phénomènes électriques produits par un corps qui possède une certaine quantité d'électricité vitrée, s'anéantissent et disparaissent complètement lorsqu'on *ajoute* à ce corps une quantité égale de fluide résineux, je dirai que les deux modes d'existence ou d'action de ces deux fluides sont opposés l'un à l'autre.

Parce que, dans le phénomène des interférences, la clarté produite par un rayon lumineux se trouve, sur certaines bandes, anéantie par l'*addition* d'un rayon lumineux venant de la même source que le premier, et qui lui est par conséquent égal, je dirai que les deux modes d'existence ou d'action de ces deux rayons sont opposés l'un à l'autre.

De sorte que l'on voit successivement découler d'un même principe, et se rattacher à un même point de départ, l'existence de toutes ces quantités qui, dans les diverses branches des mathématiques appliquées, ont dû ou devront un jour être considérées sous les points de vue positif et négatif.

Mais ici se présente une considération digne de tout notre intérêt.

Il est évident *à priori*, et nous avons eu soin de le mentionner dans la définition qui précède, que ce ne sont pas les quantités elles-mêmes qui doivent s'anéantir et disparaître par leur réunion, mais que ce sont les effets qu'elles sont susceptibles de faire naître et dont on fait actuellement l'étude, qui cessent d'être produits.

Ainsi, relativement aux longueurs et à leurs directions, ce ne sont pas les longueurs proprement dites, les chemins qu'elles représentent qui ont disparu; mais ce sont les effets du déplacement, par rapport au point de départ, qui se sont compensés;

un mobile qui aurait suivi les deux longueurs aurait réellement marché, mais cette marche, relativement au point de départ, n'aurait rien produit.

De même, les deux poids qu'on place dans les plateaux de la balance ne s'anéantissent pas comme poids, et sous ce rapport, au contraire, ils agissent de toute leur énergie sur le point d'appui qui supporte l'instrument; mais, relativement au mouvement que chacun d'eux isolément imprimerait au fléau, leur réunion, leur existence simultanée dans la balance a pour objet de produire le repos.

De sorte que, dans le premier cas, sous le point de vue du déplacement définitif, les deux longueurs peuvent être considérées comme si elles n'avaient pas existé, tandis que, sous le point de vue du chemin parcouru, il faut tenir compte de l'une et de l'autre.

Dans le second cas, sous le point du vue du mouvement du fléau de la balance, l'instrument est absolument dans la même situation que s'il n'y avait pas de poids; tandis que, sous le point de vue de la stabilité, de la résistance du point d'appui, de la pression qu'il supporte, il faut reconnaître que ce point est soumis à la fois à l'action des deux poids.

Au reste, cette observation, que ce sont les effets et non les quantités elles-mêmes qui se détruisent, semble vulgaire en apparence, et cependant, appliquée au phénomène d'optique que je viens d'indiquer, elle vient confirmer ce que nous savons aujourd'hui sur le mode de transmission de phénomènes lumineux.

En effet, il est évident de prime abord qu'un rayon lumineux ne saurait être immatériel; mais si ce rayon est matériel suivant le mode de l'émission, c'est à dire si ce sont des corpuscules qui produisent la vision par la série non interrompue de leurs chocs, on ne comprendra jamais que ces corpuscules, quelle que soit leur forme, quels que soient leurs mouvements giratoires, puissent, en venant frapper un objet toujours dans le même sens, anéantir ou même diminuer les effets des chocs qu'ils engendrent, ces effets, au contraire, s'ajouteront toujours. Ceci nous amène donc à penser qu'il faut que la substance qui produit la vision, tout en restant incessamment subsistante, se meuve de telle manière que, dans le phénomène des interférences, les déplacements qu'elle peut communiquer à la rétine, se détruisent; dès lors nous arrivons tout de suite à cette conséquence que, dans un même instant, les rayons qui produisent le phénomène doivent solliciter l'organe de la vision, l'un dans une certaine direction, l'autre dans une direction opposée; par ce moyen, la rétine restera en repos, et il n'y aura pas de vision. Or, il n'en faut pas davantage au physicien pour lui faire entrevoir les mouvements vibratoires d'un corps élastique, et le conduire sur la voie de la théorie des ondulations.

En suivant cette analogie pour les phénomènes électriques, on ne dira pas que ce que nous appelons fluide vitré et fluide résineux s'anéantissent par leur addition, par leur réunion sur un même corps, mais on sera conduit à penser que ce que nous appelons électricité vitrée n'est autre chose que le *développement d'une force* qui, relativement à celle qui se développe par l'électricité résineuse, a un mode d'existence complètement opposé; quoique d'ailleurs ces forces soient égales et produisent les mêmes effets lorsqu'elles agissent isolément sur des corps qui sont inertes par rapport à elles.

Sont-ce des vitesses de l'éther égales et contraires? ou bien des variations égales de dilatation et de condensation de l'éther par rapport à un certain état de densité de ce fluide qui serait particulier à chaque corps, et dont l'équilibre serait sans cesse rompu par l'action des agents extérieurs? ou enfin d'autres modes, d'autres états physiques, peut-être encore inconnus, par lesquels on peut ou on pourra concevoir plus tard que des forces égales et contraires se développent dans un fluide élastique? C'est ce que l'état actuel de nos connaissances sur l'électricité ne permet point de déterminer. Mais, du moins, l'existence de ces deux forces égales et contraires, quel que puisse être leur mode de génération me paraît incontestablement démontrée, parce que le phénomène fondamental de l'électricité satisfait complètement à la loi générale qui régit l'opposition dans le mode d'existence.

Je n'abandonnerai point ce sujet, sans consigner encore ici en quelques mots une observation dont les développements ultérieurs me paraissent devoir exercer une influence incontestable sur les applications de la science du calcul à l'étude des lois et des faits naturels.

Si nous nous reportons à l'exemple cité de la balance sollicitée par deux poids égaux, et si, pour plus de simplicité, nous substituons à cette balance une poulie sur la gorge de laquelle passe un cordon dont les deux bouts portent les poids en question, l'effet de ce système sera que tel, dans les calculs et les raisonnements à intervenir, nous devrons, l'un de ces poids étant considéré comme positif, considérer l'autre comme négatif, mais toujours eu égard à l'appareil sur lequel ils agissent.

Cet appareil réalise donc physiquement l'opération de calcul appelée *soustraction*, et il est évident qu'ici *l'objet physique* que nous appelons poulie remplace le signe algébrique. — Cette observation fort naturelle, au sujet d'un appareil si simple, vient à l'appui de cette pensée, à laquelle de plus amples développements sont réservés dans la suite de cet ouvrage, que les opérations du calcul doivent être les représentants des lois des relations physiques, sous l'influence desquelles naissent, se développent, et agissent les quantités.

Cette observation nous montre également qu'il n'est pas aussi peu mathématique qu'on pourrait le croire au premier abord de faire entrer des considérations de liaison physique dans les questions d'analyse; enfin, elle nous conduit, par la voie réciproque, à cette conclusion qu'à leur tour les formules algébriques pourront être réalisées physiquement par des appareils, par des machines, et c'est ce qui déjà a été tenté pour quelques unes. Mais il est important de faire remarquer ici, que tandis que la science arithmétique n'offre que des moyens très bornés, pour exécuter les calculs indiqués dans les formules, il n'en est pas de même des procédés que la nature met à notre disposition et qui peuvent varier à l'infini. Pour en donner un exemple fort simple, je citerai *la division* qui, dans les mouffles, est opérée par une série de soustractions, et dont le résultat s'obtient tout d'un coup par le plan incliné.

Ces considérations agrandissent le cadre des recherches auxquelles l'esprit humain peut se livrer, pour substituer aux calculs des procédés physiques. Il suffit, en effet, d'avoir remarqué que les mêmes formes algébriques sont susceptibles de s'appliquer à l'étude des longueurs, des poids, de la lumière, de l'électricité, etc., pour en conclure que ce ne sont pas seulement les appareils dynamiques qui sont susceptibles d'exécuter des calculs, mais qu'il n'est peut-être pas une seule branche des sciences humaines qui ne puisse un jour en cette matière apporter à l'homme sa part d'utilité. N'est-il pas arrivé, par exemple, que là où les procédés ordinaires de la géométrie et de l'aréométrie deviennent insuffisants pour faire connaître avec exactitude la mince épaisseur de certaines lames et des différences de densité dans les gaz qu'on pourrait réputer infinitésimales, n'est-il pas arrivé, dis-je, que des procédés optiques sont venus se substituer aux premiers, et ont fait apporter dans les déterminations obtenues une précision presque égale à celle que le calcul aurait pu fournir lui-même?

— *Observations sur le passage de cette première partie de nos études à la suivante.*

Jusqu'à présent les considérations que j'ai présentées ont pu ne paraître douées que d'un intérêt secondaire, parce que, bien qu'elles apportent plus de netteté et de précision dans certaines doctrines, comme ces doctrines étaient déjà connues et appliquées tous les jours, elles n'ont pu révéler rien de nouveau; il n'en sera pas de même de ce qui va suivre, et l'intérêt de curiosité que les hommes attachent à la révélation de tout ce qui a été jusqu'à ce jour mystérieux ou incompris fera peut-être attacher plus de prix à cette seconde partie de notre travail.

Toutefois, tant est grande la force du préjugé dans tous les esprits, on ne sera pas peu surpris d'apprendre qu'à l'origine, ce que j'ai d'abord découvert, ce qui m'a offert le plus de facilité, c'est l'interprétation des expressions imaginaires; que c'est après ce premier pas que j'ai été conduit à l'interprétation des expressions négatives, puis des expressions fractionnaires et irrationnelles, et enfin à celle des expressions infiniment grandes et infiniment petites.

Et quoique maintenant l'intelligence de mes idées ait pu devenir plus claire et plus simple pour tous, par le résultat même de mes observations, peut-être y aura-t-il des personnes qui m'accorderont plus facilement de considérer les modules et leurs modifications pour l'interprétation des expressions imaginaires, et aussi pour celles des quantités infiniment petites et infiniment grandes, qu'elles ne seraient disposées à le faire pour l'interprétation des expressions négatives et à plus forte raison fractionnaires, prétendant qu'on sait très bien depuis longtemps ce que sont ces dernières, pour lesquelles par conséquent il n'y a rien à changer.

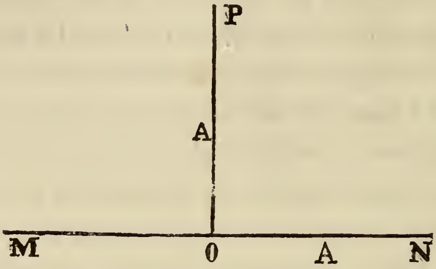
Or, cette tendance que j'exprime ici et dont je crains les effets chez quelques uns, j'ai eu aussi à la combattre en moi-même; car j'avais, comme tout le monde, les mêmes préjugés contre lesquels mes premiers doutes n'ont pu que faiblement lutter. Aussi, ne me suis-je enfin déterminé à les sacrifier que lorsque la vérité m'a semblé s'expliquer avec des accents tellement puissants, tellement irrésistibles, que conserver plus longtemps de l'hésitation eût été vouloir rester sciemment dans l'erreur.

Si donc j'avais été le maître de donner à mon travail tel mode d'exposition que j'aurais voulu, je n'aurais pas hésité à expliquer d'abord ce que j'ai à dire de nouveau sur les expressions imaginaires; entrant alors dans un champ qui jusqu'à ce jour a été si peu exploité, j'aurais pu faire suivre au lecteur le chemin que j'aurais voulu, et comme il n'en résultait pour lui aucune contrariété d'habitudes, il n'aurait pas hésité à marcher avec moi dans la route que j'aurais tracée. Mais si ce mode d'exposition devait me présenter quelques avantages, il aurait eu pour la chose elle-même de grands inconvénients, et par conséquent j'ai dû y renoncer; j'ai donc commencé par prendre le rôle de réformateur, qui est hérissé de difficultés, au lieu de celui de novateur, qui n'est pas à beaucoup près aussi embarrassant.

Ces remarques pourront servir à excuser quelques longueurs dans les parties qu'on vient de lire. Si les idées que je présente sont généralement adoptées comme vraies, leur exposition dans peu de temps se fera à l'aide de quelques lignes seulement, et beaucoup de choses pourront être supprimées de cet écrit; mais dans le moment présent, ces choses m'ont paru sinon indispensables du moins très utiles pour faire admettre ces idées nouvelles.

— Examen du cas particulier des deux modes d'existence de la longueur perpendiculaire l'un à l'autre.

La marche à suivre dans cette étude, comme dans les études précédentes, consistera à reconnaître le caractère distinctif des deux états dont nous nous occupons, celui qui les distingue de tous les autres états, en un mot, il faudra trouver l'énoncé algébrique, si toutefois il existe de la perpendicularité.



Or, si O est toujours le point de départ de toutes les longueurs que nous considérons, et si OA ou $a\,\lambda$ est une longueur située sur ON, il faudra pour obtenir cette même longueur sur OP perpendiculaire à ON, exécuter d'abord certaines opérations géométriques, à l'aide desquelles OP se trouvera tracé *comme direction*, et puis porter sur OP le module λ un nombre de fois égal à a.

Cela posé, il s'agit de savoir s'il n'y aurait pas une modification de λ que je représenterai par λ' qui fût telle que $a\,\lambda'$ exprimât que la longueur OA doit être considérée comme existant sur la perpendiculaire OP, au lieu d'exister sur ON; c'est à dire, pour en revenir à une idée déjà plusieurs fois exprimée dans cet ouvrage, n'y aurait-il pas une opération algébrique qui serait le représentant de l'opération géométrique à l'aide de laquelle on passe d'un état primitif de direction à l'état perpendiculaire?

Dans l'état d'incertitude où je me trouve encore à ce sujet, je pourrais affecter pour cette représentation, telle que je viens de la définir, un signe quelconque dont je frapperais λ, et, par ce moyen, j'aurais différencié les premières longueurs situées sur ON, de celles qui sont situées sur OP.

Mais, sous le point de vue algébrique, ce moyen n'aurait pas avancé la question, puisque sur ce signe arbitraire ainsi choisi, je ne pourrais effectuer aucune opération.

La science du calcul n'aura donc rien à gagner à ce que nous proposons de faire, si la modification dont il s'agit n'est pas de nature algébrique; or, il ne dépend pas de nous qu'il en soit ou qu'il n'en soit pas ainsi. Cette propriété est inhérente à la nature des choses, elle a été créé avec elles, et ce qui nous reste à faire, c'est de trouver un moyen d'investigation propre à nous faire connaître la vérité sur ce fait.

Mais s'il est possible que le nouveau module λ' ne soit autre chose que λ modifié algébriquement, nous pouvons toujours admettre que ce modificateur algébrique est un certain facteur inconnu p, et écrire par conséquent que $\lambda' = \lambda p$, restera maintenant à découvrir ce que peut-être p.

Cela posé, marchons plus avant dans notre investigation.

— *Recherche de la loi de la perpendicularité.*

Or, je remarque que c'est le propre de la perpendicularité, et que ce caractère n'appartient qu'à elle, que si maintenant je fais sur OP, et dans le même ordre, les mêmes opérations que j'ai d'abord faites sur ON, je retomberai exactement sur la direction OM, opposée à ON.

Voilà donc un fait, une relation géométrique, qui lie entre elles ces trois directions; tel est le principe géométrique de la perpendicularité. Voyons ce qu'en dira l'algèbre.

Mais si la multiplication du module primitif λ, appartenant à une direction qui peut d'ailleurs être quelconque; si, dis-je, la multiplication de ce module par p doit avoir pour objet d'exprimer que la direction n'est plus considérée sur la ligne primitivement choisie, mais sur la perpendiculaire à cette ligne, il s'en suit qu'en continuant de rester soumis aux prescriptions de ce principe, et en l'appliquant au nouveau module λp, c'est à dire à la direction OP, et par conséquent en multipliant ce module par p, ce qui donnera λp^2, on obtiendra le module des longueurs perpendiculaires à OP, lesquelles résultent du renouvellement sur OP des mêmes opérations qu'on avait faites sur ON, et pratiquées exactement dans le même ordre. Or, géométriquement, cela me fait retomber sur OM; mais déjà j'ai prouvé que le module des longueurs qui sont situées sur OM doit, relativement au module λ, être représenté par $-\lambda$; donc enfin la loi de la perpendicularité exige qu'on ait $-\lambda = \lambda p^2$, et comme cela doit avoir lieu quel que soit le module λ qu'on aura choisi, l'on en déduira qu'il faut que p soit égal à $\pm\sqrt{-1}$.

Quant au double signe, nous l'avons introduit *pour ne pas déroger aux habitudes ordinaires* (1). Mais il est évident que se bornant au cas particulier qui nous occupe, comme nous savons d'avance que nous n'avons pas introduit dans la question le facteur p avec le signe de la soustraction, ce n'est que $+\sqrt{-1}$, ou $\sqrt{-1}$ qui peut être sa valeur.

Mais comme c'est le propre de la nature du raisonnement que nous avons employé de nous faire parvenir au même résultat final $-\lambda=\lambda p^2$, soit que nous eussions employé p avec le signe moins ou avec le signe plus, il n'est pas étonnant que la solution obtenue se présente avec ces deux signes.

---

(1) Ce qu'il y a de remarquable, et cette vérité sera suffisamment confirmée dans la deuxième partie de cet ouvrage, c'est que la règle ordinaire des signes pour les monomes n'est rationnellement applicable qu'au cas qui nous occupe, à la considération des directions, et nullement à la grandeur des quantités; et comme cette distinction, sous le point de vue théorique, n'a jamais été nettement exprimée il en est résulté qu'à cet égard toutes nos méthodes d'exposition manquent de précision; on verra, dans le chapitre suivant, que nous serons conduits à une conclusion du même genre. Quelques auteurs d'éléments ont reconnu l'insuffisance des démonstrations ordinaires de la règle des signes pour ce qu'on appelle les quantités *isolées*, et en cela ils ont fait preuve de bon jugement. En fait, la règle des signes n'est applicable qu'aux directions; c'est une inutilité quand ce n'est pas un vice, de vouloir la généraliser, et de continuer de l'appliquer dans les questions où la considération des grandeurs est seule mise en jeu.

D'ailleurs il est facile de voir à quoi correspond le second signe; ce que nous savons déjà sur les deux modes d'existence opposés suffirait pour nous faire voir *à priori*, que si $\lambda\sqrt{-1}$ est le module des longueurs situées sur OP, $-\lambda\sqrt{-1}$ doit être celui des longueurs opposées à celles-là, et par conséquent situées sur OQ, prolongement de la perpendiculaire au dessous de MN. Mais le raisonnement direct conduit aussi à ce résultat; en effet, si, comme nous l'avons indiqué, p représente l'ensemble des opérations géométriques qu'il faut faire pour avoir OP, il est évident qu'en donnant à ces opérations un mode d'existence ou d'action inverse du précédent, par rapport à la ligne ON, j'aurai OQ. Or, puisque c'est un mode inverse du premier, il devra être représenté par $-p$, le premier l'étant par p; d'où il suit que le module relatif à OQ sera $-\lambda p$, puis répétant sur OQ les mêmes opérations $-p$, que j'ai faites sur ON, j'aurai pour module de la nouvelle direction obtenue $-p \times -\lambda p$ ou λp^2, mais cette nouvelle direction est OM dont le module est $-\lambda$, par suite on aura comme précédemment $-\lambda = \lambda p^2$, et comme je sais que p a été employé dans le raisonnement avec le signe $-$, j'en déduirai $p = -\sqrt{-1}$, ce qui montre de nouveau que le module des longueurs comptées sur OQ doit être $-\sqrt{-1}$.

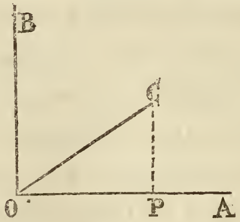
Voilà donc, si je ne me trompe, le problème que nous nous étions proposé, complètement résolu, et cette solution vient encore confirmer notre loi générale, que, dans la science du calcul, les formes ou expressions algébriques incompréhensibles sur les nombres abstraits sont quelquefois susceptibles de recevoir une interprétation claire et précise lorsqu'on passe à la considération des quantités concrètes.

— *Exposé de la méthode d'investigation qui m'a conduit pour la première fois à la représentation algébrique de la loi de la perpendicularité.*

J'ai dit qu'au début de mes recherches sur le sujet traité dans ce mémoire, c'est l'interprétation des expressions imaginaires qui s'est d'abord montrée à moi; il semble toutefois, d'après la démonstration qu'on vient de lire, que cette démonstration n'est qu'une conséquence de la loi générale énoncée, et que par conséquent l'interprétation des expressions imaginaires n'a pu être révélée qu'après la découverte de cette loi; et de plus, comme dans cette démonstration je m'appuie sur ce qui a été déjà démontré au sujet des quantités négatives, on en pourrait conclure, contrairement à ce que j'ai annoncé, que ce qui est relatif à l'interprétation de ces dernières quantités a dû précéder l'interprétation des imaginaires.

Tout cela serait vrai, si la démonstration que je viens de donner était réellement celle qui m'a conduit à cette interprétation, et si, au contraire, elle n'était pas venue après coup; mais ce n'est qu'après avoir longtemps médité sur les conséquences de cette première découverte que l'importance, de la considération des modules m'a été démontrée, et que l'énoncé de la loi générale que j'ai fait connaître s'est présenté à mon esprit ; il est résulté de tout cela un ensemble de considérations se rattachant toutes à un principe général, duquel, postérieurement, je suis parvenu à faire tout dériver. Mais ce n'est point ainsi que j'ai procédé à l'origine, et comme ce sujet a une importance incontestable, je crois qu'il ne sera pas inutile d'exposer ici comment, sans les considérations qui se rattachent à la loi des modules, j'étais parvenu, à l'origine, à découvrir la signification du signe $\sqrt{-1}$.

Voici ce qu'au mois d'avril 1839 j'écrivais à ce sujet :



« Je suppose que je me propose d'examiner ce qui aura lieu dans l'angle droit AOB pour toutes les directions qu'une ligne, passant par le point O, pourra prendre dans cet angle.

» Imaginons qu'une ligne, que je désignerai par a, soit appliquée sur OA, à partir du point O, et que sans cesser d'avoir son point de départ en O, elle s'élève au dessus de OA, et prenne ainsi toutes les positions possibles entre OA et OB.

» Cette ligne, quant à sa longueur, sera toujours représentée algébriquement par a, mais comment donner une idée de ses diverses positions? Tel est le problème que je me propose de résoudre.

» Or, soit OC une de ces positions; je remarque que, si j'abaisse du point C une perpendiculaire CP, je remarque, dis-je, que si on me donnait OP et CP, il me serait très facile d'avoir le point C, et par conséquent de connaître OC, non seulement de longueur, mais encore de position par rapport au point O et à la ligne OA.

» Pour cela, il faudrait, à partir du point O, sur OA, porter la longueur OP, élever en P sur OA une perpendiculaire, et prendre sur cette perpendicularité, à partir de son pied, la distance PC; ce procédé conduirait au point C et ne donnerait jamais que le point C.

» Or, tout cela est-il écrivable algébriquement? c'est à dire, tout cela peut-il être écrit avec les seuls signes de l'algèbre, et peut-on ensuite, sur l'expression ainsi obtenue de la longueur a et de sa direction, exécuter les opérations algébriques ordinaires sans cesser d'avoir des résultats exacts?

» Cette question semble, au premier abord, devoir être résolue par la négative.

» Si, en effet, je voulais, pour exprimer ces opérations géométriques qui me donnent le point C, écrire que OC est égal à OP + PC, j'arriverais bien avec cette expression au point P sur la ligne OA; mais, parvenu à ce point, rien ne m'indiquerait, dans l'expression ci-dessus, que PC doit être porté perpendiculairement à OA ; en conséquence, je ne pourrais que l'ajouter à OP, à la suite du point P, et j'arriverais ainsi à une longueur OC, posée sur OA, qui ne serait nullement la même que celle que je veux représenter, soit pour ce qui concerne la longueur, soit pour ce qui concerne la position.

» Toutefois je pourrai faire la remarque, que si j'attachais à la quantité PC un signe particulier destiné à indiquer que la direction de PC doit être perpendiculaire à OA, je remarque, dis-je, qu'à l'aide de ce signe l'expression OP + PC prendrait le caractère que je veux lui imprimer et qu'ainsi elle serait le représentant fidèle des opérations géométriques qu'il faut exécuter pour arriver de O en C.

» Si, par exemple, j'adopte pour ce signe la figure $\urcorner$ alors l'expression OP × PC devient

$$OP + \overline{PC}|$$

Ce qui veut dire que PC doit être porté, à partir du point P, non plus sur la ligne OA, dans le prolongement de OP, mais perpendiculairement à OA.

» Voilà sans doute une convention qu'il est bien permis de faire et dont on pourra se servir dans les recherches géométriques ; mais, si b et c sont les longueurs de OP et de PC, l'expression

$$b + \overline{c}|$$

ne représentera plus rien d'algébrique, puisque nous ne savons aucunement ce que peut être en algèbre le signe $\overline{}|$; dès lors comment appliquer à une quantité affectée de ce signe les considérations de cette science ?

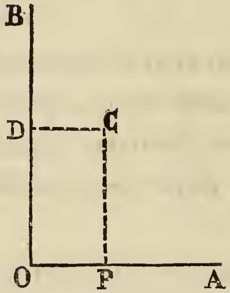
» Ainsi, en convenant d'affecter un indice particulier à la perpendicularité, nous pouvons bien peindre aux yeux, dans l'écriture ordinaire, cette direction particulière d'une ligne par rapport à un autre ; mais nous restons dans l'impuissance d'appliquer à ces représentations les procédés des calculs algébriques.

» Or, voyons si en poussant plus loin nos investigations, nous ne pourrons pas parvenir à réaliser ce qui n'est encore qu'un désir.

» Je vois d'abord que la direction que j'ai prise pour la ligne OC étant arbitraire, je pourrai représenter toutes ces directions à l'aide des longueurs b et c et du signe de la perpendicularité. Ce dernier signe étant donc suffisant pour tout exprimer, occupons-nous uniquement de sa recherche.

» Mais, pour connaître entre tous les symboles celui qui sera le plus convenable, il convient, avant tout, de bien connaître la loi du principe dont on veut que ce symbole soit le représentant.

» Etudions donc la loi fondamentale de la perpendicularité.



» Pour cela, soit pris à partir du point O une longueur λ aboutissant en P, soit élevé en P une perpendiculaire PC dont la longueur est μ, et soit élevé en C sur CP une perpendiculaire CD qui coupe OB en D.

» Il est connu en géométrie qu'en exécutant cette figure (l'angle en O étant d'ailleurs droit), les deux longueurs CD et DO sont respectivement égales à OP et PC ou à λ et μ; et non seulement ces faits sont des conséquences de la perpendicularité, mais ils en sont l'indice exclusif, de sorte que toute autre direction que celle de la perpendicularité ne donnerait pas à la fois $CD = \lambda$ et $DO = \mu$.

» Cette figure exprime donc la loi fondamentale de la perpendicularité; or, voyons comment nous pourrons la représenter.

» Et d'abord PC ou μ étant perpendiculaire à OA, on le représentera d'après nos conventions par $\mu\rceil$

» CD étant lui-même perpendiculaire à PC qui est représenté par $\overline{\mu}|$ il faudra d'après nos conventions couvrir CD ou λ de deux fois le signe de la perpendicularité et alors CD sera représenté par $\overline{\overline{\lambda}}\|$

Mais après avoir ajouté ensemble par voie de perpendicularité les trois longueurs OP, PC, CD, il arrive géométriquement que j'atteins le point D auquel je serais directement parvenu en prenant la longueur perpendiculaire OD ou $\overline{\mu}|$

Nous pouvons donc dire d'après cela que la loi physique du principe de la perpendicularité exige qu'on ait algébriquement.

$$\lambda + \overline{\mu}| + \overline{\overline{\lambda}}\| = \overline{\mu}|$$

ou bien puisque $\overline{\mu}|$ figure dans les deux membres,

$$\lambda + \overline{\overline{\lambda}}\| = 0$$

» Mais cette loi exprimée par une équation dans laquelle les signes algébriques + et = sont combinés avec un signe conventionnel qui jusqu'à présent ne représente pas une opération de calcul; cette loi, dis-je, reste incompréhensible en algèbre et ne représente pas des opératious algébriquement exécutables sur λ.

» Or, c'est surtout cette dernière propriété que nous voudrions lui faire acquérir; pour cela ce qui se présente de plus naturel à l'esprit, c'est de se demander s'il n'existe pas un facteur algébrique qui, multipliant une longueur quelconque λ, peut lui faire jouer un rôle tel que l'expression de cette longueur ainsi modifiée substituée dans la loi écrite de la perpendicularité, fasse de cette loi une formule algébriquement vraie, c'est à dire une identité.

» Or si p est ce facteur, $\overline{\lambda}|$ sera représenté par λp et $\overline{\overline{\lambda}}\|$ par λp^2.

» La loi de la perpendicularité sera donc

$$\lambda + \lambda p^2 = 0$$

ou

$$\lambda (1 + p^2) = 0$$

et comme λ ne saurait être nul puisqu'il est quelconque, on aura

$$1 + p^2 = 0$$

d'où

$$p = \pm \sqrt{-1}.$$

» Donc il y a une expression algébrique, et cette expression est $\sqrt{-1}$ qui fait que la loi en question cesse de rester dans le domaine des indices conventionnels, et rentre ainsi dans le domaine de l'algèbre.

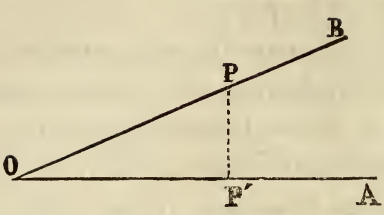
» C'est à dire qu'il y a une opération algébrique qui n'est autre chose que la représentation dans le calcul de l'opération qui consiste en géométrie à élever une perpendiculaire sur une ligne.

« De même qu'il y a en algèbre des opérations qui remplacent celles par lesquelles on ajoute ou on retranche sur une même ligne une longueur à une autre, de même qu'il y a aussi en algèbre une opération qui exprime celle qu'on exécute en géométrie lorsqu'on porte plusieurs fois à la suite l'une de l'autre la même longueur. »

Voilà par quel moyen je suis parvenu à m'assurer pour la première fois que $\sqrt{-1}$ était algébriquement l'indice de la perpendicularité géométrique. Or, on voit que, dans cette démonstration, la considération des modules ne figure pas; on voit aussi que je n'avais eu aucun besoin de considérer dans les quantités les deux modes d'existence opposés. Mais ce procédé, quoique rigoureux en lui-même, est loin, à mes yeux, d'être aussi philosophique que celui que j'ai exposé d'abord, parce que celui-ci ne devient plus qu'un cas particulier d'une méthode générale et féconde de laquelle doit ressortir non seulement ce qui est relatif à un mode *particulier* d'existence d'une même quantité, mais en outre ce qui se rapporte à l'ensemble général de tous les modes d'existence possibles, et c'est ce que nous allons continuer de développer.

— *Examen du cas particulier des deux modes d'existence de la longueur faisant l'un avec l'autre un angle quelconque, etc.*

Dans ce nouvel examen, comme dans ceux qui l'ont précédé, nous commencerons par étudier les diverses relations géométriques qui existent entre les données de la question, et il ne nous restera qu'à examiner ensuite si l'algèbre nous donne les moyens d'exprimer analytiquement ces mêmes relations.



Cela posé, soit OA la direction que nous prenons pour point de départ, et soit OB une direction qui fait avec la précédente un angle α.

Si, d'un point quelconque, P, de la direction OB, nous abaissons une perpendiculaire PP′ sur OA, ce sera un fait géométrique patent, que les deux lignes OP′ et P′P ajoutées ensemble, *en ayant égard tant à leurs longueurs qu'à leurs directions*, conduiront au point P, comme on y serait arrivé en suivant la longueur OP, sur la direction OB.

Or, nous savons déjà que pour avoir égard à la direction perpendiculaire de P′P sur OA, il faut que l'expression de la longueur P′P soit accompagnée du facteur algébrique $\sqrt{-1}$, de sorte que le chemin OP′P a pour expression analytique

$$OP' + P'P\sqrt{-1}.$$

Ecrivons donc que cette expression est égale à celle qui doit représenter la distance ou longueur OP prise sur OB.

Dans l'état d'incertitude où nous nous trouvons sur la forme analytique qui doit servir à représenter la direction OB, relativement à celle OA, nous admettrons, pour un instant, ainsi que nous l'avons pratiqué dans les recherches précédentes, que cette forme consiste en un certain facteur inconnu, que nous représenterons par p, et, en conséquence, OP sera représenté tant en longueur qu'en direction par le produit algébrique OP $\times\, p$.

Nous devrons donc avoir en vertu des précédentes remarques

$$\mathrm{OP} \times p = \mathrm{OP}' + \mathrm{P'P}\sqrt{-1}$$

équation de laquelle nous tirerons

$$p = \frac{\mathrm{OP}'}{\mathrm{OP}} + \frac{\mathrm{P'P}}{\mathrm{OP}}\sqrt{-1}$$

Telle est la valeur de p, telle est donc la forme de l'expression analytique qu'on peut appeler le coefficient de direction d'une ligne faisant un angle α avec OA.

Or, il est évident que rationnellement, puisque cette forme doit, dans les recherches algébriques, représenter la direction de la ligne OB; il est évident, dis-je, qu'elle doit convenir à tous les points de cette ligne, et, par conséquent, ne pas dépendre de la considération particulière de l'un de ses points P.

Tel est, en effet, le caractère propre à l'expression ci-dessus, car si le point P y figure, ce n'est qu'en apparence. C'est, en effet, une vérité géométrique, dépendant de la nature de la ligne droite et de l'angle, que les rapports $\frac{OP'}{OP}$ et $\frac{P'P}{OP}$ restent invariables, quel que soit le point P qu'il aura plu de prendre sur OB, de telle sorte qu'en représentant, comme on est dans l'usage de le faire, les valeurs constantes de ces rapports par cos α et sin α, il vient définitivement

$$p = \cos \alpha + \sqrt{-1} . \sin \alpha .$$

forme sous laquelle l'indépendance de la valeur de p, par rapport au point P, ou à tout autre de la direction OB, est rendue manifeste.

Il est donc bien démontré maintenant que les directions des droites, les unes par rapport aux autres, ont une expression analytique ; de telle sorte qu'à l'aide de cette expression, on pourra soumettre ces directions au calcul, avec les mêmes facilités qu'on y soumet les longueurs représentées par les nombres. L'on voit encore qu'on pourra dans ces calculs, comme cèla se pratique en géométrie, faire à la fois sur les longueurs et les directions toutes sortes de recherches, puisque l'expression multiple

$$r\ (\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha)$$

désigne simultanément une ligne dont la longueur est r, et qui fait un angle α avec la direction prise pour point de départ.

Arrêtons-nous maintenant quelques instants sur les faits remarquables qui ressortent des principes que nous venons d'établir.

— *Logarithmes circulaires.*

Les recherches analytiques, faites depuis Euler, ont confirmé l'identité qui existe entre les deux expressions $e^{\alpha\sqrt{-1}}$, et $\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$. Mais maintenant que nous savons que l'une de ces expressions, $\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$, représente en géométrie la direction d'une ligne faisant avec celle prise pour point de départ, un angle α, maintenant, dis-je, l'égalité suivante :

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha = e^{\alpha\sqrt{-1}}$$

qui, jusqu'à ce jour, n'a été autre chose qu'une espèce de symbole, devient une extension toute naturelle des enseignements fournis par la théorie logarithmique.

En effet, qu'est-ce que le logarithme d'une quantité? Au point de vue le plus général, c'est le rang qu'occuperait, d'après sa grandeur, cette quantité dans une progression où toutes les quantités de même espèce se trouveraient disposées suivant l'ordre de leur développement. Or, si, par analogie, nous voulons faire l'application de cette idée première aux directions, nous reconnaîtrons que leur développement forme, autour, d'un point fixe, une série embrassant la circonférence entière qui s'étend autour de ce point. De sorte qu'ayant pris une d'entre elles pour point de départ, le rang de chacune des autres pourra être compté par l'arc de circonférence qu'elle intercepte à partir de la première, en d'autres termes par l'angle qu'elles forment entre elles. Nous pourrons donc poser en principe, d'après la remarque précédente, que l'angle est le logarithme de la direction; et voilà pourquoi l'analyse, dans sa rigoureuse logique, confirmant d'avance cette vérité, et alors que les géomètres ne savaient point encore que $\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha$ est l'expression analytique des directions; l'analyse, dis-je, avait égalé cette expression à une exponentielle de l'angle.

Je serais entraîné trop loin, si je voulais suivre cette pensée dans tous ses développements, car elle n'est rien moins que le germe des logarithmes qu'on pourrait appeler *circulaires*, et elle nous reporterait vers les plus importantes questions de la théorie des nombres sur lesquels elle jette une clarté inattendue.

— *Application à la théorie des nombres.*

Quelques mots seulement pour faire sentir l'importance de cette dernière assertion.

Si un nombre X est premier avec a, et si on divise successivement tous les multiples de X compris entre X et $(a - 1)$ X, par le nombre a, on aura constamment un reste; or ces restes marcheront en progression par différence, mais cette progression sera circulaire, et voici ce qu'il faut entendre par là. On divisera une circonférence par a points de division, et on mettra successivement sur ces points tous les nombres depuis 1 jusqu'à a inclusivement. Cela fait pour compter tout le long de la circonférence en progression par différence, il faut toujours franchir le même nombre de divisions. Si, par exemple, on prend pour ce nombre la valeur du reste fourni par la première division $\frac{X}{a}$ et qu'on en fasse usage à partir du point marqué a, on tombera ainsi successivement et dans l'ordre où ils se sont présentés, sur les divers restes obtenus.

Mais il est évident que les points de division de la circonférence peuvent, pour cet objet, être remplacés par les *directions* des rayons qui aboutissent à ces points, et de cette simple observation résulte bien clairement qu'il y aura analogie complète entre l'ordre successif de ces directions et celui des résidus. Nous voilà donc encore conduits, par des considérations d'un ordre tout à fait élémentaire, à ce genre d'analogie remarquable, signalée par M. Poinsot (1), entre les résidus produits par les racines primitives d'un nombre, et les n racines de l'équation binome qui, comme on sait, ne sont autre chose que des expressions de la forme $\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha$, c'est à dire des *directions*. Il est donc facile d'entrevoir dès à présent que toute la théorie des résidus, dans l'étude des nombres, est intimement liée à celle des direc-

(1) *Mémoires de l'Institut*, tome XIV et dernier, années 1813, 1814 et 1815, page 386; et *Mémoires de l'Académie royale des Sciences*, années 1819 et 1820, page 100.

tions, et qu'en conséquence toute propriété dont jouiront ces dernières pourra être immédiatement appliquée aux premiers. De là un mode d'investigation qui conduit de prime abord à la constatation de plusieurs vérités. Mais c'est un objet sur lequel je ne saurais ici m'arrêter plus longtemps.

— *Généralité des principes précédents et interprétation des expressions imaginaires.*

Ce que j'ai déjà dit au sujet des quantités positives et négatives, me dispensera d'insister ici longuement sur ce point que les raisonnements qu'on vient de lire, bien qu'appliqués aux longueurs sont susceptibles de s'étendre à toutes les quantités qui, comme les longueurs, ont des modes d'existence définis par des conditions analogues. Ainsi nous dirons, dans un sens général : « Lorsqu'une espèce de quantité possèdera entre les deux états contraires qu'on appelle » positif et négatif, un troisième état intermédiaire, » et lorsque ce troisième état sera tel que, si après » avoir fait, pour l'obtenir, certaines opérations » sur l'état positif, il arrive qu'en répétant sur cet » état intermédiaire les mêmes opérations et dans le » même ordre, on passe à l'état négatif, ce troisième » état, dis-je, devra être représenté dans l'algèbre » par l'expression $\sqrt{-1}$. »

On comprend ainsi toute la généralité de nos principes , et on voit que ce n'est pas une interprétation seulement *géométrique* des expressions imaginaires que je donne dans cet ouvrage, mais une interprétation de ces expressions pour toutes les quantités dont les divers modes d'existence sont définis par des conditions analogues à celles qui régissent entre elles les directions. A ce point de vue, ce travail se distingue de ces quelques essais qui ont été produits sur cette matière, et dont je montrerai l'insuffisance dans le chapitre suivant. Il n'est point le résultat d'une coïncidence observée, peut-être par hasard, entre une figure de géométrie et quelques expressions algébriques; mais il ressort de cette pensée aussi féconde qu'elle est simple, que ce qui est lié par nature, pourrait aussi l'être dans certains cas par le calcul, et que ce qui est lié de la même manière devra sans doute avoir pour expression analytique les mêmes symboles d'opération.

— *Des quantités positives et négatives, par rapport aux imaginaires, et du passage du réel à l'imaginaire.*

Quand il s'est agi, sur une même droite, de considérer des directions opposées, les géomètres ont vu d'abord et prouvé ensuite l'intervention nécessaire des signes + et —, mais ils ne sont pas allés au delà. En adoptant, pour la représentation analytique des courbes, les coordonnées rectangulaires, ils ont affecté le facteur +1 aux abscisses positives et le facteur —1 aux abscisses négatives, parce qu'ils ont aperçu qu'il y a entre ces deux directions opposées une relation obligée. Quant aux ordonnées, ils les ont aussi reliées entre elles par une relation du même genre. Mais, entre les ordonnées et les abscisses, ils n'ont rien vu de commun que l'équation même de la courbe, c'est à dire la fonction qui lie la *grandeur* de l'ordonnée à celle de l'abscisse.

Aussi les quantités positives et négatives forment-elles une classe à part et tout à fait distincte des quantités imaginaires; jusqu'à ce jour, on a si peu vu dans les unes et dans les autres des membres d'une même famille, que les premières sont rangées dans la classe des choses *réelles*, tandis que les secondes appartiennent à un monde réputé *imaginaire*.

Le calcul cependant, logicien rigoureux, enseignait qu'entre $+1$, -1 et $\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha$, il devait exister une liaison forcée, puisque les deux premières expressions ne sont que des cas particuliers de la troisième; mais cette circonstance, loin d'éclairer la question, l'obscurcissait encore, et le passage du réel à l'imaginaire, employé comme un puissant auxiliaire dans les recherches purement analytiques, est resté pour notre intelligence, et sous le point de vue philosophique, une circonstance incomprise.

Le passage suivant de Laplace donne une idée de l'état d'incertitude qui règne dans les esprits à cet égard :

« Une remarque importante, dit-il, qui tient à la » grande généralité de l'analyse, et qui permet » d'étendre cette méthode (celle qui donne à la fois » la fonction comprise sous le signe intégral et les

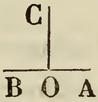
» limites de l'intégration) aux formules, et aux équa-
» tions aux différences que la théorie des probabilités
» présente le plus fréquemment, est que les séries
» auxquelles on parvient, en supposant réelles et po-
» sitives les limites des intégrales définies, ont éga-
» lement lieu dans le cas où l'équation qui détermine
» ces limites, n'a que des racines négatives et ima-
» ginaires. Ces passages du positif au négatif, et du
» réel à l'imaginaire, dont j'ai le premier fait usage,
» m'ont conduit encore aux valeurs de plusieurs in-
» tégrales définies singulières, que j'ai ensuite dé-
» montrées directement. On peut donc considérer
» ces passages comme un moyen de découverte,
» pareil à l'induction et à l'analogie, employées de-
» puis longtemps par les géomètres, d'abord avec
» une grande réserve, ensuite avec une entière con-
» fiance; un grand nombre d'exemple en ayant jus-
» tifié l'emploi. Cependant il est toujours nécessaire
» de confirmer par des démonstrations directes, les
» résultats obtenus par ces divers moyens. » (*Théorie analytique des Probabilités*, introduction, page 34, troisième édition.)

On voit donc que ces passages du réel à l'imaginaire, que Laplace déclare avoir employés pour la première fois, et dont les géomètres actuels font un fréquent usage, sont des moyens de découverte fondés, non sur une théorie positive et rationnelle, mais seulement sur la sanction de l'expérience. Aussi Laplace ne les considère-t-il nullement comme emportant avec eux leur justification, *car*, dit-il, *il est toujours nécessaire de confirmer par des démonstrations directes les résultats obtenus par ces divers moyens.*

Mais actuellement que nous avons prouvé que l'expression $\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha$ n'est autre chose que celle d'une direction, et que les relations qui existent entre les directions positives, négatives, perpendiculaires et angulaires sont, pour ainsi dire, le résultat d'un coup d'œil jeté sur une figure de géométrie, la liaison qui existe entre $+1$, -1, $\sqrt{-1}$, et $\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha$ se trouve par cela même établie, non plus seulement comme une conséquence purement analytique, mais comme une nécessité que le raisonnement constate *à priori* et qui est indépendante de toute vérification de calcul.

On conçoit aussi, avec la plus grande facilité, que le passage mystérieux du réel à l'imaginaire va devenir une des plus simples conceptions mathématiques, et qu'il n'y faudra voir autre chose que le simple changement de la ligne, de l'axe, de la direction primitivement prise pour point de départ de la supputation des directions; ou, pour parler plus généralement, ce sera, pour l'espèce de quantité dont on s'occupe, le passage d'un mode d'existence ou d'action, pris pour point de départ des calculs à un mode différent.

Nous pouvons donc répéter avec raison que la seule relation que les géomètres ont vue entre les abscisses et les ordonnées d'une courbe, c'est la fonction qui lie la grandeur de l'une à celle de l'autre. Cependant puisque indépendamment de la forme particulière de la courbe, et avant tout calcul, ils se trouvaient obligés, par l'état même des choses, de faire la distinction du positif et du négatif, n'était-il pas naturel de remarquer que la direction positive ou négative étant donnée, la position perpendiculaire était par cela même irrévocablement fixée, et cela indépendamment de toute autre donnée numérique. Il y avait donc lieu de penser qu'il devait exister une relation algébrique entre les unes et les autres.



On s'est contenté de dire, si j'appelle + 1 la direction OA, je suis obligé d'appeler — 1 la direction OB. Mais pourquoi s'arrêter en chemin et ne pas se demander comment on appellerait la direction OC, laquelle, OA étant donné, n'est pas moins irrévocablement fixée que OB.

Voilà donc des considérations fort simples qui, comme on voit, nous conduisent directement au but ; et en vérité, plus on réfléchit sur cet objet, plus on éprouve de peine à comprendre comment un fait si clair, si rationnel, dont la véritable expression mathématique a été entrevue par des géomètres distingués, a pu rester si longtemps dans le doute. C'est, à mon avis, parce que nous nous sommes plutôt appliqués à rechercher des effets qu'à étudier les causes, parce qu'enfin nous n'avons pas été suffisamment pénétrés de cette vérité, que « les résultats transcendants du calcul sont, » comme toutes les abstractions de l'entendement, » des signes généraux dont on ne peut connaître la » véritable étendue qu'en remontant par l'analyse » métaphysique aux idées qui y ont conduit. »

Maintenant, pour terminer ce chapitre, donnons une idée des conséquences qui ressortent des principes exposés, relativement à l'étude complète des quantités par le calcul.

— *De la nécessité d'admettre désormais en algèbre deux systèmes de numération : l'un appelé quantitatif, l'autre ordinal.*

Il résulte des principes exposés dans le présent chapitre une analogie trop remarquable entre la mesure des longueurs et celle des directions, entre les expressions à l'aide desquelles les unes et les autres sont représentées dans la science du calcul, pour que je ne traite pas ici cet objet avec quelques détails.

Si λ est le module qu'on convient d'adopter pour les longueurs, les diverses longueurs qu'on pourra produire, avec ce module restant entier, seront exprimées par

$$\lambda,\ 2\lambda,\ 3\lambda,\ 4\lambda,\ldots\ldots\ p\lambda,\ldots\ldots$$

Si α est un angle convenu d'avance pour compter une série de directions, toutes les directions qu'on pourra produire, avec cet angle restant entier, seront exprimées par

$$\cos\alpha \quad \sqrt{-1}\,\sin\alpha$$
$$\cos 2\alpha + \sqrt{-1}\,\sin 2\alpha$$
$$\cos 3\alpha + \sqrt{-1}\,\sin 3\alpha$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cos p\alpha + \sqrt{-1}\,\sin p\alpha$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Si on divise le module α des longueurs en un nombre quelconque n de parties égales, les diverses longueurs qu'on pourra produire, avec une fraction exacte de dénominateur n de ce module, seront

$$1\,\frac{\lambda}{n},\ 2\frac{\lambda}{n},\ 3\frac{\lambda}{n},\ldots\ldots\ldots\ldots\ p\frac{\lambda}{n}\ldots\ldots \quad (1)$$

Si on divise l'arc α qui sert à compter les directions en un nombre quelconque n de parties égales, les diverses directions qu'on obtiendra, avec une fraction exacte de dénominateur n de cet arc, seront:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\frac{\alpha}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{\alpha}{n} \\ \cos 2\frac{\alpha}{n} + \sqrt{-1}\,\sin 2\frac{\alpha}{n} \\ \cos 3\frac{\alpha}{n} + \sqrt{-1}\,\sin 3\frac{\alpha}{n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cos p\frac{\alpha}{n} + \sqrt{-1}\,\sin p\frac{\alpha}{n} \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \quad (2)$$

Or, de même que les expressions (1), en y faisant $\frac{\lambda}{n} = \lambda'$, reviennent à la forme primitive $\lambda', 2\lambda', 3\lambda', \ldots p\lambda'$, de même aussi les expressions (2) en y faisant $\frac{\alpha}{n} = \alpha'$, reprennent la forme primitive ci-dessus.

De sorte que si, comme on le pratique d'habitude dans les calculs, on peut dire, en négligeant la considération de la grandeur du module, que toutes les longueurs peuvent être désignées par la suite des nombres

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ p, \ldots\ldots$$

de même aussi, en négligeant la considération de l'étendue de l'arc, toutes les directions peuvent être désignées par la suite des expressions

$$\begin{array}{l} \cos 1 + \sqrt{-1} \sin 1 \\ \cos 2 + \sqrt{-1} \sin 2 \\ \cos 3 + \sqrt{-1} \sin 3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cos p + \sqrt{-1} \sin p \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

Nous voilà donc amenés à cette conséquence, que dans la théorie de l'algèbre, ce n'est pas un seul système de numération qu'il faut avoir en vue, qu'il est indispensable, si on veut donner à cette science toute l'extension qu'elle comporte, d'avoir égard à deux systèmes, l'un figuré par la série des nombres réels 1, 2, 3, etc., pour représenter les grandeurs, les intensités des quantités ; l'autre figuré par la série des expressions, ou si l'on veut des nombres imaginaires,

$$\cos 1 + \sqrt{-1} \sin 1$$
$$\cos 2 + \sqrt{-1} \sin 2$$
$$\cos 3 + \sqrt{-1} \sin 3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

pour représenter leur ordre, leur situation, leurs différents modes d'existence ou d'action ; le premier, qui pourrait être appelé système de numération quantitative, le second système de numération ordinale.

Or, comme je le disais tout à l'heure, ce n'est pas seulement de la numération quantitative que désormais l'algèbre aura à s'occuper ; en démontrant, comme nous venons de le faire, qu'il existe des expressions algébriques à l'aide desquelles on peut compter l'ordre ou la situation des choses, nous avons, par cela même, établi l'incontestable nécessité de faire marcher l'étude de la numération ordinale à l'égal de celle de la numération quantitative, et ainsi *nous avons solidement appuyé sur sa base, et nous sommes en mesure de suivre dans ses développements*, cette théorie entrevue et signalée par M. Poinsot, il y a vingt-trois ans, *cette théorie de l'ordre et de la situation des choses, sans aucune considération de la grandeur.*

Nous arrivons donc à la confirmation la plus élémentaire et la plus éclatante à la fois de ces vérités philosophiques, que je m'estime heureux de pouvoir reproduire en terminant ce chapitre, et qui ont été proclamées en ces termes par l'illustre géomètre que je viens de citer (1) :

« La théorie des angles n'appartient pas seulement » à la géométrie, comme on pourrait le croire d'a- » bord; mais c'est encore une partie essentielle de » l'analyse mathématique. Ces quantités remarqua- » bles, ou plutôt ces rapports auxquels la géométrie » donne naissance, et qu'on nomme des angles, se » présentent en algèbre d'une manière aussi natu- » relle et aussi nécessaire que les exposants ou les » logarithmes, par leurs propriétés toutes sembla- » bles, elles en sont même inséparables. Car si la » division du logarithme en parties égales répond » à l'extraction de la racine d'une quantité réelle, la » division de l'angle en parties égales répond de » même à l'extraction de la racine d'une quantité » imaginaire. Or, ces quantités réelles, et celles » qu'on nomme imaginaires, se présentent éga- » lement toutes deux dans nos transformations » analytiques; elles se mêlent, pour ainsi dire, à » tous nos calculs, et c'est même dans cette combi- » naison de symboles réels et imaginaires que con- » sistent la nature propre et le caractère distinctif de » l'algèbre. On voit donc que cette science, pour

---

(1) *Recherches sur l'analyse des sections angulaires*, 1825, pages et suiv.

» l'exécution actuelle des opérations qu'elle indique,
» exige à la fois la considération des angles et celles
» des logarithmes.

. . . .

» Je ne présente, en passant, ces réflexions que
» dans l'intérêt de la philosophie de la science, par-
» tie trop négligée par la plupart des auteurs, et
» peut-être la plus digne d'être cultivée, car nos for-
» mules et nos théorèmes les plus remarquables sont
» bien moins utiles et moins précieux en eux-
» mêmes, que cette sorte de métaphysique qui les
» éclaire et les domine, et qui seule peut rendre à
» l'esprit de nouvelles forces quand il faut se con-
» duire et s'avancer plus loin dans les sciences. »

Après avoir lu ces profondes pensées, tombées depuis si longtemps dans le domaine de la publicité, et cependant si peu comprises jusqu'à ce jour, ne sommes-nous pas en droit de croire que dans le genre de recherches contenues dans cet ouvrage, et que nous soumettons aujourd'hui à l'examen des géomètres, nous nous trouvons sans aucun doute placé sur le chemin de la vérité. Comment pourrait-il rester dans notre esprit quelque hésitation, alors qu'il ressort de nos études cette conséquence immédiate, que la double considération des grandeurs des quantités et de leur attribut ordinal exige un double système de numération ; alors que nous trouvons que les symboles constitutifs de ces deux systèmes sont ces mêmes expressions réelles et imaginaires qui viennent incessamment se mêler à tous nos calculs ; alors enfin que nous lisons, mot pour mot, dans toutes nos conséquences, ces mêmes vérités philosophiques que je viens de transcrire.

J'ai donc la confiance que si quelques erreurs de détail ont pu m'échapper, elles me seront facilement pardonnées ; car j'espère qu'avant tout les géomètres s'attacheront à voir dans cet ouvrage, le plan de mes recherches sur la philosophie de la science.

Ces études sur la métaphysique du calcul, recommandées à si juste titre par M. Poinsot, emportent, ce me semble, avec elles la démonstration de leur utilité ; enfin, la nature des conséquences auxquelles elles m'ont déjà conduit, et que je développerai dans la suite, montrera qu'elles doivent être d'un puissant secours dans l'application de la science mathématique à l'étude de la philosophie naturelle.

CHAPITRE IV.

EXAMEN D'UNE THÉORIE AYANT POUR BUT L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES SYMBOLES IMAGINAIRES.

— *Objet de ce chapitre.*

Des géomètres distingués ont fait quelques tentatives pour donner une interprétation, si non universelle, du moins géométrique des symboles imaginaires. Leur travail a été produit depuis assez longtemps, et cependant ce travail n'a conduit à aucune conséquence importante; il n'a corrigé aucune erreur, et dans le très petit nombre de nos savants qui en ont pris connaissance, il n'y en a pas un seul peut-être qui voulût en accepter les principes comme incontestables.

Personne cependant, jusqu'à ce jour, n'a prouvé que ces principes sont faux, personne n'a indiqué sur quel point les raisonnements employés doivent être rectifiés; aussi suis-je fort disposé à admettre que si je ne prenais l'initiative, on ne manquerait pas d'opposer ce travail au mien, et de dire que d'autres m'ont précédé dans ce genre de recherches. Je vais montrer que ce reproche porterait complètement à faux. Car, chose remarquable, si les faits consignés dans les mémoires dont je parle sont exacts, si les conséquences auxquelles parviennent les auteurs sont l'expression de vérités incontestables, rien n'est plus faux que les raisonnements à l'aide desquels on a cru établir ces vérités; de sorte qu'il a fallu, dans l'examen que j'ai fait de ce travail, reconnaître que la fin était bonne, bien que les moyens fussent mauvais, et que des raisonnements basés sur des erreurs n'ont pas empêché la vérité de se faire jour.

Cette critique, au point de vue philosophique, aura donc un double intérêt, celui d'effacer quelques taches dans la science du calcul, et celui de montrer comment, dans les combinaisons de l'esprit humain, l'erreur peut être mise en jeu, de manière à produire la vérité. Enfin, les matières traitées dans ce chapitre, tout en paraissant s'appliquer à une spécialité, ne seront pas cependant contenues dans un cadre tellement étroit qu'elles ne puissent nous fournir encore une importante collection d'enseignements utiles.

— *Historique.*

Il y a douze ans environ que, m'étant occupé de quelques recherches de géométrie, à l'occasion des Annales de mathématiques publiées par M. Gergonne, je fus conduit à lire deux mémoires de MM. Français et Argand, sur l'interprétation géométrique des symboles imaginaires.

Ces deux géomètres arrivaient l'un et l'autre à cette conclusion fort remarquable que le signe $\sqrt{-1}$

est un signe de position, à l'aide duquel on doit caractériser les directions des droites perpendiculaires à une droite donnée.

Ces publications furent faites vers la fin de l'année 1813, elles sont insérées dans le tome IV des Annales. Dans le même volume on lit une note de M. Lacroix, ainsi conçue :

« Dans la première partie des Transactions philo-
» sophiques de 1806, page 23, je trouve un mémoire
» écrit en français par M. Buée, communiqué à la
» société royale de Londres par M. Williams Mor-
» gan, et dont le sujet est le même que celui des
» mémoires de MM. Français et Argand. L'auteur
» prétend que $\sqrt{-1}$ n'est pas le signe d'une opéra-
» tion arithmétique, ou d'une opération purement
» géométrique : c'est un signe de perpendicularité,
» c'est un signe purement descriptif, un signe qui
» indique la direction d'une ligne, abstraction faite
» de sa longueur (ce sont les expressions de l'au-
» teur). »

Des trois géomètres que nous venons de citer, deux seulement peuvent être considérés comme les inventeurs de cette idée nouvelle ; en effet, à la suite de son mémoire, M. François s'exprime ainsi :

« Je dois, au surplus, à la justice, de déclarer que
» le fond de ces idées nouvelles ne m'appartient pas.
» Je l'ai trouvé dans une lettre de M. Legendre à feu
» mon frère, dans laquelle ce grand géomètre lui
» fait part (comme d'une chose qui lui a été commu-

» niquée et comme objet de pure curiosité) du fond » de mes définitions deuxième et troisième, de mon » théorème premier et du corollaire trois de mon » théorème deuxième. »

Et plus loin (page 225).

« Je viens de recevoir à l'instant le mémoire de » M. Argand que j'ai lu avec autant d'intérêt que » d'empressement, il ne m'a pas été difficile d'y re- » connaître le développement des idés contenues » dans la lettre de M. Legendre à feu mon frère, et il » n'y a pas le moindre doute que l'on ne doive à » M. Argand la première idée de représenter géomé- » triquement les quantités imaginaires. »

Quant à la question de savoir lequel des deux entre MM. Argand et Buée doit avoir la priorité, il est fort difficile de la résoudre, car c'est dans la même année 1806 que, d'une part, M. Argand a fait imprimer son essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, et que, de l'autre, M. Buée a fait paraître son mémoire dans les Transactions philosophiques.

M. Legendre avait dans le temps examiné le manuscrit de M. Argand, et c'est là la source de la communication mentionnée par M. Français.

Quoi qu'il en soit, l'exposition de ces nouvelles idées est absolument la même dans les écrits de ces trois géomètres, il suffit donc, pour en avoir une complète connaissance, d'en étudier un seul; sous ce rapport, celui de M. Français nous paraît devoir obtenir la préférence.

A la date du 23 novembre 1813, M. Servois adressa au rédacteur des Annales une lettre contenant une critique des mémoires de MM. Français et Argand; dans cette lettre M. Servois expose les motifs qui ne lui permettent pas d'admettre comme exactes les démonstrations de ces géomètres; mais le but de M. Servois en attaquant ces idées nouvelles, n'est point de les qualifier d'inutiles et même d'erronées, mais seulement de leur faire acquérir ce qui leur manque encore sous le rapport de *l'évidence* et de *la fécondité*.

Je reviendrai plus tard sur cette lettre, la critique qu'elle contient est la seule que je connaisse sur ce sujet.

— *Les géomètres paraissent disposés à admettre comme vrai le fond de cette théorie.*

Quant au rédacteur des Annales, il paraît plus bienveillant que ne l'est M. Servois dans sa lettre; et dans la discussion qui s'est élevée à ce sujet, il appuie par des considérations très spécieuses les assertions de MM. Français et Argand; en principe, il paraît disposée à adopter comme vraie l'idée d'appliquer le signe $\sqrt{-1}$ à représenter la perpendicularité, et comme preuve de cette assertion je transcris l'observation dont il a accompagné la note citée de M. Lacroix.

» En publiant cette note, il est bien loin de notre » pensée de chercher à enlever à M. Argand la pro» priété de ses idées; son idée principale, je veux » dire celle qui consiste à considérer $\sqrt{-1}$ comme » un signe de perpendicularité, est d'ailleurs si sim» ple et si naturelle, que loin d'être surpris qu'elle » se soit présentée aussi à M. Buée, on a lieu de » s'étonner au contraire qu'elle ait tant tardé à » éclore, et qu'elle ne se soit pas offerte à la pensée » d'un plus grand nombre de géomètres. »

A l'appui de cette même opinion, je citerai encore la note dont M. Gergonne a fait suivre le mémoire de M. Français.

« Il y a environ deux ans, dit-il, qu'écrivant à » M. de Maizières, au sujet de son mémoire inséré à » la page 368 du premier volume des Annales, je lui » mandais qu'on avait peut-être tort de vouloir com» prendre toutes les grandeurs numériques dans une » simple série, et que par leur nature elles sem» blaient devoir former une table à double entrée » qui, bornée aux seuls nombres entiers, pourrait » avoir la figure suivante :

. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
.....$-2+2\sqrt{-1}$,	$-1+2\sqrt{-1}$,	$2\sqrt{-1}$,	$1+2\sqrt{-1}$,	$2+2\sqrt{-1}$......
.....$-2+\sqrt{-1}$,	$-1+\sqrt{-1}$,	$\sqrt{-1}$,	$1+\sqrt{-1}$,	$2+\sqrt{-1}$......
.....-2,	-1,	0,	1,	2......
.....$-2-\sqrt{-1}$,	$-1-\sqrt{-1}$,	$-\sqrt{-1}$,	$1-\sqrt{-1}$,	$2-\sqrt{-1}$.....
.....$-2-2\sqrt{-1}$,	$-1-2\sqrt{-1}$,	$-2\sqrt{-1}$,	$1-2\sqrt{-1}$,	$2-2\sqrt{-1}$.....
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

» Or, il suit de cette figure que, déjà comme » M. Français, je supposais les nombres de la forme » $n\sqrt{-1}$ situés dans une ligne perpendiculaire à » celle qui renferme les nombres de la forme n; et » que, comme lui encore, je représentais les nom- » bres étrangers à ces deux lignes par la somme de » leurs projections sur l'une et sur l'autre.

» Le même, M. de Maizières, au sujet de quelques » difficultés que j'avais opposées au mémoire que je » viens de citer, me mandait dès le mois d'avril 1811 : » *Ce que j'avance ici sur les imaginaires est une idée* » *hardie que je suis bien aise de jeter en avant, et dont,* » *j'en suis sûr, vous aurez déjà reconnu l'exactitude ;* » et un peu plus loin : *Ce paradoxe cessera d'en être* » *un, lorsque j'aurai prouvé que les imaginaires du se-* » *cond degré, et par conséquent de tous les degrés, sont* » *tout aussi peu imaginaires que les quantités négatives* » *ou les imaginaires du premier degré; et que nous* » *sommes à l'égard des uns dans la situation où étaient* » *nos algébristes du dix-septième siècle à l'égard des* » *autres.* »

» En rappelant ces circonstances, continue » M. Gergonne, il est certes loin de ma pensée de » chercher à dépouiller M. Français, non plus que le » géomètre dont il a si bien su mettre les indica- » tions à profit, de la propriété de leurs idées ; mais » je veux montrer que ces idées ne sont point telle- » ment étranges que le fond n'en ait pu germer dans » plusieurs têtes à la fois. »

Il est donc constaté par ce qui précède, que M. Servois, le plus opposant de tous les géomètres cités, tout en faisant des objections contre les méthodes de MM. Français et Argand, ne considère point cependant leurs idées ou comme inutiles ou comme erronées; il est constaté que ces idées sont venues à l'esprit de plusieurs géomètres distingués, MM. Français, Argand, Buée, de Maizières; que M. Legendre paraît leur avoir donné quelque assentiment; qu'enfin M. Gergonne les adopte complètement, qu'il s'étonne même qu'elles aient tant tardé à éclore et qu'elles ne se soient pas offertes à la pensée d'un plus grand nombre de géomètres. Peut-être pourrions-nous à cette liste ajouter les noms de la plupart des lecteurs des Annales.

— *L'exactitude de la théorie quant à la forme est généralement mise en doute.*

Voilà pour ce qui concerne le fond, mais en est-il de même de la forme, suivant laquelle ces idées sont présentées, de la dialectique à l'aide de laquelle on veut les faire admettre comme des vérités mathématiques? Ici nous sommes loin de trouver la même unanimité. En effet, M. Legendre, dans la lettre citée, présente la chose comme un objet *du pure curiosité,* le travail que M. de Maizières avait annoncé sur l'interprétation des imaginaires n'a pas été produit, M. Servois, assez facile sur le fond, s'élève avec force contre les démonstrations à l'aide de considérations, sur lesquelles je reviendrai tout à l'heure. M. Français, mis en demeure par M. Servois, reste sans ressources personnelles, il ne réplique guère que ce que M. Gergonne avait déjà répliqué pour lui, et je prouverai bientôt l'insuffisance de cette réponse. M. Argand lui-même est peut-être moins convaincu que M. Français, et, à cet égard, il est important de citer ses propres paroles. Je souligne celles sur lesquelles je désire que l'attention du lecteur se fixe plus particulièrement.

« La théorie dont nous venons de donner un
» aperçu peut être considérée sous un point de vue
» propre à écarter *ce qu'elle peut présenter d'obscur*
» *et qui semble en être le but principal, savoir : d'établir*
» *des notions nouvelles sur les quantités imaginaires.* En
» effet, mettant de côté la question, *si ces notions sont*
» *vraies ou fausses*, on peut se borner à considérer
» cette théorie comme un moyen de recherches,
» n'adopter les lignes en direction que comme si-
» gnes des quantités réelles ou imaginaires, et ne
» voir dans l'usage que nous en avons fait que le
» simple emploi d'une notation particulière; il suffit,
» pour cela, de commencer par démontrer, au
» moyen des premiers théorèmes de la trigonométrie,
» les règles de multiplication et d'addition don-
» nées plus haut, les applications iront de suite, et
» il ne restera plus à examiner que la question de
» didactique, si l'emploi de cette notation peut être
» avantageux ; s'il peut ouvrir des chemins plus

» courts et plus faciles pour démontrer certaines
» vérités. *C'est ce que le fait seul peut décider.* »

On le voit donc, la foi de M. Argand, dans le but principal de cette théorie, est loin d'être inébranlable, il le dit lui-même, relativement à ce but, tout n'est peut-être pas très clair, et la question de savoir si les notions nouvelles sont vraies ou fausses reste dans le doute.

Enfin, M. Gergonne, qui, plus que tous les autres, paraît disposé à la propagation de la nouvelle doctrine, qui n'hésite pas à en accepter le fond comme vrai, s'exprime en ces termes dans la note qui termine le mémoire de M. Français :

« Il faudra, sans doute, faire beaucoup encore
» pour *parer à toutes les objections, pour éclaircir*
» *toutes les difficultés, pour dissiper tous les nuages*,
» pour étendre et perfectionner la nouvelle théorie
» et en rendre bien évidents *l'esprit, le but et les*
» *avantages*; mais on ne peut espérer ces résultats
» que du temps et des efforts réunis de tous ceux
» qui voudront bien ne pas rejeter cette théorie avec
« dédain sans l'avoir sérieusement examinée. »

Ces remarques parlent assez haut et prouvent clairement que si M. Gergonne ne formule pas de grief direct contre la théorie nouvelle, il est loin, cependant, de la trouver irréprochable; *il y a des difficultés à éclaircir, des nuages à dissiper, il faut en rendre bien évidents l'esprit, le but et les avantages.*

Je pense donc que de tout ce que je viens de dire, on peut conclure qu'au moment où cette théorie a paru, elle a séduit l'esprit des géomètres par sa nouveauté, son originalité, et surtout par la perspective des conséquences remarquables qu'elle faisait entrevoir, mais qu'en même temps tous se sont accordés à regarder comme insuffisante la base sur laquelle on s'est appuyé pour la faire admettre au nombre des vérités mathématiques; en un mot on a douté.

Or, depuis cette époque, le doute s'est-il dissipé? de nouvelles explications sont-elles venues éclairer les difficultés déjà énoncées ou conçues? il faut bien reconnaître qu'il n'en est rien, et un silence de vingt-sept ans nous ferait croire, au contraire, que les méditations des géomètres sur une question si remarquable, loin de dissiper les incertitudes, et de résoudre les objections, leur ont peut-être donné plus de force aujourd'hui qu'elles en avaient à l'origine. Du moins, je crois être en droit de conclure que tout le monde doute encore.

— *Examen de cette théorie dans le mémoire de M. Français.*

Livrons-nous donc à un sérieux examen de la théorie de M. Français, étudions toutes ses définitions, tous ses théorèmes, et tâchons dans ce genre de recherches très délicates, où le raisonnemen semble incessamment entraîné vers le sophisme, tâchons, dis-je, de bien saisir au passage les points litigieux, et de montrer sous quel point de vue quelques uns de ses raisonnements donnent prise à la critique.

— *Définitions.*

M. Français, d'accord avec tout le monde, appelle *rapport de grandeur* le rapport numérique entre les grandeurs de deux droites, et *rapport de position* l'inclinaison des deux droites l'une vers l'autre, ou l'angle qu'elles font entre elles.

Lorsqu'on ne s'occupe que de la grandeur d'une droite, on représente, dit-il, cette grandeur par une simple lettre a, b, c, etc.

Mais, pour indiquer la grandeur et la position d'une droite, j'affecterai, dit M. Français, la lettre destinée à désigner sa valeur absolue, *d'un indice* exprimant l'angle que fait cette droite avec une droite fixe et indéfinie prise arbitrairement. Ainsi a_α, b_β, c_γ,....... représentent des droites dont les grandeurs absolues sont a b c..... et qui font respectivement avec la droite fixe des angles α, β, γ......

M. Français ajoute ensuite qu'il dit de quatre droites, qu'elles sont en proportion de grandeur et de position, lorsque entre les deux premières il y a même rapport de grandeur et de position qu'entre les deux dernières; d'où il suit, en adoptant les notations de M. Français, que l'expression $a_\alpha : b_\beta :: c_\gamma : d_\delta$ exige qu'on ait à la fois

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ et } \alpha - \beta = \gamma - \delta.$$

Passant aux proportions de grandeur et de position continues, il conclut que pour qu'une droite b_β soit à la fois moyenne proportionnelle de grandeur et de position entre a_α et c_γ il faut qu'on ait $b = \sqrt{ac}$ et $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$ en sorte que b_β partage en deux parties égales l'angle formé par les droites a_α, c_γ.

Jusqu'à présent, on le voit, il s'agit d'une notation commode pour le genre de recherches que se propose M. Français, et de définitions dont chaque auteur est toujours le maître, et qui rentrent d'ailleurs dans un ordre d'idées admis par tous les géomètres.

— M. Français attribue à ses définitions plus d'étendue qu'elles n'en comportent.

Mais ces prémisses posées, nous arrivons aux premières déductions, et c'est ici que notre critique va commencer.

Voici comment s'exprime M. Français.

« *Notation* 2. Nous pouvons maintenant séparer » dans la notation ce qui est relatif à la grandeur » absolue d'une droite de ce qui est relatif à sa » position. »

Le mot *séparer*, lorsqu'il s'applique à des expressions algébriques, présente un tel vague dans son interprétation, qu'il est impossible de lui attacher une idée fixe, précise, immuable, et qu'il est difficile de se rendre compte du véritable sens que l'auteur lui-même a voulu lui donner.

Et d'abord, d'après les définitions de l'auteur, lorsqu'il s'agit de comparer entre elles et simultanément les grandeurs et les directions, la séparation de ce qui est relatif à la grandeur et de ce qui est relatif à la position, est facile, évidente; elle résulte des conditions définies : ainsi, dans le rapport collectif de a_α à b_β, je sais très bien que ce qui est relatif à la grandeur sera le quotient ordinaire $\frac{a}{b}$, et que ce qui est relatif à la position doit être la différence $\alpha - \beta$; la séparation se trouve ainsi complètement effectué. Nous avons vu également comment, dans l'expression que M. Français appelle proportion de grandeur et de position, ce que cette expression offre d'abord de collectif, se sépare en deux proportions, l'une par quotient, applicable seulement à la grandeur, l'autre par différence ne concernant que la position.

Mais, ce n'est pas dans le rapport, ce n'est pas dans la proportion, c'est dans la notation même, dans a_α considéré isolément, que M. Français se propose de séparer ce qui est relatif à la grandeur de ce qui est relatif à la position. Or, s'il ne définit pas d'avance ce qu'il entend par le mot séparer, nous pouvons nous en rendre compte par ses opérations subséquentes; à cet égard voici comment procède M. Français, « d'abord on a, dit-il, par la première » notation, $a_0 = a$; $1_0 = 1$; et ensuite on a par la » définition deuxième, $1 : 1_\alpha : : a : a_\alpha$.

Or ces deux assertions sont inadmissibles et je nie qu'elles résultent, la première de la notation 1, la seconde de la définition 2.

Que dit en effet la première notation? Je copie encore une fois textuellement. « Nous représenterons » *ici la grandeur absolue* d'une droite *par une simple* » *lettre a, b*,... et pour indiquer à la fois la grandeur » et la position d'une droite, nous affecterons la » lettre destinée à désigner sa valeur absolue d'un » indice exprimant l'angle qu'elle fait avec une droite » fixe. »

De ces paroles on ne peut évidemment tirer que la conclusion suivante relativement à l'équation $a_0 = a$, à savoir : que dans cette équation a_0 représente une longueur a prise sur la droite fixe qui sert de point de départ pour mesurer les angles, c'est incontestablement ce qu'indique l'indice 0; et que a du second membre exprime une longueur a dont la position n'est pas exprimée, et qui, par conséquent, peut-être quelconque ; en d'autres termes, M. Français est tombé ici dans cette erreur vers laquelle, si on n'y prend garde, on se laisse facilement entraîner, que écrire *zéro* est la même chose que *ne rien* écrire, que ne pas faire de chemin est la même chose que se retrouver au point de départ, etc., etc.

Mais lorsque vous avez pour objet de vous occuper essentiellement des rapports de position, et d'en donner la mesure, que signifie donc l'expression de l'égalité entre une longueur dirigée suivant une droite et la même longueur dont la direction reste indéterminée. Car remarquons bien que, dès l'instant que dans une relation algébrique vous mettez en jeu des droites dirigées à l'aide de votre notation complexe, il faudra toujours que de cette relation j'en déduise deux autres; c'est là le propre de votre définition première. Or de $a_0 = a$ je déduirai bien, quant aux longueurs, $a = a$; mais quant aux directions, qu'en pouvez-vous conclure? Non seulement vous n'en pouvez rien tirer sous le point de vue intellectuel, mais même sous celui de l'écriture, vous n'avez pas une forme à présenter aux yeux.

Ces objections gardent toute leur force lorsqu'on les applique à la seconde assertion :

$$1 : 1_\alpha :: a : a_\alpha$$

et ici l'argumentation est encore plus directe; en effet, vous avez dit : « Pour avoir proportion de gran-
» deur et de position entre quatre droites, il faut qu'il
» y ait entre les deux premières même rapport de
» grandeur et *même rapport de position* qu'entre les
» deux dernières. »

D'où je dois conclure que si je suis dans l'impossibilité d'exprimer ces deux rapports, je ne me trouve plus dans le cas relatif au genre de proportion que vous avez défini.

Or, si, de la relation précédente, je puis déduire la proportion de grandeur

$$1 : 1 :: a : a$$

je me trouve, relativement à la proportion de position, dans l'embarras que j'ai précédemment signalé, je ne peux pas même lui donner par l'écriture une forme vraie ou fausse. Pour raisonner juste, il aurait fallu, avant tout, présenter la proportion ainsi qu'il suit :

$$1_0 : 1_\alpha :: a_0 : a_\alpha$$

Dans cet état elle est incontestable ; mais attachons-nous bien à l'observation qui va suivre, car elle est d'une importance capitale.

Parce que, sous les conditions de la définition 1, vous pouvez attacher un sens raisonnable à la proportion générale

$$a_\alpha : b_\beta :: c_\gamma : d_\delta,$$

cette définition n'autorise point indéfiniment l'usage que vous pouvez faire des opérations de l'arithmétique et de l'algèbre aux quatre expressions a_α, b_β, c_γ, d_δ; tout ce qui en résulte, c'est que la forme ci-dessus remplacera, comme moyen d'écriture, les deux relations

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \alpha - \beta = \gamma - \delta$$

mais elle ne vous autorise nullement à dire, par exemple, que

$$d_\delta = \frac{b_\beta\, c_\gamma}{a_\alpha}$$

et à lier ainsi les doubles symboles a_α, b_β,.... par des signes d'opérations déduits des propriétés de la progression par quotient; car l'expression

$$a_\alpha : b_\beta :: c_\gamma : d_\delta$$

n'est pas une progression géométrique seulement, mais, et il ne faut pas le perdre de vue, cette expression est à la fois une progression par quotient et une progression par différence.

Il vous a plu de faire intervenir dans la chose définie une expression déjà usitée en algèbre, il vous a plu d'écrire votre définition sous une forme qui, dans cette science, jouit de certaines propriétés, et vous en êtes venu, sans vous douter même de votre méprise, à appliquer aux termes et à l'objet défini les propriétés de cette forme; or, en cela vous avez eu tort, et il en résulte que vous vous êtes exposé, comme cela vous est arrivé, à tout préjuger, et à donner des démonstrations spécieuses dans la forme, mais vicieuses au fond.

Supposez, par exemple, qu'au lieu d'employer la forme des progressions par quotient, j'eusse employé celle des progressions par différence, et que j'eusse écrit

$$a_\alpha . b_\beta : c_\gamma . d_\delta$$

j'en aurais machinalement déduit non plus

$$d_\delta = \frac{b_\beta c_\gamma}{a_\alpha},$$

mais $d_\delta = b_\beta + c_\gamma - a_\alpha$

Or, personne ne contestera que l'on avait également le droit de représenter l'ensemble des deux proportions aussi bien par la forme caractéristique de l'une, que par la forme caractéristique de l'autre ; ou pour mieux dire, tout le monde sera d'avis qu'employer l'une ou l'autre de ces formes est un tort, car elle préjuge des propriétés que par cela seul on a cru applicables, et qui, ainsi, ont été gratuitement admises sans démonstration. Maintenant que l'observation en est faite, et qu'on peut prévoir que le mémoire de M. Français est un sophisme, on comprend que c'est précisément à l'abri de cette forme et des propriétés ordinaires qui lui sont inhérentes, que le sophisme s'est glissé, et il semble s'y être tenu tellement caché, que jusqu'à ce jour il est resté inaperçu.

Sans doute, on peut, sans de grands inconvénients, donner à l'expression $a_2 : b_3 :: c_7 : d_3$ le nom de proportion. Mais remarquons bien que le mot proportion, pris isolément, s'appliquant aux deux genres de proportion par différence et par quotient, il est indispensable, lorsqu'on parle de quatre nombres qui sont en proportion, de spécifier de quel genre de proportion il s'agit ; or, pour cette troisième espèce de proportion que vous créez, il en sera de même ; et comme les opérations que vous ferez sur ces quatre nombres, lorsque la proportion sera par quotient, seront très différentes de celles que vous pourriez pratiquer sur eux, lorsque ces nombres seront en progression par différence, de même les nouvelles opérations qui pourront être faites sur les quatre nombres; ou, pour mieux dire, sur les quatre indices qui constituent votre troisième espèce de progression, pourront être d'un genre complètement différent de celles qui sont applicables aux deux cas précédents.

Si, pour donner, par une seule expression, une idée du rapport complexe de grandeur et de position on avait écrit :

$$a_\alpha \, \mathrm{O} \, b_\beta \, \Theta \, c_\gamma \, \mathrm{O} \, d_\delta$$

alors on aurait commencé à s'enquérir très probablement de quelles propriétés pouvait jouir une semblable réunion des quatre indices a_α, b_β, c_γ, d_δ, on se serait demandé si on pouvait appliquer à ces indices, avec la double représentation qui leur est attribuée, une opération quelconque de l'arithmétique, et on aurait, je crois, éprouvé beaucoup d'embarras à résoudre la question. Il est possible, sur a, b, c, d séparées, d'appliquer les opérations exprimées dans $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et celles qui en dépendent; il est également possible d'agir séparément sur α, β, γ, δ et de leur appliquer les opérations indiquées dans $\alpha - \beta = \gamma - \delta$ et celles qui en dépendent, mais, avant d'appliquer sur a_α une opération quelconque, il faudrait avoir défini ce que peut être dans ce cas une semblable opération, et c'est la difficulté qui se présentera toujours, lorsqu'on employera en algèbre un signe pour représenter, non une opération de l'arithmétique, non une quantité, mais une convention. Tant que la relation qui peut exister entre les procédés du calcul et l'ordre de faits auquel s'applique cette convention, n'aura pas été soumise à de sérieuses investigations, il sera impossible de conclure. Or, il ne faudra pas chercher la relation dont je parle dans quelques artifices de calcul, dans le jeu de quelques formules, dans le rapprochement peu fondé de quelques résultats plutôt algébriques que rationnels; ce serait s'engager dans une voie peu satisfaisante pour l'esprit et trop féconde en écueils. Mais il faudra la déduire de la nature même de cet ordre de faits, de son essence comparée directement avec celle des opérations diverses dont se compose la science du calcul, de l'analogie complète qui peut exister entre les divers résultats produits par cet ordre de faits sur les quantités auxquelles il s'applique, et ceux que les opérations du calcul produisent à leur tour sur les nombres qui représentent ces quantités. Si dans cette comparaison, on trouve une analogie complète entre les résultats naturels et les résultats calculés, alors, mais alors seulement, on sera en droit de conclure que, sous le point de vue de l'algèbre, les opérations qui ont produit ces résultats numériques sont l'équivalent des circonstances, des opérations naturelles, sous l'influence desquelles arrivent les faits représentés par ces nombres; dès ce moment, le signe conventionnel pourra être remplacé par une opération de calcul.

Telle est la véritable marche philosophique qu'il faut suivre toutes les fois qu'on veut savoir s'il existe quelque relation, quelque analogie entre un certain ordre de faits et les diverses opérations dont se compose la langue générale, connue sous le nom d'algèbre, à l'aide de laquelle nous exprimons les rapports que les choses, soit de même espèce, soit d'espèces différentes, peuvent avoir entre elles.

Mais je reprendrai plus tard et avec plus de détails ce sujet important, je reviens maintenant au mémoire de M. Français.

De ce qui précède on doit conclure :

1° Qu'il est impossible de donner un sens à l'égalité $\alpha_0 = \alpha$.

2° Qu'il est pareillement impossible de donner un sens à l'expression $1 : 1_\alpha :: a : a_\alpha$.

3° Enfin, qu'alors même que cette dernière expression pourrait être considérée comme représentant une proportion collective de grandeur et de position, suivant les idées de M. Français, on ne trouve rien dans le raisonnement de l'auteur qui autorise à appliquer aux termes de cette proportion collective, telle ou telle autre opération de calcul. Or, déduire de l'expression précédente la relation $a_\alpha = a. 1^\alpha$, c'est supposer que les règles de la progression géométrique s'appliquent à la progression collective ce qui n'a pas été démontré; d'où il suit que l'édifice tout entier de M. Français tombe avec sa base.

Peut-être trouvera-t-on maintenant qu'il n'est pas nécessaire de poursuivre plus longuement notre critique, et que ce que nous venons de dire est bien suffisant pour faire complètement rejeter la théorie de M. Français; mais comme ces erreurs ne sont pas les seules qui existent dans cet ouvrage, et qu'une discussion ne peut être que fort utile sur des sujets qui, comme celui-ci, tiennent à la métaphysique de la science; comme de semblables discussions sont toujours la source d'utiles révélations, et répandent par conséquent de salutaires clartés sur l'institution des doctrines scientifiques, je crois, par ces motifs, devoir donner à cette critique de nouveaux développements.

— *Théorème premier de M. Français.*

Après avoir montré comment M. Français a donné à ses définitions une plus grande extension qu'elles n'en comportent, passons à ses théorèmes et livrons-nous surtout à un examen approfondi du premier.

M. Français, dans ce théorème, se propose de démontrer que les quantités imaginaires de la forme $\pm a\sqrt{-1}$ représentent en géométrie de position des perpendiculaires à l'axe des abscisses.

Or, toute la force de son raisonnement s'appuie sur cette considération que la quantité $\pm a \sqrt{-1}$ est une moyenne proportionnelle de grandeur et de position entre $+a$ et $-a$.

A l'appui de cette assertion, non seulement M. Français ne présente aucune preuve directe, mais même aucune considération plus ou moins plausible, plus ou moins éloignée; c'est un fait que, sans doute, M. Français considère comme suffisamment établi, et, en ceci, comme je le ferai voir tout à l'heure, il est du moins conséquent avec sa définition première, prise avec toute la latitude que, dans sa méprise, il a cru pouvoir lui attribuer.

— *Critique et erreur de M. Servois au sujet de ce théorème.*

C'est principalement contre cette assertion que porte la critique de M. Servois. Mais M. Servois ne montre pas en quoi cette assertion ne saurait être admise, il se borne à faire remarquer qu'elle n'est pas démontrée; citons, à ce sujet, les expressions de ce géomètre. « La démonstration du premier » théorème de M. Français est, à mon avis, tout à » fait insuffisante et incomplète. En effet, cette » proposition, qui en fait la base, *la quantité* » $\pm a\sqrt{-1}$ *est une moyenne proportionnelle de gran-* » *deur et de position entre* $+a$ et $-a$, équivaut à ces » deux-ci, dont une ($\pm a\sqrt{-1}$ moyenne de gran- » deur entre $+a$ et $-a$) est évidente, et dont » l'autre ($\pm a\sqrt{-1}$, moyenne de position entre » $+a$ et $-a$) n'est pas prouvée, et renferme pré- » cisément le théorème dont il s'agit. »

Ici, nous aurons à la fois à condamner et le critique et l'auteur. On a quelque peine à concevoir comment M. Servois a pu trouver évident que la quantité $\pm a\sqrt{-1}$ est une moyenne de grandeur entre $+a$ et $-a$.

Qu'est-ce que $+a$, qu'est-ce que $-a$? Ce ne sont pas deux quantités considérées sous le point de vue seulement de leur grandeur; car, s'il en était ainsi, comme les grandeurs exprimées sont égales, il faudrait dire que chacune de ces quantités représente la même chose, et qu'entre les deux expressions $+a$ et $-a$ il y a égalité, ce qui n'est pas.

Mais $+a$ et $-a$ sont deux longueurs égales dont les deux directions sont inverses l'une de l'autre, c'est évidemment ce qu'expriment les deux signes $+$ et $-$.

Il est dès lors incontestable que lorsque je multiplie $+a$ par $-a$, j'ai égard, non seulement à la grandeur a de chacune des deux lignes, mais encore aux signes $+$ et $-$ qui accompagnent l'expression de cette grandeur, c'est à dire aux directions; il faut donc, par suite de cette observation, reconnaître que le produit obtenu conservera une empreinte de ces deux directions, qu'en conséquence ce produit, dans son ensemble, ne saurait être seulement fonction de la grandeur, et qu'enfin sa racine quarrée sera affectée de quelque indice provenant de ce que les signes de direction ont été mis en jeu dans les diverses opérations qui ont produit le résultat final. On ne saurait se refuser à admettre de telles conséquences, et c'est avec beaucoup de sens que M. Gergonne se demande comment $\pm a\sqrt{-1}$ pourrait être moyenne de grandeur entre $+a$ et $-a$. Comment un être de raison, un être imaginaire pourrait être dit moyen entre deux grandeurs effectives.

Cela posé, revenons à l'assertion de M. Français, et tâchons de suppléer au silence de M. Servois.

— *Raisonnement de M. Gergonne à l'appui du théorème premier.*

Voici comment M. Gergonne essaie de faire concevoir la vérité du théorème premier de la théorie des imaginaires :

« La moyenne proportionnelle de grandeur entre
» $+a$ et $-a$ n'est et ne saurait être que a, car
» lorsqu'on parle uniquement de grandeur, on doit
» faire abstraction des signes, et $\sqrt{aa} = a$. Mais
» lorsqu'on prend pour la moyenne $\pm a\sqrt{-1}$, on
» annonce par là même qu'on a eu égard aux posi-
» tions inverses de $+a$ et $-a$, la moyenne doit
» donc alors conserver l'empreinte de cette consi-
» dération; elle est donc par le fait même une
» moyenne de position aussi bien que de gran-
» deur. »

On voit que le genre de considérations sur lequel s'appuie M. Gergonne, est exactement de la même nature que celui dont j'ai fait usage pour signaler et combattre l'erreur de M. Servois; toute la discussion est donc maintenant portée sur ce point : parce qu'en employant $+a$ et $-a$, le résultat doit conserver l'empreinte de la considération des directions, s'ensuit-il *que de cela seul il résulte que cette empreinte est telle que la moyenne obtenue soit à la fois une moyenne de grandeur et une moyenne de direction.* Tel est le véritable point à discuter, et je crains bien que tout le monde prévoye, dès ce moment, que, posée en ces termes, la difficulté, au lieu d'être résolue, n'a été que reculée.

—*Réfutation de ce raisonnement déduit de l'influence des signes.*

En effet si une pareille thèse pouvait être vraie, si des raisonnements aussi vagues, des expressions aussi peu mathématiques, pouvaient passer en force de chose jugée, il faudrait à coup sûr refuser à la science du calcul la qualification de science exacte, il faudrait à la certitude mathématique substituer une probabilité fort incertaine.

Supposons un instant que le raisonnement que je viens de faire connaître soit fondé, et appliquons-le à quelques considérations de calcul; on ne sera pas peu surpris des conséquences auxquelles il va nous conduire.

Par exemple :

La moyenne *par différence* entre les longueurs a et b, est incontestablement égale à $\frac{a+b}{2}$.

C'est le résultat auquel on parvient quand on ne s'occupe que de grandeurs; mais si je suppose que la direction a est inverse de la direction de b, j'exprimerai cette circonstance en faisant précéder les nombres a et b des signes — et $+$, de sorte que dans ce cas la moyenne cherchée sera $\frac{-a+b}{2}$.

Or, pourrions-nous dire, en reproduisant textuellement le raisonnement de MM. Gergonne et Français, comme on a eu égard aux positions inverses de $-a$ et de $+b$, la moyenne doit alors conserver l'empreinte de cette considération, elle est donc par le fait même une moyenne par différence de position aussi bien que de grandeur.

Et, parce que le résultat final $\frac{-a+b}{2}$, sera alternativement frappé du signe $+$ et du signe $-$, suivant que b sera plus grand ou plus petit que a, et qu'il ne peut pas d'ailleurs être affecté d'un autre signe, il s'en suit que la moyenne de position entre les deux directions inverses caractérisées par $+$ et $-$, doit toujours se confondre avec la ligne même sur laquelle les deux directions sont comptées, et qu'elle pourra alternativement coïncider, soit avec la direction directe, soit avec la direction inverse de cette ligne, mais jamais avec la direction perpendiculaire comme cependant cela devrait être.

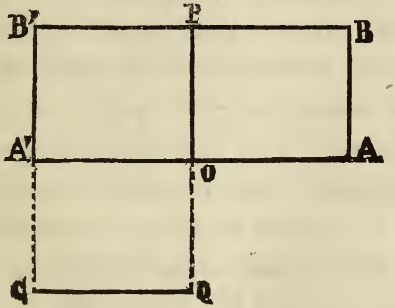
Telles sont les singulières conséquences auxquelles nous conduirait la théorie *des empreintes*, qu'on me passe cette expression, si elle pouvait être adoptée comme vraie.

Poursuivons :

Il est connu que si a représente une longueur, la surface du quarré construit sur cette longueur aura pour expression a^2; cela posé, opérons successivement sur les deux droites $+a$ et $-a$ égales en grandeur, mais dirigées en sens inverse l'une de l'autre, le quarré de la première s'obtiendra en multipliant $+a$ par $+a$, et d'après les règles connues ce quarré sera $+a^2$; le quarré de la seconde s'obtiendra en multipliant $-a$ par $-a$: or d'après les règles connues le quarré sera encore comme précédemment $+a^2$.

Cela posé, d'après les idées de MM. Gergonne et Français il faudrait dire : « En ayant égard aux po-
» sitions inverses de $+a$ et de $-a$, le résultat doit
» conserver l'empreinte de cette considération, ce ré-
» sultat indique donc par le fait même la *position* du
» quarré construit aussi bien que *sa grandeur*. »

Or ici évidemment la règle se trouve en défaut, car dans le cas actuel grandeur et position, tout dans le calcul est égal de part et d'autre.



Et cependant en réalité, dans l'exécution pratique, il est de toute évidence que la position du quarré construit sur OA′ est très différente de celle du quarré construit sur OA ; car ces quarrés OABP , OA′B′P sont, non pas superposés, comme cela devrait avoir lieu si leur position était la même, mais juxtaposés, ce qui est très différent.

A la vérité on pourrait dire que si OABP est le quarré représenté par $(+ a) \times (+ a)$, puisque OA et OP sont les directions positives des axes, il n'en est pas ainsi de OA′B′P qui ne saurait être le quarré représenté par $(- a) \times (- a)$, mais bien celui figuré par $(- a) \times (+ a)$; or, ce dernier quarré étant $- a^2$, il en ressort une distinction manifeste entre les deux cas, l'un ayant le signe + et l'autre le signe —.

Mais à cette manière de raisonner se présente une objection grave et bien propre à nous montrer combien la théorie que je critique, poussée dans ses conséquences, nous conduirait loin des idées reçues.

En effet, cette explication ne tendrait à rien moins qu'à faire considérer l'expression $(- a) \times (+ a)$ comme un quarré , ce qui , sous le point de vue algébrique est inadmissible ; en effet , en algèbre la condition essentielle pour qu'une expression soit réputée quarrée, c'est que les deux facteurs qui doivent la produire soient complètement les mêmes , tant sous le rapport numérique que sous celui des signes, et cette condition est tellement indispensable dans l'état actuel de la science, elle est considérée comme tellement fondamentale, qu'ayant conduit dans ses conséquences, a un genre d'expression incompris, à des quantités inintelligibles, qualifiées d'imaginaires, les algébristes ont mieux aimé s'humilier devant ces formes mystérieuses et reconnaître leur existence comme légale, s'il est permis de s'exprimer ainsi, plutôt que de déroger au principe posé dans la définition du quarré. En ce point les algébristes ont-ils eu tort, ont-ils eu raison ? ou bien leur a-t-il manqué seulement de poser quelque distinction ? C'est ce que je n'ai point à examiner ici ; mais toujours est-il que leur manière d'agir est passée en principe dans la doctrine actuelle de l'algèbre.

Or, les conséquences de l'interprétation précédente, c'est à dire de l'application des idées de M. Français et Gergonne, étant formellement contraires à ce principe, j'en conclus qu'il est impossible dans l'état actuel de nos idées sur l'algèbre d'admettre cette interprétation comme vraie.

D'ailleurs, attaquons plus directement la question, car sous toutes ses faces il est facile de la combattre. Si vous ne voulez pas, dirons-nous, reconnaître le quarré OA'B'P comme le représentant de $(-a) \times (-a)$, il faudra nécessairement admettre que ce quarré est figuré par OA'CQ, puisque pour celui-ci et relativement au quarré OABP, on a à la fois $OA' = -a$ et $OQ = -a$.

Or, bien loin d'arriver par ce moyen à un quarré superposé au premier et ayant même position que lui, nous obtenons un troisième quarré dont la position est bien plus éloignée encore de celle du premier, que ne l'était la position du second.

Ainsi, de quelque côté qu'on envisage la question, il est impossible, en lui appliquant les idées de M. Gergonne et Français, d'en tirer une conséquence raisonnable, d'en déduire un résultat algébrique conforme aux résultats des opérations géométriques; car le résultat algébrique, soit qu'on employe $+a$, soit qu'on employe $-a$, reste toujours frappé du signe $+$, tandis que la construction géométrique conduit à deux quarrés, dont les positions respectives, d'après toutes les idées reçues, doivent être considérées comme inverses l'une de l'autre et par conséquent caractérisées par les signes opposés $+$ et $-$.

— *Doutes et objections au sujet de la règle des signes en algèbre.*

Au reste, les objections que je présente ici n'attaquent pas seulement le mémoire de M. Français, elles étendent leur portée sur un des points les plus délicats des doctrines algébriques, sur les quantités négatives isolées et sur la fameuse règle des signes qu'on croit peut être avoir démontré par des arguments incontestables, et contre laquelle le sujet que je viens de traiter forme évidemment une sérieuse objection. N'est-il pas évident, en effet, que puisque, sous le point de vue algébrique les quarrés

$(+a) \times (+a)$ et $(-a) \times (-a)$, sont exactement les mêmes, tant par rapport à la grandeur, que par rapport aux signes, on devrait en conclure que les quarrés géométriques correspondants doivent avoir même surface et même position? Or, si l'expérience prouve qu'il n'en est point ainsi, qu'il y a bien égalité de surface, mais qu'il n'y a pas coïncidence de position, il en faudra conclure, ou que la règle des signes n'est pas exacte, ou que, du moins, *elle n'est pas toujours applicable.*

En adoptant cette dernière supposition, qui est la moins excentrique, il faudrait dire : le quarré de $-a$ est égal à $+a^2$, comme le quarré de $+a$, non parce que $-$ multiplié par $-$ donne $+$, mais parce que, lorsqu'il s'agit de surface, il faut faire abstraction des signes, ou pour mieux dire des directions, et s'occuper exclusivement des longueurs. Et d'ailleurs la démonstration géométrique à l'aide de laquelle vous enseignez à déterminer la surface d'un quarré construit sur une ligne, s'appuye-t-elle par quelque considération directe ou indirecte sur la position de cette ligne, et vous conduit-elle à quelque conséquence sur l'influence que cette position peut avoir sur celle du quarré? Nullement; sous ce rapport, cette démonstration est muette, et non seulement elle est muette, mais je dirai que son esprit est plutôt contraire que favorable à une semblable conséquence : ne donnez donc pas à cette proposition en algèbre plus d'extension que sa définition géométrique, c'est à dire sa véritable base, ne vous autorise à en admettre.

— *Résumé de cette discussion.*

Je répèterai encore ce que j'ai dit tout à l'heure. Ce n'est point ici le lieu de traiter à fond l'importante question que je soulève, mais il était nécessaire d'en dire assez pour montrer que dans cette matière le doute pouvait être permis, pour faire voir combien il était raisonnable de supposer que, même dans les propositions généralement admises par tous les algébristes, il y avait lieu de ne pas appliquer sans réserve la règle des signes à toutes les circonstances du calcul.

Or, en ceci, nous avons attaqué et combattu la proposition de M. Français, non point d'une manière indirecte, non point dans quelques détails de forme, mais dans son essence, dans son principe, dans la partie où cette proposition tend, si non à fausser la métaphysique de la règle des signes, du moins à en abuser.

Je puis donc maintenant dire à M. Français :

Je prouve que votre raisonnement, appliqué terme pour terme à des propositions autres que la vôtre, conduit à des conséquences contraires à vos propres déductions et aux principes admis dans les doctrines algébriques. Donc ce genre de raisonnement ne saurait s'appliquer à tous les cas, et dès lors il devient évident qu'avant de vous en servir vous deviez donner la preuve, que vous y étiez suffisamment autorisé.

Je fais plus, je montre que dans les cas où l'on en fait ordinairement usage, dans ceux où son emploi n'a paru, jusqu'à ce jour, sujet à aucune contestation, la règle ordinaire des signes appliquée aux qualités isolées, conduit à des résultats algébriques qui ne coïncident pas toujours avec les résultats géométriques dont ils devraient être les représentants. Or, toute l'économie de votre démonstration porte sur une application de la règle des signes à des quantités isolées représentant des quantités géométriques, il est donc impossible de ne pas considérer comme problématiques les conséquences déduites d'un pareil genre de démonstration.

Je crois donc que l'on reste maintenant convaincu que la démonstration du théorème premier de M. Français est encore à faire, et que sa théorie des imaginaires repose sur une base que nous venons de détruire.

— *Nouvelle réfutation du théorème premier de M. Français sous le point de vue de sa forme algébrique.*

Peut-être pourrais-je borner ici mes observations critiques sur ce sujet ; mais qu'il me soit permis d'examiner encore sous un nouveau point de vue le théorème premier de M. Français, non parce qu'il me paraît nécessaire d'entrer dans de nouveaux détails pour redresser les erreurs de ce géomètre, mais parce que ce nouvel examen nous mettra sur la voie de ce qu'il peut y avoir à faire pour donner à sa théorie des imaginaires ce qui lui manque sous le point de vue de la justification.

Voici ces nouvelles observations :

En vertu du théorème premier de M. Français, la quantité $a\sqrt{-1}$ doit être moyenne proportionnelle de grandeur et de position entre $+a$ et $-a$.

J'écris donc d'après ce géomètre

$$+a : a\sqrt{-1} :: a\sqrt{-1} : -a$$

Or, que dit la définition première, car c'est toujours là qu'il faut en revenir pour se rendre un compte exact de toute proportion collective de grandeur et de position ; elle dit qu'une semblable proportion est l'équivalent de deux autres, l'une par quotient relative aux grandeurs, l'autre par différence relative aux positions.

Cela posé, puisque les signes $+$, $-$, $\sqrt{-1}$ sont, tant d'après les idées reçues que d'après celles de M. Français, les caractères algébriques des directions, il n'y a qu'à les faire disparaître, et il faudra qu'alors il y ait proportion par *quotient* entre les lettres qui restent et qui n'expriment plus que les grandeurs ; c'est ce qui arrive, puisqu'on a

$$a : a :: a : a$$

Passons à la seconde épreuve, et recherchons notre progression par *différence*, pour cela, il faut, au contraire, faire disparaître les grandeurs et ne laisser que les signes; alors on a les quatre symboles

$$+1, +\sqrt{-1}, +\sqrt{-1}, -1$$

et il faudrait, d'après la définition première de M. Français, qu'on eût

$$+1 \,.\, +\sqrt{-1} : +\sqrt{-1} \,.\, -1$$

ou $$1-\sqrt{-1}=\sqrt{-1}+1$$

ce qui n'est pas.

Il nous est donc impossible dans la proportion collective de M. Français, de retrouver à la fois les deux proportions par quotient et par différence, qui, d'après sa définition première, doivent la constituer.

Mais si, reconnaissant que $\sqrt{-1}$ ne peut satisfaire à la progression par différence ci-dessus, nous appelons x l'expression inconnue qui doit la vérifier, nous poserons pour déterminer x

$$+1 \,.\, x : x \,.\, -1$$

Or, de cette relation, je déduis $x = 0$, d'où il faudrait conclure que la question est insoluble.

Tel est le dernier mot de la proposition de M. Français, lorsqu'on pousse jusqu'au bout les conséquences qu'on en peut déduire; nouvelle preuve de l'insuffisance de la théorie des imaginaires.

— *Les propositions de M. Français manquent de justification, mais peut-être ne sont-elles pas fausses.*

C'est à l'aide des considérations qu'on vient de lire que j'ai reconnu depuis longtemps que la théorie de M. Français était inadmissible. Le silence que tous les lecteurs des *Annales* ont gardé sur cette théorie, la stérilité à laquelle elle a été vouée depuis le jour où elle a été produite, bien que ses principes parussent si féconds, me font croire qu'il n'est pas un géomètre qui se soit cru suffisamment autorisé à l'admettre, et expliquent pourquoi elle a été ainsi délaissée.

Mais si dans l'étude des sciences il est important de signaler les erreurs, de les combattre et de les détruire, il ne l'est pas moins de rechercher si à la place de ces erreurs, on ne pourrait pas substituer quelque vérité ; or, remarquons que dans le cas actuel nous avons bien montré que M. Français a donné à ses définitions plus d'extension qu'elles n'en comportent, qu'il a admis comme évidente une proposition qui ne l'est pas. Mais cela ne prouve pas qu'au fond cette extension n'existe pas, cela ne prouve pas que la proposition non démontrée n'est pas vraie. Nous pouvons considérer MM. Français et Gergonne comme ayant obéi à une sorte d'instinct, comme ayant préjugé les résultats obtenus, mais l'instinct, et surtout celui des hommes de talent, ne trompe pas toujours, et tous les préjugés ne sont pas des erreurs.

— *Quelques réflexions sur la métaphysique de la science du calcul.*

Il y a cinq ans environ qu'ayant été ramené par un travail dont je m'occupais sur les logarithmes, aux considérations des quantités négatives et positives à celles des infiniment petits, en un mot à tous ces objets qui touchent de si près à la philosophie de la science et qui ont entre eux une si grande connexion, je fus conduit à revoir de nouveau le mémoire de M. Français; et réfléchissant une seconde fois sur les objections que l'on vient de lire, je reconnus qu'il y avait peu à faire pour donner à ce travail une partie de ce que demandait M. Servois, c'est à dire le complément qui lui manque, sous le rapport de l'évidence. Mais en ce qui concernait la fécondité, la tâche me paraissait loin d'être remplie; et je ne pouvais croire que ce que j'avais fait était suffisant pour étendre et perfectionner la nouvelle théorie, dans le sens où paraissait l'entendre M. Gergonne, pour en rendre bien évidents l'esprit, le but et les avantages. J'avais bien, si l'on veut, résolu la question sous le point de vue algébrique, mais cela ne me suffisait pas, car j'en voulais voir le fond autrement qu'à travers les symboles du calcul.

Ces pensées devinrent la source de nombreuses réflexions sur la représentation des quantités à l'aide des formes algébriques; je commençai à reconnaître d'abord quelques abus, ou, si l'on veut, quelques emplois non justifiés des divers signes d'opération , ensuite, il me parut que ces mêmes signes, dont on avait fait abus dans certaines circonstances, pouvaient être avantageusement employés dans d'autres cas où on les avait délaissés; plus tard, il me sembla nécessaire d'établir une distinction nette et précise entre les divers éléments qui figurent dans toute expression algébrique. De là est résultée la classification de ces éléments en deux espèces, suivant qu'ils servent à désigner des grandeurs, ou qu'ils représentent des opérations du calcul ; puis vint cette pensée féconde que de même que les premiers éléments, les *nombres* représentent en algèbre la grandeur des quantités, de même les signes d'opération algébrique pourraient bien être les représentants des opérations à l'aide desquelles la nature établit les quantités, dans tel ou tel état, dans tel ou tel ordre, et cela indépendamment de leur grandeur; pensée fort simple, sans doute, et qu'on serait tenté de considérer comme oiseuse, mais qui, je n'hésite pas à le dire, est le véritable lien qui unit la philosophie naturelle à la science du calcul, le véritable intermédiaire qui transforme les lois du monde créé en formules algébriques toujours compréhensibles, le passage indispensable à l'aide duquel notre raison parvient, sans commettre d'erreurs, à mettre les problèmes naturels en équation.

Mais l'exposition complète de ces doctrines me faisait évidemment sortir des bornes d'une simple réfutation ; je ne pouvais les y placer comme un épisode, leur importance, au contraire, les faisait devenir sujet principal, et aujourd'hui leur ensemble a composé tout cet ouvrage. Mais je me hâte de rentrer dans mon sujet.

— *Rectification de la théorie des imaginaires.*

Maintenant il me reste à faire connaître le complément que j'ai annoncé, et à l'aide duquel le travail de M. Français peut, sinon sous le point de vue philosophique, du moins sous le point de vue de l'algèbre, être admis comme exact.

Voici donc la série de raisonnements qui me parait propre à donner à la théorie des imaginaires un caractère vraiment mathématique.

On a dû remarquer que ce qu'on peut reprocher à M. Français, c'est d'avoir tacitement admis en premier lieu que la proportion collective de grandeur et de position pouvait s'écrire :

$$a_\alpha : b_\beta :: c_\gamma : d_\delta$$

c'est à dire sous la forme des progressions par quotient, et, en second lieu, que par cela même, elle pouvait jouir de toutes les propriétés de ce genre de progression.

C'est évidemment ainsi qu'il en a agi en posant l'équation $\tilde{a}_\alpha = a.\,1_\alpha$. C'est encore ainsi qu'il en a agi en disant que $a\sqrt{-1}$ est moyenne proportionnelle de grandeur et de position entre $+a$ et $-a$.

Cette idée ressortant évidemment de notre critique, suivons-la un instant dans ses conséquences.

Comme les indices conventionnels adoptés pour représenter les diverses circonstances d'un certain ordre de faits, n'autorisent point (tant qu'ils restent à l'état de convention) l'usage des opérations du calcul, on peut se demander si à la place de a_α, b_β, etc., on ne pourrait pas substituer une expression algébrique, telle que les règles ordinaires de la proportion par quotient, fussent applicables à la proportion collective de M. Français

$$a_\alpha : b_\beta : : c_\gamma : d_\delta$$

Pour éclairer cette question, supposons un instant qu'elle soit possible, et désignons par conséquent cette expression inconnue dans laquelle a et α doivent figurer par $f(a,\alpha)$; il est inutile d'insister plus longuement pour faire voir que la fonction f étant indépendante de la valeur particulière de a et α, cette fonction sera la même pour l'expression de toute droite dirigée, et qu'en conséquence la forme assignée par M. Français deviendra

(1).... $$f(a, \alpha) : f(b, \beta) : : f(c, \gamma) : f(d, \delta)$$

et il faudra déterminer la fonction f de telle manière que les deux équations de condition primitive

$$a : b : : c : d$$

$$\alpha . \beta : \gamma . \delta$$

aient toujours lieu et puissent se déduire l'une et l'autre de l'expression (1), et cela en conservant d'ailleurs leur indépendance, c'est à dire de telle sorte que les valeurs de a, b, c, d n'influent en rien sur celles de α, β, γ, δ, et réciproquement, car c'est précisément là la condition qui existe entre les données de la question.

Cela posé, il ne faut pas réfléchir longtemps sur ce sujet pour reconnaître, de prime abord, que si la fonction $f(a, \alpha)$ est de la forme $a\,F(\alpha)$, on satisfait déjà à la moitié du problème; en effet, la proportion précédente deviendra

$$a\,F(\alpha) : b\,F(\beta) :: c\,F(\gamma) : d\,F(\delta)$$

Or, si la nature des données et celle de la forme F autorisent cette proportion, on en déduira :

$$\frac{a.\ F(\alpha)}{b.\ F(\beta)} = \frac{c.\ F(\gamma)}{d.\ F(\delta)} \qquad (1)$$

et comme d'ailleurs les mêmes données disent d'avance qu'on doit avoir séparément la proportion de grandeur $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, il s'ensuit que la relation (1) se réduira seulement à

$$\frac{F(\alpha)}{F(\beta)} = \frac{F(\gamma)}{F(\delta)}.$$

C'est à dire que la première proportion du problème subsistera telle quelle, et que la seconde, de proportion par différence qu'elle était, deviendra proportion par quotient.

— *La direction d'une droite a pour expression algébrique la fonction logarithmique.*

Il reste donc à examiner maintenant quelle doit être la forme de la fonction F pour que la proportion par différence

$$\alpha \,.\, \beta : \gamma \,.\, \delta$$

puisse être légitimement remplacée par la proportion par quotient

$$F(\alpha) : F(\beta) :: F(\gamma) : F(\delta)$$

Or, énoncer une semblable question, c'est en donner la solution ; il est évident, en effet, que cet énoncé n'est autre chose que l'exposé de la propriété fondamentale de la fonction logarithmique.

Appelant donc z la base inconnue du système de logarithmes dont il peut être ici question, nous aurons

$$F(\alpha) = z^{\alpha}$$

et alors la proportion collective de M. Français s'écrira sous la forme

$$a z^{\alpha} : b z^{\beta} :: c z^{\gamma} : d z^{\delta}.$$

Or, maintenant il devient évident que s'il est vrai que a, b, c, d, sont en proportion par quotient, et α, β, γ, δ, en proportion par différence, on pourra appliquer à la proportion collective ci-dessus les règles de la proportion par quotient ; en effet, en suivant ces règles il vient

$$\frac{a}{b} z^{\alpha - \beta} = \frac{c}{d} z^{\gamma - \delta}$$

ce qui, en vertu des deux conditions

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ et } \alpha - \beta = \gamma - \delta,$$

est incontestable.

— *Détermination de la base de ce système de logarithmes.*

Que reste-t-il donc à faire maintenant ? A déterminer la valeur de la base z; et comme cette détermination est indépendante des grandeurs, nous pourrons supprimer celles-ci et considérer la proportion

$$z^\alpha : z^\beta :: z^\gamma : z^\delta.$$

Cela posé, pour déterminer z, il suffira d'examiner un cas particulier; pour cela, admettons que α est nul et δ égal à π, c'est à dire que les deux positions z^α et z^δ sont sur la droite prise pour point départ, mais inverses l'une de l'autre, et supposons qu'on veut chercher entre elles une moyenne ; nous savons d'avance que cette moyenne sera la perpendiculaire à la droite précédente, de sorte qu'en vertu de ce qui précède, son expression algébrique devra être $z^{\frac{\pi}{2}}$. D'ailleurs, parce que la forme générale z^α autorise l'application des règles de calcul qui régissent les proportions par quotient, il s'ensuit qu'en désignant par x l'expression analytique de la direction moyenne cherchée, on devra avoir

$$z^0 : x :: x : z^\pi$$

d'où

$$x = \sqrt{z^0 z^\pi}$$

et par conséquent, puisque nous savons d'avance que x est égal à $z^{\frac{\pi}{2}}$, nous pourrons écrire,

$$z^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{z^0 z^\pi}.$$

Telle est l'équation de condition de laquelle je déduirai la valeur de z. Il semble, au premier abord, que cette équation ne saurait rien apprendre, et qu'elle est une identité toujours satisfaite quel que soit z. En effet, $z^0 z^\pi$ est la même chose que $z^{0+\pi}$ ou z^π, et la racine quarrée de cette quantité étant $z^{\frac{\pi}{2}}$ l'équation précédente donne identiquement

$$z^{\frac{\pi}{2}} = z^{\frac{\pi}{2}}.$$

Mais si tel est le résultat auquel on parvient en considérant cette condition en elle-même et en dehors de tout autre point de vue algébrique, il n'en est plus ainsi, à beaucoup près, lorsqu'on essaye de combiner la série d'idées nouvelles, dont la notation z^α est le représentant, avec certains principes acquis à la science, et sanctionnés par une expérience de tous les jours. En effet, on sait et on prouve *à priori* que dans les considérations qui se rattachent à l'étude des directions, et à cause des relations obligées qui existent entre elles, on sait, dis-je, que pour avoir égard à l'état direct et inverse que peut prendre une même longueur, il faut désigner l'un de ces états par $+a$ et l'autre par $-a$, ou plutôt afin de faire voir que les signes $+$ et $-$ n'affectent pas la grandeur, mais seulement la direction par $a. (+1)$, et par $a. (-1)$. Cela posé, nous nous trouvons ainsi obligés d'admettre qu'il doit y avoir identité complète entre les expressions $+1$ et z^0 qui représentent algébriquement la position directe, et entre -1 et z^π qui représentent algébriquement la position inverse.

Il est manifeste que c'est le seul moyen d'éviter ultérieurement des contradictions dans les diverses recherches algébriques auxquelles on pourra se livrer.

Or, de ces analogies on conclura que le produit $z^0\, z^\pi$ est égal à -1, et que la racine de ce produit n'est autre chose que $\sqrt{-1}$; en sorte que la précédente équation se transforme ainsi qu'il suit

$$z^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-1}$$

Or, sous cette nouvelle forme, cette équation n'est plus une identité, elle est le germe d'une théorie féconde à l'aide de laquelle la science du calcul va conquérir un système complet de numération pour les directions, comme elle en possède un pour les grandeurs, et c'est ce que j'ai suffisamment développé à la fin du chapitre précédent.

Quant à la valeur de z déduite de l'équation

$$z^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-1}$$

elle ne dépend plus que d'un calcul fort court. En effet, si dans la formule connue

$$\cos x + \sqrt{-1} \sin x = e^{x\sqrt{-1}}$$

on fait $x = \frac{\pi}{2}$ il viendra,

$$\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$$

Comparant donc cette équation avec l'équation en, z on en déduit immédiatement

$$e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = z^{\frac{\pi}{2}}, \text{ d'où } z = e^{\sqrt{-1}}$$

Telle est la valeur de la base du système de logarithmes à l'aide duquel on supputera les directions.

Certes, aux yeux de beaucoup de géomètres, ces principes de la théorie des imaginaires paraîtront, je l'espère, établis d'une manière incontestable, et peut-être n'en demanderont-ils pas davantage; quant à moi j'ai été plus exigeant. Sans doute, cette importante vérité que $\sqrt{-1}$ est un signe de perpendicularité, ressort suffisamment des détails qu'on vient de lire; mais elle ne me paraît point, par ce procédé, prochainement déduite des premières notions de la géométrie; elle réside plutôt dans des considérations d'algèbre, qui, à la vérité, ne permettent point le doute, mais dont l'analogie avec les considérations correspondantes de géométrie n'est point toujours immédiate. On a vu dans le chapitre troisième avec quelle simplicité j'arrive à la même conséquence à l'aide de mes principes sur la représentation des quantités; si je montre une prédilection marquée pour la démonstration que je rappelle ici, c'est qu'elle possède à mes yeux le grand mérite d'être essentiellement philosophique, car elle se déduit immédiatement de la définition même de la perpendicularité géométrique. Mais c'est un objet sur lequel les explications développées dans le chapitre troisième nous dispensent de nous appesantir plus longuement.

Il me reste maintenant à donner une idée de l'utilité des principes exposés dans cet ouvrage, sous le point de vue de leur fécondité dans le domaine des applications; c'est ce que je vais faire dans le chapitre suivant.

CHAPITRE V.

APPLICATIONS DES DOCTRINES EXPOSÉES DANS LES CHAPITRES PRÉCÉDENTS A LA THÉORIE DES FONCTIONS CIRCULAIRES ET A LA GÉOMÉTRIE.

— *Objet de ce chapitre.*

Dans le chapitre troisième de cet ouvrage, j'ai démontré cette proposition capitale que si on prend une certaine droite pour point de départ de la mesure des angles, et si une nouvelle droite fait avec elle un angle α, la direction de la seconde par rapport à la première sera caractérisée algébriquement et distinguée de la direction de toute autre par l'expression

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}.\sin\alpha.$$

Je n'ignore pas que ce fait tout nouveau pourra de prime abord trouver dans les esprits quelque opposition; depuis si longtemps qu'on fait usage de ces formes algébriques, comment se fait-il, dira-t-on, qu'on n'a point songé à une semblable interprétation? comment admettre que tant de savants célèbres qui, dans le cours de leurs investigations, ont sans cesse mis en œuvre les expressions imaginaires, n'ont pas entrevu une propriété si générale et si féconde, qu'elle embrasse à elle seule toute la trigonométrie actuelle, et une bonne moitié de l'étude de la géométrie?

Ces objections, il y a longtemps que je me les suis adressées à moi-même, car si le fait analytique dont il s'agit ici, se présente d'abord à l'esprit des lecteurs comme un moyen de donner à des expressions mystérieuses jusqu'à ce jour, une signification claire et facile, on ne tarde pas à reconnaître, en méditant plus profondément sur ce sujet, que le même fait, s'il est mathématiquement établi, ne tend à rien moins qu'à imprimer une face toute nouvelle aux méthodes d'enseignement adoptées jusqu'à ce jour. Un tel degré d'importance, on le conçoit aisément, ne me permettait pas d'entrer dans cette voie nouvelle sans avoir mûrement réfléchi sur le fait en lui-même, sans l'avoir contrôlé, non seulement par l'épreuve du raisonnement, mais encore par celle de l'expérience; car, ainsi que je l'ai dit au commencement de cet ouvrage, même en mathématiques, la sanction de l'expérience est souvent d'un grand poids pour confirmer l'exactitude de certains résultats.

On a pu voir, dans ce qui précède, par quelle suite de conséquences rationnelles je suis parvenu à l'interprétation que je donne des expressions imaginaires. Passons maintenant à l'épreuve de l'expérience, entrons dans le domaine des applications.

On ne me fera pas un reproche sans doute de ne pas m'être assujéti, dans ce qui va suivre, à cet ordre didactique qui convient à un ouvrage d'enseignement. Dans cet écrit mon but n'est point d'exposer avec tous les détails nécessaires pour des élèves, par quels procédés les principes exposés ci-dessus s'appliquent à l'étude de la science. Je veux seulement montrer aux hommes qui déjà possèdent la connaissance des doctrines scientifiques, comment ces principes sont propres à expliquer une classe de faits qui, jusqu'à ce jour, était restée incomprise, et comment ils ouvrent une nouvelle méthode de recherches aux études mathématiques.

J'entre maintenant en matière.

SECTION PREMIÈRE.

Application à la théorie des fonctions circulaires.

— *On vérifie par l'expérience que l'expression*

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha,$$

est en effet susceptible d'être adoptée en algèbre, comme la représentation de la direction déterminée par l'angle α.

La première chose à faire sera de voir si, en effet, l'expression algébrique

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha$$

convient par les variations diverses de α, aux variations géométriques que ces changements de l'angle α apportent dans la direction primitive.

Et d'abord, supposons que l'angle α change de signe, c'est à dire qu'il est compté dans un sens opposé, relativement à la ligne qui sert de point de départ.

Si nous répétons pour ce cas ce que nous avons dit pour le premier, si nous reproduisons, dans cette circonstance, les mêmes développements à l'aide desquels nous avons déterminé le coefficient de direction de la ligne qui fait avec celle de départ l'angle primitif α, nous reconnaîtrons que le seul changement à introduire sera le sens dans lequel on a mené la perpendiculaire, ce qui conduit à substituer

$$-\sqrt{-1} \text{ à } \sqrt{-1},$$

le coefficient de direction relatif à l'angle $-\alpha$, doit donc être

$$\cos \alpha - \sqrt{-1} \sin \alpha.$$

C'est, en effet, le résultat qu'on obtient lorsque, dans l'expression générale,

$$\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha,$$

on remplace α par $-\alpha$; cette expression prend alors la forme

$$\cos(-\alpha) + \sqrt{-1} \sin(-\alpha).$$

Or, d'après les notions les plus élémentaires de trigonométrie, on a

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \text{ et } \sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

Substituant donc ces valeurs dans l'expression ci-dessus, elle devient comme précédemment

$$\cos \alpha - \sqrt{-1} \sin \alpha.$$

Si l'angle α augmente d'un nombre entier quelconque de circonférences, la direction restera évidemment la même, il faut donc que son expression analytique ne change pas. Or, en algèbre un nombre n de circonférences est représenté par $2n\pi$, le coefficient de direction devient donc dans ce cas

$$\cos(\alpha + 2\,n\pi) + \sqrt{-1}\,\sin(\alpha + 2\,n\pi)$$

expression qui est exactement la même que

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha.$$

Si α augmente d'une demi-circonférence, la direction nouvelle est l'inverse de la précédente, il faut donc que les deux expressions

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha$$

$$\text{et}\ \cos\left(\alpha + \pi\right) + \sqrt{-1}\,\sin\left(\alpha + \pi\right)$$

ne diffèrent que par le signe.

C'est, en effet, ce qui résulte des relations trigonométriques connues.

Si α augmente d'un quart de circonférence, la nouvelle direction sera perpendiculaire à la première. Or, les coefficients de ces deux directions sont respectivement

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha,$$

$$\text{et}\ \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{-1}\,\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Mais puisque nous avons démontré que le fait géométrique de la perpendicularité d'une direction sur une autre, s'exprime en algèbre par le facteur $\sqrt{-1}$, il faudra que le second coefficient ne soit autre chose que le premier multiplié par $\sqrt{-1}$, et qu'en conséquence on ait l'équation

$$(cos\ \alpha + \sqrt{-1}\ sin\ \alpha)\ \sqrt{-1} =$$

$$cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{-1}\ sin\ \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

ou bien

$$cos\ \alpha\ \sqrt{-1} - sin\ \alpha =$$

$$cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{-1}\ sin\ \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Or cette relation est exacte de tout point, puisqu'il est connu qu'on a

$$cos\ \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\ sin\ \alpha$$

$$\text{et}\ sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = cos\ \alpha$$

Si la quantité ajoutée à α est, non plus une circonférence entière ou une demie ou un quart, mais un angle quelconque β, voici comment en vertu de nos principes nous devrons raisonner.

Les coefficients des deux directions qu'on considère sont respectivement

$$cos\ \alpha + \sqrt{-1}\ sin\ \alpha,\ \text{et}\ cos\ (\alpha+\beta) + \sqrt{-1}\ sin\ (\alpha+\beta)$$

Mais puisque nous avons démontré que le fait géométrique en vertu duquel une direction est distante d'une autre d'un angle β, s'exprime en algèbre par le facteur

$$\cos\beta + \sqrt{-1}\,\sin\beta,$$

il faudra que le second coefficient ne soit autre chose que le premier multiplié par

$$\cos\beta + \sqrt{-1}\,\sin\beta$$

et qu'en conséquence on ait l'équation

$$\cos(\alpha+\beta) + \sqrt{-1}\,\sin(\alpha+\beta) =$$
$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha)(\cos\beta + \sqrt{-1}\,\sin\beta),$$

conséquence qui est pleinement justifiée par les vérités bien connues de la trigonométrie en vertu desquelles on a

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta.$$

En continuant un raisonnement tout semblable à celui-là, nos principes nous conduisent à ce résultat,

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots) + \sqrt{-1}\,\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)$$
$$= (\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha)\,(\cos\beta + \sqrt{-1}\,\sin\beta)$$
$$(\cos\gamma + \sqrt{-1}\,\sin\gamma)\,(\cos\delta + \sqrt{-1}\,\sin\delta)\ldots$$

formule féconde à l'aide de laquelle on détermine le sinus et le cosinus de la somme de plusieurs arcs à l'aide des sinus et des cosinus de ces arcs.

Dans le cas particulier où tous les angles α, β, γ, δ, que je suppose en nombre n, deviennent égaux entre eux, cette relation se transforme en la suivante

$$\cos n\alpha + \sqrt{-1} \sin n\alpha = (\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha)^n .$$

Nos principes nous conduisent donc encore à des conséquences algébriques depuis longtemps reconnues comme vraies.

Poursuivons :

— *Traduction géométrique de l'égalité*

$$(\cos\alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha)^n + (\cos\alpha - \sqrt{-1} \sin \alpha)^n = 2 \cos n\alpha .$$

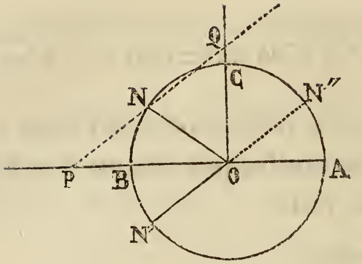
Si dans l'équation précédente on change le signe de α, elle deviendra

$$(\cos \alpha - \sqrt{-1} \sin \alpha)^n = \cos n\alpha - \sqrt{-1} \sin n\alpha.$$

et si on ajoute ensemble ces deux expressions, on trouvera pour résultat

$$(\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha)^n + (\cos \alpha - \sqrt{-1} \sin \alpha)^n = 2 \cos n\alpha.$$

Jusqu'à ce jour la vérité algébrique exprimée par cette équation est uniquement restée comme un fait analytique incontestable, et non seulement on n'en a pas fait la traduction géométrique, mais il est probable qu'on ne s'est jamais demandé s'il y avait lieu à la faire et en quoi elle pouvait consister. On va voir d'après mes principes qu'elle n'est que la reproduction en algèbre d'une figure de géométrie fort simple.



Qu'est-ce d'abord que

$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha)^n\ ?$$

Cela représente, en géométrie, la direction ON à laquelle on parvient après avoir pris sur la circonférence OA dont le rayon est l'unité, n fois l'arc α à partir de la ligne de base OA.

Donc, si je change le signe de α, auquel cas l'expression devient

$$(\cos\alpha - \sqrt{-1}\,\sin\alpha)^n,$$

cela revient à prendre en dessous de OA le même angle α un même nombre de fois, ce qui conduit géométriquement à la direction ON' complètement symétrique à ON par rapport à OA.

Cela posé, d'après la formule, il faut, à la droite dirigée ON, ajouter la droite dirigée ON'; pour cela, il faut mener à la suite de la première, au point N, une ligne parallèle à la seconde ON', par exemple NP, et prendre NP = ON'; or, il est bien connu en géométrie qu'en opérant ainsi on arrive à un point P situé sur la ligne AB. Il faut donc, pour qu'il y ait accord entre la formule algébrique et les opérations géométriques, qu'on ait OP $= 2 \cos n\alpha$, ce qui est de toute évidence. Voilà donc une des formules les plus importantes de la théorie des fonctions circulaires qui, d'après nos principes, n'est plus que la traduction d'une figure fort simple de géométrie.

— *Traduction géométrique de l'égalité*

$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)^n - (\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha)^n = 2\sqrt{-1}\sin n\alpha.$$

Si au lieu d'ajouter les deux précédentes expressions on les retranche, il faudra, à la suite de la direction ON, reproduire, non plus la direction ON′ dans le sens qui lui appartient de O vers N′, mais en sens contraire, ce qui géométriquement se réduit à mener NQ égal et parallèle à N′O, ou pour mieux dire à son prolongement ON″. Or, il est connu qu'en opérant ainsi, on arrive, comme distance et comme direction, à un point Q situé sur la ligne OC perpendiculaire à la direction OA prise pour point de départ, ce qui, en vertu de nos principes, doit s'exprimer algébriquement par OQ $\sqrt{-1}$. Et comme il est connu que OQ est égal à $2 \sin n\alpha$, il s'ensuit qu'on doit avoir :

$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)^n - (\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha)^n = 2\sqrt{-1}\sin n\alpha.$$

Cette dernière équation, fort usitée dans la théorie des fonctions circulaires, est donc, comme la précédente, la traduction algébrique d'une figure très simple de géométrie.

— *Traduction géométrique de l'égalité.*

$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\ \sin\alpha)^n\ (\cos\alpha - \sqrt{-1}\ \sin\alpha)^n = 1.$$

Nous avons prouvé que le coefficient de la direction qui fait avec la ligne de base un angle α est le facteur

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\ \sin\alpha,$$

il s'en suit que par contre si on divise l'expression analytique de la direction de la base qui est 1, par le facteur

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\ \sin\alpha,$$

on devra avoir pour résultat la direction déterminée par un angle α égal au précédent, mais situé au dessous de la base, direction dont nous avons dit que l'expression est

$$\cos\alpha - \sqrt{-1}\ \sin\alpha.$$

Il faut donc qu'on ait

$$\frac{1}{\cos\alpha + \sqrt{-1}\ \sin\alpha} = \cos\alpha - \sqrt{-1}\ \sin\alpha$$

d'où

$$(\cos\alpha - \sqrt{-1}\ \sin\alpha)\ (\cos\alpha + \sqrt{-1}\ \sin\alpha) = 1,$$

et généralement

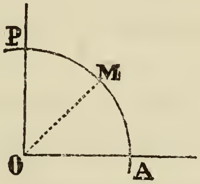
$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\ \sin\alpha)^n\ (\cos\alpha - \sqrt{-1}\ \sin\alpha)^n = 1,$$

formules dont la vérité est bien connue en algèbre.

— *Explication géométrique des expressions*

$$\sqrt{-1},\ \sqrt[3]{-1},\ \sqrt[4]{-1},\ \sqrt[5]{-1},\ \text{etc.}$$

La forme de raisonnement que j'ai mise en usage pour parvenir à la recherche du facteur de la perpendicularité rapportée aux deux directions extrêmes $+1$ et -1 entre lesquelles elle est symétriquement placée, peut s'appliquer mot pour mot à la recherche de l'expression de toute direction symétriquement placée entre deux autres.



Par exemple, soit décrit le quart de cercle PA, si nous partageons l'angle droit POA en deux parties égales, nous aurons une direction OM, soit p le facteur de cette direction par rapport à OA ; si maintenant de OM je veux passer à OP, je devrai encore faire usage du facteur de direction p, ce qui produira p^2, et, puisque cela fait, j'arrive précisément à la direction perpendiculaire OP, il s'en suit que je devrai avoir

$$p^2 = \sqrt{-1}\,, \quad \text{d'où}\ p = \sqrt[4]{-1}$$

et en faisant des raisonnements analogues, on arrivera à cette conséquence que les expressions algébriques

$$\sqrt[4]{-1},\quad \sqrt[6]{-1},\quad \sqrt[8]{-1}, \text{ etc.}$$

représentent les directions des lignes qui divisent l'angle droit en 2, 3, 4, 5, etc., parties égales, et qu'en général les expressions algébriques

$$\sqrt[2]{-1},\quad \sqrt[3]{-1},\quad \sqrt[4]{-1},\quad \sqrt[5]{-1}, \text{ etc.}$$

représentent les directions des lignes qui divisent la demi-circonférence en 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. parties égales.

— *Explication géométrique des n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.*

Enfin, si au lieu de s'occuper de la demi-circonférence, on s'occupe de la circonférence entière, et qu'on la conçoive divisée en 2, 3, 4, 5, 6, et, en général, en n parties égales, le coefficient de direction de la première ligne divisoire étant p, le coefficient de direction de la dernière n sera p^n; mais cette dernière est précisément la ligne de base, de sorte qu'on devra avoir $p^n = 1$ d'où $p = \sqrt[n]{1}$.

Or, ceci nous montre, et les résultats algébriques connus confirment pleinement cette indication, qu'il n'est pas du tout indifférent, dans tous les cas, de substituer

$$\sqrt[n]{1} \text{ à } \sqrt[m]{1} \text{ et à } 1.$$

$\sqrt[n]{1}$ s'applique à la direction de la ligne qui dirige en n parties la circonférence, et $\sqrt[m]{1}$ à celle de la ligne qui la divise en m parties égales, choses qui dans la nature sont essentiellement distinctes les unes des autres, et qui devront par conséquent l'être également dans le calcul.

Mais, comme lorsqu'on nous a demandé de diviser la circonférence en n parties égales, le procédé que nous avons employé se borne à écrire qu'au bout de n répétitions d'un certain angle α le long de la circonférence, nous arrivons à la ligne de départ. Comme aussi si nous avions pris l'angle 2α au lieu de α, et si nous l'avions répété n fois, nous serions évidemment arrivés à la même ligne de départ; comme encore si nous avions pris l'angle 3α et si nous l'avions répété n fois, nous serions encore arrivés à la même ligne de départ, et ainsi de suite jusqu'à l'angle $n\alpha$, il s'en suit que ce que nous avons écrit doit également convenir à ces différents cas, d'où nous devons forcément conclure que de notre équation de relation il faut nécessairement déduire n valeurs différentes de p, ce qui nous conduit à cette conséquence qu'il doit exister n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. C'est encore un fait qui est complètement admis en algèbre.

Enfin, parce que les valeurs de p répondent, d'après notre théorie, aux coefficients de direction des lignes qui sont déterminées par les angles α, 2α,

3α, etc., parce que nous avons prouvé que ces coefficients sont de la forme

$$\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha$$

$$\cos 2\alpha + \sqrt{-1} \sin 2\alpha.$$

. . . .

et, parce qu'enfin, dans le cas actuel α est égal à $\frac{2\pi}{n}$, il s'en suit que les valeurs de p et par conséquent les n racines de l'unité, doivent être de la forme

$$\cos \frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$\cos 2 \frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin 2 \frac{2\pi}{n}$$

. . . .

$$\cos (n-1) \frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin (n-1) \frac{2\pi}{n}$$

$$\cos n \frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin n \frac{2\pi}{n}$$

Vérité depuis longtemps consacrée dans la science algébrique.

Ce serait peut-être ici le cas de faire remarquer comment toutes les propriétés des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité ressortent de nos principes; mais comme c'est dans l'algèbre qu'on s'occupe spécialement de la résolution de l'équation $x^n = 1$, j'entrerai dans de plus grands détails à ce sujet, lorsque, dans la seconde partie de cet ouvrage, je m'occuperai de l'application de mes principes à cette branche de la science du calcul.

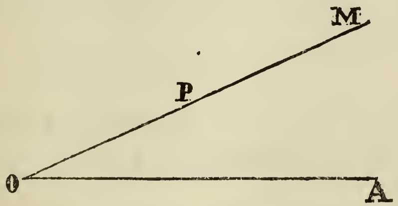
Je pourrais sans peine donner plus d'extension encore à ces citations, mais je ne fais point ici un traité spécial de la matière, et je crois que ce qui précède est bien suffisant pour montrer et la vérité et la fécondité de nos principes.

SECTION II.

Applications à la géométrie élémentaire.

— *Détails préliminaires sur la manière de représenter en algèbre les droites et leurs directions.*

Nous venons de voir dans ce qui précède à quelles conséquences importantes nous a conduit le principe par lequel nous avons appris à représenter en algèbre les directions des droites. Combinons maintenant les longueurs avec les directions et nous allons arriver à des conséquences non moins dignes de remarque.



Soit menée par le point O une ligne droite, OM faisant un angle θ avec la ligne de base OA ; et soit pris sur la ligne OM un point P. Si, pour abréger, je représente par r la distance OP, la droite OP, tant en grandeur qu'en direction , sera représentée dans le calcul par l'expression

$$r\ (\cos\theta + \sqrt{-1}\ \sin\theta).$$

C'est ce qui a été prouvé dans le chapitre III.

Cela posé, si dans cette expression où θ est constant, on suppose que r devient variable depuis zéro jusqu'à l'infini, l'expression ci-dessus représentera toutes les longueurs dont l'existence est possible, dirigées suivant θ. Cette expression pourra donc aussi être employée pour exprimer tous les points de la droite indéfinie OM, et il est évident qu'on ne pourra l'appliquer qu'aux seuls points de cette droite.

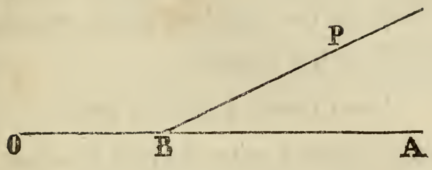
Quant à la portion de cette droite située au dessous du point O et dans son prolongement, gardons-nous de dire qu'elle s'obtiendra par la supposition de r négatif; car ne perdons pas de vue que r n'exprime qu'une longueur et rien de plus, la seule chose qui peut devenir négative, la seule qui soit susceptible d'une existence directe et inverse, c'est la direction, ainsi l'expression

$$-\ r\ (\cos\theta + \sqrt{-1}\ \sin\theta)$$

s'appliquera à la ligne OP prolongée au delà du point O, et il est bien entendu que le signe — ne frappe pas r, mais

$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\ \sin\theta).$$

Si la ligne dont on s'occupe ne passe point par le point O, voici comment, en partant de l'origine, nous pourrons aboutir à un quelconque de ses points P.



Désignant par B la position du point où elle coupe la ligne de base OA, appelant d la distance OB et r celle BP, enfin appelant θ l'angle qu'elle fait avec la ligne de base, on verra que le chemin OB, tant en longueur qu'en direction est représenté par d, que le chemin BP tant en longueur qu'en direction est représenté par

$$r\,(cos\ \theta + \sqrt{-1}\ sin\ \theta)$$

et qu'en conséquence la somme de ces deux chemins qui fixe irrévocablement la position du point P aura pour expression

$$d + r\,(cos\ \theta + \sqrt{-1}\ sin\ \theta)$$

Si maintenant on suppose que r devient variable depuis zéro jusqu'à l'infini, l'expression ci-dessus représentera tous les chemins dont l'existence est possible pour aller de O à un point quelconque de la droite BP, en suivant d'abord la partie commune OB.

C'est à dire que l'expression ci-dessus dans laquelle r est variable peut être employée pour exprimer tous les points de la droite BP rapportés au point O et à la ligne OA.

Je remarquerai encore que quant à la portion de la droite BP, située dans son prolongement au delà du point B, elle sera représentée par la supposition que dans l'expression précédente, le second terme devient négatif, ce qui donne

$$d - r\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)$$

Mais il reste toujours entendu que le signe — doit être attribué au coefficient de direction, et ne peut jamais donner lieu à aucune interprétation, relativement à r.

Si je rédigeais un traité complet sur cette matière, il existe encore grand nombre de détails préliminaires sur lesquels je devrais insister, mais j'écris en ce moment non pour des élèves qui doivent tout apprendre, mais pour des lecteurs qui se familiarisent promptement avec ce genre de matières, et pour lesquels on peut supprimer quelques développements.

— *Relations entre une droite et sa perpendiculaire.*

Reprenons le cas d'une ligne qui passe par l'origine, et dont l'expression analytique est

$$r\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta).$$

Proposons-nous de trouver l'expression analytique de la ligne qui, passant par l'origine, lui est perpendiculaire. Si r' désigne la distance d'un point quelconque de cette ligne à l'origine, et θ' l'angleq u'elle fait avec la ligne de base, son expression sera

$$r'\,(\cos\theta' + \sqrt{-1}\,\sin\theta')$$

Or, parce qu'elle est perpendiculaire à la précédente, il faudra que son coefficient de direction ne soit autre chose que celui de la ligne donnée, multiplié par $\sqrt{-1}$; on aura donc pour l'expression analytique de la perpendiculaire

$$r' \sqrt{-1}\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta).$$

Si, au lieu de mener la perpendiculaire par l'origine, on la faisait passer par un point de la droite donnée distant du point O de la quantité a, l'expression analytique de la perpendiculaire serait évidemment

$$a(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta) + r'\sqrt{-1}\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)$$

ou bien

$$(a + r'\sqrt{-1})\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)$$

dans laquelle tout est constant, excepté r'.

Si on désigne par x la distance inconnue, comptée à partir de l'origine où cette perpendiculaire vient couper la ligne de base, et par y la valeur de r' qui correspond à cette intersection, on devra avoir

$$(a + y\sqrt{-1})\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta) = x;$$

égalant de part et d'autre le réel et l'imaginaire, il viendra les deux relations

$$a\cos\theta - y\sin\theta = x$$
$$a\sin\theta + y\cos\theta = 0$$

On tire de la deuxième

$$y = -a\,\mathrm{tang}\,\theta$$

ce qui apprend que cette valeur de y doit être comptée sur la direction de la perpendiculaire qui marche en dessous de la ligne donnée.

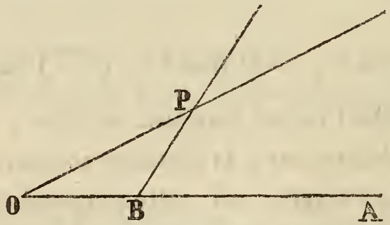
En substituant cette valeur dans la première, on en tire

$$x = a \frac{1}{\cos \theta}.$$

Ce sont bien là les valeurs que l'on trouve par les procédés ordinaires de la géométrie analytique.

— *Intersection de deux droites.*

Passons à d'autres questions :



Soit toujours OA notre ligne de base, soient deux droites quelconques OP, BP passant l'une par l'origine et l'autre par un point B distant de cette origine de la quantité $OB = d$, leurs expressions analytiques seront

$$r\,(\cos \theta + \sqrt{-1}\,\sin \theta),$$

$$d + r'\,(\cos \theta' + \sqrt{-1}\,\sin \theta')$$

Proposons-nous de déterminer les longueurs OP et BP que détermine leur intersection. Si on appelle x

et y ces longueurs, il faudra écrire que le chemin

$$x\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)$$

est égal au chemin

$$d + y\,(\cos\theta' + \sqrt{-1}\,\sin\theta').$$

Posant donc cette équation, et puis égalant de part et d'autre le réel et l'imaginaire, il viendra

$$x\cos\theta = d + y\cos\theta'$$
$$x\sin\theta = y\sin\theta'.$$

Et l'on trouve, en résolvant ces équations, les valeurs suivantes :

$$y = d\,\frac{\sin\theta}{\sin(\theta - \theta')}$$

$$x = d\,\frac{\sin\theta'}{\sin(\theta - \theta')}$$

Ce sont les valeurs ordinaires fournies par les procédés connus de l'algèbre.

— *Formules fondamentales de la trigonométrie des triangles.*

Au reste, si dans le triangle ci-dessus OBP on pose successivement

$$\text{OB} = a,\quad \text{BP} = b,\quad \text{PO} = c$$
$$\text{OPB} = \text{A},\quad \text{POB} = \text{B},\quad \text{PBO} = \text{C}$$

si on remarque qu'alors

$$\text{A} = \theta - \theta' \quad \text{que B} = \theta \quad \text{et} \quad \text{C} = \pi - \theta'$$

les deux équations de condition ci-dessus vont devenir

$$c \cos B = a - b \cos C$$
$$c \sin B = b \sin C$$

Ce sont les formules fondamentales de la trigonométrie pour la résolution des triangles rectilignes.

— *Principes fondamentaux de la théorie générale des polygones.*

Si une droite fait avec la ligne de départ un angle θ_1, son coefficient de direction sera

$$\cos \theta_1 + \sqrt{-1} \sin \theta_1$$

Si une seconde droite coupe celle-ci, suivant un angle θ_2, son coefficient de direction rapporté à la ligne de base sera

$$(\cos \theta_1 + \sqrt{-1} \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + \sqrt{-1} \sin \theta_2)$$

ou

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sqrt{-1} \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Si une troisième droite coupe la précédente sous un angle θ_3, son coffiecient de direction par rapport à la ligne de base sera

$$(\cos \theta_1 + \sqrt{-1} \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + \sqrt{-1} \sin \theta_2)$$
$$(\cos \theta_3 + \sqrt{-1} \sin \theta_3)$$

ou

$$\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + \sqrt{-1} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

Enfin, si on continue ainsi jusqu'à une $n^{\text{ème}}$ droite, le coefficient de direction de cette $n^{\text{ème}}$ droite, toujours rapportée à la ligne de base aura pour expression

$$(\cos\theta_1+\sqrt{-1}\,\sin\theta_1)\,(\cos\theta_2+\sqrt{-1}\,\sin\theta_2)\,\ldots.$$
$$\ldots..(\cos\theta_n+\sqrt{-1}\,\sin\theta_n)$$

ou plus simplement

$$\cos\,(\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_n)+\sqrt{-1}\,\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_n)$$

Or, si l'on suppose que la dernière droite se confond avec la direction positive de la ligne de base, l'expression analytique de cette direction étant $+1$, on aura

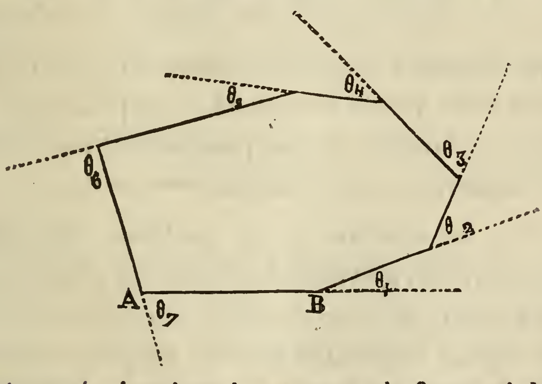
$$(\cos\theta_1+\theta_2\ldots+\theta_n)+\sqrt{-1}\,\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)=+1$$

d'où on déduira

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\ldots.+\theta_n=2\,k\,\pi$$

k étant un nombre entier.

Quant à la valeur de k il est évident qu'elle sera égale au nombre de fois qu'on aura fait de tours complets, en exécutant la construction précédente.



Cela posé, si on jette les yeux sur la figure ci-dessus qui représente un polygone, et si on suppose que la direction de l'un des côtés de ce polygone AB est prise pour point de départ, il est facile de voir que les angles successifs θ_1, θ_2, θ_3, que les côtés font entre eux, sont ce qu'on appelle en géométrie les angles extérieurs du polygone, et on conclura de la formule précédente que dans le cas de la figure ci-dessus, la somme des angles extérieurs est égale à une circonférence ou quatre angles droits, d'où il suit que la somme des angles intérieurs est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux. Ce sont les théorèmes fondamentaux de la théorie des polygones.

Si l'on suppose que tous les angles θ_1, θ_2, $\theta_3 \ldots \theta_n$, sont égaux entre eux, les angles intérieurs le seront pareillement; or, dans ce cas, l'équation de condition deviendra

$$n\,\theta_1 = 2k\pi\,, \text{ c'est à dire, } \theta_1 = \frac{2k\pi}{n}$$

Ce qui conduit à plusieurs valeurs de θ_1, et l'on voit tout de suite que les directions correspondantes à ces valeurs de l'angle θ_1 auront précisément pour expressions algébriques les n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

De là, on conclura que le problème qui consiste à construire un polygone de n sommets ayant tous ses angles égaux, est susceptible de n solutions, fait constaté depuis longtemps par les élégants théorèmes de M. Poinsot sur les polygones réguliers.

Imaginons maintenant que a_1, a_2, $a_3 \ldots a_{n-1}$, a_n sont respectivement les longueurs des côtés du polygone correspondant aux angles extérieurs $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots\ldots \theta_n$. Il est évident que si on part du point B en suivant le polygone pour retourner au point B, il faudra que la somme des divers chemins ainsi parcourus soit nulle; ce qui conduit à la relation suivante :

$$
\begin{aligned}
& a_1 (\cos \theta_1 + \sqrt{-1} \sin \theta_1) \\
& + a_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + \sqrt{-1} \sin (\theta_1 + \theta_2)] \\
& + a_3 [\cos (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + \sqrt{-1} \sin (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)] \\
& + \ldots \\
& + a_n [\cos (\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + \sqrt{-1} \sin (\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)]
\end{aligned}
$$

Condition de laquelle, en ayant égard à la relation

$$\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots\ldots + \theta_n = 2k\pi,$$

on tire les deux suivantes :

$$
\begin{aligned}
& a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) + a_3 \cos (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
& + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} \cos (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots\ldots \theta_{n-1}) = a_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) + a_3 \sin (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
& + \ldots\ldots + a_{n-1} \sin (\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots + \theta_{n-1}) = 0.
\end{aligned}
$$

Ce qui veut dire :

1° Que la somme des projections des côtés d'un polygone sur la direction de l'un d'entre eux est égale de signe contraire à la longueur du côté sur lequel on projette.

2° Que la somme des projections des côtés d'un polygone sur une direction perpendiculaire à celle d'un quelconque de ses côtés, est nulle.

Plus généralement, si les directions au lieu d'être rapportées à un des côtés du polygone sont rapportées à une ligne quelconque, appelant φ l'angle que cette ligne fait avec le côté qu'on avait d'abord pris pour base, il faudra, pour passer du cas précédent à celui-ci, multiplier tous les coefficients de direction par $\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$. Les équations ci-dessus recevront dans ce cas des modifications que je me dispenserai de transcrire, mais desquelles on déduira sans peine que la somme des projections des côtés d'un polygone sur une droite quelconque est constamment nulle.

Je rappelle ici que je ne rédige point en ce moment un traité complet sur la matière, et qu'en conséquence je ne dois pas suivre dans leurs dernières ramifications les divers résultats auxquels je parviens, il doit me suffire pour l'objet que j'ai en vue de constater, d'une part la fécondité de ces résultats, et de l'autre leur coïncidence avec les vérités déjà connues.

— *Du Cercle.*

Ce qui précède sera, je crois, suffisant pour montrer comment les principes que j'ai démontrés s'appliquent aux longueurs et aux directions rectilignes. Passons maintenant au cercle.

Si on prend pour origine le centre du cercle, la ligne de base sera un de ses diamètres, de sorte que

r étant la grandeur du rayon, un quelconque des points du cercle aura pour expression

$$r\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta).$$

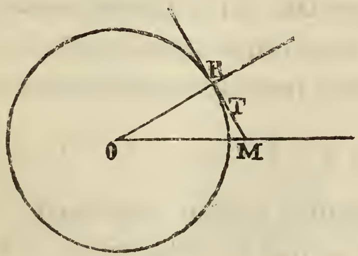
Ainsi, en supposant θ variable et r constant dans cette expression, elle représentera un point quelconque de la circonférence, si on supposait à la fois θ variable de zéro à 2π et r de zéro à r. Cette expression serait celle d'un point quelconque de la surface du cercle.

— *De la tangente au cercle.*

La tangente en un point d'un cercle étant perpendiculaire à la direction du rayon qui passe par ce point, il s'ensuit que le coefficient de direction de cette tangente sera égal au produit du coefficient de direction du rayon par $\pm\sqrt{-1}$.

Ainsi, pour le rayon déterminé par l'angle θ, le coefficient de direction de la tangente sera

$$\pm\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)\,\sqrt{-1}$$



Désignant par ρ la distance variable du point R à un point quelconque T de cette tangente, on trouve que la position de ce point T sera déterminée par OR + RT ou

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta) \pm \rho\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)\sqrt{-1},$$

qui peut aussi s'écrire

$$(r \pm \rho\sqrt{-1})\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)$$

le signe + répondant à la portion de la tangente située au dessus de OR et le signe — à celle située au dessous.

Proposons-nous maintenant de déterminer la distance inconnue OM à laquelle cette tangente coupe la ligne de base, et la longueur RM comprise entre la même ligne de base et le point de contact.

Soit fait pour abréger OM $= x$, RM $= y$, et laissons de côté la considération du double signe $\pm$ que le coefficient de direction reproduit d'ailleurs de lui-même.

La condition du problème est que les chemins géométriques OR et RM ajoutés ensemble avec leurs directions sont l'équivalent du chemin OM.

Ceci donne immédiatement la relation

$$(r + y\sqrt{-1})\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta) = x$$

Développant et égalant séparément à zéro ce qui est réel et ce qui est imaginaire, il vient les deux équations

$$r \cos\theta - y \sin\theta = x$$
$$r \sin\theta + y \cos\theta = 0$$

on tire immédiatement de la seconde

$$y = -r \operatorname{tang}\theta$$

Ainsi tant que le point R sera pris sur le premier quart de la circonférence, pour lequel tang θ est constamment positif, la valeur de y sera négative, c'est à dire que la tangente coupera la ligne de base au dessous de OR; mettant cette valeur de y dans la première équation, on trouve

$$r\left(\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right) = x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{r}{\cos\theta}$$

Ce sont les valeurs ordinaires de x et de y.

— *Intersection de deux circonférences.*

Passons à la considération simultanée de deux circonférences.

Nous prendrons pour ligne de base la ligne des centres et pour origine le centre de l'un des deux cercles; il suit de là que si r_1 est le rayon de celui-ci, son expression analytique sera

$$r_1 (\cos\theta_1 + \sqrt{-1} \sin\theta_1)$$

Quant à l'autre, si r_2 est son rayon, et si d est la distance des centres, son expression sera

$$d + r_2 (\cos\theta_2 + \sqrt{-1} \sin\theta_2)$$

Cherchons leur point d'intersection; il faudra pour l'obtenir égaler l'une à l'autre ces deux expressions, ce qui donnera

$$r_1 (\cos \theta_1 + \sqrt{-1} \sin \theta_1) = d + r_2 (\cos \theta_2 + \sqrt{-1} \sin \theta_2)$$

équation de laquelle on tire

$$r_1 \cos \theta_1 = d + r_2 \cos \theta_2$$
$$r_1 \sin \theta_1 = r_2 \sin \theta_2$$

et au moyen de ces deux-ci on déterminera θ_1 et θ_2

Pour y parvenir, faisons la somme de leurs quarrés, il vient

$$r_1^2 = d^2 + 2\,d\,r_2 \cos \theta_2 + r_2^2$$

donc

$$\cos \theta_2 = \frac{(r_1^2 - r_2^2) - d^2}{2\,d\,r_2}$$

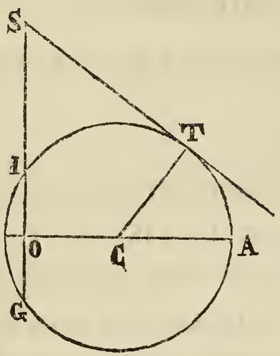
et par suite

$$\cos \theta_1 = \frac{(r_1^2 - r_2^2) + d^2}{2\,d\,r_1}$$

Les angles θ_1 et θ_2 étant donnés par leurs cossinus, on en conclut que le problème a toujours deux solutions, et l'on voit que ces deux solutions seront symétriques, par rapport à la ligne des centres. En conséquence la ligne qui joint les deux points d'intersection est perpendiculaire à la ligne des centres.

Je ne m'arrêterai point à discuter ces valeurs, cette étude rentre dans un mode d'investigation mis tous les jours en usage, et ce que je dois surtout montrer ici, c'est comment nos principes s'appliquent à la recherche des vérités géométriques et quelle voie nouvelle ils ouvrent pour les découvrir; à ce sujet la discussion qui va suivre m'a paru digne de quelque intérêt.

— *Propriété fondamentale des axes radicaux.*



Soit un cercle dont le centre est en C et dont CO est un diamètre ; on a élevé sur ce diamètre une perpendiculaire OI indéfiniment prolongée, et par un point quelconque S de cette perpendiculaire on a mené une tangente au cercle, on demande la longueur ST de cette tangente ?

Soit pris pour ligne de base le diamètre CO et pour origine son point d'intersection O avec la perpendiculaire.

Soient faits pour abréger $CT = r$ et angle $ACT = \theta$: d'après nos principes il faudra que la somme des chemins $OC + CT + TS$ soit égale au chemin OS. Or, le chemin CT a pour expression

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

le chemin TS qui est perpendiculaire à CT aura pour expression

$$TS\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)\sqrt{-1};$$

enfin le chemin OS ou OI + IS sera exprimé par

$$(OI + IS)\sqrt{-1}.$$

Ecrivons maintenant l'égalité ci-dessus mentionnée, il viendra

$$OC + r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) + TS(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)\sqrt{-1}$$
$$= (OI + IS)\sqrt{-1}.$$

De là on déduit les deux relations suivantes

$$OI + IS = r\sin\theta + TS\cos\theta$$
$$-OC = r\cos\theta - TS\sin\theta.$$

Pour obtenir TS, prenons la somme des quarrés, il viendra

$$(OI + IS)^2 + \overline{OC}^2 = r^2 + \overline{TS}^2.$$

Développant le premier membre, remarquant que

$$\overline{OI}^2 + \overline{OC}^2$$

est égal à r^2, supprimant alors cette dernière quantité dans les deux membres, on trouvera définitivement

$$TS^2 = IS\,(IS + 2OI) = IS \times SG.$$

Cette valeur de TS est donc indépendante du rayon du cercle, et tant que IS et SG resteront les mêmes, la longueur de la tangente ne changera pas; de là on conclura que si par les mêmes points I et G on fait passer tant de circonférences qu'on voudra, toutes les tangentes menées d'un même point S de la ligne I G à ces diverses circonférences seront égales entre elles.

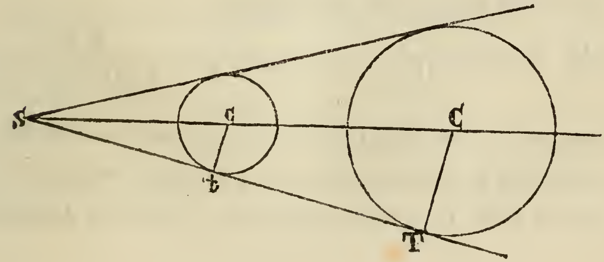
— *Propriété des sécantes menées par un point extérieur.*

A cette première conclusion nous pouvons en ajouter une seconde : en effet, on peut remarquer que non seulement TS ne dépend pas de r, mais qu'il est également indépendant de θ ; de là il résulte que ce que nous avons dit de la droite passant par S et coupant la circonférence en I et G, on pourrait le dire également de toute autre droite passant par S et coupant la circonférence en des points I′ et G′; en prenant le diamètre perpendiculaire à cette ligne pour ligne de base, et leur intersection pour origine, on serait parvenu à la relation

$$\overline{TS}^2 = I'S \times SG'$$

d'où résultent les théorèmes connus en géométrie sur les sécantes au cercle menées par un point extérieur.

— *Tangente commune à deux circonférences.*



Soient C et c les centres des deux circonférences, R et r leurs rayons, T et t, les points de contact de la tangente commune avec chaque circonférence, enfin S l'intersection de la tangente commune avec la ligne des centres.

Nous savons que puisque Tt est une tangente, les deux rayons ct et CT lui seront perpendiculaires, de sorte que relativement à la direction tT, les directions r et R auront pour valeur $\sqrt{-1}$; quant au chemin cC, en désignant par θ l'angle CST, sa direction par rapport à celle de tT sera exprimée par

$$\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta.$$

Cela posé écrivons que le chemin $tc + c\mathrm{C}$ est égal au chemin $t\mathrm{T} + \mathrm{TC}$, cela conduit immédiatement à l'équation suivante dans laquelle d représente la distance des centres :

$$r\sqrt{-1} + d\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = t\mathrm{T} + \mathrm{R}\sqrt{-1},$$

et on en déduit les deux suivantes

$$t\,\mathrm{T} = d\cos\theta$$
$$\mathrm{R} - r = d\sin\theta$$

desquelles on tire sur le champ

$$\overline{t\,\mathrm{T}}^2 = d^2 - (\mathrm{R} - r)^2 \text{ et } \operatorname{tang}\theta = \frac{\mathrm{R} - r}{\sqrt{d^2 + (\mathrm{R} - r)^2}}$$

Nous avons ici implicitement supposé que les directions de r et R marchent dans le même sens, ce qui répond à la tangente extérieure ; pour la tangente intérieure, il suffit de changer le signe de $r\sqrt{-1}$, il viendra donc

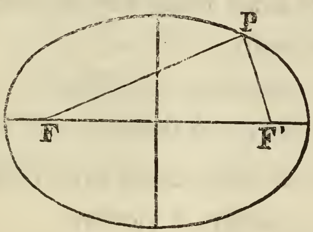
$$\overline{t\,T}^2 = d^2 - (R + r)^2,\ \text{tang}\ \theta = \frac{R+r}{\sqrt{d^2+(R+r)^2}}$$

Je pourrais, comme on voit, multiplier ces citations, mais les exemples que je viens de traiter sont bien suffisants pour donner une idée de la généralité et du mode d'application de nos principes.

J'ajouterai seulement, pour terminer cet objet, quelques détails sur la détermination de l'expression algébrique des sections coniques.

— *Expression algébrique de l'ellipse.*

On sait que l'ellipse jouit de cette propriété que si de ses deux foyers on mène des rayons vecteurs à un même point de la courbe, la somme de ces rayons vecteurs sera constante; cherchons d'après cette propriété son expression.



Soient F et F′ les deux foyers, appelons d la distance qui les sépare, prenons pour origine le point F et pour ligne de base la ligne F F′.

Si P est un point quelconque de la courbe, si on appelle r le rayon vecteur FP, et θ l'angle qu'il fait avec la ligne de base, le point P sera déterminé par l'expression

$$r\,(cos\ \theta + \sqrt{-1}\ sin\ \theta)$$

Mais en cet état, cette expression n'apprend rien de particulier; il faut y remplacer l'indication générale du rayon r, par une valeur particulière qui indique comment, dans la courbe dont nous nous occupons, r varie avec θ. Pour cela, écrivons, en vertu de nos principes les données de la question :

Soit mené au point P le second rayon vecteur F′ P que pour abréger j'appellerai r', et enfin appelons θ' l'angle qu'il fait avec la ligne de base.

Il faudra que le chemin géométrique FF′ + F′P, soit égal au chemin FP, nous écrirons donc

$$r\,(cos\ \theta + \sqrt{-1}\ sin\,\theta) = d + r'\,(cos\ \theta' + \sqrt{-1}\ sin\ \theta')$$

Or, comme la somme $r + r'$ est constante, en appelant s cette constante, il viendra $r' = s - r$, et nous pourrons ainsi remplacer la précédente équation par la suivante :

$$\begin{gathered} r\,(cos\,\theta + \sqrt{-1}\ sin\ \theta) \\ = d + (s - r)\,(cos\,\theta' + \sqrt{-1}\ sin\ \theta') \end{gathered}$$

De là, en égalant séparément le réel au réel et l'imaginaire à l'imaginaire, il viendra

$$\begin{gathered} (s-r)\,cos\ \theta' = r\ cos\,\theta - d \\ (s-r)\ sin\ \theta' = r\ sin\ \theta \end{gathered}$$

Faisant la somme des quarrés, on trouve toutes réductions faites :

$$(s-r)^2 = r^2 - 2\,d\,r \cos\,\theta + d^2$$

Développant le premier membre, supprimant de part et d'autre la quantité commune r^2 et résolvant l'équation par rapport à r, on obtient

$$r = \frac{s^2 - d^2}{2\ (s - d \cos \theta)}$$

L'expression générale d'un point quelconque de l'ellipse sera donc

$$\frac{s^2 - d^2}{2\ (s - d\ \cos \theta)} (\cos \theta + \sqrt{-1}\ \sin \theta)$$

— *Expression algébrique de l'hyperbole.*

Nous ne répèterons pas les calculs à l'aide desquels nous déterminerions l'expression analytique de l'hyperbole, ces calculs sont en tout semblables aux précédents, il suffit au lieu de supposer constante la somme des deux rayons vecteurs, d'écrire que c'est leur différence; de sorte qu'en appelant t cette constante, il faudra remplacer la condition $r + r' = s$ par $r - r' = t$, c'est à dire qu'au lieu de $r' = s - r$ on mettra $r' = r - t$; on voit d'après cela que pour connaître le résultat cherché, il suffira de changer le signe de r et de remplacer $+ s$ par $- t$, cela donne immédiatement

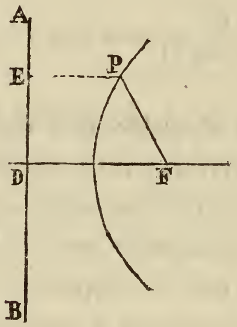
$$r = \frac{t^2 - d^2}{2\ (t + d\ \cos \theta)}$$

D'où il suit que l'expression analytique d'un point quelconque de l'hyperbole sera

$$\frac{t^2 - d^2}{2\ (t + d \cos \theta)} (\cos \theta + \sqrt{-1}\ \sin \theta)$$

— *Expression algébrique de la parabole.*

Enfin, pour la parabole, nous la déterminerons en vertu de cette propriété que chacun de ses points est à égale distance d'un point fixe et d'une droite fixe donnés.



Soit F le point donné, et AB la droite donnée; du point F abaissons sur AB une perpendiculaire FD, et prenons le point D pour origine et la droite FD pour ligne de base, d'après la propriété que nous venons d'énoncer, il faudra que si du point P on mène 1° Le rayon vecteur FP; 2° La perpendiculaire PE, on ait PE = PF.

Cela posé, désignons par r la longueur commune de PF et PE, et par θ l'angle de PF avec la ligne de base, et écrivons que le chemin DF + FP est égal au chemin DE + EP. Nous aurons, en désignant par d la distance connue DF, et par y la hauteur inconnue DE

$$d+r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)=y\sqrt{-1}+r$$

d'où résulteront les deux équations suivantes :

$$d+r\cos\theta=r$$
$$r\sin\theta=y$$

qui donnent immédiatement.

$$r=\frac{d}{1-\cos\theta}\qquad y=\frac{d\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

en conséquence, l'expression algébrique de la parabole sera

$$\frac{d}{1-\cos\theta}(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta).$$

— *Conclusion.*

Je pourrais pousser plus loin encore ce genre d'investigations, car il est indistinctement applicable à toutes les considérations de géométrie ; mais le lecteur jugera que les détails dans lesquels je viens d'entrer sont plus que suffisants pour montrer que le but que je m'étais proposé est atteint. La conformité des résultats que j'obtiens par ce nouveau mode d'investigation auquel mes recherches m'ont conduit, avec les résultats déjà obtenus par les procédés ordinairement mis en usage, prouve d'une manière incontestable que mes nouvelles doctrines sont l'expression de la vérité, et que les considérations auxquelles je me suis livré, soit pour la recherche soit pour l'établissement de ces doctrines, sont une juste appréciation des rapports qui doivent exister entre les faits naturels et la langue algébrique.

On vient de voir, par la série d'applications que j'ai présentée dans ce chapitre, la portée que ces doctrines doivent exercer sur l'enseignement de la théorie des fonctions circulaires qui jusqu'à ce jour n'a été qu'abstraite et analytique et que j'espère avoir fait passer à tout jamais dans le domaine concret. On a vu également comment ces doctrines créent une voie féconde pour toutes les recherches de géométrie; en voilà donc assez maintenant pour que leur importance puisse être appréciée, pour que cette grande classification de la science du calcul en deux parties bien distinctes, l'une s'appliquant à la supputation de la grandeur; l'autre à celle de l'ordre et de la situation des choses, soit enfin introduite dans le domaine de l'enseignement, non plus comme un accident, et comme utile seulement dans quelques cas isolés, mais comme base principale, comme exerçant une influence nécessaire, indispensable dans la discussion de toutes les questions que la science du calcul est appelée à résoudre.

— *Travaux ulterieurs.*

Notre tâche est cependant loin d'être remplie; car si nous avons découvert l'interprétation d'un genre d'expressions incomprises jusqu'à ce jour, si nous avons montré que ces expressions doivent devenir entre les mains des géomètres un instrument précieux pour toutes leurs recherches, il nous reste encore à faire voir que ces considérations nouvelles, qui s'appliquent non seulement aux longueurs et à leurs directions, mais à toutes les quantités, sont la condamnation de quelques doctrines passées en force de chose jugée, et que, dans l'algèbre proprement dite, elles sont appelées à la fois à éclairer ce qu'il y a d'obscur, à détruire ce qu'il y a de faux; il nous reste aussi à montrer comment elles donnent à la métaphysique du calcul infinitésimal cette clarté qui lui manque, cette précision qu'on a tant cherchée, mais qu'on n'a pu encore obtenir; à développer enfin les grands avantages qu'elles apportent dans toutes les applications de la science du calcul à l'étude des faits naturels. L'exposition de ces nouvelles recherches forme la matière de la seconde partie de cet ouvrage.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE II.

Des nombres et des opérations arithmétiques, sous le point de vue abstrait.

Section première. — De la véritable nature du nombre abstrait.

Section deuxième. — Etudes sur l'addition et sur la soustraction.

Section troisième. — Etudes sur la multiplication et sur la division.

Section quatrième. — Etudes sur l'élévation aux puissances et l'extraction des racines.

CHAPITRE III.

Etudes sur les modules.

Section première. — De la longueur et de ses différents états, sous le point de vue de grandeur ou de petitesse.

Section deuxième. — De la longueur et de ses différents états, sous le point de vue de la direction.

CHAPITRE IV.

Examen d'une théorie ayant pour but l'interprétation géométrique des symboles imaginaires.

CHAPITRE V.

Applications des doctrines exposées dans les chapitres précédents à la théorie des fonctions circulaires et à la géométrie.

Section première. — Application à la théorie des fonctions circulaires.

Section deuxième. — Applications à la géométrie élémentaire.

FIN

PLURIEL.

Les mêmes fils.	Les mêmes fortunes.	Les mêmes cosses.
N. οἱ αὐτοὶ υἱοί, etc.	αἱ αὐταί οὐσίαι, etc.	τὰ αὐτὰ κεράτια, etc,

DUEL.

Les mêmes fils (deux).	Les mêmes fortunes (deux).	Les mêmes cosses. (deux).
N. τὼ αὐτὼ υἱώ, etc.	τὰ αὐτὰ οὐσία, etc.	τὼ αὐτὼ κερατίω, etc.

—

§ 10.

Ὁ υἱὸς οὗτος.

En combinant en un seu mot l'article et le pronom αὐτός, on a fait οὗτος, τη, τοῦτο, *ce*, *cette*, *celui-ci*, *celle-ci*, e *ci*. Il désigne les objets présents ou oisins :

SINGULIER.

N.	οὗτος,	αὕτη,	τοῦτο.
G.	τούτου,	ταύτης,	τούτου.
D.	τούτῳ,	ταύτῃ,	τούτῳ.
A.	τοῦτον,	ταύτην,	τοῦτο

PLURIEL.

N.	οὗτοι,	αὗται,	ταῦτα.
G.	τούτων, pour les trois genres.		
D.	τούτοις,	ταύταις,	τούτοις.
A.	τούτους,	ταύτας,	ταῦτα.

DUEL.

N. A.	τούτω,	ταύτα,	τούτω.
G. D.	τούτοιν,	ταύταιν,	τούτοιν.

EXERCICES

SUR ὁ υἱὸς οὗτος, hic filius.

L'Elève doit s'exercer à la traduction alternative à tous cas et tous nombres de :

SINGULIER.

Le fils celui-ci.	La fortune celle-ci.	La cosse celle-ci.
(ce fils-ci).	(cette fortune-ci)	(cette cosse-ci)

enfin la troisième personne est celle dont on parle, elle est désignée par le mot *il* ou *elle*. Les pronoms personnels sont les mots qui spécifient ces trois personnes.

Ces personnes sont en grec ἐγώ, *je* ou *moi*; σύ, *tu*, *toi*; αὐτός, ή, ό, *lui*, *elle*, et οὗ, *de soi*.

Première Personne.

SINGULIER.

N.	ἐγώ,	je, moi.
G.	ἐμοῦ, μοῦ,	de moi.
D.	ἐμοί, μοί,	à moi.
A.	ἐμέ, μέ,	me, moi.

PLURIEL.

N.	ἡμεῖς,	nous.
G.	ἡμῶν,	de nous.
D.	ἡμῖν,	à nous.
A.	ἡμᾶς,	nous.

DUEL.

N. A.	νῶϊ,	νῴ ou νώ, nous (deux).
G. D.	νῶϊν,	νῷν, de nous (deux), à nous (deux).

Deuxième Personne.

SINGULIER.

N. V.	σύ,	tu, toi.
G.	σοῦ,	de toi.

G.	ὑμῶν,	de vou
D.	ὑμῖν,	à vous.
A.	ὑμᾶς,	vous.

DUEL.

N. A. V.	σφῶϊ, σφῴ, σφώ
G. D.	σφῶϊν, σφῷν, de vous

Troisième Person

L'emploi de ce pronom grec par le pronom démor ή, ό. Voir § 9. Toutefois, a αὐτός signifie non pas s mais *lui-même*. La troisiè a, en outre, le pronom ré

SINGULIER.

G.	οὗ,	de so
D.	οἷ,	se, à
A.	ἕ,	se, sc

PLURIEL.

N.	σφεῖς,	eux-
G.	σφῶν,	d'eux
D.	σφίσι, σφί, σφίν,	à eu
A.	σφᾶς,	se, eu

DUEL.

N. A. σφῶε, σφώ, G. D. σφω

DATE DUE	BORROWER'S NAME
June 13 - Sept 74	
9/25/74	T. S.